

Analyse du risque et couverture des tranches de CDO synthétique.

Mémoire d'Actuaire

par

Areski COUSIN

Table des matières

Introduction générale	1
------------------------------	----------

1	Description des produits dérivés de crédit étudiés	3
1.1	Credit Default Swap	5
1.2	Indices de CDS	6
1.3	Tranches de CDO synthétique	8
1.4	Tranches de CDO standardisées	9
2	Annonce du plan et problématique	11
2.1	Première partie : analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur	13
2.2	Seconde partie : couverture des tranches de CDO	15

Partie I Analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à fac- teur	21
--	-----------

Chapitre 1 Les modèles à facteur pour l'évaluation de tranches de CDO	23
1.1 Évaluation de tranches de CDO dans un modèle à facteur	24

1.1.1	Calcul du spread à partir de la distribution de la perte agrégée	24
1.1.2	Loi de la perte agrégée dans un modèle à facteur	29
1.1.3	Identification des modèles à facteur	35
1.2	Revue des modèles à facteur	41
1.2.1	Copules à facteur	41
1.2.2	Modèles structurels multivariés	52
1.2.3	Modèles Poisson multivariés	54
1.2.4	Modèles à intensité affine	56
Chapitre 2 Analyse comparative de la dépendance		63
2.1	Quelques rappels sur la théorie des ordres stochastiques	64
2.1.1	Ordres stochastiques univariés	64
2.1.2	Ordres stochastiques multivariés	66
2.1.3	Ordres stochastiques et prix de call	68
2.1.4	Ordres stochastiques et mesures de risque	68
2.2	Ordres stochastiques et monotonie des primes de CDO	70
2.2.1	Ordre supermodulaire et monotonie des primes de CDO	70
2.2.2	Cas comonotone	72
2.2.3	Cas indépendant	72
2.2.4	Portefeuille infiniment granulaire	73
2.3	Cas d'un portefeuille échangeable	74
2.3.1	Échangeabilité et théorème de De Finetti	74
2.3.2	Résultats existants	75
2.3.3	Ordre supermodulaire et vecteurs de Bernoulli échangeables	78
2.4	Monotonie des primes de CDO dans les modèles à facteur	84
2.4.1	Copules à facteur	84
2.4.2	Modèles structurels multivariés	91
2.4.3	Modèles Poisson multivariés	95
Annexe A		99
A.1	Vecteur aléatoire comonotone	99
A.2	Coefficient de dépendance dans les queues	99
A.3	Coefficient de dépendance de Kendall ou Tau de Kendall	100

Chapitre 3 Couverture du risque de défaut dans les modèles de contagion markoviens	103
3.1 Description du modèle	105
3.1.1 Temps de défaut	105
3.1.2 Hypothèse de marché	106
3.1.3 Couverture et Théorème de représentation de martingale	107
3.2 Modèles de contagion markoviens homogènes	108
3.2.1 Description des intensités	108
3.2.2 Evaluation risque neutre	110
3.2.3 Calcul des stratégies de réplication	111
3.3 Calibration des intensités de la perte	113
3.3.1 Calibration des intensités à partir des lois de la perte à tous les horizons	113
3.3.2 Calibration des intensités dans le cas homogène en temps	115
3.3.3 Autres approches pour la calibration des intensités	116
3.4 Calcul des stratégies de couverture dans un arbre recombinaant	116
3.4.1 Construction de l'arbre	117
3.4.2 Cash-flows d'une tranche de CDO dans l'arbre et credit deltas	118
3.5 Stratégies de couverture pour un arbre calibré sur la copule gaussienne	121
3.5.1 Calcul des stratégies de couverture	121
3.5.2 Sensibilité des stratégies de couverture au taux de recouvrement	124
3.5.3 Sensibilité des stratégies de couverture au paramètre de corrélation	125
3.6 Stratégies de couverture pour un arbre calibré sur des données de marché	128
3.6.1 Calcul des stratégies de couverture	128
3.6.2 Comparaison entre deltas dans le modèle de contagion et deltas de marché	133
3.6.3 Comparaison entre deltas dans le modèle de contagion et deltas dans d'autres approches dynamiques	135
Conclusion	137
Bibliographie	139

Introduction générale

Jusqu'en 2006, le marché des dérivés de crédit et particulièrement celui des tranches de CDO synthétiques ont connu une croissance fulgurante, notamment grâce à l'introduction d'indices de CDS et de tranches standardisées de CDO. En effet, la standardisation du marché, l'augmentation de la liquidité et de la transparence ont contribué au développement de plusieurs générations de produits structurés, toujours plus innovants et attirant l'intérêt de nouveaux investisseurs. La couverture des tranches de CDO ou la gestion de tranches "bespokes", plus exotiques et moins liquides a rapidement nécessité l'emploi de méthodes de gestion basées sur des modèles d'évaluation calibrés sur les cotations des tranches standardisées de CDO. Malgré le nombre impressionnant d'approches concurrentes en matière de modélisation des portefeuilles de crédit et d'évaluation des tranches de CDO, la référence de marché demeure, pour la plupart des praticiens, la structure de "base correlation" basée sur un modèle à facteur Gaussien.

A bien des égards, la récente crise du crédit aura bouleversé la perception des risques sur le marché des tranches de CDO synthétique. Outre la crise de liquidité, l'augmentation du risque de contrepartie ou bien la crise de confiance envers les agences de notation, la crise des subprimes et ses conséquences auront particulièrement mis en évidence les limites des pratiques actuelles en terme de gestion des risques et de couverture¹. De plus, alors qu'un grand nombre d'institutions subissent des pertes colossales suite à cette crise, la couverture et la gestion des risques des tranches de CDO et des produits associés sont en passe de devenir les sujets de préoccupation majeur du moment.

Nous mettrons en relief, au fil de ce mémoire, certaines des anomalies provenant des pratiques actuellement employées dans le cadre de la gestion et de la couverture des risques des tranches de CDO. Ce travail ne prétend pas proposer une solution définitive à ces problèmes mais plutôt d'éclaircir certains aspects de la gestion des risques des tranches de CDO. L'organisation de ce mémoire s'articule autour de deux axes principaux. Le premier concerne l'analyse du risque dans les modèles à facteur et le second s'intéresse à la couverture dynamique dans les modèles de contagion Markovien.

Pour une meilleure lisibilité, cette introduction est divisée en deux parties. La première décrit brièvement les produits étudiés et la seconde établit plus en détail la problématique et annonce le plan.

1 Description des produits dérivés de crédit étudiés

Les dérivés de crédit sont des contrats financiers qui se négocient de gré à gré et dont le but est de transférer d'une contrepartie à une autre, le risque de crédit relatif à une entité de référence. Les institutions financières, comme les banques, les fonds mutuels, les fonds de pension, les compagnies d'assurance, de réassurance, les assureurs monolines, les entreprises ou les agences gouvernementales, peuvent naturellement avoir recours à ces produits pour couvrir, réduire ou gérer certaines de leur exposition au risque de crédit. Leurs motivations peuvent être multiples. Il peut s'agir par exemple d'alléger le niveau des fonds propres réglementaires, de gérer activement un portefeuille de crédit ou simplement d'investir dans des produits innovants et adaptés à un profil de risque spécifique.

¹Pour plus de détails sur la crise des subprimes et ses conséquences sur le marché des CDOs, le lecteur est renvoyé aux articles de BIS (2008), Crouhy et Turnbull (2008) et aux mémoires de Baillet et Brard (2007) et Schmitz (2007).

On peut distinguer deux classes de dérivés de crédit, ceux dont les flux de capitaux dépendent directement du risque de défaut de l'actif sous-jacent et ceux dont les flux de capitaux dépendent directement de l'évolution des spreads de l'actif sous-jacent. Cette dernière classe d'actifs ne constitue qu'une minorité des contrats négociés sur le marché et ne sera pas traité dans ce mémoire.

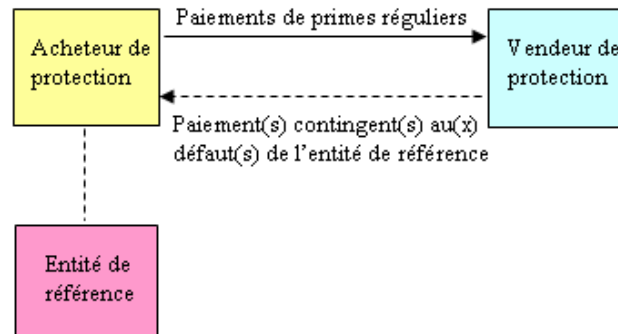


FIG. 1 – Structure générale d'un dérivé de crédit

Les produits dérivés de crédit étudiés dans ce mémoire peuvent être assimilés à des contrats liant un vendeur de protection et un acheteur de protection (voir figure 1). Le vendeur de protection s'engage à couvrir l'ensemble des pertes induites par le défaut de l'entité de référence. En contrepartie, l'acheteur de protection doit verser périodiquement une prime au vendeur de protection. Même s'il existe des ressemblances évidente avec un contrat d'assurance classique, il convient cependant de préciser plusieurs différences structurelles notoires :

- Les dérivés de crédit sont des actifs financiers cotés sur un marché.
- L'acheteur de protection ne détient pas forcément (c'est d'ailleurs rarement le cas) l'entité de référence sous-jacente à l'origine du risque.
- Les primes perçues par le vendeur de protection sont fixées pour toute la durée du contrat et ne sont pas réajustées par exemple en cas de détérioration du risque de défaut de l'entité de référence.

Les swaps de défaut ou CDS (Credit Default Swap) sont sans doute les produits dérivés de crédit les plus utilisés, les plus simples et les plus populaires. Il s'agit de contrat de protection dont l'entité de référence est un titre obligataire risqué (dans la plupart des cas). Ils constituent les éléments de base sur lesquels reposent des structures plus complexes telles que les montages de CDO synthétique (Synthetic Collateralized Debt Obligation). Les structures de CDO synthétiques se sont imposées depuis 2002 car elles permettent de transférer tout ou partie du risque d'un portefeuille de crédit sans qu'il y ait de transfert physique des titres sous-jacents. Cette innovation a largement contribué à l'extension du marché des dérivés de crédit. De plus, la transparence et la liquidité croissante du marché des CDS a naturellement conduit à la création d'indices standardisés de CDS, l'iTraxx pour l'Europe et l'Asie et CDX pour l'Amérique du Nord, et de tranches standardisés de CDO sur indice. Ces indices constituent de véritable benchmark de l'état de santé du marché du crédit. Pour une description détaillée des différents types de montages de CDO et leur justification (CDO Cash/CDO synthétique, CDO d'arbitrage/CDO de bilan, CDO financé/CDO non financé) nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Ta-

vakoli (2003) ou aux articles de synthèse (en français) de Banque de France (2005) et Banque de France (2006). Pour une analyse méticuleuse du marché des dérivés de crédit, le lecteur est renvoyé aux livres de Schönbucher (2003), Das (2005), Kakodkar et al. (2006a), Kakodkar et al. (2006b), De Servigny et Jobst (2007) ou Meissner (2008). La thèse de Houdain (2006) fournit également une bonne description en français de ce marché. L'ISDA (International Swaps and Derivatives Association), la BIS (Bank for International Settlements) et la BBA (British Banker's Association) établissent régulièrement des rapports statistiques sur l'évolution du marché. Nous rappellerons ici les principales caractéristiques des produits étudiés dans ce mémoire, i.e les CDS, les indices de CDS et les tranches de CDO synthétiques.

1.1 Credit Default Swap

Définition : *Un swap de défaut ou "credit default swap" (CDS) est un contrat bilatéral entre un acheteur de protection et un vendeur de protection. Le vendeur de protection s'engage à indemniser l'acheteur de protection en cas de survenue d'un événement de défaut relatif à de la dette obligataire corporate ou souveraine. En échange, l'acheteur de protection verse régulièrement une prime ou spread de crédit au vendeur de protection jusqu'à échéance du contrat ou jusqu'à la date de survenance du défaut dans le cas où ce dernier survient avant l'échéance.*

Apparus au début des années 1980, les swaps de défaut sont les contrats les plus importants et les plus largement utilisés sur le marché des dérivés de crédit. Ils constituent les actifs de base sur lesquelles reposent les montages de CDOs synthétiques.

Événements de défaut

Bien que le marché des dérivés de crédit soit un marché de gré à gré, les clauses régissant les contrats dérivés de crédit sont standardisées par l'ISDA (International Swap and Derivative Association) qui a pour but notamment de définir les événements de défauts. La dernière mise à jour des définitions date de 2003 (voir Parker et Brown (2003)) et comprend 6 événements :

1. Faillite. Terme sous lequel on désigne principalement le fait qu'une entreprise :
 - soit dissoute ou mise en liquidation,
 - devienne insolvable ou soit incapable d'honorer ses dettes,
 - effectue un acte de cession générale, un arrangement ou un plan concordataire avec ses créanciers ou au profit de ceux-ci,
 - engage ou fait l'objet de procédures en vue d'obtenir un jugement d'insolvabilité ou de faillite ou tout autre,
 - se voie saisir de tout ou de la majeure partie de ses actifs par un créancier privilégié,
 - soit l'objet d'une procédure ou mesure similaire à celles mentionnées ci-dessus dans le droit applicable de tous pays.
2. Défaut de paiement sur le principale ou les intérêts de l'obligation de référence.
3. Accélération de remboursement d'une dette obligataire de l'entité de référence déclenchée par le défaut de paiement sur une autre de ses obligations.
4. Défaut de paiement sur l'une des obligations de l'entité de référence (exclusif avec l'événement précédent).
5. Répudiation, Moratorium.

6. Restructuration de la dette.

Suivant les swaps de défaut, les événements définis ci-dessus peuvent être inclus ou non dans les clauses du contrat. Cependant, la plupart des contrats de CDS prennent en compte les deux premiers événements de défaut, i.e la faillite et le défaut de paiement. Pour les autres, cela dépend des pratiques du marché considéré. Dans la suite de ce mémoire, nous dirons qu'une entité est en défaut si l'un des événements ci-dessus se produit et que de plus, cet événement est répertorié dans les clauses du contrat considéré.

Notons que l'acheteur de protection est également soumis au risque de défaut du vendeur de protection et inversement. En toute rigueur, ce risque appelé risque de contrepartie, devrait être pris en compte dans le cadre de l'évaluation et de la gestion de tels produits financiers. Mais cela est rarement le cas en pratique faute d'observations.

Description des flux de capitaux

En termes de flux de capitaux, l'acheteur de protection paie au vendeur une prime périodique, habituellement trimestrielle, qui est spécifiée au début de la transaction. Si aucun événement de crédit tel qu'un défaut ne se produit durant la vie du swap, ces paiements sont alors les seuls flux de capitaux. Comme dans beaucoup d'autres swaps, il n'y a pas d'échange de notionnel sous-jacent. Suite à un événement de crédit, le vendeur de protection effectue un paiement à l'acheteur de protection. Classiquement, l'acheteur de protection fournit au vendeur toute dette (i.e. obligation délivrable) assimilable à l'entité de référence en échange d'un paiement en cash équivalent à l'intégralité du notionnel sous-jacent. L'acheteur de protection arrête de payer la prime périodique après l'événement de crédit. La perte nette du vendeur de protection est ainsi le notionnel sous-jacent moins le recouvrement perçu sur l'obligation délivrée.

Maturité

Les contrats de swap de défaut les plus liquides ont une maturité de 5 ans. Les autres maturités les plus traitées sont 3, 7 et 10 ans. Les contrats CDS standards cotés sur le marché changent de maturité tout les 3 mois. Ils peuvent avoir quatre dates différentes de maturité : le 20 mars, le 20 juin, le 20 septembre ou enfin le 20 décembre. Cette standardisation des maturités a augmenté la liquidité des contrats CDS et a contribué à la croissance soutenue de ce marché. Les spreads d'un CDS pour plusieurs maturité constitue une courbe de crédit à partir de laquelle il est possible de déduire les probabilités de défaut marginale. Les applications sont multiples comme par exemple l'évaluation de la qualité financière d'une entité par les agences de notations ou la gestion de produit structurés construits à partir de swap de défaut. Le Chapitre 2 du livre de De Servigny et Jobst (2007) fournit une synthèse des méthodes de construction de la loi marginale d'un défaut à partir de la courbe des spreads des CDS associée.

1.2 Indices de CDS

L'introduction d'indices CDS comme l'iTraxx en Europe et en Asie, le CDX en Amérique du Nord et dans les pays émergents, a révolutionné le marché du risque de crédit. La liquidité, la flexibilité et la standardisation de ces indices sont au cœur de cette révolution. Nous nous intéressons ici aux deux principaux groupes d'indices CDS, l'iTraxx européen et le CDX Nord américain.

Définition : Les indices CDS sont des portefeuilles de CDS simples servant d'outils de trading et de baromètre de l'activité du marché des dérivés de crédit. Les contrats d'indices CDS permettent à un investisseur d'acheter ou de vendre de la protection pour une maturité donnée sur un portefeuille de contrats CDS ayant des entités de référence différentes. Les entités de référence sont également pondérées et sélectionnées dans ces indices en fonction de leur notation et de leur liquidité dans le marché CDS. Une fois que la composition d'un indice est fixée, aucune entité ne peut être ajoutée ou enlevée du portefeuille. Un indice continue d'exister même après un événement de crédit sur une des entités de référence. Les indices CDS peuvent être divisés en deux grandes familles, le CDX (Nord Américain et pays émergents) et l'iTraxx (Europe et Asie). Ces indices ont été créés en 2004 à la suite de la fusion de deux indices concurrents, le Trac-X et l'iBoxx. Les indices CDX et iTraxx couvrent désormais la majorité du marché du crédit dans le monde : plus d'une cinquantaine d'indices classifiés par région, maturité, prime, secteur, et notation.

Les indices dont il sera question dans ce mémoire sont l'indice iTraxx Europe et l'indice CDX.NA.IG composés tout deux de 125 swaps de défaut relatifs à des titres obligataires de qualité financière *investment grade*. Notons que la pondération des CDS qui composent ces indices est uniforme et égale à 0.8% (1/125) pour chaque entité.

Description des flux de capitaux

Chaque indice CDS a une prime fixe jusqu'à maturité du contrat. Cette prime est approximativement égale à la prime moyenne des contrats CDS de toutes les entités de référence de l'indice à la date de lancement (20 mars ou 20 septembre) de cette nouvelle série. Ainsi, chacune des entités de référence est introduite dans l'indice avec un niveau de prime fixé qui diffère de la prime actuelle cotée sur le marché. Ceci implique un paiement ou une réception upfront d'un montant associé à chaque entité de référence. Ces montants upfront sont agrégés pour toutes les entités de référence afin de générer un montant upfront total. De plus, si un investisseur achète de la protection sur un indice entre deux dates de paiement de coupon, alors le vendeur de protection lui verse les intérêts courus. En effet, l'acheteur de protection va payer la prime pour le trimestre entier à la prochaine date de paiement alors que la protection n'est effective que pour une partie du trimestre. S'il n'y a pas d'événements de crédit, l'acheteur de protection paie une prime trimestrielle, le 20 mars, le 20 juin, le 20 septembre et le 20 décembre de chaque année jusqu'à la maturité du contrat. Si un événement de crédit affecte une des entités, trois conséquences peuvent être tirées :

1. L'acheteur de protection donne au vendeur de protection une obligation délivrable de l'entité de référence en défaut, d'un montant notionnel égal au montant notionnel du contrat initial, divisé par le nombre d'entités de référence
2. Le vendeur de protection paie à l'acheteur de protection un montant égal au montant notionnel du contrat d'indice CDS, divisé par le nombre d'entités de référence.
3. Le contrat continue avec un montant notionnel diminué du montant notionnel de l'entité de référence en défaut. Le nombre des entités de références dans l'indice est réduit de un.

Maturité

Pour assurer une forte liquidité des indices, leur composition est mise à jour périodiquement. Par exemple, pour un indice de CDS associé à de la dette de catégorie *investment grade*, les

noms dont la qualité financière s'est trop détériorée sont retirés du portefeuille et remplacés par des noms de bonne qualité. Les indices changent de séries tous les six mois, le 20 mars et 20 septembre de chaque année. Remarquons de plus que ce changement n'entraîne pas seulement une recomposition structurelle mais également un changement de maturité fixée le 20 juin ou le 20 décembre. Les nouvelles séries d'indices introduites sont appelées séries en cours (*on-the-run*). La maturité d'un indice 5 ans en cours varie donc de 5.25 années à 4.75 années. Les anciennes séries restent tout de même traitées sur le marché mais avec une liquidité inférieure.

1.3 Tranches de CDO synthétique

Initiés en juin 2000, les CDOs synthétiques ne se développent qu'à compter de l'année 2001 et ont constitué le principal moteur de croissance du marché des dérivés de crédit. Ces structures permettent le transfert du risque associé à un portefeuille de crédit. Le terme synthétique traduit le fait que le mécanisme de transfert des risques est synthétisé au moyen d'un portefeuille composé de swaps de défaut. En conséquence, il ne s'opère aucun transfert physique des titres obligataires sous-jacents lors du montage d'une telle structure. Seule le risque de crédit dans sa globalité est déplacé d'une contrepartie à une autre. Les mécanismes de transfert de risque synthétique ont connu un large succès grâce à leur plus grande facilité de mise en œuvre et leur possibilité accrue en terme de gestion des risques (via l'évaluation et la couverture).

Définition : *Les CDOs synthétiques sont typiquement des produits de corrélation, leur niveau de risque est en partie défini par le risque de défaut joint des crédits référencés dans le portefeuille sous-jacent. Ces produits sont généralement initiés par un arrangeur, une institution financière de type banque d'investissement, qui construit un portefeuille de référence composé de CDS. La gestion de ce portefeuille sous-jacent sera ensuite assurée par une société de gestion d'actif spécialisée, communément appelé SPV (Special Purpose Vehicle). Le SPV émet alors plusieurs tranches de CDO correspondant à différents niveaux de risque. Notons que les tranches émises constituent le passif du SPV, son actif étant constitué du portefeuille de CDS. À ce découpage correspond une hiérarchie précise quant aux droits des différentes tranches émises sur les revenus tirés du portefeuille de crédits sous-jacent. Les tranches senior, mezzanine, equity bénéficient ainsi d'un rang de priorité décroissant sur ces revenus.*

Ainsi, les risques inhérents à un CDO synthétique sont principalement la survenue de défauts, l'effet de la dépendance entre les défauts, la dégradation de la qualité des crédits (risque de spread). D'autres risques relatifs au montage, comme la mauvaise performance du gestionnaire du portefeuille de référence ou la dégradation de la qualité de crédit de l'arrangeur sont également à prendre en considération. Pour plus de détails sur les montages de CDO synthétiques, le lecteur est invité à consulter le livre de référence de Tavakoli (2003) ou les articles de synthèse (en français) de Banque de France (2005) et Banque de France (2006)

Les structures de type CDOs synthétiques ont rapidement évolué. En 2003, la création de CDOs à tranche unique constitue une innovation financière d'une grande portée sur le marché des dérivés de crédit. Ces produits sont aussi appelées tranches de CDOs "sur mesure" ou tranches *bespoke*. En effet, l'arrangeur place désormais une seule tranche auprès d'un investisseur unique, qui peut choisir la composition du portefeuille sous-jacent, la subordination et la taille de la tranche.

De par leurs atouts, les CDO à tranche unique représentent actuellement la majorité des montages de CDO synthétique. Dans un CDO traditionnel, l'arrangeur ne prend pas de risque : son rôle est

essentiellement le placement des tranches. Le risque est intégralement transféré aux investisseurs, par l'intermédiaire du SPV. En revanche, dans un CDO à tranche unique, l'arrangeur devient la contrepartie directe de l'investisseur du fait de l'absence de véhicule dans le montage. Il est donc le vendeur du CDO et se porte ainsi acheteur de protection de crédit sur la tranche unique de CDO qu'il vend, ce qui le rend vulnérable aux mouvements de spread de crédit sur le portefeuille sous-jacent du CDO (risque de marché) ainsi qu'aux défauts sur ce portefeuille (risque de défaut). Cela lui impose en général de couvrir sa position par des ventes de protection sur le marché des CDS ou des opérations sur indices de CDS, dans des proportions qui lui permettent de retrouver une position neutre. Nous comparerons dans le Chapitre 2 de ce mémoire différentes approches pour la détermination pratique de ces ratios de couverture ou *credit deltas*.

1.4 Tranches de CDO standardisées

La coexistence entre les CDOs synthétiques et les indices de CDS liquides a tout naturellement conduit à la création de tranches d'indices CDS et donc de CDOs synthétiques standardisés. Il est en effet possible, grâce aux méthodes de titrisation de type CDO, de découper le risque de crédit d'un indice CDS en plusieurs tranches de niveaux de subordination différents. Ces tranches standardisées sont traitées sur le marché du crédit depuis fin 2003 et représentent aujourd'hui la partie la plus liquide du marché des CDOs synthétiques à tranche unique. Les tranches standardisées ont eu des effets déterminants pour le développement du marché des CDOs synthétiques, et ont permis notamment :

- une amélioration de la transparence du marché, puisque les prix (niveaux de prime) des tranches sont cotés en continu.
- le développement d'une liquidité importante sur ces instruments, permettant d'acheter comme de vendre de la protection moyennant des coûts de transaction réduits.
- l'amélioration de la gestion du risque des investisseurs, qui peuvent désormais recourir à une valorisation quotidienne.
- l'élargissement de la base d'investisseurs à de nouveaux intervenants tels que les hedge funds

Les tranches standardisées peuvent aussi, compte-tenu de leur liquidité, être utilisées par les arrangeurs comme un outil de couverture dynamique des CDOs à tranche unique ou des tranches bespoke de CDO. Les tranches standardisées les plus liquides ont pour portefeuille sous-jacent les séries d'indices iTraxx Europe et CDX.NA.IG qui sont composées de 125 entités de référence de qualité *investment grade*. Cependant, ces deux indices n'ont pas été découpés de la même façon. Hormis la tranche equity, les autres tranches sont différentes d'un indice à l'autre. Ces différences sont illustrés par les Figures 2 et 3.

Les conventions d'évaluation des tranches standardisés de CDO seront détaillées à la Section 1.1 du Chapitre 1.

La création de tranches d'indices CDS constitue une véritable révolution pour l'évaluation et la gestion des risques des tranches de CDOs synthétiques. En effet, il est possible d'observer, pour des maturités différentes, les prix de plusieurs tranches liées à différents indices. Suite à l'augmentation de la transparence et de la liquidité sur ce marché, il aura fallu peu de temps avant de voir apparaître un modèle faisant office de standard de marché pour l'évaluation des tranches standardisées. L'idée de base est de déterminer, à l'aide des prix de marché et d'un modèle à facteur, le niveau de corrélation implicite de chacune de ces tranches standardisées.

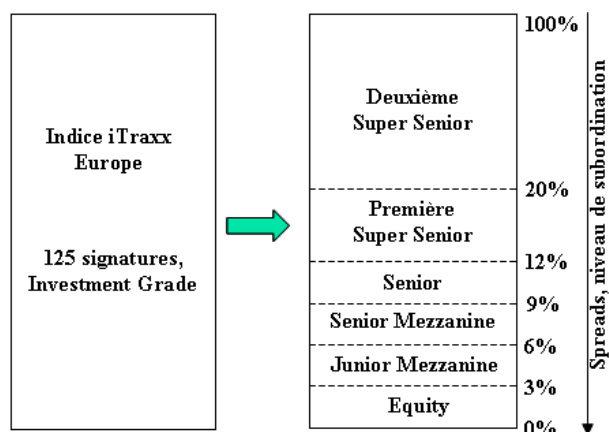


FIG. 2 – Tranches de CDO standardisés sur l'indice iTraxx Europe.

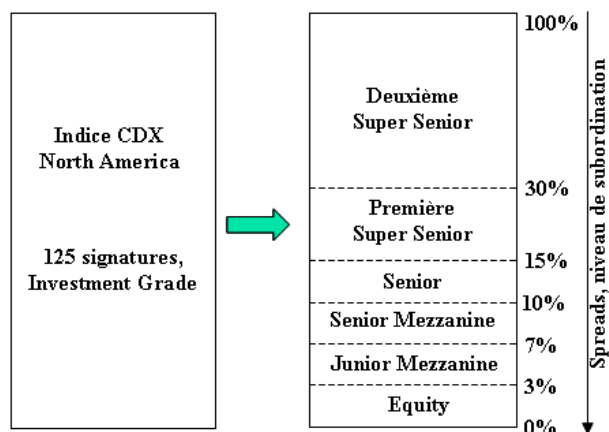


FIG. 3 – Tranches de CDO standardisés sur l'indice CDX North America.

Remarquons que la corrélation implicite est l'analogie de la volatilité implicite relative aux options sur le marché action. Ainsi, la corrélation implicite est devenue un standard de marché en termes d'évaluation et de communication pour les différents investisseurs.

D'un point de vue quantitatif, le standard de marché utilisé pour le calcul de la corrélation implicite d'une tranche standardisée est un modèle à facteur Gaussien (décrit au Chapitre 1 de ce mémoire). A partir de ce modèle, deux mesures différentes de corrélation implicite ont été développées : la *compound correlation* et la *base correlation*. Une des caractéristiques essentielles de cette pratique est qu'il est impossible d'évaluer l'intégralité des tranches standardisées d'un indice CDS en utilisant le même niveau de *compound correlation* ou de *base correlation*. Ce phénomène est connu sous le nom de *smile* ou *skew* de corrélation.

Si l'on se donne pour exemple l'indice iTraxx, le principe étant le même pour l'indice CDX, la structure de *compound correlation* est définie par l'ensemble des paramètres de corrélation implicites correspondant aux tranches négociées, i.e les tranches [0-3%], [3-6%], [6-9%], [9-12%] et [12-20%]. La structure de *base correlation* est définie comme l'ensemble des paramètres de corrélation implicite correspondant aux tranches virtuelles (aussi appelées *base tranches*) [0-3%], [0-6%], [0-9%], [0-12%] et [0-20%]. Contrairement aux paramètres implicites de type *compound*

correlation, les paramètres implicites de type *base correlation* ont l'avantage d'être uniques lorsqu'ils existent². Cette caractéristique a clairement favorisé l'emploi de la *base correlation* en pratique, bien que sa détermination ne soit pas si évidente compte tenu de la complexité des flux de capitaux sur la jambe de prime³.

Les tranches standardisées sont devenues de véritables *benchmarks* du marché des CDOs synthétiques. Elles reflètent notamment la vision du marché en termes de risque systématique et idiosyncratique, les effets de liquidité et la relation entre l'offre et la demande. De plus, l'information fournie par les cotations des tranches standardisées peut être utilisée pour l'évaluation et la couverture des tranches *bespokes*.

2 Annonce du plan et problématique

Lorsque l'on s'intéresse à la gestion, à l'évaluation et donc à la modélisation des tranches de CDO, il est frappant de remarquer la profusion des approches proposées⁴. Contrairement au marché des dérivés sur actions ou sur taux d'intérêt, aucune de ces approches ne peut prétendre être à la fois la référence académique et industrielle. Cependant, malgré un certain nombre de mises en garde provenant du monde universitaire, les praticiens continuent pour la plupart d'employer le modèle à facteur Gaussien associé à une structure de corrélation implicite de type *base correlation* pour l'évaluation et la couverture des tranches de CDO. Parmi les défaillances communément admises, on peut citer le caractère statique de la copule Gaussienne, i.e le manque de réalisme de la dynamique de la perte agrégée et des spreads de crédit ou bien la dissociation entre l'évaluation et la couverture, alors que ce rapprochement constitue l'un des piliers fondateurs de la théorie financière moderne. De plus, une méthode fréquemment employée concernant la gestion de tranches *bespokes* consiste à extrapoler la courbe des *bases correlations* (seulement 5 paramètres de corrélation implicites, un pour chaque tranche standardisée) sur l'intégralité de la structure du capitale. Une variété de méthodes d'interpolation plus ou moins complexes a été développée dans ce sens par les praticiens et peuvent dans certains cas générer des opportunités d'arbitrage évidentes. Remarquons de plus que la détermination des corrélations implicites de type *base correlation* n'est pas un problème trivial au vue de la complexité des flux de capitaux sur la jambe de prime et l'utilisation d'hypothèses plus ou moins arbitraires sur les taux de recouvrement.

Ce travail est centré sur la gestion des tranches de CDO synthétique. Cela inclut notamment les tranches standardisé de CDS et les tranches *bespokes* de CDO. Nous ne traiterons pas spécifiquement des produits structurés plus exotiques dont les *cash-flows* reposent sur la loi jointe multi-temporelle de la perte agrégée, tels que les options sur tranches de CDO, les CDO à effet de retardement (*forward starting CDO*), ou les *leverage tranches*. Les produits à effet de levier comme les *CDO square* (CDO^2) et les CPDO (*Constant Proportion Debt Obligations*) seront également écartés de notre étude⁵

²Notons que ce dernier résultat a été prouvé formellement par Burtschell et al. (2008) et sera détaillé avec précaution dans le Chapitre 2 de ce mémoire.

³Voir par exemple Gregory et Laurent (2008) pour plus de détails sur ce point.

⁴Pour donné un exemple concret, chaque semaine, une dizaine d'articles environ sont mis en ligne publiquement sur le site web defaultrisk.com et traitent plus ou moins directement de ce sujet.

⁵Notons de plus que l'existence de ces derniers produits est compromise en raison de la récente crise du crédit.

De plus, nous nous concentrerons sur les méthodes d'évaluation basées sur un modèle à partir duquel la prime d'une tranche de CDO peut être déterminée en égalisant la valeur actuelle de la jambe de prime et la valeur actuelle de la jambe de défaut, sous une mesure risque neutre donnée. Cela permet a priori d'éviter les problèmes d'opportunité d'arbitrage, tels que des prix de tranchet⁶ négatifs. Ainsi, nous ne détaillerons pas les diverses techniques d'interpolation utilisées pour l'évaluation des tranches *bespokes* à partir d'une structure de *base correlation* issue de cotations de tranches standardisées et nous renvoyons le lecteur intéressé à l'article de Gregory et Laurent (2008) et aux références qu'il comporte.

Deux types de modèles concurrents peuvent être considérés lorsque l'on s'intéresse à la gestion des tranches de CDO : les modèles *bottom-up* et les modèles *top-down*. En sciences actuarielles, ces deux approches sont connus sous le nom des modèles individuels ou des modèles collectifs. Dans l'approche *bottom-up*, la dynamique de la perte agrégée est déduite de la spécification individuelle de la dynamique des entités du portefeuille tandis que l'approche *top-down* décrit directement la dynamique de la perte, la dynamique des défauts des entités du portefeuille pouvant être déduite par des techniques de *random thinning*. Les précurseurs de ces techniques dans le domaine du crédit sont Giesecke et Goldberg (2006).

L'approche *bottom-up* possède clairement des avantages comparée à l'approche *top-down*. En effet, contrairement à l'approche *top-down*, la prise en compte de l'hétérogénéité entre les noms se fait naturellement. Notons par exemple que la montée brutale des spreads sur la tranche *equity* de l'indice CDX en Mai 2005 est le fruit d'un risque idiosyncratique élevé dû aux difficultés de General Motors. La procédure *random thinning* fournit seulement une réponse partielle au problème de l'hétérogénéité dans l'approche *top-down* : les noms qui ont une probabilité marginale de défaut plus élevée ont plus de chance de faire défaut en premier mais le changement attendu sur l'intensité de la perte ne dépend pas du nom qui a fait défaut, comme on peut le pressentir. En particulier, pour un certain nombre de modèles appartenant à cette classe, l'intensité de la perte ne converge pas vers zéro lorsque le nombre de survivants s'amenuise. Cela peut entraîner des probabilités faibles mais positives de pertes qui excèdent la valeur nominale du portefeuille⁷. De plus, la couverture du risque gamma idiosyncratique⁸ qui est une procédure importante de la gestion du risque des tranches standardisées, ne peut être prise en compte convenablement par l'approche "top-down".

Néanmoins, les modèles *bottom-up* ont également certaines limites lorsqu'il s'agit d'évaluer des produits exotiques tels que les options sur tranches de CDO ou les forward starting CDO pour lesquels la dynamique de la perte agrégée se doit d'être suffisamment réaliste. L'utilisation de modèles *bottom-up* statiques est bien souvent le coût à payer en pratique lorsque l'on cherche prioritairement à prendre en compte l'hétérogénéité des spreads de crédit pour des portefeuilles de grande taille. Ainsi, étant donné que nous étudions dans ce mémoire les tranches de CDO synthétique dont l'évaluation repose uniquement sur les lois marginales de la perte, nous privilégierons autant que possible l'approche *bottom-up* qui semble préférable dans ce cas. Pour une comparaison méticuleuse de ces deux approches concurrentes, le lecteur est renvoyé à l'article de Giesecke (2008).

⁶Tranche *bespoke* $[k, k + 1\%]$ avec k entier.

⁷Cas d'un processus Poisson composé par exemple.

⁸risque de dérive des performances des ratios de couverture lorsque l'on cherche à répliquer l'évolution des valeurs de marché d'une tranche de CDO avec les CDS individuels sous-jacents.

Ainsi, au vu du nombre impressionnant de modèles d'évaluation⁹ de tranches de CDO développés aussi bien par le monde académique que par les praticiens, une perspective intéressante serait de présenter et d'analyser un certain nombre d'entre eux au moyen d'un cadre unifié, notamment du point de vue de la structure de dépendance des temps de défaut.

2.1 Première partie : analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur

La première partie de ce mémoire traite de l'analyse du risque des tranches de CDO dans le cadre des modèles à facteur.

Les modèles à facteur sont utilisés depuis longtemps en finance dans le but de modéliser des rendements d'actions ou de fonds mutuels. Ils constituent également une classe très importante de modèles du point de vue de la gestion du risque de crédit. En effet, la réglementation Bâle II et l'approche IRB (*Internal Rating Based Approach*) préconise l'emploi de ces modèles pour la détermination du montant minimal de fond propre réglementaire. Crouhy et al. (2000), Finger (2001), Gordy (2000), Gordy (2003), Wilson (1997a), Wilson (1997b) ou Frey et McNeil (2003) ont notamment contribué au succès et au développement de cette approche et à sa mise en œuvre dans le cadre de la réglementation Bâle II.

Dans cette classe de modèles, les temps de défaut sont supposés être indépendants conditionnellement à un facteur de petite dimension. Nous verrons que cette approche n'est pas si restrictive puisqu'elle inclut en particulier les modèles à facteur basés sur des fonctions copules, les modèles Poisson multivariés, les modèles structurels et certains modèles à intensité. De plus, dans le cas homogène où les événements de défauts sont échangeables, l'existence d'un facteur unique est une simple conséquence du théorème de De Finetti. D'un point de vue théorique, la clé de voûte de toutes ces approches est la loi de la probabilité conditionnelle de défaut (conditionnelle au facteur). Connaissant cette loi, il est possible de déterminer sans ambiguïté les primes de tranches de CDO de manière semi-analytique. On peut également déduire des approximations de la loi de la perte pour des portefeuilles infiniment granulaires. Dans ce cas, le calcul des primes est réduit à une simple intégration numérique.

Remarquons de plus que l'approche factorielle est presque inévitable lorsque l'on s'intéresse à la modélisation de portefeuilles de grande taille, où la parcimonie des paramètres est un enjeu majeur compte tenu des problèmes de sur-calibration (plus de paramètres à calibrer que de données disponibles). Considérons par exemple le cas de la copule Gaussienne. Le nombre de paramètres nécessaires pour décrire cette structure de dépendance augmente de manière polynomiale, i.e en n^2 , si n désigne le nombre d'entités dans le portefeuille. Dans le cas d'une hypothèse factorielle, ce nombre évolue linéairement.

L'approche factorielle constitue un cadre adapté à l'analyse de la dépendance et à l'étude de ses effets sur le niveau des primes des tranches de CDO ou sur certaines mesures de risque relatives à la perte agrégée du portefeuille de crédit.

La première partie est divisée en deux chapitres.

⁹Pour une synthèse détaillée des différentes approches développées pour la gestion du risque de crédit, le lecteur est renvoyé aux livres de Duffie et Singleton (2003), Schönbucher (2003), Bielecki et Rutkowski (2004), Lando (2004), Das (2005), Lipton et Rennie (2008), Cont (2008), Meissner (2008).

Premier Chapitre

Le premier chapitre, qui s'appuie largement sur l'article de Cousin et Laurent (2008c), consiste en une revue méticuleuse des principaux modèles à facteur développés récemment pour l'évaluation des tranches de CDO. Notons que ces modèles proviennent aussi bien du monde académique que du monde industriel.

De nombreux articles proposent des synthèses, des discussions ou des extensions de modèles à facteur pour l'évaluation de tranches de CDO. On peut citer notamment, Andersen et Sidenius (2005a), Andersen et Sidenius (2005b), Finger (2005), Burtschell et al. (2007), Burtschell et al. (2008), Cousin et Laurent (2008a) et Cousin et Laurent (2008c). Ce chapitre de synthèse adopte une démarche originale et propose de présenter les modèles à facteur d'une manière unifiée. Cela permet entre autre d'y inclure les modèles structurels, les modèles Poisson multivariés et les modèles à intensité affine. De plus, plusieurs aspects comme, l'analyse de la compatibilité des modèles à facteurs ou les méthodes d'approximation de la loi mélange dans les modèles affines, sont inédits. Ce chapitre fournit également une comparaison des différentes approches par rapport à leur performance du point de vue de la calibration. Enfin, il s'agit aussi d'établir une mise à jour récente de la bibliographie dans ce domaine.

Le chapitre est découpé en deux sections. Dans la première section, nous établirons les caractéristiques communes des modèles à facteur sous l'angle de l'évaluation des tranches de CDO. Nous présenterons en particulier le calcul des primes à partir des lois marginales de la perte agrégée, les différentes méthodes de détermination de ces lois dans un modèle à facteur, la représentation à facteur associée au théorème de De Finetti dans le cas de portefeuilles homogènes, l'approximation de la perte dans le cas de portefeuilles infiniment granulaires. Nous analyserons également le problème primordial de l'identification ou de la compatibilité des modèles à facteur aux données de marché. La seconde section réalise une synthèse des principaux modèles à facteurs. Cette section inclut les modèles basés sur des fonctions copules, les modèles structurels multivariés, les modèles Poisson multivariés et les modèles à intensité basés sur des processus de Cox. En ce qui concerne les modèles associés à des fonctions copules, nous traiterons particulièrement des copules à facteur additif et de certaines de leurs extensions pour lesquelles le paramètre de dépendance est stochastique. Nous considérerons également la classe des copules archimédiennes. Pour chacune de ses approches, nous donnerons l'expression de la probabilité conditionnelle de défaut et nous effectuerons une brève analyse de la dépendance. Nous mettrons également en évidence les performances de chaque modèle du point de vue de la calibration.

Second Chapitre

Le second chapitre a pour but d'analyser l'effet de la dépendance sur le niveau des primes de tranches de CDO ou sur certaines mesures de risque sur la perte agrégée. Nous nous plaçons dans le cadre des modèles individuels de risque ou approches *bottom-up* qui englobent en particulier la classe des modèles à facteur.

Notre étude s'appuie sur des résultats issus de la théorie des ordres stochastiques qui a connu récemment un large développement notamment dans le champ d'application des sciences actuarielles mais aussi dans les modèles individuels de risque. L'ordre supermodulaire a reçu une attention particulière puisqu'il conduit à des résultats de comparaison intéressant au niveau de

la perte agrégée. Bäuerle et Müller (1998) et Müller (1997) explorent l'application des ordres stochastiques multivariés pour l'analyse du risque de la perte agrégée pour plusieurs modèles de dépendance. Bäuerle et Müller (2005) établissent la compatibilité de certains ordres stochastiques univariés avec les mesures convexes de risque. L'ordre supermodulaire et ses applications sont traités spécifiquement par Bäuerle (1997) et Müller et Scarsini (2000).

Plusieurs articles comme ceux de Dhaene et Goovaerts (1997) et Cossette et al. (2002) s'intéressent à la modélisation et à l'analyse de la dépendance dans les modèles individuels de risque. Dans le contexte de la gestion du risque des tranches de CDO, Burtschell et al. (2007), Burtschell et al. (2008) établissent des résultats de monotonie des primes en fonction des paramètres de dépendance dans plusieurs modèles à facteur basés sur des fonctions copules. Cousin et Laurent (2008a) étendent ces derniers résultats dans le cas où les temps de défaut sont échangeables. Ils montrent en particulier que l'on peut caractériser dans ce cas l'ordre supermodulaire grâce à un critère de comparaison sur les probabilités conditionnelles de défaut. De plus, ils étendent l'analyse de la dépendance à des classes plus larges de modèles à facteur.

Ce chapitre, fortement inspiré de Cousin et Laurent (2008a) mais également de Cousin et Laurent (2008c), Burtschell et al. (2007) et Burtschell et al. (2008), est divisé en quatre sections. Nous rappellerons dans la première section les définitions des ordres stochastiques que nous serons amenés à utiliser par la suite ainsi que certaines propriétés classiques associées. Nous insisterons en particulier sur les applications concernant la comparaison des risques dans les modèles individuels. Dans la deuxième section, nous analyserons l'impact du niveau de dépendance sur les primes de tranche de CDO dans plusieurs états théoriques de la structure de dépendance. Nous examinerons notamment le cas de la comonotonie, celui de l'indépendance mais également l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire. La troisième section est consacrée au cas d'un portefeuille échangeable. Rappelons que d'après le Théorème de De Finetti, une suite de variable aléatoire de Bernoulli échangeables peut être associée à un facteur mélange ou probabilité mélange. Nous caractériserons dans cette section l'ordre supermodulaire pour les vecteurs de Bernoulli échangeables à l'aide d'un critère de comparaison sur les probabilités mélanges. Enfin, dans la dernière section, nous verrons que les résultats développés dans les sections précédentes peuvent être appliqués aisément à l'analyse de la dépendance dans les modèles à facteur. Nous reprendrons un à un la plupart des modèles à facteur présentés au premier chapitre en montrant dans chaque cas l'effet des paramètres de corrélation sur le niveau des primes de tranches de CDO et sur les mesures de risque convexe sur la perte agrégée.

2.2 Seconde partie : couverture des tranches de CDO

De manière surprenante, nous pouvons constater que les modèles d'évaluation reliant le prix des tranches au coût d'une stratégie de réplique dynamique ont été explorés après que le modèle à facteur Gaussien est devenu le standard de marché. Cette dissemblance avec le marché des dérivés sur actions et sur taux d'intérêt peut clairement apparaître comme une faiblesse et il est raisonnable d'imaginer que des recherches futures s'attacheront à réunifier l'évaluation et la couverture.

Les méthodes de couverture employées par les intervenants de marché dans le but de gérer les risques associés aux tranches de CDO sont relativement simples. Étant donné un outil d'évaluation comme le modèle à facteur Gaussien couplé à une structure de *base correlation*, il s'agit de calculer des sensibilités au prix des tranches par rapport à des données ou des paramètres

de marché, tels que les spreads de crédit des entités du portefeuille sous-jacent. Ces sensibilités ou ratios de couverture permettent d'établir les montants nominaux des positions prises sur les entités du portefeuille de couverture. Par exemple, si l'on souhaite couvrir le risque de spread d'une vente de protection¹⁰ sur une tranche de CDO, des achats de protection¹¹ sont effectués sur les CDS sous-jacents pour un montant égal au ratio de couverture correspondant. Habituellement, ces positions sont mises à jour sur une base quotidienne. Ainsi, le principal intérêt de cette méthode est de compenser localement l'effet des petites fluctuations des spreads de crédit. Notons de plus que le risque de défaut fait l'objet d'un traitement différent puisqu'il est couvert en général au moyen d'une politique de réserve.

En conséquence, le risque de spreads dit du "premier ordre", est couvert localement par les CDS constituant le portefeuille de synthèse mais peut également être couvert par l'indice lui-même lorsque le risque idiosyncratique ne semble pas trop élevé. D'autres risques dits du "second ordre", tel que le risque gamma idiosyncratique, le risque gamma systématique¹² ou le risque de corrélation peuvent être contrôlés en combinant différentes tranches liquides de CDO sur indice. Petrelli et al. (2007) effectuent une analyse méticuleuse des stratégies les plus populaires concernant la couverture des tranches de CDO par des techniques basées sur de petits écarts de spread. Ils montrent en particulier que ces méthodes de couverture peuvent conduire à des résultats inattendus compte tenu de la complexité de la dynamique de la structure du capital. Patel (2007) met également en évidence des problèmes similaires.

Il existe en fait deux approches lorsque l'on s'intéresse à la couverture locale du risque de spread avec un modèle à facteur Gaussien couplé à une structure de *base correlation* : la règle *sticky strike* et la règle *sticky delta*¹³. Dans l'approche *sticky strike*, la structure de *base correlation* n'est pas modifiée à la suite de l'écart effectué sur la courbe des spreads de crédit tandis que l'approche *sticky delta* met à jour la structure de *base correlation* et prend donc en compte le changement de la *moneyness* de la tranche. Par exemple, la tranche *equity* devient plus *junior* lorsque les spreads augmentent, ce qui tend à diminuer le paramètre de corrélation implicite correspondant. Ainsi, pour cette tranche, le ratio de couverture *sticky delta* est inférieur à celui calculé selon la règle *sticky strike*.

Étant donnée la séparation naturelle entre lois marginales et structure de dépendance dans les modèles basés sur des fonctions copules¹⁴, la prise en compte d'une nouvelle structure de *base correlation* résulte nécessairement d'une relation arbitraire entre cette dernière et les spreads des CDS sous-jacents. Il existe de ce fait plusieurs techniques traitant ce problème. Nous renvoyons le lecteur à Jobst (2007) et Meissner et al. (2008) pour une discussion plus détaillée des méthodes de couverture des tranches de CDO dans le cadre de la copule gaussienne.

Du point de vue numérique, Andersen et al. (2003), Gregory et Laurent (2003), Iscoe et Kreinin (2007) développent des méthodes semi-analytiques pour le calcul de sensibilités avec la

¹⁰Position longue en corrélation.

¹¹Position courte en corrélation.

¹²Risque de dérive des performances des ratios de couverture lorsque l'on cherche à répliquer l'évolution des valeurs de marché d'une tranche de CDO avec les CDS individuels sous-jacents (risque gamma idiosyncratique) ou avec l'indice (risque gamma systématique).

¹³La terminologie est empruntée au marché des dérivés sur actions et apparaît dans la littérature avec Derman (1999).

¹⁴Voir section 1.2.1 du Chapitre 1 pour plus de détails sur les modèles basés sur des fonctions copules.

copule gaussienne à un facteur. Brasch (2004), Joshi et Kainth (2004), Rott et Fries (2005), Chen et Glasserman (2006) détaillent différentes méthodes basées sur des simulations de Monte Carlo, améliorées et spécialement adaptées à l'évaluation et la couverture des tranches de CDO. Notons que ces méthodes sont également applicables en dehors du cadre des modèles à facteur.

Plusieurs anomalies peuvent être répertoriées lorsque l'on utilise ces dernières méthodes pour couvrir des tranches de CDO. Par exemple, Morgan et Mortensen (2007) montrent que les ratios de couverture pour certaines tranches peuvent être négatifs dans le cas d'une structure de *base correlation* fortement croissante. La couverture locale du risque de spread par des calculs de sensibilité s'appliquent également à d'autres modèles basés sur des fonctions copules qui contrairement à l'approche *base correlation* exclut toute opportunité d'arbitrage. Schloegl et al. (2008) prouvent que dans ce cas, les sensibilités calculées sont nécessairement positives. Cependant, ils mettent également en évidence l'existence de modèles pour lesquels ce phénomène contre-intuitif n'est pas impossible.

Une autre anomalie relative aux pratiques de marché a été dévoilée lors de la crise de Mars 2008 sur le marché des tranches standardisés. Durant cette période, les ratios de couverture d'une tranche associés aux CDS individuels étaient anormalement dispersés, avec soit des deltas très faibles, soit des deltas très élevés. Ce phénomène peut être expliqué par le fort niveau de risque systématique ou de corrélation implicite durant cette période. L'intuition est claire lorsque l'on considère le cas extrême du niveau de corrélation le plus élevé. Dans ce cas, les temps de défaut sont comonotones et peuvent être parfaitement ordonnés suivant leur niveau de spread, les noms de spread élevé faisant défauts avant les noms de spread moins élevé. Dans cette situation, une tranche *mezzanine* n'a donc aucune sensibilité par rapport aux CDS de spreads supérieurs au nom dont la perte entame la tranche. De même, elle n'a aucune sensibilité par rapport aux CDS de spreads inférieurs au nom dont la perte finit de consommer la tranche. Seuls les noms dont les spreads sont compris entre ces deux valeurs critiques ont un delta positif, les autres noms ayant un delta nul. En pratique lorsque le niveau de corrélation est élevé, l'allure des deltas par rapport au niveau des spreads est plus régulière et décrit une "bosse". Ce phénomène est également illustré par Burtschell et al. (2007) dans le cadre d'un modèle à facteur gaussien où le paramètre de corrélation est stochastique et traduit parfois une situation de dépendance parfaite.

Troisième Chapitre

Notre étude de la couverture est concentrée sur le risque de défaut, les spreads de crédit et la dynamique de la dépendance étant gouvernés par l'arrivée des défauts. Nous détaillerons le calcul des stratégies de couverture dynamiques relatives à un événement de défaut dans un modèle de contagion. Les modèles de contagion ont été introduits dans le domaine du risque de crédit par Davis et Lo (2001), Jarrow et Yu (2001) et également étudiés par Yu (2007). Schönbucher et Schubert (2001) montrent que les modèles basés sur des fonctions copules traduisent un phénomène de contagion et ils relient les changements de valeur des spreads de crédit à l'arrivée d'un défaut aux dérivées partielles de la fonction copule. Il s'agit également de l'approche adoptée par Bielecki et al. (2007b) pour traiter le problème de la couverture des dérivés de crédit. Frey et Backhaus (2007b) s'intéressent également à la couverture des tranches de CDO dans le cadre plus flexible d'un modèle de contagion markovien. Dans les modèles à copule, la contagion dérive de la structure de dépendance des temps de défaut alors que dans les modèles de contagion, la structure de dépendance des temps de défaut découle de la spécification de la dynamique des

intensités. Dans ces deux approches, les sauts de spreads se produisent uniquement aux instants de défaut. Grâce à cette hypothèse assez simple et lorsque l'on exclut la possibilité de défauts simultanés, il est possible de montrer que le marché des CDOs est complet : le *payoff* des tranches de CDO peut être parfaitement répliqué en négociant dynamiquement les CDS sous-jacents et dans certains cas particuliers en négociant simplement l'indice.

Plus récemment, Frey et Backhaus (2007a) étudient le problème de la couverture des tranches de CDO dans un contexte où les défauts sont modélisés par une chaîne de Markov traduisant à la fois un effet de contagion et un risque de spread spécifique. Dans cette approche, si l'on considère uniquement les CDS individuels à une maturité donnée sur le portefeuille sous-jacent, le marché n'est plus complet. Frey et Backhaus (2007a) utilisent alors des techniques de minimisation de l'erreur de couverture pour déterminer leur stratégies dynamiques de réplication. En exploitant une technique similaire dans un cadre de marché incomplet, Elouerkhaoui (2006) adresse également le problème de la couverture pour un modèle Poisson multivarié. Cependant, l'implémentation pratique de ces méthodes peut s'avérer très contraignante, en particulier lorsque l'on cherche à calculer les ratios de couverture à différentes dates et dans différents états.

Dès qu'il s'agit de mettre en œuvre des méthodes de couverture basées sur un modèle d'évaluation, le problème crucial de la calibration de la dynamique des défauts sur les données de marché s'impose naturellement. La détermination des intensités d'une chaîne de Markov similaire à la nôtre à partir de spreads de tranches de CDO a été étudiée récemment par un certain nombre d'auteurs. On peut citer notamment van der Voort (2006), Schönbucher (2006), Arnsdorf et Halperin (2007), De Koch et Kraft (2007), Epple et al. (2007), Lopatin et Misirpashaev (2007), Herbertsson (2007b), Herbertsson (2007a) ou Cont et Minca (2008). Ces derniers papiers ont pour but de développer une modélisation markovienne de la dynamique de la perte agrégée, éventuellement associée à un marché incomplet, sans opportunité d'arbitrage et compatible avec des prix de marché. Cependant, le problème de la couverture dynamique et de son application n'y est pas traité spécifiquement. Du point de vue de la couverture, l'un des avantages important de notre approche est que les cotations de marché déterminent complètement la dynamique de la perte agrégée, grâce aux équations forward de Kolmogorov. Notre approche est analogue à celle de Dupire (1994) qui déduit intégralement la dynamique des actions à l'aide des prix d'options d'achat dans un modèle à volatilité locale. En conséquence, grâce à cette caractéristique et à la complétude du marché, on détermine sans ambiguïté les stratégies dynamiques de réplication des tranches de CDO.

Ce chapitre, nettement inspiré des articles de Laurent et al. (2007) et Cousin et Laurent (2008b), est divisé en six sections. Dans la première section, nous établirons les bases théoriques du modèle de contagion, nous détaillerons certaines hypothèses de marché et nous présenterons un théorème de représentation de martingales pour des processus ponctuels multivariés. Nous montrerons en particulier que sous l'hypothèse d'absence de défauts simultanés, le marché est complet et il est possible de répliquer parfaitement le *payoff* de tout actif dont les *cash-flows* dépendent uniquement de l'arrivée de défauts dans un portefeuille de crédit. Afin de déterminer concrètement les stratégies de réplication, nous nous restreindrons dans la deuxième section au cadre des modèles de contagion markoviens homogènes, ce qui entraîne une réduction considérable de la dimension du problème et permet d'entrevoir sa mise en application. Nous verrons notamment que, dans ce cas, le processus de la perte agrégée est simplement une chaîne de Markov ou plus précisément un processus de naissance pur (selon la terminologie de Karlin et Taylor (1975)) et qu'il est possible de dupliquer parfaitement le *payoff* d'une tranche de CDO

avec ceux de l'indice CDS et de l'actif sans risque. La troisième section abordera le problème de la calibration de la chaîne de Markov sous plusieurs angles : calibration à partir de la surface de perte (*loss surface*) complète, calibration à partir de la loi marginale du nombre de défauts à une maturité fixée ou calibration directe à partir de quelques prix de tranches. Dans la quatrième section, nous montrerons que la chaîne de Markov de la perte agrégée peut simplement être représentée à l'aide d'un arbre binomial recombinaison. Nous y décrirons les cash-flows des tranches de CDO, de l'indice, l'évaluation de ces produits et la détermination des *credit deltas* dans les nœuds de l'arbre. Les deux dernières sections sont consacrées à l'application de cette méthode à la couverture dynamique des tranches standardisées de CDO. La cinquième section présentera la dynamique des stratégies de couverture pour un arbre calibré sur une distribution de la perte générée par la copule Gaussienne. Nous analyserons en particulier la dépendance des ratios de couverture par rapport au taux de recouvrement et par rapport au paramètre de corrélation associé à la copule Gaussienne. Nous présenterons enfin dans la dernière section les deltas calculés dans un arbre calibré sur une structure de *base correlation* issue de données de marché. Nous comparerons ces derniers résultats avec les deltas obtenus par la pratique standard de marché et les deltas récemment calculés dans d'autres approches par Arnsdorf et Halperin (2007), Eckner (2007) et Feldhütter (2008).

Première partie

Analyse du risque des tranches de CDO
dans les modèles à facteur

Chapitre 1

Les modèles à facteur pour l'évaluation de tranches de CDO

Les modèles à facteur sont utilisés depuis longtemps en finance dans le but de modéliser des rendements d'action ou de fonds mutuels. Ils constituent également une classe très importante de modèles du point de vue de la gestion du risque de crédit. En effet, la réglementation Bâle II dans le cadre de l'approche IRB (*Internal Rating Based Approach*) préconise notamment l'emploi de ces modèles pour la détermination du montant minimal de fond propre réglementaire. Crouhy et al. (2000), Finger (2001), Gordy (2000), Gordy (2003), Wilson (1997a), Wilson (1997b) ou Frey et McNeil (2003) ont notamment contribué au succès et au développement de cette approche dans le cadre de la mise en pratique de la réglementation Bâle II.

Le succès de l'approche factorielle pour la modélisation de la dépendance d'un portefeuille de crédit repose sur plusieurs critères. D'abord, les modèles à facteur sont à la fois compréhensibles et faciles à manipuler : les instants de défaut sont des variables aléatoires conditionnement indépendantes. De plus, l'intuition économique est respectée dans la mesure où la dépendance provient d'un risque systématique, risque que l'on peut associer par exemple à une évolution défavorable de variables macro-économiques augmentant le risque de défaut d'un ensemble d'entités. Enfin, la distribution de la perte agrégée peut être déterminée par des méthodes semi-analytiques. Pykhtin et Dev (2002) proposent de calculer la distribution de la perte à partir de sa fonction caractéristique. Cette idée a ensuite été développée par Gregory et Laurent (2003) et Laurent et Gregory (2005) dans le cadre de l'évaluation des tranches de CDO. Dans ce contexte, des algorithmes récursifs dérivés de méthodes actuarielles ont été introduits par Andersen et al. (2003) et étendus ensuite par Hull et White (2004).

De nombreux articles proposent des revues, des discussions ou des extensions de modèles à facteur pour l'évaluation de tranches de CDO, notamment Andersen et Sidenius (2005a), Andersen et Sidenius (2005b), Finger (2005), Burtschell et al. (2007), Burtschell et al. (2008) et Cousin et Laurent (2008c).

Ce chapitre est basé sur ce dernier article et a pour objet de présenter une synthèse des modèles à facteur pour l'évaluation de tranches de CDO. La première section 1.1 traitera spécifiquement de l'évaluation des tranches de CDO dans les modèles à facteur. Nous détaillerons notamment le calcul du spread et de la valeur de marché d'une tranche de CDO sans introduire de modèle au préalable et en supposant simplement que la distribution de la perte agrégée est

connue. Nous présenterons ensuite les principales méthodes de calcul de la distribution de la perte agrégée. Enfin, nous analyserons le problème de la compatibilité des modèles à facteur avec les données de marché. Dans ce chapitre, nous insisterons sur le rôle prépondérant de la probabilité conditionnelle de défaut ou “probabilité mélange”. La seconde section 1.2 consiste en une revue des différents modèles à facteur employés pour l'évaluation et la gestion des tranches de CDO. Pour chaque classe de modèles, l'expression de la probabilité mélange est décrite et une brève analyse de la dépendance est menée. Nous proposons également de discuter des problèmes de calibration inhérents à la mise en œuvre de chaque modèle.

1.1 Évaluation de tranches de CDO dans un modèle à facteur

Cette section a pour but de présenter l'évaluation d'une tranche de CDO dans un modèle à facteur. Nous supposons qu'il existe une probabilité \mathbb{Q} dite risque neutre issue d'un modèle calibré sur le marché et excluant toute opportunité d'arbitrage. Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cette partie sont supposées être définies dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$.

Une tranche de CDO est un produit structuré dont les *cash-flows* sont contingents aux défauts associés à un portefeuille de crédit¹⁵. Notons n le nombre d'entités composant le portefeuille de référence et τ_1, \dots, τ_n les temps de défaut. Notons également E_i la valeur nominale ou l'exposition associée au nom i .¹⁶ Lorsqu'un défaut survient, une partie seulement de la valeur nominale de l'entité peut être récupérée ou est recouvrée. Nous noterons R_i le taux de recouvrement correspondant au nom i . Ainsi, la perte associée au défaut du nom i (*loss given default*) est égale à $M_i = E_i(1 - R_i)$, $i = 1, \dots, n$.

1.1.1 Calcul du spread à partir de la distribution de la perte agrégée

Les *cash-flows* d'une tranche de CDO sont gouvernés par l'évolution de la perte cumulée sur le portefeuille de référence,

$$L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t}, \quad (1.1)$$

où $D_{i,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$ est une variable aléatoire de Bernoulli indiquant si le nom i a fait défaut avant la date t ¹⁷. Le montage d'une structure de CDO induit le découpage de la perte agrégée en tranches de risques sur lesquelles il est proposé de la protection. Considérons par exemple une tranche de CDO $[a, b]$ de point d'attachement a , de point de détachement b et de maturité T . Une tranche de CDO peut être assimilée à un contrat bilatéral liant un acheteur de protection et un vendeur de protection. Nous détaillons ci-dessous la description et l'évaluation de la jambe de défaut ou *default leg* (flux versés par le vendeur de protection à l'acheteur de protection) et de la jambe de prime ou *premium leg* (flux versés par l'acheteur de protection au vendeur de protection).

¹⁵Pour plus de détails sur le marché des CDO ou la description de leur *cash-flows*, le lecteur est invité à lire l'introduction de ce mémoire.

¹⁶Les indices de CDS (Séries de l'iTraxx ou de l'indice CDX) sont construits de sorte que chaque CDS composant l'indice a le même poids. Dans ce cas, les entités du portefeuille de référence ont la même exposition que l'on notera E .

¹⁷La perte agrégée L_t est un processus croissant à saut pur. De plus, à t fixé, lorsque les M_i sont déterministes (ou lorsque ce sont des variables aléatoires discrètes) L_t est une variable aléatoire discrète.

Jambe de défaut

Le vendeur de protection s'engage à couvrir les pertes pour chaque défaut affectant la tranche $[a, b]$ du portefeuille de référence. Plus précisément, les pertes cumulées sur la tranche $[a, b]$, notée $L_t^{[a,b]}$ sont nulles lorsque $L_t \leq a$, égales à $L_t - a$ lorsque $a \leq L_t \leq b$ et à $b - a$ lorsque $L_t \geq b$. On peut également remarquer que $L_t^{[a,b]} = (L_t - a)^+ - (L_t - b)^+$. Le *payoff* de la perte affectant la tranche $[a, b]$ est celui d'un *call-spread* sur la perte agrégée (voir figure 1.1).

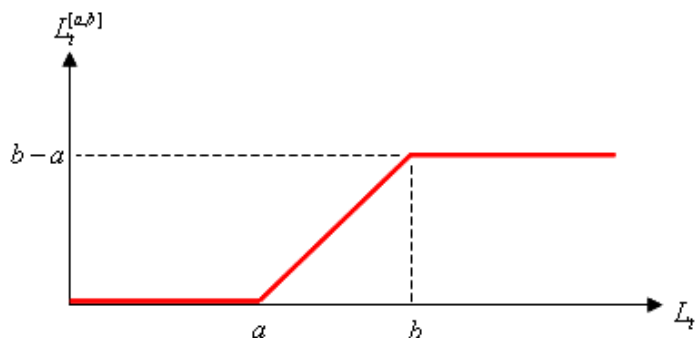


FIG. 1.1 – Le *payoff* de la perte affectant la tranche $[a, b]$ est celui d'un *call-spread* sur la perte agrégée

Les paiements du vendeur de protection à l'acheteur de protection ont lieu à chaque instant où un défaut affecte la tranche $[a, b]$ si ce dernier survient avant la maturité T . Plus formellement, s'il y a un défaut en $t < T$, le montant de la transaction correspond exactement à l'incrément sur le processus $L_t^{[a,b]}$ en t , i.e $L_t^{[a,b]} - L_{t-}^{[a,b]}$. A titre illustratif, la figure 1.2 représente une réalisation du processus de la perte agrégée L_t ainsi que la trajectoire associée du processus de perte $L_t^{[a,b]}$ affectant la tranche de CDO $[a, b]$.

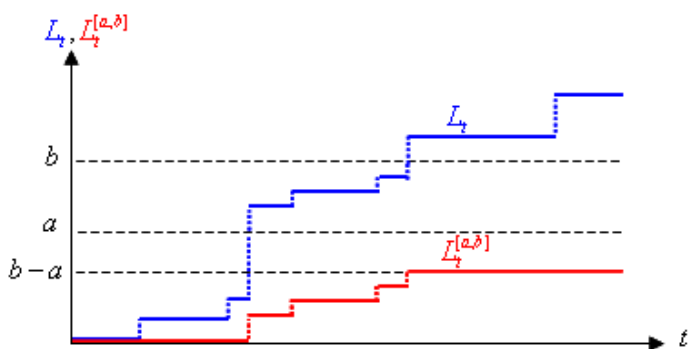


FIG. 1.2 – Une trajectoire de la perte agrégée L_t et la trajectoire associée de $L_t^{[a,b]}$. Chaque saut correspond au défaut d'un nom dans le portefeuille de référence et peut affecter la tranche $[a, b]$ s'il survient avant maturité.

Par simplicité, nous supposons que le taux d'intérêt à court terme r_t est déterministe et nous notons $B_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$ le facteur d'actualisation à la date t . Les flux futurs actualisés correspondant à la jambe de défaut peuvent s'écrire :

$$\int_0^T B_t dL_t^{[a,b]} = \sum_{i=1}^n B_{\tau_i} \left(L_{\tau_i}^{[a,b]} - L_{\tau_i-}^{[a,b]} \right) 1_{\{\tau_i \leq T\}}. \quad (1.2)$$

Remarquons que le processus $L_t^{[a,b]}$ est croissant. En conséquence, en effectuant une intégration par partie de Stieltjes et en appliquant le théorème de Fubini, la valeur actuelle de la jambe de défaut DL (l'espérance des flux futurs actualisés sous la mesure risque neutre) peut s'exprimer ainsi :

$$DL = \mathbb{E} \left[\int_0^T B_t dL_t^{[a,b]} \right] = B_T \mathbb{E} \left[L_T^{[a,b]} \right] + \int_0^T r_t B_t \mathbb{E} \left[L_t^{[a,b]} \right] dt. \quad (1.3)$$

Jambe de prime

L'acheteur de protection s'engage à verser périodiquement¹⁸ au vendeur de protection une prime en contrepartie du risque couvert sur la tranche de CDO $[a, b]$. Notons T_1, \dots, T_p les dates de paiement de primes avec $T_p = T$ et Δ_i la durée de la $i^{\text{ème}}$ période $[T_{i-1}, T_i]$ (en fraction d'année, avec la convention $T_0 = 0$).

Le montant de la prime est proportionnel au spread S (ou prime par extension) exprimé en point de base par an¹⁹ et au nominal restant sur la tranche égal à la quantité $b - a - L_t^{[a,b]}$. Ainsi, le paiement effectué par l'acheteur de protection est égal à $S \Delta_i \left(b - a - L_{T_i}^{[a,b]} \right)$ à chaque date de paiement de prime T_i , $i = 1, \dots, p$. Notons qu'il n'y a pas de paiement de prime à l'origine.²⁰ En effet, chaque prime versée correspond au prix de la couverture pour la période qui vient de s'écouler.

De plus, lorsqu'un défaut survient entre deux dates de paiement de primes et lorsque ce dernier affecte la tranche $[a, b]$, le montant nominal restant sur la tranche diminue. Une prime additionnelle ou coupon couru (*accrued coupon*) est donc versée au vendeur de protection afin de compenser ce dernier de la variation du nominale restant. Par exemple si le nom j fait défaut en τ_j entre T_{i-1} et T_i , le coupon couru associé est réglé en τ_j et est égale à $S (\tau_j - T_{i-1}) \left(L_{\tau_j}^{[a,b]} - L_{\tau_j-}^{[a,b]} \right)$.

Les flux futurs actualisés correspondants à la jambe de prime peuvent donc s'écrire :

$$\sum_{i=1}^p \left(B_{T_i} S \Delta_i \left(b - a - L_{T_i}^{[a,b]} \right) + \int_{T_{i-1}}^{T_i} B_t S (t - T_{i-1}) dL_t^{[a,b]} \right). \quad (1.4)$$

En appliquant les mêmes méthodes de calcul que pour la jambe de défaut, la valeur actuelle PL de la jambe de prime peut s'exprimer de la manière suivante :

$$PL = S \cdot PL^u, \quad (1.5)$$

¹⁸de manière trimestrielle en général.

¹⁹1 bp = 1%(1%)=0.0001.

²⁰sauf cas particulier comme la tranche equity où une prime *upfront* est versée à l'origine.

avec

$$PL^u = \sum_{i=1}^p \left(B_{T_i} \Delta_i \left(b - a - \mathbb{E} \left[L_{T_i}^{[a,b]} \right] \right) + AC_i \right), \quad (1.6)$$

et où

$$AC_i = B_{T_i} \Delta_i \mathbb{E} \left[L_{T_i}^{[a,b]} \right] - \int_{T_{i-1}}^{T_i} B_t (1 - r_t (t - T_{i-1})) \mathbb{E} \left[L_t^{[a,b]} \right] dt. \quad (1.7)$$

PL^u désigne la valeur de la jambe de prime lorsque le spread est unitaire et fixé à 1 point de base²¹. AC_i est la valeur actuelle du coupon couru correspondant à la période $[T_{i-1}, T_i]$. Remarquons de plus que PL^u peut se réécrire de la manière suivante :

$$PL^u = \sum_{i=1}^p \left(B_{T_i} \Delta_i (b - a) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} B_t (1 - r_t (t - T_{i-1})) \mathbb{E} \left[L_t^{[a,b]} \right] dt \right). \quad (1.8)$$

Spread d'une tranche de CDO

Le spread courant S associé à la tranche de CDO est défini de telle sorte que le contrat entre le vendeur de protection et l'acheteur de protection soit équitable, i.e la valeur actuelle de la jambe de défaut doit correspondre à la valeur actuelle de la jambe de prime. Formellement, S doit donc vérifier la relation :

$$S \cdot PL^u = DL \quad (1.9)$$

où DL et PL^u sont décrits par les equations 1.3 et 1.6.

Il est important de remarquer à ce stade que le spread ou la prime d'une tranche de CDO peut être entièrement déterminé par les espérances des pertes sur la tranche, $\mathbb{E} \left[L_t^{[a,b]} \right]$, à plusieurs horizons t . Il suffit donc de connaître les lois marginales de la perte agrégée pour achever le calcul du spread²².

Spread et valeur de marché d'une tranche de CDO sur indice

Sur le marché liquide des tranches de CDO sur indice (iTraxx ou CDX.NA.IG), il est possible de prendre une position (achat ou vente de protection) à tout instant sur des tranches standardisées dont les caractéristiques n'évoluent que tous les 6 mois. Au début de chaque période de 6 mois, un spread contractuel noté S_c est fixé pour chaque tranche et pour l'indice (et reste fixé sur toute la durée de vie du contrat). Cependant plusieurs facteurs reflétant la valeur de tels contrats évoluent. En particulier, on peut observer un changement de maturité du contrat (la durée de la protection diminue), des taux d'intérêt ou de l'offre et de la demande de protection. Comme pour le marché obligataire, cette évolution en valeur de marché des tranches de CDO et de l'indice est traduite par des cotations en spreads de marché. Nous détaillons ci-dessous la relation entre valeur de marché et spread de marché.

²¹Dans la littérature cette quantité est également notée $PV01$.

²²En particulier, le spread d'une tranche de CDO ne dépend pas des lois jointes inter-temporels de la perte agrégée, i.e loi de $(L_{t_1}, \dots, L_{t_q})$. Cela n'est pas le cas de produits plus exotiques comme les *forward starting CDOs* par exemple.

Si l'on note par DL_t et PL_t^u la valeur en t de la jambe de défaut et celle (resp.) de la jambe de prime unitaire, la valeur de marché MTM_t en t d'une position courte (achat de protection) sur une tranche de CDO ou sur l'indice s'écrit :

$$MTM_t = DL_t - S_c \cdot PL_t^u, \quad (1.10)$$

où S_c est le spread contractuel. Rappelons que le spread en t que l'on note S_t peut être théoriquement déterminé par la relation 1.9. La valeur de marché en t d'une tranche peut donc être exprimée en fonction de l'écart $S_t - S_c$ entre le spread actuel et le spread contractuel de la manière suivante :

$$MTM_t = PL_t^u (S_t - S_c). \quad (1.11)$$

On peut remarquer qu'à l'origine du contrat, en $t = 0$, $S_0 = S_c$ et la valeur de marché est nulle par définition, i.e $DL_0 - S_c \cdot PL_0^u = 0$.

Les spreads de tranches de CDO sur indice sont cotés en points de base par an (*bps per annum*). Cependant, les conventions de marché sont légèrement différentes en ce qui concerne les tranches equity (tranche $[0, b]$ avec $0 < b \leq 100\%$). En effet, étant donné le risque relatif à ces tranches qui supportent les premières pertes, le spread est fixé à 500 bps et le vendeur de protection reçoit une prime additionnelle à l'origine (une prime *upfront*) proportionnelle à la taille de la tranche (b ici). Cette prime *upfront* que l'on note UP est déterminée de sorte que le contrat soit "juste" initialement et vérifie donc la relation suivante :

$$b \cdot UP + 500 \cdot PL^u = DL \quad (1.12)$$

Pour les tranches equity, les primes *upfront* sont cotées en pourcentage. Le tableau 1.1 relate les cotations des spreads de tranche de CDO sur l'indice iTraxx Europe le 30 Août 2005 pour les maturités 5 et 10 ans. Naturellement, les spreads sont plus élevés pour les protections sur 10 ans que pour les protections sur 5 ans. La table 1.2 relate le niveau des spreads à la même date mais pour les tranches de CDO sur l'indice CDX nord américain.

tranches de CDO	[0, 3%]	[3%, 6%]	[6%, 9%]	[9%, 12%]	[12%, 22%]	Index
maturité 5 ans	24%	81	26.5	15	9	36
maturité 10 ans	53%	395	90	52	29	58

TAB. 1.1 – Spreads (en point de base par an) des tranches standardisées de CDO sur l'indice **iTraxx Europe**, source Hull et White (2006)

tranches de CDO	[0, 3%]	[3%, 7%]	[7%, 10%]	[10%, 15%]	[15%, 30%]	Index
maturité 5 ans	40%	127	35.5	20.5	9.5	50

TAB. 1.2 – Spreads (en point de base par an) des tranches standardisées de CDO sur l'indice **CDX IG North America**, source Hull et White (2006)

La figure 1.3 relate l'évolution des spreads de l'indice iTraxx Europe²³ entre Mai 2007 et Mai 2008. Il est intéressant de remarquer les effets de la crise du crédit sur le niveau des spreads. Observons en particulier l'agitation des spreads depuis l'été 2007. Notons également les pics d'Août 2007 et de Mars 2008 où les spreads ont atteint le niveau record de 160 bps.



FIG. 1.3 – Évolution des spreads en point de base par an de l'indice iTraxx Europe de maturité 5 ans (séries 7, 8 et 9), source Markit.

Nous avons vu dans cette section que le spread d'une tranche de CDO peut être exprimé en fonction des lois marginales de la perte agrégée. Dans la section suivante, nous nous plaçons dans le cadre des modèles à facteur et nous proposons plusieurs méthodes numériques de calcul de la distribution de la perte agrégée.

1.1.2 Loi de la perte agrégée dans un modèle à facteur

La loi de la perte agrégée peut être calculée de façon relativement aisée dans le cadre des modèles à facteur. En fait, il existe plusieurs méthodes ou algorithmes numériques relatifs à ce problème. Un certain nombre d'entre eux dérivent de méthodes issues des sciences actuarielles, d'autres ont été spécifiquement développés ou adaptés pour l'évaluation des tranches de CDOs. Si l'on n'émet aucune hypothèse concernant la loi jointe des temps de défaut, le calcul de la loi de la perte nécessite en pratique n intégrations numériques successives. L'intérêt et le succès pratique des modèles à facteur résident dans le fait que la complexité des calculs mis en œuvre est directement lié à la dimension du facteur.

Dans un modèle à facteur, les temps de défaut sont supposés être conditionnellement indépendants connaissant un facteur aléatoire V de dimension 1. Au fil de ce chapitre, nous insisterons sur le rôle prépondérant joué par les probabilités conditionnelles de défaut $p_t^{i|V} = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V)$, $i = 1, \dots, n$ pour le calcul de la loi de la perte. Remarquons que ces dernières quantités sont simplement des fonctions déterministes du facteur.

²³À quelques petits détails près, le spread d'un indice de CDS peut être assimilé au spread d'une tranche de CDO $[0, 100\%]$ dont le portefeuille de référence est l'indice lui-même.

Les extensions au cadre multi-factoriel sont directes d'un point de vue de la modélisation mais elles impliquent des procédures numériques plus lourdes. Néanmoins l'hypothèse d'un modèle mono-factoriel n'est pas si restrictive en pratique comme le montre Gössl (2007) qui, à partir d'une méthode de réduction de dimension (une analyse en composante principale), calcule la loi de la perte avec une précision raisonnable.

Dans certains exemples décrits dans ce chapitre, le facteur V pourra dépendre du temps, ce qui est déterminant si l'on considère l'évaluation de certains produits de corrélation²⁴ nécessitant la loi jointe de la perte à différents horizons. Étant donné que ce chapitre se concentre sur l'évaluation des tranches de CDO classiques, qui ne font intervenir que les lois marginales de la perte, nous omettrons la dépendance temporelle du facteur pour simplifier les notations.

Nous supposons de plus pour le reste du chapitre que les taux de recouvrement $R_i, i = 1, \dots, n$ sont déterministes et nous nous concentrerons sur l'analyse de la dépendance entre les temps de défaut.

Deux approches semblent dominées de par leur popularité, et leur simplicité de mise en œuvre. La première est basée sur l'inversion par FFT de la fonction caractéristique de la perte et la seconde repose sur un algorithme récursif. D'autres méthodes dites d'approximation sont également décrites dans la littérature et proposent d'approcher la loi de la perte soit par des lois paramétriques connues soit par des expansions en série dont les termes se traitent facilement.

L'approche FFT

Cette première approche est basée sur la fonction caractéristique de la perte agrégée L_t qui, grâce à l'hypothèse d'indépendance conditionnelle des temps de défaut, peut s'écrire :

$$\varphi_{L_t}(u) = \mathbb{E} [e^{iuL_t}] = E \left[\prod_{1 \leq i \leq n} \left(1 + p_t^{i|V} (e^{iuM_i} - 1) \right) \right]. \quad (1.13)$$

Cette dernière expression est simplement l'intégrale d'une fonction par rapport à la loi du facteur V et peut être calculée numériquement par une méthode de quadrature de Gauss par exemple. La loi de la perte peut alors être déterminée par un algorithme FFT d'inversion de transformée de Fourier²⁵. Remarquons de plus que l'approche FFT peut également être adaptée facilement au cas où les pertes en cas de défaut (*losses given default*) M_1, \dots, M_n sont stochastiques et conjointement indépendantes des temps de défaut. Cette approche a été introduite pour l'évaluation des tranches de CDO par Gregory et Laurent (2003) et Laurent et Gregory (2005). De plus, en procédant astucieusement, Gregory et Laurent (2004) montrent que l'approche FFT peut être étendue au cadre d'une structure de dépendance hétérogène où les entités de référence sont regroupées par secteur, la dépendance intra-sectorielle d'une part et la dépendance inter-sectorielle d'autre part étant décrites par un modèle à facteur spécifique.

²⁴comme les "forward starting CDOs" ou les tranches à effet de levier "leverage tranche"

²⁵Remarquons que l'inversion de la fonction caractéristique par FFT peut être délicate en pratique. En effet, une étape intermédiaire est parfois nécessaire pour déterminer un support représentatif de la loi de la perte dans l'espace des fréquences, i.e une suite $u_k, k = 1, \dots, N$ telle que $\mathbb{E} [e^{iu_k L_t}], k = 1, \dots, N$ reflète correctement la dispersion de la fonction caractéristique. Pour plus de détails sur les méthodes d'inversion de fonction caractéristique basée sur l'algorithme FFT, le lecteur est renvoyé à l'article d'Abate et Whitt (1992) et à ses références.

L'approche récursive

Une approche alternative basée sur un algorithme récursif a été proposé par Andersen et al. (2003) puis Hull et White (2004) pour calculer la loi de la perte dans le contexte de l'évaluation des tranches de CDO²⁶. Cette approche récursive peut être décrite en 3 étapes.

La première étape consiste à définir le support de la loi de la perte. Pour une date donnée t , la perte agrégée L_t est une variable aléatoire discrète²⁷ et prend ses valeurs dans l'intervalle $I = [0, L_{max}]$ où $L_{max} = \sum_{i=1}^n M_i$ représente la perte potentielle maximale. L'idée est de découper cet intervalle en une subdivision de pas constant u de sorte que chaque *loss given default* M_i peut être approchée de manière suffisamment précise par un multiple de u . Ainsi, le support de L_t peut être approché par une suite $l = 0, u, \dots, n_{max}u$ où $n_{max} \geq n$ et où $n_{max}u \approx L_{max}$. Évidemment, la situation la plus simple correspond naturellement au cas où les M_i sont tous égaux, par exemple à $M = \frac{1-\delta}{n}$ avec $\delta = 40\%$ et $n = 125$. Cette hypothèse semble raisonnable et est en phase avec les pratiques de marché pour l'évaluation de tranches standardisées. Dans le but d'alléger les notations, nous présenterons la seconde étape dans ce cadre simplifié. Nous pouvons donc choisir $n_{max} = n$ et $u = M$.

La seconde étape repose sur l'hypothèse d'indépendance conditionnelle des temps de défaut. Nous supposons dans cette étape que le facteur V est connu et donc que les temps de défaut sont indépendants. La procédure débute en déterminant la loi de la perte pour un portefeuille composé d'une seule référence. Puis les références sont insérées successivement dans le portefeuille et la loi de la perte est mise à jour à chaque étape. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que la loi de la perte à une étape donnée s'exprime simplement en fonction de la loi de la perte à l'étape précédente.

Notons $q_t^k(i)$, $i = 0, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$ la probabilité que la perte soit égale à iu à la $k^{\text{ème}}$ étape où le portefeuille de crédit est composé des noms $1, 2, \dots, k$ avec $k \leq n$. Commençons par déterminer la loi de la perte pour le portefeuille composé uniquement du nom 1. Sachant que ce nom est en défaut avec la probabilité $p_t^{1|V}$, on peut écrire :

$$\begin{cases} q_t^1(0) = 1 - p_t^{1|V}, \\ q_t^1(1) = p_t^{1|V}, \\ q_t^1(i) = 0, \quad i > 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Supposons maintenant que $q_t^k(\cdot)$ ait été déterminé après inclusions successives des noms $2, \dots, k$ dans le portefeuille et ajoutons le nom $k+1$. Sachant que ce nom est en défaut avec la probabilité $p_t^{k+1|V}$, la loi de la perte à l'étape $k+1$ peut être calculée par la formule récursive ci-dessous :

$$\begin{cases} q_t^{k+1}(0) = (1 - p_t^{k+1|V}) q_t^k(0), \\ q_t^{k+1}(i) = (1 - p_t^{k+1|V}) q_t^k(i) + p_t^{k+1|V} q_t^k(i-1), \quad i = 1, \dots, k+1, \\ q_t^{k+1}(i) = 0, \quad i > k+1. \end{cases} \quad (1.15)$$

La seconde ligne de cette dernière expression peut être interprétée de la manière suivante. Dans le nouveau portefeuille, il y a deux possibilités pour que la perte soit exactement égale à iu :

²⁶Plusieurs algorithmes récursifs similaires que l'on peut faire remonter à White et Greville (1959) ont été développés par les actuaires pour déterminer la loi de la perte dans un modèle individuel. On peut citer par exemple la Z -méthode ou bien la méthode de Newton qui s'appuient sur le développement de fonctions génératrices. Voir également la méthode récursive de Kornya (1983) et les extensions de De Pril (1989) et Sundt (2002).

²⁷Rappelons que par simplicité, les pertes en cas de défaut M_1, \dots, M_n sont supposées être déterministes.

soit elle était déjà égale à iu dans le portefeuille d'origine et le nom rajouté n'est pas en défaut, soit elle était égale à $(i - 1)u$ dans le portefeuille d'origine et le nom rajouté est en défaut (d'où une perte de $(i - 1)u + u = iu$). La loi de la perte est obtenue après inclusion de tous les noms dans le portefeuille, ce qui correspond à $q_t^n(i)$, $i = 0, \dots, n$. Il est intéressant de remarquer que même si les lois de pertes intermédiaires dépendent de l'ordre d'insertion des références, la loi de la perte finale associée au portefeuille complet est unique. Il est possible ainsi de calculer la loi conditionnelle de la perte agrégée pour différentes valeurs du facteur V .

La dernière étape consiste simplement à intégrer numériquement la loi conditionnelle de la perte suivant la loi du facteur.

De plus, comme suggéré à la première étape, le cas de taux de recouvrements hétérogènes peut également être traité en adaptant légèrement les relations de récurrence 1.15 à un support de perte plus dense. En pratique la principale contrainte réside dans le choix du pas de la subdivision u . Diminuer ce paramètre permet de gagner en précision mais cela implique en contrepartie un temps de calcul plus important. Hull et White (2004) exploitent le fait que pour une tranche de CDO donnée, une partie seulement de la perte agrégée affecte les *cash-flows*. Ils proposent alors d'utiliser une subdivision à pas non constant afin de concentrer les efforts numériques²⁸ sur les parties de support de la loi de la perte associées à des *cash-flows* non nuls.

Théoriquement, cette méthode peut également être étendue sans trop de difficultés au cas de taux de recouvrement stochastiques et indépendants des temps de défaut²⁹. De plus, Andersen et Sidenius (2005b) montrent que la méthode peut s'adapter aisément au cas où les temps de défaut et les taux de recouvrement sont indépendants conditionnellement à un facteur commun. Enfin, Jackson et al. (2007) établissent une majoration de l'erreur numérique (erreur due au système de représentation des nombres réels utilisés par le processeur) et prouvent que cet algorithme récursif est numériquement stable. Ils étendent également l'algorithme au cas où les taux de recouvrement sont des copies indépendantes d'une même variable aléatoire discrète M pouvant prendre m valeurs. Ils comparent dans ce cas les performances numériques de l'approche récursive et de l'approche par FFT et montrent que cette première approche est plus efficace lorsque le support de M est de petite taille ($m < 20$).

Autres approches basées sur des approximations

D'autres méthodes d'approximation, initialement développées par les actuaires dans le cadre de modèles individuels en assurance vie (voir Hipp (1986) et ses références) peuvent être adaptées au calcul de la loi de la perte pour l'évaluation des tranches de CDO. Motivés par le fait qu'une loi binomiale peut être approchée par une loi de Poisson lorsque la taille (le nombre d'entités) du portefeuille est importante, De Prisco et al. (2005) estiment dans un modèle à facteur la loi conditionnelle de la perte par une loi Poisson composée. Jackson et al. (2007) effectuent une analyse comparative de cette dernière approche avec une méthode basée sur une approximation par une loi *Normal Power*.

Une autre méthode d'approximation basée sur des développements en série entière est proposée par Glasserman et Suchintabandit (2007). Ils rappellent d'abord qu'évaluer une tranche

²⁸en utilisant des "sous-subdivisions" plus fines.

²⁹En pratique cela nécessite autant d'intégrations numériques que de sources d'aléa utilisées pour modéliser les taux de recouvrement, ce qui peut se révéler très coûteux d'un point de vue numérique.

de CDO revient à calculer le prix d'options d'achat sur la perte agrégée (ou *prime stop-loss* dans le jargon actuariel), $E[(L_t - k)^+]$, pour plusieurs horizons t . Ils montrent ensuite dans un cadre multifactoriel que l'on peut effectuer un développement en série entière de ces dernières quantités dont les termes se calculent efficacement. Ils prouvent en effet que chaque terme de la série peut être représenté comme une somme pondérée de prix de calls sur la perte agrégée d'un portefeuille composé d'entités indépendantes.

Une nouvelle approche basée sur les méthodes d'approximation de Stein³⁰ a été développée récemment par El Karoui et Jiao (2007) dans le cadre de l'évaluation des tranches de CDOs et semble être plus efficace que les méthodes d'approximation classiques existantes. Cette méthode consiste à approcher la loi conditionnelle de la perte par une loi standard (Normale ou Poisson dans la pratique) de paramètres connus³¹. L'intérêt réside dans le fait que l'erreur d'approximation peut s'exprimer de manière analytique. Pour différents modèles à facteur, Bastide et al. (2007) comparent les performances numériques des méthodes d'approximation classiques et celles de la méthode de Stein dans le cas Normale et Poisson. Ils constatent que la méthode de Stein se révèle être plus efficace que ses concurrentes en terme de compromis entre rapidité et précision de calcul.

Dans le cas de tranches standardisées de CDO sur indice, il est parfois pratique de considérer que le portefeuille sous-jacent est homogène. Dans ce cas, l'hypothèse d'un modèle à facteur n'est plus restrictive et le calcul de la loi de la perte se réduit à une simple intégration numérique.

Portefeuille homogène et théorème de De Finetti

Par définition, un portefeuille homogène est composé d'entités de crédit qui ont la même exposition E et le même taux de recouvrement R . Dans ce cas, le processus de la perte agrégée est simplement proportionnelle au processus du nombre de défauts N_t , i.e $L_t = E(1 - \delta)N_t$ où :

$$N_t = \sum_{i=1}^n D_{i,t}. \quad (1.16)$$

Nous supposerons de plus que le vecteur des temps de défaut (τ_1, \dots, τ_n) est un vecteur échangeable, i.e sa loi jointe est invariante pour toute permutation de ses éléments. On peut montrer dans ce cas que les lois marginales de (τ_1, \dots, τ_n) sont les mêmes, les lois des couples sont les mêmes et les lois jointes associées à des sous-ensemble de même taille sont les mêmes. De plus, les indicatrices de défaut $D_{i,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1, \dots, n$ sont échangeables pour toute date t et d'après le théorème de De Finetti, ce sont des mélanges de variables aléatoires de Bernoulli³².

Plus précisément, pour tout temps t , il existe une variable aléatoire \tilde{p}_t que l'on appellera "probabilité mélange" de support $[0, 1]$ telle que connaissant \tilde{p}_t , $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ soient indépendantes. En d'autres termes, si ν_t représente la loi de \tilde{p}_t à la date t , N_t est simplement un mélange de

³⁰Pour plus de détails, le lecteur est invité à lire le chapitre du livre de Schoutens (2000) consacré à ce sujet ou la thèse de Jiao (2006).

³¹Les paramètres de la loi standard sont choisis de tel sorte que la moyenne et la variance correspondent à celle de la loi conditionnelle de la perte.

³²Les indicatrices de défaut doivent faire partie d'une suite infinie de v.a de Bernoulli échangeables. Pour plus de détails, voir le chapitre 2.

Binomiales :

$$\mathbb{Q}(N_t = k) = C_n^k \int_0^1 p^k (1-p)^{(n-k)} \nu_t(dp), \quad k = 0, \dots, n. \quad (1.17)$$

En conséquence, la loi de la perte s'exprime très simplement et peut être calculée par une simple intégration numérique.

Ainsi, d'après le théorème de De Finetti, l'hypothèse d'un modèle à facteur n'est pas restrictive dans ce cas. Même si l'homogénéité est une hypothèse qui paraît contestable à première vue, cette dernière peut être considérée comme raisonnable pour des tranches de CDO sur des portefeuilles de grande taille comme les indices CDS iTraxx ou CDX. Cependant, cette hypothèse est peu réaliste lorsque l'on considère la gestion des tranches equity très sensibles au risque idiosyncratique.

Peretyatkin (2006) propose d'approcher la loi d'un portefeuille hétérogène par celle d'un portefeuille homogène avec un terme correcteur. Il démontre l'efficacité de sa méthode dans le cas où les spreads des CDS individuels sont raisonnablement dispersés.

Il est également possible pour des portefeuilles de grande taille d'approcher la loi de la perte par la loi de la probabilité mélange. En effet, on peut montrer que lorsque la taille du portefeuille augmente, la perte unitaire converge vers la probabilité mélange.

Portefeuille infiniment granulaire

Lorsque l'on considère des tranches de CDO sur des portefeuilles de grande dimension, il est assez pratique de confondre la loi de la perte avec celle d'un portefeuille infiniment granulaire³³. Ce portefeuille virtuel peut être vu comme la limite d'une suite de portefeuilles homogènes pour lesquels la perte maximale a été normalisée. La perte normalisée correspondant au portefeuille de taille n peut s'écrire :

$$L_{n,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i,t}. \quad (1.18)$$

Rappelons que lorsque les indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}, \dots$ forment une suite de variables de Bernoulli échangeables, d'après le théorème de De Finetti, il existe une "probabilité mélange" \tilde{p}_t telle que, ces dernières soient indépendantes conditionnellement à \tilde{p}_t . En fait, la probabilité mélange peut être complètement caractérisée par la suite $(L_{n,t})_{n \geq 1}$ qui converge presque sûrement vers \tilde{p}_t , lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, \tilde{p}_t peut être utilisé comme une approximation de la perte dans le cas d'un portefeuille homogène de grande dimension. Remarquons que pour un modèle à facteur donné où les temps de défaut sont conditionnellement indépendants sachant un facteur V , la probabilité mélange \tilde{p}_t coïncide avec la probabilité conditionnelle de défaut $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V)$ puisque dans ce cas³⁴ :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i,t} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (1.19)$$

³³Cette terminologie provient de la réglementation Bâle II. Il s'agit en fait de l'approche standard proposée par Bâle II pour évaluer la loi de la perte et déterminer les montants réglementaires de fonds propres bancaires.

³⁴La preuve est basée sur une généralisation de la loi forte des grands nombres. Voir Vasicek (2002) pour plus de détails.

Le perte agrégée est donc approchée par une variable aléatoire dont la loi est connue. Dans le contexte du risque de crédit, cette idée a été introduite par Vasicek (2002). Elle a également été étudiée et développée par Schönbucher (2002), Gordy et Jones (2003), Greenberg et al. (2004b), Schloegl et O’Kane (2005) pour l’évaluation et la gestion des tranches de CDO.

1.1.3 Identification des modèles à facteur

Cette section traite du problème de l’identification des modèles à facteur et de la validité de ces modèles pour l’évaluation des tranches de CDO. Le problème peut s’énoncer de la manière suivante. Supposons que l’on peut construire à partir de données de marché une loi pour la perte agrégée. Est-il toujours possible d’identifier un modèle à facteur compatible avec cette loi ? La réponse à cette question dépend bien sûr des hypothèses considérées pour les spreads individuels, les taux de recouvrement ou les taux d’intérêt. En effet, l’hétérogénéité des spreads, le caractère stochastique des taux de recouvrement ou des taux d’intérêt constituent autant d’éléments qui permettent d’élargir le champ de compatibilité des modèles à facteur dans la contexte de l’évaluation des tranches de CDO. Pour faciliter l’analyse, nous restreindrons le problème de l’identification au cas de modèles à facteur homogènes où les temps de défaut sont échangeables et les pertes en cas de défaut sont constantes et égales pour toutes les entités de référence. Rappelons que dans ce cas, la perte agrégée se réduit au processus de comptage $N_t = \sum_{i=1}^n D_{i,t}$ et l’existence d’un facteur mélange \tilde{p}_t est garantie : les indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ sont indépendantes sachant \tilde{p}_t . Le problème de l’identification des modèles à facteur homogènes se résume donc dans ce cas au problème de l’identification d’une loi mélange.

Nous analysons dans un premier temps la compatibilité d’une loi mélange (loi de \tilde{p}_t) à des lois arbitraires de la perte agrégée. On peut imaginer par exemple qu’il existe des cotations de marché pour les tranches $[k, k + 1\%]$, $k = 0, \dots, n - 1$ (*tranchlets* de CDO) qui permettent de construire avec certitude l’intégralité de la loi de N_t pour toute date t . Nous adoptons pour cela une méthode non paramétrique proposée par Wood (1999) et développée par Vacca (2008) dans le contexte de la gestion des CDOs. Nous examinerons également la compatibilité des modèles à facteur homogènes (ou l’existence d’une loi mélange) dans deux cas d’école. Le première consiste à considérer la loi de la perte dans le cas indépendant et pour des marginales hétérogènes. Le second consiste à considérer la loi de la perte pour des marginales homogènes mais pour une structure de dépendance hétérogène (par exemple 2 noms anti-comonotones et un nom indépendant). Nous verrons enfin l’approche non paramétrique *perfect copula* de Hull et White (2006) où le nombre de contraintes est limité au nombre des tranches standardisées de CDO sur indice, i.e 5 tranches et l’indice.

Cas d’une loi de perte arbitraire

Le problème de l’identification dans le cas des modèles à facteur homogènes peut se reformuler de la manière suivante : étant donnée une loi de perte arbitraire sur $\{0, 1, \dots, n\}$, est-il possible de l’identifier à une loi Binomiale mélange ? Malheureusement, la réponse est négative en général. En effet, Wood (1992) montre par des arguments géométriques que la probabilité qu’une loi de $\{0, 1, \dots, n\}$ choisie aléatoirement corresponde à un mélange de Binomiales converge rapidement vers 0 lorsque n augmente. Nous essayons ici d’éclairer ce problème en tentant d’approcher une loi de marché par un mélange de Binomiale. Nous utilisons pour cela l’approximation discrète introduite par Wood (1999) et successivement appliquée par Vacca (2008) au contexte de l’évaluation des tranches de CDO. La loi “test” est extraite de l’article Laurent et al. (2007). Il s’agit

d'une distribution du nombre de défaut à $t = 5$ ans calibrée à partir d'une structure de *base correlation* caractéristique de Juin 2007 (voir figure 1.5).

Soit $q = (q_0, \dots, q_n)^T$, la loi de N_t avec $q_i = \mathbb{Q}(N_t = i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Nous recherchons un facteur mélange \tilde{p}_t de sorte que le mélange de Binomiales N_t^* correspondant soit suffisamment proche de N_t (en loi). Nous supposons que \tilde{p}_t est une variable aléatoire discrète de $[0, 1]$ qui prend ses valeurs dans le sous-ensemble $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$, où N est un entier et $N \geq 2$. Soient $\pi_j = \mathbb{Q}\left(\tilde{p}_t = \frac{j}{N}\right)$, $j = 0, \dots, N-1$, la loi de \tilde{p}_t et $q_i^* = P(N_t^* = i)$, $i = 0, \dots, n$, la loi Binomiale mélange associée à \tilde{p}_t . La relation suivante est donc vérifiée :

$$q_i^* = \mathbb{E}\left[C_n^i(\tilde{p}_t)^i (1 - \tilde{p}_t)^{n-i}\right] = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^i \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-i} \pi_j, \quad i = 0, \dots, n. \quad (1.20)$$

Ce dernier système linéaire peut être exprimé sous forme matricielle de la façon suivante :

$$q^* = B\pi, \quad (1.21)$$

où $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)^T$ et $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{N-1})^T$. Les éléments de la matrice B de taille $(n+1) \times N$ sont tels que :

$$B_{i,j} = C_n^i \left(\frac{j}{N}\right)^i \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (1.22)$$

Ainsi, nous cherchons le vecteur π qui minimise la distance entre q et q^* au sens de la norme L_2 , i.e :

$$\pi = \operatorname{argmin} \|q - q^*\|_2 = \operatorname{argmin} \|q - B\pi\|_2. \quad (1.23)$$

Ce problème de minimisation linéaire peut être résolu par un algorithme classique des moindres carrés.

Cette méthode peut être testée sur des lois de perte (loi de N_t) dans des modèles à facteur homogènes classiques comme, par exemple, la copule Gaussienne à un facteur³⁵. Dans ce cas, l'erreur de minimisation des moindres carrés est négligeable et on peut observer en figure 1.4 la compatibilité des lois mélanges.

³⁵Voir Le paragraphe 1.2.1 pour plus de détails sur ce modèle.

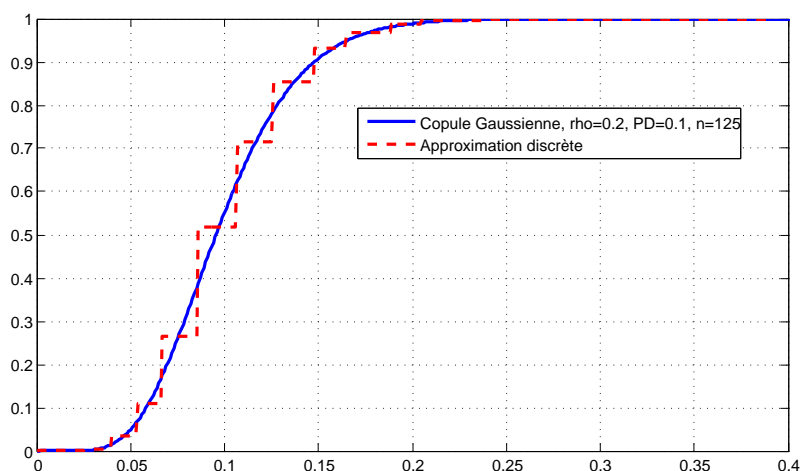


FIG. 1.4 – Ce graphique représente la fonction de répartition de la probabilité mélange dans le cas de la copule gaussienne à un facteur (Voir expression 1.30) et la loi mélange obtenue par l'approximation discrète décrite ci-dessus.

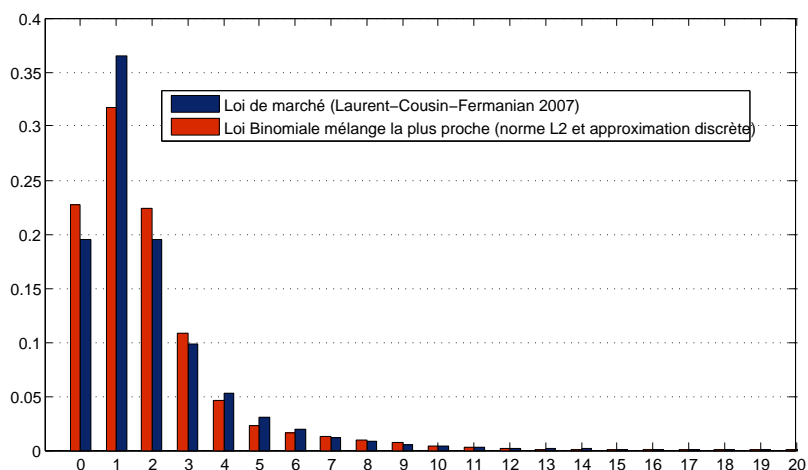


FIG. 1.5 – La distribution de N_t obtenu par Laurent et al. (2007) à partir d'une structure de *base correlation* de Juin 2007 et la loi Binomiale mélange obtenue par l'approximation discrète et la procédure de minimisation.

La figure 1.5 compare la distribution de marché de N_t placée en *input* et la loi Binomiale mélange calculée grâce à la procédure de calibration décrite ci-dessus. De plus, on peut constater que la loi mélange discrète obtenue (voir figure 1.6) a un support de petite taille contrairement à celle calibrée sur la copule Gaussienne (voir figure 1.4). Ainsi, lorsque l'on considère le problème de l'identification à une distribution complète de la perte associée à des données de marché, l'hypothèse d'un modèle à facteur est rejetée dans le cas homogène.

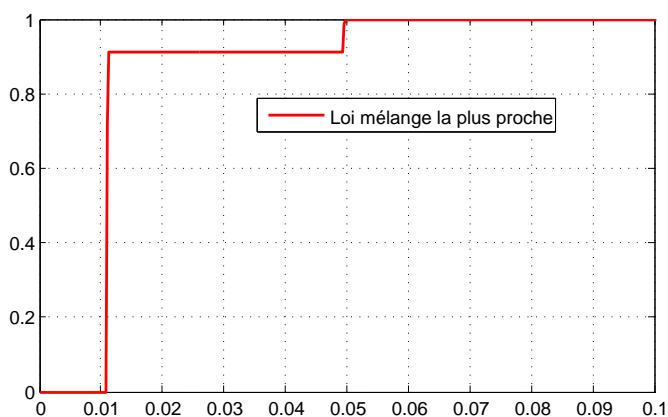


FIG. 1.6 – Fonction de répartition de la probabilité mélange obtenue par l'approximation discrète et la procédure de minimisation.

Nous allons tenter maintenant d'éclaircir le problème de l'identification en étudiant la compatibilité de l'approche factorielle dans des cas simples mais instructifs.

Hétérogénéité des marginales et indépendance

On considère ici un portefeuille composé de 2 noms indépendants et de lois marginales hétérogènes. Existe-t-il un mélange de Binomiales compatible avec la loi de la perte de ce portefeuille ? En reprenant la méthode développée plus haut, on peut montrer dans ce cas simple que la réponse est négative en général. En effet, il est facile de générer la loi de la perte dans le cas indépendant et pour des marginales distinctes. On peut par exemple utiliser l'algorithme récursif présenté au paragraphe 1.1.2. Cependant, on constate que l'approximation de cette dernière distribution par une loi Binomiale mélange est acceptable dans le cas de marginales raisonnablement dispersées (très concentrées autour d'une moyenne). Considérons par exemple qu'à une date t arbitraire les probabilités marginales de défaut soient égales à 0.1 et 0.2. La loi mélange obtenue (Voir figure 1.7) est assez proche du cas indépendant où les marginales sont homogènes et égales à la moyenne 0.15. Lorsque la dispersion augmente, il n'est plus possible de calibrer la loi de la perte à un mélange de Binomiales.

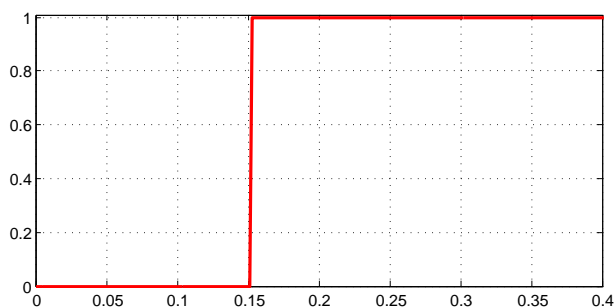


FIG. 1.7 – Fonction de répartition de la probabilité mélange obtenue par l'approximation discrète et la procédure de minimisation.

On peut remarquer que ce problème a également été étudié implicitement par Peretyatkin (2006). Sous l'hypothèse d'indépendance, il compare la loi de la perte (loi de N_t) dans le cas de marginales

hétérogènes et dans le cas de marginales homogènes (i.e, loi Binomiale). Il montre que lorsque les marginales sont raisonnablement dispersées, l'approximation de la loi de la perte par une loi Binomiale où les marginales sont égales à la moyenne est acceptable. Il obtient également des termes d'erreur en fonction du paramètre de dispersion en supposant que les marginales sont dispersées de manière Gaussienne autour de leur moyenne.

Hétérogénéité de la structure de dépendance et homogénéité des marginales

Considérons maintenant le cas d'un portefeuille composé de 3 noms de mêmes lois marginales de défaut mais pour lesquels la structure de dépendance n'est plus homogène. On peut choisir par exemple deux noms comonotones et un troisième nom indépendant des deux autres de sorte que les lois bivariées ne sont pas tous les mêmes. Si l'on note p la probabilité de défaut des trois noms à une date t choisie arbitrairement, la loi de la perte s'écrit simplement :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(N_t = 0) = (1 - p)^2, \\ \mathbb{Q}(N_t = 1) = p(1 - p), \\ \mathbb{Q}(N_t = 2) = p(1 - p), \\ \mathbb{Q}(N_t = 3) = p^2. \end{cases} \quad (1.24)$$

Dans ce cas, l'approximation par un mélange de Binomiale semble raisonnable. Cependant, cela reste à vérifier pour un portefeuille de taille plus réaliste. A titre illustratif, nous avons représenté en figure 1.8, la fonction de répartition de la loi mélange obtenue par l'approximation discrète et la minimisation des moindres carrés pour $p = 0.2$.

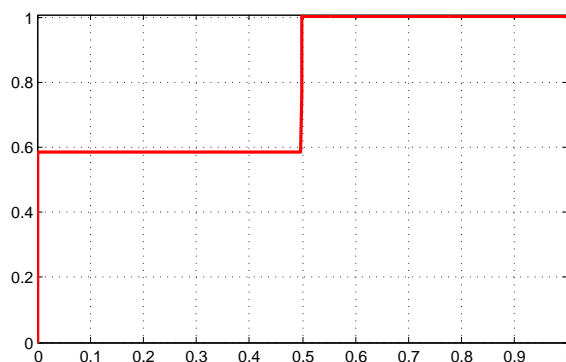


FIG. 1.8 – Fonction de répartition de la probabilité mélange obtenue par l'approximation discrète et la procédure de minimisation.

Approche non paramétrique de Hull et White (2006)

Hull et White (2006) propose également une estimation directe de la loi mélange à partir des spreads de marché des tranches de CDO sur indice. Dans leur approche, la probabilité mélange s'exprime simplement à l'aide d'une variable aléatoire discrète $\tilde{\lambda}$ telle que :

$$\mathbb{Q} \left(\tau_i \leq t \mid \tilde{\lambda} = \lambda_k \right) = 1 - \exp(-\lambda_k t), \quad k = 1, \dots, L. \quad (1.25)$$

En conséquence, les défauts surviennent au premier instant de saut d'un processus de Poisson "mêlé" (ou processus de Cox) de taux de hasard égale à $\tilde{\lambda}$. Une fois qu'une grille a été choisie pour $\tilde{\lambda}$, les probabilités $\pi_k = \mathbb{Q} \left(\tilde{\lambda} = \lambda_k \right)$, $k = 1, \dots, L$, peuvent être calibrées sur les spreads

de marché des tranches de CDO. Hull et White (2006) montrent que cette étape n'est pas réalisable sans hypothèse additionnelle dans un cadre homogène. En conséquence, ils supposent que les taux de recouvrement sont des fonctions déterministes décroissantes des taux de défaut λ_k , $k = 1, \dots, L$, hypothèse cohérente avec plusieurs études empiriques comme celles de Hu et Perraudin (2002) ou Altman et al. (2005).

Contrairement aux approches présentées précédemment où l'on a tenté de calibrer un mélange de Binomiales sur une distribution complète de la perte, le nombre de contraintes en pratique est réduit à quelques prix de tranches et l'hypothèse d'un modèle à facteur homogène reste acceptable dans ce cas sous certaines conditions. Cependant, cette dernière approche repose nécessairement sur un choix arbitraire du support de la probabilité mélange qui peut se révéler contraignant dans le cadre d'une mise en œuvre automatique de la procédure de calibration. C'est pourquoi, les praticiens se sont naturellement tournés vers des modèles à facteur paramétriques pour lesquelles le nombre de paramètres à estimer est inférieur au nombre de contraintes.

1.2 Revue des modèles à facteur

Dans la partie précédente, nous avons mis en évidence le rôle prééminent de la probabilité conditionnelle de défaut pour l'évaluation des tranches de CDO. Nous avons également vu que dans le cas d'un portefeuille homogène, l'approche factorielle n'était pas restrictive et que la probabilité conditionnelle de défaut correspondait exactement à la perte d'un portefeuille infiniment granulaire.

Cette partie constitue une revue des modèles à facteur paramétriques les plus populaires pour l'évaluation des tranches de CDO. Dans chaque classe de modèles, nous mettrons en évidence l'expression de la probabilité conditionnelle de défaut. Nous présenterons les copules à facteur, les modèles structurels multivariés, les modèles Poisson multivariés et les modèles à intensité affine.

1.2.1 Copules à facteur

D'après le théorème de Sklar, la loi de tout vecteur aléatoire peut s'exprimer à l'aide d'une fonction copule³⁶ qui permet de dissocier la structure de dépendance et les lois marginales. En d'autre terme, il existe une fonction $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, telle que :

$$\mathbb{Q}(\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n) = C(F_1(t_1), \dots, F_n(t_n)), \quad (1.26)$$

où F_1, \dots, F_n sont les fonctions de répartition associées aux temps de défaut τ_1, \dots, τ_n . Le principal avantage de cette représentation est la possibilité de manier la structure de dépendance d'une part et les lois marginales d'autre part de manière indépendante. En pratique, les lois marginales F_i , $i = 1, \dots, n$, peuvent être déduites de la structure par terme des primes de CDS individuels. Elles peuvent donc être considérées comme des paramètres de marché qui interviennent en *input* du modèle d'évaluation. En particulier, la structure de dépendance n'interfère pas avec l'évaluation des CDS et intervient uniquement pour l'évaluation des produits de corrélation que sont les tranches de CDO³⁷. Dans le cadre de la modélisation des portefeuilles de crédit, les modèles à copule ont été introduits par Li (2000) et successivement développés par Schönbucher et Schubert (2001).

Les copules à factor (*factor copula*) sont des fonctions copules particulières dont la structure de dépendance peut être décrite au moyen d'une représentation à facteur. Plus formellement, la structure de dépendance est régie par une suite V_1, \dots, V_n de variables latentes. Chaque variable aléatoire V_i , $i = 1, \dots, n$ peut s'exprimer comme une fonction bivariée d'un facteur commun systématique V et d'un facteur idiosyncratique \bar{V}_i , i.e :

$$V_i = f(V, \bar{V}_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.27)$$

où V et \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$ sont supposés être indépendants. Dans la plupart des applications, la fonction f , le facteur systématique V et les variables idiosyncratiques \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$ sont choisis

³⁶Pour une introduction théorique aux fonctions copules, le lecteur est invité à se reporter aux livres de Nelsen (1999) ou Joe (1997). Cherubini et al. (2004) proposent une revue des fonctions copules et de leurs applications à la modélisation financière.

³⁷Le succès qu'ont connu les modèles à copule est d'ailleurs en partie lié au fait que la procédure de calibration peut être divisée physiquement entre une équipe spécialisée sur le marché des CDS et une autre spécialisée dans le marché des produits de corrélation, la première effectuant en amont la calibration des lois marginales pour la seconde.

de sorte que les variables latentes V_1, \dots, V_n soient échangeables. En conséquence, $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n$ sont supposés être identiquement distribués et on notera \bar{H} leur fonction de répartition. Dans cette approche, les temps de défaut sont décrits par :

$$\tau_i = F_i^{-1}(H(V_i)), \quad (1.28)$$

où F_i^{-1} désigne l'inverse généralisé de la fonction de répartition de $\tau_i, i = 1, \dots, n$ et où H est la fonction de répartition commune des variables latentes V_1, \dots, V_n .

Burtschell et al. (2008) effectuent une étude comparative détaillée des copules à facteur les plus populaires utilisées pour l'évaluation de tranches de CDO. Pour simplifier la présentation des différentes approches, nous nous restreindrons au cas où les lois marginales des temps de défaut sont les mêmes et nous noterons F la fonction de répartition commune. Ainsi, dans la suite, $F_1 = \dots = F_n = F$. Remarquons dans ce cas que les temps de défaut forment un vecteur de variables aléatoires échangeables et, comme on l'a vu précédemment, l'approche factorielle n'est plus restrictive.

Copules à facteur additif

La famille des copules à facteur additif est sans doute la plus utilisée en pratique sur le marché pour la gestion de tranches de CDO. Dans ce cas la fonction f définie précédemment est additive et la structure de dépendance des variables latentes V_1, \dots, V_n est décrite par la relation suivante :

$$V_i = \rho V + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.29)$$

où le paramètre de dépendance ρ est un réel dans l'intervalle $[0, 1]$. Les temps de défaut sont donc indépendants lorsque $\rho = 0$ et comonotones lorsque $\rho = 1$ ³⁸.

Au vu des notations introduites précédemment, la probabilité conditionnelle de défaut ou probabilité mélange $\tilde{p}_t = P(\tau_i \leq t | V)$ peut s'exprimer ainsi :

$$\tilde{p}_t = \bar{H} \left(\frac{-\rho V + H^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right). \quad (1.30)$$

Dans le cas comonotone où $\rho = 1$, $\tilde{p}_t = \mathbf{1}_{\{V \leq H^{-1}(F(t))\}}$. Remarquons que dans la plupart des applications, V et $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n$ appartiennent à une même famille de loi stable par convolution.

L'approche la plus populaire est sans doute celle associée à la **copule gaussienne** où les variables V et $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n$ sont indépendantes de loi Normale centrée réduite. Ainsi, d'après la relation 1.29 et par définition des variables gaussiennes, les variables latentes (V_1, \dots, V_n) forment un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice variance-covariance égale à $\Sigma = (\Sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\Sigma_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\Sigma_{i,j} = \rho^2$ sinon. De plus, on a ici $H = \bar{H} = \Phi$ où Φ denote la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite. La copule associée au vecteur des temps de défaut est donc la copule Gaussienne : $C(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$, où Φ_{Σ} désigne la loi jointe d'un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice variance-covariance égale à Σ .

³⁸Voir en annexe A pour une définition de la comonotonie.

Notons également que dans le cas où $0 \leq \rho < 1$, la copule gaussienne n'admet pas de dépendance dans les extrêmes, i.e les coefficients de dépendance de queue inférieure λ_L et supérieure λ_U sont nuls³⁹. Lorsque $\rho = 1$ (cas comotone), la dépendance dans les extrêmes est parfaite : $\lambda_L = \lambda_U = 1$. De plus, le lien entre le τ de Kendall⁴⁰ que l'on notera ρ_K et le coefficient de corrélation linéaire ρ^2 est donné par la relation suivante :

$$\rho_K = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho^2. \quad (1.31)$$

La copule gaussienne à un facteur a été introduite par Vasicek (2002) dans le contexte du risque de crédit et correspond au modèle de régression *probit* multivarié en statistique⁴¹. De par sa flexibilité, la copule gaussienne à un facteur s'est imposée comme le modèle d'évaluation de référence sur le marché des tranches de CDO malgré un nombre important de défaillances avérées. En particulier, il n'est pas possible dans ce modèle de trouver un même paramètre de dépendance ρ qui reproduise simultanément toutes les cotations de tranches standardisées de CDO pour une maturité donnée, i.e les prix des tranches [0,3%], [3,6%], [6,9%], [9,12%] et [12,20%] pour l'indice iTraxx. Par exemple, lorsque le paramètre ρ est calibré sur la tranche equity, ce dernier a tendance à surévaluer les tranches mezzanines et à sous-évaluer les tranches seniors. Cela peut s'expliquer en partie par le manque de masse de probabilité dans les queues de la distribution du facteur et par l'absence de dépendance de queue de la copule gaussienne. En fait, la courbe des paramètres de dépendance que l'on peut déduire des prix des tranches a l'allure bien connue d'un "sourire" plus ou moins biaisé aussi appelé *correlation skew* ou *correlation smile*⁴². Le problème est lié à la gestion de tranches non-traditionnelles ou tranches *bespokes* qui ne peuvent pas être évaluées directement dans cette approche. Des procédures arbitraires d'interpolation des corrélations implicites sont souvent utilisées et peuvent parfois générer des opportunités d'arbitrage.

Une approche alternative consiste à utiliser la **copule de Student** qui englobe la copule gaussienne comme cas limite⁴³. Elle a été étudiée en particulier par Andersen et al. (2003), Embrechts et al. (2003), Frey et McNeil (2003), Mashal et al. (2003), Greenberg et al. (2004a), Demarta et McNeil (2005), Schloegl et O'Kane (2005). Cependant, même si la copule de Student admet de la dépendance de queue, elle souffre du même problème d'incompatibilité que la copule gaussienne.

Dans le but de pallier à ce problème, d'autres copules à facteur additif ont été introduites. On peut citer notamment la copule double-*t* (Hull et White (2004)), la copule NIG⁴⁴ (Guegan et Houdain (2005)), la copule double-NIG (Kalemanova et al. (2007)), la copule double Variance Gamma (Moosbrucker (2006)) et les copules α -stable (Prange et Scherer (2006)). Toutes ces approches ont la propriété de générer de la dépendance de queue. D'autres copules à facteur à

³⁹Voir en annexe A pour la définition des coefficients de dépendance de queue.

⁴⁰Voir en annexe A la définition du τ de Kendall.

⁴¹Le modèle *probit* multivarié est une extension populaire des modèles de régression linéaire en statistique. C'est un modèle linéaire généralisé pour lequel la fonction de lien est une fonction type *probit*. Pour une description du modèle et ses applications à l'économétrie, le lecteur est invité à se reporter au livre de Gourieroux (2000).

⁴²Le *smile* ou *skew* de corrélation correspond à l'allure de la courbe des corrélations implicites déduite des cotations de tranches de CDO standardisées à partir d'un modèle copule gaussienne à un facteur. Cette courbe est aussi appelée courbe *compound correlation*. Dans le cas où il serait possible de calibrer toutes les tranches pour une date donnée, cette courbe des corrélations implicites serait plate.

⁴³cela provient du fait que lorsque le degré de liberté augmente la loi Student-*t* peut être approchée par la loi Normale

⁴⁴Normale Inverse Gamma

queue épaisse sont traitées par Wang et al. (2007).

La figure 1.9 représente la fonction de répartition de la probabilité mélange pour certaines des copules à facteur additif présentées ci-dessus. Rappelons que la probabilité mélange peut être vue comme la perte agrégée sur un portefeuille de grande dimension.

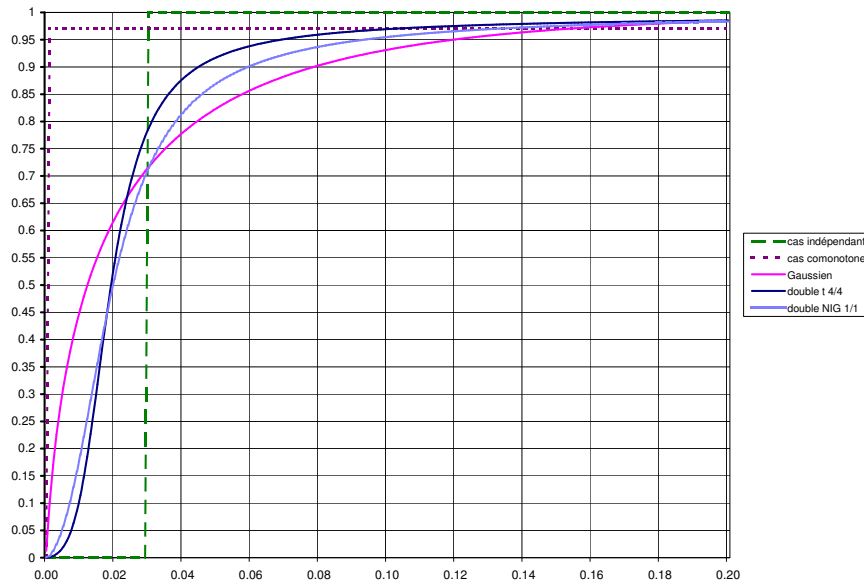


FIG. 1.9 – Ce graphique montre la fonction de répartition de la probabilité mélange \tilde{p}_t pour la copule Gaussienne, la copule double- t (4/4) et la copule double NIG (1/1). La probabilité marginale de défaut $F(t)$ est égale à 2.96% et la corrélation entre les défauts est fixée à $\rho^2 = 30\%$. Enfin, nous avons également tracé la loi de la probabilité mélange dans le cas indépendant ($\rho^2 = 0$) et dans le cas comonotone ($\rho^2 = 1$).

Copules à facteur basées sur des processus de Lévy

Ce paragraphe décrit une méthode de construction générique de copules à facteur basée sur des processus de Lévy. Rappelons qu'à partir d'une loi infiniment divisible H , il est possible de définir un processus de Lévy (X_t) tel que X_1 (X_t pour $t = 1$) soit de loi H ⁴⁵. Si l'on choisit H tel que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = 1$, on peut montrer en utilisant la formule de Lévy-Khintchine que nécessairement $\mathbb{E}[X_t] = 0$ et $\mathbb{E}[X_t^2] = t$ pour tout $t \geq 0$. Le processus (X_t) sera appelé processus de référence ou processus mère. Le processus de référence est à l'origine de la construction de copules à facteur génériques.

Considérons $n + 1$ processus de Lévy $(V_t)_{t \in [0,1]}$ et $(\bar{V}_{i,t})_{t \in [0,1]}$, $i = 1, \dots, n$ que l'on suppose être des copies indépendantes du même processus de Lévy de référence $(X_t)_{t \in [0,1]}$. Les variables latentes V_1, \dots, V_n peuvent être définies au moyen d'un paramètre de corrélation ρ dans $[0, 1]$ de la façon suivante :

$$V_i = V_\rho + \bar{V}_{i,1-\rho}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.32)$$

⁴⁵Voir par exemple le livre de Cont et Tankov (2004) pour plus de détails sur le lien entre processus de Lévy et loi infiniment divisible mais aussi sur la formule de Lévy-Khintchine.

où V_ρ est simplement la valeur du processus $(V_t)_{t \in [0,1]}$ à l'instant $t = \rho$ et où $\bar{V}_{i,1-\rho}$ est la valeur du processus $(\bar{V}_{i,t})_{t \in [0,1]}$ à l'instant $t = 1 - \rho$. Par indépendance de V_ρ et $\bar{V}_{i,1-\rho}$ et puisqu'un processus de Lévy est à accroissements indépendants et stationnaires, on peut écrire :

$$V_i \stackrel{d}{=} X_\rho + \bar{X}_{i,1-\rho} \stackrel{d}{=} X_1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.33)$$

Ainsi, les variables latentes ont toutes la même loi marginale égale à H . De plus, il est direct de montrer que le coefficient de corrélation linéaire est exactement égale à ρ ⁴⁶. De plus $\rho = 0$ correspond au cas indépendant et $\rho = 1$ correspond au cas comonotone. Remarquons que les temps de défaut τ_1, \dots, τ_n définis par $\tau_i = F^{-1}(H(V_i))$, $i = 1, \dots, n$ forment une suite de variables aléatoires échangeables. La probabilité mélange associée à la date t s'exprime simplement dans cette approche par la relation suivante :

$$\tilde{p}_t = H_{1-\rho}(-V_\rho + H^{-1}(F_i(t))), \quad (1.34)$$

où $H_{1-\rho}$ représente la fonction de répartition de $X_{1-\rho}$.

Il est important de noter que les modèles de dépendance construits de cette manière sont des modèles purement statiques au sens où les variables latentes sont figées et n'évoluent pas dynamiquement. En fait, les processus de Lévy introduits dans cette approche peuvent être vus comme des objets mathématiques intéressants pour la construction de copules à facteur générique. Chaque processus de Lévy ou chaque loi infiniment divisible peut être associé à une copule à facteur. Cette approche a été introduite par Albrecher et al. (2007) dans le cadre de l'évaluation de tranches de CDO. Ils ont en particulier étudié la construction de copules à facteur à partir des processus de Wiener, shifted Gamma, shifted IG⁴⁷, Variance Gamma et NIG. Pour chacune de ces approches, même si la spécification du modèle n'est pas tout à fait la même, un lien est établi avec les copules à facteur additif correspondantes, i.e les copules à facteur gaussien, double Variance Gamma, double NIG (Voir paragraphe précédent). Garcia et al. (2007) introduisent le concept de la *Lévy base correlation* qui correspond à une structure de *base correlation* mais pour laquelle le moteur d'évaluation est remplacé par un modèle à copule basé sur un processus de Lévy. Ils montrent que pour des lois infiniment divisibles à queue épaisse (Shifted Gamma, Shifted IG, Variance Gamma ou NIG), la courbe des *Lévy base correlations* est relativement "plate" comparée à la courbe des *base correlations* standard déduite dans un modèle à un facteur gaussien. Masol et Schoutens (2008) analysent le potentiel de la structure *Lévy base correlation* dans le cadre de l'évaluation de tranches *bespoke*. Ils montrent que contrairement au choix de la *base correlation* classique, les prix produits par des méthodes d'interpolation de la *Lévy base correlation* sont peu affectés par des possibilités d'opportunité d'arbitrage. Cette approche est motivée par le fait que pendant la crise de Mars 2008 sur les indices CDS, aucun paramètre de corrélation (dans un modèle copule gaussienne) ne pouvait être déduit des primes de tranches super senior⁴⁸. Bien que ces tentatives de re-définitions des corrélations implicites soient intéressantes a priori, elles risquent à terme de générer de la dispersion dans les prix de marché (dû à la disparition de pratiques standards).

⁴⁶En effet, pour $i \neq j$, $\mathbb{E}^Q[V_i V_j] = \mathbb{E}^Q[V_\rho^2] = \mathbb{E}^Q[X_\rho^2] = \rho$.

⁴⁷*Inverse Gaussian*.

⁴⁸En fait les corrélations implicites (calculées par les intervenants de marché) ont parfois dépassé 100% pour les tranches super senior sur l'iTraxx en Mars 2008.

Copules à facteur avec corrélation stochastique

Les copules à facteur avec corrélation stochastique constituent d'autres extensions de la copule à facteur gaussien pour lesquelles le paramètre de dépendance est une variable aléatoire de support $[0, 1]$. Les variables latentes sont décrites par la relation :

$$V_i = \tilde{\rho}_i V + \sqrt{1 - \tilde{\rho}_i^2} \bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.35)$$

où V et \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes de loi Normale centrée réduite. Les paramètres de dépendance $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$ sont supposés être échangeables (donc en particulier identiquement distribués), de support $[0, 1]$ et indépendantes de V , \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$. L'intérêt de cette construction réside dans le fait que les variables latentes ont des marginales gaussiennes, i.e $H = \Phi$. En effet, grâce à l'indépendance des membres du triplet $(\tilde{\rho}_i, V, \bar{V}_i)$, $i = 1, \dots, n$, conditionnellement au fait que $\tilde{\rho}_i = \rho$, V_i est de loi Normale centrée réduite pour tout ρ dans $[0, 1]$. Par intégration par rapport à la loi de $\tilde{\rho}_i$, V_i est encore de loi Normale centrée réduite. Ainsi les lois marginales ne dépendent pas des paramètres gouvernant la dépendance, ce qui facilite grandement le processus de calibration (la calibration des paramètres gouvernant la dépendance n'interfère pas sur la calibration des lois marginales de défaut). Par échangeabilité des paramètres de dépendance $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$, il est facile de montrer que le paramètre de corrélation linéaire est égal à $\mathbb{E}^Q[\tilde{\rho}_1]$ ⁴⁹. Nous pouvons remarquer que les temps de défaut sont bien échangeables. Dans le cas où $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n$ sont indépendants, la probabilité mélange s'exprime ainsi :

$$\tilde{p}_t = \int_0^1 \Phi \left(\frac{-\rho V + \Phi^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) G(d\rho), \quad (1.36)$$

où G représente la loi de $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$ et où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Burtschell et al. (2008) examinent le cas où les paramètres de dépendance $\tilde{\rho}_i$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à deux états ($\tilde{\rho}_1$ prend 2 valeurs). Tavares et al. (2004) proposent également un modèle à plusieurs états qui inclut un état catastrophique dans lequel tous les noms font défauts simultanément. Burtschell et al. (2007) montrent que lorsque $\tilde{\rho}_1$ est une variable aléatoire à 3 états, il est possible de calibrer l'ensemble des primes de tranches de CDO standardisées à une maturité donnée. Dans leur approche, les paramètres de corrélation $\tilde{\rho}_i$ admettent une représentation à facteur :

$$\tilde{\rho}_i = (1 - B_s)(1 - B_i)\rho + B_s, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.37)$$

où ρ est un réel de $[0, 1]$ et où B_s, B_1, \dots, B_n sont des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli et indépendantes de V, \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$. En conséquence, si l'on désigne par $q_s = P(B_s = 1)$ et par $q = P(B_i = 1)$, $i = 1, \dots, n$, les temps de défaut sont comonotones ($V_i = V$, $i = 1, \dots, n$) avec la probabilité q_s , indépendants ($V_i = \bar{V}_i$, $i = 1, \dots, n$) avec la probabilité $(1 - q_s)q$ et décrits par une copule à un facteur Gaussien de paramètre ρ avec la probabilité $(1 - q_s)(1 - q)$.

Dans cette dernière approche, la probabilité mélange s'exprime ainsi :

$$\tilde{p}_t = (1 - B_s) \left((1 - q) \Phi \left(\frac{-\rho V + \Phi^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) + q F(t) \right) + B_s \mathbf{1}_{\{V \leq \Phi^{-1}(F(t))\}}. \quad (1.38)$$

⁴⁹En effet, si $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n)$ désigne le vecteur des paramètres de corrélation, pour $i \neq j$, $\mathbb{E}^Q[V_i V_j | \tilde{\rho}] = \tilde{\rho}_i \tilde{\rho}_j$. Or, comme $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n$ forment une suite échangeables, on a $\mathbb{E}^Q[V_i V_j] = \mathbb{E}^Q[\tilde{\rho}_i \tilde{\rho}_j] = \mathbb{E}^Q[\tilde{\rho}_1^2]$.

Mean-variance Gaussian mixtures

Dans cette classe de modèle, les variables latentes s'expriment simplement comme des mélanges moyenne-variance de variables gaussiennes :

$$V_i = m(V) + \sigma(V)\bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.39)$$

où V et $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n$ sont des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi Normale centrée réduite. Nous présentons ici deux approches populaires exploitées pour la gestion des tranches de CDO et appartenant à cette classe : le modèle **Random Factor Loading** et le modèle de **corrélation locale** (*local correlation model*).

Le modèle **Random Factor Loading** (RFL) a été introduit par Andersen et Sidenius (2005b). Dans cette approche, les variables latentes sont décrites par la relation suivante :

$$V_i = m + (l\mathbf{1}_{\{V < e\}} + h\mathbf{1}_{\{V \geq e\}})V + \nu\bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.40)$$

où l, h, e sont des paramètres réels tels que $l, h > 0$. m et ν sont choisis de sorte que $E[V_i] = 0$ et $E[V_i^2] = 1$. Dans cette approche, l'exposition au risque $l\mathbf{1}_{\{V < e\}} + h\mathbf{1}_{\{V \geq e\}}$, i.e l'impact du facteur systématique, dépend du niveau du facteur lui-même. Lorsque le facteur V est inférieur à e , l'exposition au risque est égale à l . Dans le cas contraire, l'exposition au risque est égale à h . Cela va dans le sens de plusieurs études empiriques comme celle de Das et al. (2006) qui montrent que la corrélation entre les défauts est fortement dépendante de l'état de certaines variables macroéconomiques. On peut remarquer que les temps de défaut sont échangeables et que la probabilité mélange s'écrit :

$$\tilde{p}_t = \Phi\left(\frac{1}{\nu}\left(H^{-1}(F(t)) - m - (l\mathbf{1}_{\{V < e\}} + h\mathbf{1}_{\{V \geq e\}})V\right)\right), \quad (1.41)$$

où H est la loi marginale des variables latentes $V_i, i = 1, \dots, n$. Contrairement à l'approche précédente (corrélation stochastique), les variables latentes ne sont plus de loi marginale gaussienne et leur loi H dépend en général des paramètres du modèle, ce qui peut poser un problème du point de vue de la calibration.

Nous comparons en figure 1.10 la loi de la probabilité mélange associée à un modèle de corrélation stochastique à 3 états et la loi de la probabilité mélange associée à un modèle RFL. Rappelons que la probabilité mélange correspond à la perte agrégée pour un portefeuille de grande dimension. Même si les deux courbes sont globalement similaires, on peut observer que le poids attribué aux très petites pertes est plus important dans le cas du modèle à corrélation stochastique. A cause de l'état de dépendance comonotone, il y a une masse de Dirac en 0 d'intensité égale à $q_s(1 - F(t))$, i.e 13.6%. D'après Burtschell et al. (2007), même si la calibration permet d'obtenir des prix de tranche *equity* [0, 3%] similaires dans les deux approches, il est fort probable que les prix de tranches *bespokes* [0, 1%] soient très différents.

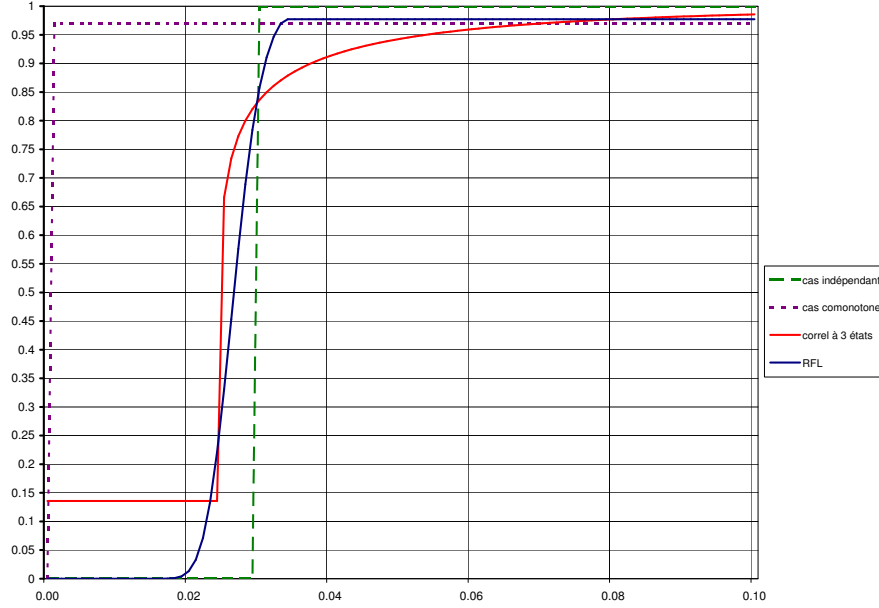


FIG. 1.10 – Ce graphique représente les fonctions de répartition de la probabilité mélange associée au modèle à corrélation stochastique à 3 états de Burtschell et al. (2007) (\tilde{p}_t décrit par la relation 1.38) et au modèle RFL de Andersen et Sidenius (2005b) (\tilde{p}_t décrit par la relation 1.41). La probabilité marginale de défaut $F(t)$ est égale à 2.96% dans les deux approches. Pour le modèle à corrélation stochastique, les paramètres sont respectivement $q_s = 0.14$, $q = 0.81$, $\rho^2 = 58\%$. Pour le modèle RFL, les paramètres sont respectivement $l = 85\%$, $h = 5\%$ et $e = -2$. Le graph montre également la fonction de répartition de la probabilité mélange dans le cas indépendant et dans le cas comonotone lorsque $F(t) = 2.96\%$.

Comme pour le modèle de corrélation stochastique à 3 états, il est possible de calibrer les paramètres l , h et e sur l'ensemble des prix de tranches de CDO standardisées à une maturité donnée.

Le modèle de **corrélation locale** introduit par Turc et al. (2005) est associé à la représentation suivante des variables latentes :

$$V_i = -\rho(V)V + \sqrt{1 - \rho^2(V)}\bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.42)$$

où V , V_i , $i = 1, \dots, n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi Normale centrée réduite et où $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de V . $\rho(\cdot)$ est aussi appelé fonction de corrélation locale. Dans cette approche, la probabilité mélange s'écrit :

$$\tilde{p}_t = \Phi \left(\frac{\rho(V)V + H^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - \rho^2(V)}} \right), \quad (1.43)$$

où H est la loi marginale des variables latentes V_i , $i = 1, \dots, n$.

Sur le marché *equity*, le modèle de volatilité locale de Dupire (1994) permet de relier la fonction de volatilité locale aux prix d'options. D'une façon analogue, la fonction de corrélation locale $\rho(\cdot)$ peut être calibrée par une procédure non paramétrique sur les primes de tranches de CDO. Contrairement aux courbes de corrélations implicites telles que la *base correlation* ou la *compound*

correlation, la fonction de corrélation locale a l'avantage d'être associée à une unique modélisation des temps de défaut, ce qui permet de court-circuiter en particulier les problèmes d'inconsistance des prix de *bespokes* obtenus par des procédures de *mapping* arbitraires. De plus, Turc et al. (2005) ou Burtschell et al. (2007) mettent en évidence une relation simple entre la fonction de corrélation locale $\rho(\cdot)$ et la *marginal compound correlation*, i.e la courbe des corrélations implicites associées à des tranches de CDO très fines $[a, a + 1\%]$, $0 < a < 1$ ou tranchets, permettant ainsi de rapprocher ce modèle des pratiques de marché. Cependant, pour une loi de perte arbitraire ou induite des prix de marché, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction de corrélation locale correspondante et dans le cas où il en existe une, l'unicité de cette dernière n'est pas garantie.

Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes ont largement été exploitées dans le cadre de la modélisation des portefeuilles de crédit car elles représentent une solution alternative directe à la copule gaussienne. De plus, il existe des méthodes efficaces pour générer des vecteurs aléatoires possédant cette structure de dépendance. On peut noter également que les copules archimédiennes sont échangeables par nature et admettent une représentation à facteur. Avec leur fameux algorithme de simulation, Marshall et Olkin (1988) ont les premiers mis en évidence la représentation à facteur des copules archimédiennes. Plus précisément, une copule archimédienne peut être associée à un facteur aléatoire positif V de transformée de Laplace $\varphi^{-1}(\cdot)$ (et de transformée de Laplace inverse $\varphi(\cdot)$). Dans cet approche, les variables latentes sont alors décrites par la relation suivante (algorithme de Marshall et Olkin) :

$$V_i = \varphi^{-1} \left(\frac{-\ln \bar{V}_i}{V} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.44)$$

où \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Par définition de la transformée de Laplace, on a $\varphi^{-1}(u) = E[\exp(-uV)]$, pour tout $u \geq 0$. La fonction génératrice $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ est donc continue et strictement décroissante. Pour tout (u_1, \dots, u_n) dans $[0, 1]^n$, on peut facilement vérifier la relation suivante :

$$\mathbb{Q}(V_1 \leq u_1, \dots, V_n \leq u_n) = C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)), \quad (1.45)$$

qui correspond à la définition de la copule archimédienne de générateur φ . On en déduit en particulier que les variables latentes sont de loi marginale uniforme. On peut remarquer que les conditions sur φ sont très strictes (φ correspond à la transformée de Laplace inverse d'une loi positive) mais permettent de construire des fonctions copules C pour toute dimension n . En fait, pour une dimension particulière n , il est possible de construire des fonctions copules à partir de fonctions génératrices φ_n avec des contraintes allégées. (Voir Nelsen (1999) pour plus de détails).

Les coefficients de dépendance de queue inférieur λ_L et supérieur λ_U s'expriment simplement pour une copule archimédienne en fonction du générateur φ . A partir de la définition de l'annexe A.2, il est direct de montrer que :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{-1}(2\varphi(u))}{u} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi^{-1}(2x)}{\varphi^{-1}(x)} \quad (1.46)$$

et que :

$$\lambda_U = 2 - \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - \varphi^{-1}(2\varphi(u))}{1 - u} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{-1}(2x)}{1 - \varphi^{-1}(x)}. \quad (1.47)$$

Juri et Wüthrich (2002) et Charpentier et Segers (2007) ont montré que le coefficient de dépendance de queue inférieur est lié à la régularité de la fonction génératrice à l'origine (en 0). Plus formellement, si l'on définit l'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ de variation régulière en 0 de la fonction génératrice φ par :

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(xu)}{\varphi(u)} = x^\alpha, \quad 0 < x < +\infty, \quad (1.48)$$

le coefficient de dépendance de queue inférieur est égal à $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{\alpha}}$. De plus le τ de Kendall ρ_K défini dans l'Annexe A.3 est égal à :

$$\rho_K = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du, \quad (1.49)$$

où φ' désigne la dérivée de φ par rapport à u .

Remarquons que les temps de défaut sont définis par $\tau_i = F^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, n$ et que la probabilité mélange peut s'écrire :

$$\tilde{p}_t = \exp(-\varphi(F(t))V). \quad (1.50)$$

Il est intéressant de noter que cette approche correspond aux modèles *frailty* en théorie de la fiabilité (*reliability theory*)⁵⁰. Dans ces modèles, le facteur V est appelé une *frailty* (fragilité) car des valeurs faibles de V sont associées à des durées de survie plus courtes.

La copule de Clayton est sans doute la copule archimédienne la plus utilisée. Dans le contexte du risque de crédit, elle a été étudiée en particulier par Schönbucher et Schubert (2001), Gregory et Laurent (2003), Laurent et Gregory (2005), Madan et al. (2004), Friend et Rogge (2005). D'autres copules archimédiennes comme la copule de Gumbel ou celle de Frank ont été examinées par Rogge et Schönbucher (2003) ou Schloegl et O'Kane (2005). Le tableau 1.3 regroupe les principales caractéristiques des copules Clayton, Gumbel et Frank.

Copule	Générateur $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$	Paramètre	λ_L	λ_U	ρ_K
Clayton	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\theta \geq 0$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbel	$(-\ln(t))^\theta$	$\theta \geq 1$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$	$1 - \frac{1}{\theta}$
Frank	$-\ln \left[\frac{1 - e^{-\theta t}}{1 - e^{-\theta}} \right]$	\mathbb{R}^*	0	0	non analytique

TAB. 1.3 – Quelques exemples de copules archimédiennes avec générateur, coefficients de dépendance de queue (inférieur λ_L et supérieur λ_U) et Tau de Kendall ρ_K .

La copule de Clayton admet de la dépendance de queue inférieure et aucune dépendance de queue supérieure. De plus, le cas $\theta = 0$ est associé à la copule produit ou à l'indépendance et le cas $\theta = +\infty$ est associé à la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding ou à la comonotonie. La copule de Gumbel admet de la dépendance de queue supérieure mais aucune dépendance de queue inférieure. $\theta = 1$ est associé à l'indépendance et $\theta = +\infty$ est associé au cas comotonone. La copule de Frank n'admet aucune dépendance de queue.

Les copules archimédiennes permettent de générer une grande variété de structures de dépendance. En particulier, dans le cas de portefeuille homogène où les indicatrices de défaut

⁵⁰Le lecteur est invité à consulter le livre de Hougaard (2000) pour une description détaillée des modèles *frailty*.

$\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_n)$ sont échangeables et admettent une représentation à facteur, on peut toujours trouver une fonction génératrice φ et donc une copule archimédienne associée à \mathbf{D} (voir théorème 3.1 de Müller et Scarsini (2005)).

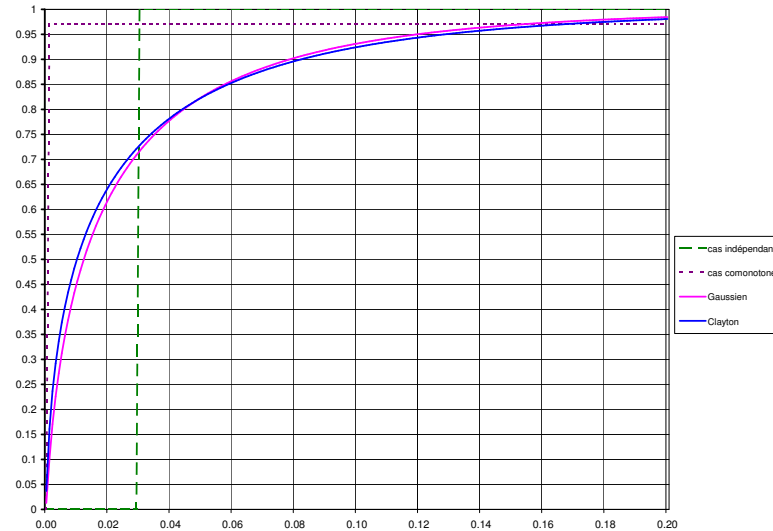


FIG. 1.11 – Ce graphique compare les fonctions de répartition de la probabilité mélange associée à la copule de Clayton et à la copule gaussienne. $F(t) = 2.96\%$, $\rho^2 = 30\%$ et $\theta = 0.18$. Le graphique montre également la fonction de répartition de la probabilité mélange dans le cas indépendant et dans le cas comotone lorsque $F(t) = 2.96\%$.

La Figure 1.11 compare les fonctions de répartition de la probabilité mélange associées à la copule de Clayton et à la copule gaussienne. Le paramètre de dépendance θ de la copule de Clayton a été choisi de sorte que la prime de la tranche equity $[0, 3\%]$ soit la même que pour le modèle copule gaussienne de corrélation $\rho^2 = 30\%$. On peut observer que les fonctions de répartition sont très similaires. En conséquence, les primes calculées pour les tranches *mezzanine* et *senior* sont très proches dans les deux approches⁵¹.

⁵¹Voir Burtschell et al. (2008), table 8 pour plus de détails sur la correspondance des paramètres de dépendance et les hypothèses sur les taux d'intérêt et les spreads individuels.

1.2.2 Modèles structurels multivariés

Les modèles structurels multivariés sont des extensions multidimensionnelles du modèle de la firme de Black-Cox ou *first passage time model* où le défaut d'une entreprise survient lorsque la valeur de ses actifs devient inférieure à une certaine barrière (correspondant au niveau de la dette dans l'approche de Merton). On considère n entreprises dont la dynamique des actifs V_1, \dots, V_n est décrite par n mouvements Brownien corrélés :

$$V_{i,t} = \rho V_t + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.51)$$

où $V, V_i, i = 1, \dots, n$ sont des processus de Wiener indépendants. Une entreprise est en défaut au moment où la dynamique de ses actifs franchit une barrière constante a que l'on suppose être commune à toutes les références. Plus formellement, les temps de défaut sont définis par :

$$\tau_i = \inf \{ t \geq 0 \mid V_{i,t} \leq a \}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.52)$$

Clairement les temps de défaut sont indépendants connaissant l'historique du processus (V_t) . De plus, les indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ sont échangeables à toute date t . Il existe donc grâce au théorème de De Finetti une probabilité mélange \tilde{p}_t telle que $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ soient indépendantes conditionnellement à \tilde{p}_t . Nous sommes donc bien dans un cadre factoriel bien que désormais le facteur dépende du temps contrairement aux approches basées sur des fonctions copules et vues précédemment. Malheureusement, la probabilité mélange,

$$\tilde{p}_t = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq t \mid \sigma(V_s, s \leq t)), \quad (1.53)$$

ne peut être exprimée analytiquement dans cette approche. Nous savons cependant que \tilde{p}_t correspond à la perte d'un portefeuille infiniment granulaire dont la loi peut être approchée par des simulations de Monte Carlo. La figure 1.12 représente la fonction de répartition empirique pour une corrélation égale à $\rho^2 = 30\%$ et $\rho^2 = 60\%$ et pour la même probabilité marginale de défaut égale à $F(t) = 3.94\%$.

Le modèle structurel multivarié gaussien a d'abord été proposé dans le chapitre 5 du livre d'Arvanitis et Gregory (2001) pour l'évaluation des dérivés de crédit sur panier. Plus récemment Hull et al. (2005) ont développé et analysé la version factorielle du modèle que nous venons de présenter. Ils montrent en particulier que les primes de tranche de CDO obtenues dans ce modèle dynamique peuvent être approchées raisonnablement par les primes obtenues dans la forme statique du modèle, i.e la copule gaussienne à un facteur. Ce résultat n'est pas surprenant au vu de la figure 1.12 où l'on observe que les fonctions de répartition de la probabilité mélange pour le modèle dynamique et pour le modèle statique sont presque confondues.

Remarquons de plus que la mise en œuvre du modèle *first passage time* peut être contraignante puisque la détermination des primes repose exclusivement sur des simulations de Monte Carlo qui peuvent se révéler très coûteuse numériquement. Dans un modèle multivarié à facteur, Kiesel et Scherer (2007) proposent de décrire la dynamique des actifs par un processus de diffusion à saut. Ils montrent que l'on peut estimer efficacement les spreads de tranche de CDO par des simulations de Monte Carlo. Même s'il propose une méthode de calibration des paramètres du modèle qui semble astucieuse, cela reste une étape ambitieuse et difficilement réalisable en pratique.

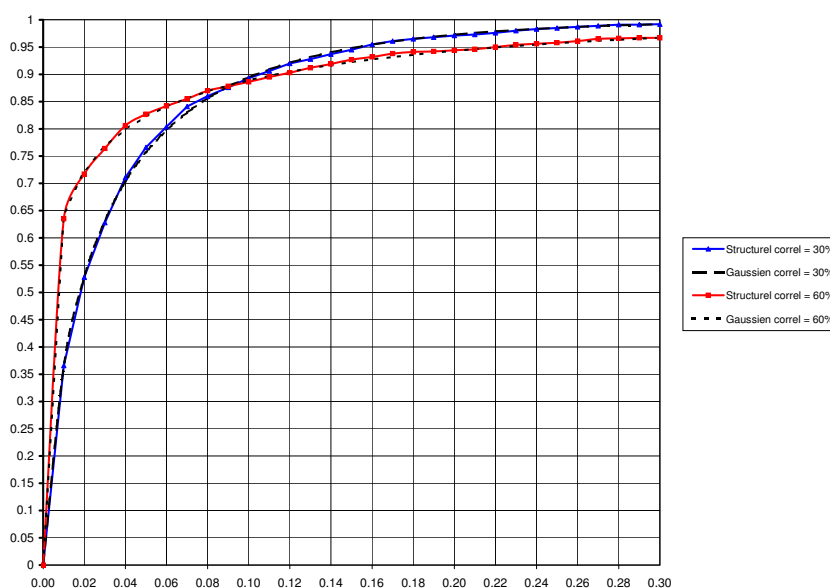


FIG. 1.12 – Estimation de la fonction de répartition de la probabilité mélange dans le cas d’un modèle structurel multivarié pour les coefficients de corrélation $\rho^2 = 30\%$ et $\rho^2 = 60\%$. Le niveau de la barrière est fixé à $a = -2$ et correspond dans les deux cas à une probabilité marginale de défaut à 1 an égale à $F(t) = 3.94\%$. En pointillé, la fonction de répartition de la probabilité mélange pour la copule gaussienne à un facteur dans le cas où $\rho^2 = 30\%$ et dans le cas où $\rho^2 = 60\%$. $F(t) = 3.94\%$ dans les deux cas.

D’autres contributions proposent de se placer dans le cadre classique de Merton pour lequel une firme est en défaut à une date t lorsque la valeur de ses actifs est inférieure au niveau de la barrière à cette date, quelque soit l’historique des actifs avant t . En particulier, il se peut qu’avant t la barrière ait été franchie. Cela n’impacte pas le défaut de la firme à cette date. Dans cette approche, les indicatrices de défaut en t sont indépendantes conditionnellement à la valeur en t de la partie systématique des actifs (V_t) et des méthodes semi-analytiques telles que décrites en 1.1.2 peuvent être employées pour évaluer des tranches de CDO. De plus, il est bien connu (plusieurs études empiriques le montrent) que l’approche de Merton est une bonne approximation de celle plus générale de Black-Cox ou *first passage time model* en ce qui concerne l’évaluation des tranches de CDO. Dans cette dernière approche, Luciano et Schoutens (2006) considèrent un modèle structurel multivarié où la dynamique des actifs est décrite par un processus Variance Gamma. Ils montrent que le modèle peut être calibré sans trop de difficultés sur les prix de marché. Baxter (2007) propose de décrire la dynamique des actifs par des processus de Lévy basés sur la loi Gamma (Gamma processes). Willeman (2007) étend le modèle de Hull et al. (2005) présenté plus haut en rajoutant une composante commune à saut (un processus Poisson composé) dans la dynamique des actifs.

Hurd (2008) étudie également un modèle structurel multivarié dans lequel la dynamique des actifs est représentée par un mouvement Brownien changé de temps. Pour chaque firme i ,

$$V_{i,t} = X_{i,G_{i,t}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.54)$$

où X_1, \dots, X_n sont des mouvements Brownien indépendants et G_1, \dots, G_n sont des processus

presque sûrement croissants (subordinateurs) dont la structure de dépendance est décrite par une représentation à facteur. En particulier, on a :

$$G_{i,t} = \alpha G_t + \beta \bar{G}_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.55)$$

avec $G, \bar{G}_i, i = 1, \dots, n$ des subordinateurs et α, β des réels positifs. Les processus $X_1, \dots, X_n, G, \bar{G}_1, \dots, \bar{G}_n$ sont supposés être mutuellement indépendants. Hurd (2008) propose de décrire les instants de défaut de manière non standard par la définition suivante qu'il appelle *first time passage of the second kind* :

$$\tau_i = \inf \{ t \geq 0 \mid G_{i,t} \geq t_i^* \}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.56)$$

où t_i^* est le premier instant de passage du mouvement Brownien X_i sous une barrière constante égale à a , i.e :

$$t_i^* = \inf \{ t \geq 0 \mid X_{i,t} \leq a \}. \quad (1.57)$$

Autrement dit, le défaut du nom i survient au moment où le "temps modifié" (le subordinateur) $G_{i,t}$ devient supérieur au premier instant de franchissement de la barrière a par le Brownien X_i . Clairement, les temps de défaut sont indépendants conditionnellement à l'historique du subordinateur G . De plus, avec cette définition des temps de défaut, il est possible de calculer la probabilité mélange de façon semi-analytique. En effet, par croissance des subordinateurs, on peut écrire :

$$\tilde{p}_t = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq t \mid \sigma(G_s, s \leq t)) = \mathbb{Q}(t_1^* \leq G_{1,t} \mid G_t) = \mathbb{Q}(t_1^* \leq \alpha G_t + \beta \bar{G}_{1,t} \mid G_t). \quad (1.58)$$

Connaissant la loi de $\bar{G}_{1,t}$ et celle de t_1^* (premier instant de passage d'une diffusion), la probabilité mélange \tilde{p}_t peut être calculée par conditionnement successif⁵². Dans cette approche, la dépendance maximale entre les actifs est atteinte lorsque $\beta = 0$ et ne correspond pas à la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding (comonotonie) puisque les Browniens X_1, \dots, X_n sont indépendants. Sous l'hypothèse de taux de recouvrement déterministes, cela peut poser un problème si l'on s'intéresse à la calibration du modèle sur les tranches *senior* pour lesquelles le marché reflète un fort niveau de corrélation.

1.2.3 Modèles Poisson multivariés

Cette famille de modèles a été introduite par la théorie de la fiabilité (*reliability theory*) où ils sont connus sous le nom des modèles à chocs communs (*common choc models*). Dans un modèle Poisson multivarié, les temps de défaut sont décrits par les premiers instants de saut d'un processus de Poisson multivarié $(N_{1,t}, \dots, N_{n,t})$. Par exemple, lorsque le processus $N_{i,t}$ "saute" pour la première fois, cela déclenche le défaut du nom i . La dépendance entre les défauts provient de l'arrivée possible d'événements catastrophiques ou chocs communs qui conduisent au défaut simultané d'un groupe d'entités. Par simplicité, nous nous restreindrons au cas où deux types de choc peuvent affecter l'économie. Le défaut d'un nom peut être déclenché soit par un choc idiosyncratique fatal (ou choc individuel), soit par un choc systématique non nécessairement fatal. Le processus de Poisson qui gouverne le défaut du nom i s'écrit alors :

$$N_{i,t} = \bar{N}_{i,t} + \sum_{j=1}^{N_t} B_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.59)$$

⁵²Pour plus de détails sur l'expression analytique de la probabilité mélange, voir la section 8 de Hurd (2008)

où N_t est un processus de Poisson de paramètre λ , $\bar{N}_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$ sont des processus de Poisson de paramètre commun $\bar{\lambda}$ et où $B_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j \geq 1$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de moyenne p . On suppose de plus que N_t , $\bar{N}_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$, $B_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j \geq 1$ sont mutuellement indépendants. Finalement, les temps de défaut sont définis par :

$$\tau_i = \inf \{t \geq 0 \mid N_{i,t} > 0\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.60)$$

Ainsi, l'arrivée d'un choc commun (un nouveau saut de N_t) peut affecter chaque nom du portefeuille de manière indépendante et avec la probabilité p . Une spécificité du modèle Poisson multivarié est de permettre l'arrivée de plusieurs défauts en même temps, voir la possibilité d'un risque Armageddon (tous les noms du portefeuille font défaut simultanément), ce qui a pour effet d'alourdir la queue de distribution de la perte agrégée. Par indépendance de toutes les sources d'aléa, les processus $N_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$ sont des processus de Poisson de paramètre $\bar{\lambda} + p\lambda$. En conséquence, les temps de défaut sont donc de loi marginale exponentielle de paramètre $\bar{\lambda} + p\lambda$ et on peut montrer que leur structure de dépendance appartient à la famille des copules de Marshall-Olkin (voir Lindskog et McNeil (2003) ou Elouerkhaoui (2006) pour plus de détails sur ce point).

Remarquons que les temps de défaut sont indépendants conditionnellement au processus N et que les indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ sont indépendantes connaissant N_t . Les temps de défaut et donc les indicatrices de défaut sont échangeables et la probabilité mélange associée peut s'écrire simplement :

$$\tilde{p}_t = 1 - (1 - p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t). \quad (1.61)$$

Comme pour les modèles structurels multivariés, nous sommes dans un modèle à facteur pour lequel le facteur a une dépendance stochastique en temps, i.e c'est un processus stochastique. La figure 1.13 représente la loi de \tilde{p}_t pour un modèle Poisson multivarié. Comme \tilde{p}_t est une variable aléatoire discrète, sa fonction de répartition est une fonction en escalier.

La famille des lois exponentielles multivariées de Marshall-Olkin (Marshall et Olkin (1967)) a été introduite dans le domaine du risque de crédit par Duffie et Singleton (1998) et discutée également par Li (2000) et Wong (2000). Plus récemment, des résultats analytiques sur la loi de la perte agrégée dans un modèle Poisson multivarié ont été développée par Lindskog et McNeil (2003). Ils montrent notamment que le modèle général à chocs non nécessairement fatal est équivalent à un modèle à chocs fatals où les chocs sont indépendants. Plusieurs extensions ont été développées notamment par Giesecke (2003), Elouerkhaoui (2006), Brigo et al. (2007a) et Brigo et al. (2007b).

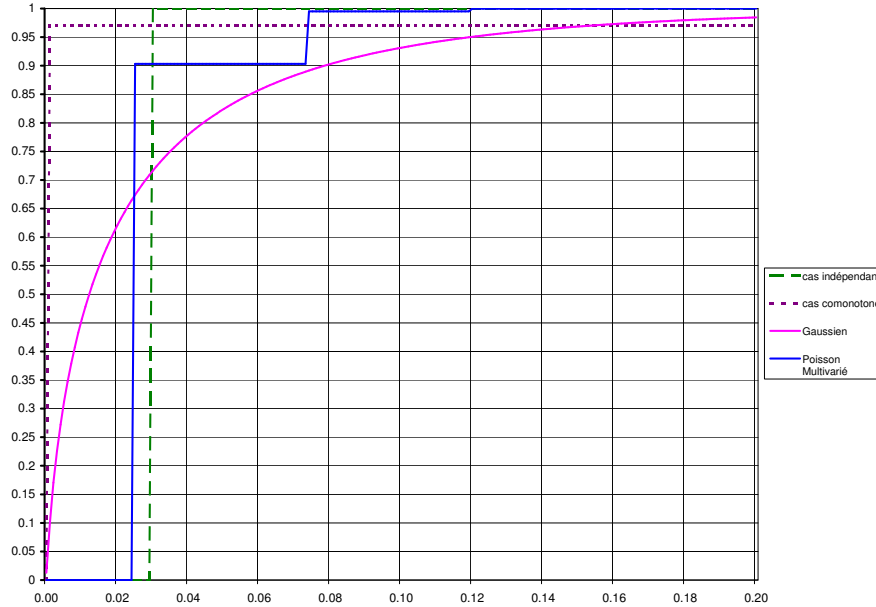


FIG. 1.13 – Ce graphique représente la fonction de répartition de la probabilité mélange associée à un modèle Poisson multivarié de paramètre $\bar{\lambda} = 0.5\%$, $\lambda = 2\%$ et $p = 5\%$. Ces paramètres ont été choisis de sorte que les probabilités de défaut marginale à 5 ans soient égales à $F(t) = 2.96\%$. Nous avons également tracé à titre de comparaison la fonction de répartition de la probabilité mélange associée à la copule gaussienne à un facteur de corrélation $\rho^2 = 30\%$.

1.2.4 Modèles à intensité affine

Dans les modèles à intensité affine, l'instant de défaut d'un nom i correspond au premier instant de saut d'un processus de Cox⁵³ pour lequel l'intensité $\lambda_{i,t}$ est un processus AJD (*Affine Jump Diffusion process*). De plus, le processus $\lambda_{i,t}$ est supposé être indépendant de la filtration complète des temps de défaut. Il n'y a donc pas de phénomène de contagion : le défaut d'un nom n'a pas d'effet sur l'intensité des noms survivants. Connaissant l'historique du processus $\lambda_{i,t}$, la date de défaut τ_i du nom i est donc le premier instant de saut d'un processus de Poisson inhomogène d'intensité $\lambda_{i,t}$. Les temps de défaut peuvent donc être définis par :

$$\tau_i = \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t \lambda_{i,s} ds \geq -\ln(U_i) \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{54}, \quad (1.62)$$

où U_1, \dots, U_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Les fonctions de survie associées aux temps de défaut τ_1, \dots, τ_n s'écrivent alors :

$$\mathbb{Q}(\tau_i \geq t \mid \sigma(\lambda_{i,s}, s \leq t)) = \exp \left(- \int_0^t \lambda_{i,s} ds \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.63)$$

Dans les modèles à intensité affine, la dépendance entre les temps de défaut est déterminée par la dépendance entre les intensités. On suppose que ces dernières sont décrites par une représentation

⁵³Aussi appelé *doubly stochastic Poisson process*.

⁵⁴Remarquons l'analogie de cette dernière définition avec celle de Hurd (2008) dans le cadre d'un modèle structurel multivarié. Voir au paragraphe 1.2.2, l'équation 1.56.

à facteur :

$$\lambda_{i,t} = ax_t + x_{i,t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.64)$$

où a est un paramètre de dépendance positif qui détermine l'importance relative du facteur systématique (par rapport au facteur idiosyncratique). Les processus $x, x_i, i = 1, \dots, n$, sont supposés être des copies indépendantes d'un même processus AJD z_t qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$z_t = \kappa(\theta - z_t)dt + \sigma\sqrt{z_t}dW_t + dJ_t, \quad (1.65)$$

avec W un mouvement Brownien standard et J un processus Poisson Composé, d'intensité λ , dont les sauts sont de loi exponentielle de paramètre μ . De plus, le processus J est supposé être indépendant du processus W . Le choix de la classe des processus AJD n'est pas anodin. En effet, moyennant certaines restrictions sur les paramètres régissant la dynamique d'un processus AJD, on peut montrer que cette classe de processus est stable par convolution (voir la Proposition 1 de Duffie et Gârleanu (2001) pour une preuve formelle). En particulier, les intensités $\lambda_{i,t}, i = 1, \dots, n$, décrites par l'équation 1.64, sont des processus AJD dont les paramètres peuvent être déterminés aisément. En outre, comme la fonction caractéristique de l'intégrale d'un processus AJD est connue analytiquement⁵⁵, le calcul des lois marginales est immédiat en prenant l'espérance de 1.63. Néanmoins, contrairement aux approches basées sur des copules, il n'est pas toujours possible de calibrer les lois marginales sur les cotations de CDS à différentes maturités. En effet, le même paramètre a agit à la fois sur les marginales et sur la structure de dépendance, ce qui rend la procédure de calibration plus complexe.

Remarquons de plus que les temps de défaut sont échangeables dans cette construction. Conditionnellement à $V_t = \int_0^t x_s ds$, les indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ sont indépendantes. La probabilité mélange associée à cette suite de variables de Bernoulli échangeable peut s'exprimer ainsi :

$$\tilde{p}_t = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V_t) = 1 - \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^t x_{i,s} ds \right) \right] \exp(-aV_t). \quad (1.66)$$

Comme pour les deux derniers exemples, modèles structurel et Poisson multivarié, il s'agit d'un modèle à un facteur où le facteur est un processus stochastique.

Les modèles à intensité affine ont été introduits pour l'évaluation de tranches de CDO par Duffie et Gârleanu (2001). Gregory et Laurent (2003) ont montré que ces modèles appartiennent à la classe des modèles à facteur en mettant en évidence l'expression de la probabilité mélange. Mortensen (2006) puis Eckner (2007) ont successivement étendu l'approche, en permettant plus de flexibilité dans le choix des paramètres et en développant des méthodes numériques efficaces pour la calibration et l'évaluation de tranches de CDO. Chapovsky et al. (2007) utilisent une spécification légèrement différente des intensités de défaut qui garantit une calibration parfaite des paramètres du modèle sur les cotations de CDS. Néanmoins, la positivité des intensités apparaît comme une contrainte dans leur approche, ce qui peut être problématique en pratique. Feldhütter (2008) effectue une analyse empirique du modèle à partir des spreads des tranches standardisées sur l'indice CDX⁵⁶ entre Mars 2006 et Septembre 2006 et des spreads des CDS qui composent cet indice. Les paramètres du modèle sont estimés une fois pour toute par une calibration croisée en temps (sur la période d'observation) et en espace (pour les différentes tranches

⁵⁵Pour un processus AJD z_t , il existe des fonctions à valeurs complexes $\alpha(., .)$ et $\beta(., .)$ dépendant des paramètres du processus telles que : $\mathbb{E} \left[\exp \left(iu \int_0^t x_s ds \right) \right] = \exp(\alpha(u, t) + \beta(u, t)x_0)$. Voir le livre de Lando (2004) pour plus de détails.

⁵⁶on-the-run 5-year CDX NA IG Series 6.

et CDO). Il montre en particulier que le modèle prédit raisonnablement l'évolution des spreads pour les tranches risquées, mais qu'il reproduit imparfaitement l'évolution des tranches *senior*.

La loi de la probabilité mélange peut être calculée par différentes méthodes numériques. Nous proposons ici de comparer plusieurs approches. La première est basée sur l'inversion de la fonction caractéristique de V_t par un algorithme FFT et les suivantes reposent sur l'estimation de loi de \tilde{q} à partir de ses premiers moments.

Approche par FFT

Comme la fonction caractéristique du facteur $V_t = \int_0^t x_s ds$ s'exprime analytiquement (voir note de bas de page 55), il est possible de déterminer la loi de V_t en inversant sa fonction caractéristique par un algorithme FFT. La probabilité mélange \tilde{p}_t étant une fonction déterministe de V_t , il est alors immédiat de calculer sa loi, connaissant celle de V_t . La figure 1.16 représente, pour un jeu de paramètres cohérent avec des données de marché, la fonction de répartition à 5 ans de \tilde{p}_t (ligne pleine) obtenue par cette méthode. Le problème de cette approche est que l'inversion de la fonction caractéristique par FFT peut parfois être numériquement instable notamment pour des lois à queue épaisse. (voir la note de bas de page 25 pour plus de détails concernant le problème de l'inversion par FFT). Or c'est potentiellement le cas pour V_t qui est l'intégrale d'une diffusion à saut et peut donc avoir un support très étendu.

Problème des moments de Hausdorff

Remarquons que l'on peut facilement calculer les moments de la probabilité conditionnelle de survie $\tilde{q}_t = 1 - \tilde{p}_t$. En effet, pour un entier positif k , on a :

$$m_k = \mathbb{E} \left[\tilde{q}_t^k \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^t x_{i,s} ds \right) \right]^k \mathbb{E} [\exp(-akV_t)], \quad (1.67)$$

qui est connu de manière analytique. Une méthode alternative consiste alors à estimer la loi de \tilde{q}_t à partir de ses premiers moments. Cela correspond exactement au célèbre problème des moments de Hausdorff. En pratique, si l'on se donne un nombre fini de moments comme contraintes⁵⁷, il est clair que ce problème peut admettre plusieurs solutions (voir une infinité de solutions). C'est pourquoi, il existe dans la littérature plusieurs méthodes d'estimation d'une loi à partir de ses premiers moments.

Jaynes (1986) propose d'exprimer la densité g de \tilde{q}_t comme une combinaison linéaire de **polynômes orthogonaux de Legendre** :

$$g(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \hat{P}_i(q), \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (1.68)$$

où $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_i, \dots$ forment la suite des polynômes de Legendre, orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ ⁵⁸. Ces polynômes vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \hat{P}_{i+1}(q) = \frac{2i+1}{i+1}(2q-1)\hat{P}_i(q) - \frac{i}{i+1}\hat{P}_{i-1}(q), \\ \hat{P}_1(q) = 2q-1, \\ \hat{P}_0(q) = 1, \end{cases} \quad (1.69)$$

⁵⁷En supposant bien sur que ces moments proviennent d'une même loi de probabilité.

⁵⁸Il s'agit en fait des *shifted Legendre polynomials*.

et sont tels que $\langle \hat{P}_i, \hat{P}_j \rangle = \frac{1}{2i+1} \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. En particulier, pour tout entier i , le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre \hat{P}_i est orthogonale aux polynômes q^0, \dots, q^{i-1} . Dans cette approche, les l premiers moments de g , m_0, \dots, m_{l-1} , peuvent donc s'exprimer comme un système linéaire triangulaire en les coefficients a_0, \dots, a_{l-1} :

$$m_k = \int_0^1 q^k g(q) dq = \sum_{i=0}^k a_i \langle q^k, \hat{P}_i(q) \rangle, \quad k = 0, \dots, l-1, \quad (1.70)$$

où les termes $\langle q^k, \hat{P}_i(q) \rangle$, $k = 0, \dots, l-1$, $i = 0, \dots, k$, peuvent être calculés aisément au moyen d'une récurrence basée sur la relation 1.69. De plus, ce système est inversible puisque les termes "diagonaux", $\langle q^k, \hat{P}_k(q) \rangle$, $k = 0, \dots, l-1$ sont non nuls et on peut déterminer simplement les coefficients a_0, \dots, a_{l-1} . La densité g est alors approchée par la fonction :

$$\hat{g} = \sum_{i=0}^{l-1} a_i \hat{P}_i(q), \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (1.71)$$

qui reproduit parfaitement les l premiers moments de g . En effet, par construction, on a bien :

$$m_k = \int_0^1 q^k \hat{g}(q) dq, \quad k = 0, \dots, l-1. \quad (1.72)$$

Il s'agit donc d'une solution exacte. Le problème est que la fonction de densité \hat{g} obtenue par cette méthode n'est pas forcément une vraie densité de probabilité au sens où des masses négatives ne sont pas exclues (voir figure 1.14). La fonction \hat{g} peut être considérée comme une densité ou une mesure signée. De plus, lorsque le nombre de contraintes augmente (le nombre de moments), la densité estimée devient très irrégulière (nombre très important de modes) et n'est donc plus exploitable.

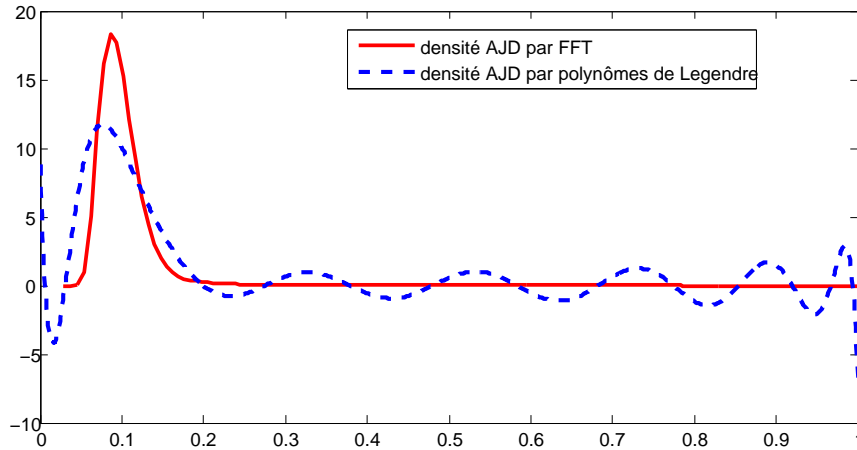


FIG. 1.14 – Ce graphique représente en ligne pleine la densité à 5 ans de \tilde{p}_t pour un modèle à intensité affine par l'approche FFT. En pointillé, la densité estimée à partir des 15 premiers moments de \tilde{q}_t par une combinaison linéaire de polynômes de Legendre. La valeur initiale des processus AJD est fixée à $z_0 = 0.01$ et les autres paramètres sont tels que $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.02$, $\sigma = 0.05$, $\lambda = 0.02$, $\mu = 0.03$. La probabilité marginale de défaut à 5 ans est égale à 10%.

Athanassoulis et Gavriiliadis (2002) proposent d'estimer la densité de \tilde{q}_t au moyen d'un **mélange de noyaux de densité Beta**. Pour simplifier, un noyau de densité Beta $K(q, q_0, h)$ de centre $q_0 \in [0, 1]$ et de fenêtre $h > 0$ est une densité de probabilité basée sur la loi Beta. En effet, si l'on note $f_B(q, a, b)$ la densité de la loi Beta de paramètre $a > 0$ et $b > 0$, on a :

$$f_B(q, a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} q^{a-1} (1-q)^{b-1}, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (1.73)$$

en notant Γ la fonction Gamma. $K(q, q_0, h)$ correspond à une densité de loi Beta $f_B(q, a, b)$ de mode égale à q_0 et d'écart-type égale à h . Les paramètres a et b de la loi Beta décrite par (1.73) doivent donc vérifier les relations suivantes :

$$\begin{cases} f'_B(q_0, a, b) = 0, \\ h = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}, \end{cases} \quad (1.74)$$

où X est une variable aléatoire de densité $f_B(q, a, b)$ ⁵⁹. L'idée est d'approcher la densité de \tilde{q}_t par une densité \hat{g} qui est un mélange de N noyaux beta de centres q_1, \dots, q_N et de fenêtres égales à h :

$$\hat{g}(q) = \sum_{i=1}^N \pi_i K(q, q_i, h), \quad (1.75)$$

où π_1, \dots, π_N sont les masses de probabilité attribuées à chaque noyau telles que $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$. Remarquons que dans ce cas \hat{g} est une densité de probabilité. Ainsi, le problème revient donc à trouver un vecteur de probabilité (π_1, \dots, π_N) tel que :

$$m_k = \sum_{i=1}^N \pi_i B_{k,i}, \quad k = 0, \dots, l-1, \quad (1.76)$$

où $B_{k,i}$ correspond au $k^{\text{ème}}$ moment du noyau i :

$$B_{k,i} = \int_0^1 q^k K(q, q_i, h) dq, \quad (1.77)$$

et peut être calculé facilement par une intégration numérique (quadrature de Gauss-Legendre). Lorsque le système 1.76 est sous-dimensionné (plus de contraintes que de paramètres à déterminer), il peut être résolu par un algorithme des moindres carrés. Athanassoulis et Gavriiliadis (2002) analysent des choix de paramètres optimaux en fonction du nombre de contraintes (nombre de moments) et de l'écart-type de la loi à estimer. Cette méthode produit des densités de probabilité régulières pour \tilde{q}_t mais l'erreur d'estimation est fortement dépendante des centres et de la fenêtre choisie pour les noyaux, ce qui n'est pas souhaitable dans le cadre d'une mise en œuvre automatique de l'approche. La figure 1.15 représente la densité estimée par la méthode des noyaux à partir des 100 premiers moments de \tilde{q}_t ⁶⁰.

⁵⁹Voir l'annexe A de Athanassoulis et Gavriiliadis (2002) pour une solution explicite de ce système.

⁶⁰99 noyaux Beta dont les centres sont repartis uniformément sur $[0, 1]$ et la fenêtre h a été choisie comme dans l'article d' Athanassoulis et Gavriiliadis (2002) égale à $h = 0.5\sqrt{m_2 - m_1^2} + 0.01$.

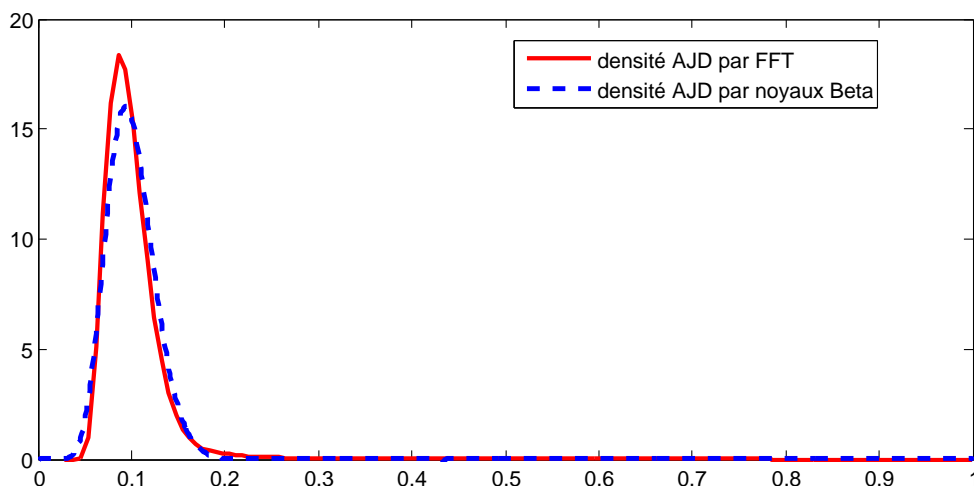


FIG. 1.15 – Ce graphique représente en ligne pleine la densité à 5 ans de \tilde{p}_t pour un modèle à intensité affine par l’approche FFT. En pointillé, la densité estimée à partir des 100 premiers moments de \tilde{q}_t par un mélange de noyau Beta. La valeur initiale des processus AJD est fixée à $z_0 = 0.01$ et les autres paramètres sont tels que $\kappa = 0.25$, $\theta = 0.02$, $\sigma = 0.05$, $\lambda = 0.02$, $\mu = 0.03$. La probabilité marginale de défaut à 5 ans est égale à 10%.

Enfin, une idée naturelle serait d’estimer la loi de \tilde{q}_t par une **loi discrète** sur $[0, 1]$. On suppose par exemple que la loi de \tilde{q}_t peut être représentée sur le support $\{0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}\}$, avec N entier, et est telle que :

$$\mathbb{Q}\left(\tilde{q}_t = \frac{j}{N}\right) = \pi_j, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (1.78)$$

Dans ce contexte, le problème des moments peut être résolu en trouvant π_0, \dots, π_{N-1} tels que :

$$m_k = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{j}{N}\right)^k \pi_j, \quad k = 0; \dots, l-1. \quad (1.79)$$

Cette approche a été étudiée par Wood (1999) et développée par Vacca (2008) dans le contexte de la modélisation des portefeuilles de crédit. Le système 1.79 peut être résolu par un algorithme de minimisation des moindres carrés. La figure 1.16 représente en pointillé l’estimation de la fonction de répartition de \tilde{p}_t par cette méthode à partir des 100 premiers moments de \tilde{q}_t . L’erreur d’approximation des moindres carrés est inférieure à 10^{-10} . Contrairement à l’approche FFT, cette dernière méthode semble être stable et efficace en pratique mais les temps de calcul sont comparables dans les deux cas.

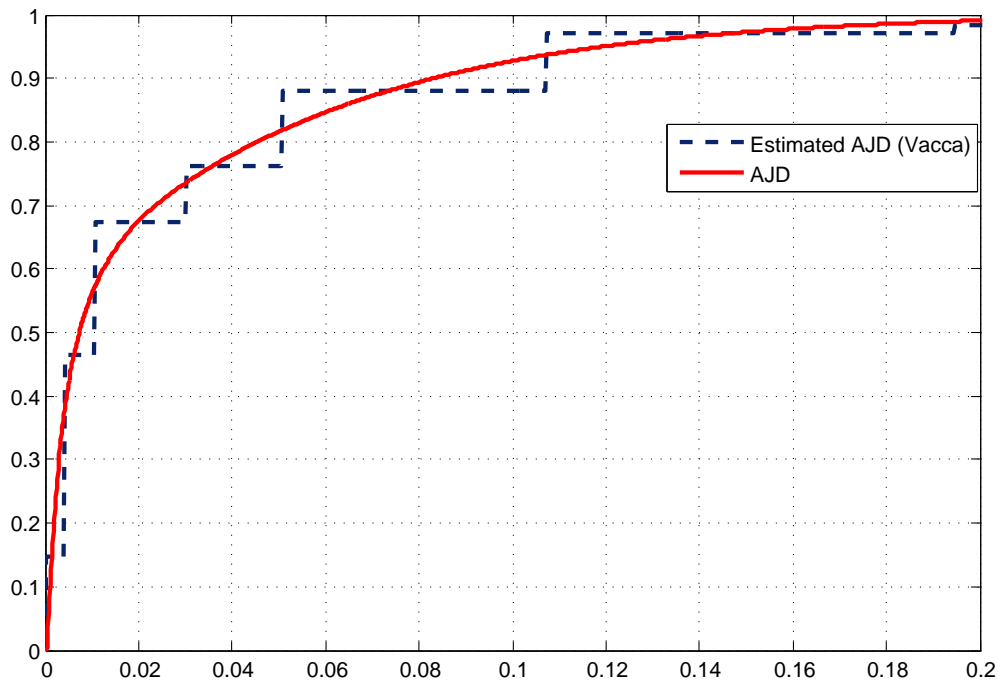


FIG. 1.16 – Ce graphique représente en ligne pleine la fonction de répartition à 5 ans de \tilde{p}_t pour un modèle à intensité affine. En pointillé, la fonction de répartition estimée à partir des 100 premiers moments de \tilde{q}_t à partir de la méthode d'approximation proposée par Vacca (2008). Les paramètres des processus AJD sont tirés d'une calibration d'Eckner (2007) (première ligne du tableau 4) effectuée sur les spreads de marché des tranches de l'indice CDX au 5 Décembre 2005. La probabilité marginale de défaut à 5 ans est fixée à 3%.

Chapitre 2

Analyse comparative de la dépendance

Ce Chapitre a pour but d'analyser l'effet de la dépendance sur le niveau des primes de tranches de CDO ou sur certaines mesures de risque sur la perte agrégée. Nous nous plaçons dans le cadre des modèles individuels de risque ou approches *bottom-up* qui englobent en particulier la classe des modèles à facteur.

Les modèles individuels conçoivent le risque d'un portefeuille comme la résultante ou la somme des risques attribués à chaque entité constituant le portefeuille. Considérons un portefeuille constitué de n entités de crédit qui peuvent faire défaut à des dates (τ_1, \dots, τ_n) et notons $D_{i,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$, $i = 1, \dots, n$, les indicatrices de défaut correspondantes à la date t , $D_{i,t}$ indiquant si le défaut du nom i est survenu ou non avant t . En cas de défaut, nous supposons que le nom i entraîne une perte égale à M_i , $i = 1, \dots, n$ indépendante des instants d'arrivée des défauts. Ainsi, la perte totale du portefeuille en t est égale à :

$$L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t}. \quad (2.1)$$

Nous avons vu au chapitre 1 que ce processus gouverne l'évolution des *cash-flows* des tranches de CDO. On suppose que la structure de dépendance des temps de défaut est régie par un paramètre de corrélation θ . Nous montrerons dans ce chapitre l'impact du paramètre θ sur le niveau de risque de la perte agrégée, au sens par exemple d'une augmentation des prix de call ou de certaines mesures de risque. De manière plus formelle, pour deux vecteurs $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ et $(D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*)$, nous analyserons les conditions sur θ pour lesquelles :

$$\mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+] \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

ou de manière similaire :

$$\rho(L_t) \leq \rho(L_t^*) \text{ pour certaines mesures de risque } \rho. \quad (2.3)$$

Notre étude s'appuie sur des résultats issus de la théorie des ordres stochastiques. Cette dernière a connu un large développement récemment notamment dans le champ d'application des sciences actuarielles et en particulier pour les modèles individuels de risque. L'ordre supermodulaire a reçu une attention particulière puisqu'il conduit à des résultats de comparaisons intéressants au niveau de la perte agrégée. Bäuerle et Müller (1998) et Müller (1997) explorent l'application des ordres stochastiques multivariés pour l'analyse du risque de la perte agrégée pour plusieurs modèles de dépendance. Bäuerle et Müller (2005) établissent la compatibilité de

certains ordres stochastiques univariés avec les mesures convexes de risque. Burgert et Rüschendorf (2006) généralisent ce dernier article dans le cas multivarié. L'ordre supermodulaire et ses applications sont traités spécifiquement par Bäuerle (1997) et Müller et Scarsini (2000).

Plusieurs articles comme ceux de Dhaene et Goovaerts (1997) et Cossette et al. (2002) s'intéressent à la modélisation et à l'analyse de la dépendance dans les modèles individuels de risque. Dans le contexte de la modélisation du risque de crédit, un certain nombre de résultats de comparaisons est établi par Burtschell et al. (2007), Burtschell et al. (2008), Denuit et Frostig (2007), et Cousin et Laurent (2008a).

Ce chapitre est divisé en quatre sections. Nous rappellerons dans la section 2.1 les définitions des ordres stochastiques que nous serons amenés à utiliser dans la suite ainsi que certaines propriétés classiques associées. Nous insisterons en particulier sur les applications à la comparaison des risques dans les modèles individuels. Dans la section 2.2, nous analyserons l'impact du niveau de dépendance sur les primes de tranche de CDO dans plusieurs états théoriques de la structure de dépendance. Nous examinerons notamment le cas de la comonotonie, celui de l'indépendance mais également l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire. La section 2.3 est consacrée au cas d'un portefeuille échangeable. Rappelons que d'après le Théorème de De Finetti, une suite de variables aléatoires de Bernoulli échangeables peut être associée à un facteur mélange ou une "probabilité mélange". Nous caractériserons dans cette section l'ordre supermodulaire pour les vecteurs de Bernoulli échangeables à l'aide d'un critère de comparaison sur les probabilités mélanges. Enfin, dans la section 2.4, nous verrons que les résultats développés dans les sections précédentes peuvent être appliqués aisément à l'analyse de la dépendance dans les modèles à facteur. Nous reprendrons la plupart des approches présentées au Chapitre 1 en montrant dans chaque cas l'effet des paramètres de corrélation sur le niveau des primes de tranches de CDO et sur les mesures de risque convexes sur la perte agrégée.

2.1 Quelques rappels sur la théorie des ordres stochastiques

Cette section a pour but d'introduire les outils théoriques que nous serons amenés à utiliser pour analyser l'effet de la dépendance sur le risque d'un portefeuille de crédit. Nous verrons la définition et les propriétés de certains ordres stochastiques en dimensions 1 et en dimension $n \geq 2$. Nous examinerons en particulier comment des relations de comparaison sur la perte agrégée peuvent être déduites de relations de comparaison sur le vecteur des temps de défaut. La théorie des ordres stochastiques et ses applications à la gestion du risque ont fait l'objet de plusieurs livres, comme ceux de Denuit et al. (2005), Müller et Stoyan (2002) ou Shaked et Shanthikumar (1994) auxquels nous invitons le lecteur à se reporter pour plus de détails. Les variables aléatoires rencontrées dans cette partie sont supposées être définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$.

2.1.1 Ordres stochastiques univariés

Les ordres stochastiques univariés permettent de comparer des variables aléatoires à valeurs réelles suivant certains critères plus ou moins restrictifs. Nous examinerons en particulier l'ordre de la dominance stochastique et l'ordre convexe.

L'ordre stochastique le plus naturel et le plus populaire est sans doute celui de la dominance stochastique à l'ordre 1 ou dominance stochastique qui repose sur une comparaison ponctuelle

des fonctions de répartition.

Definition 2.1 (Dominance stochastique) Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F_X et F_Y . On dit que Y domine X stochastiquement (que l'on note $X \leq_{st} Y$) si et seulement si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ pour tout t .

En d'autres termes, lorsque Y domine X stochastiquement, X prend des valeurs plus faibles avec une probabilité plus élevée que Y . Plusieurs propriétés intéressantes découlent de cette dernière définition et sont regroupés dans la proposition suivante :

Proposition 2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F_X et F_Y . L'ordre de la dominance stochastique a les propriétés suivantes :

1. $X \leq_{st} Y$ si et seulement si il existe une variable aléatoire Z positive telle que $Y \stackrel{d}{=} X + Z$;
2. Si $X \leq_{st} Y$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$;
3. Si $X \leq_{st} Y$ et $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, alors X et Y ont même loi, i.e $F_X = F_Y$.

Preuve : Pour montrer le sens (\Rightarrow) de la propriété 1, il suffit de choisir Z tel que $Z = F_Y^{-1}(F_X(X)) - X$, où F_Y^{-1} désigne l'inverse généralisée de la fonction de répartition de Y . Le sens (\Leftarrow) est immédiat. La propriété 2 est une conséquence directe de la propriété 1. Pour prouver la propriété 3, il suffit de remarquer que $\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_X(t) - F_Y(t))dt$ qui est l'intégrale d'une fonction positive sur \mathbb{R} . Nécessairement, cet intégrale est nulle si $F_X(t) = F_Y(t)$ pour tout t . \square

L'ordre de la dominance stochastique compare la "taille" de variables aléatoires au sens où $X \leq_{st} Y$ entraîne $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Nous aurons également besoin de comparer la variabilité ou la dispersion de variables aléatoires. En fait, il est possible de comparer le niveau de dispersion de variables aléatoires en utilisant des ordres stochastiques basés sur des fonctions convexes. Ce lien entre convexité et variabilité est bien connu en économie du risque. En effet, selon la théorie de l'utilité espérée, un agent averse au risque (de fonction d'utilité croissante concave) qui a le choix entre deux risques de même espérance préférera toujours le risque qui supporte le moins de variabilité.

Nous présentons maintenant plusieurs ordres stochastiques basés sur la fonction convexe. Rappelons qu'une fonction f est convexe si :

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad (2.4)$$

pour tout x et y et tout $0 < \alpha < 1$.

Definition 2.2 Soient X et Y deux variables aléatoires de fonction de répartition F_X et F_Y . On dit que :

1. X est plus petit que Y au sens de l'**ordre convexe** (que l'on note $X \leq_{cx} Y$) si et seulement si $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction f convexe pour laquelle les espérances existent ;
2. X est plus petit que Y au sens de l'**ordre convexe croissant** (que l'on note $X \leq_{icx} Y$) si et seulement si $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction f convexe et croissante pour laquelle les espérances existent ;
3. X est plus petit que Y au sens de l'**ordre stop-loss** (que l'on note $X \leq_{sl} Y$) si et seulement si $\mathbb{E}[(X - t)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - t)^+]$ pour tout réel t tel que les espérances existent ;

4. X est plus petit que Y au sens de l'ordre **less dangerous** (que l'on note $X \leq_D Y$) si et seulement s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F_X(t) \leq F_Y(t)$ pour tout $t < t_0$, $F_X(t) \geq F_Y(t)$ pour tout $t \geq t_0$ et si $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Remarquons que lorsque deux variables aléatoires X et Y sont comparables suivant l'ordre convexe, $X \leq_{cx} Y$, alors elles ont nécessairement même espérance, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$. En effet, il suffit de remarquer que la fonction identité $t \mapsto t$ et son opposé $t \mapsto -t$ sont convexes. De plus, comme la fonction $t \mapsto t^2$ est convexe, on en déduit que la variance de X est inférieure à la variance de Y , i.e $\text{Var}(X) \leq \text{Var}(Y)$.

Le théorème de Strassen fournit une caractérisation de l'ordre convexe :

Théorème 2.1 (Strassen) Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $X \leq_{cx} Y$;
- (ii) Il existe des variables aléatoires \hat{X} et \hat{Y} de même loi que X et Y et une variable aléatoire Z telles que $\hat{Y} = \hat{X} + Z$ et $\mathbb{E}[Z | \hat{X}] = 0$.

En d'autres termes, \hat{Y} est égal à \hat{X} auquel on a rajouté un bruit Z . Cela traduit bien le fait que Y est plus "variable" que X . On peut également montrer que l'ordre convexe et l'ordre convexe croissant sont équivalents pour des variables aléatoires de même espérance. La proposition suivante est tirée du livre de Müller et Stoyan (2002) (théorème 1.5.3).

Proposition 2.2 Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $X \leq_{cx} Y$;
- (ii) $X \leq_{icx} Y$ et $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.

Ainsi lorsque l'on cherche à comparer des variables aléatoires de même espérance suivant l'ordre convexe, il suffit de comparer ses variables suivant l'ordre convexe croissant. La proposition suivante tirée du livre de Müller et Stoyan (2002) (théorèmes 1.5.7 et 1.5.17) relie l'ordre convexe croissant à l'ordre *stop-loss* et à l'ordre *less dangerous*.

Proposition 2.3 Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérance finie. On a :

1. $X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow X \leq_{icx} Y$;
2. $X \leq_D Y \Rightarrow X \leq_{icx} Y$.

En conséquence, l'ordre convexe croissant peut être obtenu à partir de l'ordre *stop-loss*, ce qui réduit considérablement la taille de l'espace des fonctions à tester. Il est également possible de déduire l'ordre convexe croissant de l'ordre *less dangerous* en comparant simplement l'allure des fonctions de répartition : pour montrer que $X \leq_{icx} Y$, il suffit de vérifier que les fonctions de répartition de X et de Y se "croisent" une et une seule fois.

2.1.2 Ordres stochastiques multivariés

Les ordres stochastiques multivariés permettent de comparer des vecteurs aléatoires selon certains critères. Nous examinons en particulier les ordres stochastiques multivariés basés sur la fonction supermodulaire qui permettent de comparer le niveau de dépendance interne entre vecteurs aléatoires. Rappelons d'abord la définition d'une fonction supermodulaire.

Definition 2.3 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est **supermodulaire** si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i < j \leq n$ et $\varepsilon, \delta > 0$, elle vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i + \varepsilon, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ & \geq f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j + \delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Si, de plus, la relation (2.5) est vérifiée pour $i = j$, alors f est **directionally convex**.

Essayons d'interpréter cette dernière définition d'un point de vue économique. Considérons par exemple un portefeuille de crédit de dimension n et plaçons nous à une date fixée. Nous supposons que x_i , $i = 1, \dots, n$ sont des variables binaires indiquant par 1 ou par 0 le défaut ou non d'une entité de référence et que f représente la perte globale associée à ce portefeuille. On se place pour simplifier dans le cas où $x_i = 0$, $x_j = 0$, $\delta = 1$ et $\varepsilon = 1$. La relation 2.5 compare la variation de la perte lors de l'arrivée d'un défaut ($x_j + \delta = 1$) dans deux situations. Dans la première situation (première ligne), il y a un défaut de plus ($x_i + \varepsilon = 1$) que dans la seconde situation (deuxième ligne). La relation 2.5 traduit donc le fait que l'effet de l'arrivée d'un nouveau défaut sur la perte est d'autant plus important lorsque d'autres défauts ont été observés.

On peut vérifier de plus qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable est supermodulaire si et seulement si ses dérivées partielles croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sont positives pour $i \neq j$. Si en plus $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \geq 0$, alors f est directionally convex. Nous présentons ci-dessous la définition de l'ordre supermodulaire, de l'ordre supermodulaire croissant et de l'ordre *directionally convex*.

Definition 2.4 Soient $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^n .

1. \mathbf{X} est plus petit que \mathbf{Y} au sens de l'**ordre supermodulaire** (que l'on note $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$) si $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] \leq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]$, pour toute fonction f supermodulaire pour laquelle l'espérance existe ;
2. \mathbf{X} est plus petit que \mathbf{Y} au sens de l'**ordre supermodulaire croissant** (que l'on note $\mathbf{X} \leq_{ism} \mathbf{Y}$) si $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] \leq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]$, pour toute fonction f supermodulaire et croissante pour laquelle l'espérance existe ;
3. \mathbf{X} est plus petit que \mathbf{Y} au sens de l'**ordre directionally convex** (que l'on note $\mathbf{X} \leq_{dca} \mathbf{Y}$) si $\mathbb{E}[f(\mathbf{X})] \leq \mathbb{E}[f(\mathbf{Y})]$, pour toute fonction f directionally convex pour laquelle l'espérance existe.

En particulier, deux vecteurs aléatoires comparables au sens de l'ordre supermodulaire, $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, ont mêmes marginales. Autrement dit, si l'on note $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ et F_{X_1}, \dots, F_{X_n} , F_{Y_1}, \dots, F_{Y_n} les lois marginales associées au vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} , alors nécessairement, $F_{X_i} = F_{Y_i}$, $i = 1, \dots, n$. Cela découle du fait que toute fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dépendant d'une seule variable est supermodulaire.

De plus, si $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$, les corrélations entre composantes du vecteur \mathbf{X} sont plus petites que les corrélations entre composantes du vecteur \mathbf{Y} , i.e pour tout $i \neq j$, $\text{Cov}(X_i, X_j) \leq \text{Cov}(Y_i, Y_j)$. En effet, il suffit de remarquer que la fonction $f(\mathbf{x}) = x_i x_j$ est supermodulaire pour tout $i \neq j$ et d'appliquer la remarque précédente. L'ordre supermodulaire se concentre donc sur la comparaison de la dépendance pour des vecteurs aléatoires de mêmes marginales.

Ci-dessous, une proposition tirée du livre de Müller et Stoyan (2002) (théorème 3.9.11) établissant un lien entre l'ordre supermodulaire et l'ordre supermodulaire croissant.

Proposition 2.4 Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux vecteurs aléatoires. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y}$;
- (ii) $\mathbf{X} \leq_{ism} \mathbf{Y}$ et \mathbf{X} et \mathbf{Y} ont les mêmes marginales ;
- (iii) $\mathbf{X} \leq_{ism} \mathbf{Y}$ et \mathbf{X} et \mathbf{Y} ont les mêmes espérances, i.e $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{Y}]$.

Ainsi, ordre supermodulaire et ordre supermodulaire croissant sont équivalents pour des vecteurs de même espérance.

2.1.3 Ordres stochastiques et prix de call

Même si l'ordre supermodulaire n'est pas très intuitif à première vue, il conduit à des résultats de comparaison intéressants lorsque l'on agrège les composantes d'un vecteur. En effet, Müller (1997) montrent le résultat suivant :

Proposition 2.5 Soient $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ et $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)$ trois vecteurs aléatoires tels que \mathbf{M} soit indépendant de \mathbf{X} et de \mathbf{Y} . Considérons les sommes $L_X = \sum_{i=1}^n M_i X_i$ et $L_Y = \sum_{i=1}^n M_i Y_i$. Alors,

- 1. $\mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{Y} \Rightarrow L_X \leq_{cx} L_Y$;
- 2. $\mathbf{X} \leq_{ism} \mathbf{Y} \Rightarrow L_X \leq_{icx} L_Y$.

Ce résultat est utile en pratique lorsque l'on cherche à comparer le risque sur des pertes cumulées dans le cadre d'un modèle individuel. Considérons par exemple deux portefeuilles de crédit à une date t fixée. Le vecteur des indicatrices de défaut est noté $\mathbf{D}_t = (D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ pour le premier portefeuille et $\mathbf{D}_t^* = (D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*)$ pour le second portefeuille. Si l'on suppose que les pertes en cas de défaut (*losses given default*) notés M_1, \dots, M_n sont les mêmes pour les deux portefeuilles et sont des variables aléatoires indépendantes de \mathbf{D}_t et \mathbf{D}_t^* , on a donc :

$$\mathbf{D}_t \leq_{sm} \mathbf{D}_t^* \Rightarrow L_t \leq_{cx} L_t^*, \quad (2.6)$$

où $L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t}$ et $L_t^* = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t}^*$ représentent la perte agrégée associée au premier et au second portefeuille. En particulier, comme l'ordre convexe implique l'ordre *stop-loss*, l'ordre supermodulaire sur les vecteurs des indicatrices de défaut entraîne une comparaison des prix de call sur la perte agrégée. En effet, pour tout réel a , on peut écrire :

$$\mathbf{D}_t \leq_{sm} \mathbf{D}_t^* \Rightarrow \mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+]. \quad (2.7)$$

L'ordre supermodulaire sur les vecteurs des indicatrices de défaut entraîne également des résultats de comparaison en terme de mesures de risque sur la perte agrégée.

2.1.4 Ordres stochastiques et mesures de risque

Nous montrons ici le lien entre ordres stochastiques et mesures de risque. Introduisons les mesures de risques suivantes :

Definition 2.5 Soit X une variable aléatoire réelle.

- 1. La **Value-at-Risk** (VaR) de X au niveau α est définie par :

$$VaR(X; \alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{Q}(X \leq x) \geq \alpha\}. \quad (2.8)$$

2. La **Tail Value-at-Risk** ($TVaR$) de X au niveau α est définie par :

$$TVaR(X; \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR(X; \varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.9)$$

3. Soit g une fonction de distorsion, i.e une fonction croissante telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$. La mesure de distorsion de **Yaari-Wang** de X associée à la fonction g (ρ_g) est définie par :

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{Q}(X > t)) dt. \quad (2.10)$$

Les propositions suivantes sont extraites du livre de Denuit et al. (2005). La dominance stochastique (\leq_{st}) est compatible avec la VaR et les mesures de risques de Yaari-Wang.

Proposition 2.6 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, alors :

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow VaR(X; \alpha) \leq VaR(Y; \alpha), \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1], \quad (2.11)$$

$$\Leftrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y), \text{ pour tout fonction de distorsion } g. \quad (2.12)$$

L'ordre *stop-loss* (\leq_{sl}) (et donc également les ordre \leq_{icx} , \leq_D , \leq_{cx} , \leq_{st}) est compatible avec la mesure de risque TVaR et les mesures de risque de Yaari-Wang pour des fonctions de distorsions concaves.

Proposition 2.7 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, alors :

$$X \leq_{sl} Y \Leftrightarrow TVaR(X; \alpha) \leq TVaR(Y; \alpha), \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1], \quad (2.13)$$

$$\Leftrightarrow \rho_g(X) \leq \rho_g(Y), \text{ pour tout fonction de distorsion } g \text{ concave.} \quad (2.14)$$

Un résultat plus général de Bäuerle et Müller (2005) montre que l'ordre *stop-loss* est cohérent avec toutes les mesures de risque convexes et invariantes en loi.

Proposition 2.8 Soient deux variables aléatoires réelles X et Y . Alors,

$$X \leq_{sl} Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y), \quad (2.15)$$

pour toute mesure de risque convexe et invariante en loi ρ .

Ainsi, comme l'ordre supermodulaire sur les vecteurs des indicatrices de défaut entraîne l'ordre *stop-loss* sur les pertes agrégées, cela nous permet en même temps d'effectuer des comparaisons relatives à des mesures de risque. En effet, en reprenant les notations de la section précédente, de la relation 2.7 et de la proposition 2.7, on déduit immédiatement :

$$\mathbf{D}_t \leq_{sm} \mathbf{D}_t^* \Rightarrow TVaR(L_t; \alpha) \leq TVaR(L_t^*; \alpha), \text{ pour tout } \alpha \in [0, 1], \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \rho_g(L_t) \leq \rho_g(L_t^*), \text{ pour tout fonction de distorsion } g \text{ concave.} \quad (2.17)$$

2.2 Ordres stochastiques et monotonie des primes de CDO

Dans cette section, nous mettrons en exergue plusieurs applications pratiques de la théorie des ordres stochastiques à l'analyse du risque des tranches de CDO. Nous montrons en particulier comment obtenir des résultats de monotonie sur les primes de tranche de CDO à partir de l'ordre supermodulaire sur le vecteur des temps de défaut. Nous appliquerons ce résultats dans différentes situations. Les cas extrêmes de la comonotonie et de l'indépendance nous permettrons d'obtenir des bornes pour les primes de CDO. Nous comparerons également les primes de CDO sous l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire. Cette section est fortement inspirée de la partie III de Burtschell et al. (2008). Dans une section spécifique (la section suivante 2.3), nous examinerons en détail le cas de l'échangeabilité des temps de défaut.

2.2.1 Ordre supermodulaire et monotonie des primes de CDO

Considérons un portefeuille de crédit composé de n entités de référence et désignons par $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ le vecteur des temps de défaut. Notons également $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)$ le vecteur des pertes en cas de défaut. Nous supposons dans la suite que \mathbf{M} est indépendant de τ . Cette hypothèse est certes contestable mais communément employée en pratique. La question à laquelle nous tentons de répondre est la suivante :

Quel est l'effet de la dépendance entre les temps de défaut sur les primes de CDO ?

Intuitivement, une augmentation de la dépendance entre les temps de défaut a tendance à augmenter le risque de grandes pertes et à diminuer le risque de petites pertes. Ainsi, cela entraîne pour la loi de la perte agrégée un transfert de masse de probabilité des petites valeurs du support vers les grandes valeurs du support. On peut donc d'or et déjà s'attendre à une diminution du risque pour les tranches supportant les premières pertes ou tranches equity et une augmentation du risque pour les tranches supportant les dernières pertes ou tranches *senior*.

Cette intuition peut être confirmée théoriquement en exploitant les outils provenant de la théorie des ordres stochastiques. Nous avons vu que le niveau de dépendance de vecteurs aléatoires pouvait être comparé avec l'ordre supermodulaire. Pour répondre à la question posée de façon formelle, il est donc naturel d'utiliser cet outil théorique. Ainsi, augmenter la dépendance entre les composantes du vecteur τ revient à considérer un vecteur $\tau^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*)$ tel que $\tau \leq_{sm} \tau^*$. On peut dire que le vecteur τ^* a un niveau de dépendance plus élevé que le vecteur τ au sens de l'ordre supermodulaire.

Rappelons que les *cash-flows* d'une tranche de CDO sont gouvernés par l'évolution du processus de la perte agrégée. Dans le cas où τ est le vecteur des temps de défaut, la perte agrégée associée s'écrit :

$$L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t}, \quad (2.18)$$

où $D_{1,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, D_{n,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}}$ désignent les indicatrices de défaut à la date t correspondant au vecteur τ . Dans le cas où τ^* est le vecteur des temps de défaut, la perte agrégée associée s'écrit :

$$L_t^* = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t}^*, \quad (2.19)$$

où $D_{1,t}^* = \mathbf{1}_{\{\tau_1^* \leq t\}}, \dots, D_{n,t}^* = \mathbf{1}_{\{\tau_n^* \leq t\}}$ désignent les indicatrices de défaut à la date t correspondant au vecteur τ^* .

On peut d'abord remarquer que l'ordre supermodulaire sur le vecteur des temps de défaut est cohérent avec l'ordre supermodulaire sur le vecteur des indicatrices de défaut, i.e, pour toute date t , on a :

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*) \Rightarrow (D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) \leq_{sm} (D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*). \quad (2.20)$$

En effet, pour toute t , la fonction $x \mapsto \mathbf{1}_{\{x \leq t\}}$ est décroissante et l'ordre supermodulaire est invariant par transformations croissantes ou décroissantes des composantes d'un vecteur. D'après la relation 2.7, il en découle une comparaison des prix de call sur la perte agrégée puisque :

$$(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) \leq_{sm} (D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*) \Rightarrow \mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+], \quad (2.21)$$

pour toute date t et pour tout réel a . Remarquons de plus que lorsque $a = 0$, $\mathbb{E}[L_t] = \mathbb{E}[L_t^*]$ puisque des vecteurs comparables suivant l'ordre supermodulaire ont même marginales. Nous pouvons maintenant montrer qu'une augmentation de la dépendance au sens de l'ordre supermodulaire entraîne une diminution de la prime pour les tranches *equity* $[0, b]$, $0 \leq b \leq 1$ et une augmentation de la prime pour les tranches *senior* $[a, 100\%]$, $0 \leq a \leq 1$. Commençons par présenter ce résultat pour les tranches *senior*.

Proposition 2.9 *Soient L_t et L_t^* deux processus de perte agrégée définis par (resp.) 2.18 et 2.19. On considère une tranche de CDO $[a, 100\%]$ où $0 \leq a \leq 1$. Soit DL (resp. DL^*) la valeur actuelle de la jambe de défaut associée à L_t (resp. L_t^*) et définie par la relation 1.3. Notons PL^u (resp. PL^{u*}) la valeur actuelle de la jambe de prime unitaire associée à L_t (resp. L_t^*) et définie par la relation 1.8. Si pour tout t , $\mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+]$, alors :*

1. $DL \leq DL^*$,
2. $PL^u \geq PL^{u*}$.

Preuve : Il suffit de remarquer que la valeur actuelle de la jambe de défaut pour une tranche *senior* $[a, 100\%]$ prend la forme suivante d'après la relation 1.3 :

$$DL = B_T \mathbb{E}[(L_T - a)^+] + \int_0^T r_t B_t \mathbb{E}[(L_t - a)^+] dt, \quad (2.22)$$

qui est une fonction croissante des prix de call sur la perte agrégée. De même, d'après la relation 1.8, la valeur actuelle de la jambe de prime unitaire pour une tranche *senior* prend la forme suivante :

$$PL^u = \sum_{i=1}^p \left(B_{T_i} \Delta_i (b - a) - \int_{T_{i-1}}^{T_i} B_t (1 - r_t (t - T_{i-1})) \mathbb{E}[(L_t - a)^+] dt \right), \quad (2.23)$$

qui est une fonction décroissante des prix de call sur la perte agrégée. \square

Ce résultat de comparaison se montre de la même manière pour les tranches *equity*.

Proposition 2.10 *Soient L_t et L_t^* deux processus de perte agrégée définis par (resp.) 2.18 et 2.19. On considère une tranche de CDO $[0, b]$ où $0 \leq b \leq 1$. Soit DL (resp. DL^*) la valeur actuelle de la jambe de défaut associée à L_t (resp. L_t^*) et définie par la relation 1.3. Notons PL^u (resp. PL^{u*}) la valeur actuelle de la jambe de prime unitaire associée à L_t (resp. L_t^*) et définie par la relation 1.8. Si pour tout t , $\mathbb{E}[(L_t - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t^* - a)^+]$ et $\mathbb{E}[L_t] = \mathbb{E}[L_t^*]$, alors :*

1. $DL \geq DL^*$,
2. $PL^u \leq PL^{u*}$.

Preuve : En constatant que les pertes affectant la tranche *equity* s'écrivent $L_t^{[0,b]} = L_t - (L_t - b)^+$. Comme $\mathbb{E}[L_t] = \mathbb{E}[L_t^*]$ pour tout t , le résultat découle du fait que la valeur actuelle de la jambe de défaut est une fonction décroissante des prix de call sur la perte agrégée et la valeur actuelle de la jambe de prime unitaire est une fonction croissante des prix de call. \square

Ainsi, le spread ou la prime d'une tranche de CDO étant défini comme le rapport entre la valeur actuelle de la default leg et la valeur actuelle de la premium leg unitaire, $S_c = \frac{DL}{PL^u}$, il en résulte d'après les relations 2.20 et 2.21 et les propositions 2.9 et 2.10, qu'une augmentation de la dépendance au sens de l'ordre supermodulaire entraîne une augmentation de la prime des tranches *senior* et une diminution de la prime des tranches *equity*. Cela est également vrai lorsque l'on considère les valeurs de marché des tranches pour des positions en achat de protection ($MTM_t = DL_t - S_c PL_t$). De plus, la cotation en *upfront UP* de la tranche *equity* sur un indice standardisé définie par la relation 1.12 est bien décroissante avec le niveau de dépendance.

2.2.2 Cas comonotone

Lorsque les temps de défaut sont comonotones, la dépendance est parfaite ou "maximale" et on peut construire des bornes pour les primes de tranches de CDO. En effet, Tchen (1980) puis Bäuerle et Müller (1998) montrent que le vecteur des temps de défaut (τ_1, \dots, τ_n) est toujours plus petit que le vecteur comonotone $(F_1(U), \dots, F_n(U))$ au sens de l'ordre supermodulaire, où F_1, \dots, F_n désignent les lois marginales des temps de défaut et où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. En d'autres termes :

$$(\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (F_1(U), \dots, F_n(U)). \quad (2.24)$$

D'après les résultats de la section précédente, la cas de la comonotonie fournit une borne supérieure pour les primes de tranche *senior* et une borne inférieure pour les primes de tranche *equity*. Il correspond également à une borne supérieure pour les mesures de risque convexes et invariantes en loi sur la perte agrégée. Il est important de remarquer que ces bornes sont indépendantes de toute modélisation. Nous avons vu au chapitre 1 que pour beaucoup de modèles à facteur (mais pas pour tous), la borne supérieure de la comonotonie peut être atteinte pour certains choix des paramètres de dépendance. En particulier, ces choix conduisent au même prix de tranche dans tous ces modèles en supposant que l'hypothèse sur les taux de recouvrement soit commune à toutes les approches considérées. Cela permet d'éclairer certains débats ayant eu lieu pendant la crise de Février-Mars 2008 sur les indice iTraxx et CDX pendant laquelle aucun paramètre de corrélation implicite (*base correlation*) ne pouvait être déduit des spreads très élevés sur les tranches *senior*. Rappelons que la *base correlation* est le paramètre de corrélation implicite correspondant au modèle de copule Gaussienne à un facteur où les taux de recouvrement sont supposés être constants et égales pour toutes les références. En d'autres termes, les primes de tranche *senior* ont dépassé la borne supérieure de la comonotonie pendant cette période. Ce problème est indépendant du choix du modèle pour les temps de défaut et ne peut être résolu qu'en modifiant l'hypothèse sur les taux de recouvrement.

2.2.3 Cas indépendant

Bien sûr, l'indépendance n'est pas le niveau de dépendance théorique le plus bas pour un vecteur aléatoire. Cependant, cette situation correspond à une borne inférieure dans le cas des

modèles à facteur échangeable. En effet, il est bien connu que ces modèles ne peuvent refléter que de la dépendance positive. Supposons que les temps de défaut soient échangeables et notons \tilde{p}_t la probabilité mélange à la date t , les covariances entre les indicatrices de défaut $D_{i,t}$ et $D_{j,t}$ pour $i \neq j$ sont toujours positives :

$$\text{Cov}(D_{i,t}, D_{j,t}) = \text{Var}(\tilde{p}_t) \geq 0. \quad (2.25)$$

Nous montrerons formellement dans la section 2.4 que l'indépendance correspond bien à une borne inférieure pour les primes de tranches *senior* et une borne supérieure pour les primes de tranches *equity* lorsque l'on considère les modèles à facteur présentés au chapitre 1.

2.2.4 Portefeuille infiniment granulaire

Il est possible de comparer les primes de tranche de CDO calculées sous l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire avec les primes calculés sous aucune hypothèse particulière. Rappelons pour cela le résultat suivant issu de Dhaene et al. (2002) :

Proposition 2.11 *Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire et V une variable aléatoire, alors :*

$$\mathbb{E}[X_1 | V] + \dots + \mathbb{E}[X_n | V] \leq_{cx} X_1 + \dots + X_n. \quad (2.26)$$

Appliquons ce dernier résultat dans le contexte du risque de crédit. Pour simplifier, on suppose que les pertes en cas de défaut M_1, \dots, M_n sont déterministes. Si l'on prend $X_i = M_i D_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$, on a alors $\mathbb{E}[X_i | V] = M_i \tilde{p}_t^i$, $i = 1, \dots, n$ où $\tilde{p}_t^i = P(\tau_i \leq t | V)$ désigne la probabilité conditionnelle de défaut du nom i à la date t . Rappelons que \tilde{p}_t^i correspond à la perte d'un portefeuille infiniment granulaire lorsque les indicatrices de défaut sont échangeables⁶¹, i.e :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{i,t} \xrightarrow{p.s} \tilde{p}_t, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

$L_t = \sum_{i=1}^n M_i D_{i,t} = \sum_{i=1}^n X_i$ est donc la perte agrégée et $L_t^\infty = \sum_{i=1}^n M_i \tilde{p}_t^i = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i | V]$ est la perte agrégée calculée sous l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire. Cette dernière quantité correspond également à la perte calculée par la méthode préconisée par la réglementation Bâle II. On peut donc écrire pour tout t ,

$$L_t^\infty \leq_{cx} L_t. \quad (2.28)$$

On en déduit d'après les propositions 2.2 et 2.3 que :

$$\mathbb{E}[(L_t^\infty - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_t - a)^+], \quad (2.29)$$

pour tout réel a . Notons de plus que les espérances de perte dans les deux cas sont identiques, i.e $\mathbb{E}[L_t^\infty] = \mathbb{E}[L_t]$. On peut donc conclure, grâce à la proposition 2.9 que les primes de tranches *senior* sont plus faibles sous l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire. L'inverse est vrai pour les tranches *equity* (Proposition 2.10). Notons de plus que la borne calculée sous l'hypothèse d'un portefeuille infiniment granulaire dépend bien sûr du choix du modèle.

⁶¹Voir la section 1.1.2 pour plus de détails.

2.3 Cas d'un portefeuille échangeable

Nous examinons maintenant la situation où les temps de défaut forment un vecteur échangeable. Dans ce cas, à toute date t , les indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli échangeables. Lorsque ces dernières peuvent être extraites d'une suite infinie de Bernoulli échangeables, le théorème de De Finetti garantit une représentation à facteur et les indicatrices peuvent être assimilées à un mélange de Binomiales : il existe un facteur \tilde{p}_t tel que, conditionnellement à \tilde{p}_t , $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ soient indépendants. Dans le cas de la finie échangeabilité, Jaynes (1986) montre que la loi ou la mesure mélange peut être signée et n'est pas nécessairement unique. Même si les applications développées à la section 2.4 traiteront de vecteurs de Bernoulli tirés d'une suite infinie échangeable, nous nous placerons dans cette partie dans le cadre plus général de la finie échangeabilité. Pour simplifier la présentation et puisque l'analyse est menée dans un cadre statique, nous éviterons dans la suite de faire apparaître la dépendance temporelle des variables aléatoires considérées.

D'un point de vue de la gestion du risque, l'hypothèse de l'échangeabilité est souvent implicitement employée puisqu'elle permet de concentrer l'analyse comparative sur la structure de dépendance. Rappelons que les lois marginales d'un vecteur aléatoire échangeable sont les mêmes. De plus, la représentation de la structure de dépendance à l'aide d'un facteur n'est pas seulement un outil pratique pour le calcul de la loi de la perte (voir 1.1.2), mais elle est également propice à l'analyse de la dépendance et à ses effets sur le risque d'un portefeuille de crédit. En effet, dans cette approche, la structure de dépendance est réduite à la connaissance d'un facteur \tilde{p} , ce qui simplifie grandement son analyse.

En fait, des résultats de comparaisons sur un vecteur de Bernoulli échangeables (D_1, \dots, D_n) peuvent être déduits de comparaisons sur la probabilité mélange \tilde{p} . Lefèvre et Utev (1996) montrent que l'ordre *stop-loss* sur \tilde{p} entraîne l'ordre *stop-loss* sur la somme $\sum D_i$ mais cela ne peut être étendu au cas d'expositions différentes entre les entités de crédit. Denuit et Müller (2002) proposent un modèle multi-factoriel et s'intéressent à l'impact de la loi jointe des facteurs sur la structure de dépendance globale. Denuit et Frostig (2007) étendent cette dernière approche et obtiennent des résultats de comparaison similaires à ceux développés dans cette partie. En particulier, ils montrent que l'ordre supermodulaire sur les facteurs entraîne l'ordre supermodulaire sur les indicatrices. Cependant leur principal résultat requiert des hypothèses contraignantes sur la structure des facteurs et reste difficilement applicable en pratique.

Nous verrons ici, dans le cadre de la finie échangeabilité, que l'ordre supermodulaire sur le vecteur des indicatrices de défaut peut être caractérisé à l'aide de l'ordre convexe sur les mesures mélanges. Cette section s'appuie sur l'article de Cousin et Laurent (2008a).

2.3.1 Échangeabilité et théorème de De Finetti

Considérons deux vecteurs échangeables composés de variable aléatoire de Bernoulli, $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_n)$ et $\mathbf{D}^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$. Rappelons ci-dessous la définition de l'échangeabilité pour un vecteur aléatoire.

Definition 2.6 (Vecteur aléatoire échangeable) *Un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est échangeable au sens strict ou fini échangeable si pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on a :*

$$(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \stackrel{d}{=} (X_1, \dots, X_n). \quad (2.30)$$

Kendall (1967) montre que tout système de n événements aléatoires échangeables est équivalent à un système d'échantillonnage aléatoire sans remise où le nombre N d'éléments dans l'échantillon est aléatoire et suit une distribution arbitraire. En d'autres termes, si (D_1, \dots, D_n) est un vecteur fini échangeable, pour toute sous-partie $\{i_1, \dots, i_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$, on a la représentation suivante :

$$\mathbb{Q}(D_{i_1} = 1, \dots, D_{i_k} = 1 \mid N) = \frac{N(N-1) \dots (N-k+1)}{n(n-1) \dots (n-k+1)}. \quad (2.31)$$

De plus, Jaynes (1986) montre que l'on peut étendre le théorème de De Finetti (qui requiert une suite infinie de variables échangeables) au cas de la finie échangeabilité. Les lois jointes de \mathbf{D} et \mathbf{D}^* peuvent encore s'exprimer à l'aide d'une représentation à facteur. Cependant, le facteur n'est pas nécessairement une variable aléatoire mais admet une mesure signée.

Théorème 2.2 *Théorème de De Finetti et finie échangeabilité*

Si (D_1, \dots, D_n) et (D_1^*, \dots, D_n^*) sont des vecteurs aléatoires de Bernoulli échangeables, alors il existe une **mesure mélange signée** ν sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ (non nécessairement unique) telle que :

$$\mathbb{Q}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) = \int p^x (1-p)^{n-x} \nu(dp), \quad (2.32)$$

où $d_i = 0, 1$, $i = 1, \dots, n$, $x = \sum_{i=1}^n d_i$. De même, il existe une **mesure mélange signée** ν^* sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ (non nécessairement unique) telle que :

$$\mathbb{Q}(D_1^* = d_1, \dots, D_n^* = d_n) = \int p^x (1-p)^{n-x} \nu^*(dp). \quad (2.33)$$

Dans l'approche de Jaynes (1986), la mesure signée est exprimée dans la base des polynômes orthogonaux de Legendre (voir la section 1.2.4 du chapitre 1 pour plus de détails sur cette méthode). Lorsque pour tout $n \geq 1$, D_1, \dots, D_n et D_1^*, \dots, D_n^* forment des sous-ensemble de suites infinies de variables aléatoires de Bernoulli échangeables (D_1, \dots, D_n, \dots) et $(D_1^*, \dots, D_n^*, \dots)$, alors, d'après le théorème de De Finetti, ν et ν^* sont des mesures de probabilité. Dans ce cas, les représentations 2.32 et 2.33 sont uniques et il existe des facteurs mélange \tilde{p} et \tilde{p}^* de loi respective ν et ν^* tels que D_1, \dots, D_n soient indépendantes sachant \tilde{p} et D_1^*, \dots, D_n^* soient indépendantes sachant \tilde{p}^* . Rappelons que les probabilités mélanges \tilde{p} et \tilde{p}^* peuvent être vues comme la perte d'un portefeuille infiniment granulaire et sont caractérisées par :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s} \tilde{p}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^* \xrightarrow{p.s} \tilde{p}^* \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (2.34)$$

Dans la suite de cette section, nous analyserons l'impact de la mesure mélange ν sur la structure de dépendance de \mathbf{D} . Plus précisément, on va montrer que comparer \mathbf{D} et \mathbf{D}^* au sens de l'ordre supermodulaire revient à comparer ν et ν^* au sens de l'ordre convexe. Avant d'établir ce résultat, nous proposons dans le paragraphe suivant d'éclaircir les contributions existantes sur ce sujet.

2.3.2 Résultats existants

Dans le champs d'application de la théorie des ordres stochastiques, peu de travaux se sont concentrés sur le cas de l'échangeabilité et l'analyse de l'effet de la loi mélange sur le risque global. Nous proposons ici de présenter trois résultats relatifs à ce problème et issus des articles de Lefèvre et Utev (1996), Denuit et Müller (2002) et Denuit et Frostig (2007).

Résultat de Lefèvre et Utev (1996)

Lefèvre et Utev (1996) ont montré que lorsque les probabilités mélanges \tilde{p} et \tilde{p}^* sont ordonnées suivant l'ordre convexe croissant (ou l'ordre *stop-loss*), alors les pertes $L_n = \sum_{i=1}^n D_i$ et $L_n^* = \sum_{i=1}^n D_i^*$ peuvent également être ordonnées suivant l'ordre convexe croissant. Plus formellement, on a la relation suivante (également mentionnée dans Bäuerle et Müller (1998)) :

Proposition 2.12 *En reprenant les notations définies précédemment, on a :*

$$\tilde{p} \leq_{icx} \tilde{p}^* \Rightarrow L_n \leq_{icx} L_n^* \quad (2.35)$$

En fait, leur résultat (corollaire 3.7 de Lefèvre et Utev (1996)) est plus général et concerne l'ordre *s*-convexe qui est une extension de l'ordre convexe⁶².

Preuve : Ce résultat peut être vérifié directement à partir de l'exemple 6.A.2 p.172 du livre de Shaked et Shanthikumar (1994). Cependant, nous proposons ci-dessous une preuve "auto-suffisante" de cette dernière proposition. Rappelons d'abord que d'après la proposition 2.3, l'ordre convexe croissant est équivalent à l'ordre *stop-loss*. Il suffit donc de prouver la proposition 2.12 pour l'ordre *stop-loss*, i.e :

$$\tilde{p} \leq_{icx} \tilde{p}^* \Rightarrow \mathbb{E}[(L_n - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_n^* - a)^+], \text{ pour tout réel } a. \quad (2.36)$$

Remarquons que $\mathbb{E}[L_n] = n\mathbb{E}[\tilde{p}]$ et $\mathbb{E}[L_n^*] = n\mathbb{E}[\tilde{p}^*]$. Comme $\tilde{p} \leq_{icx} \tilde{p}^*$, on a $\mathbb{E}[\tilde{p}] \leq \mathbb{E}[\tilde{p}^*]$ et la relation 2.36 est vérifiée pour tout $t \leq 0$. Pour $t \geq n$, 2.36 est trivialement vérifiée. Nous montrons maintenant que l'on peut restreindre le niveau de rétention t aux entiers $0, 1, \dots, n$. Si, $[a]$ représente la partie entière de a , on peut écrire $t = [a] + \alpha$ avec $\alpha \in [0, 1]$. De plus, comme L_n et L_n^* prennent des valeurs entières, on peut décomposer $(L_n - a)^+$ ou $(L_n^* - a)^+$ de la façon suivante :

$$(L_n - a)^+ = (1 - \alpha)(L_n - [a])^+ + \alpha(L_n - ([a] + 1))^+. \quad (2.37)$$

De cette dernière relation, il est possible de déduire la relation d'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[(L_n - a)^+] \leq \mathbb{E}[(L_n^* - a)^+] \quad a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \mathbb{E}[(L_n - k)^+] \leq \mathbb{E}[(L_n^* - k)^+] \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.38)$$

Ainsi, il suffit de démontrer que les fonctions,

$$u_n^k(p) = \mathbb{E}[(L_n - k)^+ | \tilde{p} = p] = \sum_{i=k+1}^n (i - k) C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}, \quad k = 0, \dots, n \quad (2.39)$$

sont croissantes et convexes en p pour tout $k = 0, \dots, n$. En effet, si $\tilde{p} \leq_{icx} \tilde{p}^*$, par définition de l'ordre \leq_{icx} , on a $\mathbb{E}[f(\tilde{p})] \leq \mathbb{E}[f(\tilde{p}^*)]$ pour toute fonction convexe croissante f . On peut montrer que les fonctions u_n^k , $k = 0, \dots, n$ sont croissantes et convexes en calculant leur dérivée première et seconde. Remarquons que pour $n = 1, 2, 3$, ces fonctions peuvent s'exprimer ainsi :

$$\begin{cases} u_1^0(p) = p, \\ u_2^0(p) = 2p, \quad u_2^1(p) = p^2, \\ u_3^0(p) = 3p, \quad u_3^1(p) = 3p^2(1 - p) + 2p^3, \quad u_3^2(p) = p^3. \end{cases} \quad (2.40)$$

⁶²Spécifiquement, il montre que pour tout entier s positif, $p \leq_{s-cx} \tilde{p}^* \Rightarrow L_n \leq_{s-cx} L_n^*$ où \leq_{s-cx} désigne l'ordre *s*-convexe. Lorsque $s = 1$, l'ordre *s*-convexe correspond à la dominance stochastique à l'ordre 1 et lorsque $s = 2$, il s'agit de l'ordre convexe croissant. Voir Lefèvre et Utev (1996) pour plus de détails.

Il s'agit bien de fonctions croissantes et convexes. Pour montrer cette propriété pour tout n , on peut remarquer que les dérivées des fonctions u_n^k peuvent s'exprimer à l'aide d'une relation récursive que l'on peut montrer à l'aide du triangle de Pascal. Pour $n \geq 2$, la dérivée première s'écrit :

$$\frac{du_n^k}{dp} = \begin{cases} n, & k = 0, \\ n(u_{n-1}^{k-1} - u_{n-1}^k), & 1 \leq k \leq n-1, \\ 0, & k = n. \end{cases} \quad (2.41)$$

Pour $n \geq 3$, la dérivée seconde s'écrit :

$$\frac{d^2u_n^k}{dp^2} = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ n(n-1) [1 - (u_{n-2}^0 - u_{n-2}^1)], & k = 1, \\ n(n-1) [(u_{n-2}^{k-2} - u_{n-2}^{k-1}) - (u_{n-2}^{k-1} - u_{n-2}^k)], & 2 \leq k \leq n-2, \\ n(n-1)u_{n-2}^{n-3}, & k = n-1, \\ 0, & k = n. \end{cases} \quad (2.42)$$

Et comme pour toute variable aléatoire positive X et pour tout entier k , $(X - (k-1))^+ \geq (X - k)^+$ et $1 \geq (X - (k-2))^+ - (X - (k-1))^+ \geq (X - (k-1))^+ - (X - k)^+$, il est en découle immédiatement que pour $n \geq 2$, $u_n^{k-1} \geq u_n^k$ et $u_n^{k-2} - u_n^{k-1} \geq u_n^{k-1} - u_n^k$, ce qui achève la preuve. \square

Malheureusement, ce dernier résultat ne permet pas d'intégrer directement des expositions différentes entre les entités de référence.

Résultat de Denuit et Müller (2002)

Une autre approche, celle de Denuit et Müller (2002), se place dans un cadre multi-factoriel et considère le vecteur aléatoire :

$$\mathbf{X}(\Theta) = (X_1(\Theta_1), \dots, X_n(\Theta_n)). \quad (2.43)$$

Le vecteur X dépend du vecteur aléatoire mélangeant $\Theta = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$ de la manière suivante :

1. X_i ne dépend pas de Θ_j pour $j \neq i$,
2. X_1, \dots, X_n sont indépendants conditionnellement au vecteur Θ .

Denuit et Müller (2002) montrent que le niveau de dépendance du vecteur \mathbf{X} au sens de l'ordre supermodulaire (resp. de l'ordre *directionally convex*⁶³) est fortement lié à la croissance stochastique (resp. convexité stochastique) des composantes X_1, \dots, X_n par rapport à leur variable mélange associée $\Theta_1, \dots, \Theta_n$. Ce résultat peut être exprimé plus formellement à l'aide de la proposition suivante :

Proposition 2.13 Soient $\mathbf{X}(\Theta)$ et $\mathbf{X}^*(\Theta^*)$ deux vecteurs aléatoires définis par la relation 2.43 et de même loi marginale conditionnelle, i.e $F_i(x | \theta) = \mathbb{Q}(X_i \leq x | \Theta_i = \theta) = \mathbb{Q}(X_i^* \leq x | \Theta_i^* = \theta)$, $i = 1, \dots, n$. Si pour tout $i = 1 \dots n$, X_i (resp. X_i^*) est stochastiquement croissante en Θ_i (resp. Θ_i^*) (i.e si $\theta \rightarrow \mathbb{E}[f(X_i)|\Theta_i = \theta]$ est croissante pour toute fonction f croissante), alors :

$$\Theta \leq_{sm} \Theta^* \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{sm} \mathbf{X}^*. \quad (2.44)$$

Si pour tout $i = 1 \dots n$, X_i (resp. X_i^*) est stochastiquement convexe en Θ_i (resp. Θ_i^*) (i.e si $\theta \rightarrow \mathbb{E}[f(X_i)|\Theta_i = \theta]$ est convexe pour toute fonction f convexe), alors :

$$\Theta \leq_{dcx} \Theta^* \Rightarrow \mathbf{X} \leq_{dcx} \mathbf{X}^*. \quad (2.45)$$

⁶³L'ordre *directionally convex* est défini par la définition 2.4.

Ce résultat peut être appliqué pour un vecteur de variable aléatoire de Bernoulli \mathbf{D} mélangé par un vecteur $\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ de la façon suivante :

$$\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{p}}) = (D_1(\tilde{p}_1), \dots, D_n(\tilde{p}_n)). \quad (2.46)$$

En effet, on peut vérifier facilement que les D_i , $i = 1, \dots, n$, sont stochastiquement croissantes et stochastiquement convexes en \tilde{p} puisque l'on peut écrire $\mathbb{E}[f(D_i)|\tilde{p} = p] = p(f(1) - f(0)) + f(0)$ pour toute fonction f et tout $i = 1, \dots, n$. De plus, l'ordre convexe univarié est compatible avec l'ordre *directionally convex* dans le sens où :

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \leq_{dcx} (\tilde{p}_1^*, \dots, \tilde{p}_n^*). \quad (2.47)$$

Si l'on note $\mathbf{D} = (D_1(\tilde{p}_1), \dots, D_n(\tilde{p}_n))$ et $\mathbf{D}^* = (D_1(\tilde{p}_1^*), \dots, D_n(\tilde{p}_n^*))$, \mathbf{D} et \mathbf{D}^* ont trivialement même loi marginale conditionnelle et de la proposition 2.13, on déduit :

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow \mathbf{D} \leq_{dcx} \mathbf{D}^*. \quad (2.48)$$

L'ordre *directionally convex* est structurellement plus faible que l'ordre supermodulaire. On peut montrer (voir paragraphe 2.3.3) que l'ordre supermodulaire découle de l'ordre convexe sur les probabilités mélanges et qu'il s'agit en fait d'une équivalence.

Résultat de Denuit et Frostig (2007)

Denuit et Frostig (2007) généralisent cette dernière approche dans le cadre de la comparaison de vecteurs de Bernoulli. Ils s'intéressent à un modèle multi-factoriel et se placent dans le contexte de la comparaison de portefeuille de crédit. Ils considèrent deux vecteurs d'indicatrice de défaut (D_1, \dots, D_n) et (D_1^*, \dots, D_n^*) , chacun d'eux étant indépendant conditionnellement à un facteur Θ et Θ^* de même dimension p . Les probabilités conditionnelles de défaut dans les deux cas sont telles que :

$$\mathbb{Q}(D_i = 1 \mid \Theta = \theta) = \mathbb{Q}(D_i^* = 1 \mid \Theta^* = \theta) = p_i(\theta), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.49)$$

où $p_i : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$. Leur principal résultat est le suivant :

Proposition 2.14 *Soient deux vecteurs d'indicatrice de défaut $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_n)$ et $\mathbf{D}^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$ conditionnellement indépendant sachant Θ et Θ^* et dont les probabilités conditionnelles de défaut p_i , $i = 1, \dots, n$ sont décrites par la relation 2.49. Si les fonctions $\theta \mapsto p_i(\theta)$, $i = 1, \dots, n$ sont linéaires et monotones (soit toutes croissantes soit toutes décroissantes), alors :*

$$\Theta \leq_{sm} \Theta^* \Rightarrow \mathbf{D} \leq_{sm} \mathbf{D}^*. \quad (2.50)$$

Il s'agit d'une extension de Denuit et Müller (2002) puisque dans cette nouvelle approche la dimension du facteur Θ peut être différente de la dimension du vecteur des risques \mathbf{D} . Cependant, même si ce dernier résultat est valable pour un modèle multi-factoriel, il reste néanmoins difficilement applicable dans la mesure où les contraintes sur les probabilités conditionnelles de défaut sont très fortes. On peut montrer que pour la plupart des modèles à facteur présenté au chapitre 1, ces contraintes ne sont pas respectées.

2.3.3 Ordre supermodulaire et vecteurs de Bernoulli échangeables

Dans cette section nous présentons nos principaux résultats qui consistent en une caractérisation de l'ordre supermodulaire pour les variables aléatoires de Bernoulli échangeables. Cette caractérisation sera établie au moyen d'un critère de comparaison sur les mesures mélanges qui comme on l'a vu précédemment peuvent être signées et non nécessairement uniques. Nous avons donc besoin de généraliser la définition de l'ordre convexe aux mesures signées.

Ordre convexe pour les mesures signées

Les définitions de l'ordre convexe et de l'ordre convexe croissant peuvent être étendues naturellement aux mesures signées.

Définition 2.7 Soient ν et ν^* deux mesures signées. On dit que :

1. La mesure ν est plus petite que la mesure ν^* au sens de l'**ordre convexe** (que l'on note $\nu \leq_{cx} \nu^*$) si $\int u(p)\nu(dp) \leq \int u(p)\nu^*(dp)$ pour toute fonction convexe u pour laquelle ces intégrales existent.
2. La mesure ν est plus petite que la mesure ν^* au sens de l'**ordre convexe croissant** (que l'on note $\nu \leq_{icx} \nu^*$) si $\int u(p)\nu(dp) \leq \int u(p)\nu^*(dp)$ pour toute fonction convexe croissante u pour laquelle ces intégrales existent.

Remarquons simplement que ces dernières définitions sont compatibles avec la définition 2.2 de l'ordre \leq_{cx} et \leq_{icx} pour des variables aléatoires puisque les mesures de probabilités sont des mesures signées particulières. Nous pouvons maintenant exposer nos résultats principaux.

Résultats principaux

Théorème 2.3 Ordre supermodulaire pour vecteurs de Bernoulli échangeables

Considérons deux vecteurs de variables aléatoires de Bernoulli échangeables $\mathbf{D} = (D_1, \dots, D_n)$ et $\mathbf{D}^* = (D_1^*, \dots, D_n^*)$. D'après le théorème 2.2, ces vecteurs admettent chacun une mesure mélange. On note ν une mesure mélange associée à \mathbf{D} et ν^* une mesure mélange associée à \mathbf{D}^* . Alors,

$$\nu \leq_{cx} \nu^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*), \quad (2.51)$$

et

$$\nu \leq_{icx} \nu^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{ism} (D_1^*, \dots, D_n^*). \quad (2.52)$$

Preuve : Soit f une fonction supermodulaire. En reprenant les notations introduites au théorème 2.2,

$$\mathbb{E}[f(D_1, \dots, D_n)] = \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in \{0,1\}^n} f(d_1, \dots, d_n) \mathbb{Q}(D_1 = d_1, \dots, D_n = d_n) \quad (2.53)$$

peut se réécrire :

$$\int_0^1 \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in \{0,1\}^n} f(d_1, \dots, d_n) p^{d_1 + \dots + d_n} (1-p)^{n - (d_1 + \dots + d_n)} \nu(dp). \quad (2.54)$$

Considérons la fonction $v : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$v(p_1, \dots, p_n) = \sum_{(d_1, \dots, d_n) \in \{0,1\}^n} f(d_1, \dots, d_n) p_1^{d_1} (1-p_1)^{1-d_1} \dots p_n^{d_n} (1-p_n)^{1-d_n}. \quad (2.55)$$

Montrons que v est une fonction supermodulaire. On peut d'abord remarquer que $v(p_1, \dots, p_n)$ peut s'écrire ainsi :

$$p_1 \sum_{(d_2, \dots, d_n) \in \{0,1\}^{n-1}} f(1, d_2, \dots, d_n) p_2^{d_2} (1-p_2)^{1-d_2} \dots p_n^{d_n} (1-p_n)^{1-d_n}$$

$$+ (1 - p_1) \sum_{(d_2, \dots, d_n) \in \{0,1\}^{n-1}} f(0, d_2, \dots, d_n) p_2^{d_2} (1 - p_2)^{1-d_2} \dots p_n^{d_n} (1 - p_n)^{1-d_n}.$$

On peut donc calculer la dérivée de v par rapport à p_1 de la façon suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = \sum_{(d_2, \dots, d_n) \in \{0,1\}^{n-1}} (f(1, d_2, \dots) - f(0, d_2, \dots)) p_2^{d_2} (1 - p_2)^{1-d_2} \dots p_n^{d_n} (1 - p_n)^{1-d_n}.$$

De même, $\frac{\partial^2 v}{\partial p_1 \partial p_2}$ s'écrit :

$$\sum_{(d_3, \dots, d_n) \in \{0,1\}^{n-2}} (f(1, 1, \dots) - f(1, 0, \dots) - f(0, 1, \dots) + f(0, 0, \dots)) p_3^{d_3} (1 - p_3)^{1-d_3} \dots p_n^{d_n} (1 - p_n)^{1-d_n},$$

qui est positif puisque f est supermodulaire (Voir la Définition 2.3). On peut procéder de la même manière pour tous les couples (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, ce qui permet de prouver que v est une fonction supermodulaire. Remarquons de plus que $\frac{\partial^2 v}{\partial p_i^2} = 0$, $i = 1, \dots, n$. En conséquence, les termes de la matrice Hessienne de v sont positives. La fonction réelle $p \in \mathbb{R} \rightarrow u(p) = v(p, \dots, p)$ est donc convexe puisque la dérivée seconde de u est simplement la somme des éléments de la matrice Hessienne de v . A partir de l'expression (2.54), $\mathbb{E}[f(D_1, \dots, D_n)]$ peut être reformuler comme $\int u(p) \nu(dp)$. En outre, comme u est convexe et $\nu \leq_{cx} \nu^*$, on a $\int u(p) \nu(dp) \leq \int u(p) \nu^*(dp)$, où cette dernière intégrale est exactement égale à $\mathbb{E}[f(D_1^*, \dots, D_n^*)]$. Si, de plus, f est croissante, alors les dérivées partielles de v , $\frac{\partial v}{\partial p_i}$, $i = 1, \dots, n$ sont positives. La fonction u est donc croissante et convexe et (2.52) peut être obtenu par le même raisonnement. \square

Le théorème 2.3 s'applique (bien entendu) à des mesures mélanges qui sont des mesures de probabilité. Il en découle le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 Ordre supermodulaire pour modèles à facteur *Considérons deux vecteurs (D_1, \dots, D_n) et (D_1^*, \dots, D_n^*) de variables aléatoires de Bernoulli échangeables issues de suites infinies (D_1, \dots, D_n, \dots) et $(D_1^*, \dots, D_n^*, \dots)$ de Bernoulli échangeables. Soient \tilde{p} et \tilde{p}^* les probabilités mélanges associées. Alors,*

$$\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*), \quad (2.56)$$

et

$$\tilde{p} \leq_{icx} \tilde{p}^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{ism} (D_1^*, \dots, D_n^*). \quad (2.57)$$

La réciproque du théorème 2.3 peut être établie mais les vecteurs de Bernoulli doivent être ordonnés suivant l'ordre supermodulaire pour toutes dimensions.

Théorème 2.4 *Soient D_1, \dots, D_n, \dots et $D_1^*, \dots, D_n^*, \dots$ deux suites de variables aléatoires de Bernoulli échangeables. D'après le théorème de De Finetti, les mesures mélanges associées sont uniques et sont des mesures de probabilité. Rappelons que les probabilités mélanges sont caractérisées par :*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s} \tilde{p}, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^* \xrightarrow{p.s} \tilde{p}^* \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

Dans ce cas, on a :

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*), \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*. \quad (2.59)$$

Preuve : On note $L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$ et $L_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i^*$. Si $t \in \mathbb{R}^+$, alors $(L_n - t)^+ \leq 1$ et $(L_n^* - t)^+ \leq 1$. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(L_n - t)^+] = \mathbb{E}[(\tilde{p} - t)^+]$. De même, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(L_n^* - t)^+] = \mathbb{E}[(\tilde{p}^* - t)^+]$. Comme $(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$, $L_n \leq_{sl} L_n^*$ d'après la proposition 2.5. Donc, $\mathbb{E}[(L_n - t)^+] \leq \mathbb{E}[(L_n^* - t)^+]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que $\mathbb{E}[(\tilde{p} - t)^+] \leq \mathbb{E}[(\tilde{p}^* - t)^+]$, ce qui montre que $\tilde{p} \leq_{icx} \tilde{p}^*$. Enfin, comme $(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*)$, D_1 et D_1^* ont la même loi marginale. Or $\mathbb{Q}(D_1 = 1) = \mathbb{E}[D_1] = \mathbb{E}[\tilde{p}]$ et $\mathbb{Q}(D_1^* = 1) = \mathbb{E}[D_1^*] = \mathbb{E}[\tilde{p}^*]$, donc $\mathbb{E}[\tilde{p}] = \mathbb{E}[\tilde{p}^*]$ et d'après la proposition 2.2, $\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*$. \square

Supposons maintenant que (D_1, \dots, D_n) et (D_1^*, \dots, D_n^*) sont des vecteurs de Bernoulli échangeables au sens strict ou finis échangeables (i.e, non nécessairement issus de suites infinies de Bernoulli échangeables). Dans ce cas, d'après le théorème 2.2, il peut exister plusieurs mesures mélanges associées à la représentation de De Finetti et on peut se demander si certaines d'entre elles, disons ν_n et ν_n^* sont telles que :

$$(D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*) \Rightarrow \nu_n \leq_{cx} \nu_n^*, \quad (2.60)$$

compatible avec le théorème 2.4. Comme on va le voir, la réponse à cette question n'est pas si évidente.

Considérons par exemple un vecteur gaussien échangeable (V_1, \dots, V_n) de moyenne nulle et de variance unitaire. L'échangeabilité impose que les covariances soient les mêmes et on note $\rho = \text{Cov}(V_1, V_j)$, pour $i \neq j$. Soit v_0 un réel et $D_i = \mathbf{1}_{\{V_i \leq v_0\}}$, $i = 1, \dots, n$, les variables de Bernoulli correspondantes. (D_1, \dots, D_n) est donc un vecteur échangeable de variables aléatoires de Bernoulli. On peut remarquer que lorsque $\rho < 0$, il n'existe pas de représentation à facteur pour ce vecteur ⁶⁴. Cependant, on peut quand même construire une mesure mélange signée ν à partir de la loi jointe de (V_1, \dots, V_n) . Nous adoptons pour cela l'approche de Jaynes (1986) où la mesure signée est exprimée dans la base des polynômes orthogonaux de Legendre (voir la section 1.2.4 du chapitre 1 pour plus de détails sur cette méthode). Nous supposons pour cela que ν admet une fonction de densité g , i.e. $\nu(dp) = g(p)dp$. A partir de la loi jointe de (D_1, \dots, D_n) , on peut calculer numériquement g et la courbe des primes *stop-loss* associée, i.e la fonction $k \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 (p - k)^+ g(p) dp$. La Figure 2.1 représente la densité g et la courbe des primes *stop-loss* associée pour $n = 3$ et pour plusieurs valeurs du paramètre de corrélation ρ .

⁶⁴Voir par exemple le paragraphe 2.2.3 pour une explication.

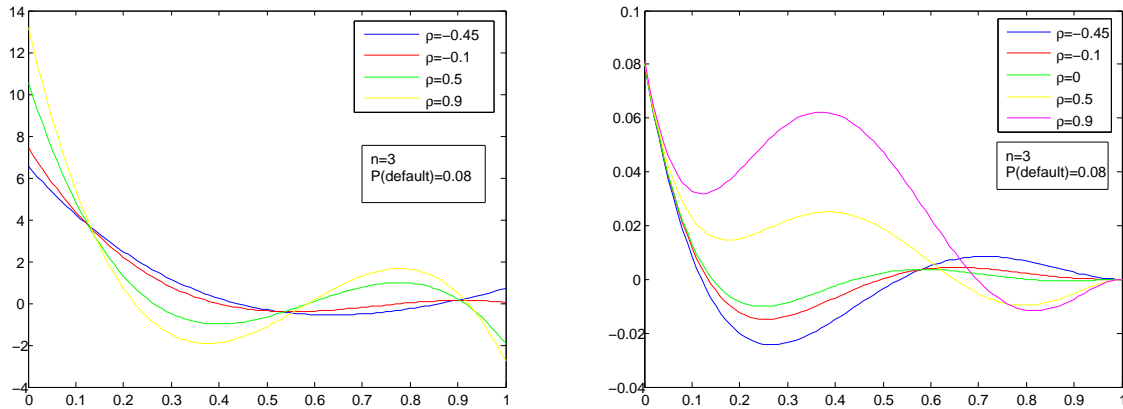


FIG. 2.1 – Ce graphique représente la densité mélange (à gauche) et la courbe des primes *stop-loss* correspondante (à droite) pour $n = 3$ et pour plusieurs valeurs du paramètre de corrélation ρ . La probabilité marginale de défaut $\mathbb{Q}(D_1 = 1)$ est égale à 0.08.

La Figure 2.2 représente la densité et la courbe des primes *stop-loss* pour $n = 4$ et pour plusieurs valeurs du paramètre de corrélation ρ .

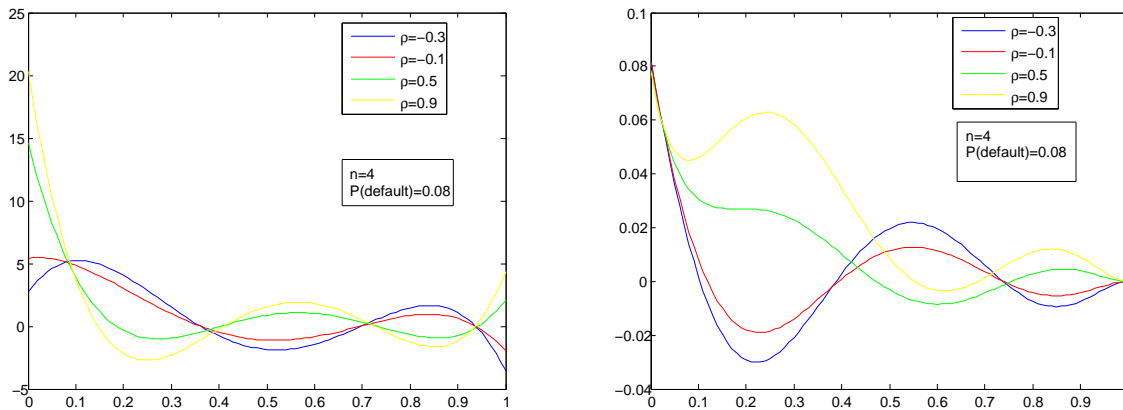


FIG. 2.2 – Ce graphique représente la densité mélange (à gauche) et la courbe des primes *stop-loss* correspondante (à droite) pour $n = 4$ et pour plusieurs valeurs du paramètre de corrélation ρ . La probabilité marginale de défaut $\mathbb{Q}(D_1 = 1)$ est égale à 0.08.

Or, d'après un résultat classique de Bäuerle et Müller (1998), lorsque l'on augmente le paramètre de corrélation ρ , le niveau de dépendance du vecteur gaussien (V_1, \dots, V_n) augmente au sens de l'ordre supermodulaire. En d'autres termes, si l'on note (V_1^*, \dots, V_n^*) un vecteur Gaussien échangeable de moyenne nulle, de variance unitaire et de paramètre de corrélation ρ^* , alors :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (V_1, \dots, V_n) \leq_{sm} (V_1^*, \dots, V_n^*). \quad (2.61)$$

Rappelons que l'ordre supermodulaire est invariant par toutes transformations monotones des composantes d'un vecteur⁶⁵. On a donc

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*), \quad (2.62)$$

avec $D_i^* = \mathbf{1}_{\{V_i^* \leq v_0\}}$, $i = 1, \dots, n$. Ainsi, dans le cas où $\rho < \rho^* < 0$, nous sommes exactement dans la configuration du problème posé à l'aide de la relation 2.60. Or, comme on peut l'observer à la figure 2.1 et à la figure 2.2, les courbes des primes *stop-loss* ne sont pas ordonnées comme on pourrait s'y attendre lorsque le paramètre de corrélation augmente. En conséquence, au moins pour les cas $n = 3$ et $n = 4$, la relation 2.60 n'est pas vérifiée lorsque l'on considère des mesures mélanges construites à partir de l'approche de Jaynes (1986) basée sur des polynômes de Legendre.

Pour conclure cette section, on a vu que le niveau de dépendance d'un vecteur (D_1, \dots, D_n) de Bernoulli échangeables (au sens de l'ordre supermodulaire) est lié à la dispersion du facteur mélangeant \tilde{p} (au sens de l'ordre convexe). On peut donc en déduire le résultat suivant sur la monotonie des primes de CDO.

Corollaire 2.2 *Considérons deux vecteurs $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ et $(D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*)$ de variables aléatoire de Bernoulli échangeables qui pour tout t peuvent être tirées de suites infinies $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}, \dots)$ et $(D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*, \dots)$ de Bernoulli échangeables. Notons \tilde{p}_t et \tilde{p}_t^* les probabilités mélanges associées. Si pour tout t , la dispersion du facteur mélange \tilde{p}_t augmente au sens de l'ordre convexe, i.e $\tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$, alors les primes de tranches senior augmentent et les primes de tranches equity diminuent.*

Preuve : Il suffit simplement d'appliquer le corollaire 2.1 et de reprendre les résultats établis au paragraphe 2.2.1 (la relation 2.21 et les propositions 2.9 et 2.10). \square

⁶⁵Si h_1, \dots, h_n sont des fonctions monotones (soit toutes décroissantes ou soit toutes croissantes), alors $(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (Y_1, \dots, Y_n) \Rightarrow (h_1(X_1), \dots, h_n(X_n)) \leq_{sm} (h_1(Y_1), \dots, h_n(Y_n))$.

2.4 Monotonie des primes de CDO dans les modèles à facteur

Dans les sections précédentes, nous avons établi des résultats de comparaison non triviaux concernant les primes de tranche de CDO et certaines mesures de risque sur la perte agrégée pour différentes configurations théoriques de la structure de dépendance des temps de défaut. Nous avons étudié en particulier le cas de la comonotonie, de l'indépendance, le cas d'un portefeuille infiniment granulaire et le cas de l'échangeabilité. Nous verrons dans cette section que ces derniers résultats s'appliquent naturellement à l'analyse de la dépendance dans la classe des modèles à facteur. En effet, pour la plupart des approches paramétriques décrite au chapitre 1, il est possible d'étudier l'effet des paramètres régissant la dépendance sur les primes de CDO. Seuls les modèles à facteur où le ou les paramètres de dépendance agissent à la fois sur la structure de dépendance et sur les lois marginales seront écartées de l'analyse. Pour plus de lisibilité, nous reprendrons brièvement la description des modèles étudiés à la section 1.2. Nous examinerons en particulier les copules à facteur additif, les copules à facteur basées sur des processus de Lévy, les copules à facteur avec corrélation stochastique, les copules archimédiennes, les modèles structurels multivariés et les modèles Poisson multivariés.

Notons de plus que cette partie est essentiellement basée sur l'article de Cousin et Laurent (2008a) mais également sur les articles de Burtschell et al. (2007) et Burtschell et al. (2008). D'autres applications des résultats présentés précédemment sont décrites par Denuit et Frostig (2007).

2.4.1 Copules à facteur

Cette section a pour but d'étudier l'impact des paramètres de dépendance sur les primes de CDO pour les modèles à facteur basés sur des fonctions copules. Le lecteur est renvoyé au paragraphe 1.2.1 du chapitre 1 pour une analyse comparative des performances de ces modèles dans le contexte de l'évaluation des tranches de CDO.

Copules à facteur additif

Dans les modèles à facteur additif, la structure de dépendance des variables latentes V_1, \dots, V_n est décrite par la relation suivante :

$$V_i = \rho V + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.63)$$

où $V, \bar{V}_i, i = 1, \dots, n$ sont des variables aléatoires indépendantes et $0 \leq \rho \leq 1$. De plus, on désigne par H la fonction de répartition de V et par \bar{H} la fonction de répartition commune à $\bar{V}_i, i = 1 \dots n$. Les variables latentes V_1, \dots, V_n ont donc même loi marginale égale à H_ρ . Bien que H et \bar{H} ne dépendent pas du paramètre de dépendance dans notre approche, ce n'est pas toujours le cas de la loi des variables latentes obtenue par convolution.

Si F_1, \dots, F_n désignent les lois marginales des temps de défaut, ces derniers sont définis par :

$$\tau_i = F_i^{-1}(H_\rho(V_i)) \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.64)$$

Nous supposons dans un premier temps que les lois marginales, F_1, \dots, F_n , sont les mêmes et égales à F , i.e $F_1 = \dots = F_n = F$. Dans ce cas, on peut remarquer que les temps de défaut forment un vecteur aléatoire échangeable. En conséquence, pour toute date t , les indicatrices de défaut $D_{i,t} = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}, i = 1, \dots, n, \dots$ sont des variables aléatoires de Bernoulli échangeables.

D'après le théorème de De Finetti, la probabilité mélange associée correspond à la probabilité conditionnelle de défaut. En effet, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \xrightarrow{p.s} \tilde{p} = \mathbb{E}[D_i | V] = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \quad (2.65)$$

La probabilité mélange \tilde{p}_t s'écrit alors :

$$\tilde{p}_t = \bar{H} \left(\frac{H_\rho^{-1}(F(t)) - \rho V}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right). \quad (2.66)$$

La proposition suivante montre que lorsque le paramètre de dépendance augmente de ρ à ρ^* ($\rho \leq \rho^*$), les probabilités mélanges associées \tilde{p}_t et \tilde{p}_t^* peuvent être ordonnées suivant l'ordre *less dangerous* (\leq_D).

Proposition 2.15 *Soient $\bar{V}_i, i = 1 \dots n$ des variables aléatoires continues et de support égal à \mathbb{R} . Si $\rho \leq \rho^*$, alors, pour tout t :*

$$\tilde{p}_t = \bar{H} \left(\frac{H_\rho^{-1}(F(t)) - \rho V}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \leq_D \tilde{p}_t^* = \bar{H} \left(\frac{H_{\rho^*}^{-1}(F(t)) - \rho^* V}{\sqrt{1 - \rho^{*2}}} \right). \quad (2.67)$$

Preuve : Notons G_t (resp. G_t^*) la fonction de répartition de \tilde{p}_t (resp. \tilde{p}_t^*). Selon la définition 2.2, il suffit de montrer que la différence $G_t - G_t^*$ change de signe une seule fois et passe du signe négatif au signe positif. On remarque d'abord que G_t peut s'exprimer ainsi :

$$G_t(p) = 1 - H \left(\frac{H_\rho^{-1}(F(t)) - \sqrt{1 - \rho^2} \bar{H}^{-1}(p)}{\rho} \right). \quad (2.68)$$

Mais comme H est croissante et ne dépend pas de ρ , on peut montrer que la différence $G_t(p) - G_t^*(p)$ possède le même signe que la fonction h définie ci-dessous :

$$h(p) = \left(\rho^* \sqrt{1 - \rho^2} - \rho \sqrt{1 - \rho^{*2}} \right) \bar{H}^{-1}(p) + \rho H_{\rho^*}^{-1}(F(t)) - \rho^* H_\rho^{-1}(F(t)) = A \bar{H}^{-1}(p) - B. \quad (2.69)$$

Comme $A \geq 0$, h est croissante en p . De plus, $\lim_{p \rightarrow 0} h(p) = -\infty$ et $\lim_{p \rightarrow 1} h(p) = +\infty$. Il existe donc $0 \leq p_0 \leq 1$ tel que $h(p) \leq 0$ pour tout $p < p_0$ et $h(p) \geq 0$ pour tout $p \geq p_0$, ce qui conclut la preuve. \square .

Comme $\mathbb{E}[\tilde{p}_t] = \mathbb{E}[\tilde{p}_t^*] = F(t)$, d'après les propositions 2.2 et 2.3, on en déduit l'ordre convexe sur les probabilités mélanges, i.e, pour tout t , $\tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$. Le corollaire 2.2 permet de conclure quant à la monotonie des primes de tranches de CDO. Augmenter le paramètre de corrélation ρ conduit à une augmentation des primes pour les tranches *senior* et une diminution des primes pour les tranches *equity*. Cette approche inclut en particulier la copule gaussienne à un facteur, la copule double- t (Hull et White (2004)), la copule NIG (Guegan et Houdain (2005)), la copule double-NIG (Kalemanova et al. (2007)) et la copule double Variance Gamma (Moosbrucker (2006)). De plus, cela prouve pour tous ces modèles que lorsqu'il existe un paramètre de dépendance implicite correspondant aux primes de marché de tranches *equity* $[0, b]$ (ou *base tranches*), ce paramètre est unique (puisque ces dernières sont monotones en le paramètre de dépendance). En particulier, la structure de *base correlation* est unique lorsqu'elle existe.

Pour la copule gaussienne et pour la copule de Student, il est possible d'établir les mêmes résultats de monotonie sur les primes de CDO dans le cas plus réaliste où les marginales des temps de défaut sont hétérogènes ($F_1 \neq \dots \neq F_n$). En effet, on peut montrer directement pour ces deux modèles que :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*), \quad (2.70)$$

Dans le cas de la copule gaussienne, les variables latentes forment un vecteur gaussien de moyenne nulle et de matrice variance-covariance $\Sigma = (\Sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $\Sigma_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\Sigma_{i,j} = \rho^2$ sinon. D'après un résultat classique de Bäuerle et Müller (1998), généralisé par Müller et Scarsini (2000), Müller (2001), une augmentation des termes non diagonaux de la matrice de corrélation Σ d'un vecteur gaussien entraîne une augmentation du vecteur au sens de l'ordre supermodulaire. Ainsi, on a dans le cas de la copule gaussienne :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (V_1, \dots, V_n) \leq_{sm} (V_1^*, \dots, V_n^*), \quad (2.71)$$

ce qui entraîne une comparaison des vecteurs des temps de défaut au sens de l'ordre supermodulaire (relation 2.70) par invariance de cette ordre par transformations monotones. La cas de la copule de Student peut se traiter par un raisonnement analogue (Voir Burtschell et al. (2008) pour une description détaillée du modèle).

Copules à facteur basées sur des processus de Lévy

Pour les copules à facteur basées sur des processus de Lévy, la structure de dépendance des variables latentes V_1, \dots, V_n est décrite par la relation suivante :

$$V_i = V_\rho + \bar{V}_{i,1-\rho}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.72)$$

où $0 \leq \rho \leq 1$. V_ρ est simplement la valeur d'un processus de Lévy $(V_t)_{0 \leq t \leq 1}$ au temps $t = \rho$ et $\bar{V}_{i,1-\rho}$ est la valeur d'un processus de Lévy $(\bar{V}_{i,t})_{0 \leq t \leq 1}$ au temps $t = 1 - \rho$. Les processus $(V_t)_{0 \leq t \leq 1}$ et $(\bar{V}_{i,t})_{0 \leq t \leq 1}$, $i = 1, \dots, n$ sont supposés être des copies indépendantes d'un même processus de Lévy $(\bar{X}_t)_{0 \leq t \leq 1}$. Comme les accroissements d'un processus de Lévy sont indépendants et stationnaires, les variables latentes ont même loi marginale que l'on note H . Les temps de défaut τ_1, \dots, τ_n sont définis par :

$$\tau_i = F_i^{-1}(H(V_i)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.73)$$

si F_1, \dots, F_n désignent leur loi marginale.

La proposition suivante montre que lorsque le paramètre ρ augmente, le niveau de dépendance du vecteur des temps de défaut augmente au sens de l'ordre supermodulaire.

Proposition 2.16 Soient (τ_1, \dots, τ_n) le vecteur des temps de défaut associé au paramètre de dépendance ρ et $(\tau_1^*, \dots, \tau_n^*)$ le vecteur des temps de défaut associé à ρ^* . Alors,

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*). \quad (2.74)$$

Preuve : Soient $1 \geq \rho^* \geq \rho$. Pour un paramètre de dépendance égal à ρ^* , le modèle est associé à la représentation suivante des variables latentes :

$$V_i^* = V_{\rho^*}^* + \bar{V}_{i,1-\rho^*}^*, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.75)$$

où $(V_t)_{0 \leq t \leq 1}$, $(\bar{V}_{i,t})_{0 \leq t \leq 1}$, $(V_t^*)_{0 \leq t \leq 1}$ et $(\bar{V}_{i,t}^*)_{0 \leq t \leq 1}$ sont des copies indépendantes d'un même processus de Lévy $(X_t)_{0 \leq t \leq 1}$. Ce dernier modèle est équivalent à :

$$V_i^* = V_\rho + V_{\rho^* - \rho} + \bar{V}_{i,1-\rho^*}^*, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.76)$$

Soit $W = V_\rho$, $Z_i = \bar{V}_{i,1-\rho}$, $i = 1, \dots, n$, $V = V_{\rho^* - \rho}$, $U_i = \bar{V}_{i,1-\rho^*}^*$, $i = 1, \dots, n$. On définit les fonctions g_i et \tilde{g}_i telles que $g_i(Z_i, W) = Z_i + W$, $i = 1, \dots, n$ et $\tilde{g}_i(U_i, V, W) = U_i + V + W$, $i = 1, \dots, n$. (V, W) est un vecteur aléatoire indépendant de U_i, Z_i , $i = 1, \dots, n$. Pour tout w , $\tilde{g}_i(U_i, V, w) = U_i + V + w \stackrel{d}{=} g_i(Z_i, w) = Z_i + w$. Notons, de plus que \tilde{g}_i est croissante en V . Cela correspond exactement au modèle 3.2 de Bäuerle et Müller (1998). En appliquant leur résultat, on conclure immédiatement que $(V_1, \dots, V_n) \leq_{sm} (V_1^*, \dots, V_n^*)$. Le niveau de dépendance entre les variables latentes augmente au sens de l'ordre supermodulaire lorsque le paramètre de dépendance ρ augmente. La proposition 2.16 est donc vérifiée puisque l'ordre supermodulaire est invariant par transformations monotones. \square

Copules à facteur avec corrélation stochastique

Pour les copules à facteur avec corrélation stochastique, les variables latentes sont décrites par la relation :

$$V_i = \tilde{\rho}_i V + \sqrt{1 - \tilde{\rho}_i^2} \bar{V}_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.77)$$

où V et \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes de loi Normale centrée réduite. Les paramètres de dépendance $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$ sont supposés être des variables aléatoires à valeur dans $[0, 1]$ indépendantes de V et \bar{V}_i , $i = 1, \dots, n$. Il en résulte que les variables latentes sont simplement de loi marginale Normale centrée réduite. Si l'on note F_1, \dots, F_n les lois marginales des temps de défaut, ces derniers sont définis par la relation suivante :

$$\tau_i = F_i^{-1}(\Phi(V_i)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.78)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite.

Dans le cas où $F_1 = \dots = F_n = F$ et lorsque les paramètres de corrélation $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$ sont indépendants et identiquement distribués, on peut remarquer que les temps de défaut sont échangeables. Il en est de même des indicatrices de défaut $D_{1,t}, \dots, D_{n,t}$ pour toute date t . Grâce à la remarque 2.34, la probabilité mélange \tilde{p}_t associée à cette suite de Bernoulli échangeables correspond à la probabilité conditionnelle de défaut $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t \mid V)$ et s'écrit :

$$\tilde{p}_t = \int_0^1 \Phi \left(\frac{-\rho V + \Phi^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) G(d\rho), \quad (2.79)$$

où G représente la loi commune de $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$.

La proposition suivante montre que lorsque les paramètres de dépendance $\tilde{\rho}_i$ augmente au sens de la dominance stochastique à l'ordre 1, la dispersion de la probabilité mélange augmente également au sens de l'ordre convexe.

Proposition 2.17 *Soit \tilde{p}_t la probabilité mélange associée aux paramètres de dépendance $\tilde{\rho}_i$, $i = 1, \dots, n$ et \tilde{p}_t^* la probabilité mélange associée à $\tilde{\rho}_i^*$, $i = 1, \dots, n$. Alors :*

$$\tilde{\rho}_1 \leq_{st} \tilde{\rho}_1^* \Rightarrow \tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*. \quad (2.80)$$

Preuve : D'après la proposition 2.1, si $\tilde{\rho}_1 \leq_{st} \tilde{\rho}_1^*$, il existe une variable aléatoire $\tilde{\nu}_1$ positive et indépendante de $V, \tilde{V}_i, i = 1, \dots, n$ telle que $\tilde{\rho}_1^* \stackrel{d}{=} \tilde{\rho}_1 + \tilde{\nu}_1$. Remarquons de plus que $\hat{p}_t \stackrel{d}{=} \mathbb{E}[\hat{p}_t | V]$ et $\tilde{p}_t^* \stackrel{d}{=} \mathbb{E}[\tilde{p}_t^* | V]$ où :

$$\hat{p}_t = \Phi \left(\frac{-\tilde{\rho}_1 V + \Phi^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - \tilde{\rho}_1^2}} \right) \text{ et } \tilde{p}_t^* = \Phi \left(\frac{-(\tilde{\rho}_1 + \tilde{\nu}_1)V + \Phi^{-1}(F(t))}{\sqrt{1 - (\tilde{\rho}_1 + \tilde{\nu}_1)^2}} \right). \quad (2.81)$$

Mais comme $\mathbb{E}[\hat{p}_t | \tilde{\rho}_1, \tilde{\nu}_1] = \mathbb{E}[\tilde{p}_t^* | \tilde{\rho}_1, \tilde{\nu}_1] = F(t)$, par la Proposition 2.15, on obtient :

$$\hat{p}_t | (\tilde{\rho}_1, \tilde{\nu}_1) \leq_{cx} \tilde{p}_t^* | (\tilde{\rho}_1, \tilde{\nu}_1). \quad (2.82)$$

On peut achever la preuve en intégrant les deux cotés de cette dernière inégalité par rapport à la loi de $(\tilde{\rho}_1, \tilde{\nu}_1)$. \square .

Le corollaire 2.2 permet de conclure quant à la monotonie des primes de tranches de CDO.

Lorsqu'aucune hypothèse n'est émise concernant les lois marginales des temps de défaut et les paramètres de corrélation, on peut de manière similaire ordonner le vecteur des temps de défaut suivant l'ordre supermodulaire :

Proposition 2.18 Soient (τ_1, \dots, τ_n) le vecteur des temps de défaut associé au paramètre de dépendance $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n$ et $(\tau_1^*, \dots, \tau_n^*)$ le vecteur des temps de défaut associé à $\tilde{\rho}_1^*, \dots, \tilde{\rho}_n^*$. Nous supposons de plus que $\tilde{\rho}_i, \tilde{\rho}_i^*, i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires de $[0, 1]$ indépendantes de $V, \tilde{V}_i, i = 1, \dots, n$. Alors,

$$\tilde{\rho}_i \leq_{st} \tilde{\rho}_i^*, i = 1, \dots, n \Rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*). \quad (2.83)$$

Preuve : Les variables latentes dans le modèle associé aux paramètres de corrélation $\tilde{\rho}_1^*, \dots, \tilde{\rho}_n^*$ sont représentées par :

$$V_i^* = \tilde{\rho}_i^* V + \sqrt{1 - \tilde{\rho}_i^{*2}} \tilde{V}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.84)$$

Si $\tilde{\rho}_i \leq_{st} \tilde{\rho}_i^*, i = 1, \dots, n$, il existe des variables aléatoires positives $\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n$, indépendantes de $V, \tilde{V}_i, i = 1, \dots, n$ et telles que :

$$\tilde{\rho}_1^* \stackrel{d}{=} \tilde{\rho}_1 + \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\rho}_n^* \stackrel{d}{=} \tilde{\rho}_n + \tilde{\nu}_n. \quad (2.85)$$

Alors, $(V_1, \dots, V_n) | \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n$ et $(V_1^*, \dots, V_n^*) | \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n$ sont des vecteurs gaussien de paramètre de corrélation respectivement égale à $\tilde{\rho}_1^* = \tilde{\rho}_1 + \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\rho}_n^* = \tilde{\rho}_n + \tilde{\nu}_n$ et $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n$. On en déduit que :

$$(V_1, \dots, V_n) | \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n \leq_{sm} (V_1^*, \dots, V_n^*) | \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_n, \tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_n. \quad (2.86)$$

Par invariance de l'ordre supermodulaire par mélanges, il en découle :

$$(V_1, \dots, V_n) \leq_{sm} (V_1^*, \dots, V_n^*). \quad (2.87)$$

En peut conclure en invoquant la propriété d'invariance de l'ordre supermodulaire par transformations monotones. \square

Cette dernière proposition peut être appliquée au modèle de corrélation stochastique de Burt-schell et al. (2007) où les paramètres de dépendance sont des variables aléatoires à 3 états décrites par la représentation à facteur suivante :

$$\tilde{\rho}_i = (1 - B_s)(1 - B_i)\rho + B_s, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.88)$$

où ρ est un réel de $[0, 1]$ et où B_s, B_1, \dots, B_n sont des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli et indépendantes de $V, \bar{V}_i, i = 1, \dots, n$. On note $q_s = \mathbb{Q}(B_s = 1)$ et $q = \mathbb{Q}(B_i = 1), i = 1, \dots, n$. La fonction de répartition G de $\tilde{\rho}_i, i = 1, \dots, n$ s'écrit simplement :

$$G(u) = \mathbb{Q}(\tilde{\rho}_i \leq u) = \begin{cases} (1 - q_s)q, & 0 \leq u < \rho, \\ (1 - q_s), & \rho \leq u < 1, \\ 1, & u = 1. \end{cases} \quad (2.89)$$

Ainsi si l'on augmente les paramètres ρ ou q_s ou que l'on diminue le paramètre q et que l'on note G^* la fonction de répartition associée à cette transformation, on a :

$$G^*(u) \leq G(u), \quad \forall u \in [0, 1], \quad (2.90)$$

ce qui correspond par définition à une augmentation de $\tilde{\rho}_i, i = 1, \dots, n$, au sens de la dominance stochastique à l'ordre 1. En conséquence, par la proposition 2.18, on peut conclure qu'augmenter ρ , augmenter q_s ou diminuer q entraîne une augmentation de la prime des tranches *senior* et une diminution de la prime des tranches *equity*.

Copules archimédiennes

Rappelons qu'une copule archimédienne peut être associée à une fonction génératrice $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ continue et strictement décroissante et telle que $\varphi^{-1}(t) = \mathbb{E}[\exp(-tV)], t \in [0, +\infty]$ où V est une variable aléatoire positive. Autrement dit, φ^{-1} est la transformée de Laplace de V . Dans cet approche, les variables latentes sont alors décrites par la relation suivante (algorithme de Marshall et Olkin) :

$$V_i = \varphi^{-1} \left(\frac{-\ln \bar{V}_i}{V} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.91)$$

où $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Si l'on note F_1, \dots, F_n les lois marginales des temps de défaut, ces derniers sont définis par :

$$\tau_i = F_i^{-1}(V_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.92)$$

Dans le cas où $F_1 = \dots = F_n = F$, on peut remarquer que les temps de défaut sont échangeables. Il en est de même des indicatrices de défaut $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ pour toute date t . Grâce à la remarque 2.34, la probabilité mélange \tilde{p}_t associée à cette suite de Bernoulli échangeables correspond à la probabilité conditionnelle de défaut $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t | V)$ et s'écrit :

$$\tilde{p}_t = \exp(-\varphi(F(t))V). \quad (2.93)$$

Considérons une autre copule archimédienne de générateur ψ et notons \tilde{p}^* sa probabilité mélange. La proposition suivante montre que l'on peut comparer \tilde{p} et \tilde{p}^* au sens de l'ordre convexe à l'aide d'une condition sur les fonctions génératrices φ et ψ .

Proposition 2.19 Soit V (resp. V^*) une variable aléatoire positive de transformée de Laplace φ^{-1} (resp. ψ^{-1}). Soit \mathcal{L}_∞^* l'ensemble des fonction croissante $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui admettent des dérivées successives de signe alternées :

$$\mathcal{L}_\infty^* = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid (-1)^{n-1} f^{(n)} \geq 0, \forall n \geq 1\}.$$

Considérons les probabilités mélanges $\tilde{p}_t = \exp(-\varphi(F(t))V)$ et $\tilde{p}_t^* = \exp(-\psi(F(t))V^*)$ associées respectivement aux copules archimédiennes de fonction génératrice φ et ψ . Alors,

$$\varphi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty^* \Rightarrow \tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*, \text{ pour tout } t. \quad (2.94)$$

Preuve : Supposons que $\varphi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty^*$. D'après le théorème 3.1 de Wei et Hu (2002), pour toute dimension n , la copule archimédienne générée par φ est plus petite que la copule archimédienne générée par ψ au sens de l'ordre supermodulaire. En d'autres termes, $(V_1, \dots, V_n) \leq_{sm} (V_1^*, \dots, V_n^*)$ est vérifiée pour tout n lorsque (V_1, \dots, V_n) (resp. (V_1^*, \dots, V_n^*)) correspond à la copule archimédienne de fonction génératrice φ (resp. ψ). De plus, selon l'algorithme de Marshall-Olkin décrit par la relation 2.91, V_1, \dots, V_n, \dots et $V_1^*, \dots, V_n^*, \dots$ forment une suite infinie de variables aléatoires échangeables. Soient $D_i(F(t)) = 1_{\{V_i \leq F(t)\}}$ (resp. $D_i^*(F(t)) = 1_{\{V_i^* \leq F(t)\}}$) $i = 1, \dots, n, \dots$ la suite des indicatrices de défaut associée. Comme l'ordre supermodulaire est invariant par transformations monotones,

$$(D_1(F(t)), \dots, D_n(F(t))) \leq_{sm} (D_1^*(F(t)), \dots, D_n^*(F(t))), \quad (2.95)$$

pour tout n et tout t . En appliquant le théorème 2.4, les probabilités mélanges correspondantes \tilde{p}_t et \tilde{p}_t^* sont donc ordonnées suivant l'ordre convexe, i.e $\tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$ est vérifiée pour tout t . \square

On peut également ordonner les primes de tranches de CDO dans le cas où les marginales des temps de défaut sont différentes. En effet, d'après Wei et Hu (2002), cette même condition sur les fonctions génératrices entraîne l'ordre supermodulaire pour les vecteurs des temps de défaut :

$$\varphi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty^* \Rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*). \quad (2.96)$$

Cette dernière approche inclut plusieurs familles paramétriques de copules archimédiennes comme les copules de Clayton, les copules de Gumbel ou les copules de Frank. Nous rappelons dans le tableau 2.1 l'expression de la fonction génératrice associée à ces dernières copules.

Copule	Générateur $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$	Paramètre	Loi de V
Clayton	$t^{-\theta} - 1$	$\theta \geq 0$	Gamma($1/\theta$)
Gumbel	$(-\ln(t))^\theta$	$\theta \geq 1$	α -Stable, $\alpha = 1/\theta$
Franck	$-\ln [(1 - e^{-\theta t})/(1 - e^{-\theta})]$	\mathbb{R}^*	Logarithmic series

TAB. 2.1 – Les copules de Clayton, Gumbel et Frank et leur fonction génératrice.

Pour chacune de ces familles de copules, considérons deux paramètres θ et θ^* associés respectivement aux fonctions génératrice φ et ψ . On peut facilement vérifier que :

$$\theta \leq \theta^* \Rightarrow \varphi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty^* \quad (2.97)$$

⁶⁶Le livre de Joe (1997) fournit d'autres exemples de copules archimédiennes pour lesquelles cette relation est vérifiée.

En conséquence, d'après la Proposition 2.19 lorsque le paramètre de dépendance augmente pour la copule de Clayton, de Gumbel ou de Frank $\theta \leq \theta^*$, le niveau de variabilité de la probabilité mélange augmente au sens de l'ordre convexe, $\tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$, pour toute date t . Ce qui conduit d'après le corollaire 2.2 à une augmentation de la prime des tranches *senior* et une diminution de la prime des tranches *equity*.

La figure 2.3 représente la fonction de répartition de la probabilité mélange correspondant à la copule de Clayton et pour différentes valeurs du paramètre de dépendance θ . On peut observer que lorsque θ augmente les lois mélanges sont ordonnées suivant l'ordre *less dangerous* (\leq_D) (condition de croisement des fonctions de répartition) qui est plus fort que l'ordre convexe.

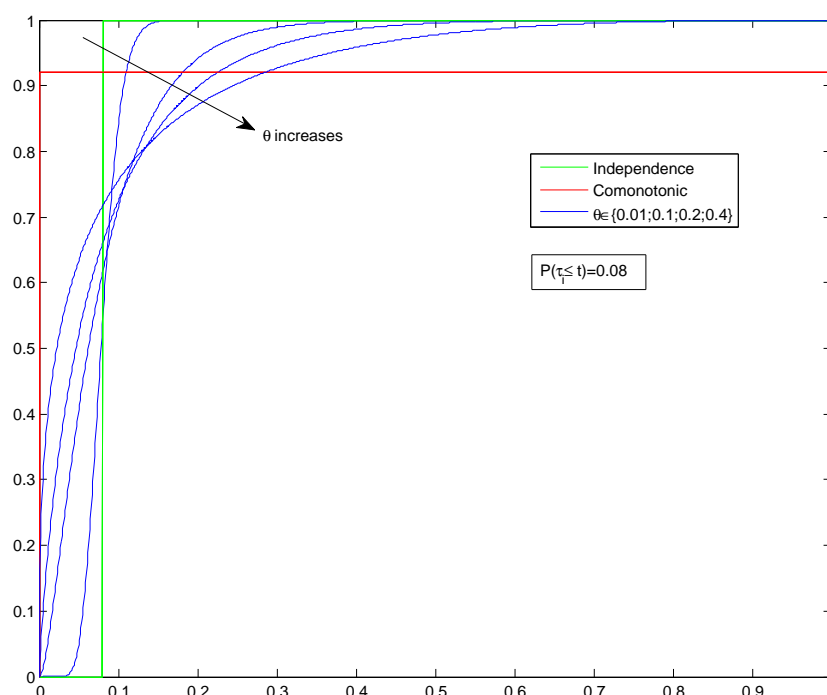


FIG. 2.3 – Ce graphique représente les fonctions de répartition de la probabilité mélange associée à la copule de Clayton pour plusieurs valeurs du paramètre de dépendance.

2.4.2 Modèles structurels multivariés

Nous avons vu au paragraphe 1.2.2 du chapitre 1, une description des modèles structurels multivariés et leur application dans le contexte de l'évaluation des tranches de CDO. Nous proposons ici de compléter cette partie par une étude comparative de la dépendance dans ces modèles. Nous montrons en particulier que les indicatrices de défaut peuvent être ordonnées suivant l'ordre supermodulaire lorsque la dépendance entre la dynamique des actifs augmente. Nous considérons n entreprises qui peuvent faire défaut sur une période $[0, T]$. L'évolution de la valeur de leur actif est décrite par n mouvements Brownien corrélés X^1, \dots, X^n tels que :

$$X_t^i = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^i, \quad i = 1 \dots n, \quad (2.98)$$

où $W, W^i, i = 1, \dots, n$ sont des processus de Wiener standards indépendants et où $0 \leq \rho \leq 1$ est un paramètre de dépendance.

On suppose que le défaut de l'entité i survient lorsque le processus X^i devient plus petit qu'une constante a_i pour la première fois. L'instant de défaut du nom i est donc défini par

$$\tau_i = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \mid X_t^i \leq a_i\}, \quad i = 1 \dots n. \quad (2.99)$$

Nous souhaitons montrer qu'une augmentation de la valeur du paramètre de dépendance ρ conduit à une augmentation du niveau de dépendance entre les indicatrices de défaut, pour tout date t , au sens de l'ordre supermodulaire.

Proposition 2.20 Soient τ_i (resp. τ_i^*), $i = 1, \dots, n$, les instants de défaut de n entités de référence dont les actifs ont un niveau de corrélation égale à ρ (resp. ρ^*) suivant le modèle structurel décrit ci-dessus. On considère $D_i = 1_{\{\tau_i \leq T\}}$ (resp. $D_i^* = 1_{\{\tau_i^* \leq T\}}$), $i = 1, \dots, n$, les indicatrices de défaut associées au paramètre ρ (resp. ρ^*) à la date T . Alors,

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow (D_1, \dots, D_n) \leq_{sm} (D_1^*, \dots, D_n^*). \quad (2.100)$$

Preuve : Soient (X_t^1, \dots, X_t^n) (resp. (Y_t^1, \dots, Y_t^n)) le vecteur de actifs à la date t associé au paramètre de dépendance ρ (resp. ρ^*). Comme l'événement $\{\tau_i \leq T\}$ (resp. $\{\tau_i^* \leq T\}$) est égal à $\{\min\{X_t^i \mid t \in [0, T]\} \leq a_i\}$ (resp. $\{\min\{Y_t^i \mid t \in [0, T]\} \leq a_i\}$), les indicatrices de défaut D_i (resp. D_i^*) $i = 1, \dots, n$, sont des fonctions décroissantes de la valeur minimum prise par les actifs sur la période $[0, T]$. Comme l'ordre supermodulaire est stable par transformations monotones des composantes d'un vecteur, il suffit de montrer que :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow \left(\min_{t \in [0, T]} X_t^1, \dots, \min_{t \in [0, T]} X_t^n \right) \leq_{sm} \left(\min_{t \in [0, T]} Y_t^1, \dots, \min_{t \in [0, T]} Y_t^n \right). \quad (2.101)$$

Mais comme $\rho \leq \rho^*$, pour tout date t fixée, (X_t^1, \dots, X_t^n) et (Y_t^1, \dots, Y_t^n) sont des vecteurs Gaussiens comparables au sens de l'ordre supermodulaire⁶⁷, i.e $(X_t^1, \dots, X_t^n) \leq_{sm} (Y_t^1, \dots, Y_t^n)$. La preuve de la proposition peut être directement achevée en utilisant les lemmes suivants. \square

Lemme 2.1 Considérons quatre vecteurs aléatoires indépendants de \mathbb{R}^n , $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$. Définissons de plus la fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (X^1 + \min(Y^1, 0), \dots, X^n + \min(Y^n, 0)). \quad (2.102)$$

Alors :

$$\mathbf{X}_1 \leq_{sm} \mathbf{Y}_1, \mathbf{X}_2 \leq_{sm} \mathbf{Y}_2 \Rightarrow \varphi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \leq_{sm} \varphi(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2). \quad (2.103)$$

Preuve : En utilisant la propriété d'invariance de l'ordre supermodulaire par transformations monotones, les relations

$$(X_1^1 + \alpha_1, \dots, X_1^n + \alpha_n) \leq_{sm} (Y_1^1 + \alpha_1, \dots, Y_1^n + \alpha_n) \quad (2.104)$$

et

$$(\beta_1 + \min(X_2^1, 0), \dots, \beta_n + \min(X_2^n, 0)) \leq_{sm} (\beta_1 + \min(Y_2^1, 0), \dots, \beta_n + \min(Y_2^n, 0)) \quad (2.105)$$

⁶⁷Voir paragraphe sur les copules à facteur additif pour plus de détails.

sont vérifiées pour tout vecteur réel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Comme l'ordre supermodulaire est stable par mélange et puisque les vecteurs \mathbf{X}_1 , \mathbf{Y}_1 , $\min(\mathbf{X}_2, 0)$ et $\min(\mathbf{Y}_2, 0)$, sont indépendants, on obtient :

$$\varphi(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \leq_{sm} (Y_1^1 + \min(X_2^1, 0), \dots, Y_1^n + \min(X_2^n, 0)) \quad (2.106)$$

et

$$(Y_1^1 + \min(X_2^1, 0), \dots, Y_1^n + \min(X_2^n, 0)) \leq_{sm} \varphi(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2). \quad (2.107)$$

Par transitivité de l'ordre supermodulaire, les relations 2.106 et 2.107 conduisent au résultat souhaité. \square

Lemme 2.2 *Soit T une date fixée. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux processus indépendants, continus, à valeur dans \mathbb{R}^n et à accroissements indépendants et stationnaires tels que pour toute date t de $[0, T]$:*

$$\mathbf{X}_t \leq_{sm} \mathbf{Y}_t. \quad (2.108)$$

Notons

$$M^X = \left(\min_{t \in [0, T]} X_t^1, \dots, \min_{t \in [0, T]} X_t^n \right) \quad (2.109)$$

et

$$M^Y = \left(\min_{t \in [0, T]} Y_t^1, \dots, \min_{t \in [0, T]} Y_t^n \right), \quad (2.110)$$

les vecteurs des minima associés à \mathbf{X} et \mathbf{Y} sur la période $[0, T]$. Alors,

$$M^X \leq_{sm} M^Y. \quad (2.111)$$

Preuve : Considérons la subdivision de $[0, T]$ définie par $S_m = (t_0 = 0, t_1, \dots, t_m = T)$. Les vecteurs des minima M_m^X et M_m^Y associés à \mathbf{X} et \mathbf{Y} sur cette subdivision s'écrivent :

$$M_m^X = \left(\min_{t_i \in S_m} X_{t_i}^1, \dots, \min_{t_i \in S_m} X_{t_i}^n \right), \quad (2.112)$$

et :

$$M_m^Y = \left(\min_{t_i \in S_m} Y_{t_i}^1, \dots, \min_{t_i \in S_m} Y_{t_i}^n \right). \quad (2.113)$$

Montrons d'abord que pour $m \geq 2$, $M_m^X \leq_{sm} M_m^Y$. Notons $\Delta \mathbf{X}_{t_i} = \mathbf{X}_{t_i} - \mathbf{X}_{t_{i-1}}$, (resp. $\Delta \mathbf{Y}_{t_i} = \mathbf{Y}_{t_i} - \mathbf{Y}_{t_{i-1}}$), $i = 1, \dots, m$ les accroissements de \mathbf{X} , (resp. \mathbf{Y}) sur la subdivision S_m . On suppose pour simplifier que $\mathbf{X}_0 = 0$ et $\mathbf{Y}_0 = 0$. L'idée est que M_m^X (resp. M_m^Y) peut s'écrire comme une fonction des accroissements $\Delta \mathbf{X}_{t_i}$ (resp. $\Delta \mathbf{Y}_{t_i}$), $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} M_m^X &= \Delta \mathbf{X}_{t_1} + \min(\Delta \mathbf{X}_{t_2} + \min(\Delta \mathbf{X}_{t_3} + \dots + \min(\Delta \mathbf{X}_{t_m}, 0), \dots, 0), 0) \\ &= \varphi(\Delta \mathbf{X}_{t_1}, \varphi(\dots, \varphi(\Delta \mathbf{X}_{t_{m-1}}, \Delta \mathbf{X}_{t_m}))), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} M_m^Y &= \Delta \mathbf{Y}_{t_1} + \min(\Delta \mathbf{Y}_{t_2} + \min(\Delta \mathbf{Y}_{t_3} + \dots + \min(\Delta \mathbf{Y}_{t_m}, 0), \dots, 0), 0) \\ &= \varphi(\Delta \mathbf{Y}_{t_1}, \varphi(\dots, \varphi(\Delta \mathbf{Y}_{t_{m-1}}, \Delta \mathbf{Y}_{t_m}))), \end{aligned}$$

où la fonction φ est définie par la relation 2.102 du Lemme 2.1. Mais comme les accroissements de \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont stationnaires, on peut écrire

$$\Delta \mathbf{X}_{t_i} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}_{t_i-t_{i-1}} \leq_{sm} \mathbf{Y}_{t_i-t_{i-1}} \stackrel{d}{=} \Delta \mathbf{Y}_{t_i}, \quad (2.114)$$

pour tout $i = 1, \dots, m$. Par indépendances de \mathbf{X} , \mathbf{Y} et des accroissements de \mathbf{X} et de \mathbf{Y} , il en résulte que pour tout $i \neq j$, $\Delta \mathbf{X}_{t_i}$, $\Delta \mathbf{X}_{t_j}$, $\Delta \mathbf{Y}_{t_i}$ et $\Delta \mathbf{Y}_{t_j}$ sont des vecteurs aléatoires indépendants. Donc, pour tout $k = 2, \dots, m-1$, $\Delta \mathbf{X}_{t_{k-1}}$, $\varphi(\Delta \mathbf{X}_{t_k}, \varphi(\dots, \varphi(\Delta \mathbf{X}_{t_{m-1}}, \Delta \mathbf{X}_{t_m})))$, $\Delta \mathbf{Y}_{t_{k-1}}$ et $\varphi(\Delta \mathbf{Y}_{t_k}, \varphi(\dots, \varphi(\Delta \mathbf{Y}_{t_{m-1}}, \Delta \mathbf{Y}_{t_m})))$ sont indépendants. Par une utilisation successive du lemme 2.1, on obtient :

$$M_m^X \leq_{sm} M_m^Y, \quad (2.115)$$

pour tout $m \geq 2$. Considérons maintenant la suite $S_m = (t_0^m = 0, \dots, t_m^m, t_{m+1}^m = T)$, $m \geq 2$, de subdivision de $[0, T]$ dont le pas tend vers zero. Comme \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont des processus continus, alors pour tout $\omega \in \Omega$:

$$M_m^X(\omega) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} M^X(\omega) \quad \text{et} \quad M_m^Y(\omega) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} M^Y(\omega). \quad (2.116)$$

Cela entraîne également la convergence en loi et permet de conclure en utilisant la propriété de stabilité de l'ordre supermodulaire par passage à la limite (au sens de la limite en loi). \square

Enfin, la proposition 2.20 découle immédiatement du lemme 2.2. En outre, on peut remarquer que ce résultat est préservé lorsque les barrières sont représentées par des fonctions continues. Dans cet exemple et dans le cas échangeable, l'ordre supermodulaire sur les indicatrices de défaut ne peut être déduit de l'ordre convexe sur les probabilités mélanges puisque ces dernières ne peuvent pas s'exprimer analytiquement. Cependant, au moyen de simulations, on a tracé en figure 1.12 du paragraphe 1.2.2, la fonction de répartition empirique de la probabilité mélange dans un modèle structurel multivarié pour les niveaux de corrélation $\rho^2 = 30\%$ et $\rho^2 = 60\%$. Bien qu'il ne s'agisse pas d'une preuve formelle, on peut observer qu'une augmentation du paramètre de dépendance conduit à augmenter la loi de la probabilité mélange au sens de l'ordre *less dangerous* (\leq_D) (croisement unique des fonctions de répartition), et donc au sens de l'ordre convexe dans ce cas.

Il est également possible de comparer les vecteurs des temps de défaut suivant l'ordre supermodulaire dans cette approche. Si $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ représente le vecteur des actifs pour le paramètre de dépendance ρ et $\mathbf{Y}_t = (Y_t^1, \dots, Y_t^n)$ le vecteur des actifs pour le paramètre de dépendance ρ^* (voir equation 2.98), \mathbf{X}_t et \mathbf{Y}_t sont deux vecteurs gaussiens et on a :

$$\rho \leq \rho^* \Rightarrow \mathbf{X}_t \leq_{sm} \mathbf{Y}_t, \quad \text{pour tout } t. \quad (2.117)$$

Le théorème 6.2 de Bäuerle et al. (2008) permet de conclure que :

$$\rho \leq_{sm} \rho^* \Rightarrow (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq_{sm} (\tau_1^*, \dots, \tau_n^*), \quad (2.118)$$

où τ_1, \dots, τ_n (resp. $\tau_1^*, \dots, \tau_n^*$) désignent les temps de défaut associés au paramètre de dépendance ρ (resp. ρ^*) et décrits par la relation 2.99. D'autres résultats de comparaisons sont présentés par Bäuerle (2002) dans le cadre des modèles structurels multivariés.

Pour conclure, une augmentation du paramètre de corrélation dans un modèle standard de Cox multivarié entraîne une augmentation de la prime des tranches *senior* et une diminution de la primes des tranches *equity*.

2.4.3 Modèles Poisson multivariés

Nous avons vu au paragraphe 1.2.3 du chapitre 1 une description des modèles Poisson multivarié ou modèles à chocs communs et leur application à l'évaluation des tranches de CDO. Nous complétons ici ce dernier paragraphe par une analyse de la dépendance dans ces modèles. Par simplicité, nous nous restreindrons au cas où deux types de choc peuvent affecter l'économie. Le défaut d'un nom peut être déclenché soit par un choc idiosyncratique fatal (ou choc individuel), soit par un choc systématique non nécessairement fatal. Dans ce cas, le processus de Poisson qui gouverne le défaut du nom i s'écrit :

$$N_{i,t} = \bar{N}_{i,t} + \sum_{j=1}^{N_t} B_{i,j}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.119)$$

où N_t est un processus de Poisson de paramètre λ , $\bar{N}_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$ sont des processus de Poisson de paramètre commun $\bar{\lambda}$ et où $B_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j \geq 1$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de moyenne p . On suppose de plus que N_t , $\bar{N}_{i,t}$, $i = 1, \dots, n$, $B_{i,j}$, $i = 1, \dots, n$, $j \geq 1$ sont mutuellement indépendants. Finalement, les temps de défaut sont définis par :

$$\tau_i = \inf \{t \geq 0 \mid N_{i,t} > 0\}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.120)$$

Ainsi, l'arrivée d'un choc commun (un nouveau saut de N_t) peut affecter chaque nom du portefeuille de manière indépendante et avec la probabilité p .

On peut remarquer que dans cette approche, les temps de défaut forment un vecteur échangeable. Il en est de même des indicatrices de défaut $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ pour toute date t . Grâce à la remarque 2.34, la probabilité mélange \tilde{p}_t associée à cette suite de Bernoulli échangeables correspond à la probabilité conditionnelle de défaut $\mathbb{Q}(\tau_i \leq t \mid N_t)$. On peut déterminer aisément son expression ainsi que celle de sa fonction de répartition :

$$\tilde{p}_t = \mathbb{Q}(\tau_i \leq t \mid N_t) = 1 - (1 - p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t) \quad (2.121)$$

et

$$G(q) = \mathbb{Q}(\tilde{p}_t \leq q) = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) \quad \text{où} \quad (2.122)$$

$$n_0 = \left\lfloor \frac{\bar{\lambda}t + \ln(1 - q)}{\ln(1 - p)} \right\rfloor. \quad (2.123)$$

On cherche à analyser l'impact des paramètres $(\bar{\lambda}, p, \lambda)$ sur le niveau de dépendance des indicatrices de défaut $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ au sens de l'ordre supermodulaire. Rappelons que deux vecteurs aléatoires comparables selon l'ordre supermodulaire ont nécessairement les mêmes lois marginales. On peut remarquer que les temps de défaut sont de loi marginale exponentielle de paramètre $\bar{\lambda} + p\lambda$. Ainsi, si l'on note $(\bar{\lambda}, p, \lambda)$ et $(\bar{\lambda}^*, p^*, \lambda^*)$ les jeux de paramètres associés respectivement à $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t})$ et $(D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*)$, l'égalité suivante doit être respectée :

$$\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p^*\lambda^*. \quad (2.124)$$

En conséquence, suivant le paramètre que l'on maintient fixé, $\bar{\lambda}$, p ou λ , on peut effectuer trois types de comparaison :

1. $\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}$, $p^* \geq p$ et $\lambda^* \leq \lambda$: comparaison entre paramètres systématiques.
2. $p^* = p$, $\lambda^* \geq \lambda$ et $\bar{\lambda}^* \leq \bar{\lambda}$: comparaison entre intensité du choc systématique et intensité du choc idiosyncratique.
3. $\lambda^* = \lambda$, $p^* \geq p$ and $\bar{\lambda}^* \leq \bar{\lambda}$: comparaison entre probabilité de survie à un choc systématique et intensité d'un choc idiosyncratique.

Pour ces trois comparaisons, on va montrer que $\tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*$ et donc que $(D_{1,t}, \dots, D_{n,t}) \leq_{sm} (D_{1,t}^*, \dots, D_{n,t}^*)$. Concernant les comparaisons 2 et 3, on peut effectivement s'attendre à un accroissement du niveau de dépendance puisque l'on augmente un paramètre régissant le risque systématique au dépend d'un paramètre régissant le risque individuel. En ce qui concerne la première comparaison, ce résultat est beaucoup moins intuitif puisque l'on compare les paramètres p et λ qui gouvernent la dépendance. En d'autres termes, ce résultat montre que l'intensité du choc systématique a moins d'effet sur la structure de dépendance que la probabilité p que ce choc soit fatal. Les propositions suivantes, 2.21, 2.22 et 2.22, établissent formellement ces derniers résultats de comparaison pour les trois directions énoncées ci-dessus.

Proposition 2.21 Comparaison 1

Considérons les jeux de paramètres $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ et supposons que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p^*\lambda^*. \quad (2.125)$$

Si l'on suppose que $\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}$, alors les probabilités mélanges correspondantes $\tilde{p}_t = 1 - (1 - p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t)$ et $\tilde{p}_t^* = 1 - (1 - p^*)^{N_t^*} \exp(-\bar{\lambda}t)$ sont telles que :

$$\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda}, \quad p^* \geq p \quad \text{et} \quad \lambda^* \leq \lambda \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*. \quad (2.126)$$

Preuve : Il existe un réel $1 \leq \alpha \leq 1/p$ tel que $p^* = \alpha p$ et $\lambda^* = \lambda/\alpha$. Comme l'ordre convexe est stable par transformation linéaire, il suffit de montrer que $(1 - p)^{N_t} \leq_{cx} (1 - p^*)^{N_t^*}$. Comme N_t^* est un processus de Poisson de paramètre λ/α , on a :

$$N_t^* \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{N_t} B_i \quad (2.127)$$

où $(B_i)_{i \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires de Bernoulli de moyenne $1/\alpha$, indépendante de N_t . On peut remarquer de plus que :

$$\mathbb{E} \left[(1 - p^*)^{\sum_{i=1}^{N_t} B_i} \mid N_t \right] = \prod_{i=1}^{N_t} \mathbb{E} [(1 - \alpha p)^{B_i}] = (1 - p)^{N_t}, \quad (2.128)$$

ce qui conclut la preuve grâce au théorème de Strassen (théorème 2.1). \square

Proposition 2.22 Comparaison 2

Considérons les jeux de paramètres $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ et supposons que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p^*\lambda^*. \quad (2.129)$$

Si l'on suppose que $p^* = p$, alors les probabilités mélanges correspondantes $\tilde{p}_t = 1 - (1 - p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t)$ et $\tilde{p}_t^* = 1 - (1 - p)^{N_t^*} \exp(-\bar{\lambda}^*t)$ sont telles que :

$$p^* = p, \quad \lambda^* \geq \lambda \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}^* \leq \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_t \leq_{cx} \tilde{p}_t^*. \quad (2.130)$$

Preuve : Il existe un réel $\alpha \geq 0$ tel que $\lambda^* = \lambda + \alpha$ et $\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda} - \alpha p$. Comme l'ordre convexe est stable par transformations linéaires, il suffit de montrer que $(1-p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t) \leq_{cx} (1-p)^{N_t^*} \exp(-\bar{\lambda}^*t)$. Comme N_t^* est un processus de Poisson de paramètre $\lambda + \alpha$, il existe un processus de Poisson \tilde{N}_t de paramètre α , indépendant de N_t et tel que $N_t^* \stackrel{d}{=} N_t + \tilde{N}_t$. Mais, comme $\mathbb{E} \left[(1-p)^{\tilde{N}_t} \right] = \exp(-\alpha p t)$, on obtient :

$$\mathbb{E} \left[(1-p)^{N_t + \tilde{N}_t} \exp(-(\bar{\lambda} - \alpha p)t) \middle| N_t \right] = (1-p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t), \quad (2.131)$$

ce qui conclut la preuve grâce au théorème de Strassen (théorème 2.1). \square

Proposition 2.23 Comparaison 3

Considérons les jeux de paramètres $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ et supposons que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\bar{\lambda} + p\lambda = \bar{\lambda}^* + p^*\lambda^*. \quad (2.132)$$

Si l'on suppose que $\lambda^* = \lambda$, alors les probabilités mélanges correspondantes $\tilde{p}_t = 1 - (1-p)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}t)$ et $\tilde{p}_t^* = 1 - (1-p^*)^{N_t} \exp(-\bar{\lambda}^*t)$ sont telles que :

$$\lambda^* = \lambda, \quad p^* \geq p \quad \text{et} \quad \bar{\lambda}^* \leq \bar{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}_t \leq_D \tilde{p}_t^*. \quad (2.133)$$

Preuve : Considérons le réel α tel que $\alpha = p^* - p$. On peut écrire : $\bar{\lambda}^* = \bar{\lambda} - \alpha\lambda$. De la même manière que pour les copules à facteur additif, on va montrer que les probabilités mélanges peuvent être ordonnées suivant l'ordre less dangerous (leur fonction de répartition "se croisent" une seule fois). Connaissant l'expression de la fonction de répartition de \tilde{p}_t , G , et celle de \tilde{p}_t^* , G^* (équation 2.122), on peut étudier le signe de la différence $G - G^*$ qui ne dépend que du comportement de $n_0 - n_0^*$ par rapport à q . Cela revient à trouver les valeurs de q pour lesquelles l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{\bar{\lambda}t + \ln(1-q)}{\ln(1-p)} \leq \frac{(\bar{\lambda} - \alpha\lambda)t + \ln(1-q)}{\ln(1-(p+\alpha))}. \quad (2.134)$$

Il en découle que :

$$q \leq q_0 = 1 - \exp\left(-\frac{a}{b}t\right), \quad (2.135)$$

avec

$$\begin{cases} a = [\ln(1-p) - \ln(1-(p+\alpha))] \bar{\lambda} - \alpha\lambda \ln(1-p) \geq 0, \\ b = \ln\left(\frac{1-p}{1-(p+\alpha)}\right) \geq 0. \end{cases} \quad (2.136)$$

On a donc montrer qu'il existe un réel $q_0 \in [0, 1]$ tel que $F(q) - F^*(q) \leq 0$ pour tout $q < q_0$ et $F(q) - F^*(q) \geq 0$ sinon. Remarquons de plus que $\mathbb{E}[\tilde{p}] = \mathbb{E}[\tilde{p}^*] = 1 - \exp(-(\bar{\lambda} + p\lambda)t)$, ce qui entraîne finalement l'ordre convexe sur les probabilité mélanges, ie $\tilde{p} \leq_{cx} \tilde{p}^*$. \square

A titre illustratif, nous avons tracé en figure 2.4 la fonction de répartition de la probabilité mélange pour deux jeux de paramètres $(\bar{\lambda}, \lambda, p)$ et $(\bar{\lambda}^*, \lambda^*, p^*)$ définis comme dans la comparaison 3 (proposition 2.23). On peut observer que \tilde{p}_t ($p = 0.1$) est plus petite que \tilde{p}_t^* ($p = 0.8$) au sens de l'ordre less dangerous.

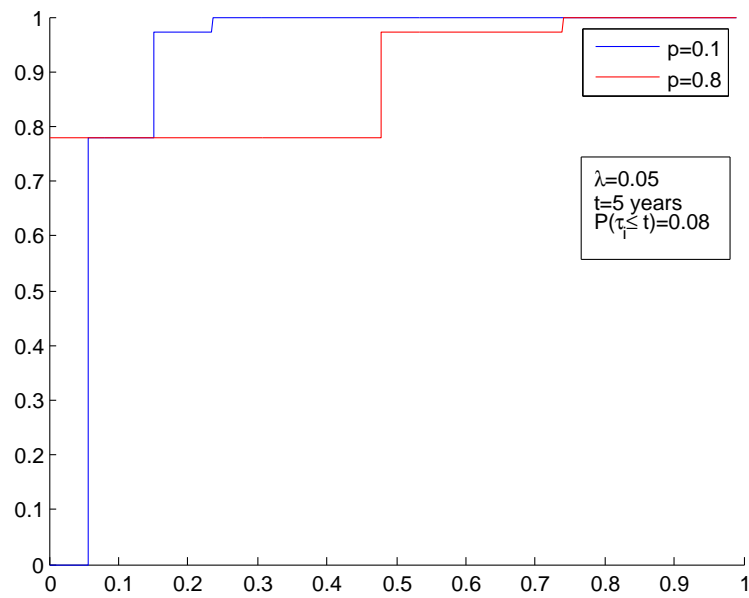


FIG. 2.4 – Ce graphique représente la fonction de répartition de la probabilité mélange pour deux jeux de paramètres correspondant à la comparaison 3.

Annexe A

A.1 Vecteur aléatoire comonotone

Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ de lois marginales F_1, \dots, F_n est dit **comonotone** s'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$ telle que :

$$X = (F_1^{-1}(U), \dots, F_n^{-1}(U)). \quad (\text{A.1})$$

De plus, un vecteur aléatoire est comonotone si et seulement si sa fonction copule est la copule supérieure de Fréchet-Hoeffding, i.e pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$, $C^+(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, \dots, u_n)$. La copule C^+ de Fréchet-Hoeffding est une borne supérieure pour toutes les structures de dépendance puisque pour toute copule C , $C(u) \leq C^+(u)$, $\forall u \in [0, 1]^n$.

A.2 Coefficient de dépendance dans les queues

Soient deux variables aléatoires X, Y de fonctions de répartition F_X, F_Y et de copule C . Le **coefficient de dépendance de queue inférieure** λ_L est tel que :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} \mathbb{Q}(X \leq F_X^{-1}(u) \mid Y \leq F_Y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}, \quad (\text{A.2})$$

lorsque la limite existe. Si $\lambda_L > 0$, on dira que le couple admet de la dépendance extrême inférieure (entre petites valeurs).

Le **coefficient de dépendance de queue supérieure** λ_U est tel que :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} \mathbb{Q}(X > F_X^{-1}(u) \mid Y > F_Y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(u, u) + 1 - 2u}{1 - u}, \quad (\text{A.3})$$

lorsque la limite existe. Si $\lambda_U > 0$, on dira que le couple admet de la dépendance extrême supérieure (entre grandes valeurs).

Remarquons que $0 \leq \lambda_U \leq 1$ et $0 \leq \lambda_L \leq 1$ et que $\lambda_U = \lambda_L = 1$ pour la borne supérieur C^+ de Fréchet-Hoeffding (cas comonotone). Un couple de variables aléatoires n'admet pas toujours de dépendance dans les extrêmes, i.e $\lambda_U = \lambda_L = 0$. C'est le cas par exemple pour des variables indépendantes ou pour un vecteur gaussien non comonotone.

A.3 Coefficient de dépendance de Kendall ou Tau de Kendall

Soient deux variables aléatoires X, Y de fonctions de répartition F_X, F_Y et de copule C . Le **coefficient de dépendance de Kendall** ρ_K associé au couple (X, Y) est défini par :

$$\rho_K = 4 \int \int_{[0,1]} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (\text{A.4})$$

Deuxième partie

Couverture des tranches de CDO

Chapitre 3

Couverture du risque de défaut dans les modèles de contagion markoviens

La pratique standard de marché concernant la couverture des tranches de CDO consiste à augmenter parallèlement les courbes de crédit des noms sous-jacents et à calculer le ratio entre le changement en valeur actuelle de la tranche et le changement en valeur actuelle des swaps de défaut individuels, le modèle d'évaluation utilisé étant habituellement une copule gaussienne à un facteur couplée à une structure de *base correlation*. La légitimité de cette méthode repose essentiellement sur la couverture locale du risque de spread. En particulier, même pour des ratios de couverture obtenus par des petits écarts de spreads, la réplification des tranches par les CDS sous-jacents n'est pas garantie notamment lorsque les spreads augmentent brutalement sur le marché ou lorsqu'un défaut survient. De plus, cette dernière approche soulève un certain nombre de problèmes pratiques comme par exemple l'interdépendance des spreads de CDS et des corrélations implicites. En effet, un accroissement des spreads modifie la *moneyiness* de la tranche et impacte donc la corrélation implicite de la tranche. Étant donnée la séparation naturelle entre lois marginales et structure de dépendance dans les modèles basés sur des fonctions copules⁶⁸, la prise en compte d'une nouvelle structure de *base correlation* résulte nécessairement d'une relation arbitraire entre cette dernière et les spreads des CDS sous-jacents. Pour plus de détails sur les différentes techniques de couvertures des tranches de CDO dans un modèle de copule gaussienne couplé à une structure de base correlation, nous invitons le lecteur à se reporter à Jobst (2007) ou Meissner et al. (2008). D'autres anomalies relatives à l'emploi de ces pratiques sont répertoriées dans l'article de Morgan et Mortensen (2007). Ces derniers montrent en particulier que les ratios de couverture pour certaines tranches peuvent être négatifs dans le cas d'une structure de *base correlation* fortement croissante. De plus, l'approche standard de marché ne s'appuie pas sur des arguments de réplification théoriques, ce qui dans la durée peut conduire à une dispersion importante de la valeur actuelle du portefeuille de couverture (voir Petrelli et al. (2007)).

Malheureusement, les méthodes de réplification dynamique des tranches de CDO employées par les intervenants de marché ne reposent pas actuellement sur une véritable théorie de la couverture comme c'est le cas par exemple pour les produits dérivés sur actions ou sur taux d'intérêt. Cela est notamment dû à des problèmes de dimension et au phénomène d'interdépendance entre risque de spread et risque de défaut. Laurent (2006) considère le cas d'un modèle à intensité multivarié où les défauts sont conditionnellement indépendants et montre que pour des portefeuilles de grande taille bien diversifiés, il est possible de se concentrer uniquement sur la couverture

⁶⁸Voir section 1.2.1 du chapitre 1 pour plus de détails sur les modèles basés sur des fonctions copules.

du risque de spread et contrôler l'erreur de couverture. Néanmoins, cette dernière approche ne traduit aucun phénomène de contagion : les spreads de crédit ne réagissent pas spécifiquement au défaut d'un nom ou, autrement dit, le défaut n'a pas un caractère informatif. Or, cette hypothèse est discutable comme le montre Das et al. (2007) à travers une étude empirique qui privilégie un effet informatif des défauts sur les spreads des noms survivants. Cependant, des exemples concrets comme les faillites de Delphi, Enron, Parmalat ou WorldCom apportent des résultats divergents à ce propos.

Dans ce chapitre, nous adoptons une approche alternative. Notre étude de la couverture est concentrée sur le risque de défaut, les spreads de crédit et la dynamique de la dépendance étant gouvernés par l'arrivée des défauts. Nous détaillerons le calcul des stratégies de couverture dynamiques ou *credit deltas* relatifs à un événement de défaut dans un modèle de contagion. Les modèles de contagion ont été introduits dans le domaine du risque de crédit par Davis et Lo (2001), Jarrow et Yu (2001) et également étudiés par Yu (2007). Schönbucher et Schubert (2001) montrent que les modèles basés sur des fonctions copules reflètent de la contagion et ils relient les changements de valeur des spreads de crédit à l'arrivée d'un défaut aux dérivées partielles de la fonction copule. Il s'agit également de l'approche adoptée par Bielecki et al. (2007b) pour traiter le problème de la couverture des dérivés de crédit. Frey et Backhaus (2007b) s'intéressent également à la couverture des tranches de CDO dans le cadre plus flexible d'un modèle de contagion markovien. Dans les modèles à copule, la contagion dérive de la structure de dépendance des temps de défaut alors que dans les modèles de contagion, la structure de dépendance des temps de défaut découle de la spécification de la dynamique des intensités. Dans ces deux approches, les sauts de spreads se produisent uniquement au moment d'un défaut. Grâce à cette hypothèse assez simple et lorsque l'on exclut la possibilité de défauts simultanés, il est possible de montrer que le marché des tranches de CDO est complet : les *cash-flows* des tranches de CDO peuvent être parfaitement répliqués en négociant dynamiquement les CDS sous-jacents et même dans certains cas particuliers en négociant simplement l'indice.

Plus récemment, Frey et Backhaus (2007a) étudient le problème de la couverture des tranches de CDO dans un contexte où les défauts sont modélisés par une chaîne de Markov traduisant à la fois un effet de contagion et un risque de spread spécifique. Dans cette approche, si l'on considère uniquement les CDS individuels à une maturité donnée sur le portefeuille sous-jacent, le marché n'est plus complet. Frey et Backhaus (2007a) utilisent alors des techniques de minimisation de l'erreur de couverture pour déterminer leur stratégies dynamiques de réplication. En exploitant une technique similaire dans un cadre de marché incomplet, Elouerkhaoui (2006) adresse également le problème de la couverture dans un modèle Poisson multivarié. Cependant, l'implémentation pratique de ces méthodes peut s'avérer très contraignante, en particulier lorsque l'on cherche à calculer les ratios de couverture à différentes dates et dans différents états.

Dès qu'il s'agit de mettre en œuvre des méthodes de couverture basées sur un modèle d'évaluation, le problème crucial de la calibration de la dynamique des défauts sur les données de marché s'impose naturellement. La détermination des intensités d'une chaîne de Markov similaire à la nôtre à partir de spreads de tranches de CDO a été étudiée récemment par un certain nombre d'auteurs. On peut citer notamment van der Voort (2006), Schönbucher (2006), Arnsdorf et Halperin (2007), De Koch et Kraft (2007), Epple et al. (2007), Lopatin et Misirpashaev (2007), Herbertsson (2007b), Herbertsson (2007a) ou Cont et Minca (2008). Ces derniers papiers ont pour but de développer une modélisation markovienne de la perte agrégée, éventuellement associée à un marché incomplet, sans opportunité d'arbitrage et compatible avec des prix de mar-

ché. Cependant, le problème de la couverture dynamique et de son application n'y est pas traité spécifiquement. D'un point de vue de la couverture, un avantage important de notre approche est que les cotations de marché déterminent complètement la dynamique de la perte agrégée, grâce aux équations forward de Kolmogorov. En fait, notre approche est analogue à celle de Dupire (1994) qui déduit intégralement la dynamique des actions à l'aide des prix d'options d'achat dans un modèle à volatilité locale. En conséquence, grâce à cette caractéristique et à la complétude du marché, on détermine sans ambiguïté les stratégies dynamiques de réplcation des tranches de CDO.

Ce chapitre est divisé en six sections. Dans la première section, nous établirons les bases théoriques du modèle de contagion, nous détaillerons certaines hypothèses de marché et nous présenterons un théorème de représentation de martingales pour des processus ponctuels multivariés. Nous montrerons en particulier que sous l'hypothèse d'absence de défauts simultanés, le marché est complet et il est possible de répliquer parfaitement tout actif dont les *cash-flows* dépendent uniquement de l'arrivée de défauts dans un portefeuille de crédit. Afin de déterminer concrètement les stratégies de réplcation, nous nous restreindrons dans la deuxième section au cadre des modèles de contagion markoviens homogènes, ce qui entraînera une réduction considérable de la dimension du problème et permettra d'entrevoir sa mise en application. Nous verrons notamment que, dans ce cas, le processus de la perte agrégée est simplement une chaîne de Markov ou plus précisément un processus de naissance pur (selon la terminologie de Karlin et Taylor (1975)) et qu'il est possible de dupliquer parfaitement les *cash-flows* des tranches de CDO avec ceux de l'indice de CDS et de l'actif sans risque. La troisième section abordera le problème de la calibration de la chaîne de Markov sous plusieurs angles : calibration à partir de la surface de perte (*loss surface*) complète, calibration à partir de la loi marginale du nombre de défauts à une maturité fixée ou calibration directe à partir de quelques prix de tranches. Dans la quatrième section, nous montrerons que la chaîne de Markov de la perte agrégée peut simplement être représentée à l'aide d'un arbre binomial recombinaut. Nous y décrirons les *cash-flows* des tranches de CDO, de l'indice, l'évaluation de ces produits et la détermination des *credit deltas* dans les nœuds de l'arbre. Les deux dernières sections sont consacrées à l'application de cette méthode à la couverture dynamique des tranches standardisées de CDO. La cinquième section présentera la dynamique des stratégies de couverture pour un arbre calibré sur une distribution de la perte générée par la copule gaussienne. Nous analyserons en particulier la dépendance des ratios de couverture par rapport à l'hypothèse sur les taux de recouvrement et par rapport au paramètre de dépendance associé à la copule gaussienne. Nous présenterons enfin dans la dernière section les deltas calculés dans un arbre calibré sur une structure de *base correlation* de marché. Nous comparerons ces derniers résultats avec les deltas obtenus par la pratique standard de marché et les deltas récemment calculés dans d'autres approches par Arnsdorf et Halperin (2007), Eckner (2007), Feldhütter (2008) et Cont et Kan (2008).

3.1 Description du modèle

3.1.1 Temps de défaut

On considère un portefeuille composé de n obligations soumises à un risque de défaut. Les temps de défaut sont décrits par le vecteur aléatoire (τ_1, \dots, τ_n) défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $N_1(t) = 1_{\{\tau_1 \leq t\}}, \dots, N_n(t) = 1_{\{\tau_n \leq t\}}$, les indicatrices de défaut à la date t et $\mathcal{H}_{i,t} = \sigma(N_i(s), s \leq t)$, $i = 1, \dots, n$, les filtrations individuelles des temps de défaut.

$\mathcal{H}_t = \bigvee_{i=1}^n \mathcal{H}_{i,t}$ désigne la filtration globale des temps de défaut.

On note τ^1, \dots, τ^n , les temps de défaut ordonnées et on suppose qu'il ne peut y avoir plusieurs défauts au même moment, i.e. $\tau^1 < \dots < \tau^n$, $\mathbb{P} - p.s$. Cette hypothèse est importante du point de vue de la complétude du marché. En effet, nous verrons qu'il est possible dans ce cas de couvrir dynamiquement des swaps de défaut sur panier (*basket default swaps*) ou des tranches de CDO à l'aide de n CDS individuels, chacun couvrant le défaut d'un nom dans le portefeuille sous-jacent. Dans le cas général, si l'on cherche à se couvrir sur un court intervalle de temps $[t, t + dt]$, on peut remarquer que le nombre d'états possibles est de 2^n , chiffre qui correspond au nombre de sous-ensembles de noms potentiellement en défaut sur cette période dans un panier de n références. Dans ce cas, il faudrait donc considérer des produits de protection non standards contingents à l'arrivée de défauts multiples pour répliquer les *cash-flows* de tranches de CDO.

Nous supposons de plus que les temps de défaut admettent des intensités : il existe des processus $\alpha_i^{\mathbb{P}}$, $i = 1, \dots, n$ positifs et \mathcal{H}_t -prévisibles tels que :

$$N_i(t) - \int_0^t \alpha_i^{\mathbb{P}}(s) 1_{\{\tau_i > s\}} ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

soient des martingales par rapport à la filtration \mathcal{H}_t .

3.1.2 Hypothèse de marché

Nous supposons pour le moment qu'il existe, sur le marché, des CDS digitaux instantanés cotés sur chaque entité du portefeuille sous-jacent. Un CDS digital instantané coté en t sur le nom i est un contrat de swap de défaut de durée de vie dt et de notionnel unitaire. Plus précisément, le vendeur de protection s'engage à verser une unité monétaire en $t + dt$ à l'acheteur de protection si le nom i fait défaut sur le période $[t, t + dt]$. En contrepartie, l'acheteur de protection verse en $t + dt$ une prime égale à $\alpha_i(t)dt$ au vendeur de protection. Les *cash-flows* d'un CDS instantané sur le nom i coté en t peuvent être schématisés par la figure 3.1.

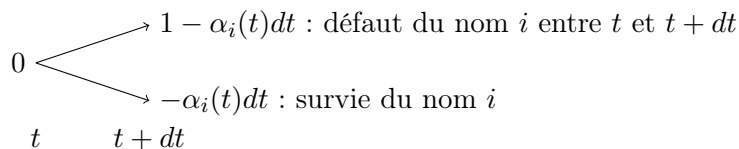


FIG. 3.1 – Structure des *cash-flows* d'un CDS digital instantané pour l'acheteur de protection

Ainsi, une position en achat de protection sur un CDS digital instantané relatif au nom i n'entraîne initialement (en t) aucune charge et fournit un *payoff* égal à $dN_i(t) - \alpha_i(t)dt$ en $t + dt$. $dN_i(t)$ correspond au paiement sur la jambe de défaut et $\alpha_i(t)dt$ est la prime (à court terme) du swap. Le fait de considérer de tels produits virtuels plutôt que des CDS classiques ne constitue pas une limitation de notre approche. Il s'agit simplement de présenter de manière intuitive les outils théoriques développés pour traiter le problème de la couverture. Nous détaillerons dans la suite le calcul des ratios de couverture par rapport à des CDS réellement cotés sur le marché.

Nous supposons de plus que l'évolution des primes de CDS instantanés, $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$, ne dépend que de l'arrivée de nouveaux défauts dans le portefeuille. En d'autres termes, les primes sont déterministes entre deux dates de défaut. Il n'y a pas de risque de spread spécifique ou pour

être plus précis le risque de spread est régi par le risque de défaut. Nous nous restreignons ainsi au cas d'un marché gouverné par le risque de défaut. Cela correspond à l'approche de Bielecki et al. (2007b) et Bielecki et al. (2007a).

Pour simplifier, nous supposons que le taux d'intérêt sans risque est constant et égal à r . On peut exprimer facilement le *payoff* résultant d'une stratégie de *trading* auto-financée associée aux CDS digitaux instantanés. Soient $\delta_1(\cdot), \dots, \delta_n(\cdot)$ des processus \mathcal{H}_t -prévisibles décrivant l'évolution (en montant nominal) des positions prises sur chaque CDS instantané. Étant donné un investissement initial de V_0 , le *payoff* que l'on obtient au temps T peut s'écrire :

$$V_0 e^{rT} + \sum_{i=1}^n \int_0^T \delta_i(s) e^{r(T-s)} (dN_i(s) - \alpha_i(s) ds). \quad (3.2)$$

Par définition, $\delta_i(s)$ est le montant nominal de CDS instantané sur le nom i acquis en s . Cela induit un résultat net de $\delta_i(s) \times (dN_i(s) - \alpha_i(s) ds)$ à la date $s + ds$ qui est épargné (ou emprunté dans le cas négatif) au taux r jusqu'en T .

3.1.3 Couverture et Théorème de représentation de martingale

Par absence d'opportunité d'arbitrage, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des processus \mathcal{H}_t -prévisibles positifs. Cela reflète simplement que le coût de la protection est nécessairement positif en présence d'un risque de défaut. Pour la même raison, $\{\alpha_i(t) > 0\} = \{\alpha_i^{\mathbb{P}}(t) > 0\}$, \mathbb{P} -presque sûrement. En conséquence, d'après le théorème 11 du chapitre VIII du livre de Brémaud (1981), sous certaines hypothèses de régularité, il existe une probabilité \mathbb{Q} équivalente à \mathbb{P} telle que les primes des CDS digitaux instantanés $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soient les $(\mathbb{Q}, \mathcal{H}_t)$ intensités des temps de défaut. A partir de maintenant les primes seront notées $\alpha_1^{\mathbb{Q}}, \dots, \alpha_n^{\mathbb{Q}}$ et nous travaillerons sous la probabilité \mathbb{Q} . Autrement dit,

$$N_i(t) - \int_0^t \alpha_i^{\mathbb{Q}}(s) 1_{\{\tau_i > s\}} ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

sont des $(\mathbb{Q}, \mathcal{H}_t)$ martingales. Pour simplifier les notations, nous supposerons implicitement dans la suite que l'intensité du nom i est nulle après son défaut, i.e $\alpha_i^{\mathbb{Q}}(t) = 0$ sur l'ensemble $\{t > \tau_i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Nous nous intéressons maintenant à la réplcation d'actifs dont les *cash-flows* sont contingents aux défauts d'entités du portefeuille de référence. Soit M , un *payoff* \mathcal{H}_T -mesurable et \mathbb{Q} -intégrable. Comme M dépend des indicatrices de défaut des noms sous-jacents jusqu'à la date T , cela inclut en particulier les *cash-flows* des tranches de CDO ou ceux des swaps de défaut sur panier, en supposant que les taux de recouvrements sont déterministes. Grâce au théorème de représentation de martingale pour les processus ponctuels (Voir théorème 9 du chapitre III du livre de Brémaud (1981)), il existe des processus \mathcal{H}_t -prévisibles $\theta_1, \dots, \theta_n$ tels que :

$$M = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M] + \sum_{i=1}^n \int_0^T \theta_i(s) (dN_i(s) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(s) ds). \quad (3.4)$$

En conséquence, on peut répliquer M en investissant initialement $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M e^{-rT}]$ dans l'actif sans risque et en prenant en s , sur la période $[s, s + ds]$, une position sur les CDS instantanés des noms survivants. Par exemple, la prise de position en s sur le CDS instantané relatif au nom i est égale à un montant nominal de $\delta_i(s) = \theta_i(s) e^{-r(T-s)}$. Le gain éventuel est épargné en $s + ds$ au

taux r , la perte éventuelle est empruntée en $s + ds$ au taux r . Remarquons que la représentation 3.4 est associée à la martingale $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M | \mathcal{H}_t]$ et, de manière plus général, on a en fait pour tout $t \in [0, T]$ la représentation suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M | \mathcal{H}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M] + \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta_i(s) \left(dN_i(s) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(s) ds \right). \quad (3.5)$$

A partir des expression 3.4 et 3.5, on obtient immédiatement :

$$M = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M | \mathcal{H}_t] + \sum_{i=1}^n \int_t^T \theta_i(s) \left(dN_i(s) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(s) ds \right). \quad (3.6)$$

Si l'on note $V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[M e^{-r(T-t)} | \mathcal{H}_t]$, alors $M = V_t e^{r(T-t)} + \sum_{i=1}^n \int_t^T \theta_i(s) \left(dN_i(s) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(s) ds \right)$ et V_t correspond exactement au coût de la replication de M à la date t étant donné que les prises de positions en CDS instantanés sont gratuites. On peut également remarquer que pour un court intervalle de temps dt , l'approximation suivante est vérifiée :

$$V_{t+dt} \approx V_t e^{r dt} + \sum_{i=1}^n \delta_i(t) \left(dN_i(t) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t) ds \right), \quad (3.7)$$

ce qui est compatible avec les pratiques de marché où le portefeuille de couverture est mis à jour régulièrement. Un investisseur qui souhaite répliquer l'évolution de V_t entre t et $t + dt$, doit investir en t , V_t dans l'actif sans risque et prendre des positions de montant égal à $\delta_1(t), \dots, \delta_n(t)$ dans les CDS digitaux instantanés.

Même si le théorème de représentation de martingale garantit dans cette approche que l'on peut parfaitement répliquer des tranches de CDO, il ne fournit pas de méthode pratique de construction des stratégies de couverture. Comme pour les dérivés sur actions ou sur taux d'intérêt, cela nécessite en général l'hypothèse d'un environnement markovien.

3.2 Modèles de contagion markoviens homogènes

3.2.1 Description des intensités

Pour décrire intégralement un modèle de contagion, il est nécessaire de spécifier la structure des intensités de défaut risque neutre $\alpha_1^{\mathbb{Q}}, \dots, \alpha_n^{\mathbb{Q}}$. Au paragraphe précédent, nous avons présenté un résultat théorique sur la couverture dans le cas où ces dernières dépendent de l'historique complet des temps de défaut. Dans le but de déterminer explicitement les stratégies de replication, une hypothèse classique est de supposer que les intensités dépendent uniquement du statut courant des défauts, i.e des indicatrices de défaut : $\alpha_i^{\mathbb{Q}}(t)$, $i = 1, \dots, n$, sont des fonctions déterministes de $N_1(t), \dots, N_n(t)$. Cette hypothèse peut paraître contestable dans la mesure où on peut penser en réalité que l'effet de la contagion tend à s'atténuer avec le temps, ce qui n'est pas pris en compte ici. Les processus ponctuels de Hawkes, introduits par Giesecke et Goldberg (2006), Errais et al. (2007) dans le domaine du crédit, prennent en compte ce phénomène⁶⁹. Dans la suite du chapitre, on se place dans un environnement markovien où les intensités ne dépendent que du statut de crédit courant des noms et s'écrivent $\alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, N_1(t), \dots, N_n(t))$, $i = 1, \dots, n$. Plusieurs contributions se basent également sur une "hypothèse markovienne". On peut citer des exemples

⁶⁹D'autres spécifications des intensités dans le même sens sont étudiées par Lopatin et Misirpashaev (2007).

populaires comme Kusuoka (1999), Jarrow et Yu (2001) ou Yu (2007) qui considèrent le cas où les intensités de défaut sont des fonctions affines des indicatrices de défaut. Le lien entre modèles de contagion et chaîne de Markov est décrit dans le livre de Lando (2004) et développé également par Herbertsson (2007b).

Un autre problème pratique concerne l'hétérogénéité. En effet, modéliser toutes les interactions possibles entre les intensités des noms sous-jacents implique l'emploi d'un nombre important de paramètres de contagion et entraîne nécessairement des problèmes numériques. Pour cette raison, nous nous restreindrons dans la suite au cas homogène où les entités survivantes partagent la même intensité de défaut. Plus précisément, elles ont la même dépendance fonctionnelle en les indicatrices de défaut. Cette hypothèse est sans doute raisonnable pour des tranches de CDO standardisées, où la dimension du portefeuille sous-jacent est importante (125 noms pour les indice iTraxx ou CDX NA) mais reste discutable pour les tranches *equity* très sensibles au risque idiosyncratique. On notera $\alpha^{\mathbb{Q}} = \alpha_1^{\mathbb{Q}} = \dots = \alpha_n^{\mathbb{Q}}$ l'intensité commune des temps de défaut.

Pour plus de flexibilité, nous supposons de plus que les intensités individuelles dépendent uniquement du nombre de défauts courant. Ainsi, si l'on note $N(t) = \sum_{i=1}^n N_i(t)$ le nombre de défauts au temps t , les intensités sont simplement décrites par une fonction déterministe de t et de $N(t)$, i.e $\alpha^{\mathbb{Q}}(t, N(t))$. En particulier, si $\{\tau_i \geq t\}$, alors $\sum_{j \neq i} N_j(t)$ et l'intensité d'un nom i survivant en t , ne dépend que du statut de crédit des autres noms. Cette idée correspond à l'approche à champs moyen ou *mean-field approach* introduite en physique des particules et étudiée par Frey et Backhaus (2007b) dans le cadre du crédit. Par analogie avec le modèle de volatilité local, Cont et Minca (2008) parlent de modèles à intensité locale.

Plusieurs descriptions paramétriques ont été analysées. On peut penser à un effet additif de la contagion, i.e des intensités de défaut individuel de la forme $\alpha^{\mathbb{Q}} = \alpha + \beta N(t)$ avec α et β des constantes comme mentionné par Frey et Backhaus (2007b). Cela correspond également au modèle *linear counterparty risk model* de Jarrow et Yu (2001). Ding et al. (2006) montrent que lorsque l'intensité de la perte est linéaire en $N(t)$, la perte est de loi Binomiale négative. On peut également penser à un effet multiplicatif comme proposé par Davis et Lo (2001) où les intensités de défaut individuelles sont telles que $\alpha^{\mathbb{Q}} = \alpha \times \beta^{N(t)}$. Frey et Backhaus (2007b) décrivent les intensités à l'aide d'une fonction convexe de $N(t)$ (*convex counterparty risk model*) :

$$\alpha^{\mathbb{Q}} = \alpha + \frac{\kappa}{\beta} (\exp(\beta(N(t) - \mu)^+) - 1), \quad (3.8)$$

où α, β, κ sont des constantes positives. μ représente le nombre de défaut espéré. Dans le cas où le nombre de défauts réalisés est inférieur au nombre de défauts espérés, il n'y a pas de phénomène de contagion et dans le cas contraire, la contagion est exponentielle. Bien sûr, on peut également partir d'une approche non paramétrique. Nous développerons dans la suite une procédure de calibration sur des intensités "non contraintes" à partir de cotations de marché.

Comme on s'intéresse essentiellement à la couverture de tranches de CDO standardisées, on supposera que le taux de recouvrement est constant égal à R et que les expositions des entités de crédit sont les mêmes. La perte agrégée unitaire à la date t peut donc s'écrire $L(t) = (1 - R) \frac{N(t)}{n}$. On peut montrer facilement que l'intensité de $L(t)$ ou de $N(t)$ est égale à la somme des intensités individuelles d'après l'hypothèse d'absence de défauts simultanés. Si l'on note $\lambda(t, N(t))$, l'intensité risque neutre de la perte, elle est donc elle-même une fonction déterministe

de la perte, i.e :

$$\lambda(t, N(t)) = (n - N(t)) \times \alpha^{\mathbb{Q}}(t, N(t)). \quad (3.9)$$

Nous sommes bien dans une approche *bottom-up* dans laquelle la dynamique de la perte agrégée est déduite de la spécification des intensités individuelles.

3.2.2 Evaluation risque neutre

On peut remarquer que dans un modèle de contagion markovien homogène, le processus $N(t)$ est une chaîne de Markov sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} . Plus précisément, il s'agit d'un processus de naissance pur (*pure birth process*) suivant la terminologie de Karlin et Taylor (1975) car on ne peut observer qu'un seul défaut à la fois⁷⁰. La matrice génératrice $\Lambda(t)$ de cette chaîne de Markov s'écrit simplement :

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -\lambda(t, 0) & \lambda(t, 0) & 0 & & 0 \\ 0 & -\lambda(t, 1) & \lambda(t, 1) & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\lambda(t, n-1) & \lambda(t, n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Notons que $\{N(t) = n\}$ est un état absorbant. Schönbucher (2006) modélise directement la dynamique de la perte par une chaîne de Markov en temps continu qu'il appelle *one-step representation of the loss distribution*. Contrairement à cette dernière approche, nous avons établi ici le lien entre intensités individuelles (approche *bottom-up*) et intensité de la perte (approche *top-down*). En outre, dans notre approche, les prix sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} correspondent à des coût de réplcation.

Étant donné que la perte est une chaîne de Markov, on peut déterminer facilement le prix de replication d'un *payoff* de type Européen sur la perte. Considérons par exemple le cas d'un *zero-coupon trachelet* qui verse $\mathbf{1}_{\{N(T)=k\}}$ à la date de paiement T , pour un entier k dans $\{0, 1, \dots, n\}$. D'après le paragraphe 3.1.3, le prix de réplcation en t de ce *payoff* s'écrit :

$$V(t, N(t)) = e^{-r(T-t)} \mathbb{Q}(N(T) = k \mid N(t)). \quad (3.11)$$

Or, il est possible de relier le vecteur des prix $V(t, \cdot) = (V(t, 0), \dots, V(t, n))^{\top}$ au vecteur des *payoffs* terminaux $V(T, \cdot) = (\delta_{1,k}, \dots, \delta_{n,k})^{\top}$ grâce à la matrice de transition $\mathbf{Q}(t, T)$ de la chaîne entre t et T par la relation vectorielle suivante :

$$V(t, \cdot) = e^{-r(T-t)} \mathbf{Q}(t, T) V(T, \cdot). \quad (3.12)$$

De plus, la matrice de transition de $N(t)$ vérifie les équations de Kolmogorov *forward* et *backward* :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}(t, T)}{\partial t} = -\Lambda(t) \mathbf{Q}(t, T), \quad \frac{\partial \mathbf{Q}(t, T)}{\partial T} = \mathbf{Q}(t, T) \Lambda(T).^{71} \quad (3.14)$$

⁷⁰Dans le cas où la chaîne de Markov est plus générale et permet l'arrivée de défauts simultanés, il est possible de calibrer plus facilement les tranches *senior* de CDO, relatives aux pertes extrêmes. Cette approche est discutée notamment par Putyatin et al. (2005), Brigo et al. (2007a) et Walker (2007). Rappelons que la possibilité de défauts multiples entraîne l'incomplétude du marché.

⁷¹On peut montrer par la formule d'Itô-Doeblin que les prix de réplcation vérifient également l'équation *back-*

Remarquons que dans le cas d'une matrice génératrice homogène en temps $\Lambda(t) = \Lambda$, la matrice de transition s'exprime simplement comme une exponentielle de matrice :

$$\mathbf{Q}(t, T) = \exp((T - t)\Lambda). \quad (3.15)$$

Ces idées ont été mises en pratique notamment par van der Voort (2006), Herbertsson et Rootz'en (2006), Arnsdorf et Halperin (2007), De Koch et Kraft (2007), Epple et al. (2007), Herbertsson (2007b) et Lopatin et Misirpashaev (2007). Ces derniers articles s'intéressent essentiellement à l'évaluation de dérivés de crédit alors que nous nous concentrons ici sur la couverture et l'implémentation pratique des stratégies de duplication.

3.2.3 Calcul des stratégies de réplication

Nous montrons dans ce paragraphe comment déterminer explicitement les stratégies de couverture dans notre approche. L'avantage d'un modèle de contagion homogène est que les stratégies de réplication par rapport aux noms survivants sont les mêmes, ce qui réduit considérablement la dimension du problème.

Supposons que l'on cherche à couvrir un *payoff* de type Européen sur la perte agrégée. Pour simplifier, on considère pour le moment qu'il n'y a pas de paiements intermédiaires. Cela correspond par exemple à une tranche de CDO *zero-coupon* avec un paiement de prime *upfront*⁷². On note $V(t, N(t))$ son prix de réplication. En appliquant le lemme d'Itô, la dynamique de $V(t, N(t))$ s'écrit :

$$dV(t, N(t)) = \frac{\partial V(t, N(t))}{\partial t} dt + (V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))) dN(t), \quad (3.16)$$

où $V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))$ correspond au saut dans le processus de prix de la tranche lorsqu'un défaut survient, i.e lorsque $dN(t) = 1$. De plus, comme $(e^{rt}V(t, N(t)))$ est une $(\mathbb{Q}, \mathcal{H}_t)$ -martingale, on a :

$$\frac{\partial V(t, N(t))}{\partial t} + \lambda(t, N(t)) \times (V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))) = rV(t, N(t)). \quad (3.17)$$

Grâce à l'homogénéité du portefeuille, on peut écrire :

$$dN(t) = \sum_{i=1}^{n-N(t)} dN_i(t). \quad (3.18)$$

De plus, comme $\lambda(t, N(t)) = \sum_{i=1}^{n-N(t)} \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, N(t))$, en exploitant les relations 3.16, 3.17 et 3.18, la dynamique de V peut s'exprimer simplement en fonction de celle des CDS digitaux instantanés de la manière suivante :

$$dV(t, N(t)) = rV(t, N(t)) dt + \sum_{i=1}^{n-N(t)} (V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))) \left(dN_i(t) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, N(t)) dt \right). \quad (3.19)$$

ward de Kolmogorov. En effet, comme $(e^{rt}V(t, N(t)))$ est une $(\mathbb{Q}, \mathcal{H}_t)$ -martingale, on a :

$$\frac{\partial V(t, N(t))}{\partial t} + \lambda(t, N(t)) \times (V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))) = rV(t, N(t)). \quad (3.14)$$

⁷²Le cas général sera traité dans la section 3.4.

En conséquence, les stratégies de couverture par rapport aux CDS digitaux instantanés sur les noms survivants sont égales à :

$$\delta_i(t) = e^{-r(T-t)} (V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))) (1 - N_i(t)), \quad (3.20)$$

pour $0 \leq t \leq T$ et $i = 1, \dots, n$.

On cherche maintenant à couvrir cette tranche de CDO avec un portefeuille d'obligations *zero-coupon* soumises au risque de défaut⁷³ qu'on appelle portefeuille d'indice. On note $V_I(t, N(t)) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[1 - \frac{N(T)}{n} \mid N(t) \right]$ son prix de réplication à la date t . Par le même raisonnement, on peut exprimer la dynamique du processus $V_I(t, N(t))$ en fonction de celle des CDS digitaux instantanés sur les noms survivants :

$$dV_I(t, N(t)) = rV_I(t, N(t)) dt + \sum_{i=1}^{n-N(t)} (V_I(t, N(t) + 1) - V_I(t, N(t))) (dN_i(t) - \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, N(t))dt). \quad (3.21)$$

En conséquence, la dynamique de V peut être exprimée en fonction de celle de V_I de la façon suivante :

$$dV(t, N(t)) = r \{V(t, N(t)) - \delta_I(t, N(t))V_I(t, N(t))\} dt + \delta_I(t, N(t))dV_I(t, N(t)), \quad (3.22)$$

où

$$\delta_I(t, N(t)) = \frac{V(t, N(t) + 1) - V(t, N(t))}{V_I(t, N(t) + 1) - V_I(t, N(t))}. \quad (3.23)$$

On peut donc répliquer parfaitement un *payoff* de type Européen, disons une tranche de CDO *zero-coupon* en utilisant uniquement comme instrument de couverture le portefeuille d'indice sous-jacent et l'actif sans risque. Le ratio de couverture par rapport à l'indice est égale à $\delta_I(t, N(t))$. Notons cependant que cette dernière stratégie de couverture est réalisable à condition que $V_I(t, N(t) + 1) \neq V_I(t, N(t))$. Le cas habituel correspond à de la dépendance positive, l'arrivée d'un défaut entraînant une augmentation des spreads des noms survivants, i.e $\alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, 0) \leq \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, 1) \leq \dots, \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, n)$, et donc $V_I(t, N(t) + 1) < V_I(t, N(t))$. Remarquons que lorsque $\alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, 0) = \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, 1) = \dots = \alpha_i^{\mathbb{Q}}(t, n)$, il n'y a pas d'effet de contagion et les défauts sont indépendants. Même dans ce cas, $V_I(t, N(t) + 1) < V_I(t, N(t))$ puisque $V_I(t, N(t))$ est linéaire croissante en le nombre d'obligations survivantes. Ainsi, la diminution en valeur du portefeuille d'indice résulte à la fois d'un effet direct lié à l'arrivée d'un nouveau défaut mais aussi d'un effet indirect lié à une poussée des spreads des noms survivants.

L'idée qui consiste à utiliser des sensibilités (ou des changements de valeur) à l'arrivée d'un défaut pour construire des stratégies de couverture a été introduite par Arvanitis et Laurent (1999). La construction rigoureuse des stratégies de couverture dynamiques a été établie par Blanchet-Scalliet et Jeanblanc (2004) dans un cadre univarié. Le résultat présenté ci-dessus peut être vu comme une extension naturelle de leur approche au cadre multivarié où la dynamique de la perte agrégée est décrite par un modèle homogène markovien. Nous considérons simplement le processus du nombre de défauts $N(t)$ et le portefeuille d'indice $V_I(t, N(t))$ au lieu de considérer une indicatrice de défaut $N_i(t)$ et le prix de l'obligation risquée correspondante.

⁷³Remarquons qu'en théorie, il est tout à fait possible d'utiliser une autre tranche comme instrument de couverture.

3.3 Calibration des intensités de la perte

Un autre avantage intéressant des modèles de contagion markovien homogène est que la dynamique de la perte agrégée (ou de manière équivalente celle des intensités de défaut) peut être déduite sans ambiguïté des cotations de marché. En conséquence, il en est de même pour les stratégies dynamiques de répliation des tranches de CDO. Cela facilite grandement l'analyse empirique du modèle et l'étude de sa robustesse puisque les ratios de couvertures ne dépendent pas de paramètres non-observables et donc difficiles à calibrer.

La construction de la chaîne de Markov induite pour la perte agrégée à partir des spreads de marché des tranches de CDO est analogue à la construction de Dupire (1994) de la volatilité locale à partir des prix d'options d'achat sur actions. Derman et Kani (1994), Rubinstein (1994) emploient des idées similaires pour construire leur arbre de la dynamique des prix d'action. Laurent et Leisen (2000) montrent également comment une chaîne de Markov peut être induite à partir d'un ensemble fini de prix d'options. Dans toutes ces approches, la calibration de la dynamique du modèle repose sur les equations *forward* de Kolmogorov. Schönbucher (2006) analyse la calibration des intensités à partir d'un ensemble complet de prix de tranches ou de manière équivalente à partir des lois du nombre de défauts pour tous les horizons. Lopatin et Misirpashaev (2007) et Cont et Minca (2008) mettent également en relief les similarités entre l'approche de Dupire (1994) et la construction de la chaîne de Markov établie par Schönbucher (2006). Nous proposons ici de détailler et d'analyser cette dernière méthode basée sur la connaissance des lois du nombre de défauts à tous les horizons.

3.3.1 Calibration des intensités à partir des lois de la perte à tous les horizons

Notons $p(t, k) = \mathbb{Q}(N(t) = k)$, $0 \leq t \leq T$, $k = 0, 1, \dots, n$, les probabilités marginales du nombre de défauts. La détermination de ces probabilités implique clairement plus d'information que l'on peut en déduire à partir des prix des tranches liquides, spécialement pour les très petites ou les très grandes pertes. Le calcul de ces quantités à partir des spreads de tranches de CDO est étudié notamment par Krekel et Partenheimer (2006), Galiani et al. (2006), van der Voort (2006), Meyer-Dautrich et Wagner (2007), Parcell et Wood (2007), Walker (2007) et Torresetti et al. (2007).

Dans le cas d'un processus de naissance pur, les equations forward de Kolmogorov peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{dp(t,0)}{dt} = -\lambda(t,0)p(t,0), & k = 0, \\ \frac{dp(t,k)}{dt} = \lambda(t, k-1)p(t, k-1) - \lambda(t,k)p(t,k), & k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.24)$$

Comme l'espace des états est discret, il n'y a pas de problème de régularité et ces equations admettent une unique solution⁷⁴. Ces dernières equations permettent de calculer la dynamique des intensités de la perte $t \in [0, T] \rightarrow \lambda(t, N(t))$, puisque pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} \lambda(t,0) = -\frac{1}{p(t,0)} \frac{dp(t,0)}{dt}, & k = 0, \\ \lambda(t,k) = \frac{1}{p(t,k)} \left[\lambda(t, k-1)p(t, k-1) - \frac{dp(t,k)}{dt} \right], & k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.25)$$

⁷⁴Voir Karlin et Taylor (1975) pour plus de détails sur les equations de Kolmogorov dans le cas d'un processus de naissance pur.

Remarquons que l'on peut également écrire :

$$\lambda(t, k) = -\frac{1}{p(t, k)} \frac{d \sum_{m=0}^k p(t, m)}{dt} = -\frac{1}{\mathbb{Q}(N(t) = k)} \frac{d\mathbb{Q}(N(t) \leq k)}{dt}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (3.26)$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'absence de défauts simultanés, on peut parfaitement déterminer les intensités de la perte à partir des lois marginales du nombre de défauts. On peut en particulier déduire les intensités de défaut individuelles puisque $\alpha^{\mathbb{Q}}(t, N(t)) = \frac{\lambda(t, N(t))}{n - N(t)}$. Cependant, malgré sa simplicité apparente, la mise en œuvre de cette dernière approche (la calibration des $\lambda(t, k)$ à partir des probabilités de défaut $p(t, m)$) peut entraîner des problèmes aussi bien théoriques que pratiques.

Les problèmes théoriques que l'on peut rencontrer sont liés à l'hypothèse d'absence de défauts simultanés. On peut montrer que même si les lois marginales du nombre de défauts vérifient les conditions classiques d'absence d'opportunité d'arbitrage, les intensités déterminées par la procédure forward décrite en 3.25 ne permettent pas forcément de restituer les lois de probabilités utilisées en *input*. Quelque soit le modèle choisi, les probabilités marginales du nombre de défauts doivent vérifier les conditions suivantes :

$$0 \leq p(t, m) \leq 1, \quad \forall (t, m) \in [0, T] \times \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (3.27)$$

$$\sum_{m=0}^n p(t, m) = 1, \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.28)$$

et comme $N(t)$ est un processus croissant, les relations suivantes doivent également être satisfaites :

$$\sum_{m=k}^n p(t, m) \geq \sum_{m=k}^n p(t', m), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad \forall t, t' \in [0, T] \text{ tels que } t \leq t'. \quad (3.29)$$

Cela entraîne que les intensités calculées par la relation 3.25 sont nécessairement positives. De plus, puisque pour tout t , $\sum_{m=0}^n p(t, m) = 1$, on a :

$$\frac{d \sum_{m=0}^n p(t, m)}{dt} = 0, \quad (3.30)$$

et donc $\lambda(t, n) = 0$, i.e $\{N(t) = n\}$ est un état absorbant. En d'autres termes, les contraintes standards d'absence d'opportunité d'arbitrage sur les lois marginales de la perte garantissent l'existence de pseudo-intensités avec les conditions requises. Cependant, ces pseudo-intensités ne permettent pas dans tout les cas de reconstruire parfaitement les lois de perte initiales. En effet, l'hypothèse d'absence de défauts simultanés entraîne en particulier que $\frac{dp(t, m)}{dt} = 0$, pour $t = 0$ et $m > 1$. En effet, pour un intervalle de temps dt petit, on a bien $p(dt, m) = 0$ pour $m > 1$. En conséquence, si cette dernière contrainte n'est pas compatible avec les données de marché, il ne sera pas possible de reconstituer les $p(t, k)$ à partir des pseudo-intensités calibrées.

D'un point de vue pratique, à cause du manque d'information que l'on peut tirer des cotations de marché, le calcul des $p(t, k)$ met habituellement en jeu des procédures arbitraires d'extrapolation pour les faibles horizons. Pour cette raison, nous avons choisi de calibrer la chaîne de Markov de la perte agrégée sur un ensemble discret de spreads de tranches de CDO à un horizon fixé correspondant à une date de maturité liquide.

3.3.2 Calibration des intensités dans le cas homogène en temps

En pratique, les tranches de CDO les plus liquides sont cotées pour un ensemble discret de maturité⁷⁵. Nous avons choisi pour nos applications de calibrer les intensités à partir d'une unique loi du nombre de défauts associée à une maturité liquide égale à T . Soient $p(T, k)$, $k = 0, 1, \dots, n$ les masses de probabilités du nombre de défauts à la date T . La calibration des intensités étant basée sur un ensemble de donnée de taille $n + 1$, nous supposons dans la suite que ces dernières sont homogènes en temps et ne dépendent que du nombre de défauts réalisés. En conséquence, Les intensités de la perte seront notées $\lambda_k = \lambda(t, k)$, $0 \leq t \leq T$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

Dans le cas d'intensités homogènes en temps, la solution du système d'équations différentiels de Kolmogorov 3.24 s'écrit :

$$\begin{cases} p(T, 0) = e^{-\lambda_0 T}, & k = 0, \\ p(T, k) = \lambda_{k-1} \int_0^T e^{-\lambda_k(T-s)} p(s, k-1) ds, & k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (3.31)$$

Nous allons voir que ces dernières équations peuvent être utilisées de manière itérative pour calculer $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, même si nous connaissons seulement la loi du nombre de défaut pour une seule maturité T . En effet, il est possible de déterminer avec plus de précision la forme de la solution de ce dernier système d'équation.

Supposons dans un premier temps que les intensités $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont connues, qu'elles sont positives et distinctes. Soient $p(t, k)$, $0 \leq t \leq T$, $k = 0, \dots, n-1$, les masses de probabilités définies par :

$$p(t, k) = \sum_{i=0}^k a_{k,i} e^{-\lambda_i t}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (3.32)$$

où les coefficients $a_{k,i}$, $i = 0, 1, \dots, k$, $k = 0, \dots, n-1$ vérifient le système récursif suivant :

$$\begin{cases} a_{0,0} = 1, \\ a_{k,i} = \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_i} a_{k-1,i}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ a_{k,k} = -\sum_{i=0}^{k-1} a_{k,i} \end{cases} \quad (3.33)$$

On peut vérifier facilement que les fonctions $t \mapsto p(t, k)$, $k = 0, \dots, n-1$ décrites par 3.32 constituent l'unique solution du système d'équations différentielles 3.31. Ainsi, connaissant $(\lambda_k)_{k=1, \dots, n}$, nous avons déterminé explicitement la solution de ce système d'équations.

Ainsi, comme $\lambda_0 = -\frac{\ln(p(T,0))}{T}$, nous pouvons calculer récursivement $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ en résolvant l'équation non linéaire $p(T, k) = \sum_{i=0}^k a_{k,i} e^{-\lambda_i T}$, ou de manière équivalente :

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1,i} e^{-\lambda_i T} \left(\frac{1 - e^{-(\lambda_k - \lambda_i)T}}{\lambda_k - \lambda_i} \right) = \frac{p(T, k)}{\lambda_{k-1}}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.34)$$

A chaque étape k de l'itération, il est nécessaire d'après 3.33 de recalculer les coefficients $a_{k,i}$ en fonction des coefficients $a_{k-1,i}$ et des intensités λ_i , $i = 0, \dots, k-1$ calculés à l'étape précédente. De plus, on peut vérifier aisément que $p(T, k)$ est une fonction décroissante de λ_k qui prend la valeur $\lambda_{k-1} \int_0^T p(s, k-1) ds$ pour $\lambda_k = 0$ et qui possède une limite égale à 0 lorsque λ_k tend vers

⁷⁵Par exemple pour l'iTraxx, les maturités les plus liquides sont 3 ans, 5 ans et 10 ans.

l'infini. Autrement dit, l'équation 3.34 admet une unique solution lorsque les conditions suivantes sont satisfaites :

$$p(T, k) < \lambda_{k-1} \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_{k-1,i} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_i T}}{\lambda_i} \right) \right), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.35)$$

Ainsi, en partant de la loi du nombre de défauts à une maturité donnée, on peut calculer explicitement les solutions des équations forward de Kolmogorov et en déduire les intensités $(\lambda_k)_{k=1, \dots, n}$. Cette dernière méthode de calibration a également été étudiée par Epple et al. (2007).

3.3.3 Autres approches pour la calibration des intensités

Des approches alternatives basées sur des algorithmes de minimisation ont été proposées et développées dans plusieurs articles.

Herbertsson (2007b) choisit des intensités homogènes en temps et constantes par morceaux en le nombre de défauts, les changements de valeur correspondent aux points de détachement standards des tranches de CDO sur indice. Les intensités sont calibrées sur les cotations de spreads à une maturité unique au moyen d'un algorithme de minimisation des moindres carrés. Arnsdorf et Halperin (2007) proposent une paramétrisation constante par morceaux des intensités en temps (qu'ils appellent *contagion factors*). Lorsque, de plus, les intensités sont linéaires par morceaux en le nombre de défauts, ils utilisent un solveur multi-dimensionnel pour déduire les intensités à partir des prix de tranches observés. Remarquons que ces deux dernières approches mettent en jeu autant de paramètres à calibrer que de données disponibles. De manière analogue, Frey et Backhaus (2007b) et Frey et Backhaus (2007a) introduisent une forme paramétrique pour la fonction $\lambda(t, k)$ décrite par l'équation 3.8 qu'ils appellent *convex counterparty risk model* et calibrent les paramètres de cette fonction sur quelques prix de tranche. Lopatin et Misirpashaev (2007) expriment l'intensité de la perte $\lambda(t, k)$ comme une fonction polynômiale d'une variable auxiliaire qui dépend du nombre de défauts.

Une autre méthode basée sur la minimisation d'une distance entropique est proposée par Cont et Minca (2008). Ils déterminent les intensités $\lambda(t, k)$ de sorte que la loi du nombre de défauts correspondante soit aussi proche que possible d'une loi simple ou d'un prior (par exemple une loi de Poisson) sous contrainte de reproduire les primes de tranches de CDO observées sur le marché. Ils montrent que les intensités solutions de ce problème de minimisation vérifient un système d'équations différentielles d'Hamilton-Jacobi dont la solution peut être déterminée analytiquement. Cependant, le problème de cette approche réside dans le fait que les intensités calibrées sont fortement tributaires du choix du prior. De plus, les intensités qu'ils obtiennent par cette méthode entropique ont une allure remarquablement différente de celles obtenues par les calibrations effectuées dans ce chapitre mais aussi de celles décrites dans l'article de Herbertsson (2007b).

3.4 Calcul des stratégies de couverture dans un arbre recombina- nant

Dans cette section, nous montrons que la dynamique de la perte agrégée dans les modèles de contagion markoviens homogènes peut être transcrite sous forme d'un arbre recombina-
nant, ce qui facilite grandement la mise en œuvre de ces modèles notamment du point de vue de la

couverture. Nous nous intéressons en particulier à la réplication de tranches de CDO standardisées avec l'indice CDS de même maturité. Par simplicité, la mise à jour régulière (tous les 6 mois) de la composition du portefeuille d'indice n'est pas prise en compte et nous considérerons que la même série d'indic est négociée jusqu'à maturité. Notons également qu'il est possible de modifier la nature de l'instrument de couverture sans trop de difficulté dans notre approche, ce qui correspond davantage aux pratiques de marché. Néanmoins, pour simplifier la présentation, nous avons choisi de considérer le même actif sous-jacent durant toute la période de couverture.

Nous détaillerons d'abord la construction de l'arbre à partir des intensités de la perte. Nous verrons ensuite qu'il est possible de décrire les *cash-flows* des tranches de CDO, de l'indice et les ratios de couverture associés dans les nœuds de l'arbre.

3.4.1 Construction de l'arbre

Rappelons que la perte unitaire à la date t s'écrit $L(t) = (1 - R)\frac{N(t)}{n}$. On considère une tranche de CDO $[a, b]$ sur un indice standardisé de point d'attachement a et de point de détachement b tels que $0 \leq a \leq b \leq 1$. Moyennant un ajustement mineur pour la jambe de prime (voir paragraphe suivant), l'indice CDS peut être assimilé à une tranche de CDO $[0, 100\%]$. On note $O(N(t))$ le montant nominal restant sur cette tranche lorsque $N(t)$ défauts se sont produits. $O(N(t))$ est égale à $b - a$ si $L(t) < a$, à $b - L(t)$ si $a \leq L(t) < b$ et à 0 si $L(t) \geq b$.

Rappelons que pour un payoff de type Européen, le vecteur des prix vérifie

$$V(t, \cdot) = e^{-r(t'-t)} \mathbf{Q}(t, t') V(t', \cdot), \quad (3.36)$$

pour $0 \leq t \leq t' \leq T$. Dans le cas où les intensités de défaut ne dépendent pas du temps, la matrice de transition est telle que $\mathbf{Q}(t, t') = \exp((t' - t)\Lambda)$ où Λ désigne la matrice génératrice associée au processus de comptage $N(t)$.

En pratique, pour construire l'arbre, on a besoin de discrétiser l'intervalle de temps $[0, T]$. On considère donc une grille $t_0 = 0, \dots, t_i, \dots, t_{n_s} = T$. Pour simplifier, on suppose de plus que le pas de temps est constant, $\Delta = t_1 - t_0 = \dots = t_i - t_{i-1} = \dots$. L'approximation la plus naturelle consiste à choisir $\mathbf{Q}(t_i, t_{i+1}) \simeq Id + \Lambda(t_i) \times (t_{i+1} - t_i)$, ce qui entraîne $\mathbb{Q}(N(t_{i+1}) = k + 1 | N(t_i) = k) \simeq \lambda_k \Delta$ et $\mathbb{Q}(N(t_{i+1}) = k | N(t_i) = k) \simeq 1 - \lambda_k \Delta$. Le problème est que pour des intensités λ_k de valeur élevée, les probabilités de transition peuvent être négatives. Nous utiliserons donc plutôt les approximations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(N(t_{i+1}) = k + 1 | N(t_i) = k) \simeq 1 - e^{-\lambda_k \Delta} \text{ et} \\ \mathbb{Q}(N(t_{i+1}) = k | N(t_i) = k) \simeq e^{-\lambda_k \Delta}. \end{cases} \quad (3.37)$$

A l'aide de ces approximations, le processus du nombre de défauts peut être représenté sous forme d'un arbre binomiale recombinaut. Nous avons tracé en figure 3.2 l'arbre des états du nombre de défauts correspondant à un pas de temps égal à $\Delta = 1$ pour les trois premières périodes.

Cette idée a également été développée par van der Voort (2006). On peut clairement favoriser des techniques de calculs relatives aux chaînes de Markov en temps continu pour déterminer les valeurs actuelles des tranches de CDO, de l'indice et les ratios de couverture. Par exemple, dans le cas d'intensité homogène en temps, des méthodes basées sur des exponentielles de matrice sont détaillées par Herbertsson et Rootz'en (2006), Herbertsson (2007b) et Herbertsson (2007a). Ces

dernières approches se concentrent sur l'évaluation et non la couverture des dérivés de crédit. De plus, la description du modèle à l'aide d'un arbre est une manière intuitive de présenter les *cash-flows*, l'évaluation et la couverture d'un point de vue financier. Cela correspond au modèle d'arbre binomiale implicite de Derman et Kani (1994). La convergence de l'arbre discret vers sa version continue est un problème bien connu et ne sera pas détaillé ici.

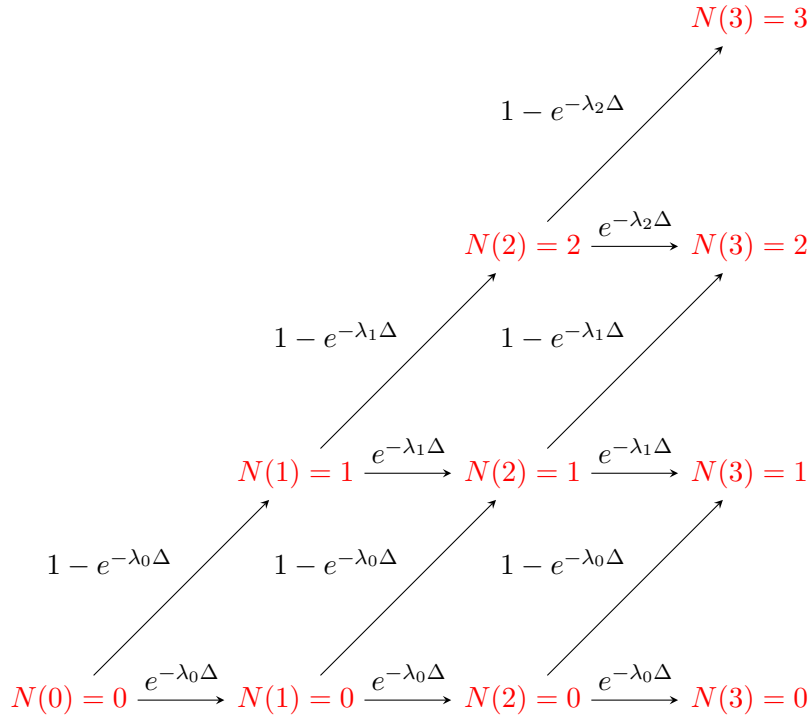


FIG. 3.2 – Arbre du nombre de défauts

3.4.2 Cash-flows d'une tranche de CDO dans l'arbre et credit deltas

Nous décrivons dans cette partie le calcul de la valeur actuelle d'une tranche de CDO, de l'indice et la détermination des stratégies de réplication dans l'arbre du nombre de défauts. Pour plus de détails concernant les *cash-flows* des tranches de CDO, de l'indice et leur valeur de marché, le lecteur est renvoyé au chapitre 1 (section 1.1) de ce mémoire.

Cash-flows d'une tranche de CDO dans l'arbre

Notons $d(i, k)$ la valeur actuelle à la date t_i de la jambe de défaut de la tranche de CDO lorsque le nombre courant de défaut est égal à k , i.e $N(t_i) = k$. Par convention, nous considérons la valeur de la jambe de défaut immédiatement après t_i de sorte qu'aucun paiement dû à un défaut en t_i n'intervienne dans le calcul des $d(i, k)$. Le paiement sur la jambe de défaut en t_{i+1} est donc égal à $O(N(t_i)) - O(N(t_{i+1}))$. $d(i, k)$ s'exprime donc simplement en fonction de $d(i + 1, k)$ et

$d(i + 1, k + 1)$ grâce à la relation de récurrence (*backward*) suivante :

$$d(i, k) = e^{-r\Delta} \left(\left(1 - e^{-\lambda_k \Delta}\right) \{d(i + 1, k + 1) + O(k) - O(k + 1)\} + e^{-\lambda_k \Delta} d(i + 1, k) \right)^{76}. \quad (3.38)$$

Il s'agit simplement de l'espérance actualisée en t_i des flux correspondants aux nœuds adjacents en t_{i+1} sachant qu'un paiement à lieu dans l'état $N(t_{i+1}) = k + 1$ correspondant à l'arrivée du $(k + 1)^{\text{ème}}$ défaut. Ce paiement additionnel est l'analogue d'un détachement de dividende dans l'utilisation classique des arbres pour l'évaluation d'options sur action.

La valeur actuelle de la jambe de prime unitaire se traite de manière similaire. Notons T_1, \dots, T_p , les dates de paiement de primes contractuelles et supposons par simplicité que $\{T_1, \dots, T_p\} \subset \{t_0, \dots, t_{n_s}\}$. Considérons un instant t_{i+1} entre deux dates de paiement de prime, i.e il existe un entier l tel que $T_l < t_{i+1} \leq T_{l+1}$. Quelque soit t_{i+1} , il y a un paiement de coupon couru égale à $(O(N(t_i)) - O(N(t_{i+1}))) (t_{i+1} - T_l)$ correspondant à un ajustement de prime dû à la diminution du nominale restant à l'arrivée d'un défaut. De plus, lorsque $t_{i+1} = T_{l+1}$, il y a un paiement de prime contractuel égal à $O(N(T_{l+1})) (T_{l+1} - T_l)$ en t_{i+1} . Ainsi, la prime totale en $t_{i+1} = T_{l+1}$ est égale à $O(N(t_i)) (T_{l+1} - T_l)$.

Notons $r(i, k)$ la valeur actuelle de la jambe de prime unitaire en t_i dans l'état $N(t_i) = k$. Comme pour la jambe de défaut, on s'intéresse par convention à la valeur de la jambe de prime juste après t_i et on exclut donc les paiements de primes éventuels en t_i du calcul de $r(i, k)$. D'après ce que l'on vient d'exposer, si $t_{i+1} \in \{T_1, \dots, T_p\}$, alors $r(i, k)$ est tel que :

$$r(i, k) = e^{-r\Delta} \left(O(k) (T_{l+1} - T_l) + \left(1 - e^{-\lambda_k \Delta}\right) r(i + 1, k + 1) + e^{-\lambda_k \Delta} r(i + 1, k) \right). \quad (3.39)$$

Dans le cas contraire, i.e $t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}$, $r(i, k)$ est tel que :

$$r(i, k) = e^{-r\Delta} \left(\left(1 - e^{-\lambda_k \Delta}\right) \{r(i + 1, k + 1) + (O(k) - O(k + 1)) (t_{i+1} - T_l)\} + e^{-\lambda_k \Delta} r(i + 1, k) \right)^{77}. \quad (3.40)$$

Le spread contractuel de la tranche de CDO est égal à $s = \frac{d(0,0)}{r(0,0)}$. La valeur d'une position d'achat de protection sur la tranche à la date t_i , lorsque $N(t_i) = k$ est simplement égale à $V_{CDO}(i, k) = d(i, k) - sr(i, k)$. Rappelons que la tranche equity est traitée de manière légèrement différente puisque son spread contractuel est fixé à $s = 500\text{bp}$. A cause du risque élevé supporté par cette tranche, un paiement de prime *upfront* additionnel à lieu à la création du contrat et il n'est donc pas nécessaire de le prendre en compte du point de vue de la couverture. Cependant, la valeur d'une tranche *equity* de CDO en t_i lorsque $N(t_i) = k$ est aussi égale à $d(i, k) - sr(i, k)$.

Cash-flows de l'indice dans l'arbre

On note $d_{IS}(i, k)$ et $r_{IS}(i, k)$ les valeurs actuelles de la jambe de défaut et de la jambe de prime de l'indice à la date t_i lorsque $N(t_i) = k$. Ces quantités peuvent être calculées en adaptant légèrement les equations de récurrence 3.38, 3.39 et 3.40. En effet, la jambe de défaut d'un indice CDS correspond à celle d'une tranche de CDO $[0, 100\%]$. Ainsi dans la relation 3.38, le montant nominal restant pour k défauts est égal à $O(k) = 1 - \frac{k(1-R)}{n}$, où R est le taux de recouvrement et n

⁷⁶Pour être plus précis, cette relation est valable pour les indices $i = 0, \dots, n_s - 1$, $k = 0, \dots, \min(i, n - 1)$ et en prenant $d(n_s, k) = 0$ pour $k = 0, \dots, n$ et $d(i, n) = 0$ pour $i = n, \dots, n_s - 1$.

⁷⁷De même, pour être complet, les relations 3.39 et 3.40 sont valables pour les indices $i = 0, \dots, n_s - 1$, $k = 0, \dots, \min(i, n - 1)$ et en prenant $r(n_s, k) = 0$ pour $k = 0, \dots, n$ et $r(i, n) = 0$ pour $i = n, \dots, n_s - 1$.

la dimension du portefeuille. De plus, pour être cohérent avec les conventions de marché, le calcul de la jambe de prime de l'indice doit faire l'objet d'un léger réajustement. En fait, les paiements de prime sur l'indice reposent seulement sur le nombre de noms survivants et ne prennent pas en compte le taux de recouvrement. En conséquence, on peut également exploiter les relations de récurrence 3.39 et 3.40 mais en considérant un nominale restant égale à $O(k) = 1 - \frac{k}{n}$. On définit enfin le spread de l'indice $s_{IS}(i, k)$ à la date t_i pour $N(t_i) = k$ par $s_{IS}(i, k) \times r_{IS}(i, k) = d_{IS}(i, k)$. Rappelons qu'en pratique l'indice CDS est coté en spread bien que le spread contractuel déterminé à la création de la série reste fixé pour la durée du contrat. L'évolution des spreads d'indice traduit l'évolution des valeurs de marché de ces produits. La valeur d'un achat de protection sur l'indice au nœud (i, k) correspond exactement à la prime upfront payée par un acheteur de protection s'il rentre dans le contrat en (i, k) et est égale à $V_{IS}(i, k) = d_{IS}(i, k) - s_{IS}(0, 0) \times r_{IS}(i, k)$.

Credit deltas dans l'arbre

Dans un arbre binomial, les stratégies de réplcation $\delta(i, k)$ sont classiquement égales au ratio entre la différence en valeur à la date t_{i+1} de l'option dans l'état $k+1$ défaut et dans l'état k et la différence correspondante pour l'indice sous-jacent. Notons qu'ici, la tranche de CDO et l'indice CDS versent tous deux des dividendes. Par exemple, lorsque le nombre de défaut passe de k à $k+1$, il y a un paiement de $O(k) - O(k+1)$ sur la jambe de défaut de la tranche de CDO. De même, dans ce cas, un paiement de coupon couru a lieu également sur la jambe de prime de la tranche et est égal à :

$$-s_{1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}}} (O(k) - O(k+1)) (t_{i+1} - T_l). \quad (3.41)$$

En effet, dans le cas où $t_{i+1} \in \{T_1, \dots, T_p\}$, le paiement de prime est le même en t_{i+1} quelque soit l'état k ou $k+1$ du nombre de défauts et n'apparaît donc pas dans l'expression du ratio de couverture. En conséquence, lorsqu'un défaut survient, le changement de valeur de la tranche est la résultante d'un gain de capital de $V_{CDO}(i+1, k+1) - V_{CDO}(i+1, k)$ et d'un flux de dividende égal à :

$$(O(k) - O(k+1)) (1 - s_{1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}}} (t_{i+1} - T_l)). \quad (3.42)$$

Il en est de même pour l'indice. Ainsi, le credit delta au nœud (i, k) de la tranche de CDO par rapport à l'indice est donné par l'expression suivante :

$$\delta(i, k) = \frac{V_{CDO}(i+1, k+1) - V_{CDO}(i+1, k) + (O(k) - O(k+1)) (1 - s_{1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}}} (t_{i+1} - T_l))}{V_{IS}(i+1, k+1) - V_{IS}(i+1, k) + \frac{1-R}{n} - \frac{1}{n} s_{IS}(0, 0) 1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}}} (t_{i+1} - T_l)}. \quad (3.43)$$

On peut remarquer de plus que le credit delta décrit ci-dessus conduit à une réplcation parfaite des tranches de CDO dans l'arbre qui est réalisable dans la mesure où l'approximation discrète du marché est complète.

3.5 Stratégies de couverture pour un arbre calibré sur la copule gaussienne

Dans cette section, nous déterminons les stratégies de replication (*credit delta*) pour des tranches standardisées de CDO par rapport à l'indice sous-jacent pour des intensités de la perte calibrées sur un modèle à copule gaussienne à un facteur. Ce cas d'école nous permettra d'analyser l'effet du choix du taux de recouvrement ainsi que l'impact de la dépendance sur les ratios de couverture.

3.5.1 Calcul des stratégies de couverture

Dans les illustrations numériques présentées ci-dessous, les intensités λ_k de la perte sont calibrées par la procédure décrite au paragraphe 3.3.2 à partir d'une loi du nombre de défauts à un horizon unique. Nous avons choisi dans un premier temps de partir d'une loi du nombre de défauts générée par une copule gaussienne à un facteur de paramètre de corrélation $\rho = 30\%$. Pour plus de détails sur ce modèle, nous renvoyons le lecteur au paragraphe 1.2.1 du chapitre 1. Les spreads de crédit des CDS composants l'indice sont supposés être égaux à $s = 20$ points de base par an⁷⁸, le taux de recouvrement est égale à $R = 40\%$ et la maturité des contrats étudiés est égale à $T = 5$ ans. On considère un portefeuille d'indice composé de $n = 125$ entités. La figure 3.3 représente la loi du nombre de défauts correspondante.

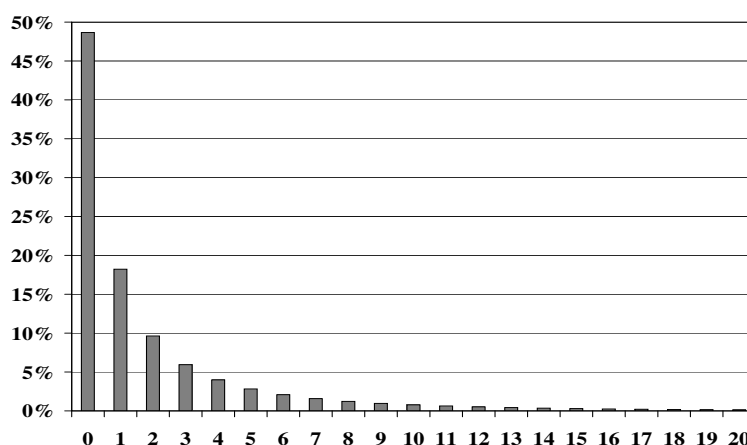


FIG. 3.3 – Loi du nombre de défauts pour la copule gaussienne à un facteur de corrélation $\rho^2 = 30\%$: $p(5, k)$, $k = 0, \dots, 20$.

Les intensités de la perte ont été calibrées jusqu'à $k = 49$ défauts. Remarquons que sous l'hypothèse d'une copule gaussienne, les probabilités de défaut sont insignifiantes pour $k \geq 50$.⁷⁹ Pour éviter certaines difficultés numériques, les intensités restantes pour $k \geq 50$ ont été construites par interpolation linéaire⁸⁰. En effet, la procédure de calibration des intensités sur la copule gaussienne devient instable pour des grandes valeurs du nombre de défauts car les

⁷⁸Pour générer la loi du nombre de défauts à un horizon T avec la copule gaussienne, on effectue l'approximation classique qui consiste à supposer que les temps de défaut sont de loi marginales exponentielles de paramètre égale à $\frac{s}{1-R}$. La probabilité de défaut avant T est donc égale à $F(T) = \mathbb{Q}(\tau_1 \leq T) = 1 - \exp\left(-\frac{s}{1-R}T\right)$.

⁷⁹En effet, on a $\sum_{k \geq 50} p(5, k) \simeq 3 \times 10^{-4}$, $p(5, 50) \simeq 3.2 \times 10^{-5}$ et $p(5, 125) \simeq 4 \times 10^{-12}$.

⁸⁰Nous avons pris soin de vérifier que le choix des intensités pour ces valeurs élevées du nombre de défauts n'avait pas d'effet significatif sur le calcul des deltas.

probabilités $p(T, k)$, $k \geq 50$ sont extrêmement faibles⁸¹. Nous verrons à la section 3.6 que ce problème disparaît lorsque l'on considère des lois de perte issues de données de marché puisque, dans ce cas, ces dernières admettent des queues plus épaisses.

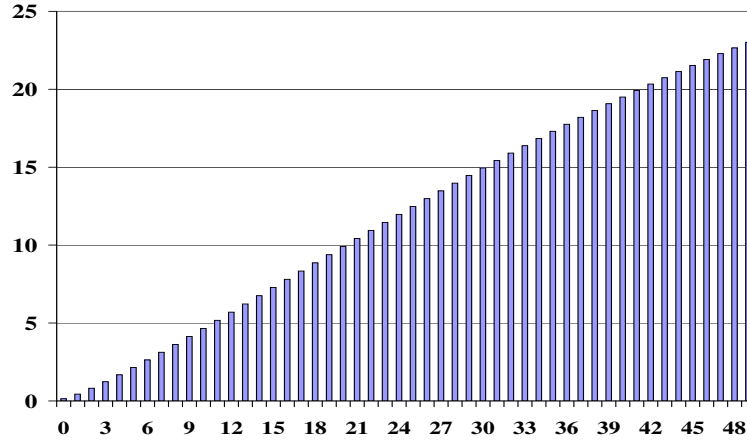


FIG. 3.4 – Intensités de la perte λ_k , $k = 0, \dots, 49$.

Comme on peut observer en figure 3.4, les intensités de la perte évoluent presque linéairement en fonction du nombre de défauts. Cette linéarité des intensités calibrées sur la copule gaussienne a également été constatée par Lopatin et Misirpashaev (2007). Ce résultat peut aussi être rattaché à l'analyse de Ding et al. (2006) qui s'intéressent à un modèle dynamique où les intensités de la perte sont linéaires en fonction du nombre de défauts.

Nb Défauts	Semaines			
	0	14	56	84
0	20	18	14	13
1	0	70	54	46
2	0	148	112	93
3	0	243	182	150
4	0	350	261	215
5	0	466	347	285
6	0	589	437	359
7	0	719	531	436
8	0	856	630	516
9	0	997	732	598
10	0	1142	839	683

TAB. 3.1 – Dynamique des spreads de l'indice $s_{IS}(i, k)$ en points de base par an (bps).

La table 3.1 représente la dynamique des spreads de l'indice $s_{IS}(i, k)$ calculés dans les nœuds de l'arbre en fonction de l'état du nombre de défauts. Le taux d'intérêt sans risque est fixé à $r = 3\%$ et le pas de la grille de discrétisation en temps correspond à une journée, i.e $\Delta = \frac{1}{365}$. On peut observer que l'arrivée de nouveaux défauts entraîne des changements importants du spread de l'indice. Par exemple, si un premier défaut survient après un trimestre (à 14 semaines), la

⁸¹Ces problèmes peuvent être partiellement résolus en augmentant la précision associée à la représentation numérique des données.

valeur du spread d'indice effectue un saut de 18 bps à 70 bps. Un défaut additionnel à cette date amène le spread de l'indice à 148 bps. Remarquons de plus que le spread de l'indice à l'origine correspond bien au spread des CDS individuels composant cet indice, i.e 20 bps.

Qu'en est-il maintenant des ratios de couverture $\delta(i, k)$ des tranches de CDO par rapport à l'indice? Les tables 3.2, 3.3 montrent l'évolution des *credit deltas* pour la tranche *equity* [0, 3%] et pour la tranche *junior mezzanine* [3, 6%] en fonction du nombre de défauts. Pour la tranche *equity*, on peut constater que les deltas sont positifs et décroissants en fonction du nombre de défauts. Cela n'est pas surprenant dans la mesure où un achat de protection sur la tranche *equity* peut être assimilé à une position courte sur une option de vente de sous-jacent correspondant à la perte agrégée et de prix d'exercice égal à 3% (et donc de *payoff* concave croissant en fonction du nombre de défauts). Selon la théorie des options, cette position est nécessairement associée à un delta positif, un gamma négatif et donc à des deltas décroissants. Lorsque le nombre de défauts excède 6, le nominal restant sur la tranche *equity* est nul, la tranche est complètement consommée et les deltas sont nuls.

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.538	0.591	0.755	0.859
1	2.52%	0	0.238	0.381	0.508
2	2.04%	0	0.074	0.137	0.212
3	1.56%	0	0.026	0.044	0.070
4	1.08%	0	0.011	0.017	0.024
5	0.60%	0	0.005	0.007	0.009
6	0.12%	0	0.001	0.001	0.001
7	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.2 – Deltas de la tranche *equity* [0, 3%] par rapport à l'indice.

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.255	0.254	0.219	0.171
1	3.00%	0	0.280	0.349	0.357
2	3.00%	0	0.167	0.294	0.389
3	3.00%	0	0.068	0.158	0.265
4	3.00%	0	0.026	0.065	0.128
5	3.00%	0	0.014	0.027	0.053
6	3.00%	0	0.010	0.016	0.025
7	2.64%	0	0.008	0.011	0.015
8	2.16%	0	0.006	0.008	0.010
9	1.68%	0	0.004	0.005	0.007
10	1.20%	0	0.003	0.003	0.004
11	0.72%	0	0.002	0.002	0.002
12	0.24%	0	0.001	0.001	0.001
12	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.3 – Deltas de la tranche *junior mezzanine* [3, 6%] par rapport à l'indice.

A l'origine, le *credit delta* associé à la tranche *equity* est de 54% alors qu'il est seulement égale à 25% pour la tranche [3, 6%] qui est une option en dehors de la monnaie (voir table 3.3). De plus, la tranche [3, 6%] peut être associée à une position de *call spread* sur la perte agrégée (de *payoff* croissant convexe puis concave par rapport au nombre de défauts). En conséquence, les deltas correspondants sont positifs, d'abord croissants (effet gamma positif) puis décroissants (effet gamma négatif) jusqu'à devenir nuls lorsque la tranche est complètement consommée.

Étant donné le taux de recouvrement de 40%, la valeur du nominal restant sur la tranche [3, 6%] est égale à 3% au 6^{ème} défaut et à 2.64% au 7^{ème} défaut. On pourrait alors penser qu'au 6^{ème} défaut, la tranche [3, 6%] réagisse approximativement de la même manière que la tranche *equity*. Cependant, comme on peut le voir dans la table 3.3, à 14 semaines, le *credit delta* de la tranche *junior mezzanine* (à peine 1%) est nettement plus faible que celui de la tranche *equity* (59% pour zero défaut). Cela s'explique simplement par le fait que le niveau des spreads a considérablement augmenté entre l'état 0 défaut et l'état 6 défauts (Voir Table 3.1), ce qui traduit une espérance de perte nettement plus élevée sur la tranche *junior mezzanine* au moment où la structure de ses *cash-flows* est analogue à celle de la tranche *equity*. Cela est cohérent avec des deltas faibles au vu de la structure de *payoff* de type *call-spread* de cette tranche.

3.5.2 Sensibilité des stratégies de couverture au taux de recouvrement

Les stratégies de couverture présentées précédemment ont été obtenues en supposant que le taux de recouvrement était égal à 40%. Cependant, même si cette hypothèse est classiquement employée en pratique pour la gestion des tranches de CDO, elle demeure cependant arbitraire. Il est donc légitime d'examiner l'effet du choix du taux de recouvrement sur les stratégies de couverture. Pour mener à bien cette analyse de robustesse, nous sommes partis d'une surface de pertes espérées (*loss surface*) donnée ou de manière équivalente d'une série de spreads de tranches de CDO. La surface de pertes espérées est définie comme la fonction $(t, \tilde{k}) \in [0, T] \times [0, 1] \rightarrow \text{EL}(t, \tilde{k})$ telle que :

$$\text{EL}(t, \tilde{k}) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\min \left(L(t), \tilde{k} \right) \right] = \sum_{m=1}^n \min \left(m \frac{(1-R)}{n}, \tilde{k} \right) p(t, m). \quad (3.44)$$

Il est possible de calculer les masses de probabilité du nombre de défauts $p(t, k)$ associée à une surface de pertes espérées donnée. En effet, pour une date t fixée, les $\text{EL}(t, k \frac{1-R}{n})$, $\tilde{k} = 0, \dots, n$ forment un système linéaire en $p(t, k)$, $k = 0, \dots, n$ qui s'inverse facilement :

$$\begin{cases} p(t, n) = \frac{n}{1-R} \left\{ \text{EL}(t, 1-R) - \text{EL}(t, \frac{n-1}{n}(1-R)) \right\}, & k = n, \\ p(t, k) = -\frac{n}{1-R} \left\{ \text{EL}(t, (k-1)\frac{(1-R)}{n}) - 2\text{EL}(t, k\frac{(1-R)}{n}) + \text{EL}(t, (k+1)\frac{(1-R)}{n}) \right\}, & k = 1, \dots, n-1, \\ p(t, 0) = 1 - \sum_{i=1}^n p(t, k), & k = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Nous allons déterminer les stratégies de couverture pour plusieurs valeurs du taux de recouvrement associées à la même surface de pertes espérées. Plus précisément, on suppose que pour une valeur différente du taux de recouvrement, $R^* \neq R$, l'égalité suivante est vérifiée pour tout $\tilde{k} \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \text{EL}^*(T, \tilde{k}) &= \sum_{m=1}^n \min \left(m \frac{(1-R^*)}{n}, \tilde{k} \right) p^*(t, m) \\ &= \sum_{m=1}^n \min \left(m \frac{(1-R)}{n}, \tilde{k} \right) p(t, m) = \text{EL}(T, \tilde{k}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ainsi, en partant d'une surface de perte $EL(T, \tilde{k})$ fixée, on peut déterminer pour un taux de recouvrement R^* , la loi du nombre de défauts $p^*(t, k)$, $k = 0, \dots, n$ à l'aide du système d'équation 3.45 et recalibrer les intensités $\lambda_0^*, \dots, \lambda_n^*$ à partir de cette loi.

Tranches	Taux de recouvrement R^*				
	10%	20%	30%	40%	50%
[0-3%]	0.554	0.547	0.542	0.538	0.528
[3-6%]	0.251	0.254	0.254	0.255	0.257
[6-9%]	0.129	0.130	0.130	0.131	0.131

TAB. 3.4 – Deltas à l'origine pour différentes valeurs du taux de recouvrement.

La table 3.4 rassemble les *credit deltas* à l'origine, pour les trois premières tranches et pour différentes valeurs du taux de recouvrement. Dans cet exemple, la surface de pertes espérées que l'on a utilisé a été générée à partir de la loi du nombre de défaut $(p(T, k), k = 0, \dots, n)$ représentée en figure 3.3 (copule gaussienne de paramètre de corrélation $\rho^2 = 30\%$) et un taux de recouvrement égale à 40%. Les deltas ont été obtenus en appliquant la procédure décrite ci-dessus. On remarque d'une part que les deltas pour un taux de recouvrement $R = 40\%$ sont bien égaux aux deltas initiaux des Tables 3.2 et 3.3 (pour les tranches [0-3%] et [3-6%]), ce qui est cohérent avec le choix de la surface de pertes espérées placée en *input*. D'autre part, on peut observer que les stratégies de couverture sont très faiblement affectées par l'hypothèse sur le taux de recouvrement.

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.542	0.592	0.748	0.847
1	2.44%	0	0.230	0.361	0.478
2	1.88%	0	0.067	0.121	0.183
3	1.32%	0	0.021	0.036	0.054
4	0.76%	0	0.008	0.012	0.016
5	0.20%	0	0.002	0.002	0.003
6	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.5 – Deltas de la tranche *equity* [0, 3%], $\delta^*(i, k)$ par rapport à l'indice pour un taux de recouvrement de $R^* = 30\%$.

La table 3.5 montre la dynamique des deltas pour la tranche *equity* lorsque le taux de recouvrement est égal à $R^* = 30\%$. En comparant avec la table 3.2 (taux de recouvrement égal à 40%), on peut remarquer que les deltas sont très proches avant l'arrivée du premier défaut puis s'éloignent progressivement à mesure que le nombre de défauts augmente. Cela peut s'expliquer par le fait que le schéma d'amortissement (ou le rythme de consommation de la tranche) n'est plus le même suivant l'hypothèse que l'on choisit pour le taux de recouvrement.

3.5.3 Sensibilité des stratégies de couverture au paramètre de corrélation

Nous analysons dans ce paragraphe l'effet du niveau de dépendance sur les stratégies de couverture. Rappelons que les intensités de la perte ont été calibrées jusqu'à maintenant sur une loi du nombre de défauts générée par une copule gaussienne de paramètre de corrélation

$\rho^2 = 30\%$. On a vu au chapitre 2 que le niveau de dépendance avait un impact significatif sur la loi de la perte et les primes de tranche de CDO. Par exemple, lorsque l'on diminue le paramètre de dépendance, cela entraîne un amincissement de la queue de distribution de la perte pour les valeurs élevées du support et on peut s'attendre à une diminution de la contagion. Par simplicité, nous concentrons ici notre analyse sur la tranche equity en affaiblissant le paramètre de corrélation de 30% à 10%.

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.931	0.960	1.009	1.058
1	2.52%	0	0.694	0.785	0.910
2	2.04%	0	0.394	0.485	0.645
3	1.56%	0	0.179	0.233	0.352
4	1.08%	0	0.072	0.092	0.145
5	0.60%	0	0.027	0.032	0.046
6	0.12%	0	0.004	0.005	0.007
7	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.6 – Deltas de la tranche *equity* [0,3%] par rapport à l'indice, $\rho^2 = 10\%$.

La table 3.6 représente les deltas pour la tranche *equity* dans le cas d'un paramètre de corrélation de $\rho^2 = 10\%$. On constate en comparant ces derniers résultats avec la table 3.2 ($\rho^2 = 30\%$) que les deltas sont beaucoup plus élevés dans le premier cas. Par exemple, après 14 semaines et avant l'arrivée du premier défaut, le *credit delta* est égal à 59% pour une corrélation de 30% et il est égale à 96% pour une corrélation de 10%. On peut remarquer de plus que certains deltas sont supérieurs à 1. L'explication de ce phénomène sera donnée à la section suivante.

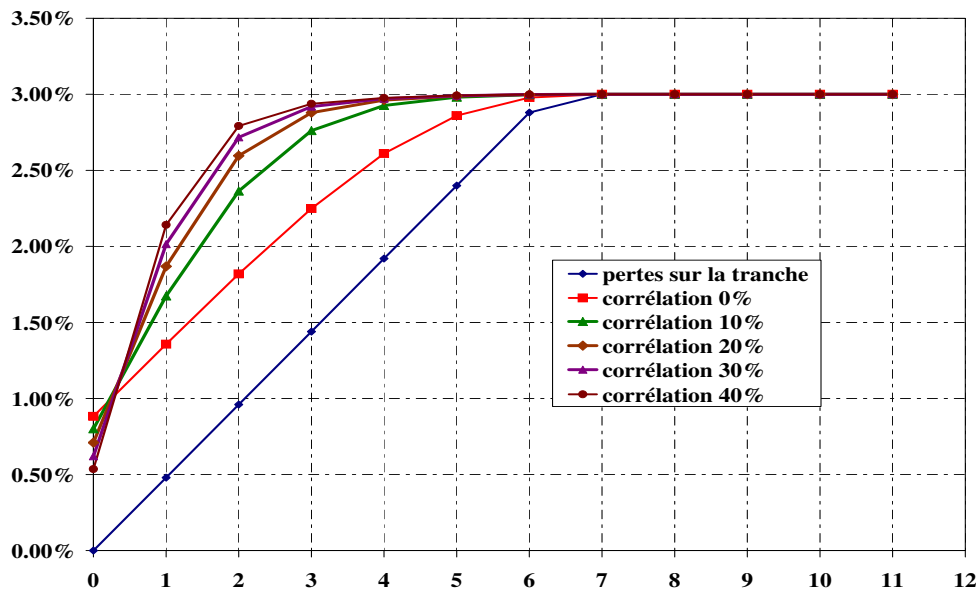


FIG. 3.5 – Valeur de marché de la tranche equity pour plusieurs paramètres de corrélation. Nombre de défauts sur l'axe des abscisses.

Pour mieux comprendre l'effet de la dépendance sur les stratégies de couverture, nous avons calculé la valeur de marché à 14 semaines associée à la jambe de défaut d'une tranche *equity* pour différentes valeurs du paramètre de corrélation (voir figure 3.5). La valeur de marché de la jambe de défaut est définie comme la somme de l'espérance des *cash-flows* futurs actualisés sur la tranche après la 14^{ème} semaine et des paiements de défaut accumulés depuis l'origine⁸². Nous avons également représenté la perte cumulée qui correspond à la valeur intrinsèque de la jambe de défaut de la tranche *equity*. On peut reconnaître la forme typique, croissante concave, d'un *payoff* associé à une position courte sur une option de vente.

Comme on peut le voir en figure 3.5, avant le premier défaut, la valeur de la jambe de défaut de la tranche *equity* diminue lorsque le paramètre de corrélation augmente de 0% à 40%, ce qui est cohérent avec les résultats de comparaison développés au paragraphe 2.4.1 du chapitre 2. Cependant, après l'arrivée du premier défaut, les valeurs sont inversées. En effet, puisque le phénomène de contagion est amplifié lorsque la dépendance augmente, les sauts de spread à l'arrivée du premier défaut sont donc plus élevés, ce qui entraîne une augmentation plus importante des espérances de *cash-flows* futurs actualisés pour la jambe de prime de la tranche *equity*. Plus le niveau de corrélation est fort, plus le changement de valeur de la jambe de défaut est important à l'arrivée du premier défaut⁸³.

En fait, la variation du paramètre de corrélation peut être associée à deux phénomènes qui ont des conséquences opposées.

- Le premier repose sur un effet vanna négatif⁸⁴. En effet, augmenter la corrélation revient à diminuer la “volatilité” de la perte et entraîne des espérances de pertes plus faibles sur la tranche *equity*. Selon la théorie des options, le vanna d'une position courte sur une option de vente est négatif. Donc, d'après ce que l'on vient d'établir, une augmentation de la corrélation devrait donc entraîner une augmentation des deltas.
- Cependant, ce dernier phénomène est compensé et dominé par l'effet de la contagion et son impact sur les spreads en cas d'arrivée d'un défaut. En effet, une augmentation du paramètre de dépendance ne modifie pas seulement la forme de la distribution de la perte mais amplifie également le phénomène dynamique de la contagion dans notre approche. Plus de contagion entraîne des sauts plus importants des spreads d'indice et donc un changement plus prononcé des valeurs de marché de l'indice à l'arrivée d'un défaut. Rappelons qu'un *credit delta* est le ratio entre le changement de valeur d'une tranche et le changement de valeur de l'indice à l'arrivée d'un défaut. Étant donné le *payoff* concave de la tranche *equity*, il en résulte une diminution des deltas lorsque le paramètre de dépendance augmente.

⁸²L'effet de l'actualisation est négligé sur cette courte période.

⁸³Cela n'est pas incompatible avec les résultats de la table 3.6 montrant une décroissance des deltas en fonction du paramètre de corrélation. En effet, un *credit delta* est le ratio entre le changement de valeur d'une tranche et le changement de valeur de l'indice. A l'arrivée d'un défaut, le changement de valeur de l'indice est également plus important lorsque la contagion est amplifiée.

⁸⁴Rappelons que le vanna dans la théorie des options est la sensibilité du delta par rapport à une augmentation unitaire de la volatilité.

3.6 Stratégies de couverture pour un arbre calibré sur des données de marché

Dans cette section, les intensités de la perte sont calibrées à partir d'une loi du nombre de défauts compatible avec des données de marché. Les stratégies de couverture obtenues sont alors comparées avec les deltas calculés par les pratiques standards de marché. Bien que ces approches soient structurellement dissemblables – l'une fournit un moyen de répliquer dynamiquement le risque de défaut, l'autre vise à se couvrir localement contre le risque de spread – nous verrons que les deltas calculés par ces deux méthodes sont remarquablement similaires. Nous comparerons également nos résultats avec ceux obtenus récemment par Arnsdorf et Halperin (2007) dans le cadre d'un modèle de contagion markovien incluant un risque de spread spécifique et par Eckner (2007) dans le cadre d'un modèle à intensité affine multivarié.

3.6.1 Calcul des stratégies de couverture

Jusqu'à maintenant, les intensités de la perte étaient calibrées sur une copule gaussienne avec un paramètre de corrélation fixé. Dans les illustrations numériques de ce paragraphe, la distribution du nombre de défauts est générée à partir d'une structure de *base correlation* sur l'iTraxx Europe caractéristique de Juin 2007 (Voir table 3.7). La maturité des contrats reste égale à $T = 5$ ans, le taux de recouvrement est de 40% et le spread contractuel des CDS individuels est de 20 bps. Le taux d'intérêt sans risque est maintenant égal à 4% (ce qui correspond typiquement au taux court à cette période).

Base Tranches	[0-3%]	[0-6%]	[0-9%]	[0-12%]	[0-22%]
Base Correlations	18%	28%	36%	42%	58%

TAB. 3.7 – Structure de base correlation (iTraxx Juin 2007)

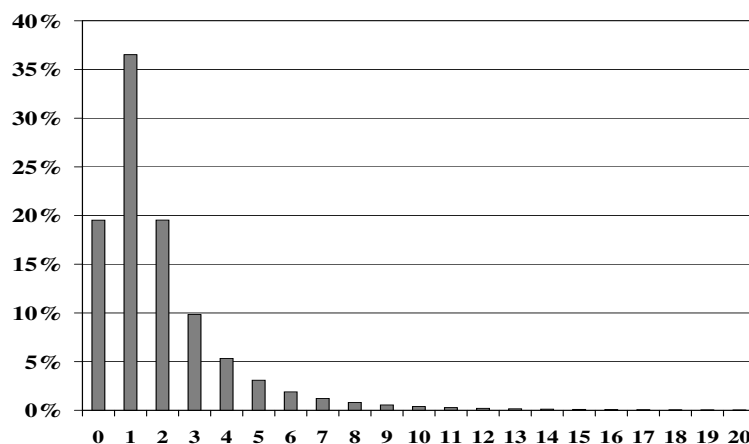


FIG. 3.6 – Loi du nombre de défauts déterminée à partir de la structure de *base correlation* décrite par le tableau 3.7. Nombre de défauts sur l'axe des abscisses.

Au lieu d'utiliser des fonctions splines pour extrapoler la structure complète des corrélations implicites, la loi de la perte à 5 ans associée à ces données de marché représentée en figure 3.6 a été construite par une méthode paramétrique. Cette procédure fournit des masses de probabilité

du nombre de défauts régulières et sans opportunité d'arbitrage, ce qui facilite la calibration des intensités de la perte⁸⁵.

On peut remarquer que cette loi est relativement différente de celle correspondante à la copule gaussienne de paramètre de corrélation fixé égale à $\rho^2 = 30\%$ (Voir figure 3.3) en particulier pour les valeurs extrêmes du support. En effet, la probabilité qu'il n'y ait pas de défaut diminue de 48.7% à 19.5% alors que la probabilité d'avoir un seul défaut augmente de 18.2% à 36.5%. Notons que ces chiffres ont seulement un caractère illustratif puisque le marché ne fournit pas suffisamment d'information concernant les premières pertes. Il est bien connu que la forme de la loi de la perte pour les faibles valeurs de son support est une question controversée. Pour les grandes valeurs du support, on a $\sum_{k \geq 50} p(5, k) \simeq 1.4 \times 10^{-3}$, $p(5, 50) \simeq 3.3 \times 10^{-6}$ et $p(5, 125) \simeq 1.38 \times 10^{-3}$. La queue de distribution est donc plus épaisse comparée au cas de la copule gaussienne. Le risque Armageddon associé au défaut du portefeuille dans sa globalité est également plutôt élevé. Une fois encore, ces chiffres, qui correspondent à des primes de tranches *senior* et *super-senior* non négligeables, doivent être considérés avec précaution puisqu'ils reflètent des hypothèses relativement arbitraires sur les probabilités du nombre de défauts dans les extrêmes.

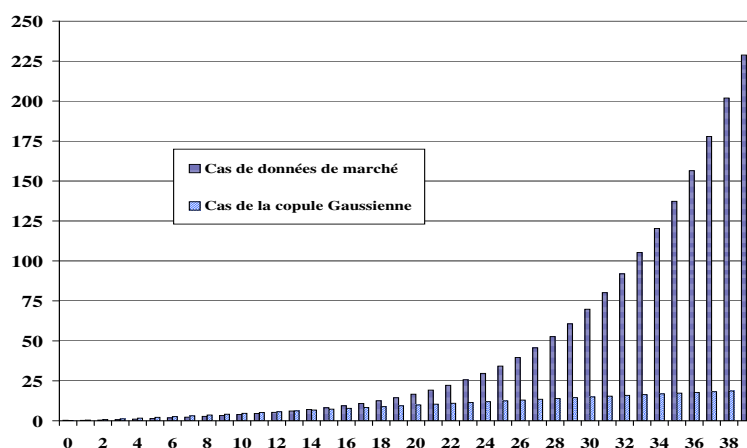


FIG. 3.7 – Comparaison des intensités de la perte λ_k , $k = 0, \dots, 40$ dans le cas d'une calibration sur des données de marché (à partir de la loi de la perte représentée en figure 3.6) et dans le cas d'une calibration sur la copule gaussienne (à partir de la loi de la perte représentée en figure 3.3). Nombre de défauts sur l'axe des abscisses.

La figure 3.7 compare les 39 premières intensités du nombre de défauts calibrées sur des données de marché et celles obtenues à partir de la copule gaussienne. Contrairement au cas de la copule gaussienne, nous avons pu calculer ici l'intégralité des intensités de la perte (125 intensités) avec la procédure de calibration décrite au paragraphe 3.3.2. Comme on peut le voir, les intensités de la perte augmentent beaucoup plus rapidement par rapport au nombre de défauts que dans le cas gaussien. Comme on pouvait s'y attendre, une structure de *base correlation* fortement croissante reflète une distribution de perte à queue épaisse et a tendance à amplifier le phénomène de contagion.

⁸⁵Nous avons également essayé de déterminer la loi du nombre de défauts par une méthode de minimisation entropique. Bien qu'il soit toujours possible de calibrer les intensités, leur allure en fonction du nombre de défauts n'était plus monotone et devenait très irrégulière suivant les prix de tranche considérés en *input*.

Nb Défauts	Semaines			
	0	14	56	84
0	20	19	17	16
1	0	31	23	20
2	0	95	57	43
3	0	269	150	98
4	0	592	361	228
5	0	1022	723	490
6	0	1466	1193	905
7	0	1870	1680	1420
8	0	2243	2126	2423
9	0	2623	2534	2423
10	0	3035	2939	2859

TAB. 3.8 – Dynamique des spreads de l'indice $s_{IS}(i, k)$ en points de base par an (bps).

La table 3.8 représente la dynamique des spreads d'indice $s_{IS}(i, k)$ dans les nœuds de l'arbre où le pas de temps est journalier, i.e $\Delta = \frac{1}{365}$. On peut constater d'après la figure 3.7 que, jusqu'au 12^{ème} défaut, les intensités de la perte calibrées sur les données de marché sont plus faibles que dans le cas de la copule gaussienne. L'effet de la contagion est plus important dans le cas de la copule gaussienne de paramètre $\rho^2 = 30\%$ pour les petites valeurs du nombre de défauts. La situation s'inverse à partir de 12 défauts. Il n'est donc pas surprenant qu'à 14 semaines l'arbre calibré sur les données de marché reflète des spreads plus faibles pour les deux premiers défauts et des spreads plus élevés ensuite (voir table 3.1 et table 3.8). Cela est également cohérent avec la figure 3.8 où les espérances de perte conditionnelles dans les deux cas "se croisent" au 3^{ème} défaut. Cependant, une fois encore, ces résultats sont à examiner avec prudence, puisqu'ils reposent sur les probabilités d'occurrence de 0, 1 et 2 défauts qui ne sont pas directement observables à partir des cotations de marché. Après le second défaut, les spreads d'indice deviennent définitivement plus grands dans le cas de la calibration sur les données de marché.

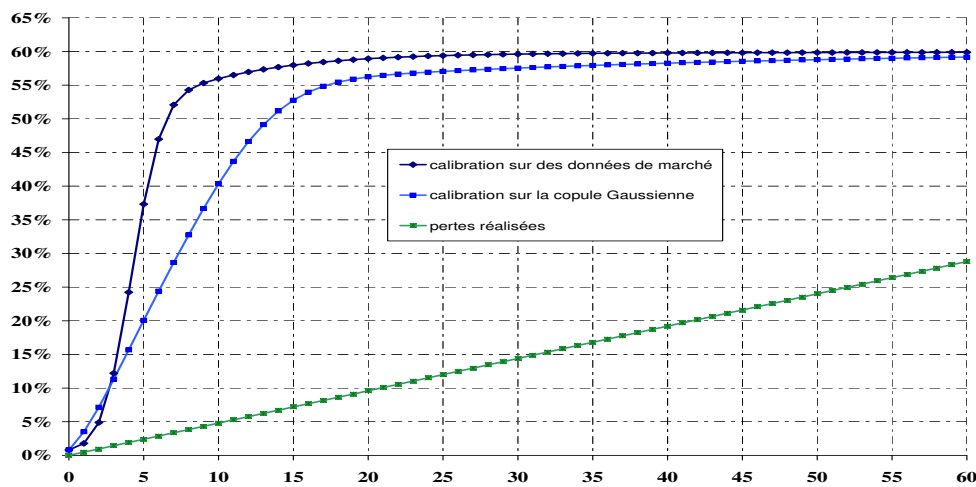


FIG. 3.8 – Espérance de la perte agrégée à 5 ans conditionnellement au nombre de défauts réalisés après 14 semaines. Nombre de défauts sur l'axe des abscisses.

La figure 3.8 permet d'éclairer la dynamique des spreads d'indice. Cette dernière représente l'espérance conditionnelle $E[L(T) | N(t)]$ de la perte du portefeuille pour un horizon $T = 5$, à $t = 14$ semaines en fonction du nombre de défauts dans les deux cas présentés précédemment. L'espérance conditionnelle de la perte est exprimée en pourcentage. La perte maximale est donc égale à 60% lorsque le taux de recouvrement est fixé à 40%. Nous avons également tracé la perte cumulée réalisée sur le portefeuille. L'espérance conditionnelle de la perte agrégée est supérieure à la perte agrégée réalisée puisque l'effet de la contagion est positif. On peut observer des différences importantes entre les deux approches. Dans le cas de la copule gaussienne, la perte espérée est grossièrement linéaire en fonction du nombre de défauts au moins jusqu'au 15^{ème} défaut. Dans le cas de données de marché, l'allure de la courbe est fortement non-linéaire, ce qui traduit un phénomène de contagion plus prononcé dans ce cas après quelques défauts, phénomène que l'on peut également remarquer à partir de la figure 3.7 ou de la table 3.8. Ce comportement explosif a également été reporté par Herbertsson (2007a) (tables 3 et 4) et par Cont et Minca (2008) (figures 1 et 3). Lopatin et Misirpashaev (2007) observent également que les cotations de marché reflètent un effet de contagion amplifié comparé au cas de la copule gaussienne.

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.645	0.731	0.953	1.038
1	2.52%	0	0.329	0.584	0.777
2	2.04%	0	0.091	0.197	0.351
3	1.56%	0	0.023	0.045	0.090
4	1.08%	0	0.008	0.011	0.018
5	0.60%	0	0.004	0.003	0.004
6	0.12%	0	0.001	0.001	0.001
7	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.9 – Deltas de la tranche equity $[0, 3\%]$ par rapport à l'indice.

La table 3.9 représente la dynamique des ratios de couverture associée à la tranche *equity*. On peut observer que les deltas convergent rapidement vers 0 à mesure que la tranche est consommée. Cela n'est pas surprenant étant donnée l'"explosion" des spreads d'indice après quelques défauts et en reprenant le raisonnement effectué au paragraphe 3.5.3 consacré à l'analyse de l'effet de la dépendance sur les deltas.

De plus, on peut également observer que dans l'état 0 défaut, le *credit delta* pour la tranche *equity* peut être légèrement supérieur à 1 (à 84 semaines, on a un *credit delta* égal à 1.038). Pour expliquer ce phénomène, il est intéressant de remarquer que le ratio de couverture $\delta(i, k)$ peut être décomposé en un delta associé à la jambe de défaut $\delta_d(i, k)$ et un delta associé à la jambe de prime $\delta_r(i, k)$ de la manière suivante :

$$\delta(i, k) = \delta_d(i, k) - s\delta_r(i, k), \quad (3.47)$$

où

$$\delta_d(i, k) = \frac{d(i+1, k+1) - d(i+1, k) + O(k) - O(k+1)}{V_{IS}(i+1, k+1) - V_{IS}(i+1, k) + \frac{1-R}{n} - \frac{1}{n}s_{IS}(0, 0)1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}}(t_{i+1} - T_l)} \quad (3.48)$$

et

$$\delta_r(i, k) = \frac{r(i+1, k+1) - r(i+1, k) + (O(k) - O(k+1)) 1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}} (t_{i+1} - T_l)}{V_{IS}(i+1, k+1) - V_{IS}(i+1, k) + \frac{1-R}{n} - \frac{1}{n} s_{IS}(0, 0) 1_{t_{i+1} \notin \{T_1, \dots, T_p\}} (t_{i+1} - T_l)}. \quad (3.49)$$

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	0.541	0.617	0.823	0.910
1	2.52%	0	0.279	0.510	0.690
2	2.04%	0	0.072	0.166	0.304
3	1.56%	0	0.016	0.034	0.072
4	1.08%	0	0.004	0.006	0.012
5	0.60%	0	0.002	0.002	0.002
6	0.12%	0	0.001	0.000	0.000
7	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.10 – Deltas de la jambe de défaut de la tranche *equity* [0, 3%] par rapport à l'indice : $\delta_d(i, k)$.

Nb Défauts	Nominale Restant	Semaines			
		0	14	56	84
0	3.00%	-0.104	-0.113	-0.130	-0.128
1	2.52%	0	-0.050	-0.074	-0.087
2	2.04%	0	-0.018	-0.031	-0.047
3	1.56%	0	-0.007	-0.011	-0.018
4	1.08%	0	-0.004	-0.004	-0.006
5	0.60%	0	-0.002	-0.002	-0.002
6	0.12%	0	-0.001	0.000	0.000
7	0.00%	0	0	0	0

TAB. 3.11 – Deltas de la jambe de prime de la tranche *equity* [0, 3%] par rapport à l'indice : $s\delta_r(i, k)$.

Les tables 3.10 et 3.11 décrivent l'évolution des deltas correspondants respectivement à la jambe de défaut et à la jambe de prime de la tranche *equity*. On peut remarquer d'une part que les deltas jambe de défaut sont bien compris entre 0 et 1 (Voir Table 3.10) et d'autre part que les deltas jambe de prime ont un impact négatif non négligeable sur les deltas totaux décrits par la relation 3.47. Cela permet d'expliquer le phénomène de deltas potentiellement supérieurs à 1 rencontré dans les tables 3.6 et 3.9. Ce dernier effet s'atténue à mesure que la tranche est consommée puisque la prime versée s'appuie sur le nominal restant espéré. Remarquons qu'une augmentation de la contagion va également dans le sens de ce dernier résultat puisqu'elle a tendance à diminuer le nominal restant espéré sur la tranche. Ce phénomène n'est pas observable pour les tranches plus *senior* pour lesquelles les deltas jambe de prime sont beaucoup plus faibles.

On peut noter également que les deltas default leg de la tranche *equity* augmentent à mesure que l'on se rapproche de la maturité. En fait, on peut vérifier qu'ils convergent vers 1 dans le cas où la tranche n'a pas été entièrement consommée, i.e jusqu'au 6^{ème} défaut. En effet, l'arrivée

d'un défaut juste avant la maturité affecte de la même manière la valeur de la jambe de défaut de la tranche et celle de l'indice puisque la valeur temps de l'option est nulle à ce moment. Le ratio de couverture doit donc être proche de 1 dans ce cas.

3.6.2 Comparaison entre deltas dans le modèle de contagion et deltas de marché

Ce paragraphe a pour but de comparer pour les tranches standards d'indice, les ratios de couverture à l'origine calculés avec notre approche et ceux obtenus par une méthode communément employée dans les salles de marché.

Les deltas utilisés par les intervenants de marché sont calculés en augmentant unilatéralement la courbe des spreads d'indice de 1 point de base et en recalculant la valeur de marché pour la tranche et la valeur de marché pour l'indice, le modèle d'évaluation étant la copule gaussienne à un facteur couplé à une structure de *base correlation*. Lorsque l'on augmente la courbe des spreads d'indice, la *moneyiness* de la tranche varie mais la pratique de marché consiste à conserver la même courbe de base correlation pour réévaluer les tranches de CDO. Les deltas associés à cette règle de calcul sont appelés *sticky-strike* deltas. Enfin, le delta de marché est défini comme le ratio entre le changement de valeur de la tranche et le changement de valeur de l'indice divisé par le nominal de la tranche. Par exemple, un delta sur la tranche *equity* [0, 3%] précédemment égale à 1 est maintenant égal à 33.33 (1/0.03).

Tranches	[0-3%]	[3-6%]	[3-9%]	[9-12%]	[12-22%]
deltas de marché	27	4.5	1.25	0.6	0.25
deltas contagion	21.5	4.63	1.63	0.9	0.6

TAB. 3.12 – Comparaison entre deltas de marché et deltas calculés dans le modèle de contagion markovien à l'origine.

La table 3.12 compare les deltas de marché et les deltas dans le modèle de contagion pour la même structure de *base correlation* décrite à la table 3.7. On peut d'abord remarquer que les deltas de marché et les deltas dans l'arbre sont relativement proches, ce qui est surprenant étant données les différences structurels qui séparent ces deux approches. D'autre part, on constate que le delta de l'arbre est plus petit pour la tranche *equity* et plus grand pour les autres tranches comparé au delta de marché. Ces écarts peuvent être justifiés grâce à la dynamique de la dépendance induite par le modèle de contagion markovien.

La figure 3.9 montre l'évolution de la structure de *base correlation* à 14 semaines lorsque le nombre de défauts augmente de 0 à 2. On peut constater que l'arrivée d'un nouveau défaut est associée à un saut parallèle des corrélations implicites. Ce renforcement de la dépendance a tendance à faire diminuer la valeur de marché de la tranche *equity* (voir résultats du chapitre 2) et contrebalance ainsi l'augmentation des spreads et des pertes espérées sur la tranche à l'arrivée d'un défaut. Il en résulte des ratios de couverture plus faibles comparés à la méthode de marché. De plus, on peut remarquer que les deltas dans l'arbre sont analogues aux *sticky implied tree* deltas décrits par Derman (1999) pour un modèle de volatilité local. Derman (1999) montre en particulier que ces deltas sont plus performants dans un contexte de crise.

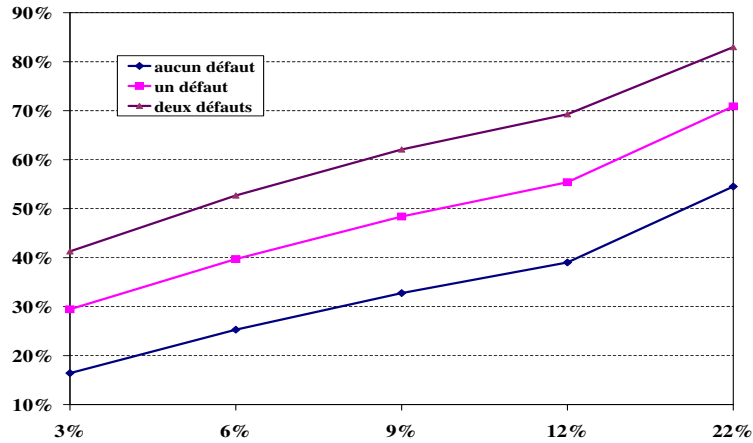


FIG. 3.9 – Dynamique de la courbe des *base correlation* en fonction du nombre de défauts. Corrélation implicite sur l'axe des ordonnées, Nombre de défauts sur l'axe des abscisses.

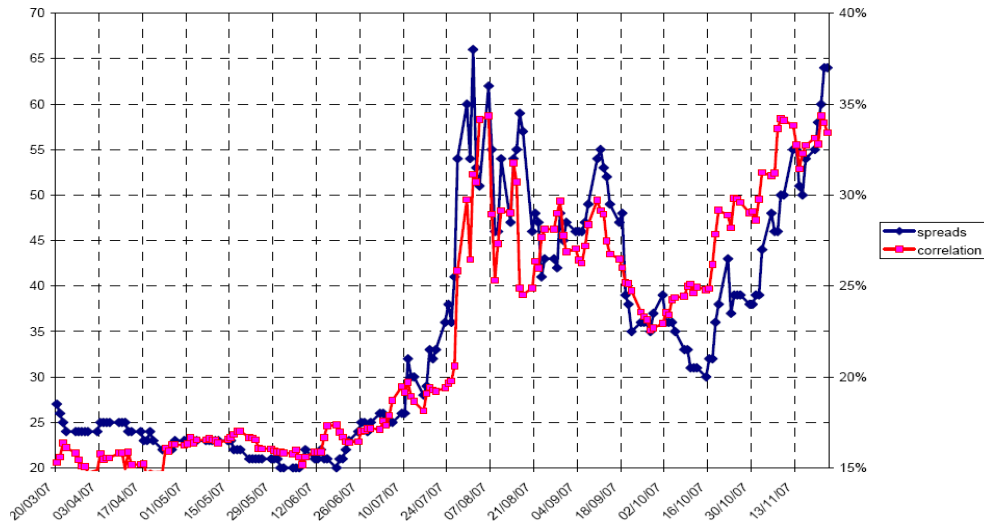


FIG. 3.10 – Spreads de l'indice iTraxx (série 7) de maturité 5 ans en points de base par an (axe de gauche). Corrélation implicite de la tranche *equity* sur l'axe de droite.

La figure 3.10 met en évidence une dépendance forte entre corrélation implicite et spreads d'indice pendant la crise de l'été 2007. On constate en effet que, sur cette dernière période, la corrélation implicite augmente lorsque les spreads (et donc les pertes espérées) augmentent et inversement. En fait, le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux séries de données est égal à 91%. Cela favorise clairement le calcul des deltas dans le modèle de contagion en période de crise et suggère une défaillance de la règle *sticky strike* utilisée sur les marchés et basée sur le modèle statique de la copule gaussienne.

3.6.3 Comparaison entre deltas dans le modèle de contagion et deltas dans d'autres approches dynamiques

Dans ce paragraphe, nous comparons les deltas obtenus dans notre approche avec ceux calculés récemment dans d'autres modèles dynamiques.

Tranches	[0-3%]	[3-6%]	[3-9%]	[9-12%]	[12-22%]
deltas de marché	26.5	4.5	1.25	0.65	0.25
deltas modèle BSLP	21.9	4.81	1.64	0.79	0.38

TAB. 3.13 – Comparaison entre deltas de marché et deltas calculés par Arnsdorf et Halperin (2007).

Arnsdorf et Halperin (2007) ont étudié un modèle de contagion markovien incluant un risque de spread spécifique (modèle BSLP : *Bivariate Spread-Loss Portfolio model*). Leur modèle est basé sur une chaîne de Markov à 2 dimensions, une dimension pour le nombre de défauts et une dimension pour le risque de spread. La table 3.13, issue de la figure 7 de Arnsdorf et Halperin (2007), représente les deltas obtenus dans cette dernière approche et les deltas de marché à la même date. Notons que leurs conditions de marché sont légèrement différentes des nôtres puisque leur étude a été menée en Mars 2007⁸⁶. On peut tout de même remarquer que les deltas de marché dans les tables 3.12 et 3.13 sont très proches, ce qui n'est pas si étonnant étant donné que ces derniers reposent exactement sur la même méthode de calcul. Cependant, il est frappant de constater que nos deltas (deuxième ligne de la table 3.12) et ceux de Arnsdorf et Halperin (2007) (deuxième ligne de la table 3.13) sont également très proches bien qu'ils aient une signification différente. En effet, les deltas dans notre approche sont des stratégies de réplication dynamiques du risque de défaut alors que dans l'approche de Arnsdorf et Halperin (2007), il sont construits à partir de sensibilités au spread d'indice (couverture locale du risque de spread). Même si cela ne constitue pas une preuve formelle, on peut tout de même déduire de la figure 3.5 que le gamma systématique est faible pour 0,1,2 défauts : l'évolution des deltas, que l'on peut assimiler à l'évolution de la pente des courbes représentées, est globalement faible. Ainsi, comme un saut sur les spreads entraîne un saut sur la valeur de l'indice et qu'une augmentation unitaire du nombre de défauts induit un saut sur l'indice un peu plus élevé, la similarité entre les deltas calculés par ces deux méthodes n'est pas si surprenante dans le cas d'un risque gamma faible. Remarquons de plus que les deltas de Arnsdorf et Halperin (2007) sont (comme dans notre approche) plus faibles pour la tranche *equity* et plus élevés pour les autres tranches, en comparaison avec les deltas de marché.

Nous proposons également de comparer nos deltas avec ceux obtenus par Eckner (2007) dans le cadre d'un modèle à intensité affine (modèle AJD), dérivé du modèle classique de Duffie et Gârleanu (2001) et présenté au paragraphe 1.2.4 du chapitre 1. Rappelons que dans cette dernière approche la dépendance entre les défauts résulte de la dépendance entre les spreads des CDS individuels et qu'il n'y a pas d'effet de contagion à l'arrivée d'un défaut. La calibration des paramètres du modèle a été effectuée sur les spreads de tranches sur l'indice CDX NA IG5 en Décembre 2005. Les deltas d'Eckner (2007) représentés à la table 3.14 (deltas modèle AJD) sont calculés à partir de sensibilités des prix de tranches de CDO et de l'indice à une augmentation uniforme et relative des intensités individuelles de défaut. Les deltas du modèle contagion ont été obtenus à partir d'une calibration des intensités de la perte sur les mêmes données de marché. Même si les approches sont clairement différentes, il est frappant de constater que les résultats

⁸⁶La maturité est donc légèrement inférieure à 5 ans.

sont relativement similaires. On remarque également que le delta de la tranche equity est plus élevé comparé aux autres approches. Ce constat a également été émis par Feldhütter (2008) qui a étudié les performances de la couverture dans un modèle à intensité affine sur la période Mars-Septembre 2006 pour l'indice CDX NA IG6⁸⁷. Il montre en particulier que les ratios de couverture de la tranche *equity* sont plus élevés par rapport à ceux obtenus par la règle *sticky-strike*. Notons que ces deux dernières analyses empiriques ont été menées avant la crise de l'été 2007.

Tranches	[0-3%]	[3-7%]	[7-10%]	[10-15%]	[15-30%]
deltas de marché	18.5	5.5	1.5	0.8	0.4
deltas modèle AJD	21.7	6.0	1.1	0.4	0.1
deltas modèle contagion	17.9	6.3	2.5	1.3	0.8

TAB. 3.14 – Comparaison entre deltas de marché, deltas calculés par Eckner (2007) dans un modèle à intensité AJD et deltas calculés dans le modèle de contagion markovien.

D'autres résultats de comparaison empirique sur la couverture des tranches de CDO avec l'indice sont à venir dans l'article de Cont et Kan (2008).

⁸⁷5-year CDX NA IG Series 6.

Conclusion

La première partie de ce mémoire a été consacrée à l’analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur. Dans ce contexte, des méthodes efficaces existent pour déterminer les lois marginales de la perte agrégée sur lesquelles reposent entièrement le calcul des primes de tranches de CDO. De plus, cette classe de modèles regroupe un nombre important d’approches populaires comme les modèles basés sur des copules, les modèles structurels multivariés, les modèles Poisson multivariés ou encore les modèles à intensité affine. En outre, lorsque l’on considère un portefeuille de crédit homogène, l’hypothèse d’une structure de dépendance basée sur une représentation à facteur n’est plus restrictive grâce au théorème de De Finetti : il existe nécessairement un facteur mélange ou une “probabilité mélange” tel que les indicatrices de défaut soient indépendantes connaissant ce facteur. Au fil de cette partie, nous avons fortement insisté sur le rôle prépondérant joué par la “probabilité mélange” pour l’évaluation des tranches de CDO mais également pour l’analyse du risque des portefeuilles de crédit. La “probabilité mélange” ou probabilité conditionnelle de défaut correspond à la perte d’un portefeuille infiniment granulaire et constitue un outils puissant de comparaison du risque des portefeuilles de crédit de taille finie. Dans cette perspective, nous avons caractérisé l’ordre supermodulaire pour les vecteurs aléatoires de Bernoulli échangeables au moyen de l’ordre convexe sur les probabilités mélanges. Cela nous a permis d’étudier l’effet de la structure de dépendance sur le risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur. Nous en avons conclu pour la majorité des modèles appartenant à cette classe qu’augmenter le paramètre de corrélation entraîne une augmentation de la prime des tranches *senior* et une diminution de la prime des tranches *equity* ainsi qu’une augmentation des mesures convexes de risque sur la perte agrégée. Une conséquence pratique de ce résultat est que la structure de *base correlation* est unique lorsqu’elle existe.

Cependant, concernant l’analyse du risque des tranches de CDO dans les modèles à facteur, un nombre important d’interrogations demeurent. On peut penser par exemple à l’étude de la dispersion ou de l’hétérogénéité des spreads et son effet sur le risque des tranches de CDO, à l’étude de la compatibilité des modèles à facteur par rapport à une calibration simultanée sur des jeux de données à différentes maturités ou à l’introduction de taux de recouvrement stochastique. De plus, le choix entre un modèle paramétrique ou un modèle non paramétrique reste à éclaircir. En conséquence, beaucoup de travail reste à accomplir à la fois d’un point de vue pratique et d’un point de vue théorique pour améliorer la compréhension et la gestion des risques dans cette classe de modèles.

Dans la seconde partie, nous nous sommes concentrés sur le problème de la couverture des tranches de CDO. Les méthodes actuellement employées par les intervenants de marché consistent à couvrir localement le risque de spread par des positions opposées en CDS, en indice ou en tranches standardisées, le montant nominal de ces positions étant déterminé par des calculs de sensibilité à de petits écarts de spread. Cependant, ces dernières méthodes ne reposent aucune-

ment sur une véritable théorie de la couverture et ne garantissent pas une réplification parfaite des tranches de CDO. De plus, plusieurs anomalies d'ordre pratique ont été mises à jour notamment pendant la récente crise du crédit.

Nous avons choisi d'aborder le problème de la couverture dans le cadre des modèles de contagion markovien pour lesquels les prix d'actifs contingents au risque de défaut peuvent être parfaitement répliqués sous l'hypothèse d'absence de défauts simultanés. De plus, lorsque le portefeuille est homogène et lorsque les intensités de défaut ne dépendent que de l'état courant du nombre de défauts, le processus de la perte agrégée est simplement une chaîne de Markov en temps continu. Bien que cette dernière approche ait déjà été considérée récemment notamment pour l'évaluation de produits dérivés de crédit plus exotiques, nous avons montré qu'elle permettait de calculer efficacement des stratégies de réplification dynamiques à l'aide d'un arbre binomial recombinaison. Ainsi, le modèle de contagion markovien dans sa version continue comme dans sa version discrète fournit un cadre de marché complet où le *payoff* des tranches de CDO peut être parfaitement dupliqué grâce à l'indice et à l'actif sans risque.

Le but de notre étude n'a pas été d'apporter une solution définitive au problème de la couverture des tranches de CDO. Pour cela, il aurait fallu prendre en compte notamment l'hétérogénéité entre les spreads de crédit, la possibilité d'une dynamique de spread non markovienne, des intensités non déterministes entre deux dates de défaut, la possibilité de défauts simultanés ou l'introduction de taux de recouvrement stochastiques. Cependant, une analyse rigoureuse du problème de la couverture dans un cadre général paraît complexe à la fois du point de vue numérique mais également du point de vue économique.

En outre, nous avons mis à jour des similitudes remarquables entre les deltas calculés sous l'hypothèse d'une structure de *base correlation* et les "deltas défaut" calculés dans l'arbre recombinaison. Les différences entre ces deux approches suggèrent une faiblesse des pratiques actuelles de marché que l'on peut relier à la dynamique de la corrélation entre les défauts. En effet, la prise en compte de ce phénomène a tendance à diminuer la valeur des deltas pour la tranche *equity* et donc à augmenter la valeur des deltas pour les tranches *senior*. Enfin, on peut penser que ce phénomène a été amplifié pendant la récente crise sur les indices de référence, qui a mis en exergue une dépendance forte entre le risque systématique et le niveau de corrélation implicite.

Bibliographie

- Abate, J., Whitt, W. (1992) The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems* 10, 5–88.
- Albrecher, H., Ladoucette, S., Schoutens, W. (2007) A generic one-factor Lévy model for pricing synthetic CDOs, In : *Advances in Mathematical Finance*, Ed. Elliott et al., Birkhäuser book.
- Altman, E., Brady, B., Resti, A., Sironi, A. (2005) The link between default and recovery rates : Theory, empirical evidence and implications. *Journal of Business* 78, 2203–2228.
- Andersen, L., Sidenius, J. (2005a) CDO pricing with factor models : survey and comments. *Journal of Credit Risk* 1 (3), 71–88.
- Andersen, L., Sidenius, J. (2005b) Extensions to the Gaussian copula : random recovery and random factor loadings. *Journal of Credit Risk* 1 (1), 29–70.
- Andersen, L., Sidenius, J., Basu, S. (2003) All your hedges in one basket. *RISK* November, 67–72.
- Arnsdorf, M., Halperin, I. (2007) BSLP : Markovian bivariate spread-loss model for portfolio credit derivatives, working paper, JP Morgan.
- Arvanitis, A., Gregory, J. (2001) *Credit : The Complete Guide to Pricing, Hedging and Risk Management*. Riskbooks.
- Arvanitis, A., Laurent, J.-P. (1999) On the edge of completeness. *RISK* October, 61–65.
- Athanassoulis, G., Gavriiladis, P. (2002) The truncated Hausdorff moment problem solved by using kernel density functions. *Probabilistic Engineering Mechanics* 17, 273–291.
- Baillet, B., Brard, P.-E. (2007) *La crise du subprime*. Mémoire, Université Paris Dauphine.
- Banque de France (2005) Le marché des CDO : Modalités de fonctionnement et implications en termes de stabilité financière. *Revue de la stabilité financière* 6, 47–67.
- Banque de France (2006) Les mécanismes de transfert de risque sont-ils suffisamment robustes ? *Revue de la stabilité financière* 9, 18–28.
- Bastide, D., Benhamou, E., Ciuca, M. (2007) A comparative analysis of basket default swaps pricing using the Stein method, working paper, Pricing Partners.
- Bäuerle, N. (1997) Inequalities for stochastic models via supermodular orderings. *Communications in Statistics, Stochastic Models* 13, 181–201.

- Bäuerle, N. (2002) Risk management in credit risk portfolios with correlated assets. *Insurance : Mathematics and Economics* 30, 187–198.
- Bäuerle, N., Blatter, A., Müller, A. (2008) Dependence properties and comparison results for Lévy processes. *Mathematical Methods of Operations Research* 67 (1), 161–186.
- Bäuerle, N., Müller, A. (1998) Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *ASTIN Bulletin* 28, 59–76.
- Bäuerle, N., Müller, A. (2005) Stochastic orders and risk measures : consistency and bounds. *Insurance : Mathematics and Economics* 38, 132–148.
- Baxter, M. (2007) Gamma process dynamic modelling of credit. *RISK* October, 98–101.
- Bielecki, T., Crépey, S., Jeanblanc, M., Rutkowski, M. (2007a) Valuation of basket credit derivatives in the credit migrations environment, In : *Handbook of Financial Engineering*, J. Birge and V. Linetskyeds., Elsevier.
- Bielecki, T., Jeanblanc, M., Rutkowski, M. (2007b) Hedging of basket credit derivatives in default swap market. *Journal of Credit Risk* 3 (1), 91–132.
- Bielecki, T. R., Rutkowski, M. (2004) *Credit Risk : Modeling, Valuation and Hedging*. Springer.
- BIS (2008) *Credit risk transfer : Developments from 2005 to 2007*, consultative document, Basel Committee on Banking Supervision.
- Blanchet-Scalliet, C., Jeanblanc, M. (2004) Hazard rate for credit risk and hedging defaultable contingent claims. *Finance and Stochastics* 8, 145–159.
- Brasch, H.-J. (2004) A note on efficient pricing and risk calculation of credit basket products, working paper.
- Brigo, D., Pallavicini, A., Torresetti, R. (2007a) CDO calibration with the dynamical generalized Poisson loss model. *RISK* May, 70–75.
- Brigo, D., Pallavicini, A., Torresetti, R. (2007b) Cluster-based extension of the generalized Poisson loss dynamics and consistency with single names. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 10 (4), 607–631.
- Brémaud, P. (1981) *Point Processes and Queues : Martingale Dynamics*. Springer-Verlag.
- Burgert, C., Rüschendorf, L. (2006) Consistent risk measures for portfolio vectors. *Insurance : Mathematics and Economics* 38, 289–297.
- Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J.-P. (2007) Beyond the Gaussian copula : stochastic and local correlation. *Journal of Credit Risk* 3 (1), 31–62.
- Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J.-P. (2008) A comparative analysis of CDO pricing models, In : *The Definitive Guide to CDOs*, Ed. G. Meissner, Risk Books.
- Chapovsky, A., Rennie, A., Tavares, P. (2007) Stochastic intensity modeling for structured credit exotics. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* , 633–653.
- Charpentier, A., Segers, J. (2007) Lower tail dependence for Archimedean copulas : Characterizations and pitfalls. *Insurance : Mathematics and Economics* 40 (3), 525–532.

-
- Chen, Z., Glasserman, P. (2006) Fast pricing of basket default swaps, working paper, Columbia University.
- Cherubini, U., Luciano, E., Vecchiato, W. (2004) Copula Methods in Finance. Wiley.
- Cont, R. (2008) Frontiers In Quantitative Finance. Wiley.
- Cont, R., Kan, Y. (2008) Dynamic hedging of portfolio credit derivatives in top-down models, working paper, Columbia University.
- Cont, R., Minca, A. (2008) Recovering portfolio default intensities implied by CDO quotes, working paper, Columbia University.
- Cont, R., Tankov, P. (2004) Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall.
- Cossette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E., Rioux, J. (2002) On two dependent individual risk models. Insurance : Mathematics and Economics 30 (2), 153–166.
- Cousin, A., Laurent, J.-P. (2008a) Comparison results for exchangeable credit risk portfolios. Insurance : Mathematics and Economics 42, 1118–1127.
- Cousin, A., Laurent, J.-P. (2008b) Hedging issues for CDOs, In : The Definitive Guide to CDOs, Ed. G. Meissner, Risk Books.
- Cousin, A., Laurent, J.-P. (2008c) An overview of factor models for pricing CDO tranches, In : Frontiers In Quantitative Finance, Ed. R. Cont, Wiley Finance.
- Crouhy, M., Galai, D., Mark, R. (2000) A comparative analysis of current credit risk models. Journal of Banking & Finance 24, 59–117.
- Crouhy, M., Turnbull, S. (2008) The subprime credit crisis of 07, working paper.
- Das, S. (2005) Credit Derivatives : CDOs and Structured Credit Products. Wiley.
- Das, S., Duffie, D., Kapadia, N., Saita, L. (2007) Common failings : how corporate defaults are correlated. Journal of Finance 62 (1), 93–117.
- Das, S., Freed, L., Geng, G., Kapadia, N. (2006) Correlated default risk. Journal of Fixed Income 16 (2), 7–32.
- Davis, M., Lo, V. (2001) Infectious defaults. Quantitative Finance 1, 382–387.
- De Koch, J., Kraft, H. (2007) Cdos in chains, working paper, University of Kaiserslautern.
- De Pril, N. (1989) The aggregate claims distribution in the individual model with arbitrary positive claims. ASTIN Bulletin 19, 9–24.
- De Prisco, B., Iscoe, I., Kreinin, A. (2005) Loss in translation. RISK June, 77–82.
- De Servigny, A., Jobst, N. (2007) The Handbook of Structured Finance. McGraw-Hill.
- Demarta, S., McNeil, A. (2005) The t copula and related copulas. International Statistical Review 73 (1), 111–129.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R. (2005) Actuarial Theory for Dependent Risks - Measures, Orders and Models. Wiley.

- Denuit, M., Frostig, E. (2007) Comparison of dependence in factor models with application to credit risk portfolios, working paper.
- Denuit, M., Müller, A. (2002) Smooth generators of integral stochastic orders. *The Annals of Applied Probability* 12 (4), 1174–1184.
- Derman, E. (1999) Regimes of volatility, Quantitative Strategies Research Notes, Goldman Sachs.
- Derman, E., Kani, I. (1994) Riding on a smile. *RISK* February, 32–39.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M., Kaas, R., Vyncke, D. (2002) The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : Theory. *Insurance : Mathematics and Economics* 31, 3–33.
- Dhaene, J., Goovaerts, M. (1997) On the dependency of risks in the individual life model. *Insurance : Mathematics and Economics* 19, 243–253.
- Ding, X., Giesecke, K., Tomecek, P. (2006) Time-changed birth processes and multi-name credit, working paper, Stanford University.
- Duffie, D., Gârleanu, N. (2001) Risk and the valuation of Collateralized Debt Obligations. *Financial Analysts Journal* 57, 41–59.
- Duffie, D., Singleton, K. J. (1998) Simulating correlated defaults, working paper, Stanford University.
- Duffie, D., Singleton, K. J. (2003) *Credit Risk : Pricing, Measurement and Management*. Princeton Series in Finance.
- Dupire, B. (1994) Pricing with a smile. *RISK* January, 18–20.
- Eckner, A. (2007) Computational techniques for basic affine models of portfolio credit risk, working paper, Stanford University.
- El Karoui, N., Jiao, Y. (2007) Stein’s method and zero bias transformation : application to CDOs, working paper, CMAP.
- Elouerkhaoui, Y. (2006) Etude des Problèmes de Corrélation et d’Incomplétude dans les Marchés de Crédit. Phd thesis, University of Paris Dauphine.
- Embrechts, P., Lindskog, F., McNeil, A. (2003) Modelling dependence with copulas and applications to risk management, In : *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Ed. S. Rachev, Elsevier.
- Epple, F., Morgan, S., Schloegl, L. (2007) Joint distributions of portfolio losses and exotic portfolio products. *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 10 (4), 733–748.
- Errais, E., Giesecke, K., Goldberg, L. (2007) Pricing credit from the top down with affine point processes, working paper, Stanford University.
- Feldhütter, P. (2008) An empirical investigation of an intensity-based model for pricing CDO tranches, working paper, Copenhagen Business School.
- Finger, C. C. (2001) The one-factor CreditMetrics model in the new Basel Capital Accord. *RiskMetrics Journal* 2 (1), 9–18.

-
- Finger, C. C. (2005) Issues in the pricing of synthetic CDOs. *Journal of Credit Risk* 1 (1), 113–124.
- Frey, R., Backhaus, J. (2007a) Dynamic hedging of synthetic CDO tranches with spread and contagion risk, working paper, University of Leipzig.
- Frey, R., Backhaus, J. (2007b) Pricing and hedging of portfolio credit derivatives with interacting default intensities, working paper, University of Leipzig.
- Frey, R., McNeil, A. (2003) Dependent defaults in models of portfolio credit risk. *Journal of Risk* 6 (1).
- Friend, A., Rogge, E. (2005) Correlation at first sight. *Economic Notes* 34 (2), 155–183.
- Galiani, S., Kakodkar, A., Shchetkovskiy, M., Jónsson, J. G., Gallo, A. (2006) Base correlation and beyond : interpolation and extrapolation, working paper, credit derivatives strategy, Merrill Lynch.
- Garcia, J., Goossens, S., Masol, V., Schoutens, W. (2007) Lévy base correlation, working paper, K.U.Leuven.
- Giesecke, K. (2003) A simple exponential model for dependent defaults. *Journal of Fixed Income* December, 74–83.
- Giesecke, K. (2008) Portfolio credit risk : Top-down versus Bottom-up approaches, In : *Frontiers In Quantitative Finance*, Ed. R. Cont, Wiley Finance.
- Giesecke, K., Goldberg, L. (2006) A top down approach to multi-name credit, working paper, Stanford University.
- Glasserman, P., Suchintabandit, S. (2007) Correlation expansions for CDO pricing. *Journal of Banking & Finance* 31 (5), 1375–1398.
- Gordy, M. (2000) A comparative anatomy of credit risk models. *Journal of Banking & Finance* 24, 119–149.
- Gordy, M. (2003) A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation* 12, 199–232.
- Gordy, M., Jones, D. (2003) Random tranches. *RISK* March, 78–83.
- Gössl, G. (2007) The core factor - a fast and accurate factor reduction technique, working paper, Unicredit Markets and Investment Banking.
- Gourieroux, C. (2000) *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*. Cambridge University Press.
- Greenberg, A., Mashal, R., Naldi, M., Schloegl, L. (2004a) Tuning correlation and tail risk to the market prices of liquid tranches, Lehman Brothers, Quantitative Credit Research Quarterly.
- Greenberg, A., O’Kane, D., Schloegl, L. (2004b) LH+ : A fast analytical model for CDO hedging and risk management, Lehman Brothers, Quantitative Credit Research Quarterly.
- Gregory, J., Laurent, J.-P. (2003) I will survive. *RISK* June, 103–107.

- Gregory, J., Laurent, J.-P. (2004) In the core of correlation. *RISK* October, 87–91.
- Gregory, J., Laurent, J.-P. (2008) Practical pricing of synthetic CDOs, In : *The Definitive Guide to CDOs*, Ed. G. Meissner, Risk Books.
- Guegan, D., Houdain, J. (2005) Collateralized Debt Obligations pricing and factor models : a new methodology using Normal Inverse Gaussian distributions, working paper, ENS Cachan.
- Herbertsson, A. (2007a) Default contagion in large homogeneous portfolios, working paper, Göteborg University.
- Herbertsson, A. (2007b) Pricing synthetic CDO tranches in a model with default contagion using the matrix-analytic approach, working paper, Göteborg University.
- Herbertsson, A., Rootz'en, H. (2006) Pricing k-th to default swaps under default contagion, the matrix-analytic approach, working paper, Göteborg University.
- Hipp, C. (1986) Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model. *ASTIN Bulletin* 16 (2), 89–100.
- Houdain, J. (2006) Valorisation et Gestion de Dérivés de Crédit : les CDOs Synthétiques ou la Croissance Exponentielle des Produits de Corrélation. Thèse, Ecole Normale Supérieure de Cachan.
- Hougaard, P. (2000) *Analysis of Multivariate Survival Data*. Springer, New York.
- Hu, Y.-T., Perraudin, W. (2002) The dependence of recovery rates and defaults, working paper, Birbeck College and Bank of England.
- Hull, J., Predescu, M., White, A. (2005) The valuation of correlation-dependent credit derivatives using a structural model, working paper, University of Toronto.
- Hull, J., White, A. (2004) Valuation of a CDO and nth to default CDS without Monte Carlo simulation. *The Journal of Derivatives* 12 (2), 8–23.
- Hull, J., White, A. (2006) Valuing credit derivatives using an implied copula approach. *The Journal of Derivatives* 14 (2), 8–28.
- Hurd, T. (2008) Credit risk modelling using time-changed Brownian motion, working paper, McMaster University.
- Iscoe, I., Kreinin, A. (2007) Valuation of synthetic CDOs. *Journal of Banking & Finance* 31, 3357–3376.
- Jackson, K., Kreinin, A., Ma, X. (2007) Loss distribution evaluation for Synthetic CDOs, working paper, University of Toronto.
- Jarrow, R., Yu, F. (2001) Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. *Journal of Finance* 56, 1765–1799.
- Jaynes, E. (1986) Some applications and extensions of the de Finetti representation theorem. *Bayesian Inference and Decision Techniques*, 31–42.
- Jiao, Y. (2006) Le risque de crédit : la modélisation et la simulation numérique. Thèse, Ecole Polytechnique.

-
- Jobst, N. (2007) An introduction to the risk management of Collateral Debt Obligations, In : The Handbook of Structured Finance, A. de Servigny and N. Jobst (eds), McGraw Hill, 295-338.
- Joe, H. (1997) Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman and Hall, Monographs on Statistics and Applied Probability, London.
- Joshi, M., Kainth, D. (2004) Rapid and accurate development of prices and greeks for nth to default swaps in the Li model. *Quantitative Finance* 4 (3), 266–275.
- Juri, A., Wüthrich, M. (2002) Copula convergence theorems for tail events. *Insurance : Mathematics and Economics* 30 (3), 405–420.
- Kakodkar, A., Galiani, S., Jónsson, J., Gallo, A. (2006a) Credit Derivatives Handbook 2006 - Vol. 1. Merrill Lynch.
- Kakodkar, A., Galiani, S., Jónsson, J., Gallo, A. (2006b) Credit Derivatives Handbook 2006 - Vol. 2. Merrill Lynch.
- Kalemanova, A., Schmid, B., Werner, R. (2007) The Normal Inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing. *The Journal of Derivatives* Spring, 80–93.
- Karlin, S., Taylor, H. (1975) *A First Course in Stochastic Processes*. second edition, Academic Press.
- Kendall, D. (1967) On finite and infinite sequences of exchangeable events. *Studia Sci. Math. Hung.* 2, 319–327.
- Kiesel, R., Scherer, M. (2007) Dynamic credit portfolio modelling in structural models with jumps, working paper, Ulm University and London School of Economics.
- Kornya, P. (1983) Distribution of aggregate claims in the individual risk theory model. *Transactions of the Society of Actuaries* 35, 823–836.
- Krekel, M., Partenheimer, J. (2006) The implied loss surface of cdos, working paper, University of Ulm.
- Kusuoka, S. (1999) A remark on default risk models. *Advances in Mathematical Economics* 1, 69–82.
- Lando, D. (2004) *Credit Risk Modeling and Applications*. Princeton University Press.
- Laurent, J.-P. (2006) A note on the risk management of CDOs, working paper, ISFA actuarial School, University of Lyon and BNP Paribas.
- Laurent, J.-P., Cousin, A., Fermanian, J.-D. (2007) Hedging default risk of CDOs in Markovian contagion models, working paper, ISFA, University of Lyon and BNP Paribas.
- Laurent, J.-P., Gregory, J. (2005) Basket default swaps, CDOs and factor copulas. *Journal of Risk* 7 (4), 103–122.
- Laurent, J.-P., Leisen, D. (2000) Building a consistent pricing model from observed option prices, In : *Quantitative Analysis in Financial Markets : Collected papers of the New York University Mathematical Finance Seminar, Volume II*, 216-238, World Scientific.

- Lefèvre, C., Utev, S. (1996) Comparing sums of exchangeable Bernoulli random variables. *Journal of Applied Probability* 33, 285–310.
- Li, D. (2000) On default correlation : a copula approach. *Journal of Fixed Income* 9, 43–54.
- Lindskog, F., McNeil, A. (2003) Common Poisson shock models : applications to insurance and credit risk modelling. *ASTIN Bulletin* 33 (2), 209–238.
- Lipton, A., Rennie, A. (2008) *Credit Correlation : Life After Copulas*. World Scientific.
- Lopatin, A., Misirpashaev, T. (2007) Two-dimensional Markovian model for dynamics of aggregate credit loss, working paper, NumeriX.
- Luciano, E., Schoutens, W. (2006) A multivariate jump-driven financial asset model. *Quantitative Finance* 6 (5), 385–402.
- Madan, D. B., Konikov, M., Marinescu, M. (2004) Credit and basket default swaps, working paper, Bloomberg LP.
- Marshall, A., Olkin, I. (1967) A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association* 62, 30–44.
- Marshall, A. W., Olkin, I. (1988) Families of multivariate distributions. *Journal of the American Statistical Association* 83, 834–841.
- Mashal, R., Naldi, M., Zeevi, A. (2003) Extreme events and multivariate credit derivatives, In : *Credit Derivatives : The Definitive Guide*, Ed. J. Gregory, 313-338, Risk Books.
- Masol, V., Schoutens, W. (2008) Comparing some alternatives Lévy base correlation models for pricing and hedging CDO tranches, working paper, K.U. Leuven.
- Meissner, G. (2008) *The Definitive Guide to CDOs*. Riskbooks.
- Meissner, G., Hector, R., Rasmussen, T. (2008) Hedging CDOs within the Gaussian copula framework, In : *The Complete Guide to CDOs - Market, Application, Valuation, and Hedging*, RISK books.
- Meyer-Dautrich, S., Wagner, C. (2007) Minimum entropy calibration of cdo tranches, working paper, Unicredit.
- Moosbrucker, T. (2006) Pricing CDOs with correlated Variance Gamma distributions, working paper, Centre for Financial Research, University of Cologne.
- Morgan, S., Mortensen, A. (2007) CDO hedging anomalies in the base correlation approach, *Lehman Brothers, Quantitative Credit Research Quarterly*, October, 49-61.
- Mortensen, A. (2006) Semi-analytical valuation of basket credit derivatives in intensity-based models. *Journal of Derivatives* 13 (4), 8–26.
- Müller, A. (1997) Stop-loss order for portfolios of dependent risks. *Insurance : Mathematics and Economics* 21, 219–223.
- Müller, A. (2001) Stochastic ordering of multivariate Normal distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 53 (3), 567–575.

-
- Müller, A., Scarsini, M. (2000) Some remarks on the supermodular order. *Journal of Multivariate Analysis* 73, 107–119.
- Müller, A., Scarsini, M. (2005) Archimedean copulae and positive dependence. *Journal of Multivariate Analysis* 93, 434–445.
- Müller, A., Stoyan, D. (2002) *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester Wiley Series in Probability and Statistics.
- Nelsen, R. (1999) *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- Parcell, E., Wood, J. (2007) Wiping the smile off your base (correlation curve), working paper, Derivative Fitch.
- Parker, E., Brown, M. (2003) The 2003 ISDA credit derivatives definitions, PLC Finance.
- Patel, N. (2007) The untenable robustness of hedging. *RISK* August.
- Peretyatkin, V. (2006) HPM+ : a fast analytical model to price synthetic CDOs, working paper, Imperial College and Rabobank International.
- Petrelli, A., Zhang, J., Jobst, N., Kapoor, V. (2007) A practical guide to CDO trading risk management, In : *The Handbook of Structured Finance*, A. de Servigny and N. Jobst (eds), McGraw Hill, 339-371.
- Prange, D., Scherer, W. (2006) Correlation smile matching with Alpha-Stable distributions and fitted Archimedean copula models, working paper, Risk Methodology Trading, Model Validation Credit Derivatives, Dresdner Kleinwort Wasserstein.
- Putyatin, P., Prioul, D., Maslova, S. (2005) A Markovian approach to modelling correlated defaults. *RISK* May, 76–81.
- Pykhtin, M., Dev, A. (2002) Credit risk in asset securitizations : Analytical model. *RISK* May, 16–20.
- Rogge, E., Schönbucher, P. (2003) Modelling dynamic portfolio credit risk, working paper, Imperial College.
- Rott, M. G., Fries, C. P. (2005) Fast and robust monte carlo CDO sensitivities, working paper.
- Rubinstein, M. (1994) Implied binomial trees. *Journal of Finance* 49 (3), 771–818.
- Schloegl, L., Mortensen, A., Morgan, S. (2008) Strange risk in a correlation model, Lehman Brothers, Quantitative Credit Research Quarterly, Q1, 1-7.
- Schloegl, L., O’Kane, D. (2005) A note on the large homogeneous portfolio approximation with the Student t copula. *Finance and Stochastics* 9 (4), 577–584.
- Schmitz, C. (2007) What is the impact of the U.S subprime lending crisis on the CDO market ? Mémoire, CERAM Sophia Antipolis.
- Schönbucher, P. (2002) Taken to the limit : simple and not-so-simple loan loss distributions, working paper, Bonn University.
- Schönbucher, P. (2003) *Credit Derivatives Pricing Models*. Wiley, Chichester.

- Schönbucher, P. (2006) Portfolio losses and the term-structure of loss transition rates : a new methodology for the pricing of portfolio credit derivatives, working paper, ETH Zürich.
- Schönbucher, P., Schubert, D. (2001) Copula dependent default risk in intensity models, working paper, Bonn University.
- Schoutens, W. (2000) Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials. Lecture Notes in Statistics 146, Springer-Verlag, New York.
- Shaked, M., Shanthikumar, J. (1994) Stochastic Orders and Their Applications. Academic Press, London.
- Sundt, B. (2002) Recursive evaluation of aggregate claims distributions. Insurance : Mathematics and Economics 30, 297–322.
- Tavakoli, J. (2003) Collateralized Debt Obligations & Structured Finance : New Developments in Cash and Synthetic Securitization. John Wiley & Sons.
- Tavares, P. A. C., Nguyen, T.-U., Chapovsky, A., Vaysburd, I. (2004) Composite basket model, working paper, Merrill Lynch.
- Tchen, A. (1980) Inequalities for distributions with given marginals. Annals of Probability 8, 814–827.
- Torresetti, R., Brigo, D., Pallavicini, A. (2007) Implied expected tranching loss surface from CDO data, working paper, Banca IMI.
- Turc, J., Very, P., Benhamou, D. (2005) Pricing CDOs with a smile, working paper, SG Credit Research.
- Vacca, L. (2008) Market-implied Archimedean copulas. RISK January, 104–109.
- van der Voort, M. (2006) An implied loss model, working paper, ABN Amro and Erasmus University.
- Vasicek, O. (2002) Loan portfolio value. RISK December, 160–162.
- Walker, M. (2007) Simultaneous calibration to a range of portfolio credit derivatives with a dynamic discrete-time multi-step Markov loss model, working paper, University of Toronto.
- Wang, D., Rachev, S. T., Fabozzi, F. J. (2007) Pricing of credit default index swap tranches with one-factor heavy-tailed copula models, working paper, University of California, Santa Barbara.
- Wei, G., Hu, T. (2002) Supermodular dependence ordering on a class of multivariate copulas. Statistics and Probability Letters 57, 357–385.
- White, R., Greville, T. N. E. (1959) On computing the probability that exactly k of n independent events will occur. Transactions of Society of Actuaries 11, 88–95.
- Willeman, S. (2007) Fitting the CDO correlation skew : A tractable structural jump-diffusion model. Journal of Credit Risk 3 (1), 63–90.
- Wilson, T. (1997a) Portfolio credit risk I. RISK September, 111–117.
- Wilson, T. (1997b) Portfolio credit risk II. RISK October, 56–61.

-
- Wong, D. (2000) Copula from the limit of multivariate binary model, working paper, Bank of America Corporation.
- Wood, G. (1992) Binomial mixtures and finite exchangeability. *The Annals of Probability* 20 (3), 1167–1173.
- Wood, G. (1999) Binomial mixtures : Geometric estimation of the mixing distribution. *The Annals of Statistics* 27 (5), 1706–1721.
- Yu, F. (2007) Correlated defaults in intensity-based models. *Mathematical Finance* 17 (2), 155–173.

Analyse du risque et couverture des tranches de CDO synthétique

Résumé

Ce mémoire a pour but d'éclaircir certains aspects de la gestion des risques des tranches de CDO synthétique. La première partie concerne l'analyse du risque des tranches de CDO dans la classe des modèles à facteur qui regroupe un nombre important d'approches populaires comme les modèles basés sur des copules, les modèles structurels multivariés, les modèles Poisson multivariés ou encore les modèles à intensité affine. De plus, lorsque l'on considère un portefeuille de crédit homogène, l'hypothèse d'une structure de dépendance basée sur une représentation à facteur n'est plus restrictive grâce au théorème de De Finetti. La loi de la probabilité conditionnelle de défaut joue un rôle primordial pour l'évaluation des tranches de CDO mais également pour l'analyse du risque des portefeuilles de crédit. En effet, il est possible de comparer différents modèles à facteur en comparant simplement leur probabilité conditionnelle de défaut. La seconde partie aborde le problème de la couverture dans le cadre des modèles de contagion markovien pour lesquels les prix d'actifs contingents au risque de défaut peuvent être parfaitement répliqués sous l'hypothèse d'absence de défauts simultanés. De plus, lorsque le portefeuille est homogène et lorsque les intensités de défaut ne dépendent que de l'état courant du nombre de défauts, le processus de la perte agrégée est simplement une chaîne de Markov. Dans ce cas, il est possible de calibrer les intensités de la perte agrégée sur une distribution de perte et de calculer efficacement des stratégies de couverture dynamiques à l'aide d'un arbre binomial recombinaison dans lequel le *payoff* des tranches de CDO peut être parfaitement dupliqué grâce à l'indice et à l'actif sans risque.

Mots-clés: Tranche de CDO synthétique, modèle à facteur, ordre stochastique, couverture dynamique, modèle de contagion markovien

Risk and hedging analysis of synthetic CDO tranches

Abstract

This report is dedicated to risk management of synthetic CDO tranches. The first part deals with risk analysis of CDO tranches from the point of view of factor models. Thanks to the factor framework, we can handle a wide range of well-know pricing models. This includes pricing approaches based on copulas, but also structural, multivariate Poisson and affine intensity models. Factor models have become increasingly popular since there are associated with efficient semi-analytical methods and parsimonious parameterization. Moreover, the approach is not restrictive at all in the case of homogeneous credit portfolios thanks to De Finetti's theorem. In factor models, the distribution of conditional default probabilities is the key input for the pricing of CDO tranches. Therefore, we can compare different factor models by simply comparing the distribution functions of the corresponding conditional default probabilities. In the second part, we describe a hedging strategy of CDO tranches based upon dynamic trading of the corresponding credit default swap index. We rely upon a homogeneous Markovian contagion framework, where only single defaults occur. In our framework, a CDO tranche can be perfectly replicated by dynamically trading the credit default swap index and a risk-free asset. Default intensities of the names only depend upon the number of defaults and are calibrated onto an input loss surface. Numerical implementation can be carried out fairly easily thanks to a recombining tree describing the dynamics of the aggregate loss.

Keywords: Synthetic CDO tranche, factor model, stochastic order, dynamic hedging, Markovian contagion model

Ecole ISFA - 50, avenue Tony Garnier - 69007 Lyon - France