

Proposition d'un modèle de projection des scénarios économiques pour le développement de la zone CIPRES

Version 2.24

Florent GBONGUÉ*

Frédéric PLANCHET^α

Arthur AHOUSI

Université de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1 / ISFA^γ

FINAIR Conseil ^μ

PRIM'ACT ^ν

I. INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	3
I.a. Présentation de la zone CIPRES	3
I.b. Revue de littérature	3
II. PROPOSITION D'UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUE EN ZONE CIPRES. 6	6
II.a. Générateur de scénarios économiques en zone CIPRES	7
II.a.1. Vue synoptique du GSE.....	7
II.a.2. Structure du GSE	8
II.b. Spécification et calibrage des modèles du GSE	8
II.b.1. Indice des prix à la consommation.....	9
II.b.2. Taux d'intérêt nominaux	11
II.b.3. Taux d'intérêt réels	13
II.b.4. Écart des taux.....	16
II.b.5. Rendement des actions.....	19
II.b.6. Rendement de l'immobilier.....	23
II.b.7. Rendement du monétaire	24
II.b.8. Rendement des obligations de société	25
III. GÉNÉRATION DE TRAJECTOIRES DES VARIABLES ET EXTENSION DU GSE.....	26
III.a. Génération de trajectoires.....	26
III.b. Proposition d'une extension du GSE.....	31
III.b.1. Taux de chômage	31
III.b.2. Taux de croissance	32
III.b.3. Taux de change	33
IV. APPLICATION DU GSE	33
IV.a. Méthodologie	34
IV.b. Application numérique	35
IV.c. Représentation graphique.....	36
IV.d. Notation en monnaie locale	37
IV.e. Extension.....	39
V. CONCLUSION.....	40
VI. RÉFÉRENCES.....	41

*Florent Gbongué est actuinaire, risk-manager et doctorant à l'ISFA. Contact : florent.gbongue@gmail.com

^αFrédéric Planchet est professeur associé à l'ISFA, membre du Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière (EA 2429) et actuinaire associé chez PRIM'ACT. Contact : frederic.planchet@univ-lyon1.fr

^γInstitut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) – 50 avenue Tony Garnier – 69366 Lyon Cedex 07 – France.

^μSociété Ivoirienne de Banque (SIB) – 34 bd République, immeuble Alpha 2000.

^νPRIM'ACT - 42 Avenue de la Grande Armée, 75017 Paris.

Résumé

Un générateur de scénarios économique (GSE) est un outil qui permet de projeter des facteurs de risque économiques et financiers. Il s'agit d'un élément important dans le pilotage technique de l'activité d'assurance, notamment dans l'évaluation des provisions économiques, l'allocation stratégique des actifs et la gestion des risques financiers. Dans la littérature, les modèles du GSE que nous rencontrons, sont applicables difficilement en Afrique subsaharienne francophone, principalement à cause de l'insuffisance ou l'inexistence des données. Pour pallier à ce problème, nous proposons, dans cet article, une démarche de conception d'un générateur de scénarios économique *pertinent*, adapté au contexte de la zone CIPRES.

MOTS-CLEFS : Générateur de scénarios économiques, pilotage technique, activité, d'assurance, évaluation, provisions économiques, l'allocation stratégique des actifs, la gestion des risques financiers, conception, CIPRES.

Abstract

An Economic scenario generator is a tool to project economic and financial risk factors. This is an important element in the technical management of the insurance business, especially in the assessment of economic provisions, strategic asset allocation and management of financial risks. In the literature, the GSE models that we meet are difficult to apply in francophone Sub-Saharan Africa mainly because of inadequate or absence of data. To overcome this problem, we propose in this paper an approach for designing a generator of economic scenarios adapted to the context of CIPRES zone.

KEYWORDS: Economic scenario generator, technical management, insurance business, assessment, economic provisions, strategic asset allocation, management of financial risks, designing, CIPRES.

JEL CODES: G12, G17, G18, H63.

I. INTRODUCTION GÉNÉRALE

En guise d'introduction générale, nous présenterons dans un premier temps la zone CIPRES en nous appuyant sur GBONGUÉ et al. [2015d]. Dans un second temps, nous ferons une revue de littérature des générateurs de scénarios économiques tout en mentionnant également leurs applications au développement de la zone CIPRES.

I.a. Présentation de la zone CIPRES

La Conférence Interafricaine de la Prévoyance Sociale (CIPRES) est un organisme de contrôle et d'appui technique aux Caisses Africaines de Sécurité Sociale. La CIPRES¹ regroupe les quinze (15) pays suivants : Benin, Burkina Faso, Cameroun, Centrafrique, Comores, Congo (Brazzaville), la RD Congo, Côte d'Ivoire, Gabon, Guinée équatoriale, Mali, Niger, Sénégal, Tchad et Togo.

C'est le 21 septembre 1993 à Abidjan que le traité instituant la CIPRES a été signé par les ministres des finances et ceux en charge de la prévoyance sociale des pays africains de la zone franc. Il établit les objectifs suivants :

- Fixer les règles communes de gestion
- Instituer un contrôle de la gestion des organismes de prévoyance sociale
- Harmoniser les dispositions législatives et réglementaires applicables aux organismes et régime.
- Assurer une politique de formation initiale et permanente des cadres et techniciens.

I.b. Revue de littérature

Un générateur de scénarios économiques est un outil essentiel car il permet de nous éclairer sur le développement probable des grandeurs économiques et financières. Ces derniers sont utilisés par les États lors de l'élaboration de leurs budgets, la mobilisation des ressources sur le marché financier local, le pilotage technique de la dette publique, etc. De plus, la conception d'un GSE permet de piloter l'activité de crédit, de tarifier les produits bancaires et de mettre en place une politique cohérente de gestion actif-passif.

En outre, l'utilisation du GSE est aussi importante en assurance. En effet, dans le cadre du pilotage technique de son activité², l'assureur doit disposer d'une *boîte à outils* afin

¹ Au regard des pays que compose la CIPRES, nous pouvons conclure qu'elle est la réunion de quatre espaces économiques que sont : L'Union économique et monétaire ouest-africaine (UEMOA), la Communauté économique et monétaire de l'Afrique centrale (CEMAC), la RD Congo et le Comores.

²L'activité d'assurance est très spécifique en ce sens que la prime est collectée avant le paiement du sinistre.

d'évaluer au mieux la viabilité de la compagnie sur le long terme. En pratique, elle permet d'évaluer *finement* l'actif, le passif et les interactions entre actif et passif³.

En ce qui concerne le passif, les outils dont nous disposons, dans une logique d'évaluation des engagements de l'assureur sont les probabilités de réalisation d'une série d'évènements aléatoires⁴ auxquels l'assureur est exposé⁵ et le taux d'actualisation qui permet de prendre en compte la *valeur temps* de l'argent, en adéquation avec l'objectif fixé par la compagnie d'assurance (cf. PLANCHET [2013]).

En ce qui concerne l'actif, le portefeuille de l'assureur est composé principalement des actions, des obligations, de l'immobilier et du monétaire⁶. La connaissance des flux de trésorerie futurs *entrants* est possible grâce à des outils qui assurent la projection de ces actifs sur l'horizon considéré.

Les interactions fortes entre l'actif et le passif naissent *le plus souvent* en présence de rachat ou de dispositif de participation aux bénéficiaires dans les contrats d'assurance. Dans ce contexte, la conception de ces *outils* s'avère particulièrement délicate.

Ces outils techniques, tant au niveau de l'actif et du passif⁷, sont regroupés au sein du GSE. En plus des variables financières *supra*, le GSE comporte aussi des variables économiques telles que l'inflation, le produit intérieur brut (PIB), le chômage, etc.

Dans la littérature, les modèles de GSE les plus répandus sont ceux de WILKIE (1986, 1995), MULVEY (1989, 1996,1998), MULVEY et *al.* (2007), BRENNAN ET XIA (2000), HIBBERT et *al.* (2001), JARROW et YILDIRIM (2003) et AHLGRIM et *al.* (2005). Dans FALEH et *al.* (2011), nous pouvons voir que ces GSE peuvent être distingués grâce à leur structure de dépendance, ce qui nous permet de distinguer deux catégories que sont les GSE basés sur une structure par cascade et une structure à corrélation.

En premier lieu, les modèles à structure par cascade comprennent principalement les modèles de WILKIE (1986, 1995), MULVEY (1989, 1996,1998), MULVEY et *al.* (2007). Le GSE proposé par WILKIE est basé sur une structure en cascade⁸ avec une relation non linéaire entre les variables. En spécifiant un modèle stochastique pour l'indice des prix à la consommation⁹ (IPC), il parvient à déterminer les autres variables du modèle en occurrence les dividendes, les revenus de dividende, les taux d'intérêt et la croissance des salaires (cf. WILKIE [1986]). Dans le modèle original, WILKIE utilise un modèle autorégressif de premier ordre pour l'inflation. En 1995, il met à jour ce premier modèle

³En présence de dispositif de participation aux bénéficiaires.

⁴On peut citer la mortalité et / ou la longévité, l'invalidité, l'incapacité, etc....

⁵Dans la pratique, ces probabilités permettent de déterminer les flux de trésorerie futurs probables sortants.

⁶ Il existe d'autres types d'investissement dit alternatif.

⁷À l'exclusion des risques techniques.

⁸Une structure par cascade est définie comme une structure dans laquelle nous partons de la détermination de la valeur d'une variable (par exemple l'inflation) pour ensuite déduire les valeurs des autres variables (taux réels, rendements des actions, etc.), cf. FALEH et PLANCHET [2011].

⁹ WILKIE suppose que l'inflation est la « force motrice » du modèle.

en gardant les principes de la structure par cascade mais en optant cette fois-ci pour une modélisation de l'inflation par un processus ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, cf. ENGLE [1982]).

SAHIN et al. (2008) revisite le modèle original de WILKIE. En pratique, il considère simultanément un modèle sans et avec « ARCH » pour l'indice des prix à la consommation. Après avoir mis à jour¹⁰ les paramètres des modèles du GSE, ils discutent de la validation de ces modèles, examine la stabilité des paramètres et concluent *par la suite* que la majorité de ces paramètres ne sont pas stables.

MULVEY (1989) développe un GSE pour "Pacific Mutual" et tout dernièrement pour « Towers Perrin–Tillinghast » [1996,1998]. Ces générateurs sont construits sur une *structure en cascade*, avec une relation non linéaire entre les variables du GSE. Dans MULVEY et al. (2007), les auteurs proposent un GSE dénommé « CAP Link » pour les compagnies d'assurance multinationales. Il est aussi basé sur une structure en cascade, avec comme *force motrice* les taux d'intérêt. À partir de ces derniers, ils arrivent à déterminer la dynamique des autres variables du GSE.

En second lieu, les modèles à structure basée sur les corrélations se composent des modèles de BRENNAN ET XIA (2000), HIBBERT et al. (2001), JARROW et YILDIRIM (2003) et AHLGRIM et al. (2005). Le point de départ du modèle de HIBBERT et al. (2001)¹¹ est la détermination de la structure par terme des taux réels à partir de la modélisation stochastique des taux courts réels par le modèle à 2 facteurs de Hull & White (1994). Par la suite, ils proposent un modèle pour l'inflation anticipée en appréhendant la dynamique des taux d'inflation instantanés par le modèle à 2 facteurs de Hull & White (1994). À partir de ces deux grandeurs, HIBBERT et al. (2001) déterminent la structure par terme des taux d'intérêt nominaux grâce à la relation de Fisher¹² et les autres variables du GSE¹³.

Le GSE proposé dans d' AHLGRIM et al. (2005)¹⁴ capte la dynamique des variables suivante : l'inflation, les taux d'intérêt réels, le taux de chômage et les rendements des actions et de l'immobilier. Dans le modèle proposé par AHLGRIM et al. (2005), l'inflation joue un rôle important car il participe à la détermination d'autres grandeurs du GSE¹⁵.

¹⁰ Pour la mise à jour, les données utilisées concernent la période 1923-2007

¹¹ Pour plus d'information, nous renvoyons le lecteur à HIBBERT et al.(2001) « *A stochastic asset model & calibration for long term financial planning purposes* »

¹² Cf. Fisher [1939].

¹³ En ce qui concerne les actions, HIBBERT et al. (2001) propose respectivement le modèle de changement de régime de type *Hardy* et un modèle AR (1) pour la modélisation du rendement des actions et des taux de dividendes.

¹⁴ Ce modèle a le mérite d'être soutenu par les associations professionnelles des actuaires.

¹⁵ Par exemple, à partir de la dynamique de l'inflation et des taux d'intérêt réels, AHLGRIM et al. (2005) déterminent les taux d'intérêt nominaux grâce à la relation de Fisher, tout comme dans le modèle de HIBBERT et al. (2001). De plus, les évolutions du rendement de l'immobilier et des taux de chômage tiennent compte de l'évolution de l'inflation.

Dans le modèle de BRENNAN et XIA (2000), les auteurs présentent des modèles stochastiques des taux d'intérêt réels, de l'inflation anticipé et des actions en vue d'en déduire un indice des prix à la consommation stochastique et un facteur d'actualisation stochastique nominal. Ils démontrent que l'inflation réalisée n'est pas corrélée à l'inflation attendue. Par comparaison aux modèles de WILKIE (1995), HIBBERT et *al.* (2001), d' AHLGRIM et *al.* (2005), le modèle de BRENNAN et XIA (2000) couvre un périmètre restreint puisqu'il n'intègre que les taux d'intérêt réels, l'inflation et les actions.

La connaissance des variables financières et économiques est *déterminante* dans la conduite de l'activité d'assurance dans la zone CIPRES. En l'état actuel, la boîte à outils à disposition des assureurs de la zone CIPRES, est composée principalement : d'une table de mortalité réglementaire¹⁶ et d'un taux d'actualisation fixe égal à 3,5 %¹⁷. Par conséquent, elle constitue un handicap au développement de l'assurance, mais aussi au développement économique des pays de la zone CIPRES.

Ainsi, cet article tente d'apporter des solutions au problème posé *supra* en proposant un GSE adapté au contexte de la zone CIPRES, dans l'optique de fournir aux professionnels, une analyse prospective de la solvabilité et, en particulier, des indications sur l'incertitude associée au niveau de la couverture des engagements réglementaires.

L'analyse des modèles du GSE¹⁸ proposés par la littérature s'adapte difficilement à la zone CIPRES. En fonction des données disponibles, les ajustements doivent être apportés à la conception du GSE.

Cette situation s'explique par le fait que les taux d'intérêt nominaux s'obtiennent souvent par la détermination des taux d'intérêt réels. Ces derniers dérivent de la modélisation des taux courts réels (*cf.* HIBBERT et *al.* [2001], BRENNAN ET XIA [2000]) et des taux longs réels (*cf.* AHLGRIM et *al.* [2005]).

Au regard de ce qui précède, il est nécessaire de penser à un GSE propre à cette zone. Dans la suite de cet article, nous proposerons une approche de conception d'un GSE¹⁹ pertinent adapté au marché de la zone CIPRES.

II. PROPOSITION D'UN GÉNÉRATEUR DE SCÉNARIOS ÉCONOMIQUE EN ZONE CIPRES

La conception d'un générateur de scénarios économique dans la zone CIPRES présente des difficultés du fait de l'absence de nombreuses données. Cette situation défavorable ne permet pas l'application de certains modèles stochastiques rencontrés dans la

¹⁶En occurrence les tables de mortalité CIMA-H et CIMA-F respectivement pour les populations masculines et féminines

¹⁷Cette situation ne favorise pas une vision prospective de l'activité d'assurance dans cette zone car il n'est pas possible, sans GSE, de projeter les bilans, afin d'apprécier la rentabilité de l'activité.

¹⁸ Ainsi que sa conception.

¹⁹ Les modèles de GSE proposés peuvent être calibrés sur les données actuelles de la zone CIPRES.

littérature. En outre, nous disposons d'informations assez suffisantes pour concevoir un GSE pertinent qui répondra aux besoins actuels des professionnels de la zone CIPRES²⁰.

Dans cette section, nous proposerons un générateur de scénarios économique pour le développement de la zone CIPRES. En pratique, après avoir présenté le GSE, nous spécifions les modèles retenus après l'analyse des modèles existants. Par la suite, nous procédons au calibrage des modèles retenus. La génération de trajectoires des variables de notre GSE est abordée dans la section suivante.

II.a. Générateur de scénarios économiques en zone CIPRES

Dans cette sous-section, nous allons parcourir, dans un premier temps, les composants du GSE de la zone CIPRES. Dans un second temps, nous proposons une structure qui mettra en évidence les relations cohérentes entre ces variables.

II.a.1. Vue synoptique du GSE

Le générateur de scénarios économiques est composé des variables suivantes : les taux d'intérêt réels et nominaux, l'indice des prix à la consommation, l'inflation anticipée, l'écart des taux, les rendements des obligations de société, des actions, du monétaire, de l'immobilier, le taux de chômage et le taux de croissance.

Le GSE proposé se base sur deux variables motrices que sont les taux d'intérêt nominaux des États et l'indice des prix à la consommation (IPC). Notons que la connaissance de ces deux variables permettra de déterminer les autres variables du GSE, excepté le rendement des actions.

Les taux d'intérêt nominaux des États²¹ permettent de déterminer l'inflation anticipée grâce à la relation de FISHER²², les écarts de taux et *in fine* les rendements des obligations de société²³.

L'indice des prix à la consommation (IPC) est une variable importante de notre GSE. Sa dynamique permet de déterminer le taux de chômage grâce à la courbe de Phillips²⁴ (cf. AHLGRIM et al. [2005]), le rendement de l'immobilier, les taux d'intérêt réels et *in fine* le rendement du monétaire²⁵.

²⁰L'utilisation d'un générateur de scénarios économiques pour l'analyse prospective de l'activité d'assurance, serait bénéfique pour la zone. Le GSE que nous proposons comprend des variables économiques et financières calibrées dans un contexte d'absence ou d'insuffisance de données.

²¹ Issus des titres publics

²²Cf. Fisher (1939)

²³ Les rendements des obligations dérivent de la courbe des taux des entreprises obtenus par la somme de la courbe des taux nominaux des États et de la courbe des écarts de taux.

²⁴ La courbe de Phillips illustre une relation empirique négative (relation décroissante) entre le taux de chômage et l'inflation ou taux de croissance des salaires nominaux.

²⁵ Le rendement du monétaire provient de la courbe des taux réels.

Par contre, la détermination du rendement des actions ne dérive d'aucune variable motrice. Il provient de la fluctuation ou la volatilité du prix des actions sur le marché financier régional. En outre, la loi d'OKUN décrit une relation linéaire empirique entre le **taux de croissance** et la variation du **taux de chômage**. Cette loi peut nous permettre d'appréhender la dynamique du taux de croissance grâce à la dynamique du taux de chômage²⁶.

II.a.2. Structure du GSE

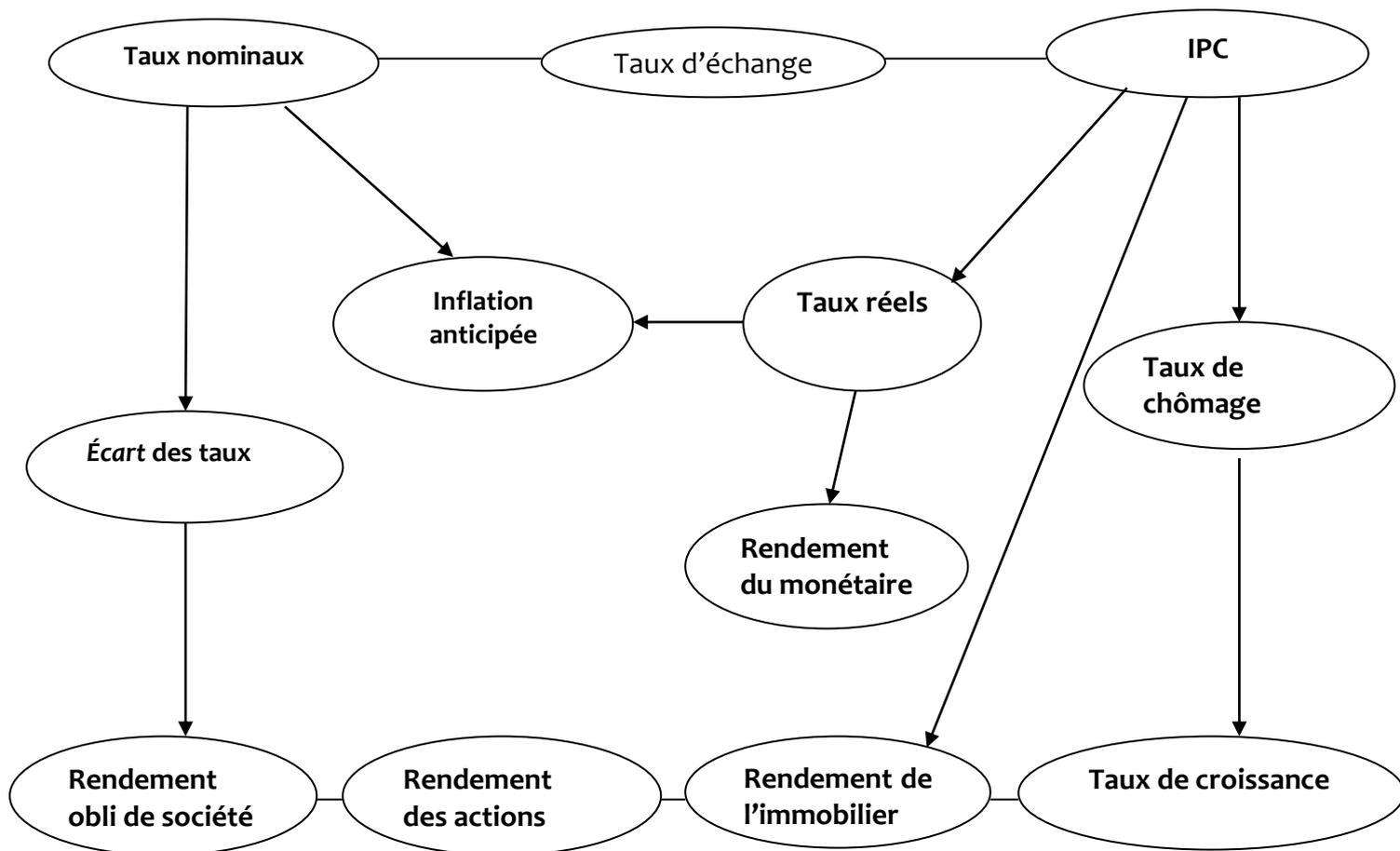


Fig. 1 : Structure du GSE proposé pour la zone CIPRES

II.b. Spécification et calibrage des modèles du GSE

Dans cette sous-section, nous allons passer en revue les variables du GSE. Dans un premier temps, nous allons spécifier ces modèles. Dans un second temps, nous allons estimer les paramètres de ces modèles afin d'appréhender, par la suite, la dynamique des variables économiques et financières.

²⁶ La dynamique du taux de chômage peut être appréhendée par le modèle OU.

II.b.1. Indice des prix à la consommation

Dans une économie, l'indice des prix à la consommation (IPC) mesure l'évolution du niveau moyen des prix des biens et services consommés par les ménages, pondérés par leur part dans la consommation moyenne des ménages. Dans la littérature, nous pouvons voir que l'IPC joue un rôle important dans un GSE.

Ainsi, dans le modèle de WILKIE, l'évolution de l'IPC dépend de l'IPC de la date précédente (t-1) et du taux d'inflation instantané à la date t, qui suit un processus AR(1) dans le modèle original et un processus GARCH dans la version révisée.

Par contre, dans le modèle de BRENNAN et XIA, l'IPC est défini clairement comme un processus de diffusion dans lequel le **taux d'inflation instantané** est représenté par un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK.

Aussi, dans les modèles de HIBBERT et *al.*, AHLGRIM et *al.*, le taux d'inflation instantané est modélisé respectivement par un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK et le modèle de HULL et WHITE à 2-facteurs, sans que des indications sur la dynamique de l'IPC soient présentées.

METZ et ORT (2008) proposent un modèle ARMA pour appréhender la force de l'inflation centrée par sa moyenne, afin de revaloriser le coût des pensions indexées sur l'inflation. Au regard de ce qui précède, nous retenons, pour la zone CIPRES, le processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK pour modéliser le taux d'inflation instantané, les indices de prix à la consommation se déduisant du modèle de WILKIE.

Les données sur l'indice des prix à la consommation ont été collectées sur le site de la Banque Centrale des États de l'Afrique de l'Ouest. En notant IPC_t l'indice des prix à la date t , nous posons la relation suivante :

$$IPC_t = IPC_{t-1} \times \exp(q_t) \quad (2.1)$$

Dans cette expression, q_t suit un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK de la forme suivante (en temps continu) :

$$dq_t = \kappa_q (\mu_q - q_t) dt + \sigma_q dB_q \quad (2.2)$$

Si AHLGRIM et *al.* (2005) utilise le schéma d'EULER²⁷ pour discrétiser ce processus, en outre, nous optons pour une discrétisation exacte (cf. PLANCHET et *al.*[2009]). En considérant Δt le pas de la simulation, nous obtenons l'expression suivante :

$$q_{t+\Delta t} = q_t e^{-\kappa_q \Delta t} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q \Delta t}) + \varepsilon_q \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q \Delta t}}{2\kappa_q}} \quad (2.3)$$

Nous disposons de données à fréquence annuelle²⁸, ce qui aboutit à l'expression suivante :

²⁷ Cette discrétisation aboutit au taux instantané suivant : $q_{t+\Delta t} = \kappa_q \mu_q \Delta t + (1 - \kappa_q \Delta t) q_t + \varepsilon_q \sigma_q \sqrt{\Delta t}$

$$q_{t+1} = q_t e^{-\kappa_q} + \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) + \varepsilon_q \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \quad (2.4)$$

Nous remarquons que l'expression ci-dessous peut se mettre sous la forme suivante :

$$q_{t+1} = \alpha_q + \beta_q q_t + \varepsilon_{q,t} \quad (2.5)$$

L'estimation des paramètres est effectuée via une régression linéaire simple et les coefficients estimés $\hat{\alpha}_q$ et $\hat{\beta}_q$ sont transformés pour revenir au modèle d' AHLGRIM et al. [2005], soit :

$$\hat{\beta}_q = e^{-\kappa_q}, \hat{\alpha}_q = \mu_q (1 - e^{-\kappa_q}) \text{ et } \varepsilon_{q,t} = \varepsilon_q \sigma_q \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}} \quad (2.6)$$

Nous déduisons que :

- La vitesse de retour à la moyenne est déduite de la relation suivante :

$$\kappa_q = -\ln(\hat{\beta}_q)$$

- Le taux d'inflation moyen est déterminé par : $\mu_q = \frac{\hat{\alpha}_q}{1 - \hat{\beta}_q}$

- L'écart type de l'erreur $\hat{\sigma}_q$ est égal à l'écart type de l'erreur du modèle estimé

diviser par : $\sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa_q}}{2\kappa_q}}$

Le tableau ci-dessous résume les valeurs obtenues sur des données couvrant la période (1971-2015) :

Paramètres	Intitulé	Valeurs
κ_q	Vitesse de retour à la moyenne	0,756
μ_q	Taux d'inflation moyen	0,052
$\hat{\sigma}_q$	Écart type de l'erreur	0,072

Tab. 1: Paramètres estimés du modèle de l'inflation

Pour apprécier la qualité du modèle, nous avons calculé différents indicateurs, que nous avons résumés dans le tableau ci-dessous :

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0,5	Le pouvoir explicatif du modèle est de 50 %
Fisher	$P=0,00159$	Le modèle global est significatif
STUDENT (constante)	$P = 0,01421$	La constante est significative
STUDENT (variable)	$P = 0,00159$	Le coefficient de la variable est donc significatif
Moyenne résidus	$5,67. 10^{-20}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
BREUSCH-GODFREY	$P = 0,4161$	Absence d'autocorrélation d'ordre $p = 1$
ARCH(1)	$P = 0,88$	Absence d'hétéroscédasticité d'ordre $q = 1$
JARQUE-BERA	$P < 2,2.10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

Tab. 2 : Qualité d'ajustement du modèle de l'inflation

II.b.2. Taux d'intérêt nominaux

Les taux d'intérêt nominaux sont le reflet d'une situation économique et monétaire. Ils traduisent la perception de long terme des investisseurs vis-à-vis du contexte macroéconomique.

Selon FISHER (1939), les taux d'intérêt nominaux qui se forment sur le marché financier, reflètent les anticipations des agents privés sur la croissance réelle de l'économie et l'inflation future.

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour déterminer les taux d'intérêt nominaux et par déduction une courbe des taux nominaux (cf. GBONGUE et PLANCHET [2015f]). Dans l'ensemble des GSE étudiés, elle est obtenue de manière indirecte après déduction de la structure par terme des taux d'intérêt réels et de l'inflation anticipée.

Dans le contexte de la zone CIPRES, les marchés financiers ne fournissent pas, en temps réel, les rendements²⁹ des titres en circulation. En outre, nous disposons des prix des obligations, ainsi que des intérêts courus à chaque date de cotation.

Cette situation défavorable nous pousse à opter pour une approche par les prix, à l'opposé de l'approche par les rendements qui est beaucoup utilisé dans la littérature. Dans GBONGUE et PLANCHET [2015], nous avons présenté une méthodologie de construction d'une courbe des taux nominaux dans le contexte de la zone CIPRES, via une approche par les prix des titres publics. L'analyse comparative des modèles de taux d'intérêt et la pratique nous pousse à retenir le modèle de Nelson Siegel³⁰ (1987) pour la simulation des taux d'intérêt nominaux de notre GSE. Rappelons que, dans ce modèle, le taux à terme instantané s'écrit sous la forme suivante :

²⁹ Ils peuvent être calculés individuellement mais cela impliquera un temps de travail important.

³⁰ Par ailleurs, c'est le modèle retenu certaines banques centrales occidentales.

$$f_t^{nom}(m) = \beta_0^{nom} + \beta_1^{nom} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right) + \beta_2^{nom} \left(\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right) \quad (2.7)$$

Ce qui aboutit à une expression fermée des taux d'intérêt nominaux :

$$R_t^{nom}(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{nom}(u) du$$

$$= \beta_0^{nom} + (\beta_1^{nom} + \beta_2^{nom}) \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right)}{\frac{m}{\tau_1^{nom}}} \right] - \beta_2^{nom} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{nom}}\right) \quad (2.8)$$

L'utilisation de ce modèle requiert l'estimation d'un vecteur de paramètres contenant les quatre paramètres $\chi = (\beta_0^{nom}, \beta_1^{nom}, \beta_2^{nom}, \tau_1^{nom})$. Le calibrage de ce modèle requiert au préalable de faire varier τ_1^{nom} entre 0 et 30. Pour chaque valeur de τ_1^{nom} , il s'agira d'estimer les paramètres du modèle de Nelson Siegel en minimisant l'écart au carré entre les prix théorique et observé :

$$Minimiser_{\beta_0^{nom}, \beta_1^{nom}, \beta_2^{nom}} H_1(\hat{P}) = Minimiser_{\beta_0^{nom}, \beta_1^{nom}, \beta_2^{nom}} \left(\sum_{k=1}^N (P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta))^2 \right) \quad (2.9)$$

Dans ce contexte, nous obtenons une matrice de paramètres. Le choix des paramètres finaux se fait en respectant les propriétés principales du modèle à savoir $\beta_0^{nom} > 0$ et $\beta_0^{nom} + \beta_1^{nom} > 0$ pour la valeur la plus faible de l'erreur au carré, ce qui correspond naturellement à une valeur de τ_1^{nom} .

Le tableau ci-dessous illustre les résultats du calibrage :

Paramètres	β_0^{nom}	β_1^{nom}	β_2^{nom}	τ_1^{nom}
Valeurs	6,2	-3,7	-1,85	0,6

Tab. 3 : Paramètres estimés du modèle des taux d'intérêt nominaux (Nelson Siegel)

La qualité du modèle des taux nominaux est appréciée à travers l'évaluation du risque d'estimation au moyen de deux indicateurs que sont le Theil-U-Statistic (cf. KOVACHEV et SIMEONOV [2014]) et le Mean Absolute Percentage Error (MAPE, cf. NAVAS [2005]).

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	0,9 %	1,5 %

Tab. 4 : Qualité d’ajustement du modèle des taux d’intérêt nominaux

II.b.3. Taux d’intérêt réels

La modélisation de la courbe des taux réels de la zone CIPRES est presque identique à celle des taux nominaux en ce sens qu’elle est construite en annulant simplement l’inflation anticipée des taux d’intérêt nominaux des États de l’Union. En pratique, il s’agira de formuler des hypothèses sur la probable évolution de l’inflation dans le processus de calibrage des prix des obligations gouvernementales.

Si dans la littérature, la construction de la courbe des taux réels se fait à partir des titres obligataires ou des produits dérivés (swap, etc.) indexés sur l’inflation (cf. JARROW et YILDIRIM [2003]), en revanche, dans la zone CIPRES, ces instruments financiers sont inexistant, ce qui rend difficile la construction d’une courbe des taux réels. En outre, il est possible de contourner ce problème en concevant une méthodologie pertinente³¹d’estimation des taux réels³² adaptés au contexte économique de la zone CIPRES.

L’idée motrice est d’arriver à concevoir une courbe des taux réels à partir des titres publics en circulation sur le marché régional, ce qui implique d’isoler l’inflation dans le processus de minimisation de l’écart au carré entre les prix théorique et observé.

Dans Deacon et al. (2004), nous voyons que le prix de marché *complet* d’une obligation réelle classique indexée sur l’inflation s’écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{P}_k^{real}(t, \theta) &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_k^{real}(t, m) \times B^{real}(t, m) \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{real} \prod_{i=1}^m (1 + \pi_i)}{(1 + r_m)^m \prod_{i=1}^m (1 + \pi_i)} + \frac{FV^{real} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1 + \pi_i)}{(1 + r_{[\theta]+1})^{[\theta]+1} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1 + \pi_i)} \quad (2.10) \end{aligned}$$

³¹ Assez proche de la réalité.

³² Ces taux réels permettront de favoriser l’émission de futures obligations ou produit de taux indexés sur l’inflation.

avec :

$[\theta]+1$: Le nombre de versement des cash-flows

C^{real} : La valeur du coupon réel versé

FV^{real} : La valeur de remboursement de l'obligation réelle indexée sur l'inflation.

$\pi_i = \frac{q_i - q_{i-1}}{q_{i-1}}$ ou $\pi_i = \log\left(\frac{q_i}{q_{i-1}}\right)$: L'inflation observée à la date i .

En nous inspirant de la relation ci-dessus, il est possible de réécrire la fonction prix théorique nominal sous la forme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \hat{P}_k^{nom}(t, \theta) &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_k^{nom}(t, m) \times B^{nom}(t, m) \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{nom}}{(1+y_m)^m} + \frac{FV^{nom}}{(1+y_{[\theta]+1})^{[\theta]+1}} \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{nom}}{(1+r_m)^m \prod_{i=1}^m (1+\pi_i)} + \frac{FV^{nom}}{(1+r_{[\theta]+1})^{[\theta]+1} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1+\pi_i)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec :

$C^{nom} = C^{real} \prod_{i=1}^m (1+\pi_i)$: La valeur du coupon nominal versé.

$FV^{nom} = FV^{real} \prod_{i=1}^{[\theta]+1} (1+\pi_i)$: La valeur de remboursement de l'obligation nominale.

$(1+y_m)^m = (1+r_m)^m \prod_{i=1}^m (1+\pi_i)$, ce qui est en accord avec la théorie de Fisher.

Nous rappelons que y_m et r_m représentent respectivement les taux d'intérêt nominaux et réels à la maturité m . Dans l'expression du prix théorique ci-dessus, nous pouvons voir que les inconnus sont les taux réels r_m recherchés pour toutes les maturités. Nous retenons aussi le modèle de Nelson Siegel (1987) pour capter la dynamique des taux réels. Par conséquent, le taux à terme réel instantané prend la forme naturelle suivante :

$$f_t^{real}(m) = \beta_0^{real} + \beta_1^{real} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right) + \beta_3^{real} \left(\frac{m}{\tau_1^{real}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right) \quad (2.12)$$

Les taux d'intérêt réels sont obtenus par la suite par intégration des taux à terme réels ce qui aboutit à la formulation mathématique :

$$r_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{real}(u) du$$

$$= \beta_0^{real} + (\beta_1^{real} + \beta_2^{real}) \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right)}{\frac{m}{\tau_1^{real}}} \right] - \beta_2^{real} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{real}}\right) \quad (2.13)$$

L'utilisation de ce modèle requiert l'estimation d'un vecteur de paramètres contenant les quatre paramètres $\chi^{real} = (\beta_0^{real}, \beta_1^{real}, \beta_2^{real}, \tau_1^{real})$. Nous retenons le processus de calibrage décrit dans la sous-section précédente. Notons que la nouvelle expression du prix théorique ci-dessus nous permet simplement d'obtenir des taux d'intérêt réels **conditionnellement à l'évolution future de l'inflation**. Dans ce contexte, nous pouvons étudier deux cas de figures.

Dans le premier cas (le plus simple), il s'agira de fixer π_i sur toute la durée de vie restante de l'obligation. Dans ce contexte, le choix de π_i doit être minutieux et requiert de ce fait une approche experte. Nous proposons de la calibrer sur l'objectif cible de l'inflation fixé par l'autorité monétaire, qui est de $\pi_i = 2\%$ dans le contexte de la zone CIPRES. Ainsi, le prix théorique s'écrit de la manière suivante :

$$\hat{P}_k^{nom}(t, \theta) = \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{nom}}{(1+r_m)^m (1+2\%)^m} + \frac{FV^{nom}}{(1+r_{[\theta]+1})^{[\theta]+1} (1+2\%)^{[\theta]+1}} \quad (2.14)$$

Les paramètres du modèle sont obtenus en minimisant l'écart au carré entre les prix théoriques ci-dessus et observés sur le marché financier régional, soit :

$$Minimiser_{\beta_0^{real}, \beta_1^{real}, \beta_2^{real}} H_2(\hat{P}) = Minimiser_{\beta_0^{real}, \beta_1^{real}, \beta_2^{real}} \left(\sum_{k=1}^N (P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta))^2 \right) \quad (2.15)$$

Les valeurs obtenues sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Paramètres	β_0^{real}	β_1^{real}	β_2^{real}	τ_1^{real}
Valeurs	4,2	-3,7	-1,85	0,6

Tab. 5 : Calibrage du modèle des taux d'intérêt réels dans l'hypothèse d'inflation constante

La qualité de ce modèle est résumée dans le tableau ci-dessous :

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	0,94 %	1,5 %

Tab.6 : Qualité d’ajustement du modèle des taux d’intérêt réels dans l’hypothèse d’inflation constante

Dans le second cas, il s’agira de prévoir l’évolution probable de l’inflation, au moyen du processus d’ORNSTEIN-UHLENBECK afin de retrouver la dynamique de π_i dont l’horizon de projection correspond naturellement au maximum des durées de vie des obligations gouvernementales considérées. Le tableau ci-dessous résume les valeurs obtenues des paramètres du modèle à partir de la dynamique de π_i obtenue à la sous-section II.b.1. :

Paramètres	β_0^{real}	β_1^{real}	β_2^{real}	τ_1^{real}
Valeurs	4,2	-3,7	-0,033	1,9

Tab. 7 : Calibrage du modèle des taux d’intérêt réels dans l’hypothèse d’inflation non constante.

La qualité de ce modèle est illustrée dans le tableau ci-dessous :

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL (%)	1,1 %	2 %

Tab. 8 : Qualité d’ajustement du modèle des taux d’intérêt réels dans l’hypothèse d’inflation non constante.

II.b.4. Écart des taux

Dans la littérature financière, les obligations des gouvernements sont considérées comme des titres sans risque. Inversement, toute obligation (à l’exclusion des obligations d’État) présente un risque de l’émetteur, appelé l’écart des taux ou écart de crédit.

Il se définit comme la différence entre le taux des obligations de société et le taux sans risque. Il comporte deux composantes attribuables respectivement au risque de crédit et de liquidité. Dans la pratique, il est très difficile de les estimer séparément.

AMATO et REMOLONA (2003) montrent que les écarts de taux sur les titres privés sont souvent plus élevés que ce dont on aurait besoin pour couvrir la perte espérée. Ce constat se justifie par le fait qu’en pratique, pour les investisseurs, les écarts des taux doivent servir à couvrir aussi bien la perte espérée que la perte non espérée³³.

Dans la pratique, plusieurs facteurs peuvent influencer l’écart des taux dont le plus important est l’appréciation de la qualité de crédit de l’émetteur, au moyen de sa notation. La meilleure note implique un écart des taux faible.

ANNAERT et CEUSTER (1999) soutiennent que la structure par terme des écarts de taux ne doit pas être nécessairement à pente positive et que diverses formes de cette courbe sont possibles.

³³ Cette perte provient principalement de la dégradation de la qualité de crédit de l’émetteur.

De nombreux praticiens s'intéressent aux écarts de taux. Par exemple, les banquiers utilisent ces écarts de taux pour la tarification des prêts dans le but d'atteindre la rentabilité fixée par les actionnaires. Pour le gestionnaire d'un portefeuille des obligations de société, la connaissance de la dynamique des écarts de crédit, est une information cruciale pour la couverture de son portefeuille, à partir des produits dérivés sur les obligations des États.

Dans la pratique, les écarts de taux sont observés sur les obligations de société. Pour les estimer, nous nous référerons à GBONGUE [2016a]. En effet, la construction de la courbe des écarts de taux dépend de l'entrée ou non³⁴ de la variable *écart de taux* (CS)³⁵ dans la modélisation du prix des obligations de société.

Ainsi, deux situations se dégagent. En premier lieu, nous pouvons considérer le CS comme une variable **exogène** du modèle de prix théorique. Dans ce contexte, la structure par terme des écarts de taux est obtenue par la différence entre la courbe des taux des obligations de société³⁶ et la courbe des taux de l'État.

En second lieu, le CS peut être considéré comme une variable **endogène** du modèle. Dans ce cas, la structure par terme des écarts de taux est déduite du processus de modélisation du prix des obligations de société.

Dans le contexte de la zone CIPRES, nous nous intéresserons à la seconde approche. Disposant d'un marché financier régional capable de fournir les prix de marché des obligations de société, nous proposons le modèle de prix suivant :

$$\begin{aligned} \hat{P}_k^{corp}(t, \theta) &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} CF_k^{corp}(t, m) \times B^{corp}(t, m) \\ &= \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \frac{C^{corp}}{(1+y_m)^m (1+cs_m)^m} + \frac{FV^{corp}}{(1+y_{[\theta]+1})^{[\theta]+1} (1+cs_{[\theta]+1})^{[\theta]+1}} \quad (2.16) \end{aligned}$$

avec :

C^{corp} , FV^{corp} : Les coupons versés et la valeur nominale des obligations de société.

y_m , cs_m : Les taux d'intérêt nominaux et écarts de taux à la maturité m .

³⁴ Si l'écart des taux (CS) est exogène au modèle, nous faisons référence à la méthode directe de construction de la courbe des taux des obligations de société. A contrario, s'il est endogène au modèle, il s'agit de la méthode indirecte.

³⁵ La notation CS fait référence au « credit spread ».

³⁶ Elle est obtenue de manière indépendante, à partir des obligations des entreprises en circulation sur le marché financier régional.

Nous pouvons remarquer que l'écart de taux cs_m est la variable inconnue³⁷ de la fonction mathématique du prix des obligations de société. Elle sera aussi modélisée par le modèle de NELSON SIEGEL (1987). Dans ce modèle, le taux à terme instantané des écarts de taux s'écrira comme suit :

$$f_t^{cs}(m) = \beta_0^{cs} + \beta_1^{cs} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{cs}}\right) + \beta_2^{cs} \left(\frac{m}{\tau_1^{cs}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{cs}}\right) \quad (2.17)$$

Nous déduisons une expression fermée des écarts de taux par intégration des taux à terme :

$$\begin{aligned} R_t^{cs}(m) &= \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{cs}(u) du \\ &= \beta_0^{cs} + (\beta_1^{cs} + \beta_2^{cs}) \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{cs}}\right)}{\frac{m}{\tau_1^{cs}}} \right] - \beta_2^{cs} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{cs}}\right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

L'utilisation de ce modèle requiert l'estimation d'un vecteur de paramètres contenant quatre que sont: $\chi^{cs} = (\beta_0^{cs}, \beta_1^{cs}, \beta_2^{cs}, \tau_1^{cs})$. Le processus de calibrage du modèle suit la même logique que celui des taux réels et nominaux décrit *supra*. Sauf que nous minimisons plutôt les prix des obligations de société, soit :

$$\underset{\beta_0^{cs}, \beta_1^{cs}, \beta_2^{cs}}{\text{Minimiser}} H_3(\hat{P}_{corp}) = \underset{\beta_0^{cs}, \beta_1^{cs}, \beta_2^{cs}}{\text{Minimiser}} \left(\sum_{k=1}^N (P_{corp}^k(t, \theta) - \hat{P}_{corp}^k(t, \theta))^2 \right) \quad (2.19)$$

Le tableau ci-dessous illustre les résultats du calibrage du modèle :

Paramètres	β_0^{cs}	β_1^{cs}	β_2^{cs}	τ_1^{cs}
Valeurs	1,5	-1,2	-1,5	30

Tab. 9 : Paramètres estimés du modèle des écarts de taux.

La qualité de ce modèle est consignée dans le tableau ci-dessous :

³⁷Étant donné que la variable y_m provient de la courbe des taux nominaux.

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	1,5 %	2,5 %

Tab. 10 : Qualité d'ajustement du modèle des écarts de taux.

II.b.5. Rendement des actions

Une approche naturelle de projeter le rendement des actions est l'utilisation du modèle de BLACK et -SCHOLE(1973) qui suppose que la dynamique du prix des actions $\{S_t, t \geq 0\}$ suit un mouvement brownien géométrique. Dans ce modèle, la volatilité du prix est constante ce qui, à priori, laisse penser que les mouvements du prix sont indépendants. En Afrique de l'Ouest, ADEOSUN et al. [2015] applique le modèle de BLACK-SCHOLE (BS) sur les données journalières du marché financier nigérian des actions, pour chaque année distincte allant de 1996 à 2014. Ils concluent que ce modèle permet d'appréhender la dynamique du prix des actions. En outre, ils font remarquer que le résultat des prédictions serait meilleur si les paramètres constants du modèle BS étaient stochastiques.

Dans le modèle BS, la dynamique du prix des actions s'écrit comme suit :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z\right), t \geq 0. \quad (2.20)$$

En notant par $y_{t+\Delta t} = \log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$, le rendement des actions, alors nous pouvons écrire :

$$y_{t+\Delta t} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z \quad (2.21)$$

Cette expression montre que les rendements des actions sont indépendants dans le modèle BS, ce qui signifie que les variations des prix sont indépendantes. Le calibrage de ce modèle est relativement simple et les paramètres s'obtiennent par les expressions suivantes :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_t$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{\mu})^2}}{\sqrt{\Delta t}} \quad (2.22)$$

Dans la pratique, nous observons une dépendance entre les rendements des obligations. Cette dépendance s'observe très souvent sur la volatilité des rendements (cf. Chand et al. [2012]). Dans la littérature, les modèles célèbres utilisés pour appréhender la dépendance

des prix au moyen de la dépendance des rendements et/ou de la volatilité sont les modèles de type ARCH/GARCH (cf. ENGLE [1982], BOLLERSLEV [1986], SHERRIS [1997]).

AHLGRIM et *al.* [2008] rappelle le modèle CAS-SOA pour la modélisation du rendement des actions. Il s'agit du modèle de changement de régime (RSLN : *Regime Switching Log Normal*, cf. Hardy [2001]).

Dans ce modèle, la modélisation porte principalement sur l'excès de rendement par un changement de régime. En effet, soit s_t le rendement de l'action à la date t . Ce rendement est la somme du taux d'intérêt réel, de l'inflation et de l'excès de rendement :

$$\begin{aligned} s_t &= y_t + x_t \\ &= r_t + q_t + x_t \\ \ln x_t | \rho_t &\sim N(\mu_{\rho_t}, \sigma_{\rho_t}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ρ_t représente le régime qui dicte la distribution spécifique de x_t . Le modèle de la CAS / SOA utilise deux régimes ($\rho_t = 1$ ou 2).

Plus récemment, un modèle a été proposé par l'académie américaine des actuaires dans lequel le rendement des actions était modélisé par un modèle stochastique à log-volatilité (cf. AAA [2005]) :

$$\begin{aligned} ds_t &= \mu_t dt + v_t dB_t^s \\ d(\ln v_t) &= \phi[\ln \tau - \ln v_t] dt + \sigma_v dB_t^v \\ \mu_t &= A + Bv_t + Cv_t^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Chauvin [2006] propose une méthode simple pour calculer le prix des actions. Elle consiste à ajuster les rendements y_i par une distribution probabiliste, soit :

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\sum_{i=1}^t y_i\right), \quad t \geq 1. \quad (2.25)$$

Les modèles les plus répandus dans la littérature pour la modélisation des rendements des actions sont les modèles de type ARCH et GARCH et de changement de régime. Par exemple, nous pouvons citer les travaux de JIANG [2012], HARDY [2001], SEN [2004], TILL [2011].

Dans le contexte de la CIPRES, nous nous intéresserons à deux modèles classiques. Le premier est le modèle de Black et Scholes (cf. *supra*) et le second est un modèle stochastique à volatilité défini comme suit :

$$\begin{aligned} ds_t &= \mu_t dt + \sigma_t \varepsilon_t \\ d \ln \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \ln \sigma_{t-1}^2 \\ \mu_t &= A + B\mu_{t-1} \\ \varepsilon_t &\sim N(0,1) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sur le marché financier régional (BRVM), nous disposons de deux principaux indices à savoir l'indice BRVM10 et l'indice BRVM composite. Le premier indice traduit l'évolution des dix actions les plus liquides du marché tandis que le second décrit l'évolution de toutes les actions du marché. En outre, il existe des indices sectoriels que sont les indices BRVM industrie, services, finance, transport, agriculture, distribution et autres.

Pour prévoir le rendement de ces deux indices, nous allons, dans un premier temps, modéliser le rendement de l'indice BRVM 10. Dans un second temps, nous déterminerons le rendement de l'indice BRVM composite à travers un modèle linéaire, dans lequel les erreurs seront générées par le biais de la copule de Clayton.

Les données³⁸ collectées pour le calibrage de ces modèles portent sur ces deux indices principaux. En clair, il s'agit de l'historique des indices BRVM 10 et composite couvrant la période du 10 /05 / 2002 au 18 / 08 / 2016.

Le calibrage du modèle de Black et Scholes sur les rendements de l'indice BRVM 10 fournit les valeurs des paramètres ci-dessous :

Paramètres	μ^{BS}	σ^{BS}
Valeurs	0,00032	0,198

Tab. 11 : Calibrage du modèle de Black et Scholes sur l'historique de l'indice BRVM 10.

En outre, le calibrage du modèle stochastique à volatilité fournit le tableau ci-dessous :

Paramètres	A	B	α_0	α_1
Valeurs	0,00032	0,0243	-0,0048	0,999

Tab. 12 : Calibrage du modèle de stochastique à volatilité sur l'historique de l'indice BRVM 10.

Dans la pratique, l'indice BRVM composite est très influencé par l'indice BRVM 10 car il évolue le plus souvent dans le même sens. Pour prévoir le rendement de l'indice BRVM composite, nous allons spécifier la relation linéaire existante entre les rendements des deux indices, ce qui aboutit à la modélisation ci-dessous :

$$R_t^C = \phi_0 + \phi_1 R_{t-1}^C + \phi_2 R_t^{10} + \sigma \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1) \quad (2.27)$$

Les erreurs du modèle ε_t suivent une loi normale centrée réduite. Elles s'écrivent de la manière suivante :

$$\varepsilon_t = N^{-1}(u_t) , u_t \in [0,1] \quad (2.28)$$

Le calibrage du modèle linéaire *supra* aboutit au tableau ci-dessous :

Paramètres	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2

³⁸ La base de données comprend les données journalières des indices BRVM 10 et composite.

Valeurs	0,000158	0,024	0,696
---------	----------	-------	-------

Tab. 13 : Calibrage du modèle linéaire entre l'indice BRVM composite et 10.

La qualité d'ajustement du modèle est résumée dans le tableau ci-dessous :

Test	Résultat	Interprétation
R^2 ajusté	0,72	Le pouvoir explicatif du modèle est de 72 %
Fisher	$P < 2,2.10^{-16}$	Le modèle global est significatif
STUDENT (constante)	$P = 0,03578$	La constante est significative
STUDENT (variable 1 ³⁹)	$P = 0,00684$	Le coefficient de la variable 1 est donc significatif
STUDENT (variable 2 ⁴⁰)	$P < 2,2.10^{-16}$	Le coefficient de la variable 2 est donc significatif
Moyenne résidus	$-1,13. 10^{-20}$	La moyenne des résidus est considérée nulle
BREUSCH-GODFREY	$P = 1,88.10^{-10}$	Présence d'autocorrélation d'ordre p = 1
ARCH(1)	$P < 2,2.10^{-16}$	Présence d'hétéroscédasticité d'ordre q = 1
JARQUE-BERA	$P < 2,2.10^{-16}$	Hypothèse de normalité des résidus non vérifiée

Tab. 14 : Qualité d'ajustement du modèle linéaire entre l'indice BRVM composite et 10.

Par le modèle *supra*, nous pouvons voir que la simulation des rendements de l'indice BRVM composite passe par la simulation des erreurs et particulièrement des nombres uniformes u_i . Pour simuler ces nombres uniformes, nous décidons de tenir compte de la dépendance entre les indices boursiers. En effet, les taux de Kendall et Spearman sont respectivement de 82 % et 93,33 %, ce qui laissent penser à l'existence d'une dépendance entre les indices BRVM 10 et composite. La copule retenue est la copule de **Clayton**⁴¹. Pour calibrer cette copule, nous utilisons la méthode du pseudo-maximum de vraisemblance⁴², implémenté dans le package copula, sous R. L'application numérique fournit le paramètre suivant : $\theta = 9,088$.

³⁹ Il s'agit du rendement de l'indice BRVM composite à t-1.

⁴⁰ Il s'agit du rendement de l'indice BRVM 10 à t.

⁴¹ Pour choisir la copule de Clayton, nous avons testé toutes les copules de la famille archimédienne. Par la suite, le test statistique de Genest a permis de retenir la meilleure copule.

⁴² Pour les aspects théoriques de cette méthode, nous renvoyons l'auteur à « Genest, C., Ghoudi, K., et Rivest, L.-P. (1995). A semi parametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* 82, 543–552. »

II.b.6. Rendement de l'immobilier

Dans la zone CIPRES, l'immobilier fait partie des actifs de l'assureur. Dans le cadre de la gestion actif-passif, l'évolution des rendements influence très souvent la stratégie d'allocation. Toutefois, comme souligne FALEH [2011], la projection des rendements de l'immobilier se heurte souvent aux problèmes d'un historique peu profond, d'une liquidité insuffisante et de données confidentielles (cas des fonds de couverture)⁴³.

Dans une perspective de long terme, cet actif est souvent traité avec prudence. En outre, dans le cadre de l'allocation stratégique des actifs d'un régime de retraite en zone CIPRES, l'attention est souvent portée aux actions, aux obligations et au monétaire, ce qui rejoint CAMPBELL et al. [2001]. Cependant, cette situation ne remet pas en cause le potentiel que présentent ces actifs en tant que source de performance et/ou de couverture supplémentaire pour le portefeuille financier de la société ou du fonds de retraite (cf. AHLGRIM et al. [2005]).

Dans la littérature, le rendement de l'immobilier est modélisé selon un modèle de VASICEK [1977]⁴⁴. Par exemple, AHLGRIM et al. [2005] propose deux modèles séparés d'ORNSTEIN-UHLENBECK dont le premier contient le niveau de l'inflation et le second n'en contient pas. Par ce choix, il espère fournir un pouvoir prédictif additionnel des rendements de l'immobilier mais constate des résultats quasiment identiques.

Dans le contexte de la zone CIPRES, nous décidons de modéliser la dynamique des rendements de l'immobilier par le second modèle d' AHLGRIM et al.(2005), soit :

$$dre_t = \kappa_{re} (\mu_{re} - re_t) dt + \sigma_{re} dB_{re} \quad (2.29)$$

κ_{re} : La vitesse de retour à la moyenne.

μ_{re} : Le rendement moyen de l'immobilier.

σ_{re} : L'écart-type de l'erreur.

Pour calibrer ce modèle, nous avons opté pour une méthode experte afin de refléter au mieux la réalité. Dans IACUS [2008], nous pouvons voir que si $\{X_t, t \geq 0\}$ suit le processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK et s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} dX_t &= (\theta_1 - \theta_2 X_t) dt + \theta_3 dW_t, \quad X_0 = x_0. \\ &= \theta_2 \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} - X_t \right) dt + \theta_3 dW_t, \quad X_0 = x_0. \end{aligned}$$

Alors pour tout $t \geq 0$, ce processus possède une densité conditionnelle dont l'espérance et la variance prennent la forme suivante :

⁴³ Cette situation est identique à ce qui est observée dans la zone CIPRES

⁴⁴ L'équivalent de Hull et White [1990] avec un seul facteur : le taux court

$$E_{\theta}(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t}$$

$$Var_{\theta}(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2} \quad (2.30)$$

En posant simplement que $\kappa_{re} = \theta_2$ et $\mu_{re} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$, nous pouvons déduire l'espérance et la variance conditionnelles de l'immobilier :

$$E_{\theta}(re_t | re_0) = \mu_{re} + (re_0 - \mu_{re}) e^{-\kappa_{re} t}$$

$$Var_{\theta}(re_t | re_0) = \frac{\sigma_{re}^2 (1 - e^{-2\kappa_{re} t})}{2\kappa_{re}} \quad (2.31)$$

Ces expressions nous permettront de calibrer le modèle de l'immobilier *via* un avis d'expert et de déterminer les paramètres inconnus à savoir la vitesse de retour à la moyenne et la volatilité :

$$\kappa_{re} = -\frac{1}{t} \log \left(\frac{E_{\theta}(re_t | re_0) - \mu_{re}}{re_0 - \mu_{re}} \right) \quad (2.32)$$

$$\sigma_{re} = \sqrt{\frac{Var_{\theta}(re_t | re_0) \times 2\kappa_{re}}{1 - e^{-2\kappa_{re} t}}} \quad (2.33)$$

Le tableau ci-dessous résume les valeurs obtenues à partir de la méthode experte :

Paramètres	Intitulé	Valeurs
κ_{re}	Vitesse de retour à la moyenne	0,693
μ_{re}	Taux de rendement moyen de l'immobilier	0,15
$\hat{\sigma}_{re}$	Écart type de l'erreur	0,068

Tab. 15 : Calibrage du modèle de l'immobilier par l'approche experte.

II.b.7. Rendement du monétaire

Le monétaire est considéré comme un actif sans risque. Dans la pratique, nous l'assimilons aux dépôts à terme (DAT) des banques commerciales. Dans la zone CIPRES, le taux de rémunération de ces dépôts est déduit de la négociation entre le client et la banque. Toutefois, il est supérieur au taux de rémunération de l'épargne, qui est de 3,5 %. Au regard de ce qui précède, nous pouvons naturellement supposer dans notre étude que le rendement du monétaire correspond au taux à un an r observé sur la courbe des taux nominaux de la zone CIPRES. Soit M_t le monétaire à la date t . Sa dynamique est décrite de la manière suivante :

$$\frac{dM_t}{M_t} = r dt \quad (2.34)$$

ce qui conduit à :

$$M_{t+\Delta t} = M_t \exp(r\Delta t) \quad (2.35)$$

II.b.8. Rendement des obligations de société

Dans la littérature (cf. STANDER [2005]), il existe deux principales méthodes pour estimer le rendement des obligations de société. En premier lieu, il s'agit de la méthode dite *indirecte* qui consiste à déduire le rendement des obligations de société à partir de la somme des écarts des taux et des taux nominaux⁴⁵. Dans ce contexte, la détermination des écarts des taux s'apparente à la seconde méthode retenue dans la sous-sous-section II.b.4.

En second lieu, la méthode est dite *directe* car elle consiste à estimer directement une courbe des taux des entreprises sans expressément faire référence aux écarts des taux. Dans ce contexte, la courbe des taux des entreprises est construite de la même manière que la courbe des taux sans risque.

Pour déterminer cette courbe, nous utiliserons le modèle de NELSON SIEGEL (1987) dans un souci d'harmonisation dont le taux à terme instantané suit la dynamique suivante :

$$f_t^{ent}(m) = \beta_0^{ent} + \beta_1^{ent} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right) + \beta_2^{ent} \left(\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right) \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right) \quad (2.36)$$

Les rendements des obligations de société sont déduits de :

$$\begin{aligned} R_t^{ent}(m) &= \frac{1}{m} \int_0^m f_t^{ent}(u) du \\ &= \beta_0^{ent} + (\beta_1^{ent} + \beta_2^{ent}) \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right)}{\frac{m}{\tau_1^{ent}}} \right] - \beta_2^{ent} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^{ent}}\right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Les paramètres à estimer sont représentés par le vecteur $\chi^{ent} = (\beta_0^{ent}, \beta_1^{ent}, \beta_2^{ent}, \tau_1^{ent})$ et sont obtenus en minimisant l'écart au carré entre les prix des entreprises théorique et observé :

⁴⁵ Ces taux nominaux proviennent de la courbe des taux sans risque.

$$\underset{\beta_0^{ent}, \beta_1^{ent}, \beta_2^{ent}}{\text{Minimiser}} H_4(\hat{P}_{corp}) = \underset{\beta_0^{ent}, \beta_1^{ent}, \beta_2^{ent}}{\text{Minimiser}} \left(\sum_{k=1}^N (P_{corp}^k(t, \theta) - \hat{P}_{corp}^k(t, \theta))^2 \right) \quad (2.38)$$

Les données utilisées pour le calibrage de ce modèle sont les obligations des entreprises en circulation au 24 /10/ 2016. L'application numérique nous donne les valeurs de 7, -3,5, -0,0215 et 2,5 respectivement pour β_0^{ent} , β_1^{ent} , β_2^{ent} et τ_1^{ent} . En outre, la qualité d'ajustement du modèle fournit les valeurs de 1,6 % et 2,8 % respectivement pour la THEIL-U-STATISTIC et la MAPE.

III. GÉNÉRATION DE TRAJECTOIRES DES VARIABLES ET EXTENSION DU GSE

Dans cette section, nous allons analyser, dans un premier temps, les scénarios économiques qui découlent des modèles présentés dans la section précédente. Si une structure du GSE a été proposée *supra*, en outre, certaines variables n'ont pu être modélisées par manque de données. Dans ce contexte, les modèles du GSE déjà proposés pourront être, dans un second temps, étendus aux modèles du chômage, de la croissance et du taux d'échange, que nous aborderons dans la sous-section III.b.

III.a. Génération de trajectoires

La génération de trajectoires des variables du GSE est un exercice assez difficile. En ce qui concerne l'inflation, sa projection doit aussi tenir compte de l'avis des experts. Dans ce contexte, nous avons procédé à la simulation du modèle OU⁴⁶ sur un horizon de treize ans, conditionnellement à l'information donnée par l'autorité monétaire « le taux d'inflation en moyenne pour l'ensemble de l'union resterait modéré en 2016 et 2017. Sur la base des estimations réalisées, il se situerait à 1,1 % en 2016, proche du niveau de 2015, avant de s'accélérer pour atteindre 1,7 % en 2017 ». Tenant compte de cette information, nous aboutissons à la trajectoire de l'inflation suivante :

⁴⁶ Un million de trajectoires ont été générées sur un horizon de treize ans.

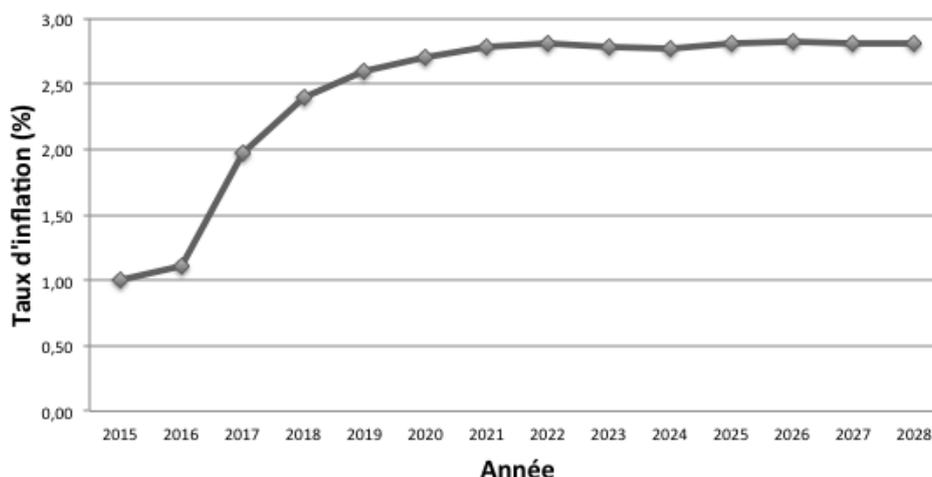


Fig. 2 : Évolution probable de l'inflation sur la période 2016-2028

Sur le graphique, nous pouvons observer que l'inflation ne s'écarte pas de son objectif cible⁴⁷ sur la période 2016-2028 conditionnellement à l'information disponible⁴⁸.

En outre, les taux d'intérêt nominaux sont appréhendés par la construction de la courbe des taux nominaux. Cette courbe est croissante⁴⁹ au 24 /10/ 2016, ce qui est en accord avec la théorie des anticipations (cf. HICKS [1946]), et converge naturellement vers 6,2 %. Le graphique ci-dessous illustre l'évolution des taux d'intérêt nominaux :

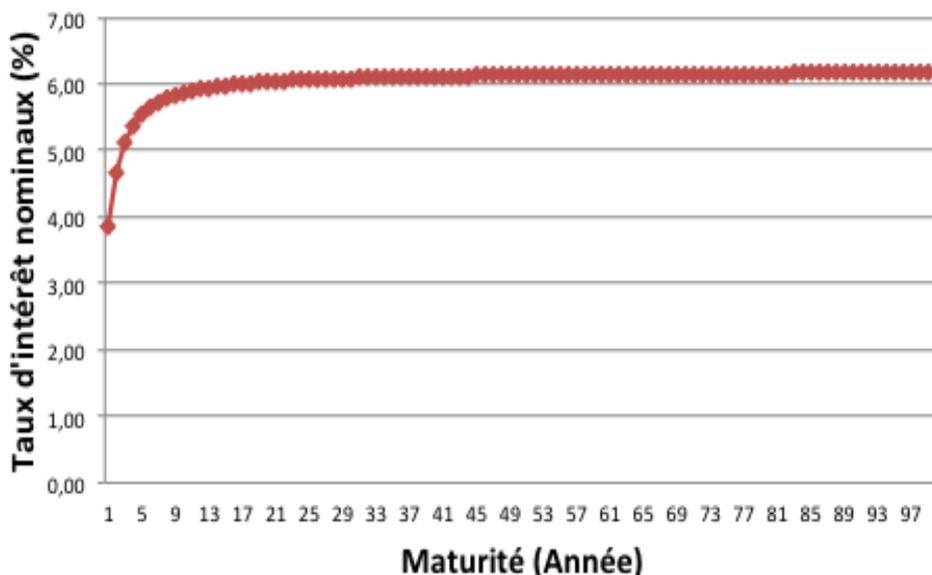


Fig. 3 : Allure de la courbe des taux nominaux au 24 /10/2016.

Les taux d'intérêt réels proviennent de la connaissance des taux d'intérêt nominaux et de l'inflation anticipée. Dans l'hypothèse d'une inflation constante à 2 % au cours de la durée de vie des obligations des États en circulation sur la BRVM, nous aboutissons à la courbe

⁴⁷ Objectif cible : 2 % +/- 1 %

⁴⁸ L'information disponible représente des indications formulées par l'autorité monétaire sur la trajectoire future de l'inflation.

⁴⁹ La pente de la courbe des taux nominaux est positive.

des taux réels qui converge vers 4,2 %. En outre, si l'inflation est supposée non constante sur toute la durée de vie des obligations, nous obtenons aussi une courbe des taux réels convergeant aussi vers 4,2 %. Toutefois, la première courbe (en bleu) est au-dessus de la seconde courbe (en rouge) comme l'illustre le graphique suivant :

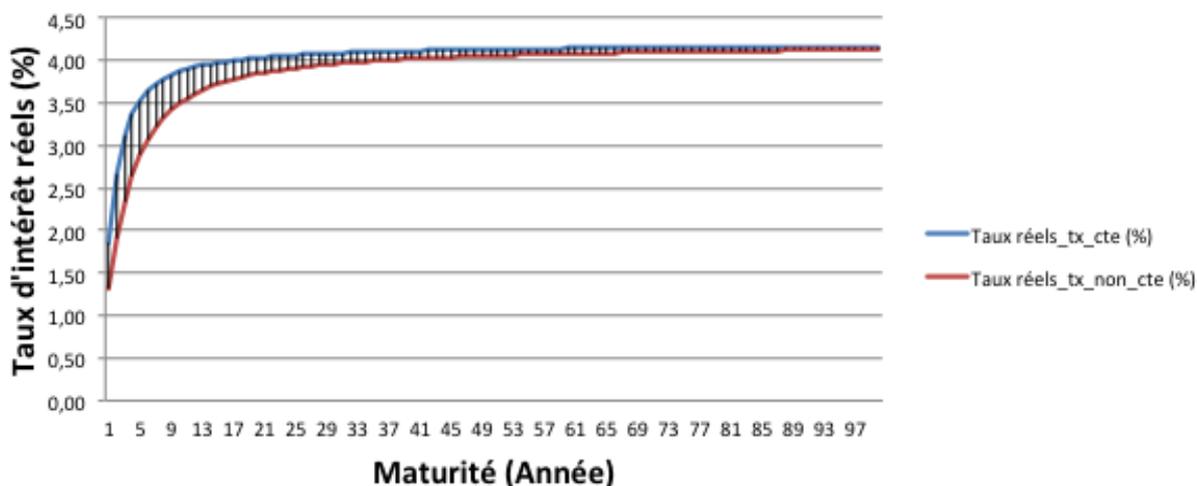


Fig. 4 : Analyse comparative des taux d'intérêt réels dans l'hypothèse d'inflation constante et non constante

Les écarts de taux reflètent la prime de risque de l'émetteur. Dans le cadre des entreprises, la courbe des écarts de taux (issue de la méthode indirecte) décroît légèrement entre les maturités 1 à 8 ans. En outre, elle est croissante dès la maturité 9 ans et converge par la suite vers 1,5 %. Le graphique ci-dessous illustre cette assertion :

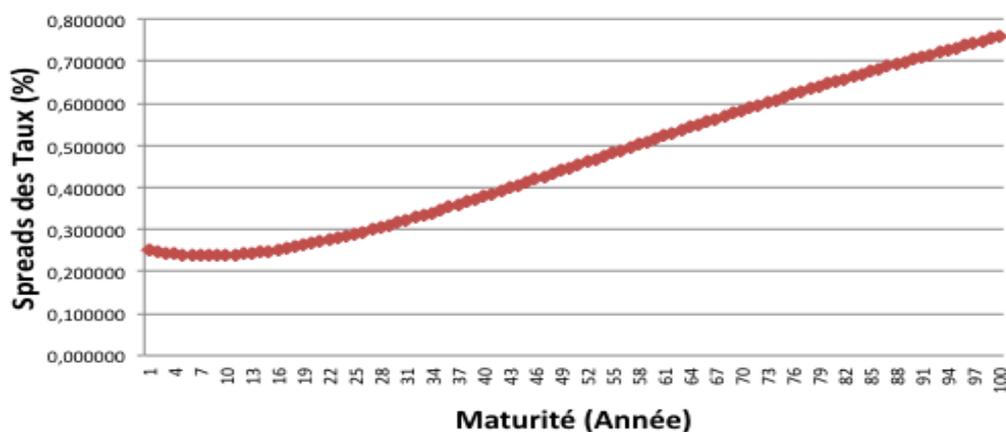


Fig. 5 : Allure de la courbe des écarts de taux issue de la méthode indirecte au 24 /10/ 2016.

En outre, comme nous le soulignons plus haut, les écarts de taux peuvent aussi être obtenus par la méthode directe. Pour illustrer simultanément ces deux méthodes, nous les représenterons par le graphique ci-dessous :

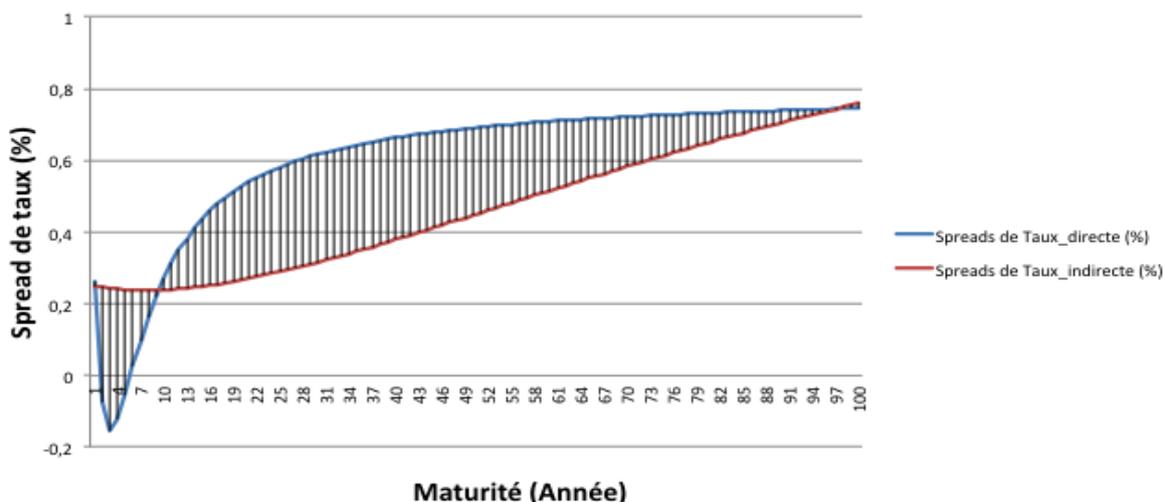


Fig. 6 : Comparaison des écarts de taux issus des méthodes directe et indirecte

Au regard de ce qui précède, nous pouvons déduire le rendement des obligations des entreprises à partir des méthodes directe et indirecte. Rappelons que ces rendements s’obtiennent, en sommant par maturité, les taux sans risque et les écarts de taux. Nous pouvons voir qu’ils convergent vers 7 %, comme l’illustre le graphique ci-dessous :

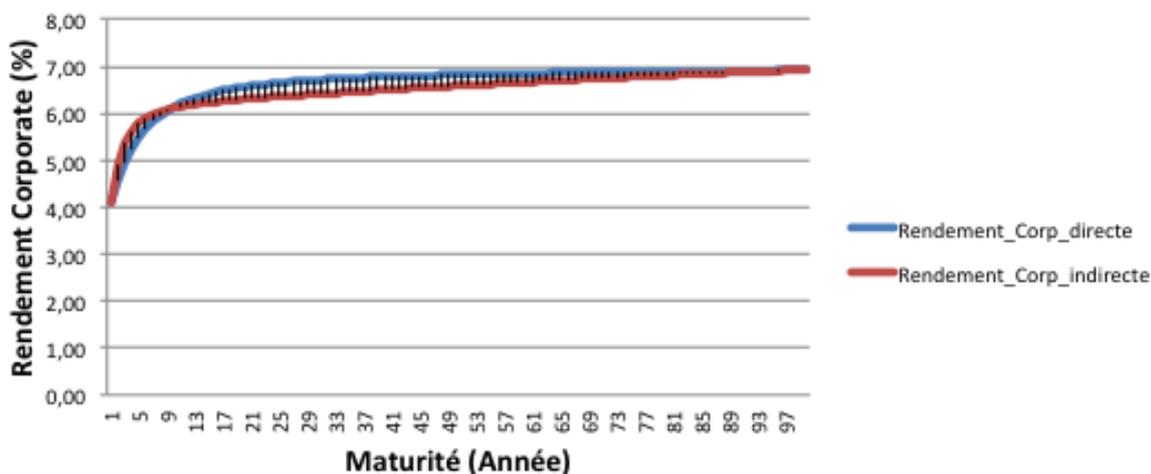


Fig. 7 : Comparaison des rendements des obligations de société issus des méthodes directe et indirecte

En ce qui concerne l’immobilier, le calibrage a nécessité l’utilisation de la méthode experte. En prenant comme rendement initial $re_0 = 10\%$, nous pouvons simuler la trajectoire du rendement de l’immobilier à partir du modèle OU. Le graphique ci-dessous illustre le résultat obtenu à partir d’un million de simulations :

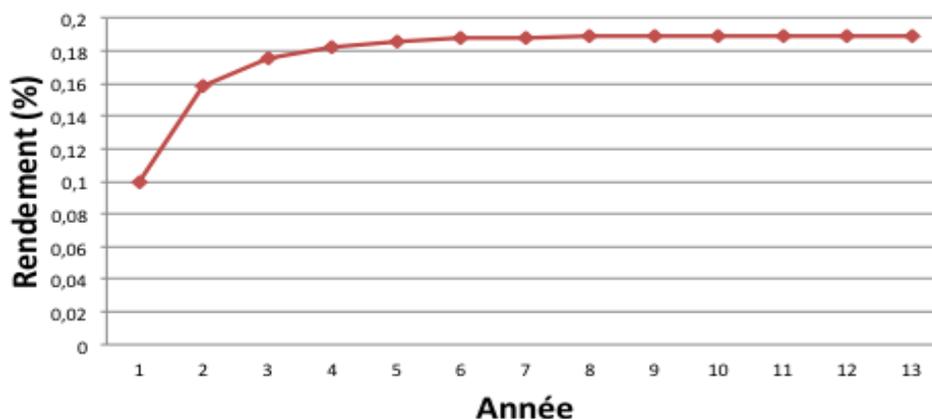


Fig. 8 : Évolution probable du rendement de l'immobilier sur la période 2016-2028

En ce qui concerne la modélisation des actions, nous nous sommes intéressés à la modélisation des deux principaux indices financiers de la BRVM en occurrence les indices BRVM 10 et BRVM composite. Au lieu de développer deux modèles stochastiques afin d'appréhender de manière indépendante la dynamique de ces deux indices, nous avons opté pour la modélisation de l'indice BRVM 10 à partir des modèles de Black et Scholes et stochastique à volatilité. Par la suite, il s'agira de déduire l'indice BRVM composite par la relation existante avec l'indice BRVM 10. Le graphique ci-dessous décrit la dynamique des deux indices sur 100 jours dans le modèle de Black et Scholes :

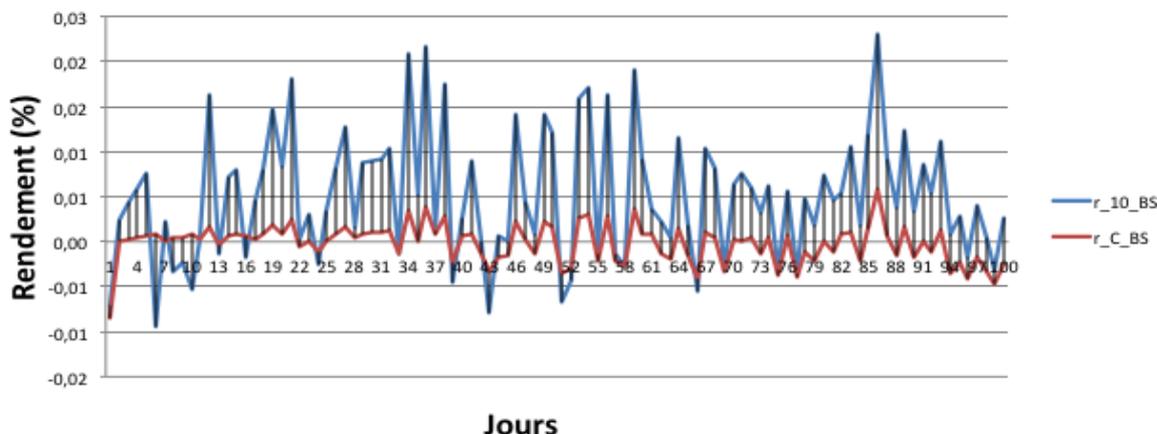


Fig. 9 : Évolution des indices BRVM 10 et composite dans le modèle de Black et Scholes

En outre, nous pouvons déduire de la même manière la dynamique des deux indices dans le modèle stochastique à volatilité présenté plus haut. Le graphique ci-dessous illustre cette évolution :

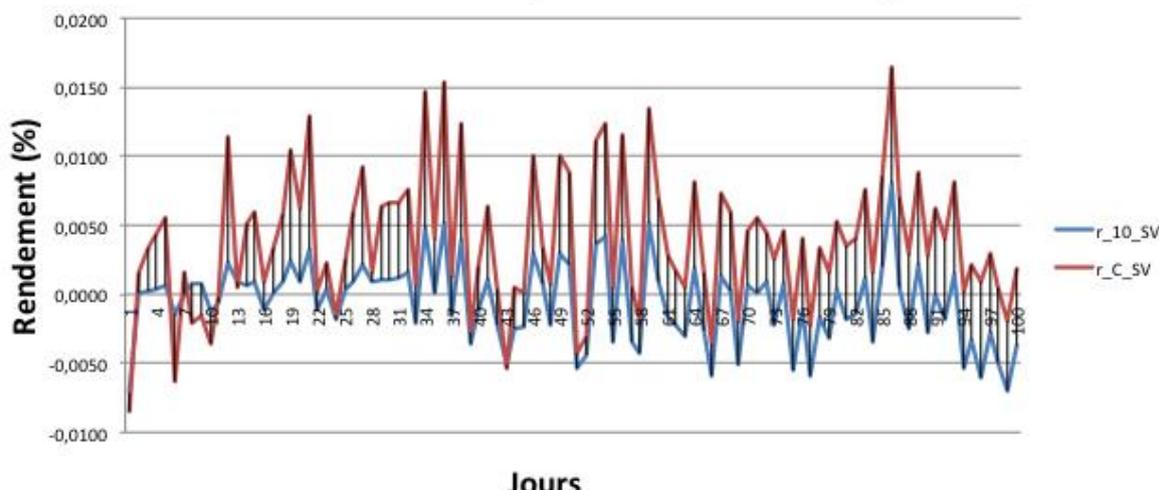


Fig. 10 : Évolution des indices BRVM 10 et composite dans le modèle stochastique à volatilité.

III.b. Proposition d’une extension du GSE

La progression des besoins des professionnels de l’actuariat dans la zone CIPRES entraînera une extension du GSE réellement proposé. Les variables qui pourront principalement être intégrer sont les taux de chômage, croissance et d’échange.

III.b.1. Taux de chômage

Le taux de chômage mesure la proportion des chômeurs dans la population active. Il s’agit d’un indicateur important dans l’appréciation de la performance d’une économie. Dans le contexte des régimes de retraite de la zone CIPRES, cet indicateur impacte le ratio de dépendance et donc la stabilité des régimes sur le long terme, basés sur un modèle de retraite à prestations définies financées par répartition (cf. GBONGUE et al. [2015d]). Par conséquent, le pilotage technique de ces régimes requiert d’appréhender la dynamique de ce facteur de risque. Le constat est que de nombreux régimes de retraite des pays de la zone CIPRES ont été déficitaires avant leurs réformes paramétriques dont l’une des causes est un niveau élevé du chômage.

AHLGRIM et al. (2005) propose de modéliser le taux de chômage en utilisant naturellement la courbe de Philips, qui décrit une relation inverse entre le chômage et l’inflation. Le modèle proposé est une version modifiée du processus OU, soit :

$$du_t = \kappa_u (\mu_u - u_t) dt + \alpha_u dq_t + \sigma_u dB_u$$

La forme discrète de ce modèle de chômage, dans le schéma d’Euler est donnée par la relation suivante :

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \kappa_u \mu_u \Delta t + (1 - \kappa_u \Delta t) u_t + \alpha_u (q_{t+1} - q_t) + \sigma_u \varepsilon_{ut} \\ &= v_1 + v_2 u_t + v_3 (q_{t+1} - q_t) + \sigma_u \varepsilon_{ut} \end{aligned} \quad (3.1)$$

A partir de la relation (3.1), nous pouvons voir que la prévision du taux de chômage (t+1) dépend linéairement du taux de chômage précédent (t) et de la variation du taux

d'inflation entre les dates t et $t+1$. Notons que le calibrage de ce modèle requiert un historique des taux de chômage et d'inflation. À ce stade, nous ne disposons pas d'un historique profond et fiable pour estimer les paramètres de ce modèle.

Cette fiabilité des données vient du fait que les statistiques officielles⁵⁰ sur le chômage dans la zone CIPRES ne tiennent pas compte du problème de l'informalité dans l'estimation du taux de chômage réel. En attendant de disposer des données de qualité, ce modèle peut être utilisé à court terme, en fixant les paramètres par avis d'expert⁵¹.

III.b.2. Taux de croissance

Une approche naturelle d'appréhender la dynamique du taux de croissance est d'utiliser un modèle stochastique. En premier lieu, il s'agira de disposer d'un historique du produit intérieur brut (PIB) nominal ou réel, selon notre besoin. En second lieu, il s'agira de spécifier la variable suivante :

$$r_t^{PIB} = \log\left(\frac{PIB_t}{PIB_{t-1}}\right) \quad (3.2)$$

Un modèle candidat pour modéliser la variable r_t^{PIB} est le processus d'ORNSTEIN Uhlenbeck (OU) que nous pouvons spécifier sous la forme suivante :

$$dr_t^{PIB} = \kappa_{r^{PIB}} (\mu_{r^{PIB}} - r_t^{PIB}) dt + \sigma_{r^{PIB}} dB_{r^{PIB}} \quad (3.3)$$

Ce modèle peut être amélioré à partir des études précédentes (cf. HAMORI [2000], Ho et TSUI [2003], FOUNTAS et al. [2004], etc.), qui révèlent la présence d'une forte volatilité parmi les taux de croissance.

Dans ce contexte, la volatilité du processus OU *supra* sera remplacé par une volatilité temporelle $\sigma_t^{r^{PIB}}$. Les paramètres de la dynamique de cette volatilité seront estimés par un modèle provenant de la famille des ARCH/GARCH.

Une seconde approche de modéliser les taux de croissance (g) est d'utiliser la **loi d'OKUN** qui suppose que la dynamique du taux de croissance dépend linéairement de la variation du taux de chômage. En nous inspirant du modèle proposé par AHLGRIM et al. (2005), nous pouvons écrire que :

$$dg_t = \kappa_g (\mu_g - g_t) dt + \alpha_g du_t + \sigma_g dB_g \quad (3.4)$$

⁵⁰ Par exemple, les statistiques sur le chômage, publiées par la banque mondiale, révèlent souvent des taux de chômage faibles dans certains pays de la zone CIPRES, alors que la réalité est tout autre.

⁵¹ Le lecteur pourra se référer à la méthodologie présentée pour le calibrage de l'immobilier.

III.b.3. Taux de change

Dans quelques années, la modélisation des taux de change deviendra une problématique importante pour les professionnels de la zone CIMA. Par exemple, si la réglementation actuelle régle l'allocation des actifs, en outre, nous ne serons pas surpris de voir une évolution de cette réglementation afin de maximiser le rendement du portefeuille.

Dans le contexte de l'assurance, des lois sont étudiés afin de permettre aux assureurs de placer leurs liquidités sur tous les marchés financiers de la CIMA afin d'accroître la rentabilité de leurs portefeuilles. Afin d'améliorer la solvabilité des compagnies d'assurance de la zone CIMA, Rien ne prouve que la réglementation ne leur permette pas, par la suite, de placer leurs liquidités hors de la CIMA. Dans ce contexte, le GSE qui sera développé par ces professionnels, devra tenir compte du risque de change.

Dans la littérature, la modélisation des taux de change se fait au moyen des modèles qui tiennent compte du caractère « stochastique » de la volatilité. Par exemple, Dukich et al. [2000] évalue la performance du modèle GARCH dans la modélisation des taux de change (GBP/USD, JPY/USD, EUR/USD) journaliers.

Dans le contexte de la zone CIPRES, nous proposons d'utiliser le processus d'ORNSTEIN Uhlenbeck dans lequel la volatilité est temporelle. Si M/CFA désigne la parité entre la devise étrangère M et le FCFA. Nous posons :

$$r_t^{cours^{M/CFA}} = \log \left(\frac{Cours_t^{M/CFA}}{Cours_{t-1}^{M/CFA}} \right)$$

Le modèle proposé est simple et les paramètres se déduisent après la discrétisation du processus, soit :

$$dr_t^{cours^{M/CFA}} = \kappa_{r^{cours^{M/CFA}}} \left(\mu_{r^{cours^{M/CFA}}} - r_t^{cours^{M/CFA}} \right) dt + \sigma_t^{cours^{M/CFA}} dB_{cours^{M/CFA}} \quad (3.5)$$

Une panoplie de modèles candidats existe pour la volatilité $\sigma_t^{cours^{M/CFA}}$. En outre, le modèle souvent utilisé est le modèle de BOLLERSLEV (1986), soit le modèle GARCH(1,1) :

$$\left(\sigma_t^{cours^{M/CFA}} \right)^2 = \omega + \gamma_1 \left(\sigma_{t-1}^{cours^{M/CFA}} \right)^2 + \gamma_2 \left(\varepsilon_{t-1} \sigma_{t-1}^{cours^{M/CFA}} \right)^2 \quad (3.6)$$

IV. APPLICATION DU GSE ⁵²

Une application intéressante de la courbe des taux est l'analyse du risque de défaut implicite des États de la zone CIPRES. En effet, nous constatons que ces pays n'arrivent pas très souvent à financer leurs économies à partir des taux sans risque, ce qui pousse leurs gouvernements à aborder très souvent la question du coût de financement élevé des emprunts. Nous pensons que cette situation peut s'expliquer dans un premier temps

⁵² Cette section utilise les notations introduites par VRUGT (2010).

par l'inexistence d'une courbe des taux de référence. Dans un second temps, elle peut traduire la présence d'un risque de défaut implicite des investisseurs, qui influence la détermination du taux d'émission dans le processus de structuration de la dette.

Nous pensons que la présence d'un risque de défaut implicite des investisseurs est réelle au regard de l'avis des experts⁵³. Pour preuve, le constat est que des émetteurs, autres que les États, comme la Banque Ouest Africaine de Développement et la Caisse Régionale de Refinancement Hypothécaire de l'UEMOA parviennent à lever des ressources au taux sans risque sur le marché financier régional.

Dans cette section, nous présenterons la méthodologie utilisée pour quantifier ce risque de défaut implicite. L'application numérique se fera sur les obligations des États en circulation sur la bourse régionale des valeurs mobilières au 24/10/2016.

IV.a. Méthodologie

Notre objectif est de construire une structure par terme des probabilités de défaut implicite. De manière intuitive, il s'agira de modéliser les probabilités de défaut implicite par un modèle paramétrique.

MERRICK (2001) estime le taux de recouvrement implicite de la Russie et constate qu'il chute de 27 % à 10 % en 1998. En outre, celui de l'Argentine est relativement stable et se situe autour de 50 % chaque période.

Pour construire la *courbe des probabilités de défaut implicite*, nous pouvons distinguer deux approches. La première approche (naturelle) de construction de cette courbe est de supposer le taux de recouvrement connu et d'estimer par la suite les probabilités de défaut (cf. ELTON et al. [2003]). En outre, la seconde approche consiste à traiter le taux de recouvrement et les paramètres du modèle (des probabilités de défaut) comme des variables inconnues. Cette dernière hypothèse se situe dans la lignée des travaux de MERRICK (2001,2005), que nous avons retenus dans cet article.

Notons par $\pi_t(m)$, la structure par terme des probabilités de défaut implicite (pour les maturités m). Dans la lignée de MERRICK (2005), VRUGT (2010) suggère une *paramétrisation flexible* de $\pi_t(m)$ et propose la forme suivante :

$$\pi_t(m) = \alpha + \beta \frac{(1 - e^{-m})}{m} \quad (4.1)$$

Le paramètre α représente la probabilité de défaut à l'infini. En outre, $\alpha + \beta$ correspond à la probabilité de défaut instantané, ce qui implique ce modèle doit respecter les contraintes suivantes : $\alpha > 0$ et $\alpha + \beta > 0$. Dans le contexte de la zone CIPRES, ce modèle

⁵³ Certains investisseurs interrogés disent préférer les obligations de la banque ouest africaine de développement que celles des États. Ces choix prouvent l'existence d'un risque de défaut implicite des pays de la zone CIPRES.

est sous-paramétré et ne permet pas un meilleur ajustement des prix des obligations des États. Dans ce contexte, nous décidons d'accroître le nombre de paramètres de notre modèle en suggérant l'utilisation du modèle de Nelson Siegel (1987). Ainsi, nous pourrions écrire la fonction $\pi_t(m)$ comme suit :

$$\pi_t(m) = \beta_0^\pi + (\beta_1^\pi + \beta_2^\pi) \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^\pi}\right)}{\frac{m}{\tau_1^\pi}} \right] - \beta_2^\pi \exp\left(-\frac{m}{\tau_1^\pi}\right) \quad (4.2)$$

Nous déduisons la formulation mathématique de la fonction de survie $S_t(m)$:

$$S_t(m) = \prod_{j=1}^m (1 - \pi_t(j)) \quad (4.3)$$

que nous pouvons naturellement simplifier par :

$$S_t(m) = (1 - \pi_t(m))^m \quad (4.4)$$

Au regard de ce qui précède, nous pouvons déterminer la fonction prix théorique à minimiser dans l'hypothèse de l'existence d'une probabilité de défaut implicite. Cette fonction s'écrit comme suit :

$$\hat{P}^k(t, \theta) = \sum_{m=1}^{[\theta]+1} \left\{ [CF_t^k(m) \times S_t(m)] + [RV \times S_t(m-1) \times \pi_t(m)] \right\} \times B_t(m) \quad (4.5)$$

La détermination des paramètres de la fonction de probabilité $\pi_t(m)$ et du taux de recouvrement s'obtient en minimisant l'écart au carré entre les prix théorique et observés, soit :

$$\underset{\beta_0^\pi, \beta_1^\pi, \beta_2^\pi, \tau_1^\pi, RV}{\text{Minimiser}} H_1(\hat{P}) = \underset{\beta_0^\pi, \beta_1^\pi, \beta_2^\pi, \tau_1^\pi, RV}{\text{Minimiser}} \left(\sum_{k=1}^N (P^k(t, \theta) - \hat{P}^k(t, \theta))^2 \right) \quad (4.6)$$

IV.b. Application numérique

Avant de présenter les résultats du calibrage du modèle de Nelson Siegel (1987), nous allons présenter les raisons qui nous ont amené à ne pas utiliser le modèle de VRUGT (2010) pour modéliser $\pi_t(m)$. En effet, le calibrage de ce modèle conduit aux résultats suivants :

Paramètres	α	β	RV
Valeurs	0,93	14,57	63

Tab. 16 : Calibrage du modèle de VRUGT (2010)

Le tableau ci-dessous révèle un meilleur ajustement du prix des obligations d'État :

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	0,84 %	1,43 %

Tab. 17 : Qualité d’ajustement du modèle de VRUGT (2010)

En outre, la structure par terme des probabilités de défaut obtenue à partir du modèle de VRUGT (2010) est inversée, ce qui signifie que les probabilités de défaut de court terme sont supérieures à celles de long terme. Cette situation ne reflète pas la réalité du contexte de la zone CIPRES, au regard de l’allure de la courbe des taux nominaux.

Ainsi, pour contourner ce problème, nous décidons d’étendre le nombre de paramètres de notre modèle en appliquant le modèle de Nelson Siegel décrit dans la sous-section précédente sur les obligations d’État en circulation sur la bourse régionale des valeurs mobilières au 24/10/2016. Le tableau ci-dessous illustre les résultats du calibrage de $\pi_t(m)$:

Paramètres	β_0^π	β_1^π	β_2^π	τ_1^π	RV
Valeurs	13	-13	-13	30	52

Tab.18 : Calibrage de la version modifiée du modèle de VRUGT dans le contexte des États

Pour évaluer la qualité d’ajustement du modèle de Nelson Siegel, nous calculons aussi deux indicateurs à savoir la Theil-U-Statistic et la MAPE. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	1,07 %	1,72 %

Tab. 19 : Qualité d’ajustement de la version modifiée du modèle de VRUGT dans le contexte des États.

IV.c. Représentation graphique

Nous pouvons remarquer sur le graphique ci-dessous que les probabilités de défauts implicites issues du modèle de VRUGT (2010) sont décroissantes en fonction de la maturité. En outre, celles issues du modèle de Nelson Siegel sont croissantes, qui à notre avis, est cohérent avec le contexte de la zone CIPRES :

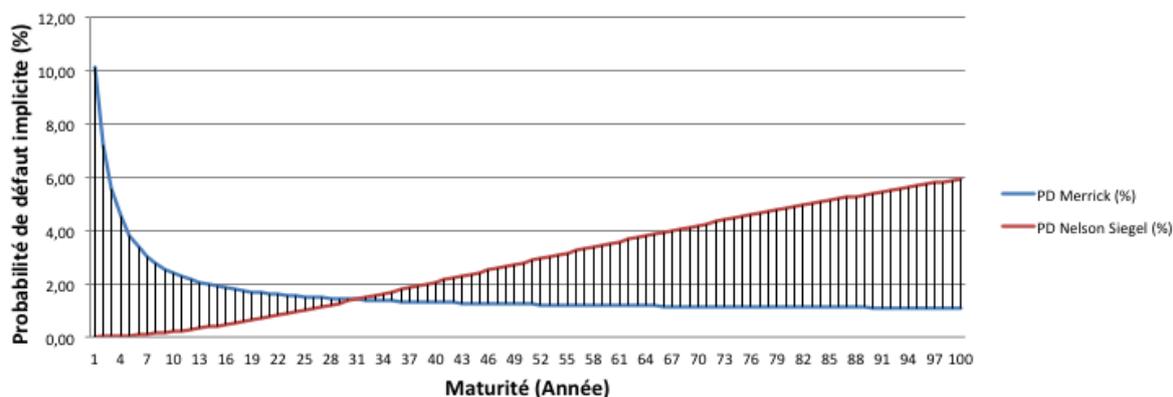


Fig. 11 : Analyse comparative des probabilités de défauts implicites au 24 /10/ 2016.

À partir de ces probabilités de défaut implicites et des taux de recouvrement provenant des deux modèles, nous pouvons déduire l'évolution des écarts de taux implicite par la relation suivante :

$$Spread = PD \times (1 - RV) \quad (4.7)$$

Le graphique ci-dessous illustre le comportement des écarts de taux implicite issus des deux modèles *supra* :

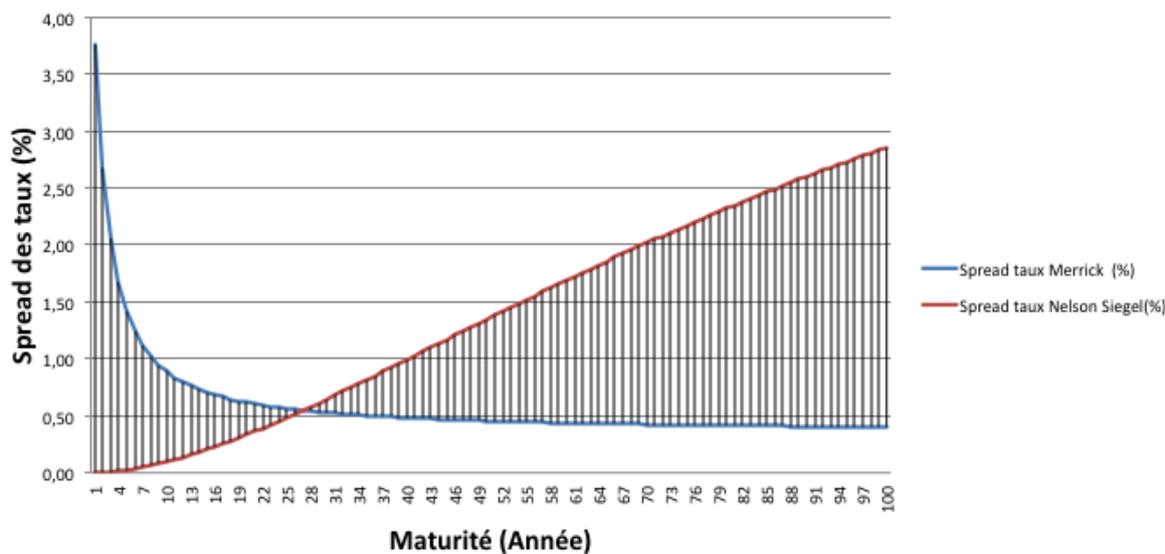


Fig. 12 : Analyse comparative des écarts de taux implicites au 24 /10/ 2016.

IV.d. Notation en monnaie locale

La notation en monnaie locale des États de la zone CIPRES est un sujet d'actualité. Par définition, elle permet simplement d'apprécier le risque du souverain dans sa devise locale (FCFA). En pratique, cette notation vise à mobiliser des ressources financières à moindre coût sur le marché local. Dans la zone CIPRES, seule la Côte d'Ivoire vient d'être notée en monnaie locale par l'agence de notation financière BLOOMFIELD Investment Corporation⁵⁴.

La notation en monnaie locale proposée par cette agence de notation pour l'émetteur de référence⁵⁵ est de : A2 sur le court terme et A- sur le long terme. En réalité, cette notation reflète le point de vue de l'agence de notation vis-à-vis de la qualité de crédit de la Côte d'Ivoire dans son espace économique (UEMOA). Elle devrait, en principe, influencer les décisions d'investissement des agents privés et réduire, de ce fait, le coût d'emprunt de la Côte d'Ivoire sur le marché financier régional. En outre, elle ne traduit pas la perception du risque des investisseurs vis-à-vis de la qualité de crédit de l'émetteur de référence.

⁵⁴ BLOOMFIELD Investment Corporation est une agence de notation locale.

⁵⁵ Il s'agit de la Côte d'Ivoire

Les modèles développés dans la sous-section précédente permettent de répondre à cette problématique⁵⁶. En effet, elles permettent de déterminer des probabilités de défauts implicites, ainsi que des écarts de taux implicites qui traduisent la vision du risque des investisseurs à la date d'évaluation. Par la suite, elles nous permettront de déterminer la notation *implicite* de l'émetteur de référence à la date d'évaluation, par référence aux grilles de notation des agences de notation internationale en occurrence Standard & Poor's, Fitch et Moody's. Ces grilles de notation sont tirées de MOULEY [2013] :

Echelle de notation et probabilité de défaut associée				
Standard & Poor's / Fitch Rating	Moody's	Probabilité de défaut à horizon		
		1 an	5 ans	10 ans
Catégorie Investissement		0,00%	0,67%	1,26%
AAA	Aaa	0,00%	0,00%	0,00%
AA+	Aa1	0,00%	0,00%	0,00%
AA	Aa2	0,00%	0,00%	0,00%
AA-	Aa3	0,00%	0,00%	0,00%
A+	A1	0,00%	0,00%	0,00%
A	A2	0,00%	0,00%	0,00%
A-	A3	0,00%	0,00%	0,00%
BBB+	Baa1	0,00%	0,00%	0,00%
BBB	Baa2	0,00%	1,47%	1,47%
BBB-	Baa3	0,00%	6,70%	12,46%
Catégorie Spéculative		2,06%	8,23%	11,24%
BB+	Ba1	1,07%	3,09%	10,77%
BB	Ba2	0,75%	5,28%	9,28%
BB-	Ba3	0,99%	6,15%	12,44%
B+	B1	0,00%	5,22%	13,16%
B	B2	1,60%	10,79%	19,27%
B-	B3	2,54%	13,15%	16,55%
CCC	Caa	31,11%	40,00%	46,67%
CC	C	100,00%	100,00%	100,00%
Défaut sélectif				
Défaut total				
All		0,70%	3,10%	4,25%

Sources : Sovereign Default and Recovery Rates, 1983-2012H1, Moody's Investors Service Sovereign Defaults And Rating Transition Data, 2011 Update, Standard and Poor's Sovereign 2011 Transition and Default Study, Fitch Ratings

Figure 13 : Grilles de notation des agences internationales

Le tableau ci-dessous résume les notations en monnaie locale obtenues à partir des modèles de VRUGT (2010) et Nelson Siegel (1987) :

Horizon de défaut	1 an	5 ans	10 ans
VRUGT	B-	BB	BBB-
Nelson Siegel	AAA	A-	BBB+

Tab. 20 : Notation en monnaie locale de l'émetteur de référence en fonction de l'horizon de défaut.

À partir de ce tableau, nous pouvons conclure, qu'en l'état, la perception du risque souverain des investisseurs est supérieure à la perception du risque de BLOOMFIELD. Nous espérons que la publication de cette notation permettra à l'émetteur de référence d'emprunter au taux sans risque et par ricochet de réduire le coût de son emprunt.

⁵⁶ Cette problématique consiste à quantifier la perception du risque des investisseurs vis-à-vis de la Côte d'Ivoire dans l'espace UEMOA.

IV.e. Extension

Le modèle *supra*, inspiré du modèle de VRUGT (2010) permet de déterminer le taux de recouvrement et les probabilités de défaut *en probabilité risque neutre*. Dans l'article original, Il est appliqué sur les obligations des États. En outre, rien ne nous empêche d'appliquer ce modèle sur les obligations des entreprises afin de déterminer les probabilités de défaut implicites des entreprises (risque neutre) ainsi que le taux de recouvrement.

Avec l'avènement du dispositif Bâle II dans la zone CIPRES dans le courant de 2018, ces informations sont cruciales pour répondre aux enjeux techniques qui peuvent principalement se résumer à l'estimation des paramètres de risque Bâlois⁵⁷. À partir de ce modèle, le régulateur pourrait utiliser les données de marché pour fixer les PD et le LGD⁵⁸ en approche standard ou le LGD en approche IRB-fondation.

En utilisant les données des obligations des entreprises au 24/10/ 2016, le calibrage de $\pi_i(m)$ donne les valeurs suivantes dans le modèle de Nelson Siegel⁵⁹:

Paramètres	β_0^π	β_1^π	β_2^π	τ_1^π	RV
Valeurs	20	-20	-20	30	55

Tab. 21 : Calibrage de la version modifiée du modèle de VRUGT dans le contexte des entreprises

La qualité d'ajustement de ce modèle est :

Statistiques	THEIL U-STATISTIC	MAPE
NELSON SIEGEL	1,7 %	2,9 %

Tab. 22 : Qualité d'ajustement du modèle de VRUGT dans le contexte des entreprises

Ainsi, nous pouvons déduire la structure par terme des probabilités de défauts (PD) implicites « risque neutre » des entreprises. Le graphique ci-dessous compare l'évolution des PD implicites des États et des entreprises :

⁵⁷Les paramètres de risque sont les probabilités de défaut (PD), la perte en cas de défaut (LGD) et l'exposition au défaut (EAD).

⁵⁸LGD = 1-RV ; RV = taux de recouvrement.

⁵⁹Si nous avons retenu le modèle de Nelson Siegel (1987), en revanche, il est possible de modéliser $\pi_i(m)$ par le modèle proposé par VRUGT (2010). Ce choix découle de la conclusion tirée de la section précédente.

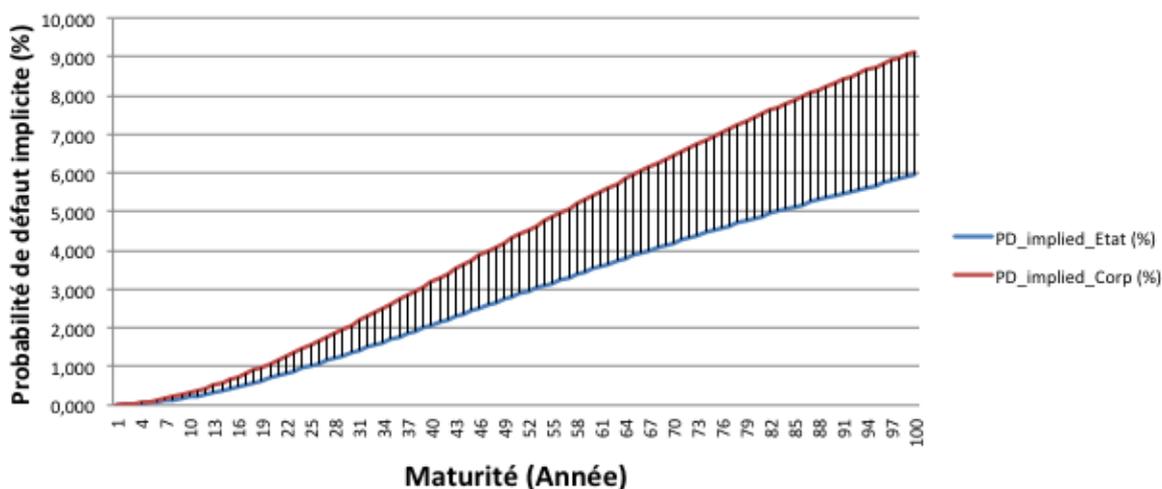


Fig.14 : Analyse comparative des probabilités de défauts implicites des États et des entreprises au 24/10/2016

À partir de la relation (4.7), il est possible de comparer les écarts de taux implicites des États et des entreprises au 24/10/2016. Le graphique ci-dessous illustre cette comparaison :

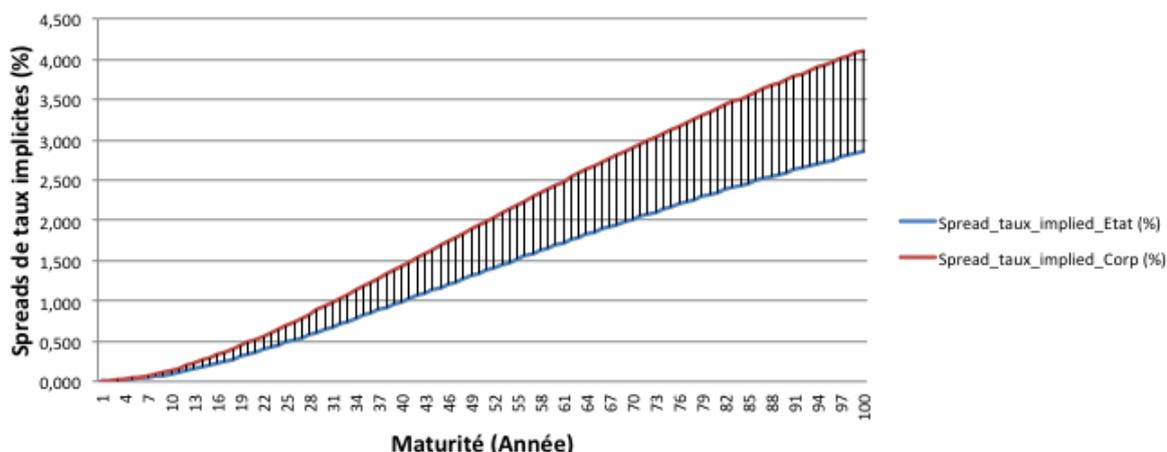


Fig. 15 : Analyse comparative des écarts de taux implicites des États et des entreprises au 24/10/2016

V. CONCLUSION

Un générateur de scénarios économiques est indispensable pour appréhender la dynamique des facteurs économiques et financiers. Dans cet article, nous avons présenté une boîte à outils capable de soutenir le développement de la finance, de l'actuariat et d'assurer la transparence des marchés financiers de la zone CIPRES. En pratique, elle permet de projeter des scénarios économiques qui pourront être utilisés par les professionnels de l'État, de la finance, de l'assurance, des banques et des marchés financiers. En outre, cette boîte à outils devra être actualisée régulièrement, notamment en ce qui concerne les taux d'intérêt nominaux et réels, les écarts de taux, les probabilités de défauts et écarts de taux implicites étant donné qu'ils ont été estimés sur des données correspondantes à une seule date de cotation (24 /10/ 2016). Toutefois, pour les

recherches futures, des versions dynamiques de ces modèles⁶⁰ peuvent être imaginées si et seulement si des données historiques sont constituées par le régulateur ou l'autorité publique.

Conditionnellement à l'information disponible, nous remarquons que l'inflation se situerait autour de 3 % dans les douze prochaines années. Dans ce contexte, l'objectif cible d'inflation sera respecté au cours de la durée de vie des obligations en circulation au 24 /10/ 2016.

L'analyse des taux d'intérêt nominaux et réels au 24/10/2016 révèle qu'ils convergent respectivement vers 6,2 % et 4,2 %. Nous pouvons conclure que le taux de croissance réel long terme de l'économie dans la zone CIPRES se situe autour de 4,2 %. En l'absence de courbe des taux dans la zone CIPRES, cette valeur (4,2 %) peut être utilisée comme un taux d'actualisation, notamment pour actualiser les engagements des compagnies d'assurance vie et des régimes de retraite, en remplacement du taux en vigueur fixé à 3,5 % par le régulateur (cf. GBONGUE [2016d]).

Notons que les écarts de taux au 24 /10/ 2016 sont actuellement positifs, contrairement à ce qui avait été observé dans GBONGUE [2016a]. Cette situation reflète l'amélioration de la perception du risque des investisseurs vis-à-vis des obligations des États⁶¹. L'estimation des rendements des obligations des entreprises révèlent qu'ils convergent vers 7 %, peu importe la méthode utilisée (directe ou indirecte).

À partir de la méthode experte, nous concluons que le rendement de l'immobilier se situerait autour de 20 % dans les dix prochaines années. Quant au monétaire, son rendement correspond simplement au taux d'intérêt nominal à un an.

L'évaluation de la perception du risque de crédit de l'émetteur de référence en monnaie locale aboutit aux notations de : AAA, A- et BBB+ respectivement sur les maturités de 1,5 et 10 ans.

VI. RÉFÉRENCES

1. Acharya V. V., et al.(2013): Liquidity Risk of Corporate Bond Returns - Conditional Approach. *Journal of Financial Economics* 110(2): 358–386.
2. Ahlgrim K.C., D'Arcy S.P., Gorvett R.W. (2005): *Modeling Financial Scenarios - A Framework for the Actuarial Profession. Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 177-238. <http://www.casact.org/pubs/proceed/proceed05/05187.pdf>
3. Ahlgrim K.C., D'Arcy S.P., Gorvett R.W. (2008): *A Comparison of Actuarial Financial Scenario Generators. Variance*, 2:1, 2008, pp. 111-134.
4. Amaral L. A. N., et al.(2000): The Distribution of Returns of Stock Prices. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 3(3): 365–369.

⁶⁰Cf. Diebold et Li (2006).

⁶¹En effet, dans le passé, certains investisseurs préféreraient des titres de certaines entreprises par rapport au titres de certains États.

5. Black F. (1995): *Interest Rates as Options*. *Journal of Finance* 50(5): 1371–1376.
6. Black F., Karasinski P. (1991): *Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal*. *Financial Analysts Journal* 47 (July): 52–59.
7. Black F., Scholes M. (1973): *The pricing of options and corporate liabilities*. *Journal of Political Economy*, 1973, pp. 637-654.
8. Bollerslev T., Chou R. Y, Kroner K. F. (1992): *ARCH modelling in finance - A review of the theory and empirical evidence*. *Journal of Econometrics*, 52, 5-39.
9. Bollerslev T., et al.(2013): *Jump Tails, Extreme Dependencies, and the Distribution of Stock Returns*. *Journal of Econometrics* 172: 307–324.
10. Brennan J. M., Xia Y. (2000): *Dynamic Asset Allocation under Inflation*. University of California.
11. Brennan M. J., Schwartz E. S. (1979): *A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds*. *Journal of Banking and Finance* 3: 133–155.
12. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. (1985): *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*. *Econometrica* 53: 385–407.
13. Delbaen F., Shirakawa H. (2002): *An Interest Rate Model with Upper and Lower Bounds*. *Asia-Pacific Financial Markets* 9(3-4): 191–209.
14. Diebold F. X., Li C. (2006): *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields*. *Journal of Econometrics* 130: 337–364.
15. Engle R.F. (1982): *Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation*. *Econometrica*, 50, 987-1007.
16. Fair R. C., Malkiel B. G. (1971): *The Determination of Yield Differentials between Debt Instruments of the Same Maturity*. *Journal of Money, Credit and Banking* 3(4): 733–749.
17. Faleh A. (2011) : *Allocation stratégique d’actifs et ALM pour les régimes de retraite*. Thèse de doctorat, ISFA.
18. Fisher I. (1930): *The Theory of Interest*. New York: Macmillan.
19. Gbongué F. (2015e) : *Un modèle de projection des taux sans risque dans la zone CIPRES*. *Financial Afrik*.
20. Gbongué F. (2016a) : *Quel modèle de taux pour le marché bancaire de l’UEMOA ?* *Financial Afrik*.
21. Gbongué F. (2016d) : *Apport de la courbe des taux sans risque au développement de l’assurance dans la zone CIMA*. *L’assureur Africain*, n°102.
22. Gbongué F., Planchet F. (2015f): *Analyse comparative des modèles de construction d’une courbe de taux sans risque dans la zone CIPRES*. *Bulletin Français d’Actuariat*, Vol 15 n°30, pp 129-168.
23. Gbongué F., Planchet F., Oulidi A. (2015d) : *État des lieux des systèmes de retraite en Afrique subsaharienne francophone*. *Revue subsaharienne d’économie et de finance*, n° 5, pp 37-60.

24. Genest, C., Ghoudi, K., and Rivest, L.-P. (1995). A semi parametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions. *Biometrika* 82, 543–552.
25. Gourieroux C., Monfort A. (2013): Linear-Price Term Structure Models. *Journal of Empirical Finance* 24: 24–41.
26. Grundke P., Polle S. (2012): Crisis and Risk Dependencies. *European Journal of Operational Research* 223(2): 518–528.
27. Hamori S. (2000): Volatility of real GDP: some evidence from the United States, the United Kingdom and Japan. *Japan and the World Economy*, 12, 143-152.
28. Hardy M. (2001): A regime switching model of long-term stock returns. *North American Actuarial Journal* 5 (2).
29. Hartmann P., et al.(2004): Asset Market Linkages in Crisis Periods. *Review of Economics and Statistics* 86(1): 313–326.
30. Heath D., Jarrow R., Morton A. (1992): *Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates - A New Methodology for Contingent Claims Valuation*. *Econometrica* 60: 77–105.
31. Heston S.L. (1993): A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*.
32. Hibbert J., Mowbray P., Turnbull C. (2001): *A Stochastic Asset Model & Calibration for Long-Term Financial Planning Purposes*, Rapport Barrie & Hibbert Limited. http://www.actuaries.org.uk/_data/assets/pdf_file/0014/26312/hibbert.pdf
33. Hicks J.R. (1946): *Value and capital*, Second Edition, Oxford: Clarendon Press. Edition française publiée en 1956, "Valeur et Capital", Dunod.
34. Hilal S., et al.(2011): Hedging the Black Swan - Conditional Heteroskedasticity and Tail Dependence in S&P500 and VIX. *Journal of Banking and Finance* 35(9): 2374–2387.
35. Ho T. S. Y., Lee S.B. (1986): Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *Journal of Finance* 41(5): 1011–1029. <http://www.ressourcesactuarielles.net/jwa/documentation/1226.nsf>.
36. Huber P. (1995): A review of Wilkie’s stochastic asset model. *British Actuarial Journal*, 1,181-211.
37. Hull J.C., White A. (1994): Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models. *Journal of Derivatives* (winter), 37-48.
38. Jarque C.M., Bera A.K. (1980): Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters* 6 (3): 255–259.
39. Jarrow R. A., et al.(1997): A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *Review of Financial Studies* 10(2): 481–523.
40. Jarrow R. A., Lando D., Turnbull S. M. (1997): A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads. *Review of Financial Studies* 10(2): 481–523.

41. Jarrow R. A., Turnbull S. M. (1995): Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *Journal of Finance* 50(1): 53–85.
42. Jiang W., (2012): Modeling and predicting of different stock markets with GARCH model. Master Thesis in Statistics, Uppsala University, Sweden.
43. Kaut M., Wallace S.W., (2003): Evaluation of scenario-generation methods for stochastic programming. SPEPS, Working Paper, 14 (<http://edoc.hu-berlin.de/series/speps/2003-14/PDF/14.pdf>), 2003.
44. Kojadinovic, I. and Yan, J. (2010). Comparison of three semi parametric methods for estimating dependence parameters in copula models. *Insurance: Mathematics and Economics* 47, 52–63.
45. KOVACHEV Y., SIMEONOV D. (2014) : YIELD CURVE FITTING WITH DATA FROM SOVEREIGN BONDS. ISBN 978–954–8579–53–7, BULGARIAN NATIONAL BANK.
46. MARTELLINI L., PRIAULET P., PRIAULET S. (2003): FIXED-INCOME SECURITIES: VALUATION, RISK MANAGEMENT AND PORTFOLIO STRATEGIES. WILEY.
47. Merton R. C. (1973): *Rational Theory of Option Pricing*. *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141–183.
48. Mouley S. (2013): Evolution des notations souveraines et leurs impacts sur l'économie tunisienne. Ecole nationale d'administration, Chaire des Etudes.
49. Mulvey J.M., (1989): A surplus optimization perspective. *Investment Management Review* 3.
50. Mulvey J.M., (1996): Generating scenarios for the Towers Perrin investment system. *Interfaces* 26.
51. Mulvey J.M., Thorlacius A., (1998): The Towers Perrin global capital market scenario generation system: CAP:Link. In: Ziemba, W.T., Mulvey, J.M. (Eds.), *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge University Press.
52. NAVAS J. F. (2005): YIELD CURVE FITTING WITH TERM STRUCTURE MODELS: EMPIRICAL EVIDENCE FROM THE EURO MARKET.
53. Parnes D. (2007): Time Series Patterns in Credit Ratings. *Finance Research Letters* 4(4): 217–226.
54. Pilbeam K., Langeland K. (2015): Forecasting Exchange Rate Volatility - GARCH Models Versus Implied Volatility Forecasts. *International Economics and Economic Policy* 12: 127–142.
55. Planchet F. (2013) : Quel taux de capitalisation des préjudices futurs des victimes. Version 1.2, ISFA.
56. Planchet F., Thérond P.E., Kamega A. (2009): *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*. *Economica*.
57. Redington F. M. (1952): Review of the Principles of Life-Office Valuations. *Journal of the Institute of Actuaries (1886–1994)* 78(3): 286–340.
58. Rogers L. C. G. (1997): The Potential Approach to the Term Structure of Interest Rates and Foreign Exchange Rates. *Mathematical Finance* 7: 157–176.

59. Sen R., (2004): MODELING THE STOCK PRICE PROCESS AS A CONTINUOUS TIME JUMP PROCESS. PhD Thesis in Statistics, CHICAGO, ILLINOIS.
60. Till M C., (2011): Actuarial Inference and of Hidden Markov Models. PhD Thesis in Actuarial Science, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
61. Tilley J. A,(1990): A Stochastic Yield Curve for Asset/Liability Simulation. Actuarial Approach for Financial Risks: First AFIR International Colloquium, Paris, April 23–27, International Actuarial Association.
62. Wang Y.-C., et al.(2013):A Revisit to the Dependence Structure between the Stock and Foreign Exchange Markets: A Dependence-Switching Copula Approach. Journal of Banking and Finance 37(5): 1706–1719.
63. Wilkie A. D. (1992): Stochastic Investment Model for the 21st Century Actuaries. Transactions of the 24th International Congress of Actuaries 5: 119–137.
64. Wilkie D. (1984): Steps towards a comprehensive stochastic model. Occasional Actuarial Research Discussion Paper, The Institute of Actuaries, London, 36:1-231.
65. Wilkie D. (1986): A Stochastic Investment Model for Actuarial Use. Transactions of the Faculty of Actuaries, 39:341-403.
66. Wilkie D. (1995): More on a Stochastic Model for Actuarial Use. British Actuarial Journal, pp. 777-964.
67. Xiang J., Zhu X. (2013): A Regime-Switching Nelson-Siegel Term Structure Model and Interest Rate Forecasts. Journal of Financial Econometrics 11(5): 522–555.