Mémoire d'actuariat

Valorisation en normes IFRS de plans de stock-options à conditions de performance

Réalisé par : Jérémie Noé (CEA 2002)
Maxime Renaudin (CEA 2004)

Décembre 2008

Directeur de mémoire : Franck Chevalier
Associé, Ernst & Young Actuaires-Conseils

Remerciements

Nous tenons à remercier Franck Chevalier pour son concours à la supervision de ce travail et ses précieux conseils.

Nous remercions également l'ensemble de l'équipe Ernst & Young Actuaires-Conseils avec qui nous avons largement échangé et confronté nos approches, et tout particulièrement Gwenola Jan et Jérôme Lamarque pour leurs avis éclairés qui nous ont été fort utiles.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les plans d'achat sur actions ou "stock options" permettent à leur détenteur d'acquérir pendant une période et à un prix fixés d'avance, des actions, généralement de la société qui les emploie. Cette faculté a été introduite en droit français par la Loi du 31 décembre 1970, fortement inspirée du modèle américain dans lequel ce type d'instruments d'actionnariat est utilisé de longue date. Après l'exercice de l'option, le détenteur devient actionnaire, pouvant bénéficier d'un gain correspondant à la différence entre la valeur de l'action lors de la revente et le prix de l'option, avant incidences fiscales.

De nombreuses sociétés, principalement cotées, ont mis ou mettent en place régulièrement des plans de stock options, au bénéfice de l'ensemble de leurs salariés ou d'une catégorie d'entre eux . Les attraits pour les sociétés sont nombreux : ce type d'instrument, permet en effet de proposer des compléments de revenus indexés sur la performance financière de l'entreprise, avec un effet de rétention important, les levées d'option n'étant généralement possibles qu'après une certaine période passée au sein de l'entreprise, et sans incidence immédiate sur la trésorerie. Du point de vue de la gestion des ressources humaines, les stock options peuvent être considérées comme un vecteur d'implication et d'adhésion aux buts et valeurs de l'entreprise[14].

Par ailleurs, les plans de stock options bénéficient d'un environnement favorable tant sur le plan exogène, les vertus de la participation financière et de l'actionnariat salarial ayant une place de plus en plus importante dans l'environnement économique, que sur le plan endogène, le dispositif s'étant développés dans des dispositions juridiques et fiscales favorables, même si les effets possibles d'un changement de politique économique pourrait réduire ces attraits.

Depuis quelques années, les plans de stock options sont plus sophistiqués, et certaines sociétés ont mis en place des plans dans lesquels une composante additionnelle est intégrée, dits "à conditions de performance". Ces plans ajoutent une dimension optionnelle complémentaire aux plans classiques, en posant des conditions de performance de la société par rapport à un indice de référence, par rapport à des sociétés comparables, ou même des ratios internes clés (revenus, volume des ventes, etc.). La motivation des sociétés a proposer de tels plans, par nature plus complexes et moins bien compris et perçus par les bénéficiaires, a été bâtie sur des expériences passées dans lesquelles les entreprises ne répondaient pas aux objectifs de croissance, développement, rentabilité, etc., fixés par le management ; mais pour autant, dont le cours de l'action avait eu une croissance suffisante dans un marché globalement porteur pour que les bénéficiaires exercent leurs options et en tirent des bénéfices. La réponse en matière d'ingénierie des rémunérations a été de mettre en place des plans permettant de capturer au mieux la performance intrinsèque de leur société, de manière moins corrélée à l'évolution de l'environnement économique et financier dans lequel elle évolue.

Les sociétés cotées devant publier leurs comptes en conformité avec les normes International Financial Reporting Statement (IFRS) doivent déterminer pour les plans émis depuis 2002 les charges comptables liées aux instruments de capitaux propres, et en particulier aux plans de stock options. En effet, les normes comptables internationales (tout comme leur homologue américaines) prévoient que le coût d'un plan de stock option pour l'entreprise, se matérialisant soit par une dilution des actionnaires en cas de plans de souscription, soit par une charge financière dans le cas des plans d'achat d'actions, est assimilé à une charge de personnel qu'il convient de mesurer et reconnaître dans les comptes avant le dénouement des options. Le concept sous-jacent consiste à considérer qu'un bénéficiaire d'un plan de stock option va rendre davantage de services à la société à laquelle il appartient du fait de cette rémunération complémentaire qui lui a été attribuée. Par conséquent, la société doit comptabiliser une charge de personnel en complément des salaires et autres modes de rémunération, à la hauteur du bénéfice consenti. La mesure de cette charge de personnel ne pouvant se faire sur la base de la surperformance des salariés du fait du plan qui leur a été attribué (résultant de facteur de rétention et d'espérance de gains futurs), elle est mesurée à la juste valeur des produits financiers qui lui sont offerts, et est étalée sur sa durée d'acquisition.

Si la valorisation des plans de stock options classiques a fait l'objet de nombreuses études et s'inscrit dans un cadre bien connu que nous rappelons rapidement, la valorisation des plans à conditions de performance nécessite des techniques moins usuelles et parfois complexes que nous allons nous efforcer de détailler et d'illustrer ci-après. Nous présentons dans une première partie les concepts généraux relatifs aux plans de stock options, ainsi que les spécificités et pratiques dans le marché français, en abordant notamment les aspects fiscaux et l'analyse des pratiques des grands Groupes. Les principes d'évaluations et de comptabilisation tels que prévus par les normes internationales sont ensuite détaillés, permettant de fixer le cadre dans lequel une évaluation de stock option doit être réalisée : hypothèses à retenir, modèles admissibles, ... Ensuite, sont abordés en détail les modèles de valorisation de stock options : après un rappel des modèles classiques de valorisation, une analyse spécifique est réalisée pour les plans à conditions de performance qui ne peuvent être évalués sur la base des modèles d'évaluations usuels. Enfin, les différents modèles analysés sont mis en œuvre sur des cas concrets, en intégrant la fixation des hypothèses, la modélisation en elle-même et le traitement et les incidences comptables.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Définitions

1.1.1 Qu'est-ce qu'une stock-option ?

La loi du 31 décembre 1970 a institué en France un système qui consiste à accorder à des salariés ou à des dirigeants la faculté de souscrire ou d'acheter dans un certain délai des actions de leur entreprise à un prix fixé une fois pour toutes, de telle manière qu'en cas de hausse de la valeur de l'action pendant cette période, le bénéficiaire a la possibilité d'acquérir les titres à un prix inférieur à la valeur du moment.

En langage financier de la théorie des marchés, un plan de stock options est un *call européen* ou *américain* dont le *sous-jacent* est l'action est l'action de la société.

Les modalités d'attribution et d'exercice des stock-options par les bénéficiaires sont principalement définies par :

- La *période d'acquisition* (dite aussi période de *vesting*) : cette période détermine à partir de quelle date le fait de quitter la société ne fera pas perdre au salarié son droit à option.
- La *période d'exercice* : cette période détermine à partir de quelle date, et pendant combien des temps, les options acquise peuvent être exercées par le bénéficiaire.

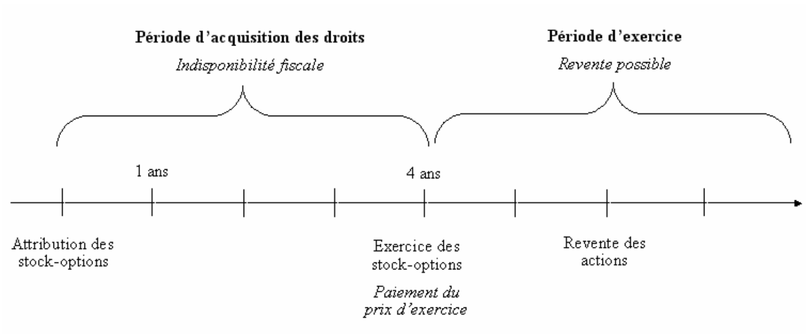

Fig. 1.1 – Le processus d'attribution de stock-options

1.1.2 Les principaux types de stock-options

Il existe deux types de stock-options : les offres d'options de souscription d'une part, et les offres d'options d'achat d'autre part. Elles obéissent à des logiques et à des régimes distincts.

- *Options de souscription* : Les bénéficiaires d'options de souscription peuvent souscrire à des actions qui seront émises au fur et à mesure de la levée des options. De telles options nécessitent des augmentations de capital, soumises à un régime simplifié, par le biais d'une dilution du capital et donc une baisse (généralement légère) de la valeur des actions. Elles sont donc moins avantageuses pour les actionnaires que les options d'achat.
- *Options d'achat* : Dans le cas d'options d'achat, la société émettrice est tenue, préalablement à l'ouverture des options, d'acheter le nombre d'actions nécessaires pour répondre aux demandes qui seront présentées, dans des conditions fixées par la loi. Ce mécanisme oblige la société à immobiliser par avance des fonds que la société ne pourra récupérer qu'après la levée des options. Si les options ne sont pas levées, elle devra alors revendre les actions qu'elle avait acquise. Cette incertitude rend les options d'achat moins avantageuses pour la société émettrice que les options de souscription.

Du point de vue des bénéficiaires des options, les deux formules – souscription ou achat – sont équivalentes.

1.2 Panorama des pratiques françaises

1.2.1 Utilisation de cette forme de rémunération en France

En 1999, selon une enquête de *L'Expansion*, la moitié des entreprises inscrites à la cote officielle et au second marché avait recours au stock-options.

En 2005, toutes les entreprises du CAC 40 ont été autorisées par leurs actionnaires à mettre en place des plans d'options au profit de leur salariés. Et les deux tiers ont attribué des options de souscription ou d'achat d'action (contre 3 sociétés sur 4 en 2004).

En dépit du nouvel outil que constituent les actions gratuites (cf. ci-après) mais aussi des changements de règles comptables qui les rendent moins avantageuses, les attributions d'options de souscription ou d'achat d'actions restent nombreuses.

1.2.2 Les actions gratuites comme alternative

Les mécanismes d'attribution d'actions gratuites ont été autorisés pour la 1ère fois en 2003 par la COB (devenue Autorité des Marchés Financiers depuis). Un nouveau régime juridique et fiscal, codifié par la loi de Finances pour 2005, et très largement inspiré du régime des stock-options, a favorisé l'émergence de cette forme de rémunération.

Chez Suez, par exemple, le conseil d'administration a décidé en décembre de mettre en place un plan d'attribution d'actions gratuites avec deux objectifs : compléter, en s'y substituant partiellement, le dispositif de stock-options et toucher une frange de salariés non concernés par les plans de stock-options.

Toutefois, les actions gratuites ne répondent pas forcément aux attentes de certains actionnaires. C'était en 2005 le premier sujet de contestation au sein des assemblées générales : Vinci, Havas, Technip, Nexans, Capgemini, Accor et Alcatel n'ont pas réussi à faire adopter leurs plans d'attribution.

1.2.3 L'émergence des conditions de performances dans les plans

A la suite du crack boursier du début des années 2000 et à l'incertitude concernant la valeur des stocks options, la mise en place de conditions de performance semblait alors inadaptée et/ou peu acceptable pour les bénéficiaires.

En 2005-2006, les groupes, qui avaient mis en place à la fois des plans de stock options et des actions gratuites, avaient plutôt prévu ces conditions de performance sur les actions gratuites, rarement sur les stock options. Aujourd'hui, en raison de la hausse des cours, de l'influence de la *corporate governance*, des pratiques européennes et du législateur (développement des actions gratuites), de nombreux groupes renouent avec les conditions de performance pour les stock options également et en particulier pour les dirigeants.

Les conditions de performance peuvent prendre plusieurs formes :
- Performance relative de l'action par rapport à un indice sectoriel (Suez, BNP Paribas) (conditions de performance dites "marché") ;
- Atteinte d'un indicateur de performance interne (i.e. non basé sur le cours de l'action) comme par exemple la progression du chiffre d'affaire, le niveau du résultat d'exploitation, le RCOE (Schneider, Veolia) ;
- Progression brute du cours de l'action (Lafarge, Saint Gobain).

Ces conditions de performance peuvent porter :
- sur le nombre d'options exerçables par les bénéficiaires : si par exemple la performance est atteinte à x% à l'issue de la période d'indisponibilité, les bénéficiaires pourront exercer x% du nombre d'option qui leur a été initialement attribué
- sur les dates d'exercice des options : les bénéficiaires ne pouvant exercer que si le critère de performance est atteint, comme illustré dans la Fig. 1.2.

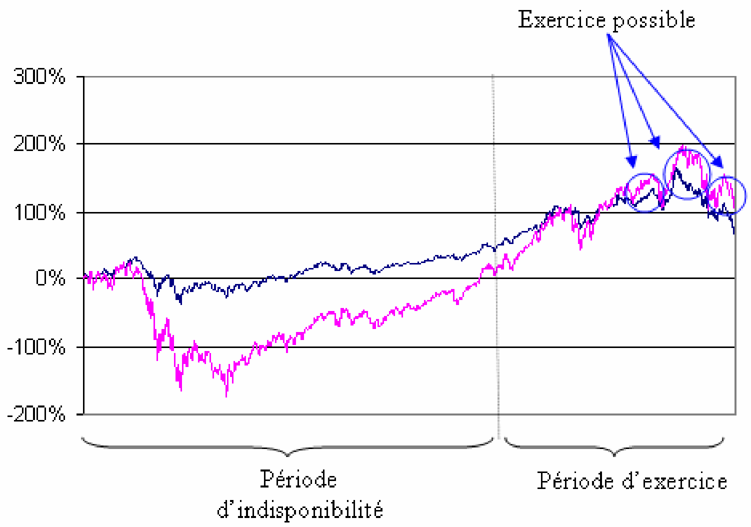

FIG. 1.2 – Exemple de réalisation d'une condition de surperformance du cours de l'action par rapport à un indice

L'Autorité des Marchés Financiers, dans ses recommandations en matière d'information comptable dans la perspective des comptes 2007, précise que les plans à conditions de performance doivent faire l'objet d'une information spécifique en annexe relative en particulier au mode de valorisation retenu.

Le cas particulier des plans avec condition de performance.

Les paragraphes 19 à 21 d'IFRS 2 traitent des conditions de performance en distinguant celles qui s'appuient sur le marché (hausse du cours de bourse par exemple) et celles qui sont *déconnectées du marché (hausse de la part de marché de l'émetteur par exemple). Les conditions de marché doivent être prises en compte dans l'évaluation initiale de la juste valeur contrairement aux autres qui entraînent uniquement une adaptation du nombre d'options à valoriser en fonction de l'atteinte de l'objectif.*

Environ un tiers des sociétés de l'échantillon revu a mis en place des plans avec conditions de performance. (...) Pour les plans dont les conditions de performance s'appuient sur le marché, cette donnée constitue un paramètre important de la méthode d'évaluation de la charge calculée au titre d'IFRS 2, par conséquent, conformément au paragraphe 45 (a), une information appropriée devrait être fournie aux utilisateurs des comptes pour expliquer comment l'évaluation de la juste valeur a été effectuée, si celle-ci est significative. Dans les deux cas de figure, lorsque les conditions de performance sont atteintes, il paraît utile de préciser cet élément en annexe (en liaison avec le paragraphe 45 (b) (vii) qui prévoit que le nombre et le prix d'exercice moyen pondéré des options exerçables à la fin de la période soient communiqués). Si, par ailleurs, les conditions de performance sont progressives (utilisation de seuils par exemple), une indication des seuils ou critères intermédiaires atteints est souhaitable.

Conditions de performance dites "non marché"

S'agissant des objectifs de performance relatifs à un indice sectoriel, on peut relever par exemple les plans mis en place par :

– Veolia Environnement

L'acquisition des options attribués au comité exécutif, ainsi qu'aux autres dirigeants du Groupe est soumise à une progression minimum du bénéfice net par action (BNPA) entre le 31 décembre 2006 et le 31 décembre 2008.(Document de référence 2007)

– Schneider

L'exercice des options des plans (...) est subordonné à une condition d'appartenance au Groupe et pour la moitié des options à l'atteinte d'objectifs annuels basés sur le chiffre d'affaires et sur le ratio résultat d'exploitation sur chiffre d'affaires.(Document de référence 2007)

Conditions de performance dites "marché'

S'agissant des objectifs de performance relatifs à un indice sectoriel, on peut relever par exemple les plans mis en place par :

– Axa

Pour les membres du comité exécutif, les stockoptions attribuées sont acquises sans conditions pour les deux premières tranches après la période d'acquisition. En revanche, la dernière tranche n'est acquise que si l'action AXA surperforme, après 4 ans, un indice benchmark : le "DowJones Europe Stoxx Insurance"

– BNP Paribas

Le prix d'exercice de ces plans, déterminé lors de chaque émission conformément aux dispositions des autorisations des Assemblées Générales Extraordinaires correspondantes, ne comporte pas de décote. La durée de vie des options a été ramenée à 8 ans à compter du plan attribué en 2005. Les conditions d'exercice d'une fraction des options attribuées, au-delà d'un nombre minimum d'options non sujettes à cette condition, dépendent de la performance relative du titre par rapport à l'indice Euro Stoxx Bank. La performance relative est mesurée en fin de seconde, troisième et quatrième année de la période d'indisponibilité. Selon l'écart de performance constaté *à chaque date de mesure, un prix d'exercice supérieur peut être appliqué à la fraction des options attribuées correspondante, ou l'exercice de cette fraction peut être caduque.* (Document de référence 2006)

– Essilor

Les actions de performance attribuées en 2006 et début 2007 sont régies par des règlements de plan d'actions de performance avec les conditions suivantes : (1)attribution conditionnelle à des bénéficiaires résidents français d'un nombre maximum d'actions pour une première période de 2 ans dite d'attribution ; (2) ouverture entre la 2e et la 4e année d'une seconde période dite d'acquisition pendant laquelle les actions pourront être définitivement attribuées (c'est-à-dire devenir la propriété des bénéficiaires), si la moyenne des cours d'ouverture calculée pendant les trois mois précédant la date du 2e anniversaire du plan est strictement supérieure au cours initial de référence ; (3) à l'issue des 4 ans, si la moyenne des cours mentionnée ci-dessus, calculé tous les 3 mois, a toujours été inférieure ou égale au cours initial de référence, aucune action de performance ne sera finalement attribuée (annulation pure et simple de l'attribution si les calculs du cours moyen n'ont jamais permis de constater une progression par rapport au cours initial de référence.

– la Société Générale

Ces options conditionnelles ne seront acquises qu'au bout de 3 ans si et dans la mesure où la performance de la Société Générale excède les conditions suivantes : - le nombre maximum sera acquis si le TSR (Total Shareholder Return - évolution des cours de Bourse et dividendes capitalisés) annualisé constaté entre le quatrième trimestre 2006 et le quatrième trimestre 2009 excède de 15 points au moins la médiane des TSR sur la même période de l'échantillon de quatorze autres banques européennes utilisé pour la détermination de la part quantitative de la rémunération variable (1)si la variation est égale à la médiane de ces variations, le nombre des options acquises sera égal à 35% du maximum, (b) si la variation est inférieure de 10 points au moins à cette médiane, aucune option conditionnelle ne sera accordée.

– Suez

Pour la moitié des options de souscription consenties aux cadres dirigeants du Groupe et pour la moitié des options de souscription attribuées aux membres du Comité Exécutif du Groupe, la levée des options est soumise à une condition de performance. L'exercice de ces options sera possible si le cours de l'action SUEZ, durant la période allant du 17 novembre 2008 au 16 novembre 2012, est supérieur ou égal au niveau atteint par l'évolution de l'indice Eurostoxx Utilities constatée sur la période du 17 novembre 2004 au 17 novembre 2008 et appliquée au prix de levée de l'option. (Document de référence 2006)

– Unibail

Le droit de lever des options est subordonné au fait que la performance boursière globale d'Unibail soit strictement supérieure en pourcentage à la performance de l'indice de référence EPRA sur la période de référence.

Nous verrons plus loin que les traitements comptables applicables, et les enjeux de valorisation en résultant, diffèrents selon la nature de la condition de performance, "marché" ou "non marché".

Dans leur recommandation d'octobre 2008 (sur la rémunération des dirigeants, mandataires sociaux de sociétés dont les titres sont admis aux négociations sur un marché réglementé), le MEDEF et l'Association Française des Entreprises Privées (AFEP) indiquent : "Les attributions d'actions aux dirigeants mandataires sociaux doivent être soumises à des conditions de performance. Les attributions gratuites d'actions sans conditions de performance doivent être réservées aux salariés". Cette recommandation laisse à penser que l'émergence de plans à conditions de performance, marché ou non marché, va aller croissant, à minima pour les dirigeants.

1.2.4 La fiscalité française des stock-options

Les stock options font l'objet d'une triple imposition, compte tenu des trois types de revenus différents que l'on peut retirer de l'attribution de stock-options :

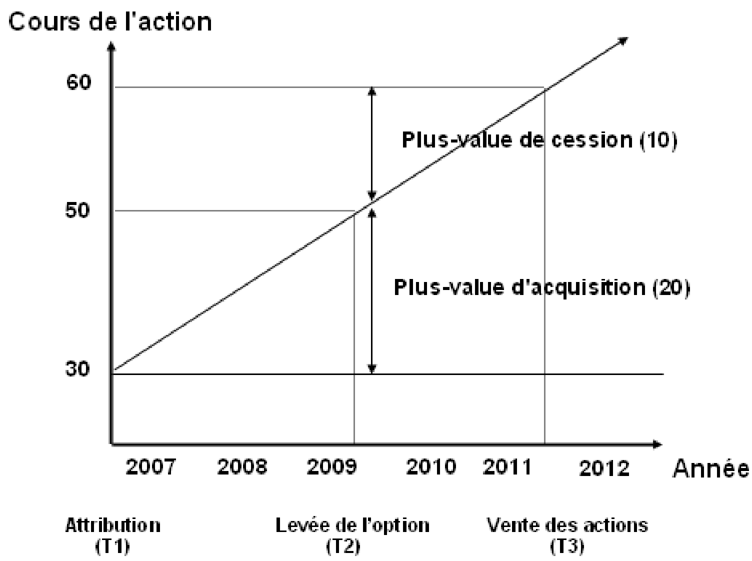

FIG. 1.3 – La notion d'avantage selon les règles fiscales

On distingue ainsi :

- le *rabais excédentaire*, qui correspond à la différence en le prix d'exercice de l'option et 95% du cours de référence de l'action,
- la *plus-value d'acquisition*, qui correspond à la différence entre le cours de l'action à la date de levée et le prix d'exercice (éventuellement corrigé du rabais excédentaire,
- la *plus-value de cession*, qui correspond à la différence entre le prix de cession de l'action et le prix d'acquisition de celle-ci (i.e. le cours à la date de levée).

Le gain total est ainsi formé de la somme entre la plus-value d'acquisition et la plus ou moins-value de cession.

Récemment, la Loi de Finance de la Sécurité Sociale 2008 a instauré une nouvelle cotisation patronale de 10% sur les stock-options et les actions gratuites. Cette cotisation sera assise sur la juste valeur des options ou, au choix de la société, sur 25% du cours des actions à la date d'attribution. Il est institué en outre, au profit des régimes obligatoires d'assurance maladie dont relèvent les bénéficiaires, une contribution salariale de 2.5%.

Le lecteur intéressé par une comparaison de la fiscalité applicable dans différents pays pourra se référer à l'article [6].

	Principe	Imposition
Rabais excédentaire	La fraction de la décote qui excède 5% est considéré comme un complément de salaire et est imposé en conséquence.	Barème IR
Plus-value d'acquisition	Le gain est considéré comme du salaire imposable à la date de cession au régime des plus-values si cession après indisponibilité et portage 2 ans	16% si PV<152k 30% si PV>152k
Plus-value de cession	L'optionnaire devient actionnaire soumis au régime de droit commun	16%

Tab. 1.1 – Synthèse de la fiscalité des stock-options

Chapitre 2

Règles d'évaluation et de comptabilisation des stock-options en normes IFRS

2.1 Champ d'application de la norme IFRS2

La norme IFRS2 relative aux paiements indexés sur actions a été publiée le 19 février 2004 par l'*International Accounting Standards Board* (IASB).

Cette norme couvre les modalités d'évaluation et de comptabilisation de toutes les opérations de paiements indexés sur actions, qu'elles soient réglées en trésorerie, autres actifs ou en instruments de capitaux propres, et qui sont effectuées avec le salariés ou avec des tiers, à l'exception :

– des opérations de regroupements d'entreprises, qui entrent dans le champ d'application d'IFRS 3,
– des transactions qui relèveraient du champ d'application d'IAS 32/39.

Aucune autre exception n'est prévue. En particulier, les plans d'actionnariat salariés entrent dans le champ d'application de la norme. Ainsi, le droit pour un employé d'acquérir des actions de l'entreprise à un prix inférieur au prix de marché est couvert par la norme, sauf à ce que ce droit soit conféré à tous les actionnaires (y compris les actionnaires "non employés").

La norme distingue les opérations de paiements indexés sur actions réglées :

– en instruments de capitaux propres,
– en trésorerie,
– en instruments de capitaux propres avec règlement alternatif possible en trésorerie.

2.2 Le principe de la *juste valeur*

Le principe général énoncé consiste à enregistrer les biens lorsqu'ils sont obtenus et les services au fur et à mesure qu'ils sont reçus, à leur juste valeur.
L'entité devra ainsi constater :

– une charge (ou un actif si les biens et/ou services reçus répondent aux critères de reconnaissance d'un actif),
– en contrepartie d'une augmentation des capitaux propres (transaction réglée en instruments de capitaux propres) ou d'une dette (transaction réglée en espèces). Dans la mesure où il existe un choix dans le mode de règlement, la transaction devra être traitée comme

une transaction réglée en espèce à hauteur de l'obligation de l'entité de régler en trésorerie (ou par la remise d'un autre actif) et comme une transaction réglée en instruments de capitaux propres pour le solde éventuel.

La transaction doit être évaluée à la juste valeur "la plus aisément déterminable" :

- soit de façon directe, à la juste valeur des biens et services reçus à la date de réception, pour les transactions avec des tiers autres que les employés ou fournisseurs de services similaires. Toutefois, si cette juste valeur ne peut-être estimée directement de façon fiable, elle sera évaluée par référence à la juste valeur des instruments de capitaux propres remis à la date de réception des biens et des services reçus,
- soit de façon indirecte par référence à la juste valeur des instruments de capitaux propres attribués (rémunération des services reçus des salariés ou de tiers fournissant des services similaires) à la date d'attribution.

L'évaluation de la transaction par référence à la juste valeur des instruments émis suppose l'utilisation d'un modèle d'évaluation qui doit prendre notamment en compte différents paramètres tels que le cours de l'action, le prix d'exercice, la volatilité attendue, les dividendes attendus, le taux d'intérêt sans risque et la durée de vie de l'option. D'autres éléments d'appréciation de la juste valeur peuvent également être pris en considération tels que la non-transférabilité des options à l'issue de la période d'acquisition des droits.

A titre d'exemple, si une société met en place un plan de souscription réservé aux salariés, dans le cadre duquel elle leur offre un droit inconditionnel de souscrire des actions à un pris inférieur au cours de la bourse, la charge constatée ne sera pas nécessairement égale au montant total de la décote offerte, dès lors que l'offre de souscription est assortie de restrictions sur la transférabilité des actions et que ces restrictions sont susceptibles d'avoir une incidence sur la juste valeur des actions souscrite (i.e. le prix qu'accepterait de payer un acheteur consentant et bien informé, dans des conditions normales).

Si la transaction doit être mesurée par référence à la juste valeur des instruments attribués et que celle-ci ne peut-être déterminée de façon fiable, la norme autorise dans ce type de situations - qu'elle qualifie de rares - à comptabiliser la transaction par référence à la valeur intrinsèque des instruments attribués, à l'origine à la date d'évaluation (la date d'évaluation est la date d'attribution pour les transactions avec las salariés et tiers fournissant des services similaires, où la date à laquelle l'entité reçoit les biens ou services en ce qui concerne les transactions avec les non-salariés) puis à chaque date d'arrêté, en constatant la variation de valeur intrinsèque.

Les développements qui suivent se concentrent sur les transactions avec les salariés.

2.2.1 Transactions réglées en instruments de capitaux propres

S'il n'existe aucune condition d'acquisition de droits, les services sont présumés reçus et sont comptabilisés immédiatement en contrepartie d'un augmentation des capitaux propres, égale à la juste valeur des instruments émis à la date d'attribution, selon le principe général décrit précédemment.

Si l'acquisition des droits est conditionnée à l'accomplissement d'une durée de service déterminée, ou à la réalisation de certaines conditions, les services sont présumés reçus (et sont donc comptabilisés) sur la période d'acquisition des droits.

La charge constatée en cumul sur la période d'acquisition de droits correspond à la juste valeur (estimée à la date d'attribution) des options dont les conditions d'acquisition de droits auront été satisfaites. A contrario, il convient de noter que les conditions d'acquisition de droits fondées sur des données de marché (telles que l'atteinte d'un cours cible de l'action) sont incluses dès l'origine dans le calcul de la juste valeur des instruments attribués et aucune reprise de la charge antérieurement constatée ne sera réalisée dans le cas où ces conditions ne seraient pas satisfaites.

En cas de modification de plan conduisant à une augmentation de la juste valeur des instruments attribués, la valeur marginale (i.e. la différence d'origine et la juste valeur du nouvel instrument) doit être reconnue sur la période d'acquisition résiduelle modifiée, en supplément de la charge basée sur la juste valeur du plan d'origine, qui reste constatée sur la durée d'acquisition de droits d'origine.

En cas d'annulation de liquidation d'un plan, la charge non encore reconnue est comptabilisée immédiatement. Si un règlement en espèces est effectué, ce paiement doit être comptabilisé comme un rachat d'instrument de capitaux propres - sauf si ce paiement excède la juste valeur des instruments annulés à la date d'annulation (l'excédent devant être reconnu en résultat). Si des options de remplacement sont émises en contrepartie de l'annulation d'un plan, elles doivent être comptabilisées comme une modification de plan (reconnaissance de la valeur marginale attribuée sur la durée résiduelle d'acquisition des droits, égale à la différence, à la date du remplacement, entre la juste valeur des nouveaux instruments et la juste valeur des anciens, nette de tout paiement comptabilisé en capitaux propres).

La charge de rémunération ne peut-être réduite qu'en cas de non satisfaction des conditions d'acquisition de droits telles que définies à l'origine. En conséquence, si la modification du plan a pour conséquence de :

– réduire la juste valeur des instruments accordés, le plan de charge initial continue d'être enregistré,
– réduire le nombre d'instruments accordés, cette réduction serait comptabilisée comme une annulation partielle conduisant à constater en charge immédiatement le solde non encore reconnu correspondant aux instruments annulés,
– réduire la probabilité d'acquisition des droits (par exemple en augmentant la durée d'acquisition des droits ou en modifiant les conditions de performance), l'entité devrait continuer à comptabiliser la charge sur la base des conditions d'acquisition du plan d'origine.

2.2.2 Transactions réglées en espèces

Les transactions visées couvrent par exemple, l'octroi de titres qui donnent le droit à un paiement en espèces ultérieur fondé sur l'augmentation du cours par rapport à un niveau déterminé sur une période déterminée ("Share Appreciation Rights" ou SAR) ou d'actions remboursables.

Dans ce type de transactions, les biens et services acquis et la dette sont enregistrés à la juste valeur de la dette. Tant que la dette n'est pas réglée, elle est réévaluée à sa juste valeur à chaque clôture des comptes, les modifications de juste valeur étant reconnues par résultat.

2.2.3 Transactions réglées en instruments de capitaux propres ou en espèces

La transaction (ou ses composants) est comptabilisée comme une transaction réglée en espèces si (et dans la mesure où) l'entité a une obligation de régler en espèces ou par la remise d'autres actifs, et comme une transaction réglée en instruments de capitaux propres si une telle obligation n'existe pas.

Si le salarié a le choix du règlement, l'entité lui a octroyé un instrument financier composé dont la composante dette sera comptabilisée conformément aux dispositions applicables aux transactions réglées en espèces et la composante de capitaux propres sera comptabilisée conformément aux dispositions applicables aux transactions réglées en instruments de capitaux propres.

Si le dénouement est effectué en espèces, la dette est éteinte. La partie précédemment comptabilisée en capitaux propres reste en capitaux propres.

Si le dénouement est effectué en instruments de capitaux propres, la dette est reclassée en capitaux propres. Si l'accord de paiement indexé sur actions laisse le choix du mode de règlement à l'entité, celle-ci doit déterminer dans quelle mesure elle a une obligation (juridique ou implicite) de régler en espèces et comptabiliser la transaction en conséquence. A titre d'exemple, si l'entité a une pratique passée ou une politique établie de dénouer un plan en espèces, elle devra la comptabiliser comme une opération réglée en espèces. En l'absence d'une telle obligation, elle la comptabilise comme une transaction réglée en capitaux propres. Dans ce cas, si l'opération est dénouée en espèces, le règlement est comptabilisé comme un rachat d'instrument de capitaux propres. Toutefois, si le mode de règlement est celui qui a la plus forte juste valeur, la différence avec la valeur du mode de règlement prévu à l'origine est constatée en résultat.

2.3 Principes de valorisation

2.3.1 Modèles d'évaluation de la juste valeur

Dans le cas de plans dénoués en instruments de capitaux propres pour lesquels il n'existe pas de valeur de marché disponible (ce qui est généralement le cas des plans de stock options compte tenu principalement de la maturité très longue par rapport aux options généralement négociées sur les marchés financiers), la norme IFRS2 demande d'utiliser des techniques de valorisation cohérentes avec l'évaluation de produits financiers, intégrant l'ensemble des paramètres et hypothèses que prendraient en considération deux parties parfaitement informées pour conclure une transaction.

"*If market prices are not available, the entity shall estimate the fair value of the equity instruments granted using a valuation technique to estimate what the price of those equity instruments would have been on the measurement date in an arm's length transaction between knowledgeable, willing parties. The valuation technique shall be consistent with generally accepted valuation methodologies for pricing financial instruments, and shall incorporate all factors and assumptions that knowledgeable, willing market participants would consider in setting the price (subject to the requirements of paragraphs 19-22)*" (IFRS 2, §17)

Le guide d'application de la norme indique que dans certains cas la formule de Black & Scholes ne pourra pas être utilisée du fait du caractère américain des options généralement rencontrées (IFRS 2, § B5), et les modèles binomiaux sont fréquemment cités à titre d'exemple comme modèles permettant la prise en compte d'exercices anticipés et pour leur flexibilité en général (IFRS 2, §B17 et §BC161).

S'il n'est pas imposé de modèle de valorisation, il est par contre précisé que tous les modèles de valorisation retenus doivent prendre en compte au minimum les facteurs suivants (IFRS 2, §B6) :

- prix d'exercice de l'option,
- durée de vie de l'option,
- prix de marché du sous-jacent,
- volatilité attendue du sous-jacent,

– dividendes attendus,
– taux d'intérêt sans risque sur la durée de vie de l'option.

Pour les plans à conditions de performance assise sur une condition de marché, la juste valeur de l'option doit intégrer la composante optionnelle relative à cette condition de performance. Selon le cas, cela peut nécessiter l'utilisation d'hypothèses spécifiques en complément de la liste présentée ci-dessus.

2.3.2 Détermination des paramètres : le cadre normatif

La norme précise que l'estimation des différentes hypothèses repose généralement sur l'historique, mais que celui-ci ne doit être utilisé s'il est jugé suffisamment représentatif du futur.

"*Expectations about the future are generally based on experience, modified if the future is reasonably expected to differ from the past. In some circumstances, identifiable factors may indicate that unadjusted historical experience is a relatively poor predictor of future experience. For example, if an entity with two distinctly different lines of business disposes of the one that was significantly less risky than the other, historical volatility may not be the best information on which to base reasonable expectations for the future.*" (IFRS 2, § B13)

"*In summary, an entity should not simply base estimates of volatility, exercise behavior and dividends on historical information without considering the extent to which the past experience is expected to be reasonably predictive of future experience*". (IFRS 2, § B15)

Certaines précisions spécifiques aux différentes hypothèses sont détaillées dans le guide d'application d'IFRS2 que nous exposons ci-après. La principale différence par rapport à la valorisation d'options usuelles en théorie financière concerne, outre la longue maturité des plans, la possibilité de prendre en compte des hypothèses spécifiques aux porteurs d'options, telles que le taux de rotation des salariés (turn over) ou encore le seuil de gain attendu à partir duquel les bénéficiaires vont exercer leurs options.

Taux sans risque

Le taux sans risque à retenir pour les évaluations est le taux zéro coupon gouvernemental.

"*Typically, the risk-free interest rate is the implied yield currently available on zero-coupon government issues of the country in whose currency the exercise price is expressed, with a remaining term equal to the expected term of the option being valued (based on the option's remaining contractual life and taking into account the effects of expected early exercise). It may be necessary to use an appropriate substitute, if no such government issues exist or circumstances indicate that the implied yield on zero-coupon government issues is not representative of the risk-free interest rate (for example, in high inflation economies). Also, an appropriate substitute should be used if market participants would typically determine the risk-free interest rate by using that substitute, rather than the implied yield of zero-coupon government issues, when estimating the fair value of an option with a life equal to the expected term of the option being valued.*" (IFRS2, § B37)

Pour les plans de stock options attribuées en France, le taux sans risque à retenir est donc le taux zéro coupon gouvernemental zone euro de maturité égale à la durée de vie attendue de l'option.

Taux de dividende

Le taux de dividende ne doit être pris en compte dans l'évaluation de l'option qu'à la condition que les bénéficiaires de l'option n'aient pas droit aux dividendes pendant la période précédent l'exercice de l'option, ce qui est généralement le cas.

"*Whether expected dividends should be taken into account when measuring the fair value of shares or options granted depends on whether the counterparty is entitled to dividends or dividend equivalents.*" (IFRS 2, § B31)

"*For example, if employees were granted options and are entitled to dividends on the underlying shares or dividend equivalents (which might be paid in cash or applied to reduce the exercise price) between grant date and exercise date, the options granted should be valued as if no dividends will be paid on the underlying shares, ie the input for expected dividends should be zero.*" (IFRS 2, § B32)

"*Conversely, if the employees are not entitled to dividends or dividend equivalents during the vesting period (or before exercise, in the case of an option), the grant date valuation of the rights to shares or options should take expected dividends into account. That is to say, when the fair value of an option grant is estimated, expected dividends should be included in the application of an option pricing model. When the fair value of a share grant is estimated, that valuation should be reduced by the present value of dividends expected to be paid during the vesting period.*" (IFRS 2, § B34)

L'estimation du taux de dividende repose sur des données publiques et sur la politique envisagée dans le futur par la société.

"*Generally, the assumption about expected dividends should be based on publicly available information. An entity that does not pay dividends and has no plans to do so should assume an expected dividend yield of zero. However, an emerging entity with no history of paying dividends might expect to begin paying dividends during the expected lives of its employee share options. Those entities could use an average of their past dividend yield (zero) and the mean dividend yield of an appropriately comparable peer group.*" (IFRS 2, § B36)

La référence normative pour déterminer le taux de dividende futur est donc basée sur les données disponibles (généralement l'historique des dividendes versés ainsi que le niveau attendu par le management pour le prochain exercice, ou encore sur des anticipations de marché ou d'analystes financiers) et si besoin sur des données de marché de sociétés comparables.

Taux de rotation des salariés

Dans le référentiel IFRS, cette hypothèse est la seule à pouvoir faire l'objet d'ajustements annuels jusqu'à la fin de la période d'acquisition des droits (seuls certains plans à critère de performance interne prévoient de mettre à jour les autres hypothèses chaque année). Au-delà de cette période, un départ du bénéficiaire de l'entreprise pendant la période de levée des options peut entraîner un exercice anticipé. Cet exercice anticipé peut être pris dans le modèle d'évaluation de la juste valeur de l'option :

"*Employees often exercise share options early, for a variety of reasons. For example, employee share options are typically non-transferable. This often causes employees to exercise their share* *options early, because that is the only way for the employees to liquidate their position. Also, employees who cease employment are usually required to exercise any vested options within a short period of time, otherwise the share options are forfeited. This factor also causes the early exercise of employee share options. Other factors causing early exercise are risk aversion and lack of wealth diversification*". (IFRS 2, § B16)

Cette hypothèse est généralement déterminée soit sur base de statistiques des départs observés pour la population éligible au plan de stock options (en particulier cette hypothèse peut être de nature très différente pour des plans couvrant uniquement des personnels exécutifs que pour des plans offerts à une plus large population), soit en fonction d'anticipations des ressources humaines de l'entreprise.

Le lien entre les effets de l'attribution de plans et de stock options et la rétention des bénéficiaires n'est pas immédiat, et résulte notamment du poids des stock options dans la rémunération globale, et de paramètres individuels. Certains modèles de détermination du taux de rotation peuvent être mis en place, conduisant à des taux déterminés selon plusieurs critères comme : - le poids des stock-options par rapport à la rémunération globale, - le niveau hiérarchique dans l'entreprise - la performance de l'entreprise (le taux de départ pouvant être plus faible lorsque les gains potentiels au titre des plans de stock options sont élevés) - la durée restant jusqu'à la date d'acquisition des options : les bénéficiaires ayant plus d'incitation à rester dans l'entreprise si leurs options peuvent être exercées à court terme mais également des critères plus indépendants des plans eux-mêmes, comme l'ancienneté des bénéficiaires ou leur âge qui par expérience sont des facteurs déterminants sur les probabilités de quitter l'entreprise.

Dans la pratique peu de modèles aussi fins sont développés, résultant principalement du fait qu'à la fin de la période de vesting, seules les options au titre des bénéficiaires encore présents sont comptabilisées : le bénéfice d'un modèle de valorisation plus fin porterait uniquement sur la séquence d'amortissement des charges pendant la période de vesting.

Volatilité

La fixation de la volatilité doit prendre en compte plusieurs éléments en fonctions des informations disponibles (cf. IFRS2 § B25) :

- la volatilité implicite déterminée à partir d'options cotées ou autres instruments dérivés ayant pour sous-jacent l'action de la société,
- la volatilité historique sur la période la plus récente et sur un intervalle d'observation identique à la maturité attendue de l'option (maturité intégrant les aspects contractuels de terme du plan mais aussi les facteurs tels que l'exercice anticipé conduisant à réduire cette durée),
- une même référence de cours (clôture, ouverture, moyen, ...) pour toute la période d'observation historique, et une même fréquence d'observation (quotidien par exemple).

Des traitements spécifiques (analyse sur base de sociétés comparables par exemple) sont prévus pour les sociétés nouvellement cotées.

Les critères permettant de retenir une hypothèse de volatilité sur base d'analyse de volatilités implicites ne sont pas détaillés dans la norme. Sur ce point, il nous semble pertinent de s'inspirer des critères établis par la commission de surveillance des sociétés cotées aux États-Unis (cf. SAB 107 applicable à la norme FAS 123 révisée, analogue à IFRS 2) qui sont les suivants :

- liquidité de l'option sous-jacente : les options cotées pour lesquelles un marché liquide existe reflètent mieux la volatilité attendue par le marché,

- synchronisation des variables : il est préférable que les variables retenues pour l'estimation de la volatilité implicite soient similaires à celles retenues pour la valorisation des options. En particulier, il est préférable que la volatilité implicite soit évaluée à une date proche de la date d'attribution des options,
- similitude des prix d'exercice : la volatilité implicite évaluée à partir d'options dont le rapport cours sur prix d'exercice des options est proche de celui de l'option à évaluer est plus approprié (limitation de l'effet lié au smile de volatilité),
- similitude de la maturité : la maturité des options retenues pour l'évaluation de la volatilité implicite doit être proche de celle des stock options.

Exercice anticipé

Les différentes causes d'exercice anticipé (départ de l'entreprise, aversion au risque, besoin de diversification, prise de gain avant terme...) conduisent à réduire la durée de vie attendue de l'option ce qui a un effet sur la valorisation, quelque soit le modèle retenue. Les facteurs à prendre en compte pour estimer les exercices anticipés futurs sont les suivants (cf. IFRS2, § B18) :

- la durée de la période d'acquisition pendant laquelle les actions ne peuvent être cédées,
- le niveau des bénéficiaires dans l'organisation : il est généralement constaté que les dirigeants exercent plus tard que les salariés dont le niveau hiérarchique dans l'organisation est moindre,
- le niveau de volatilité : les bénéficiaires ont tendance à exercer plus rapidement des actions très volatiles que des actions qui le sont moins,
- la durée moyenne de détention d'options similaires attribuées dans la passé,
- le cours de l'actions : en effet l'analyse des plans antérieurs peut permettre de mettre en évidence des comportements d'exercice à partir d'un certain niveau de cours au-delà du prix d'exercice.

Les deux derniers facteurs d'anticipation des exercices font appel à des analyses sur les plans d'options attribués dans le passé. Ces analyses nous semblent difficile à mettre en œuvre de manière fiable dans la mesure où elles sont très dépendantes :

- des caractéristiques des plans : l'analyse ne peut porter que sur des plans similaires en terme de bénéficiaires, durées, conditions éventuelles, ...
- des conditions de marché, indépendamment de la performance du titre.

Par ailleurs, certains plans offerts à des effectifs restreints (cadres de direction par exemple) ne permettent pas d'élaborer des statistiques suffisamment fiables.

Enfin, s'agissant des membres de direction ou du comité exécutif, la communication relative à l'exercice de leurs options peut avoir des effets sur leur comportement d'exercice et les contraindre à exercer de manière non optimale pour limiter les effets induits sur le marché : la vente de stock options par cette catégorie de bénéficiaires pouvant être perçue par les autres actionnaires comme un manque de confiance dans les performances futures de l'entreprise. Ces bénéficiaires peuvent également contraindre l'exercice de leurs options dans le cadre de la réglementation sur les informations privilégiées, et éviter ainsi d'être soupçonnés de délit d'initié. Ces points conduisent dans certains cas à retenir comme date d'exercice de ces bénéficiaires l'échéance du plan.

2.4 Reconnaissance de la charge de rémunération

Sont présentés dans cette partie les principes généraux de comptabilisation des transactions réglées en instruments de capitaux propres, et spécialement des plans de stock options de sociétés cotées. Aucune distinction de traitement n'est à mentionner concernant les plans sans conditions de performance – dits “classiques” – et les plans avec des conditions de performance liés à une performance de marché . Nous n'avons pas détaillé les impacts comptables liés aux modifications ou fermetures de plan, sans intérêt pour l'objet visé ici.

Pour les plans réglés en instruments de capitaux propres, la norme IFRS2 prévoit la constatation d'une charge de personnel en contrepartie d'une augmentation de capitaux propres. Dans les cas usuels prévoyant une durée d'acquisition des droits (généralement 4 ans en France pour des raisons fiscales, mais variant d'un plan à l'autre et d'un pays à l'autre), la charge est étalée sur cette période, en fonction :

- de la valeur de l'avantage accordé mesuré à la date d'attribution, et
- du nombre estimé d'instruments qui seront acquis au terme de la période d'acquisition.

Si la valeur de l'avantage consenti aux bénéficiaires n'est jamais réévaluée pour de tels plans, le nombre d'instruments acquis au terme de la période d'acquisition fait donc l'objet d'une estimation et peut être ajusté sur cette période afin de prendre en compte d'éventuelles annulations liées à des départs en particulier.

A la fin de la période d'acquisition des droits, la charge cumulée est donc égale aux instruments financiers acquis par les bénéficiaires, valorisés à leur juste valeur d'origine. A noter que dans le cas de plans sans période d'acquisition la charge est reconnue immédiatement.

Pour les plans de stock options avec condition de performance de marché, la seule distinction par rapport aux plans classiques réside dans le calcul de la juste valeur de l'instrument valorisé à la date d'attribution.

Prenons l'exemple d'un plan de stock options dont les principaux critères sont les suivants :

- nombre n d'instruments octroyés aux bénéficiaires : 50 000
- juste valeur V de l'option à la date d'octroi : 1.5 €
- durée d'acquisition : $d = 3$ ans
- estimation de la proportion de bénéficiaires présents au terme de la durée d'acquisition : $p = 80\%$

Dans ce cas, la charge comptable annuelle a priori du plan de stock options sera de :

$$C_i = \frac{n \times V \times p}{d} = 20\,000 \text{ pour } i = \{1, 2, 3\},$$

et la charge totale

$$C = \sum_{i=1}^{3} C_i.$$

La proportion estimée p peut être révisée chaque année en fonction des observations, et des informations complémentaires que peut avoir la société. Si par exemple au terme de l'année 3 uniquement 70% des bénéficiaires sont présents et que la proportion p n'avait pas été ajustée jusque là, on recalcule alors la charge totale du plan, et on ajuste la charge annuelle C_3 :

$$\begin{aligned} C &= (n \times V \times 70\%) &= 52\,500, \\ C_3 &= C - C_1 - C_2 &= 12\,500, \end{aligned}$$

les charges C_1 et C_2 ayant déjà été comptabilisées.

2.5 Informations à fournir dans les états financiers

Les informations à fournir doivent permettre aux utilisateurs (actionnaires, analystes financiers...) d'apprécier :

1. La nature et l'étendue des opérations de paiements indexés sur actions et notamment :
   – descriptions des plans ayant existé sur la période : mode de règlement, durée de vie des options, prix d'exercice, conditions d'acquisition des droits,
   – nombre et prix d'exercice moyen pondéré des options par "catégorie" (i.e. en circulation en début et fin de période, exerçable en fin de période , annulées, expirées, attribuées, exercées sur la période),
   – pour les options exercées sur la période, prix moyen des actions à la date d'exercice,
   – pour les actions en circulation, durée moyenne pondérée de vie résiduelle (contractuelle et attendue) et fourchette des prix d'exercices.
2. Comment la juste valeur des biens et des services reçus ou des instruments de capitaux propres attribués sur la période a été déterminée et notamment :
   – information détaillée à fournir sur la juste valeur moyenne pondérée des options attribuées sur l'exercice, sur le modèle de valorisation utilisé, et sur la façon dont les différents paramètres ont été estimés,
   – informations sur les modifications de plans sur la période.
3. Les effets sur le compte de résultat de la comptabilisation des opérations de paiements indexés sur actions :
   – charges de la période au titre de transactions de paiement indexées sur actions et part correspondant aux transactions réglées en instruments de capitaux propres,
   – valeur comptable des dettes issues d'opération de paiement indexé sur actions et valeur intrinsèque de la part "acquise" de ces dettes (vested share appreciation rights).

Chapitre 3

Modèles classiques de valorisation d'options

3.1 Définitions – Hypothèses – Notations

3.1.1 Définitions

Nous donnons ici la définition des termes financiers utilisés dans la suite :

Option: instrument financier donnant la possibilité (mais non l'obligation) à son détenteur de prendre part à une transaction future avec l'émetteur, les termes de la transaction étant connus au moment de l'émission. Si le détenteur choisit de prendre part à la transaction, on dit qu'il **exerce** son option.

Option vanille: instrument financier donnant la possibilité (mais non l'obligation) à son détenteur d'acheter ou de vendre (selon le type de l'option) un actif financier coté sur un marché donné, à une date future (ou entre deux dates futures) et à un prix fixés au départ.

Call: type d'option vanille permettant d'**acheter** un actif financier coté sur un marché donné à une date future (ou entre deux dates futures) et à un prix fixés au départ.

Put: type d'option vanille permettant de **vendre** un actif financier coté sur un marché donné à une date future (ou entre deux dates futures) et à un prix fixés au départ.

Option américaine: type d'option pour laquelle la décision d'exercer ou non peut avoir lieu à tout moment entre l'émission de l'option et une date future fixée (que l'on nomme la **maturité** de l'option).

Option européenne: type d'option pour laquelle la décision d'exercer ou non ne peut avoir lieu qu'à une date fixe, c'est-à-dire à la maturité de l'option.

Il est clair que ces définitions ne sont pas exclusives : si l'on prend le cas le plus simple, à savoir celui des options vanille, il faut distinguer quatre types d'instruments, dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 3.1.

***Pay-off*:** flux monétaire généré lors de l'exercice d'une option. Par exemple, le *pay-off* d'un call européen donnant la possibilité d'acheter un sous-jacent S au prix K à la maturité T est égal à $\max(S_T - K, 0)$.

Type d'option	**Donne un droit**	**Est exerçable**
Call européen	d'achat	à une date fixée
Put européen	d'achat	jusqu'à une date fixée
Call américain	de vente	à une date fixée
Put américain	de vente	jusqu'à une date fixée

TAB. 3.1 – Caractéristiques des divers types d'options vanille

3.1.2 Hypothèses sur le marché

Dans tous les modèles présentés dans ce mémoire, les hypothèses faites sur le marché sont les suivantes :

- le marché est parfait, c'est-à-dire qu'il n'y a ni coût de transaction, ni taxe...
- les actifs sont parfaitement divisibles, et aucun acteur du marché n'en détient une part assez importante pour influencer à lui seul le marché (hypothèse d'atomicité du marché) ;
- il y a absence d'opportunités d'arbitrage (A.O.A.) sur le marché : autrement dit, il n'existe pas de stratégie permettant de s'enrichir sans apport personnel ;
- le marché est complet : on peut répliquer le *pay-off* de tous les instruments financiers par une stratégie admissible (c'est-à-dire une stratégie autofinancée et pour laquelle, à tout instant, la valeur du portefeuille est positive) ;

Les deux dernières hypothèses sont les conditions qui permettent d'affirmer l'existence d'une **unique** probabilité Q, équivalente[1] à la probabilité historique P, sous laquelle les prix actualisés des actifs financiers sont des martingales. On appelle Q la probabilité risque-neutre associée à P.

3.1.3 Notations

Dans la suite, dans le contexte de la valorisation d'une option, nous noterons :

S_t : cours d'un actif sous-jacent à l'instant t,
r : taux d'intérêt sans risque,
R_t : prix de l'actif sans-risque à l'instant t,
σ : volatilité du sous-jacent,
μ : rendement du sous-jacent,
K : prix d'exercice de l'option,
T : maturité de l'option,
T_e : durée de la période d'acquisition des droits (éventuellement nulle), pendant laquelle les stock-options ne peuvent être exercées,
$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$: un mouvement brownien standard[2], associé à sa filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$,
$\Gamma_t(S)$: prix d'un call européen sur le sous-jacent S à l'instant t.

3.2 Modèles de valorisation usuels

Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir celui des stock-options, les instruments financiers attribués aux bénéficiaires sont toujours des **options d'achat**, l'une des principales raisons

[1] Rappelons que deux probabilités P_1 et P_2 sont équivalentes si, et seulement si, pour tout événement A de l'univers Ω, $P_1(A) = 0 \Leftrightarrow P_2(A) = 0$.

[2] Pour un rappel succinct des propriétés du mouvement brownien, se référer par exemple à [2].

d'être de ces instruments de rémunération étant l'intéressement du bénéficiaire à l'appréciation de l'actif sous-jacent, qui n'est autre que le titre de la société émettrice.

Cependant, nous verrons qu'il existe un large panel d'options d'achat, plus ou moins complexes, allant du call européen à une option d'achat de type américain dont l'exercice est conditionné par l'atteinte de conditions de performance faisant intervenir d'autres actifs financiers que le seul titre boursier de la société émettrice de l'option. Il va de soi que les modèles de valorisation adéquats varient selon les caractéristiques des options attribuées. Nous présentons ci-après les modèles classiques de valorisation d'options vanilles, européennes puis américaines, et aborderons les cas plus complexes dans le chapitre suivant, avec l'introduction des conditions de performance.

S'agissant des options de type américain, nous n'abordons dans ce mémoire la problématique de l'arrêt optimal (autrement que par le modèle binomial). On rappelle à ce sujet que le détenteur d'une option américaine peut l'exercer à tout moment, et ce jusqu'à la date d'échéance, en fonction de l'information disponible et de l'appréciation du cours critique qui doit déclencher l'exercice optimal. La valorisation de ce type d'instruments pose des problèmes théoriques, auxquels ont été apportées des solutions numériques. Le lecteur interessé pourra notammment consulter l'ouvrage de Lamberton & Lapeyre [13] qui présente des solutions algorithmiques et numériques au calcul d'un put américain avec un modèle de Black and Scholes.

3.2.1 Le modèle de Black & Scholes

Nous présentons succinctement le modèle de Black & Scholes qui conduit à une formule fermée permettant de valoriser un call européen en fonction de ses caractéristiques.

Dans ce modèle sont supposés exister deux actifs : l'un risqué (l'action sous-jacente de l'option), l'autre non risqué (un placement bancaire à taux fixe par exemple).

L'hypothèse de base est que les variations du cours du sous-jacent sont dues à deux éléments :
- une tendance linéaire (ou "trend"),
- une fonction aléatoire dont l'amplitude est σ.

Le modèle historique : cas où le sous-jacent ne verse pas de dividende

Dans le cadre du premier modèle proposé par Black & Scholes [1], il est supposé que le sous-jacent ne verse pas de dividende. Dans ce cas, le système d'équation donnant l'évolution des actifs est la suivante :

$$\begin{cases} dS_t &= S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\ dR_t &= R_t r dt \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, le prix d'un call européen à l'instant t est donné par la formule fermée suivante :

$$\Gamma_t(S) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

avec

$$\begin{cases} d_1 &= \dfrac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$$

et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Variante : cas où le sous-jacent verse un dividende continu

L'une des principales limites à l'utilisation du modèle historique de Black & Scholes était la question de la prise en compte des tombées de dividendes, qui ont un impact direct sur la valeur du sous-jacent.

La variante que nous présentons permet d'inclure l'hypothèse d'une tombée de dividende tout en conservant une expression fermée de la valeur d'un call européen, ce qui est très appréciable en pratique.

La variante consiste à considérer que le sous-jacent verse un taux de dividende δ, de manière continue. L'évolution des actifs est alors donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} dS_t &= S_t((\mu - \delta)dt + \sigma dW_t) \\ dR_t &= R_t r dt \end{cases}$$

La formule fermée donnant le prix d'un call européen à tout instant t devient alors :

$$\Gamma_t(S) = S_t e^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

avec

$$\begin{cases} d_1 &= \dfrac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \delta + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$$

Notons que dans ce modèle, le phénomène de tombée de dividende est assez mal appréhendé puisque le paramètre supplémentaire qui intervient est un **taux de dividendes continu**, c'est-à-dire que l'on fait abstraction des dates de tombée et de leur fréquence. Néanmoins, remarquons dès à présent que cette hypothèse n'est pas réductrice dans la mesure où l'on s'intéresse ici à la valorisation d'options **européennes**, c'est-à-dire d'instruments que l'on ne peut pas décider d'exercer quand on le souhaite (par exemple juste avant la tombée d'un dividende...) Les dates de tombées de dividende n'influent donc pas sur la valeur de l'instrument à maturité.

En revanche, l'estimation du taux de dividende continu δ est quant à elle délicate[3].

Nous avons donc une formule fermée qui nous permet de valoriser un call de type européen. Cependant, en règle générale, les instruments financiers attribués dans le cadre de plans de stock-options ne sont pas de type européen. En réalité, ils ne sont pas américains non plus, au sens strict du terme, puisqu'ils ne sont généralement pas exerçables dès leur attribution, à cause de l'existence d'une période d'acquisition des droits pendant laquelle il n'est pas possible d'exercer. Ils s'en rapprochent tout de même fortement, puisqu'ils sont exerçables à tout moment entre la date d'acquisition des droits et la date d'arrivée à maturité, cette période représentant en général un intervalle de temps de plusieurs années.

Il est donc nécessaire de s'intéresser à la valorisation des instruments de type américain[4], ce que nous faisons ci-après, où nous présentons un modèle classique permettant de valoriser un call américain. Nous verrons qu'il sera ensuite facile d'adapter ce modèle au cas des stock-options.

[3]Voir à ce sujet la section 5.3.3 en page 52.

[4]Notons néanmoins que, dans certains cas, le modèle de Black & Scholes est utilisé, pour sa simplicité d'utilisation, pour valoriser des stock-options (donc des instruments non européens en général), le comportement d'exercice anticipé étant pris en considération par le biais de l'estimation d'une maturité "attendue", plus courte que la maturité contractuelle.

3.2.2 Le modèle binomial

Le modèle binomial standard est basé sur le modèle de Cox, Ross et Rubinstein [5] présenté ci-après. Ce modèle est un modèle discret : on cherche à valoriser une option américaine de type vanille sur un sous-jacent dont le rendement à chaque période ne peut prendre que deux valeurs : *up* ou *down*.

Présentation du modèle

Les données du modèle sont :

- l'évolution de la nature, représentée par un arbre à N périodes. L'état de la nature en n, $n \leqslant N$, résume l'information connue en n susceptible d'influencer le prix des titres.
- Les actifs :
  - un actif sans risque dont le rendement r ne dépend ni de la période, ni de l'état du monde,
  - une action dont le rendement entre la date n et la date $n+1$ peut soit être *up*, soit être *down* avec : $down < 1 + r < up$, cette dernière inégalité résultant de l'hypothèse d'A.O.A. sur le marché (voir la définition de l'A.O.A. en section 3.1.2, page 22).

Montrons que la relation $down < 1 + r < up$ est bien nécessaire pour satisfaire l'hypothèse d'A.O.A.

Supposons donc que l'hypothèse d'A.O.A est vérifiée et procédons par l'absurde :

⋆ si $1 + r > up$, la stratégie suivante :
  - à $t = 0$, on vend l'actif risqué à découvert et on place la somme S_0 dans l'actif sans risque,
  - à $t = N$, on rachète l'actif risqué, pour la somme S_N,

  permet de réaliser le profit : $S_0(1 + r)^N - S_N \geqslant S_0((1 + r)^N - up^N) > 0$ car $1 + r > up$. Ceci contredit l'hypothèse d'A.O.A.

⋆ De façon analogue, si $1 + r < down$, la stratégie suivante :
  - à $t = 0$, on emprunte la somme S_0 et on achète avec cette somme une unité d'actif risqué,
  - $t = N$, on rembourse l'emprunt et on revend l'actif risqué,

  permet de réaliser le profit : $S_N - S_0(1+r)^N \geqslant S_0(down^N - (1+r)^N) > 0$ car $1+r < down$. Ceci contredit l'hypothèse d'A.O.A.

L'inégalité $down < 1 + r < up$ est donc bien nécessaire.

Les évolutions des valeurs de l'action peuvent être représentées par le diagramme de la figure 3.1 en page 26.

Valorisation d'une option

On cherche donc à valoriser un call américain portant sur un sous-jacent S. Notons $\hat{S}_i$ la valeur actualisée de cet actif en 0 au pas de temps i. Sous la probabilité risque-neutre Q, qui existe et est unique puisque l'on a supposé le marché complet et l'A.O.A., le processus $\{\hat{S}_i\}_{0 \leqslant i \leqslant N}$ est une martingale sous Q, c'est-à-dire :

$$E_Q\left[\hat{S}_{i+1} | \mathcal{F}_i\right] = \hat{S}_i,$$

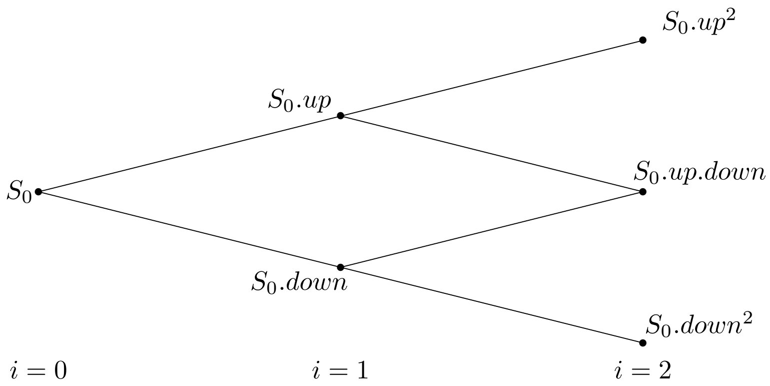

FIG. 3.1 – Arbre binomial à deux périodes.

ou encore, de manière équivalente :

$$E_Q\left[\frac{\hat{S}_{i+1}}{\hat{S}_i}|\mathcal{F}_i\right] = 1 \text{ car } \hat{S}_i \text{ est } \mathcal{F}_i\text{-mesurable.}$$

Or on a :

$$\frac{\hat{S}_{i+1}}{\hat{S}_i} = \frac{S_{i+1}}{S_i}e^{-rh}$$

où $h = \frac{T}{N}$ est le pas la durée d'un pas de temps dans l'arbre, ce qui permet d'écrire :

$$E_Q\left[\frac{S_{i+1}}{S_i}|\mathcal{F}_i\right] = e^{rh},$$

et donc :

$$E_Q\left[\frac{S_{i+1}}{S_i}\right] = E_Q\left[E_Q\left[\frac{S_{i+1}}{S_i}|\mathcal{F}_i\right]\right] = E_Q\left[e^{rh}\right] = e^{rh}.$$

Or, d'après le modèle binomial, on a $E_Q\left[\frac{S_{i+1}}{S_i}\right] = p \times up + (1-p) \times down$, d'où :

$$p = \frac{e^{rh} - down}{up - down}.$$

Cette formule constitue la première relation permettant de déterminer la valeur des paramètres p, up et $down$ de l'arbre des prix du sous-jacent.

Arrivés à ce point, il est nécessaire de préciser quelque peu la structure de cet arbre. Remarquons tout d'abord que le modèle implique qu'il existe $N+1$ nœuds finaux de l'arbre des prix, et que plus généralement, si l'on se place à l'instant $t = ih$, c'est-à-dire à la période i de l'arbre, le nombre j de nœuds est égal à $i+1$. Pour simplifier les notations à venir, nous supposons qu'à chaque période i, on numérote les nœuds correspondants de 1 à $i+1$ en partant du haut de l'arbre, de sorte que l'on puisse noter la valeur de l'action au $j^{\text{ème}}$ nœud de la $i^{\text{ème}}$ période (correspondant à l'instant $t = ih$) S_{ih}^j et qu'on ait :

$$\forall i \in [\![0, N]\!], \forall j \in [\![1, i+1]\!], \quad S_{ih}^j = S_0 up^{i+1-j} down^{j-1}.$$

Une fois ceci posé, la deuxième étape consiste à construire l'arbre des prix de l'option, dont la structure est identique à celui des prix du sous-jacent, en partant des $N+1$ nœuds finaux. A chaque nœud final j de cet arbre, la valeur de l'option est égale à :

$$C_T^j = \max(S_T^j - K, 0).$$

A la période précédente, la valeur de l'option à chaque nœud j est donnée par :

$$C_{(N-1)h}^j = e^{-rh} E_Q \left[C_T | S_{(N-1)h} = S_{(N-1)h}^j \right].$$

On construit ainsi l'arbre en remontant pas à pas jusqu'à arriver à l'unique nœud de la période 0, dont la valeur est la juste valeur du call à $t=0$ recherchée.

Il ne reste alors plus qu'à fixer les valeurs de *up* et *down* (notées dans la suite respectivement u et d) de façon à ce que la valeur de l'option sous le modèle binomial converge vers la formule fermée de Black & Scholes lorsque N tend vers l'infini. Une condition pour que cette convergence soit vérifiée est que l'espérance et la variance de $ln(\frac{S_T}{S_0})$ converge vers l'espérance et la variance de $ln(\frac{S_T}{S_0})$ lorsque N tend vers l'infini, ce qui s'exprime par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} N(p\ln(\frac{u}{d}) + \ln(d)) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mu T \\ Np(1-p)(\ln(\frac{u}{d}))^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sigma^2 T \end{cases}$$

où μ est le rendement de l'actif risqué et σ sa volatilité.

Il n'y a pas une unique manière de choisir ces paramètres. Nous avons ainsi vérifié que les jeux de paramètres suivants assurent une convergence de l'arbre, tout en respectant les hypothèses sous-jacentes au modèle :

$$\begin{cases} p &= \frac{e^{rh}-d}{u-d} \\ u &= e^{\sigma\sqrt{h}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{h}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p &= \frac{1}{2} \\ u &= e^{\mu h+\sigma\sqrt{h}} \\ d &= e^{\mu h-\sigma\sqrt{h}} \end{cases} \quad \text{avec } \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\begin{cases} p &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}} \\ u &= e^{\sigma\sqrt{h}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{h}} \end{cases} \quad \text{avec } \mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

Prise en compte des versements de dividende

Les modèles de valorisation présentés ci avant ne prennent pas en compte les versements de dividende dans la modélisation de l'évolution du cours de l'action sous jacente à l'option d'achat. Dans la mesure où la valorisation d'une option d'achat sur action repose principalement sur la modélisation du cours de l'action, et que ce cours est impacté de façon non négligeable par le versement de dividendes, la prise en compte des dividendes va impacter également la valeur de l'option.

Versement d'un dividende continu Nous supposons ici que les dividendes peuvent être versés continûment et représentés par un taux de rendement instantané Δ.

A chaque nœud, la valeur de l'action est modifiée par le versement de dividendes. Elle peut monter de $\tilde{u}$ avec une probabilité p, et vaut alors $S_{\tilde{u}} = \tilde{u}S$, ou descendre de $\tilde{d}$ avec une probabilité $1-p$ et vaut alors $S_{\tilde{d}} = \tilde{d}S$. En reprenant les notations de la section 3.2.2, on a toujours la relation :

$$E_Q\left[\frac{S_{i+1}}{S_i}\right] = e^{rh}.$$

En revanche, l'espérance s'écrit maintenant :

$$E_Q\left[\frac{S_{i+1}}{S_i}\right] = p\tilde{u} + (1-p)\tilde{d}.$$

On en déduit la nouvelle valeur de p :

$$p = \frac{e^{rh} - \tilde{u}}{\tilde{u} - \tilde{d}}.$$

La suite du raisonnement reste inchangée. Les formules des paramètres p, $\tilde{u}$ et $\tilde{d}$ qui permettent d'assurer la convergence du modèle vers la formule de Black & Scholes sont modifiées par la prise en compte du taux instantané de dividende Δ. On peut choisir de prendre les valeurs de paramètres suivantes :

$$\begin{cases} p &= \dfrac{e^{rh} - \tilde{d}}{\tilde{u} - \tilde{d}} \\ \tilde{u} &= e^{-\Delta h + \sigma\sqrt{h}} \\ d &= e^{-\Delta h - \sigma\sqrt{h}} \end{cases}$$

ou, en notant $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ [11] :

$$\begin{cases} p &= \dfrac{1}{2} \\ \tilde{u} &= e^{(\mu-\Delta)h + \sigma\sqrt{h}} \\ \tilde{d} &= e^{(\mu-\Delta)h - \sigma\sqrt{h}} \end{cases}$$

La formule d'évaluation de la valeur du call à chaque nœud de l'arbre est alors modifiée pour prendre en compte l'arbitrage du bénéficiaire qui vérifie à chacune des périodes i telles que $ih > T_e$ (puisqu'il ne peut y avoir d'exercice qu'à partir de la durée T_e) si exercer à cette date lui apporte une espérance de gain supérieure à la stratégie qui consiste à garder ses options plus longtemps[5].

A tous les nœuds j de ces périodes i telles que $ih > T_e$, la valeur du call vaut donc :

$$C_{ih}^j = \max(S_{ih}^j - K, e^{-rh} E_Q\left[C_{(i+1)h} | S_{ih} = S_{ih}^j\right]).$$

Versement d'un dividende discret Dans le cas de figure plus réaliste où les dividendes sont versés à des intervalles de temps discrets, appelons t_d la date de versement du premier dividende. Avant cette date, les nœuds de l'arbre sont inchangés. A la date t_d, le prix de l'action diminue du montant des dividendes, ce qui crée une discontinuité dans l'arbre. Puis l'arbre reprend sans versement de dividende jusqu'à la date de versement suivante. Les paramètres de l'arbre

[5]Cet arbitrage n'avait pas lieu d'être introduit dans le modèle sans versement de dividendes, car dans un tel modèle, la valeur temps d'une option est toujours positive, ce qui signifie que, d'un point de vue rationnel, un individu cherchant à maximiser son espérance de gain n'exercera ses options qu'à maturité. On voit ainsi qu'en l'absence de dividendes, un instrument américain a la même valeur qu'un instrument européen.

restent donc inchangés par rapport au cas sans dividende. La seule différence résultant de la prise en compte des dividendes consiste à introduire périodiquement une discontinuité dans la valeur de l'action, la tombée de dividende ayant un effet négatif mécanique sur cette dernière. La construction de l'arbre des prix de l'option se fait de manière identique au cas des dividendes continus : il faut prendre en compte, pendant la période d'exerçabilité, la possibilité que le bénéficiaire choisisse d'exercer son option à chaque date. On a donc exactement la même formule de calcul de la valeur du call à chaque nœud des périodes de l'arbre que dans le cas des dividendes continus (voir ci-dessus).

3.3 Spécificités des plans de stock-options

Les stock-options sont certes des options, mais elles possèdent quelques caractéristiques qui leur sont propres et qui peuvent conduire à une valeur de ces instruments assez éloignée de celle donnée par les modèles classiques d'évaluation d'options. De nombreux articles traitent de ces spécificités et de la manière d'en tenir compte dans les modèles de valorisation ; on peut citer par exemple le modèle de Hull & White [7].

Nous étudions ci-après le cas de deux facteurs supplémentaires à prendre en compte lorsque l'on valorise des stock-options : le comportement d'exercice des bénéficiaires et leur taux de rotation.

3.3.1 Les comportements d'exercice

Les termes "comportement d'exercice" recouvrent un ensemble de faits assez différents les uns des autres, mais ayant tous pour conséquence une différence entre la date théorique d'exercice d'une stock-option, telle que donnée par un modèle, et la date d'exercice observée de cette même stock-option dans le monde réel.

L'origine de cette différence est l'**incessibilité** des stock-options : en effet, un détenteur de stock-option ne se trouve pas dans la même situation qu'un agent pouvant acheter et vendre "librement" des options sur le marché ; il ne peut que les exercer, et non les revendre. On comprend alors pourquoi il peut exister des comportements d'exercice dit "anticipé" (et non optimal) des stock-options : la plupart des détenteurs de stock-options, qui sont des particuliers, peuvent être amenés à prendre une décision d'exercice non optimale en exerçant prématurément, parce que c'est le seul moyen :

1. de combler un besoin, à un moment donné, de liquidité, pour des raisons diverses (projet...) ;
2. de ne plus porter le risque : une anticipation de la baisse du sous-jacent alors que l'option est dans la monnaie entraîne alors l'exercice, puisque la vente est impossible.

La question est de savoir si l'on peut prendre en compte ces phénomènes dans les modèles de valorisation, et si oui, par quels moyens. Nous excluons dès à présent de notre analyse les modèles ne permettant de modéliser que des instruments de type européen.

Il est très difficile de prendre en compte les causes de type 1 ; cela nécessite de se placer dans un modèle micro-économique et de raisonner en termes de maximisation de l'utilité du bénéficiaire, ce qui pose le problème du choix de la fonction d'utilité. Nous n'explorons pas ici cette voie, et renvoyons le lecteur intéressé par ce type de modélisation à l'article [3] de Carpenter.

En revanche, les causes de type 2 peuvent, dans une certaine mesure seulement, être prises en compte dans un modèle comme le modèle binomial. En effet, on observe souvent, en matière d'exercice de stock-options, ce que l'on pourrait nommer une "barrière psychologique" déclenchant l'exercice anticipé. Plus précisément, ce phénomène est observé lorsque le cours du sous-jacent a très bien performé et que par conséquent les stock-options ont, à une date donné t de la période d'exerçabilité, une valeur très élevée. Les bénéficiaires semblent alors parfois considérer que leur gain ne pourra que diminuer entre les dates t et T, et ils exercent alors immédiatement leurs stock-options.

On peut tenter de modéliser ce phénomène dans le cadre du modèle binomial par l'introduction d'un prix-barrière du sous-jacent, dont le dépassement déclenche immédiatement l'exercice. Plusieurs définitions de cette barrière sont possibles ; nous choisissons de lui donner ici la forme classique d'un multiple du prix d'exercice de l'option :

$$cap = \alpha K, \quad \alpha > 1,$$

la condition sur α relevant du bon sens.

Ainsi, dans le cadre du modèle binomial présenté en section 3.2.2, on modifie la valeur du call à chaque nœud de manière à introduire cette barrière pour lui donner la forme suivante, pour un nœud j quelconque et une période i telle que $ih \in [T_e, T]$:

$$C_{ih}^j = \begin{cases} e^{-rh} E_Q \left[C_{(i+1)h} | S_{ih} = S_{ih}^j \right] & \text{si } S_{ih}^j \leqslant cap \\ \max(S_{ih}^j - K, 0) & \text{si } S_{ih}^j > cap \end{cases}$$

Ceci permet donc de prendre en compte une partie des phénomènes d'anticipation non rationnelle des bénéficiaires. Malheureusement, dans la pratique, estimer le niveau du paramètre α relève d'une gageure statistique.

3.3.2 Le taux de rotation

Nous avons déjà souligné en section 2.3.2, page 16, qu'en termes de taux de rotation des bénéficiaires, il était nécessaire de distinguer :

- le taux de rotation pendant la période d'acquisition des droits : celui-ci n'influe pas sur la juste valeur des instruments attribués mais seulement sur le nombre d'instruments qui seront exerçables, et donc sur la charge comptable du plan. Dans le contexte de valorisation de stock-options qui est celui du présent chapitre, ce paramètre n'est d'aucune utilité ;
- le taux de rotation pendant la période d'exerçabilité des stock-options : ce taux a une influence sur la juste valeur des instruments, et doit donc être pris en compte dans les modèles de valorisation.

Commençons par expliquer en quoi ce taux de rotation des bénéficiaires pendant la période d'exerçabilité des stock-options influe sur leur juste valeur, avant de voir comment il peut être inclus dans les modèles présentés ci-dessus. Notons dès à présent que la prise en compte de ce phénomène n'est possible que dans le cadre d'un modèle permettant de valoriser un instrument de type américain, et donc que le modèle de Black & Scholes n'est pas adapté à ce type d'hypothèse.

En règle générale, les plans de stock-options contiennent une clause précisant qu'en cas de départ de l'entreprise, le bénéficiaire doit alors exercer ses stock-options dans un délai de quelques jours après son départ. Ainsi, le départ d'un bénéficiaire conduit à un exercice anticipé de ses stock-options.

Le modèle binomial semble plus adapté à la prise en compte d'un taux de rotation pendant la période d'exerçabilité des instruments. Par souci de simplicité, nous considérons dans la suite le modèle binomial dans sa version la plus simple, à savoir dans laquelle l'actif risqué ne verse pas de dividende, mais on pourrait évidemment intégrer le taux de rotation dans les autres versions de ce modèle.

Concrètement, on pose ensuite f_{pv} le taux annuel de rotation des bénéficiaires pendant la période d'exerçabilité $[T_e, T]$, et on calcule la probabilité de sortie de l'entreprise entre deux périodes de l'arbre. Cette probabilité est indépendante de la période i à laquelle on se trouve, et elle vaut :

$$\forall i | ih \in [T_e, T], \quad p_{sortie} = 1 - p_{presence} = 1 - (1 - f_{pv})^h.$$

On peut alors adapter la formule de calcul du prix du call à chaque nœud de l'arbre tant que l'on se trouve dans la période d'exerçabilité (rappelons que l'on calcule ce prix à partir des nœuds terminaux de l'arbre et en remontant dans le temps), en remarquant qu'à chaque période i de la période d'exerçabilité des options, au $j^{\text{ème}}$ nœud, la valeur de l'option C_{ih}^j est égale à :

$$\begin{cases} e^{-rh} E_Q \left[C_{(i+1)h} | S_{ih} = S_{ih}^j \right] & \text{avec la probabilité } p_{presence} \\ \max(S_{ih}^j - K, 0) & \text{avec la probabilité } p_{sortie} \end{cases}$$

soit encore :

$$C_{ih}^j = p_{presence} e^{-rh} E_Q \left[C_{(i+1)h} | S_{ih} = S_{ih}^j \right] + p_{sortie} \max(S_{ih}^j - K, 0).$$

Ainsi, le modèle binomial permet de prendre en compte une hypothèse de taux de rotation des bénéficiaires pendant la période d'exerçabilité. Il n'en reste pas moins que l'estimation d'un taux annuel de rotation est chose ardue, essentiellement pour deux raisons. La première est que les bénéficiaires de stock-options sont en général peu nombreux, ce qui rend la constitution de données historiques statistiquement exploitables difficile sur le sujet ; la deuxième est le fait que ce taux doit être estimé à la date de valorisation des instruments, donc en général à la date de leur attribution, et qu'il est difficile à une entreprise de prévoir un taux de sortie qui reflète la réalité de l'entreprise sur une période débutant seulement dans plusieurs années et s'étendant sur plusieurs années ensuite... De plus, contrairement à l'hypothèse de taux de rotation pendant la période d'acquisition des droits, qui peut être revue à chaque clôture fiscale, l'hypothèse de taux de rotation pendant la période d'exerçabilité, parce qu'elle est incluse dans la juste valeur des options, n'est jamais revue dans le cas où elles sont dénoués en instruments de capitaux propres.

Chapitre 4

Valorisation de plans de stock-options à condition de performance

Dans tout ce chapitre, le terme de "condition de performance" est à prendre au sens plus restreint de "condition de de performance marché" au sens de la norme IFRS 2. Ces conditions de performance peuvent revêtir des formes très différentes, et par exemple impliquer plus d'un sous-jacent. Selon les caractéristiques des options et des conditions de performance, différents modèles peuvent être utilisés pour valoriser ces instruments.

4.1 Valorisation d'instruments européens soumis à condition de performance

4.1.1 Instruments portant sur un unique sous-jacent

Dès lors qu'une condition de performance existe, les instruments attribués ne peuvent plus être valorisés par la seule formule fermée de Black & Scholes. Il faut donc trouver d'autres méthodes. Les simulations de Monte-Carlo sont en général adaptées à ce type de cas. Commençons par justifier pourquoi.

Principe des simulations de Monte-Carlo

Les simulations de Monte-Carlo permettent de donner la valeur de tout instrument financier, à partir du moment où cette dernière peut s'exprimer sous la forme de l'espérance d'une variable aléatoire que l'on est capable de simuler.

Dans le cas général, on se donne une variable aléatoire X de loi $\mu(dx)$ et l'on cherche à réaliser, grâce à un ordinateur, une suite de tirages $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ a priori infinie telle que les X_n suivent la loi $\mu(dx)$ et que la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ soit une suite de variables aléatoires indépendantes. Si ces hypothèses sont satisfaites, on peut appliquer la loi forte des grands nombres pour affirmer que, si f est une fonction μ-intégrable :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(X_n) = \int f(x)\mu(dx).$$

Pour $f(x) = x$, on estime ainsi l'espérance de X.

Exemple

Appliquons cette méthode à un instrument de type stock-option européenne sur le sous-jacent S, mais qui n'est exerçable à la date T que si la variation de l'actif S entre les dates 0 et T est supérieur ou égal à un seuil α fixé.

On se place dans le cadre du modèle de Black & Scholes, dans lequel l'évolution de l'actif risqué S est la suivante :

$$\begin{cases} S_0 &= x \\ dS_t &= S_t(rdt + \sigma dW_t) \quad \forall t \in]0,T], \end{cases}$$

ce qui conduit à la forme explicite suivante de la valeur en t de cet actif :

$$S_t = x \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right).$$

D'après la définition de l'instrument, sa valeur C en 0 s'exprime comme suit :

$$C = e^{-rT} E\left[\max\left(0, S_T - K\right) \mathbf{1}_{\{\gamma(S_T) \geqslant \alpha\}}\right]$$

avec $\gamma(S_T) = \frac{S_T}{S_0} - 1$ et $S_T = x \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W_T\right)$. On est bien dans le cas où la valeur de l'instrument s'exprime comme l'espérance d'une variable aléatoire. Il ne reste donc qu'à simuler le mouvement brownien W_T pour pouvoir utiliser les simulations de Monte-Carlo pour estimer C.

Or par définition, $W_T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,T)$. Il suffit donc de savoir simuler une loi normale centrée réduite[1].

Pour ce faire, on simule deux variables aléatoires uniformes sur $]0,1[$ indépendantes, à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires [2]. On utilise ensuite la proposition suivante, dite de Box-Müller :

Proposition 4.1.
Soit $(U,V) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[^2}$ et (X,Y) définies par :

$$X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V) \text{ et } Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V).$$

Alors $(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_2)$.

Démonstration. Cette proposition est démontrée en Annexe B. □

Ainsi, on est capable de simuler des réalisations d'une variable aléatoire normale centrée réduite, et par suite d'estimer la valeur C de l'instrument : on simule n réalisations $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ d'une variable aléatoire normale centrée réduite, et on estime C par la formule suivante :

$$\hat{C} = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \max(0, S_T^i - K) \mathbf{1}_{\{\gamma(S_T^i) \geqslant \alpha\}}$$

[1] En effet, si Y est une variable aléatoire normale univariée centrée réduite et t un réel, alors $\sqrt{t} \cdot Y$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,t)$.

[2] En réalité, l'utilisation de la simple fonction *rand* sous C++ par exemple ne suffit pas à produire une série de nombres aléatoires strictement compris entre 0 et 1. La création d'un véritable générateur de nombres aléatoires est un problème assez complexe, mais plusieurs solutions existent ; on peut citer par exemple la méthode des congruences linéaires.

avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad S_T^i = x \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sqrt{T}\sigma\epsilon_i\right).$$

Reste à se poser la question de la précision de cette estimation. Le problème du nombre de simulations minimum à réaliser pour s'assurer que l'estimation du prix de l'option se trouve dans un intervalle de confiance d'amplitude donnée pose des problèmes théoriques complexes, que nous ne chercherons pas à résoudre ici. Nous nous contentons de donner un estimateur de l'écart-type de $\hat{C}$, qui est une mesure de l'erreur potentiellement commise.

Si l'on note $g(S_T)$ la fonction de S_T dont on cherche à approximer l'espérance en ayant recours aux simulations de Monte-Carlo, et si l'on note $\langle \ldots \rangle_n$ la moyenne empirique d'une série de n éléments, nous avons vu que l'estimateur de $E[g(S_T)]$ obtenu grâce à n simulations de Monte-Carlo est :

$$\hat{E}[g(S_T)] = \langle g(S_T) \rangle_n .$$

Un estimateur de l'écart-type de cet estimateur est :

$$\hat{\sigma}(\langle g(S_T) \rangle_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\langle g(S_T)^2 \rangle_n - \langle g(S_T) \rangle_n^2}.$$

Ceci signifie que la convergence de l'estimateur de l'espérance de $g(S_T)$ obtenu à partir des simulations de Monte-Carlo est une convergence en $\frac{1}{\sqrt{n}}$, c'est-à-dire une convergence lente. Il est donc primordial d'utiliser un très grand nombre de simulations (de l'ordre de plusieurs centaines de milliers) pour s'assurer de la fiabilité de l'estimation.

On peut ainsi valoriser des instruments européens portant sur un unique sous-jacent, même dans le cas où ils sont soumis à des conditions de performance.

4.1.2 Instruments portant sur plus d'un sous-jacent

Dans le cas d'instruments de type européens portant sur plusieurs sous-jacents, plusieurs modèles sont possibles. Dans de rares cas, on peut trouver une formule fermée donnant la valeur des instruments en se plaçant dans le cadre du modèle de Black & Scholes.

Pour tous les autres instruments européens portant sur au moins deux sous-jacents, pour lesquels on ne sait pas donner une formule fermée de leur valeur, on recourt alors de nouveau aux simulations de Monte-Carlo, très adaptées au caractère européen des instruments.

Cas dans lesquels une formule fermée existe

Dans la plupart des plans de stock-options soumis à une condition de performance faisant intervenir deux actifs (celui de la société plus un autre), l'autre actif est un indice boursier représentant le secteur d'activité de la société, ou l'action d'un concurrent direct. Prenons le cas d'un plan de stock-options attribué à la date $t = 0$ et soumis à la condition de performance suivante : à la maturité T, le *pay-off* P des options est égal à :

$$P = \max(0, \min(S_X, S_Y) - K),$$

où S_X et S_Y sont les valeurs en $t = T$ respectivement de l'action de la société émettrice X et d'un indice sectoriel Y dont le cours en $t = 0$ a été normalisé de manière à ce que les valeurs de X et de Y en $t = 0$ soient égales[3], et K le prix d'exercice de l'option.

[3]Ceci se fait très simplement : si l'on note S_X^0 et $S_Y^{\star,0}$ les valeurs respectives en $t = 0$ du titre de la société émettrice et de l'indice sectoriel retenu, on n'a qu'à définir S_Y^0, la valeur de l'indice sectoriel normalisé en 0, comme

Ce cas correspond à un plan dans lequel les bénéficiaires sont rémunérés suivant l'évolution du cours de leur société, tout en étant plafonné par l'évolution générale du secteur d'activité dans lequel ils évoluent. Tentons de valoriser cet instrument.

Pour cela, exprimons autrement le *pay-off* P de cet instrument :

$$\begin{aligned} P &= \max(0, \min(S_X, S_Y) - K) \\ &= \max(0, S_X - K) + \max(0, S_Y - K) - \max(0, \max(S_X, S_Y) - K) \\ &= \underbrace{\max(0, S_X - K)}_{A} + \underbrace{\max(0, S_Y - K)}_{B} - \underbrace{\max(S_X, S_Y, K)}_{C} + \underbrace{K}_{D} \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que cet instrument peut être vu comme une combinaison d'achat et de vente en $t = 0$ de quatre instruments différents :

- achat d'un call de maturité T sur l'action de la société émettrice du plan (*pay-off* A),
- achat d'un call de maturité T sur l'indice sectoriel normalisé (*pay-off* B),
- vente d'un instrument délivrant à la maturité T le maximum entre les deux actifs risqués et un montant fixe de *cash* (*pay-off* C),
- l'emprunt de la valeur actuelle du prix d'exercice de l'option (*pay-off* D).

On connaît, d'après la formule de Black & Scholes, la valeur en $t = 0$ des instruments donnant les *pay-off* A et B (voir la formule de Black & Scholes en section 3.2.1, page 23), et le calcul de la valeur de l'instrument payant D est immédiat.

En notant $r = 1 + v$ où v est le taux sans risque, μ_X et μ_Y les rendements respectifs de l'action de la société X et de l'indice sectoriel normalisé Y, σ_X et σ_Y leur volatilité respective, ρ le coefficient de corrélation entre les deux titres, $A^\star, B^\star, C^\star, D^\star$ les valeurs en 0 des instruments donnant les *pay-off* A, B, C, D, et $P^\star$ la valeur en 0 d'une des options attribuées, on peut déjà écrire :

$$\begin{aligned} P^\star &= A^\star + B^\star - C^\star + D^\star \\ A^\star &= \Gamma_T(S_X) \\ B^\star &= \Gamma_T(S_Y) \\ D^\star &= \frac{K}{r^T} \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer $C^\star$, ce qui est moins immédiat. On part de l'expression de $C^\star$ suivante, vraie sous la probabilité risque-neutre Q :

$$C^\star = r^{-T} E_Q[\max(S_X, S_Y, K)]$$

que l'on peut aussi exprimer sous la forme intégrale suivante :

$$C^\star = r^{-T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \max(S_X^0 e^x, S_Y^0 e^y, K) f(x, y) dx dy$$

avec S_X^0 et S_Y^0 les valeurs des actions des sociétés X et Y en 0,

$$x = \frac{S_X}{S_X^0} \quad \text{et} \quad y = \frac{S_Y}{S_Y^0}.$$

La fonction $f(x, y)$ est quant à elle la densité de la loi normale bivariée centrée réduite, et s'exprime ainsi :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y T\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{-u}{2}\right),$$

suit :

$$S_Y^0 = \alpha S_Y^{\star,0}, \quad \alpha = \frac{S_X^0}{S_Y^{\star,0}}.$$

avec :

$$u = \frac{\frac{(x-\mu_X T)^2}{\sigma_X^2 T} - 2\rho\frac{(x-\mu_X T)(y-\mu_Y T)}{\sigma_X \sigma_Y T} + \frac{(y-\mu_Y T)^2}{\sigma_Y^2 T}}{1-\rho^2}.$$

On conclut en décomposant l'intégrale double en fonction des trois cas possibles à la date T :

- S_X est supérieur à S_Y et à K (cas 1),
- S_Y est supérieur à S_X et à K (cas 2),
- K est supérieur à S_X et à S_Y (cas 3).

On obtient alors la valeur de $C^\star$ suivante :

$$\begin{aligned}
C^\star &= \underbrace{S_X^0 r^{-T} \int_{\ln(\frac{K}{S_X^0})}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{x-\ln(\frac{S_Y^0}{S_X^0})} f(y|x)dy \right] e^x f(x)dx}_{\text{cas 1}} \\
&+ \underbrace{S_Y^0 r^{-T} \int_{\ln(\frac{K}{S_Y^0})}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{y-\ln(\frac{S_X^0}{S_Y^0})} f(x|y)dx \right] e^y f(y)dy}_{\text{cas 2}} \\
&+ \underbrace{K r^{-T} \int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S_X^0})} \left[\int_{-\infty}^{\ln(\frac{K}{S_Y^0})} f(y|x)dy \right] f(x)dx}_{\text{cas 3}}
\end{aligned}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & \frac{1}{\sigma_X T\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-v_X^2}{2}\right) \\ v_X & = & \frac{x-\mu_X T}{\sigma_X \sqrt{T}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(y) & = & \frac{1}{\sigma_Y T\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-v_Y^2}{2}\right) \\ v_Y & = & \frac{y-\mu_Y T}{\sigma_Y \sqrt{T}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x|y) & = & \frac{1}{\sigma_X^2 T\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{-w_X}{2}\right) \\ w_X & = & \dfrac{((x-\mu_X T) - \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y T))^2}{(1-\rho^2)\sigma_X^2 T} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(y|x) & = & \frac{1}{\sigma_Y^2 T\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left(\frac{-w_Y}{2}\right) \\ w_Y & = & \dfrac{((y-\mu_Y T) - \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X T))^2}{(1-\rho^2)\sigma_Y^2 T} \end{array} \right.$$

Ainsi, puisque les trois intégrales ci-dessus sont exprimables en fonction de répartition des lois normales univariées et bivariées, toutes les composantes de la valeur en 0 des options attribuées sont exprimables par une formule fermée ; on est donc en mesure de donner la juste valeur exacte de ces instruments.

Simulations de Monte-Carlo

Dans de très nombreux autres cas, on ne peut pas trouver de formule fermée donnant la valeur d'un instrument de type optionnel européen portant sur plus d'un actif ; on a alors recours aux simulations de Monte-Carlo. Nous nous bornons ici à présenter le cas d'un instrument portant sur deux sous-jacents. Cependant la généralisation théorique des méthodes présentées ci-après au cas de valorisation d'instruments portant sur plus de deux actifs ne présente pas de difficulté particulière.

On se place, comme dans la section 4.1.1, dans le cadre du modèle de Black & Scholes, à ceci près que l'on introduit un deuxième actif risqué, corrélé au premier avec un coefficient de corrélation ρ. De même que ci-dessus, le problème se résume à la simulation de deux mouvements browniens standards corrélés, le coefficient de corrélation ρ étant celui des deux actifs simulés.

Pour tout instant t, notons S_t^a et S_t^b la valeur en t des deux actifs corrélés. De plus, notons μ_a et μ_b le rendement des actifs a et b, σ_a et σ_b leurs volatilités respectives, et ρ leur coefficient de corrélation. On se place à $t = 0$ et on cherche à évaluer à cet instant la valeur d'un instrument de type européen, de maturité T, payant à maturité S_T^a sous la condition : $S_T^a \geqslant \alpha S_T^b$, avec α fixé supérieur à 1.

La valeur Λ de cet instrument en $t = 0$ peut s'exprimer comme suit, sous la probabilité risque-neutre Q :

$$\Lambda = e^{-rT} E_Q \left[S_T^a \mathbf{1}_{\{S_T^a \geqslant \alpha S_T^b\}} \right].$$

Λ étant exprimé sous la forme d'une espérance, on se trouve bien dans le cadre d'application de simulations de Monte-Carlo. Puisque de plus on peut exprimer S_T^a et S_T^b ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_T^a & = & S_0^a \exp\left(\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2}\right) T + \sqrt{T} V_a\right) \\ S_T^b & = & S_0^b \exp\left(\left(\mu_b - \frac{\sigma_b^2}{2}\right) T + \sqrt{T} V_b\right) \end{array} \right.$$

où $(V_a, V_b) \hookrightarrow \mathcal{N}(0_2, \Sigma)$ avec :

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & \rho\sigma_a\sigma_b \\ \rho\sigma_a\sigma_b & \sigma_b^2 \end{pmatrix}$$

il s'agit donc de simuler un grand nombre de réalisations du couple (V_a, V_b). Pour ce faire, on utilise la décomposition de Cholesky de Σ, qui, en tant que matrice de variance-covariance, est symétrique définie positive.

Rappelons ce qu'est la décomposition de Cholesky d'une matrice :

Proposition 4.2.
Soit M une matrice symétrique définie positive de dimension d.

(i) Il existe U, une matrice triangulaire supérieure et D, une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont positifs, tels que :

$$M = {}^tUDU$$

ou encore, en notant $C = \sqrt{D}U$:

$$M = {}^tCC$$

Cette dernière décomposition est appelée décomposition de Cholesky de M.

(ii) Si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_d)$, alors $X = {}^tCY \hookrightarrow \mathcal{N}(0, M)$.

Dans le cas présent, la décomposition de Cholesky de la matrice Σ est la suivante :

$$\Sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ \rho\sigma_b & \sigma_b\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}}_{{}^tC} \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_a & \rho\sigma_b \\ 0 & \sigma_b\sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}}_{C}$$

On simule donc n réalisations d'un vecteur gaussien Y suivant une loi $\mathcal{N}(0_2, I_2)$ grâce à la formule de Box-Müller présentée plus haut, ce qui nous donne n couples $(\epsilon_{1,i}, \epsilon_{2,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réalisations du vecteur Y, et on obtient, par application du (ii) de la proposition 4.2, n réalisations $(v_{a,i}, v_{b,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ du couple $(V_a, V_b) = {}^tCY$, de sorte que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left\{ \begin{array}{lcl} v_{a,i} & = & \sigma_a \epsilon_{1,i} \\ v_{b,i} & = & \sigma_b(\rho\, \epsilon_{1,i} + \sqrt{1-\rho^2}\, \epsilon_{2,i}) \end{array} \right.$$

Enfin, on estime Λ par la formule suivante :

$$\hat{\Lambda} = e^{-rT} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_T^{a,i} \mathbf{1}_{\{S_T^{a,i} \geqslant \alpha S_T^{b,i}\}}$$

avec :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left\{ \begin{array}{lcl} S_T^{a,i} & = & S_0^a \exp\left(\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2}\right) T + \sqrt{T} v_{a,i}\right) \\ S_T^{b,i} & = & S_0^b \exp\left(\left(\mu_b - \frac{\sigma_b^2}{2}\right) T + \sqrt{T} v_{b,i}\right) \end{array} \right.$$

Ainsi, les simulations de Monte-Carlo constituent un outil puissant de valorisation d'instruments européens soumis à des conditions de performance, quel que soit le nombre de sous-jacents sur lesquels portent ces conditions.

4.2 Valorisation d'instruments américains soumis à condition de performance

4.2.1 Instruments portant sur un unique sous-jacent

Dans le cas d'un instrument de type américain portant sur un unique sous-jacent, le modèle binomial peut encore être appliqué pour effectuer la valorisation, et l'adaptant légèrement ainsi que détaillé ci-après.

L'attribution de stock-options soumises à une condition de performance portant uniquement sur le titre boursier de la société émettrice est fréquente. Les conditions prennent dans la plupart des cas l'une des deux formes suivantes :

- soit l'option n'est exerçable que si, entre la date d'attribution et la date d'exercice, le rendement du titre de la société entre ces deux dates est supérieur à un seuil fixé ;
- soit elle n'est exerçable que si le cours à la date d'exercice est supérieur à un cours-cible fixé.

On remarque que ces conditions peuvent aisément être introduites dans le modèle binomial de valorisation. En effet, on a vu en section 3.2.2 (voir pages 25 et suivantes) que pour valoriser l'option, on s'appuyait sur l'arbre représentant l'évolution des prix du sous-jacent ; ainsi, à chaque nœud de l'arbre des prix de l'option, quelle que soit la période de l'arbre où l'on se trouve, on connaît l'intégralité de l'arbre des prix du sous-jacent.

Prenons un exemple, et précisons comment prendre en compte une condition de performance du type : l'option n'est exerçable que si, à la date d'exercice, le cours du sous-jacent est supérieur à un cours-cible noté S_{Cible}. Pour cela, on se replace dans le cadre du modèle binomial sans versement de dividendes[4], et on reprend toutes les notations associées. On adapte alors simplement le calcul de la valeur de l'option en introduisant dans le *pay-off* de l'option une indicatrice permettant de prendre en compte la condition de performance. Plus précisément :

[4] L'adaptation au cas où des dividendes sont versés ne pose pas de problème particulier.

– à tous les nœuds terminaux de l'arbre, la valeur de l'option devient :

$$C_T^j = \max(S_T^j - K, 0)\mathbf{1}_{\{S_T^j \geqslant S_{Cible}\}},$$

– et à tous les nœuds j des périodes i pendant lesquelles a lieu une tombée de dividende, cette valeur devient :

$$C_{ih}^j = \max((S_{ih}^j - K)\mathbf{1}_{\{S_{ih}^j \geqslant S_{Cible}\}}, e^{-rh}E_Q\left[C_{(i+1)h}|S_{ih} = S_{ih}^j\right]).$$

Il est clair que dans le cas d'une condition de performance plus "exotique", comme par exemple la nécessité d'atteindre divers seuils successifs sur des périodes données, l'expression de la valeur de l'option se complique, mais on est toujours à même de valoriser cette dernière en adaptant le modèle binomial.

4.2.2 Instruments portant sur deux sous-jacents

Le modèle quadrinomial

Le modèle quadrinomial de Rubinstein[9] est une version plus générale du modèle d'arbre binomial classique : au lieu de décomposer pas à pas l'évolution du prix d'une action à l'aide d'un arbre à 2 dimensions, on décompose pas à pas l'évolution conjointe des prix d'une action S_1 et d'une action S_2, corrélées entre elles, à l'aide d'un arbre à 3 dimensions.

L'arbre binomial classique présenté ci-dessus est ainsi remplacé par un arbre à 3 dimensions représentée par une pyramide à base carrée (voir figure 4.1).

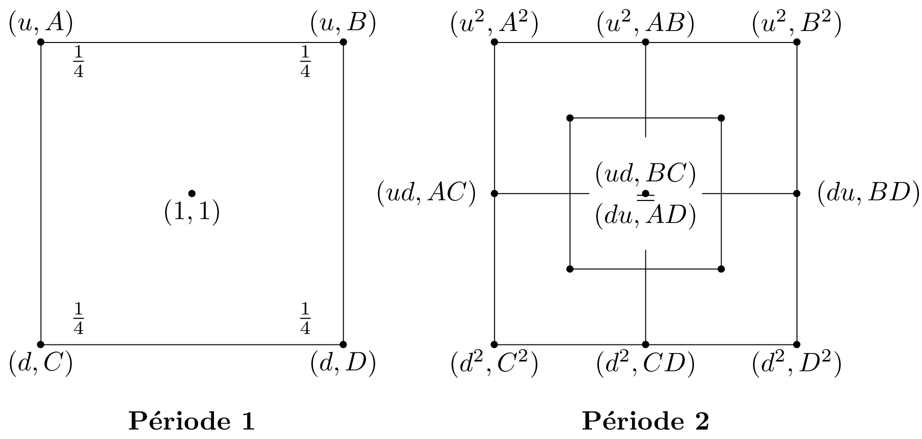

FIG. 4.1 – Arbre quadrinomial à deux périodes.

La modélisation de l'évolution conjointe des prix des actions S_1 et S_2 est la suivante : à chaque pas :

– l'action S_1 peut monter de u ou descendre de d avec probabilité $\frac{1}{2}$,
– si l'action S_1 a monté de u, le prix de l'action S_2 peut être multiplié par A ou par B avec probabilité $\frac{1}{2}$,
– si l'action S_1 a descendu de d, le prix de l'action S_2 peut être multiplié par C ou par D avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Au final, à chaque pas, il y a 4 évolutions conjointes possibles : (uA, uB, dC, dD), chacune avec une probabilité $\frac{1}{4}$. Le fait que le niveau d'évolution de l'action S_2 (A ou B si S_1 monte, C ou D si S_1 descend) dépende de l'évolution de l'action S_1 permet de prendre en compte la corrélation entre les deux actions.

Dans son article, Rubinstein détermine les valeurs des paramètres u, d, A, B, C, D qui permettent de faire le lien avec les caractéristiques des 2 actions : le taux sans risque : r, le taux de versement continu[5] des dividendes de l'action S_1 : d_1, le taux de versement de dividendes de l'action S_2 : d_2, le coefficient de corrélation entre les 2 actions : ρ, la volatilité de l'action S_1 : σ_1, la volatilité de l'action S_2 : σ_2.

Les paramètres obtenus sont les suivants, en notant T la maturité de l'instrument à valoriser, N le nombre de périodes de l'arbre quadrinomial et $h = \frac{T}{N}$ le pas de temps dans l'arbre :

$$\begin{cases} p &= \frac{1}{4} \\ \nu_1 &= r - d_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 \\ \nu_2 &= r - d_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 \\ u &= e^{\nu_1 h + \sigma_1\sqrt{h}} \\ d &= e^{\nu_1 h - \sigma_1\sqrt{h}} \\ A &= e^{\nu_2 h + \sigma_2\sqrt{h}(\rho + \sqrt{1-\rho^2})} \\ B &= e^{\nu_2 h + \sigma_2\sqrt{h}(\rho - \sqrt{1-\rho^2})} \\ C &= e^{\nu_2 h - \sigma_2\sqrt{h}(\rho + \sqrt{1-\rho^2})} \\ D &= e^{\nu_2 h - \sigma_2\sqrt{h}(\rho - \sqrt{1-\rho^2})} \end{cases}$$

Dans le cas général, si l'on suppose que l'instrument est une option d'achat de type américain, dont le sous-jacent est le titre S_1 (le titre S_2 n'intervenant que dans la condition de performance) et la période d'exerçabilité $[T_e, T]$, et si l'on note :

$$\mathscr{C} = \{(S_{1,t}, S_{2,t}) | \Phi\left((S_1)_{0\leqslant i\leqslant t}, (S_2)_{0\leqslant i\leqslant t}, t\right) \geqslant \Psi\left((S_1)_{0\leqslant i\leqslant t}, (S_2)_{0\leqslant i\leqslant t}, t\right)\}$$

l'ensemble des couples de valeurs prises par les variables S_1 et S_2 à la date t permettant la réalisation de la condition de performance à laquelle est soumise cette option[6], alors la valeur de cet instrument se calcule comme dans le cas du modèle binomial, à savoir en partant des nœuds terminaux de l'arbre des prix de l'instrument (qui a la même structure que celui des prix des deux actifs S_1 et S_2) et en remontant dans l'arbre jusqu'à son origine.

La valeur de l'instrument est alors donnée, à chacun des nœuds (j, k) d'une période de l'arbre donnée, par les formules suivantes, en fonction de la période à laquelle on se trouve :

– à la dernière période N, l'option vaut :

$$C_T^{j,k} = \max(S_{1,T}^{j,k} - K, 0)\mathbf{1}_{\{(S_{1,T}^{j,k}, S_{2,T}^{j,k}) \in \mathscr{C}\}},$$

– aux périodes i telles que $ih \in [T_e, T[$, elle vaut :

$$C_{ih}^{j,k} = \max((S_{ih}^{j,k} - K)\mathbf{1}_{\{(S_{1,ih}^{jk}, S_{2,ih}^{j,k}) \in \mathscr{C}\}}, e^{-rh} E_Q[C_{(i+1)h} | S_{1,ih} = S_{1,ih}^{j,k}, S_{2,ih} = S_{2,ih}^{j,k}]),$$

[5]La prise en compte du versement de dividendes discrets se ferait facilement en appliquant la même méthode que celle décrite dans le cadre du modèle binomial (se référer à la section 3.2.2, page 27).

[6]En règle générale, les fonctions Φ et Ψ sont relativement simples ; par exemple, si la condition de performance consiste à avoir, à la date t d'exercice, un rendement de l'actif S_1 supérieur de α% à celui de l'actif S_2 sur la période $[0, t]$, on a :

$$\begin{cases} \Phi\left((S_1)_{0\leqslant i\leqslant t}, (S_2)_{0\leqslant i\leqslant t}, t\right) &= \dfrac{S_{1,t} - S_{1,0}}{S_{1,0}} \\ \Psi\left((S_1)_{0\leqslant i\leqslant t}, (S_2)_{0\leqslant i\leqslant t}, t\right) &= (1+\alpha) \times \dfrac{S_{2,t} - S_{2,0}}{S_{2,0}} \end{cases}$$

– et aux périodes i' telles que $i'h < T_e$, elle vaut :

$$C_{i'h}^{j,k} = e^{-rh} E_Q[C_{(i'+1)h} | S_{1,i'h} = S_{1,i'h}^{j,k}, S_{2,i'h} = S_{2,i'h}^{j,k}].$$

L'avantage du modèle quadrinomial réside dans sa capacité, héritée du modèle binomial sur lequel il est fondé, à prendre en compte les comportements d'exercice anticipé “non rationnels” (cf. section 3.3.1 page 29) ainsi que le taux de rotation pendant la période d'exerçabilité des options (cf. section 3.3.2 page 30).

Si l'on reprend l'exemple générique précédent, dans le cas où une barrière psychologique d'exercice *cap* (qui, rappelons-le, est exprimée comme un multiple du strike) et un taux de rotation des bénéficiaires pendant la période d'exerçabilité des options ξ ont pu être estimés, la valeur de l'option reste la même en dernière période de l'arbre ainsi qu'aux périodes i' telles que $i'h < T_e$, mais devient, pour toutes les périodes i telles que $ih \in [T_e, T[$:

$$\begin{aligned} C_{ih}^{j,k} \quad = \quad & \left(\max(S_{1,ih}^{j,k} - K, 0) \mathbf{1}_{\{(S_{1,ih}^{jk}, S_{2,ih}^{j,k}) \in \mathscr{C}\}} \right) \mathbf{1}_{\{S_{1,ih}^{jk} > cap.K\}} \\ & + \Big(e^{-rh} E_Q[C_{(i+1)h} | S_{1,ih} = S_{1,ih}^{j,k}, S_{2,ih} = S_{2,ih}^{j,k}](1-\xi)^h \\ & \quad + \max(S_{1,ih}^{j,k} - K, 0)(1 - (1-\xi)^h) \mathbf{1}_{\{(S_{1,ih}^{jk}, S_{2,ih}^{j,k}) \in \mathscr{C}\}} \Big) \mathbf{1}_{\{S_{1,ih}^{jk} \leqslant cap.K\}} \end{aligned}$$

Remarques

1. En fixant la période d'indisponibilité de l'instrument égale à sa durée de vie, on se ramène à la valorisation d'un instrument de type européen. Le modèle quadrinomial peut donc aussi être utilisé pour valoriser ce type d'instrument. Nous présentons à ce sujet en section 4.3 une étude de la convergence empirique du modèle quadrinomial et des simulations de Monte-Carlo dans le cas de la valorisation d'un instrument de type européen portant sur deux sous-jacents.

2. L'arbre des prix des titres S_1 et S_2, comme celui des prix de l'option étant tridimensionnel, le nombre de nœuds en fonction du nombre de périodes de l'arbre est en N^3, c'est-à-dire très vite[7] ! Cela peut entraîner une limitation du nombre de période en fonction des capacités informatiques disponibles. Or pour valoriser correctement un instrument, il faut un nombre de période par an suffisamment grand. Ainsi, la limitation du nombre de périodes de l'arbre entraîne une décroissance de la fiabilité de ce modèle lorsque la maturité des instruments devient grande.

3. Notons enfin que ce modèle est adapté pour modéliser deux actifs corrélés, mais qu'il n'est pas utilisable pour modéliser l'évolution conjointe d'un nombre plus important d'actifs corrélés entre eux : si cela est évidemment possible en théorie, les problèmes pratiques soulevés (en termes de représentation de l'arbre, mais surtout en terme de temps de calcul) font d'une généralisation de ce modèle à un grand nombre d'actifs une entreprise vouée à l'inutilité.

   C'est pourquoi, dans le cas où les conditions de performances portent sur un panier d'actifs, les simulations de Monte-Carlo constituent l'unique ressource de valorisation de tels

[7]Le nombre de nœuds par période i de l'arbre est égal à $(1+i)^2$. Le nombre total de nœuds pour un arbre de N périodes est donc :

$$\sum_{i=0}^{N} (1+i)^2 = \sum_{i=1}^{N+1} i^2 = \frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6} \sim \frac{N^3}{3}.$$

instruments financiers, en posant au préalable une hypothèse de maturité attendue pour rendre l'instrument européen, ce qui entraîne tout de même un biais sur sa valeur (voir la section 5.4 pour un exemple numérique).

Pour être tout à fait complets, précisons cependant qu'à ce jour, il existe des méthodes basées sur les simulations de Monte-Carlo pour valoriser des instruments américains. Ces méthodes sont complexes, et nous n'avons pas inclus leur étude dans ce mémoire. Nous renvoyons le lecteur intéressé par ces méthodes à l'article de Stentoft [10] pour un état de l'art en la matière ainsi qu'une présentation détaillée de la méthode LSM (Least Square Monte-Carlo).

4.3 Convergence des deux modèles

Nous avons remarqué dans la section précédente que dans le cas où l'on fixait la durée d'indisponibilité T_e d'un instrument américain égale à la maturité T, celui-ci devenait européen. Ce type d'instrument peut donc être utilisé pour vérifier que le modèle quadrinomial et les simulations de Monte-Carlo donnent des valeurs comparables de ce type d'instrument[8].

Prenons donc le cas d'une option d'achat européenne portant sur un sous-jacent S et étant soumise à la condition de performance suivante : à la maturité de l'option, celle-ci n'est exerçable que si la valeur du sous-jacent à cette date est supérieure à 10% de celle d'un indice sectoriel normalisé S_i à la même date. Les caractéristiques de S, S_i et de l'option sont les suivantes :

- Caractéristiques de S :
  Cours spot : 100€
  Volatilité : 55%
- Caractéristiques de S_i :
  Cours spot : 100€
  Volatilité : 35%
- Caractéristiques de l'option :
  Strike : 100€
  Maturité : 1 an
  Taux sans risque : 4.5%

On suppose de plus que le coefficient de corrélation entre S et S_i est stable dans le temps et vaut 70%.

Dans un premier temps, nous vérifions la convergence des résultats donnés par les deux modèles (simulations de Monte-Carlo et modèle quadrinomial) lorsque le nombre de simulations et de pas (respectivement pour les simulations de Monte-Carlo et le modèle quadrinomial) augmentent. Les figures 4.2 et 4.3 en page 44 donnent les valeurs des stock-options obtenus par les deux méthodes.

Il apparaît clairement que les simulations de Monte-Carlo donnent des résultats beaucoup plus stables que ceux obtenus à partir du modèle quadrinomial. Dans cet exemple, la probabilité d'atteinte de la condition de performance est relativement forte, ce qui explique que même un petit nombre de simulations (100 000 tout de même) suffisent pour atteindre une bonne estimation de la valeur de l'option, ce que montre la figure 4.2. En revanche, la figure 4.3 illustre

[8] Nous ne parlons pas de convergence au sens mathématique du terme, qui n'a aucun sens ici ; nous nous plaçons dans une démarche pratique, et il s'agit de voir si, pour un type d'instrument donné, les résultats obtenus par deux modèles différents sont suffisamment proches pour que l'on puisse utiliser indifféremment l'un ou l'autre.

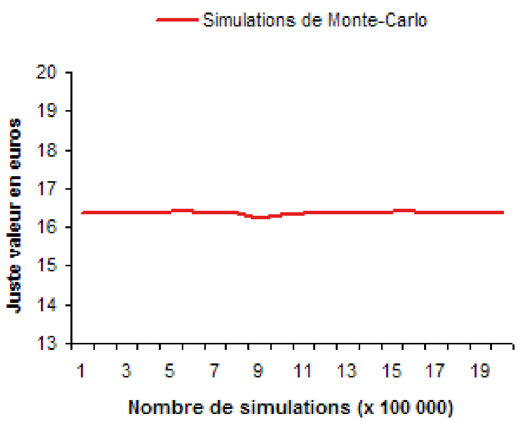

FIG. 4.2 – Valeurs obtenues par des simulations de Monte-Carlo.

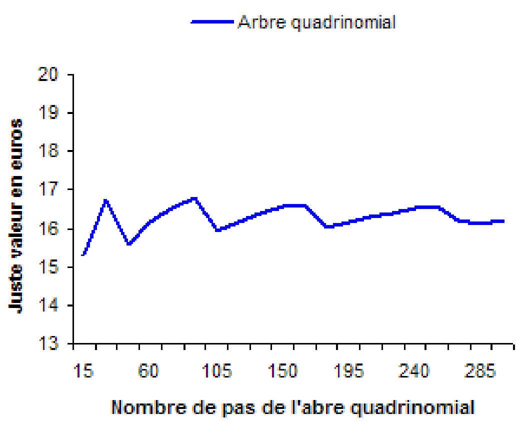

FIG. 4.3 – Valeurs obtenues par le modèle quadrinomial.

le fait que la convergence du modèle quadrinomial est plus lente. Le nombre de période de l'arbre est donc un paramètre très sensible[9].

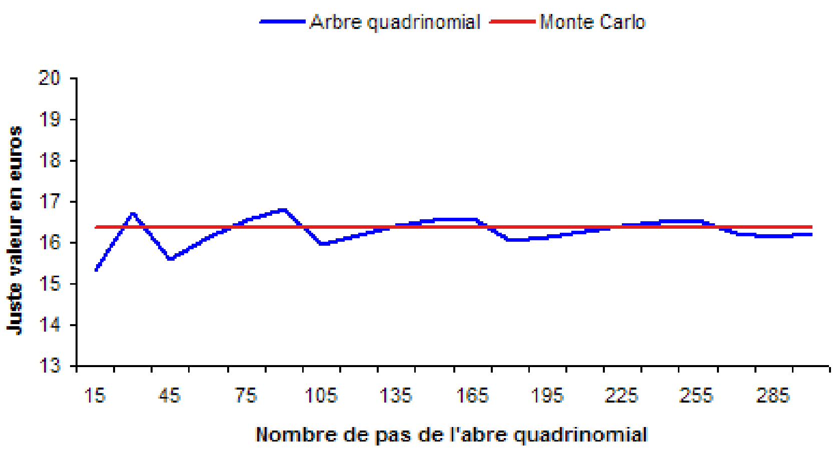

FIG. 4.4 – Prix de l'option en fonction du nombre de pas de l'arbre quadrinomial

Cependant, la figure 4.4 montre que les résultats obtenus par les deux modèles sont relativement proches. Sur cette figure, nous prenons comme benchmark la valeur des options obtenue avec 2 millions de simulations de Monte-Carlo, et étudions l'évolution des valeurs obtenues par le modèle quadrinomial en faisant varier le nombre de périodes de l'arbre. Il apparaît qu'au-delà de 100 périodes, l'écart relatif entre les résultats données par le modèle quadrinomial et les simulations de Monte-Carlo est en moyenne égal à 0.31%. On peut donc conclure à une convergence "empirique" des deux modèles sur cet exemple.

Nous avons effectué plusieurs autres tests en faisant varier les paramètres les uns après les autres (sauf la maturité de l'option), et avons obtenus des résultats similaires. En revanche, lorsque l'on allonge la maturité, les résultats du quadrinomial ne "convergent" plus aussi bien vers ceux des simulations de Monte-Carlo. Ceci s'explique par le fait que le nombre de périodes

[9]Notons à ce propos que 300 est le nombre maximal de périodes pour lequel il nous a été possible de construire l'arbre quadrinomial, pour des raisons de limitations informatiques.

de l'arbre est limité par les capacités informatiques à notre disposition[10] : ainsi, pour un nombre de période de l'arbre fixé, plus la maturité de l'option est grande, plus les périodes de l'arbre sont longues, et moins l'arbre parvient à décrire de manière satisfaisante l'évolution des valeurs des deux actifs risqués.

[10] Le nombre de période de l'arbre quadrinomial était limité à 300, ce qui a permis d'obtenir une différence de justes valeurs obtenues par l'utilisation de l'arbre quadrinomial et des simulations de Monte-Carlo inférieure à 5% (sur des options vanilles européennes) tant que leur maturité était inférieure ou égale à 5 ans.

Chapitre 5

Mise en œuvre des modèles

Cette partie permet de mettre en pratique, sur des exemples de plans de stock-options concrets, les modèles présentés dans la section précédente, sur la base d'informations disponibles et d'hypothèses de calcul détaillées et justifiées.

5.1 Cas concrets des plans évalués

Les plans de stock-options sur lesquels nous allons tester nos modèles de valorisation sont des plans à condition de performance marché. Pour être en mesure de mettre en œuvre tous les modèles présentés, nous allons partir d'un plan attribué par un groupe X coté sur la place boursière de Paris. Nous utiliserons donc les données relatives à ce groupe pour fixer les hypothèses nécessaires ; nous déclinerons ensuite ce plan selon diverses conditions de performance, chacune nécessitant, de par ses caractéristiques, la mise en œuvre de modèles de valorisation spécifiques.

5.1.1 Caractéristiques des plans

Le plan "de base" est un plan d'attribution de stock-options au bénéfice de certains salariés du groupe X, dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 5.1.

Date de l'assemblée générale	28 novembre 2005
Date du conseil d'administration	9 décembre 2005
Date d'attribution	9 décembre 2005
Salariés éligibles	100
Nombre total d'instruments	50 000
Échéance des plans	4 ans
Sous-jacent	Action du groupe X
Prix du sous-jacent à la date d'attribution	24.65 €
Prix d'exercice	24.24 €

Tab. 5.1 – Caractéristiques communes aux plans A et B

Les plans que nous allons valoriser, qui sont dérivés de ce plan "de base" seront nommés plan A et plan B, chacun se distinguant par la condition de performance marché qui lui est associée. Cette condition de performance est dans les deux cas de la même nature : le titre du groupe X doit sur-performer de 10%, en terme de rendement, un indice sectoriel, en l'occurrence l'indice Eurostoxx Utilities. Les deux plans A et B diffèrent sur la définition de la période sur laquelle on mesure les rendements comparés du titre du groupe X et de l'indice sectoriel. Plus précisément, les plans A et B ont les caractéristiques propres suivantes :

Plan A **:** les stock-options ne sont exerçables que si, à la fin d'une période d'acquisition des droits de 2 ans, le rendement du titre du groupe, mesuré entre les dates d'attribution du plan et de fin d'acquisition des droits, est supérieur de 10% à celui de l'indice sectoriel mesuré sur la même période. Dans le cas contraire, les options sont perdues. Si les critères de performance sont satisfaits, les options sont exerçables à n'importe quelle date entre la fin de la période d'acquisition des droits et le terme contractuel des options.

Plan B **:** les stock-options sont exerçables seulement au terme de la durée contractuelle du plan, et sous réserve que le titre du groupe ait sur-performé l'indice sectoriel de 10% en terme de rendement sur la durée contractuelle du plan. Dans le cas contraire, les options sont perdues. La période d'acquisition des droits pour ce plan est donc de fait égale à la maturité contractuelle du plan, soit 4 ans.

Dans la suite, nous noterons :

S_t le cours de l'action du groupe X à l'instant t,
S_t^i le cours de l'indice Eurostoxx Utilities à l'instant t,
T_d la date de fin de période d'acquisition des droits,
T la date d'échéance du plan,
K le prix d'exercice des options,
α =110%, le coefficient de performance à atteindre.

Par commodité, nous supposerons de plus que $t = 0$ à la date d'attribution des options.

Reformulons sous forme mathématique les conditions de performance auxquelles est soumise l'exerçabilité des options attribuées dans le cadre des plans A et B.

Plan A

Pour toute date t, $t \in [T_d, T]$, les options sont exerçables seulement si :

$$\frac{S_{T_d} - S_0}{S_0} \geqslant \alpha \frac{S_{T_d}^i - S_0^i}{S_0^i},$$

soit, de manière équivalente, seulement si :

$$\frac{S_{T_d}}{S_0} \geqslant \alpha \frac{S_{T_d}^i}{S_0^i}.$$

Plan B

A la date T, les options sont exerçables seulement si :

$$\frac{S_T - S_0}{S_0} \geqslant \alpha \frac{S_T^i - S_0^i}{S_0^i},$$

soit, de manière équivalente, seulement si :

$$\frac{S_T}{S_0} \geqslant \alpha \frac{S_T^i}{S_0^i}.$$

5.1.2 Modèles de valorisation adaptés

Ces plans étant soumis à une condition de performance marché impliquant deux actifs, il est clair que les modèles de valorisation présentés au chapitre 3 ne conviennent pas. En effet, il n'existe pas de formule fermée permettant d'évaluer la juste valeur de ces plans. Il faut se tourner vers ceux présentés au chapitre 4, à savoir le modèle quadrinomial et les simulations de Monte-Carlo.

Dans la suite, nous valorisons les options de ces plans **à leur date d'attribution** dans le cadre de ces deux modèles, et commentons les résultats obtenus. Toutefois, il faut commencer par analyser les données disponibles et fixer les hypothèses de valorisation.

5.2 Données disponibles

Les données nécessaires à la valorisation du plan et à la fixation des hypothèses sont de deux types : des données financières et des données salariales. Les informations financières nécessaires sont les suivantes :

– cotations journalières de l'action du groupe X de décembre 2001 au 9 décembre 2005,
– cotations journalières de l'indice Eurostoxx Utilities de décembre 2001 au 9 décembre 2005,
– dividendes distribués par le groupe X pour les années 2002 à 2005,
– options cotées, dont le sous-jacent est l'action du groupe, sur différentes maturités,
– taux zéro coupons gouvernementaux correspondant à la maturité attendue des plans, en zone euro.

Les historiques de cotation du titre du groupe X et de l'indice Eurostoxx Utilities sont présentés en annexe A.1.

Quant aux données salariales, il s'agit essentiellement de données concernant la rotation des bénéficiaires éligibles, ainsi qu'éventuellement les historique des comportements de levées des options sur les plans précédents afin d'estimer une barrière psychologique d'exercice[1].

Toutes les informations financières sont des informations publiques (sites d'informations financières, rapports annuels des sociétés cotées), ce qui n'est pas le cas des données salariales.

5.3 Fixation des hypothèses

Les hypothèses sous-jacentes à la valorisation des plans de stock-options A et B sont présentées ci-après. Pour déterminer chacune d'entre elles, nous nous sommes inscrit dans les règles générales de fixation prévues par la norme IFRS2 (cf. §3), et appuyés sur l'analyse des données disponibles. La sensibilité du résultat de la valorisation à certaines de ces hypothèses sera illustrée numériquement en section 5.5.

5.3.1 Maturité attendue

L'hypothèse de maturité attendue n'est pas nécessaire dans le cas du plan B, pour lequel on connaît précisément la maturité des options, aucun exercice anticipé n'étant possible.

En revanche, il est nécessaire de faire une hypothèse de maturité attendue pour le plan A, mais seulement dans le cas où le plan est évalué à l'aide des simulations de Monte-Carlo. En effet, cette hypothèse de maturité attendue, dont l'utilisation est prévue dans la norme IFRS 2, vise à rendre possible l'évaluation d'une option américaine grâce à un modèle applicable seulement aux options européennes. On estime alors la date à laquelle la moitié des options seront exercées, et l'on fait l'hypothèse, pour les besoins de la valorisation, que toutes les options seront exercées à

[1]Pour des raisons de lisibilité des résultats, nous ferons l'hypothèse, dans nos applications, qu'il n'existe pas de telle barrière.

cette date[2]. Dans le cas où une hypothèse de maturité attendue doit être utilisée, la norme IFRS 2 recommande de fonder celle-ci sur l'étude statistique des comportements d'exercice constatés sur les plans antérieurs ayant des caractéristiques proches de celles du plan à évaluer (voir la section 2.3.2 page 18). Dans le cas du plan A, le groupe X ne disposait pas de telles statistiques ; nous nous sommes donc référés à une méthode décrite dans le SAB 107 (applicable à la norme FAS 123 révisée, comparable à la norme IFRS 2), qui consiste à supposer que la maturité attendue est le milieu de l'intervalle temporel entre la date de fin d'acquisition des droits et la date de maturité contractuelle. L'application de cette méthode donne, dans le cas du plan A, une maturité attendue égale à $\frac{2+4}{2} = 3$ ans.

Le tableau suivant résume les hypothèses de maturité attendue utilisées pour la valorisation des plans A et B :

	Plan A		Plan B
Modèle de valorisation	Monte-Carlo	Arbre quadrinomial	Monte Carlo et quadrinomial
Maturité attendue	3 ans	4 ans	4 ans

Tab. 5.2 – Hypothèses de maturité attendue pour la valorisation des plans A et B

5.3.2 Taux sans risque

Nous avons vu en section 2.3.2 que le taux sans risque à utiliser pour évaluer les stock-options devait être le taux zéro coupon gouvernemental zone euro de maturité égale à la maturité attendue des options, pris à la date d'évaluation, qui est ici la date d'attribution des plans. Ces taux sont accessibles via des outils tels que Bloomberg.

La maturité attendue des plans A et B étant différentes, il faut donc utiliser des taux sans risque adaptés à chacun des plans. Le tableau 5.3 présente les taux retenus pour l'évaluation de chacun des deux plans.

	Plan A		Plan B
Date d'observation	9 décembre 2005		
Méthode de valorisation	Monte-Carlo	Arbre quadrinomial	Monte Carlo et quadrinomial
Ticker Bloomberg	EGG03S	EGG04S	EGG04S
Maturité considérée	3 ans	4 ans	4 ans
Taux sans risque retenu	2.92%	3.03%	3.03%

Tab. 5.3 – Taux sans risque retenus pour l'évaluation des plans A et B

5.3.3 Taux de dividende

Estimation du montant des dividendes futurs

Une méthode de valorisation d'action cotée consiste à actualiser les flux financiers qu'elle va générer, c'est-à-dire les dividendes futurs et la revente du titre : pour un actionnaire, la valeur

[2]La norme autorise une telle simplification des caractéristiques des stock-options parce que l'impact de celle-ci sur la juste valeur des instruments est jugée non significative. Nous pourrons le vérifier en comparant les résultats obtenus par les deux modèles appliqués au plan A (cf. section 5.4).

d'une action qu'il achèterait aujourd'hui pour la revendre p années plus tard est égale à somme de la valeur actuelle du prix de revente du titre à terme et de la valeur actuelle des p dividendes successifs qu'il compte recevoir dans l'intervalle et du cours auquel il revendra son titre dans p années[16] :

$$P_0 = \frac{D_1}{1+k_1} + \ldots + \frac{D_p}{(1+k_p)^p} + \frac{P_p}{(1+k_p)^p}$$

qui peut également s'écrire, quand p tend vers l'infini :

$$P_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{D_i}{(1+k_i)^i}$$

avec :

P_0 : la valorisation à la date actuelle,
D_i : le dividende versé au titre de la période i, avec $1 \leqslant i \leqslant p$,
P_p : le prix de revente à la période p,
k_i : le taux de rendement attendu de l'actionnaire pour la période i.

Une utilisation pratique consiste à estimer un taux de croissance des dividendes constant. Ainsi, à partir du prochain dividende D_1 à être versé, si l'on note g le taux de croissance des dividendes, on peut écrire :

$$P_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{D_1(1+g)^{i-1}}{(1+k_i)^i}.$$

Si de plus on suppose que le taux de rendement de l'actif est constant (i.e. $\forall i, k_i = k$), on obtient :

$$P_0 = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{D_1(1+g)^{i-1}}{(1+k)^i} = D_1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1+g)^{i-1}}{(1+k)^i}.$$

Il faut supposer que $g < k$, sans quoi la série diverge. Sous cette hypothèse, on peut écrire :

$$\begin{aligned} P_0 &= D_1 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1+g)^{i-1}}{(1+k)^i} \\ &= \frac{D_1}{1+g} \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{1+g}{1+k}\right)^i \\ &= \frac{D_1}{1+g} \left(\frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+k}} - 1 \right) \quad \text{(limite d'une série géométrique de terme général } \frac{1+g}{1+k}\text{)} \\ &= \frac{D_1}{1+g} \left(\frac{1+k}{k-g} - 1 \right) \\ &= \frac{D_1}{k-g} \end{aligned}$$

On obtient ainsi une équation très simple (formule de Gordon-Shapiro) qui permet d'estimer le taux de croissance des dividendes g :

$$g = k - \frac{D_1}{P_0},$$

et donc le montant des dividendes $D_2, \ldots, D_n$:

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad D_i = (1+g)^{i-1} D_1.$$

Cependant, les hypothèses sous-jacentes à ce modèle en rendent l'utilisation très peu fiable :

- hypothèse de croissance perpétuelle des bénéfices,
- taux de distribution des bénéfices identique chaque année,
- taux de rentabilité attendu par les actionnaires supérieur au taux de distribution des dividendes (hypothèse pouvant être corrigée par le modèle de Bates[16])

C'est pourquoi nous avons utilisé un taux de dividende moyen, tel qu'estimé ci-avant, pour valoriser les options des plans A et B.

Détermination d'un taux de dividende moyen

La prévision des dividendes futurs étant peu fiable, nous fondons notre hypothèse de taux de dividende attendu sur une analyse des dividendes versés au cours des dernières années. Nous faisons l'hypothèse que le taux de dividende futur sera égal à la moyenne des taux de dividendes "historiques" du groupe. Le tableau 5.4 présente les statistiques obtenues pour les années 2002 à 2005. D'après ces données, la moyenne historique du taux de dividende s'élève à 2.69%. C'est

	2002	2003	2004	2005
Cours moyen (en euros)	25.21	14.22	16.78	21.94
Dividende versé (en euros)	0.5	0.5	0.5	0.5
Taux de dividende	1.98%	3.52%	2.98%	2.28%

TAB. 5.4 – Taux de dividende observé de 2002 à 2005

le taux de dividende futur que nous avons retenu pour l'évaluation des deux plans.

5.3.4 Taux de rotation des salariés

	2002	2003	2004	2005
Effectifs concernés	160	240	300	280
Nombre de départs dans l'année	6	14	20	10
Taux de rotation	3.8%	5.8%	6.7%	3.6%

TAB. 5.5 – Taux de rotation observé de 2002 à 2005

Sur la base des données observées, présentées dans le tableau 5.5, le taux annuel moyen de départs constaté pour la population couverte s'élève à 5.0%. On suppose ici que le nombre d'options est uniformément réparti entre les bénéficiaires.

Nous introduirons donc dans le modèle quadrinomial une hypothèse de taux de rotation pendant la période d'exerçabilité s'élevant à 5% par an. Rappelons que les simulations de Monte-Carlo ne permettent pas de prendre en compte une telle hypothèse.

5.3.5 Volatilité

Nous avons analysé la volatilité à partir de l'historique et des données financières existant sur des produits dérivés dont le sous jacent est l'action du groupe X.

Volatilité historique du titre du groupe X

Nous commençons par estimer la volatilité historique du titre. Pour cela, nous nous basons sur les hypothèses du modèle de Black & Scholes qui suppose une volatilité du rendement logarithmique de l'action constante. Le processus d'évolution de l'actif est donné par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma dW_t.$$

Les cours de l'actif suivent une distribution log-normale.

Soit $\{\tilde{S}_t\}_{1 \leqslant t \leqslant n}$ un échantillon des cours de l'actif collectés uniformément sur n périodes.

Soit $\{\tilde{r}_t\}_{1 \leqslant t \leqslant n-1}$ l'échantillon des rendements logarithmiques correspondant, définis comme suit :

$$\forall t \in [\![1, n-1]\!], \quad \tilde{r}_t = \ln\left(\frac{\tilde{S}_{t+1}}{\tilde{S}_t}\right)$$

En supposant que le rendement espéré μ_t est constant et égal à μ, l'échantillon $\{\tilde{r}_t\}$ des rendements logarithmiques peut être vu comme un échantillon de réalisations de variables aléatoires $\{R_t\}$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire R :

$$R \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

On peut utiliser les estimateurs $\bar{r}$ et s^2, définis ci-après, pour estimer respectivement les paramètres μ et σ^2 :

$$\bar{r}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t,$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r})^2.$$

On peut Montrer que ces estimateurs sont sans biais.

Proposition 5.1.
$\bar{r}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t$ *est un estimateur sans biais de* μ.

Démonstration. Cette proposition est démontrée en Annexe B. □

Proposition 5.2.
$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n} (r_t - \bar{r}_n)^2$ *est un estimateur sans biais de* σ^2.

Démonstration. Cette proposition est démontrée en Annexe B. □

On estime alors la volatilité historique de l'actif par :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{s_n^2 \times 252}$$

où 252 est le nombre moyen de jour de trading dans l'année, ce facteur permettant d'obtenir une volatilité annuelle du titre.

Cet estimateur est un estimateur sans biais de $\sqrt{252} \times \sigma$, la démonstration étant immédiate en utilisant la proposition B.3 et la linéarité de l'espérance.

L'application de cet estimateur à la série des cours de clôture historiques du titre du groupe X sur une durée équivalente à la durée des plans de stock-options conduit à une volatilité historique[3] de 36.4% sur 3 ans et de 43.4% sur 4 ans.

Remarque

En fonction du cours de référence pris pour déterminer la volatilité (cours d'ouverture, cours moyen, cours de clôture) le niveau de volatilité historique varie de manière importante, comme le montre le tableau 5.6.

Cours de référence	Volatilité historique	
	3 ans	4 ans
Cours d'ouverture	35.6%	41.1%
Cours moyen	43.3%	53.2%
Cours de clôture	36.4%	43.4%

Tab. 5.6 – Volatilité historique en fonction du cours de référence retenu

Le cours que nous avons retenu est le cours de clôture, qui nous semble le plus pertinent car :
- le cours à l'ouverture est sujet aux répercussions des ordres d'achat/vente qui ont été passés avant l'heure d'ouverture des marchés ce qui a pour effet de produire des variations anormales sur le niveau du cours, et
- le cours moyen reflète une volatilité sur la cotation journalière qui n'a pas à être prise en compte dans la détermination de l'hypothèse long terme.

La détermination de la volatilité historique prend en compte l'ensemble des fluctuations du cours sur l'horizon d'observation. Cependant, il est possible selon les événements qui sont survenus à la société durant cette période, que certaines périodes prises en compte ne reflètent pas son caractère long terme. En particulier, il est possible que le cours de la société ait été particulièrement chahuté du fait de réorganisation, fusion, changement de secteur d'activité (événements endogènes) ; ou que des événements exogènes de type attentats du 11 septembre 2001 ait également eu un impact sur le cours de l'action. La norme IFRS 2 prévoit (§ B25) que de telles périodes peuvent être retraitées des données à partir desquelles la volatilité historique est déterminée dans la mesure où on peut justifier que ces événements sont de nature exceptionnels et ne devraient pas se reproduire dans l'avenir.

Dans la série de données utilisée, nous avons identifié l'ensemble des rendements journaliers supérieurs à 10% en valeur absolue, ce qui conduit à 15 observations. Pour chacune de ces observations, il aurait été envisageable de déterminer si la société avait subi ce jour là un événement de nature exceptionnel qui ne devrait pas se reproduire à l'avenir, ce qui nous aurait conduit à ne pas les prendre en compte dans le calcul de la volatilité historique en tant que données aberrantes. Cependant, quand bien même nous n'aurions tenu compte d'aucune de ces 15 observations, les résultats n'auraient pas varié significativement (moins de 1% de variation). C'est pourquoi nous avons finalement retenu les volatilités historiques déterminées en prenant en compte l'ensemble des observations.

Volatilité implicite du titre du groupe X

L'autre moyen d'estimer la volatilité du titre du groupe X est d'étudier sa volatilité implicite. La volatilité implicite d'un titre représente sa volatilité future telle qu'anticipée par le marché ;

[3]voir l'annexe A.2 pour un graphique donnant la volatilité pour un historique allant de 1 à 4 ans.

on la nomme “implicite” car on l'obtient à partir de l'observation des prix des options vanilles (call et put) ayant pour sous-jacent le titre du groupe et en supposant que ces prix sont conformes à ceux donnés par la formule de Black & Scholes, telle qu'explicitée en section 3.2.1. Obtenir la volatilité implicite d'une option nécessite d'inverser la formule de Black & Scholes, ce qui est facilement réalisable de manière numérique, c'est-à-dire grâce à un algorithme d'approximation.

Nous avons vu en section 2.3.2, page 17, qu'il fallait que les options servant de base au calcul de la volatilité implicite d'un titre sous-jacent vérifient quatre critères.

Nous avons donc dans un premier temps filtré l'historique des cours des options échangées ayant pour sous-jacent le titre du groupe X et n'avons retenu que les options satisfaisant tous les critères. Nous avons ensuite calculé la moyenne des volatilités implicites de ces dernières.

Nos analyses conduisent à une volatilité implicite du titre du groupe à la période d'attribution des options égale à 19.9%.

Volatilité retenue pour le titre du groupe X

Le tableau 5.7 résume les différents indicateurs de volatilité du titre du groupe X, pour les plans A et B

	Plan A		Plan B
Méthode de valorisation	Monte-Carlo	Arbre quadrinomial	Monte Carlo et quadrinomial
Maturité attendue	3 ans	4 ans	4 ans
Volatilité historique	36.4%	43.4%	43.4%
Volatilité implicite	19.9%	19.9%	19.9%
Volatilité retenue	28.2%	31.7%	31.7%

TAB. 5.7 – Indicateurs de volatilité du titre du groupe X

La différence significative entre la volatilité historique et la volatilité implicite (respectivement 43% et 20% sur 4 ans) est expliquée précisément par une appréciation par les intervenants de marché qui privilégie les anticipations du marché à la date de valorisation au détriment de l'évolution passée. Dans le cas particulier du groupe X, la volatilité historique est notamment perturbée par les effets d'une crise de liquidité, passée, qui a pu affecter son endettement pendant la période historique considérée.

La norme IFRS 2 préconise de prendre en compte ces différents indicateurs pour déterminer l'hypothèse de volatilité utilisée dans les modèles de valorisation d'options. Nous avons choisi d'utiliser une hypothèse mixte, et de prendre une hypothèse de volatilité égale, pour chaque plan, à la moyenne des deux indicateurs présentés ci-dessus. Ainsi, nous utiliserons dans nos modèles une volatilité égale à 28.2% dans le cas du plan A valorisé par les simulations de Monte-Carlo, et à 31.7% dans le cas du plan B ainsi que dans le cas du plan A valorisé par un arbre quadrinomial.

Volatilité de l'indice Eurostoxx Utilities

Nous avons de plus estimé la volatilité de l'indice Eurostoxx utilities, en nous fondant uniquement sur la volatilité historique de l'indice, les données nécessaires à la détermination d'une volatilité implicite n'étant pas disponibles. Cette volatilité s'élève à 16.2% sur 3 ans et à 19.4% sur 4 ans.

5.3.6 Corrélation

La condition de performance portant sur deux actifs, leur corrélation intervient comme paramètre des modèles de valorisation. Dans notre exemple, il est donc nécessaire d'estimer la corrélation entre le titre du groupe X et l'indice Eurostoxx Utilities (ou plutôt, de la même manière que pour l'estimation de la volatilité des actifs, entre leurs rendements).

En toute généralité, la corrélation empirique de deux séries statistiques $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ et $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$, de moyennes empiriques respectives $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ est définie par :

$$\rho_e = \frac{\widehat{cov}(X,Y)}{\hat{\sigma}_X \hat{\sigma}_Y},$$

où

$$\widehat{cov}(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

est un estimateur de la covariance des séries X et Y, et $\hat{\sigma}_X$ et $\hat{\sigma}_Y$ des estimateurs de leur écart-type.

Dans le cadre de notre exemple, les séries $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ et $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ sont respectivement les séries des rendements du titre du groupe X et de l'indice Eurostoxx Utilities, $\hat{\sigma}_X$ est la volatilité du titre du groupe X, et $\hat{\sigma}_Y$ celle de l'indice Eurostoxx Utilities.

La corrélation empirique est estimée sur un historique d'une durée de 4 ans (de décembre 2001 à décembre 2005). Il ressort de nos calculs que le coefficient de corrélation empirique des deux séries de rendements est égal à 85% sur 4 ans[4].

5.4 Valorisation

Une fois toutes les hypothèses nécessaires fixées, nous avons pu valoriser les stock-options des plans A et B. Dans le cas des deux plans, les deux modèles (quadrinomial et simulations de Monte-Carlo) sont utilisables, même si les simulations de Monte-Carlo ne permettent de prendre en compte ni les comportements d'exercice anticipé ni le taux de rotation des bénéficiaires pendant la période d'exerçabilité des options. Nous comparons ci-après les résultats obtenus par les deux modèles.

5.4.1 Valorisation du plan A

La figure 5.1 présente les justes valeurs d'une stock-option attribuée dans le cadre du plan A obtenues grâce au modèle quadrinomial, avec un nombre de pas variant de 15 à 300, ainsi que grâce aux simulations de Monte-Carlo (pour 2 millions de simulations). Il apparaît que les deux modèles ne convergent pas vers la même valeur : la juste valeur donnée par l'arbre quadrinomial avec le plus grand nombre de périodes est égale à 3.19 € , alors que les simulations de Monte-Carlo donnent une valeur égale à 2.68 € , soit un écart de 16%.

Cependant, cet écart est normal, et représente le surplus de valeur d'un instrument américain par rapport à un instrument européen, surplus provenant de la possibilité d'exercer un instrument américain avant sa maturité contractuelle et ainsi sécuriser son gain plus rapidement. Le fait

[4] Le résultat obtenu en considérant une période de 3 ans étant très proche de celui obtenu sur 4 ans (82% sur 3 ans contre 85% sur 4 ans), nous avons utilisé dans nos valorisations des deux plans un unique coefficient de corrélation.

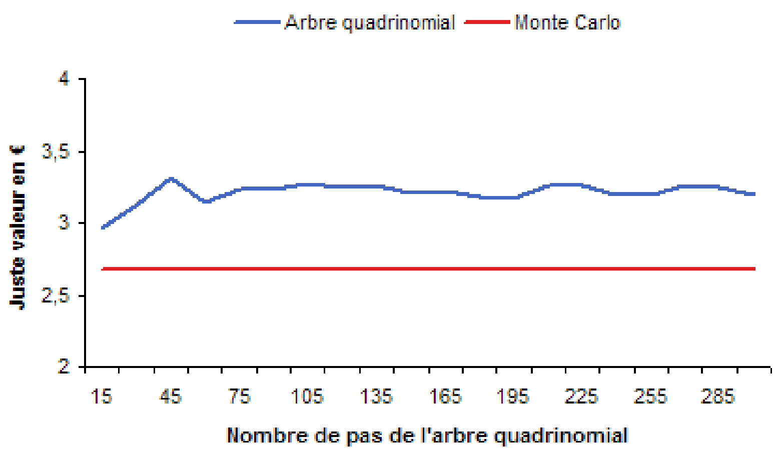

FIG. 5.1 – Juste valeur d'une stock-option du plan A en fonction du nombre de pas de l'arbre quadrinomial

d'avoir introduit un taux de rotation des bénéficiaires relativement faible (5% par an) réduit par ailleurs l'écart de valeur entre les deux modèles.

Nous pouvons donc conclure que les résultats obtenus par les deux modèles sont conformes à la théorie des instruments dérivés.

5.4.2 Valorisation du plan B

La figure 5.2 présente les justes valeurs d'une stock-option attribuée dans le cadre du plan B. Comme pour le plan A, elle donne les justes valeurs des instruments obtenues grâce au modèle quadrinomial, avec un nombre de pas variant de 15 à 300, ainsi que grâce aux simulations de Monte-Carlo (pour 2 millions de simulations).

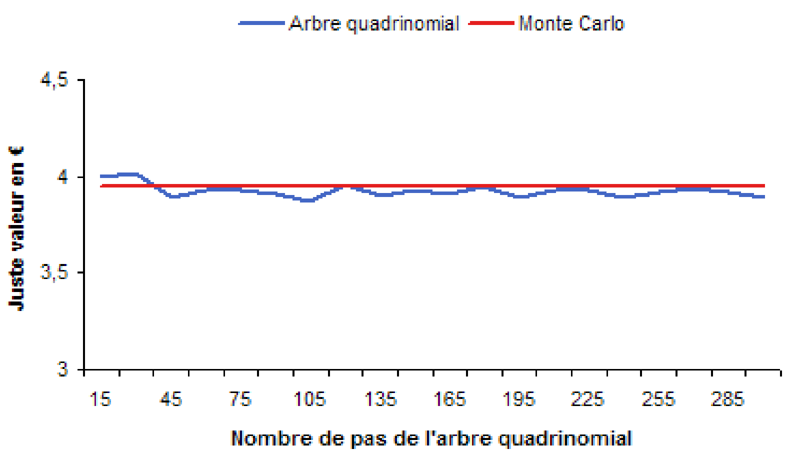

FIG. 5.2 – Juste valeur d'une stock-option du plan B en fonction du nombre de pas de l'arbre quadrinomial

Les caractéristiques du plan amenaient à prévoir que les deux modèles conduiraient à des justes valeurs des instruments très similaires. En effet, la mesure de la condition de performance ayant lieu à la fin de la durée de vie des instruments attribués, les stock-options du plan B étaient de fait des instruments européens. Or dans ce cas de figure, les différences entre les deux modèles s'effacent.

Les résultats obtenus permettent de vérifier cette propriété ; en effet, les justes valeurs obtenues par l'utilisation des deux modèles sont très proches : l'utilisation des simulations de Monte-Carlo conduit à une juste valeur égale à 3.96 € (pour 2 millions de simulations), contre 3.89 € donnée par le modèle quadrinomial (avec 300 périodes), soit seulement 2% d'écart.

Les deux modèles sont donc bien équivalents pour évaluer des instruments de type européens.

Remarque : dans les deux plans valorisés, la condition de performance était mesurée à une date unique donnée, ce qui permettait d'utiliser en théorie les deux types de modèles (arbre quadrinomial et simulations de Monte-Carlo).

Cependant, dans le cas où la condition de performance est mesurée à la date d'exercice de l'option, celle-ci pouvant être exercée au gré du bénéficiaire entre deux dates (typiquement entre la date de fin d'acquisition des droits et la date de maturité des instruments), les simulations de Monte-Carlo (telles que présentées dans ce mémoire) ne peuvent pas être utilisées pour valoriser ce type d'option. Dans ce cas, on s'aperçoit de la valeur ajoutée de l'arbre quadrinomial.

Nous illustrons ce point ci-après, en valorisant un troisième plan dérivé du plan de base présenté dans ce chapitre : le **plan C**. Ce plan a les mêmes caractéristiques que les deux premiers, mais se distingue par le fait que la mesure de la réalisation ou non de la condition de performance se fait à la date d'exercice, quelle qu'elle soit.

Mathématiquement, en reprenant les notations initiales, on peut écrire que pour toute date t, $t \in [T_d, T]$, les options sont exerçables seulement si :

$$\frac{S_t - S_0}{S_0} \geqslant \alpha \frac{S_t^i - S_0^i}{S_0^i},$$

soit, de manière équivalente, seulement si :

$$\frac{S_t}{S_0} \geqslant \alpha \frac{S_t^i}{S_0^i}.$$

En reprenant les mêmes hypothèses que celles utilisées pour valoriser les options du plan A par un arbre quadrinomial (à ceci près que, dans cet exemple, on retient une hypothèse de turn-over post vesting nulle), on obtient une juste valeur unitaire des options du plan C égale à 4.98 € .

Sans cette condition de performance, la juste valeur unitaire de ces options, évaluées par un arbre binomial, serait égale à 6.20 € . La décôte induite par la présence de la condition de performance est donc de l'ordre de 20%.

5.5 Analyses de sensibilité

Dans cette section, nous étudions la sensibilité des résultats obtenus en 5.4 aux hypothèses suivantes :
- la volatilité σ,
- la corrélation ρ,
- le niveau de la condition de performance α.

5.5.1 Sensibilité à la volatilité

La juste valeur des stock-options est très sensible à l'hypothèse de volatilité, à la fois du titre sous-jacent et de l'indice de référence, plus particulièrement lorsque, comme c'est le cas sur les plans A et B qui nous intéressent, il existe des conditions de performance marché. Il est donc important d'effectuer des tests de sensibilité de la juste valeur à cette hypothèse.

Nous présentons dans les tableaux 5.8 (respectivement 5.9) les justes valeurs des stock-options du plan A (respectivement B) obtenues en faisant varier les hypothèses de volatilité du titre du groupe X et de l'indice Eurostoxx Utilities de plus ou moins 10% autour de leurs valeurs centrales.

		Volatilité du groupe X		
		$\sigma - 10\%$	σ	$\sigma + 10\%$
Volatilité	$\sigma_i - 10\%$	MC : 1.72	MC : 3.39	MC : 4.87
		Quad : 2.24	Quad : 4.07	Quad : 5.67
de	σ_i	MC : 0.79	**MC : 2.68**	MC : 4.38
		Quad : 1.15	**Quad : 3.19**	Quad : 5.10
l'indice	$\sigma_i + 10\%$	MC : 0.58	MC : 1.79	MC : 3.62
		Quad : 0.85	Quad : 2.25	Quad : 4.18

TAB. 5.8 – Sensibilités de la juste valeur (en euros) des stock-options du plan A aux hypothèses de volatilité, obtenues par simulation de Monte-Carlo (MC) et par un arbre quadrinomial (Quad)

		Volatilité du groupe X		
		$\sigma - 10\%$	σ	$\sigma + 10\%$
Volatilité	$\sigma_i - 10\%$	MC : 2.82	MC : 4.96	MC : 6.85
		Quad : 2.79	Quad : 4.92	Quad : 6.75
de	σ_i	MC : 1.50	**MC : 3.96**	MC : 6.14
		Quad : 1.50	**Quad : 3.89**	Quad : 6.05
l'indice	$\sigma_i + 10\%$	MC : 0.99	MC : 2.74	MC : 5.12
		quad : 0.97	quad : 2.69	quad : 5.00

TAB. 5.9 – Sensibilités de la juste valeur (en euros) des stock-options du plan B aux hypothèses de volatilité, obtenues par simulation de Monte-Carlo (MC) et par un arbre quadrinomial (Quad)

Les résultats de ces test de sensibilité sont cohérents avec les attentes que l'on pouvait avoir sur la base de la théorie des instruments financiers.

On vérifie bien que quel que soit le modèle utilisé, à volatilité de l'indice de référence constante, la juste valeur des options attribuées, que ce soit dans le cadre du plan A ou B, augmente lorsque la volatilité du titre du groupe X augmente, et qu'inversement, à volatilité du titre du groupe X constante, la juste valeur des options attribuées, que ce soit dans le cadre du plan A ou B, diminue lorsque la volatilité de l'indice de référence augmente. Ceci traduit le fait qu'il est d'autant moins probable que le titre du groupe X surperforme l'indice de référence que sa volatilité est plus faible comparée à celle de l'indice.

On note d'autre part que le modèle quadrinomial est un peu moins sensible aux variations de volatilité que ne le sont les simulations de Monte-Carlo : les variations relatives de la juste valeur des options du plan A, obtenues par l'utilisation d'un arbre quadrinomial, par rapport aux valeurs centrales (en gras dans le tableau) sont systématiquement inférieures d'environ 5% à celles obtenues par les simulations de Monte-Carlo. Ainsi, le modèle quadrinomial semble un peu plus robuste à l'hypothèse de volatilité utilisée.

Il n'en reste pas moins que les écarts obtenus entre les deux modèles restent du même ordre que ceux constatés lors de la valorisation des plans en section précédent ; en particulier, sur les options du plan B, les écarts restent non significatifs.

5.5.2 Sensibilité à la corrélation

La corrélation est aussi un paramètre important dans la valorisation, du fait de la condition de performance à laquelle sont soumises les stock-options des deux plans évalués.

	Plan A	Plan B
$\rho = 0\%$	MC : 3.50 Quad : 4.30	MC : 5.09 Quad : 5.03
$\rho = 40\%$	MC : 3.22 Quad : 3.90	MC : 4.70 Quad : 4.64
$\rho = 60\%$	MC : 3.02 Quad : 3.66	MC : 4.40 Quad : 4.37
$\rho = 85\%$	**MC : 2.68** **Quad : 3.19**	**MC : 3.96** **Quad : 3.89**
$\rho = 100\%$	MC : 2.28 Quad : 2.81	MC : 3.39 Quad : 3.41

TAB. 5.10 – Sensibilités de la juste valeur (en euros) des stock-options des plans A et B à l'hypothèse de corrélation, obtenues par simulation de Monte-Carlo (MC) et par un arbre quadrinomial (Quad)

Le tableau 5.10 présente les justes valeurs des instruments attribués dans le cadre des plans A et B obtenues en faisant varier l'hypothèse de corrélation entre les rendements du titre sous-jacent et de l'indice de référence.

Les résultats de ces tests de sensibilité sont cohérents par rapport à nos attentes. Plus le coefficient de corrélation entre les rendements du titre du groupe X et de l'indice de référence est élevée, moins il est probable que le groupe X ait un rendement supérieur à celui de l'indice, et donc que la condition de performance soit remplie. Ainsi, plus ρ est élevé, plus la juste valeur des instruments est faible. Ceci est bien vérifié pour les deux types d'options évaluées et pour les deux modèles.

5.5.3 Sensibilité au niveau de la condition de performance

Le tableau 5.11 présente les justes valeurs des instruments attribués dans le cadre des plans A et B obtenues en faisant varier le niveau de la condition de performance à atteindre. Les résultats de ces tests de sensibilité sont cohérents par rapport à nos attentes. Plus le niveau de la condition de performance est élevé, moins il est probable que la condition de performance soit remplie. Ainsi, plus α est élevé, plus la juste valeur des instruments est faible ; ceci est vérifié pour les deux types d'options évaluées et pour les deux modèles.

	Plan A	Plan B
$\alpha = 100\%$	MC : 3.47 Quad : 4.10	MC : 4.62 Quad : 4.54
$\alpha = 110\%$	**MC : 2.68** **Quad : 3.19**	**MC : 3.96** **Quad : 3.89**
$\alpha = 120\%$	MC : 1.89 Quad : 2.38	MC : 3.28 Quad : 3.26
$\alpha = 130\%$	MC : 1.25 Quad : 1.63	MC : 2.64 Quad : 2.61
$\alpha = 150\%$	MC : 0.45 Quad : 0.69	MC : 1.61 Quad : 1.59

TAB. 5.11 – Sensibilités de la juste valeur (en euros) des stock-options des plans A et B au niveau de la condition de performance à atteindre, obtenues par simulation de Monte-Carlo (MC) et par un arbre quadrinomial (Quad)

Notons qu'il existe bien entendu un α "limite", au-delà duquel les modèles aboutiront à la conclusion que la probabilité de remplir la condition de performance est nulle, et donneront donc une juste valeur des options nulle.

5.6 Impacts comptables

Compte tenu de la juste valeur des plans telle que calculée précédemment, la charge totale de rémunération est ainsi déterminée (conformément aux principes présentés au paragraphe 2.4, page 19) :

		Plan A	Plan B
Nombre d'options	(a)	50 000	
Juste valeur d'une option	(b)	3.19	3.89
Taux de présence à la fin de la période d'acquisition des droits	$(1-5\%)^2 = 90.25\%$ (c)	$(1-5\%)^4 = 81.45\%$	
Charge de rémunération totale	$(a) \times (b) \times (c)$	143 900	158 400
Durée d'étalement de la charge	2 ans	4 ans	
Charge de rémunération annuelle	72 000	39 600	

TAB. 5.12 – Charge de rémunération IFRS 2 des plans

Il en résulte donc une charge annuelle de 72 000 (resp. 39 600) pour le plan A (resp. plan B), à reconnaître pendant la période d'acquisition des droits de 2 ans (resp. 4 ans) pour le plan A (resp. plan B). Cette charge sera éventuellement révisée en fonction des départs des bénéficiaires pendant cette période.

Conclusion

Parmi les 40 sociétés phares de l'industrie française, 35 offraient en 2006 des plans de stock options à tout ou partie de leurs salariés. Cette pratique s'est largement répandue depuis les années 1970 et continue d'être développée, en suivant une évolution pouvant être contrainte par une optimisation selon plusieurs critères, notamment :

- les évolutions de l'environnement législatif : évolution des dispositions fiscales sur les bénéfices liés aux stock-options, mais aussi arbitrages vers d'autres modes de rémunération en action du type action gratuite en fonction des optimums d'exonération proposés,
- les besoins de communication et de transparence financière accrus qui peuvent être un frein à l'attribution de tels avantages, pour les dirigeants notamment,
- les impacts financiers qui doivent depuis l'application des normes IFRS être reconnus en charge dans les comptes de la société ou du Groupe,
- la politique de rémunération intrinsèque à chaque société, principal facteur ayant contribué à mettre en place les plans de stock-options à conditions de performance.

Les conditions de performance attachées à certains plans de stock-options peuvent revêtir plusieurs formes, en fonction des objectifs recherchés par les sociétés et de leur politique de rémunération. Le panorama dressé dans le Chapitre 1 présente certaines typologies de ces plans telles que présentés dans les informations financières publiques, et illustre le fait que – même s'ils restent marginaux par rapport aux plans de stock options classiques : environ 30% – les plans à conditions de performance rentrent dans le panel des instruments de rémunération, principalement à l'attention des cadres exécutifs ou comités de direction. Des études anglaises (Analyse Lane Clark & Peacok – Annual Survey 2006 of Employee Share Plans) montrent qu'outre manche 20% des sociétés cotés ont remplacé leurs plans de stock-options classiques par des plans assortis d'une condition de performance.

Pour les sociétés ou groupes publiant des comptes selon les normes IFRS, les plans de stock options doivent faire l'objet d'une évaluation en juste valeur à leur date d'octroi, et d'un traitement comptable associé, consistant généralement à un étalement du coût des stock-options sur la période d'acquisition des droits par les bénéficiaires. Compte tenu des spécificités des plans à conditions de performance par rapport aux plans classiques, et notamment l'existence de plusieurs actifs risqués, les modèles de valorisation présentés dans le Chapitre 3 et généralement utilisés pour les plans de stock-options usuels (Black&Scholes, Binomial) ne peuvent pas s'appliquer.

Les simulations de Monte Carlo permettent de valoriser assez simplement des options à plusieurs sous-jacents européennes, c'est-à-dire s'exerçant à une date fixe donnée. Cependant, les plans de stock options offrent généralement une période de temps ou fenêtre d'exercice assez longue (de 2 à 6 ans dans la plupart des cas) pendant laquelle les bénéficiaires peuvent exercer à tout moment. L'utilisation de simulations de Monte Carlo n'est donc possible que dans des cas particuliers de plans exerçables à une seule date, ou alors et plus généralement en faisant une hypothèse sur la date à laquelle les bénéficiaires vont exercer leurs options.

La détermination d'une telle hypothèse est très incertaine, dépendant de nombreux facteurs liés tant à la situation personnelle des bénéficiaires eux-mêmes (aversion au risque, besoins de liquidité...) qu'au niveau des marchés. Une approche admise par les standards américains consiste à retenir comme date d'exercice probable le milieu de la fenêtre d'exercice ; cela n'a cependant aucun fondement économique ni financier. Une approche uniquement inspirée de la théorie financière consisterait à réputer que les bénéficiaires exerceront à la fin de la période d'exercice, moment où les espérances de gains sont les plus élevées, mais cela ne se révèle pas exact dans la réalité.

L'adaptation des arbres binomiaux à plusieurs dimensions permet d'évaluer à leur juste valeur les plans de stock-options multi sous-jacents : il s'agit de construire les évolutions probables et conjointes des différents actifs risqués dans le futur, et de définir à chaque pas de discrétisation l'avantage que peut en tirer le bénéficiaire.

L'arbre quadrinomial utilisé pour des plans à deux actifs risqués a l'avantage par rapport aux simulations de Monte Carlo de permettre une évaluation d'options américaines, et d'intégrer des paramètres ou hypothèses telles que les seuils d'exercices anticipés. La seule contrainte d'application de ces arbres est leur besoin en mémoire de calcul, qui rend impossible sur des ordinateurs classiques des simulations portant sur plus de 300 pas de discrétisation.

Une fois le modèle retenu, reste à fixer et calibrer les hypothèses. Si certaines comme le taux d'actualisation sont relativement évidentes compte tenu du cadrage présenté dans la norme IFRS2, d'autres comme la volatilité, le seuil d'exercice anticipé ou encore le taux de rotation des bénéficiaires laissent plus d'appréciation quant à leur fixation. Or, compte tenu de la très forte volatilité du résultat de la valorisation à ces hypothèses (cf. chapitre 5.5), et du fait qu'une fois la juste valeur déterminée il n'y a plus de recalcul jusqu'au dénouement du plan[1] quelles que soient les évolution des hypothèses, des études approfondies doivent être réalisées pour les déterminer au plus près.

[1]Pour les plans equity settled, et à l'exception de l'hypothèse de turn over pendant la période de vesting (cf. Chapitre 2).

Bibliographie

Articles

[1] Black F., Scholes M. : The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy, Vol.81*, 1973, pp.637-654.

[2] Camanes A. : Le mouvement brownien, *Document de travail, Université de Nantes*, 2006.

[3] Carpenter J.N. : The exercise and valuation of executive stock options, *Journal of Financial Economics*, 1998, pp.127-158.

[4] Cousin A. : Valorisation et Comptabilisation des Stock-Options à travers la norme IFRS 2, *Mémoire ISFA*, 2006

[5] Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M. : Option Pricing : A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics, Vol.7, issue 3*, 1979, pp.229-263.

[6] Guimbert S., Vallat J.C. : La fiscalité des stock options : une perspective internationale, *Economie et Statistique, No.344*, 2001, pp.3-37.

[7] Hull J., White A. : How to value employee stock options, *Financial Analysts Journal, Vol.60, No.1*, January/February 2004, pp.114-119.

[8] Planchet F., Therond P.E. : Évaluation de l'engagement de l'entreprise associé à un plan de stock-options, *Bulletin Français d'Actuariat 6 (11)*, 2003, pp.149-66.

[9] Rubinstein M. : Return to OZ, *Risk 7*, 1994, pp.67-71.

[10] Stentoft L. : Convergence of the Least Square Monte-Carlo Approach to American Option Valuation, *Management Science, Vol.50, Issue 9*, 2004, pp.1193-1203.

[11] Wan H. : Pricing American-style Basket Options by Implied Binomial Tree, *Working Paper, University of California at Berkeley*, 2002.

Ouvrages de référence

[12] Hull J. : Options, Futures, and Other Derivatives, 6th Edition, *Prentice Hall*, 2006.

[13] Lamberton D., Lapeyre B. : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, deuxième édition, *Ellipses*, 1997.

[14] Poulain-Rehm T. : Les Stock Options en france : théories et politiques, *Editions l'Harmattan Economiques*, 2003.

[15] Quittard-Pinon F. : Marchés des capitaux et théorie financière, *Economica*, 2003.

[16] Vernimmen P. : Finance d'entreprise, sixième édition, *Dalloz*, 2005.

Annexes

Annexe A

Présentation des données

A.1 Historiques de cours

A.1.1 Cours du titre du groupe X depuis décembre 2001

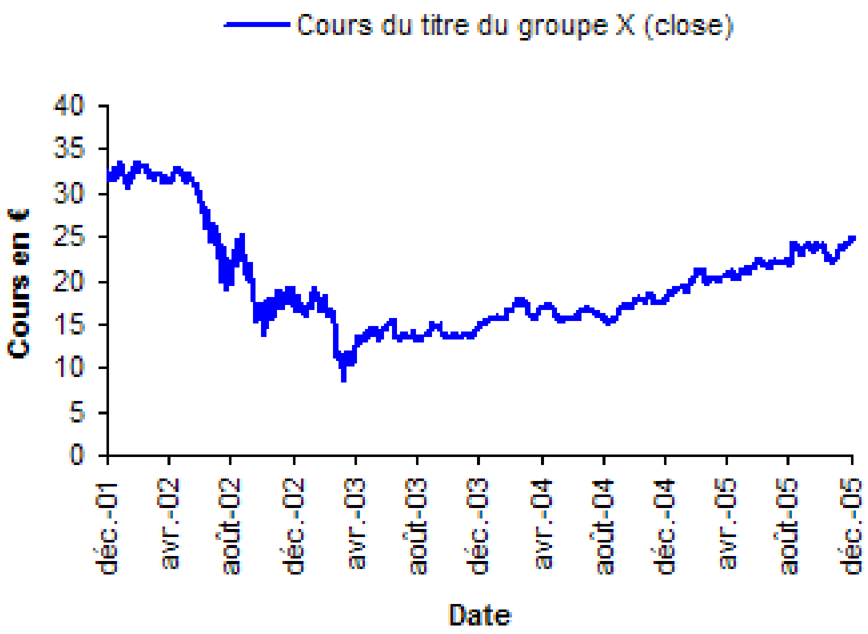

Fig. A.1 – Historique de cotation du titre du groupe X depuis décembre 2001

A.1.2 Cours de l'indice Eurostoxx Utilities depuis décembre 2001

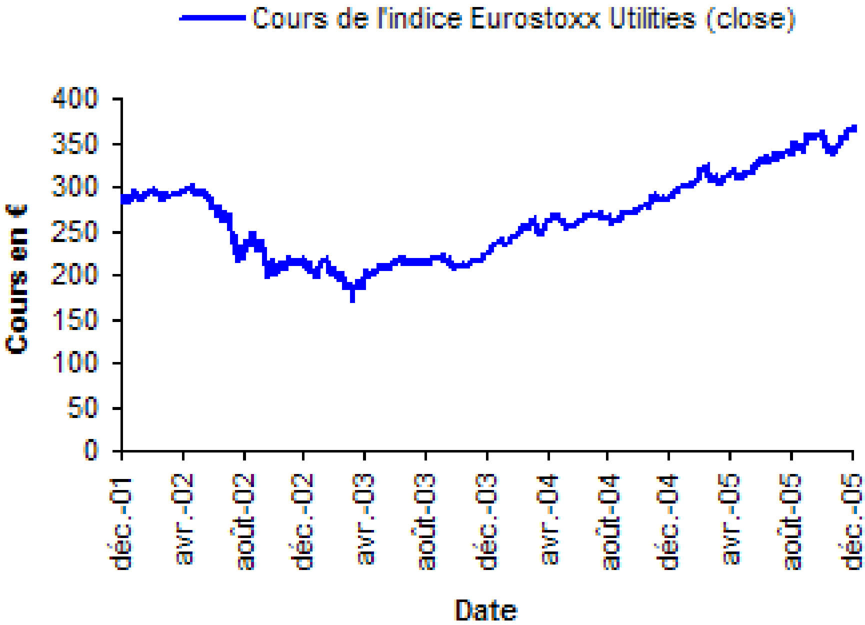

Fig. A.2 – Historique de cotation de l'indice Eurostoxx Utilities depuis décembre 2001

A.2 Volatilités historiques

A.2.1 Volatilité historique du titre du groupe X

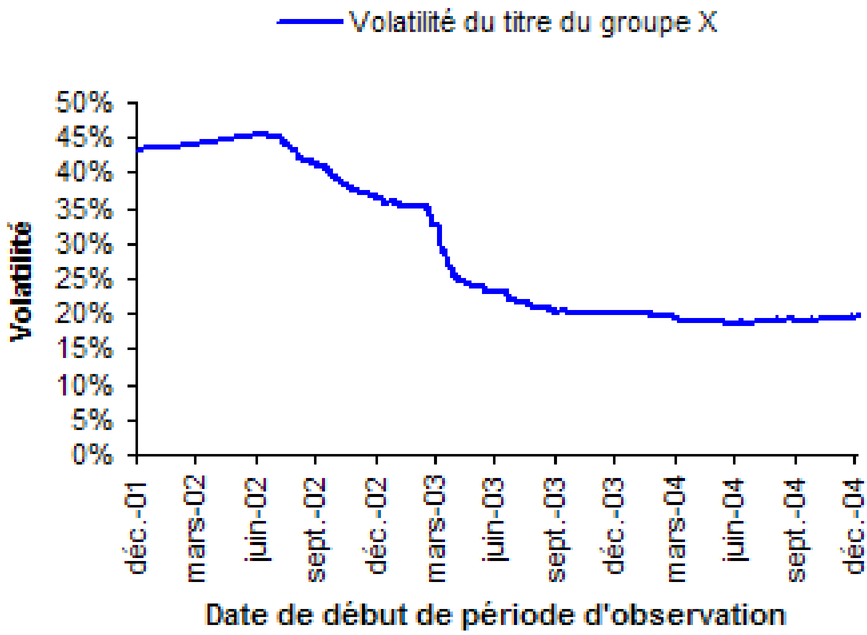

FIG. A.3 – Volatilité historique annualisée du titre du groupe X

A.2.2 Volatilité historique de l'indice Eurostoxx Utilities

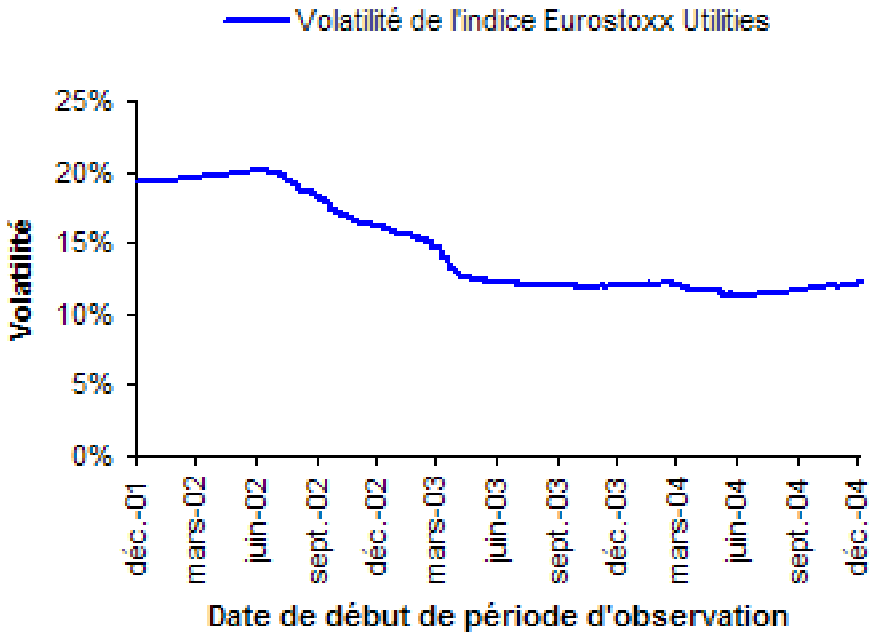

Fig. A.4 – Volatilité historique annualisée de l'indice Eurostoxx Utilities

Annexe B

Démonstrations

Proposition B.1.
Soit $(U,V) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[^2}$ *et (X, Y) définies par :*

$$X = \sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V) \text{ et } Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V).$$

Alors $(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, I_2)$.

Démonstration. Cette proposition se fonde sur la formule classique de changement de variable. Posons $f_{U,V}(u,v)$ la densité jointe du couple (U,V), et soit $x = g_1(u,v)$ et $y = g_2(u,v)$.

La densité jointe du couple (X,Y) est donnée par la formule suivante (formule de changement de variable) :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{U,V}(g_1^{-1}(x,y), g_2^{-1}(x,y))\left|\det(J)\right|,$$

où J est la matrice jacobienne de la transformation, définie comme :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

avec $u = g_1^{-1}(x,y)$ et $v = g_2^{-1}(x,y)$.

Inversons g_1 et g_2. On obtient :

$$\begin{cases} u &= g_1^{-1}(x,y) = \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right) \\ v &= g_2^{-1}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi}\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

La matrice J est donc égale à :

$$J = \begin{pmatrix} -x\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & -y\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \\ \\ \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{2\pi(1+(\frac{x}{y})^2)} & \dfrac{\frac{1}{x}}{2\pi(1+(\frac{x}{y})^2)} \end{pmatrix}$$

et la valeur absolue de son déterminant vaut :

$$\left|\det(J)\right| = \left|\frac{-(1+\frac{y^2}{x^2})\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2\pi\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}\right| = \frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2\pi}.$$

Enfin, puisque $f_{U,V}(u,v) = \mathbf{1}_{]0,1[}(u)\,\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\mathbf{1}_{]-\infty,+\infty[}(x)\,\mathbf{1}_{-\infty,+\infty}(y) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathbf{1}_{]-\infty,+\infty[}(x)\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathbf{1}_{]-\infty,+\infty[}(y)\right), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{N}(0,I_2)$. □

Proposition B.2.
$\bar{r}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t$ *est un estimateur sans biais de* μ*.*

Démonstration. Considérons la variable aléatoire $\bar{R}_n$ définie par $\bar{R}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t$ et dont $\bar{r}_n$ est une réalisation, et montrons que $E\left[\bar{R}_n\right] = \mu$. On a :

$$E\left[\bar{R}_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left[R_t\right] \text{ par linéarité de l'espérance}$$

Or,

$$\forall t \in [\![1,n]\!], \quad E\left[R_t\right] = E\left[R\right] = \mu.$$

D'où :

$$E\left[\bar{R}_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mu = \mu.$$

□

Proposition B.3.
$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \bar{r}_n)^2$ *est un estimateur sans biais de* σ^2*.*

Démonstration. Considérons la variable aléatoire S_n^2 définie par $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(R_t - \bar{R}_n)^2$ et dont s_n^2 est une réalisation, et montrons que $E\left[S_n^2\right] = \sigma^2$.

Commençons par noter qu'en développant le carré dans l'expression de S_n^2 et en réduisant l'expression, on obtient :

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} R_t^2\right) - \bar{R}_n^2\right)$$

L'espérance de S_n^2 vaut donc, par linéarité :

$$E\left[S_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n} E\left[R_t^2\right]\right) - E\left[\bar{R}_n^2\right]\right).$$

Or,

$$\forall t \in [\![1,n]\!], \quad E\left[R_t^2\right] = E\left[R^2\right],$$

d'où :

$$E\left[S_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\left(E\left[R^2\right] - E\left[\bar{R}_n^2\right]\right).$$

De plus, les variances de R et de $\bar{R}_n$ s'expriment ainsi :

$$V[R] = E\left[R^2\right] - E[R]^2$$

et

$$V\left[\bar{R}_n\right] = E\left[\bar{R}_n^2\right] - E\left[\bar{R}_n\right]^2 = E\left[\bar{R}_n^2\right] - E\left[R\right]^2 \text{ d'après la proposition B.2.}$$

D'où

$$E\left[S_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\left(V[R] - V\left[\bar{R}_n\right]\right).$$

Or par définition, $V[R] = \sigma^2$ et on a :

$$V[\bar{R}_n] = V\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} V[R] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Par conséquent,

$$E\left[S_n^2\right] = \frac{n}{n-1}\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\sigma^2\right) = \sigma^2.$$

□