

UFR
de mathématique
et d'informatique

**Mémoire présenté
pour l'obtention
du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg « DUAS »
et du Diplôme du Master mention Finance
spécialité «Actuarial et Gestion du Risque»**

le 4 octobre 2010

Par : **Alexandre HELUIN**

Titre : **Solvency II : Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'institut des Actuaires :

Entreprise :



Directeur de mémoire en entreprise :

Mme Brigitte KOERNER

Membres du jury de l'université de Strasbourg :

Invité :

Mr Lionel TEXIER

Mme Armelle GUILLOU
M. Jean-Luc NETZER
M. Hansjoerg ALBRECHER
M. Philippe ARTZNER
M. Frédéric BERTRAND
Mme Marie-Hélène BROIHANNE
M. Karl-Théodor EISELE
M. Jacques FRANCHI
M. Christophe GODLEWSKI
M. Bernard HEINKEL
M. Nicolas KLUTCHNIKOFF
M. Bertrand KOEBEL
M. Maxime MERLI
M. Patrick ROGER

Autorisation de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :



Signature du candidat :



Secrétariat : Mme Pierrette XIMENEZ

61 avenue de la Forêt Noire
67085 STRASBOURG
Tél : 03 68 85 20 54

Bibliothèque du PEUGE : Tél : 03 68 85 22 23

Résumé

Dans la suite logique de la mise en place de BÂLE II en 2007 pour le secteur bancaire, les interactions croissantes entre ce secteur et celui des assurances, ainsi que la nécessité d'une solvabilité contrôlée, fiable et optimisée, rendent l'application de la directive SOLVABILITÉ II un tournant important pour la profession. Etant donné que chaque assureur et réassureur se doit de rester solvable, aux vues de ses engagements et de son activité, le calcul de l'exigence en capital de solvabilité (SCR) est aussi bien un moyen de contrôle des acteurs du marché par les autorités de régulation, qu'une façon de mesurer réellement son exposition à tous les risques grâce à cette réforme de solvabilité.

Etape préliminaire indispensable à la détermination du SCR, le calcul du *Best Estimate* des engagements futurs de l'assureur doit respecter des principes généraux propres à SOLVABILITÉ II, mais il subsiste une grande part de liberté pour l'actuaire dans la modélisation. Le choix du modèle est soumis à différentes contraintes, que ce soit de temps, de coût ou de données, mais dans tous les cas il est important d'appliquer le principe de proportionnalité avec parcimonie et en connaissance de cause.

C'est pourquoi la comparaison méthodologique peut constituer une étude intéressante, surtout lorsque l'on parle du poste le plus conséquent du passif, contrôlé et représentant l'estimation la plus fiable des engagements à la date d'évaluation. De plus il est basé sur des projections de cash-flow utilisant des hypothèses et des techniques actuarielles et financières complexes pour un portefeuille de produits variés.

Mots clés : Solvabilité 2, Options et garanties intrinsèques (TVOG, GAO), Monte Carlo, Générateur de variables aléatoires (Tore mélangé, algorithme de MORO), Processus stochastiques (VASICEK, COX-INGERSOLL-ROSS, Brownien), BLACK et SCHOLES.

Abstract

As a logical consequence of the setup of BASEL II in 2007 for the banking sector, the growing interactions between this sector and insurance, but also the need of a solvency control, reliable and optimized, are making the application of the reform SOLVENCY II a turning point for the insurance sector. Because each insurer and reinsurer has to stay solvent, viewing of its liabilities and its business, the calculation of the solvency capital requirement (SCR) is both a way to controlling the market by regulatory authorities, that a way to measure the real risk exposure thanks to this new solvency reform.

A first necessary step to the SCR calculation, is the determination of the *Best Estimate* of futur insurer's obligations, which has to respect some general principles specific to SOLVENCY 2, but also a free modeling choice for actuaries. The choice of the model should consider some constraints of time, costs and data, but in all cases it is important to respect the principle of proportionality, sparingly and knowingly.

That is why a methodological comparison could be interessant, especially when it concerns the most important value of liabilities, controlled, and the most reliable estimation of futur obligation at an observation point. Moreover it is based on projected cash flows using complex actuarial and financial assumptions and technics for a portfolio of various products.

Keywords : Solvency 2, intrinsic options and guarantees (TVOG, GAO), Monte Carlo, generator of random variables (mixed Tore, MORO algorithm), Stochastic process (VASICEK, COX-INGERSOLL-ROSS, Brownian), BLACK and SCHOLES.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement, et parmi tant d'autres, Brigitte KOERNER responsable du département actuariat à la BÂLOISE VIE LUXEMBOURG, Lionel TEXIER, Audrey LISON et Amélie MOULART, qui m'ont accueilli, aidé et soutenu pendant mon stage et la rédaction de ce mémoire.

Je remercie également beaucoup KARL-THÉODOR EISELE, chercheur et professeur à l'IRMA, au CNRS et à l'Université de Strasbourg, qui a encadré mon mémoire en passant du temps à le lire, me conseiller et me corriger tout au long de la rédaction, et en cherchant à m'inculquer la rigueur indispensable à l'écriture d'un document scientifique.

Un dernier mot pour les lecteurs, que j'encourage à ne pas hésiter à me faire part de leurs avis, remarques ou corrections concernant ce document, avec l'indulgence nécessaire à un mémoire.

Table des matières

Table des matières	5	
1	Introduction	7
2	Définition du Best Estimate	8
2.1	Cadre réglementaire	8
2.2	Mise en perspective dans <i>Solvency 2</i>	10
2.3	Fonctionnement de PROPHET	16
I	Du déterministe au stochastique	18
3	Hypothèses de projection	19
3.1	Tables de mortalité	20
3.2	Loi de rachat	29
3.3	Structure par terme des taux sans risque	30
3.4	Vecteur du rendement <i>certainty-equivalent</i>	31
3.5	Courbe de l'inflation	34
3.6	Estimation des frais généraux	35
4	Assurances à garantie en cas de décès et en cas de vie	36
4.1	Les primes reçues	36
4.2	Les flux de prestation	37
4.3	La marge administrative	38
4.4	La participation aux bénéfices	38
4.5	La réassurance	40
4.6	Conclusion	43
5	Contrats en unités de compte	46
5.1	Définition	46
5.2	Projection des frais	47
5.3	Modélisation de la garantie décès	48
6	Options et Garanties intrinsèques aux contrats d'assurance	53
6.1	Définition des Options cachées	54
6.2	Insuffisance du modèle déterministe	56
6.3	Evaluation des options financières	58
6.4	Time Value of financial Option and Guarantee	62
6.5	Guaranteed Annuity Option	73
7	Conclusion du calcul du Best Estimate avec une méthode déterministe	79

II Modélisation stochastique	80
8 Générateur de variables aléatoires	83
8.1 Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1	83
8.2 Simuler une réalisation de variable aléatoire de loi Normale centrée réduite	94
8.3 Validation de la normalité de l'échantillon simulé	97
9 Simulation de processus stochastiques	101
9.1 Eléments fondamentaux	101
9.2 Processus des taux d'intérêt	105
9.3 Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique	114
10 Description de l'outil	120
10.1 Projection du portefeuille	120
11 Résultats et comparaison	123
11.1 Principe de Monte-Carlo	123
11.2 Sensibilités du <i>Best Estimate</i>	125
11.3 Résultats	129
12 Modélisation d'un taux de rachat dynamique	132
12.1 Modélisation	132
12.2 Calibrage	134
12.3 Résultats	135
13 Conclusion	137
Table des figures	139
Bibliographie	142
A Table d'expérience Assuralia :	145
B Code VBA de simulation des scénarios	146
C Démonstration pour le calcul du GAO	148

Chapitre 1

Introduction

Pour aborder le calcul du *Best Estimate* de manière opérationnelle, nous le définirons tout d'abord clairement, puis dans une première partie nous étudierons sa mise en place dans un modèle déterministe. Nous devrons également traiter la modélisation de la TVOG (*Time Value of financial Obligation and Guarantee*) et du GAO (*Guaranteed Annuity Option*) qu'il faut intégrer, entre autres, au *Best Estimate* en tant qu'options et garanties intrinsèques aux contrats d'assurance. Pour ce faire nous présenterons des méthodes basées sur l'utilisation de formule de type BLACK, SCHOLES et MERTON, permettant de donner un caractère stochastique analytique à un modèle basé sur des hypothèses déterministes. Or ce modèle ajusté possède des inconvénients liés aux approximations nécessaires et à l'utilisation de formules fermées. C'est pourquoi dans une seconde partie, nous présenterons tout le processus ainsi que les outils permettant d'aboutir à un *Best Estimate* purement stochastique, s'affranchissant de l'ajustement de la TVOG. Nous pourrons donc évaluer l'impact de chaque modèle et permettre de valider ou d'invalider l'approche déterministe ajustée pour des compagnies d'assurances de petite et moyenne taille.

Toute la difficulté sera de garder un regard critique et objectif dans une logique opérationnelle, c'est-à-dire en tenant compte des coûts de développement et des temps de calcul d'un modèle plus complexe, par rapport à sa valeur ajoutée en terme de précision. En effet le sujet de ce mémoire s'inscrit donc dans ce contexte de préparation active et nécessaire, et débouchera sur une comparaison méthodologique.

Chapitre 2

Définition du Best Estimate

Pour présenter formellement l'objectif du calcul du *Best Estimate*, nous devons d'abord inscrire cette exigence dans le contexte réglementaire qu'il faudra scrupuleusement respecter et justifier auprès des autorités de contrôle. *Solvency 2* est devenu une priorité dans le secteur de l'assurance, et il est primordial que l'introduction de la nouvelle directive se passe pour le mieux, afin que sa légitimité et son acceptation ne puisse être discutable par la suite.

Comme le sujet de la solvabilité de l'assureur est un élément de plus en plus sensible et stratégique, la mise en place d'une préparation structurée pour une transition efficace, se traduit dans les faits par une incitation justifiée à participer aux QIS¹, aux formations, aux échanges et aux débats. En plus de cette dynamique européenne, des institutions nationales exigent une préparation supplémentaire. C'est le cas par exemple du Commissariat aux Assurances luxembourgeois, qui ajouta au rapport actuariel de 2009, le calcul des provisions mathématiques sous une approche conforme à *Solvency 2*, que nous appellerons "*Best Estimate*" dans la suite de ce document.

2.1 Cadre réglementaire

Afin de définir le plus fidèlement les attentes et les contraintes imposées par le CEIOPS² pour la nouvelle directive *Solvency 2* prévue pour janvier 2013, intéressons nous aux documents existants à ce jour³. Sur la base des *Consultation Papers* qui ont permis un échange entre les institutions et les acteurs privés du secteur des assurances, le CEIOPS a finalement rédigé les textes "définitifs" de niveau 2, devant servir de base pour l'exercice du QIS 5. Cet ultime test servant de calibrage à la formule standard définitive, est la répétition finale

1. *Quantitative Impact Study*
2. Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors
3. avant le début du QIS 5

2.1. Cadre réglementaire

pour tous les acteurs (assureurs, réassureurs, groupe, entité...) qui devront bientôt répondre à cette attente réglementaire.

Voici des extraits fondamentaux du "*CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : Technical provisions, Article 86 : an Actuarial and statistical methodologies to calculate the best estimate.*" qui permettent de mettre en évidence les caractéristiques principales du *Best Estimate* des engagements contractuels futurs..

(53) In order to allow insurance and reinsurance undertakings to meet their commitments towards policyholders and beneficiaries, Member States should require those undertakings to establish adequate technical provisions. The principles and actuarial and statistical methodologies underlying the calculation of those technical provisions should be harmonised throughout the Community in order to achieve better comparability and transparency.

L'objectif premier est donc d'obtenir un montant comparable d'une compagnie à l'autre et qui servira de point de départ à l'évaluation des engagements et des risques sous-jacents pour déterminer le capital de solvabilité cible pour répondre à une exigence prudentielle.

(55) The value of technical provisions should therefore correspond to the amount an insurance or reinsurance undertaking would have to pay if it transferred its contractual rights and obligations immediately to another undertaking.

Le montant des provisions techniques s'exprime en valeur de transfert, ce qui dans certains cas se traduit par l'ajout au *Best Estimate* d'une marge de risque.

(58) It is necessary that the expected present value of insurance liabilities is calculated on the basis of current and credible information and realistic assumptions, taking account of financial guarantees and options in insurance or reinsurance contracts, to deliver an economic valuation of insurance or reinsurance obligations.

On utilise des hypothèses de projection réaliste, sans introduire de prudence supplémentaire explicite, mais en tenant compte de toutes les options financières cachées, sous-jacentes aux contrats d'assurance.

3.1. The Level 1 text states that the best estimate shall be equal to the probability weighted average of future cash-flows taking account of the time value of money (expected present value of future cash-flows), using the relevant risk-free interest rate term structure. This in effect acknowledges that the best estimate by definition takes into account uncertainty in the future cash-flows.

On mesure l'engagement de l'assureur en *Best Estimate* par la somme actualisée au taux sans risque de tous les flux futurs probables induits par son portefeuille de contrats. On se place dans une vision du portefeuille en *run-off*, de telle sorte que l'on considère tous les flux futurs jusqu'à l'extinction des contrats.

On en déduit donc qu'en plus de suggérer une approche en probabilité risque-neutre, nous sommes également très proches de la méthode financière de l'évaluation des actifs sur un marché efficient. Comme il n'existe pas de marchés liquides des passifs pour les évaluer, il faut recourir à l'utilisation d'une espérance mathématique qui tient compte de la probabilité d'occurrence de chaque flux futur et de l'incertitude de ceux-ci. De cette manière nous cherchons à mesurer les engagements de l'assureur à la date d'évaluation que l'on anticipe "en moyenne". **On calcule donc la somme actualisée des moyennes des engagements futurs pour l'assureur, ces engagements s'obtenant par différence entre les flux sortants et entrants projetés selon des hypothèses les plus réalistes possibles.**

Mathématiquement nous pouvons définir le *Best Estimate* par :

$$BE = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{s \leq t} \frac{1}{(1+r_s)} (CF_t^{out} - CF_t^{in}) \right]$$

Avec :

\mathbb{Q} la probabilité risque-neutre

CF_t les *cash-flows* entrants et sortants à la date de projection t

r_t le taux sans risque *forward* à la date t

Le calcul nécessite donc une démarche prospective et complète des engagements, dans un cadre cohérent avec l'approche globale retenue par *Solvency 2* dans la détermination du SCR⁴.

2.2 Mise en perspective dans *Solvency 2*

Introduisons certains termes caractéristiques de Solvency 2 faisant intervenir le montant du *Best Estimate*⁵. Élément essentiel, il devra être calculé séparément et précéder le calcul permettant de déterminer le SCR.

4. *Solvency Capital Requirement*

5. Pour une définition plus complète nous renvoyons vers : [ARTICLE 1] ARTZNER P., EISELE K-T., *Supervisory accounting : Comparison between Solvency II and coherent risk measures* (2010)

2.2. Mise en perspective dans *Solvency 2*

Partons de l'égalité comptable fondamentale donnée par (voir schéma à la fin de ce chapitre) :

$$Asset\ Value = Free\ Capital + Best\ Estimate + Risk\ Margin + SCR$$

Nous définissons ensuite l'actif net ou "Net Asset Value" (NAV) ou encore "Risk Bearing Capital" dans le *Swiss Solvency Test* comme :

$$NAV = Asset\ Value - Best\ Estimate$$

Rappelons synthétiquement que l'approche de Solvabilité 2 pour le calcul du SCR consiste à mesurer la variation de l'actif net (NAV) suite à la réalisation de certains risques à l'actif et au passif. Ces risques sont modélisés par des chocs dont l'intensité est calibrée de sorte qu'ils se produisent avec une probabilité inférieure ou égale à 0.5%, c'est-à-dire une fois tous les 200 ans. La mesure du risque utilisée est la *Value at Risk*.

On en déduit alors le capital nécessaire supplémentaire aux provisions (SCR) pour y faire face dans 99.5% des cas. Cela se traduit dans un modèle à une période⁶ (t=0 et t=1) par :

$$\mathbb{P} \left[\frac{\widetilde{NAV}_1}{(1+r)} - \widetilde{NAV}_0 \geq -\widetilde{M}_0(A_1, Z_1) \right] \geq 99.5\%$$

Avec :

A_t la valeur d'échange (de marché si celui-ci respecte certaines propriétés), du portefeuille d'actif à la date t

$Z_t \geq 0$ les provisions techniques à la date t (*Best Estimate* augmenté de la marge de risque)

$$\widetilde{NAV}_1 = A_1 - Z_1$$

r le taux sans risque pour la période considérée

$$\widetilde{M}_0(A_1, Z_1) \text{ le capital de solvabilité requis pour la période}$$

Pour conclure sur la solvabilité de l'assureur, on confronte alors ce capital supplémentaire nécessaire (le SCR) avec le montant des fonds propres disponibles pour le couvrir. Nous appellerons "Available Capital" ce montant qui se calcule comme :

$$\begin{aligned} Available\ Capital &= Asset\ Value - Best\ Estimate - Risk\ Margin \\ &= Asset\ Value - Technical\ Provision \\ &= Free\ Capital + SCR \end{aligned}$$

6. Voir à nouveau : [ARTICLE 1]

Il se définit donc comme la différence entre la valeur de marché actuelle des actifs et les provisions techniques, sachant que les provisions techniques sous Solvency 2 représentent le *Best Estimate* auquel on ajoute la marge de risque. On classera par la suite le "Available Capital" par tiers, correspondant à la qualité de couverture représentée par sa capacité d'absorption des pertes. Bien entendu, il faudra que le "Available Capital" soit supérieur au niveau du SCR.

2.2.1 Une approche *Market Consistent* homogène :

La première contrainte dans le calcul du *Best Estimate* puis du SCR à une période donnée, est l'harmonisation de ce calcul. Pour obtenir une mesure comparable des engagements et du risque de solvabilité en introduisant une méthode de calcul répondant aux mêmes exigences au niveau européen, il faut tout d'abord se baser sur une évaluation du bilan standardisée.

Il faut entre autre s'assurer que le montant de l'actif net représente bien la même chose pour toutes les compagnies, et cela passe par un calcul du *Best Estimate* et de la valeur des actifs le plus homogène et le plus cohérent possible. Or, on va rapidement s'apercevoir que si les règles et concepts généraux sont bien établis, il reste une importante marge d'interprétation laissée aux actuaires. Cette approche permet de tenir compte de toutes les caractéristiques propres aux types d'activité, mais peut aboutir à des montants difficilement comparables et qui doivent donc rester le plus transparent possible.

Une approche bilancière permet de tenir compte de l'impact de tous les risques et de la relation actif-passif qui existe dans un bilan d'une compagnie d'assurances. Dans le calcul du *Best Estimate* en assurance-vie, cette relation a un effet dans les flux de prestation grâce à la distribution de participation aux bénéfices. Le bilan doit être évalué en adéquation avec le marché, on parle donc d'un bilan *Market Consistent*.

Une définition formelle de la notion de *Market Consistent* est donnée dans [Article 1] qui reprend CHERIDITO et al. (2008) :

Definition. Pour toute fonction Ψ définissant la condition de solvabilité, la provision L_Ψ est *Market Consistent* si on peut vérifier :

$$L_\Psi(Z_1 + U) = L_\Psi(Z_1) + \pi(U)$$

Avec :

Z_1 les engagements

U un élément négocié sur un marché

π une fonction de prix

On considère donc que le marché, dans la majorité des cas, évalue à sa juste valeur les actifs financiers. On peut faire référence ici à la "juste valeur" selon les normes comptables IFRS. Il faut néanmoins s'assurer que le marché sur lequel est côté l'actif, est suffisamment liquide, profond et transparent. Si ce n'est pas le cas, par exemple pour du *Private Equity*, il faut se tourner vers une approche *Mark-to-Model* où l'on extrapole la valeur théorique de l'actif à travers un modèle financier.

2.2.2 Un passif évalué en valeur de transfert :

La problématique est tout autre en ce qui concerne l'évaluation des passifs de l'assureur. Etant donné qu'il n'existe pas de marché organisé permettant d'évaluer au plus juste la valeur à laquelle ces passifs peuvent être cédés et échangés, il faut mesurer différemment la **valeur de transfert** de ces engagements. En effet, le fait de raisonner en valeur de transfert, intègre explicitement le fait qu'en cas de défaut de l'assureur ou d'insuffisance de solvabilité, il devra céder son portefeuille à un autre assureur. C'est pourquoi, alors que la valeur de transfert d'un actif côté est égal à sa valeur de marché, celle des passifs d'assurances peut nécessiter l'ajout d'une marge de risque.

2.2.3 Engagements répliables et non répliables :

Pour obtenir la valeur de transfert des provisions techniques, on distingue deux catégories d'engagements, qu'il faudra ensuite segmenter selon l'activité :

2.2.3.1 Les engagements couvrables (*hedgeables*)

Lorsque les engagements de l'assureur sont parfaitement répliables par des instruments financiers côtés sur un marché profond et liquide, alors on peut naturellement considérer que la valeur de marché de ces instruments représente la meilleure valeur, également celle à laquelle les engagements pourraient être cédés.

2.2.3.2 Les engagements non-couvrables (*non-hedgeables*)

Dans le cas contraire, une approche basée sur les cash-flows futurs sera nécessaire pour mesurer le *Best Estimate*, auquel s'ajoutera une **marge de risque**. Cette marge supplémentaire est calculée selon la méthode du coût du capital et représente le coût de détention de la "*Supervisory Provision*" future. En cas de cession du portefeuille à un assureur tiers, celui-ci devra supporter les engagements transférés certes, mais aussi le SCR correspondant sous l'"*Optimal Replicating Portfolio*", ce qui a un coût pour les actionnaires supposé de 6%.

C'est donc bien une vision économique des passifs dans une logique de valeur de transfert.

La marge de risque RM se calcule par la méthode du coût du capital comme :

$$RM = 6\% \sum_{t \geq 0} \frac{SCR_t^{ORP}}{(1 + r_{ft+1})^{t+1}}$$

Il faut donc projeter le SCR futur sous l'*Optimal Replicating Portfolio* (voir plus loin) et l'actualiser au taux sans risque r_f sans prime d'illiquidité⁷.

- Nous parlons ici d'"*Optimal Replicating Portfolio*" dans le calcul de la marge de risque, car le SCR futur projeté ne correspond pas exactement au SCR calculé dans la formule standard de Solvency 2, dans la mesure où tous les modules de risque ne sont pas à prendre en compte. Il comprend uniquement :
 - le risque de souscription
 - le risque de défaut des réassureurs
 - le risque opérationnel
 - le risque de marché "inévitable"
- Ce dernier point signifie que l'assureur qui céderait son portefeuille n'a pas à anticiper le profil de risque de l'actif de la compagnie "repreneuse", c'est pourquoi on mesure le SCR dans le cas d'un portefeuille d'actif qui minimisera le risque de marché.
- La *Supervisory Provision* correspond à la somme des capitaux exigés par le régulateur, c'est-à-dire les provisions techniques constituées du *Best Estimate* augmenté de la marge de risque, et le SCR sous l'*Optimal Replicating Portfolio*.

2.2.3.3 Classification de l'activité

D'une part, il est évident que le risque viager ne puisse pas être parfaitement répliable par le marché et que, par conséquent les contrats d'assurance à garantie vie ou décès nécessitent le calcul d'une marge de risque complémentaire.

D'autre part, les contrats en unités de compte dont le risque d'investissement est supporté par l'assuré nécessitent une étude particulière. Même si la valeur du contrat évolue en fonction de la cotation sur le marché, elle est aussi impactée du prélèvement des frais de gestion f . Lorsqu'ils sont prélevés mensuellement, la variation de la valeur du contrat ne correspond pas exactement à la variation de la valeur du fonds en date t (vni_t) car on a, avec N_t le nombre d'unités de compte en t :

$$\begin{aligned} ValeurContrat_{t+1} &= N_t \cdot vni_{t+1} - f \cdot N_t \cdot vni_t \\ &= N_{t+1} \cdot vni_{t+1} \\ &\neq N_t \cdot vni_{t+1} \end{aligned}$$

7. introduite dans le QIS 5

2.2.4 Résumé

Finalement le bilan segmenté selon *Solvency 2* peut se représenter de la façon suivante :

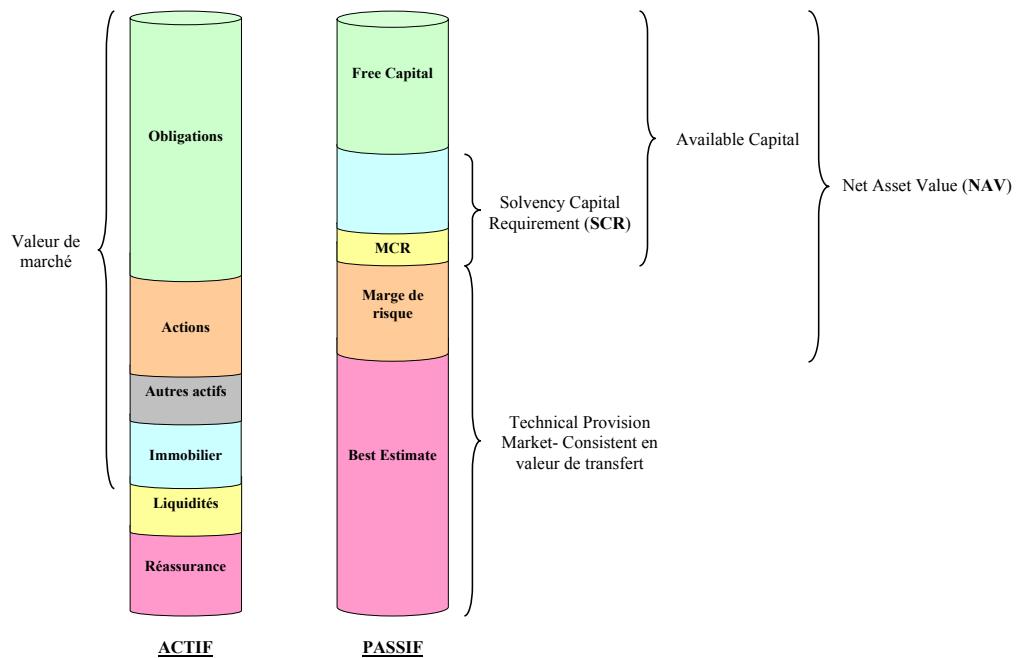


FIGURE 2.2.1: Bilan Market Consistent sous Solvency 2

La détermination du SCR, que nous ne traiterons pas dans ce document, tiendra compte de l'interaction entre l'actif et le passif d'où l'intérêt d'une approche bilancière.

Pour qu'une société soit considérée comme solvable, son *Available Capital* devra être supérieur au SCR et donc au MCR⁸. S'il est compris entre le SCR et le MCR, cela déclenchera une première alerte entraînant un plan de redressement progressif, alors que si le seuil critique du MCR est dépassé, le retrait de l'agrément est possible si la situation n'est pas résolvable à court terme. Afin d'améliorer sa situation, la compagnie cherchera à augmenter son *Available Capital*⁹ ou à réduire son SCR¹⁰.

8. Minimum Capital Requirement

9. Augmentation de capital, souscription de dette subordonnée...

10. Modification de la réassurance, actif avec un profil moins risqué ou effet de la réassurance...

Nous avons effectué le calcul du *Best Estimate* sur un outil bien connu par les actuaires. Nous allons donc présenter celui-ci en décrivant son fonctionnement et ses avantages.

2.3 Fonctionnement de PROPHET

La nécessité croissante pour les compagnies pratiquant l’assurance-vie, de projeter des flux financiers futurs, à moyen et très long terme, selon certaines hypothèses et sur la base d’une modélisation des flux du portefeuille, les amène à se doter de logiciels spécialisés capables d’effectuer rapidement un nombre très important de calculs. Des contextes tels que Solvency 2, avec entre autre le calcul du *Best Estimate* et le SCR¹¹, l’*Embedded Value* (EEV, MCEV¹²) ou encore le *Business Plan*, rendent les projections indispensables, mais surtout de plus en plus complexes.

En effet les produits à modéliser sont d’une part de nature très différente, et leurs *cash-flow* dépendent de paramètres multiples, parfois eux aussi des projections. Typiquement, la courbe des taux sans risque servant à l’actualisation et aux rendements des actifs dans un univers risque neutre, ainsi que les participations aux bénéfices qui en découlent, la courbe d’inflation et les taux de chute (mortalité, rachat), sont autant de paramètres qui vont influer sur les flux entrants et/ou sortants. Si on ajoute à cela la nécessité de modéliser les Options et Garanties financières implicites aux contrats d’assurances, et de recourir à la simulation de scénarios stochastiques pour appréhender le caractère aléatoire dans le temps de tous ces paramètres, l’intérêt de tels logiciels devient évident.

PROPHET est un logiciel de projection des *cash-flow* du bilan d’une compagnie par modélisation des produits et polices d’assurance qu’il fait évoluer dans le temps.

Développé par DELOITTE puis racheté en 2005 par SUNGARD, il trouve son utilité aussi bien dans le calcul de l’*Embedded Value*, que dans la gestion actif passif lorsqu’il est couplé avec le logiciel ALS¹³. Pour la même utilisation, on pourra citer son principal concurrent, MOSES créé par TOWERS PERRIN.

Concrètement on pourrait résumer le fonctionnement général de PROPHET en se rapportant à la célèbre formule de WALD que nous rappelons :

Soit $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ avec $(X_i)_{1 \leq i}$ une suite de variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi. Alors si N est indépendant de la suite, on a :

$$E(S_N) = E(N).E(X)$$

11. *Solvency Capital Requirement*

12. *European Embedded Value, Market Consistent Embedded Value*

13. *Asset Liability Strategy*

2.3. Fonctionnement de PROPHET

Bien entendu, les hypothèses du théorème n'étant pas réalisées, nous ne pouvons donc pas l'appliquer ici, et nous l'utilisons uniquement à titre d'image (car lorsque l'on projette $(X_i)_{1 \leq i}$ l'indépendance n'est pas envisageable et N est fixé). En effet ce théorème illustre bien que pour obtenir l'espérance des flux futurs, on les décompose en une intensité moyenne (le montant futur espéré en moyenne) et une fréquence moyenne représentée par le nombre de polices "In Force" que l'on fait évoluer selon des hypothèses réalistes de chutes. Il est indispensable de comprendre le mécanisme qui distingue d'une part le montant de la provision pour chaque police qui évolue selon les hypothèses du contrat, et le nombre de polices qui s'éteint (vision *run-off*) en fonction des hypothèses de mortalité réelle et de rachat.

Nous verrons tout au long de ce document, comment les différentes interactions sont modélisées dans PROPHET, dont voici sa structure de fonctionnement :

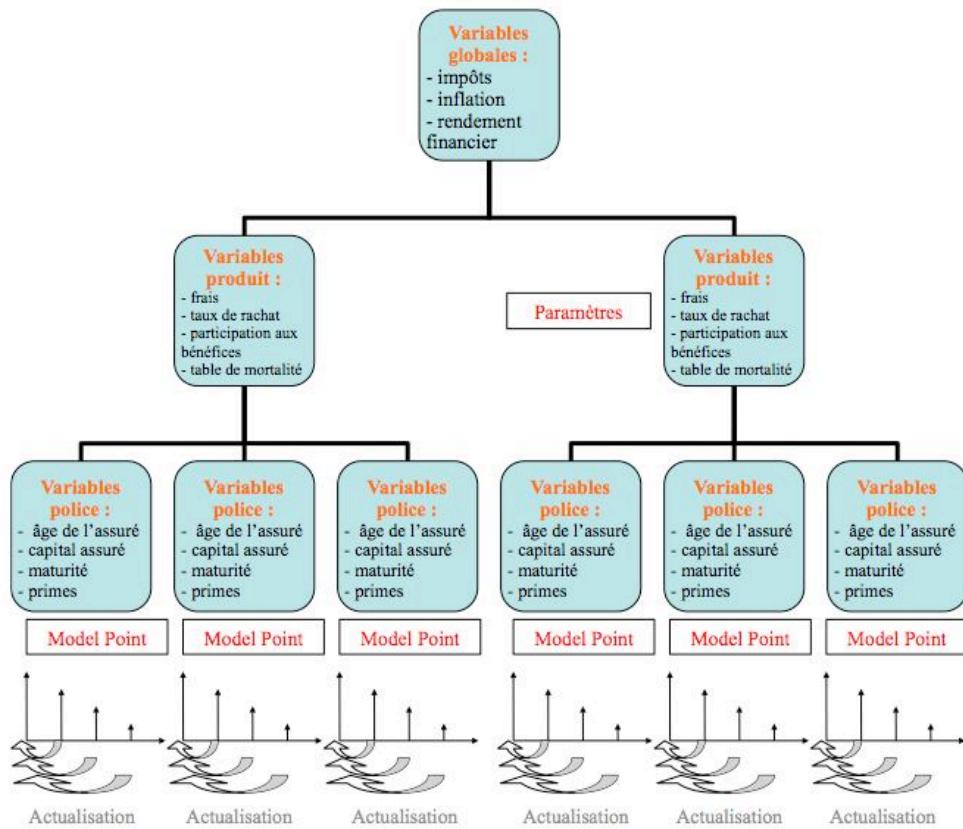


FIGURE 2.3.1: Structure du fonctionnement de Prophet

Première partie

Du déterministe au stochastique

Chapitre 3

Hypothèses de projection

La projection des cash-flows des différents contrats d'assurance-vie nécessite :

1. La modélisation des propriétés des contrats (tarification, fractionnement, revalorisation, durées, limites...)
2. La création des *model-points* qui représentent les contrats du portefeuille en reprenant toutes les données nécessaires à la projection (âge, sexe, primes, frais, échéances, options souscrites...)
3. Les hypothèses de projection **réalistes**, c'est-à-dire sans prudence supplémentaire, qui permettent de faire évoluer :
 - a) le nombre de contrats (mortalité, rachats),
 - b) le montant des actifs financiers en contrepartie des provisions mathématiques qui viendront déterminer la participation bénéficiaire,
 - c) la structure par terme des taux sans risque pour actualiser les différents flux à la date d'évaluation.
 - d) la courbe de l'inflation future pour faire évoluer le montant des frais généraux.

3.1 Tables de mortalité

3.1.1 Réglementation au Luxembourg

Lettre circulaire 03/5 du Commissariat aux Assurances relative aux bases techniques en assurance-vie

4. Tables de mortalité, de morbidité, d'invalidité ou d'incapacité pour le calcul des provisions Techniques

a) Tables de mortalité éligibles : Pour les produits nouvellement commercialisés, il y a obligation d'adopter pour le calcul des provisions techniques une table de mortalité européenne récente et sans abattements, basée sur la population générale et adaptée au type de risque (risque décès, risque survie) dont la couverture est prévue dans le contrat. [...] Par dérogation au principe de l'utilisation de tables générales sans abattements, des tables de mortalité d'expérience peuvent être utilisées ou des abattements sur des tables générales peuvent être pratiqués dans les cas suivants : - pour la couverture du risque décès pour une durée n'excédant pas un an ; - dans tous les cas, s'il est démontré que la table proposée est plus prudente qu'une table récente et adaptée au risque basée sur une population générale pour les tranches d'âge couvertes par le produit d'assurance ;

[...]

b) Principe du maintien de la table de mortalité Pour un contrat déterminé, c'est la table de mortalité qui fait partie des bases techniques communiquées au Commissariat qui doit être utilisée tout au long de sa durée de vie pour le calcul des provisions mathématiques correspondantes. Une table plus prudente peut être utilisée au cas où la table d'origine serait insuffisante à couvrir les engagements pris envers les assurés ; un tel changement de table est soumis à l'approbation préalable du Commissariat aux assurances. L'adoption d'une table moins prudente que celle d'origine ne sera jamais admise.

Contrairement à la France, les tables de mortalité utilisées ne sont pas imposées et l'accord de commercialisation est donné au cas par cas. En pratique cela se traduit par l'utilisation fréquente de tables belges, françaises, hollandaises... Il existe depuis 2008 une table de mortalité luxembourgeoise, mais construite sur un échantillon assez petit et peu représentatif de la population assurée en LPS¹, son utilisation doit donc rester marginale.

Dans tous les cas, le respect des règles prudentielles en matière d'évaluation des engagements de l'assureur, reste bien entendu la priorité au Luxembourg. Seulement, la plus grande liberté lors de la création d'un nouveau produit dans le choix des tables de mortalité, permet de considérer un nouveau paramètre non négligeable.

1. Libre Prestation de Services

3.1.2 Des hypothèses de mortalité réalistes

Une des caractéristiques importantes de l'évaluation du *Best Estimate* sous *Solvency 2*, est la reconnaissance explicite de la prudence comprise dans les tables de mortalité réglementaires utilisées pour le calcul des provisions mathématiques. C'est pourquoi dans la projection des flux futurs, l'impact de la mortalité sur le nombre de chutes total doit être la plus réaliste possible. Cela implique donc d'ores et déjà, le recours à des tables d'expérience qui reflètent au mieux la population assurée et ses particularités.

Précision importante, on parle de "prudence" des tables de mortalité en se plaçant dans le cas d'un contrat d'assurance décès, c'est-à-dire qu'une table prudente surestime la probabilité de décès de l'assuré pour un âge donné. Un contrat temporaire décès ou vie entière par exemple, sera donc plus coûteux pour l'assuré en utilisant une table de mortalité dite "prudente". Mais la tarification ne joue pas un rôle prépondérant dans *Solvency 2*, le calcul du *Best Estimate* en est même totalement indépendant étant donné que l'on projette un portefeuille existant en *run-off* dont la tarification ne change pas. On va simplement utiliser des hypothèses de projection qui ne modifieront pas les propriétés des polices en portefeuille.

Cet écart entre la mortalité des tables de mortalité dites "réglementaire" et la mortalité observée sur le portefeuille assuré peut s'expliquer de différentes façons :

- Les tables se basent sur une situation de la population à une date donnée et fixée dans le temps. De ce fait, l'augmentation constante de l'espérance de vie de près d'un trimestre par an grâce entre autres aux progrès de la médecine, rendent d'anciennes tables rapidement obsolètes.
- Les tables sont construites à partir de la population globale dont les caractéristiques divergent naturellement de la population assurée. Hormis les tables pour les rentes viagères, les tables de mortalité sont statiques ou unidimensionnelles, par opposition aux tables prospectives dites "générationnelles" qui prennent en compte l'année de naissance de la personne, et permettent donc d'anticiper la dérive de la mortalité.
- Ne pas distinguer de tables propres pour les hommes et les femmes est une approximation grossière qui tend heureusement à disparaître.

D'éventuels décalages d'âge par rajeunissement ou vieillissement de l'assuré permettent de pallier temporairement à ces inconvénients, mais ne consistent qu'en une translation des taux de mortalité et non en une pentification de la courbe des taux de mortalité (voir plus loin).

Quoiqu'il en soit, même si, par l'approche réaliste imposée par le CEIOPS, le *Best Estimate* était inférieur aux provisions réglementaires d'ancien type, l'évaluation du passif en valeur de transfert impliquera l'ajout de la marge de risque qui viendra compenser, en partie seulement, cette suppression de prudence explicite.

3.1. Tables de mortalité

La création d'une véritable table d'expérience basée sur les propriétés du portefeuille nécessite un nombre très important de données exploitables et est donc réservée à des grandes compagnies pour avoir du sens d'un point de vue statistique. L'étude réalisée par un actuaire indépendant agréé par la Commission de l'Institut des Actuaires doit se baser sur des données fiables pour mesurer le risque inhérent au portefeuille de l'assuré, en tenant compte de phénomènes tels que l'antisélection. Cette alternative pour le calcul des provisions peut donc être profitable pour une entreprise cherchant à fiabiliser son risque de mortalité et donc optimiser ses provisions.

De nombreuses compagnies vont donc se retrouver dans une situation paradoxale, où la norme prudentielle en matière de solvabilité permet à l'assureur d'avoir plus de liberté dans une démarche market consistente et réaliste propre à la réforme *Solvency 2*, mais ne pourront pas pleinement en profiter. Ce problème, transposé à une échelle plus large, se retrouve dans l'utilisation d'un modèle interne, permettant un calcul de l'exigence en capitaux pour solvabilité le plus fidèle au profil de risque de l'entreprise, maximisant au passage l'effet de diversification par agrégation des modules de risque.

Dans ce contexte particulier, il est utile d'envisager des situations intermédiaires répondant à la fois aux contraintes réglementaires fixées par la Commission Européenne, et des contraintes opérationnelles relatives aux besoins de l'entreprise selon le respect du principe de proportionnalité.

L'Union Professionnelle des Entreprises d'Assurances Belges a cherché à combler ce besoin. Fondée en 1920, *Assuralia* regroupe la quasi-totalité des compagnies d'assurances belges et étrangères qui opèrent sur le marché. C'est grâce à la collecte des données des portefeuilles de 39 assureurs représentant 98,6% de l'encaissement belge entre 2003 et 2007, qu'elle a construit une table qualifiée "d'expérience" car elle se base bien sur une population d'assurés. En plus de distinguer les hommes et les femmes, ces tables permettent également de s'adapter aux assurances individuelles ou de groupe, mais aussi aux branches vie, décès ou autre. Si l'on avait une table unique pour la globalité du portefeuille, nous courions le risque de n'être "*Best Estimate*" sur aucune des sous-populations significatives du portefeuille. Par exemple une table unisex sous-estimera systématiquement la mortalité des hommes et sur-estimera celle des femmes. Il faudra avoir recours à des ajustements d'âge peu pratiques et imprécis.

Nous possédons donc huit tables récentes estimant la mortalité d'une population d'assurés :

Grande branche, genre décès, homme (IDH)	Groupe, genre décès, homme (GDH)
Grande branche, genre décès, femme (IDF)	Groupe, genre décès, femme (GDF)
Grande branche, genre vie, homme (IVH)	Groupe, genre vie, homme (GVH)
Grande branche, genre vie, femme (IVF)	Groupe, genre vie, femme (GVF)

3.1. Tables de mortalité

Il est important de savoir exactement comment une telle table dite d'expérience a été construite car il faut s'assurer de la fiabilité des données et de l'adéquation avec la population assurée dont on cherche à modéliser la mortalité.

Le retraitement des statistiques de la population observée est indispensable pour, d'une part réduire l'effet des aléas statistiques et s'assurer que la probabilité de décès augmente de façon régulière avec l'âge, mais d'autre part pallier à un nombre d'observations suffisantes pour certaines classes d'âges. On a alors recours à des méthodes de lissage et d'ajustement sur des lois analytiques telles que :

- les modèles paramétriques (loi de GOMPERTZ, de MAKEHAM, WEIBULL, logistique...)
 - les modèles relationnels (COX, BRASS, HANNERZ) utilisés en présence de petits échantillons pour extrapoler un taux de mortalité continu entre tous âges.
 - les lissages paramétriques (ajustement par des fonctions splines, GOMPERTZ-MAKEHAM)
 - les lissages non paramétriques (WHITTAKER-HENDERSON, moyennes mobiles pondérées)
- permettent d'obtenir une série plus régulière mais toujours compatible avec les observations.

Un ajustement paramétrique a été utilisé ici, afin de substituer aux taux annuels bruts de mortalité observés, une fonction continue et croissante, passant à l'intérieur des intervalles de confiance donnés par les observations statistiques. On suppose donc que la courbe de mortalité appartient à une certaine famille de fonctions mathématiques dont on estime les paramètres avec la méthode des moindres carrés pondérés². En l'occurrence, la formule de MAKEHAM a été retenue, et on postule ainsi que la probabilité de décès d'un individu à l'âge x , q_x , est modélisée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q_x &= 1 - s \cdot g^{c^x(c-1)} \\ 0 &< s \leq 1 \\ 0 &< g < 1 \\ c &> 1 \end{aligned}$$

Pour la table *Assuralia*, on peut même parler de double ajustement, car la formule de MAKEHAM a été utilisée en distinguant les âges de 25 à 60 ans et de 60 à 85 ans, d'où une irrégularité de la courbe.

⇒ *Voir l'annexe : Ajustement pour la population de groupe et les paramètres associés.*

L'hypothèse sous-jacente à l'utilisation de cette table pour le calcul du *Best Estimate*, ainsi que pour la projection de la MCEV par exemple, est l'adéquation

2. Voir *Théorie et pratique de l'assurance vie* de PIERRE PETAUTON (Dunod)

3.1. Tables de mortalité

entre la population du portefeuille et la population assurée belge. Juger cette hypothèse réaliste doit donc, comme pour chaque paramètre, constituer la première étape de la modélisation.

Certes avoir une activité d'assurance principalement par libre prestation de service n'est pas aussi homogène qu'une population d'un seul et même Etat, pourtant dans le cas du Luxembourg, cette considération est loin d'être moins réaliste que d'utiliser une table réglementaire obsolète et bornée à une population globale. Lorsque la taille du portefeuille ne permet pas la création d'une véritable table d'expérience fiable, cette alternative semble à l'heure actuelle la plus réaliste et le meilleur compromis.

Il est également facilement possible d'adapter, d'année en année, la table de mortalité par l'utilisation d'un facteur d'ajustement obtenu par *back testing* de la mortalité de la table avec celle observée. On obtient alors une courbe de mortalité de même concavité que celle initiale, mais simplement translatée pour l'ajuster au mieux au portefeuille.

Tester et ajuster de façon régulière la table de mortalité est indispensable, car sous-estimer la mortalité entraîne à terme d'importantes pertes techniques de mortalité qu'il faudra financer. La sur-estimer aurait également un impact négatif sur les produits de rente ou de garantie en cas de vie dont la provision serait également sous-évaluée.

Comparons différentes tables de mortalité européennes (française, belge et hollandaise) avec la table *Assuralia* :

3.1. Tables de mortalité

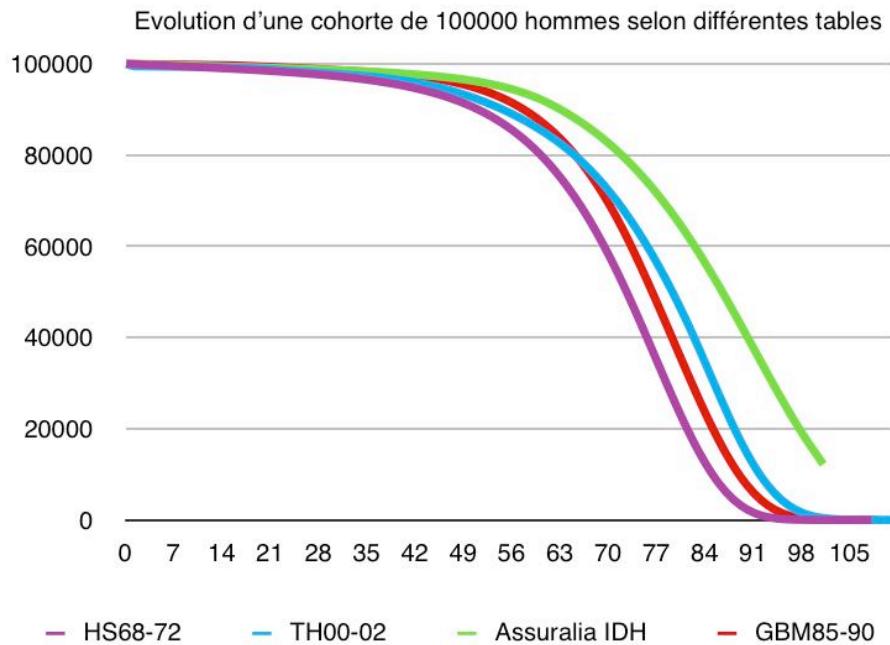


FIGURE 3.1.1: Comparaison des tables pour les hommes

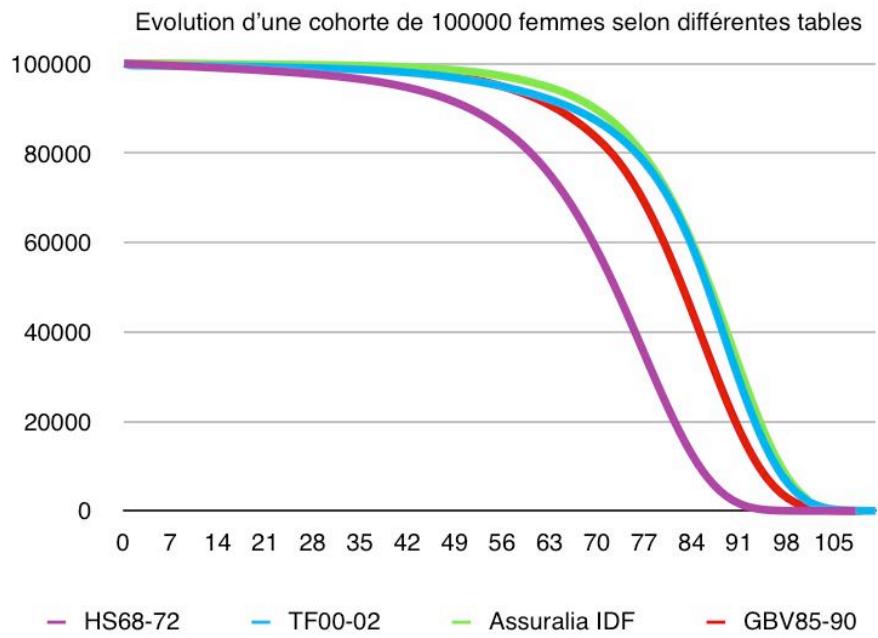


FIGURE 3.1.2: Comparaison des tables pour les femmes

3.1. Tables de mortalité

Plus le taux de mortalité est faible avant les âges extrêmes (*Assuralia*, TH-TF), plus on voit apparaître le phénomène de rectangularisation que l'on constate à chaque mise à jour des tables de mortalité dans le temps. Pour les hommes, l'utilisation de la table *Assuralia* conduit à projeter les flux des polices avec une probabilité de décès nettement plus faible. Cette observation est à nuancer chez les femmes où cette probabilité est naturellement plus faible, mais dans ce cas, le gain de prudence est moindre et se confond à terme avec la table française TF00-02. On constate que l'âge ultime de la table *Assuralia* est plus faible que sur les tables réglementaires, car aucune observation ne concernait les âges extrêmes, et ceux-ci n'ont pas été extrapolés pour conserver une certaine robustesse³ de la table.

Or, pour le calcul du *Best Estimate*, la mortalité "réelle" n'est utilisée que pour projeter et faire évoluer les différents flux dans le temps. En revenant à la méthode de calcul de PROPHET, cela revient à estimer la diminution du nombre de polices en cours avec, entre autre, une hypothèse de mortalité réaliste. La provision mathématique par police quant à elle reste la réserve statutaire calculée avec les tables précisées dans la note technique (et éventuellement le correctif d'âge). L'impact du choix de la table est donc à nuancer et l'effet réellement observé lors de la projection est une diminution plus lente du nombre de polices.

3. NATACHA BROUHNS et MICHEL DENUIT parlent de pragmatisme de l'actuaire concernant l'âge ultime : "Nous ne tenterons pas de "fermer" les tables de mortalité, et encore moins de projeter ces probabilités de décès dans l'avenir, jugeant l'entreprise trop hasardeuse"

Exemple :

Pour un assuré de 36 ans, l'extinction du nombre de polices uniquement par cause de mortalité (et non de rachat ou de réduction), est projeté sur 12 ans (144 mois) de la manière suivante (base 100 000 000/1) :

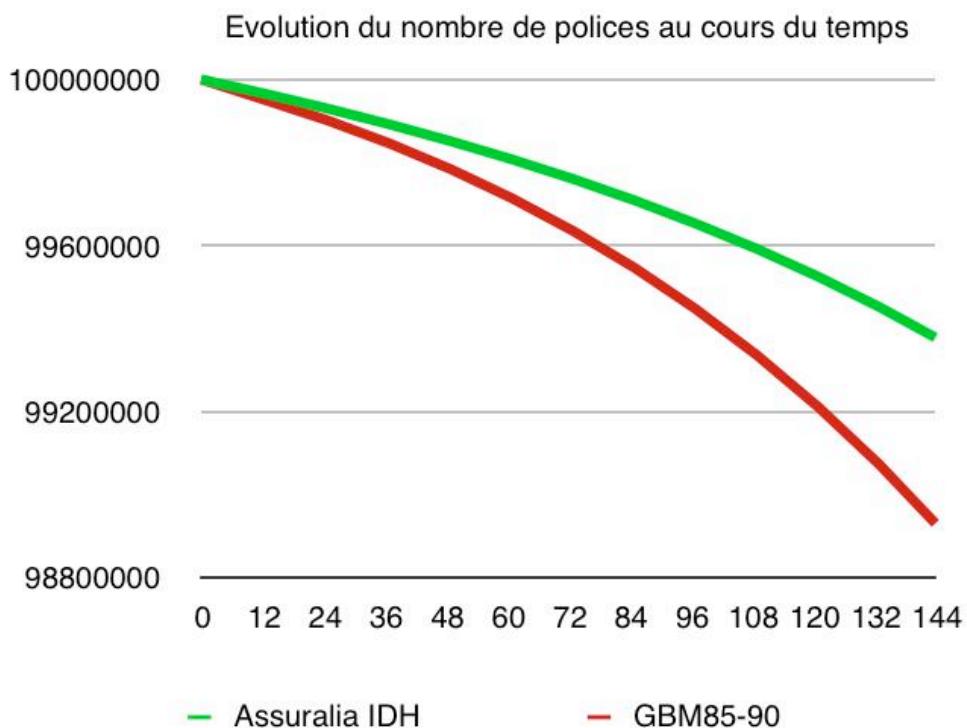


FIGURE 3.1.3: Vitesse d'extinction du nombre de polices (en mois)

L'impact du choix de la table est donc à nuancer et l'effet réellement observé lors de la projection est une diminution plus lente du nombre de polices.

Cette exigence pour les hypothèses de projection des *cash-flow* n'est pas anodine. Certes les tables d'expérience homologuées permettent déjà d'adapter la tarification et le provisionnement à la sinistralité réelle, mais Solvabilité 2 pointe officiellement du doigt cette différence constatée et connue, en cherchant à imposer une estimation réaliste par le choix d'une évaluation *Best Estimate*. Mais les assureurs ayant un portefeuille de taille modeste, ou des produits encore peu développés, doivent également pouvoir déduire des lois d'expérience adaptées sans pouvoir se baser uniquement sur leurs données personnelles. Actuellement la meilleure réponse à apporter semble être l'utilisation de tables d'expériences du marché, lesquelles seront pondérées pour être adaptées à la sinistralité observée sur le portefeuille.

3.1.3 Crédibilité et mortalité d'expérience

On pourrait alors utiliser un modèle de crédibilité basé sur les travaux de BÜHLMANN et STRAUB (1970) tel que repris par HARDY et PANJER (1998)⁴, afin d'obtenir une approximation de la mortalité d'expérience utilisée pour projeter les flux des contrats.

Proposition. Soit $X_{ij} = \frac{S_{ij}}{P_{ij}}$ le ratio entre la sinistralité observée et la sinistralité théorique fournie par la table.

avec S_{ij} le montant des sinistres observés de la compagnie i l'année j , et P_{ij} le montant attendu des sinistres, $j = 1, 2, \dots, n_i$ années d'observation.

3.1.3.1 Hypothèses :

1. la distribution de X_{ij} dépend du paramètre fixé et inconnu θ_i et de P_{ij}
2. les X_{ij} sont indépendants conditionnellement à θ_i fixé, avec la moyenne et la variance :

$$\mathbb{E}[X_{ij} | \theta_i] = \mu(\theta_i)$$

$$Var[X_{ij} | \theta_i] = \frac{\sigma^2(\theta_i)}{P_{ij}}$$

3. les couples $(\theta_i; X_{ij}), (\theta_k; X_{kl})$ sont des variables aléatoires indépendantes pour $k \neq i$
4. θ_i v.a. i.i.d, donc le paramètre est identique pour le marché et toutes les compagnies i .

3.1.3.2 Définition

On cherche donc à estimer $\mathbb{E}[X_{i,n+1} | \theta_i] = \mu(\theta_i)$ avec $X_{i,1}, \dots, X_{i,n_i}$ observés

Soit $P_i = \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij}$ la somme attendue des sinistres pour la compagnie i ,

l'estimateur des moindres carrés donné par la théorie de la crédibilité de BÜHLMANN et STRAUB est alors :

$$\hat{\mu}_i = Z_i \cdot \bar{X}_i + (1 - Z_i) \cdot \mathbb{E}[\mu(\theta_i)]$$

4. HARDY M., PANJER H. (1998), "A credibility approach to mortality risk"

avec :

$$\text{le facteur de crédibilité } Z_i = \frac{P_i}{P_i + \phi}$$

$$\phi = \frac{\mathbb{E} [\sigma^2 (\theta_i)]}{Var [\mu (\theta_i)]}$$

la moyenne empirique du ratio de mortalité pour la compagnie i :

$$\begin{aligned}\bar{X}_i &= \frac{1}{P_i} \sum_{j=1}^{n_i} P_{ij} X_{ij} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} S_{ij}}{P_i}\end{aligned}$$

De cette façon on utilise prudemment ses statistiques propres, tout en conservant les taux observés sur le marché, le tout pondéré par le facteur de crédibilité en fonction de la quantité d'information existante ainsi que sa fiabilité.

Rappelons également que pour autant que l'on retire la prudence dans le calcul du *Best Estimate*, il ne faut pas oublier l'ajout de la marge de risque, et du module de risque de provisionnement, prévu par la nouvelle norme européenne, dont l'objectif est toujours de sécuriser le secteur de l'assurance.

3.2 Loi de rachat

Le comportement de rachat de l'assuré est un phénomène complexe qui peut être modélisé selon différents niveaux de complexité. Dans la pratique, on constate que différents paramètres peuvent influencer le comportement des assurés. On peut citer :

- la fiscalité de son pays d'imposition
- l'ancienneté du contrat
- le rendement de son contrat
- le montant de la participation aux bénéfices versé
- l'âge de l'assuré
- le type de contrat

Il faut ensuite raisonner en appliquant le principe de proportionnalité dans le détail de la modélisation retenue.

Utiliser un comportement de rachat dynamique en fonction de la rentabilité du contrat nécessite la génération de scénarios économiques stochastiques. Nous reviendrons donc sur ce point dans la seconde partie.

3.3. Structure par terme des taux sans risque

La discrimination de l'intensité de rachat par rapport à l'âge ou une caractéristique fine du contrat nécessite un portefeuille important et stable, ainsi qu'un temps de calcul plus important.

Le minimum requis est donc la distinction des types de contrats car ceux-ci s'adressent à des assurés ayant des intérêts, des objectifs et donc des comportements très différents. Leur aversion au risque ainsi que le contexte pour lequel ils souscrivent le contrat n'est pas comparable. Ici aussi il peut être intéressant de recourir à la théorie de la crédibilité⁵ pour se fier de plus en plus aux observations du portefeuille en fonction du volume de ses données. Par exemple pour un nouveau produit à fonds dédiés, on pourra dans un premier temps se baser sur le taux de rachat observé sur l'intégralité des contrats en unités de compte, puis au fur et à mesure que les données du produit deviennent importantes et stables, on pourra affiner ce taux en tenant de plus en plus compte du comportement observé pour ce produit en particulier.

3.3 Structure par terme des taux sans risque

La courbe est celle fournie par le CEIOPS pour le calcul du QIS 5 et reprise par le Commissariat aux Assurances dans le cadre du rapport actuariel. Contrairement à l'hypothèse utilisée par l'Institut des Actuaires, la structure par terme retenue ici reconnaît que les taux à très long terme puissent être inférieurs aux taux moyens long terme. Nous obtenons une courbe à double inflexion comme ceci :

Elle a été construite à partir des taux swaps, corrigés de 10bp pour tenir compte du risque de contrepartie et extrapolé sur un horizon très long de 135 années⁶ :

5. Voir section précédente.

6. Voir plus de détails sur la méthode utilisée à l'adresse : http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en.pdf

3.4. Vecteur du rendement *certainty-equivalent*

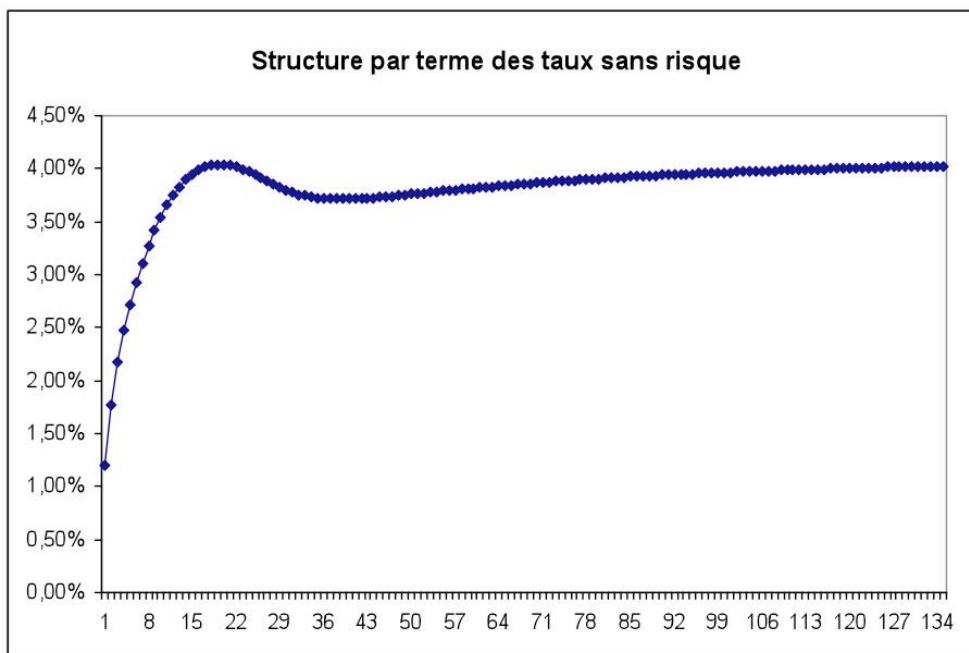


FIGURE 3.3.1: Courbe moyenne des taux spots sans risque (en année)

Cette forme de courbe des taux ne peut pas être reproduite avec le modèle de VASICEK à un facteur comme nous le verrons dans la seconde partie.

3.4 Vecteur du rendement *certainty-equivalent*

Ce vecteur représente le rendement moyen attendu du portefeuille de l'assureur, en contrepartie des contrats dont le risque d'investissement n'est pas supporté par l'assuré (hors produits d'assurance en unités de compte).

Même en hypothèse risque-neutre, ce vecteur n'est pas égal à la structure par terme des taux sans risque, étant donné que nous tenons compte de la réalité du portefeuille à la date d'évaluation. Tous les actifs autres que les obligations rapportent en moyenne le taux sans-risque, mais pour le portefeuille obligataire, on conserve les actifs jusqu'à leur échéance, puis progressivement on réinvestit dans de nouvelles obligations qui elles vont rapporter le taux sans risque. Les titres obligataires actuellement en portefeuille rapporteront le taux de coupon réel jusqu'à leur échéance.

3.4. Vecteur du rendement *certainty-equivalent*

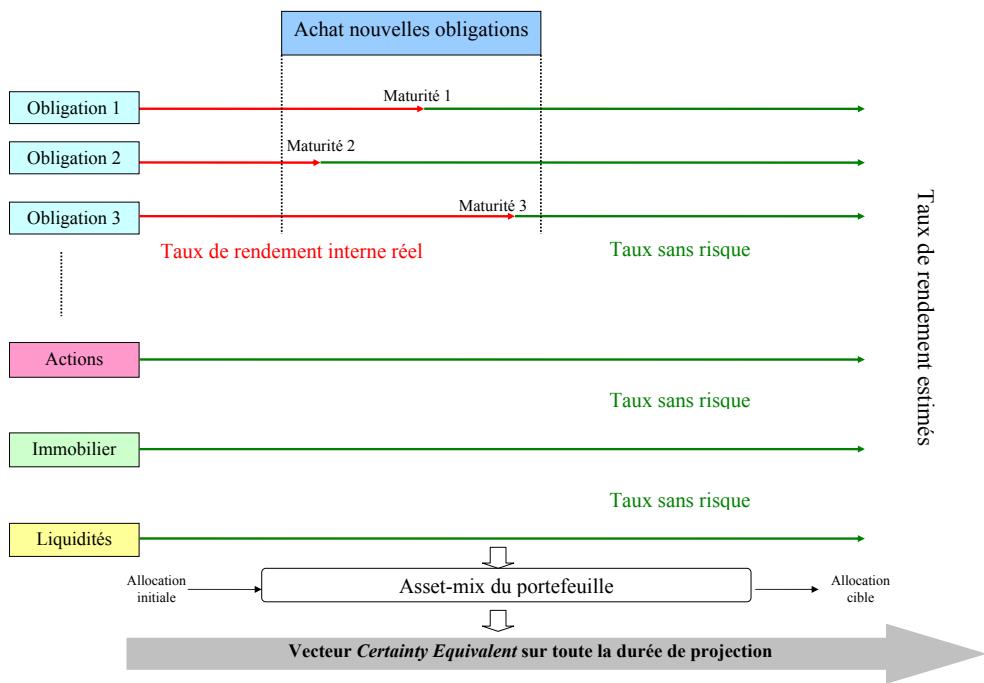


FIGURE 3.4.1: Construction du vecteur de rendement *certainty equivalent* sous une hypothèse risque-neutre

L'hypothèse qu'on ne réalisera pas de plus ou moins-values latentes en vendant un titre avant l'échéance, est justifiée par l'existence du classement en *Hold to Maturity* (HTM) dans les normes IFRS.

3.4. Vecteur du rendement *certainty-equivalent*

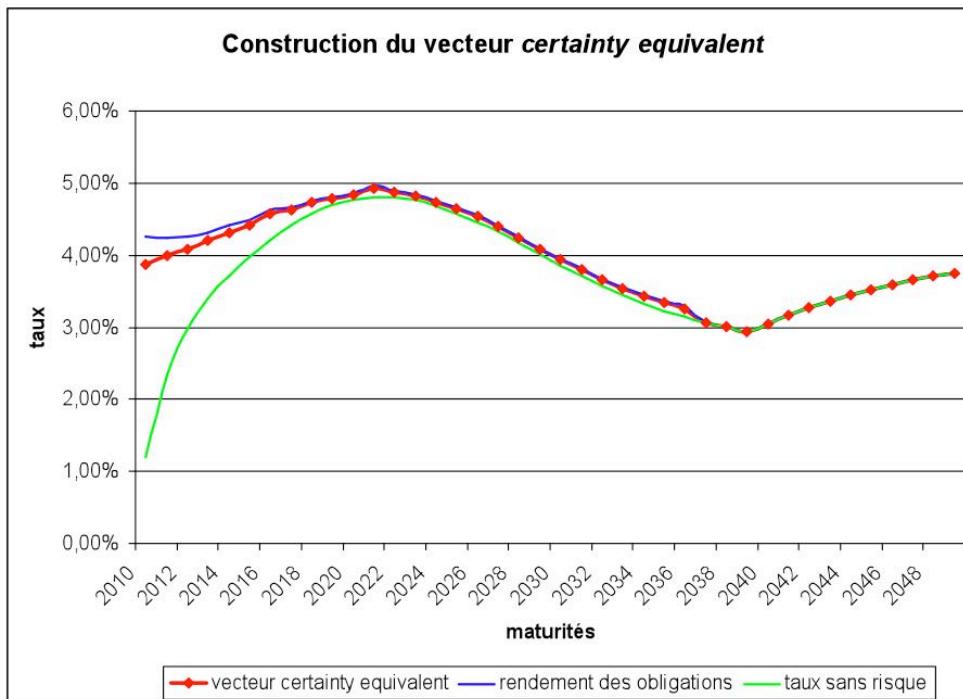


FIGURE 3.4.2: Rendement *certainty equivalent* estimé résultant de la composition du portefeuille sous une hypothèse risque-neutre

En observant la courbe résultant de l'asset-mix, on peut mettre en évidence deux propriétés :

1. La grande majorité du portefeuille est composé d'obligations étant donné que le vecteur *certainty-equivalent* est beaucoup plus proche du rendement des obligations la première année.
2. La vitesse de convergence du vecteur *certainty-equivalent* vers le taux sans risque, permet d'évaluer la duration du portefeuille obligataire.

C'est à partir de ce vecteur que l'on déterminera la participation aux bénéfices dans le scénario moyen, utilisé dans la méthode déterministe de projection des *cash-flows*.

3.5 Courbe de l'inflation

La courbe de l'inflation résulte de la moyenne de 5000 scénarios d'inflation obtenus selon le modèle de SMITH.

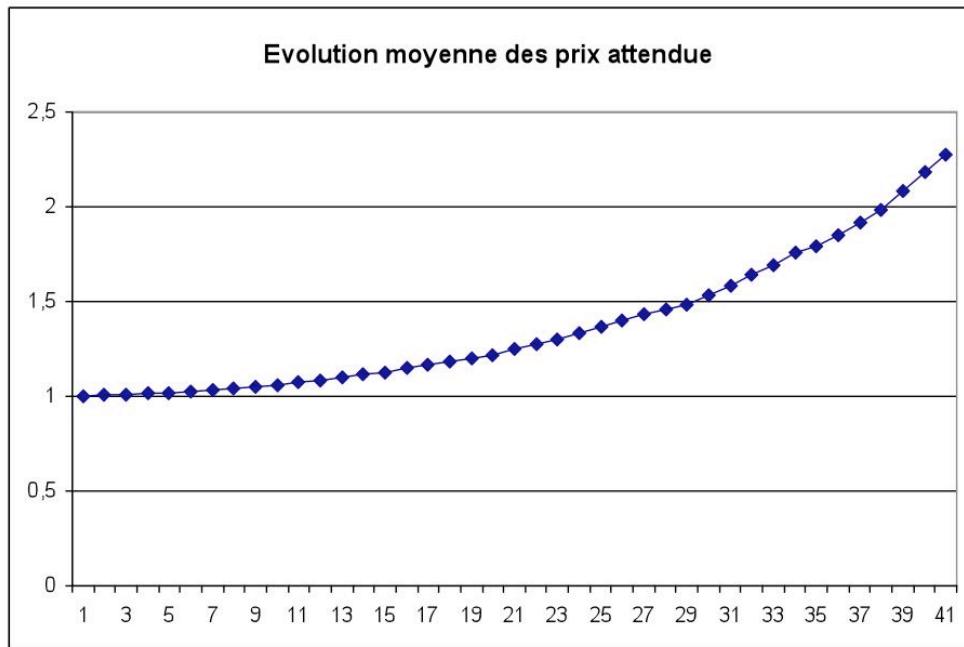


FIGURE 3.5.1: Scénario moyen du taux d'inflation (en années)

Certains modèles comme celui de WILKIE, propose un modèle complet d'évolution des actifs entièrement liés, et donc corrélés, à l'inflation comme variable de départ.

3.6 Estimation des frais généraux

Les frais généraux sont les frais réels que subit l'assureur pour gérer son portefeuille. Il faut donc estimer le coût de l'acquisition et de la gestion des contrats pendant toute la durée du contrat. On tient compte aussi bien des salaires des gestionnaires, du coût des opérations sur les fonds, ainsi que les frais d'acquisition versés aux agents et courtiers.

Il est nécessaire de distinguer les frais fixes immuables quel que soit le contrat, et des frais variables proportionnels à la provision mathématique du contrat.

On fait ensuite évoluer ce montant à chaque période en fonction de la courbe d'inflation retenue précédemment. Les frais généraux du contrat i à la date t s'obtiennent donc comme :

$$Frais_t^i = (F_i + f_i \times Provmath_t^i) (1 + i_t)$$

Avec :

F_i les frais fixes du contrat i

f_i les frais variables du contrat i

$Provmath_t^i$ le montant de la provision du contrat i à la date t

i l'inflation à la date t

Chapitre 4

Assurances à garantie en cas de décès et en cas de vie

Rappelons ici la définition essentielle du *Best Estimate* : les engagements contractuels de l'assureur s'évaluent comme la somme probabilisée de tous les cash-flows futurs liés au contrat d'assurance, actualisés au taux sans risque et en tenant compte de la valeur des options intrinsèques.

Les hypothèses précédentes vont nous permettre de faire évoluer chaque contrat jusqu'à l'extinction du portefeuille, en distinguant chaque flux séparément pour ensuite déterminer la somme actualisée de ces flux futurs probables.

4.1 Les primes reçues

Comme nous sommes dans une vision run-off, il n'est pas permis d'estimer d'éventuelles primes additionnelles ou souscription de contrats futurs (ceci est également valable pour les contrats en unités de compte et les bons de capitalisation).

Il faut donc uniquement projeter les primes futures si le contrat respecte les caractéristiques suivantes :

- les primes sont fixées contractuellement dès la souscription des contrats
- le contrat n'est pas résiliable par l'assureur de manière unilatérale
- le taux technique et les chargements ne sont pas modifiables dans la suite du contrat

Ces flux viennent donc en diminution de l'engagement de l'assureur en tant que cash-flows entrants.

4.2 Les flux de prestation

On projette séparément les différentes prestations qui peuvent intervenir au cours de la vie du contrat :

- Prestation de décès / survie
- Versement en cas de rachat
- Prestations de rente
- Versement à l'échéance du contrat

Les prestations vont donc augmenter l'engagement de l'assureur et on augmentera donc le Best Estimate de la somme actualisée des prestations futures.

En se rappelant du fonctionnement du logiciel PROPHET, on va faire décroître le nombre de contrats au cours du temps en fonction du taux de chute, et en déduire les flux par la suite en fonction de l'évolution des capitaux considérés.

Exemple :

Prenons comme exemple un contrat d'assurance mixte à prime unique sur N années.

Le capital en cas de vie est égal à celui en cas de décès égal à K.

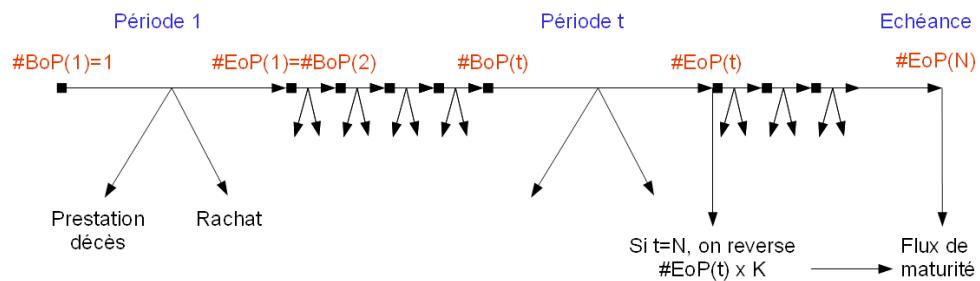
L'individu est agé de x à la souscription et soit q_{x+t} la probabilité de décéder entre $x+t$ et $x+t+1$ avec t l'âge du contrat.

Soit $\#BoP(t)$ et $\#EoP(t)$ le nombre de polices en début et en fin de période t

Soit r_t le taux de rachat estimé en t

Les décès et les rachats interviennent en milieu de période

Evolution du nombre de contrats et déduction des flux



On peut à présent déduire la série de flux qu'il faudra actualiser :

$$\begin{aligned} CF_t^{décès} &= \#BoP_t \times q_{x+t} \times (1 - r_t) \\ &= \prod_{k=1}^t (1 - r_t) \prod_{l=1}^{t-1} (1 - q_{x+j-1}) q_{x+t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CF_t^{rachat} &= \#BoP_t \times r_t \times (1 - q_{x+t}) \\ &= \prod_{k=1}^t (1 - q_{x+k-1}) \prod_{l=1}^{t-1} (1 - r_l) r_t \end{aligned}$$

4.3 La marge administrative

On appelle "marge administrative" la différence entre les frais prélevés sur le contrat par l'assureur, et ses frais réels pour la mise en place et la gestion du contrat. On projette cette marge administrative future en tenant compte de l'inflation et de l'évolution du volume des contrats. La somme actualisée au taux sans risque de ce flux viendra en diminution (augmentation) du montant du *Best Estimate*, étant donné que l'on tient compte d'un gain (perte) futur(e).

4.4 La participation aux bénéfices

Dans le calcul du *Best Estimate* selon le principe de *Solvency 2*, la participation aux bénéfices (PB) reversée aux assurés selon les résultats financiers et techniques doit être pris en compte. Que ce soit la PB réglementaire qui représente le minimum à distribuer imposé par le code des assurances (en France), ou la PB discrétionnaire, variable et déterminer par l'assureur selon sa stratégie, toutes formes de bonus aux contrats doit être mesuré par le *Best Estimate*.

Lors de la détermination du SCR par la suite, l'assureur pourra tenir compte de sa possibilité de diminuer la PB discrétionnaire pour amortir les chocs qui pourraient se produire dans les différents modules de risque prévus par la nouvelle réglementation.

4.4.1 La réglementation au Luxembourg

Dans ce domaine, les réglementations française et luxembourgeoise ne sont pas comparables. Voici un extrait de la *Lettre circulaire 10/1 du Commissariat aux assurances relative au rapport actuariel annuel des entreprises luxembourgeoises d'assurance-vie* :

"Un contrat est éligible pour une participation aux bénéfices financiers dès lors qu'il comporte une garantie de taux (y compris celle d'un taux zéro) et que ses conditions générales prévoient la possibilité d'une participation aux bénéfices financiers. Au cas où seule une partie d'un contrat est susceptible de bénéficier d'une revalorisation, comme c'est par exemple le cas des contrats multisupports, seule cette partie des contrats est à inclure. Ce qui importe peu, au contraire, est la question de savoir si un contrat a effectivement bénéficié d'une participation aux bénéfices au cours de l'exercice : sont donc à inclure l'ensemble des contrats ou parties de contrats éligibles, sans considération de l'octroi ou non d'une participation."

4.4. La participation aux bénéfices

On parle ici d' "éligibilité" à la participation aux bénéfices car il n'existe pas d'obligation réglementaire en la matière. Les conditions générales et particulières n'imposent pas à l'assureur de verser de la PB, et donc aucun minimum réglementaire comme c'est le cas en France.

On parle ici de participation bénéficiaire purement discrétionnaire car celle-ci dépend intégralement de la politique de PB de l'assureur pour récompenser et fidéliser ses assurés.

4.4.2 Les hypothèses de distribution de la participation bénéficiaire

Etant donné qu'aucune contrainte réglementaire n'est fixée dans ce domaine, il faudra faire des hypothèses de distribution de ce bonus pour être capable de déterminer l'impact sur les flux futurs.

Par exemple dans notre exemple, on retiendra la méthode suivante : l'assureur reverse comme PB à l'assuré tous les produits financiers excédant le taux technique garanti augmenté d'une marge servant à rémunérer les actionnaires. On obtient donc :

$$PB_t = PM_t \times \max(\varphi_t - r_t - m_t; 0)$$

Avec :

φ_t le rendement financier en date t

r_t le taux garanti en t

m_t la marge actionnaire en t

PM_t la provision mathématique du contrat à la date t

Le mécanisme de distribution de PB vient revaloriser les prestations, et donc modifier la projection des flux. Comme le calcul du *Best Estimate* tient parfaitement compte de ces séquences de prestations futures, on mesure donc directement l'impact de la PB sur le *Best Estimate*. Il faut néanmoins remarquer que tenir compte de la PB à travers les flux de prestation qui n'interviennent pas au mêmes dates que la dotation, peut biaiser le résultat par l'effet de l'actualisation. Cependant l'assureur décaissera réellement la PB au moment du paiement de la prestation sous quelque forme que ce soit, même si légalement il n'est plus en possession du montant de la PB au moment du versement au contrat.

4.5 La réassurance

Le *Best Estimate* est calculé brut de réassurance. Or l'effet de la réassurance doit être pris en compte dans le calcul du SCR et il sera donc demandé d'évaluer également le *Best Estimate* net de réassurance.

Remarque : Nous ne traitons pas la réassurance dans le cadre des contrats en unités de compte comportant une garantie décès dont la somme sous risque est couverte par un réassureur. Cependant la méthode est strictement identique du moment qu'il est possible d'isoler les flux de réassurance.

4.5.1 Le profit de réassurance

Tenir compte de l'engagement du réassureur à travers tous les flux, revient en réalité à simplement diminuer l'engagement de l'assureur, du profit de réassurance.

"CEIOPS CP 44 : Technical provisions- Article 86 g Counterparty default adjustment to recoverables from reinsurance contracts and SPV's"

3.218. For the probability-weighted average of future cash-flows of recoverables from existing reinsurance contracts and special purpose vehicles the following cash in- and out-flows should be taken into account : Cash in-flows should include at least

- recoverables from reinsurance contracts and special purpose vehicles for claims payments or benefits and recoverable for related expenses ; and
 - revenues from reinsurance commission and from shares in profit from technical sources relevant to individual reinsurance contracts. Cash out-flows should include at least
 - future premiums for reinsurance contracts and special purpose vehicles,
 - if relevant, shares in profit due to the reinsurance contract.
-

Nous avons ainsi les flux du profit pour l'assureur du traité de réassurance qui se calculent comme :

Signe	Flux
-	Primes de réassurance
+	Prestations du réassureur
+	Commissions de réassurance
+	PB de réassurance
=	Profit suite à la réassurance

Etant donné que ce profit vient en diminution du *Best Estimate* brut de réassurance, le signe des différents flux est finalement inversé.

Mais il ne suffit pas d'isoler les flux de réassurance (prestations, PB, prime) et de retraiter les engagements de l'assureur, car il faut également tenir compte de la probabilité non-nulle que le réassureur fasse défaut à la date t et qu'il ne puisse honorer ses propres engagements envers l'assureur. On parle ici d'ajustement de réassurance.

4.5.2 L'ajustement de réassurance

L'engagement de l'assureur sera en réalité diminué d'un montant inférieur au profit de réassurance projeté, étant donné que l'on intègre en plus le risque de défaut du réassureur dans le calcul. Cela correspond au risque de défaut du réassureur "attendu" en fonction du rating¹, alors que le risque de défaut non-anticipé sera à prendre en compte dans le module du risque de défaut des contreparties dans le calcul du SCR.

3.200. The amounts of recoverable from reinsurance contracts and special purpose vehicles should be adjusted in order to take account of expected losses due to counterparty default, whether this arises from insolvency, dispute or another reason. Further advice on how to adjust amounts recoverable from reinsurance contracts and special purpose vehicles, can be found in CEIOPS-DOC-38/09 Level 2 advice on counterparty defaultadjustments to recoverable from reinsurance contract and SPV's14.

La probabilité de défaut en fonction de la notation est donné par le CEIOPS² dans le tableau ci-dessous :

Rating	Qualité de crédit	Proba de défaut
AAA	1	0.05%
AA	1	0.10%
A	2	0.20%
BBB	3	0.50%
BB	4	2.00%
B ou moins	5	10.00%

1. on parle en anglais de "Adjustment of recoverables due to expected default"
2. QIS5 *Technical Specifications*

Elle évolue au cours des périodes t de la façon suivante :

$$PD_t = PD \cdot (1 - PD)^{t-1}$$

La probabilité de défaut en t est donc la probabilité de ne pas avoir fait défaut pendant les t-1 périodes précédentes, puis de faire défaut avec la probabilité PD.

On suppose donc ici que le rating de l'assureur sera constant au cours du temps, Il faut également tenir compte du taux de recouvrement "tr", c'est-à-dire du pourcentage que l'assureur pourra quand même récupérer en cas de défaut du réassureur, étant donné que la liquidation permettra quand même d'honorer une partie des engagements envers les créanciers prioritaires.

Exemple :

Illustrons la méthode du calcul de l'ajustement *Adj* sur un exemple simplifié,

soit C_t la prestation du réassureur projetée à la date t, avec t=1, 2 ou 3
soit $tr_t = tr = 40\%$ comme proposé par le CEIOPS

$$\begin{aligned} Adj &= PD_1 [(1 - tr) \cdot (C_1 + C_2 + C_3)] \\ &+ PD_2 [(1 - tr) \cdot (C_2 + C_3)] \\ &+ PD_3 [(1 - tr) \cdot C_3] \end{aligned}$$

La première année, si le réassureur fait défaut avec la probabilité PD_1 , la perte pour l'assureur sera tous les flux restants, excepté une partie que le réassureur pourra quand même honorer.

En généralisant à T périodes nous avons donc :

$$Adj = (1 - tr) \sum_{t=1}^T \left[PD \cdot (1 - PD)^{t-1} \sum_{u=t}^T C_u \right]$$

Il existe une simplification proposée par le CEIOPS qui s'appuie sur la duration modifiée, mais évalue grossièrement l'ajustement de réassurance comme un pourcentage fixé à ajouter au *Best Estimate*.

4.6 Conclusion

Si l'on récapitule tous les flux à tenir compte pour aboutir au *Best Estimate* net de réassurance des contrats que l'on appelle de la "Vie Classique"³, nous appliquons alors la formule présentée précédemment :

$$BE = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\prod_{s \leq t} \frac{1}{(1+r_s)} (CF_t^{out} - CF_t^{in}) \right]$$

Avec :

\mathbb{Q} la probabilité risque-neutre

CF_t les *cash-flows* entrants et sortants à la date de projection t

r_t le taux sans risque *forward* à la date t

Dans un modèle déterministe et en faisant l'hypothèse que les *cash-flows* entrants et sortants sont indépendants du marché et donc du taux d'intérêt, nous obtenons simplement :

$$BE = \sum_{t=1}^{\infty} \{ P(0,t) \times \mathbb{E}_{\mathbb{P}} (CF_t^{out} - CF_t^{in}) \}$$

Avec :

$P(0,t)$ le prix d'un zéro-coupon en date 0, versant 1 en date t

CF_t les *cash-flows* entrants et sortants à la date de projection t

\mathbb{P} la probabilité naturelle⁴

3. par opposition aux contrats en Unités de Compte

4. FILIPOVIC (2004) : en cas d'indépendance entre le marché G et les engagements d'assurance H, la probabilité risque neutre \mathbb{Q} sur la combinaison des deux peut se décomposer en $\mathbb{Q}|_G \times \mathbb{P}|_H$

4.6. Conclusion

Résumons la prise en compte des différents flux nécessaires pour obtenir le *Best Estimate* brut et net de réassurance :

	Flux	Détails	Résultat
-	Primes commerciales	= Prime pure + Chargements	
+	Prestations	de décès (+PB) de rachats (+PB) de rentes (+PB) de maturité (+PB)	
+	Frais généraux	= Acquisition + Gestion	
+	Commissions		
			= BE brut de réassurance
-	Profit de réassurance	- Prime de réassurance + Flux de réassurance + Commissions de réassurance + PB de réassurance	
+	Ajustement de réassurance		
			= BE net de réassurance

Ici on ne fait pas apparaître la somme actualisée des cash-flows au taux sans risque, pourtant elle est indispensable et s'applique sur la totalité des flux recensés pour obtenir le *Best Estimate*.

Remarque importante :

"CEIOPS CP 44 : Technical provisions- Article 86 g Counterparty default adjustment to recoverables from reinsurance contracts and SPV's"

Articles 75 to 78 of the Level 1 text. Such a valuation recognise the possibility that cash in-flow could exceed cash out-flow i.e. expected profit during remaining periods on risk. In such circumstances the best estimate may be negative. This is acceptable and undertakings are not required to set to zero the value of the best estimate. The valuation should take account of the time value of money where risks in the remaining period would give rise to claims settlements into the future.

C'est-à-dire qu'un résultat négatif pour un contrat ou même pour la totalité d'un produit, est parfaitement acceptable et reflète la forte profitabilité de ce

4.6. Conclusion

produit. On a donc la somme actualisée des cash-flows entrants est supérieure à celle des cash-flows sortant.

En pratique on retrouve cette situation dans les produits temporaire décès ou de solde restant dû, car on constate généralement une très faible sinistralité à cause du jeune âge des assurés ou de la faible durée du contrat. En contrepartie les primes et les chargements sont importants car interviennent souvent en prime unique à la souscription du contrat : l'effet de l'actualisation n'intervient donc pas.

Chapitre 5

Contrats en unités de compte

5.1 Définition

Nous avons vu que contrairement à ce que l'on pouvait attendre, la grande majorité des contrats en unités de compte ne peut pas être considérée comme des passifs parfaitement répliquables par des instruments financiers. Cela vient du fait que l'assureur prélève régulièrement des frais de gestion directement sur la valeur du contrat. Une marge de risque devra donc être calculée en complément des engagements *Best Estimate* pour ce type de contrats.

L'existence de frais de gestion et de garanties décès complémentaires impliquent également que l'évaluation *Best Estimate* des contrats en unités de compte est différente du montant de la valeur du contrat à la date d'évaluation.

Raisonnons progressivement.

Tout d'abord nous avons la valeur de rachat qui est égale à la valeur instantanée du portefeuille en unités de compte hors pénalités et frais de rachat.

Comme nous sommes en probabilité risque-neutre, quel que soit le fonds, on capitalise et actualise le portefeuille au même taux sans risque r , c'est-à-dire que la valeur projetée et actualisée (VAP) de la valeur du contrat V_t reste toujours égale à sa valeur initiale D , égale aux primes nettes de frais d'entrée versées au contrat :

$$\begin{aligned} VAP(V_0) &= D \\ VAP(V_1) &= \frac{D \cdot (1 + r_1)}{(1 + r_1)} = D \\ &\vdots \end{aligned}$$

On fait donc juste s'éteindre la valeur de cet engagement en fonction des hypothèses sur le taux de chute (mortalité, rachat).

Ajoutons ensuite les frais de gestion.

5.2 Projection des frais

Ces frais sont prélevés sur la valeur du contrat et viennent en contrepartie de frais réels nécessaires à la tenue des contrats. Mais pour une raison de rentabilité, les frais de gestion sont généralement supérieurs aux frais généraux de la société.

Nous avons d'une part la projection des frais de gestion, et d'autre part en face, la projection des frais généraux.

La valeur du contrat évolue comme suit :

$$\begin{aligned} V_0 &= D \\ V_1 &= D(1 - g)(1 + r_1) \\ V_2 &= D(1 - g)^2(1 + r_1)(1 + r_2) \end{aligned}$$

Ce qui, du point de vue de l'assureur donne en termes de flux F_t actualisés :

$$\begin{aligned} VAP(F_0) &= D \\ VAP(F_1) &= \frac{D(1 + g)(1 + r_1)}{(1 + r_1)} - f \frac{(1 + i_1)}{(1 + r_1)} \\ &= D + Dg - f \frac{(1 + i_1)}{(1 + r_1)} \\ VAP(F_2) &= D(1 + g)^2 - f \frac{(1 + i_1)(1 + i_2)}{(1 + r_1)(1 + r_2)} \\ &\vdots \\ VAP(F_t) &= D + \underbrace{\varphi(g, D) - \psi(f, i_t, r_t)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Avec :

- f les frais réels
- i l'inflation
- r_t le taux sans risque en t
- D le montant initial du contrat

Nous avons donc isolé :

- la composante D qui ne varie qu'en fonction de la loi de chute,
- la composante φ qui représente les frais de gestion projetés qui évoluent également en fonction du taux de chute. Ce montant vient en diminution de l'engagement de l'assureur car c'est un flux entrant.
- la composante ψ qui représente les frais généraux. Ce montant vient en augmentation de l'engagement de l'assureur.

5.3. Modélisation de la garantie décès

D'ores et déjà nous pouvons dire que ces flux, à cause de la marge administrative, ne sont pas réplicables et il faudra donc ajouter la marge de risque à ce *Best Estimate*. Ajoutons enfin la prise en compte des garanties décès dans l'engagement de l'assureur.

5.3 Modélisation de la garantie décès

Devant l'aversion au risque de certains investisseurs désirant effectuer des placements sur des actifs risqués tout en préservant l'objectif de transfert de leur patrimoine, les assureurs proposent aujourd'hui toute une gamme de garanties financières en cas de décès de l'assuré. Ainsi le capital versé aux bénéficiaires sera majoré du montant prévu par la garantie décès, en cas d'évolution défavorable des fonds.

5.3.1 Présentation des garanties

Les types de garanties peuvent être très variables mais on peut citer les formes les plus connues :

5.3.1.1 la garantie plancher :

On garantit un montant minimum, souvent égal à la somme des primes versées par l'assuré. En cas de décès en t l'engagement se calcule comme :

$$E_t = \max(vn_{it} \cdot N_t; plancher)$$

Avec :

v_{nit} la valeur d'un actif à la date t

N_t le nombre d'unités de compte à la date t

$plancher$ la valeur du capital garanti

5.3. Modélisation de la garantie décès

Graphiquement cela se représente par :

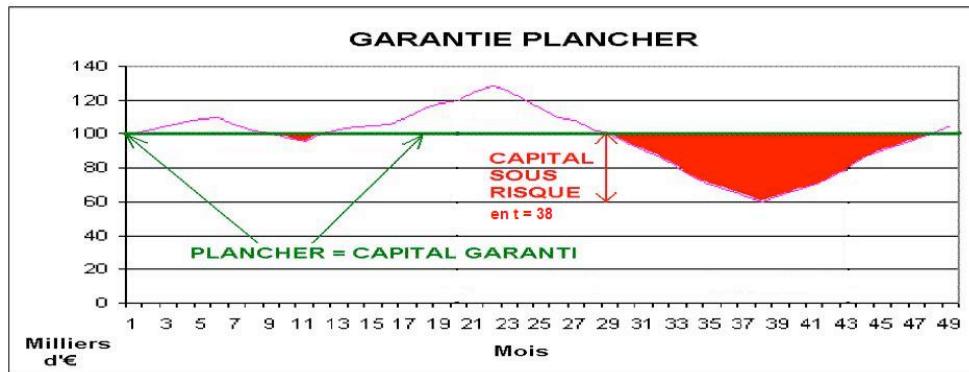


FIGURE 5.3.1: Schéma de fonctionnement de la garantie plancher dans un contrat en unités de compte

Elles peuvent être aussi indexées pour que le plancher soit revalorisé par rapport à l'inflation par exemple.

5.3.1.2 la garantie cliquet :

Le capital garanti est automatiquement réhaussé dès lors que la valeur du fonds atteint un nouveau maximum :

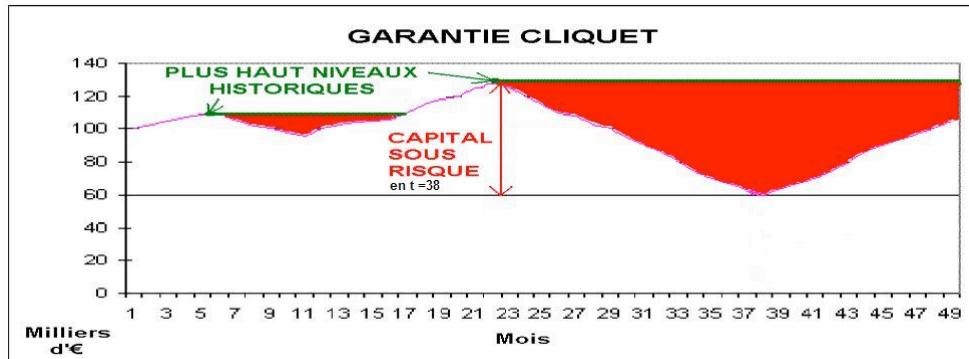


FIGURE 5.3.2: Schéma de fonctionnement de la garantie cliquet dans un contrat en unités de compte

5.3.1.3 la garantie majorée :

On garantit un montant supérieur à la totalité des primes versées, soit fixé à la souscription, soit exprimé en pourcentage supplémentaire de la réserve.

5.3. Modélisation de la garantie décès

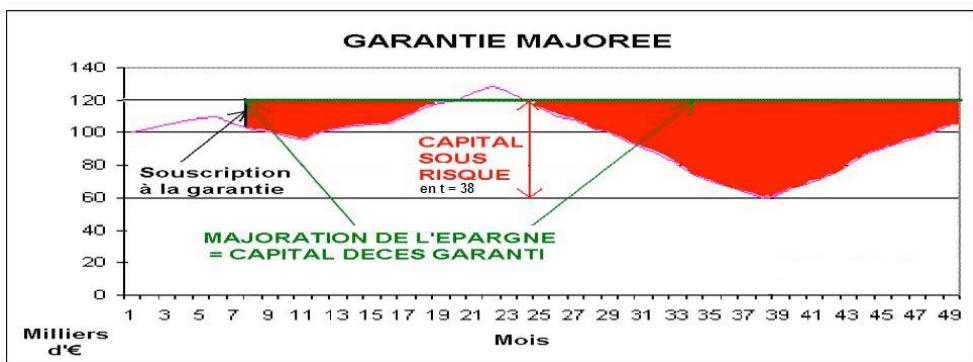


FIGURE 5.3.3: Schéma de fonctionnement de la garantie majorée dans un contrat en unités de compte

5.3.2 Evaluation

Comment évaluer les engagements en *Best Estimate* induits par cette garantie décès de la part de l'assureur ?

Continuons le raisonnement par entrée et sortie des flux actualisés liés au contrat.

Le coût de cette garantie pour l'assuré est calculé de la façon suivante :

1. on détermine la somme sous risque, égale à la différence entre le capital garanti et la valeur du contrat.
2. si la somme sous risque est positive, on lui applique un taux de prime de risque obtenu à partir de la probabilité de décès durant l'année. On utilise pour ceci la table de mortalité tarifaire.
3. on prélève cette prime de risque sur le nombre d'unités de compte en réserve.

Il faut donc projeter les primes de risque futures prélevées, en contrepartie du coût réel de la garantie pour l'assureur.

On obtient finalement :

$$VAP(F_t) = D + \varphi(g, D) - \psi(f, i_t, r_t) + \theta(N_t, vni_t, G_t, q_{x_t}) - \gamma(N_t, vni_t, G_t, q_{x_t}^*)$$

- La fonction θ représente la prime de risque en fonction de la valeur du fonds, du capital garanti G_t et du taux de prime de risque en t représenté ici simplement par la probabilité de décès de la table de mortalité tarifaire.
- La fonction γ représente la valeur de la garantie pour l'assureur en date t . Pour la calculer on la représente par une option de vente qui serait offert à l'assuré.

5.3. Modélisation de la garantie décès

- q_{x_t} représente la probabilité de décès selon la table de mortalité tarifaire.
- $q_{x_t}^*$ représente la probabilité de décès réaliste selon la table de mortalité d'expérience.

Etant donné que le prélèvement de la prime de risque est mensuel, il faut garder le même pas temporel et donc considérer une série d'option de vente de prix d'exercice égal au montant garanti, de sous-jacent égal à la valeur du contrat et d'échéance un mois.

Cette option est évaluée par la formule de BLACK et SCHOLES (voir section 6.3 page 58 pour la signification de d1 et d2).

Nous avons alors, avec Φ la fonction de répartition de la loi normale :

$$\gamma(N_t, vni_t, G_t, q_{x_t}^*) = q_{x_t}^* \times P(N_t.vni_t, G_t, \sigma) = q_{x_t}^* \times [G_t \cdot e^{-r} \cdot \Phi(-d_2) - N_t.vni_t \cdot \Phi(-d_2)]$$

On multiplie par la probabilité de décéder le mois t, car elle représente la probabilité que l'assuré exerce son option de vente. Or cette probabilité de décès est cette fois-ci obtenue à partir de la table de mortalité d'expérience.

La valeur intrinsèque de cette option est naturellement égale à la somme sous risque en date t.

Sur une durée d'un mois, la valeur spéculative n'étant pas très élevée, cela revient donc approximativement à considérer la somme sous risque, déjà utilisée pour calculer la prime de risque.

Nous pouvons donc dire que la marge technique sur les garanties décès est représentée par :

$$\theta(N_t, vni_t, G_t, q_{x_t}) - \gamma(N_t, vni_t, G_t, q_{x_t}^*) \simeq \max(G_t - N_t.vni_t; 0) \times (q_{x_t} - q_{x_t}^*)$$

L'impact le plus élevé est donc celui de la différence de mortalité entre la table tarifaire et la table d'expérience, d'où l'importance dans le choix de celle-ci.

Notons au passage qu'il est très compliqué de calculer la volatilité des fonds sous-jacents aux contrats en unités de compte, car la composition des actifs est variable et très variée. En pratique c'est impossible de raisonner fonds par fonds ou police par police. On peut alors faire l'hypothèse que, si les fonds sont nombreux et variés, la volatilité globale devrait être proche de celle de l'indice de référence qui est supposé être l'Eurostoxx 50. On utilise alors la volatilité implicite de l'*Eurostoxx 50*¹.

1. http://www.stoxx.com/download/indices/factsheets/v2tx_fs.pdf

5.3.3 Conclusion

C'est une manière simple et compréhensible de tenir compte de la marge technique dans le calcul des engagements de l'assureur en *Best Estimate*. Par contre on comprend bien que dans un modèle déterministe, la projection des primes de risques peut sembler imparfaite car une police n'ayant pas de somme sous-risque au moment de l'évaluation ne pourra pas en avoir par la suite, et les sommes sous risque existantes vont diminuer à la vitesse du taux sans risque.

Finalement le *Best Estimate* obtenu sera inférieur au montant de la valeur de rachat, de par la projection actualisée de la marge technique (sur les garanties décès), et de la marge administrative (sur les frais de gestion) que l'on anticipe en diminution des engagements.

Cela est uniquement acceptable car nous cherchons à représenter une valeur théorique pour représenter au plus juste les engagements. La provision mathématique réellement au bilan reste calculée de manière statutaire et actuarielle.

Chapitre 6

Options et Garanties intrinsèques aux contrats d'assurance

La présence et l'importance du calcul de ces éléments se justifient à nouveau par la lecture du : *"CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II : Technical provisions, Article 86 : a Actuarial and statistical methodologies to calculate the best estimate."*

3.119. Embedded options and guarantees are important components of technical provisions which need to be continuously monitored by the insurer. The potential for non-linear behaviour, existence of path dependencies and inherent complexity and uncertainty requires the use of relatively sophisticated valuation methodologies to deliver accurate results.

3.130. The best estimate of contractual options and financial guarantees must capture the uncertainty of cash-flows, taking into account the likelihood and severity of outcomes from multiple scenarios combining the relevant risk drivers.

*3.131. The best estimate of contractual options and financial guarantees should reflect **both the intrinsic value and the time value**.*

3.132. Without prejudice to the advice in CEIOPS-DOC-21/09 referred to previously in this paper, the best estimate of contractual options and financial guarantees may be valued by using one or more of the following three methodologies :

6.1. Définition des Options cachées

-
- a stochastic approach using for instance a market-consistent asset model (includes both closed form and stochastic simulation approaches) ;
 - a series of deterministic projections with attributed probabilities ; and
 - a deterministic valuation based on expected cash-flows in cases where this delivers a market-consistent valuation of the technical provision, including the cost of options and guarantees.
-

6.1 Définition des Options cachées

L'évaluation des Options et Garanties incluses implicitement dans les contrats d'assurance, peut s'avérer complexe et souvent réductrice. Elle est néanmoins indispensable, que ce soit dans l'évaluation des engagements *Best Estimate* de Solvabilité 2, du *Swiss Solvency Test*, ou dans les projections de la MCEV¹.

La non-prise en compte de ces risques, aujourd'hui bien connus des assureurs, a déjà eu dans le passé des conséquences extrêmement importantes. On peut citer à titre d'exemple la garantie du taux de conversion des rentes viagères différenciées, qui engendra de sérieux risques non anticipés pour des compagnies britanniques à partir des années 1970-1980 (Voir : Modélisation du GAO).

On peut définir les options dites cachées de la façon suivante : "*Les options cachées sont des garanties ou des droits variés conférés aux assurés par la réglementation ou par des clauses contractuelles et destinés à rendre les contrats d'assurance plus souples et plus attractifs. Ces options se caractérisent par l'absence d'un provisionnement distinct dans les comptes de l'assureur.*"

Généralement il n'existe pas de provisions comptables pour ces risques complexes pourtant identifiés. Elles sont généralement difficiles à évaluer avec précision car dépendent fortement des particularités des contrats d'assurance-vie. Le *Best Estimate* doit les intégrer au mieux pour tenir compte de la meilleure estimation des engagements réels à la date d'évaluation.

A titre d'exemple l'on peut citer les options cachées suivantes :

- L'OPTION DE RACHAT : lorsque le comportement de rachat est modélisé de façon dynamique, il peut être vu comme une option de vente américaine ou européenne accordée à l'assuré, de prix d'exercice égal à la valeur de rachat nette de frais, et dont le sous-jacent peut dépendre des conditions fiscales de l'assuré, intégrer l'offre de la concurrence ou d'autres produits d'investissement. Le rachat peut être total ou partiel. Il impacte directement la gestion actif-passif de la compagnie.

1. *Market Consistent Embedded Value*

6.1. Définition des Options cachées

- L'OPTION D'ARBITRAGE : dans un contrat multi-supports, l'assuré peut céder sa position sur un fonds ou un support, pour investir dans un autre en fonction de son profil d'investissement et de la conjoncture économique. L'engagement de l'assureur n'est pas le même que l'assuré choisisse un fonds en unités de compte ou transfère son contrat sur un support à taux minimum garanti. Ces arbitrages entraînent des frais qui sont éventuellement facturés au souscripteur. L'arbitrage impacte également la gestion actif-passif.
- L'OPTION D'AVANCE : l'assuré peut demander une avance pour une partie de la valeur de son contrat. C'est équivalent à un prêt de l'assureur avec le contrat comme caution. Cela permet à l'assuré d'avoir accès ponctuellement à son capital sans pour autant perdre les avantages de son contrat en le rachetant.
- L'OPTION DE RÉDUCTION : le souscripteur peut arrêter le versement des primes périodiques prévues par le contrat. La garantie du contrat sera donc réduite au prorata des paiements effectués.
- L'OPTION DE VERSEMENT ADDITIONNEL : le souscripteur peut verser une prime complémentaire, avec des conditions éventuellement garanties, quelle que soit l'évolution de l'offre.
- L'OPTION DE TRANSFORMATION EN RENTE : le souscripteur peut décider de sortir en capital ou en rente à l'échéance de son contrat. Les arrérages viagers qu'il va pouvoir obtenir peuvent être garantis et calculés selon des hypothèses définies à la souscription (voir GAO).

Il existe d'autres options indépendantes du comportement des assurés et qui relèvent intégralement des garanties financières du contrat et dépendent du comportement des actifs financiers.

- LE TAUX MINIMUM GARANTI : le taux de revalorisation garanti à l'assuré qui est susceptible d'être supérieur aux rendements financiers observés.
- LA PARTICIPATION BÉNÉFICIAIRE : elle peut être réglementaire (imposée), contractuelle (promise), discrétionnaire (possible selon décision de l'assureur).
- LES GARANTIES SUR LES RISQUÉS² : aussi appelé *variable annuities*, l'assureur offre une prestation garantie sur un support risqué, en cas de chute des marchés sur lesquels ces fonds sont investis. Ces garanties, éventuellement avec un effet « cliquet », peuvent être exercées en cas de décès (GMDB), en cas de vie (GMAB), de rentes viagère (GMIB) ou de retraits périodiques (GMWB).

Pour finir sur la présentation des options cachées, notons aussi qu'il existe des options que possède l'assureur, mais qui ne sont néanmoins pas plus faciles à modéliser. On connaît entre autres :

2. Non proposé à la BÂLOISE VIE LUXEMBOURG

6.2. Insuffisance du modèle déterministe

- l'option de distribuer ou de doter la PROVISION POUR PARTICIPATION AUX EXCÉDENTS (PPE)³ pour réguler la distribution de participation aux bénéfices.
- l'option de RÉALISER SES PLUS OU MOINS-VALUES LATENTES sur les actifs obligataires et d'impacter la réserve de capitalisation⁴. Celle-ci permet de lisser dans le temps le résultat des ventes prématurées d'obligations et n'engendre pas de distribution de PB.
- l'option d'avoir une politique d'investissement plus ou moins risquée pour améliorer ponctuellement son rendement ou diminuer son profil de risque.

Nous allons développer en détail la modélisation de la valeur temps de la garantie du taux minimum et de la participation aux bénéfices, ainsi que l'option de transformation en rente à un taux garanti. Ces deux éléments sont déjà valorisés à la BÂLOISE pour le calcul de la MCEV.

6.2 Insuffisance du modèle déterministe

Lorsque le cash-flow n'est pas une fonction linéaire de la réalisation d'un scénario, l'asymétrie qui en résulte rend l'espérance de ce flux dépendant de la trajectoire qu'il a suivi⁵. Dans notre cas, c'est la PB qui crée cette asymétrie car elle ne peut être que positive ou nulle quel que soit les produits financiers. Le scénario moyen projeté diverge donc de la moyenne des scénarios dès lors que l'on ajoute de la variabilité au sous-jacent. Modéliser de façon déterministe une option ne permettrait que de capturer la valeur intrinsèque de celle-ci. Il faut donc encore ajouter la valeur temps de cette même option, car nous savons qu'en réalité la volatilité du sous-jacent est loin d'être nulle.

La valeur temps d'une option représente le prix de l'incertitude liée à l'évolution du sous-jacent. Pour ceci, il faut avoir recours aux techniques courantes d'évaluation d'options financières qui, elles, vont tenir compte du caractère stochastique du processus de prix du sous-jacent.

Voici le schéma des pay-off à maturité de ces deux types d'option, sachant qu'ils ne représentent que la valeur intrinsèque de celles-ci avant l'échéance. La valeur supplémentaire est égale à la valeur temps de l'option, et c'est exactement ce que l'on cherchera à valoriser avec des formules fermées dans le calcul de la TVOG⁶.

3. ou réserve pour PB future au Luxembourg, mais avec une législation plus souple sur sa distribution

4. en France

5. valeur *path-dependent*

6. *Time Value of financial Option and Guarantee*

6.2. Insuffisance du modèle déterministe

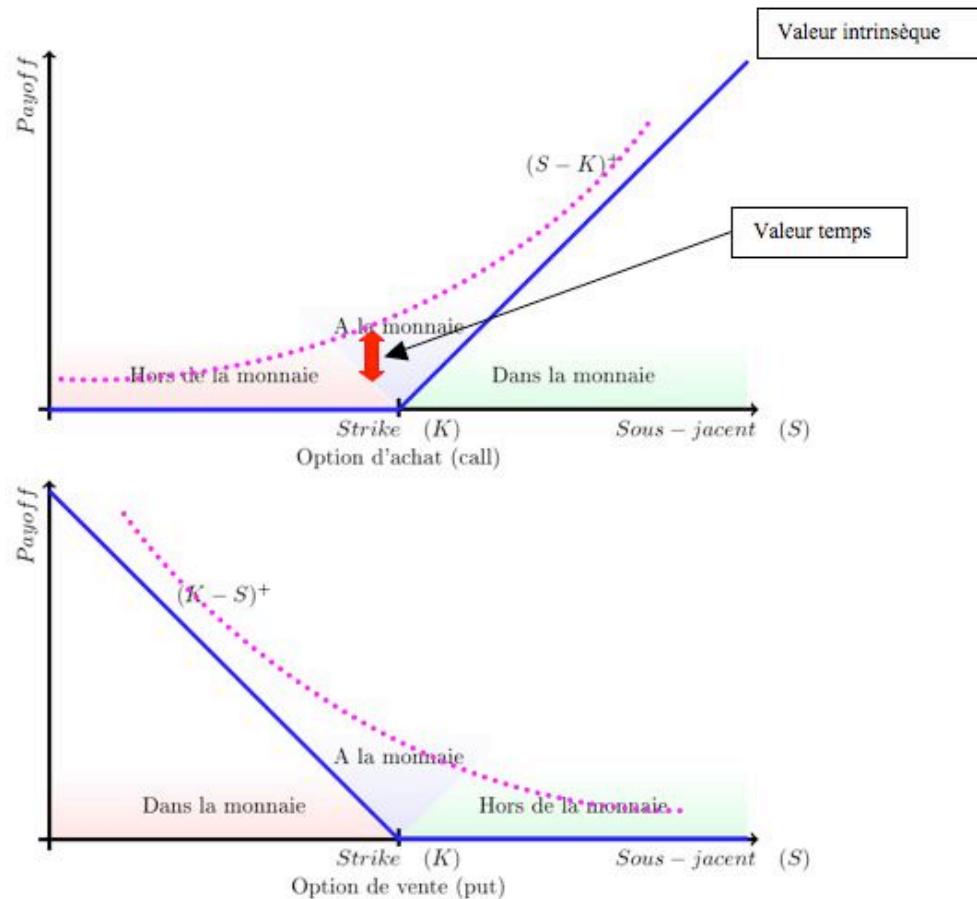


FIGURE 6.2.1: Représentation de la valeur intrinsèque et de la valeur temps d'une option d'achat et de vente

La valeur temps est donc la différence entre la valeur de l'option à la date t et sa valeur intrinsèque, égale à ce que serait son pay-off si l'option était à maturité. La convexité de la valeur de l'option d'achat par exemple, n'est pas mesurable par un modèle purement déterministe qui se base uniquement sur le *pay-off* futur, estimé dans un univers sans variabilité.

Rappelons que la valeur temps d'une option converge au cours du temps vers zéro, toute chose égale par ailleurs, jusqu'à l'échéance de l'option où le *pay-off* n'est plus égal qu'à sa valeur intrinsèque.

6.3 Evaluation des options financières

6.3.1 La méthode usuelle de BLACK et SCHOLES

Depuis les travaux de BLACK, SCHOLES et MERTON (1973) qui aboutirent à la fameuse théorie d'évaluation des options européennes qui reçut le « Prix Nobel d'Economie » en 1997, de nombreux développements et améliorations ont été découverts, mais les hypothèses sur lesquelles s'appuie le modèle restent identiques.

- Le prix de l'actif sous-jacent à la date t , $0 \leq t \leq T$, suit un **mouvement brownien géométrique** tel que :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu.dt + \sigma.dB_t$$

Avec :

μ l'espérance de rentabilité de l'actif (le drift), constante

σ sa volatilité, constante

B_t un mouvement brownien standard (processus de WIENER), tel que les accroissements disjoints $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ sont indépendants et stationnaires, $0 \leq s \leq t$

T la maturité de l'option

On déduit de cette équation différentielle stochastique, grâce au lemme d'ITÒ que :

$$S_t = \exp \left[\sigma B_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t \right]$$

C'est-à-dire que le rendement de l'actif sous-jacent est log-normal car on a :

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_s} \right) = \ln(S_t) - \ln(S_s) = \left\{ \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right\} (t - s) + \sigma(B_t - B_s)$$

dont le dernier terme suit une loi normale comme indiqué précédemment.

- Le sous-jacent est donc côté en continu sur les marchés.
- Il n'y a aucun coût de transaction et d'impôts.
- Le marché est complet : on parle de complétude du marché lorsque toutes les flux (et donc les options) peuvent être répliqués avec un portefeuille d'actifs.
- L'absence d'opportunité d'arbitrage : il est impossible d'obtenir, grâce à un montage financier à coût nul, un *pay-off* positif avec certitude. Un marché parfait à l'équilibre, peut présenter ponctuellement des opportunités d'arbitrage mais il se réajuste très rapidement par la loi de l'offre et de la demande avec des agents parfaitement rationnels, d'où l'unicité des prix

sur le marché. Cette hypothèse implique également que deux contrats ayant des *cash-flows* identiques aux mêmes périodes, doivent avoir le même prix. On peut donc évaluer une option financière en la répliquant par un portefeuille composé d'actifs dont la valeur de marché est connue.

- La neutralité des agents face au risque : on peut démontrer qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage et si le marché est supposé complet, il existe une unique probabilité risque-neutre \mathbb{Q} telle que le processus des prix actualisés au taux sans risque des actifs soit une martingale sous cette probabilité :

$$\tilde{P}_s = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [P_t | \mathcal{F}_s]$$

Avec :

\mathcal{F}_s la filtration de toute l'information disponible à la date s

\tilde{P}_s le prix actualisé adapté à la filtration \mathcal{F}_s

$0 \leq s \leq t \leq T$

On peut donc obtenir le prix d'un actif, en actualisant simplement au taux sans risque, l'espérance de ses flux futurs sous une probabilité risque-neutre. Cela revient alors à résoudre pour un call C à la date t :

$$C(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_f(s) ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_s \right]$$

Avec :

$r_f(s)$ le taux sans risque instantané à la date s

T l'échéance de l'option

S_t le prix du sous-jacent de l'option à la date t

K le prix d'exercice de l'option

La valeur d'une option ne dépend donc plus de l'attitude des agents face au risque, par conséquent tous les actifs possèdent le même rendement égal au taux sans risque r

$$\mu = r$$

L'univers dans lequel se produisent ces hypothèses est appelé univers risque-neutre où les probabilités ainsi que le rendement espéré des actifs et le taux d'actualisation sont déformés.

Raisonner dans cet univers n'est qu'un artifice de calcul qui permet de résoudre plus facilement l'équation de BLACK et SCHOLES. Pourtant le résultat obtenu est parfaitement valable dans l'univers réel.

- Les unités de sous-jacents sont parfaitement divisibles.
- Les ventes à découvert sont autorisées et illimitées.
- Le taux d'intérêt sans risque est constant et connu.
- On peut emprunter et prêter au même taux.

6.3. Evaluation des options financières

Nous ne démontrerons pas ici la façon d'obtenir la formule finale de BLACK et SCHOLES pour évaluer les options européennes (sans dividendes), car celle-ci a été exposée dans de nombreux ouvrages⁷.

Voici le résultat pour le prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice K, de sous-jacent S, de maturité T, de volatilité constante σ et N la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite :

$$C(S, T, K, \sigma, r_f) = S_0 \cdot N(d_1) - K \exp(-r_f T) \cdot N(d_2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + T\left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

De même pour une option de vente européenne :

$$P(S, T, K, \sigma, r_f) = -S_0 \cdot N(-d_1) + K \exp(-r_f T) \cdot N(-d_2)$$

Ces résultats vont être largement utilisés par la suite.

6.3.2 Limites

L'évaluation des options cachées par des options financières évaluées par des formules fermées dérivées de BLACK et SCHOLES, possède de nombreuses limites et hypothèses qu'il ne faut pas perdre de vue. En effet, il n'est pas évident que les hypothèses nécessaires à l'évaluation d'options financières soient acceptables dans le cas des options du contrat d'assurance, même si leur pay-off peut-être répliqué par des combinaisons d'options standards. On peut s'interroger sur la réalité de ces hypothèses connaissant les particularités des options cachées suivantes :

- l'absence d'un marché organisé et liquide pour ce type d'options.
- l'absence d'opportunité d'arbitrage et de parfaite liquidité, modifiée par l'existence de contraintes fiscales et de frais d'arbitrage. Les contrats d'assurance vie ne peuvent pas être arbitrés facilement et à n'importe quel moment, d'où des comportements de rachat qui ne dépendent pas uniquement de la valeur du contrat, et donc l'exercice d'une option qui n'est pas uniquement fonction du sous-jacent.
- l'absence de rationalité parfaite des assurés, où l'aversion au risque en matière de mortalité n'est pas comparable à celle du risque financier dû à la volatilité des marchés financiers. En particulier le contrat d'assurance est

7. Voir HULL, J.C. (1989). *Options futures and other derivative securities* par exemple.

un produit complexe, dont la valeur réelle n'est pas toujours évaluable ou connue par l'assuré. Celui-ci devrait connaître parfaitement les politiques financières et commerciales de l'entreprise pour ajuster son comportement, mais celles-ci dépendent du comportement de l'assuré lui-même. Même dans un univers risque-neutre où tous les actifs possèdent le même rendement⁸, la réalité du portefeuille à une date donnée ne permet pas à l'assuré, détenteur de l'option, d'évaluer parfaitement sa valeur.

- Les participations aux bénéfices discrétionnaires⁹ déconnectent la rentabilité financière de la rentabilité du contrat et ne sont pas anticipables par l'assuré.

6.3.3 Conclusion

L'adéquation entre une option financière et une option implicite à un contrat d'assurance n'est donc pas parfaite, et les hypothèses nécessaires à son évaluation amplifient encore les divergences. Certaines études auraient montré que si l'on évalue la valeur d'une garantie par réplication de celle-ci par un portefeuille d'obligation, il serait plus juste de se situer dans un contexte où cette couverture est réellement mise en place et donc ajustée également régulièrement.

C'est pourquoi dans la seconde partie, nous chercherons à nous affranchir de ces formules fermées. En effet, le fait de générer des scénarios stochastiques pour ensuite appliquer la méthode de MONTE-CARLO, permet d'intégrer directement dans la projection des cash-flows la valeur spéculative de ces garanties, tout en restant facilement décomposable en valeur intrinsèque et valeur temps.

Toutefois, dans un contexte opérationnel où le coût et le temps de calcul prennent une part non négligeable, l'utilisation de méthodes certes simplificatrices mais reconnues, reste justifiée pour intégrer facilement un caractère stochastique indispensable pour ce type d'évaluation.

8. Correspondant à la courbe des taux sans risque (que l'on suppose connue par l'assuré)

9. Qui ne sont pas réglementaires ou contractuels mais dépendent de la politique de l'assureur en fonction de nombreux paramètres financiers, concurrentiels...

6.4 Time Value of financial Option and Guarantee

L'une des garanties implicites au contrat d'assurance est celle relative à la revalorisation des contrats d'assurance vie et décès. Que ce soit le taux technique pour les contrats de type décès ou survie, ou le Taux Minimum Garanti (TMG) pour les bons de capitalisation, c'est le taux contractuel auquel la réserve est revalorisée. Ce taux peut être fixé jusqu'à l'échéance, sur une durée fixée, ou varier annuellement. A cela s'ajoute l'effet éventuel de la participation aux bénéfices (PB). La projection de la PB discrétionnaire¹⁰ future nécessite une hypothèse supplémentaire pour déterminer le pourcentage complémentaire des rendements qui sera reversé à l'assuré. On appellera « Marge actionnaire » la partie des produits financiers non redistribués¹¹. La participation bénéficiaire future est alors obtenue par différence entre le rendement financier attendu donné par le vecteur *certainty-equivalent*, et la somme de la revalorisation garantie et de la marge actionnaire.

10. Rappel : au Luxembourg la PB réglementaire n'existe pas, elle est purement discrétionnaire mais pourtant incitée par la concurrence.

11. Car dans le cas du calcul de la MCEV, on valorise les profits futurs espérés redistribuables aux actionnaires, dans une logique de run-off qui ne nécessite pas de dotation à la réserve pour autofinancement futur. Toutefois, le rendement réel pour l'actionnaire est supérieur car il faut tenir compte de l'effet de levier important dû au fait qu'il n'a pas décaissé le montant des provisions investies.

6.4. Time Value of financial Option and Guarantee

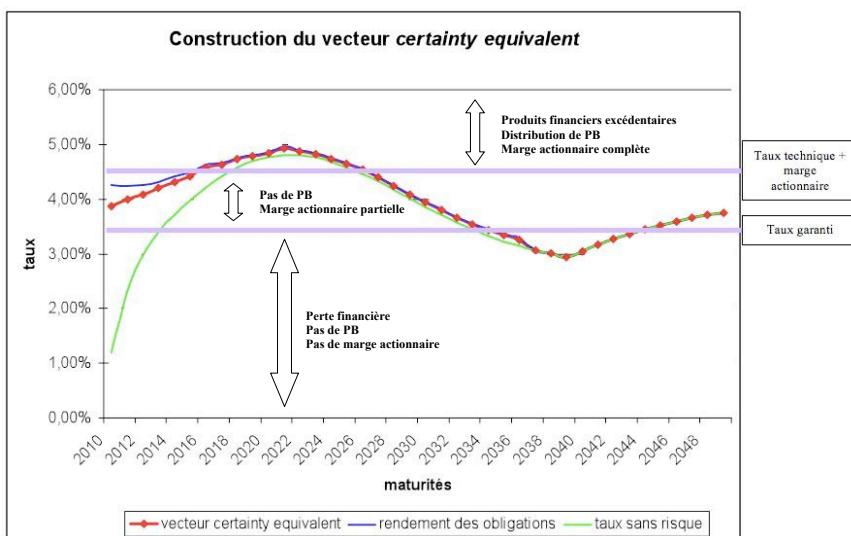


FIGURE 6.4.1: Représentation des seuils de revalorisation des contrats par rapport au rendement moyen attendu du portefeuille d'actifs

La modélisation du scénario moyen dans PROPHET ne tient compte que de la valeur intrinsèque d'une option qui répliquerait ou couvrirait le coût de la revalorisation des contrats, et par différence déduirait celui de la PB. **Par contre on ne valorise pas encore la valeur spéculative d'une telle garantie**, qui représente l'incertitude sur l'évolution future, et donc une opportunité supplémentaire de profit.

On va donc isoler : valeur spéculative = prix de l'option - valeur intrinsèque
 De cette manière on améliore la lacune majeure d'un scénario déterministe, qui est de considérer que la volatilité des résultats est nulle. En captant cette volatilité du taux d'intérêt, on mesure donc une partie du caractère aléatoire du rendement attendu. Plus la volatilité est élevée, et plus la possibilité pour le sous-jacent d'évoluer favorablement est élevée, donc toute chose égale par ailleurs, la valeur spéculative sera importante et donc également le prix de l'option.

La *Time Value of financial Option and Guarantee* (TVOG) doit comprendre la valeur spéculative de cette garantie. On verra plus tard que la valeur spéculative de la *Guaranteed Annuity Option* (GAO) est aussi à inclure dans la TVOG. **Cependant dans le calcul du Best Estimate, nous n'avons pas besoin de faire cette distinction et nous traiterons donc séparément le calcul du GAO.**

6.4.1 Rappel sur les options de taux

Lorsque le sous-jacent n'est pas directement un actif mais un taux d'intérêt, la terminologie des options est différente, même si le principe des options d'achat et de vente reste identique.

6.4.1.1 Cap et Caplet

Un *Caplet* est une option d'achat sur la réalisation future d'un taux sous-jacent r_t (souvent Libor ou Euribor). A maturité T, il paye l'écart entre la réalisation de ce sous-jacent et du prix d'exercice K (le strike).

$$Pay-off(T) = \max(r_T - K; 0)$$

Un *Cap* est une séquence de même prix d'exercice et de même sous-jacent. On retrouve ainsi la structure d'un swap car il verse des flux réguliers dans le temps, en fonction de la valeur d'un taux financier (on parle parfois de *Cap Vanille* tout comme les *Swap Vanilla*). Les *Cap* permettent donc de se couvrir contre une hausse des taux.

Exemple :

Prenons l'exemple d'un emprunt à taux variable. Il bénéficiera d'une éventuelle baisse des taux puisque sa dette est indexée sur celui-ci, et le risque pour l'emprunteur est donc une hausse des taux.

Pour se couvrir il va donc acheter un *Cap* dont l'échéancier sera le même que le remboursement de son emprunt. En cas de hausse, son option sera dans la monnaie, d'autant que son coût supplémentaire sur l'emprunt, si sa couverture est parfaitement efficace : on dit qu'il est "cappé".

6.4.1.2 Floor et Floorlet

Un *Floorlet* est une option de vente sur la réalisation future d'un taux sous-jacent r_t . Le pay-off à la maturité T est dans ce cas :

$$pay-off(T) = \max(K - r_T; 0)$$

De même, un *Floor* est une séquence de *Floorlets* de même prix d'exercice et de même sous-jacent. A l'inverse du *Cap*, il permet donc de se couvrir contre une baisse des taux.

6.4.2 Modélisation de la revalorisation par le taux garanti et par la participation bénéficiaire

On fait ici l'hypothèse que l'assureur conserve son mode de calcul de la PB avec une marge actionnaire cible fixe dans le temps.

Dans un premier temps, on va chercher à répliquer le mécanisme de revalorisation avec un portefeuille d'options dont l'évaluation stochastique est possible. On évalue donc ces options avec la formule usuelle de BLACK et SCHOLES sous les hypothèses sous-jacentes nécessaires à son utilisation. Il faut donc admettre que le scénario projeté par une seule trajectoire peut bouger en réalité, par l'existence d'une volatilité, qui ne peut pas être captée de façon déterministe. On extrait ensuite la valeur temps de l'obligation qui constituera un élément supplémentaire dans le calcul du *Best Estimate*, étant donné que l'engagement s'en voit augmenté.

Tout le comportement de revalorisation d'un contrat est donc scindé entre la partie intrinsèque du scénario moyen projeté, et la valeur spéculative appartenant à la TVOG.

6.4.2.1 Revalorisation par le taux garanti

Pour un taux de revalorisation garanti fixé g , le coût de cette garantie dépend de l'évolution du taux de rendement r_t (égal au vecteur *certainty-equivalent* dans notre cas). Le taux garanti étant variable pour chaque contrat en fonction de sa date de souscription, il faut donc raisonner par poche de taux, et répéter l'opération pour chaque gamme de taux.

Lorsque r_t est inférieur au taux garanti, la valeur de l'option doit modéliser le fait que l'assureur devra compenser par ses fonds propres l'insuffisance de rentabilité financière obtenue (limitée à g), afin d'honorer sa garantie. Par contre si ce rendement est supérieur au taux garanti, alors il n'aura rien à ajouter et son coût sera nul. Le coût de cette garantie se résume donc comme :

$$CoG = \begin{cases} g & \text{si } r_t \leq 0 \\ r_t - g & \text{si } 0 < r_t < g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le *pay-off* de l'option représente le coût de la garantie pour un euro de réserve mathématique, et correspond donc à la vente d'un *Floor* dont le prix d'exercice est égal au taux garanti g , avec r_t le rendement attendu comme sous-jacent.

On décompose ces flux en une série d'options de maturités croissantes. Le pas de cette série doit être suffisamment petit pour que l'hypothèse que l'on puisse couvrir cet engagement avec des options européennes, et donc pouvoir les

évaluer en utilisant BLACK et SCHOLES, ne soit pas réductrice. En l'occurrence un pas mensuel permet d'être cohérent avec le pas de projection des *cash-flows* dans PROPHET.

Pour une maturité t croissante de 1 à T on a donc le coût de la garantie :

$$CoG_t = Mathres(t) [g.N(-d_2) - r_t.N(-d_1)]$$

¹²

$$d_1 = \frac{\ln(r_t/g) + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

On en déduit le coût global de la garantie par la somme actualisée de la valeur des options futures estimée donnée par :

$$CoG = \sum_{t=1}^T CoG_t.P(0,t)$$

Avec :

Mathres(t) la réserve mathématique projetée entre t-1 et t

σ la volatilité du sous-jacent supposée constante

N la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite

$P(0,t)$ le prix d'une obligation zéro-coupon au taux sans risque de maturité t, celle-ci représente l'actualisation entre t et la date d'évaluation actuelle.

T la durée de la projection

Pour extraire la valeur intrinsèque et ne conserver que la valeur spéculative, on retranche à l'option pour chaque date t : $Mathres(t). (g - r_t)^+$

On obtient finalement la valeur temps pour une poche de taux garanti g :

$$CoG^{spec} = \sum_{t=1}^T P(0,t). [CoG_t - Mathres(t). (g - r_t)^+]$$

6.4.2.2 Revalorisation par la participation bénéficiaire discréSSIONnaire

On réplique maintenant les flux de participation aux bénéfices, qui dépendent directement de l'hypothèse de distribution de la marge actionnaire *SHM*. Celle-ci est supposée connue et fixée dans le temps.

12. on n'actualise pas le prix d'exercice comme dans la formule standard avec $\exp(-rT)$ car c'est ici un pourcentage de la réserve mathématique à maturité.

6.4. Time Value of financial Option and Guarantee

On va donc redistribuer tout le rendement dépassant $g+SHM$. Du point de vue des flux finaux perçus par l'assureur, seule la partie de la marge actionnaire est conservée au maximum. Ce schéma peut être reproduit par l'achat d'un *bull-spread*, c'est-à-dire la combinaison de l'achat d'un *Caplet* de prix d'exercice g , et la vente d'un second *Caplet* de prix d'exercice $g+SHM$. Le portefeuille constitué devient alors :

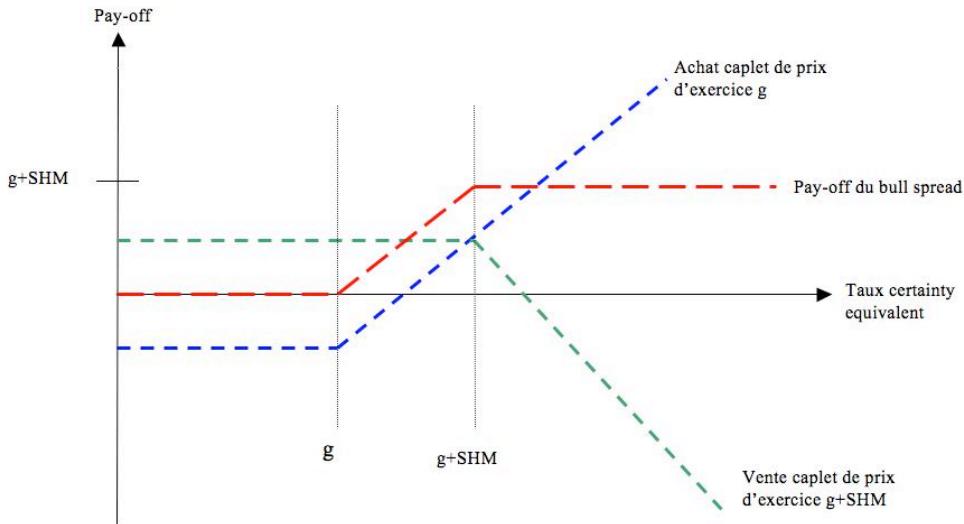


FIGURE 6.4.2: Construction d'un Bull Spread à partir d'options d'achat et de vente

Notons qu'en général, un *bull spread* est utilisé lorsque l'on anticipe des mouvements neutres ou haussiers. En théorie l'achat d'un *bull spread* est débiteur car le prix d'une option d'achat est inversement proportionnelle à son prix d'exercice. On peut donc construire le même schéma de flux avec des options de vente, qui sera créditeur, mais dans notre cas ces options fictives existent déjà et leurs primes d'acquisition sont nulles.

- Le prix du *call* 1 acheté est obtenu à nouveau avec :

$$C_1(r, g, t, \sigma) = r_t.N(d_1) - g.N(d_2)$$

- La valeur temps au global pour ce call s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} CoPB_1 &= \sum_{t=1}^T P(0, t). [Mathres(t).C_1(r, g, t, \sigma) - Mathres(t).(r_t - g)^+] \\ &= \sum_{t=1}^T P(0, t).Mathres(t). [C_1(r, g, t, \sigma) - (r_t - g)^+] \end{aligned}$$

- De même pour le *call* 2 vendu, de prix d'exercice $g+SHM$, on obtient :

$$CoPB_2 = \sum_{t=1}^T P(0, t).Mathres(t) \cdot [C_2(r, g + SHM, t, \sigma) - (r_t - (g + SHM))^+]$$

- On fabrique ensuite le *bull spread* et on en déduit sa valeur temps par :

$$CoPB = CoPB_2 - CoPB_1$$

6.4.2.3 Revalorisation totale

Finalement si l'on agrège les deux mécanismes de revalorisation (taux garanti et PB), on obtient une valeur temps finale qui constituera la TVOG relative à la revalorisation comme :

$$CoRevalorisation = CoG + CoPB$$

Le portefeuille de réPLICATION ainsi constitué se représente de la manière suivante :

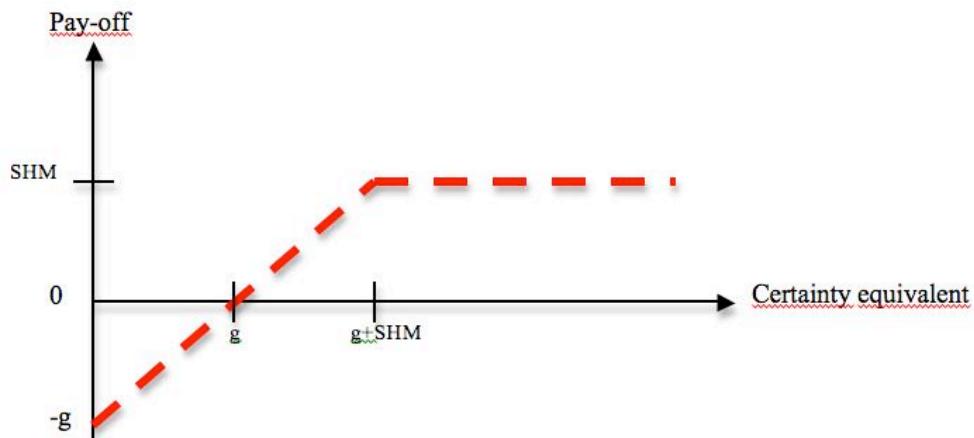


FIGURE 6.4.3: Pay-off du portefeuille de réPLICATION de la revalorisation des contrats

Le flux final pour l'assureur est donc borné par $-g.Mathres(t)$ et $SHM.Mathres(t)$. On reconnaît également que ce pay-off peut aussi être répliqué par une position longue sur un contrat à terme et une position courte sur une option d'achat de prix d'exercice $g+SHM$.

Cela se démontre rapidement à partir de la relation de parité *call/put* en $t = 0$:

$$P(S, K, T, \sigma) + S_0 = C(S, K, T, \sigma) + K.e^{-r_f T}$$

Avec :

- P le prix du *put*
- S_t le prix du sous-jacent en date t
- K le prix d'exercice
- T la maturité des options
- σ la volatilité du sous-jacent
- C le prix du *call*
- r_f le taux sans risque

Si l'on combine la vente du put de prix d'exercice g , avec l'achat du call de même prix d'exercice, la relation de parité en t nous retourne :

$$C_t(S, g, T, \sigma) - P_t(S, g, T, \sigma) = S_t - g \cdot e^{-r_f(T-t)}$$

c'est-à-dire le *pay-off* à maturité T d'une position longue sur un contrat à terme de prix d'exercice g :

$$S_T - g$$

Comme la valeur temps d'un contrat à terme est nulle étant donné que l'on s'engage à un prix d'achat dès la souscription de ce contrat, on pourrait simplifier tout le calcul en ne mesurant que la valeur spéculative de la vente de l'option d'achat de prix d'exercice $g + \text{SHM}$. On a vérifié qu'en pratique les valeurs temps du *put* et du *call* de même prix d'exercice se compensent parfaitement période par période.

6.4.3 Résultats et sensibilités

Voici les résultats par poches de taux que nous obtenons. Pour gommer l'effet volume des différentes poches et étudier les sensibilités de la TVOG en fonction de la variation du taux garanti (ainsi que pour des raisons de confidentialité), nous l'exprimons en pourcentage des provisions mathématiques.

Poche de taux garanti	TVOG (en % des PM)
4%	0.21%
3.5%	0.31%
3.25%	2.65%
2.75%	2.11%
2.5%	0.89%
2.25%	2.17%
1.75%	0.35%

6.4. Time Value of financial Option and Guarantee

Les résultats ne paraissent pas homogènes et intègrent à la fois l'effet de la revalorisation et celui de la participation bénéficiaire. Faisons donc de même avec plus de précisions sur les résultats.

Poche de taux garanti	CoG	CoPB1	CoPB2
4%	0.41%	-0.41%	0.21%
3.5%	0.13%	-0.13%	0.31%
3.25%	1.17%	-1.17%	2.65%
2.75%	0.51%	-0.51%	2.11%
2.5%	0.11%	-0.11%	0.89%
2.25%	0.18%	-0.18%	2.17%
1.75%	0.0037%	-0.0037%	0.35%

On pourrait s'attendre à ce que le coût de la garantie due à la revalorisation au taux garanti (CoG) soit croissante avec celui-ci. Or on observe des valeurs plus importantes pour les taux 3.25% et 2.75%, avec respectivement 1.17% et 0.51%.

Une composante que nous avons ignoré jusqu'ici et qui explique ce phénomène, est la duration des provisions mathématiques. En effet plus les provisions vont s'éteindre rapidement et moins la valeur spéculative sera élevée. En effet, la valeur spéculative d'une option est une fonction croissante de la maturité de celle-ci. Le montant de la TVOG est donc plus sensible aux options les plus longues. Le volume des provisions mathématiques que l'on applique sur des maturités longues est donc déterminant. Comme les maturités des options sont croissantes, plus la provision sera encore importante à long terme, plus la TVOG sera élevée. Comme les poches de taux regroupent différents types de produits, la duration de la provision mathématique n'est pas du tout homogène entre les poches.

6.4. Time Value of financial Option and Guarantee

Voici l'exemple pour trois poches de taux :

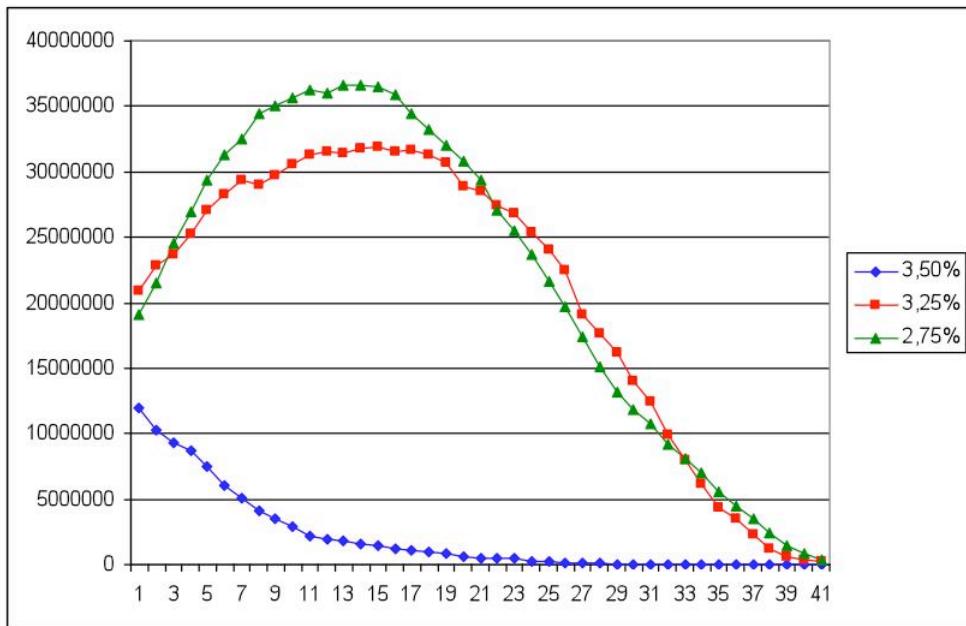


FIGURE 6.4.4: Evolution par année des provisions mathématiques selon les différentes poches de taux technique

On comprend bien pourquoi la TVOG de la poche à 3.5% est anormalement basse par rapport aux deux autres : la décroissance de sa réserve mathématique est bien plus rapide que les deux autres poches.

En revenant au tableau des résultats, on constate également que l'option qui réplique le taux garanti (CoG) et celle qui réplique une partie de la participation bénéficiaire (CoPS1) se compensent parfaitement comme nous l'attendions. Au final il ne reste plus que l'effet de la dernière option (CoPS2). Pour celle-ci on devrait constater le phénomène inverse que pour CoG, c'est-à-dire que plus le taux garanti est faible, plus la distribution de PB sera élevée (proportionnellement également la TVOG). Or l'effet de la duration va également s'appliquer ici et venir bouleverser les résultats.

On peut également, à titre d'information, avoir une approximation du montant de la participation aux bénéfices distribuée dans le scénario moyen, donnée par la valeur intrinsèque de CoPS2 qui réplique le pay-off des PB de l'assuré. Mais ce montant est inexact car d'une part il ne tient pas compte parfaitement de l'effet sur les prestations futures, et d'autre part on sait que le scénario central capte mal l'asymétrie de la participation aux bénéfices.

6.4.4 Conclusion :

Cette méthode reste néanmoins assez approximative et ne constitue qu'un aménagement de la méthode déterministe. En effet l'utilisation de la formule fermée de type BLACK et SCHOLES reste dépendante de nombreuses hypothèses, et est extrêmement sensible à l'estimation de la volatilité.

De plus, pour la participation bénéficiaire, on ne corrige ici que la valeur temps. La valeur intrinsèque est supposée être mesurée correctement. Or ne considérer qu'un scénario moyen ne permet pas de capter l'asymétrie, c'est-à-dire le fait que si l'on tenait compte de la volatilité du processus de taux de rendement, on ne verserait pas du tout de participation aux bénéfices dans certains cas. Seul un générateur stochastique de scénario serait une estimation plus exacte, et intégrerait dans chaque scénario, la valeur intrinsèque et la valeur spéculative de toute les formes de revalorisation.

C'est pourquoi dans la seconde partie nous allons mettre en place un modèle stochastique utilisant la méthode de MONTE-CARLO, ce qui nous permettra à la fois de mesurer les deux approches et, comme on s'affranchit du calcul de la TVOG de la revalorisation, d'évaluer la précision de cette dernière. On espère ainsi valider le modèle déterministe utilisé en pratique dans la société pour le calcul du *Best Estimate*, de la MCEV et du *Swiss Solvency Test*.

Notons au passage que dans le cas du *Swiss Solvency Test*, il faudra être prudent lors du calcul de la TVOG. En effet le calcul de la marge de solvabilité appliqué aux compagnies suisses ne reconnaît pas la distribution de la participation aux bénéfices discrétionnaires. Dans ce cas il est nécessaire de modifier le calcul de la TVOG de manière à ne tenir compte que de la revalorisation au taux garanti¹³.

13. répliqué par la simple vente d'une option de vente de prix d'exercice égal à ce taux garanti.

6.5 Guaranteed Annuity Option

6.5.1 Définitions et théorie

On assiste actuellement à un essor de la complémentaire retraite et du recours au 3^e pilier (épargne privée) basée sur le principe de capitalisation pure. Soutenu par des avantages fiscaux, la rente viagère différée devient un produit essentiel pour anticiper une retraite confortable et décorrérer sa rente de l'impact de la démographie qui met à mal le premier pilier de la Sécurité Sociale, généralement basé sur la répartition (pure ou échelonnée) dans les pays dit "Bismarckiens"¹⁴.

On peut anticiper une hausse probable de ce type de produits, historiquement en assurances de groupes, mais également de plus en plus sur l'assurance vie individuelle. Jusqu'à récemment au Royaume-Uni, il était souvent préférable de sortir en capitaux qu'en rente au taux garanti, étant donné que les taux longs restaient très élevés et que les investisseurs n'anticipaient pas une baisse dans le futur. Mais depuis une dizaine d'années (surtout depuis 1998), la baisse des taux d'intérêt a inversé la tendance et l'option accordée à l'assuré est devenue fortement dans la monnaie. A cela s'ajoute le phénomène d'allongement de la durée de vie, qui n'est certes pas nouveau, mais qui a été mis en évidence par une actualisation et une adaptation bien meilleure des tables de mortalité. Par conséquent la prise en compte de ce risque entraîne une dotation supplémentaire des réserves et une surveillance toute particulière de ces garanties.

Or proposer une rente viagère différée comporte des risques exogènes bien connus des assureurs, mais sous une forme assez différente, ce qui implique une méthode de modélisation de ce risque propre aux rentes viagères. Rappelons que le calcul du *Best Estimate*, tel que nous l'avons présenté précédemment, nécessite la prise en compte de toutes les Options et Garanties comprises dans les polices commercialisées. Une rente différée en phase de constitution, contient du risque pour l'assureur qui s'est engagé sur un taux de rente garanti au moment de la souscription. Attention, il faut donc distinguer les produits où le taux de la rente n'est pas garanti, par exemple un contrat d'épargne avec possibilité de sortir en rente au taux du marché au moment de la conversion, avec les produits de rente différée où les arrérages futurs sont connus dès la souscription, sous réserve que la police ne soit pas réduite¹⁵ à la maturité du différé, et pour autant qu'il n'y ait pas de PB en cours de rente.

BOYLE et HARDY modélisent la valeur d'une telle option à maturité par :

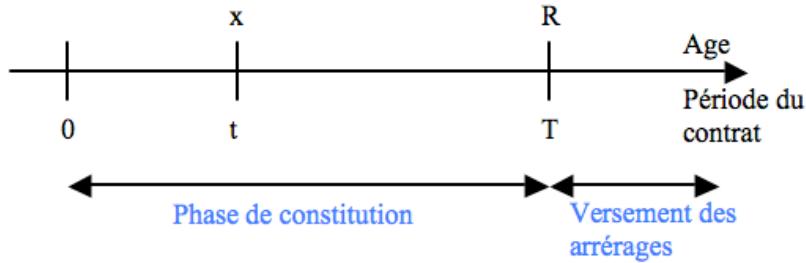
$$G(T) = \frac{S(T) \cdot (a_R(T) - \bar{g})^+}{\bar{g}} 1_{\tau_x > T-t}$$

14. Pays où l'Etat a une part importante dans le régime de retraite.

15. Une police est réduite lorsque les paiements périodiques prévus par le contrat n'ont pas été honorés par le souscripteur. L'engagement de l'assureur envers le bénéficiaire du contrat s'en voit donc diminué, généralement au prorata de la partie des primes versées au contrat.

Avec :

- t la date actuelle,
- T la date de fin du différé,
- τ_x variable aléatoire de la durée de vie future d'un individu d'âge x en t avec $P(\tau \in [k-1; k]) =_{k-1} p_x \cdot q_{x+k-1}$ i.e la probabilité de survivre jusqu'à $x+k-1$ et de décéder avant $x+k$,
- $S(T)$ la valeur du capital constitutif de la rente à l'échéance,
- $a_R(T)$ le taux de conversion de la rente calculée en T (hypothèses de mortalité et taux technique) d'un individu d'âge R,
- R l'âge de l'assuré à la date T,
- \bar{g} la valeur du taux de conversion de la rente garantie à la souscription ($t=0$),



Hors frais et fractionnement de la rente, g correspond, pour une rente à terme échu à $T|a_{x-t}$ la valeur actuelle probable d'une rente viagère différée de T années pour un individu d'âge $x-t$.

Expliquons pourquoi l'on peut modéliser ce flux de la sorte.

La partie du numérateur $(a_R(T) - g)^+ = \max(a_R(T) - g; 0)$ est le pay-off d'une option d'achat de prix d'exercice g et de sous-jacent $a_R(T)$. Ce pay-off représente alors le gain que lui procure cette option fictive par unité monétaire d'arréage.

Avec l'hypothèse de rationalité parfaite, l'assuré va exercer son option fictive, si et seulement si la rente avec le taux garanti est plus avantageuse pour lui, c'est-à-dire si $a_R(T) > g$.

En effet, toute chose égale par ailleurs, plus le taux de conversion est élevé et plus l'arréage est petit. Il existe bien une relation inverse entre les deux qui se traduit simplement par :

$$\frac{S(T)}{g} = M$$

Avec M le montant de l'arréage annuel.

On se rappelle en effet que la prime pure unique nécessaire pour obtenir une rente viagère immédiate à terme échu pour un individu d'âge x se calcule comme :

$$\begin{aligned} PPU &= M.a_x \\ &= M \cdot \sum_{k=1}^{\omega} \left(\frac{1}{1+i} \right)^k k p_x \\ &= M \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x} \end{aligned}$$

Avec :

- i le taux technique appliqué à la rente
- ω l'âge ultime la table de mortalité
- N et D les nombres de commutation

Le taux de conversion diminue bien en fonction de l'âge, étant donnée que la durée probable de versement de la rente diminue, et diminue également en fonction du taux technique car la revalorisation du capital à distribuer sera plus importante et il faudra un capital plus faible pour obtenir le même arrérage.

Le GAO peut donc augmenter à cause de trois facteurs :

- une baisse du taux technique par rapport à celui garanti,
- une baisse de la mortalité qui entraîne une augmentation de la longévité et donc du nombre d'arrérage espéré non anticipé,
- une augmentation du rendement des actifs qui augmente l'assiette sur laquelle est calculée la rente. Si la transformation en rente présente déjà un avantage comparatif pour l'assuré, le coût supplémentaire pour l'assureur n'est qu'amplifié.

Si la garantie est profitable à l'assuré, par l'hypothèse de rationalité des individus il exercera cette option et son gain sera donc de $(a_R(T) - g)$ euros par arrérage.

L'arrérage garanti étant de $\frac{S(T)}{g}$, on obtient alors le pay-off total de l'option à maturité :

$$G(T) = \frac{S(T) \cdot (a_R(T) - g)^+}{g} \mathbf{1}_{\tau_x > T-t}$$

Exemple :

- Capital disponible à l'échéance : $S(T) = 1000$ euros
- Taux de conversion garanti $g = 5$
- Taux de conversion avec hypothèses actuelles sur le marché : $a_R(T) = 10$

S'il pouvait transformer son capital en rente aujourd'hui, il aurait le choix entre le taux garanti par son assureur qui nécessite 5 euros pour 1 euro d'arréage viager, ou sortir du contrat avec son capital et le transformer au taux du marché chez un assureur concurrent qui demandera une prime unique correspondant à 10 euros pour 1 euro d'arréage.

L'assuré fait donc un gain de (10-5) euros par euro d'arréage, c'est-à-dire $(10 - 5) \cdot \frac{1000}{5} = 1000$ euros car une rente équivalente lui aurait coûté 2000 euros de prime unique sur le marché.

Pour son capital de 1000 euros cela représente un arréage annuel supplémentaire de $\frac{1000}{5} - \frac{1000}{10} = 100$ euros.

Pour avoir un ordre de grandeur, avec un taux technique de 3.5% et une mortalité suivant la table belge HS68-72, on obtient $a_{60} = 10.78811$ et $a_{70} = 6.94373$.

Il faut maintenant évaluer $G(t)$ la valeur de cette même option en date t :

⇒ voir annexe : démonstration du GAO. La démonstration étant complexe mais claire, l'article : "BOYLE P., HARDY M., *Guaranteed Annuity Options*, 2003" n'est repris qu'en annexe.

6.5.2 Mise en pratique

Le résultat de la démonstration, citée en annexe, est donc finalement :

$$G(t) = \frac{T-t p_x \cdot S(t)}{g} \cdot \frac{\sum_{j=1}^J j p_R \cdot C[D(t, T+j), K_j, t]}{D(t, T)}$$

Avec :

$T-t p_x$ la probabilité de survivre entre x et x+T-t

g le taux de conversion garanti

$J = \omega - R$ et ω l'âge ultime de la table de mortalité, R l'âge en T

$S(t)$ le capital constitutif de la rente en t

$D(t, T)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon qui payera un euro en date T

$C[D(t, T), K_j, t]$ le prix en t d'une option d'achat sur le coupon d'une obligation de maturité T, de prix d'exercice K_j

Ce type d'option d'achat s'évalue par une formule explicite simple si l'on se place dans un modèle de VASICEK¹⁶ pour le processus de taux qui régit le prix de l'obligation sous-jacente.

16. Voir : Partie 2, simulation de processus stochastiques

6.5. Guaranteed Annuity Option

Comme expliqué dans l'article, cette formule nécessite l'estimation des paramètres du modèle de VASICEK. Pour ceci on essaye tout d'abord de reproduire la structure par terme des taux sans risque, en minimisant le carré des écarts avec la courbe théorique donnée par VASICEK.

On calcule donc les prix de cette série d'option que l'on actualise à la date d'observation. On mesure ainsi la valeur intrinsèque et la valeur temps de cette garantie pour chaque police. On peut scinder les deux pour proprement intégrer la valeur spéculative dans le montant de la TVOG. Pour ceci on refait tourner le même programme en fixant la volatilité à zéro, isolant ainsi la valeur intrinsèque de cette option complexe.

6.5.3 Résultats sur le portefeuille

Sur l'ensemble des polices concernées, qui ne représentent pas une part importante du portefeuille, nous obtenons les résultats suivants :

Cout global (en % des PM)	9.22%
Maximum par police (en % des PM)	24.67%
Minimun par police (en % des PM)	1.10%

La valeur de l'option ici va dépendre à la fois du taux de conversion garanti, du montant du capital à convertir et de la durée du différé. Ces trois effets n'ayant rien en commun il faudrait vraiment étudier les résultats police par police.

Ce qu'il est important d'en déduire, c'est que cette option est donc loin d'être négligeable à la vue des montants obtenus.

6.5.4 Conclusion

Même si la méthode est un peu lourde à mettre en place du fait qu'elle nécessite de devoir calibrer le modèle de VASICEK, la prise en compte de cette garantie s'avère nécessaire pour les produits de rente à taux de conversion garanti sur du long terme.

Cependant les résultats obtenus sont à nuancer car toute la méthode est basée sur une hypothèse importante : la rationalité de l'assuré à convertir sa rente lorsque la sortie en capital est défavorable. Or un paramètre essentiel qui impacte cette rationalité est la fiscalité du contrat. Pour bénéficier d'avantages fiscaux, un pourcentage minimum de conversion en rente est exigé, indépendamment de l'optimisation de son capital constitutif. Sans compter qu'un assuré peut ne pas être parfaitement rationnel, ne serait-ce que pour la simple raison qu'il ne connaît pas toute l'information au moment de la conversion, ou qu'il ne prend

6.5. Guaranteed Annuity Option

pas la peine de la rechercher et de l'analyser rationnellement, influencé par son contexte social et économique.

De plus le modèle de VASICEK à un facteur ne permet pas de reproduire toutes les structures par terme des taux. En effet, il est impossible d'obtenir une courbe avec deux points d'inflexion par exemple. Or c'est ce que l'on observe ces derniers temps avec une diminution des taux à très long terme¹⁷.

17. Mais l'Institut des Actuaires publie une courbe des taux qui, par convention, ne peut avoir ce type de forme. Ils précisent : "La commission "Indices et références de marchés" de l'Institut des Actuaires a décidé de continuer à publier une courbe dont les taux à très long terme ne soient pas inférieurs aux taux à long terme en prolongeant le maximum atteint, même si ce maximum est situé avant 30 ans."

Chapitre 7

Conclusion du calcul du Best Estimate avec une méthode déterministe

La méthode déterministe a l'avantage d'être facile et moins coûteuse à mettre en place, aussi bien au niveau des hypothèses que du temps de calcul nécessaire. Cependant à la logique purement basée sur la projection des cash-flows, s'ajoute la prise en compte des options cachées. Cette dernière repose sur des simplifications liées à l'utilisation de formules fermées selon BLACK et SCHOLES, et donne ainsi un caractère stochastique analytique à ce modèle.

Le second objectif de ce mémoire sera de comparer cette approche avec une méthode purement stochastique, qui permettra de s'affranchir du calcul approximatif de la TVOG.

Nous allons donc chercher à mesurer la nature de cette simplification :

$$\Delta = BE^{\text{deterministe}} + TVOG - BE^{\text{stochastique}}$$

Il sera donc possible d'accepter et de valider le modèle déterministe si $\Delta \approx 0$.

Deuxième partie

Modélisation stochastique

La projection des *cash-flows* selon un modèle déterministe, notamment dans le calcul du *Best Estimate*, est acceptable lorsque le scénario moyen est équivalent à la moyenne des scénarios. La différence est causée soit :

- Par un jeu d'hypothèses calibrées sur un échantillon statistique trop petit.
- Un portefeuille trop petit où la mutualisation n'est pas complète et la variabilité trop forte, dont la taille ne permet pas d'appliquer raisonnablement la loi des grands nombres. Dans ce cas seule la génération de scénarios permet d'observer certaines valeurs extrêmes¹ et d'aboutir à une distribution probabiliste du risque.
- Par l'existence d'asymétrie des *cash-flows* en fonction de la réalisation d'un scénario par rapport à un autre. Le scénario moyen ne peut capter la convexité ou la concavité du résultat car l'on raisonne uniquement par les moments d'ordre un.

C'est typiquement ce dernier point qui rend impossible l'évaluation des options ainsi que la participation aux bénéfices uniquement à travers un scénario déterministe. C'est pourquoi l'utilisation de scénarios stochastiques est recommandé

La base de toute simulation stochastique consiste à créer l'aléa du modèle. Une attention toute particulière doit donc être accordée à cette étape car la qualité du générateur va entièrement dépendre du caractère aléatoire de ces nombres.

On va donc chercher à reproduire des tirages de variables aléatoires suivant certaines lois de probabilité. Une série de tirage va donc permettre, grâce au modèle, de créer un scénario à T périodes.

En reproduisant cette étape un très grand nombre de fois, nous pourrons appliquer la loi des grands nombres. Cette technique s'appelle la méthode de MONTE-CARLO.

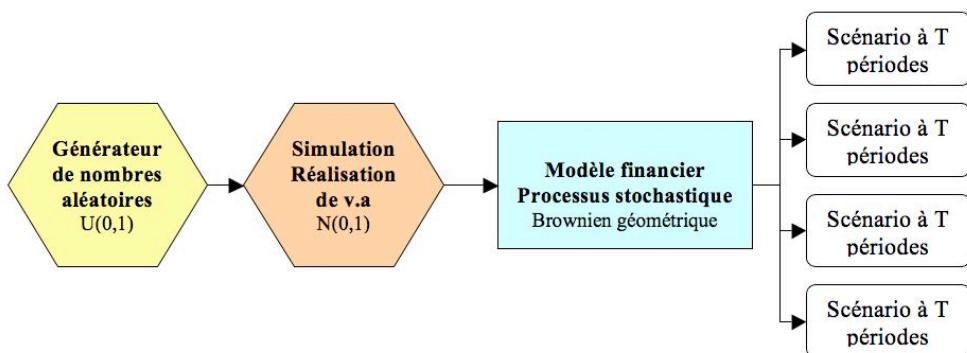


FIGURE 7.0.1: Processus mis en place pour générer des scénarios financiers stochastiques de T périodes

1. Qui suivent des lois de probabilité différentes, par exemple de type PARETO

En modélisation, il est usuel et surtout très commode de faire l'hypothèse que l'aléa est gaussien : par exemple on fait souvent l'hypothèse que les rendements des actifs financiers sont log-normaux.

On devra au final obtenir un nombre important de réalisations de variables aléatoires de loi normale centrée réduite. Il n'est pas possible de générer directement des réalisations de loi normale acceptables, et cela nécessite tout d'abord de passer par la simulation de variables de loi uniforme $U(0,1)$.

La contrainte du temps de calcul qui peut paraître futile dans certains cas, prend ici tout son sens car on parle de milliers de scénarios qui devront faire évoluer chaque police en tenant compte des interactions entre l'actif et le passif et des impacts sur les comportements de l'assuré. Dans une logique opérationnelle il faut donc optimiser et simplifier le processus théorique idéal.

Chapitre 8

Générateur de variables aléatoires

8.1 Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

Il existe différentes façons d'obtenir la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme $U(0,1)$. Toutes ces méthodes ne sont pourtant pas équivalentes et il faudra choisir celle qui offrira le meilleur rapport qualité/temps calcul. On évoquera la technique la plus simple et la plus rapide, que l'on confrontera avec une méthode plus complexe.

8.1.1 La fonction "Aléa" d'Excel

Cette fonction utilise un générateur congruentiel pseudo-aléatoire qui se définit par :

- L'initialisation de la suite : $X_0 \in \mathbb{N}^*$
- $X_{n+1} = k.X_n + p \text{ mod } m$ avec k, p, m des entiers positifs.

Il est donc pseudo-aléatoire car l'aléa va ensuite dépendre du choix de la valeur initiale X_0 appelé « la graine » pour k, p et m fixé.

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

Prenons volontairement un petit échantillon de 400 réalisations et regardons ce que nous obtenons :

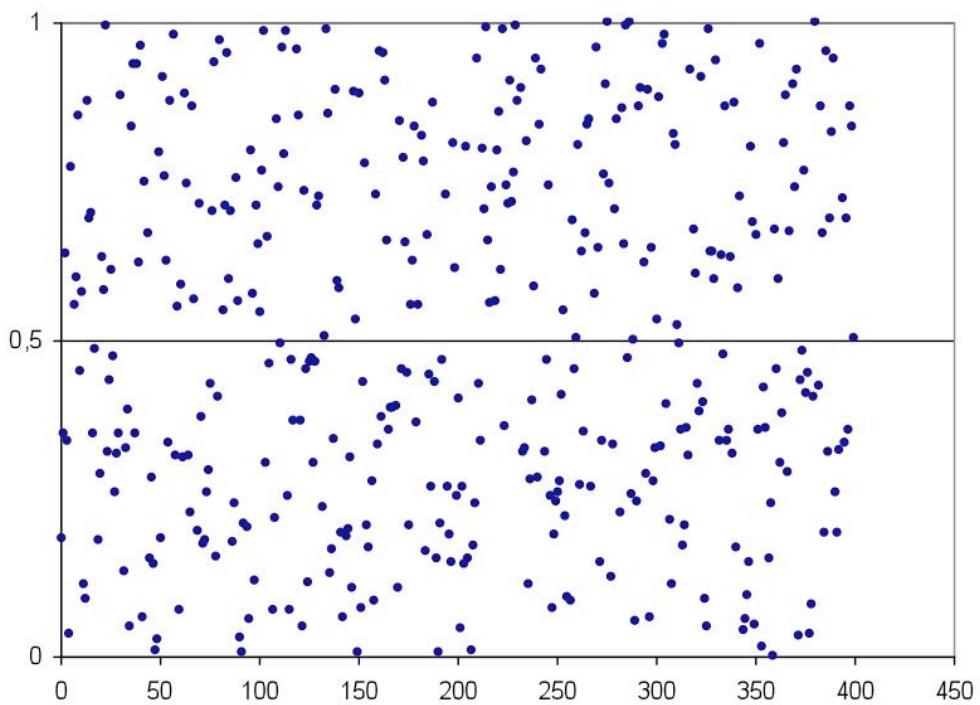


FIGURE 8.1.1: Simulation de 400 nombres aléatoires grâce à la fonction Alea()

Ce graphique représente la réalisation de chaque variable aléatoire en fonction de la simulation correspondante. On obtient bien une distribution aléatoire comprise entre $[0 ; 1]$.

8.1.2 La translation irrationnelle du Tore

On parle ici de générateur quasi-aléatoire, qui fait intervenir très facilement une suite des nombres premiers pour obtenir des simulations de vecteur à d dimensions :

$$u_n = n\sqrt{p_d} - \lfloor n\sqrt{p_d} \rfloor$$

Avec :

p_d le $d^{ième}$ nombre premier

$\lfloor \cdot \rfloor$ l'opérateur de la partie entière

n l'indice de la simulation, $n=1\dots N$

d l'indice du nombre premier qui représentera la période, $d=1\dots D$

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

Donc pour N simulations de vecteurs à D dimensions on simulera NxD variables aléatoires. On fera donc varier n de 1 à N et pour chaque n on aura une valeur pour les D périodes en faisant varier d de 1 à D.

Il nous faut donc tout d'abord la liste des D premiers nombres premiers.

Pour le même échantillon que précédemment, nous calculons la suite u_n pour $n=1\dots 400$, avec la première valeur propre (soit 2) car la dimension n'est que de 1. Nous obtenons alors :

400 simulations pour le nombre premier p1=2

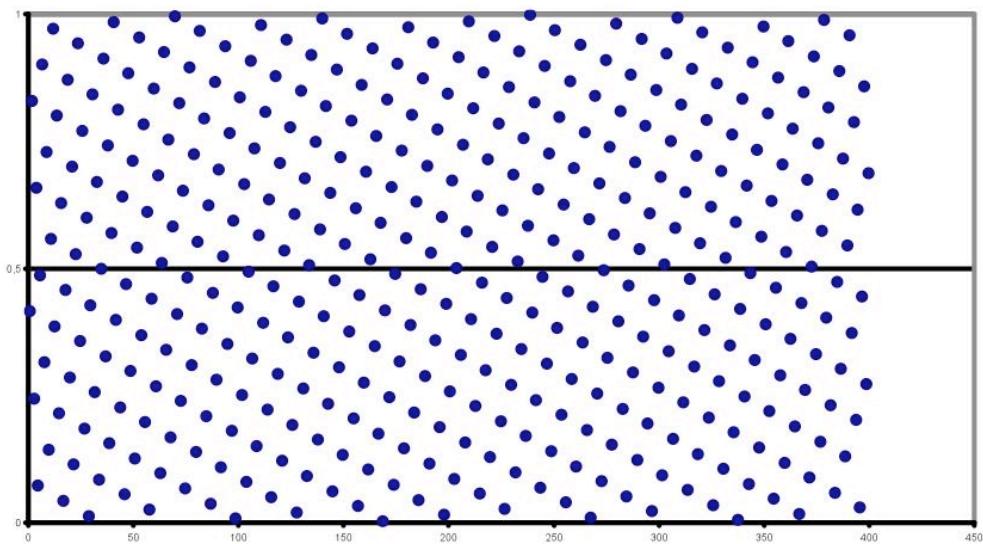


FIGURE 8.1.2: Simulation de 400 nombres aléatoires grâce à la translation irrationnelle du Tore en utilisant le nombre premier 2

On constate immédiatement que la discrépance de ce générateur est très faible.

8.1.2.1 La discrépance

La discrépance permet de mesurer l'équirépartition d'une suite de points sur $[0, 1]^n$. Plus celle-ci est faible et plus l'échantillon sera uniformément distribué.

Definition. Discrépance locale

Soit $x = (x_n)_{n \geq 1} \in [0, 1]^n$, λ_n la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^n$ et A un sous-ensemble de $[0, 1]^n$.

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

La discrépance locale d'ordre k de x par rapport à A est donné par :

$$D_k(A, x) = \frac{1}{k} \text{Card} \{i \in (1 \dots k), x_i \in A\} - \lambda_n(A)$$

On en déduit la discrépance totale :

Definition. Discrépance

Soit P l'ensemble des sous-pavés de $[0, 1]^n$. La discrépance d'ordre k de la suite x est donnée par :

$$D_k^\infty(x) = \sup \{|D_k(A, x)|, A \in P\}$$

Dans notre cas on s'en sert pour mesurer la qualité de l'équirépartition.

Definition. La suite est équirépartie si :

$$\forall A \in P : \lim_{k \rightarrow \infty} D_k(A, x) = 0$$

Cette méthode qui permet d'avoir une équirépartition semblable entraîne d'autres inconvénients que l'on peut mettre en évidence en étudiant ce que l'on obtient d'une période à l'autre. C'est-à-dire que pour un n donné, on représente les résultats obtenus pour deux nombres premiers successifs.

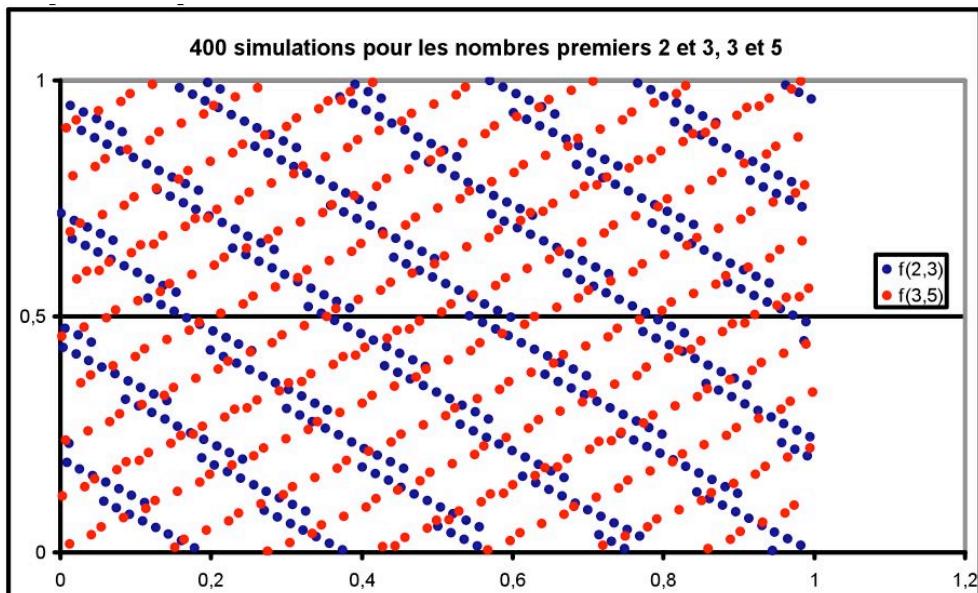


FIGURE 8.1.3: Mise en évidence de la corrélation entre les simulations utilisant la translation irrationnelle du Tore

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

On observe ainsi qu'il n'y a certainement pas indépendance entre les périodes¹, or dans la suite du simulateur, nous aurons besoin de générer des réalisations de loi normale indépendantes à partir de ces données.

8.1.2.2 Evaluation de la corrélation

Voici le corrélogramme entre deux simulations pour un nombre premier fixé, et celui terme à terme dans une même simulation. On les obtient par le calcul suivant :

$$\rho_h = \frac{\overline{cov}(u_k, u_{k+h})}{\sqrt{s^2} \sqrt{s^2}} = \frac{\sum_{k=1}^N (u_k - \bar{u})(u_{k+h} - \bar{u})}{\sum_{k=1}^N (u_k - \bar{u})^2}$$

Avec :

s^2 la variance empirique

\overline{cov} la covariance empirique

\bar{u} la moyenne empirique de l'échantillon $(u_i)_{i=1\dots N}$

$h \in [1, N - 1]$

1. Une quantification de la corrélation est disponible dans : PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J. : *Modèles financiers en assurance* p127-129.

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

- Entre deux périodes p et $p+h$ de la même simulation n : précisément on prend ici $n=1$ et $p=1$ (le premier nombre premier i.e 2)

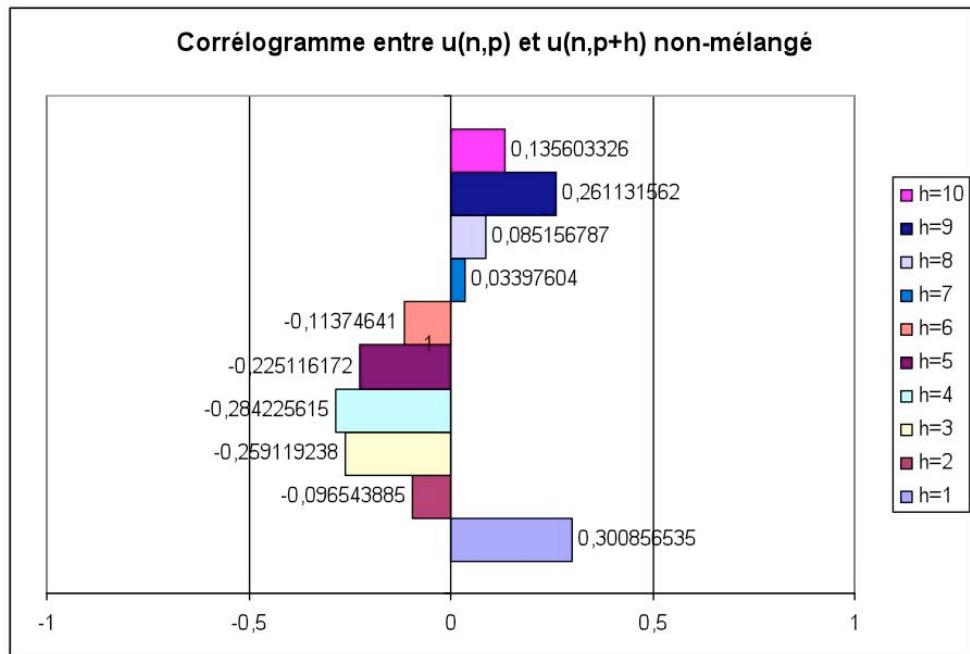


FIGURE 8.1.4: Mesure de la corrélation entre deux mêmes éléments de suites basées sur des valeurs propres différentes

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

- Entre deux simulations n et $n+h$ pour un nombre premier fixé, précisément on prend ici $n=1$ et $p=1$ (le premier nombre premier i.e 2)

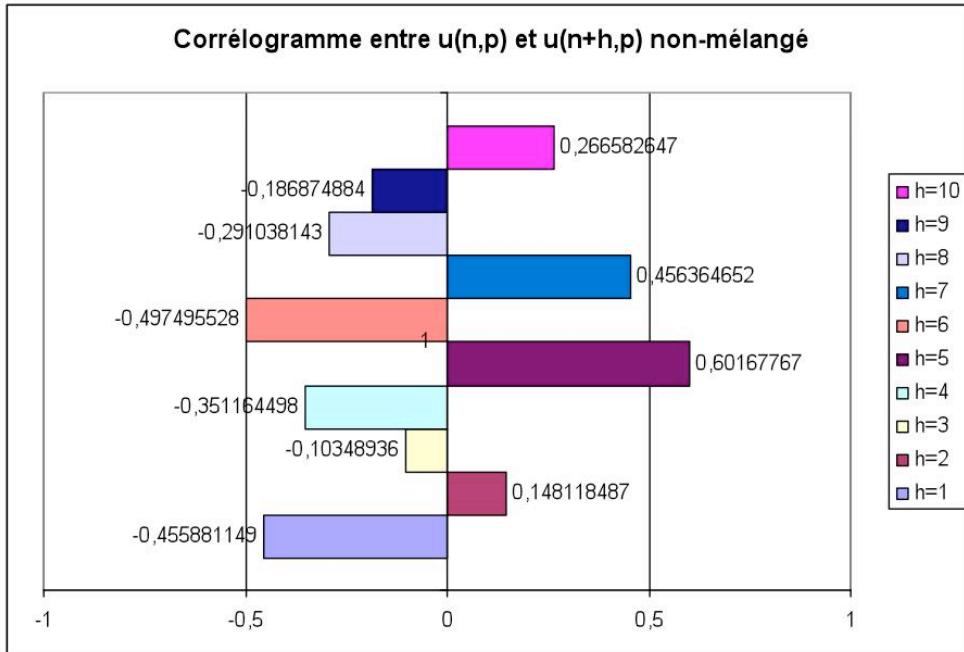


FIGURE 8.1.5: Mesure de la corrélation entre deux éléments de la suite basée sur une même valeur propre

Ces deux corréogrammes sont donc bien insuffisants en terme d'indépendance. Il faut donc trouver une alternative entre la qualité de la simulation de la translation irrationnelle du Tore et la nécessité d'indépendance.

On va donc tout simplement mélanger les simulations afin de casser l'ordre qui créait cette dépendance.

8.1.3 L'algorithme du Tore mélangé

Pour résoudre ce problème il suffit de modifier l'ordre dans lequel on va tirer les réalisations de variables aléatoires. Au lieu d'avoir u_n nous avons maintenant u_m avec m une variable aléatoire dans \mathbb{N} . Pour obtenir m nous utilisons simplement la fonction « Alea() » comme :

$$m = \gamma(N) = \text{Alea}() \times N + 1$$

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

Avec :

N le nombre total de simulations

Alea(), la fonction Excel retournant un nombre aléatoire compris entre 0 et 1

Pour le même échantillon que précédemment nous obtenons maintenant :

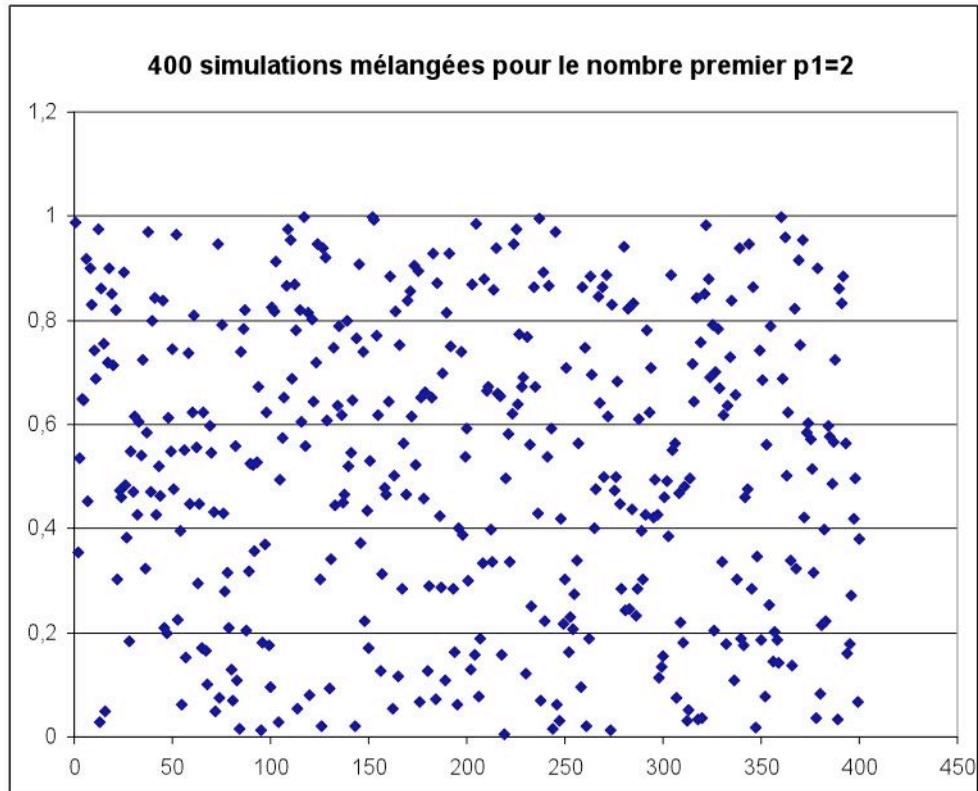


FIGURE 8.1.6: Simulation de 400 nombres aléatoires grâce à la translation irrationnelle du Tore mélangé en utilisant le nombre premier 2

8.1.3.1 Etude de la corrélation

Voici les mêmes corrélogrammes que précédemment :

- Entre deux périodes p et $p+h$ de la même simulation n , précisément on prend ici $n=1$ et $p=1$ (le premier nombre premier i.e 2)

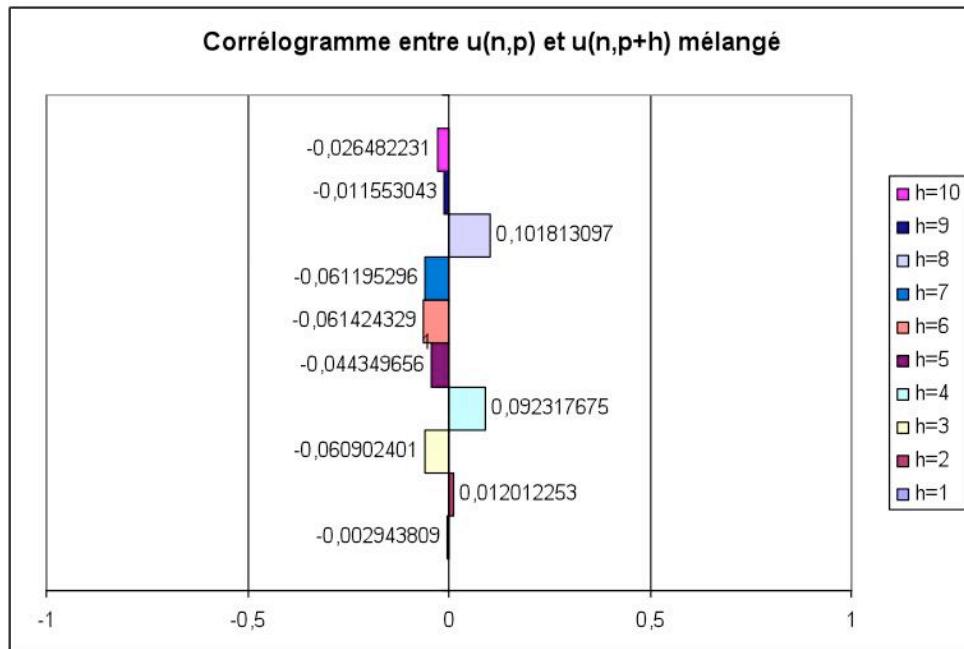


FIGURE 8.1.7: Mesure de la corrélation entre deux mêmes éléments de suites mélangées basées sur des valeurs propres différentes

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

- Entre deux simulations n et $n+h$ pour un nombre premier fixé, précisément on prend ici $n=1$ et $p=1$ (le premier nombre premier i.e 2)

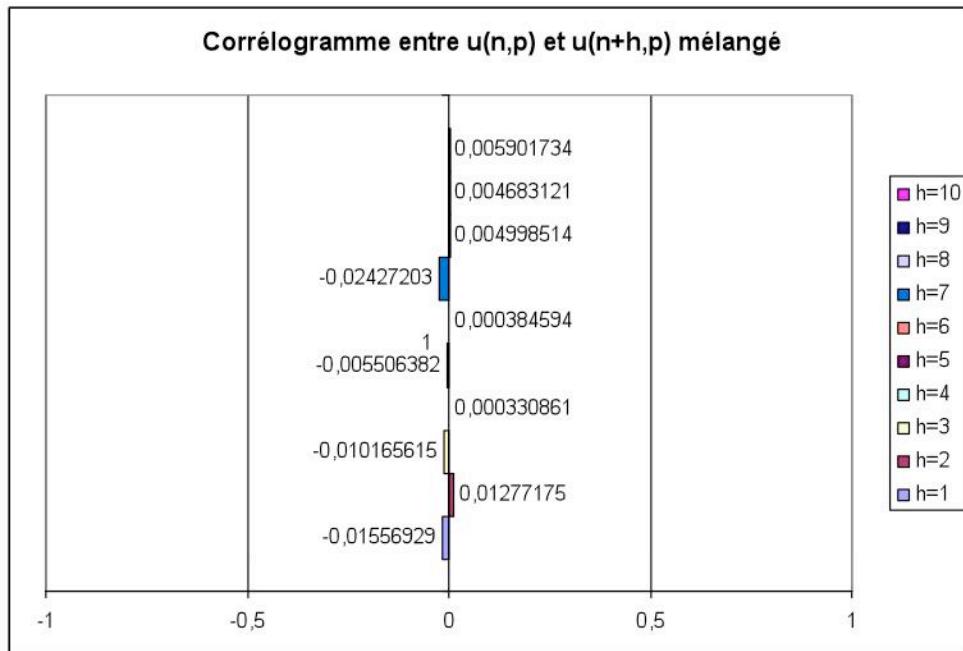


FIGURE 8.1.8: Mesure de la corrélation entre deux éléments de la suite mélangée basée sur une même valeur propre

Ceux-ci sont donc beaucoup plus satisfaisants que pour la méthode non mélangée.

Pour la dépendance période par période il n'est pas possible de la réduire en effectuant un second mélange sur le choix de la valeur propre.

8.1. Générer un nombre aléatoire entre 0 et 1

En effet nous obtenons un corrélogramme assez similaire :

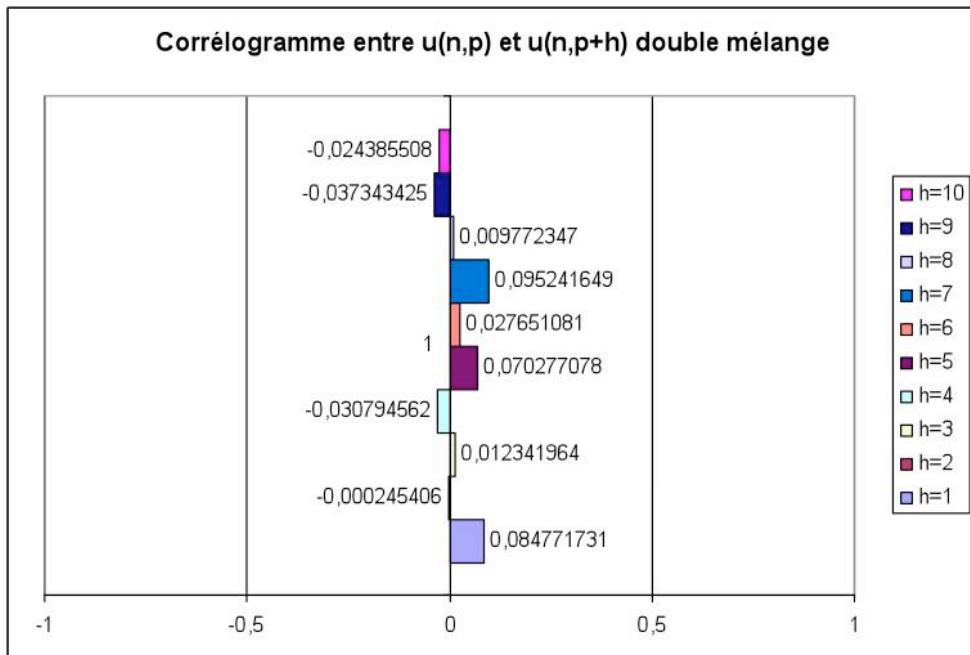


FIGURE 8.1.9: Mesure de la corrélation avec le mélange du terme de la suite et de la valeur propre utilisée

On fera l'hypothèse que la dépendance linéaire entre les variables générées est quasi-nulle et que nous générerons bien des termes acceptables pour une simulation stochastique.

8.1.4 Conclusion

Certes la mise en place de la translation irrationnelle du Tore et sa version mélangée est plus longue et complexe. Cependant cette technique va s'avérer plus efficace pour des échantillons plus restreints, ce qui va au final permettre de raccourcir la durée totale de calcul.

Les tests du poker ainsi que le test sur la valorisation d'un call européen² permettent de conclure que l'erreur d'estimation est plus faible et plus rapidement correcte avec l'utilisation de l'algorithme de Tore. On utilisera donc des générateurs quasi-aléatoires pour appliquer la méthode de "Quasi"-MONTE-CARLO.

Nous pouvons aussi déduire que la discrépance des générateurs quasi-aléatoires est généralement plus faible que celle des générateurs pseudo-aléatoires.

2. Voir PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J. : *Modèles financiers en assurance* p131-135.

8.2 Simuler une réalisation de variable aléatoire de loi Normale centrée réduite

Il est courant, voir systématique en finance, que l'on fasse des hypothèses gaussiennes concernant l'évolution des actifs financiers. Cette hypothèse a l'avantage de créer des processus que l'on maîtrise bien pour ensuite les discréteriser et les programmer en pratique.

Nous chercherons donc dans cette partie à aboutir à la simulation de réalisations de variables aléatoires indépendantes, suivant une loi normale centrée réduite. Le but sera par la suite de simuler des mouvements browniens géométriques pour appliquer la méthode de MONTE-CARLO sur ces simulations de scénarios financiers.

Nous évoquerons deux méthodes très courantes puis nous expliquerons le choix de l'une d'entre-elle. Reprenons U , la variable aléatoire suivant une loi uniforme, générée précédemment par l'algorithme du Tore mélangé.

8.2.1 Méthode de Box-MULLER

C'est la méthode de simulation de la distribution de la loi Normale centrée réduite la plus utilisée. Elle permet de produire des couples réalisation de loi $N(0,1)$, de corrélation nulle, et ceci très simplement.

Soient U_1 et U_2 deux v.a de loi uniforme $U(0,1)$. Alors :

$$X_1 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \cos(2\pi U_2) \quad (8.2.1)$$

$$X_2 = \sqrt{-2 \ln(U_1)} \sin(2\pi U_2) \quad (8.2.2)$$

suivent une loi $N(0,1)$ et $\text{corr}(X_1, X_2) = 0$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{cases} 8.2.1 \\ 8.2.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 \Leftrightarrow U_1 = e^{-\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2)} \\ X_2 \Leftrightarrow U_2 = \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{X_2}{X_1} \right) \end{cases}$$

Calculons le Jacobien :

$$\det(J) = \det \begin{vmatrix} \frac{\delta U_1}{\delta X_1} & \frac{\delta U_1}{\delta X_2} \\ \frac{\delta U_1}{\delta X_2} & \frac{\delta U_2}{\delta X_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} X_1^2 \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} X_2^2 \right)$$

8.2. Simuler une réalisation de variable aléatoire de loi Normale centrée réduite

Comme la fonction de densité conjointe $f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = 1 \cdot I_{(0,1)}(u_1)I_{(0,1)}(u_2)$ et que

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= f_{U_1, U_2}(g_1^{-1}(x_1, x_2), g_2^{-1}(x_1, x_2)) \cdot \det(J) \\ &= f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) \cdot \det(J) \end{aligned}$$

Nous avons bien X_1 et X_2 qui suivent une loi $N(0,1)$ avec $\text{corr}(X_1, X_2) = 0$ \square

Cette technique est propre à la loi Normale, cependant il existe des méthodes plus générales qui s'appliquent à des distributions continues (Normale, Exponentielle, Pareto, Weibull...) dès lors que l'inversion de la fonction de répartition est possible. C'est le cas de l'algorithme de MORO pour les pour la loi Normale.

8.2.2 L'algorithme de MORO

L'inversion des fonctions de répartition est une méthode permettant de simuler une distribution continue à partir de réalisations de variables aléatoires de loi Uniforme $U(0,1)$.

Proposition. *Si la fonction de répartition F est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, alors elle admet une fonction réciproque que l'on notera F^{-1} .*

Pour la loi uniforme nous avons aussi :

Proposition. *Soit U une variable aléatoire suivant une loi Uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Alors la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F .*

C'est-à-dire que pour simuler N réalisations de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, il suffit de générer $F^{-1}(U)$, avec F la fonction de répartition de la loi Normale et U la variable aléatoire générée par la méthode du Tore mélangé décrite précédemment. Comme la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle est caractérisée par sa fonction de répartition, si $F^{-1}(U)$ a la même fonction de répartition que la loi, alors cette variable aléatoire doit suivre cette même loi.

Exemple : $X \sim Exp(\theta)$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-\theta x} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{\theta} \ln(1 - F_X(x)) \\ \Leftrightarrow F^{-1}(u) &= -\frac{1}{\theta} \ln(1 - u) := Y(u) \\ \Rightarrow Y &\sim Exp(\theta) \end{aligned}$$

8.2. Simuler une réalisation de variable aléatoire de loi Normale centrée réduite

Pour la loi Normale centrée réduite $N(0,1)$ nous avons alors :

$$\begin{aligned} Z &\sim N(0,1) \\ f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \\ F_Z(z) &= \int_{-\infty}^z f_Z(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

Finalement l'algorithme va permettre d'approcher le résultat de l'inverse de la fonction de répartition de la loi Normale par une méthode numérique très précise.

MORO (1995), utilise pour la première fois la combinaison de deux algorithmes, pour créer un algorithme hybride, de plus en plus considéré comme la méthode la plus efficace pour générer des réalisations de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites à partir de simulations de loi uniforme.

BEASLEY et SPRINGER (1997) présentent un algorithme d'inversion pour la loi Normale, mais qui s'avère finalement peu efficace pour la queue de distribution de cette loi. C'est pourquoi MORO va donc distinguer deux régions et appliquer l'algorithme de BEASLEY et SPRINGER uniquement sur la région centrale. La partie des extrêmes quant à elle sera modélisée à l'aide des polynômes de TCHÉBYCHEV tronqués.

Voici la méthode :

Soit u la valeur de la loi uniforme générée et posons $z = u - 0,5$. Nous cherchons à approcher x tel que $y = \Phi(x)$ avec Φ la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$.

1. La région centrale de la distribution : $|z| \leq 0,42$

$$x = z \frac{\sum_{i=0}^3 a_i z^{2i}}{\sum_{j=0}^4 b_j z^{2j}}$$

i	a(i)	b(i)
0	2.50662823884	1
1	-18.61500062529	-8.4735109309
2	41.39119773534	23.08336743743
3	-25.44106049637	-21.06224101826
4		3.13082909833

Avec :

2. Les queues de la distribution : $|z| > 0,42$

$$x = \begin{cases} \sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) - \frac{c_0}{2} & \text{si } z \geq 0 \\ \frac{c_0}{2} - \sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

8.3. Validation de la normalité de l'échantillon simulé

Avec : $t = k_1 \left\{ 2 \ln \left(-\ln \left(\frac{1}{2} - |z| \right) \right) - k_2 \right\}$

et $\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) - \frac{c_0}{2}$ qui peut être approché par l'algorithme :

$$t.d_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$$

Avec : $d_i = 2.t.d_{i+1} - d_{i+2} + c_i$ pour $i=8,7,\dots,1$ et $d_{10} = d_9 = 0$

et les paramètres suivant :

i	c(i)	k(i)
0	7.7108870705487895	
1	2.7772013533685169	0.4179886424926431
2	0.3614964129261002	4.2454686881376569
3	0.0373418233434554	
4	0.0028297143036967	
5	0.0001625716917922	
6	0.0000080173304740	
7	0.0000003840919865	
8	9.999999129707170	

8.3 Validation de la normalité de l'échantillon simulé

Afin de valider l'adéquation de cet échantillon $(x_i)_{i=1\dots n}$ généré à la loi Normale, nous allons effectuer certains tests sur un échantillon de $n=1000$ réalisations de variables aléatoires.

8.3.1 Moyenne et écart-type empirique

Nous obtenons :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 0,0040$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = 1,0226$$

Ces premiers résultats respectent bien les paramètres de la loi Normale centrée réduite.

8.3.2 Test de SHAPIRO-WILK

Ce test d'hypothèse permet de rejeter ou non l'hypothèse de mortalité selon un certain risque. Il est particulièrement puissant, même pour les petits effectifs.

La statistique de test W de l'échantillon $(x_i)_{i=1 \dots n}$ est donnée par :

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Avec :

$(a_i)_{i=1 \dots n}$ des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance co-variance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant une loi normale. Elles sont fournies par des tables spécifiques

\bar{x} la moyenne empirique de l'échantillon

Il suffit ensuite de comparer cette statistique avec la valeur critique W_{crit} de cette statistique pour un seuil de risque, donné par la table de SHAPIRO ET WILK.

- Si $W > W_{crit}$ on ne peut pas rejeter l'hypothèse de normalité
- Si $W < W_{crit}$ on rejette l'hypothèse de normalité

On peut également produire la probabilité critique du test : la *p-value*

Résultats :

Statistique	seuil 1%	seuil 5%
Wcrit	0,930	0,947
W	0,999037	
P-value	0,8916	

La conclusion est donc de ne pas rejeter l'hypothèse de normalité, même au seuil de risque de 1%.

8.3.3 Test de LILLIEFORS

Ce test est une variante du test de KOLMOGOROV-SMIRNOV où les paramètres de la loi sont estimés à partir des données.

La statistique D du test est donnée par :

$$D = \max_{i=1 \dots n} \left(F_i - \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} - F_i \right)$$

8.3. Validation de la normalité de l'échantillon simulé

Avec :

F_i la fréquence théorique de la loi de répartition normale centrale réduite

Comme pour le test précédent, nous concluons sur l'acceptation du test en comparant D avec sa valeur critique D_{crit} qui dépend du seuil de risque. Cette valeur est approchée à partir de formules simples.

La région critique est cette fois-ci $D > D_{crit}$ et permet de rejeter l'hypothèse de normalité.

Résultats :

Statistique	seuil 1%	seuil 5%
Dcrit	$\frac{1,031}{\sqrt{n}} = 0,0326$	$\frac{0,886}{\sqrt{n}} = 0,02802$
D		0,0169

Nous avons bien $D < D_{crit}$ donc on ne peut pas rejeter cette hypothèse de normalité.

8.3.4 Test d'ANDERSON-DARLING

Cette autre variante de KOLMOGOROV-SMIRNOV donne plus d'importance aux queues de distribution. La statistique A est donnée par :

$$A = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i - 1) [\ln(F_i) + \ln(1 - F_{n-i+1})]$$

Avec :

F_i est la fréquence théorique de la loi de répartition normale centrée et réduite

La région critique est à nouveau donnée par $A > A_{crit}$

Résultats :

Statistique	seuil 1%	seuil 5%
Acrit	1,035	0,752
A		0,167940

Etant donné que $A < A_{crit}$ on ne peut pas rejeter l'hypothèse de normalité.

8.3.5 Test d'AGOSTINO (K-squared)

Sans rentrer dans les détails, ce test est basé sur les coefficients du kurtosis et du skewness. Si ceux-ci diffèrent simultanément de 0, on rejette l'hypothèse de normalité.

Ici aussi on accepte l'hypothèse de Normalité, avec une P-value=0,7726.

8.3.6 Conclusion

On accepte donc sans hésiter l'hypothèse que notre générateur de nombres aléatoires permet bien de simuler la réalisation de loi Normale centrée réduite. Nous pouvons donc passer à la modélisation des processus stochastiques du rendement des différents actifs.

Chapitre 9

Simulation de processus stochastiques

Nous pouvons à présent nous intéresser à la simulation stochastique de l'évolution des actifs, afin d'obtenir des scénarios financiers qui permettront de modéliser la revalorisation des contrats d'assurance, et donc le *Best Estimate*, par la méthode de MONTE-CARLO.

Présentons tout d'abord deux théorèmes essentiels dans la manipulation des équations différentielles stochastiques.

Méthode : on simule N trajectoires de T périodes pour chaque type d'actif, avec T étant un multiple de 12 car on choisit un pas mensuel pour la modélisation. La pondération des rendements selon l'allocation de l'actif nous donnera les produits financiers et donc la revalorisation des passifs d'assurances.

9.1 Eléments fondamentaux

Nous utiliserons par la suite ces deux notions mathématiques lors de la discré-tisation des processus que nous présenterons.

9.1.1 Lemme d'ITO pour les processus stochastiques

Si X est la solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t m(X(s), s) ds + \int_0^t \sigma(X(s), s) dB(s)$$

ou encore de :

$$dX(t) = m(X(t), t) dt + \sigma(X(t), t) dB(t)$$

Avec :

- B un mouvement brownien
- m la moyenne, le drift du processus
- σ l'intensité de la volatilité

Si $f(t, x)$ est une fonction de classe $C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ alors :

$$df(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + m(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x} dB(t)$$

9.1.2 Décomposition de CHOLESKY

Theorem. Soit $\Gamma_{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive. Il existe une unique matrice triangulaire inférieure $A_{n \times n}$ à diagonale positive telle que $\Gamma = AA'$. On appelle A la “racine carrée” de Γ ou la décomposée de CHOLESKY, de termes $\alpha_{i,j}$.

La construction de A se fait en quatre étapes :

Le premier terme :

$$\alpha_{1,1} = \sqrt{\Gamma_{1,1}}$$

Les termes de la diagonale : $i = 2, \dots, n$

$$\alpha_{i,i} = \sqrt{\Gamma_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{i,k}^2}$$

Les termes du triangle inférieur : $\forall i = 2, \dots, n$ et $\forall j = 1, \dots, i-1$

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{\alpha_{j,j}} \left(\Gamma_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{i,k} \alpha_{j,k} \right)$$

Comme A est une matrice triangulaire inférieure on a donc :

$\forall i = 1, \dots, n-1$ et $\forall j = i+1, \dots, n$ on a $\alpha_{i,j} = 0$

Proposition. Soit $X \stackrel{iid}{\sim} N(0_d, Id_d)$, alors si nous posons $Y = m + AX$, nous avons $Y \sim N(m, \Gamma)$.

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(m + AX) \\ &= m + A\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{\text{est une loi gaussienne}} \\ &= m + A \times 0 = m\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\Gamma_Y &= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y))(Y - \mathbb{E}(Y))') \\ &= \mathbb{E}(AX(AX)') \\ &= \mathbb{E}(AXX'A') \\ &= A \cdot \mathbb{E}(XX') A' \\ &= AA' \\ &= \Gamma\end{aligned}$$

Toute combinaison linéaire des composantes de Y est combinaison linéaire des composantes de X qui sont des lois gaussiennes indépendantes. Donc Y suit une loi gaussienne $N(m, \Gamma)$. \square

Exemple :

Soit la matrice de corrélation $\Gamma_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.7 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$

En appliquant l'algorithme de la décomposition de CHOLESKY nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.9539 & 0 \\ 0.7 & 0.3040 & 0.6462 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons rapidement vérifier qu'il y a bien :

$$AA' = \Gamma$$

9.1.3 Probabilité risque neutre et probabilité historique

L'hypothèse selon laquelle les agents seraient neutres face au risque, est largement utilisée pour le pricing instantané des options. Elle permet en effet de simplifier les calculs de valorisation des produits dérivés, car sous cette probabilité, les prix des actifs sont des martingales et l'on peut appliquer le principe de l'AOA¹ sous sa forme forte². BLACK, SCHOLES et MERTON ont

1. Absence d'Opportunité d'Arbitrage

2. En plus de ne pas pouvoir obtenir sûrement un gain positif avec un portefeuille de valeur nulle, car deux actifs procurant le même flux doivent avoir le même prix, on peut ici dire aussi qu'il est impossible d'obtenir une espérance de gain positive en arbitrant n'importe quels actifs.

ainsi démontré que le prix théorique d'une option est indépendant de l'espérance du gain de l'actif sous-jacent.

Or ces modèles stochastiques ne permettent pas de mesurer les risques, ni d'effectuer une allocation stratégique d'actifs. En effet, si un investissement obligataire sur 20 ans rapporterait en moyenne autant qu'un placement monétaire, l'allocation optimale serait systématiquement de placer la totalité en monétaire.

Dans notre cas, l'allocation stratégique des actifs n'est pas à déterminer car l'on part d'un portefeuille existant dont l'*asset-mix* est connu et stable à chaque période.

La structure de la directive *Solvency 2* nécessite deux approches en termes de simulation lors de la construction d'un modèle interne :

- Estimer la distribution de l'actif net dont on va évaluer la sensibilité aux différents chocs pour obtenir le SCR (la VaR à 99.5% à 1 an). Ceci ne peut être fait qu'avec une probabilité historique pour tenir compte des risques à l'actif.
- Calculer le *Best Estimate* avec une logique *Market-Consistent*, en actualisant les différents flux au taux sans risque. *Market-Consistent* signifie que les engagements sont homogènes à un prix observable sur le marché, c'est-à-dire au coût de la couverture financière que l'on pourrait mettre en place pour un passif couvrable. On adopte ici une approche risque-neutre pour modéliser l'impact de l'actif risqué.

Pour passer d'un univers à l'autre et pour rester cohérent dans les deux types de projection³, on se tournera vers des modèles à déflateurs pour mesurer le prix de marché du risque. Le déflateur est une fonction d'actualisation stochastique qui intègre une composante temps. Elle permet d'obtenir la valeur de marché à une date, à partir de la projection des flux de trésorerie dans l'univers historique.

Pour notre outil, nous resterons donc en probabilité risque-neutre, car le but est uniquement de déterminer les engagements *Market-Consistent* de l'assureur. Nous ne développerons donc pas ce sujet, largement documenté⁴.

Il faudra porter une attention particulière au calibrage des générateurs de scénario, de sorte qu'en moyenne, tous les actifs aient le même rendement égal au taux sans risque.

9.1.4 Remarques

- L'une des difficultés principales de la simulation de ces processus est l'estimation des paramètres, ainsi que des matrices de corrélations entre les

3. Par exemple la projection en univers risque neutre sera effectué en utilisant une volatilité implicite, alors que la projection en probabilité historique utilisera la volatilité historique.

4. Toutes les sources sont disponibles sur : <http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2010/04/calibrage-des-primes-de-risque.html>

différentes classes d'actifs. A noter également que le nombre de paramètres à estimer doit rester raisonnable dans un modèle sous peine de perdre en robustesse.

Mais l'objectif ici n'est pas de calibrer le modèle aux données du marché, et on souhaite uniquement comparer l'approche déterministe et stochastique. C'est pourquoi ces estimations ne sont pas déterminantes, la seule contrainte étant que la moyenne des scénarios générés soit représentée par le scénario central que l'on utilisera dans le modèle déterministe sur PROPHET.

- On fait ici abstraction des dividendes des actions car l'estimation du taux continu de dividende est sensible à estimer sur la base d'un historique.

9.2 Processus des taux d'intérêt

On fait l'hypothèse que les taux d'intérêt suivent un processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK, comme c'est le cas dans le fameux modèle de VASICEK.

9.2.1 Modèle de Vasicek

9.2.1.1 Définition

Le taux instantané en t , r_t est alors donné par l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dB_t$$

Avec :

b le taux moyen de long terme, $b \in \mathbb{R}_+$

a la vitesse de retour à la moyenne, $a \in \mathbb{R}_+$

σ l'intensité instantanée du bruit qui suit un mouvement brownien B

Ce modèle intègre donc un effet de retour à la moyenne, c'est-à-dire que le taux va revenir plus ou moins rapidement vers sa moyenne, en évoluant selon un processus de WIENER autour de celle-ci. Si $a=0$ on est alors dans le cas d'une marche aléatoire sans phénomène de *mean-reverting*.

En appliquant le lemme d'ITO présenté précédemment, la solution de cette EDS s'écrit alors :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s$$

Pour $u < t$ nous pouvons écrire :

$$r_t = r_u e^{-a(t-u)} + b(1 - e^{-a(t-u)}) + \sigma \int_u^t e^{a(t-s)} dB_s$$

Comme $dB_s = B_{s+1} - B_s$ est gaussien de loi $N(0, 1)$, alors r_t l'est également, de moyenne et de variance :

$$\mu_r(u, t) = r_u e^{-a(t-u)} + b \left(1 - e^{-a(t-u)}\right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r^2(u, t) &= \mathbb{E} \left[\left(\sigma \int_u^t e^{a(t-s)} dB_s \right)^2 \right] \\ &= \sigma^2 \int_u^t e^{-2a(t-s)} ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-u)}\right)\end{aligned}$$

9.2.1.2 Discrétisation

Pour implémenter ce processus, il faut tout d'abord le discréteriser. Heureusement le processus d'ORNSTEIN-UHLENBECK admet une discrétisation exacte, c'est-à-dire que l'on peut simuler directement le processus d'ITO sans erreur de discrétisation. Cela revient à résoudre explicitement l'EDS associée.

La discrétisation exacte de r_t peut alors être exprimée récursivement comme :

$$\begin{aligned}r_{t+\delta} &= \mu_r(t, t+\delta) + \sigma_r(t, t+\delta) Z_{t+\delta} \\ &= r_t e^{-a\delta} + b \left(1 - e^{-a\delta}\right) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a} (1 - e^{-2a\delta})} Z_{t+\delta}\end{aligned}$$

Avec :

$\delta > 0$ représentant la période de discrétisation

$$Z_i \sim N(0, 1)$$

9.2.1.3 Calibrage

L'une des difficultés principales de la simulation de ces processus est l'estimation des paramètres ainsi que des matrices de corrélation entre les différentes classes d'actifs. A noter également que le nombre de paramètres à estimer doit rester raisonnable dans un modèle sous peine de perdre en robustesse (principe de parcimonie en statistique). Encore une fois, l'objectif ici n'est pas de calibrer le modèle aux données du marché, et on souhaite uniquement comparer l'approche déterministe (scénario moyen dans PROPHET) et stochastique (moyenne des scénarios dans le nouvel outil).

Il faudra porter une attention particulière au calibrage des générateurs de scénario, de sorte qu'en moyenne, tous les actifs aient le même rendement égal au taux sans risque. En réalité il faudrait retrouver la courbe moyenne donnée par le CEIOPS.

Voici les paramètres utilisés lors de la modélisation des taux sans risque.

Paramètres	Valeurs	Origine
a	0.28	
b	0.0404	taux sans risque 20 ans fourni par le CEIOPS
σ	0.06	
r_0	0.012	taux sans risque un an fourni par le CEIOPS

La volatilité est volontairement importante car nous cherchons à mesurer les effets de la prise en compte explicite de cette volatilité dans la mesure de la revalorisation.

9.2.1.4 Observations

Après discréétisation exacte du modèle de VASICEK nous obtenons :

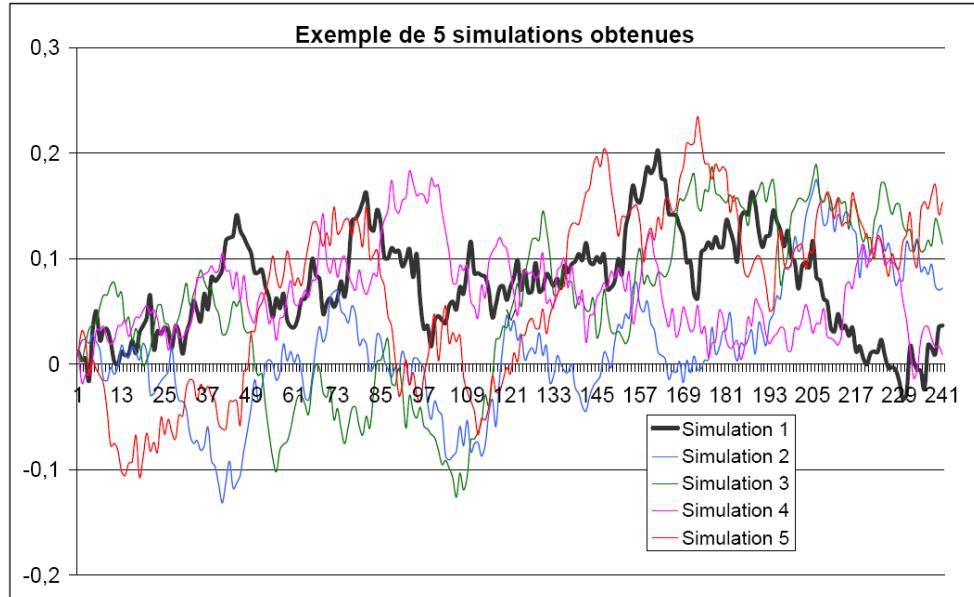


FIGURE 9.2.1: Evolution (en mois) du taux d'intérêt annuel dans cinq scénarios stochastiques générées grâce au modèle de VASICEK

Et finalement la moyenne de 10 000 scénarios est représentée par :

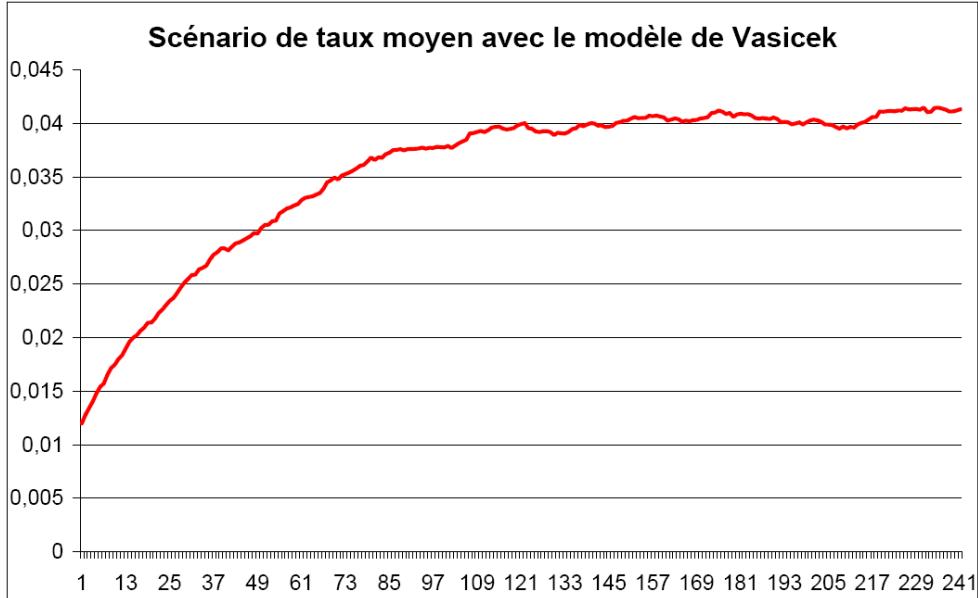


FIGURE 9.2.2: Moyenne de 10 000 scénarios du taux d'intérêt annuel (en mois) simulés par le modèle de VASICEK

Nous avons donc simulé l'évolution des taux instantanés sans risque sur la période de projection T, cela représente en quelque sorte N courbes de taux forward. Cependant il existe une formule pour déterminer la courbe des taux spot en fonction du taux initial et des paramètres du modèle de VASICEK.

9.2.1.5 Courbe d'actualisation

Cette courbe est nécessaire dans notre cas pour obtenir la courbe d'actualisation.

Le prix $P(t)$ en date $t=0$ d'un zéro coupon versant 1 en date t est donné par :

$$P(t) = \exp \left\{ -t \times \left[b - \frac{\sigma^2}{2a} - \frac{1}{at} \left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2a} - r_0 \right) (1 - e^{-at}) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-at})^2 \right) \right] \right\}$$

La courbe d'actualisation ne variera donc pas en fonction du scénario car tous les paramètres de la formule sont fixés lors de la modélisation.

9.2.1.6 Limites du modèle

Or le choix de ce modèle peut être remis en cause pour diverses raisons :

- On constate empiriquement que la volatilité n'est pas constante quel que soit le niveau des taux d'intérêt. En effet, plus le taux est élevé (faible) et plus la volatilité est importante (basse).
- Le modèle de VASICEK peut retourner des taux négatifs ce qui est impossible dans la réalité.

On peut alors utiliser la littérature abondante pour se tourner vers un autre modèle, et l'alternative la plus courante est celle du CIR.

9.2.2 Modèle de Cox, Ingersoll et Ross

9.2.2.1 Définition

COX, INGERSOLL et ROSS (C.I.R. 1985) proposent ainsi un modèle qui répond à ces problèmes tout en restant très proche de celui de VASICEK.

Le taux instantané est alors modélisé par :

$$dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t$$

Ce modèle garantit donc que le processus de taux soit toujours positif dans le cas continu car :

$$\begin{aligned} r_t &= 0 \Rightarrow dr_t = ab dt \\ \text{où } & ab \geq 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire que seule la volatilité σ est remplacée par $\sigma \sqrt{r_t}$ et dépend donc maintenant du niveau du taux d'intérêt et donc du temps. Posons $\tilde{\sigma} = \sigma \sqrt{r_t}$

9.2.2.2 Discrétisation

Le problème se situe au niveau de la discrétisation car cette fois-ci une discrétisation exacte facilement programmable n'existe pas (car numériquement trop coûteux). Il faut donc avoir recours à une technique de discrétisation approximative telle que le schéma d'EULER ou de MILSTEIN. Pour plus de détails nous renvoyons à [Article 3b]

9.2.2.1 Le schéma d'EULER

Soit $(X_t)_{t=\delta \dots T\delta}$ un processus continu sur T périodes δ (par exemple $\delta = 1/12$)
L'idée de la discréétisation d'EULER est simplement de poser :

$$\begin{aligned} X_{t+\delta} &= X_t + \int_t^{t+\delta} \beta(X_s) ds + \int_t^{t+\delta} \alpha(X_s) dB_s \\ &\simeq X_t + \beta(X_t) \delta + \alpha(X_t) (B_{t+\delta} - B_t) \end{aligned}$$

où $\alpha()$ et $\beta()$ sont deux fonctions intégrables de X_t .

Pour le processus du CIR, le développement d'ITO-TAYLOR au premier ordre nous donne :

$$r_t = r_0 + \mu(X_0, 0) \int_0^t ds + \tilde{\sigma}(X_0, 0) \int_0^t dB_s + R_1(0, t)$$

Par simplification et en négligeant le résidu $R_1(0, t)$ nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} r_{t+\delta} &= r_t + \mu(r_t, t) \delta + \tilde{\sigma}(r_t, t) (B_{t+\delta} - B_t) \\ &= r_t + \mu(r_t, t) \delta + \tilde{\sigma}(r_t, t) \sqrt{\delta} Z \\ &= r_t + a(b - r_t) \delta + \sigma \sqrt{r_t \delta} Z \end{aligned}$$

Avec :

$$Z \sim N(0, 1)$$

δ le pas de projection (dans notre cas $1/12$)

μ et σ respectivement la moyenne et l'écart type, qui dépendent du niveau de taux d'intérêt de la période précédente et donc du temps.

Pour la qualité et la vitesse de convergence de ce schéma de discréétisation nous renvoyons de nouveau à [Article 3b].

9.2.2.2 Le schéma de MILSTEIN

Le principe est le même sauf que le développement est d'ordre 2 et c'est le résidu d'ordre 3 qui est cette fois-ci négligé. Dans le schéma d'Euler, nous faisions l'approximation :

$$\int_t^{t+\delta} a(X_s) dB_s \simeq a(X_t) (B_{t+\delta} - B_t)$$

Alors que maintenant nous utilisons :

$$\int_t^{t+\delta} a(X_s) dB_s \simeq a(X_t)(B_{t+\delta} - B_t) + \frac{1}{2} a'(X_t) a(X_t) \{(B_{t+\delta} - B_t) - \delta\}$$

Dans ce cas on obtient au final pour le CIR :

$$r_{t+\delta} = r_t + a(b - r_t)\delta + \sigma \sqrt{r_t \delta} Z + \frac{\sigma^2}{4} \delta (Z^2 - 1)$$

On obtient alors une meilleure approximation du processus continu, et ceci sans avoir à simuler une seconde réalisation de variable aléatoire⁵.

9.2.2.3 Remarque

L'une des raisons pour laquelle nous sommes amenés à préférer le modèle de COX, INGERSOLL et ROSS à celui de VASICEK, est la positivité stricte du taux pour b suffisamment grand. Or la discréétisation de ce processus continu basé sur un mouvement brownien, que l'on opte pour le schéma d'EULER ou de MILSTEIN, peut dans l'absolu générer des taux négatifs. Ce cas est alors plus grave car comme on procède par récurrence et que la condition $r_t \geq 0$ est imposée par l'utilisation de la racine carrée, le calcul est alors simplement impossible.

Nous avons :

- $\sigma > 0$
- $0 < \delta \leq 1$
- $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$
- $Z \sim N(0, 1)$

Il est donc possible d'avoir un taux négatif par exemple lorsque $Z \leq \frac{a(r_t - b)\delta - r_t}{\sigma \sqrt{r_t \delta}}$.

Cela dépend beaucoup du calibrage des paramètres, et on observe en pratique que pour des paramètres "non extrêmes", ce cas n'est jamais réalisé. Plus formellement on peut démontrer en applicant le lemme d'ITÔ, qu'une condition nécessaire pour que le CIR discréétisé n'engendre pas des taux négatifs est :

$$b \geq \frac{\sigma^2}{2a} > 0 \text{ ce qui est vérifié ici.}$$

9.2.2.3 Limites

Les modèles de COX, INGERSOLL et ROSS ainsi que celui de VASICEK possèdent néanmoins des limites bien connues comme celle de ne reposer que sur une seule variable explicative : le taux instantané r_0 . Or en pratique cette hypothèse de corrélation parfaite entre r_0 et r_t n'est pas observée.

5. Pour plus d'information nous renvoyons à [Article 3b] et [Ouvrage 4]

9.2.2.4 Observations

Comme précédemment nous observons donc 10 000 trajectoires comme par exemple :

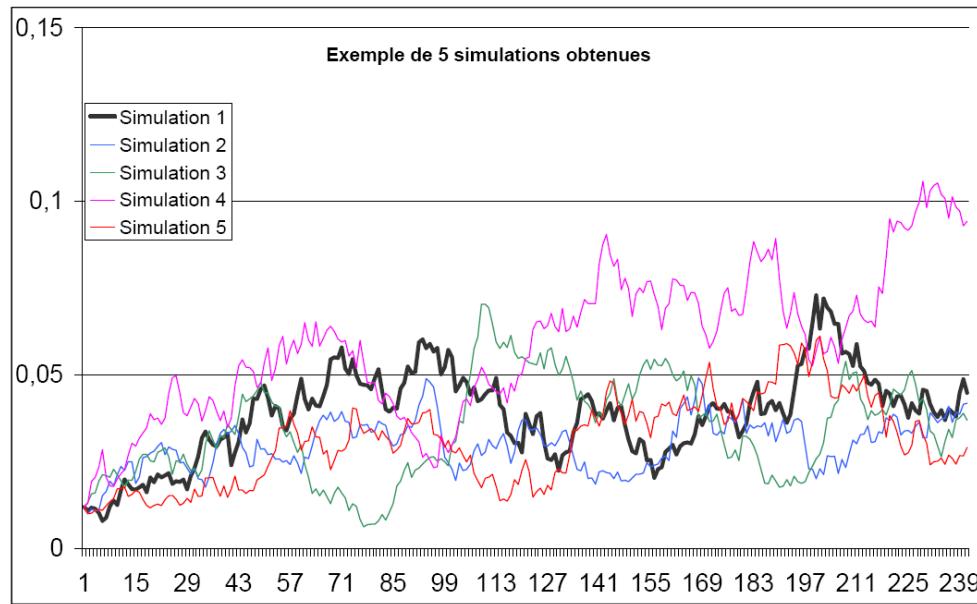


FIGURE 9.2.3: Evolution (en mois) du taux d'intérêt annuel dans cinq scénarios stochastiques générées grâce au modèle de COX, INGERSOLL, ROSS

A première vue, le problème important de négativité du taux est réglé ou du moins contenu sur l'ensemble des simulations pour ces hypothèses données⁶.

6. Idem que celles du modèle de VASICEK

Et la moyenne de ces scénarios est maintenant représentée par :

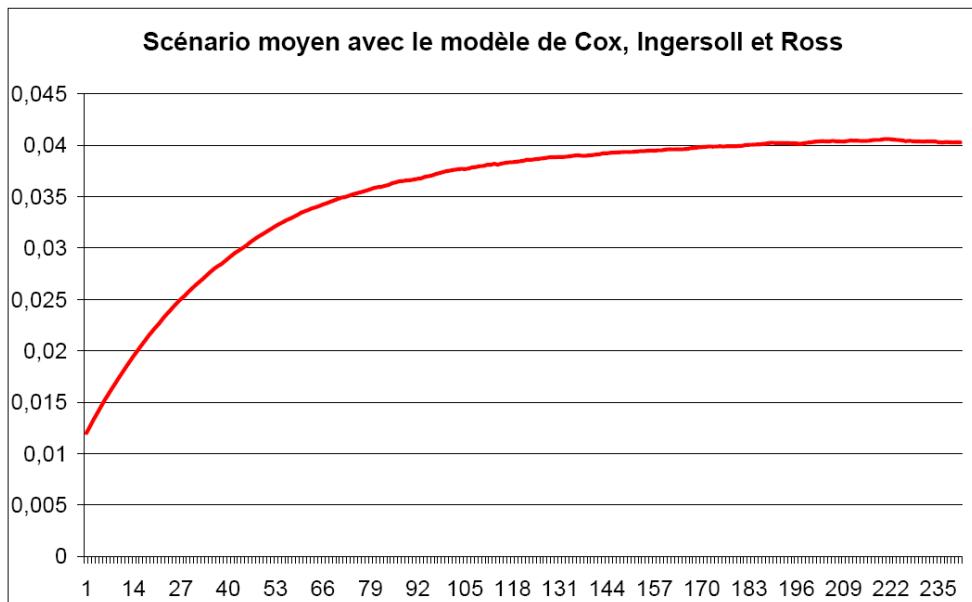


FIGURE 9.2.4: Moyenne de 10 000 scénarios du taux d'intérêt annuel (en mois) simulés par le modèle de VASICEK

Le taux initial, le taux long terme et la pente de la courbe sont similaires au modèle de VASICEK, car les paramètres sont restés inchangés. Or on constate que la courbe est plus lisse, et surtout plus stable sur les dernières années. Ceci est certainement dû au fait que nous avons réussi à éviter la simulation de taux négatifs, et que l'écart-type entre les scénarios est réduit car ceux-ci sont cantonnés à la partie positive pour obtenir en moyenne le même rendement.

9.2.2.5 Courbe d'actualisation

Comme pour le modèle de VASICEK, nous simulons ici l'évolution des taux courts, mais la courbe d'actualisation doit être mesurée à partir de la courbe de taux spot qui en résulte. Pour le CIR il est également possible de calculer explicitement le prix d'un zéro-coupon en fonction des paramètres du modèle et du taux instantané⁷.

7. Pour plus de détails nous renvoyons à *[Article 3a]*

9.3. Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

Proposition. Pour tout $t \leq \tau \leq T$, le prix en date t , $P(t, \tau)$, d'une obligation zéro-coupon versant 1 en dans τ années est donné par :

$$P(t, \tau) = A_t(\tau) e^{-r_t C_t(\tau)}$$

où

$$\begin{aligned} A_t(\tau) &:= \left[\frac{2\rho e^{\frac{\rho+a}{2}(\tau-t)}}{(\rho+a)(e^{\rho(\tau-t)} - 1) + 2\rho} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ C_t(\tau) &:= \frac{2(e^{\rho(\tau-t)} - 1)}{(\rho+a)(e^{\rho(\tau-t)} - 1) + 2\rho} \\ \rho &:= \sqrt{a^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

Nous chercherons donc à calculer $(P(0, \tau))_{\tau=1\dots P}$

Le facteur d'actualisation à la date t ne dépend plus maintenant uniquement du taux instantané en $t=0$ comme pour le modèle de VASICEK. La courbe d'actualisation va donc ici varier à chaque scénario de taux ce qui semble plus cohérent avec la logique de MONTE-CARLO.

9.3 Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

9.3.1 Définition

On modélise l'évolution du cours des actions S_t par un mouvement brownien géométrique B_t comme utilisé dans le modèle de BLACK, SCHOLES et MERTON :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Avec :

μ la tendance, constante

σ l'écart type par unité de temps, constant lui aussi

9.3.2 Discréétisation du processus continu

Pour ce processus, il existe également une discréétisation exacte donnée par :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma (B_t - B_0) \right\}$$

9.3. Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

Avec :

$$(B_t - B_0) \sim N(0, t) \text{ deux mouvements browniens géométriques}$$

Pour un pas de discréétisation de δ (dans notre cas $1/12$), on modélise le processus par récurrence grâce à :

$$S_{t+\delta} = S_t \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \delta + \sigma Z \sqrt{\delta} \right\}$$

Avec :

Z la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée réduite
 $0 \leq t \leq t + P \times \delta$ pour une simulation sur P périodes.

9.3.3 Corrélation entre les actifs

Tous les actifs évoluent sur des marchés (de taux, d'action, immobilier...) régis par des variables financières communes comme l'inflation, le taux de chomage... et possédant des interactions évidentes. L'hypothèse d'indépendance ne peut raisonnablement pas être faite car le comportement du marché impacte tous les actifs.

Au passage nous pouvons évoquer le modèle de WILKIE (1986). Dans ce modèle intégré, le taux d'inflation joue le rôle central, car de celui-ci découle l'évolution des taux d'intérêt, des actions et de l'immobilier. Cependant l'articulation d'un modèle autour d'une seule variable nécessite une estimation très pointue de celle-ci, sous peine de créer un biais important dans tout le modèle.

Nous avons présenté un théorème important pour l'utilisation de matrices de corrélations, la décomposition de CHOLESKY. Nous verrons son application à notre portefeuille pour aboutir à la nouvelle discréétisation du processus du rendement des actifs sur le marché action.

9.3.3.1 Présentation

On suppose un portefeuille composé uniquement d'actions et d'obligations dans une proportion α et $1 - \alpha$. L'évolution de ces actifs est modélisé par les processus que nous avons présentés précédemment.

On ajoute maintenant l'hypothèse que toutes les actions du portefeuille sont corrélées avec le marché des actions, corrélé lui-même avec le marché des taux d'intérêt. Il suffit donc juste pour chaque titre, d'estimer le rendement espéré, sa volatilité et son lien de corrélation avec le marché, sans estimer la corrélation des titres entre eux.

9.3. Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

(source : PLANCHET F., THÉROND P., JACQUEMIN J. : *Modèles financiers en assurance, Analyses de risque dynamiques* [Economica 2005])

Voici schématiquement l'interaction entre le marché des titres et celui des taux :

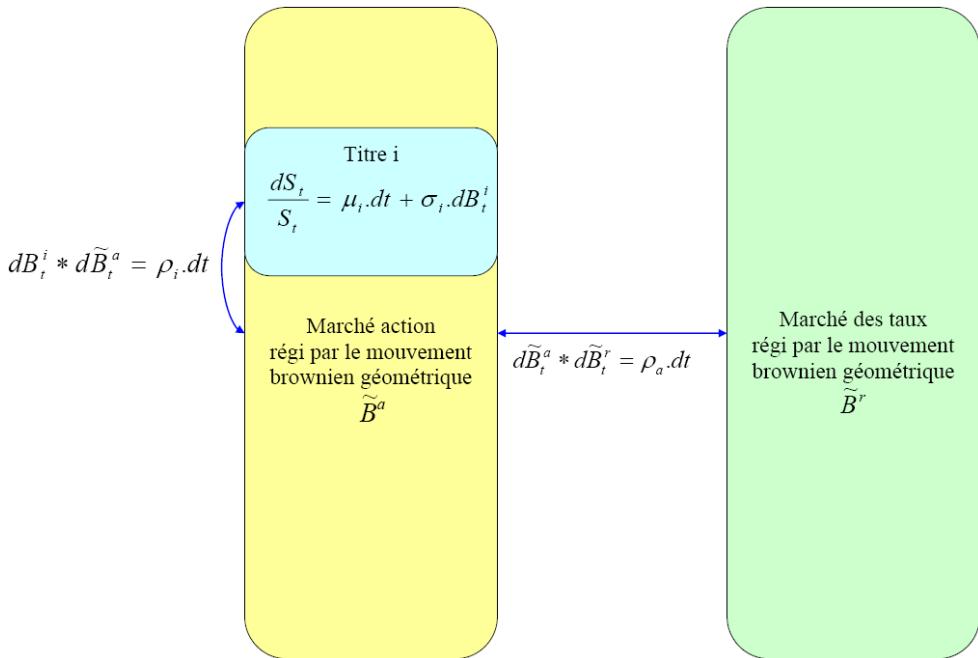


FIGURE 9.3.1: Hypothèses sur les liens de corrélation existants entre le rendement des actions et le niveau des taux d'intérêt

Nous pourrions très bien complexifier la modélisation en générant un scénario à d dimensions non-indépendantes, simulant le cours des d actions en portefeuille. Cela nécessiterait la simulation de $B = (B_1, B_2, \dots, B_d)$ un mouvement brownien de dimension d , avec sa matrice de corrélation telle que $\text{Corr}(B_1(t), B_2(t)) = \rho_{1,2}$. On utiliserait alors à nouveau la décomposition de CHOLESKY.

9.3.3.2 Intégration dans le processus

Revenons à l'hypothèse qu'il n'existe qu'une corrélation avec le marché. Nous supposons toujours que le titre i , en l'absence de dividendes, a la dynamique suivante, basée sur le mouvement brownien B_t^i :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_i dt + \sigma_i dB_t^i$$

9.3. Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

Nous avons décrit la corrélation entre ce titre et l'ensemble du marché des actions (voir la figure précédente) par :

$$dB_t^i \otimes d\tilde{B}_t^a = \rho_i dt$$

Nous pouvons alors dire qu'il existe un mouvement brownien \tilde{B}^i indépendant de \tilde{B}^a tel que :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_i dt + \sigma_i \rho_i d\tilde{B}_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} d\tilde{B}_t^i$$

Démonstration. Soit la matrice $\Gamma_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, alors la décomposition de Cholesky que nous avons présenté nous permet d'écrire :

$$\Gamma_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho \sigma_2 & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho \sigma_2 & \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}' = AA'$$

Le théorème de KOLMOGOROV (“Kolmogorov extension theorem” ou “Kolmogorov existence theorem”) nous dit que pour décrire un processus stochastique, en l'occurrence un mouvement brownien, il suffit de décrire les lois conjointes des marginales finies. \square

Si l'on suppose encore que le titre i est dépendant de l'évolution des taux instantanés uniquement par le lien avec le marché action, et que cette corrélation entre le marché action et le marché des taux d'intérêt est donnée par :

$$d\tilde{B}_t^a \otimes d\tilde{B}_t^r = \rho_a dt$$

La dynamique devient alors :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_i dt + \sigma_i \rho_i \rho_a d\tilde{B}_t^r + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} d\tilde{B}_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} d\tilde{B}_t^i$$

où

B_t^r, B_t^a, B_t^i sont des mouvements browniens indépendants

σ_i la volatilité du titre i

En appliquant le lemme d'ITO à l'équation différentielle stochastique précédente il vient alors :

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) du + \sigma_i \rho_i \rho_a dB_t + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} dB_t^a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} dB_t^i \right) \right\}$$

Il faut ensuite discréteriser ce processus, et l'on obtient finalement :

$$\frac{S_{t+\delta} - S_t}{S_t} = \mu_i \delta + \sigma_i \rho_i \rho_a \sqrt{\delta} Z + \sigma_i \rho_i \sqrt{1 - \rho_a^2} \sqrt{\delta} Z_a + \sigma_i \sqrt{1 - \rho_i^2} \sqrt{\delta} Z_i$$

9.3. Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

où :

Z, Z_a, Z_i sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite
 δ le pas de discrétisation qui vaut $1/12$ dans notre cas

9.3.4 Calibrage

Nous faisons l'hypothèse que le portefeuille d'action n'est composé que du même titre. Cela évite de modéliser, inutilement dans notre cas, des milliers de scénarios supplémentaires où le drift, la volatilité ainsi que la corrélation avec le marché seraient différents. Nous prenons comme paramètres :

Variable	Valeur	Origine
μ_i	0.03539	Rendement moyen des taux sans risque générés
σ_i	33.59%	Indice de volatilité de l'Eurostoxx 50
ρ_i	0.8	
ρ_a	0.2	

Il est important de choisir μ_i après avoir simulé les scénarios des taux d'intérêt, afin de s'assurer qu'en moyenne les deux types d'actifs ont le même rendement, ce qui respecte bien l'hypothèse de l'univers risque-neutre dans lequel nous évoluons.

9.3. Processus du rendement des actions : le mouvement brownien géométrique

9.3.5 Observations

Nous ne modélisons que le rendement des actions et non leur prix. Celui-ci est volontairement très volatile et le rendement moyen sur toute la période correspond bien à celui observé sur la moyenne des scénarios de taux.

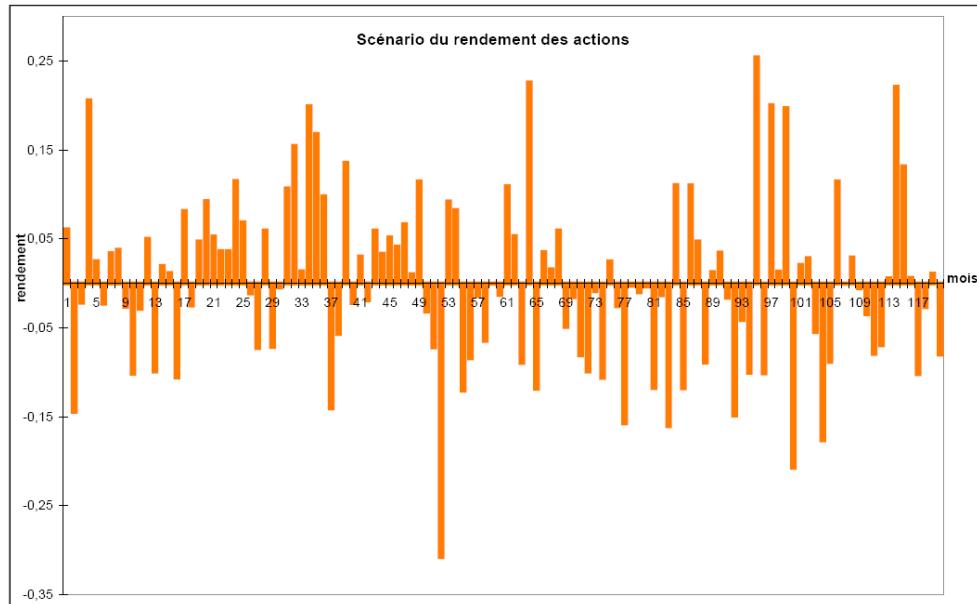


FIGURE 9.3.2: Exemple d'un scénario de rendement des actions sur 10 ans obtenu par simulation.

Chapitre 10

Description de l'outil

Cet outil développé sous EXCEL doit permettre de répliquer le modèle déterministe pour un scénario donné. On lui ajoute ensuite un générateur de scénario qui va reproduire le calcul pour chaque police et pour chaque scénario : le modèle devient ainsi stochastique. En appliquant la méthode de MONTE-CARLO nous pourrons ensuite mesurer la différence sur le *Best Estimate* calculé avec le scénario moyen et la moyenne des *Best Estimate* de chaque scénario.

Une des premières contraintes était donc de pouvoir reproduire les différentes variables de PROPHET. Cela permet également de faire un outil qui correspond parfaitement au fonctionnement de produits réels.

10.1 Projection du portefeuille

Concernant le sous-ensemble du portefeuille considéré, nous avons créé des contrats fictifs d'assurance mixte à primes mensuelles. Cela permet d'une part d'avoir un horizon temporel fini et ainsi restreindre la durée de projection pour diminuer le temps de calcul. D'autre part ce type de contrat représente une part significative du portefeuille et nous pouvons ainsi reproduire le fonctionnement d'une assurance à capital différé, d'une temporaire décès, et le système de revvalorisation est finalement assez proche d'un bon d'assurance à durée déterminée. L'évolution de la réserve mathématique est croissante, et dépend de l'âge de l'assuré. Il sera donc possible de jouer sur l'âge de l'assuré pour obtenir des profils de réserve mathématique différents, ce qui impactera le calcul de la TVOG.

Pour des raisons de confidentialité, toutes les hypothèses utilisées ici sont fictives mais réalistes.

10.1.1 Description des polices

- Toutes les polices ont un capital en cas de vie ou de décès égal à 10 000 euros
- Toutes les polices sont souscrites à la date d'évaluation $t = 0$.
- Les frais réels d'acquisition sont fixes égaux à 200 euros, et les frais réels de gestion sont égaux à 150 euros par an.
- Les primes sont payées mensuellement avec des frais de 2% à la charge du souscripteur.
- Il n'y a pas de frais de gestion supplémentaires selon la valeur du contrat.
- Le rachat est possible à n'importe quelle date avec une pénalité de rachat de 10%
- Le capital ainsi que la valeur de rachat sont revalorisés par la participation aux bénéfices
- Le taux technique varie de 1.5% à 4%
- La durée des contrats varie de 10 à 20 ans
- L'âge de l'assuré varie de 40 à 50 ans

En composant toutes les combinaisons par tranche de 5 ans pour la durée et de 0.5% pour le taux technique, nous obtenons ainsi 54 polices aux caractéristiques strictement différentes.

Pour chaque police il sera donc nécessaire de calculer le *Best Estimate* sous les 1000 scénarios pour ensuite mesurer la moyenne de ces scénarios par la méthode de MONTE-CARLO. Il est donc compréhensible que le tableur d'Excel n'est pas le plus approprié pour effectuer de tels calculs.

10.1.2 Hypothèses de projection des cash-flows

- La marge actionnaire est de 1%
- La courbe des taux d'inflation est la même que le modèle déterministe présenté précédemment
- Le taux de rachat est fixé à 6% par an
- La table de mortalité utilisée pour le calcul de la provision mathématique est la table belge HS6872
- La table d'expérience utilisée pour la projection est la table *Assuralia IDH* sans ajustement d'âge.

10.1.3 Hypothèses simplificatrices

- Les rachats partiels ne sont pas modélisés.
- La réserve pour PB future n'est pas gérée, elle est supposée nulle en date 0 et on distribue l'excédent de produit financier dans sa globalité.
- La mortalité n'est pas stochastique
- La police ne peut pas être réduite lorsque l'assuré arrête de payer ses primes.
- Au départ, l'actif n'est constitué que de liquidités, sans plus-ou-moins values latentes. On investit dans deux types d'actifs composés à 70% d'obligations et 30% d'actions (sans dividendes). Cette allocation est constante au cours du temps.
- Les obligations sont des obligations perpétuelles à taux variable, dont le rendement est donné par le taux sans risque instantané.
- Le *drift* est constant, ce qui nous assure de calibrer les processus de telle sorte que tous les actifs rapportent en moyenne le même taux égal au taux sans risque moyen.
- Le portefeuille considéré n'intègre pas de réassurance

Chapitre 11

Résultats et comparaison

Après avoir fait tourné l'outil pour un jeu de 1000 scénarios, nous obtenons donc un montant du *Best Estimate* pour chaque contrat et pour chaque scénario, soit $1000 \times 54 = 54000$ résultats. Nous appliquons ensuite la méthode de Monte-Carlo pour déduire un montant du *Best Estimate* comparable avec celui obtenu dans le modèle déterministe.

11.1 Principe de Monte-Carlo

Une définition formelle de la méthode pourrait être donné par¹ :

Definition. Méthode de Monte-Carlo

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^s muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^s}$ et $h : \mathbb{R}^s \mapsto \mathbb{R}$ une application mesurable. Le problème est d'évaluer numériquement l'intégrale :

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[h(X)] = \int_{\Omega} h(X) dP$$

lorsque $h(X)$ est *P-intégrable*, i.e. $h(X) \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Les méthodes de Monte-Carlo sont basées sur un théorème fondamental qui permet l'approximation de l'espérance : la loi des grands nombres.

Theorem. *Loi (forte) des grands nombres :*

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles intégrables i.i.d. Alors pour N grand,

$$\hat{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[Y_1] \quad p.s. \text{ et dans } \mathbf{L}^1$$

1. PATARD P-A. : *Outils numériques pour la simulation Monte Carlo des produits dérivés complexes* (2007)

11.1. Principe de Monte-Carlo

On simule donc un grand nombre N de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n=1\dots N}$ et de même loi que Y, puis on obtient une approximation de l'espérance de Y grâce à la moyenne empirique (estimateur sans biais de la moyenne). Tout l'objectif de cette méthode est donc de comparer le résultat de la moyenne des scénarios (modèle stochastique) avec le résultat du scénario moyen (modèle déterministe).

Dans notre cas $(Y_n)_n$ représente les scénarios, et chaque scénario est le résultat de la somme des *Best Estimate* sur tout le portefeuille.

Soit $(c_1 \dots c_P)$ le portefeuille composé de P polices, nous obtenons finalement un montant total du *Best Estimate* qui n'est rien d'autre qu'une espérance mathématique estimée :

$$\begin{aligned} BE^{stoch} &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P BE(c_p, n) \end{aligned}$$

où $BE(c_p, n)$ est le résultat obtenus pour le contrat p avec le scénario financier n.

11.2 Sensibilités du *Best Estimate*

Avant d'exposer les résultats, nous allons tout d'abord étudier plus en détail les résultats obtenus, profitant du fait que le portefeuille fictif a été construit de telle sorte que les différents paramètres varient de façon régulière et maîtrisée.

11.2.1 Aux caractéristiques du contrat

Commençons par étudier l'impact des caractéristiques de la police sur le montant du *Best Estimate* pour un scénario simulé fixé.

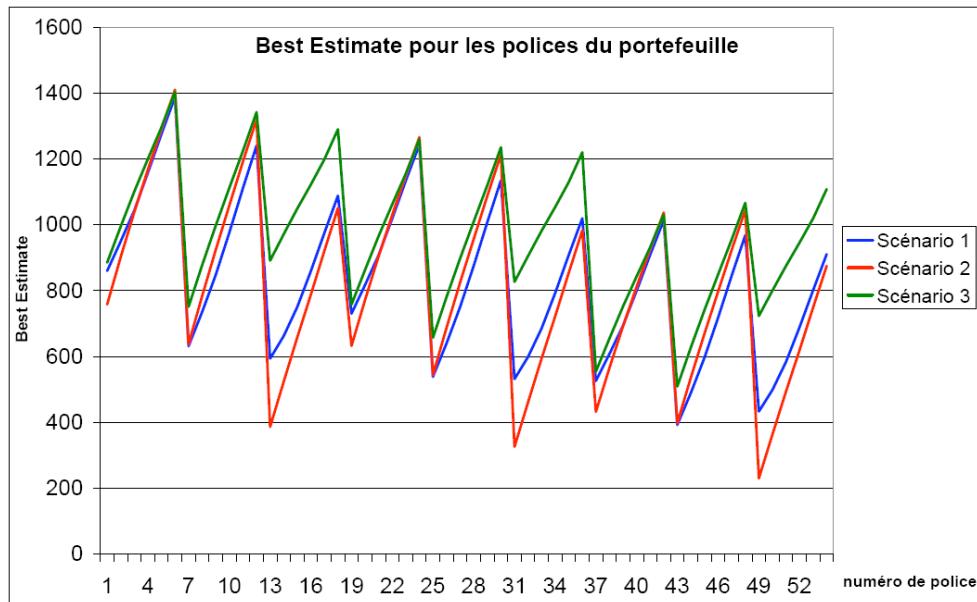


FIGURE 11.2.1: Montant du Best Estimate obtenu par le modèle stochastique pour toutes les polices et pour un scénario donné. Exemple pour 3 scénarios différents

La forme particulière que l'on obtient suggère déjà une influence très importante des caractéristiques du contrats. Comme elle dépend uniquement de l'ordre dans lequel nous avons disposé nos polices, donnons tout d'abord plus de détails sur la construction des polices du portefeuille.

11.2. Sensibilités du *Best Estimate*

N°	Age	Durée	Taux technique
1	40	20	1.5%
2	40	20	2%
3	40	20	2.5%
4	40	20	3%
5	40	20	3.5%
6	40	20	4%
7	40	15	1.5%
8	40	15	2%
⋮	⋮	⋮	⋮
15	40	10	1.5%→4%
⋮	⋮	⋮	⋮
19→24	45	20	1.5%→4%
⋮	⋮	⋮	⋮
31→36	45	10	1.5%→4%
37→42	50	20	1.5%→4%
⋮	⋮	⋮	⋮
49→54	50	10	1.5%→4%

On peut donc tirer les conclusions suivantes qui respectent bien les résultats attendus à priori :

1. Observation : Les pics correspondent aux taux techniques extrêmes, le *Best Estimate* est croissant en fonction du taux technique.
⇒ Le taux technique du contrat a une influence majeure sur le *Best Estimate*, étant donné qu'il est garanti pour toute la durée du contrat quel que soit les produits financiers. La participation aux bénéfices ne provient que de la partie résiduelle éventuelle après avoir retiré la marge actionnaire.
2. Observation : Pour un taux technique équivalent, on constate une légère décroissance du *Best Estimate*.
⇒ L'âge augmente donc la prime pure également car :

$$P_{x:n} = \frac{A_{x:n}}{\ddot{a}_{x:n}} \nearrow \text{pour } x' > x \Rightarrow P_{x':n} > P_{x:n}$$

ce qui, toute chose égale par ailleurs, réduit l'engagement de l'assureur. Cet effet prend le dessus sur le flux de mortalité qui augmente avec l'âge et aura donc l'effet inverse sur le *Best Estimate*. On fait ici abstraction de l'effet temps puisque la prime est payée en début de période alors que le décès a lieu en milieu de période.

3. Les scénarios plus ou moins favorables translatent cette structure en dents de scie à la hausse comme à la baisse, mais pas dans les mêmes proportions pour tous les contrats.

11.2.2 Aux scénarios simulés

Vérifions également ensuite que l'impact du scénario financier sur le montant final du *Best Estimate* est aussi loin d'être négligeable et que l'on peut mettre en évidence certains scénarios extrêmes qui vont modifier considérablement les flux projetés.

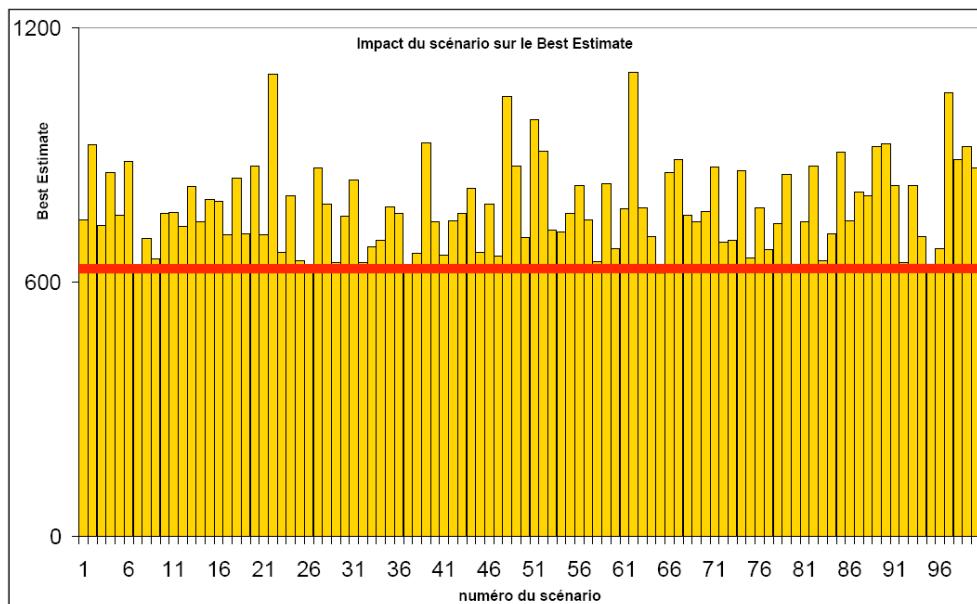


FIGURE 11.2.2: Exemple du Best Estimate pour 100 scénarios et pour une police donnée. Le résultat est minoré mais non-majoré

L'écart maximal constaté est d'environ 35% entre la réalisation des deux scénarios les plus extrêmes à la hausse et à la baisse. En réalité, les scénarios très favorables vont engendrer une forte participation bénéficiaire et donc un *Best Estimate* élevé. Or comme la PB n'est pas symétrique, un scénario défavorable ou très défavorable aura le même impact sur le *Best Estimate*, car la PB sera nulle. C'est exactement ce caractère asymétrique qui provoque un écart entre le scénario moyen et la moyenne des scénarios.

Notation. Soit :

PF_t : taux de rendement financier en date t

α : marge actionnaire

r_t taux technique en date t

PB_t le taux des provisions mathématiques reversé comme PB en t

Alors :

$$PB_t = \max(PF_t - \alpha - r_t; 0) \Rightarrow PB_t \in [0; +\infty[$$

$$\exists (PF_t^*, \alpha^*, r_t^*) : PB_t = 0 \Rightarrow BE_t \in [BE(PF_t^*, \alpha^*, r_t^*); +\infty[$$

C'est pourquoi on constate graphiquement que le montant du *Best Estimate* est minoré par cette valeur, en quelque sorte le *Best Estimate* sous les hypothèses du tarif. Mais il n'est pas majoré et nous observons des montants ponctuellement très élevés. Comme nous prenons ensuite la moyenne de ces réalisations il devient important de simuler un grand nombre de scénarios afin que les scénarios extrêmes ne faussent pas le résultat.

C'est finalement un mélange de liens complexes entre les données du portefeuille et les hypothèses de rendements financiers futurs, qui va permettre d'obtenir un montant du *Best Estimate* des engagements futurs de l'assureur. La participation aux bénéfices est l'unique actrice de cette interaction entre l'actif et le passif dans ce calcul, mais celle-ci va également dépendre du taux technique du contrat.

11.3 Résultats

11.3.1 Méthode de comparaison

Rappelons que le but est de mesurer Δ tel que :

$$BE^{stochastique} + \Delta = BE^{déterministe} + TVOG$$

Afin de gommer les approximations causées par l'outil, nous n'avons pas du tout utilisé PROPHET, mais effectué le calcul avec le scénario moyen dans l'outil EXCEL répliquant les calculs de PROPHET.

En ce qui concerne le calcul de la TVOG, nous avons mensualisé le calcul utilisant des options évaluées avec la formule fermée de BLACK et SCHOLES, car nous possédons déjà une projection des provisions mathématiques mensuelles et le calcul sera d'autant plus précis. La volatilité utilisée est la moyenne de celles utilisées dans les simulations, pondérées par l'allocation d'actif supposée constante dans le temps.

11.3.2 Montant du *Best Estimate* obtenu pour les deux modèles

Voici les résultats obtenus grâce à l'outil, après l'avoir fait tourner sur le portefeuille composé de 54 polices. Nous appellerons :

- “ $BE^{stochastique}$ ” le résultat de la méthode de Monte Carlo pour 1000 scénarios financiers
- “ $BE^{déterministe}$ ” le résultat obtenu grâce à l'outil pour le scénario moyen
- “TVOG” le montant de la valeur temps retourné par la méthode décrite à la section [6.4 page 62]

$BE^{stochastique}$	46854.09
$BE^{déterministe}$	40069.80
TVOG	5702
$BE^{déterministe} + TVOG$	45771.80

Le *Best Estimate* selon la méthode stochastique est donc légèrement inférieur à celui que nous obtenons avec un scénario unique augmenté de la TVOG.

Evaluons maintenant l'importance de ces écarts constatés :

Ecart sur BE total	
$\Delta = (BE^{\text{déterministe}} + TVOG) - BE^{\text{stochastique}}$	-1082.29
% Différence	-2.31%

Ecart sur estimation de la TVOG	
$Time Value = BE^{\text{stochastique}} - BE^{\text{déterministe}}$	6784.29
% Erreur de la TVOG	-15.95%

Nous pouvons donc conclure, pour cet exemple, que la méthode utilisée pour ajouter la TVOG sous-évalue d'environ 16% la valeur temps "réelle" du système de revalorisation par le taux garanti et la participation aux bénéfices. Ici cela ne représente finalement que 2.31% du *Best Estimate*, et uniquement des produits prévoyant la distribution de participation aux bénéfices. Néanmoins il faut également rappeler que la méthode de Monte Carlo est aussi une approximation, qui ne devient très fiable qu'à partir d'un nombre important de simulations. Mais nous supposons ici que c'est un bien meilleur estimateur de la valeur temps réelle qu'une réPLICATION financière par des actifs dérivés évalués par une formule fermée de BLACK et SCHOLES.

Quoiqu'il en soit, le fait que $BE^{\text{stochastique}} \geq BE^{\text{déterministe}}$ était attendu car le phénomène d'asymétrie est causé par la minoration de la participation aux bénéfices. Par exemple on peut imaginer une situation où le scénario moyen n'entraînerait pas de distribution de PB lorsque :

$$\max(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_T) \leq \text{taux technique} + \text{marge actionnaire}$$

Avec :

\bar{r}_t le taux de rendement moyen à la date t avec $t = 1 \dots T$

Or si ce taux de rendement était simulé, nous obtiendrions des scénarios plus favorables et d'autres moins favorables afin d'avoir celui-ci en moyenne. Pour les scénarios moins favorables, il n'y aurait aucun changement car la PB serait toujours nulle, mais des scénarios plus favorables pourraient en engendrer et le *Best Estimate* serait alors supérieur. Au global la moyenne pour Monte Carlo serait également supérieure, et l'ajout du caractère stochastique de la TVOG sera donc indispensable.

11.3. Résultats

Dans la dernière version des "*Technical Specifications*" pour le QIS5, nous trouvons cette conclusion concernant les "*Financial options and guarantees*" :

TP.7.46. The possible simplification for financial options and guarantees is to approximate them by assuming a Black-Scholes type of environment, although its scope should be carefully limited to those cases where the underlying assumptions of such model are tested. Additionally, even stochastic modelling may require some simplifications when facing extremely complex features. This latter may be developed as part of level 3 guidance.

Chapitre 12

Modélisation d'un taux de rachat dynamique

Un des avantages à utiliser un modèle stochastique est de pouvoir faire varier des paramètres de projection, selon l'évolution des marchés financiers. En effet il est évident que la rentabilité du contrat pour l'assuré aura une incidence non négligeable sur son comportement de rachat. Pour finir nous aborderons donc la question de la modélisation du taux de rachat.

12.1 Modélisation

La modélisation de la dynamique de rachat, admet comme souvent, différents niveaux de complexité. Usuellement le taux de rachat est scindé en deux dynamiques, influencées par des paramètres bien distincts :

12.1.1 Le rachat structurel

Il est déterminé par le type de contrat, les caractéristiques de la population assurée, l'âge du contrat, la fiscalité... mais est indépendant de l'évolution des marchés financiers. Un modèle stochastique n'est donc pas indispensable pour le mesurer.

12.1.2 Le rachat conjoncturel

Il vient augmenter l'intensité du rachat structurel, et constitue une partie variable entièrement déterminée par la revalorisation ou le rendement du contrat.

Une modélisation usuelle du taux de rachat global en date t τ_t est donnée par [Document 2] :

$$\tau_t = \tau_t^{structurel} \times \left[1 + \alpha \left(r_{t-1}^{cible} - r_{t-1}^{effectif} \right) \right]$$

Avec :

r_t^{cible} le taux de rendement en date t attendu par l'assuré

$r_{t-1}^{effectif}$ le taux de rendement en date t effectivement servi à l'assuré

α la sensibilité du taux de rachat à la sur(sous)-performance du contrat

Afin d'obtenir des taux cohérents quel que soit le rendement effectif, nous ajoutons à cela un taux plancher et plafond.

$$\tau_t = \min \left\{ \max \left\{ \tau_t^{structurel} \times \left[1 + \alpha \left(r_{t-1}^{cible} - r_{t-1}^{effectif} \right) \right]; \tau^{min} \right\}; \tau^{max} \right\}$$

Le taux de rachat total va donc augmenter (diminuer) lorsque le rendement effectif du contrat va être inférieur (supérieur) au taux de rendement attendu. Dans notre cas, le taux cible sera égal au taux spot sans risque long terme, que l'assuré aurait pu attendre s'il avait investi dans une obligation d'Etat dont l'échéance est égale à celle du contrat. Ici cela représente 4.04% sur 20 ans.

On utilise donc la notion de satisfaction par rapport au rendement du contrat. Si le taux attendu est réellement servi le taux conjoncturel n'a pas d'incidence sur le taux de rachat global.

Remarque : Le rachat pour les contrats d'assurance en cas de vie ou de décès sont nettement moins sensibles à la revalorisation et à l'âge du contrat qu'un contrat de capitalisation standard à taux garanti ou d'investissement en unités de compte par exemple. En effet la motivation lors de la souscription de ces derniers est principalement basée sur le rendement financier et l'avantage fiscal.

Modéliser le rachat conjoncturel n'est donc pas indispensable voir incorrect, dans le cas des assurances mixtes, car souvent l'assuré n'a pas réellement conscience de cette revalorisation avant la prestation en cas de décès, de survie, ou lors de la demande de rachat. C'est pourquoi, si nous voulons évaluer l'impact de l'intégration du rachat dynamique sur le *Best Estimate*, et la conclusion sera donc valable pour l'*Embedded Value* également, nous négligerons cette réalité. Il sera ainsi possible d'évaluer dans quelle proportion, le passage d'un taux de rachat "flat" constant à un modèle de rachat dynamique, va impacter le *Best Estimate*, et quel est sa sensibilité aux différents paramètres.

12.2 Calibrage

Nous partons d'une estimation des taux de rachat structurel donné par :

Ancienneté	Taux de rachat structurel
] 0 ; 4]	2%
] 4 ; 8]	5%
] 8 ; +∞ [8%

Nous faisons l'hypothèse que, si ces taux sont pertinents pendant les premières années du contrat, comme nous considérons des contrats avec une échéance fixe (20 ans pour l'exemple) le taux de rachat devrait décroître les dernières années du contrat. Car racheter très près de l'échéance est peu avantageux si le contrat prévoit des pénalités de rachat par exemple, sans parler de l'effet de fidélité qui augmente. Nous ajoutons donc l'hypothèse que ce taux structurel retombe progressivement vers 5% la dernière année. Pour lisser l'évolution du taux de rachat et obtenir une évolution mensuelle nous utilisons une fonction polynomiale d'ordre 2.

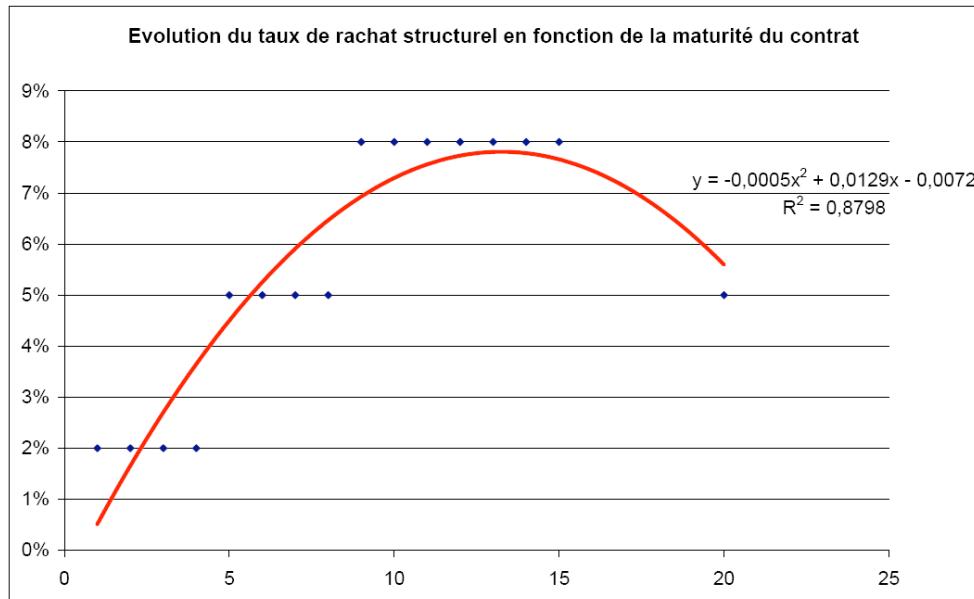


FIGURE 12.2.1: Hypothèse d'évolution du taux de rachat structurel selon une fonction polynomiale (en années)

Il faut ensuite déterminer le coefficient α tel que la moyenne des taux de rachat correspondent au taux "flat" utilisé dans le modèle déterministe. Le taux cible correspond au taux sans risque en fonction de la maturité du contrat et nous utilisons le taux moyen simulé comme taux effectif. Ces taux sont constants sur toute la durée du contrat, par contre le taux structurel utilisé évolue selon la fonction :

$$y = -0.0005x^2 + 0.0129x - 0.0072$$

Nous obtenons ainsi un coefficient α différent pour chaque échéance :

Echéance	r^{cible}	α
10	3.54%	9.818826684
15	3.95%	7.743401704
20	4.04%	8.800098917

12.3 Résultats

Pour ne pas obtenir un taux de rachat structurel négatif la première année, nous minorons celui-ci par 2%.

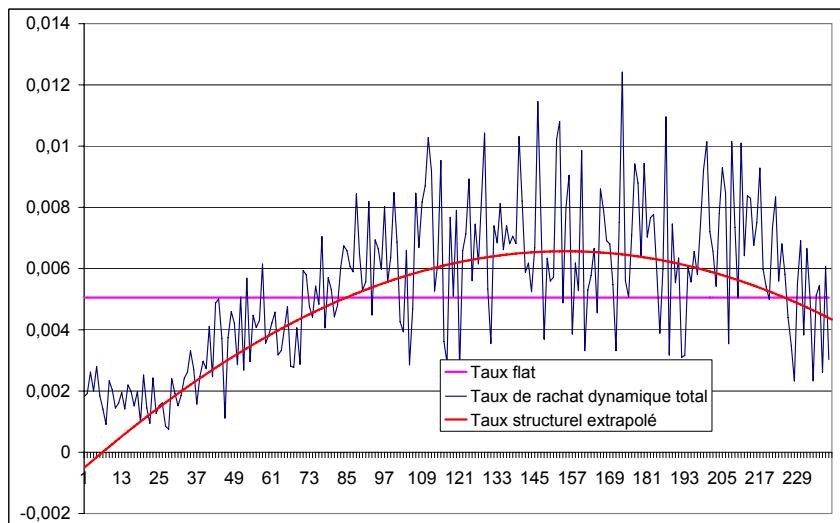


FIGURE 12.3.1: Variations du taux de rachat obtenu pour un scénario et une police donné, comparé au taux flat précédemment utilisé et aux nouvelles hypothèses sur le taux de rachat structurel (en mois)

L'impact est donc important sur un scénario isolé et l'impact sur les flux de rachat sont non-négligeables.

Globalement on constate également une augmentation significative du *Best Estimate* et ceci s'explique facilement. Etant donné que les flux de rachat sont le résultat d'un taux de rachat que l'on applique à la valeur de rachat, l'évolution de cette dernière est également à considérer. Comme la valeur de rachat évolue de la même façon que les provisions mathématiques (modulo les pénalités de rachat), c'est à dire de manière croissante, nous avons deux effets antagonistes qui s'appliquent sur les prestations de rachat suite à l'introduction de ce taux de rachat dynamique :

1. Le taux de rachat "*flat*" était globalement supérieur que le nouveau taux de rachat sur les sept premières années puis inférieur. L'effet de l'actualisation jouant moins sur les premières années, les flux de rachats devraient être moins importants donc le *Best Estimate* également plus petit¹.
2. Comme la valeur de rachat est croissante, on appliquera les taux de rachat les plus élevés sur un montant supérieur. Les flux de rachats seront donc plus importants qu'avec le taux "*flat*" et le *Best Estimate* sera de même plus grand.

On peut donc en conclure que le second effet prend le dessus sur le premier, et que notre exemple ne nous permet pas de mesurer de façon efficace l'impact de l'introduction d'un taux de rachat dynamique. D'autant plus qu'une modification du taux de rachat va également modifier toutes les autres prestations car toute la projection du nombre de contrats est modifiée.

Il faudrait reproduire les mêmes mesures sur un capital constant dans le temps, mais de toute évidence il est probable que seul l'effet de l'actualisation viendrait différencier les deux modèles. Toutefois un modèle dynamique est beaucoup plus flexible et permet, s'il est bien calibré, de projeter plus fidèlement l'évolution des rachats pour tous les types de contrats.

1. Tout ceci n'est bien sûr vrai que si en moyenne nous retrouvons bien le taux "*flat*"

Chapitre 13

Conclusion

La nouvelle réforme de solvabilité qui devrait s'appliquer à partir de l'exercice comptable au 31 décembre 2012, s'appliquera à tous les acteurs du secteur de l'assurance, sans distinction de taille et de moyens. Les études quantitatives d'impact (QIS) ont un double intérêt dans la mise en place de cette réforme : permettre de calibrer au mieux les scénarios à considérer, mais aussi permettre aux compagnies de se préparer à son application.

La complexité croissante de la formule standard et des exigences à la mise en place d'un modèle interne comme alternative à la méthode proposée, va sans aucun doute engendrer un coût supplémentaire important pour les compagnies. Le risque principal est que ce coût devienne disproportionné par rapport à l'intérêt initial du projet qui est de fournir une mesure plus fiable des risques de l'assureur et donc une solvabilité mieux adaptée. Le principe de proportionnalité est donc au cœur des échanges entre les propositions de la Commission européenne et les avis des acteurs du secteur de l'assurance via les *Consultation Papers* notamment.

Si le calcul du *Best Estimate* n'est qu'une étape dans l'ensemble du processus de calcul permettant de déboucher sur le montant du SCR et du MCR requis, il reste la première pierre indispensable et déterminante pour la suite. Les différents niveaux de complexité que le régulateur admettra, seront fonction de la capacité de l'assureur ou du réassureur à développer une méthode plus précise, ainsi que de l'ampleur de l'approximation effectuée. En effet, même si l'évaluation du *Best Estimate* ne doit pas contenir de prudence supplémentaire comme nous l'avons expliqué dans le 3.1.2 par exemple, en cas de doute sur la méthode il faudra toujours privilégier la solution la plus prudente. Le problème est que dans notre cas, il semblerait que, dans cet exemple, se restreindre à un modèle déterministe corrigé de la TVOG soit une approximation contraire à ce principe.

Or le régulateur ne serait pas en mesure d'imposer le recours à un modèle stochastique, tant le coût financier et humain ne pourrait pas être supporté par les petites et moyennes compagnies, qui invoqueraient le principe de proportionnalité. Et les résultats que nous présentons ici tendent à valider l'utilisation d'un modèle déterministe ajusté, tant au niveau de l'ampleur de l'implémentation, qu'à l'impact réduit de cette approximation, tout en permettant une analyse rapide et fine. Un modèle stochastique quant à lui, nécessite des outils complexes et adaptés qu'il faudra maîtriser et calibrer parfaitement, mais aussi un temps de calcul bien plus important, pour finalement une valeur ajoutée nuancée. On constate un écart d'approximation peu important, qui ne se retrouvera que dans les produits prévoyant de la participation aux bénéfices, car ce flux est le seul à dépendre de la réalisation de l'actif et n'est pas symétrique selon celle-ci. Cette différence est donc acceptable, à condition que l'on ajuste le *Best Estimate* de la TVOG par une méthode ad-hoc testée, et que les volumes restent raisonnables et maîtrisés.

Cependant il est évident que l'estimation de Monte Carlo sur un modèle stochastique bien calibré est plus précis et plus flexible que tout autre approximation. Surtout que ces avantages sont ensuite transposables au calcul de la MCEV entre autre. Cette méthode permet de faire varier des hypothèses et des paramètres selon différents scénarios financiers, comme nous l'avons présenté au chapitre 12, et il est donc également possible d'envisager une gestion dynamique de l'actif, où l'allocation varierait au cours du temps selon un taux cible et le versement des prestations.

Table des figures

2.2.1 Bilan Market Consistent sous Solvency 2	15
2.3.1 Structure du fonctionnement de Prophet	17
3.1.1 Comparaison des tables pour les hommes	25
3.1.2 Comparaison des tables pour les femmes	25
3.1.3 Vitesse d'extinction du nombre de polices (en mois)	27
3.3.1 Courbe moyenne des taux spots sans risque (en année)	31
3.4.1 Construction du vecteur de rendement certainty equivalent sous une hypothèse risque-neutre	32
3.4.2 Rendement certainty equivalent estimé résultant de la composition du portefeuille sous une hypothèse risque-neutre	33
3.5.1 Scénario moyen du taux d'inflation (en années)	34
5.3.1 Schéma de fonctionnement de la garantie plancher dans un contrat en unités de compte	49
5.3.2 Schéma de fonctionnement de la garantie cliquet dans un contrat en unités de compte	49
5.3.3 Schéma de fonctionnement de la garantie majorée dans un contrat en unités de compte	50
6.2.1 Représentation de la valeur intrinsèque et de la valeur temps d'une option d'achat et de vente	57
6.4.1 Représentation des seuils de revalorisation des contrats par rapport au rendement moyen attendu du portefeuille d'actifs	63
6.4.2 Construction d'un Bull Spread à partir d'options d'achat et de vente	67
6.4.3 Pay-off du portefeuille de réPLICATION de la revalorisation des contrats	68
6.4.4 Evolution par année des provisions mathématiques selon les différentes poches de taux technique	71
7.0.1 Processus mis en place pour générer des scénarios financiers stochastiques de T périodes	81
8.1.1 Simulation de 400 nombres aléatoires grâce à la fonction Alea()	84
8.1.2 Simulation de 400 nombres aléatoires grâce à la translation irrationnelle du Tore en utilisant le nombre premier 2	85
8.1.3 Mise en évidence de la corrélation entre les simulations utilisant la translation irrationnelle du Tore	86

Table des figures

8.1.4 Mesure de la corrélation entre deux mêmes éléments de suites basées sur des valeurs propres différentes	88
8.1.5 Mesure de la corrélation entre deux éléments de la suite basée sur une même valeur propre	89
8.1.6 Simulation de 400 nombres aléatoires grâce à la translation irrationnelle du Tore mélangé en utilisant le nombre premier 2	90
8.1.7 Mesure de la corrélation entre deux mêmes éléments de suites mélangées basées sur des valeurs propres différentes	91
8.1.8 Mesure de la corrélation entre deux éléments de la suite mélangée basée sur une même valeur propre	92
8.1.9 Mesure de la corrélation avec le mélange du terme de la suite et de la valeur propre utilisée	93
9.2.1 Evolution (en mois) du taux d'intérêt annuel dans cinq scénarios stochastiques générées grâce au modèle de VASICEK	107
9.2.2 Moyenne de 10 000 scénarios du taux d'intérêt annuel (en mois) simulés par le modèle de VASICEK	108
9.2.3 Evolution (en mois) du taux d'intérêt annuel dans cinq scénarios stochastiques générées grâce au modèle de COX, INGERSOLL, ROSS	112
9.2.4 Moyenne de 10 000 scénarios du taux d'intérêt annuel (en mois) simulés par le modèle de VASICEK	113
9.3.1 Hypothèses sur les liens de corrélation existants entre le rendement des actions et le niveau des taux d'intérêt	116
9.3.2 Exemple d'un scénario de rendement des actions sur 10 ans obtenu par simulation.	119
11.2.1 Montant du Best Estimate obtenu par le modèle stochastique pour toutes les polices et pour un scénario donné. Exemple pour 3 scénarios différents	125
11.2.2 Exemple du Best Estimate pour 100 scénarios et pour une police donnée. Le résultat est minoré mais non-majoré	127
12.2.1 Hypothèse d'évolution du taux de rachat structurel selon une fonction polynomiale (en années)	134
12.3.1 Variations du taux de rachat obtenu pour un scénario et une police donné, comparé au taux flat précédemment utilisé et aux nouvelles hypothèses sur le taux de rachat structurel (en mois)	135

Liste des symboles

Available Capital = Actif - BE - MVM

BE Best Estimate des engagements futurs

CEIOPS Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors

CoG Cost of Guarantee

GAO Guaranteed Annuity Option

MCEV Market Consistent Embedded Value

MCR Minimum Capital Requirement

MVM Market Value Margin ou Marge de Risque

NAV Net Asset Value ou Risk Bearing Capital
= Actif - BE

PB Participation aux bénéfices

PM Provisions mathématiques

QIS Quantitative Impact Study

SCR Solvency Capital Requirement

TMG Taux Minimum Garanti

TVOG Time Value of financial Obligation and Guarantee

Bibliographie

- [Article 1] ARTZNER P., EISELE K-T., *Supervisory accounting : Comparison between Solvency II and coherent risk measures* (2010)
- [Article 2] BAYAZIT D. : *Yield curve estimation and prediction with VASICEK model* (2004)
- [Article 3a] BOUCHARD B. : *Introduction à l'évaluation d'actifs financiers par absence d'opportunité d'arbitrage* (2009)
- [Article 3b] BOUCHARD B. : *Méthodes de Monte Carlo en Finance* (2007)
- [Article 4] BOYLE P., HARDY M. : *Guaranteed Annuity Options*, (2003)
- [Article 5] HARDY M., PANJER H. : *A credibility approach to mortality risk*, (1998)
- [Article 6] PATARD P-A. : *Outils numériques pour la simulation Monte Carlo des produits dérivés complexes* (2007)
- [Article 7] PLANCHET F., THEROND P. : *Approche scientifique des logiciels DFA*, Commission comptable de l'Institut des Actuaires (03/02/04)
- [Article 8] RAKOTOMALALA R. : *Tests de normalité, Techniques empiriques et tests statistiques* (Université Lyon 2, 2008)
- [Document 1] Caritat : *Modèles financiers en assurance*, Module de formation (2006)
- [Document 2] CHARVET S., PLANCHET F., THEROND P. : *La modélisation de l'actif dans le cadre d'un modèle interne* (2008)
- [Document 3] CEIOPS' ADVICE FOR LEVEL 2 *Implementing Measures on Solvency II : Technical provisions, Article 86*
- [Document 4] Lettre Circulaire 03/5 du Commissariat aux Assurances *relative aux bases techniques en assurance-vie.*
- [Mémoire 1] BOKOBZA N. : *Comparaison de modèles stochastiques d'allocation d'actifs pour un portefeuille de Prévoyance Collective* (Paris Dauphine 2002)

Bibliographie

- [Mémoire 2] KRYKOVA I. : *Evaluating of path-dependent securities with low discrepancy methods* (Worcester Polytechnic Institute 2003)
- [Ouvrage 1] HARDY M., *Investment guarantees : Modeling and Risk Management for Equity-Linked Life Insurance*, Wiley Finance, (2003)
- [Ouvrage 2] LE VALLOIS F., PALKSY P., PARIS B., TOSETTI A. : *Gestion actif passif en assurance-vie, Réglementation, outils, méthodes*, (Economica 2003)
- [Ouvrage 3] PETAUTON P. : *Théorie et pratique de l'assurance vie* (Ed Dunod, 3e édition, 2004)
- [Ouvrage 4] PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J. : *Modèles financiers en assurance, Analyse de risques dynamiques* (Economica 2005)
- [Site 1] <http://www.ceiops.org/>
- [Site 2] <http://www.commassu.lu/>
- [Site 3] <http://www.ressources-actuarielles.net/>
- [Site 4] <http://scholar.google.fr/>

Annexes

Annexe A

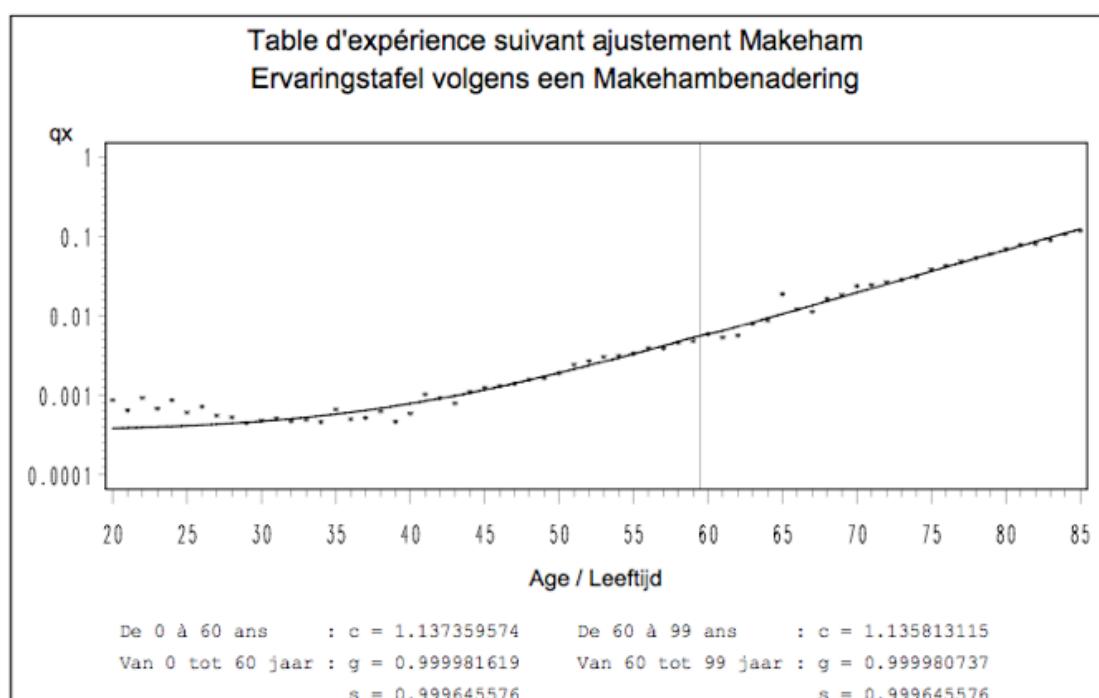
Table d'expérience Assuralia :

Groupe en totalité : Globalisation 2003 - 2007

Hommes

Groepsverzekering : Globalisatie 2003 - 2007

Mannen



Annexe B

Code VBA de simulation des scénarios

```
Sub simulations()
*****
Initialization des paramètres de projection
*****
Dim N As Integer 'le nombre de simulations
N = Sheets("Input").Cells(2, 3).Value
Dim T As Integer 'le nombre de périodes par simulation
T = Sheets("input").Cells(3, 3).Value
Dim P As Double 'la durée en année d'une période soit P=1/12 pour
un mois
P = Sheets("input").Cells(4, 3).Value
*****
Initialization des paramètres des modèles financiers
*****
Dim Z, Za, Zi As Double 'simulations de loi normale N(0,1)
Dim j1, j2, j3 As Integer
Dim sigmai As Double 'volatilité de l'action
Dim mui As Double 'drift de l'action
Dim roi As Double 'corrélation titre-marché
Dim roa As Double 'corrélation action-taux
Dim a, b, sigma, r0, sigmaold As Double
a = Sheets("Input").Cells(20, 3).Value
b = Sheets("Input").Cells(21, 3).Value
r0 = Sheets("Input").Cells(23, 3).Value
sigmaold = Sheets("Input").Cells(22, 3).Value
sigmai = Sheets("Input").Cells(28, 3).Value
mui = Sheets("Input").Cells(27, 3).Value
roi = Sheets("Input").Cells(33, 3).Value
roa = Sheets("Input").Cells(34, 3).Value
Dim k As Integer 'compteur pour le nombre de périodes
```

```

Dim i As Integer 'compteur pour le nombre de simulations
*****
Début de la simulation
*****
For i = 1 To N
    For k = 1 To T
*****
Réalisations de loi normale N(0,1) par Moro appliqué au Tore
mélangé
*****
Randomize
    Z = moro(torenmel(i, k, N))
    Za = moro(torenmel(i, k, N))
    Zi = moro(torenmel(i, k, N))
*****
Simulation du rendement des actions
*****
Sheets("Scénario_action").Cells(1 + i, 2 + k).Value = mui * P
+ sigmai * roi * roa * Z * P ^ 0.5
+ sigmai * roi * Za * ((1 - roa ^ 2) ^ 0.5) * P ^ 0.5
+ sigmai * Zi * ((1 - roi ^ 2) ^ 0.5) * P ^ 0.5
*****
Simulation des taux d'intérêt selon Cox-Ingersoll-Ross
*****
Sheets("CoxIRoss").Cells(i + 1, 2).Value = r0
Sheets("CoxIRoss").Cells(i + 1, 2 + k).Value =
Sheets("CoxIRoss").Cells(i + 1, 2 + k - 1).Value
+ a * (b - Sheets("CoxIRoss").Cells(i + 1, 2 + k - 1).Value) * P
+ sigmaold * Z * (Sheets("CoxIRoss").Cells(i + 1, 2 + k - 1).Value
* P) ^ 0.5
    Next k
Next i
End Sub

```

Annexe C

Démonstration pour le calcul du GAO

selon l'article : BOYLE P., HARDY M. : *Guaranteed Annuity Options*, (2003).

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

3 Derivation of Option Formula

In this section we will develop a formula for pricing the guaranteed annuity option. First we deal with simpler contracts which involve only interest rate risk. Then we introduce mortality risk as well. Finally we derive a formula for the guaranteed annuity option.

We will use the fact that the guaranteed annuity option is similar to a call option on a *bond* where the *coupon payments* correspond to the guaranteed annuity payments. We assume that the mortality risk is independent of the financial risk and that it is therefore diversifiable. We base the valuation of the option on the one factor Vasicek(1977) model. This model assumes that the short term interest rate follows a mean reverting Ornstein Uhlenbeck process and admits simple analytical solutions for bond prices and the prices of options on zero coupon bonds. In 1989, Jamshidian derived a simple formula for the price of an option on a coupon paying bond as a linear combination of options on zero coupon bonds. However neither the original Vasicek model nor the this version of Jamshidian's model reproduced the market prices of the pure discount bonds.

Dybvig(1988) showed how to adjust a general one factor stochastic interest rate model so that it could reproduce the current market term structure. Hull and White(1990) also showed how to adjust the one factor Vasicek and Cox Ingersoll Ross(1985) models to be consistent with the current term structure of interest rates. In particular Hull and White noted that the extended Vasicek model is extremely tractable. We use these ideas in our development of a simple interest rate model for valuing the guaranteed annuity option.

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

We start by valuing a very basic contract. We assume that the price, at time t , of a zero coupon bond that will pay one unit at time $s \geq t$ is $D(t, s)$. We assume an arbitrage free financial market and we also assume that there is a complete spectrum of bond maturities. To begin with, the only random variable is the interest rate. At time t we know the (market) prices of all the zero coupon bonds with maturity $s \geq t$. We consider a contract that pays one unit at times $(T + j)$, where $j = 1, 2 \dots k$ and $T > t$. Note that the market value of this contract at current time t is

$$V(t) = \sum_{j=1}^k D(t, T+j)$$

This result follows from the no arbitrage assumption.

We can also express the current market price of this payment stream as follows

$$\frac{V(t)}{D(t, T)} = E_{Q_T} \left[\frac{V(T)}{D(T, T)} \mid t \right] = E_{Q_T} [V(T) \mid t] \quad (2)$$

This is because in the absence of arbitrage the prices deflated by a suitable numeraire are martingales. We can use any traded asset⁸ as numeraire. Here we use the zero coupon bond which matures at time T as the numeraire and we denote the associated probability measure by the symbol Q_T . Equation (2) provides a valuation formula for any payoff $V(T)$ and we use it extensively in the sequel.

The expected value, under Q_T , of any pure discount bond with maturity ($\geq T$) can be readily obtained using the same valuation formula.

$$E_{Q_T} [D(T, T+j) \mid t] = \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)}$$

The ratio on the right hand side is often called the time T forward price at t , of the pure discount bond with maturity $(T + j)$.

We now introduce mortality. We will deal with contracts where the payments are contingent upon the survival of a given life. Under an immediate annuity the life receives one unit per annum as long as he or she survives. The *actuarial present value* at T of an immediate annuity to a life aged R

⁸whose price is always positive

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

at T , is

$$a_R(T) = \sum_{j=1}^J {}_j p_R D(T, T+j) \quad (3)$$

where ${}_j p_R$ represents the probability that the life aged R will survive for a further j years. The limiting age of the mortality table is denoted by ω and we set $J = (\omega - R)$. Note we use R for the age of the life at time T . It is convenient to have different notation for the age of the policyholder and for time.

This actuarial present value corresponds to the expectation over the distribution of the (curtate) future lifetime of the life in question. Let τ denote the future lifetime of a life aged R at time T . Consider the random variable

$$Y(\tau | T) = \sum_{j=1}^{\tau} D(T, T+j).$$

for $\tau = 1, 2, \dots$ where by convention $Y(0 | T) = 0$. This random variable corresponds to the market value of an annuity certain payable for τ years. Note that $D(T, T+j)$ is known at time T for all j . The probability that $\tau \in (k-1, k]$ is

$${}_{k-1} p_R q_{R+k-1}.$$

where q_{R+k-1} denotes the probability that a life now aged $(R+k-1)$ dies in the next year ie before reaching age $(R+k)$. Using these probabilities, the expected value of the annuity certain payable for the random future lifetime is

$$E_{P_S} [Y(\tau | T)] = \sum_{k=1}^J {}_{k-1} p_R q_{R+k-1} [Y(k-1) | T]. \quad (4)$$

The expectation here is taken with respect to the survival probabilities, P_S . It is easy to show that this expectation can be converted to the expression for $a_R(T)$ on the right hand side of equation(3).

We next derive an expression for the value, at time t , of a deferred annuity. We assume the life in question is aged x at current time t . At time $T \geq t$, this individual will be aged $R = x + (T - t)$ assuming he survives. At current time t , these future payments are **random variables**: both with respect to mortality and also with respect to interest rates. Milevsky and

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

Promislow (2001) discuss the valuation of insurance contracts allowing for both sources of randomness. The results are simpler if we assume that the force of mortality⁹ is deterministic and for now we will make this assumption. Our assumption corresponds to the assumption of a deterministic hazard and just as in the case of credit risk this assumption leads to simpler formulae. Under this assumption the interest rate risk is independent of the mortality risk.

There is an important implication of this mortality assumption. Assume we have a life aged x at current time t . At time $T > t$ this life will either survive and reach age $R = (x + T - t)$ or die in the interval (t, T) . Our mortality assumption implies that we know, at current time t , the distribution of the future lifetime of the life conditional on reaching age R . In other words we can accurately predict at time, t the force of mortality that will operate during $[T, T + J]$.

Let $V(t)$ be the market value at time t of the deferred annuity that starts at time T . We have

$$\frac{V(t)}{D(t, T)} = E [(Y(\tau_x) \mathbf{1}_{\tau_x > (T-t)}) \mid t] \quad (5)$$

where the expectation is taken over the joint distribution of Q_T and P_S and τ_x is the future lifetime of a life aged x at time t . Because the mortality risk is assumed to be diversifiable and independent of the interest rate risk we can write

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{D(t, T)} &= {}_{(T-t)}p_x \sum_{j=1}^J {}_j p_R E_{Q_T} [D(T, T+j) \mid t] \\ &= {}_{(T-t)}p_x \sum_{j=1}^J {}_j p_R \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)} \end{aligned}$$

Hence we have

$$V(t) = {}_{(T-t)}p_x \sum_{j=1}^J {}_j p_R D(t, T+j)$$

⁹The force of mortality corresponds to the hazard rate in modelling default risk(see Duffie and Singleton(1999)).

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

Note that the market value at time t , of the deferred annuity can be expressed as a linear combination of zero coupon bonds. Recall that $R = x + (T - t)$.

We now turn to the valuation of the guaranteed annuity option. Let $G(T)$ denote the value of this option at maturity. We have

$$G(T) = \frac{S(T) (a_R(T) - g)^+}{g} 1_{\tau_x > T_d} \quad (6)$$

where $T_d = (T - t)$ and g is the guaranteed annuity conversion rate. In our benchmark example $g = 9$. Proceeding as before the value of the option at time, t is given by

$$\frac{G(t)}{D(t, T)} = {}_{(T-t)p_x} E_{Q_T} \left[\frac{S(T) (a_R(T) - g)^+}{g} \mid \tau_x > T_d \right]$$

Initially we assume¹⁰ that $S(T)$ is independent of interest rates. We have

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{{}_{T-t} p_x D(t, T) E_{Q_T}[S(T)]}{g} E_{Q_T} \left[(a_R(T) - g)^+ \mid \tau_x > T_d \right] \\ &= \frac{{}_{T-t} p_x S(t)}{g} E_{Q_T} \left[(a_R(T) - g)^+ \mid \tau_x > T_d \right] \end{aligned}$$

The last line follows because

$$\frac{S(t)}{D(t, T)} = E_{Q_T} [S(T) \mid t]$$

Inserting the expression for $a_R(T)$ from (3) we have

$$E_{Q_T} [(a_R(T) - g)^+ \mid \tau_x > T_d] = E_{Q_T} \left[\left. \left(\sum_{j=1}^J {}_j p_R D(T, T+j) - g \right)^+ \right| t \right]$$

The expression inside the expectation on the right hand side corresponds to a call option on a *coupon paying bond* where the payment at time $(T + j)$ is ${}_j p_R$. Jamshidian(1989) noted that in the case of a one factor interest rate model this option could be expressed as a portfolio of options on zero coupon bonds. Hence we now assume that the interest rate dynamics are generated by a single factor. Specifically we assume that the short interest rate follows a

¹⁰This is a very strong assumption but it simplifies the analysis.

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

one factor Ornstein Uhlenbeck process as assumed by Vasicek. Let $a_j = {}_j p_R$ so that the coupon bond value at time, T , is

$$\sum_{j=1}^J a_j D(T, T+j).$$

Note that the market value at time, t of this coupon bond is

$$P(t) = \sum_{j=1}^J a_j D(t, T+j).$$

With this notation our call option has a value at time, T of

$$(P(T) - g)^+.$$

Let r_T^* denote the value of the short rate for which

$$\sum_{j=1}^J a_j D^*(T, T+j) = g$$

where we use the asterisk to signify that each zero coupon bond is evaluated at r_T^* . Recall that in the Vasicek model the zero coupon bond price is specified once we know the prevailing short term interest rate. We now define K_j as follows

$$K_j = D^*(T, T+j).$$

Jamshidian proved that the market price of the option on the coupon bond with strike price g is equal to the price of a portfolio of options on the individual zero coupon bonds with strike prices K_j . Specifically we have

$$C[P(t), g, t] = \sum_{j=1}^J a_j C[D(t, T+j), K_j, t],$$

where $C[P(t), g, t]$ is the price at time t of a call option on the coupon bond with strike price g and $C[D(t, T+j), K_j, t]$ is the price at time t of a call option on the zero coupon bond with maturity $(T+j)$ and strike price K_j . For the Vasicek model these call prices have simple Black Scholes expressions.

We can use Jamshidian's result to obtain an explicit expression for $G(t)$. Recall that

$$G(t) = \frac{T-t}{g} p_x S(t) E_{Q_T}[(P(T) - g)^+ | t].$$

Annexe B : Démonstration pour le GAO :

Boyle P., Hardy M. ;, Guaranteed Annuity Options, (2003)

From the numeraire valuation equation we have

$$\frac{C[P(t), g, t]}{D(t, T)} = E_{Q_T}[(P(T) - g)^+ \mid t]$$

Pulling all the pieces together we have

$$G(t) = \frac{\frac{T-t}{p_x} S(t)}{g} \frac{\sum_{j=1}^J a_j C[D(t, T+j), K_j, t]}{D(t, T)}. \quad (7)$$

The explicit formula for each individual bond option under the Vasicek model is

$$C[D(t, T+j), K_j, t] = D(t, T+j) N(h_1(j)) - K_j D(t, T) N(h_2(j)),$$

where

$$h_1(j) = \frac{\log \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)K_j}}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2},$$

$$h_2(j) = \frac{\log \frac{D(t, T+j)}{D(t, T)K_j}}{\sigma_P} - \frac{\sigma_P}{2},$$

and

$$\sigma_P = \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa}} \frac{(1 - e^{-\kappa j})}{\kappa}.$$

The parameters κ , θ and σ characterize the dynamics of the short rate of interest under the Vasicek process. The price of the zero coupon bond under this model when the short rate is $r(t)$ is

$$D(t, t+s) = \exp[-\theta\tau - (r(t) - \theta)(\frac{1 - e^{-\kappa s}}{\kappa})]$$

$$+ \frac{\sigma^2}{4\kappa^3} (4e^{-\kappa s} - e^{-2\kappa s} + 2\kappa s - 3)$$