

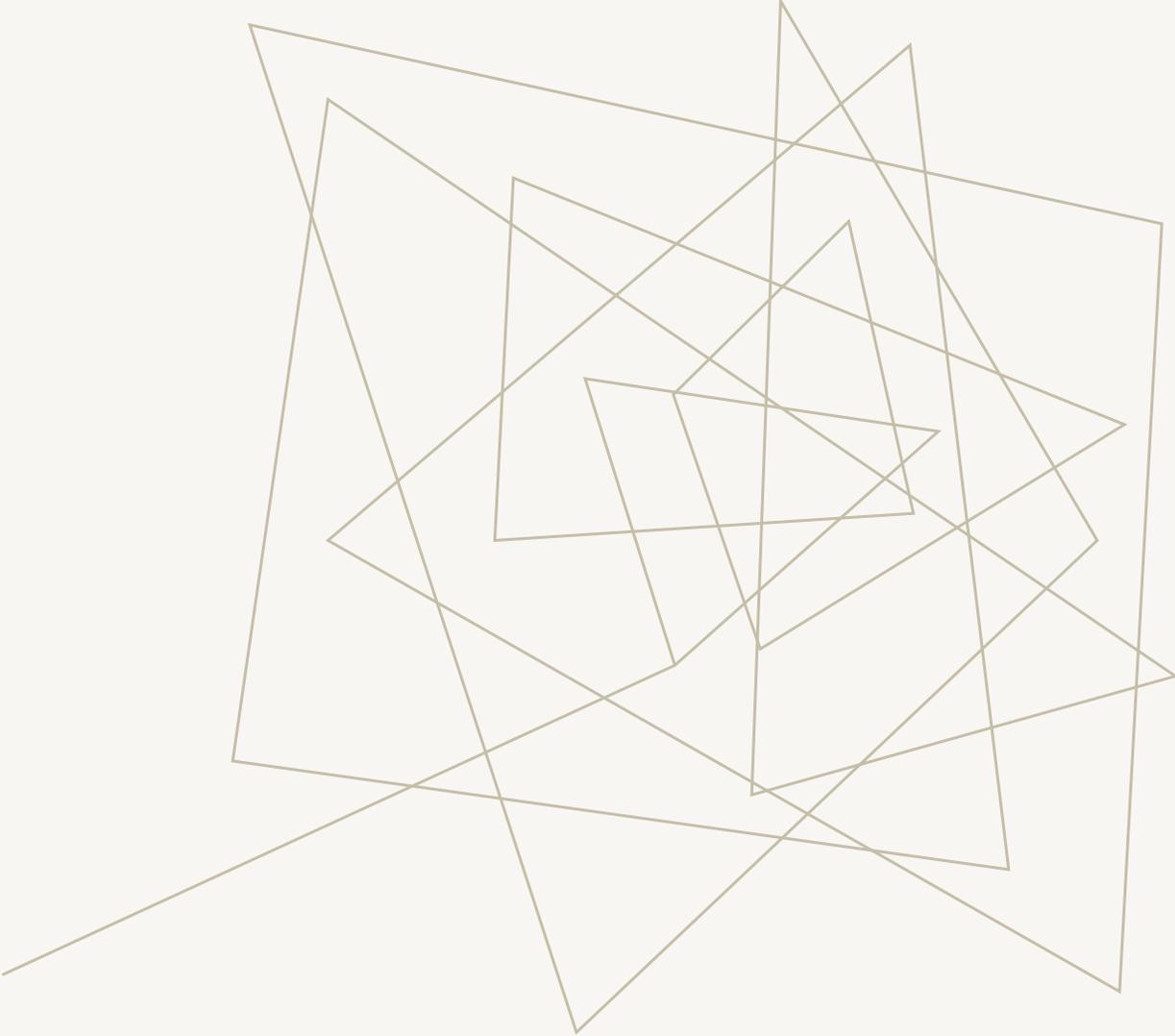
MODÉLISATION ET ANALYSE D'UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES NON- PARAMÉTRIQUE

Lucie AUBERT-LASSARADE et Papa Thiecouta DIALLO

Jeudi 24 avril 2025

SOMMAIRE

- I. Contexte et problématiques
- II. Construction d'un GSE historique non-paramétrique
- III. Modèle RVFL : projections historiques
- IV. Modèle RVFL : projections risque-neutres
- V. Application : Calcul du *Best Estimate* sur un portefeuille vie fictif
- VI. Conclusion



I. CONTEXTE ET PROBLÉMATIQUES

SOLVABILITÉ II : DOUBLE POINT DE VUE POUR LES ASSUREURS

La directive européenne Solvabilité II

- ❖ Bilan en accord avec la réalité des marchés *dont* Provisions techniques *en Best Estimate*
- ❖ SCR *en* modèle interne
- ❖ ORSA *pour* évaluer le besoin global de solvabilité

GSE
risque-neutre

GSE
historique

DEUX MESURES DE PROBABILITÉS

Historique

\mathbb{P}

- Mesure « naturelle »
- La probabilité qu'un évènement se produise
- Répliquer les comportements tirés du passé

Projection

Risque-neutre

\mathbb{Q}

- Mesure conceptuelle
- Rendement de l'actif est en moyenne égal au taux sans risque
- Projections centrées autour du taux sans risque

Valorisation

PRÉSENTATION DES GSE

« Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un **ensemble de modèles** (taux, actions, spreads de crédit, inflation, etc.) permettant de **simuler aléatoirement des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers**, qui ont une **incidence** sur la **valeur** et les **performances** de l'**actif** de l'organisme d'assurance. » (ACPR)

PROBLÉMATIQUES ACTUELLES

- **Traditionnellement** GSE basés sur des **modèles de diffusion paramétriques**
 - Limites quant à la reproduction d'évènements passés
 - Manque de flexibilité pour capturer toute la variabilité des données réelles.
- **Unification du cadre méthodologique** entre les **GSE utilisés** pour la **valorisation** et la **projection**
- **Démocratisation** du **Machine Learning** dans le monde assurantiel

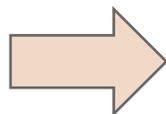
OBJECTIFS DU MÉMOIRE

Objectif n°1

Dynamiques de diffusion browniennes

- Modèles Action/Immobilier :
 - Black-Scholes ;
 - Heston ...
- Modèles de Taux :
 - Vasicek ;
 - LMM ...

Plus de flexibilité pour mieux reproduire les événements passés

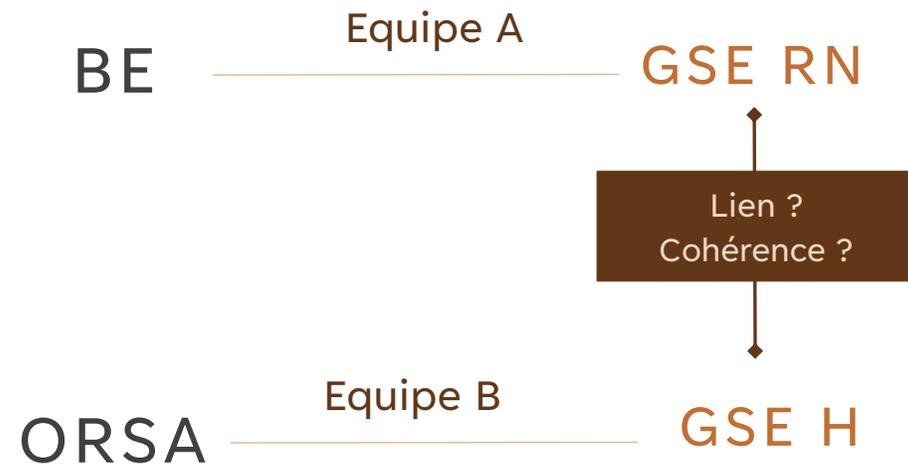


Plus la notion de dynamique
Moins de choix de modélisation

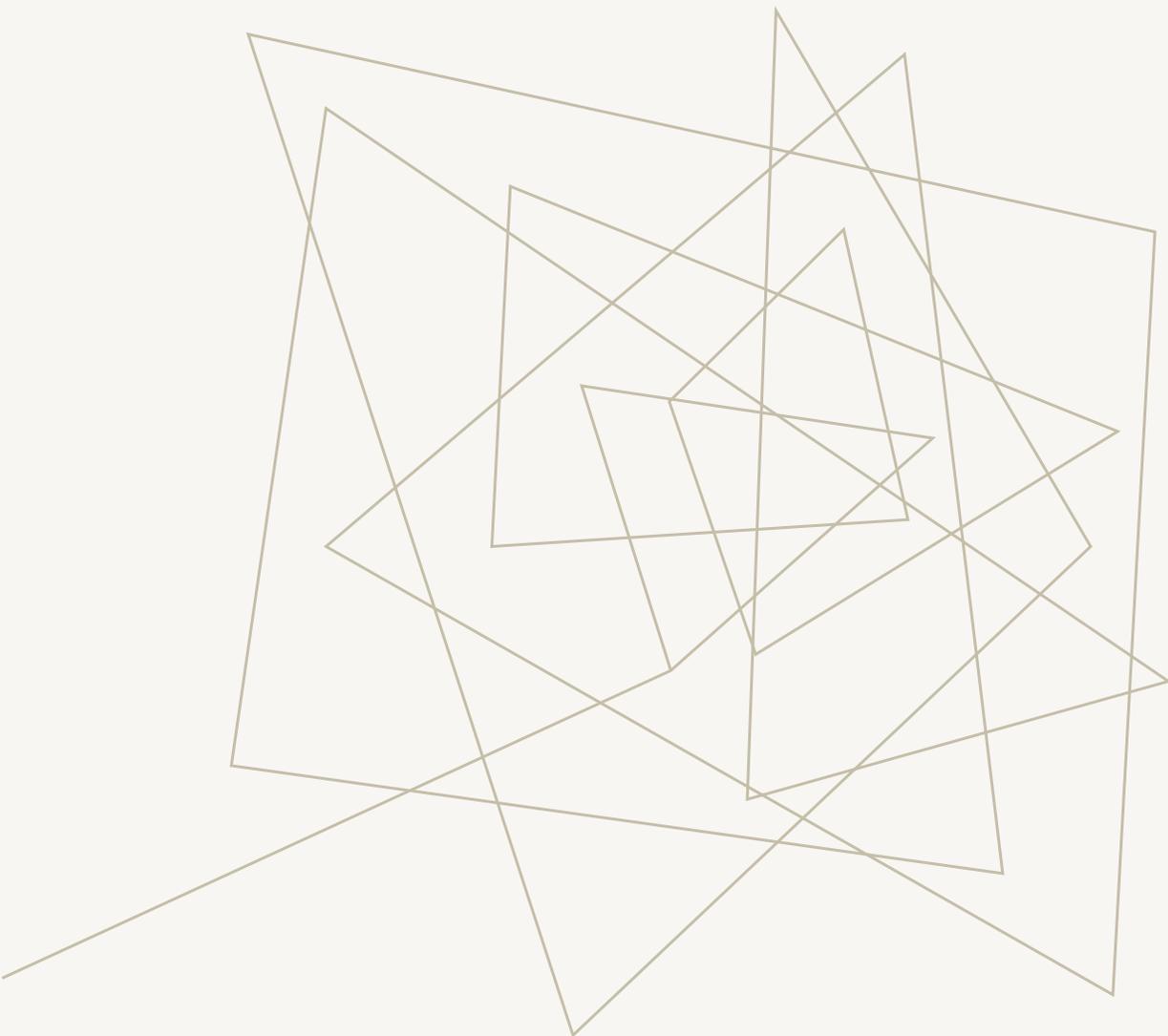
*Machine learning
RVFL*

GSE RVFL meilleur que des modèles classiques ?

Approche proposée



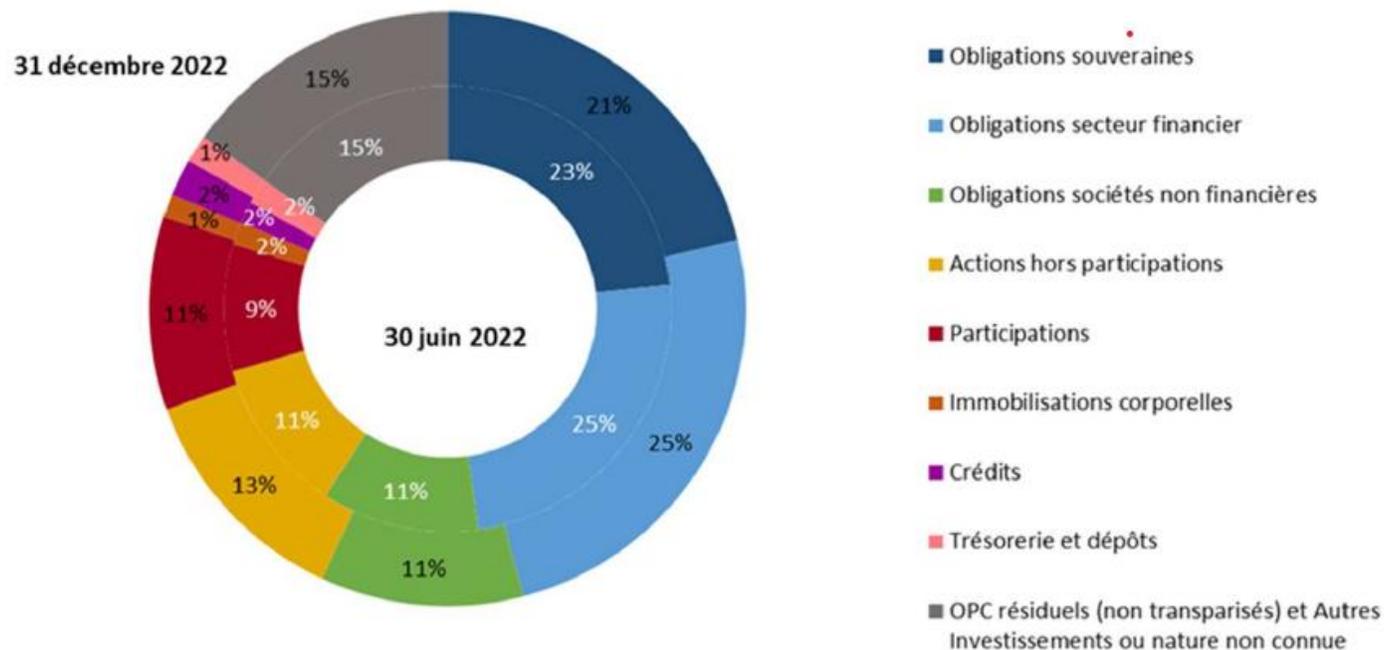
Quels sont les **avantages** et les **limites** de l'utilisation d'un **générateur de scénarios économiques non-paramétrique** ?



II. CONSTRUCTION D'UN GSE SOUS PROBABILITÉ HISTORIQUE NON- PARAMÉTRIQUE

CHOIX DES DONNÉES

Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022



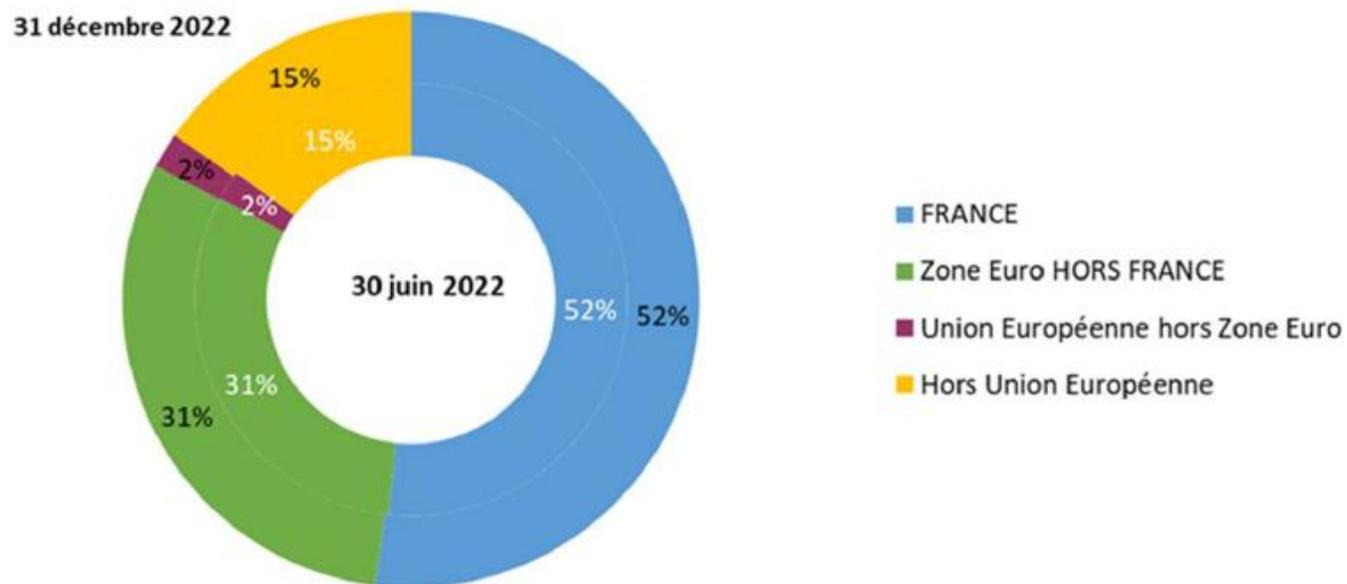
Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale.

Note : - Y compris placements en unités de compte. L'actif du bilan se compose des placements et d'autres actifs.

Source : ACPR et Banque de France

CHOIX DES DONNÉES

Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022

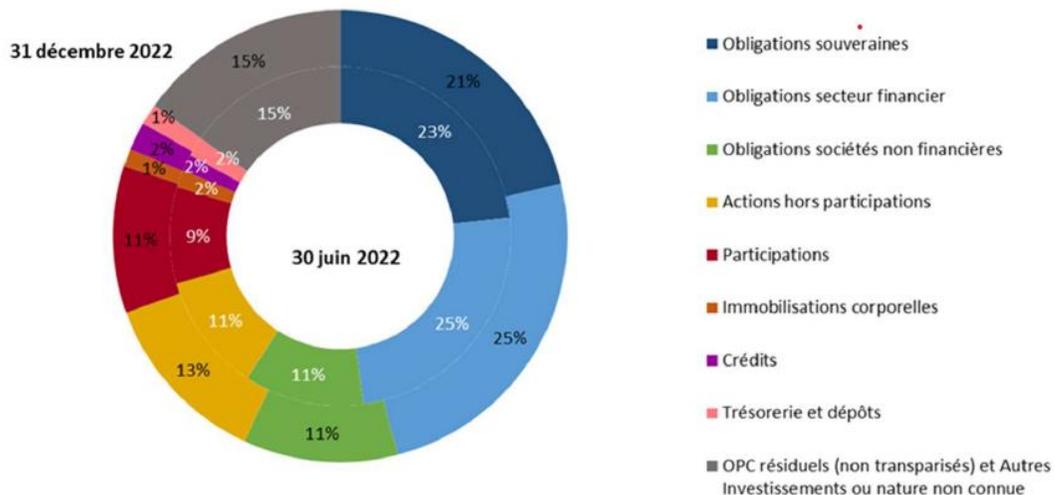


Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale

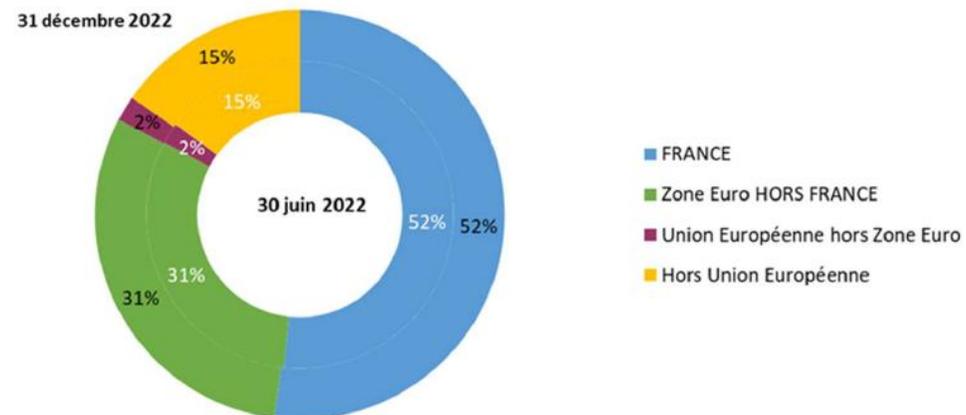
Source : ACPR et Banque de France

CHOIX DES DONNÉES

Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022



Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022



Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale.

Note : - Y compris placements en unités de compte. L'actif du bilan se compose des placements et d'autres actifs.

Source : ACPR et Banque de France

Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale

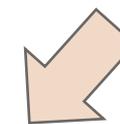
Source : ACPR et Banque de France



Indice de fermeture du
CAC 40

+

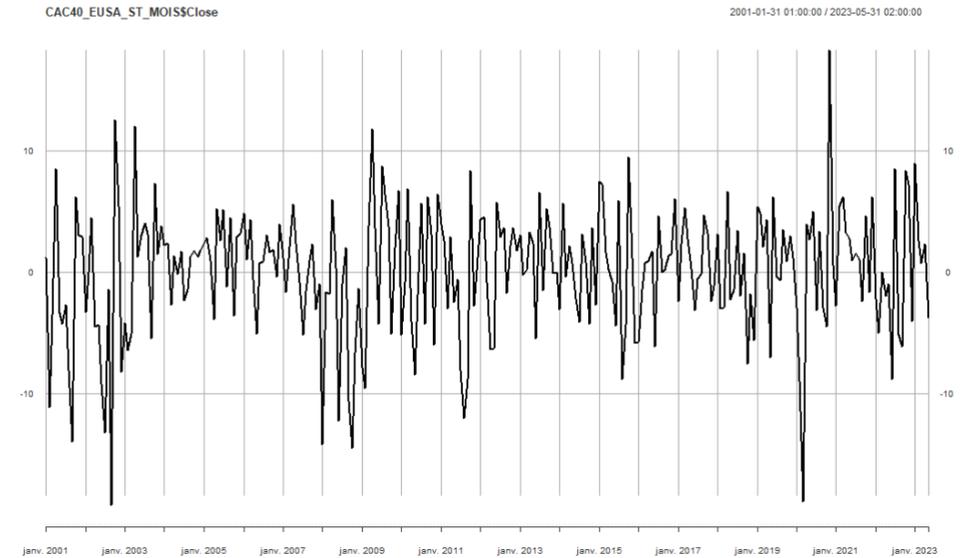
Taux swap
EUSA N



RETRAITEMENTS DES DONNÉES



Transformation
→
Log-rendements

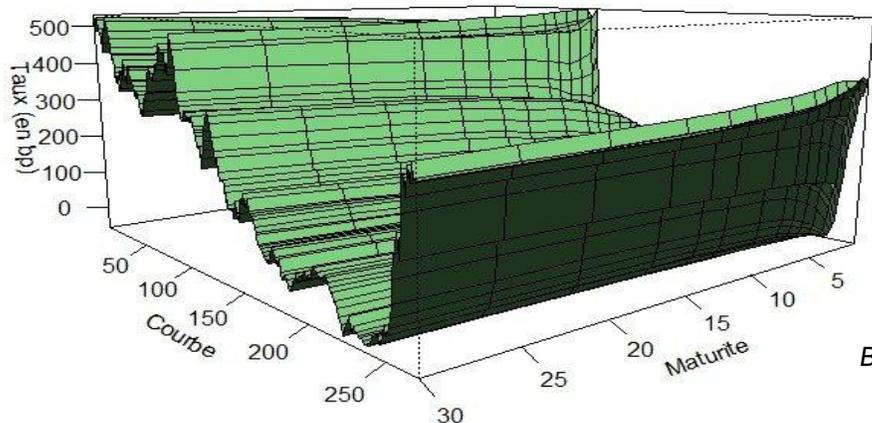


Formule du **logarithme**
du **rendement discret**

$$\psi_t = \log \left(\frac{Close_t}{Close_{t-1}} \right) \times 100$$

RETRAITEMENTS DES DONNÉES

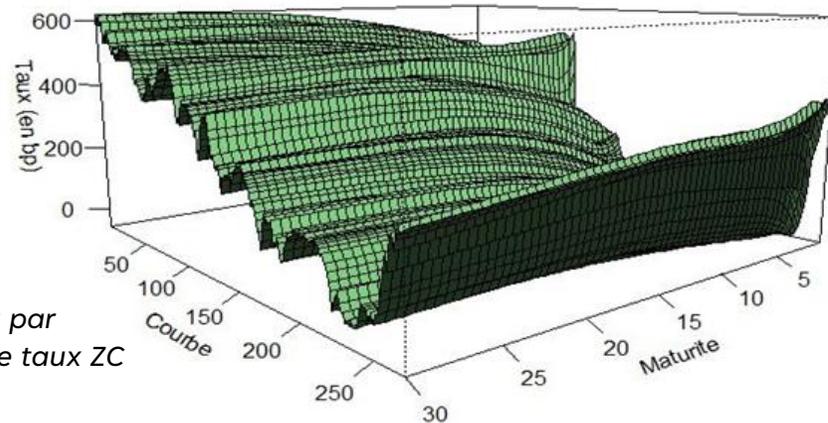
Historique de courbes EUSA par mois



Application
Méthode
→
Bootstrapping

Transformer les taux swap en taux spot par
Bootstrapping pour construire une courbe de taux ZC

Historique des courbes de taux Spot par mois



Formule de **Nelson-Siegel**
et ses **paramètres**

Extraction des
composantes
Nelson-Siegel

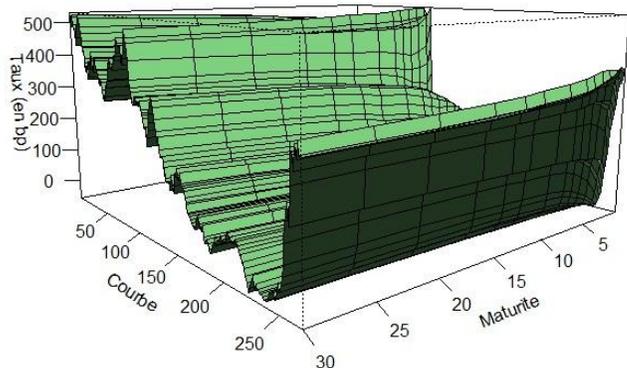
Réduction de la
dimension des
données de taux
spot

$$R(t, T) = \beta_1 + \beta_2 \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_3 \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right)$$

- $R(t, T)$ représentant le taux zc à la date t pour une maturité T ;
- λ un paramètre d'échelle, **optimisé à 2,17** pour simplifier le modèle ;
- β_1 le facteur de niveau pour le taux long ;
- β_2 le facteur de rotation correspondant à l'écart taux long - taux court ;
- β_3 le facteur de pentification.

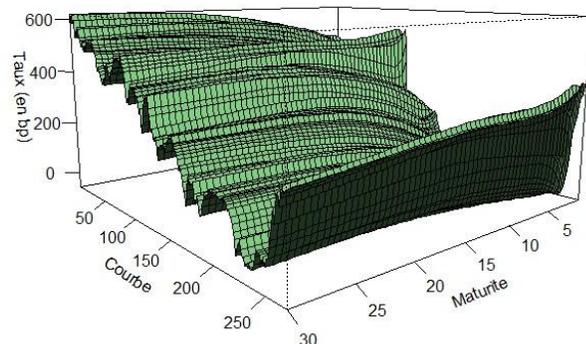
RETRAITEMENTS DES DONNÉES

Historique de courbes EUSA par mois



Application
Méthode
→
Bootstrapping

Historique des courbes de taux Spot par mois



Extraction des
composantes
→
Nelson-Siegel



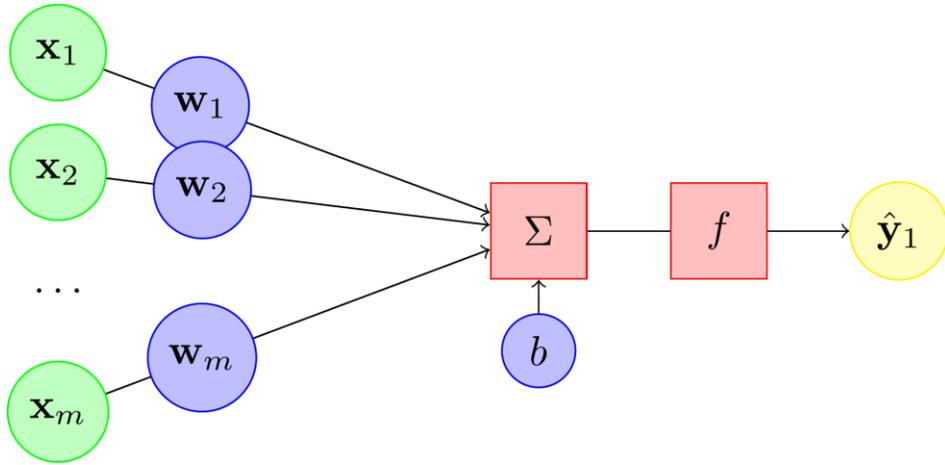
Transformation ↓ Log-rendements

Série Temporelle Multivariée à 4 variables

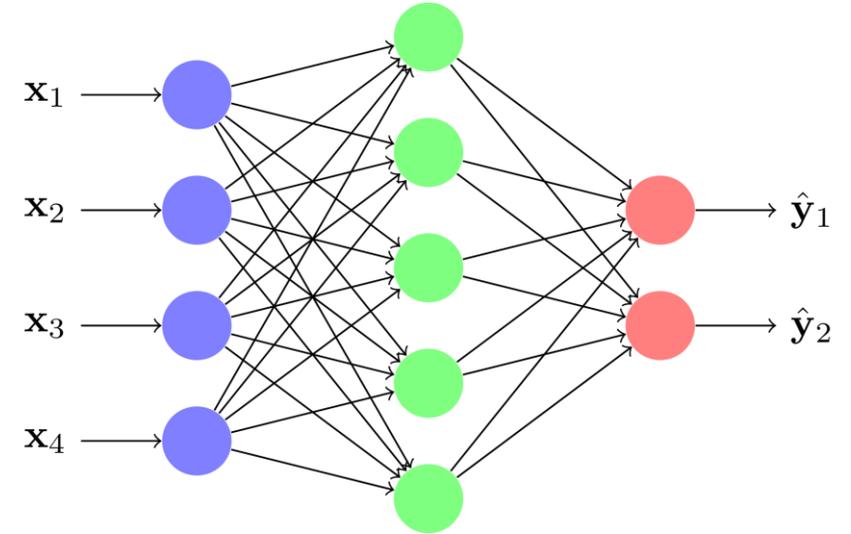
Date	ψ	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	1,21	6,12	-1,46	-2,06
2001-02-28	-11,12	6,08	-1,39	-2,16
...
2023-04-30	3,50	6,22	-1,37	-1,91
2023-05-31	-1,35	6,36	-1,98	-1,73

entre le 31 janvier 2001 et le 31 mai 2023

RAPPEL SUR LES RÉSEAUX DE NEURONES



Exemple d'un neurone formel ou Perceptron



Exemple d'un neurone multicouche

PRÉSENTATION DU MODÈLE RVFL RANDOM VECTOR FUNCTIONAL LINK

STM initiale obtenue après retraitement

Date	ψ	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	1,21	6,12	-1,46	-2,06
2001-02-28	-11,12	6,08	-1,39	-2,16
...
2023-04-30	3,50	6,22	-1,37	-1,91
2023-05-31	-1,35	6,36	-1,98	-1,73

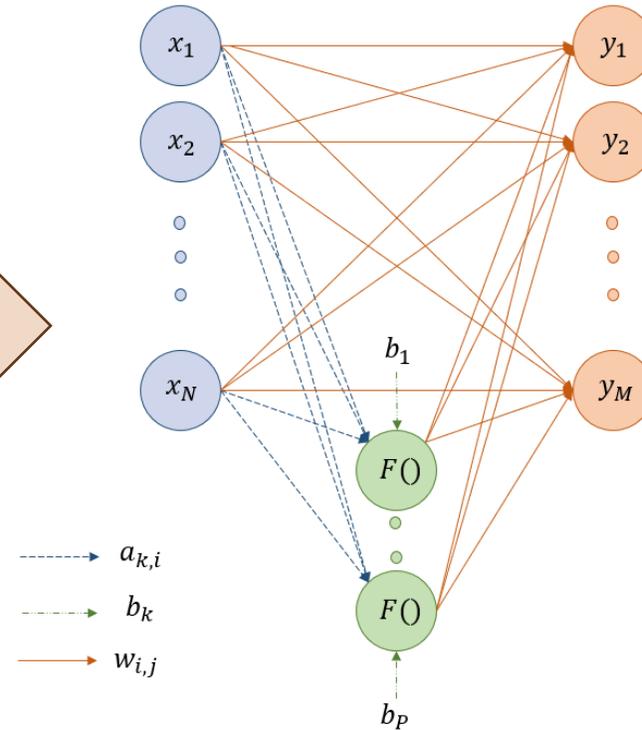
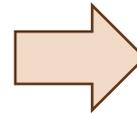


Schéma d'un RVFL à une couche cachée

- ❖ Lien direct entre les entrées et les sorties (x et y)
- ❖ Éléments de la couche cachée sélectionnés de manière quasi-aléatoires

Comparé à un réseau de neurones classique, le RVFL réduit la **complexité**, accélère l'apprentissage et limite le **surapprentissage**, tout en intégrant deux paramètres de **régularisation** pour plus de flexibilité.

PRÉSENTATION DU MODÈLE RVFL RANDOM VECTOR FUNCTIONAL LINK

STM initiale obtenue après retraitement

Date	ψ	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	1,21	6,12	-1,46	-2,06
2001-02-28	-11,12	6,08	-1,39	-2,16
...
2023-04-30	3,50	6,22	-1,37	-1,91
2023-05-31	-1,35	6,36	-1,98	-1,73

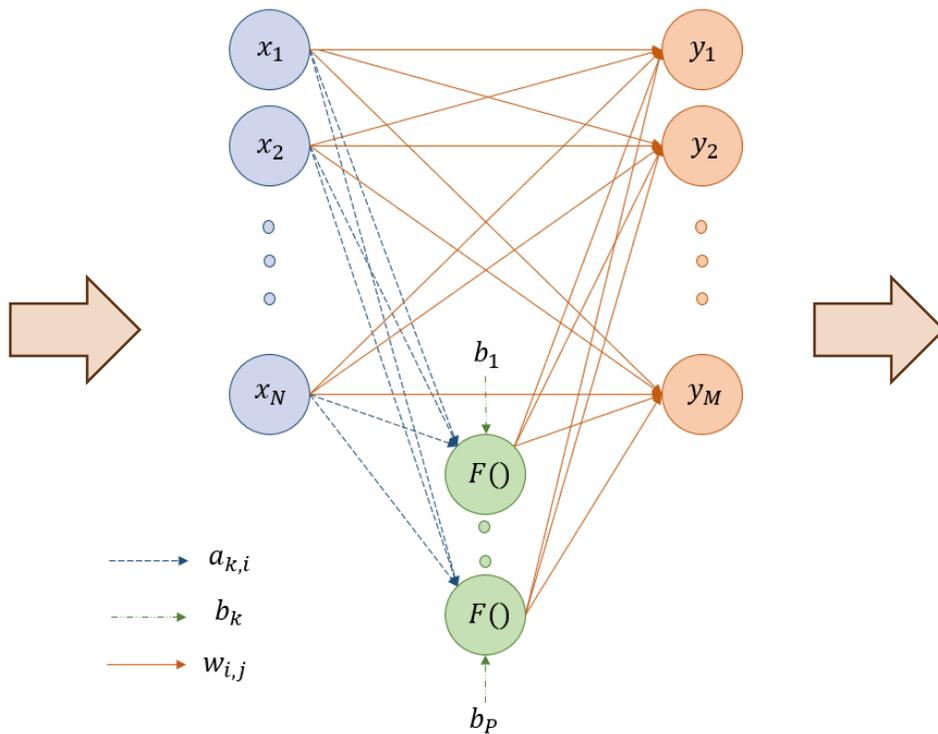


Schéma d'un RVFL à une couche cachée

Projection
n°1

Projection
n°2

1000 Projections
obtenus entre
le 30 juin 2023 et
le 31 mai 2043

Projection
n°1000

PRÉSENTATION DU MODÈLE RVFL RANDOM VECTOR FUNCTIONAL LINK

STM initiale obtenue après retraitement

Date	ψ	β_1	β_2	β_3
2001-01-31	1,21	6,12	-1,46	-2,06
2001-02-28	-11,12	6,08	-1,39	-2,16
...
2023-04-30	3,50	6,22	-1,37	-1,91
2023-05-31	-1,35	6,36	-1,98	-1,73

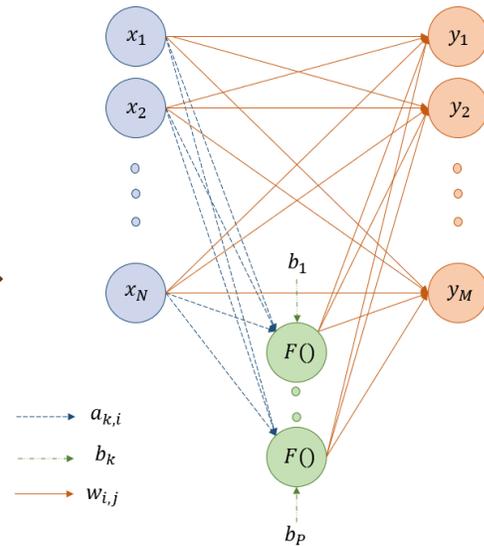
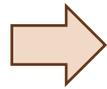
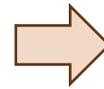


Schéma d'un RVFL à une couche cachée



- Deux questions à se poser :
1. Comment calibrer le modèle ?
 2. Comment générer l'aléa à partir d'un réseau de neurones ?

COMMENT CALIBRER LE MODÈLE ?

La recherche sur grille

- ❖ Cibenko et Hornik :
 - Modèle RVFL **approximateur universel sous réserve de choisir la bonne structure, i.e., les bons hyperparamètres**
- ❖ Hyperparamètres :
 - Paramètres ayant une **valeur** qui permet de **contrôler le processus d'entraînement du modèle**
- ❖ Optimiser les hyperparamètres → **Meilleurs résultats** lors de la projection car modèle calibré

COMMENT CALIBRER LE MODÈLE ?

La recherche sur grille

- ❖ Cibenko et Hornik :
 - Modèle RVFL **approximateur universel sous réserve de choisir la bonne structure, i.e., les bons hyperparamètres**
- ❖ Hyperparamètres :
 - Paramètres ayant une **valeur** qui permet de **contrôler le processus d'entraînement du modèle**
- ❖ Optimiser les hyperparamètres → **Meilleurs résultats** lors de la projection car modèle calibré

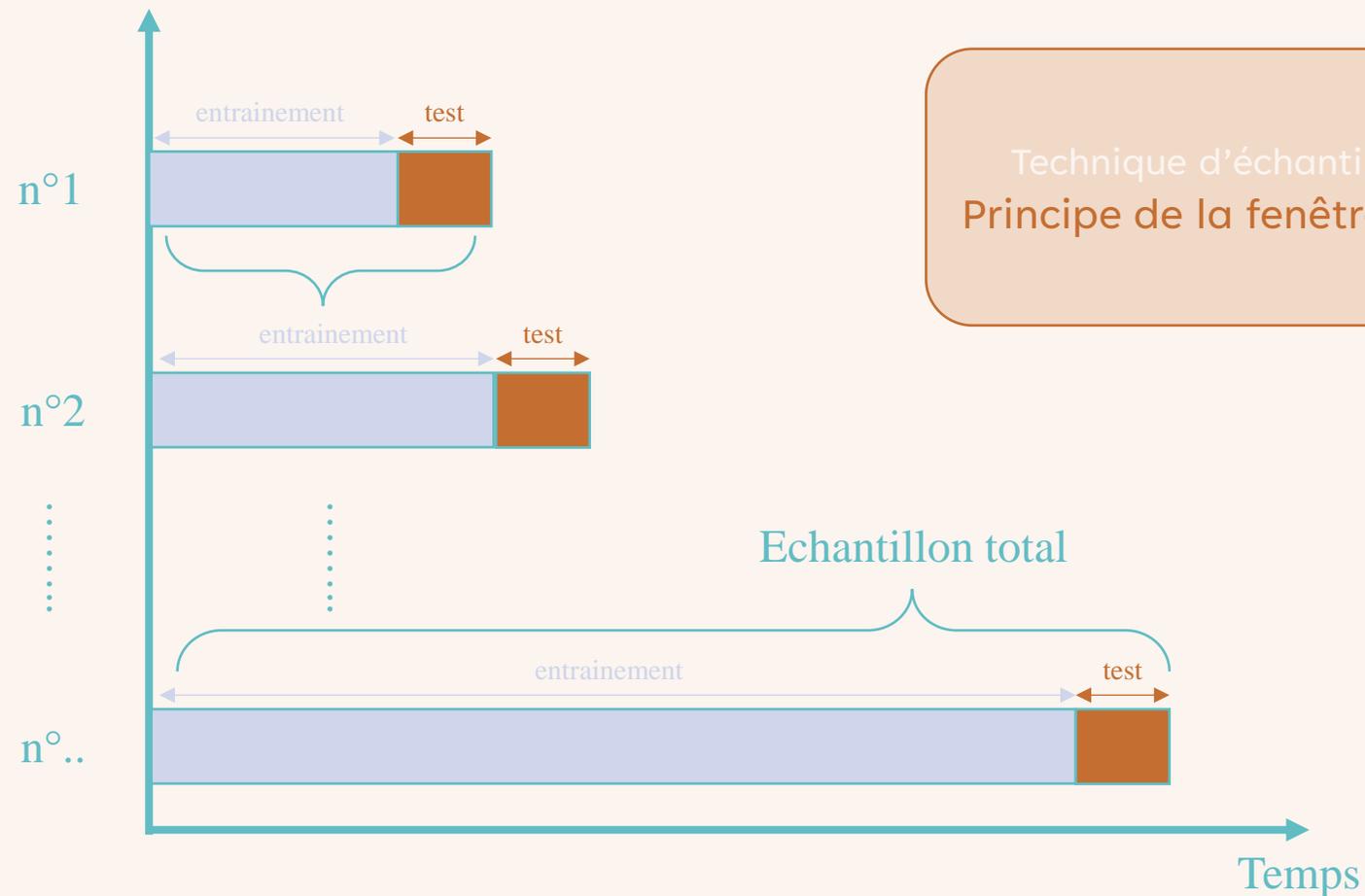
- ❖ Méthode généralement utilisée est la « **Recherche sur grille** » :
 - Méthode d'estimation de **fiabilité d'un modèle fondée sur une technique d'échantillonnage**
 - Utilisation d'une **grille pour le tuning des hyperparamètres**

**Méthode utilisée
dans le mémoire
de L. AUBERT-
LASSARADE**

COMMENT CALIBRER LE MODÈLE ?

La technique d'échantillonnage

Sous-échantillons



COMMENT CALIBRER LE MODÈLE ?

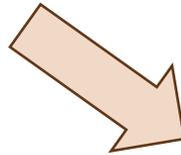
La mesure d'erreur

Mesure d'erreur
*Mean Scaled Pinball
Loss*

$$SPL(u) = \frac{1}{h} \frac{\sum_{t=n+h}^{n+h} ((Y_t - Q_t(u))u\mathbb{1}_{(Q_t(u) \leq Y_t)} + (Q_t(u) - Y_t)(1 - u)\mathbb{1}_{(Q_t(u) > Y_t)})}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n |Y_t - Y_{t-1}|}$$

- Y_t la valeur observée de la série temporelle à la date t pour chaque variable ;
- $Q_t(u)$ le quantile u de la série temporelle multivariée prédite à la date t ;
- h l'horizon de projection ;
- n la longueur de l'ensemble d'entraînement ;
- $\mathbb{1}$ la fonction indicatrice.

- p le nombre de séries temporelles ;
- w_i le poids associé à chaque série temporelle. Dans notre cas, nous considérerons que toutes les variables ont le même poids ;
- U l'ensemble des valeurs des quantiles tel que $U = \{0, 005, 0, 025, 0, 165, 0, 25, 0, 5, 0, 75, 0, 835, 0, 975, 0, 995\}$
On a alors $\text{card}(U) = 9$.



$$MSPL = \sum_{i=1}^p w_i \frac{1}{\text{card}(U)} \sum_{j=1}^{\text{card}(U)} SPL(u_j)$$

COMMENT CALIBRER LE MODÈLE ?

L'optimisation bayésienne

- ❖ Cibenko et Hornik :
 - Modèle RVFL **approximateur universel sous réserve de choisir la bonne structure, i.e., les bons hyperparamètres**

- ❖ Hyperparamètres :
 - Paramètres ayant une **valeur** qui permet de **contrôler le processus d'entraînement du modèle**

- ❖ Optimiser les hyperparamètres → **Meilleurs résultats** lors de la projection car modèle calibré

- ❖ Méthode utilisée est l' « **Optimisation Bayésienne** » :
 - **Méthode d'optimisation probabiliste** utilisée pour ajuster efficacement les hyperparamètres d'un modèle
 - **Plus efficace** qu'une **recherche sur grille ou aléatoire**, car elle réduit le nombre d'évaluations de la fonction objectif

**Méthode utilisée
dans le mémoire
de P.T. DIALLO**

COMMENT CALIBRER LE MODÈLE ?

L'optimisation bayésienne

L'**optimisation bayésienne** est une approche probabiliste pour optimiser une fonction **coûteuse à évaluer**, comme la performance d'un modèle d'apprentissage automatique.

Étapes clés de l'optimisation bayésienne

- ❑ **Définir la fonction « objectif »**
 - ❖ But : **minimiser l'erreur de validation** (ex. : RMSE).
 - ❖ Elle dépend des hyperparamètres (taille du réseau, régularisation...).
- ❑ **Construire un modèle probabiliste (*surrogate model*)**
 - ❖ Souvent un **processus gaussien** est utilisé approximer la fonction « objectif ».
 - ❖ Il permet de **modéliser l'incertitude** et de **prédire les performances** à venir.
- ❑ **Utiliser une fonction d'acquisition**
 - ❖ Oriente le choix des hyperparamètres à tester.
 - ❖ Fait le lien entre l'**Exploration** (zones peu connues) et l'**Exploitation** (zones prometteuses).
- ❑ **Répéter le processus** (à chaque itération)
 - ❖ Mettre à jour le modèle probabiliste avec les nouvelles données.
 - ❖ Choisir un nouvel ensemble d'hyperparamètres via la fonction d'acquisition.
 - ❖ Réévaluer la fonction objectif (**avec validation croisée**).

COMMENT GÉNÉRER L'ALÉA ? LE BLOCK BOOTSTRAP

Série temporelle multivariée
observée

Date	Variable 1	Variable 2
2023-01-01	129	138
2023-02-01	147	90
2023-03-01	209	93
2023-04-01	85	31
2023-05-01	124	68
2023-06-01	185	112
2023-07-01	228	101
2023-08-01	252	77
2023-09-01	140	101
2023-10-01	140	103
2023-11-01	121	65
2023-12-01	173	153

Application
RVFL
→
Avec un pas
de 3

Projection « centrale »

Date	Variable 1	Variable 2
2023-04-01	97	25
2023-05-01	104	77
2023-06-01	167	124
2023-07-01	252	108
2023-08-01	230	67
2023-09-01	123	116
2023-10-01	130	90
2023-11-01	109	47
2023-12-01	187	164

(le plus fidèlement possible avec la réalité)

Calcul des
résidus
→

Résidus observés - prédits

Date	Résidus Variable 1	Résidus Variable 2
2023-04-01	-12	6
2023-05-01	20	-9
2023-06-01	18	-12
2023-07-01	-25	-7
2023-08-01	22	10
2023-09-01	17	-15
2023-10-01	10	13
2023-11-01	12	18
2023-12-01	-14	-11

Phase
d'apprentissage

$$\text{arrondi_supérieur}\left(\frac{6}{4}\right) = 2$$

Génère 2 indices de départ : 4 et 1

Prédiction « centrale »

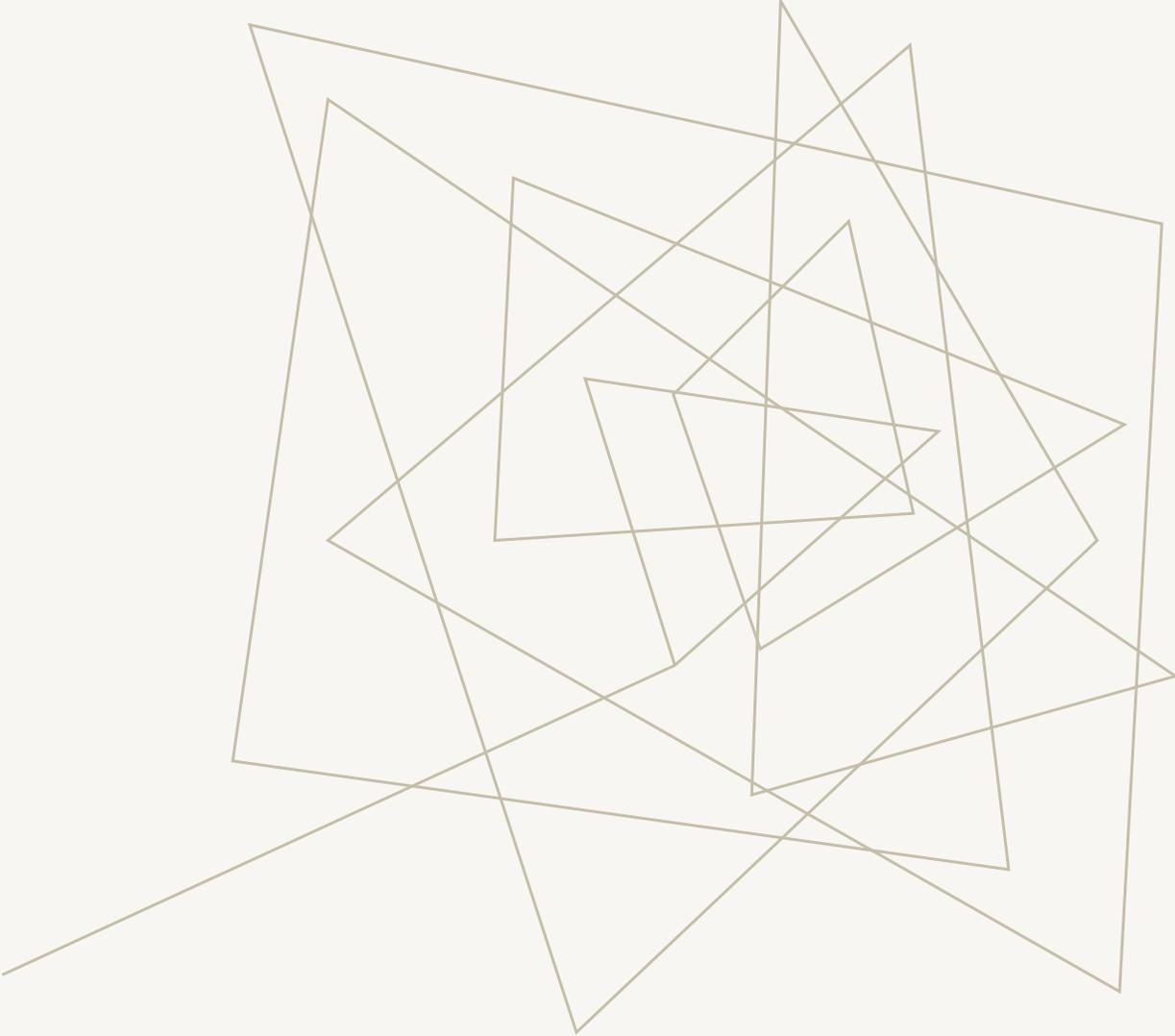
Date	Variable 1	Variable 2
2024-01-01	199	162
2024-02-01	178	158
2024-03-01	122	163
2024-04-01	103	88
2024-05-01	150	102
2024-06-01	139	101

Block Bootstrap = 4
→

Date	Variable 1	Variable 2
2024-01-01	174	155
2024-02-01	200	168
2024-03-01	139	148
2024-04-01	93	101
2024-05-01	138	108
2024-06-01	159	92

Projection
n°1

Application
RVFL
→
Avec un pas
de 3 et
projection sur
6 mois

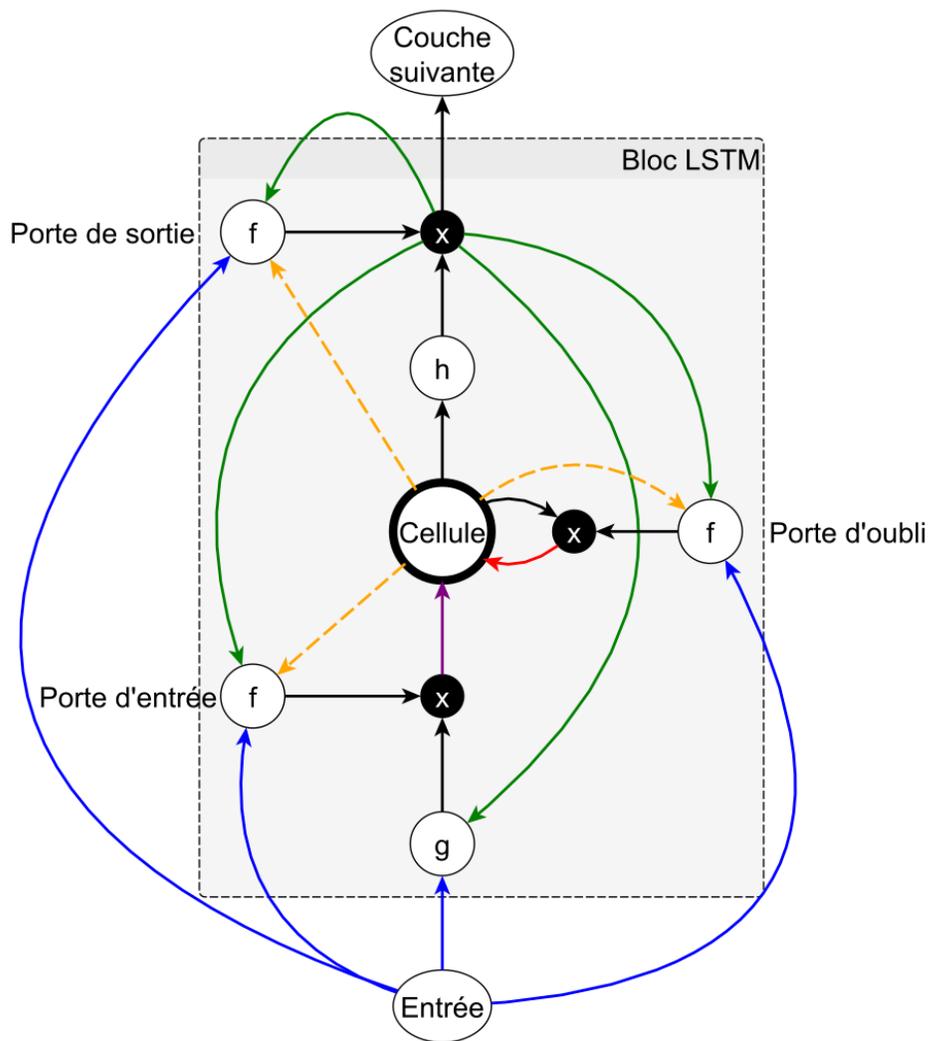


III. MODÈLE RVFL : PROJECTIONS HISTORIQUES

MODÈLE LSTM (Long Short-Term Memory)

Qu'est-ce que c'est ?

Le LSTM est un type de **réseau de neurones récurrent (RNN)** conçu pour traiter des **séries temporelles** ou des données séquentielles. Il est particulièrement bon pour retenir des informations sur le long terme tout « en oubliant ce qui est moins utile ».



Pourquoi c'est utile ?

- Dans les séries temporelles (prix d'actions, taux d'intérêt, etc.), certaines informations anciennes restent importantes longtemps après.
- Le **LSTM** permet de **retenir et d'oublier intelligemment** des informations grâce à un mécanisme de mémoire interne.

Comment ça fonctionne ?

Le LSTM utilise **trois "portes" principales** pour contrôler les informations qui circulent dans le réseau :

- ❑ **Porte d'oubli** : décide quelles anciennes informations doivent être oubliées.
 - ❑ **Porte d'entrée** : sélectionne quelles nouvelles informations sont stockées en mémoire.
 - ❑ **Porte de sortie** : choisit quelles informations sont utilisées pour faire la prédiction.
- Grâce à ce système, le LSTM peut apprendre des tendances **à court et à long terme**.

Pourquoi l'utiliser pour les séries temporelles ?

- ❖ Il peut capturer des dépendances **long terme** (contrairement aux RNN classiques).
- ❖ Il est efficace pour prédire des valeurs futures à partir d'historiques

Limites

- Coût de calcul élevé (nécessite beaucoup de données et de puissance de calcul).
- Sensibilité au choix des hyperparamètres (nombre de neurones, nombre de couches).

MODÈLE VAR (*VECTOR AUTO REGRESSION*)

- Le modèle **VAR** est un modèle multivarié qui permet de modéliser et prévoir plusieurs séries temporelles simultanément :
 - ❖ **V** (*Vector*) : modèle multivarié ;
 - ❖ **AR** (*AutoRegressive*) : dépendance des valeurs passées.
- Chaque variable dépend à la fois de ses propres valeurs passées et des valeurs passées des autres variables du système.
- Ce modèle est particulièrement utilisé lorsque les séries sont interdépendantes, comme les taux d'intérêt, les spreads ou l'inflation.

Avantages

- Capture les relations croisées entre plusieurs variables.
- Simple à estimer et interpréter.
- Utile pour les prévisions conjointes et les analyses de chocs.

MODÈLE ARIMA (*AUTOREGRESSIVE INTEGRATED MOVING AVERAGE*)

- Le modèle **ARIMA** est un modèle univarié utilisé pour représenter et prévoir des séries temporelles. Il combine trois composantes :
 - ❖ **AR** (*AutoRegressive*) : dépendance des valeurs passées ;
 - ❖ **I** (*Integrated*) : prise en compte des tendances ou non-stationnarités ;
 - ❖ **MA** (*Moving Average*) : correction des erreurs passées.

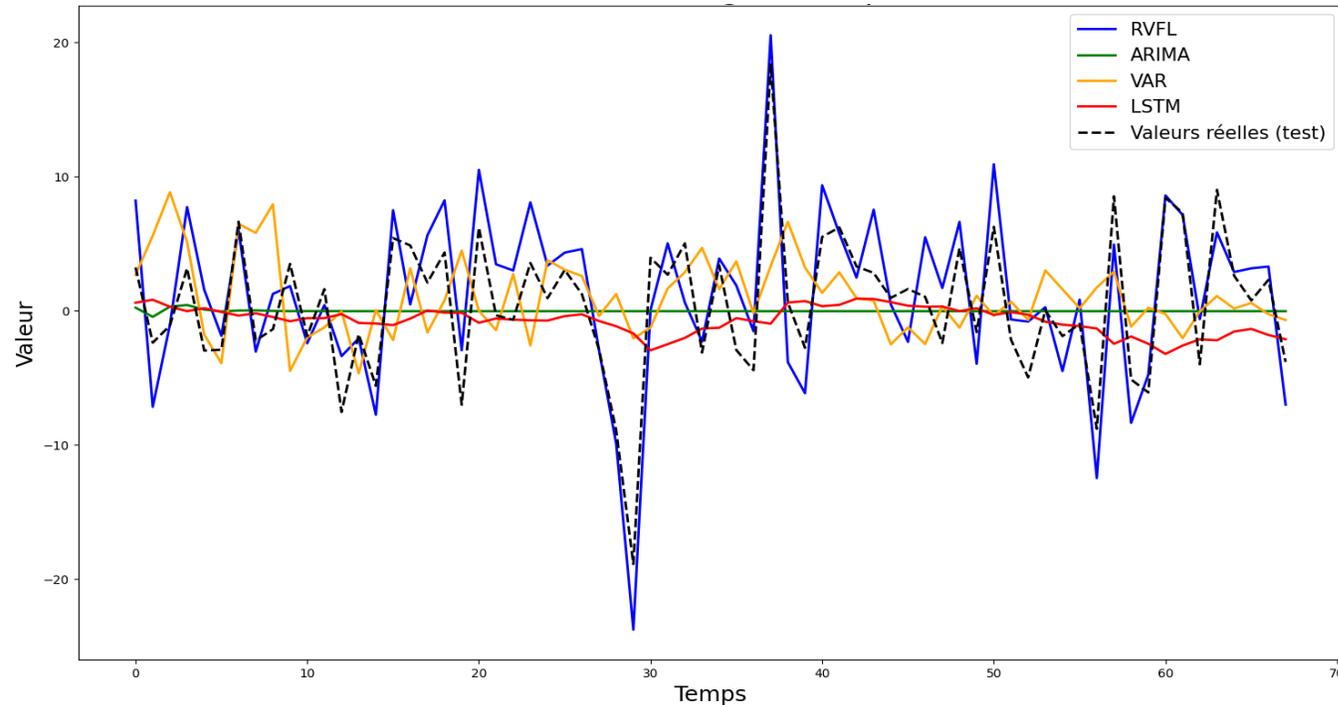
Avantages

- Robuste et largement utilisé pour des séries individuelles.
- Efficace pour modéliser des séries avec tendances ou effets cycliques.
- Utilisé lorsque la série présente des dépendances linéaires bien identifiées.

ANALYSE DE LA PERFORMANCE DU MODÈLE

Comparaison avec le modèle VAR (*Vector AutoRegression*), ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) et LSTM (*Long Short-Term Memory*)

Comparaison des quatre modèles avec les données réelles (test) pour le rendement logarithmique



Echantillon de test : du 30 novembre 2017 au 31 mai 2023

*Rendements
logarithmiques des
actions du CAC40*

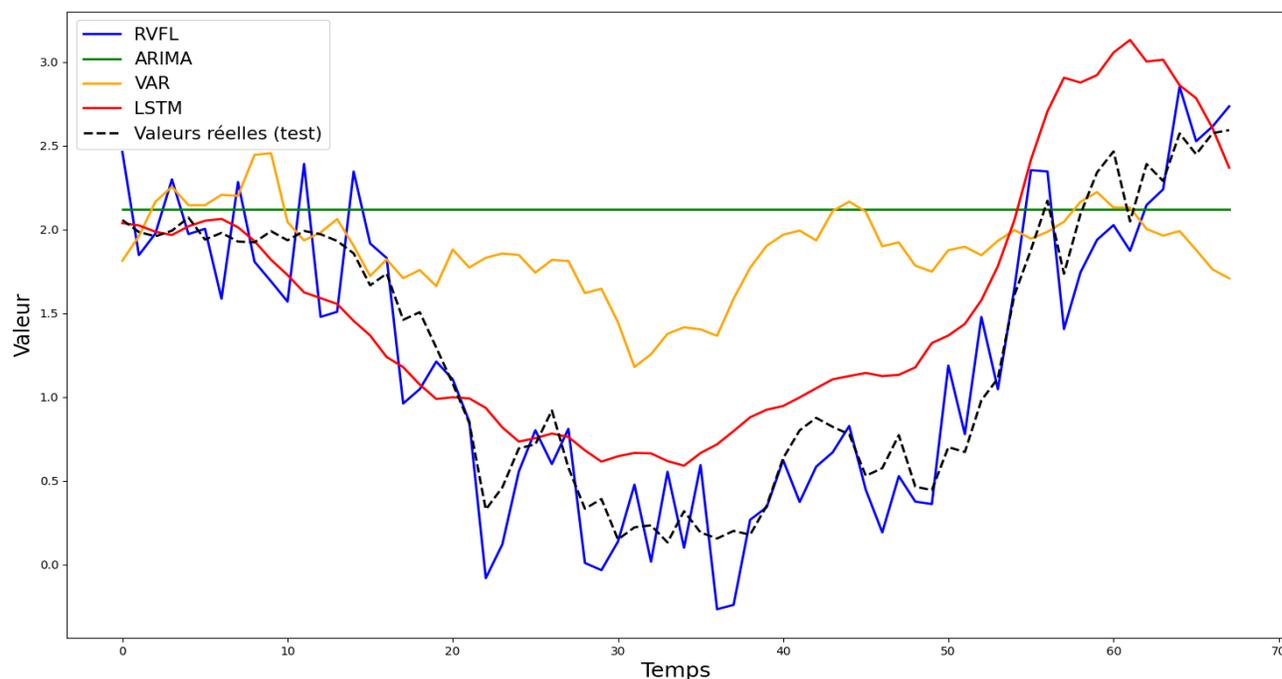
Mesure d'erreur sur les actions	RVFL	LSTM	VAR	ARIMA
RMSE	5,30	5,57	5,33	5,85
MAE	4,20	4,24	4,71	4,04

- Les résultats de l'analyse prédictive montrent que le modèle RVFL arrive à **capturer les tendances de manière efficace.**

ANALYSE DE LA PERFORMANCE DU MODÈLE

Comparaison avec le modèle VAR (*Vector AutoRegression*), ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) et LSTM (*Long Short-Term Memory*)

Comparaison des quatre modèles avec les données réelles (test) pour le taux long (première composante β_1 de Nelson-Siegel)



Echantillon de test : du 30 novembre 2017 au 31 mai 2023

*Taux Long
(1^{ère} composante de
Nelson Siegel)*

Mesure d'erreur sur le taux long	RVFL	LSTM	VAR	ARIMA
RMSE	0,34	0,37	0,90	1,15
MAE	0,28	0,31	0,74	0,92

➤ Les résultats de l'analyse prédictive montrent que le modèle RVFL arrive à **capturer les tendances de manière efficace.**

PROJECTIONS DU MODÈLE SUR 20 ANS

Hyperparamètres RVFL

Paramètres	Valeurs testées
<i>block_length</i>	[100,200]
<i>lags</i>	[5,30]
<i>nb_hidden</i>	[20,100]
λ_1	[1,1000]
λ_2	[1,1000]
<i>nodes_sim</i>	Sobol, Halton, Unif
<i>activ</i>	ReLU, Sigmoid, Tanh

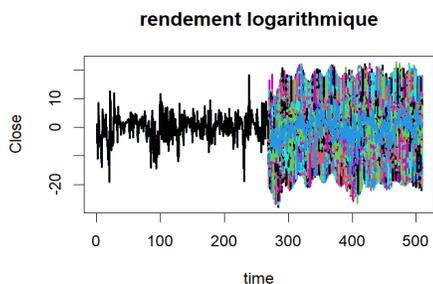
Optimisation
Bayésienne



Validation Croisée

Hyperparamètres (optimisés)

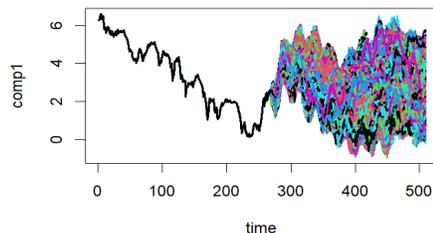
<i>block_length</i>	<i>lags</i>	<i>nb_hidden</i>	λ_1	λ_2	<i>nodes_sim</i>	<i>activ</i>
120	29	82	5	1000	Sobol	ReLU



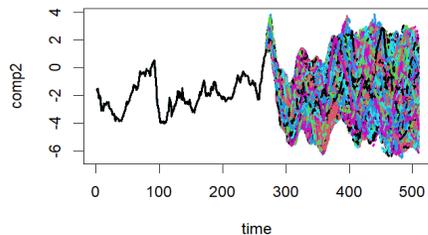
Série de l'action

Séries du taux

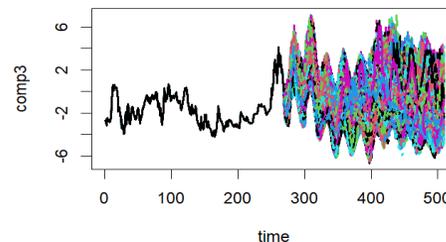
première composante : taux long



deuxième composante



troisième composante



Projection
n°1

Projections



1000 Projections obtenus
entre
le 30 juin 2023 et
le 31 mai 2043

Projection
n°1000

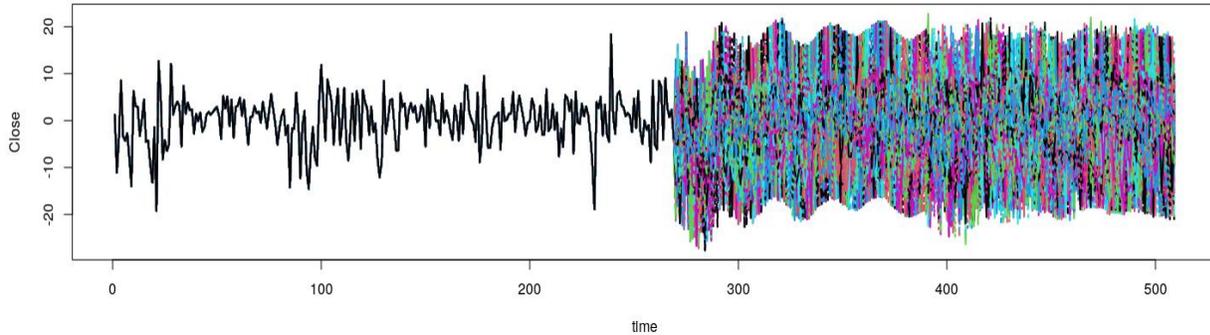
Projection
n°2

...

ANALYSE DES SIMULATIONS DU MODÈLE RVFL SUR 20 ANS

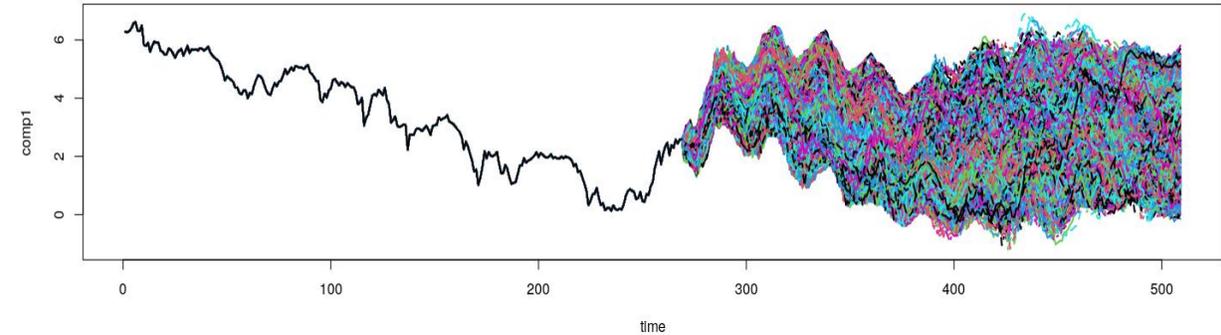
Cas des actions

Historique et 1000 projections du rendement logarithmique



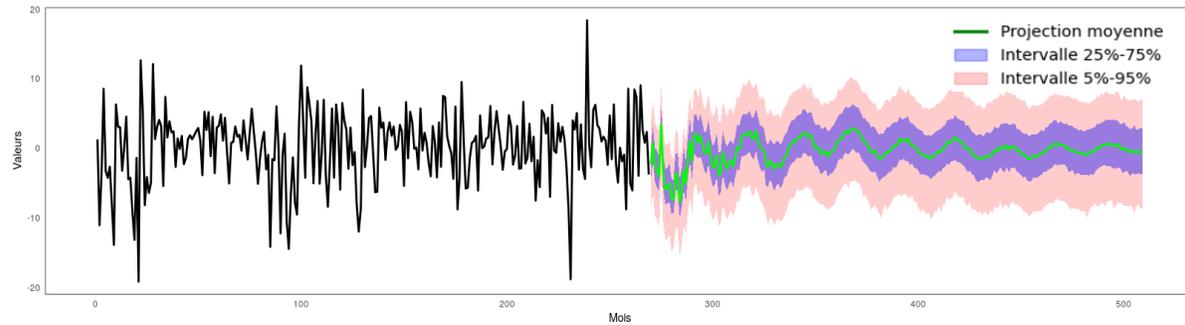
Cas des taux

Historique et 1000 projections du taux long

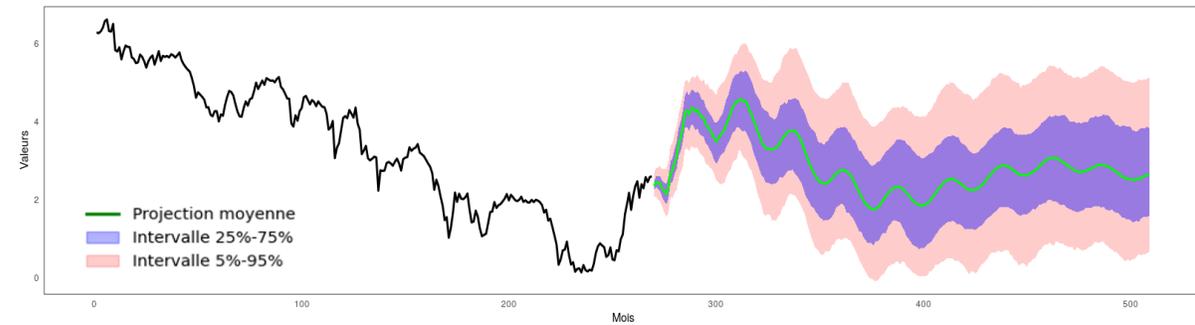


➤ Les projections indiquent une **diversité** de scénarios, offrant une vue d'ensemble des possibilités de croissance et d'évolution du marché sur le long terme.

Historique et distribution des 1000 projections du log-rendement



Historique et distribution des 1000 projections du taux long

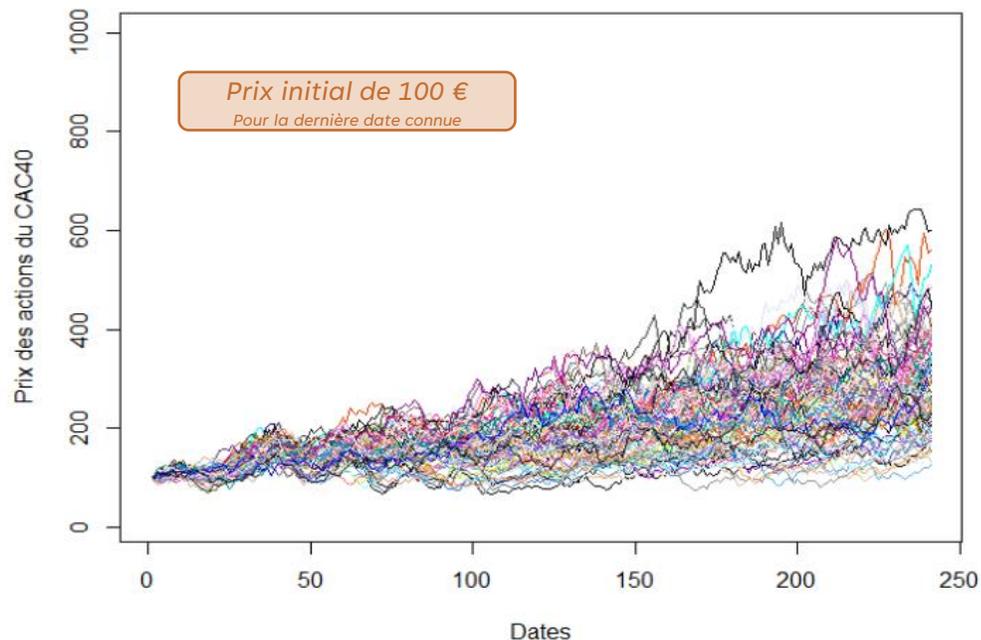


➤ Les intervalles de prédiction étendus renforcent la **robustesse** des simulations, offrant une vue adaptable aux différents scénarios de marché.

DUALITÉ MODÉLISATION : RVFL ET MODÈLES PARAMÉTRIQUES EN PERSPECTIVE

Évolution du prix d'une action et comparaison avec un brownien géométrique (Modèle Black-Scholes)

Projections du prix de 100 simulations du CAC40 sur 20 ans
Modèle RVFL



Calcul du prix de l'action en t pour chaque simulation, t varie entre 1 et 240 (t en mois)

$$P(t, j) = P_0 \times \exp\left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j)\right)$$

Paramètres du Modèle BS (obtenu avec les données historiques du CAC 40)

- le drift μ est fixé à 0,07 (7%)
- la volatilité σ est fixée 0,15 (15%)

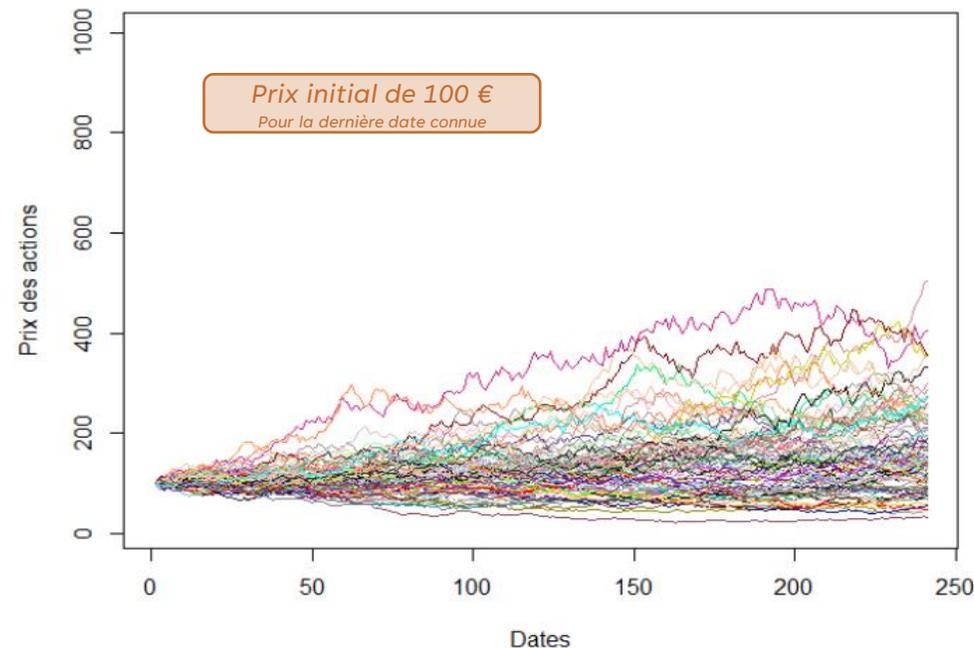
Modèle de BS

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Discrétisation exacte

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

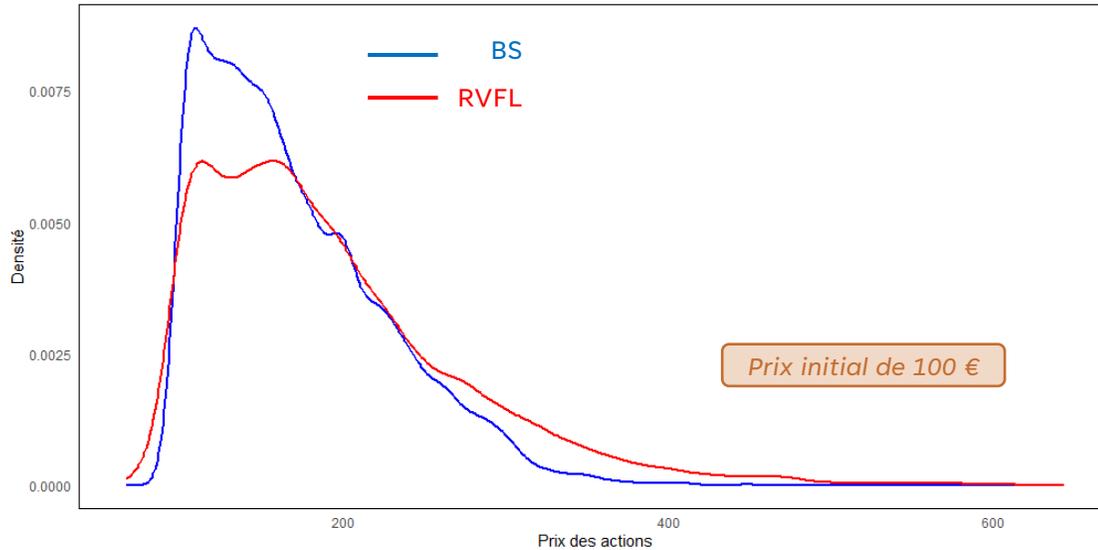
Projections du prix de 100 simulations du CAC40 sur 20 ans
Modèle de BS



DUALITÉ MODÉLISATION : RVFL ET MODÈLES PARAMÉTRIQUES EN PERSPECTIVE

Évolution du prix d'une action et comparaison avec un brownien géométrique : **Modèle Black-Scholes (BS)**

Distributions des prix pour les modèles RVFL et BS



- Le modèle Black-Scholes est plus concentré, tandis que le RVFL est plus étalé avec de longues queues, capturant mieux les scénarios extrêmes.

Value at Risk (VaR) des prix des actions pour différents niveaux de confiance sur un horizon d'un an

α	0.5%	1%	5%	95%	99%	99.5%
VaR RVFL Prix à 1 an	98,50	100,75	110,00	144,50	153,75	155,30
VaR BS Prix à 1 an	113,42	114,15	117,72	138,42	143,97	145,26

- Le modèle RVFL présente une variabilité plus élevée des VaR, tandis que le modèle BS donne des résultats plus stables en raison de sa volatilité constante.

Les simulations du **modèle RVFL** produisent **des résultats cohérents**, capturant **bien** la volatilité du marché.

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

Source : H. Andrès, A. Boumezoued , and B. Jourdain (2024) : *Signature-based validation of real-world economic scenarios*

Objectif général

Valider que les trajectoires **simulées** par un modèle (GSE) sont **statistiquement conformes** aux trajectoires **historiques** observées sur les marchés.

Problème

Comparer uniquement les moyennes, volatilités ou quantiles ne suffit pas. Ces approches ignorent :

- la structure temporelle
- les corrélations dynamiques
- les interactions multivariées

L'approche de ce test

Utiliser une méthode combinant :

- La **signature** : pour représenter finement les trajectoires
- La **MMD** (*Maximum Mean Discrepancy*) : pour comparer deux ensembles de trajectoires comme des lois de probabilité

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

Signature : transformer les trajectoires en vecteurs mathématiques

Pourquoi ? : Parce que deux trajectoires $X(t)$ et $Y(t)$ peuvent avoir :

- la **même moyenne annuelle**,
- la **même volatilité annuelle**,
- mais une **forme très différente** (tendances, cycles, covariances croisées, etc.).

La **signature** est un outil mathématique qui encode **toute la structure temporelle d'un chemin** (ici une trajectoire économique multivariée).

Soit une trajectoire $X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^4$, la signature est une suite d'intégrales itérées :

$$S^n(X) = \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T} dX_{t_1} \otimes \dots \otimes dX_{t_n}$$

- $S^1(X)$: variations totales (ex : croissance sur un an)
- $S^2(X)$: aire entre composantes \rightarrow interactions croisées
- $S^3(X)$: asymétries temporelles
- etc.

En pratique, on **tronque la signature** à un **ordre 4** :

$$S^{(4)}(X) = (S^0, S^1, S^2, S^3, S^4)$$

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

MMD : comparer deux ensembles de signatures

Pourquoi ?

On veut savoir si les **lois statistiques** des signatures simulées et historiques sont les **mêmes**.

Comment ?

On mesure la distance entre les distributions μ (signatures simulées \mathbf{X}) et ν (signatures historiques \mathbf{Y}) avec la **MMD** :

$$\text{MMD}^2(\mu, \nu) = \mathbb{E}[k(X, X')] + \mathbb{E}[k(Y, Y')] - 2\mathbb{E}[k(X, Y)]$$

- k est un **noyau reproduisant**, par exemple : $k(x, y) = \langle S^{(4)}(x), S^{(4)}(y) \rangle$
- Cette formule mesure **à quel point les signatures issues des simulations ressemblent à celles issues des données réelles**.

Lorsque l'on ne connaît pas μ et ν , mais les **échantillons \mathbf{X} et \mathbf{Y}** , alors on utilise la **statistique empirique**

$$\widehat{\text{MMD}}^2 = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{i \neq j} k(X_i, X_j) + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} k(Y_i, Y_j) - \frac{2}{mn} \sum_{i,j} k(X_i, Y_j)$$

n : nombre de trajectoires glissantes de 12 mois extraites des données historiques

m : nombre de trajectoires glissantes de 12 mois extraites des données simulées

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

Comment fonctionne la méthodologie dans la validation ?

1. Préparation des jeux de données et calcul des signatures

Données historiques

- 269 mois (22 ans et 5 mois)
- Série temporelle **multivariée à 4 dimensions**
- Fréquence mensuelle
- Découpage en **258 trajectoires** de 12 mois via fenêtre glissante : $n = 269 - 12 + 1 = 258$

$$\mathcal{Y} = \{Y_1, \dots, Y_n\}$$

Données simulées (par le GSE)

- 1000 simulations sur 20 ans \rightarrow 240 mois chacune
- Chaque simulation fournit $240 - 12 + 1 = 229$ trajectoires d'un an
- Total $\approx 229\ 000$ trajectoires disponibles
- Pour le test, on **échantillonne 258 trajectoires simulées** : $m = 258$

$$\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_m\}$$

Signatures à l'ordre 4 calculées pour

{ les 258 trajectoires historiques $\rightarrow S(Y_1), \dots, S(Y_{258})$

{ les 258 trajectoires simulées $\rightarrow S(X_1), \dots, S(X_{258})$

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

Comment fonctionne la méthodologie dans la validation ?

2. Estimation *Bootstrap* du seuil critique de la MMD

Problématique :

La statistique MMD mesure la dissimilarité entre trajectoires **simulées** et **historiques**. Mais :

Cette valeur n'a de sens **que si elle est comparée à un seuil** permettant de dire ce qui est "normal" ou "anormal".

Comment fixer ce seuil ?

L'idée est de se demander : *Quelle valeur de MMD serait observée si les deux groupes venaient exactement de la même loi ?*

Principe de la méthode *Bootstrap*

Pour répondre à cette question, on **reproduit artificiellement cette situation** :

1. On tire deux groupes **au hasard parmi les trajectoires historiques** (de taille $n=258$),
2. On calcule la MMD entre ces deux groupes, **supposés identiques**, car tous issus de l'historique,
3. On répète cette opération B fois (typiquement $B=1000$),
4. On obtient ainsi une **distribution empirique des MMD "normales"**,
5. Le **seuil critique** est le **95^e centile** de cette distribution : $c_\alpha = \text{quantile}_{0,95}(\text{MMD}_{\text{bootstrap}})$

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

Comment fonctionne la méthodologie dans la validation ?

3. Validation des trajectoires simulées

Objectif du test : Comparer la **MMD empirique** calculée entre les **trajectoires simulées et historiques** à ce **seuil critique**.

Formulation du test d'hypothèse

$H_0 : \mu_{\text{sim}} = \mu_{\text{hist}}$ (trajectoires simulées conformes)

$H_1 : \mu_{\text{sim}} \neq \mu_{\text{hist}}$ (trajectoires simulées divergentes)

Règle de décision

Si $\widehat{\text{MMD}}^2 \leq c_\alpha \Rightarrow$ on ne rejette pas H_0

Si $\widehat{\text{MMD}}^2 > c_\alpha \Rightarrow$ on rejette H_0

- ✓ Si la MMD est inférieure ou égale au seuil : **les trajectoires simulées sont statistiquement indiscernables des trajectoires historiques**
- ✗ Sinon : le modèle **ne reproduit pas correctement** la dynamique observée.

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)

Comment fonctionne la méthodologie dans la validation ?

1. Préparation des données et calcul des signatures

- ❖ On prend deux jeux de trajectoires : **les scénarios simulés** (par le GSE) et **les données historiques** (observées sur les marchés). Les signatures des trajectoires sont calculées jusqu'à **l'ordre 4** pour capturer les dépendances locales et globales et permettre une comparaison efficace via la MMD. Aucune **transformation** (lead-lag, dimension temporelle) n'a été appliquée afin de **travailler sur les trajectoires brutes**.

2. Estimation *Bootstrap* du seuil critique de la MMD

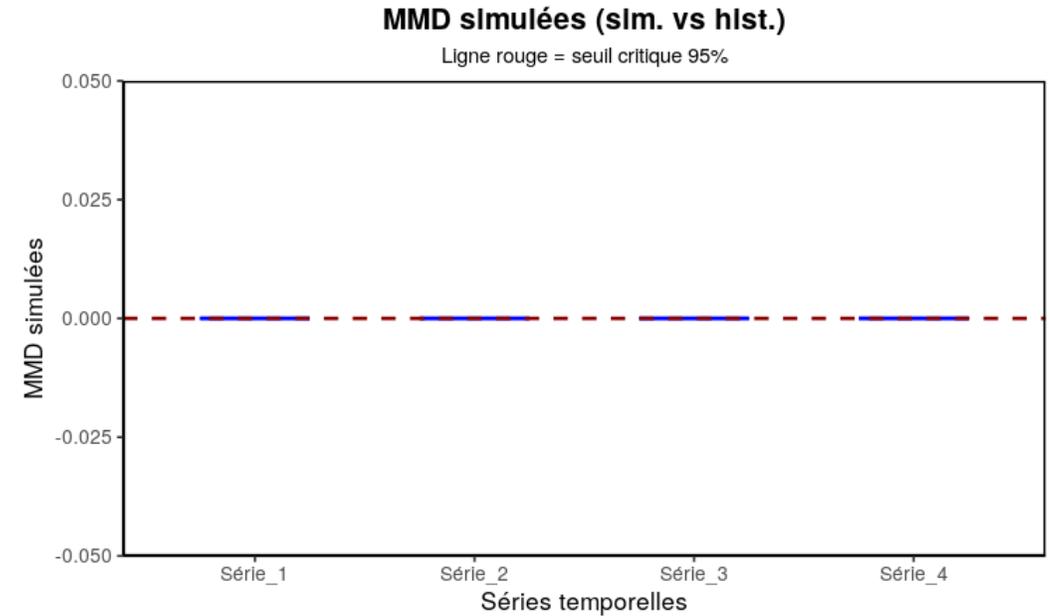
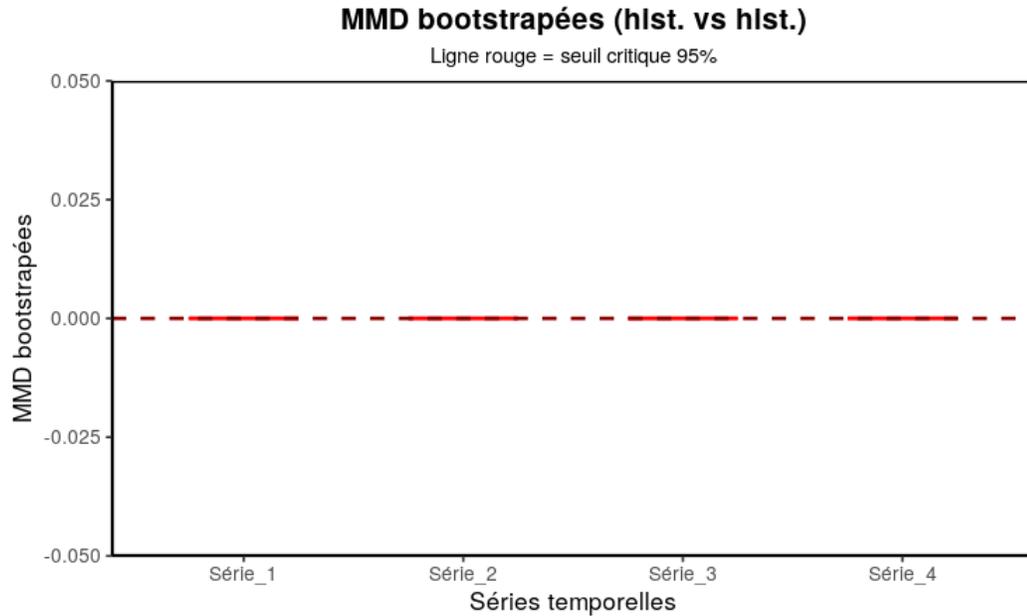
- ❖ La MMD est utilisée pour mesurer la distance entre les distributions **des signatures historiques et simulées**. Un seuil critique est déterminé en tirant aléatoirement des échantillons historiques, en calculant la MMD pour chacun, puis en extrayant **le 95e centile**.

3. Validation des trajectoires simulées

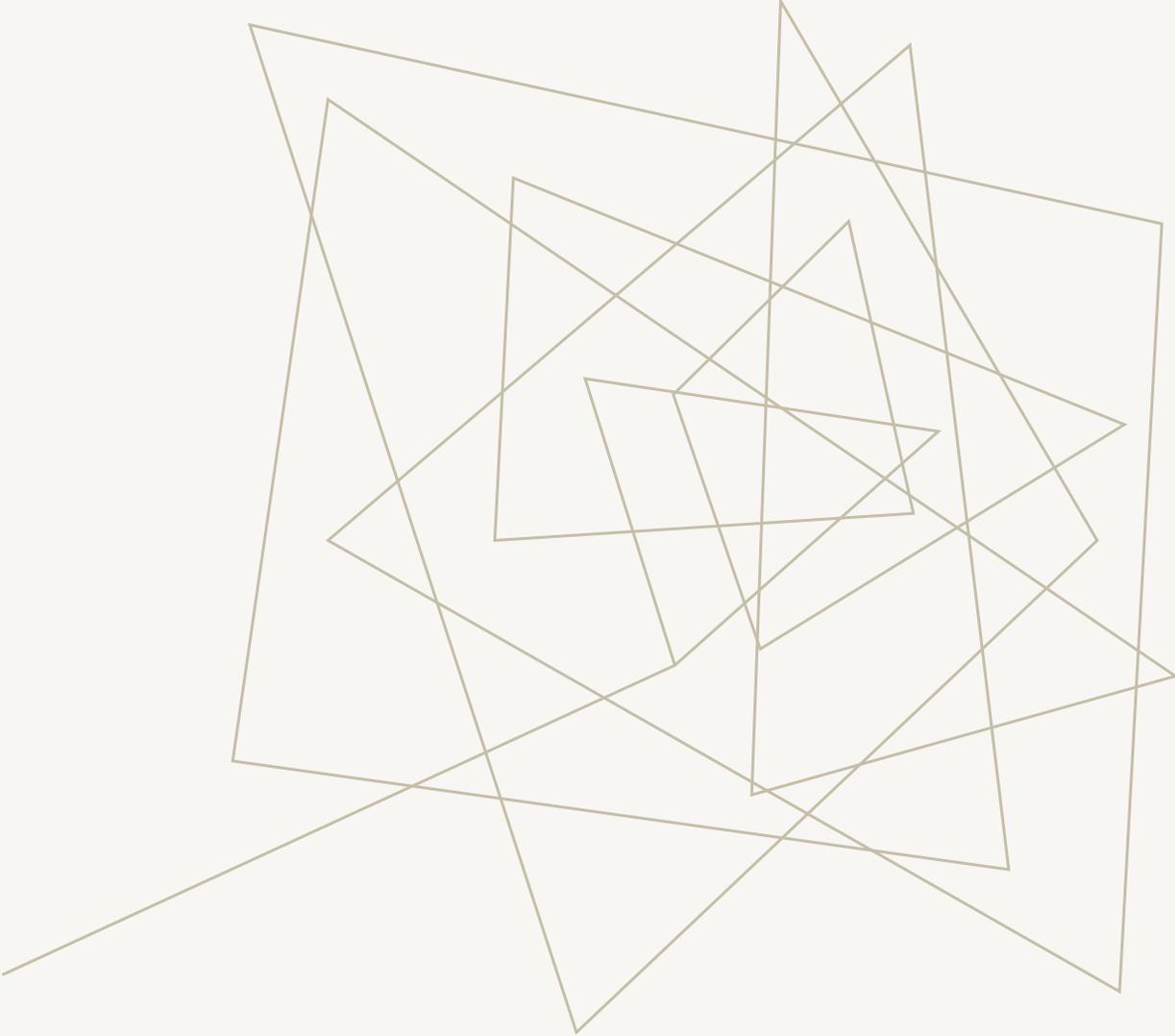
- ❖ Les trajectoires **simulées** sont comparées aux **historiques** via la MMD. Si celle-ci est inférieure ou égale au seuil critique, la trajectoire est jugée conforme.

TEST DE CONFORMITE DES TRAJECTOIRES HISTORIQUES

Méthode des signatures et discrédance moyenne maximale (MMD)



- ❖ La distribution des **MMD bootstrapées** sert à déterminer un seuil critique correspondant au **95e centile**, permet de distinguer les trajectoires cohérentes des trajectoires divergentes;
- ❖ La distribution des **MMD simulées** montre que la plupart des valeurs **sont inférieures ou égales à ce seuil : les trajectoires simulées sont statistiquement indiscernables des trajectoires historiques;**
- ❖ les simulations reproduisent **fidèlement la dynamique observée** dans les données réelles.



IV. MODÈLE RVFL : PROJECTIONS RISQUE-NEUTRE

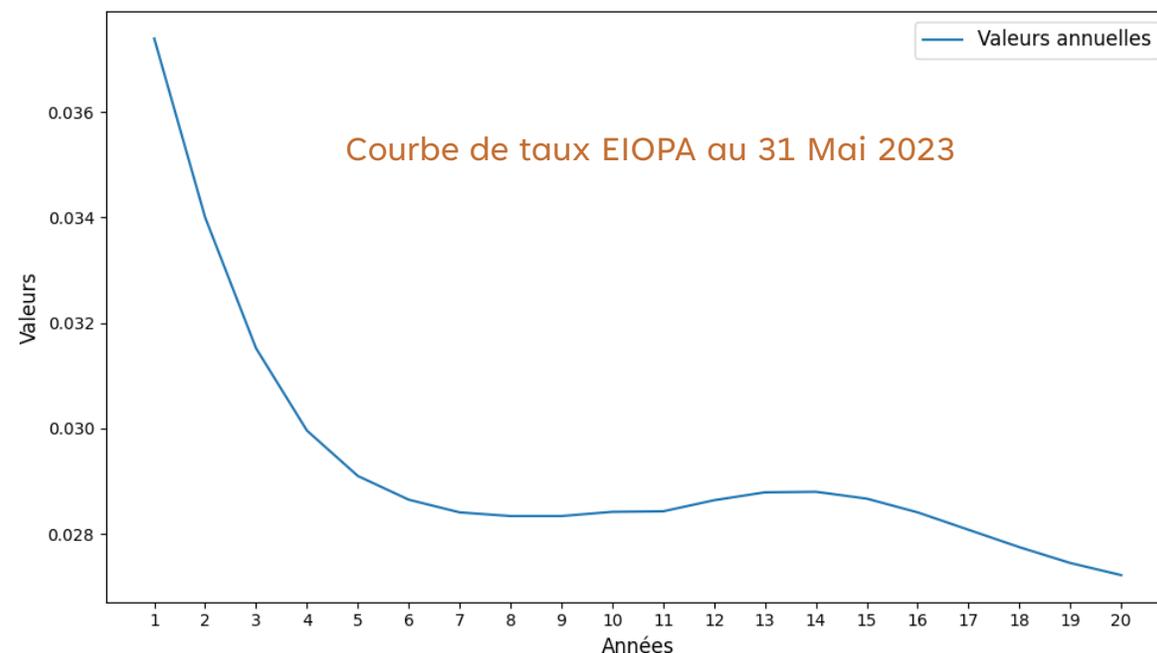
EXPLORATION DE LA PROBABILITÉ RISQUE-NEUTRE

La mesure **risque-neutre** est une mesure de probabilité sous laquelle la valeur d'un actif correspond à l'espérance de ses flux futurs, actualisés au **taux sans risque**.

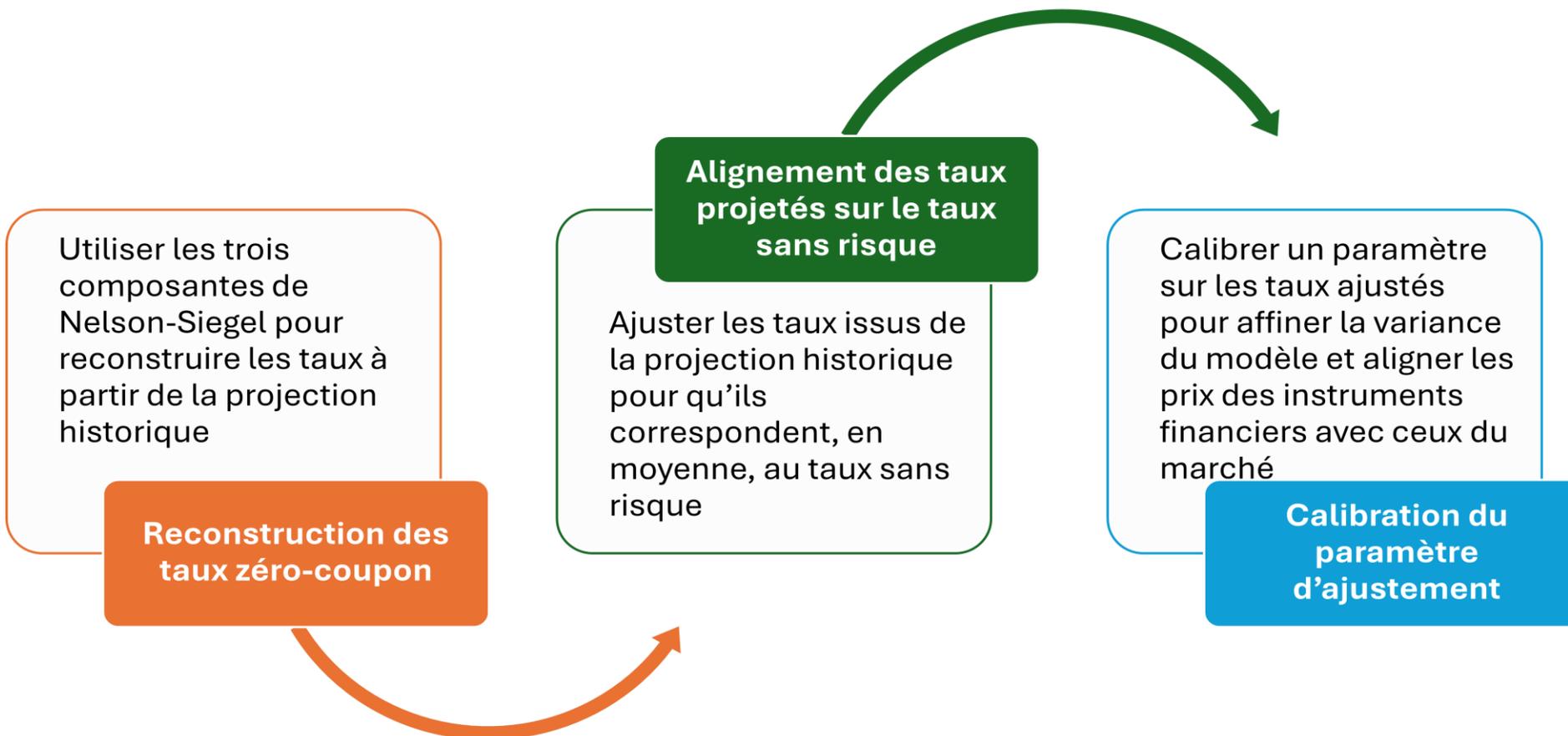
Principes fondamentaux de la probabilité risque-neutre

- **Cohérence de marché (*Market Consistency*)** : Les prix des actifs sont cohérents avec les conditions actuelles du marché;
- **Propriété de martingalité** : Les prix ajustés pour le risque suivent un processus de martingale, assurant que la valeur espérée des gains futurs est égale au prix actuel, sans inclure de prime de risque.

$R(0,t)$, le taux sans risque pour la maturité t (1 à 240 mois)



EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX



EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

1. Reconstruction des taux zéro-coupon

Calcul du taux zéro-coupon (zc)

$$R(t, T, j) = \beta_{1,t,j} + \beta_{2,t,j} \cdot \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_{3,t,j} \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right)$$

$\beta_{1,t,j}$, $\beta_{2,t,j}$ et $\beta_{3,t,j}$ sont respectivement la première, deuxième et troisième composante projetée de Nelson-Siegel obtenues via le modèle RVFL pour l'instant t , la simulation j et la maturité T .

2. Alignement des taux projetés sur le taux sans risque

Centrage des taux projetés

$$R_c(t, T, j) = R(t, T, j) - \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L R(t, T, j)$$

avec, $L = 1000$, le nombre de simulations



Ajout du taux sans risque

$$R_{\text{adj}}(t, T, j) = R_c(t, T, j) + F(0, t, T)$$

$$F(0, t, T) = \frac{R(0, T)(T-0) - R(0, t)(t-0)}{T-t}$$

$F(0, t, T)$ le taux forward, déduit de la courbe ZC initiale $R(0, t)$

Objectif : ajuster les taux projetés pour qu'ils donnent en **moyenne** le **taux sans risque** de référence

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : reproduire les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Le taux Zéro-coupon dans la mesure risque-neutre

Rappel des formules fondamentales

1. Taux court en mesure risque-neutre

$$R_{RN}(t, T, j) = \beta_{1,t,j}^{RN} + \beta_{2,t,j}^{RN} \cdot \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_{3,t,j}^{RN} \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right)$$

Le taux court



$$r_{RN}(t, j) = \lim_{T \rightarrow 0} R_{RN}(t, T, j) = \beta_{1,t,j}^{RN} + \beta_{2,t,j}^{RN}$$

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : **reproduire** les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Le taux Zéro-coupon dans la mesure risque-neutre

Rappel des formules fondamentales

2. Déflateur et obligations zéro-coupon

$$\text{Déflateur}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \exp\left(-\sum_{u=1}^t r_{RN}(u, j)\right) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad B_{RN}(t, T, j) = e^{-R_{RN}(t, T, j)(T-t)}$$

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : **reproduire** les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Le taux Zéro-coupon dans la mesure risque-neutre

Rappel des formules fondamentales

3. Taux swap

$$S_{0,n}(t, j) = \frac{B_{RN}(t, T_0, j) - B_{RN}(t, T_n, j)}{\sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{RN}(t, T_k, j)}$$

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : **reproduire** les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Le taux Zéro-coupon dans la mesure risque-neutre

Rappel des formules fondamentales

4. Prix modèle des swaptions

$$\pi_0^{\text{modèle}}(T) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{Déflateur}(T, j) \cdot \max(S_{0,n}(T, j) - K, 0) \cdot \sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{RN}(T, T_k, j)$$

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : reproduire les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Le taux Zéro-coupon dans la mesure risque-neutre

Rappel des formules fondamentales

1. Taux court en mesure risque-neutre

$$R_{RN}(t, T, j) = \beta_{1,t,j}^{RN} + \beta_{2,t,j}^{RN} \cdot \frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} + \beta_{3,t,j}^{RN} \cdot \left(\frac{1 - \exp(-T/\lambda)}{T/\lambda} - \exp(-T/\lambda) \right) \quad \xrightarrow{\text{Le taux court}} \quad r_{RN}(t, j) = \lim_{T \rightarrow 0} R_{RN}(t, T, j) = \beta_{1,t,j}^{RN} + \beta_{2,t,j}^{RN}$$

2. Déflateur et obligations zéro-coupon

$$\text{Déflateur}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \exp\left(-\sum_{u=1}^t r_{RN}(u, j)\right) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad B_{RN}(t, T, j) = e^{-R_{RN}(t, T, j)(T-t)}$$

3. Taux swap

$$S_{0,n}(t, j) = \frac{B_{RN}(t, T_0, j) - B_{RN}(t, T_n, j)}{\sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{RN}(t, T_k, j)}$$

4. Prix modèle des swaptions

$$\pi_0^{\text{modèle}}(T) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{Déflateur}(T, j) \cdot \max(S_{0,n}(T, j) - K, 0) \cdot \sum_{k=1}^n (T_k - T_{k-1}) B_{RN}(T, T_k, j)$$

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : reproduire les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

$$\{\alpha^*(t)\}_{t=1}^{12T} = \arg \min_{\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}} \left[\sum_{T=1}^{20} (\pi_0^{\text{modèle}}(\{\alpha(t)\}) - \pi_0^{\text{marché}}(T))^2 \right]$$

- $\pi_0^{\text{marché}}(T)$: prix observé sur le marché pour la maturité T
- $\pi_0^{\text{modèle}}(\{\alpha(t)\})$: prix calculé via le modèle pour la même maturité

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : reproduire les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Utilisation
d'une double
optimisation

$$\{\alpha^*(t)\}_{t=1}^{12T} = \arg \min_{\{\alpha(t)\}_{t=1}^{12T}} \left[\sum_{T=1}^{20} (\pi_0^{\text{modèle}}(\{\alpha(t)\}) - \pi_0^{\text{marché}}(T))^2 \right]$$

- $\pi_0^{\text{marché}}(T)$: prix observé sur le marché pour la maturité T
- $\pi_0^{\text{modèle}}(\{\alpha(t)\})$: prix calculé via le modèle pour la même maturité

EXPLORATION DE LA MODÉLISATION RISQUE-NEUTRE DES TAUX

3. Calibration du paramètre d'ajustement

Objectif : **reproduire** les prix des *swaptions* du marché pour toutes les maturités

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

Double optimisation

➤ une exploration globale est réalisée en utilisant l'algorithme **NLOPT GN ISRES**

- ❑ C'est un algorithme de type "**recherche globale**".
- ❑ Il teste plusieurs valeurs possibles dans un large espace pour essayer de trouver la zone qui semble la meilleure.
- ❑ Cet algorithme est capable de sortir des minima locaux, car il explore largement.

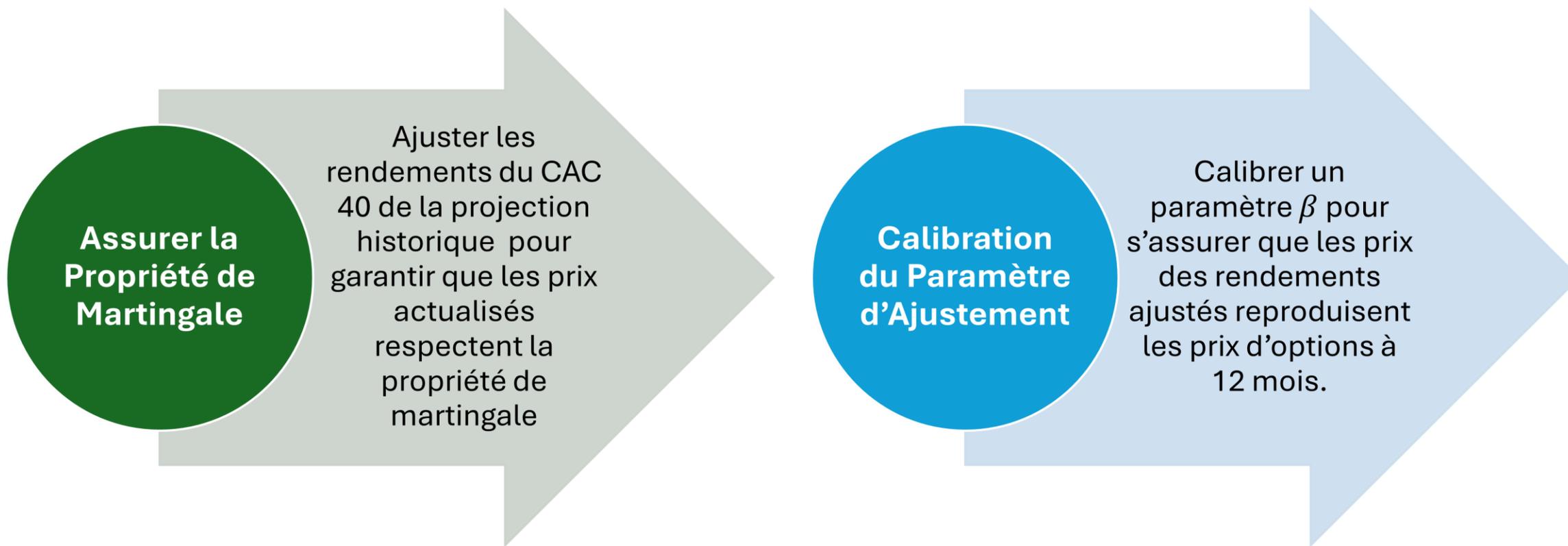
➤ un affinement local est effectué à l'aide de l'algorithme **NLOPT LN COBYLA**

- ❑ Une fois la bonne zone identifiée, on utilise un second algorithme plus précis (**COBYLA**) pour ajuster finement la solution.
- ❑ Il affine dans un petit voisinage autour de la solution globale trouvée.

Le taux ZC sous la mesure risque-neutre après calibration est donné par

$$R_{RN}(t, T, j) = \alpha^*(t) \cdot R_{adj}(t, T, j)$$

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS



APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

1. Assurer la propriété de martingalité

Problème : la **martingalité** n'est pas vérifiée avec les **rendements historiques**

$$P(t, j) = P_0 \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) \right) \quad \xrightarrow{\text{actualisation}} \quad P_{\text{act}}(t, j) = P(t, j) \cdot \exp \left(- \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right)$$

$\psi(t, j)$, le rendement historique du RVFL à l'instant t pour la simulation j
 P_0 , le prix initial et $r_{RN}(s, j)$, le taux court risque neutre du modèle RVFL

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [P_{\text{act}}(t, j)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[P_0 \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \right] \neq P_0$$



Martingalité non respectée

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

1. Assurer la propriété de martingalité

Solution : **ajustement** des rendements pour **assurer** la martingalité

$$\psi_{\text{adj}}(t, j) = \psi(t, j) + (r_{RN}(t, j) - \bar{\psi}(t)), \quad \bar{\psi}(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(t, j)]$$

Condition de martingalité satisfaite

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) \right] = \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[P_0 \cdot \exp \left(\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j) \right) \right] = P_0$$



Martingalité respectée

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

1. Assurer la propriété de martingalité

Problème : la **martingalité** n'est pas vérifiée avec les **rendements historiques**

$$P(t, j) = P_0 \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j)\right) \quad \xrightarrow{\text{actualisation}} \quad P_{\text{act}}(t, j) = P(t, j) \cdot \exp\left(-\sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)\right)$$

$\psi(t, j)$, le rendement historique du RVFL à l'instant t pour la simulation j
 P_0 , le prix initial et $r_{RN}(s, j)$, le taux court risque neutre du modèle RVFL

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[P_{\text{act}}(t, j)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[P_0 \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^t \psi(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)\right)\right] \neq P_0 \quad \implies \quad \text{Martingalité non respectée}$$

Solution : **ajustement** des rendements pour **assurer** la martingalité

$$\psi_{\text{adj}}(t, j) = \psi(t, j) + (r_{RN}(t, j) - \bar{\psi}(t)), \quad \bar{\psi}(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(t, j)]$$

Condition de martingalité satisfaite

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j)\right] = \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[P_0 \cdot \exp\left(\sum_{k=1}^t \psi_{\text{adj}}(k, j) - \sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)\right)\right] = P_0 \quad \implies \quad \text{Martingalité respectée}$$

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

2. Calibration du paramètre d'ajustement

Calibrer un paramètre β pour s'assurer que les prix d'options calculés à l'aide des rendements ajustés sont en accord avec ceux du marché.

$$\psi_{RN}(t, j) = \beta \cdot \psi_{adj}(t, j)$$

$$\beta^* = \arg \min_{\beta} \left[(P_{call}^{BS} - P_{call}^{RVFL}(\beta))^2 + (P_{put}^{BS} - P_{put}^{RVFL}(\beta))^2 \right]$$

Idée : **reproduire** le prix d'une option vanille à un an (T=1) à la monnaie.

Le rendement sous la mesure risque-neutre est finalement donné par $\psi_{RN}(t, j) = \beta^* \cdot \psi_{adj}(t, j)$

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

2. Calibration du paramètre d'ajustement

Calibrer un paramètre β pour s'assurer que les prix d'options calculés à l'aide des rendements ajustés sont en accord avec ceux du marché.

Modèle Black-Scholes avec drift variable

idée : mieux représenter les évolutions dynamiques des conditions de marché

$$S_{t,j} = S_0 \cdot \exp^{\int_0^t (r_{RN}(u,j) - \frac{\sigma^2}{2}) du + \sigma W_t}$$

Volatilité implicite d'une option CAC 40 ATM au 31 Mai 2023 $\sigma = 17,21\%$

K est le strike

Prix modèle BS

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{call}}^{BS} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \cdot (S_{T,j} - K)_+ \\ P_{\text{put}}^{BS} \approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \cdot (K - S_{T,j})_+ \end{array} \right.$$

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

2. Calibration du paramètre d'ajustement

Calibrer un paramètre β pour s'assurer que les prix d'options calculés à l'aide des rendements ajustés sont en accord avec ceux du marché.

Modèle RVFL

$$P_{RN}(T, j) = P_0 \times \exp\left(\sum_{k=1}^t \psi_{RN}(k, j)\right) \quad \text{Valeur du prix pour le log rendement sous la mesure risque-neutre}$$

Prix modèle RVFL

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{call}}^{RVFL} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L [(P_{RN}(T, j) - K)^+ \cdot \text{déflateur}(T, j)] \\ P_{\text{put}}^{RVFL} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L [(K - P_{RN}(T, j))^+ \cdot \text{déflateur}(T, j)] \end{array} \right.$$

APPROCHE RISQUE-NEUTRE : DÉMARCHE DE MODÉLISATION POUR LES ACTIONS

2. Calibration du paramètre d'ajustement

Calibrer un paramètre β pour s'assurer que les prix d'options calculés à l'aide des rendements ajustés sont en accord avec ceux du marché.

$$\psi_{RN}(t, j) = \beta \cdot \psi_{adj}(t, j)$$

$$\beta^* = \arg \min_{\beta} \left[(P_{call}^{BS} - P_{call}^{RVFL}(\beta))^2 + (P_{put}^{BS} - P_{put}^{RVFL}(\beta))^2 \right]$$

Idée : reproduire le prix d'une option vanille à un an (T=1) à la monnaie.

Modèle Black-Scholes avec drift variable

idée : mieux représenter les évolutions dynamiques des conditions de marché
 approche proposée par QUITTARD-PINON (2002)

$$S_{t,j} = S_0 \cdot \exp \int_0^t (r_{RN}(u,j) - \frac{\sigma^2}{2}) du + \sigma W_t$$

Volatilité implicite d'une option CAC 40 ATM au 31 Mai 2023 $\sigma = 17,21\%$

Prix modèle BS

$$\left\{ \begin{aligned} P_{call}^{BS} &\approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \cdot (S_{T,j} - K)_+ \\ P_{put}^{BS} &\approx \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(T, j) \cdot (K - S_{T,j})_+ \end{aligned} \right.$$

Prix modèle RVFL

$$\left\{ \begin{aligned} P_{call}^{RVFL} &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L [(P_{RN}(T, j) - K)^+ \cdot \text{déflateur}(T, j)] \\ P_{put}^{RVFL} &= \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L [(K - P_{RN}(T, j))^+ \cdot \text{déflateur}(T, j)] \end{aligned} \right.$$

Le rendement sous la mesure risque-neutre est finalement donné par $\psi_{RN}(t, j) = \beta^* \cdot \psi_{adj}(t, j)$

TESTS DE MARTINGALITÉ : UNE APPROCHE ANALYTIQUE

Cas des actions

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) \times \text{Indice}(t, j) - 1 = 0.$$

L est le nombre total de simulations, et t désigne les instants discrétisés de projection.

Valeur qu'il faut posséder aujourd'hui pour obtenir 1€ à la date t pour le scénario j

$$\text{déflateur}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{déflateur}(t-1, j) \exp(-r_{RN}(t, j)) = \exp(-\sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où $r_{RN}(s, j)$ correspond au taux court sous la mesure neutre au risque du modèle RVFL pour l'instant s et la trajectoire j .

Valeur de l'actif à la date t pour le scénario j , qui a pour valeur initiale 1€

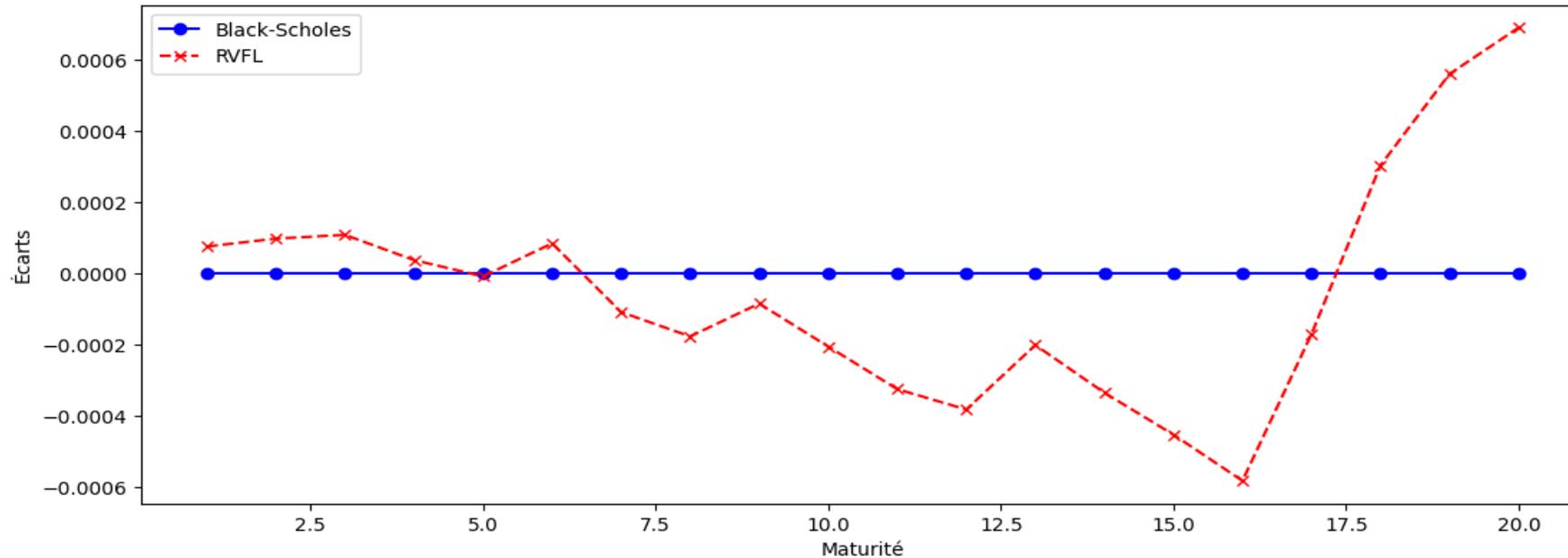
$$\text{Indice}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{Indice}(t-1, j) \times \exp^{\psi_{RN}(t, j)} = 1 \times \exp^{\sum_{s=1}^t \psi_{RN}(s, j)} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

$\psi_{RN}(s, j)$ correspond au rendement logarithmique simulé pour le scénario j à la date s sous la mesure risque-neutre.

TESTS DE MARTINGALITÉ : UNE APPROCHE ANALYTIQUE

Cas des actions

Evolution des écarts martingales des modèles RVFL et Black-Scholes(BS)



- Le modèle BS a été calibré l'aide de 5000 simulations sur un horizon de 50 ans grâce à l'outil GSE développé au sein de Prim'Act.
- Les tests **confirment** le critère de **martingalité**. Le modèle RVFL présente un écart faible de 10^{-4} .

TESTS DE MARTINGALITÉ : UNE APPROCHE ANALYTIQUE

Cas des taux

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \text{déflateur}(t, j) - B\left(0, \frac{t}{12}\right) = 0$$

$B(0, \frac{t}{12})$ représente le prix ZC à la maturité $\frac{t}{12}$, obtenu à partir des taux ZC initiaux

Valeur qu'il faut posséder aujourd'hui pour obtenir 1€ à la date t pour le scénario j

$$\text{déflateur}(t, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ \text{déflateur}(t-1, j) \exp(-r_{RN}(t, j)) = \exp(-\sum_{s=1}^t r_{RN}(s, j)) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où $r_{RN}(s, j)$ correspond au taux court sous la mesure neutre au risque du modèle RVFL pour l'instant s et la trajectoire j .

$R(0, t)$, taux sans risque de l'EIOPA pour la maturité t (t de 1 à 240 mois qui débute le 30 juin 2023)

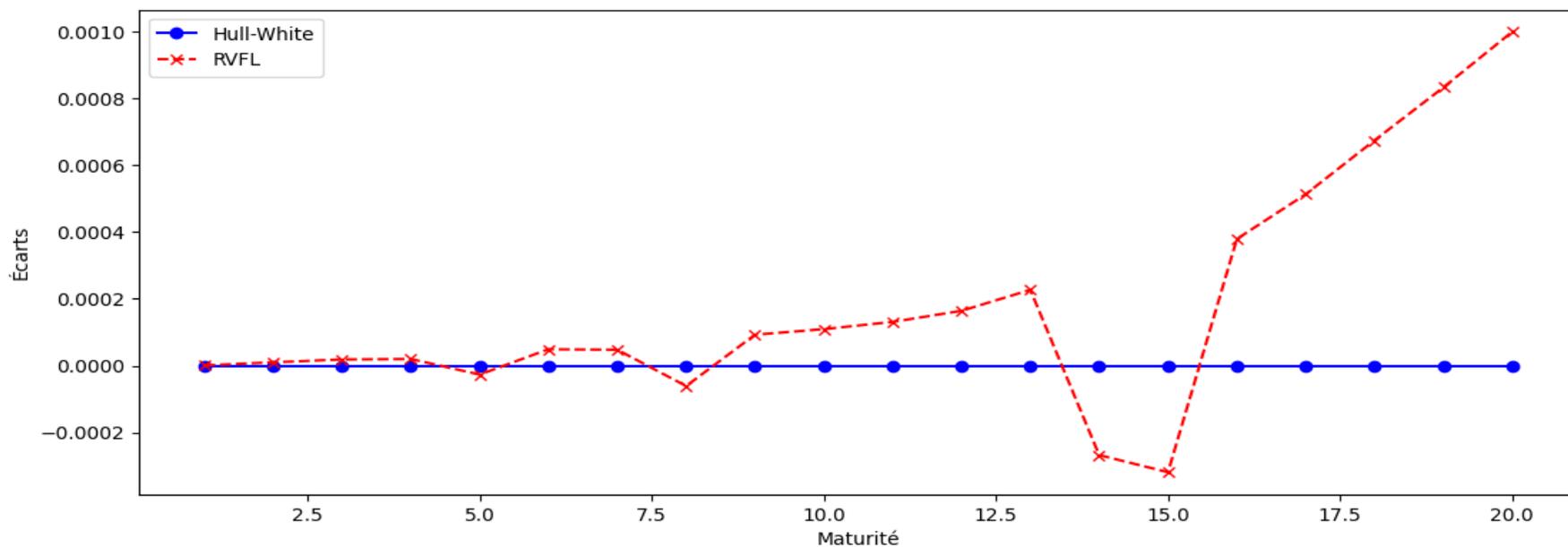
$$B(0, T) = \exp^{-R(0, T) \cdot T}$$

Pour $T = 1$ à 20

TESTS DE MARTINGALITÉ : UNE APPROCHE ANALYTIQUE

Cas des taux

Evolution des écarts martingales des modèles RVFL et Hull-White (HW)



- Le modèle HW a été calibré l'aide de 5000 simulations sur un horizon de 50 ans grâce à l'outil GSE développé au sein de Prim'Act.
- Les tests **confirment** le critère de **martingalité**. Le modèle RVFL présente un écart faible de 10^{-4} .

TEST DE MARKET-CONSISTENCY : ÉVALUATION ET ANALYSE

1. LES PRIX D'OPTIONS SUR LES ACTIONS

Option	Modèle RVFL	Modèle BS
<i>Call</i>	7,757	7,766
<i>Put</i>	5,435	5,449

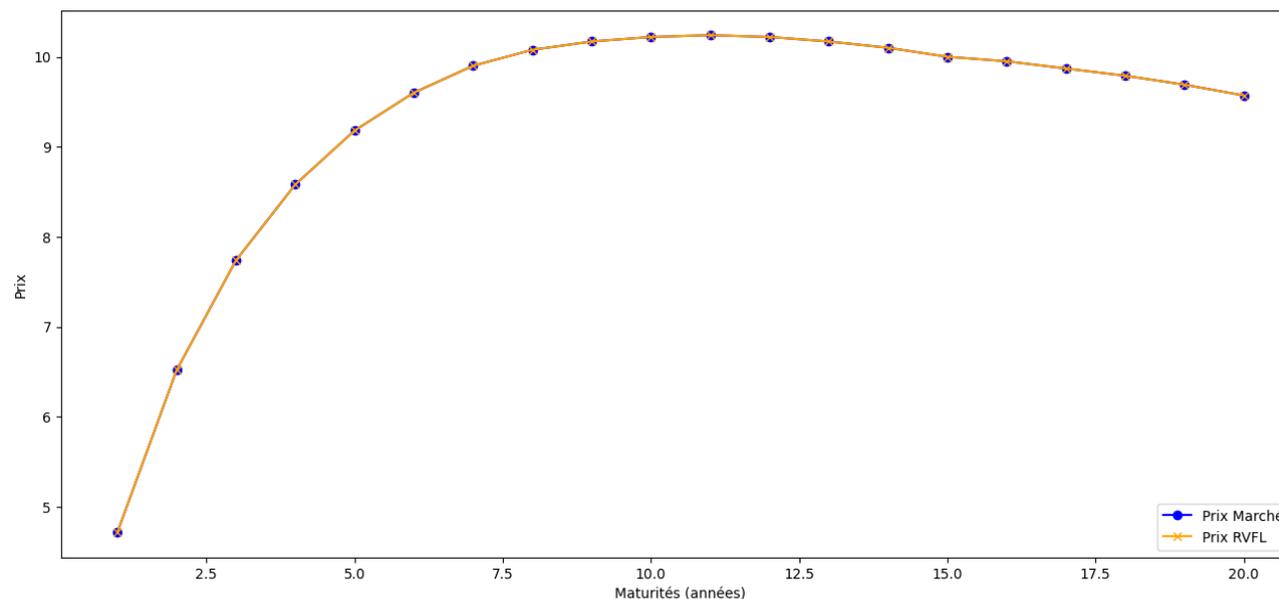
Prix des options *call* et *put* à T = 12 mois pour le modèle RVFL (après ajustement) et BS

- Les **prix** des *call* et *put* restent **proches**, avec un écart de l'ordre 10^{-3} , validant la cohérence des rendements ajustés et des dynamiques de marché.

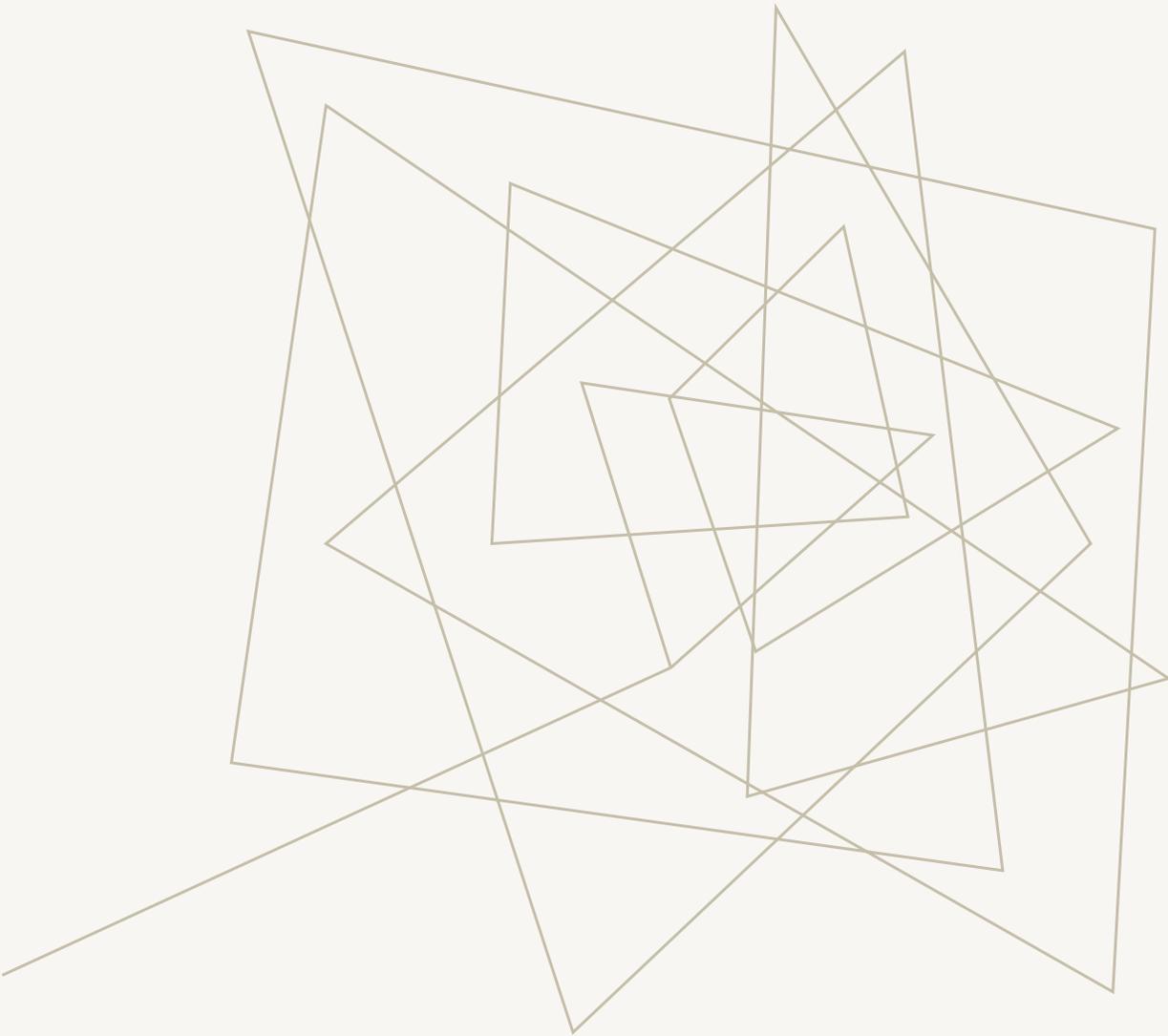
TEST DE MARKET-CONSISTENCY : ÉVALUATION ET ANALYSE

2. REPRICING DES SWAPTIONS (taux)

Comparaison entre les prix modèle et prix de marché après ajustement



- Les données de marché utilisées dans cette étude, obtenues via Bloomberg, concernent les prix des swaptions payeuses avec un ténor de 20 ans et des maturités allant de 1 à 20 ans.
- Le **prix ajusté des swaptions** dans le modèle est **aligné** avec celui du marché, avec un écart de l'ordre 10^{-4} , confirmant la cohérence de la modélisation des taux.



V. APPLICATION: CALCUL DE *BEST* *ESTIMATE*

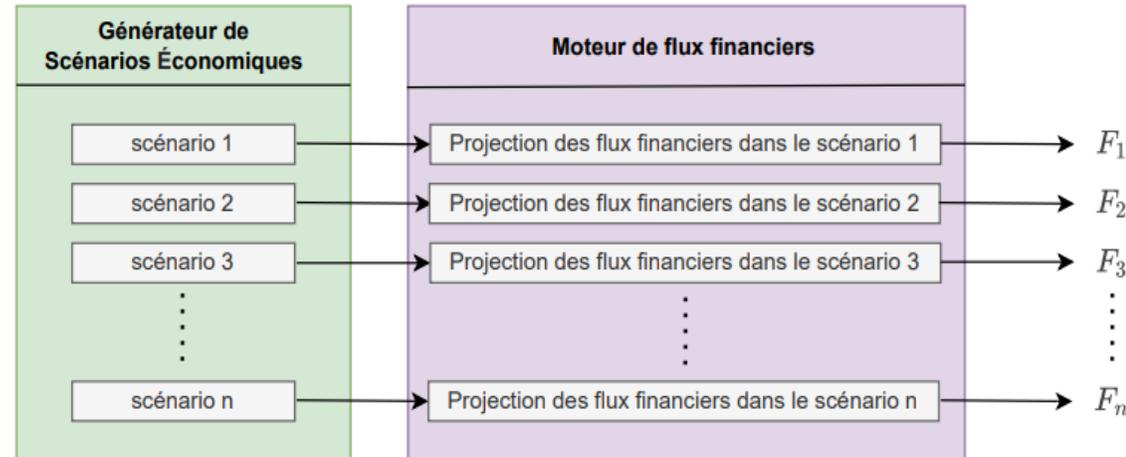
RÉVISION DES PRINCIPES FONDAMENTAUX

BE (*Best Estimate*)

« La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque » (Article 77, directive SII)

$$BEL_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q} \times \mathbb{P}} \left[\sum_{u>t} \delta_u F_u \right]$$

avec δ le facteur d'actualisation et F le cash-flow de passif



$$BEL_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{u>t} \delta_{u,i} F_{u,i}$$

TVOG (*Time Value of Options and Guarantees*)

- Représente le **coût des garanties et options incluses** dans les contrats d'assurance
- $TVOG = \text{Valeur avec options} - \text{Valeur sans options}$

LES FONDATIONS DU *BEST ESTIMATE* : HYPOTHÈSES CLÉS AU CŒUR DU CALCUL

BE pour un contrat d'épargne en euros

Description du contrat d'épargne au passif (fictif) de l'assureur

- Provision Mathématique (PM) : **60 millions d'euros**;
- Âge Moyen des Assurés : **50 ans**;
- Nombre d'Assurés : **128**;
- Taux contractuel de Participation aux Bénéfices (PB) : **90%**;
- Taux Minimum Garanti (TMG) : **0,5%**.

LES FONDATIONS DU *BEST ESTIMATE* : HYPOTHÈSES CLÉS AU CŒUR DU CALCUL

BE pour un contrat d'épargne en euros

Répartition du portefeuille (fictif) d'actifs de l'assureur

Classe d'actif	Valeur de marché (M €)	Valeur comptable (M €)	Pourcentage
Action	20,00	18,54	20%
Immobilier	10,00	9,88	10%
Obligations	63,00	58,85	63%
Monétaire	7,00	7,00	7%
Total	100,00	94,26	100%

LES FONDATIONS DU *BEST ESTIMATE* : HYPOTHÈSES CLÉS AU CŒUR DU CALCUL

BE pour un contrat d'épargne en euros

Hypothèses prises pour le Générateur de Scenarios Economiques

- Taux **Zéro Coupon** : taux des projections **RVFL risque-neutres**;
- Indices **Actions** : rendements des projections **RVFL risque-neutres**;
- **Inflation** : fourni par le GSE de Prim'Act (relation de **Fisher**);
- Indices **Immobiliers** : fourni par le GSE de Prim'Act (**modèle BS**);
- Indices de **Crédit** : fourni par le GSE de Prim'Act.

RAPPEL DE L'OUTIL SIMBEL

SimBEL est un outil qui permet de calculer le **Best Estimate** (meilleure estimation) des **engagements d'assurance-vie en euros**.

Il repose sur la **simulation Monte Carlo** de trajectoires économiques et intègre à la fois la **dynamique des passifs**, des **actifs** et les interactions entre les deux (ALM).

Objectifs de l'outil

- Estimer la **valeur actuelle des flux futurs** liés aux contrats d'assurance vie.
- Prendre en compte les **comportements des assurés**, les **rendements financiers et la politique de participation aux bénéfices (PB)**.
- Vérifier la cohérence et la robustesse du bilan dans des conditions normales et de stress.

RAPPEL DE L'OUTIL SIMBEL

Principaux modules de l'outil

Module passif

- ❖ Simule tous les **flux futurs des contrats** : prestations versées, rachats partiels ou totaux, et primes versées.
- ❖ Intègre **les comportements des assurés** : plus le taux servi est faible par rapport au marché, plus les assurés sont susceptibles de racheter.
- ❖ Applique la **participation aux bénéfices (PB)**, en redistribuant une partie du rendement financier aux assurés.

RAPPEL DE L'OUTIL SIMBEL

Principaux modules de l'outil

Module actif

- ❖ Modélise les **rendements d'un portefeuille** composé d'actions, obligations, immobilier et trésorerie.
- ❖ Intègre la gestion ALM :
 - Réinvestit automatiquement les revenus et remboursements selon des **règles définies à l'avance**.
 - Respecte les contraintes de durée moyenne (duration), d'allocation cible et de liquidité, pour **maintenir** l'équilibre entre actifs et passifs.

RAPPEL DE L'OUTIL **SIMBEL**

Principaux modules de l'outil

Module canton

- ❖ **Combine** la gestion des actifs et des passifs dans un ensemble cohérent.
- ❖ Calcule **le rendement global du portefeuille**.
- ❖ Détermine **le taux servi aux assurés** en fonction des résultats dégagés et des règles de lissage (via la PPB).

RAPPEL DE L'OUTIL SIMBEL

SimBEL est un outil qui permet de calculer le **Best Estimate** (meilleure estimation) des **engagements d'assurance-vie en euros**.

Il repose sur la **simulation Monte Carlo** de trajectoires économiques et intègre à la fois la **dynamique des passifs**, des **actifs** et les interactions entre les deux (ALM).

Objectifs de l'outil

- Estimer la **valeur actuelle des flux futurs** liés aux contrats d'assurance vie.
- Prendre en compte les **comportements des assurés**, les **rendements financiers** et la **politique de participation aux bénéfiques (PB)**.
- Vérifier la cohérence et la robustesse du bilan dans **des conditions normales et de stress**.

Principaux modules de l'outil

Module passif

- ❖ Simule tous les **flux futurs des contrats** : prestations versées, rachats partiels ou totaux, et primes versées.
- ❖ Intègre **les comportements des assurés** : plus le taux servi est faible par rapport au marché, plus les assurés sont susceptibles de racheter.
- ❖ Applique la **participation aux bénéfiques (PB)**, en redistribuant une partie du rendement financier aux assurés.

Module actif

- ❖ Modélise les **rendements d'un portefeuille** composé d'actions, obligations, immobilier et trésorerie.
- ❖ Intègre la gestion ALM :
 - Réinvestit automatiquement les revenus et remboursements selon des **règles définies à l'avance**.
 - Respecte les contraintes de durée moyenne (duration), d'allocation cible et de liquidité, pour **maintenir** l'équilibre entre actifs et passifs.

Module canton

- ❖ **Combine** la gestion des actifs et des passifs dans un ensemble cohérent.
- ❖ Calcule **le rendement global du portefeuille**.
- ❖ Détermine **le taux servi aux assurés** en fonction des résultats dégagés et des règles de lissage (via la PPB).

ÉVALUATION DU BE : CONFRONTATION ENTRE GSE-RVFL ET GSE DE PRIM'ACT (1/2)

BE calculé à l'aide à l'outil **SimBEL** avec 1000 simulations, l'horizon de calcul fixé à 20 ans et la PM = 60 millions d'euros

Valeur du BE et de la TVOG (en M€)

Modèle	BE	TVOG
GSE RVFL	63,5	2,7
GSE de Prim'Act	64,4	2,4
Écart relatif	1,5%	13,31%

➤ Écart sur le BE :

- Un écart de **1,5 %** est observé.
- Cela représente environ **15 % des fonds propres**, ce qui n'est pas négligeable.
- Cet écart met en évidence la **sensibilité du BE** au choix du **GSE**.

➤ Écart sur la TVOG :

- L'écart reste **modéré**.
- Ce résultat est **attendu**, compte tenu du **caractère conventionnel** du calcul de la TVOG.

ÉVALUATION DU BE : CONFRONTATION ENTRE GSE-RVFL ET GSE DE PRIM'ACT (2/2)

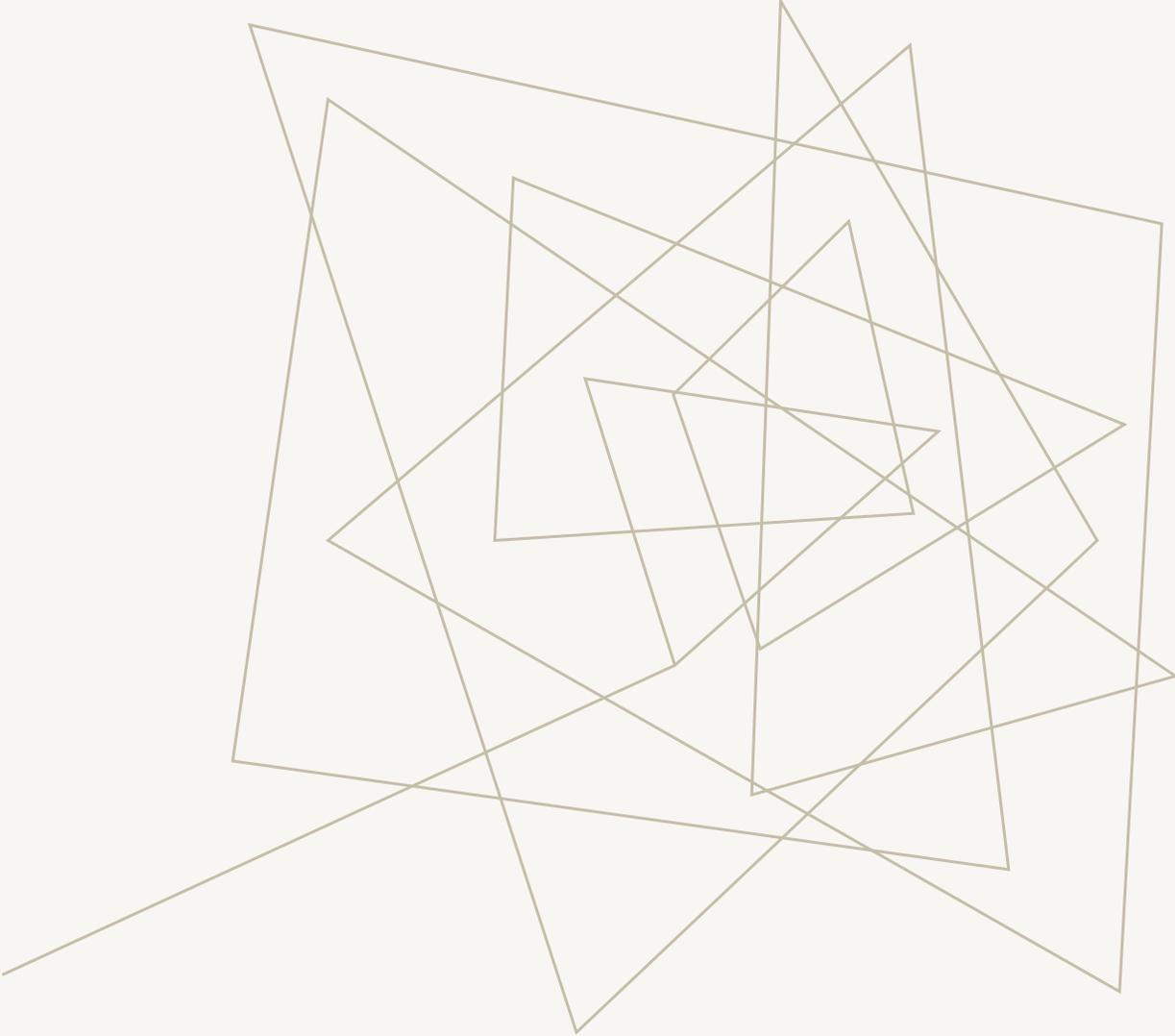
Analyse des impacts des chocs sur le BE

Impacts des chocs sur le BE et la TVOG (en M€)

Choc	BE RVFL	BE Prim'Act	TVOG RVFL	TVOG Prim'Act
Frais	63,85	64,07	0,53	0,55
Mortalité	64,25	64,41	0,42	0,56
Longévité	64,23	64,42	0,39	0,44
Rachat massif	63,59	63,84	0,21	0,22
Action	65,89	65,76	0,82	0,84
Immobilier	64,88	65,09	0,63	0,65
Spread	65,36	65,94	0,72	0,75

- ❑ Le modèle RVFL présente une **sensibilité** plus marquée aux chocs, en lien avec sa structure **non linéaire** et sa capacité à générer des scénarios variés.

Le modèle GSE RVFL produit des **résultats cohérents**, mais sa **stabilité** reste à confirmer.



VI. CONCLUSION

- ❑ **Construction d'un générateur de scénarios économiques** : Mise en place d'un générateur basé sur un modèle de *Machine Learning* afin de simuler des trajectoires économiques de manière flexible et non paramétrique.
- ❑ **Performance du modèle RVFL** : Les résultats obtenus sur les classes d'actifs telles que les actions et les obligations montrent que le modèle RVFL fournit des valeurs globalement cohérentes par rapport aux approches traditionnelles, bien que soumises à une variabilité plus marquée.
- ❑ **Respect des critères d'un GSE historique** : Le modèle RVFL satisfait aux exigences d'un générateur historique en reproduisant de manière fidèle les dynamiques observées sur les marchés financiers.
- ❑ **Respect des critères d'un GSE risque-neutre** : Le modèle respecte également les contraintes imposées par une modélisation « risque-neutre », garantissant ainsi la cohérence des évaluations en contexte actuariel.
- ❑ **Évaluation du *Best Estimate*** : Des écarts sont constatés par rapport à un modèle paramétrique, notamment en raison d'une sensibilité aux chocs économiques et aux évolutions de marché.
- ❑ **Perspectives de recherche** : Des prolongements pourraient inclure l'intégration de facteurs de risque additionnels, l'optimisation de la calibration pour la partie risque-neutre, ainsi que l'application du modèle au calcul du SCR et dans le cadre de l'ORSA.

MERCI DE VOTRE ATTENTION

Avez-vous des questions ?

Lucie AUBERT-LASSARADE

lucie.aubert-lassarade@primact.fr

Papa Thiecouta DIALLO

papa-thiecouta.diallo@primact.fr

RÉFÉRENCES

- ❑ Aubert-Lassarade, L. (2024). [Construction d'un générateur de scénarios économiques non-paramétrique](#). Dauphine, Mémoire d'actuaire
- ❑ Diallo, P.T. (2025). [Générateur de scénarios économiques non-paramétrique : modélisation avec réseaux de neurones sous mesures historique et risque-neutre](#). Dauphine, Mémoire d'actuaire.
- ❑ Moudiki, T., Planchet, F. et Cousin, A. (2018). [Multiple time series forecasting using quasirandomized functional link neural networks](#). *Risks*, 2018, 6(1), 22; doi:10.3390/risks6010022.
- ❑ Boumezoued, A., Andres , H. et Jourdain, B. (2024). *Signature-based validation of real-world economic scenarios*.
- ❑ Moudiki, T. (2023). *ahead: Time Series Forecasting. R package*.
- ❑ Guibert, Q. (2019). [SimBEL: Calculate the Best Estimate in Life Insurance with Monte Carlo Techniques](#).
- ❑ Caja, A. et Planchet, F. (2010). [La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?](#) *Assurances et gestion des risques*, Vol. 78 (3/4).