Value at Risk en assurance : recherche d'une méthodologie à long terme

Marcin FEDOR
Université Paris Dauphine

Julien MOREL
ISFA – Université Lyon I

RESUME

La Value at Risk est devenue un standard de la gestion de risque dans le monde financier. Le but de cet article est de spécifier les conditions sous lesquelles la VaR pourrait être une bonne mesure de risque d'actifs en assurance. Après la description des principales approches de calcul de la VaR employées actuellement dans le secteur bancaire, nous indiquerons des spécificités de la gestion financière en assurance. Nous présenterons ensuite les adaptations nécessaires de la VaR ayant un rapport avec ces particularités : prise en compte des changements de décomposition du portefeuille d'investissement dans le futur liés à la présence des produits de taux, détermination de l'espérance de rendement à long terme, choix de la meilleure méthode d'estimation lié aux propriétés des données historiques disponibles au moment du calcul de la VaR. Une étude empirique démontrera l'importance du choix des hypothèses et de la longueur de l'historique des données qui influencent de manière considérable le montant final de la VaR.

Mots clefs : Value at Risk, TailVaR, assurance, long terme, mesure de risque d'actifs, mesure de la solvabilité.

Nous voudrions remercier Niousha Shahidi pour ses indications précieuses, son aide inappréciable et son encore plus grande patience aussi bien que Pierre Bismuth pour ses éclaircissements pragmatiques et commentaires enrichissants, finalement Anne Tracol pour les dernières corrections.

Veuillez adresser toute correspondance à Marcin Fedor : PREDICA S.A. ; 50-56, rue de la Procession ; 75724 Paris Cedex 15 ; France ; Tél : +33143236639 ; Fax : +33143234666 ; e-mail : marcin.fedor@ca-predica.fr

1. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, on assiste à une réflexion globale sur les mesures de la solvabilité et la gestion des risques en assurance. Les dernières crises financières et économiques ont accéléré la recherche sur le sujet. Les réformes adoptées dans de nombreux pays (Etats-Unis, Australie, Japon) s'appuient sur une nouvelle réglementation des mesures des risques inhérents à l'assurance. Les assureurs européens vont à leur tour adopter un nouveau système prudentiel, appelé Solvency II, probablement très proche de ses homologues étrangers. Celui-ci est basé sur une étude séparée des différentes sources de risque, entre autres le risque de marché. Dans ce contexte, les modèles de Value at Risk (VaR) offrent l'avantage de proposer une mesure prospective du risque pour un portefeuille d'actifs.

La VaR a été intégrée dans le secteur bancaire via la reforme Bale II et sert a estimer une partie des fonds propres réglementaires nécessaires pour supporter le risque de marché. Naturellement, on pourrait entreprendre une réflexion sur l'adaptation analogue de la VaR dans le secteur de l'assurance.

Le concept de la VaR a été créé historiquement pour estimer le risque des opérations de *trading* dans les salles de marché. Par conséquent, la méthodologie de calcul de la VaR a été étudiée par et pour le secteur bancaire, et elle n'est pas directement applicable dans le secteur de l'assurance. Malgré la quantité très importante de la littérature sur la VaR, traitant ses différents aspects, l'application de ce concept en assurance a été peu étudié (parmi de rares articles nous citerons celui de Albert, Bahrle et Konig (1996) et de Ufer (1996)). L'objectif de cet article est donc de proposer, au regard des spécificités de la politique d'investissements en assurance, des adaptations à la méthodologie permettant de faire de la VaR un outil cohérent et viable de mesure de risque d'actifs pour ce secteur.

Il va de soi que la mesure du risque de marché d'un portefeuille d'actifs dépend du cadre comptable utilisé. Pour simplifier et généraliser notre recherche, nous nous affranchirons de ce cadre comptable et ne raisonnerons que sur les valeurs de marché des différents actifs. L'application des normes comptables et réglementaires peut s'effectuer ultérieurement. Par ailleurs, nous ne prendrons pas en compte les contrats en unité de compte, qui forment une partie non négligeable des portefeuilles d'actifs mais pour lesquels le risque de marché supporté par l'assureur est nul (ce risque est a la charge des assurés), non plus que les actifs non cotés comme les actifs immobiliers corporels. Enfin, nous considérerons que le portefeuille d'actifs ne possède aucune couverture donc aucun produit optionnel.

2. VALUE AT RISK

2.1 Definition

La Value at Risk (VaR) est une mesure probabiliste de la perte possible sur un horizon donné. Elle représente un niveau de perte, pour une position ou un portefeuille, qui ne sera dépassé durant une période donnée qu'avec un certain degré de confiance.

Considérons p_h comme la valeur future, et donc aléatoire, d'un portefeuille d'actifs (ou d'un actif) à l'instant h et p_0 sa valeur à la date d'estimation. Alors la variation de prix de ce portefeuille d'actifs pour un horizon *h*, appelée une fonction de perte ou une fonction P&L (profit and loss), est de :

$$\underset{[0;h]}{\Delta} p = p_h - p_0 \tag{2.1}$$

La Value-at-Risk d'un portefeuille d'actifs pour une période [*0* ; h] avec probabilité q est définie comme un montant, notée $VaR_h(q)$, telle que la variation $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ observée pour le portefeuille d'actifs durant l'intervalle [0; h] ne sera inférieure au montant $VaR_h(q)$ qu'avec une probabilité de (1-q). En d'autres termes, la perte de ce portefeuille pour la période [0 ; h] sera supérieure à $|VaR_h(q)|$ avec une probabilité (1-q).

$$P\left[\underset{[0;h]}{\Delta} p \leq VaR_h(q)\right] = 1 - q \Leftrightarrow P\left[\underset{[0;h]}{\Delta} p > VaR_h(q)\right] = q \tag{2.2}$$

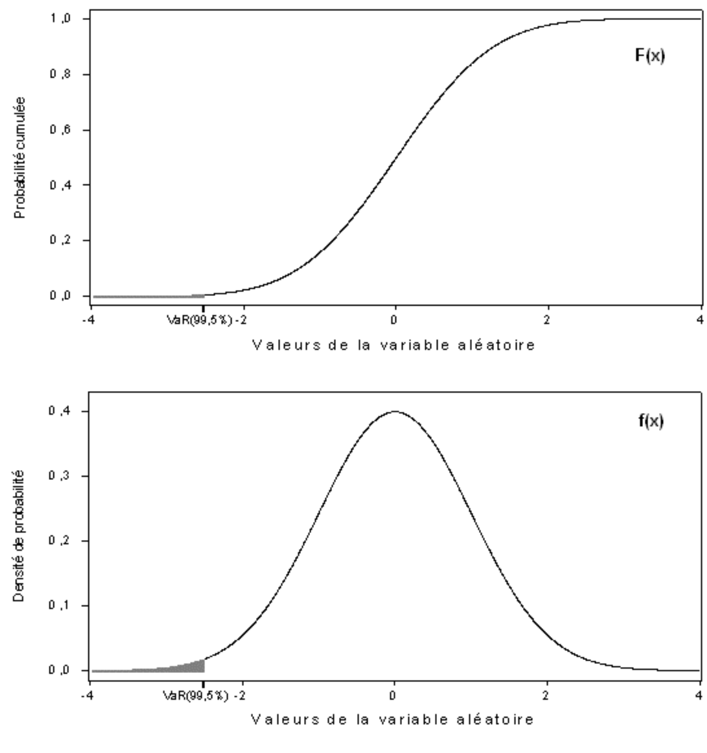
ou encore

$$VaR_h(q) = F_h^{-1}(1-q) \tag{2.3}$$

avec F_h la fonction de répartition de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ et F_h^{-1} la fonction inverse généralisé.

Notons f_h la densité de probabilité de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Nous pouvons illustrer la $VaR_h(q)$ sur la Graphique 1.

Graphique 1 : Value at Risk avec probabilité de 99,5% (fonction de répartition et fonction de densité de la loi normale)



Il faut noter que la VaR n' pas la propriété de sous-additivité. En effet, si on considère deux actifs A et B pour lesquels on estime la VaR pour le même horizon et le même seuil de confiance, $VaR_{h,A+B}(q) \leq VaR_{h,A}(q) + VaR_{h,B}(q)$ n'est pas toujours vérifié.

Le propriété de sous-additivité est vérifié par la TailVaR, appelée aussi Conditional Value at Risk (CVaR). La TailVaR au seuil de confiance q se définit comme l'espérance du montant de perte au delà du seuil de VaR :

$$TailVaR_h(q) = E\left[\underset{[0;h]}{\Delta} p \,/ \underset{[0.h]}{\Delta} p \leq VaR_h(q)\right] \qquad (2.4)$$

On peut ainsi exprimer la TailVaR au seuil de confiance q pour un horizon *h* en fonction de la densité f_h définie précédemment et du montant $VaR_h(q)$:

$$TailVaR_h(q) = \int_{-\infty}^{VaR_h(q)} x \ f_h(x)dx \qquad (2.5)$$

L'estimation de la TailVaR nécessite donc à la fois le calcul de la VaR mais aussi l'estimation de la queue de distribution de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ au delà de ce seuil de VaR.

2.2 Méthodes d'estimation

Pour appliquer les différentes méthodes de calcul de la VaR, il faut effectuer au préalable une transformation des différentes positions du portefeuille avec un certain nombre de facteurs de risques. La variation de prix du portefeuille sur la période [0 ;h] est alors fonction des variations de ces facteurs de risque

$$\underset{[0;h]}{\Delta} p_h = \Theta(\underset{[0;h]}{\Delta} X_1, \underset{[0;h]}{\Delta} X_2, ..., \underset{[0;h]}{\Delta} X_n) \qquad (2.6)$$

où $X_1, X_2, ..., X_n$ sont les différents facteurs de risque du portefeuille.

Ces facteurs de risque sont des variables fondamentales du marché (ex. les cours des titres, les taux d'intérêts, les indices boursiers, etc) qui déterminent les risques d'actifs de l'investisseur. La fonction Θ peut être linéaire si le modèle d'évaluation du prix d'une position de portefeuille est linéaire (le cas des actions). En revanche, pour certains types d'actifs comme les options, le modèle d'évaluation n'est pas linéaire, donc la fonction Θ ne l'est plus.

Les méthodes d'estimation de la VaR doivent ensuite exploiter les données historiques disponibles relatives à ces différents facteurs de risque pour estimer le quantile d'ordre q de la distribution de $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ .Généralement, ces données historiques sont formées par les variations journalières des différents facteurs de risque sur une période définie. Le choix de cette période est très important puisque nous devons disposer de cotations pour tous les facteurs de risque tout au long de cette période et pour celle-ci doit permettre d'estimer les futures variations de ces facteurs de risque.

Par la suite, nous ferons l'hypothèse que nous utilisons un historique de T jours ouvrés. Nous disposons donc de T variations historiques journalières de prix des différents facteurs de risque pour estimer la distribution de $\underset{[0;h]}{\Delta} p$.

Avant de présenter les différentes méthodes de calcul de la VaR, définissons les ensembles suivants :

$$S_1 = \{ \{ \underset{[-T;-(T-1)]}{\Delta} X_i ,..., \underset{[-2;-1]}{\Delta} X_i , \underset{[-1;0]}{\Delta} X_i \} \text{ pour i=1,..,n} \} \tag{2.7}$$

S_1 est l'ensemble formé par les *n* séries chronologiques de *T* returns journaliers des différents facteurs de risque.

$$H_1 = \{ \Theta(\underset{[-(j+1);-j]}{\Delta} X_1 , \underset{[-(j+1);-j]}{\Delta} X_2 ,..., \underset{[-(j+1);-j]}{\Delta} X_n) \text{ pour j=0,..,T-1} \} \tag{2.8}$$

H_1 est la série chronologique des *T* returns historiques journaliers de ce portefeuille.

Soit K le nombre de données historiques à *h* jours disponibles :

$$K = \left\lfloor \frac{T}{h} \right\rfloor \tag{2.9}$$

On peut alors définir les ensembles suivants :

$$S_h = \{ \{ \underset{[-K*h;-(K-1)*h]}{\Delta} X_i ,..., \underset{(-2*h;-h]}{\Delta} X_i , \underset{[-h;0]}{\Delta} X_i \} \text{ pour i=1,..,n} \} \tag{2.10}$$

S_h est l'ensemble formé par les *n* séries chronologiques de K returns à *h* jours des différents facteurs de risque.

$$H_h = \{ \Theta(\underset{[-(j+1)*h;-j*h]}{\Delta} X_1 , \underset{[-(j+1)*h;-j*h]}{\Delta} X_2 ,..., \underset{[-(j+1)*h;-j*h]}{\Delta} X_n) \text{ pour j=0,..,}K\text{-1} \} \tag{2.11}$$

H_h est la série chronologique des K returns historiques à *h* jours de ce portefeuille.

2.2.1 Méthode analytique

Il s'agit d'une méthode paramétrique. Si on suppose que F_h appartient à une famille connue de loi paramétrique, alors le problème de l'estimation de la VaR se réduit à l'estimation de ces paramètres.

Considérons un modèle paramétrique tel que :

$$F_h(x) = G\left(\frac{x-b}{a} \right) \tag{2.12}$$

où G est la fonction de distribution d'une loi connue, *a* est un paramètre d'échelle, *b* est un paramètre de position.

Alors nous pouvons exprimer la VaR comme :

$$VaR_h(q) = F_h^{-1}(q) = b + aG^{-1}(q) \tag{2.13}$$

Pour estimer la VaR il suffit donc d'obtenir des estimateurs $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des paramètres *a* et *b*.

Généralement, on suppose que la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ suit une loi normale de paramètres μ (moyenne) et σ (écarte type). On peut ensuite estimer la VaR du portefeuille par la formule :

$$\hat{V}aR_h(q) = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(q) \tag{2.14}$$

où Φ est la fonction de répartition de loi normale N(0,1) donc $\Phi^{-1}(q)$ est le quantile d'ordre q de la loi normale centrée réduite, $\hat{\mu}$ étant un estimateur de la moyenne de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$, $\hat{\sigma}$ étant un estimateur de l'écart type de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$.

Les paramètres μ et σ sont estimés à partir de la distribution passée des facteurs de risque. Il y a alors plusieurs méthodes d'estimation des paramètres selon les hypothèses qu'on formule.

Si nous supposons que les séries chronologiques composant S_h forment des échantillons identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d.) des lois des variables $\left\{\underset{[0;h]}{\Delta} X_i \quad i = 1,...,n\right\}$, nous pouvons estimer les paramètres des lois de ces variables directement sur ces échantillon historiques ainsi que les covariances entres les variables. Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que les $\left\{\underset{[0;h]}{\Delta} X_i \quad i = 1,...,n\right\}$ obéissent à la même famille de loi paramétrique, nous pouvons en déduire la loi de $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Néanmoins, si les séries chronologiques des ensembles S_h ne sont pas i.i.d., il faut utiliser des techniques permettant d'estimer et de corriger l'erreur de spécification (famille des modèles ARCH/GARCH).

2.2.2 Méthode historique

Dans cette méthode, la distribution future de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ est estimée directement par sa distribution passée, sous l'hypothèse que les données sont i.i.d. Nous estimons les variations sur [0 ; h] des différents facteurs de risque par leurs variations historiques et nous considérons donc que les éléments de H_h forment un échantillon i.i.d de la loi de $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Nous disposons donc de K simulations historiques de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Cette méthode présente l'avantage de ne pas faire d'hypothèse sur la loi de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$, il ne s'agit donc pas d'une méthode paramétrique.

2.2.3 Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo permet de générer des multiples scénarios stochastiques pour obtenir la distribution de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Le concept de cette méthode concerne donc les simulations répétitives de variables aléatoires $\left\{ \underset{[0;1]}{\Delta} X_i \quad i = 1,...,n \right\}$, traçant ensuite un grand nombre de trajectoires dans l'espace-prix pour l'horizon de calcul de la VaR.

Après le choix du modèle stochastique adapté pour les différents facteurs de risque (ex. mouvement brownien géométrique), on estime des distributions de ces facteurs de risque, ainsi que des paramètres qui y sont associés. L'utilisation conjointe des modèles stochastiques et des paramètres des distributions permet de construire un grand nombre de suites de variables aléatoires $\left\{ \underset{[0;1]}{\Delta} X_i \quad i = 1,...,n \right\}$ à l'horizon h (n suites par simulation). Il convient de souligner que ces variables aléatoires, servant à déterminer la valeur future d'un portefeuille d'actifs, sont simulés indépendamment. Pourtant, elles sont rarement i.i.d. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser une décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance.

2.2.3 Méthode de Bootstrap

Les tirages avec remise dans l'échantillon historique constituent une méthode de simulation stochastique alternative qui permet d'obtenir la distribution de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Dans la méthode de Bootstrap, les simulations sont effectuées directement sur la base de l'échantillon formé par les données historiques. Cette technique n'est donc pas paramétrique.

Supposons que les éléments de H_1 forment un échantillon i.i.d. de la loi de $\underset{[0;1]}{\Delta} p$, on obtient une suite (par simulation) de variables aléatoires $\underset{[0;1]}{\Delta} p$ à l'horizon h en effectuant h tirages aléatoires avec remise dans cet échantillon. Bootstrap permet donc de générer un grand nombre de ces simulations pour l'horizon de calcul de la VaR. Au final, on obtient la distribution de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} p$. Si les éléments de H_1 ne sont pas i.i.d., la méthode de Bootstrap peut être adaptée aux résidus normalisés du processus GARCH.

Notons qu'il existe un grand nombre de méthodes alternatives dont la présentation dépasse le cadre de cet article. Le choix de la méthode d'estimation de la VaR dépend de l'horizon souhaité de calcul (h), du choix et de la taille de l'historique utilisé (T), et enfin des hypothèses formulées sur les données de cet historique.

3. L'ADAPTATION DE LA VAR EN ASSURANCE

Historiquement, les modèles de VaR ont été créés au sein de banques d'investissement pour contrôler le risque du marché. Comme ce sont en effet les opérations de trading qui génèrent la majeure partie du risque de marché d'une banque, la VaR est utilisée pour mesurer le risque des positions prises par les gérants de portefeuille. Ces positions changent fréquemment et peuvent être libérées rapidement. Par conséquent, les banques évaluent leur risque de marché pour des horizons courts. En pratique, la VaR est estimée pour une journée ou quelques jours.

3.1 Les spécificités du portefeuille d'investissement

L'objectif de la gestion financière en assurance est l'optimisation du portefeuille, via le couple rendement-risque, en respectant les contraintes réglementaires et les engagements liés au passif. C'est dans ce but que les sociétés d'assurance définissent une politique d'investissement prudente et à long terme.

La politique de placement des sociétés d'assurance suit une gestion *buy and hold* (détention à long terme des titres). Une société d'assurance achète donc des actifs financiers qui garantissent un rendement à long terme lui permettant de respecter ses engagements de passif envers ses assurés et ses actionnaires. Son but n'est ni la spéculation ni le *trading*. Cela induit que le portefeuille est beaucoup plus stable dans le temps que dans le secteur bancaire. La gestion financière en assurance n'a donc pas la même réactivité que dans le secteur bancaire. En effet, dans les salles de marché bancaires, on peut aisément libérer une position considérée comme trop risquée, ce qui justifie l'estimation de la VaR journalière.

Néanmoins, les assureurs doivent obtenir un rendement à plus court terme de leur portefeuille d'actifs tout en maîtrisant son risque. Cela impacte aussi la politique financière à court et à long terme. Notamment, le risque de marché doit être évalué conformément au timing de reporting financier (généralement trimestriel et annuel). Cette évaluation du risque de marché peut être utilisée comme un indicateur de la solvabilité de l'entreprise face à de brutales évolutions du marché, et permettre de fixer le montant des fonds propres annuels. Par conséquent, les sociétés d'assurance devraient chercher à estimer leur risque de marché via la VaR pour des horizons allant de 3 mois à un an. Dès lors, l'estimation de la VaR journalière en assurance n'a aucun sens.

Par ailleurs, la sur-pondération effective des produits de dette (obligations, prêts et dépôts) dans les portefeuilles est une autre spécificité du secteur qui influence l'estimation du risque de marché via la VaR.

En conclusion, la gestion du risque de marché en assurance n'a pas les même objectifs que dans le secteur bancaire. Nous chercherons donc à évaluer via la VaR, pour des horizons compris entre trois mois et un an, stable sur la période d'estimation, et comprenant une grande quantité de produits de taux. Cela nécessite l'adaptation de la méthodologie de la VaR bancaire, calculée pour des horizons très courts sur un portefeuille de trading.

3.2 Propositions d'adaptations

3.2.1 Représentation du portefeuille d'investissement dans le futur

L'estimation de la VaR est basée sur l'évaluation de la distribution des variations du prix de marché du portefeuille $\underset{[0;h]}{\Delta} p$ entre deux dates. Par la suite, nous considérerons qu'on calcule la VaR en 0 pour un horizon h et que le gestionnaire du portefeuille d'investissement ne change pas sa position entre ces deux dates.

Si les conditions de marché restent inchangées en 0 et en h (nous ferons cette hypothèse par la suite), le prix de certaines classes d'actifs (actions et actifs comportant un risque similaire) sont les mêmes en 0 et en h. Dans ce cas, le portefeuille comprend les mêmes quantités de différents titres à ces deux dates. En revanche, la composition du portefeuille des produits de dette (obligations, prêts et dépôts) change avec le temps.

Considérons ainsi l'évolution sur [0 ;h] d'une obligation zéro coupon qui rembourse un montant C à la date τ (donc une obligation zéro coupon de maturité τ). Son prix de marché théorique est à la date 0 $p_0 = \dfrac{C}{(1+r_{\tau,0})^{\tau}}$ avec $r_{\tau,0}$ taux de rendement du marché à la date 0 d'une obligation zéro coupon de maturité τ . Cette obligation évolue entre 0 et *h :*

- si $\tau \leq h$, alors cette obligation zéro coupon n'est plus présente dans le portefeuille à la date h, mais le détenteur de cette obligation a reçu un cash flow de montant C versé depuis h - τ ;
- si $\tau > h$, alors cette obligation zéro coupon est toujours présente dans le portefeuille à la date h, mais sa maturité change et est égale à τ - h. Son nouveau prix de marché théorique en h est $p_h = \dfrac{C}{(1+r_{\tau-h,h})\tau}$ avec $r_{\tau-h,h}$ le taux de rendement du marché à la date h d'une obligation zéro coupon de maturité τ - h.

Nous pouvons donc constater que le prix de marché de cette obligation zéro coupon ne dépend pas des même variables aux dates 0 et h :

$$p_0 \neq p_h \tag{3.1}$$

En particulier, si la courbe des taux n'a pas changé entre 0 et h (hypothèse des mêmes conditions de marché), le prix de marché de cette obligation zéro coupon n'est plus le même.

Par la suite, nous considérerons que toutes les obligations peuvent se décomposer en une somme algébrique des obligations zéro coupon, donc que le prix de chaque obligation est déterminé par la somme des prix des obligations zéro coupon qui la composent.

Si l'investisseur détient à la date 0 une obligation qui génère n cash flows dans le futur (les tombées de coupon et le remboursement à l'échéance), ces cash flows peuvent être considérés séparément comme n obligations zéro coupon remboursant des coupons $C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n$ aux dates $\tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_{n-1} < \tau_n$.

Les prix théoriques à la date 0 de ces obligations zéro coupon se définissent comme $p_{1,0}, p_{2,0}, ..., p_{n-1,0}, p_{n,0}$, avec $p_{i,0} = \frac{C_i}{(1+r_{\tau_i,0})^{\tau_i}}$ pour i=1,…,n et avec $r_{\tau_i,0}$ le taux de rendement du marché à la date 0 d'une obligation zéro coupon de maturité τ_i. Le prix de marché théorique de cette obligation à la date 0 est donc

$$P_{obl,0} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r_{\tau_i,0})^{\tau_i}} \tag{3.2}$$

- si $\tau_n \leq h$, alors l'obligation n'est plus présente dans le portefeuille à la date h, mais l'investisseur a déjà reçu en h n cash flows de montant $C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n$ depuis $h-\tau_1, h-\tau_2, ..., h-\tau_{n-1}, h-\tau_n$.
- si $\tau_n > h$ alors l'obligation considérée est encore présente dans le portefeuille :
  - si $h < \tau_1$, alors le détenteur n'a reçu aucun cash flow à la date h lié à la détention de cette obligation, mais il dispose désormais d'une obligation de maturité $\tau_n - h$ dont le prix de marché est
  $$P_{obl,h} = \sum_{i=1}^{n} p_{i,h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r_{\tau_i-h,h})^{\tau_i-h}} \tag{3.3a}$$
  - si $h \geq \tau_1$, alors $\exists \alpha \in \{1,...,n-1\}$ tel que $\tau_\alpha \leq h < \tau_{\alpha+1}$. Le détenteur a donc reçu α cash flow à la date h de montants $C_1, C_2, ..., C_{\alpha-1}, C_\alpha$ et depuis $h-\tau_1, h-\tau_2, ..., h-\tau_{\alpha-1}, h-\tau_\alpha$. Le prix de marché de l'obligation est alors
  $$P_{obl,h} = \sum_{i=\alpha+1}^{n} p_{i,h} = \sum_{i=\alpha+1}^{n} \frac{C_i}{(1+r_{\tau_i-h,h})^{\tau_i-h}} \tag{3.3b}$$

On constate comme pour les obligations zéro coupon que le prix de cette obligation ne dépend pas des mêmes variables en 0 et h. Son prix ne sera généralement pas le même, en particulier si la courbe des taux n'a pas changé. Par extension à l'ensemble du portefeuille obligataire, pour estimer le prix de ce portefeuille, il faut décomposer chaque obligation comme précédemment et analyser leur situation à la date h.

En résumé, compte tenu du choix de l'horizon h et des caractéristiques des obligations détenues en 0, nous pouvons évaluer le prix des différentes obligations à la date h si nous connaissons les courbes des taux futurs des zéro coupon, ainsi que l'ensemble des cash flows reçus entre 0 et h. Le prix futur du portefeuille obligataire à la date h est ainsi déterminé par la courbe des taux zéro coupon à la date h et les choix de valorisation en h des cash flows reçus entre les dates 0 et h.

Les calculs de la VaR nécessitent de connaître la distribution des variations des prix de marché du portefeuille entre 0 et h. Comme le prix de marché actuel de portefeuille est connu, il suffit d'estimer la distribution future des prix de ce portefeuille à partir de la distribution en h des différents facteurs de risque du portefeuille. Or, la composition du portefeuille d'investissement change avec le temps à cause des obligations qu'il comporte. Il ne faut donc pas prendre en compte sa composition actuelle mais celle qu'il aura en h.

Notons $X_1, X_2, ..., X_n$ les facteurs de risque du portefeuille d'actifs pour la période $[0;h]$, leurs valeurs $X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}$ à la date 0 et $X_{1,h}, X_{2,h}, ..., X_{n,h}$ leurs valeurs en h

$$X_{k,h} = X_{k,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_k \tag{3.4}$$

Soient P_0 et P_h les prix de marché du portefeuille d'investissement respectivement en 0 et en h

$$P_0 = f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) \tag{3.5}$$

$$P_h = g(X_{1,h}, X_{2,h}, ..., X_{n,h}) \tag{3.6}$$

avec $f \neq g$ si le portefeuille comporte des actifs obligataires.

Notons Σ la valeur en h de l'ensemble des cash flows survenus sur la période $[0;h]$. Nous ne faisons aucune hypothèse quant à la méthode d'estimation de Σ. La variation de prix de ce portefeuille entre 0 et T est :

$$\underset{[0;h]}{\Delta} P = P_h + \Sigma - P_0 \tag{3.7}$$

Comme nous avons défini en (3.4), nous obtenons

$$P_h = g(X_{1,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_1, X_{2,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_2, ..., X_{n,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_n) \tag{3.8}$$

Et respectivement

$$\underset{[0;h]}{\Delta} P = g(X_{1,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_1, X_{2,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_2, ..., X_{n,0} + \underset{[0;h]}{\Delta} X_n) + \Sigma - f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) \tag{3.9}$$

Supposons que f et g sont des combinaisons linéaires des facteurs de risque :

$$f(X_{1,0}, X_{2,0,} ..., X_{n,0}) = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{i,0} \tag{3.10}$$

$$g(X_{1,h}, X_{2,h,} ..., X_{n,h}) = \sum_{i=1}^{n} b_i X_{i,h} = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(X_{i,0} + \underset{[0,h]}{\Delta} X_i \right) \tag{3.11}$$

Nous obtenons alors :

$$\underset{[0;h]}{\Delta} P = g(\underset{[0;h]}{\Delta} X_1, \underset{[0;h]}{\Delta} X_2, ..., \underset{[0;h]}{\Delta} X_n) + \Sigma + g(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) - f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) \tag{3.1l}$$

Cherchons l'espérance de cette variation de prix du portefeuille :

$$E(\underset{[0;h]}{\Delta} P) = E(g(\underset{[0;h]}{\Delta} X_1, \underset{[0;h]}{\Delta} X_2, ..., \underset{[0;h]}{\Delta} X_n)) + E(\Sigma) +$$
$$+ E(g(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0})) - E(f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}))$$

$$E(\underset{[0;h]}{\Delta} P) = g(E(\underset{[0;h]}{\Delta} X_1), E(\underset{[0;h]}{\Delta} X_2), ..., E(\underset{[0;h]}{\Delta} X_n)) +$$
$$+ E(\Sigma) + g(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) - f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) \tag{3.12}$$

Le terme $E(\Sigma) + g(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0}) - f(X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{n,0})$ n'est autre que l'espérance de variation de prix de ce portefeuille lorsque les variations des différents facteurs de risque du portefeuille ont une espérance nulle. Nous pouvons donc remarquer qu'un portefeuille contenant des obligations n'aura jamais le même prix dans le futur même si on fait l'hypothèse que les conditions de marché n'ont pas évolué.

En résumé, pour calculer la VaR de ce portefeuille, il faut estimer la fonction g, les distributions des variations $\underset{[0;h]}{\Delta} X_k$ des facteurs de risque entre 0 et *h*, et la valeur Σ en *h* des cash flows survenus entre 0 et *h*. Toutes ces estimations dépendent de l'horizon de calcul *h*. Il est donc illogique de chercher à estimer la VaR à un horizon h_1 par rapport à la VaR à un horizon h_2. En particulier, on ne peut théoriquement pas estimer directement la VaR du portefeuille à 1 an par rapport à une estimation de la VaR du portefeuille à 1 jour.

3.2.2 Recherche d'une mesure de risque juste (et prudente)

Le montant de la VaR dépend de l'estimation de l'espérance du rendement du portefeuille pour l'horizon considéré. Cette espérance exprime le trend (le drift) des prix des facteurs de risque dans le futur. La prévision de ce trend est problématique et il n'existe pas aujourd'hui de méthodologie unique. Pour des périodes courtes, l'espérance est très faible. Ainsi, dans la pratique, la VaR bancaire est souvent calculée sur la base d'une VaR journalière en faisant l'hypothèse d'une espérance de rendement nulle. Dans le secteur de l'assurance, il est nécessaire de calculer la VaR pour des horizons plus allongés pour lesquels l'espérance de rendement du portefeuille devient significative.

Nous ne pouvons pas prendre en compte l'espérance mesurée sur la base des données historiques puisqu'elle est variable dans le temps et dépend de la longueur de la fenêtre d'estimation. Deux autres possibilités s'offrent à nous :

- le choix de une espérance nulle : on se base sur l'hypothèse que les divers facteurs de risque ont tous une espérance nulle, et donc qu'on ne suppose a priori aucune évolution favorable ou défavorable du marché.
- le choix d'une espérance déterminée : on définit une espérance de portefeuille en se basant soit sur les prévisions de services d'experts indépendants (estimées isolément de la VaR ce qui garantie sa fiabilité), soit sur un consensus du marché à la date de calcul (en utilisant par exemple les taux forward des obligations zéro coupon pour l'horizon h ou les informations induites dans les options).

Ce choix est très important car il influence fortement l'estimation de la VaR et donc du risque du portefeuille. Il convient donc de l'effectuer avec la plus grande prudence, en tenant compte des buts recherchés.

Le fait de baser les calculs de la VaR sur une espérance prédéterminée (non historique), signifie que l'on doit adapter l'espérance de la variable aléatoire $\underset{[0;h]}{\Delta} P$, et donc les espérances des variations des différents facteurs de risque. Comme un portefeuille d'investissement d'une société d'assurance comprend des produits de taux, les facteurs de risque peuvent être choisis soit parmi les prix de marché des obligations zéro coupon soit parmi les taux de marché correspondants. Or, il n'est pas équivalent d'utiliser les taux de marché ou les prix des obligations zéro coupon comme facteurs de risque :

- l'utilisation des variations des taux comme facteurs de risque surestime les variations futures des prix donc sous estime le risque de portefeuille d'investissement ;
- l'utilisation des variations des prix comme facteurs de risque surestime les variations futures des taux donc surestime le risque de portefeuille d'investissement.

Considérons une obligation zéro coupon remboursant 1 et de maturité τ. Notons $p_{\tau,0}$ et $p_{\tau,h}$ comme les prix de cette obligation zéro coupon aux dates 0 et *h,* et $r_{\tau,0}$ et $r_{\tau,h}$ comme les taux de l'obligation zéro coupon en question aux dates 0 et *h*. Par définition, on a $p_{\tau,0} = (1+r_{\tau,0})^{-\tau}$ et $p_{\tau,h} = (1+r_{\tau,h})^{-\tau}$ donc $r_{\tau,0} = (p_{\tau,0})^{-1/\tau} - 1$ et $r_{\tau,h} = (p_{\tau,h})^{-1/\tau} - 1$.

Définissons les variables aléatoires X et Y :

$$X = \underset{[0;h]}{\Delta}(p_\tau) = p_{\tau,h} - p_{\tau,0} \tag{3.13}$$

$$Y = \underset{[0;h]}{\Delta}(r_\tau) = r_{\tau,h} - r_{\tau,0} \tag{3.14}$$

Le taux et le prix d'une obligation zéro coupon sont toujours strictement positifs ($r_{\tau,0}, r_{\tau,h}, p_{\tau,0}, p_{\tau,h} > 0$), donc $X = \underset{[0;h]}{\Delta}(p_\tau) = p_{\tau,h} - p_{\tau,0} > -p_{\tau,0}$ et $Y = \underset{[0;h]}{\Delta}(r_\tau) = r_{\tau,h} - r_{\tau,0} > -r_{\tau,0}$.

Définissons respectivement les fonctions φ et ϕ sur $]-p_{\tau,0};+\infty[$ et $]-r_{\tau,0};+\infty[$:

$$\varphi(x) = (p_{\tau,0} + x)^{-1/\tau} - (p_{\tau,0})^{-1/\tau} \tag{3.15}$$

$$\phi(x) = (1 + r_{\tau,0} + x)^{-\tau} - (1 + r_{\tau,0})^{-\tau} \tag{3.16}$$

On a $Y = \varphi(X)$ et $X = \phi(Y)$. Dérivons deux fois les fonctions φ et ϕ :

$$\varphi''(x) = \frac{\tau+1}{\tau^2}(p_{\tau,0} + x)^{-(2\tau+1)/\tau} > 0 \tag{3.17}$$

$$\phi''(x) = \tau^2(1 + r_{\tau,0} + x)^{-(\tau+2)} > 0 \tag{3.18}$$

Les fonctions φ et ϕ sont donc strictement convexes.

En utilisant l'inégalité de Jensen, il vient :

$$E(Y) = E(\varphi(X)) > \varphi(E(X)) \tag{3.19}$$

$$E(X) = E(\phi(Y)) > \phi(E(Y)) \tag{3.20}$$

Pour estimer la VaR d'un portefeuille d'investissement comportant des obligations, on utilise comme facteurs de risque soit les variations des prix des obligations zéro coupon soit les variations des taux correspondants. On cherche donc à déterminer soit la loi de $\underset{[0;h]}{\Delta}(p_\tau)$ surestimant l'espérance de $\underset{[0;h]}{\Delta}(r_\tau)$ soit la loi de $\underset{[0;h]}{\Delta}(r_\tau)$, alors on surestime l'espérance de $\underset{[0;h]}{\Delta}(p_\tau)$. Par conséquent, si on utilise les variations des prix des obligations zéro coupon comme facteurs de risque, on surestime les variations des taux futurs de ces obligations zéro coupon donc on surestime le risque du portefeuille (on surestime la VaR). De même, si on utilise les variations des taux des obligations zéro coupon comme facteurs de risque, on surestime les variations des prix futurs de ces obligations zéro coupon donc on sous-estime le risque du portefeuille (on sous-estime la VaR).

3.2.3 Le choix de la méthode d'estimation adapté pour l'assurance

Nous proposons dans ce paragraphe une procédure de choix d'une méthode d'estimation de la VaR (parmi celles présentées en 2.2) la mieux adaptée en assurance par rapport aux propriétés des données historiques dont on dispose au moment des calculs.

Considérons les séries de returns journaliers des différents facteurs de risque. Comme nous l'avons souligné précédemment, les séries chronologiques doivent être identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d.). Si l'hypothèse des données i.i.d. est erronée, il faut alors utiliser des techniques permettant d'estimer et de corriger l'erreur de spécification (famille des modèles ARCH/GARCH). Des agrégations temporelles des processus GARCH ont été présentées par Drost et Nijman (1993). Néanmoins, d'après Christoffersen, Diebold et Schuermann (1998) et Christoffesen et Diebold (1997), si l'application de ces modèles se révèle efficace à court terme, elle devient caduque pour des horizons de prévision supérieurs à 10 jours. Le cadre restreint de l'article ne permet pas de traiter ce problème plus étroitement.

Si les séries chronologiques sont identiquement et indépendamment distribuées, on peut utiliser les méthodes présentées en 2.2 pour estimer la VaR. Si on peut accepter une hypothèse supplémentaire que les séries chronologiques des facteurs de risque sont normalement et indépendamment distribuées (n.i.d.), nous pouvons calculer la VaR a l'horizon h via l'extrapolation de la VaR journalière par « racine du temps ».

La règle de la « racine du temps » se base sur le raisonnement suivant. Si les variations des logarithmes de prix sont i.i.d., alors $\ln(p_t) - \ln(p_{t-1}) = \varepsilon_t$, donc $\ln(p_t / p_{t-1}) = \varepsilon_t$ ou $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} (\mu, \sigma^2)$. Si on considère la variation entre t-h et t, on a donc $\ln(p_t / p_{t-h}) = \sum_{i=0}^{h-1} \varepsilon_{t-i}$. Comme les ε_t sont i.i.d., leur somme a une variance hσ^2 et un écart type $\sqrt{h\sigma^2}$. D'où la règle de $\sqrt{h}$. Néanmoins, si cette méthode est appliquée à un quantile (le cas de la VaR), la méthode de racine du temps exige que les données soient normalement et indépendamment distribuées (n.i.d.). Les explications détaillées dépassent le cadre de ce article et se trouvent dans Danielsson et Zigrand (2004).

Si on accepte l'hypothèse que les séries chronologiques des facteurs de risque sont normalement et indépendamment distribuées (n.i.d.), la VaR peut être calculée avec la méthode de Monte Carlo (sous condition de l'application de la loi normale) ou avec des méthodes analytique (basée sur la loi normale) et de simulation historique. Dans les deux derniers cas, on calcule la VaR journalière et ensuite on l'extrapole à un horizon plus long avec la règle de $\sqrt{h}$.

Dans une situation contradictoire, si les séries chronologiques des facteurs de risque ne sont pas n.i.d. (mais elles restent toujours i.i.d.), on peut toujours calculer la VaR sur la base journalière : avec la méthode de Bootstrap ou avec la méthode de Monte Carlo basée sur une loi de distribution suivi par des séries chronologique des facteurs de risque (ex. loi de Student).

Si l'horizon de calcul de la VaR à long terme ne réduit pas considérablement le nombre K de données historiques à h jours, calculé avec la formule (2.9), on peut estimer la VaR sur la base des séries chronologiques non-journalières (on peut utiliser directement les returns à h jours). Dans ce cas, la méthode de simulation historique et la méthode analytique (basée sur une loi différente de la loi normale, ex. loi de Student) sont admissibles. Dans la pratique, elles peuvent être difficilement applicables si on ne dispose pas de données historiques sur plusieurs dizaines d'années.

Les étapes de la décision concernant le choix de la méthode d'estimation de la VaR adapté en assurance, décrites ci-dessus, sont représentées par l'arbre de décision dans l'annexe 1.

4. RESULTATS EMPIRIQUES ET DISCUSSION

Dans cette partie, nous examinons en pratique les calculs de la VaR pour un portefeuille d'investissement d'une société d'assurance. Nous créerons un portefeuille fictif et nous analyserons comment on peut estimer sa VaR, au regard des remarques faites au paragraphe 3.

4.1 Les hypothèses

Nous avons choisi d'estimer la VaR et la TailVaR pour un seuil de confiance de 99,5% ($q = 99{,}5\%$). Ce choix est inspiré par les travaux actuels sur Solvency II.

Nous avons spécifié au paragraphe 3.1 que l'estimation de la VaR était utile en assurance lorsqu'on la calcule pour des horizons de trois mois (conformément au calendrier de reporting financier) à un an (en conséquence d'estimation du montant des fonds propres). Nous avons donc choisi d'estimer la VaR pour ces deux horizons de 100 et 250 jours ouvrés ($h = \{100, 250\}$).

Nous baserons principalement notre analyse sur une estimation de la VaR à la date du 31/12/2004. Comme on ne dispose d'un historique des facteurs de risque qu'à partir du 30/12/1994, on peut calculer la VaR avec 2612 données journalières au maximum. Nous choisirons de calculer la VaR avec des historiques de données équivalentes à 1, 2, 4 et 8 ans ($T = \{250,500,1000,2000\}$).

Nous créerons un portefeuille fictif d'actifs dont la composition s'apparente à un portefeuille d'investissement représentatif pour les sociétés d'assurance. Il comportera ainsi 25 obligations françaises à taux et coupons annuels fixes et 7 indices actions sans versement de dividende. Nous considérerons que chaque ligne de ce portefeuille vaut 100 euros à la date d'estimation de la VaR (date 0). La composition précise de ce portefeuille est donnée par le tableau 1 dans l'annexe 2.

Nous choisissons d'utiliser comme facteurs de risque de ce portefeuille les prix des 7 différents indices et les prix des obligations zéro coupon de maturité 3, 6 mois et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 20, 30 ans. Conformément au (3.10) et au (3.11), les fonctions f et g seront des combinaisons linéaires de ces 22 facteurs de risque ($n = 22$). Notons donc :

$$f(X_{1,0}, X_{2,0},..., X_{22,0}) = \sum_{i=1}^{22} a_i X_{i,0}$$

$$g(X_{1,h}, X_{2,h},..., X_{22,h}) = \sum_{i=1}^{22} b_i X_{i,h} = \sum_{i=1}^{22} b_i (X_{i,0} + \underset{[0,h]}{\Delta} X_i)$$

Nous rappelons que l'utilisation des prix (et non des taux) des obligations zéro coupon comme facteurs de risque présente le double avantage d'obtenir des décompositions du portefeuille en combinaison linéaire et de ne pas sous-estimer le risque du portefeuille.

Conformément au paragraphe 3.2.1, les différents cash flows du portefeuille obligataire ont été redistribués sur un ensemble d'échéances des obligations zéro coupon au dates 0 et h pour déterminer les coefficients a_i, b_i et Σ. Il existe de nombreuses méthodes différentes de mapping. Pour simplifier la démonstration, nous avons décidé d'utiliser la méthode linéaire :

$$\underset{[0;h]}{\Delta} P = \sum_{i=1}^{22} b_i \underset{[0,h]}{\Delta} X_i + \Sigma + \sum_{i=1}^{22} (b_i - a_i) X_{i,0}$$

ou Σ représente la valeur en h des cash flows versés entre les dates 0 et h. En pratique, ces cash flows doivent équilibrer la trésorerie de l'entreprise mais pourraient aussi être réinvestis directement dans de nouveaux actifs. Dans un souci de prudence, nous considérerons que ces cash flows restent en trésorerie de l'entreprise. Σ est donc égale à la somme algébrique des cash flows survenus entre les dates 0 et h.

Nous ne faisons pas d'hypothèse sur une évolution favorable ou défavorable du marché donc nous supposons que les différents facteurs de risque ont une espérance nulle à h jours (voir paragraphe 3.2.2) :

$$\forall i \ \ E\left[\underset{[0,h]}{\Delta} X_i\right] = 0$$

On peut alors déterminer l'espérance de ce portefeuille entre les dates 0 et h, soit :

$$E(\underset{[0;h]}{\Delta} P) = \Sigma + \sum_{i=1}^{22} (b_i - a_i) X_{i,0}$$

Lorsqu'on calcule cette espérance pour une estimation à la date du 31/12/2004, on obtient des espérances très faibles voire négatives, ce qui démontre que le choix d'évaluer les cash flows futurs par leur somme algébrique est très prudent :

$E(\underset{[0;100]}{\Delta} P)$ = +0,37 euros soit +0,01%

$E(\underset{[0;250]}{\Delta} P)$ = -0,42 euros soit –0,01%

4.2 Le choix de la méthode d'estimation

Nous suivrons l'arbre de décision du paragraphe 3.2.3 pour choisir les méthodes d'estimation de la VaR et de la TailVaR les plus adaptées au portefeuille fictif.

Comme un horizon de calculs h est plus important de 10 jours, l'utilisation des modèles ARCH/GARCH pour corriger une possible erreur de spécification devient caduque. Pour pouvoir calculer la VaR, les returns journaliers de toutes les séries des facteurs de risque doivent être identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d.).

Si nous acceptons que les séries de returns sont normalement et indépendamment distribuées (n.i.d), nous pouvons utiliser au choix :

- une méthode analytique (basée sur la loi normale) pour calculer la VaR journalière puis sa multiplication par $\sqrt{100}$ ou $\sqrt{250}$;
- une méthode de simulation historique pour estimer la VaR journalière puis sa multiplication par $\sqrt{100}$ ou $\sqrt{250}$;
- une méthode de Monte Carlo basée sur la loi normale.

Si nous ne supposons pas que les séries des returns journaliers de tous les facteurs de risques sont normalement et indépendamment distribuées (n.i.d), nous sommes obligés de choisir une méthode de Bootstrap ou de Monte Carlo (basée sur une loi différente de la loi normale). Cette contrainte est provoqués par une longueur de l'historique K trop faible pour pouvoir calculer la VaR sur la base des returns à h jours. L'application de la formule (2.10) donne respectivement une historique des 26 données pour $h = \{100\}$ et 10 données pour $h = \{250\}$. Pour des raisons de simplification, nous ignorerons les calculs de la VaR avec une méthode de Monte Carlo et nous choisirons seulement une méthode de Bootstrap.

Dans le cas des calculs de la VaR avec des méthodes de tirage (Monte Carlo et Bootstrap), le montant de la VaR se stabilise à partir de 30 000 simulations (voir graphique 2 de l'annexe 2). Les exemples de nos simulations, calculés avec 50 000 simulations, garantissent donc une bonne précision de l'estimation de la VaR.

Le choix des quatre méthodes d'estimation de la VaR présente l'avantage de pouvoir comparer :

- les résultats obtenus avec les méthodes utilisant l'extrapolation de la VaR journalière via la règle de « racine du temps » (méthode historique et méthode analytique) avec ceux issus des calculs avec les méthodes de simulations aléatoires des futurs returns journaliers (méthode de Monte Carlo et méthode de Bootstrap) ;
- ou les montants obtenus avec les méthodes utilisant directement les returns réels des facteurs de risques (méthode historique et méthode de Bootstrap) avec les chiffres venus des estimations par les méthodes utilisant la matrice de variance-covariance des facteurs de risque (méthode analytique et méthode de Monte Carlo).

4.3 Analyse des résultats

Considérons tout d'abord l'ensemble de ce portefeuille fictif au 31/12/2004. Sa valeur de marché est d'environ 4019 euros. Le tableau 2 de l'annexe 2 rassemble les montants de la VaR et de la TailVaR estimées par les quatre méthodes pour des horizons h de 100 et 250 jours ouvrés, en utilisant des historiques T de tailles 250, 500, 1000 et enfin 2000 jours ouvrés. Le graphique 3 de l'annexe 2 montre plus précisément les queues des fonctions de répartition des variables aléatoires $\underset{[0;h]}{\Delta} P$, obtenus lors de ces différentes estimations.

En se basant sur notre exemple empirique, il apparaît que la méthode qui donne les résultats les plus pessimistes est la méthode de simulation historique et celle qui donne les résultats les plus optimistes est la méthode de Monte Carlo. Les montants de la TailVaR à 99,5% gardent la même proportion par rapport aux montants de la VaR. Ils sont instables dans le cas d'une méthode historique car on dispose d'un petit nombre de simulations pour les estimer. Les trois autres méthodes montrent que la TailVar au seuil de 99,5% est supérieure d'au moins 10% à la VaR au même seuil.

Les résultats des différentes estimations sont très dépendants des horizons h recherchés et de la taille T des données historiques utilisées. Il est impossible de juger l'efficacité des différentes méthodes d'estimations sur une seule date d'estimation. Nous avons donc étudié l'évolution au cours du temps des estimations de la VaR par ces quatre méthodes pour les mêmes horizons et les mêmes tailles d'historique. La partie obligataire de notre portefeuille fictif n'aurait pas la même composition à différentes dates. Nous avons donc choisi de ne considérer que la partie indice action qui génère la majeure partie du risque de ce portefeuille et qui dispose de surcroît d'un historique plus important.

Le graphique 4 de l'annexe 2 montre ainsi l'évolution sur plusieurs années des estimations de la VaR par les quatre méthodes (pour des horizons h de 100 jours puis de 250 jours en utilisant des tailles d'historique T différentes). Les résultats obtenus sont comparés avec les returns réels de ce portefeuille d'actions d'une valeur de 700 euros à chaque date d'estimation. Remarquons tout d'abord que les actions, plus volatiles que les prix des obligations zéro coupon, génèrent la majeure partie du risque d'un portefeuille. Le niveau de la VaR obtenue au 31/12/2004 représente plus de 10% à 100 jours et plus de 17% à 250 jours de la valeur du portefeuille d'actions alors qu'il est inférieur à 4% et 6% respectivement sur l'ensemble du portefeuille.

Il apparaît de notre exemple empirique que les estimations sont très dépendantes pour un même horizon de la taille T de l'historique utilisé. La valeur de T détermine la réactivité de l'estimation de la VaR à l'évolution du marché. En effet, plus T est important, moins les données statistiques de la fenêtre historique utilisée varient au cours du temps, donc la distribution estimée de la variable $\underset{[0;h]}{\Delta} P$, et son quantile à 0,5%, sont plus stables dans le temps. Cette stabilité est plus importante pour les méthodes utilisant la matrice de variance-covariance (méthode analytique et méthode de Monte Carlo) que pour les méthodes utilisant directement les returns historiques des facteurs de risque (méthode historique et méthode de Bootstrap). Or, s'il semble important que l'estimation de la VaR calculée pour un risque d'actifs d'une compagnie d'assurance puisse réagir activement à une évolution du marché, il faut aussi que l'estimation soit suffisamment stable à terme pour ne pas dépendre uniquement de la date d'estimation.

Le tableau 3 de l'annexe 2 présente les nombres (en pourcentages) de jours pour lesquels des estimations de la VaR et de la TailVaR ont été insuffisantes. Ces chiffres représentent les pourcentages des jours où le montant de la VaR et de la TailVaR a été supérieur au regard des returns effectifs du portefeuille, constatés 100 et 250 jours après les dates d'estimation. Nous jugerons qu'une méthode est suffisamment prudente dès lors que son pourcentage de défaillance est inférieur ou égal à 0,5%.

Le tableau montre que toutes les méthodes peuvent être jugées suffisamment prudentes pour estimer la VaR ou la TailVaR à 250 jours de ce portefeuille. A 100 jours, on peut juger que les méthodes de Bootstrap et de Monte Carlo n'estiment pas suffisamment bien le risque du portefeuille, puisque historiquement leurs estimations de la VaR ont été dépassées dans environ 1% des cas. Cependant, il faut noter que notre analyse est basée sur l'hypothèse que les différents indices ont une espérance nulle sur la période d'estimation. Le faible dépassement du seuil de confiance pourrait être annulé par l'utilisation d'espérances anticipées des facteurs de risque.

Il apparaît dans notre exemple que l'utilisation d'un historique de 2000 jours ouvrés, et dans une moindre mesure de 1000 jours ouvrés, ne permet pas de mesurer efficacement le risque du portefeuille. Il faut donc utiliser des fenêtres historiques de taille inférieure pour obtenir des estimations plus réactives aux évolutions de marché. Par ailleurs, l'utilisation de la TailVaR permet de dépasser le seuil de confiance à 99,5% avec toutes les méthodes d'estimation.

On peut donc juger l'efficience des différentes méthodes sur leur capacité à ne pas surestimer le risque du portefeuille. Ainsi les méthodes de simulation de Monte Carlo et de Bootstrap sont celles qui fournissent en moyenne les estimations de VaR de TailVaR les moins élevées. Cependant, elles sont parfois prises en défaut : leur utilisation nécessite donc une validation. A contrario, les méthodes analytique et historique, qui extrapolent la VaR journalière avec la « racine du temps », ne sont quasiment jamais prises en défaut, mais donnent des niveaux de VaR et de TailVaR très élevés, notamment à 250 jours, et surestiment donc le risque du portefeuille de manière significative.

En se basant sur notre exemple empirique, la méthode analytique nous paraît être le mieux adapté à l'horizon de calculs h de 100 jours, tandis que pour des horizons plus longs ($h = \{250\}$) nous constatons la prédominance des méthodes de simulation (méthode de Monte

Carlo et méthode de Bootstrap). Nous soulignons que cette constatation est effectuée sur la base de notre portefeuille fictif et ne peut pas être généralisée.

5. CONCLUSIONS

Dans cet article, nous avons analysé les possibilités d'adaptation de la VaR en assurance. Nous avons spécifié dans une partie théorique les conditions sous lesquelles la VaR peut être une bonne mesure de risque d'actifs à long terme (supérieur à 3 mois) en prenant en compte les spécificités des portefeuilles d'investissement des assureurs. Nos conclusions sont les suivantes :

- la présence des produits de taux dans un portefeuille d'investissement cause le changement de la décomposition du portefeuille au cours du temps. Ce changement de structure des actifs doit être pris en compte puisqu'il modifie le risque et impacte le montant de la VaR ;
- les calculs de la VaR à long terme soulèvent l'importance du choix de l'espérance de rendement (exprimant le trend de chaque facteur de risque dans le futur) qui détermine le montant final de la VaR. Nous spécifions ainsi deux possibilités : le choix de l'espérance nulle ou le choix de l'espérance déterminée. L'utilisation de l'espérance basée sur les estimations historiques nous paraît source d'erreur. Par ailleurs, le choix des facteurs de risque entre les prix et les taux des obligations zéro coupon pour des actifs obligataires influence également l'espérance, respectivement surestimant ou sous-estimant le montant de la VaR ;
- certaines méthodes d'estimations de la VaR ne peuvent pas servir à calculer la VaR en assurance. Nous proposons un arbre de décisions du choix de la méthode la mieux adaptée par rapport aux propriétés des données historiques dont on dispose au moment du calcul de la VaR.

L'étude empirique sur un portefeuille fictif fait apparaître des différences considérables dans la mesure de risque d'actifs par rapport à la méthode d'estimation choisie. L'analyse montre aussi la sensibilité des résultats par rapport à la longueur de la fenêtre historique utilisée et à la longueur de l'horizon d'estimation de la VaR. Les issues des simulations suggèrent que :

- les méthodes utilisant l'extrapolation de la VaR journalière via la règle de la « racine du temps » semble être en moyenne plus pessimistes que les méthodes de simulations aléatoires des futurs returns journaliers ;
- les méthodes utilisant la matrice de variance-covariance des facteurs de risque semblent être plus stables dans le temps que les méthodes utilisant directement les returns réels des facteurs de risque ;
- l'allongement de l'historique des données rend la VaR plus stable dans le temps (donc moins réactive). La longueur optimale de cet historique se situe autour d'un an ou deux ans. L'utilisation d'une fenêtre historique plus longue (4 ans et 8 ans) ne permet pas de mesurer le risque de façon efficace ;
- la TailVaR est une mesure de risque prudente dans tous les cas.

En conclusion, les modèles de la VaR peuvent offrir aux sociétés d'assurance un outil efficace pour estimer le risque de marché de leurs portefeuilles d'actifs à moyen et à long terme. Cependant, pour que ces méthodes de calculs de la VaR soient un instrument fiable de mesure de solvabilité en assurance, elles demandent certaines adaptations.

Dans le prolongement de notre analyse, plusieurs voies de recherche intéressantes s'ouvrent dans la manière de mesurer le risque de solvabilité en assurance , via les méthodes de la VaR. Les pistes les plus importantes à explorer nous paraissent être la mesure du risque actif-passif (ALM) et la mesure du risque opérationnel.

BIBLIOGRAPHIE

Albert, P., Bahrle, H., Konig, A. (1996), Value-at-Risk: a risk theoretical perspective with focus on applications in the insurance industry, Contribution to the 6th AFIR International Colloquium, Nurnberg.

Alexander, G., Baptista, A. (2003), CVaR as a mesure of risk: implications for portfolio selection, EFA 2003 Annual Conference Paper No. 235.

Christoffersen, P., Diebold, F., Schuermann, T. (1998), Horizon problems and extreme events in financial risk management, Financial Institutions Center, The Wharton School, University of Pensylvania, Working Paper.

Christoffersen, P., Pelletier, D. (2003), Backtesting Value-at-Risk: a duration-based approach, CIRANO Working Papers No. 2003s-05.

Christoffesen, P., Diebold, F. (1997), How relevant is volatility forecasting for financial risk management?, Financial Institutions Center, The Wharton School, University of Pensylvania, Working Paper.

Christoffesen, P., Goncalves, S. (2004), Estimation risk in financial risk management, CIRANO Working Papers No. 2004s-15.

Danielson, J., Zigrand, J.P. (2004), On time-scaling of risk and the square-root-of-time rule, EFA 2004 Maastricht Meetings Paper No. 5339.

Drost, F., Nijman, T. (1993), Temporal aggregation of GARCH processes, *Econometrica*, vol. 61(4), p. 909-927.

Engle, A., Manganelli, S. (2000), CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by regression quantiles, manuscript, NYU Stern and ECB.

Goncalves, S., Kilian, L. (2003), Bootstrapping autoregressions with conditional heteroskedasticity of unknown form, Departement de sciences economiques, Université de Montreal, Cahiers de recherche.

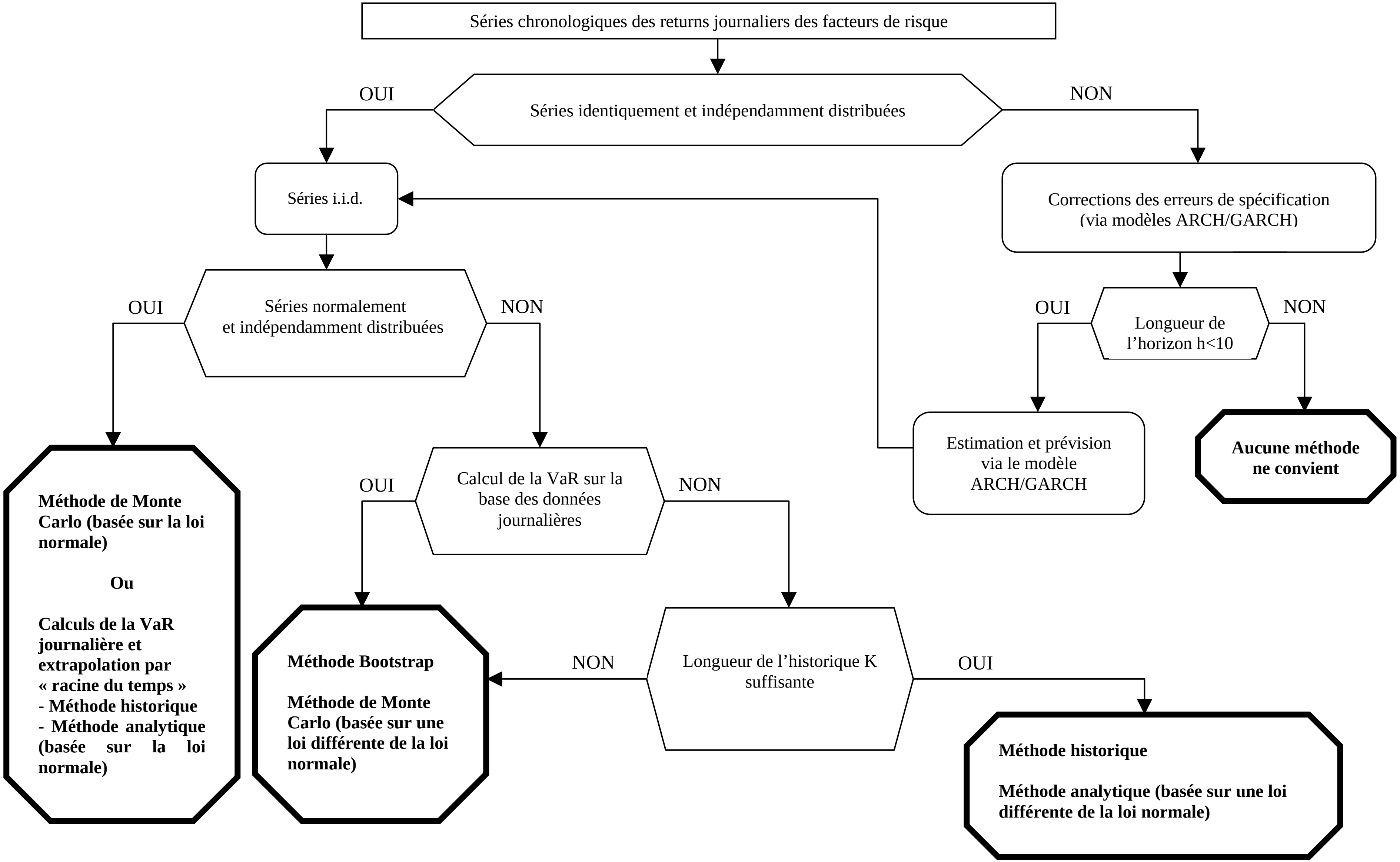
Jorion, P. (2001), *Value at Risk, Second Edition*, McGraw Hill.

Kupiec, P. (1995), Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.

Schroder, M. (1996), The Value at Risk approach: proposals on a generalization, Contribution to the 6th AFIR International Colloquium, Nurnberg.

Ufer, W. (1996), The « Value at Risk » concept for insurance companies, Contribution to the 6th AFIR International Colloquium, Nurnberg .

ANNEXE 1 : L'ARBRE DE DECISION DU CHOIX DE LA METHODE DE CALCULS DE LA VALUE-AT-RISK EN ASSURANCE



ANNEXE 2 : TABLEAUX ET GRAPHIQUES

Tableau 1 : Portefeuille d'investissements fictif (toutes les valeurs en EUR)

Code ISIN	Titre	Maturité	Coupon annuel	Valeur d'achat au 31/12/2004
FR0000499105	OAT Taux fixe	28/02/05	5,75	100
FR0000487381	OAT Taux fixe	08/11/05	4,75	100
FR0000582751	OAT Taux fixe	25/11/05	8,25	100
FR0000490740	OAT Taux fixe	06/02/06	5,25	100
FR0000583627	OAT Taux fixe	06/03/06	8,25	100
FR0000572315	OAT Taux fixe	25/04/06	6,75	100
FR0000494908	OAT Taux fixe	15/06/06	4,375	100
FR0000108698	OAT Taux fixe	27/09/06	6,5	100
FR0000582249	OAT Taux fixe	08/01/07	6,8	100
FR0000108839	OAT Taux fixe	30/01/07	6,25	100
FR0000109548	OAT Taux fixe	09/05/07	5,875	100
FR0000571283	OAT Taux fixe	25/10/07	6,25	100
FR0000485195	OAT Taux fixe	31/01/08	5,25	100
FR0000108649	OAT Taux fixe	12/08/08	6,75	100
FR0000572075	OAT Taux fixe	05/11/08	6,25	100
FR0000490732	OAT Taux fixe	05/02/09	5,375	100
FR0000583163	OAT Taux fixe	21/07/09	5,8	100
FR0000197576	OAT Taux fixe	05/02/10	6,7	100
FR0000483661	OAT Taux fixe	10/11/10	6,625	100
FR0000488389	OAT Taux fixe	25/04/12	5,125	100
FR0000475709	OAT Taux fixe	20/06/13	4,375	100
FR0000487217	OAT Taux fixe	09/10/16	5,875	100
FR0000488017	OAT Taux fixe	30/01/17	5,25	100
FR0000487225	OAT Taux fixe	04/10/21	5,75	100
FR0000571218	OAT Taux fixe	25/04/29	5,5	100

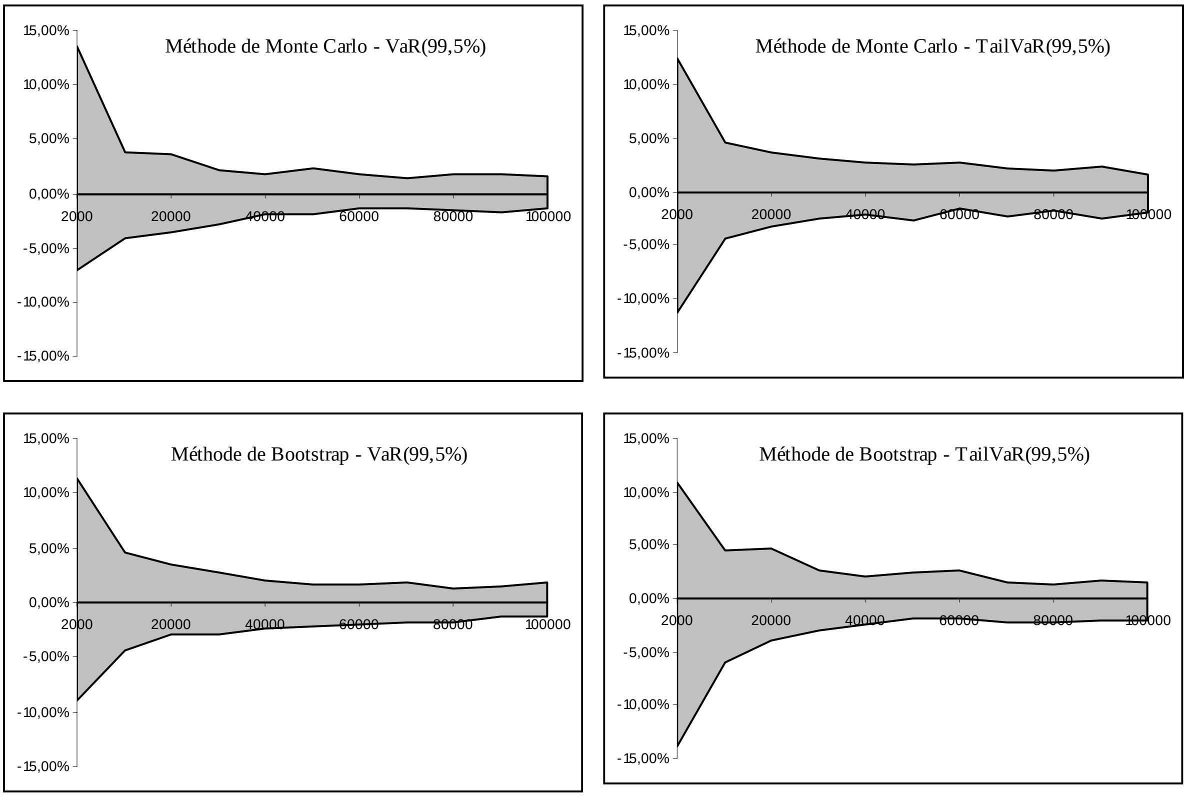
Code ISIN	Titre	Valeur dans le portefeuille à la date d'estimation de la VaR
CAC	CAC 40 Index	100
INDU	DOW JONES INDUSTRIAL AVERAGE	100
NKY	NIKKEY 225	100
CCMP	NASDAQ Composite Index	100
MEXBOL	Mexican Stock Exchange Mexican Bolsa Index	100
MSEUEU	MSCI EU	100
EPRA	EPRA Europe Price Index	100

Tableau 2 : Les montants de la VaR(99,5%) et de la TailVaR(99,5%) calculés pour un portefeuille total d'un montant de 4019 €

h = longueur de l'horizon d'estimation de la VaR et de la TailVaR (jours ouvrés)
T = longueur de la fenêtre historique (jours ouvrés)
Ratio=TailVaR(99,5%)/VaR(99,5%)

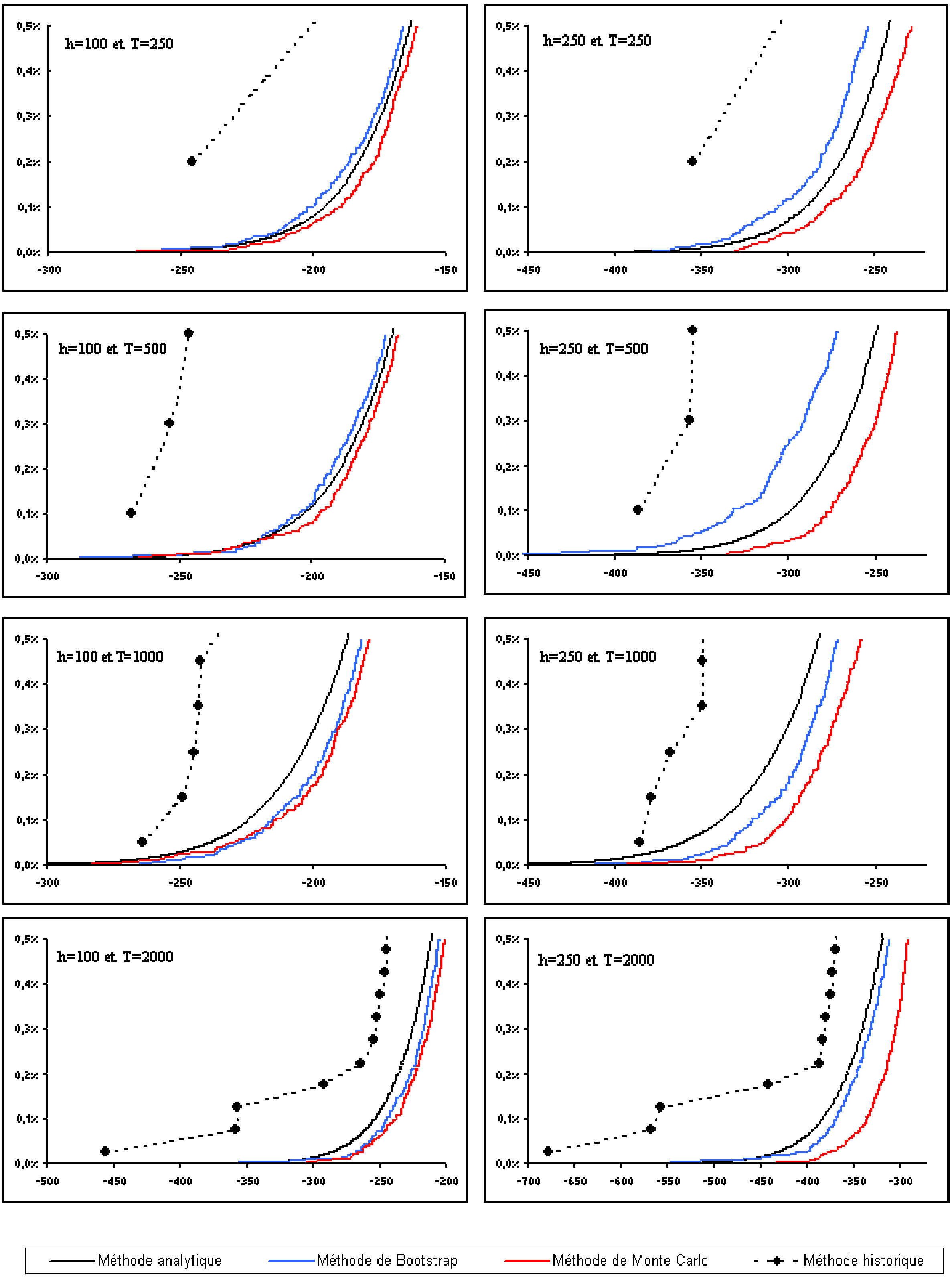
	h	**100**				**250**			
	T	**250**	**500**	**1000**	**2000**	**250**	**500**	**1000**	**2000**
Méthode analytique	***VaR***	-163,40	-169,41	-186,86	-211,11	-240,97	-248,94	-282,23	-318,59
	TailVaR	-183,47	-190,22	-209,81	-237,04	-270,57	-279,52	-316,89	-357,72
	Ratio	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12
Méthode historique	***VaR***	-200,66	-246,40	-236,72	-244,64	-304,81	-355,28	-348,64	-368,20
	TailVaR	-233,37	-257,87	-248,34	-297,13	-341,20	-368,00	-366,15	-450,30
	Ratio	1,16	1,05	1,05	1,21	1,12	1,04	1,05	1,22
Méthode de Monte Carlo	***VaR***	-160,98	-167,49	-178,53	-200,98	-227,90	-237,73	-258,31	-290,02
	TailVaR	-179,13	-186,77	-199,59	-223,52	-257,05	-260,75	-285,43	-317,39
	Ratio	1,11	1,12	1,12	1,11	1,13	1,10	1,10	1,09
Méthode de Bootstrap	***VaR***	-166,28	-171,98	-181,63	-205,00	-253,06	-272,09	-272,05	-311,47
	TailVaR	-186,70	-192,34	-200,97	-228,01	-283,41	-306,81	-299,16	-346,92
	Ratio	1,12	1,12	1,11	1,11	1,12	1,13	1,10	1,11

Graphique 2 : Précision de l'estimation de la VaR(99,5%) et de la TailVaR(99,5%) avec des méthodes de Bootstrap et de Monte Carlo en fonction du nombre des simulations



Graphique 3 : Les queues des fonctions de répartition obtenus via quatre méthodes de calcul de la VaR

h = longueur de l'horizon d'estimation de la VaR (jours ouvrés)
T = longueur de la fenêtre historique (jours ouvrés)



Graphique 4 : L'évolution au cours du temps des estimations de la VaR (calculés avec quatre méthodes pour le portefeuille d'actions d'un montant de 700 €), comparés avec les returns réels de ce portefeuille constatés h jours après les dates d'estimation de la VaR.

h = longueur de l'horizon d'estimation de la VaR (jours ouvrés)
T = longueur de la fenêtre historique (jours ouvrés)

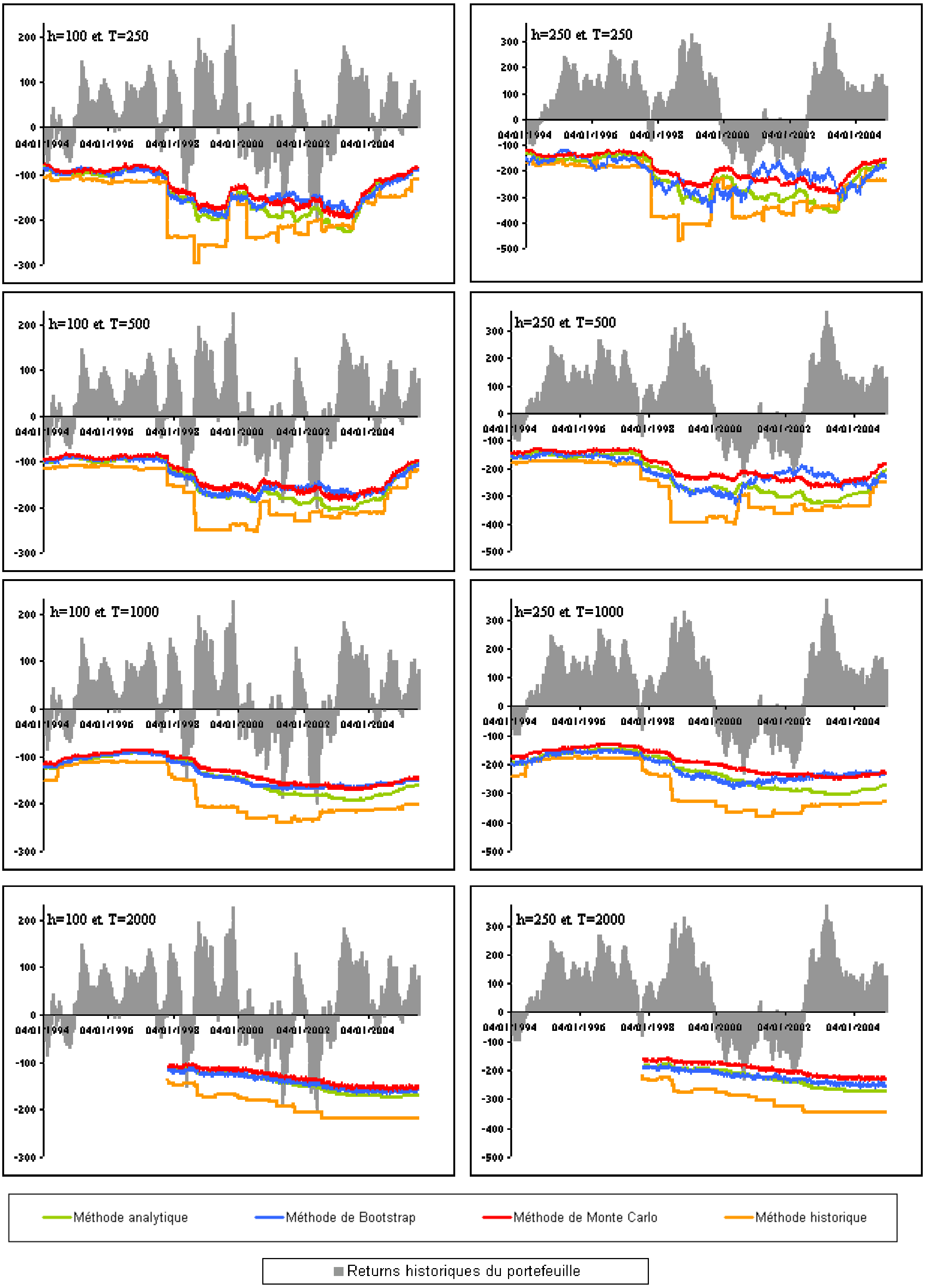


Tableau 3 : Les pourcentages d'échecs : les nombres (en pourcentage) de jours pour lesquels des estimations de la VaR et de la TailVaR (calculés avec quatre méthodes pour le portefeuille d'actions d'un montant de 700 €) ont été insuffisantes au regard des returns réels de ce portefeuille constatés h jours après les dates d'estimation.

h = longueur de l'horizon d'estimation de la VaR et de la TailVaR (jours ouvrés)
T = longueur de la fenêtre historique (jours ouvrés)

	h	**100**				**250**			
	T	**250**	**500**	**1000**	**2000**	**250**	**500**	**1000**	**2000**
Méthode analytique	***VaR***	0,40%	0,47%	0,77%	2,45%	0%	0%	0%	0,11%
	TailVaR	0,03%	0,03%	0,23%	1,10%	0%	0%	0%	0%
Méthode historique	***VaR***	0%	0%	0%	0,05%	0%	0%	0%	0%
	TailVaR	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
Méthode de Monte Carlo	***VaR***	0,97%	1,13%	1,63%	4,00%	0,07%	0,07%	0,07%	0,77%
	TailVaR	0,37%	0,40%	0,50%	1,95%	0%	0%	0%	0%
Méthode de Bootstrap	***VaR***	1,10%	1,07%	1,00%	2,90%	0%	0%	0%	0,11%
	TailVaR	0,47%	0,49%	0,30%	1,15%	0%	0%	0%	0%