



Bureau de Paris
18, boulevard Montmartre
75009 Paris
Tel : (33) 1 42 77 76 17
Internet : www.sia-conseil.com

conseil

Paris | Bruxelles | Roma | Milano | Casablanca

ORSA

Paris, Décembre 2014

Vos contacts

Marc Juillard
Manager
Tel : +33 (0) 6 23 66 46 40
Mail : marc.juillard@sia-partners.com

Contexte

L'article 45 de la directive Solvabilité II dispose que dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance procède à une évaluation interne de ses risques et de sa solvabilité. Cette évaluation porte notamment sur les éléments suivants :

- le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ;
- le respect permanent des exigences de capital;
- L'analyse de l'adéquation du profil de risque avec la formule standard.

Au-delà de l'analyse du profil de risque, l'ORSA est donc constitué de deux composantes :

- ❑ Une composante pluri annuelle : solvabilité pluri annuelle de l'assureur sur la base d'une vision incluant le plan stratégique retenant des hypothèses adaptées aux spécificités de l'entreprise.
- ❑ Conformité, de manière permanente, avec l'exigence de capital :

Contrainte

- Nécessite d'estimer rapidement la déformation du ratio de couverture
- Seule une estimation est requise

Dans le cas d'interactions actif-passif, les proxies sont souvent préférables afin de réduire les temps de calculs.

1 Les Grands Principes
section

2 Méthode LSMC
section

3 Modèle par revalorisation analytique
section

4 Modèle Non-Vie
section

5 Exemple de modèle par stress test
section



Les Grands Principes

Les Grands Principes

Quelques Définitions

Risk capacity
(capacité de
risque)



Montant maximal de risque que la compagnie est capable de supporter.

Risk profile
(profil de
risque)



Niveau de risque auquel est soumise la compagnie en date de calcul. Peut être appréhendé de façon qualitative et quantitative sur la base des métriques retenues pour l'appétence au risque.

Risk appetite
(appétit au
risque)



Niveau de risque agrégé qu'une entreprise accepte de prendre en vue de la poursuite de son activité et afin d'atteindre ses objectifs stratégiques.

Risk tolerance
(tolérance au
risque)



Niveau maximal de risque qui peut être pris sur un risk profile. Répartition à un niveau plus fin de l'appétence au risque.

Risk limit
(limite de
risque)



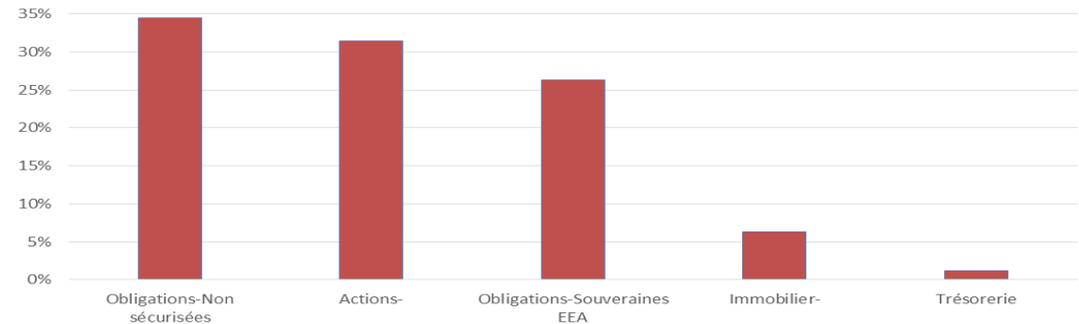
Traduction opérationnelle de la *risk tolerance*. Ces limites sont spécifiques au processus auquel elles participent.

Les Grands Principes

Exemple retenu

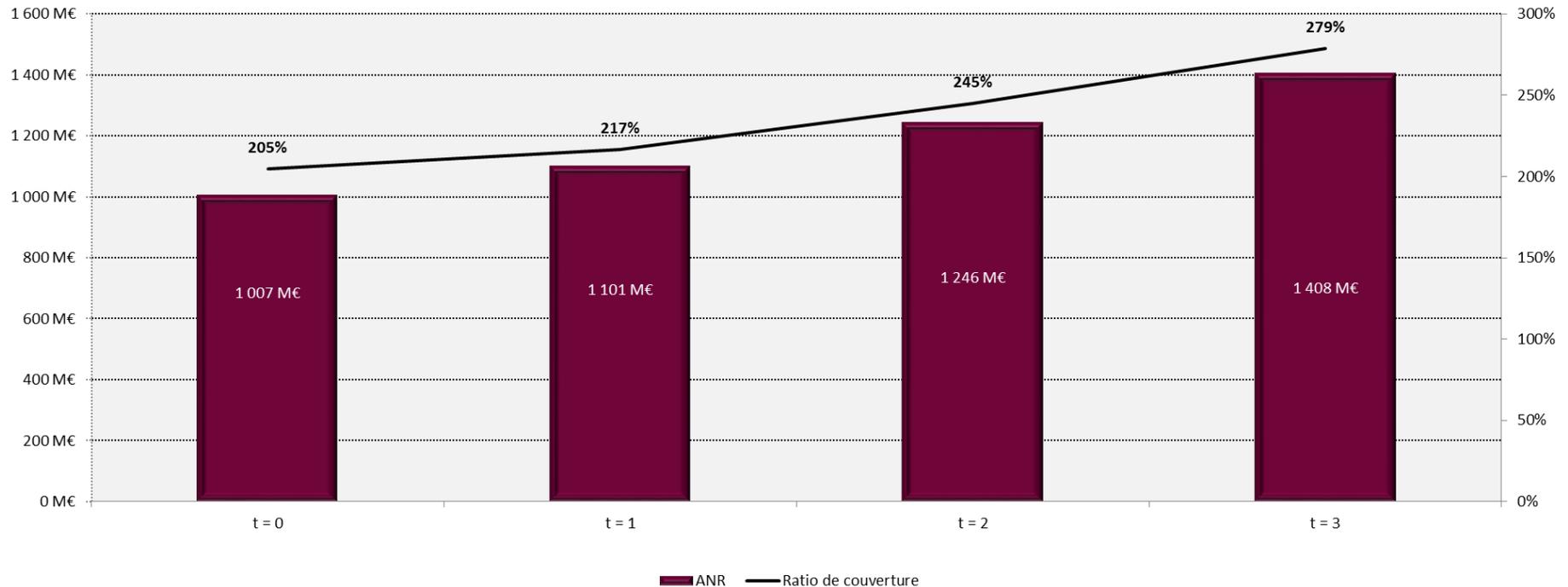
On considère par la suite une société commercialisant deux contrats d'assurance non vie dont les caractéristiques sont les suivantes :

LoB	RC Automobile	RC Générale
Volume de cotisations	600 M	80 M
Ratio combiné	90%	90%
SCR Prime/Réserve	96 187 161	27 528 028



En t=0 la compagnie présente un ratio de couverture de 205%. Son plan stratégique consiste à conserver son allocation stratégique et à maintenir son volume de cotisation. En vision central ceci conduit à une amélioration de la richesse et du ratio de couverture :

ANR, ANR cible et ratio de couverture en scénario central



Les Grands Principes

Risk Capacity

A capacité maximale de prise de risque correspond au niveau maximal de risque que la structure peut supporter avant d'être en ruine. Cette dernière est multiple dans le sens ou elle dépend :

- De l'horizon de projection retenu
- De la définition de ruine retenue (ruine économique ou ruine comptable)
- Du niveau de stress retenu lors du calcul.

La compagnie retient un scénario de type crise souveraines qui prévoit :

- *Chute des indices boursiers de 10% chaque année*
- *Augmentation des spreads souverains et corporates ainsi que la courbe des taux swaps (le 10 ans dépassant les 6%).*
- *Absence de rendement sur le parc immobilier.*
- *Une hausse de 17% des ratios combinés*

En retenant un horizon de projection de 3 ans, le profil de risque de la compagnie couplé au scénario de stress conduit à un ratio de couverture de 141%. Diverses possibilités sont alors envisageables pour exprimer le risque maximal que la compagnie peut supporter :

Evolution	Actif	Passif
Augmentation du volume de cotisation	Inchangé	Augmentation de 20% le volume de cotisation
Approche Mixte	Augmentation de 10% de la poche action	Augmentation de 10% le volume de cotisation



La connaissance de la capacité maximale de prise de risque permettra par la suite de mesurer la dangerosité du plan stratégique

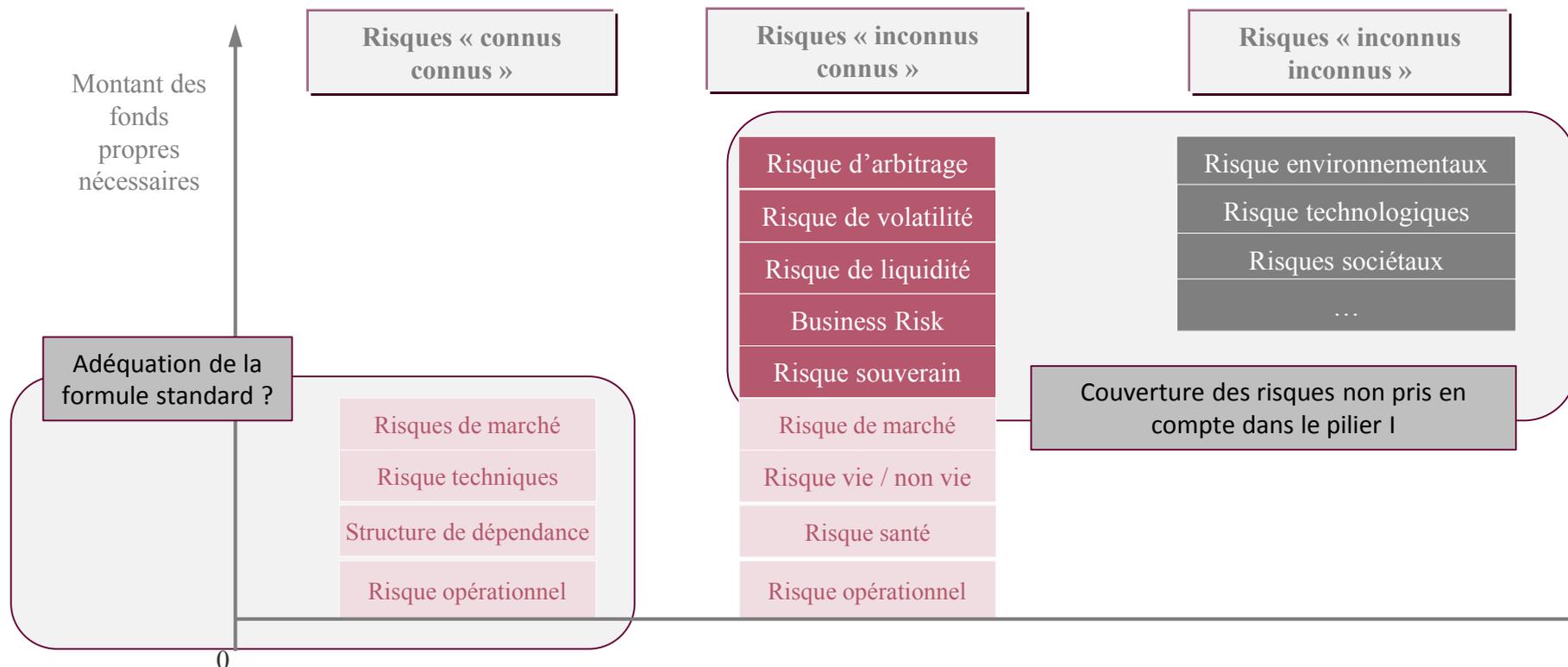
Les Grands Principes

Profil de risque de la structure



L'ancien secrétaire d'Etat américain à la Défense, Donald Rumsfeld, est sans doute un personnage controversé, mais personne ne lui reprochera son manque d'intelligence. L'une de ses plus célèbres citations, simpliste à première vue, est en fait d'une rare profondeur :

«Il y a des choses connues que nous connaissons: ce sont les choses dont nous savons que nous les savons. Il y a des inconnues connues; c'est-à-dire des choses dont nous savons que nous les ignorons. Mais il y a aussi des inconnues inconnues: ce sont les choses dont nous ne savons pas que nous les ignorons.»



Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : exemple de non adéquation de la formule standard : le risque de taux

La structure du portefeuille obligataire de l'assureur peut conduire à retenir des scénarios de stress des taux différents de celui implémenté sous la formule standard.

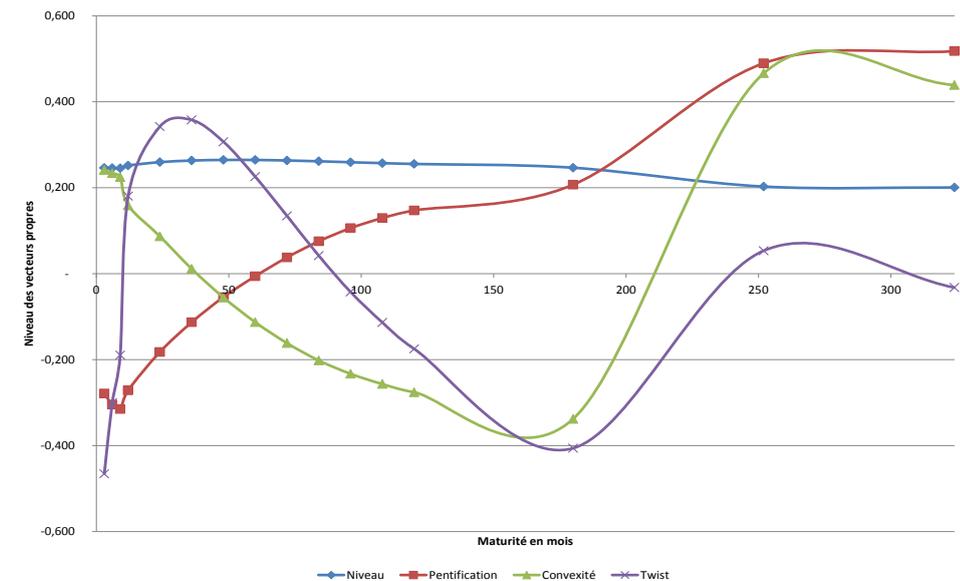
Problématique

Si les différentes maturités de la courbe des taux n'évoluent pas indépendamment les unes des autres, l'analyse de la déformation de la structure par termes des taux permet de mettre en évidence quelques mouvements caractéristiques.

Dynamique de la structure par termes des taux

Sur la base d'un historique journalier couvrant la période 2000 – 2013, on observe que :

- 99 % de la dynamique de la structure par termes des taux d'intérêts est expliqué par 3 vecteurs propres : translation, pentification, convexité.
- les différentes études de décomposition de la dynamique des courbes des taux par le biais de l'ACP ont pu conclure à une stabilité temporelle et géographique de cette analyse (Le Bellac et Viricel [2012]).
- une analyse de la corrélation historique des différents taux zéro-coupon montre que les taux courts terme et long terme ne sont pas parfaitement corrélés (des niveaux de 60% à 70% sont constatés).
- Si les différentes maturités de la courbe des taux n'évoluent pas indépendamment les unes des autres, l'analyse de la déformation de la structure par termes des taux permet de mettre en évidence quelques mouvements caractéristiques



Si le calibrage effectué par l'EIOPA au niveau du scénario de stress de taux intègre bien ces 4 facteurs de risques, rien n'indique que la sensibilité du BOF de la compagnie est identique à celle de la structure par termes des taux swaps.

Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : exemple de non adéquation de la formule standard : le risque de taux

Illustration : BOF a faible duration

Si la duration* constitue la mesure la plus courante de l'exposition d'un portefeuille aux variations de taux d'intérêt, on notera que cette approche n'est valable que pour de faible mouvement de taux. Dans le cas de fortes variations, il est nécessaire de compléter cette approche par une mesure de convexité.

$$C = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i^2 e^{-y t_i}}{P} \quad D = \sum_{i=1}^n t_i \left(\frac{c_i e^{-y t_i}}{P} \right)$$

$$\begin{cases} dP(r) = -\frac{D}{1+r} \times P(r) \times dr + \frac{1}{2} \times P(r) \times C \times (dr)^2 \\ P(r + \Delta r) = P(r) \left(1 - \frac{D}{1+r} \times \Delta r + \frac{1}{2} \times C \times (\Delta r)^2 \right) \end{cases}$$

(*) Duration = durée moyenne que doit patienter un investisseur avant de recevoir les paiements de l'actifs financier.

On considère une compagnie d'assurance non vie dont le BOF présente une duration de 0,05

Maturité	1	2	3	4	5	6	7
Flux	20	60	90	120	(200)	(210)	200
Taux Swap	1,9%	2,0%	2,1%	2,3%	2,5%	2,9%	3,2%

	Fair Value	Duration
Actif	432	5
Passif	354	5,5
BOF	78	0,05

A ce titre la compagnie semble très faiblement exposée au risque de taux. En effet, l'application des chocs de hausse ou de baisse de la formule standard conduit aux résultats suivants :

	Fair Value	Choc Up	Choc Down
Actif	432	405	456
Passif	354	328	377
BOF	78	77	79

Cependant, la faiblesse de cette duration étant la conséquence d'un équilibre entre la duration de l'actif et la duration du passif, un choc moins impacté par un mouvement de translation peut s'avérer dangereux pour la compagnie.

Dans ce cas, une approche par Delta permettrait de mettre en évidence le vrai risque de taux du portefeuille.

Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : exemple de non adéquation de la formule standard : le risque de taux

Mouvements plus complexes de la gamme des taux

Les approches par durations se limitent à mesurer le risque du BOF à un mouvement de translation de la structure par termes des taux. Cependant ces mouvements ne représentent que 90% de la volatilité du risque de taux.

Cette approche peut donc être complétée par deux calculs :

- La duration partielle (Reitano [1992]) qui mesure la variation du portefeuille suite à une évolution du taux de maturité i .

$$D_i = \frac{t_i \times c_i \times e^{-y t_i}}{P} \quad P(r + \Delta r_i) = P(r) \left(1 - \frac{D_i}{1+r} \times \Delta r_i \right)$$

- Les Deltas. Le Delta associé au $i^{\text{ème}}$ taux mesure la variation de la valeur du portefeuille dans le cas d'une hausse de 1bp du taux de maturité i .

Maturité	1	2	3	4	5	6	7
Flux	20	60	90	120	(200)	(210)	200
Duration partielle	0,25	1,48	3,25	5,61	(11,30)	(13,63)	14,41
Delta	(0,002)	(0,012)	(0,025)	(0,044)	0,088	0,106	(0,113)

Ainsi une augmentation de 1bp de la valeur du taux à un an entrainerai une perte de 0,002 unité (soit 0,3% des fonds propres). Un mouvement de convexité autour du taux 4 ans de +1bp pour les faibles duration et -1bp pour les fortes durations entrainerait une perte de 0,15% de la valeur des fonds propres (un mouvement de 1% entrainerait donc une perte de 1,5% de la valeur des fonds propres).

Il est à noter que le delta du portefeuille obligataire (ou la duration partielle) constitue un bon indicateur de suivi du risque de taux (elle permet ainsi de suivre les *gaps management*).

Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : exemple de non adéquation de la formule standard : le risque de taux

Le suivi des deltas

La complexité du suivi des deltas se situe au niveau du nombre de delta à calculer (un pour chaque maturité de la courbe des taux ou il y a une exposition). Ceci renvoie à la problématique du nombre de variables aléatoires à implémenter pour suivre le risque de taux : normalement une variable aléatoire par maturité devrait être retenue mais ce nombre peut être réduit à 4 au travers d'une ACP.

Pour ce faire on considère un historique correspondant à la période 2000 – 2011 sur laquelle on applique une analyse en composante principale.

Maturité	Niveau	Pentification	Convexité	Vecteur propre	Part de variance expliqué	Variance cumulée	Ecart type
3	0,246	- 0,279	0,241	Niveau	88,06%	88,06%	2,69
6	0,246	- 0,305	0,234	Pentification	6,80%	94,86%	0,71
9	0,245	- 0,315	0,225	Convexité	4,56%	99,42%	0,47
12	0,252	- 0,272	0,159	Twist	0,46%	99,88%	0,11
24	0,260	- 0,182	0,087				
36	0,263	- 0,113	0,011				
48	0,265	- 0,054	0,055				
60	0,265	- 0,006	0,113				
72	0,263	0,038	0,162				
84	0,262	0,075	0,202				
96	0,259	0,106	0,233				
108	0,257	0,129	0,257				
120	0,255	0,147	0,276				
180	0,247	0,207	0,338				
252	0,203	0,490	0,466				
324	0,201	0,518	0,439				

Le Delta de l'exposition au trois premier facteurs de risque est alors :

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	Delta
Delta	(0,002)	(0,012)	(0,025)	(0,044)	0,088	0,106	(0,113)	
Saturation Niveau	0,252	0,260	0,263	0,265	0,265	0,263	0,262	0,02%
Saturation pentification	- 0,272	- 0,182	- 0,113	- 0,054	- 0,006	0,038	0,075	0,29%
Saturation convexité	0,159	0,087	0,011	- 0,055	- 0,113	- 0,162	- 0,202	-0,4%

Aussi le portefeuille est 15 fois plus sensible à un mouvement de pentification qu'à un mouvement de niveau et 20 fois plus à un mouvement de convexité.

Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : prise en compte du risque souverain

La formule standard n'intégrant pas de besoin de fonds propres pour le risque de crédit associé aux obligations souveraines EAA, un « add on » pilier 2 (mais pas pilier 1) doit être calculé.

Problématique

Un modèle ad hoc doit être mis en place. On se tourne alors vers les modèles de risque de crédit.

Proposition de modèle

Une méthode pragmatique peut consister à appliquer la formule définie et calibrée par l'EIOPA sous la formule standard. Cependant, et de la même façon que les obligations d'entreprises, les obligations sécurisées et les dérivés de crédit ne se voient pas appliquer les mêmes coefficients, un re-paramétrage de la formule standard s'avère nécessaire. Ce reparamétrage peut être effectué à l'aide d'un modèle de crédit.

Etape 1

Mise en place d'un modèle de crédit permettant de calculer en 0 le prix d'une obligation risquée

Le modèle mis en place dépendra du niveau de rating de l'obligation risquée

Etape 2

Simulation de la distribution des ratings dans un an

Le changement de rating est effectué à l'aide des matrices de passage fournies par les agences de notations. Elles présentent l'intérêt de renseigner des probabilités historiques (qui est l'univers à retenir pour cette étape).

Etape 3

Calcul de la distribution des prix de marché dans un an

Pour chaque rating simulé lors de la deuxième étape, on applique la fonctionnelle calibrée lors de la 1^{ère} étape pour transformer le changement de notation en changement de la valeur de marché du titre obligataire.

Il reste à calibrer un modèle de risque de crédit

Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : prise en compte du risque souverain

Le risque de crédit est le risque de perte sur une créance (défaut de l'emprunteur)

Le *spread* de crédit est le rendement supplémentaire demandé par le marché pour la prise de risque de crédit

A Quels événements peuvent être source d'un risque de crédit ?

Défaut

Changement de notation

Augmentation du spread

Attention : les *spreads* observables sur les marchés intègrent également du risque de liquidité

B Quel type de modèle peut on retenir dans un cadre risque neutre

Les modèles structurels

- Basés sur la théorie des options et modélise la structure financière de l'émetteur
- Modèles privilégiés par les banques afin de modéliser le risque de *spread* (modèle KMV par exemple).
- Très complexe et utilisable que dans une optique de très court terme.

ou

Les modèles à intensité

- Représentent l'évolution du prix des actifs risqués sur la base de processus affectés par des sauts exogènes à la structure même de la compagnie.
- Divers modèles sont applicables :
 - Modèles à changement de rating (mais ne modélisent pas les augmentations de *spread*).
 - Modèles inspirés des modèles de taux : le meilleur compromis étant alors le modèle LMN



Le modèle Longstaff, Mithal et Neis fait parti des références de place

Les Grands Principes

Profil de risque de la structure : prise en compte du risque souverain

A Prise en compte du risque moyen

En notant Q^* la probabilité risque neutre de non défaut d'une obligation et w le taux de recouvrement, le prix d'un zéro coupon *corporate* est :

$$ZC^{corporate}(0, T) = Q^*(T) \times P(0, T) + (1 - Q^*(T)) \times w \times P(0, T) = P(0, T) \times (Q^*(T) + (1 - Q^*(T)) \times w)$$

Equation cependant simpliste dans le sens ou elle prévoit une probabilité de défaut constante

B Prise en compte de la volatilité du risque de crédit : le modèle LMN

Le modèle LMN établit un lien entre la probabilité de défaut, le spread et le risque de liquidité en modélisant :

- l'intensité du risque de défaut sur la base d'un processus de retour à la moyenne de type CIR : $d\lambda_t = a(b - \lambda_t)dt + \sigma_t \sqrt{\lambda_t} dW_\lambda(t)$
- Le risque de liquidité sur la base d'un bruit blanc : $d\gamma_t = \eta dW_\gamma(t)$

La probabilité de « survie » de l'obligation risquée étant : $Q^*(t) = E^Q \left[\exp \left(- \int_0^t \lambda_u du \right) \right]$

$P^{corporate}(c, \omega, T) =$	$E^Q \left[c \int_0^T \exp \left(- \int_0^\tau (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) d\tau \right]$	Coupons	$E^Q \left[c \int_0^T \exp \left(- \int_0^\tau (r_s) ds \right) d\tau \right]$	$= P^{SansRisque}(c, T)$
	$+ E^Q \left[\exp \left(- \int_0^T (r_\tau + \lambda_\tau + \gamma_\tau) d\tau \right) \right]$	Nominal	$+ E^Q \left[\exp \left(- \int_0^T (r_\tau) d\tau \right) \right]$	
	$+ E^Q \left[w \int_0^T \lambda_\tau \exp \left(- \int_0^\tau (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) d\tau \right]$	défaut	$+0$	



Le modèle LMN ne modifie pas la capacité du modèle de taux à exprimer les prix par formule fermées.

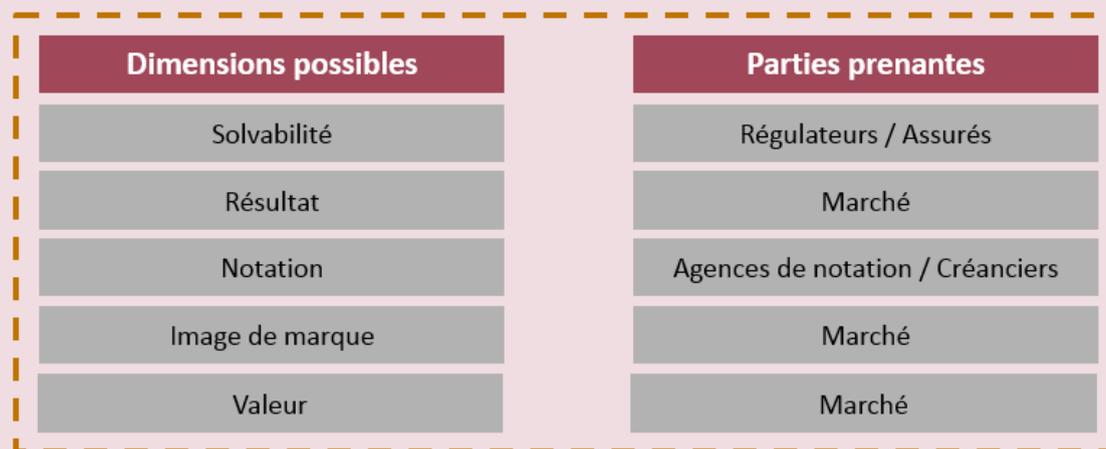
Les Grands Principes

Risk Appetite

Risk
appetite

Les grands principes :

- L'appétit pour le risque découle et interagit avec la stratégie de l'entreprise.
- Il s'exprime à l'aide d'un indicateur « rendement – risque » macro, dont le niveau est fixé par le Conseil d'Administration.
- Doit prendre en compte l'ensemble des dimensions stratégiques (mais agrégées) de l'entreprise (en retenant pour des raisons pratiques peu de dimensions).



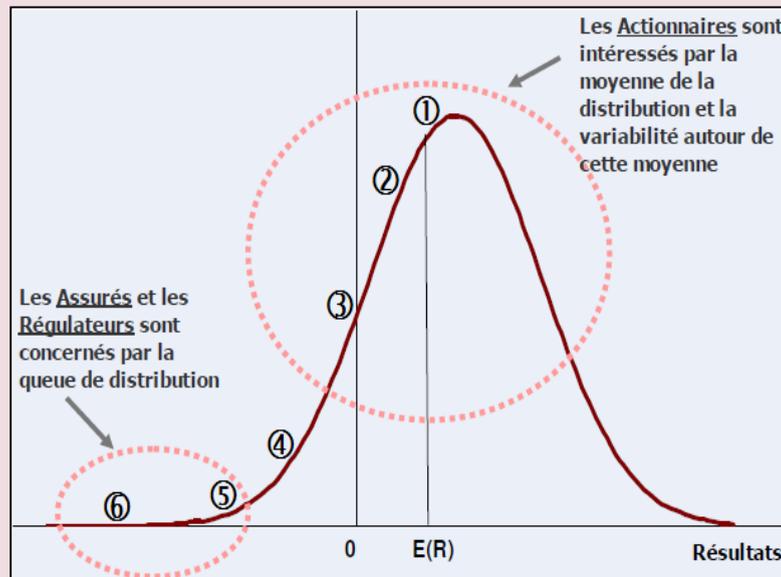
Une fois les dimensions définies, il est nécessaire de fixer les mesures de risque qui seront retenues afin de quantifier le risque associé à chaque dimension. Ces mesures doivent être intelligibles par l'ensemble des parties prenantes et pouvoir se ventiler par la suite par catégorie de risque (ex : module de risque de la formule standard).

Résultat	Valeur	Solvabilité	Notation
▪ Probabilité d'être en deçà d'un certain seuil	▪ Probabilité d'avoir un retour sur capital inférieur à x%	▪ Avoir un SCR en deçà d'une certaine valeur dans x% des cas .	▪ Bénéficier d'une certaine notation cible dans x% des cas.

Les Grands Principes

Risk Appetite – Le niveau de confiance

- La compagnie doit définir l'horizon du risque pour chaque dimension de l'appétence au risque retenue (par exemple, pour la dimension résultat elle peut choisir un horizon plus court que le plan stratégique).
- Elle doit ensuite définir le niveau de confiance qu'elle juge acceptable.
- Ces deux notions sont in fine liées : plus on augmente l'horizon, plus l'incertitude est forte et les niveaux de confiance devront être diminués.



- 1= résultat non atteint
- 2= alerte sur les résultats pour le marché
- 3= perte sur l'année
- 4= rating sous surveillance
- 5= dégradation significative du rating
- 6= intervention du régulateur

Global Corporate Cumulative Average Default Rates (1981 - 2008) (%)

	Horizon (années)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0,00	0,00	0,09	0,18	0,27	0,37	0,40	0,47	0,51	0,55
AA	0,03	0,08	0,14	0,25	0,34	0,45	0,56	0,65	0,73	0,83
A	0,08	0,20	0,34	0,52	0,72	0,95	1,21	1,45	1,69	1,94
BBB	0,24	0,68	1,17	1,79	2,43	3,06	3,59	4,12	4,63	5,16

Source : S&P "Default, Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions" April 2009

Une fois défini :

- Le plan stratégique
- Le profil de risque de la compagnie (et notamment les risques majeurs)
- Le niveau de confiance retenu (i.e l'intensité des stress qui seront joués)

Il reste à construire les scénarios sur lesquels sera mesuré le respect de l'appétence.

Risk
appetite

Les Grands Principes

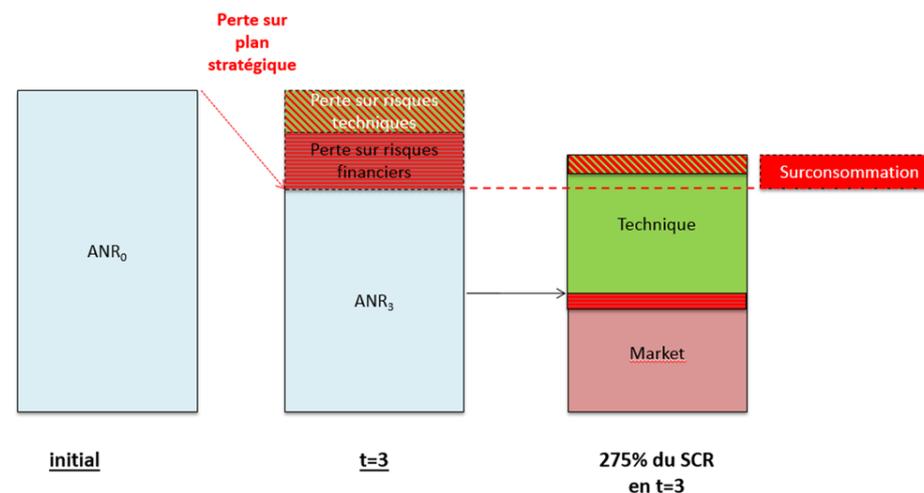
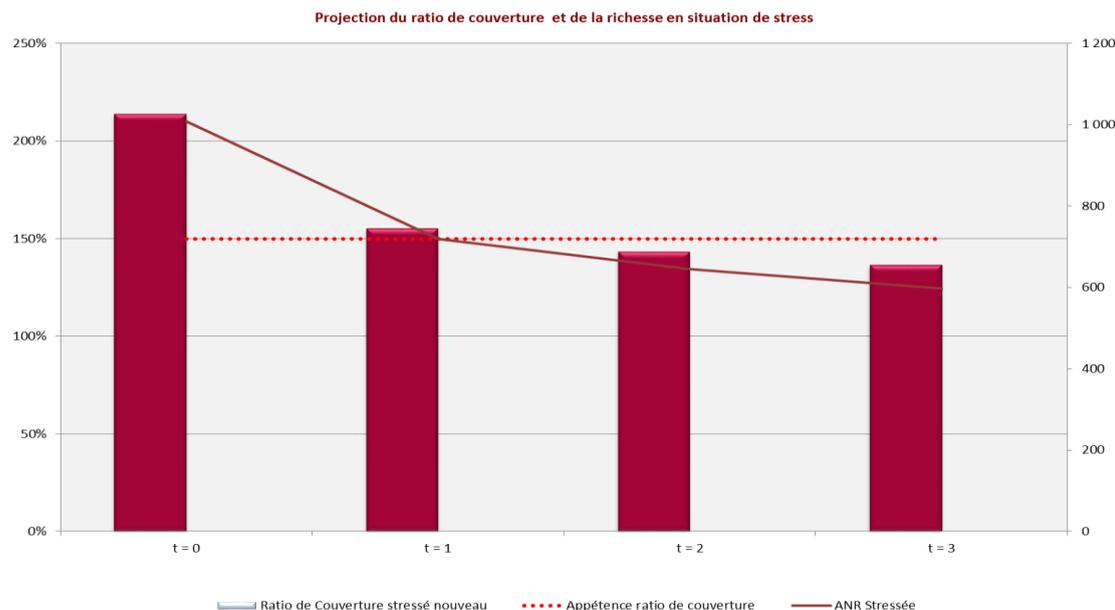
Risk Appetite – Respect de l'appétence

Partant de son plan stratégique et du scénario de stress, la compagnie projette l'évolution de son ratio de couverture. **Ce dernier s'avère alors inférieur à son appétence et fait apparaître un manque de 41 M€.**

Il est à noter que ceci ne revient pas à considérer que les fonds propres initiaux présentent un manque de 41 M€. En effet, il faut tenir compte de l'effet d'escompte ainsi que de la prise de risque qui sera effectuée sur ces 41 M€ (une augmentation de capital investie en action ne serait pas suffisante).

La 1^{ère} étape, en amont de la correction du plan stratégique, consiste à analyser les raisons de cette surconsommation de fonds propres.

	Actif	Passif	Total	% FP 0
Baisse sur les fonds propres	270	108	378	38%
Besoin de fonds propres	167	492	658	66%
Consommation Fonds propres	437	600	1037	104%
% FP 0	44%	60%	104%	s.o.



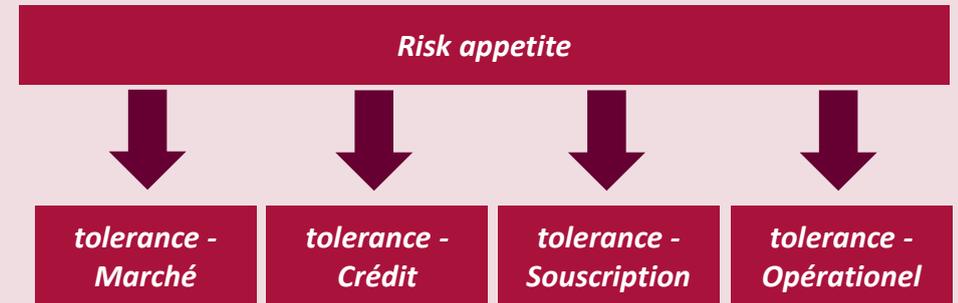
Les Grands Principes

Tolérance aux risques

Risk tolerance

Il est nécessaire de traduire de manière effective la politique d'appétence pour le risque de l'entité.

- Il faut définir l'allocation de risque global sous la forme de catégories de risques.
- L'énoncé des préférences de risque :
 - doit être en ligne avec le plan stratégique ;
 - met en avant les préférences des *managers* ;
 - attribue une capacité de prise de risque à chaque preneur de risque.



Complexe et subjective, cette étape du processus conduit la compagnie à ventiler son Besoin Global de Solvabilité (ainsi que son capital libre) entre ses différentes sources de risques sur la base d'une mesure d'allocation du capital. Cohérente avec les objectifs de développements stratégiques elle permet d'attribuer les bénéfices de diversification entre les différents propriétaires de risques et participe aux mesures de performances internes.

Si diverses méthodes sont envisageables, cette étape demeure avant tout une décision stratégique :

- Méthode proportionnelle ;
- Méthode des marginales ;
- Méthode de Shapley ;
- Méthode d'Euler.

Application

Méthodologies d'allocation de capital (1/4)

Il existe trois grandes familles de méthodes d'allocation de capital

Approche proportionnelle

Méthodologie

Cette méthode consiste à allouer une charge globale sur la base du montant de charge marginal relatif à chaque segment de risque.

En notant :

- $\rho(X)$ la charge globale considéré
- $\rho(X_i)$ la charge relative au segment de risque i

L'application de la méthode des marginales conduit à l'allocation suivante :

$$\rho^{proportionnelle}(X_i|X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_i \rho(X_i)} \times \rho(X)$$

Exemple

- Cas d'un groupe constitué de deux entités A et B
- Besoins en Fonds propres des entités solo :
 - Entité A solo : 100
 - Entité B solo : 150
 - Groupe : 200 (soit un bénéfice de diversification de 50).

L'application de la méthode proportionnelle conduit à allouer :

- 40% [$100/(100+150)$] du capital à l'entité A
- 60% à l'entité B.

Avantages

- Simple à mettre en œuvre

Inconvénients

- Ne prend pas correctement en compte les bénéfices de diversification

Application

Méthodologies d'allocation de capital (2/4)

Constituant un bon compromis « complexité – bonnes propriétés », la méthode des marginales semble remporter les faveurs du marché.

Approche marginale/incrémentale

Méthodologie

La méthode incrémentale permet d'allouer un charge globale selon l'impact marginal de chacun des segments de risque sur cette charge. Il s'agit donc d'une approche par sensibilité.

En notant :

- $\rho(X)$ le besoin de capital global ;
- $\rho(X - X_i)$ le besoin de capital de l'ensemble dans le cas de la suppression du segment i ;

L'application de la méthode des marginales conduit à l'allocation suivante :

$$\rho^{\text{marginale}}(X_i | X) = \frac{\rho(X) - \rho(X - X_i)}{\sum_j \rho(X) - \rho(X - X_j)} \times \rho(X)$$

Avantages

- Offre une meilleure vision de la contribution de chaque segment de risque à la diversification globale

Exemple

- Cas d'un groupe constitué de deux entités A et B
- Besoins en Fonds propres des entités solo :
 - Entité A solo : 100
 - Entité B solo : 150
 - Groupe : 200 (soit un bénéfice de diversification de 50).

L'application de la méthode proportionnelle conduit à allouer :

- 33% $[(200-150)/(200-150+200-100)]$ du capital à l'entité A
- 67% $[(200-100)/(200-150+200-100)]$ à l'entité B.

Inconvénients

- Plus complexe à mettre en œuvre que l'approche proportionnelle
- Ne tient pas compte des effets croisés (seuls l'impact des unités solos est testé)

Application

Méthodologies d'allocation de capital (3/4)

La méthode Shapley est une extension de la méthode des marginales qui vise à prendre en compte l'impact marginal de chaque acteur au niveau groupe et au niveau sous-groupe.

Extension de l'approche marginale - Méthode de Shapley

La méthode Shapley est une approche discrète fondée sur la théorie des jeux coopératifs, décrivant une situation dans laquelle des joueurs veulent diminuer leur fonction de coût (vision solo) mais prêtent attention aux synergies entre joueurs qui permettent de réduire le coût global (et donc par effet de ricochet) leur coût solo. Cette problématique est ainsi adaptée au cadre de l'allocation de capital.

En notant :

- $\rho(X)$ le besoin de capital global ;
- D_i le nombre de coalition contenant l'entité i effectuable au sein du groupe ;
- S une coalition ;
- $\rho(X_S - X_i)$ le besoin de capital de la coalition S dans le cas de la suppression d'une unité du segment i ;

L'application de la méthode de Shapley conduit à l'allocation suivante :

$$\rho^{Shapley}(X_i | X) = \sum_{S \in D_i} \frac{(S-1)! \times (n-S)!}{n!} \times (\rho(X_S) - \rho(X_S - X_i))$$

Avantages

- Offre une meilleure vision de la contribution de chaque segment de risque à la diversification globale
- Tient compte des effets croisés

Inconvénients

- Plus complexe à mettre en œuvre que l'approche marginale et proportionnelle

Application

Méthodologies d'allocation de capital (4/4)

La méthode d'Euler constitue une extension de la méthode des marginales dans laquelle l'impact de chaque segment est testé au niveau infinitésimale (quand la méthode des marginales raisonne en unité globale).

Extension de l'approche marginale – Méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet d'allouer le capital global en évaluant l'impact marginal d'une part infinitésimale de chaque segment de risque.

En notant :

- $\rho(X)$ le besoin de capital global ;
- $\rho(X_S - hX_i)$ le besoin de capital de l'ensemble dans le cas de la suppression d'une part infinitésimale du segment i ;

L'application de la méthode d'Euler conduit à l'allocation suivante :

$$\rho^{Euler}(X_i | X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(X) - \rho(X - hX_i)}{h} \times \rho(X)$$

Avantages

- Offre une meilleure vision de la contribution de chaque segment de risque à la diversification globale

Inconvénients

- Plus complexe à mettre en œuvre que l'approche marginale et proportionnelle

Les Grands Principes

Risk Appetite – Tolérance au risque et budget de risque

Sous une contrainte d'appétence à 150%, le plan stratégique actuel consomme 104% des fonds propres. Il convient donc de diminuer cette consommation afin de respecter l'appétence. Ceci définira alors les budgets de risques communiqués à chaque propriétaire. **La compagnie décide de calculer les budgets de risques sur la base de son profil de risque initial. Ceci revenant à attribuer 44% de la richesse initiale aux risques financiers et 56% aux risques techniques :**

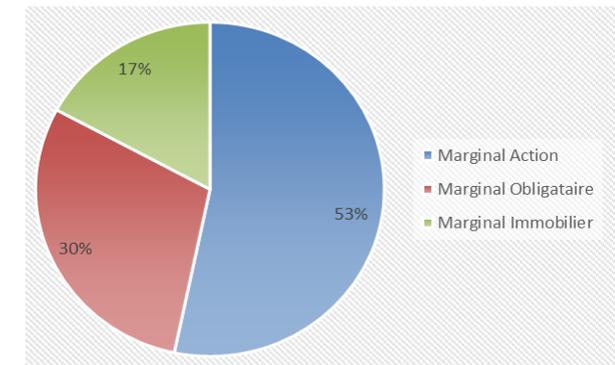
	Actif	Passif	Total
Consommation actuelle	437	600	1037
Budget de risque	419	577	996
Economie à réaliser	17	23	41

Le calcul des budgets attribué à chacun des risques financiers est effectué sur la base d'une approche marginale. Ainsi 1% d'action coûte :

- 1,8 fois plus chère que 1% d'obligation ;
- 3,1 fois plus chère que 1% d'immobilier.

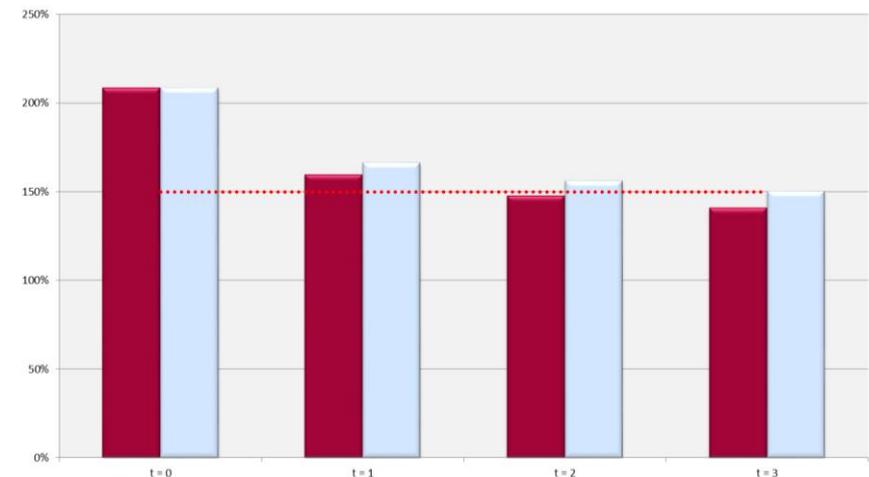
Cette clé est retenue afin de calculer les budgets de risques associés à chaque type d'actif :

	Action	Obligation	Immobilier
Budget de risque	223	124	72
Economie à réaliser	9	5	3



Le calcul par les marginales permet également de définir les nouvelles limites opérationnelles :

	Plan stratégique	Plan stratégique ajusté
Obligations	61%	59%
Actions	32%	30%
Immobilier	6%	4%
Trésorerie	1 %	7 %
Volume RC auto	600 M€	585 M€
Volume RC Générale	80 M€	78 M€



Les Grands Principes

Limites opérationnelles et suivi

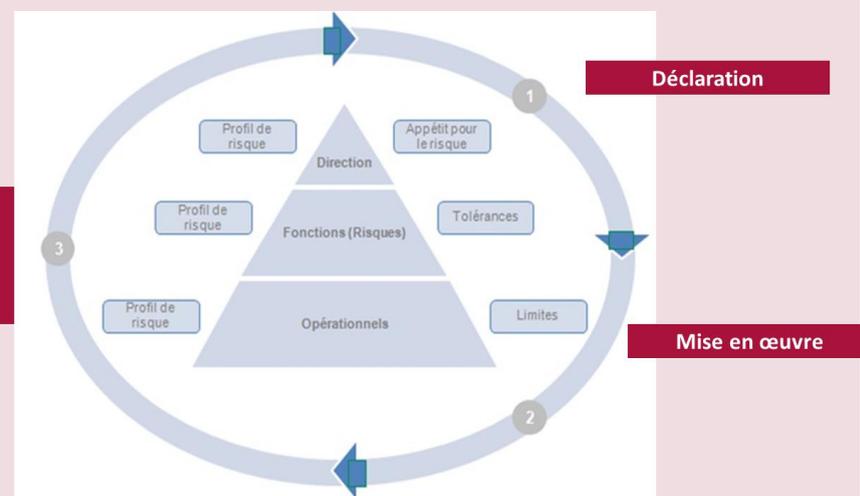
Suivi de l'appétit pour le risque

Une fois définie l'ensemble des tolérances aux risques, il convient de les traduire en limites opérationnelles.

La capacité de prise de risque a été définie sur la base de conditions de marché vues en date de calcul amenées à évoluer (plus ou moins favorablement).

Aussi, dans le cas de variation non négligeable des conditions de marché, la compagnie a tout intérêt à recalibrer son processus d'appétence au risque.

Suivi dans le temps par le contrôle et le reporting de la politique



La fréquence de recalibrage du processus ne devra être :

- ni trop élevée (risque de perdre toute stratégie)
- ni trop faible (risque de perdre une continuité dans la stratégie et ce à cause de brutales modifications de l'appétence).

	<i>Capital Economique</i>	<i>Capital Disponible</i>	$\left(\frac{\text{Capital Disponible}}{\text{Capital Economique}} \right)$	<i>Tendance</i>
Business Unit 1	280	450	161%	→
Business Unit 2	99	150	152%	→
Business Unit 3	315	360	114%	↗
Business Unit 4	498	750	151%	↘
Total Groupe	1 013	1 710	169%	→

en M€

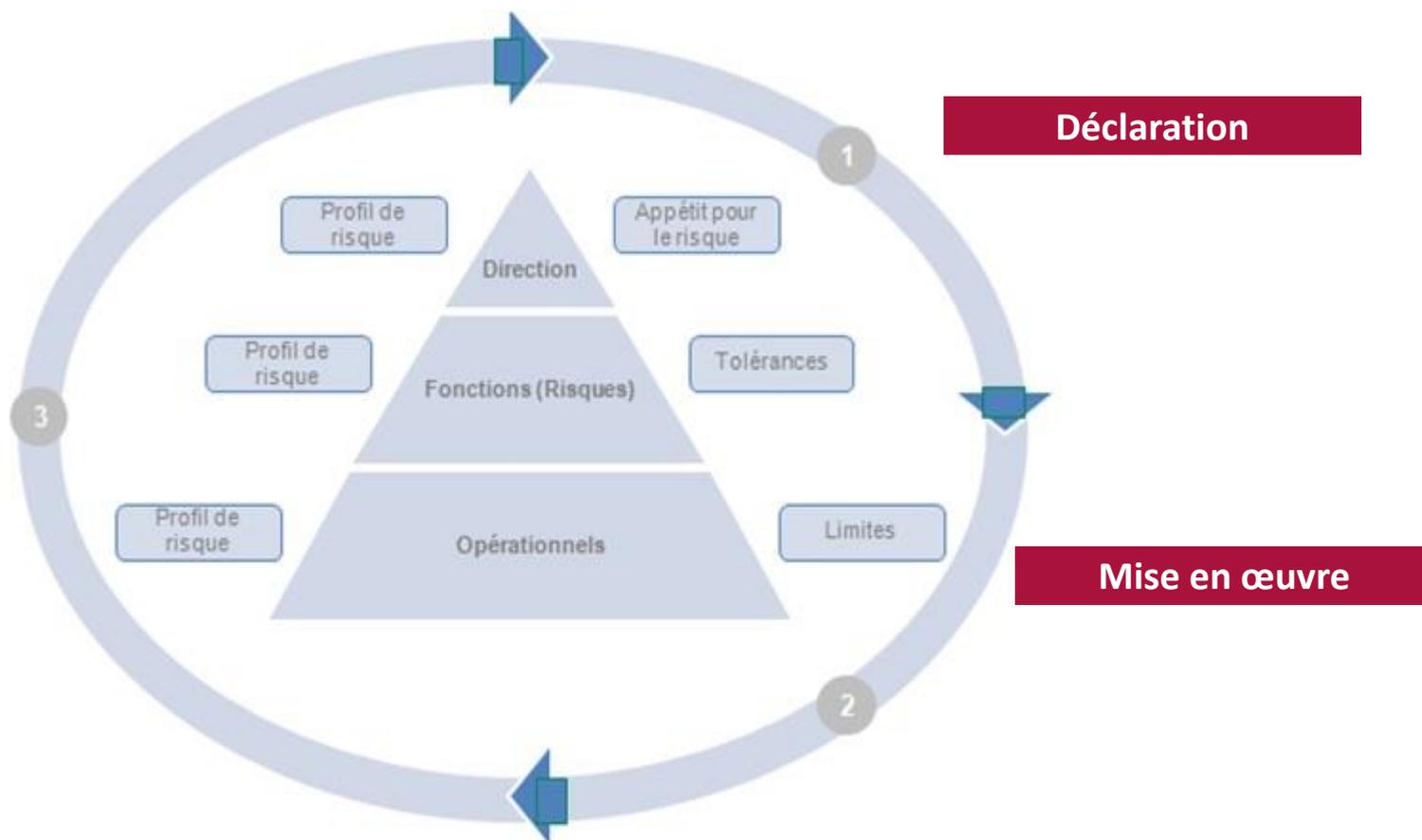
Dépassement du seuil de tolérance	< 100%
Zone d'alerte	[100% ; 150%]
Zone "cible"	[150% ; 300%]
Sous-utilisation du capital	> 300%

Les Grands Principes

Schéma de fonctionnement

Le schéma global de l'appétit pour le risque est le suivant (cf. Institut des Actuaires [2010]) :

Suivi dans le temps
par le contrôle et le
reporting de la
politique





Méthode LSMC

Méthode LSMC

Notion de ruine économique

Sur la base de l'article 101, le SCR peut être approché par :

$$SCR \approx FP_0 - VaR_{0,5\%}^P \left(FP_1 \times \exp \left(- \int_0^1 r_A(u) du \right) \right) \approx FP_0 - P(0,1) \times VaR_{0,5\%}^P (FP_1)$$

L'ORSA nécessite donc de **déterminer la distribution des SCR futurs** (et des ratios de couverture associés), ce qui **revient à déterminer la distribution des fonds propres FP_t**

$$FP_t = FP_{t-1} + E^{Q^h \otimes P^{nh}} \left(\sum_{j \geq t} \frac{\delta(j)}{\delta(t)} \times X_j \mid \mathbb{F}_{t-1} \right)$$

On admet couramment l'existence d'un **processus Y_t décrivant les risques impactant l'évolution du bilan** de la compagnie et on suppose de plus que ce processus est **markovien** (dépend des modèles retenus). En pratique l'état du bilan dépend de Y et d'un nombre fini de variables d'états, que l'on notera D , également markovien. D décrit l'état des polices.

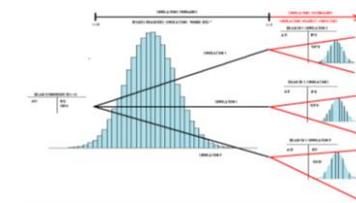
$$FP_t = FP_{t-1} + E^{Q^h \otimes P^{nh}} \left(\sum_{j \geq t} \frac{\delta(j)}{\delta(t)} \times X_j \mid (Y_{t-1}, D_{t-1}) \right)$$

Aussi, la problématique associée à la mise en place d'un processus d'ORSA consiste à valoriser ces espérances conditionnelles pour divers maturité et divers niveaux de quantiles. Deux approches semblent envisageables :

- Le recours aux simulations dans les simulations (mais cette approche est rarement envisageable);
- La mise en place de proxies visant à **capter**, puis **reproduire**, la sensibilité des fonds propres économiques aux principaux facteurs de risques.

Méthode LSMC

Approche SDS ?



La principale problématique liée à l'approche SdS se situe au niveau du volume de simulations nécessaires afin d'obtenir la convergence.

Si on considère un call européen de maturité 5 ans, à la monnaie en $t=0$ avec une volatilité implicite flatte de 10% et un taux sans risque constant, un écart entre la valeur issue de la formule de Black et une approche Monte Carlo est de :

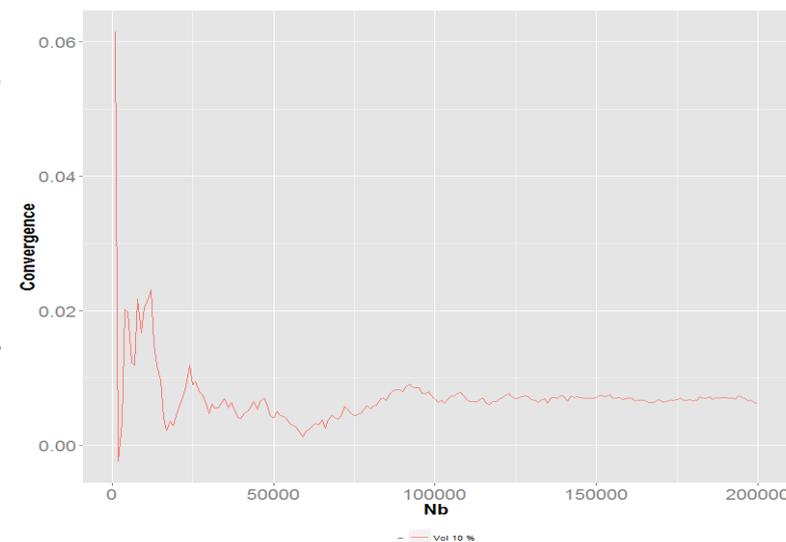
- 6% après 1 000 tirages
- 0,6% après 200 000 tirages.

⚠ Dans le cas de simulation en assurance, il faut prendre garde à l'effet de levier sur fonds propres

Dans le cas des simulation secondaires, trois méthodologies sont applicables :

- retenir un très grand nombre de simulations secondaires afin d'obtenir une convergence acceptable en tout point ;
- ajuster le nombre de simulations K_i :
 - en fonction de la variance conditionnelle ;
 - de façon à retrouver des prix de marché d'instruments financiers présentant des caractéristiques proches de celle du passif.

Il reste alors à déterminer le nombre de simulation primaires afin d'assurer la convergence du quantile empirique. Ce dernier choix est délicat dans le sens où **au-delà de la volatilité des facteurs de risques, c'est l'impact de cette volatilité sur la volatilité des fonds propres qui nous intéresse.**



Méthode LSMC

Approche SDS ?

On observe une prise de conscience du caractère peu efficace des approches SdS “brutes” :

Calculation of economic capital for complex life insurance liabilities requires a nested stochastic approach, but the considerable run-times associated with many asset-liability models can mean that this technique is not always practical. As a result many insurers are seeking next generation modelling solutions to give them fast and accurate results in order to manage their businesses, whilst meeting the growing burden of regulatory compliance.

Barrie & Hibbert

http://www.barrhibb.com/products_and_services/detail/liability_proxy_generator/

Dès lors il convient de proposer des approches alternatives ou complémentaires.

	Accélérateur SdS	Portefeuilles répliquants	LSMC / Curve Fitting
Avantages	<p>10 à 15 fois plus rapide qu'une approche SdS</p> <p>Met en avant les situations à risque pour la compagnie</p>	<p>50 fois plus rapide qu'une approche SdS</p> <p>Facile à utiliser une fois calibrer</p> <p>Source d'information complémentaire sur l'optionnalité des passifs</p>	<p>50 fois plus rapide qu'une approche SdS</p> <p>Facile à utiliser une fois calibrer</p> <p>Source d'information complémentaire sur l'optionnalité des passifs</p>
Inconvénients	<p>Gain de temps limité lors de l'ajout de facteurs de risque, ou dans le cas de pas de projection supérieur à un an</p>	<p>Gère mal les risques non couvrables</p> <p>Choix de l'asset mix initial</p> <p>Faible stabilité temporelle</p>	<p>Construction de la base de régression</p> <p>Faible stabilité temporelle</p>

Méthode LSMC

Idée sous-jacente

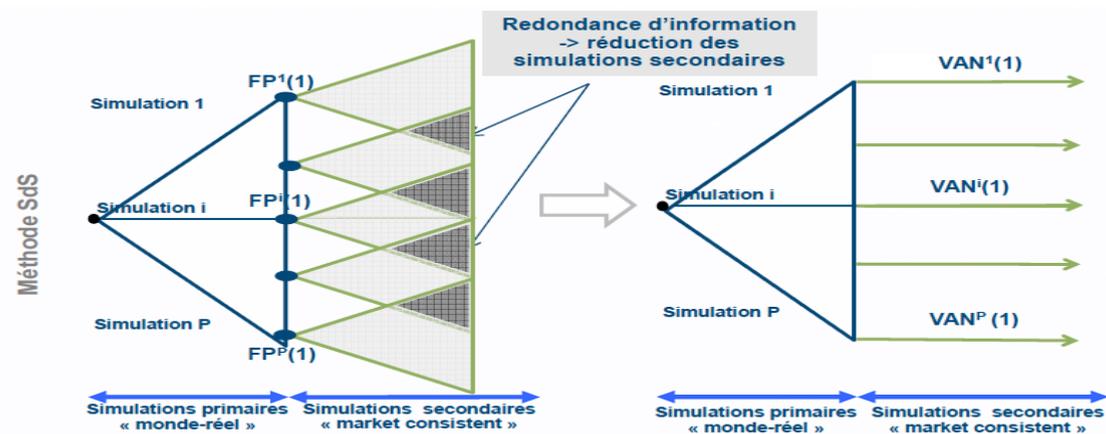
D'une manière synthétique, l'application d'une méthodologie LSMC est comparable à une notion de développement limité.

Ainsi la convexité induite par les options et garanties des contrats est approximée par un polynôme.

Dans le cas de contrats d'assurance, l'instabilité temporelle de la méthode LSMC est comparable à l'instabilité d'un développement limité : plus l'horizon de projection est grand, plus la variabilité des facteurs de risques augmente et dégrade donc la qualité d'approximation.

Effectuer un très grand nombre de simulations primaires suivi d'une unique simulation secondaire est équivalent au fait d'effectuer un calcul complet de « simulations dans les simulations »

Source: "Solvency assessment within the ORSA framework: issues and quantitative methodologies", J.Vedani et L. Devineau, 2012



Dans le cas de l'ORSA, la méthode LSMC peut être appliquée de trois manières :

1. Pour gérer la problématique infra annuelle : une fois calibré, et sous la contrainte que la réalisation des conditions de marchés est en accord avec les zones de stress envisagées lors de la procédure de calibrage, la valeur du BOF peut être estimée d'une manière instantanée par le polynômes. Il est à noter que le calcul du SCR (en approche FS ou MI) nécessitera de définir d'autres polynômes.
2. Pour gérer la problématique pluri annuelle : on ajuste un polynôme pour chaque maturité de projection et chaque niveau de stress testé dans le processus.
3. Pour gérer la problématique pluri annuelle : on utilise la forme polynomiale afin de définir les conditions de marché à tester pour le calcul du BGS. Les contraintes sur le polynôme sont alors moins strictes dans le sens où il s'agit d'un KRI (les *best estimates* étant alors évalués par monte carlo).

Méthode LSMC

Idée sous-jacente

Les principales étapes associées à la méthodologie LSMC sont les suivantes :

- Définir les facteurs de risques expliquant au mieux la volatilité du BOF

Cette étape dépend fortement de la maturité retenue : la volatilité des facteurs de risques n'évoluant pas de la même manière, l'évolution de l'allocation stratégique impactant la pondération des facteurs de risques financiers, et des passifs d'assurance (évolution des coûts associés aux options et garantie financières).

- Construire, pour chaque maturité, l'échantillon d'ajustement et l'échantillon test

Cette étape est la plus importante dans le sens où elle est chronophage et la finesse des simulations est garante de la qualité de l'approximation

Le calcul de l'échantillon test est obtenu sur la base d'une approche SdS. A ce titre des méthodes d'optimisation pourront être retenues :

- *agrégation des model points;*
- *méthode de sélection des trajectoires;*
- *introduction de normes.*

Une attention particulière devra être apportée au GSE historique retenu.

- Application de tests de robustesse afin de définir la « zone de confiance » de la forme polynomiale

Cette étape aura pour objectif de définir les niveaux de stress à partir desquels les sensibilités du BOF évolue fortement, rendant de ce fait caduque le modèle LSMC

Méthode LSMC

LSMC - Principe

Valorisation d'une option bermudéennes :

La méthode LSMC a été introduite en 2001 par LONGSTAFF et SCHWARTZ dans le cadre de la valorisation d'options bermudéennes. La difficulté de leur valorisation réside dans le calcul d'un algorithme rétrograde reposant sur l'évaluation à chaque itération d'une espérance conditionnelle.

En supposant l'existence d'une probabilité risque neutre Q , et en notant t_k les dates d'exercice possibles de l'option et T sa maturité, la valeur théorique de l'option est donnée par :

- τ est un temps d'arrêt prenant ses valeurs dans $\llbracket 0 ; T \rrbracket$ $V_0 = \sup_{t \in \tau} E_Q [h_t \delta_t]$
- $\delta_t = \exp\left(-\int_0^t r(u) du\right)$

Ce problème est résolu par un algorithme rétrograde :

$$V_{t_N} = h_T ; V_{t_k} = \max\left(h_{t_k}, E_Q\left[h_{t_{k+1}} \frac{\delta_{t_{k+1}}}{\delta_{t_k}} \middle| F_{t_k}\right]\right)$$

Méthode LSMC

LSMC - Principe

Principes du LSMC

LONGSTAFF et SCHWARTZ [2001] proposent une méthode d'approximation des espérances conditionnelles basée sur la méthode des moindres carrés. Les temps d'arrêt de l'option sont alors évalués en considérant que les espérances conditionnelles associées sont dans $L^2(\Omega, \sigma(Y), P)$ qui munit de la covariance comme produit scalaire est un espace de Hilbert.

Sous cet espace, l'espérance conditionnelle est solution de :

$$E[X_t | Y_t] = \underset{Z \in L(Y_t)}{\operatorname{argmin}} E[(X_t - Z)^2].$$

L'espérance conditionnelle est donc la projection orthogonale de X_t sur $L(Y_t)$ (le sous-espace fermé formé de toutes les fonctions de L^2 qui peuvent s'écrire comme $g(Y_t)$ avec g fonction réelle monotone par morceaux). Ceci revient donc à découper la variable X_t en deux variables aléatoires : $X_t = X_t^{Y_t} + X_t^{Y_t^\perp}$. Le calcul de l'espérance conditionnelle devenant :

$$E^{P^A \otimes Q^F}(X_t | Y_t) = E^{P^A \otimes Q^F}(X_t^{Y_t} + X_t^{Y_t^\perp} | Y_t) = X_t^{Y_t}$$

Muni de son produit scalaire l'espace L^2 et $L(Y_t)$ sont deux espaces de Hilbert (Cf. Royden [1968]). $L(Y_t)$ est donc muni d'au moins une base orthonormale, que l'on notera par la suite $\{e_i(Y)\}_i$. Aussi, $X_t^{Y_t}$ peut s'écrire de la sorte :

$$X_t^{Y_t} = \sum_i \alpha_i \times e_i(Y_t)$$

L'intérêt de cette décomposition est l'accélération des calculs en vue d'une estimation régulière de l'espérance conditionnelle. En effet, pour une utilisation unique (ou peu fréquente) le calcul direct est préférable (ce calcul étant quoi qu'il en soit nécessaire afin d'ajuster le polynôme LSMC). La force d'un modèle paramétrique réside dans sa capacité de mise à jour quasi quotidienne : une fois les coordonnées calibrées, la dynamique de l'espérance conditionnelle se confond à la dynamique de la base Hilbertienne (en termes de calculs). Cette dernière étant en lecture directe (i.e. ne nécessitent pas de recourir à la simulation) les calculs deviennent instantanés.

Méthode LSMC

LSMC - Principe

Principes du LSMC

La valeur de S est alors exprimée sous une base orthonormée $e_i(S_{t_k})$ de l'espace de Hilbert $L(S_{t_k})$, ceci permettant d'écrire : $f(S_{t_k}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \times e_i(S_{t_k})$

Cette expression est ensuite dégradée en ne que les m premiers termes de la série : $f(S_{t_k}) \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i \times e_i(S_{t_k})$

Les coefficients α_i du vecteur α sont ensuite définis sur la base de simulations de Monte Carlo : $\hat{\alpha} = \mathbf{arg\,min} \sum_{j=1}^N \left(E_Q \left[h_{t_{k+1}} \frac{\delta_{t_{k+1}}}{\delta_{t_k}} \middle| S_{t_k}^j \right] - \sum_{i=1}^m \alpha_i \times e_i(S_{t_k}^j) \right)^2$

Cadre assurantiel

Ce cadre peut être adapté pour répondre à la problématique de calcul infra annuel. En effet :

$$FP_t = FP_{t-1} + E^{Q^h \otimes P^{nh}} \left(\sum_{j \geq t} \frac{\delta(j)}{\delta(t)} \times X_j \middle| (Y_{t-1}, D_{t-1}) \right) \approx f_{t-1}(Y_{t-1}, D_{t-1}) \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i \times e_i(Y_{t-1}, D_{t-1})$$

Il est à noter que le cadre assurantiel est relativement éloigné du cadre financier dans le sens où la base e_i retenue est rarement orthogonale. Par exemple, Bauer et al. [2010] retiennent cette méthode mais en considérant que la base hilbertienne $\{e_i\}$ est constituée de polynômes à 4 inconnues :

- l'actif de la compagnie ;
- la fonction de perte ;
- le résultat de première année ;
- le taux court de première année.

In fine, ceci revient à considérer qu'en retenant un certain nombre de « bons » facteurs de risques il est possible de prédire la dynamique des fonds propres économiques par une approximation polynomiale. La décomposition ci-dessus nécessite que les aléas impactant la valeur de l'ANR soient markoviens d'ordre 1

Méthode LSMC

LSMC – Exemple sur un cas simple

On considère un call européen ATM, de prix de d'exercice 100 et de maturité 4 ans sur le sous-jacent S_t . On suppose que :

- le log rendement du sous-jacent est log-normal, à volatilité constante.
- La structure par termes des taux d'intérêts est plate de niveau 2%.

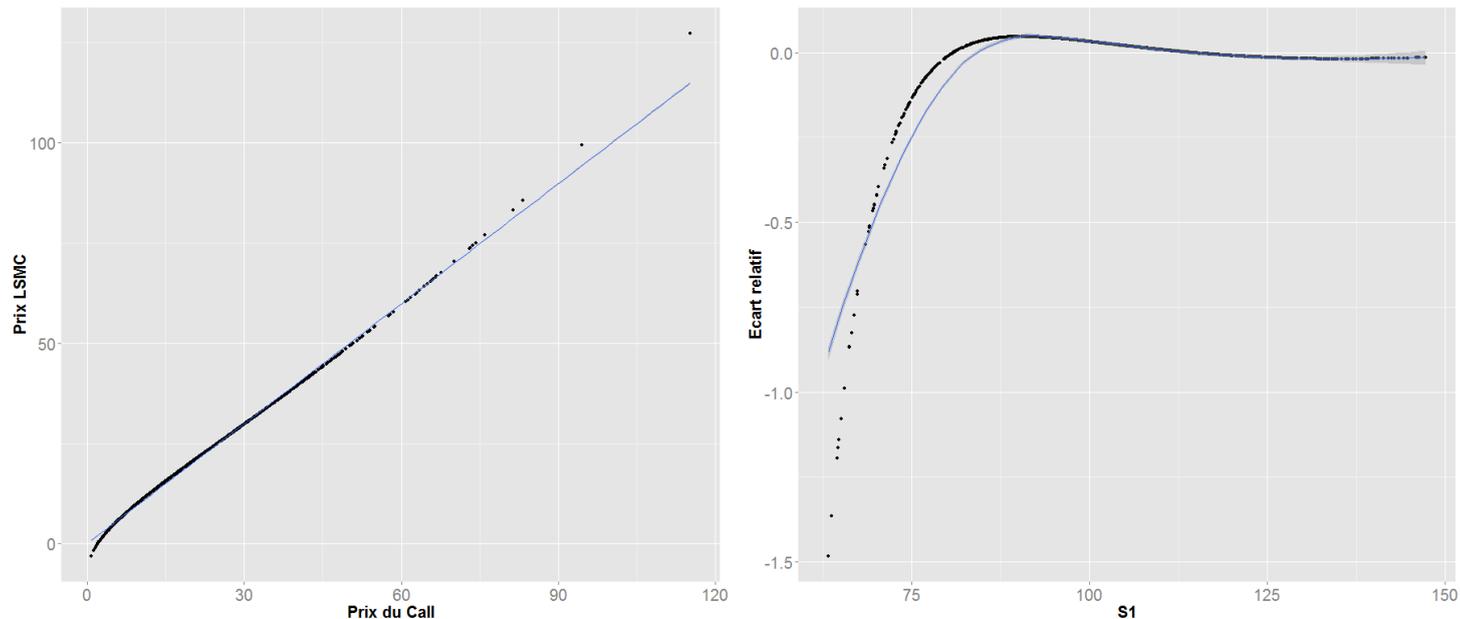
Prix(0)	Prix moyen (1)	Delta	Gamma	Theta
19,39	21,97	0,66	0.009	-2,92

La base de Hilbert est alors construite sur la base de l'écart entre la valeur du sous jacent et sa moyenne (notée W_1)

$$Call(1) = E \left[e^{-r} \times [S_2 - K]^+ \mid S_1 \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \times e_i(W_1) \approx \sum_{i=0}^2 \alpha_i \times W_1^i = 20,4 + 0,66 \times W_1 + 0,0036 \times W_1^2$$

On notera que α_0 est proche de l'espérance du prix du call dans 1 ans, α_1 est proche de son delta.

Si le graphique qqplot semble de bonne qualité, on observe que pour les faibles valeurs du sous-jacent la projection est de mauvaise qualité (même en se limitant à une chute de 40%).

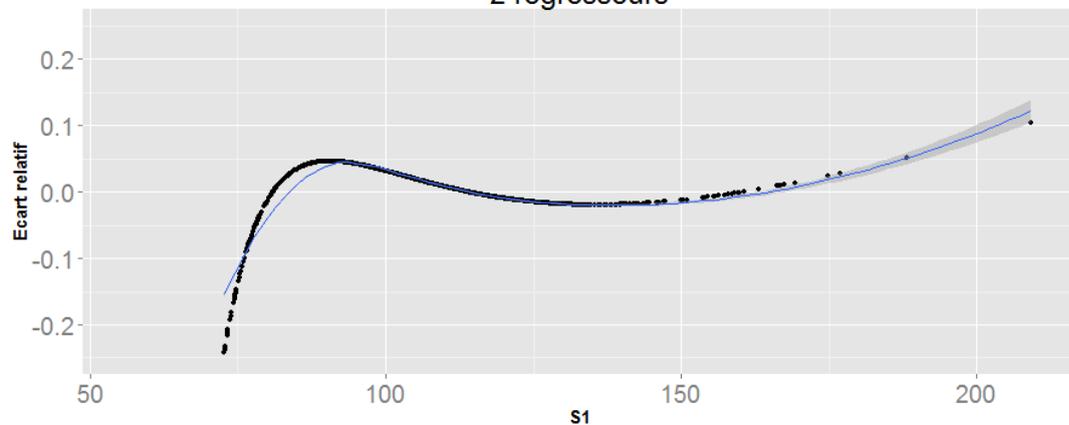


Méthode LSMC

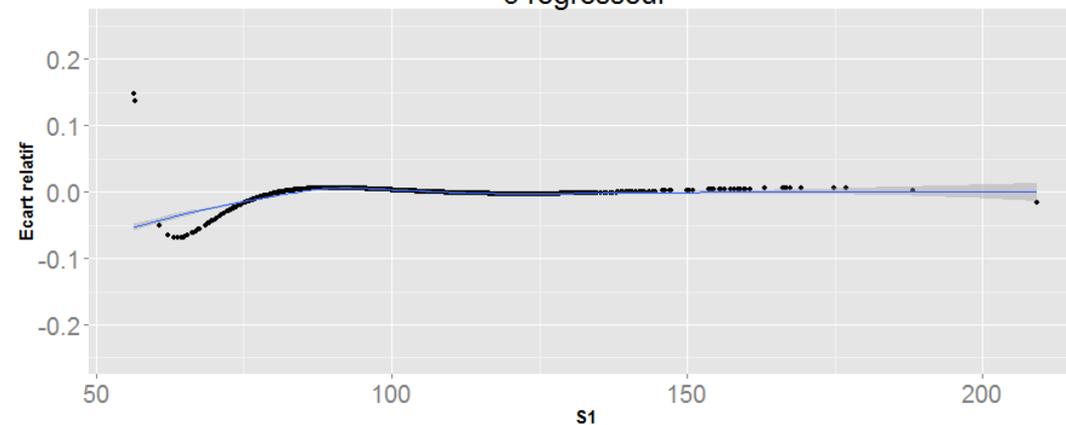
LSMC – Exemple sur un cas simple

Même dans un cas aussi simple, seule la prise en compte de 5 régresseurs permet de correctement modéliser les cas extrêmes.

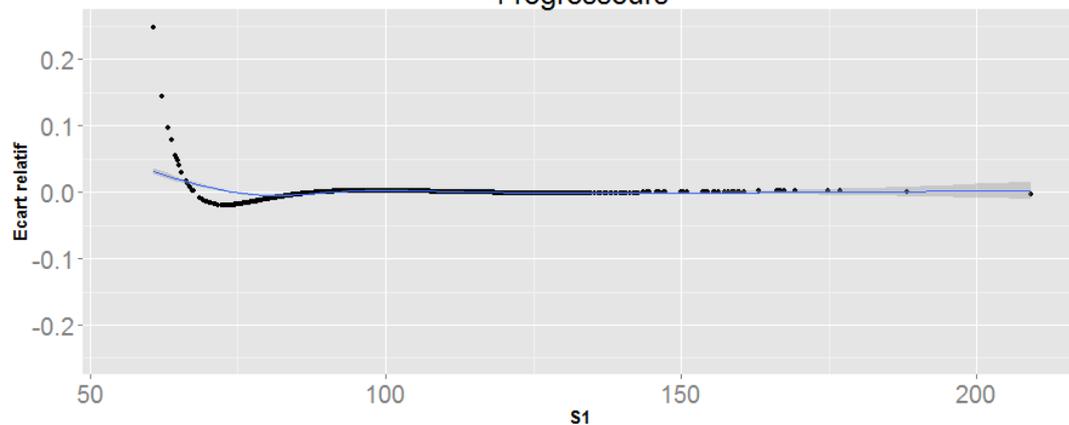
2 régresseurs



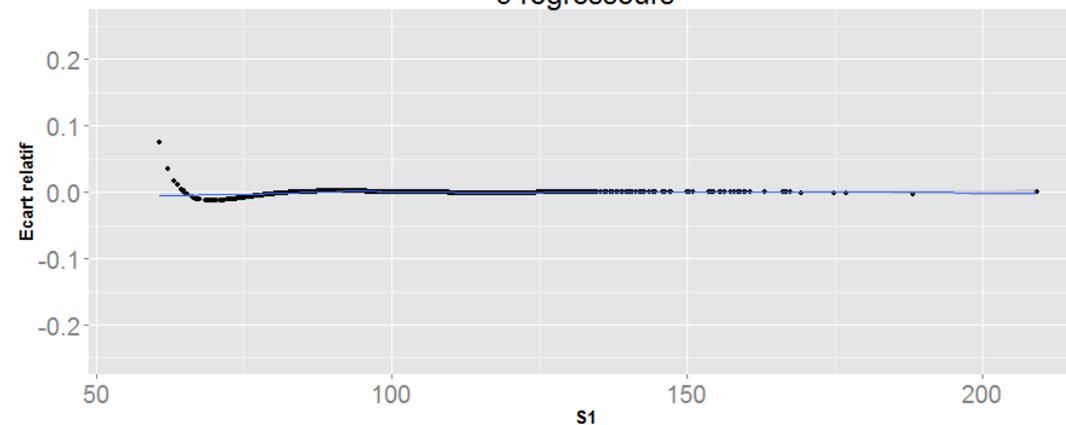
3 régresseur



4 régresseurs



5 régresseurs

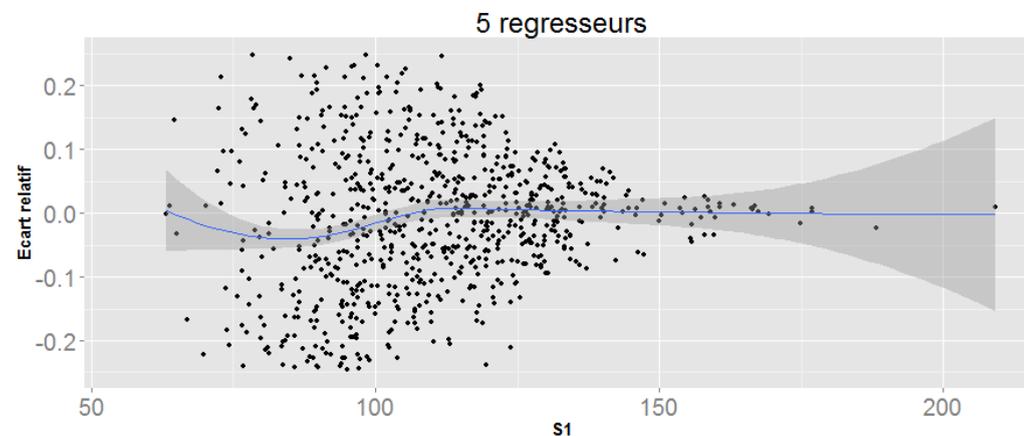
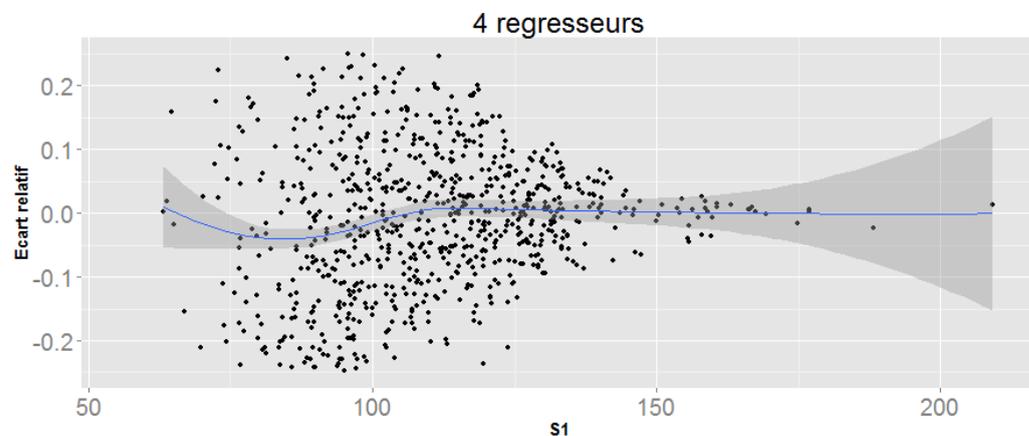
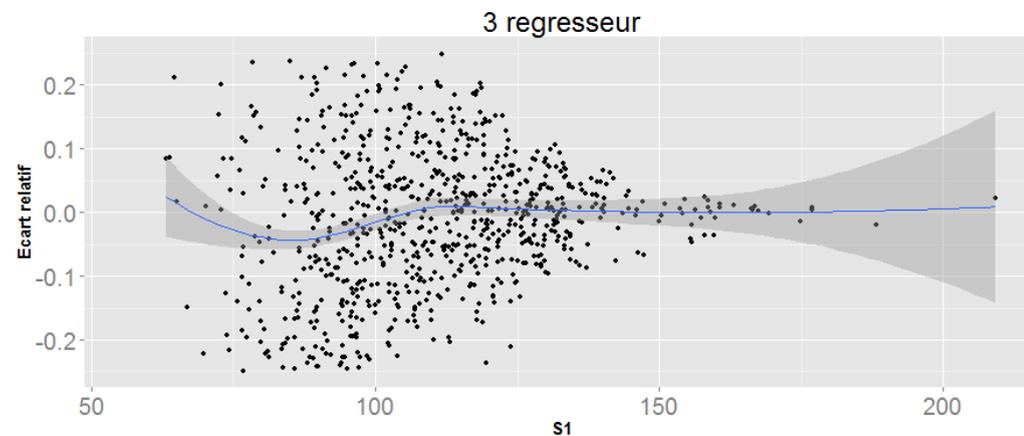
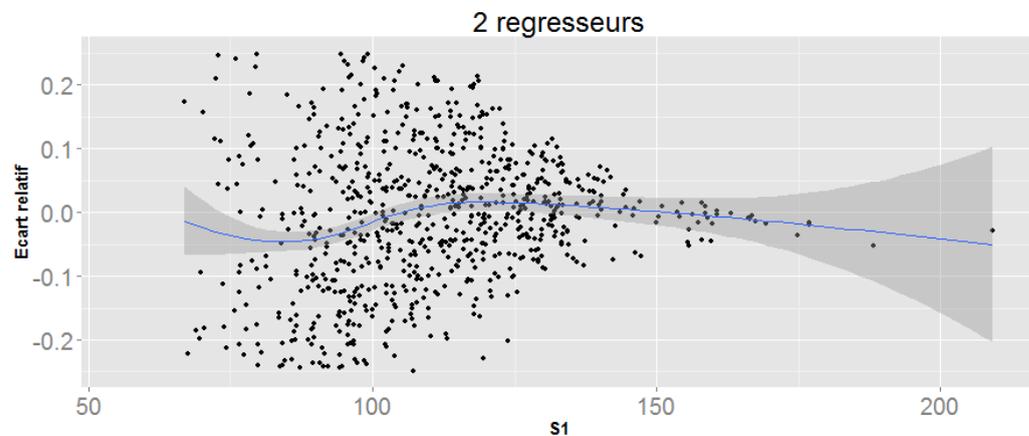


Afin de rendre le cas plus réaliste on ajoute une volatilité et une courbe des taux stochastique :

Méthode LSMC

LSMC – Exemple sur un cas simple

Quel que soit le nombre de régresseurs actions retenu, le modèle est d'une très mauvaise qualité :

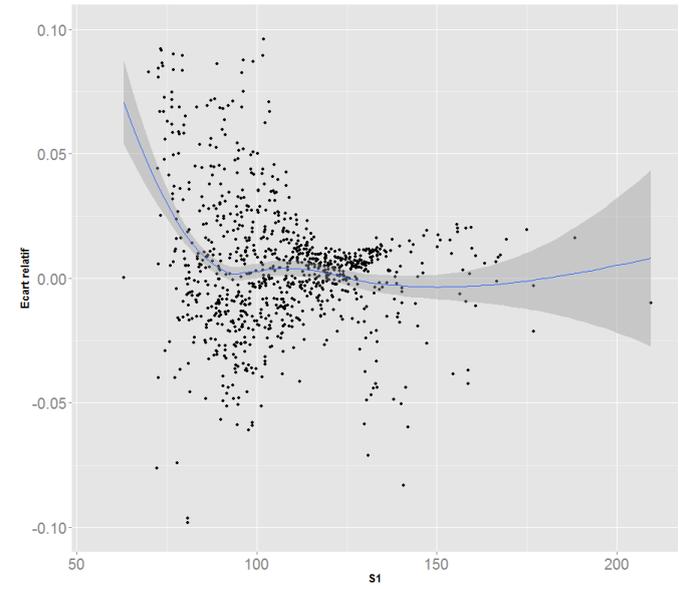
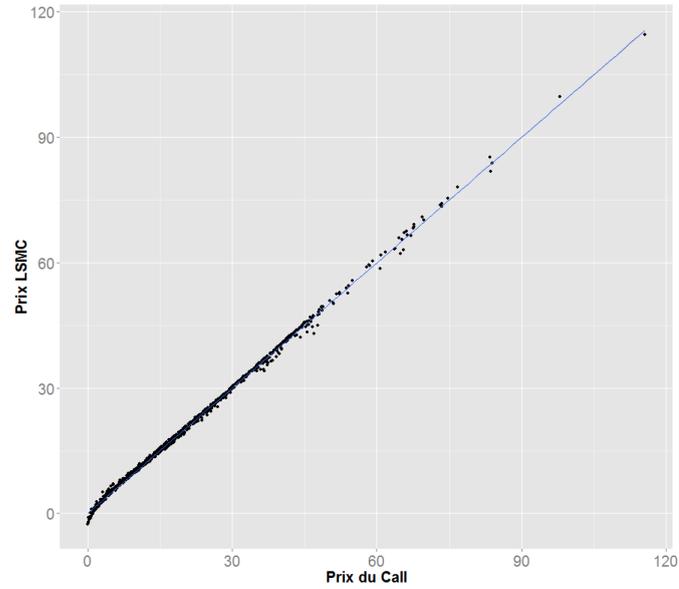


Il est donc nécessaire d'ajouter la courbe des taux ainsi que la volatilité implicite dans les régresseurs.

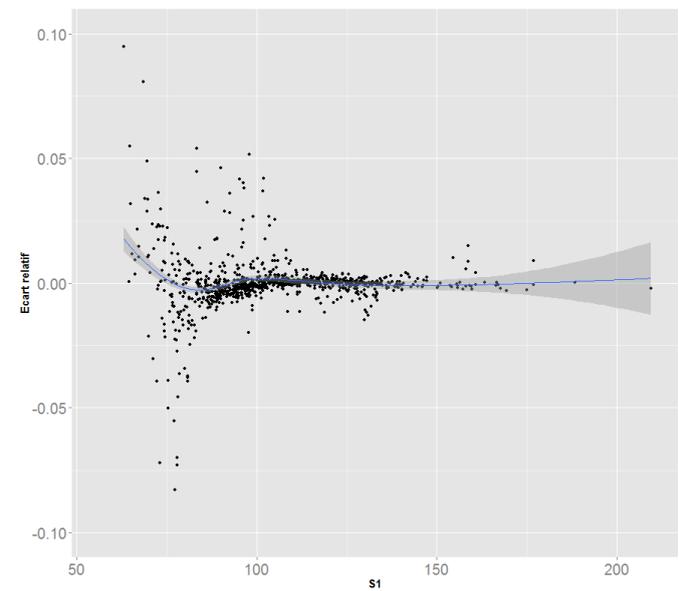
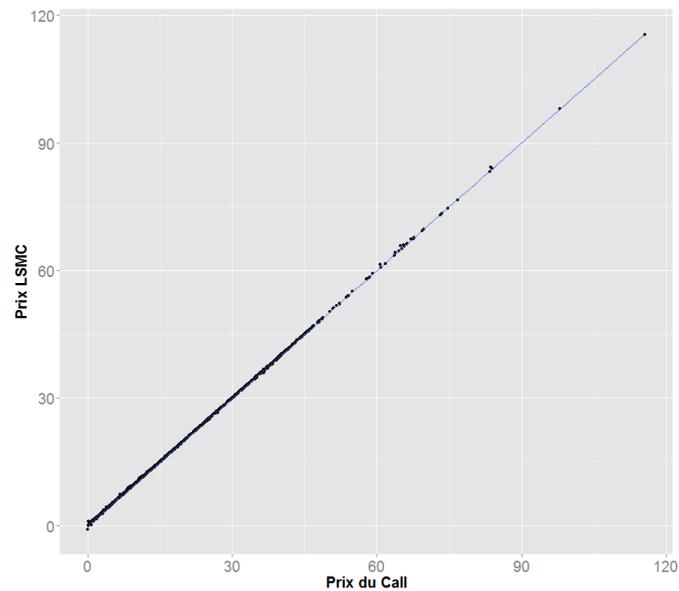
Méthode LSMC

LSMC – Exemple sur un cas simple

En ajoutant au modèle initial le niveau des taux et de la volatilité :



Modèle complet (16 regressseurs)



Méthode LSMC

Least Square Monte Carlo et Portefeuille de Réplication : points de convergence et de divergence

1. On se place sous $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et on note P_t le prix d'un instrument financier quelconque

Muni de la covariance comme produit scalaire $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est un espace de Hilbert. Ainsi tout élément P_t peut s'exprimer de la sorte :

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^t(\Omega)$$

Il s'agit du cadre initial associé à la méthode LSMC

2. On considère que les résultats obtenus par une approche de type Monte Carlo constitue la réalité.
3. On considère que l'ensemble des risques sont couvrables.

Cette 2^{ème} hypothèse revient à considérer que la probabilité risque neutre retenue sous Monte Carlo est la seule mesure risque neutre du marché : Ω est donc considéré comme un marché complet. Aussi P_t peut être valorisé sur la base des prix d'actif d'Arrow-Debreu :

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} R_i \pi_i$$

La notion de complétude implique également qu'il est possible de répliquer P_t par une portefeuille autofinancé (X_0, \dots, X_M) . Le passage d'une somme infinie à une somme finie implique cependant de retenir des processus adaptés comme pondération :

$$P_t = \sum_{i=1}^M w_i^t X_i^t$$

Il s'agit du cadre initial associé à la notion de portefeuille de réplication

Les portefeuilles de réplication et les LSMC présentent un cadre mathématique commun et conduisent aux mêmes résultats tant que les hypothèses initiales sont vérifiées. Ces dernières assure également la stabilité temporelle des 2 méthodes.

Méthode LSMC

Impact du passage au cadre assurantiel

Perte de la stabilité temporelle

↳ Méthodologie des portefeuilles de réplication

- **Taille de la somme** : le niveau de complexité des contrats d'assurances ne permet pas de définir précisément le terme M .
- **Pondération** : les processus adaptés sont remplacés par des constantes.

↳ Méthodologie des Least Square Monte Carlo

- **Taille de la somme** : on se limite aux M premiers termes.
- **Construction de la base** : la base retenue est rarement orthogonale.

Limite du pouvoir de réplication

↳ Méthodologie des portefeuilles de réplication

La présence de risques non couvrables (type risques biométriques) invalide l'utilisation de portefeuille de réplication pour certains types de passifs.

↳ Méthodologie des Least Square Monte Carlo et des Least Square Monte Carlo

Les règles comptables (consommation de la PPE, Réserve de Capitalisation, PDD, PRE, ...) induisent un phénomène de volatilité qui ne peut être couvert ou répliquer sur la base d'aléa.

⚠ Dans le cadre assurantiel, la méthodologie des portefeuilles répliquant ne vise à définir un portefeuille de couverture !

- Les produits financiers peuvent donc être fictifs,
- Les problèmes de liquidité et de frais financiers ne sont pas pris en compte.

⚠ Travailler sur le *best estimate* nécessite de tenir compte de l'effet de levier !

Méthode LSMC

LSMC – Mise en oeuvre

0 – Description de l'exemple retenu par la suite

On considère une compagnie commercialisant un unique contrat d'épargne en euro, sans TMG et présentant un taux de PB contractuel de 90 %.

Exemple retenu : les principes de modélisation

Passage d'une logique Pilier 1 à une logique Pilier 2

- risque business (ajout des affaires nouvelles)
- risque souverain
- 2 probabilités : historique + risque neutre

Modélisation des règles du management

- Politique de revalorisation : suivi de l'OAT 10 ANS
- Modélisation d'un coût fonds propres si politique financière insuffisante
- Grille d'allocation définie dans le plan stratégique
- Rachats conjoncturels : application de la loi ACP (ONC)

Modélisation des risques

Risque	Variable d'état	Modèle de prix	Prime de risque
Taux	Taux court Vasicek	Vasicek Généralisé	$\lambda_{Taux}(t) = \frac{k(b - b_t)}{\sigma}$
Actions	VM actions Black & Scholes	Black & Scholes	$\lambda_{Action}(t) = \frac{\mu_{action} - r_t}{\sigma_{action}}$
Immobilier	VM immobilier Black & Scholes	Black & Scholes	$\lambda_{Immo}(t) = \frac{\mu_{Immo} - r_t}{\sigma_{Immo}}$

Les limites

- LA PRE n'est pas ici modélisée
- Les aléas sont gaussiens

Méthode LSMC

LSMC – Mise en oeuvre

1 - Simulation des facteurs de risques retenus *a priori*

La définition du vecteur Y consiste à isoler les aléas expliquant au mieux la volatilité du BOF et contribuant au SCR. On retient typiquement une dizaine de facteurs de risques parmi :

- aléa impactant le niveau et la volatilité des actions, le niveau de l'immobilier
- niveau, pente, convexité des taux (99 % de la volatilité de la structure par termes des taux).
- aléas sur le *spread* et la liquidité
- rachat, mortalité ?

On notera que cette base n'est pas orthogonale ! Si ceci augmente potentiellement la taille du polynôme, une approche par ACP ne semble pas préférable dans le sens où elle rend moins interprétable les sources de risques impactant le BOF (et donc à suivre dans le processus de gestion des risques).

Exemple retenu

On considère trois sources d'aléa : $FP_t \approx \sum_{m=1}^M \beta_m e_t^m (\varepsilon_t^{Ac}, \varepsilon_t^{Tx}, \varepsilon_t^{Im})$

- le niveau des actions et de l'immobilier (modélisés par un processus de Black et Scholes)
- Le niveau des taux (modélisé par un processus de Hull & White)

Méthode LSMC

LSMC – Mise en oeuvre

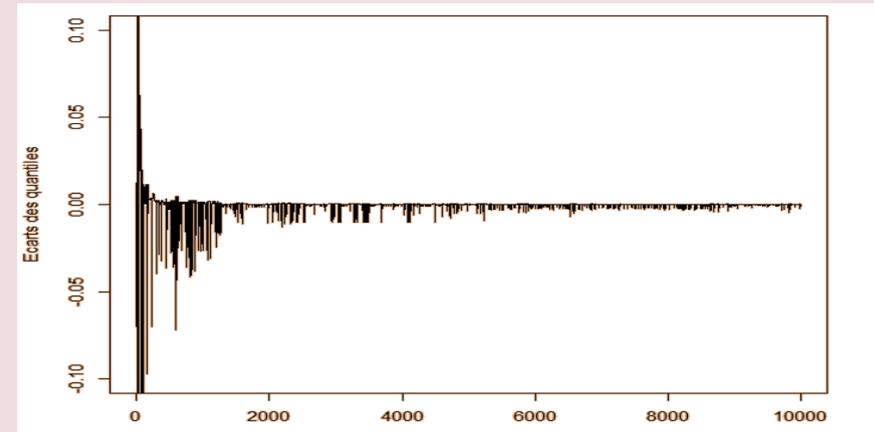
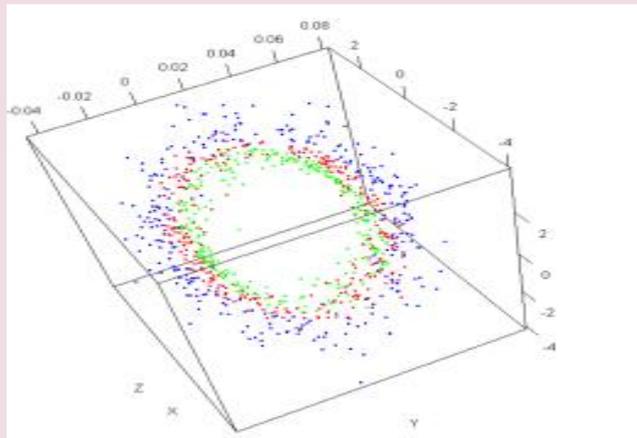
2 – Calcul de la distribution de référence

La méthodologie LSMC retient comme référence la distribution obtenue *via* une approche SdS. Il s'agit donc d'une étape particulièrement chronophage notamment pour obtenir une vision claire des queues de distribution. A ce titre l'introduction d'une norme pourra être retenue afin de limiter le nombre de simulations.

Exemple retenu

On considère trois source d'aléa :

- Choix du nombre de simulations secondaires : 5000 (sur la base d'une analyse de la convergence en situations stressées);
- Choix du nombre de simulations primaires : 5000 (analyse de la stabilité des quantiles empiriques 0,5% et 5 %)



$$\text{Norme appliquée : } ||(\zeta_{AC}, \zeta_{Tx}, \zeta_{Immo})|| = \sqrt{\text{Sensi}_{Tx} * \zeta_{Tx}^2 + \text{Sensi}_{AC} * \zeta_{AC}^2 + \text{Sensi}_{Immo} * \zeta_{Immo}^2}$$

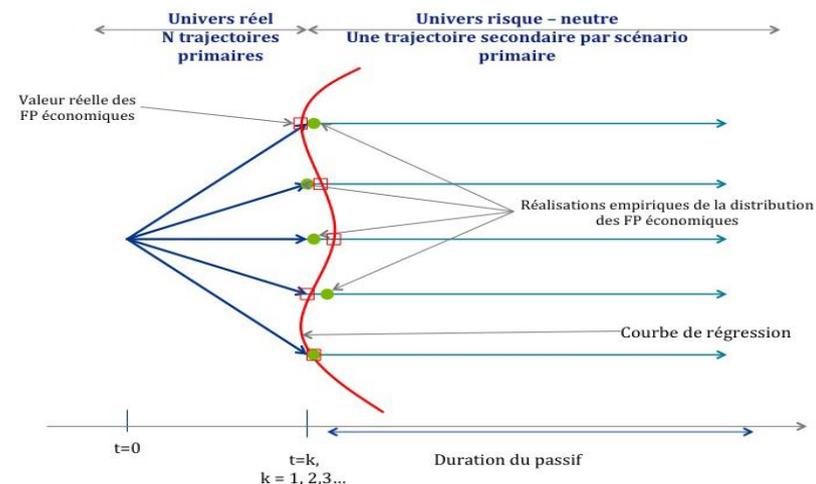
Méthode LSMC

LSMC – Mise en oeuvre

3 – Calcul de la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs

La méthode LSMC réplique la valeur actuelle des flux futurs .

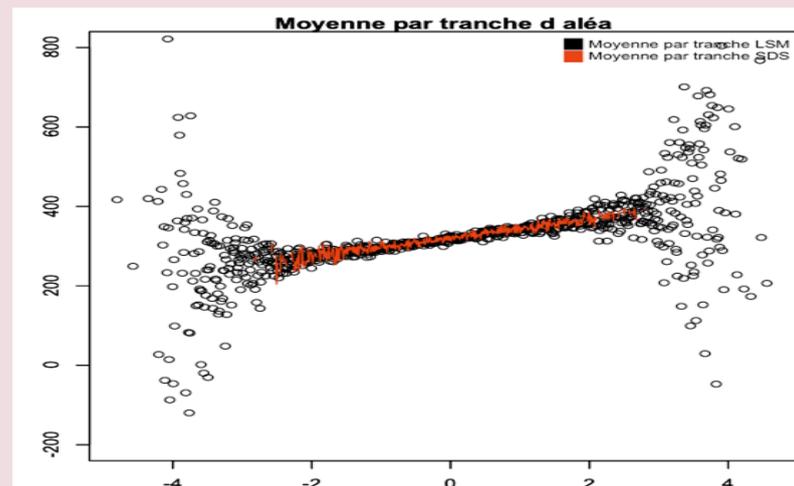
Chaque simulation primaire historique est prolongée par une unique simulation secondaire, permettant ainsi de simuler la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs :



Exemple retenu

La méthodologie LSMC reposant sur un principe de mutualisation, il est important de s'assurer qu'un nombre suffisant d'aléa primaire a été tiré.

Du fait de la faible densité de la loi gaussienne dans les queues de distribution extrêmes la mise en place d'une norme est également retenue.



Méthode LSMC

LSMC – Mise en oeuvre

4 – Ajustement et validation de la forme paramétrique

Au-delà du calcul des coefficients de la régression, cette étape a pour objectif de définir les régresseurs optimaux. En effet, en considérant m régresseurs les coefficients sont solutions de l'équation : $X_t = Y_t \times \alpha_t + \varepsilon_t$

Avec : $(\varepsilon_t^1, \dots, \varepsilon_t^m)$ le vecteur des résidus indépendant et de variance σ^2 et (X_t^1, \dots, X_t^m) un échantillon de valeur actuelle des flux futurs à la date t .

En supposant Y_t de rang m et en notant $M = (Y \times Y^{tr})$, l'application de la méthode des moindres carrés conduit à l'estimateur suivant (sans biais) :

$$\hat{\alpha}_t = M^{-1} \times (Y_t)^{tr} \times X_t \qquad E(\hat{\alpha}_t) = \alpha_t \qquad V(\hat{\alpha}_t) = \sigma^2 M^{-1} = \frac{\sigma^2}{\det(M)} \text{com}(M)$$

Aussi, l'ajout de régresseurs doit donc être fait avec prudence au risque de faire exploser la variance de l'estimateur. Le choix des régresseurs optimaux est donc le cœur de la méthodologie LSMC. Elle peut s'effectuer de 3 façons : sélection *forward*, élimination *backward*, mixte

Application d'un critère permettant de mesurer la qualité de réplification de la forme paramétrique.

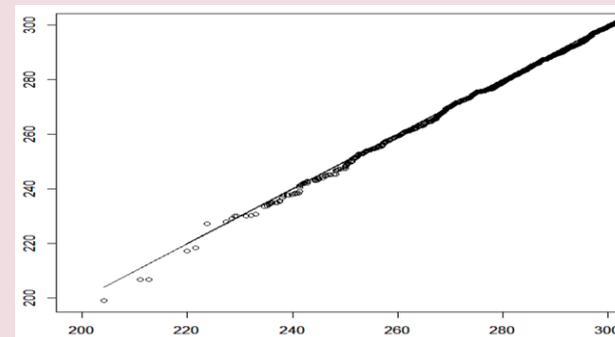
- R^2 : fonction non décroissante du nombre de variables explicatives et sensible aux points aberrants.
- R^2 ajusté : il s'agit du R^2 ajusté du nombre de variables explicatives.
- Critères de vraisemblance pénalisée : BIC ou AIC (pénalise le sur-paramétrage) .
- Critère basée sur une estimation de l'erreur quadratique moyenne : Cp de Mallows.

Exemple retenu

- ✓ Coefficients optimaux définis par la méthode des moindres carrés généralisés
- ✓ Sélection de modèle basée sur le critère de minimisation AIC.
- ✓ combiné à une analyse Q-Q plot (se focalisant sur les quantiles de faibles valeurs)

Les écarts relatifs des quantiles SdS et LSMC sont représentés dans le tableau suivant :

Quantile 0.5%	Quantile 5%	Quantile 25%	Quantile 50%	Quantile 75%
0,23%	0,95%	0,21%	0,32%	0,58%



Méthode LSMC

LSMC – Comparaison avec le Curve Fitting

Principe : Sélectionner un nombre restreint de réalisations des facteurs de risques puis estimer la valeur économiques des fonds propres à ces divers points :

- Déterminer les réalisations des facteurs de risques qui expliquent au mieux la dynamique de l'espérance conditionnelle (dans la zone recherchée). Le recours à une norme peut être envisagé afin de déterminer au mieux les zones correspondant à la queue de distribution.
- Ajuster une courbe permettant de reproduire cette dynamique.



Exemple retenu

Polynôme LSMC :

$$FP_1^{LSMC} \approx \beta_1^0 + \beta_1^1 \times \varepsilon_1^{Tx} + \beta_1^2 \times \varepsilon_1^{Ac} + \beta_1^3 \times \varepsilon_1^{Im} + \beta_1^4 \times (\varepsilon_1^{Ac})^2 + \beta_1^5 \times (\varepsilon_1^{Tx})^2 + \beta_1^6 \times (\varepsilon_1^{Tx})^3 + \beta_1^7 \times (\varepsilon_1^{Tx}) \times (\varepsilon_1^{Ac})^2 + \beta_1^8 \times (\varepsilon_1^{Tx})^2 \times \varepsilon_1^{Ac}$$

Polynôme curve fitting :

$$FP_1^{CF} \approx \beta_1^0 + \beta_1^1 \times \varepsilon_1^{Tx} + \beta_1^2 \times \varepsilon_1^{Ac} + \beta_1^3 \times \varepsilon_1^{Im} + \beta_1^4 \times (\varepsilon_1^{Ac})^2 + \beta_1^5 \times (\varepsilon_1^{Tx})^2 + \beta_1^7 \times (\varepsilon_1^{Tx}) \times (\varepsilon_1^{Ac}) + \beta_1^8 \times (\varepsilon_1^{Tx})^2 \times \varepsilon_1^{Ac}$$

Si certains facteurs croisés sont différents, ils présentent une très faible pondération. L'analyse des coefficients des deux polynômes traduit :

- l'importance des risques solo,
- le poids du risque de taux à la hausse ainsi que son impact en termes de convexité
- la présence d'un risque croisé action taux.

In fine les 2 approches conduisent à des résultats sensiblement identiques sur les zones extrêmes :

Méthode	Quantile 0.5%	Quantile 5 %	Quantile 25 %	Quantile 50 %	Quantile 75 %
LSMC	0,23 %	0,95 %	0,21 %	0,32 %	0,58 %
Curve Fitting	0,25%	0,97%	0,70 %	0,71 %	0,96 %

Méthode LSMC

LSMC – Analyse de la stabilité temporelle

L'analyse de la stabilité de la forme paramétrique est un point essentiel :

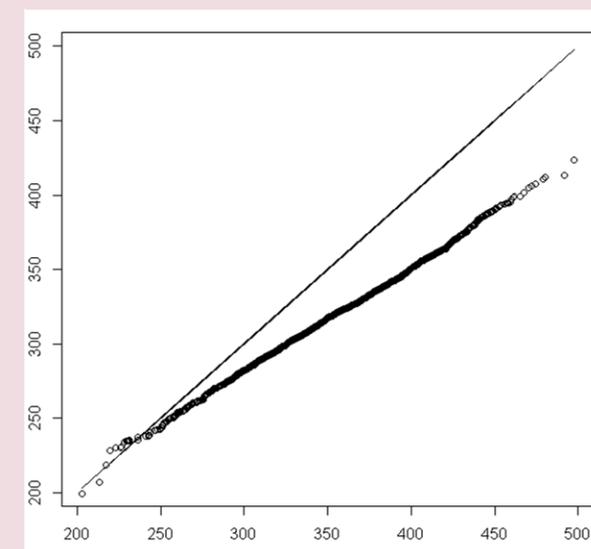
- Elle permet de définir le moment à partir duquel le polynôme ne peut plus être utilisé afin de traduire l'évolution du ratio de couverture
- Elle doit être analysée dans le cas où l'on cherche à retenir le polynôme dans le cadre de l'approche pluri-annuelle.

Exemple retenu : Analyse à 2 ans

Compte tenu de la forte sensibilité aux conditions de marché et à l'évolution du plan stratégique, la forme paramétrique obtenue à 1 an ne s'applique pas aux données obtenues pour la 2ème année de l'ORSA.

Le recalibrage de la forme paramétrique fait apparaître de nouveaux effets croisés notamment entre les taux et l'immobilier

$$FP_2^{LSMC} \gg b_2^0 + b_2^1 \cdot FP_1 + b_2^2 \cdot e_2^{Tx} + b_2^3 \cdot e_2^{Ac} + b_2^4 \cdot (e_1^{Tx})^2 + b_2^5 \cdot (e_1^{Im})^2 + b_2^6 \cdot (e_1^{Tx})^3 \\ + b_2^7 \cdot (e_1^{Tx}) \cdot (e_1^{Im}) + b_2^8 \cdot (e_1^{Im})^2 \cdot e_1^{Tx} + b_2^9 \cdot (e_1^{Tx})^2 \cdot e_1^{Ac}$$



Méthode LSMC

LSMC – Avantages et limites

Avantages

La méthode LSMC permet de constater la présence de convexité par rapport aux facteurs de risque et des effets croisés entre les facteurs de risque.

En supposant que les conditions de marché soient identiques, le calcul du BOF est instantané.

La mise en place d'une telle forme paramétrique permet de répondre aux exigences de l'ORSA qui nécessite des contrôles permanents.

Limites

La méthode LSMC nécessite la mise en place d'un outil permettant l'obtention de scénarios économiques permettant de gérer les interactions actif/passif.

Le nombre de simulations primaires nécessaires à la mise en place de cette méthode est intrinsèquement lié à notre modèle et à la complexité des passifs modélisés dans le contrat d'assurance.

La stabilité de la forme paramétrique au cours du temps est la principale limite de ce type d'approches.

Les tests statistiques d'adéquation de loi non paramétrique (Kolmogorov Smirnov, test du rang et du signe de Wilcoxon, etc.) ne peut que très rarement être mis en place car les hypothèses usuelles ne sont pas vérifiées (normalité des résidus, homogénéité, etc.).



Modèle par revalorisation analytique

Taux de revalorisation analytique

Principe sous-jacent

On considère un contrat d'épargne dont la valeur de rachat est donnée par (r_s étant le taux de revalorisation du contrat) :

$$VR(t) = VR(0) \times \exp\left(\int_0^t r_s(u) du\right)$$

Par définition, on a ($\delta(t)$ est le facteur d'escompte) :

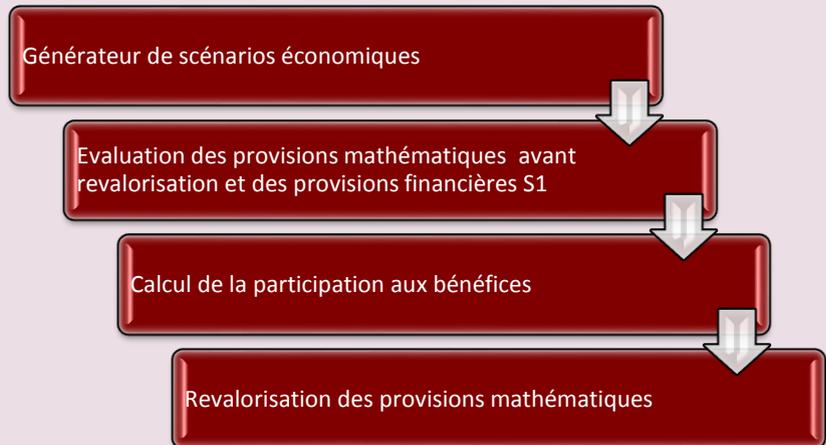
- $BEL(T) = E^{P \otimes Q}(\Lambda) = E^Q(BEL_F)$

- $BEL^F(T) = \int_0^T VR(t) \times S(t) \times \mu(t) \times \delta(t) dt + \delta(T) \times S(T) \times VR(T)$

On pose alors : $E^Q(VR(t) \times \delta(t)) = VR(0) \times E^Q\left(\exp\left(\int_0^t (r_s(u) - r(u)) du\right)\right) = VR(0) \times E^Q\left(\exp\left(\int_0^t \omega(u) du\right)\right)$

Dans le cas d'un contrat d'épargne, le point le plus chronophage se situe au niveau du **module ALM**.

Or dans l'optique de minimiser le volume des rachats conjoncturels, la **revalorisation** appliquée est souvent **calée sur le taux court nominal**.



Partant de ce constat, Planchet et *al.* [2012] proposent des approximations analytiques du BEL obtenues en considérant que l'écart entre le taux de revalorisation continu et le taux court suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck : $d\omega(t) = k \times (\omega_\infty - \omega(t))dt + \sigma_\omega dB(t)$

Taux de revalorisation analytique

Description du modèle

En tant qu'exponentielle de l'intégrale d'un brownien :

$$E^Q \left(\exp \left(\int_0^t (r_s(u) - r(u)) du \right) \right) = \theta(t) = \exp \left(m(t) + \frac{v(t)}{2} \right)$$

avec :

$$\blacksquare \quad m(t) = \omega_\infty \times t + (\omega_0 - \omega_\infty) \frac{(1 - e^{-kt})}{k} \quad v(t) = \frac{\sigma_\omega^2}{2k^3} (1 - e^{-kt})^2 + \frac{\sigma_\omega^2}{k^2} \left(t - \frac{1 - e^{-kt}}{k} \right)$$

On retient par la suite la discrétisation suivante :

$$BEL(T) = VR(0) \times \left(\int_0^T S(t) \mu(t) \theta(t) dt + S(T) \theta(T) \right) \approx VR(0) \times \left(\sum_{t=1}^T \frac{l_{t-1}}{l_0} \times q_{t-1} \times \theta(t) + \frac{l_T}{l_0} \times \theta(T) \right)$$

Afin de prendre en compte l'ensemble des options du contrats, on introduit les rachats conjoncturels en s'appuyant alors sur la formule (assez) générale :

$$\mu(u) = \mu_s(u) + \mu_c(\omega(u)) = \mu_s(u) - \eta \times \omega(u)$$

On obtient alors : $E^P(\Lambda|F) = \int_0^T S(t) \mu(t) \theta(t) dt + S(T) \theta(T)$

$$= \int_0^T S_s(t) (\mu_s(t) + \eta \omega(t)) \exp \left(\int_0^t (1 + \eta) \omega(u) du \right) dt + S_s(T) \exp \left(\int_0^T (1 + \eta) \omega(u) du \right)$$

$$= \int_0^T S_s(t) (\mu_s(t) \theta_1(t) + \eta \theta_2(t)) dt + S_s(T) (1 + \eta) \theta_1(T)$$

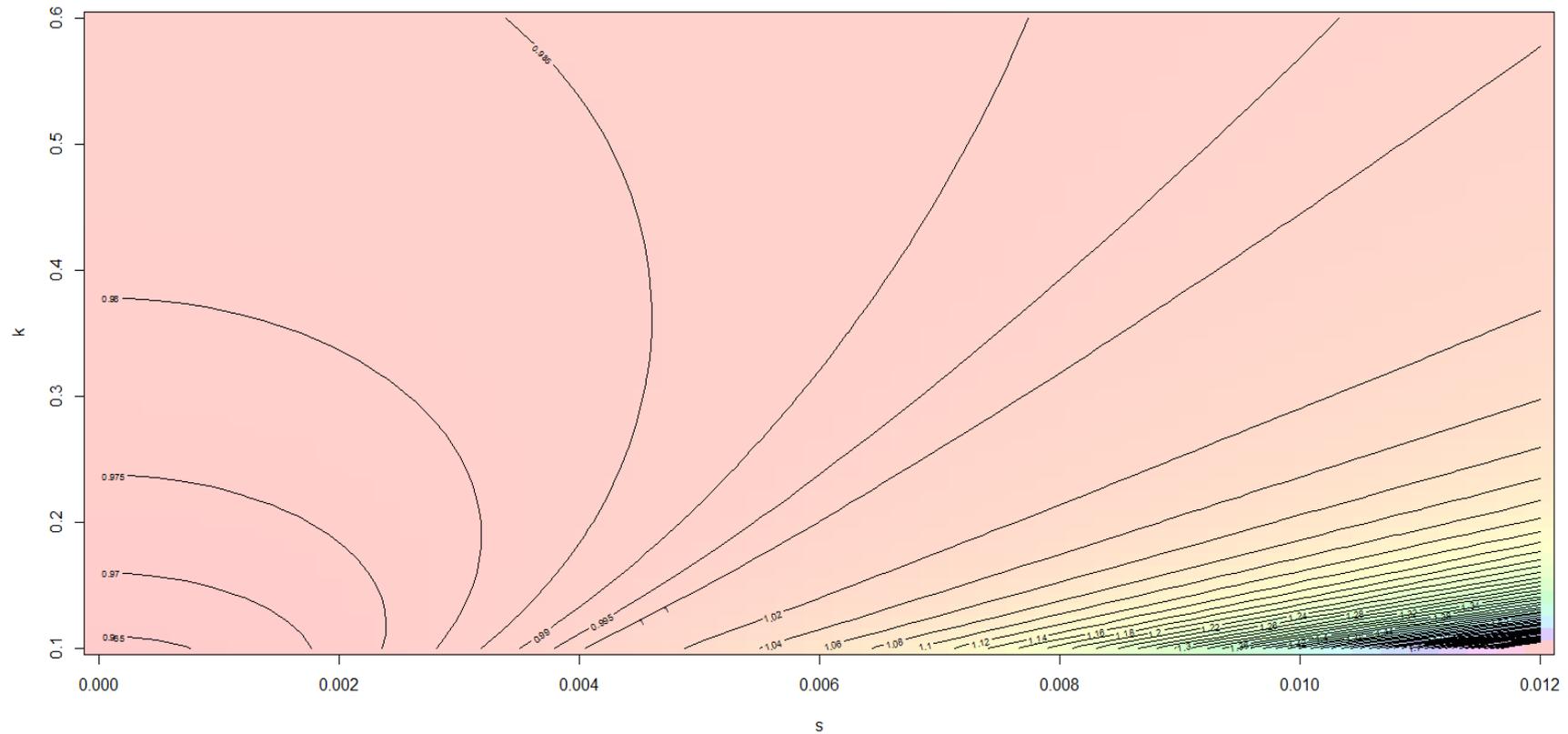
Taux de revalorisation analytique

Description du modèle

On obtient des formes analytiques simples pour les différents coefficients.

$$\theta_1(t) = \exp\left((1+\eta) \times m(t) + (1+\eta)^2 \times \frac{v(t)}{2} \right)$$

$$\theta_2(t) = -\eta \times \left(\frac{d}{dt} m(t) + \frac{(1+\eta)}{2} \times \frac{d}{dt} v(t) \right) \times \theta_1(t)$$



Taux de revalorisation analytique

Description du modèle

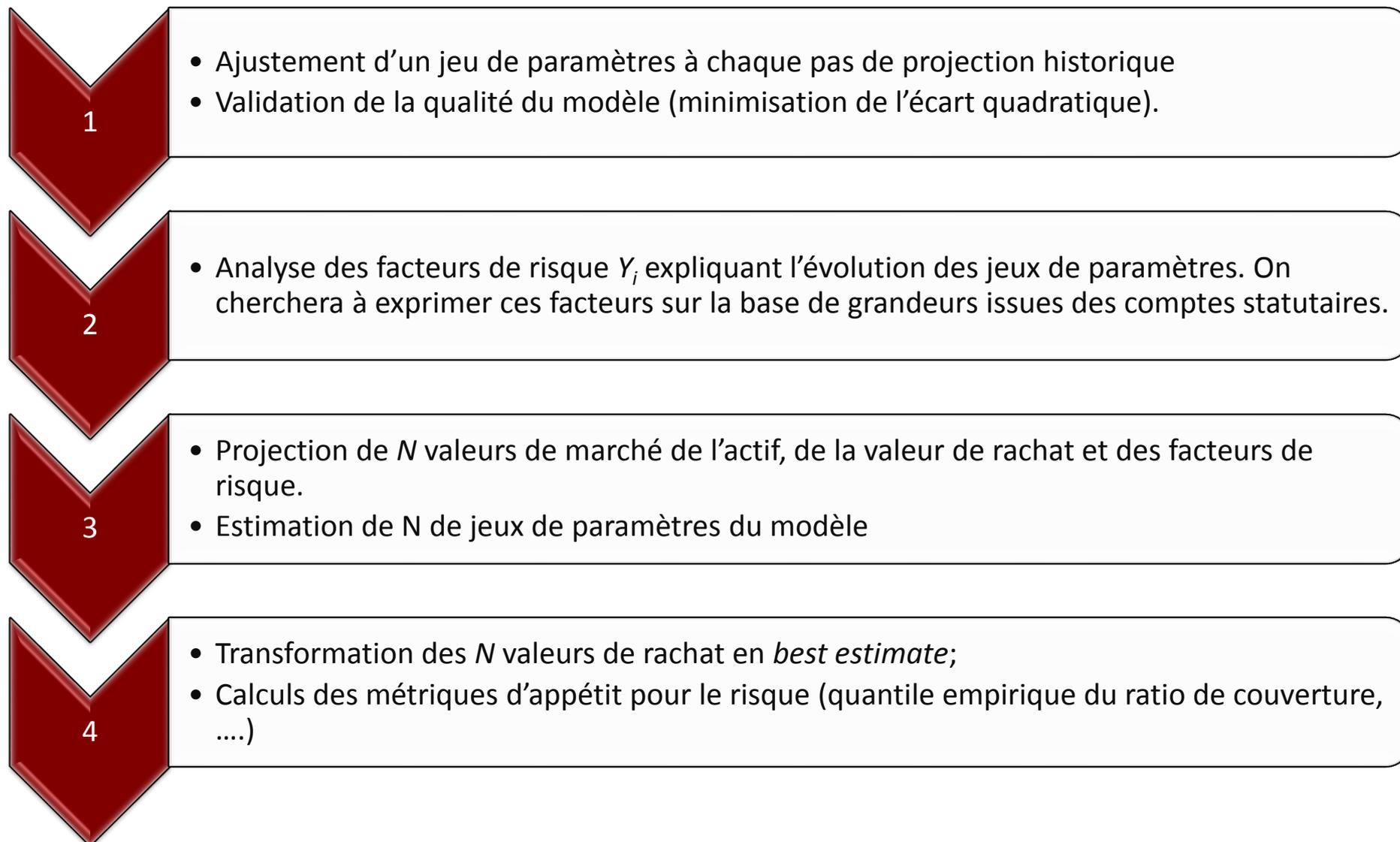
En synthèse ce modèle analytique présente les caractéristiques suivantes :

- un modèle basé sur le principe de **faibles opportunités d'arbitrage** ;
- un *best estimate* principalement soumis à des **risques financiers** ;
- un modèle présentant un **paramétrage simple** (vitesse de retour à la moyenne, tendance à long termes et volatilité du bruit blanc) ;
- permet d'obtenir une **valorisation du *best estimate* instantanée** pouvant donc être retenue dans une logique d'ORSA.

On notera de plus que la contrainte liée à la dynamique de retour à la moyenne peut facilement être contournée en retenant une simple dynamique auto régressive (dans le cas d'un marché financier particulièrement volatile).

Taux de revalorisation analytique

Mise en œuvre



Taux de revalorisation analytique

Mise en œuvre

Il reste à introduire une modélisation de l'actif du bilan (sous la probabilité historique) afin de décrire la dynamique des fonds propres.

La dynamique retenue afin de projeter les variables financières est un processus de Vasicek pour les taux courts, un modèle de Black & Scholes pour l'actif de la compagnie :

$$dr(t) = k_r \times (r_\infty - r(t))dt + \sigma_r dB_r(t)$$

$$dr_A(t) = \mu_A dt + \rho \sigma_A dB_r(t) + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_A dB_A(t)$$

$$d\omega(t) = k_\omega \times (\omega_\infty - \omega(t))dt + \frac{\rho_{s,a} \sigma_\omega}{\sqrt{1 - \rho^2}} dB_A(t) + \sqrt{\frac{1 - \rho_{s,a}^2 - \rho^2}{1 - \rho^2}} \sigma_\omega dB_\omega(t)$$

On retient un modèle de Hull & White pour la projection risque neutre.

On déduit alors aisément une équation d'évolution des fonds propres :

$$FP_{t+1} = e^{r(t)} \times \left(\begin{array}{l} A(t) \times e^{\mu_A - r(t) + \rho \sigma_A \varepsilon_r(t+1) + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_A \varepsilon_A(t+1)} \\ - PM(t) \times e^{-r(t)} \times (1 - (1 - q_s(t)) \times e^{\eta \times \omega(t)}) \\ - PM(t) \times e^{(1+\eta)\omega(t)} \times (1 - q_s(t)) \times \rho(t+1, T, \omega(t+1)) \end{array} \right)$$

qui conduit à une expression (relativement) explicite du SCR de l'année :

$$SCR_t \approx FP_t - VaR_t \left(\begin{array}{l} A(t) \times e^{\mu_A - r(t) + \rho \sigma_A \varepsilon_r(t+1) + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_A \varepsilon_A(t+1)} \\ - PM(t) \times e^{-r(t)} \times (1 - (1 - q_s(t)) \times e^{\eta \times \omega(t)}) \\ - PM(t) \times e^{(1+\eta)\omega(t)} \times (1 - q_s(t)) \times \rho(t+1, T, \omega(t+1)) \end{array} \right)$$

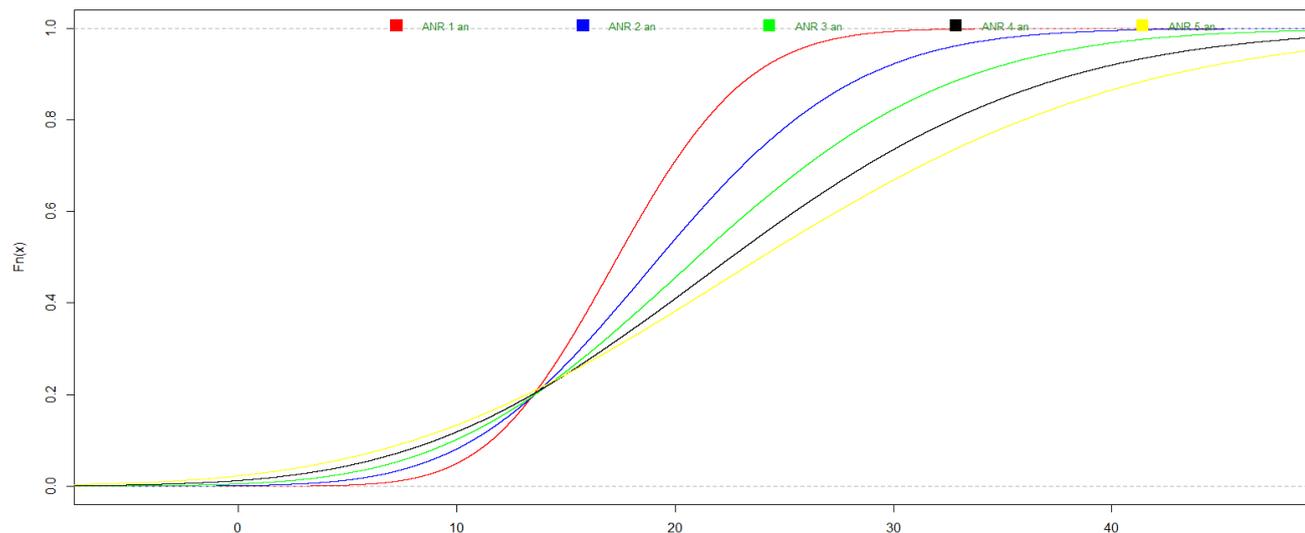
Taux de revalorisation analytique

Mise en œuvre

Sur cette base la projection des variables d'intérêt est effectuée sur les 5 prochaines années. Ces variables sont :

- la valeur de la provision mathématique ;
- les flux de prestation ;
- la valeur de marché de l'actif ;
- la réalisation des variables financières.

Ceci nous permet de projeter une évolution sur les 5 ans à venir de l'ANR :



Taux de revalorisation analytique

Mise en œuvre

Sur la base de la distribution du bilan de la compagnie sur les 5 prochaines années, on met en place un processus d'ORSA basé sur le quantile annuel à 5 % (i.e. pour la $j^{\text{ème}}$ année on se positionnera sur le quantile de niveau $1-0,95^j$).

Pour chaque année de projection, le processus est mené en deux étapes :

- Sur la base de la connaissance de la distribution du bilan relative à la $j^{\text{ème}}$ année, on sélectionne la trajectoire correspondant au quantile empirique à $1-0,95^j$;
- Conditionnellement à l'information relative à la trajectoire sélectionnée, on calcule empiriquement le quantile à 0,5 % de l'ANR relatif à l'année $j+1$.

Le fait de retenir un quantile basé sur la seule valeur de l'ANR conduit à des résultats instables.

En effet dans la problématique qui nous intéresse, l'ANR est la synthèse imparfaite des deux principales variables d'intérêt à savoir l'actif et le passif.

De ce fait, les deux étapes présentées ci-avant sont réalisées cent fois, puis on retient *in fine* la moyenne empirique des différents quantiles simulés. On trouve alors l'évolution des ratios de couverture suivante :

En 0	A 1 an	A 2 ans	A 3 ans	A 4 ans	A 5 ans
176%	146 %	152 %	158 %	166 %	174 %



4
section

Modèle Non-Vie

Modèle Non-Vie

Modèle de base : Le cadre de référence

Le modèle présenté ci-après permet de gérer les contrats d'assurance non vie à faible durée. Il se place dans un cadre où la politique d'ORSA est établie sur la base d'un modèle interne :

$$SCR_T: P(A_{t+1} - L_{t+1} > 0) = 99,5\%$$

En supposant que les flux de prestations et de cotisation sont versés en fin d'année, on a :

$$P\left(SCR_t \geq \frac{F_{t+1} - C_{t+1} + L_{t+1}}{1 + R_{t+1}} - L_t\right) \Leftrightarrow SCR_t = VaR\left(\frac{F_{t+1} - C_{t+1} + L_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99,5\%\right) - L_t$$

Le problème (relativement classique) de cette équation réside dans le caractère cyclique de la marge pour risque. En s'inspirant de l'approximation n°4 proposée par l'EIOPA ($RM_t = \alpha \times D_t \times SCR_t$) on obtient :

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \times D_t} VaR\left(\frac{F_{t+1} - C_{t+1} + \left(1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t}\right) \times L_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99,5\%\right) - BEL_t$$

$$SCR_t = VaR(\chi_{t+1}; 99,5\%) - L_t$$

Cette expression n'est toutefois pas simple à manipuler car elle fournit une équation implicite en SCR_t qui ne peut être résolue que numériquement.

Aussi, la connaissance de la loi de χ_t revient à connaître le montant de SCR_t et donc de mener le processus d'ORSA.

On notera que cette simplification revient à considérer, qu'en run off, les variables aléatoires SCR_t et BEL_t présentent une évolution de leur espérance qui est proportionnelle. Outre le fait que cette hypothèse est proposée par l'EIOPA, elle revient à considérer qu'une diminution de x% du BEL implique une diminution de x% du risque et donc du SCR.

Modèle Non-Vie

Modèle de base : La dynamique des facteurs de risque

Il s'agit maintenant de spécifier les différents facteurs intervenants dans l'équation précédente. Quatre facteurs de risque sont retenus dans le modèle :

- les cotisations;
- le best estimate (risque de tarification passée);
- le ratio combiné (risque de tarification future et risque de frais);
- le rendement de l'actif.

Les calculs sont menés en deux étapes :

- dans un premier temps on choisit une dynamique temporelle pour les facteurs de risque
- dans un second temps, on en déduit les équations d'évolution des autres variables d'intérêt telles que les prestations et la valeur de l'actif.

On suppose que conditionnellement à l'information disponible en t , l'évolution des facteurs de risque à la date t est définie par :

$$C_{t+1} = C_t \times \exp\left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2} + \sigma_c \times \varepsilon_{t+1,c}\right)$$

$$S_{t+1} = S_t \times \exp\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2} + \sigma_a \times \varepsilon_{t+1,a}\right)$$

$$BEL_{t+1} = BEL_t \times \exp\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}\right) + \beta_{t+1} \times C_{t+1}$$

$$\beta_{t+1} = \beta \times \exp\left(-\frac{\sigma_\beta^2}{2} + \sigma_\beta \times \varepsilon_{t+1,\beta}\right)$$

où les ε_i sont des bruits blancs gaussiens indépendants.

Le taux de variation des provisions μ_p doit être impacté par l'effet d'actualisation et le niveau des prestations réglées : $\mu_p(\mathbf{t}) = \mathbf{r} + \ln(1 - \varphi)$ avec φ constante.

Modèle Non-Vie

Modèle de base : Autres équations d'évolution

Via l'équation relative au processus d'évolution du *best estimate*, on a :

$$BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1} = BEL_t \times \exp\left(r - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}\right) \times (1 - \varphi)$$

Cette équation traduit la consommation des provisions en *run-off* : la variation tendancielle du best estimate est la conséquence de l'effet de désactualisation minoré des prestations servies. En identifiant les deux termes de l'équation, on trouve alors :

$$F_{t+1} = \theta \times (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1})$$

Avec : $\theta = \frac{\varphi}{1 - \varphi}$

On peut alors modéliser l'ensemble des éléments du bilan simplifié :

- $A_t = A_{t-1} \times (1 + R_t) - F_t + C_t$
- $L_t = BEL_t + RM_t = BEL_t + \alpha \times D_t \times SCR_t$
- $F_t = \theta \times (BEL_t - \beta_t \times C_t)$

et construire la distribution du taux de couverture des engagements réglementaires : $\pi_t = \frac{A_t - L_t}{SCR_t}$

Mais pour que le modèle soit utilisable en pratique il faut être capable de calculer le SCR de manière analytique.

Modèle Non-Vie

Modèle de base : Formule explicite pour le SCR projeté

Tout se ramène donc à déterminer la loi conditionnelle en t de :

$$\chi_{t+1} = \frac{(c_t + \theta) \times BEL_{t+1} - (1 + \theta \times \beta_{t+1}) \times C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

avec $c_t = 1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_t$

Compte tenu de la forme des lois conditionnelles des variables BEL , C et $1+R$, on approche la loi de χ par une loi log-normale dont les paramètres sont choisis pour que les deux premiers moments soient exacts.

On trouve après quelques calculs : $\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2}$ et $\sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 + \sigma_a^2$

avec : $\sigma_t^2 = \ln(1 + \omega_t^2)$ $\mu_t = \ln \left(\frac{(c_t + \theta) \times e^{\mu_p} \times BEL_t + (1 - c_t \times \beta e) \times C_t \times e^{\mu_c}}{\sqrt{1 + \omega_t^2}} \right)$

$$\omega_t = \sqrt{\frac{(c_t + \theta)^2 \times BEL_t^2 \times e^{2\mu_p(t)} \times (e^{\sigma_p^2} - 1) + c_t^2 \times \beta^2 \times (e^{\sigma_\beta^2} - 1) \times C_t^2 \times e^{2\mu_c + \sigma_c^2} + C_t^2 \times e^{2\mu_c} \times (e^{\sigma_c^2} - 1) \times (1 - c_t \times \beta)^2}{(c_t + \theta) \times e^{\mu_p} \times BEL_t + (1 - c_t \times \beta) \times C_t \times e^{\mu_c}}}$$

Le SCR se calcule alors via la formule fermée suivante :

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \times D_t} \left(\exp(\mu_t(\chi) + \sigma_t(\chi) \times \phi^{-1}(99,5\%)) - BEL_t \right)$$

Cette équation nécessite la mise en œuvre d'une résolution numérique. Une méthode par dichotomie est suffisante pour résoudre numériquement cette équation.

Modèle Non-Vie

Modèle de base : Prise en compte de plusieurs lignes d'affaires

L'utilisation pratique du modèle proposé ici implique de pouvoir prendre en compte plusieurs lignes d'affaires adossées à un actif général, autrement dit de distinguer des BEL et des cotisations par ligne. Dans ce cas on a :

$$\chi_{t+1} = \frac{\sum_{j=1}^n \left((c_t^j + \varphi_t^j) BEL_{t+1}^j - C_{t+1}^j \right)}{1 + R_{t+1}}$$

et on peut donc utiliser encore une approximation par une loi log-normale de la loi conditionnelle de x_{hi} , seul le calcul des deux premiers moments du numérateur est modifié. Il est simple de prendre en compte la dépendance entre les branches, pour autant que celle-ci soit mesurée par des coefficients de corrélation entre les lois normales sous-jacentes. On prend ainsi en compte l'effet de l'évolution des primes sur le *mix-produit* et peut identifier des arbitrages dans le politique de souscription.



section

Exemple de modèle par stress tests Vie

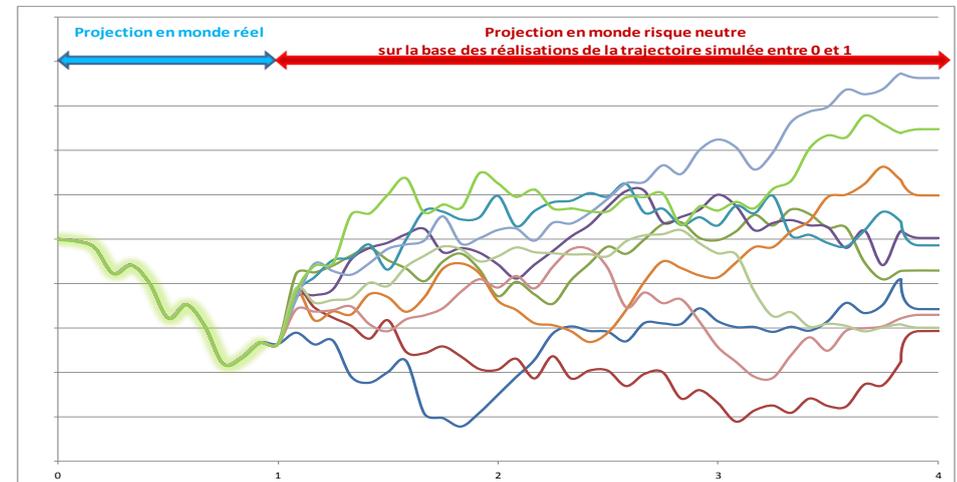
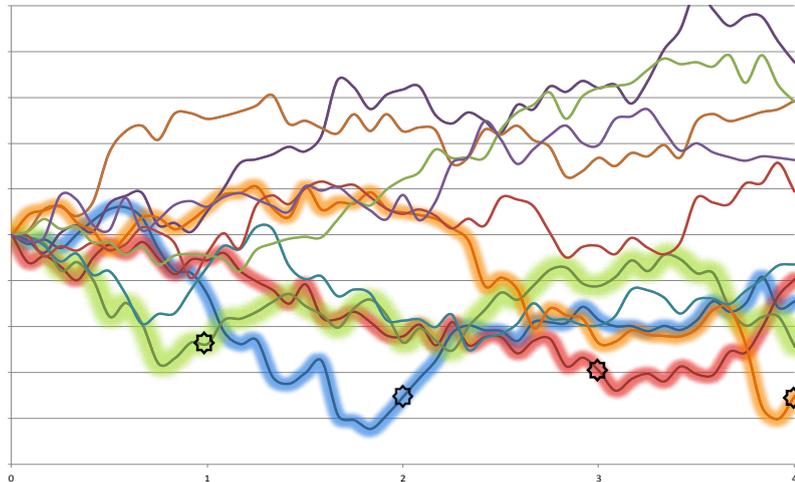
Exemple de mise en œuvre par stress tests

Principe du modèle

Les interactions actifs-passifs ainsi que les nombreux facteurs de risques (aléa financiers, TMG, rachats conjoncturels, écarts de duration et de convexité) empêchent de déterminer avec exactitude les scénarios adverses au-delà de 1 an.

Aussi, une méthodologie mélangeant simulations dans les simulations et sélection de trajectoire pourra être retenue :

1. projeter un grand nombre de valeurs du bilan en normes françaises (ainsi que la valeur de marché de l'actif) sur la durée du plan stratégique ;
2. sélectionner, *via* des indicateurs de risques, les trajectoires défavorables ;
3. calcul des ratios de couverture relatifs à ces trajectoires défavorables.



Exemple de mise en œuvre par stress tests

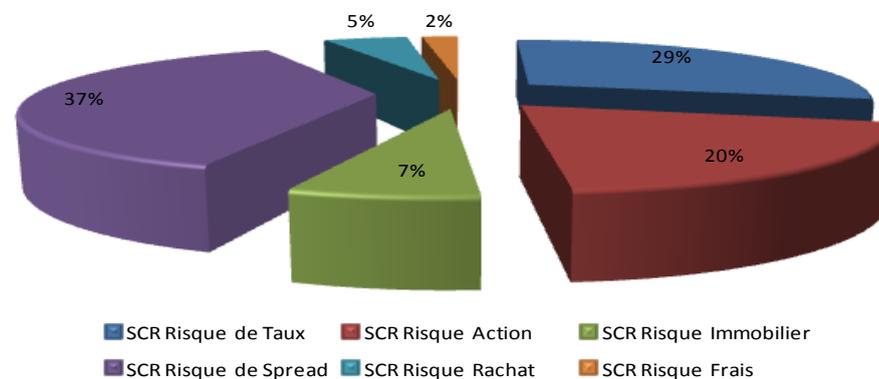
L'exemple retenu

Une société fictive

- commercialisant un **contrat en Euros sans taux garantis**,
- bénéficiant de réserves financières importantes,
- avec un ratio prudentiel évalué à :
 - 250 % sous Solvabilité 1 ;
 - **202 %** sous Solvabilité 2.

Mise en œuvre concrète focalisée sur le **risque de marché**

Son **profil de risque initial** :

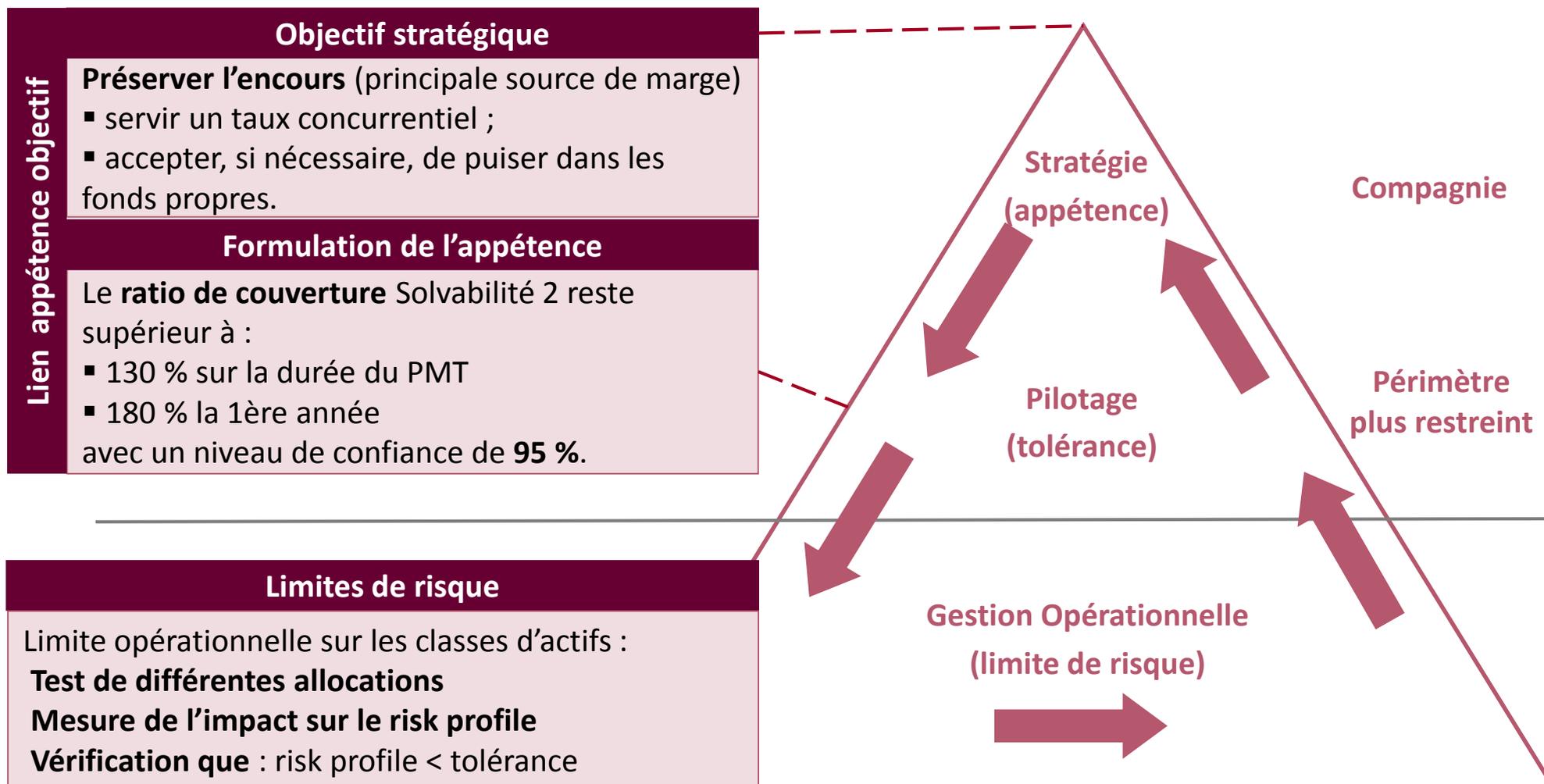


Une consommation de capital principalement financière (*spread*, taux et actions)

Dimension stratégique	Indicateur	Formulation de l'appétence
Solvabilité	Ratio de couverture Solvabilité 2	Le ratio dans un scénario stressé reste supérieur à X% du taux de couverture cible sur la durée du Plan Moyen Terme (PMT)

Exemple de mise en œuvre par stress tests

L'exemple retenu



Exemple de mise en œuvre par stress tests

L'exemple retenu

1. Méthode stochastique : à dire de modèle

Sélection d'indicateurs (KRI) sur les facteurs de risque



Projection des réalisations de la valeur de marché de l'actif et du bilan statuaire



Sélection trajectoires dont le quantile d'un indicateur = quantile du ratio couverture



Calcul des quantiles associés aux indicateurs de risques (KRI)

- Pour chaque risque majeur, un **indicateur (KRI)** de suivi est défini et une **dynamique** lui est **associée**.
- Choix d'indicateurs **compréhensibles** par un tiers.
- Les indicateurs (KRI) décrivent le **scénario quantile** et permettent de combiner des scénarios difficilement envisageables a priori du fait de la complexité des interactions actif passif.

2. Méthode déterministe : à dire d'expert

Identification des facteurs de risque majeurs



Calcul de sensibilités à ces risques majeurs



Construction des scénarios combinant plusieurs risques majeurs avec les chocs associés



Détermination des chocs marginaux pour ces risques majeurs

- Evaluation du comportement du bilan pour un scénario de stress donné (crise européenne , ...).
- Scénarios appréhendables à tous les niveaux du management (communication).
- Détermination des seuils, dans le cadre l'appétence au risque, plus simple à fixer.

3. L'approche complémentaire :

- Objectif : mettre en évidence les différences majeures par une analyse comparative effectuée entre les deux lots de trajectoires fabriqués (1. et 2.)
- Cette approche permet de :
- Diminuer la fragilité croissante des scénarios à dire d'experts au fur et à mesure de l'allongement de la prédiction
- Fournir une estimation de l'incertitude des approches à dire d'experts.

Les grands principes

Passage d'une logique Pilier 1 à une logique Pilier 2

Spécificités :

- risque *business* (ajout des affaires nouvelles)
 - risque souverain
 - 2 probabilités : historique + risque neutre
- Le risque souverain non réduit à une question de modèle
 - Il relève davantage d'une modélisation économique et politique que d'une modélisation financière répliquable dans un modèle.

Modélisation des règles du management

Politique de revalorisation : servir un taux concurrentiel

Si production financière insuffisante alors :

- reprise de la Provision de Participations aux Bénéfices
 - réalisation des éventuelles PVL R 332.20
 - consommation de fonds propres dans une limite déterminée
- **Politique financière**
 - grille d'allocation fixe sur la durée de projection
 - réinvestissements obligatoires à maturité constante
 - **Rachats conjoncturels** : application de la loi ACP (ONC)

Modélisation des risques

- **Gestion de la prime de risque**
 - l'objectif est de lier d'une manière cohérente les probabilités risque neutre et historique.
 - partant des modèles retenus sous le GSE risque neutre en sont déduits les modèles pour le GSE historique.
- **Gestion du GSE**
 - le GSE global est construit dans l'optique d'être *Market Consistent*, calé sur les taux swaps, en présentant un compromis « volatilité vs pragmatisme ».
- **Dynamique du GSE sous Q**
 - L'ORSA conduisant à valoriser des *best estimate* sur la durée du PMT, il est nécessaire de trouver un compromis entre dynamique du GSE et complexité des modèles.

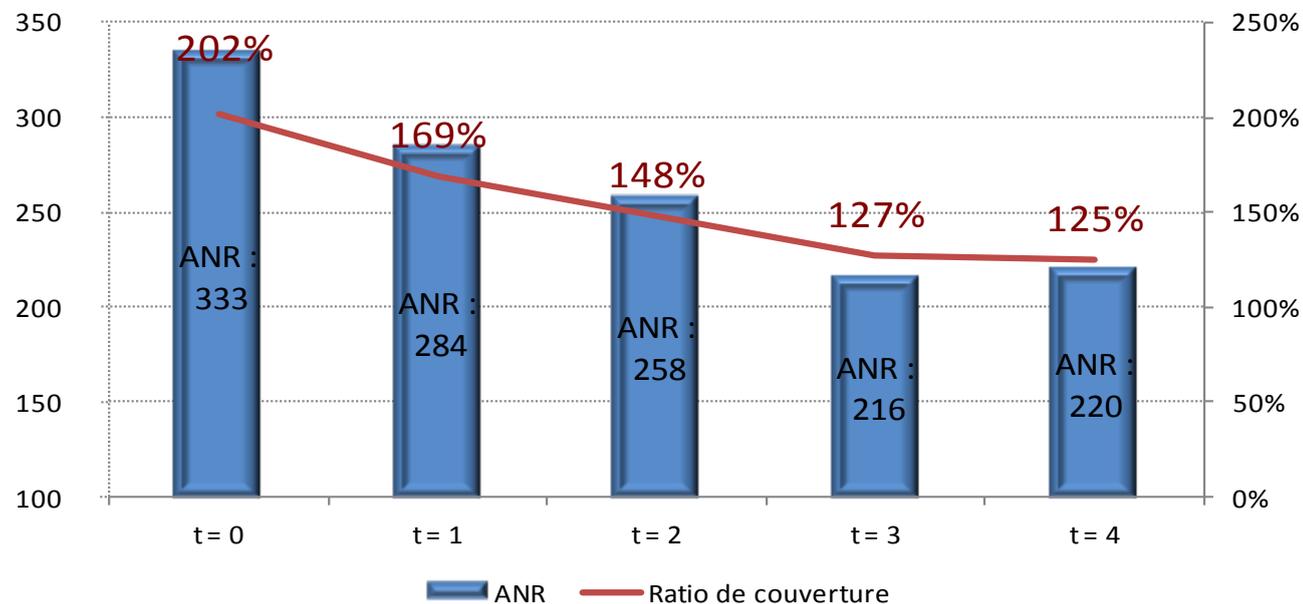
- **Les modèles retenus pour le GSE global** sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Risque	Variable d'état	Modèle de prix	Prime de risque
Taux	Taux court Vasicek	Vasicek Généralisé	$\lambda_{\text{Taux}}(t) = \frac{k(b - b_t)}{\sigma}$
Actions	VM actions Black & Scholes	Black & Scholes	$\lambda_{\text{Action}}(t) = \frac{\mu_{\text{action}} - r_t}{\sigma_{\text{action}}}$
Immobilier	VM immobilier Black & Scholes	Black & Scholes	$\lambda_{\text{Immo}}(t) = \frac{\mu_{\text{Immo}} - r_t}{\sigma_{\text{Immo}}}$

Typologie	Indicateurs (KRI)	Risque examiné	Description
Facteurs de risque	Hausse des taux	Une hausse des taux sur plusieurs années	Somme des taux courts entre 0 et t
	Baisse action	Une baisse du portefeuille action (actif le plus volatile)	Performance de l'indice action capitalisé
	Rendement global	Une baisse du portefeuille global (actions, obligations, immobilier)	Evolution de la valeur de marché des actifs
Impact des risques	Proxy ANR	Richesse globale de la compagnie	Proxy de l'ANR

Inadéquation du PMT initial avec l'appétence

- Ci-contre le **PMT** avec un ratio au niveau de confiance **95 %**
- **Non conforme à l'appétence :**
 - 169 % < 180 % en t = 1
 - 127% < 130 % en t = 3
 - 125% < 130 % en t = 4



	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4
Proxy ANR	169%	150%	129%	129%
Hausse des taux	191%	185%	138%	125%
Baisse action	195%	172%	191%	159%
Rendement global	171%	148%	127%	139%
Minimum du ratio de couverture	169%	148%	127%	125%

Déformation par facteur de risque

- le risque action relativement faible
- à court terme, le principal facteur de risque est la rentabilité globale du portefeuille
- à moyen terme, le risque de hausse des taux devient prépondérant.

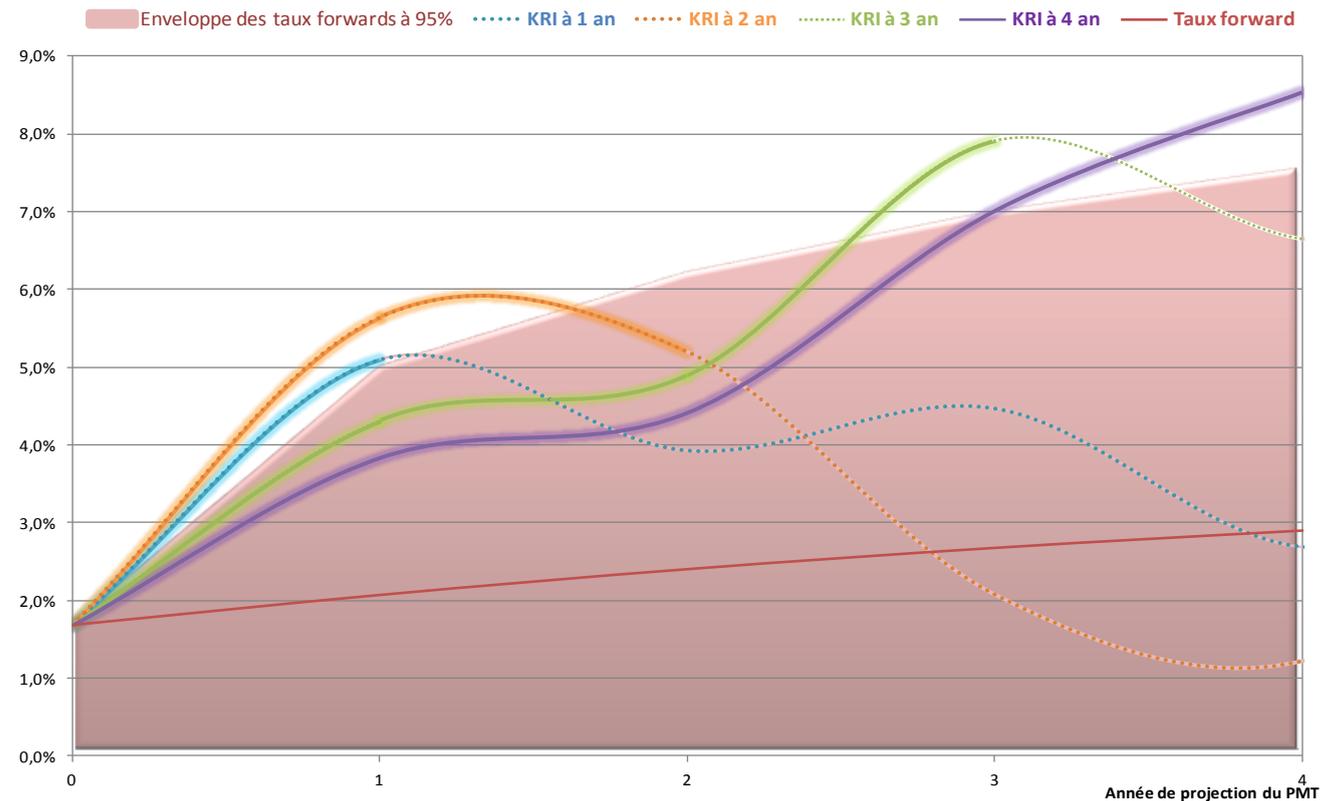
- Ci-contre les trajectoires de taux (KRI Taux) au **quantile 95 %** sur la durée du PMT.

- Chacun des indicateurs (KRI) sélectionnés s'est avéré pertinent.

- Permet d'appréhender le ratio de couverture avec :

- des indicateurs adaptés à un **suivi régulier** (communication, tableau de bord)

- un faible nombre de simulations (4 KRI x 4 années = 16 simulations) **gain opérationnel et réactivité accrue**



Exemple de mise en œuvre par stress tests

L'exemple retenu

Dans notre exemple, l'entreprise a décidé que la **mise en cohérence du *risk profile* avec l'appétence** est à réaliser :

- [A] sur le périmètre de l'allocation d'actifs,
- [B] en conservant les pondérations du *risk profile* financier

Étape [A] : Détermination de l'ajustement nécessaire du ratio cible avant diversification :

12,7 % à gagner sur le *risk profile* financier

Ratio cible [1]	Ratio constaté [2]	Ecart [3]=[1]-[2]	Diversification [4]	Ajustement [5] = [4] / [3]
180 %	169 %	11 %	86 %	12,7 %

Étape [B] : Cet ajustement à 12,7 % est réparti en fonction des pondérations du profil de risque financier (établi sur la base des résultats Pilier 1) de la manière suivante :

	Obligations	Actions	Immobiliers	Total
Profil de risque financier	72%	21%	7%	100,00%
Evolution du ratio de couverture	9,06%	2,71%	0,90%	12,67%

Exemple de mise en œuvre par stress tests

L'exemple retenu

De par la complexité des interactions actif-passif : **pas de formule fermée permettant de relier directement la tolérance aux limites opérationnelles.**

Le calcul a été mené sur la base d'un abaque indiquant l'évolution du ratio de couverture dans le cas d'une évolution, par pas de 1 %, de l'allocation stratégique :

Actions	Immobiliers	Obligations	Monétaires	Ratio de couverture	Evolution
10 %	5 %	70 %	15 %	169 %	s.o.
9 %	5 %	70 %	16 %	176 %	7,0 %
9 %	4 %	70 %	17 %	177 %	1,1 %
9 %	4 %	69 %	18 %	179 %	2,3 %

Diminuer l'allocation action de 1 % au profit de l'allocation monétaire équivaut à augmenter le ratio de couverture de 7 % → la cible de 2,71 % relative aux actions conduit à diminuer l'allocation action de 0,39 %.

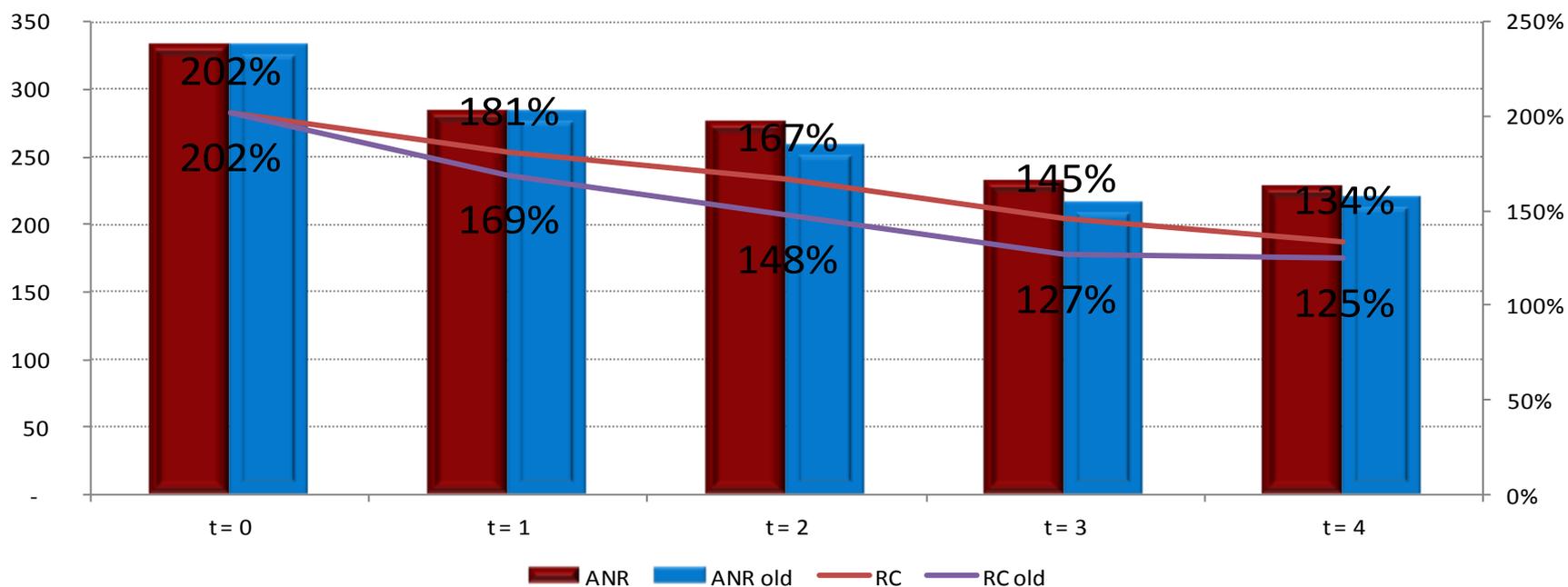
En résumé, les évolutions à apporter à l'allocation d'actifs du PMT sont les suivantes

	Obligations	Actions	Immobiliers	Total
Profil de risque financier	72%	21%	7%	100,00%
Evolution du ratio de couverture	9,06%	2,71%	0,90%	12,67%
Evolution allocation	-4,00%	-0,39%	-0,83%	-5,22%

Exemple de mise en œuvre par stress tests

L'exemple retenu

L'allocation financière ajustée sur la durée du PMT induit un **ratio de couverture** qui, désormais, est **cohérent avec l'appétence** au risque de la compagnie.



La mise en place du processus d'ORSA présenté ci-avant a permis :

- d'**ajuster le plan stratégique** afin de respecter l'appétence au risque (que ce soit pour la contrainte à un an ou sur toute la durée du plan à moyen terme) ;
- de **compléter les situations à risque définies « à dire d'expert »** en isolant les risques à moyen terme et à long terme.

Références

- AGENOS X. [2010] *Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie*, Mémoire d'actuaire CEA
- CEIOPS [2010] Draft proposal for Level 3 Guidelines on Own Risk and Solvency Assessment, Consultation Paper
- CEIOPS [2009] Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR standard formula - Article 111 (f) Operational Risk
- CEIOPS [2010] Advice for L2 Implementing Measures on SII: Calibration of Non-life Underwriting Risk
- CEIOPS [2008] Own Risk and Solvency Assessment, Issues Paper
- ACP [2011] « Piliers II et III de Solvabilité 2, points de vue de l'Autorité de Contrôle Prudentiel », Université d'été IA 2011
- GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », Bulletin Français d'Actuariat, vol. 10, n°20.
- PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Le Pilier 2 : du calcul de l'exigence de marge au pilotage d'un profil de risques. », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°153 du 01/12/2010.
- GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2011] « Mesure de l'incertitude sur le taux de couverture des engagements dans un cadre ORSA », Les cahiers de recherche de l'ISFA, WP2142
- BONNIN F., JUILLARD M., PLANCHET F. [2012] « Calculs de *best estimate* de contrats d'épargne par des formules fermées Application à l'ORSA », Les cahiers de recherche de l'ISFA, WP2012.5
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Économica.
- PORTAIT R., PONCET .P [2009] Finance de marché, seconde édition, Paris : Dalloz