

PROMOTION 2006

Mémoire d'actuariat présenté devant

Le Jury du CEA

Pour l'obtention du

**Diplôme d'Actuaire du CENTRE D'ÉTUDES
ACTUARIELLES**

Par Jean-Philippe BOISSEAU

Sur le Sujet

**SOLVABILITE 2 ET MESURE DE VOLATILITE
DANS LES PROVISIONS POUR SINISTRES A
PAYER**

Devant un jury composé de

Liste du Jury

Directeur du mémoire

Fabrice TAILLIEU

CONFIDENTIALITÉ ☒

REMERCIEMENTS

Je tiens à adresser mes remerciements à Monsieur Eric Serant et Monsieur Jérôme Nebout, associés du cabinet Milliman Paris, pour la confiance qu'ils m'accordent, pour m'avoir permis de suivre la formation d'actuariat dispensée par le CEA, et m'avoir donné la possibilité de réaliser ce mémoire dans les meilleures conditions.

Je tiens également à remercier Monsieur Fabrice Taillieu, actuaire et responsable du département Assurance Non-Vie, pour m'avoir suivi pendant toute la réalisation de ce mémoire.

J'adresse également ma reconnaissance et mes chaleureux remerciements à Monsieur Laurent Devineau, responsable du département Recherche et Développement, et Monsieur Yoboua Angoua, consultant au sein de l'équipe Assurance Non-Vie pour leur disponibilité, leur gentillesse, leur aide précieuse et la richesse des échanges concernant certaines méthodes statistiques innovantes développées et testées dans ce mémoire.

Je remercie l'ensemble de l'équipe non-vie et en particulier Mademoiselle Christelle Desouhant, Mademoiselle Elise Lheureux, Monsieur Stéphan Fangue, Mademoiselle Lamia Amouch, et Monsieur Mohamed Benkhalfa pour leur soutien et leur altruisme.

Je remercie également Monsieur Christian Robert, directeur des études du CEA, pour ses conseils et le suivi qu'il m'a accordés.

J'adresse enfin ma profonde gratitude à toutes les personnes ayant collaboré à l'élaboration de ce mémoire et avec qui j'ai eu l'opportunité d'échanger au sujet du risque de réserve, en particulier Monsieur Arthur Charpentier, ainsi qu'à toutes les personnes qui m'ont accompagné au cours de la formation du CEA, en particulier Mademoiselle Maria Brohmi, Mademoiselle Julie Gamonet, Mademoiselle Soraya Shami et Monsieur Stanislas Boyer.

SYNTHESE

Le projet Solvabilité 2, en cours d'élaboration, et qui rentrera en application au 1^{er} Janvier 2013, vient réformer en profondeur le système actuel de solvabilité des entreprises d'assurance. La nouvelle réforme s'est dotée à ce jour d'un texte législatif avec le vote en 2009 de la Directive qui fournit les principes directeurs de la future réglementation.

La réforme Solvabilité 2 introduit des modifications profondes par rapport aux règles prudentielles actuellement en vigueur en Europe (Solvabilité 1).

Elle vise en premier lieu à mieux adapter les fonds propres détenus par les entreprises d'assurance aux risques auxquels elles sont exposées dans leur activité. L'Article 101 de la Directive stipule ainsi que « le Capital de Solvabilité Requis correspond à la Valeur-en-Risque des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an ». La Directive précise en outre que le Capital de Solvabilité Requis doit couvrir *a minima* certains risques, dont le risque de souscription en assurance non-vie, défini comme le risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement.

L'une des principales sources d'incertitude pour une entreprise d'assurance non-vie réside en effet dans l'estimation de ses engagements envers ses assurés, et en particulier de ses provisions pour sinistres. Cette incertitude provient essentiellement du fait que le montant des paiements futurs relatifs aux sinistres survenus n'est pas connu à la date d'évaluation des provisions pour sinistres. Nous nous intéressons dans le cadre de ce mémoire à la mesure de cette incertitude, correspondant au risque de réserve.

Dans le référentiel Solvabilité 2, les provisions pour sinistres doivent être évaluées selon une approche « Best estimate », se définissant comme la valeur actuelle probable des paiements futurs relatifs aux sinistres survenus à la date d'évaluation. Les méthodes de provisionnement déterministes (la méthode Chain-Ladder étant la plus répandue sur le marché) permettent une évaluation répondant à ces critères. Toutefois, ces méthodes ne permettent pas de mesurer l'incertitude liée à l'évaluation des engagements.

Le Capital de Solvabilité Requis peut être calculé selon différentes approches : les deux grandes familles de modèles sont la formule standard et le modèle interne. Dans le cadre de l'utilisation d'un modèle interne, le calibrage des risques (en particulier le calibrage du risque de réserve) doit reposer sur des données internes et les entreprises d'assurance doivent définir la méthodologie de mesure des risques. Au regard de l'horizon de temps défini dans la Directive, l'une des questions majeures posées dans ce cas par la réforme Solvabilité 2 est de comprendre comment mesurer la volatilité dans les provisions pour sinistres à horizon un an.

La nécessité de mesurer le risque lié à l'incertitude du montant des provisions pour sinistres d'une part et les progrès effectués depuis une quinzaine d'années dans le domaine du provisionnement stochastique d'autre part, ont progressivement conduit les entreprises d'assurance à utiliser des méthodes de provisionnement stochastiques. Citons notamment les méthodes Mack et Bootstrap. Néanmoins, ces méthodes de provisionnement stochastiques, utilisées par certains acteurs du marché, fournissent dans leur version « classique » une vision à l'ultime de la volatilité des provisions pour sinistres et non pas une vision à un an comme requis dans Solvabilité 2.

L'objectif de cette étude est de répondre à la problématique d'adaptation des méthodes de provisionnement stochastiques habituellement utilisées sur le marché pour les mettre en conformité avec le nouveau cadre prudentiel.

Nous nous proposons dans le premier Chapitre d'exposer le contexte et les principes généraux du nouveau cadre réglementaire Solvabilité 2.

Le deuxième Chapitre présentera la définition et la mesure du risque lié à l'évaluation des provisions pour sinistres. Nous détaillerons également dans cette partie les principes de différentes méthodes déterministes d'évaluation du montant de ces provisions pour sinistres.

Le troisième chapitre sera consacré à la nécessaire adaptation des méthodes de provisionnement stochastiques usuelles (Mack et Bootstrap) en vue d'obtenir une mesure de la volatilité dans le montant des provisions pour sinistres conforme avec l'horizon de un an du cadre Solvabilité 2. Nous présenterons la méthode développée par M.Merz et M.Wüthrich, qui correspond à une adaptation du modèle Mack ; nous proposerons également une adaptation de la procédure Bootstrap.

Enfin, le dernier Chapitre présentera une application numérique permettant de mettre en pratique les méthodes de mesure de la volatilité à horizon un an dans les provisions pour sinistres, et, par suite, de mesurer le risque de réserve selon différentes approches.

L'analyse des différents modèles permettra de montrer que l'adaptation que nous proposons de la procédure Bootstrap s'avère être une alternative intéressante à la méthode développée par M.Merz et M.Wüthrich, et qu'elle présente des avantages dans le cadre de l'utilisation d'un modèle interne notamment.

ABSTRACT

Solvency II is the updated set of regulatory requirements for insurance firms that operate in the European Union. It is scheduled to come into effect late 2012. The Solvency II Framework Directive was adopted by the European Parliament's plenary session on 22 April 2009.

Solvency II introduces strong changes comparing to prudential rules currently in force in Europe (Solvency I).

These new solvency requirements will be more risk-sensitive and more sophisticated than in the past. The Article 101 of the Directive stipulates that "the Solvency Capital Requirement shall correspond to the Value-at-Risk of the basic own funds of an insurance or reinsurance undertaking subject to a confidence level of 99,5 % over a one-year period". The Directive also indicates that the Solvency Capital Requirement shall cover at least several risks, including non-life underwriting risk. The non-life underwriting risk module shall reflect the risk arising from non-life insurance obligations, in relation to the perils covered and the processes used in the conduct of business.

One of the main sources of uncertainty for a non-life company is the estimation of its insurance liabilities, in particular the amount of claims reserves. This uncertainty may essentially arise from the fact that the amount of future payments relative to incurred claims is unknown at the valuation date. The goal of this report is to present methodologies to measure this uncertainty (reserve risk).

Solvency II will be based on economic principles for the measurement of assets and liabilities; thus, claims reserved have to be evaluated based on a "Best estimate" approach. Deterministic reserving methods (Chain-Ladder method being the most prevalent on market) enable to evaluate a "Best estimate" amount of claims reserves. However, these methods do not allow to measure the uncertainty in the claims reserves estimation.

Solvency capital calculations will be based on the standard formula or an internal model. The use of an internal model, risks calibration (in particular the calibration of reserve risk) has to rely on internal data and insurance undertakings may define their own risk measure methodology. Given the time horizon defined in the Directive, one of the major issues raised by Solvency II to non-life insurance undertakings is to understand how to measure volatility in their claims reserves over a one-year time horizon.

Insurance undertakings generally use stochastic reserving methods that enable them to measure volatility in their "Best estimate" evaluation. The two most common methods are the Mack model and the Bootstrap procedure. However, these methods provide in their "standard" version an ultimate view of the claims reserves volatility and not a one-year view as required by the Solvency II framework.

The goal of our study is to assess adaptations of "standard" version of stochastic reserving methods in order to measure a volatility in claims reserves over a one-year time horizon.

The Chapter 1 explains the context and general principles of the Solvency II project.

Chapter 2 deals with to the definition and the measure of the reserve risk. We will also explain the most common methods used to estimate "Best estimate" of claims reserves.

The adaptation of "standard" version of stochastic reserving methods in order in order to measure a volatility in claims reserves over a one-year time horizon will be explained in Chapter 3. In particular, we will analyse the method developed by M.Merz et M.Wüthrich: this method corresponds to an adaptation of the Mack model. We also propose an extension of the bootstrap procedure.

Our analysis will lead to consider that the proposed adaptation of the bootstrap procedure presents advantages in the use of an internal model and is an interesting alternative method to the model developed by M. Merz and M.Wüthrich.

Finally, in the last chapter we will present a numerical application to measure volatility over a one-year time horizon in claims reserves, and then to evaluate the reserve risk with various approaches.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	2
SYNTHESE.....	3
ABSTRACT.....	5
INTRODUCTION.....	9
PREAMBULE – CADRE ACTUARIEL DE L'ASSURANCE NON-VIE.....	10
CHAPITRE 1 – LA REFORME DE LA SOLVABILITE DES SOCIETES D'ASSURANCE.....	11
1. LE SYSTEME DE SOLVABILITE ACTUEL.....	12
1.1. <i>Les fondements du régime de solvabilité actuel</i>	12
1.1.1. Des provisions techniques suffisantes.....	12
1.1.2. Des règles sur les actifs.....	13
1.1.3. Un montant minimum de fonds propres.....	13
1.2. <i>La couverture de la marge de solvabilité</i>	14
1.3. <i>Les limites du régime actuel</i>	15
2. LE PROJET DE DIRECTIVE SOLVABILITE 2.....	17
2.1. <i>Principes et objectifs du nouveau régime</i>	17
2.2. <i>Une structure à trois piliers</i>	17
2.3. <i>Méthode de travail, intervenants et calendrier</i>	18
3. LES EXIGENCES DU PREMIER PILIER.....	20
3.1. <i>La valorisation des actifs et des passifs</i>	20
3.2. <i>Les provisions techniques</i>	20
3.2.1. L'évaluation Best estimate des engagements.....	21
3.2.2. La marge pour risques.....	22
3.3. <i>Les exigences en capital</i>	23
3.3.1. Le Capital Minimum Requis ou MCR.....	23
3.3.2. Le Capital de Solvabilité Requis ou SCR.....	24
3.4. <i>Formule standard vs modèle interne</i>	26
3.4.1. Formule standard.....	26
3.4.2. Modèle interne.....	29
4. LES CONSEQUENCES ATTENDUES DE SOLVABILITE 2.....	33
4.1. <i>Conséquences positives envisagées</i>	33
4.2. <i>Conséquences négatives potentielles</i>	34
CHAPITRE 2 – LE RISQUE DE RESERVE.....	35
1. CADRE GENERAL : LES PROVISIONS POUR SINISTRES A PAYER.....	36
1.1. <i>Les provisions pour sinistres à payer : définitions</i>	36
1.2. <i>Les provisions pour sinistres à payer : évaluation dans le référentiel solvabilité 1</i>	37
1.3. <i>Les provisions pour sinistres à payer : évaluation dans le référentiel solvabilité 2</i>	38
1.3.1. Techniques d'évaluation.....	38
1.3.2. Segmentation pour le calcul du BE des engagements.....	39
1.4. <i>Impact du référentiel Solvabilité 2 sur le montant des provisions pour sinistres à payer</i>	40
2. EVALUATION « TRADITIONNELLE » DES PROVISIONS POUR SINISTRES.....	42
2.1. <i>La méthode Chain Ladder</i>	42
2.1.1. Techniques de triangulation.....	42
2.1.2. Estimation du montant des provisions pour sinistres à payer.....	43
2.1.3. Application.....	44
2.1.4. Facteurs de développement et cadences de règlements.....	45
2.1.5. Prise en compte de l'actualisation.....	46

2.1.6.	Avantages et limites de la méthode Chain Ladder	46
2.2.	<i>Autres méthodes</i>	46
2.3.	<i>Points nécessitant une attention particulière</i>	48
3.	DEFINITION ET MESURE DU RISQUE DE RESERVE	50
3.1.	<i>Définitions</i>	50
3.1.1.	Justification du risque de réserve	50
3.1.2.	Le risque de réserve : définition	51
3.2.	<i>Mesure du risque de réserve dans la formule standard</i>	52
3.2.1.	Définition de la formule standard.....	52
3.2.2.	Sensibilité.....	54
3.2.3.	Analyse critique de la formule standard.....	55
3.2.4.	Impacts des mesure de niveau 2 sur le risque de réserve	55
3.3.	<i>Mesure du risque de réserve dans le cadre d'une formule standard « entity specific »</i>	57
3.4.	<i>Mesure du risque de réserve dans un modèle interne</i>	57
CHAPITRE 3 – MESURE DE VOLATILITE A UN AN DES PROVISIONS POUR SINISTRES A PAYER.....		59
1.	NOTATIONS.....	60
2.	LA NECESSAIRE ADAPTATION DES METHODES DE PROVISIONNEMENT STOCHASTIQUES « USUELLES ».....	62
2.1.	<i>Introduction aux méthodes stochastiques</i>	62
2.2.	<i>Erreur d'estimation et erreur de processus</i>	63
2.3.	<i>Adaptation des méthodes stochastiques « usuelles »</i>	65
3.	METHODES STOCHASTIQUES « USUELLES »	67
3.1.	<i>Le modèle Mack</i>	67
3.1.1.	Spécifications du modèle.....	67
3.1.2.	Validation du modèle.....	68
3.1.3.	Avantages et limites du modèle Mack.....	69
3.2.	<i>Les modèles factoriels stochastiques</i>	69
3.2.1.	Variables explicatives et fonction lien	71
3.2.2.	Estimation.....	72
3.2.3.	Mesure de la précision de l'estimation du montant des provisions pour sinistres à payer : méthode delta et bootstrap.....	73
3.3.	<i>Modèles stochastiques GLM</i>	75
3.3.1.	Principes des modèles linéaires généralisés	75
3.3.2.	Estimation des paramètres.....	76
3.3.3.	Validation du modèle.....	78
3.4.	<i>Le modèle log-linéaire de Christophides</i>	80
3.5.	<i>Bootstrap et provisionnement</i>	82
3.5.1.	Principes	82
3.5.2.	Algorithme général du bootstrap	83
3.5.3.	Avantages et limites du bootstrap.....	86
3.6.	<i>Choix de la méthode</i>	86
3.7.	<i>Prise en compte d'un facteur de queue de développement</i>	87
3.7.1.	Méthode Mack et facteur de queue de développement.....	87
3.7.2.	Procédure bootstrap et facteur de queue de développement	89
4.	ADAPTATION DES METHODES STOCHASTIQUES « USUELLES » : MESURE DE VOLATILITE A HORIZON 1 AN	91
4.1.	<i>La méthode Wuthrich-Merz</i>	91
4.1.1.	Cadre du modèle	92
4.1.2.	Définitions	93
4.1.3.	Estimateurs des deux premiers moments du CDR « observable »	95
4.1.4.	Comparaison avec la formule de Mack.....	96
4.1.5.	Avantages et limites du modèle	97
4.2.	<i>Adaptation de la procédure bootstrap – méthode 1</i>	99
4.2.1.	Adaptation de la procédure bootstrap à horizon 1 an : problématiques et enjeux.....	99
4.2.2.	Algorithme du Bootstrap à un an – premières réflexions.....	101
4.2.3.	Limites	103
4.3.	<i>Adaptation de la procédure bootstrap – méthode 2</i>	104

4.3.1.	Problématiques.....	104
4.3.2.	Algorithme du Bootstrap à un an.....	105
4.3.3.	Prise en compte d'un facteur de queue de développement	106
4.3.4.	Prise en compte de management rules	107
4.3.5.	Avantages et limites du modèle	108
CHAPITRE 4 – APPLICATIONS.....		109
1.	PRESENTATION DE L'EXEMPLE ET CALCUL DU BEST ESTIMATE DES PROVISIONS POUR SINISTRES	109
1.1.	<i>Présentation des données</i>	<i>109</i>
1.2.	<i>Calcul du Best estimate des provisions pour sinistres à payer</i>	<i>111</i>
1.2.1.	Facteurs de développement et cadence de liquidation.....	111
1.2.2.	RC Générale : prise en compte d'un facteur de queue de développement.....	112
1.2.3.	Montant Best estimate des provisions pour sinistres.....	113
2.	COMPARAISON DES METHODES USUELLES ET DE LEUR ADAPTATION A L'HORIZON 1 AN	115
2.1.	<i>Indicateurs de comparaison</i>	<i>115</i>
2.2.	<i>Modèle Mack vs Modèle Wüthrich-Merz</i>	<i>116</i>
2.2.1.	Validation des modèles.....	116
2.2.2.	Comparaison des erreurs de prédiction	118
2.2.3.	Analyse des résultats	121
2.3.	<i>Bootstrap « à l'ultime » vs Bootstrap à un an.....</i>	<i>122</i>
2.3.1.	Validation des modèles.....	122
2.3.2.	Choix du modèle	124
2.3.3.	Mesure de volatilité.....	126
2.3.4.	Analyse des résultats	129
3.	MESURE DU RISQUE DE RESERVE	134
4.	BENCHMARK	137
4.1.1.	Points d'attention	137
4.1.2.	Mesure de volatilité.....	139
CONCLUSION ET PROLONGEMENTS		143
BIBLIOGRAPHIE.....		144
ANNEXE A : LES MODELES GLM		A1
ANNEXE B : LA METHODE DELTA		B1
ANNEXE C : TEST « UP AND DOWN »		C1
ANNEXE D : TRIANGLES DE LIQUIDATION		D1
ANNEXE E : CALCUL DU BEST ESTIMATE DES PROVISIONS POUR SINISTRES.....		E1
ANNEXE F : RESULTATS DU MODELE MACK		F1
ANNEXE G : RESULTATS DU MODELE DE WÜTHRICH-MERZ.....		G1
ANNEXE H : RESULTATS DE LA PROCEDURE BOOTSTRAP « A L'ULTIME ».....		H1
ANNEXE I : RESULTATS DE LA PROCEDURE BOOTSTRAP « A UN AN »		I1
ANNEXE J : CORRELATIONS DES PAIEMENTS FUTURS.....		J1

INTRODUCTION

Le fait d'être solvable se définit comme le fait d'être en mesure de payer ses dettes. Pour une entreprise en général, et une entreprise d'assurance en particulier, la solvabilité traduit l'aptitude à faire face à ses engagements en cas de liquidation, c'est-à-dire d'arrêt de l'exploitation et de mise en vente des actifs. Une entreprise peut donc être considérée comme insolvable dès lors que ses capitaux propres sont négatifs : elle doit en effet plus qu'elle ne possède.

La solvabilité des entreprises d'assurance est une question cruciale tant socialement qu'économiquement, puisqu'elle va traduire l'aptitude d'une entreprise d'assurances à pouvoir honorer ses engagements envers les assurés : c'est pourquoi elle fait l'objet de l'intervention des Autorités publiques sous la forme d'un contrôle prudentiel.

Le projet Solvabilité 2, actuellement en cours d'élaboration, et qui rentrera en application au 1^{er} Janvier 2013, vient réformer en profondeur le système actuel de solvabilité qui a largement montré ses limites.

En cohérence avec les réformes comptables actuellement en cours d'élaboration, la solvabilité des entreprises d'assurance est basée sur une évaluation économique de la compagnie, et repose sur une approche fondée sur les risques auxquels la compagnie est exposée.

L'un des objectifs de Solvabilité 2 est de déterminer le capital de solvabilité requis pour que la compagnie exerce son activité avec un risque d'insolvabilité négligeable pour les assurés. Ainsi, dans le référentiel Solvabilité 2, le capital de solvabilité requis correspond à « la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5% à l'horizon d'un an ». Ce capital de solvabilité requis doit couvrir *a minima* un certain nombre de risques, dont le risque de souscription en assurance non-vie, constitué notamment du risque de réserve. Celui-ci correspond à une déviation à horizon un an de l'évaluation des provisions pour sinistres effectuée en date $t=0$. Au regard de l'horizon de temps de un an, l'une des questions majeures est donc d'appréhender une mesure de la volatilité dans leurs provisions pour sinistres à horizon un an.

L'objectif de cette étude s'inscrit dans cette problématique.

Nous nous proposons dans le premier Chapitre d'exposer le contexte et les principes généraux du nouveau cadre réglementaire Solvabilité 2.

Le deuxième Chapitre présentera la définition et la mesure du risque lié à l'évaluation des provisions pour sinistres. Nous détaillerons également dans cette partie les principes de différentes méthodes déterministes d'évaluation du montant de ces provisions pour sinistres.

Le troisième chapitre sera consacré à la nécessaire adaptation des méthodes de provisionnement stochastiques usuelles (Mack et Bootstrap) en vue d'obtenir une mesure de la volatilité dans le montant des provisions pour sinistres conforme avec l'horizon de un an du cadre Solvabilité 2. Nous présenterons la méthode développée par M.Merz et M.Wüthrich, qui correspond à une adaptation du modèle Mack ; nous proposerons également une adaptation de la procédure Bootstrap.

Enfin, le dernier Chapitre présentera une application numérique permettant de mesurer le risque de réserve selon différentes approches et de mettre en pratique les méthodes de mesure de la volatilité à horizon un an dans les provisions pour sinistres.

PREAMBULE – CADRE ACTUARIEL DE L'ASSURANCE NON-VIE

Le contrat d'assurance est « un contrat en vertu duquel, moyennant le paiement d'une prime fixe ou variable, une partie, l'assureur, s'engage envers une autre partie, le preneur d'assurance, à fournir une prestation stipulée dans le contrat au cas où surviendrait un événement incertain que selon les cas, l'assuré ou le bénéficiaire, a intérêt à ne pas voir se réaliser »¹.

Les éléments essentiels du contrat d'assurance sont au nombre de quatre :

- **le risque** : il s'agit de la raison de l'assurance, un « événement incertain » qui ne dépend pas exclusivement de la volonté des parties et à la survenance duquel est subordonnée l'obligation de l'assureur d'exécuter la prestation convenue. L'incertitude porte soit sur la réalisation de l'événement envisagé (par exemple un accident), soit sur le moment où se réalisera un événement qui se produira inévitablement (par exemple le décès). Tous les risques ne sont pas assurables. Certains sont exclus en raison de leur « illicéité », d'autres pour des raisons propres à la technique des assurances.
- **l'intérêt d'assurance**.
- **la prime** : elle correspond à une somme d'argent versée à l'assureur ; elle est fixée par l'assureur relativement au risque souscrit.
- **la prestation de l'assureur** : il s'agit le plus souvent d'une somme d'argent, mais aussi parfois d'un service, par exemple la direction du procès contre le tiers lésé dans les assurances de responsabilité ou encore l'assistance automobile. Elle peut être déterminée par la police, ou celle-ci peut en décrire le mode d'évaluation. La réparation peut être soit indemnitaire, c'est-à-dire que le montant de l'indemnité répare le préjudice subi, soit forfaitaire avec un montant prévu au contrat, soit les deux (c'est le cas par exemple de l'assurance soins de santé qui prend en charge les frais d'hôpital et les médicaments ainsi que le forfait par jour d'hospitalisation).

L'assureur, recevant les primes avant de verser des prestations dans le cas de réalisation des risques, est soumis à une réglementation spécifique, et il est dans l'obligation d'être en mesure de tenir ses engagements envers tous ses assurés à tout moment et quoiqu'il arrive : l'entreprise d'assurance doit être solvable.

¹ Loi du 25.06.92

CHAPITRE 1 – LA REFORME DE LA SOLVABILITE DES SOCIETES D'ASSURANCE

Cette première partie expose le contexte de notre étude.

Nous expliquons dans un premier temps quels sont les enjeux autour de la solvabilité des entreprises d'assurance, puis le système réglementaire qui est actuellement en vigueur dans l'Union Européenne et en France.

Les limites de ce dernier ont engendré un besoin de réformer et conduit à l'élaboration actuelle de la nouvelle norme Solvabilité 2. Nous expliquons les grands principes et l'état actuel des débats, en détaillant notamment les problématiques techniques développées dans le pilier relatif aux exigences quantitatives.

1. LE SYSTEME DE SOLVABILITE ACTUEL

L'objectif premier de la législation européenne sur l'assurance est de favoriser le développement d'un marché unique des services d'assurance, tout en garantissant un niveau adéquat de protection des assurés.

Les premières directives européennes relatives à la solvabilité des entreprises d'assurance ont été établies dans les années 1970 (directive non vie en 1973 73/239/CE, et directive vie en 1979 79/267/CE) afin de protéger les assurés, tout en instaurant des conditions de concurrence identiques à travers toute l'Europe.

Ces premières directives ont été mises à jour récemment dans le cadre de la réforme de la solvabilité appelée Solvabilité 1 (directives 2002/83/CE et 2002/13/CE). Elles ont été transposées dans le droit français notamment aux articles R. 334-5 et R. 334-13 du Code des Assurances.

1.1. Les fondements du régime de solvabilité actuel

La solvabilité d'une entreprise d'assurance repose actuellement sur trois règles :

- La compagnie se doit d'évaluer correctement les engagements qu'elle a contractés vis-à-vis de ses assurés (les provisions techniques) et veiller à ce que ce montant soit suffisant,
- En représentation de ces engagements, la compagnie détient des actifs qui doivent satisfaire un certain nombre de règles d'évaluation, de dispersion et de congruence,
- Enfin, la compagnie doit toujours disposer d'actifs supérieurs à ses engagements, c'est à dire d'une marge de solvabilité.

1.1.1. Des provisions techniques suffisantes

Les provisions techniques représentent les engagements de l'assureur vis-à-vis des assurés.

Les provisions correspondant aux opérations d'assurance non-vie sont définies dans l'article R. 331-6 du Code des Assurances. On distingue :

- **Les provisions pour sinistres à payer** : ces provisions correspondent à la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes, nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés.

Nous détaillerons cette définition dans le Chapitre 2 dédié au risque de réserve.

- **Les provisions pour primes non acquises** : ces provisions correspondent, pour l'ensemble des contrats en portefeuille, à la part des primes émises et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date de l'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime ou, à défaut, du terme du contrat.
- **Les autres provisions**, en particulier :
 - ✓ La provision pour risques en cours, destinée à couvrir, pour l'ensemble des contrats en cours, la charge des sinistres et des frais afférents aux contrats, pour la période s'écoulant entre la date de l'inventaire et la date de la première échéance de prime pouvant donner lieu à révision de la prime par l'assureur ou, à défaut, entre la date de l'inventaire et le terme du contrat, pour la part de ce coût qui n'est pas couverte par la provision pour primes non acquises,
 - ✓ Les provisions mathématiques, correspondant à la valeur actuelle des engagements de l'entreprise en ce qui concerne les rentes et accessoires de rentes mis à sa charge,
 - ✓ La provision pour égalisation (destinée à faire face aux risques exceptionnels tels que les risques naturels, attentats...),
 - ✓ La réserve de capitalisation (destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu),
 - ✓ La provision pour risque d'exigibilité (destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R. 332-20 de Code des Assurances).

L'article R331-16 de Code des Assurances précise en particulier que le montant de la provision pour sinistres à payer doit être suffisant pour liquider tous les sinistres.

1.1.2. Des règles sur les actifs

Le décalage temporel entre le moment où l'assureur perçoit les primes et celui où il paie les sinistres permet à l'assureur de disposer de sommes importantes qu'il peut placer sur les marchés financiers.

Les engagements réglementés (en particulier les provisions techniques) doivent être représentés par des actifs « équivalents », c'est à dire de même montant.

Ces actifs doivent également être congruents, ce qui signifie que les engagements pris dans une monnaie doivent être couverts par des actifs libellés ou réalisables dans cette monnaie.

Enfin, ils doivent appartenir à la liste des actifs admissibles, être dispersés, et satisfaire aux limitations par catégories d'actifs (65 % d'actions, 40 % d'immobilier, 10 % pour les prêts et dépôts).

De plus, ils sont comptabilisés dans le bilan en valeur historique et non en valeur de réalisation. On distingue les placements qui ont une valeur de remboursement et dont la valeur comptable évolue (amortissables), des autres placements qui restent à leur valeur d'acquisition (non amortissables).

1.1.3. Un montant minimum de fonds propres

En assurance non-vie, l'exigence minimale de marge de solvabilité (Marge de Solvabilité Réglementaire, ou MSR) est déterminée, soit par rapport au montant annuel des primes ou cotisations, soit par rapport à la charge moyenne annuelle des sinistres. Cette exigence minimale de marge est égale au plus élevé des résultats obtenus par application des deux méthodes.

- **Première méthode : le calcul par rapport aux primes**

La formule est la suivante :

$$MSR_{primes} = \{18\% \times \min(seuil_p; P) + 16\% \times \max(P - seuil_p; 0)\} \times \{\max(taux_cession; 50\%)\}$$

Avec :

- P : maximum entre les primes émises et les primes acquises de l'année (nettes des annulations et des impôts sur primes),
- $seuil_p$: seuil pour le calcul par rapport aux primes (57 500 k€), la première tranche de primes étant plus « chargée » que la seconde,
- $taux_cession$: rapport existant, pour les trois derniers exercices entre le montant des sinistres demeurant à la charge de l'entreprise après cession en réassurance.

- **Seconde méthode : calcul par rapport à la charge moyenne annuelle des sinistres**

La formule est la suivante :

$$MSR_{charges} = \{26\% \times \min(seuil_s; S) + 23\% \times \max(S - seuil_s; 0)\} \times \{\max(taux_cession; 50\%)\}$$

Avec :

- S : Montant des prestations payées (nettes de recours encaissés et brutes de réassurance, aussi bien pour les affaires directes que pour les acceptations) au cours des trois derniers exercices auquel s'ajoute la différence entre les provisions pour sinistres à payer constituées à la fin du dernier exercice

d'inventaire et celles constituées au commencement du deuxième exercice précédant le dernier exercice d'inventaire,

- $Seuils$: seuil pour le calcul par rapport aux sinistres (40 300 k€), la première tranche de sinistres étant plus « chargée » que la seconde,
- $taux_cession$: rapport existant, pour les trois derniers exercices entre le montant des sinistres demeurant à la charge de l'entreprise après cession en réassurance.

Les niveaux des seuils utilisés dans ces deux méthodes sont, selon la réforme Solvabilité 1, révisés chaque année en fonction de l'évolution de l'indice européen des prix à la consommation publié par Eurostat pour l'ensemble des états membres. Les adaptations, arrondies au multiple de 100 000 euros supérieurs, seront automatiques, sauf si la variation depuis la dernière adaptation est inférieure à 5%.

De plus, afin de mieux adapter l'exigence de fonds propres réglementaires au profil de risque réel de l'entreprise, une marge de solvabilité plus élevée est prévue pour certaines branches d'assurance non-vie, telles que les branches marine et aviation. Pour certains risques cycliques ou aléatoires pratiqués à titre principal (tempêtes, grêle), la charge moyenne des sinistres est calculée sur sept exercices sociaux.

Le montant de MSR ainsi calculé est un montant minimal requis, les Autorités de contrôle disposant de mesures d'assainissement si la marge de solvabilité disponible devenait inférieure à la marge de solvabilité requise.

Il existe également un deuxième seuil de solvabilité, plus bas que la MSR : le fonds de garantie (art R.334-7 du Code des Assurances). Il est défini comme le maximum entre le tiers de la MSR et un montant fixe en euros, le fonds de garantie minimum². Ce seuil conditionne la mise en place d'un plan de financement à court terme soumis à l'approbation des Autorités de contrôle.

Ces trois règles sont complétées d'un contrôle par les tutelles nationales portant essentiellement sur les bilans sociaux « solo ». Ce contrôle a notamment permis de traverser les tempêtes de Lothar et Martin en 1999 et d'absorber le *krach* boursier de 2001 moyennant certains aménagements mineurs des règles : constitution de la provision pour risque d'exigibilité par tiers, théorie de la valeur durable des actions, adoption d'une franchise de 30% correspondant à la volatilité des marchés prenant implicitement en compte la remontée à venir des cours boursiers.

1.2. La couverture de la marge de solvabilité

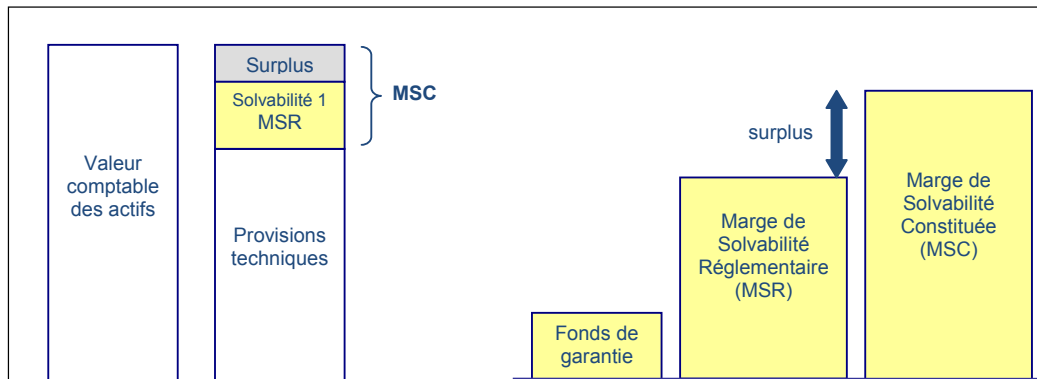
Les compagnies doivent justifier d'une marge de solvabilité disponible (ou marge de solvabilité constituée MSC) supérieure à la marge réglementaire ; la couverture de la MSR est ainsi assurée par la présence d'un surplus.

En France, différents éléments entrent dans le calcul de cette marge disponible, et peuvent être classés en trois groupes (Article A.334-4 de Code des Assurances) :

- Les premiers éléments sont admis sans aucune restriction : il s'agit du capital social versé, des réserves ne correspondant pas à des engagements, de la réserve de capitalisation, des bénéfices ou pertes à reporter déduction faite des dividendes à verser au titre du dernier exercice,
- Les seconds sont admis avec restriction : les fonds effectivement versés provenant de l'émission de titres ou emprunts subordonnés sont admis à hauteur de 50 % de l'exigence de capital pour les titres subordonnés à durée indéterminée (TSDI), et de 25 % pour les titres subordonnés remboursables (TSR),
- Les troisièmes ne sont admis qu'avec l'accord des autorités de contrôle : il s'agit des plus-values latentes.

² Ce fonds ne peut être inférieur à 2 200 000 euros. Toutefois, il ne peut être inférieur à 3 200 000 euros pour les entreprises pratiquant tout ou partie des risques compris dans l'une des branches classées à l'article R. 321-1 sous les numéros 10 à 15. Pour les entreprises constituées sous la forme de sociétés d'assurance mutuelle ainsi que pour leurs unions, ces derniers montants sont respectivement fixés à 1 600 000 et 2 400 000 euros.

Le schéma ci-dessous illustre la MSR et sa couverture :



1.3. Les limites du régime actuel

Le système de solvabilité actuel décrit ci-dessus présente un certain nombre de limites.

Les reproches principaux qui sont faits à ce système sont le manque de transparence (la prudence logée dans les provisions n'est pas explicite) et le manque de cohérence (paradoxalement l'exigence de capitaux propres est maximale pour les entreprises les mieux provisionnées).

Nous détaillons ci-dessous les principales limites.

- **Un manque de transparence et de cohérence**

La valorisation du bilan selon les normes comptables actuellement en vigueur ne traduit pas la réalité économique de la situation de l'entreprise d'assurance : la valorisation des actifs ne correspond pas à leur valeur d'échange sur les marchés financiers et les provisions techniques incluent une marge de prudence, ce qui nuit à une identification des dettes de l'entreprise d'assurance par destination (notamment envers les assurés et les actionnaires).

- **Une appréhension des risques limitée**

La formule actuelle appréhende le besoin de solvabilité réglementaire de façon simple, à partir uniquement de coefficients appliqués sur des volumes de primes et de sinistres.

Cette simplicité implique que l'ensemble des risques auxquels les assureurs font face n'est pas intégré : les assureurs non-vie sont soumis à des risques de taux, des risques de défaut des réassureurs, des risques opérationnels, des risques de sous-tarification, de mauvaise estimation des provisions, etc qui ne sont pas reflétés dans les volumes de primes et de provisions.

A titre d'illustration :

- Deux compagnies A et B, la première exerçant des activités de la branche « Dommages aux Biens » uniquement et la seconde exerçant des activités de la branche « RC Générale » uniquement, à volume de primes et de sinistres identiques, auront la même exigence de marge alors que les facteurs de risques auxquels ces deux compagnies sont soumises ne présentent a priori pas la même volatilité,
- Deux compagnies A et B, la première investissant massivement dans des actifs risqués et la seconde n'investissant que dans des actifs à revenus fixes, à volume de primes et de sinistres identiques, auront la même exigence de marge alors que la compagnie A prend plus de risques et est susceptible d'être insolvable vis-à-vis des assurés en cas d'une chute brutale des marchés financiers.

Ce manque de sensibilité aux risques n'incite pas les assureurs à gérer convenablement leurs risques, ni à en améliorer la gestion ou à consentir à des investissements en la matière.

- **Une vision statique de la solvabilité**

Les formules actuelles se basent uniquement sur des montants de primes de l'année en cours et de la sinistralité des trois dernières années, et supposent ainsi que l'expérience passée est suffisante pour juger du besoin de marge.

L'approche est donc purement « statique » et non prospective, et n'appréhende pas un changement futur dans le profil de risque d'une compagnie (ex : changement dans la politique de souscription).

- **Une vision quantitative des risques**

Le système de solvabilité actuel repose sur des critères quantitatifs : un montant minimum de fonds propres, une évaluation prudente des provisions, des règles sur les actifs.

Le régime actuel ne tient donc pas compte de la qualité de la gestion des risques et de la gouvernance d'entreprise : gestion financière, gestion des risques, gestion des procédures, etc

- **Des restrictions au bon fonctionnement du marché unique**

Le fait que les normes minimales fixées par la législation européenne en vigueur puissent être complétées par des règles supplémentaires au niveau national, fausse le marché unique de l'assurance et porte atteinte à son bon fonctionnement. Cela entraîne une augmentation des coûts supportés par les assureurs européens et entrave la concurrence au sein de l'Union Européenne.

Le marché unique est également touché par un déséquilibre dans la mesure où les contrôles sont localement exercés par les différentes Autorités de contrôle.

- **Des règles non optimales pour le contrôle prudentiel des groupes**

En matière de contrôle prudentiel des groupes, l'approche actuelle, ayant pour base l'entité juridique, est de plus en plus déconnectée de la façon dont les groupes sont structurés et organisés dans la réalité.

L'introduction de systèmes de gestion des risques étendus à l'ensemble du groupe et la concentration des fonctions-clés ont, en effet, induit une organisation de plus en plus centralisée. Or, cet écart entre la façon dont les groupes d'assurances sont gérés et celle dont leur contrôle prudentiel est organisé augmente non seulement les coûts qu'ils doivent supporter, mais aussi le danger de passer à côté de risques fondamentaux qui les menacent dans leur ensemble.

2. LE PROJET DE DIRECTIVE SOLVABILITE 2

Les limites du régime actuel ont conduit à l'élaboration d'une nouvelle réglementation en matière de solvabilité : Solvabilité 2. Nous présentons dans cette partie le cadre général du projet Solvabilité 2 : ses objectifs, ses principes, la structure des nouvelles exigences de solvabilité, etc

2.1. Principes et objectifs du nouveau régime

Le projet européen Solvabilité 2 vise à moderniser les règles de solvabilité applicables à l'ensemble des entreprises d'assurances afin :

- d'harmoniser les règles de solvabilité au niveau européen,
- de maintenir un haut niveau de protection des assurés,
- de mieux connaître et d'évaluer leurs risques, en adaptant les exigences réglementaires à l'ensemble des risques inhérents à leur activité (risques techniques, risques de placement, risque catastrophe,...) afin de pouvoir allouer suffisamment de capital pour les couvrir,
- d'assurer une application européenne harmonisée.

Ce cadre de référence se traduit par des exigences en matière :

- d'identification des risques,
- de quantification, de maîtrise et de suivi des risques : d'une part en intégrant l'ensemble des risques liés aux différentes activités à un réel cadre prudentiel, et d'autre part en incitant les entreprises d'assurance et de réassurance à piloter et à gérer leurs risques,
- de communication d'informations au marché et aux autorités de tutelle permettant d'apprécier la situation de l'entreprise d'assurance tant d'un point de vue de la solvabilité et de la solidité financière, que d'un point de vue de la robustesse du système de gestion des risques.

La réforme Solvabilité 2 s'inscrit dans la lignée de la réforme Bâle 2 en vigueur dans le domaine bancaire et dans une évolution des principaux régimes réglementaires vers une meilleure maîtrise des risques : Norme Risk Based Capital aux Etats-Unis (1992), Swiss Solvency Test en Suisse (2004), Individual Capital Adequacy Standards au Royaume-Uni (2005).

2.2. Une structure à trois piliers

La Commission a opté pour une structure à trois piliers largement inspirée des principes en vigueur dans le secteur bancaire.

- Le **premier pilier** traite des exigences financières quantitatives, des règles sur les fonds propres en imposant des exigences de capital cible et de capital minimum, et des règles d'évaluation des provisions techniques. Les modalités de calcul du capital cible et du capital minimum sont actuellement en cours de définition.
- Le **deuxième pilier** aborde la question du processus de surveillance prudentielle. Il établit des principes de saine gestion des risques, et d'efficacité du contrôle interne.
- Le **troisième pilier** traite de la discipline de marché en se basant sur un principe de transparence et édicte des exigences en matière d'information et de communication financières.

2.3. Méthode de travail, intervenants et calendrier

La mise en place de la nouvelle réglementation Solvabilité 2 s'inscrit depuis 2003 dans le cadre de la procédure dite « Lamfalussy », qui prévoit l'adoption de principes rédigés en termes généraux complétés par des mesures de mise en œuvre.

Un système à « quatre niveaux » a ainsi été établi en vue de rendre le processus d'élaboration de la législation plus efficace et plus transparent :

- Niveau 1 : élaboration et adoption des principes-cadres (il y a co-décision du Conseil et du Parlement Européen sur proposition de la Commission),
- Niveau 2 : élaboration et adoption des mesures d'exécution techniques des principes-cadres adoptés au premier niveau, par le Comité des Assurances (présidé par la Commission Européenne, et composé de représentants des Etats membres),
- Niveau 3 : coopération des régulateurs nationaux (à travers l'organe appelé le CEIOPS³ qui représente les Autorités de contrôle), afin d'assurer une bonne transposition en droit national des textes de niveaux 1 et 2,
- Niveau 4 : mise en œuvre au niveau national (sous le contrôle de la Commission Européenne et des Autorités nationales).

L'objectif du processus Lamfalussy est d'assurer un dialogue permanent et transparent entre le législateur et les acteurs du marché, notamment par le biais de consultations publiques à chaque niveau de la procédure.

Les acteurs du marché sont donc multiples : la Commission Européenne, les Etats membres à travers les autorités de contrôle représentées par le CEIOPS, et les tiers : groupes d'experts comme le Groupe Consultatif Actuariel Européen, industrie de l'assurance avec notamment le CEA (Comité Européen des Assurances), le CRO Forum (Chief Risk Officer, regroupant des directeurs de gestion des risques des principaux assureurs européens), la FFSA (Fédération Française des Sociétés d'Assurances), GEMA (Groupement des entreprises mutuelles d'assurances), etc.

Les mesures de Niveau 1 sont aujourd'hui finalisées, et se sont traduites par l'adoption par le parlement européen de la Directive. Cette adoption fait suite à la proposition de Directive incluant les mesures de niveau 1, publiée par la Commission Européenne en juillet 2007 (puis une proposition de directive modifiée en février 2008) sur la base des travaux réalisés par CEIOPS. La Directive cadre Solvabilité 2 a été promulguée le 17 décembre 2009 au journal officiel de l'union européenne. La réforme Solvabilité 2 s'est donc désormais dotée d'un texte législatif qui fournit les principes directeurs de la future réglementation.

Sur mandat de la Commission Européenne, le CEIOPS a rédigé en 2009 des avis techniques en vue de l'élaboration des mesures de niveau 2 : un premier avis a été transmis à la Commission début Novembre 2009, suivi d'un second en Janvier 2010, en vue d'une adoption des mesures d'exécution en 2011.

Pour recueillir l'avis du marché sur ces mesures de niveau 2, le CEIOPS a soumis ses propositions aux acteurs de l'assurance européenne, sous la forme d'articles de consultation (les « Consultation papers » ou CP). Trois vagues de « Consultation papers » ont été soumises en 2009, dans lesquels les concepts et notions de la Directive sont précisés en détail, à la fois sur les piliers 1, 2 et 3. Parmi les thèmes abordés, citons par exemple la construction du bilan économique, le système de gouvernance, l'approbation d'un modèle interne, le calcul des provisions techniques, l'évaluation des différents modules de risques. Nombreux sont les intervenants qui participent à ces vagues de consultations et qui font remonter au CEIOPS leurs commentaires sur les orientations et les options préconisées dans les Consultation papers.

L'année 2010 sera marquée par la réalisation d'une étude quantitative d'impact (EQI ou QIS : « Quantitative Impact Study »), la cinquième, qui se déroulera d'Août à Novembre 2010, dont le but est d'évaluer l'impact quantitatif des futures normes et de tester certaines options.

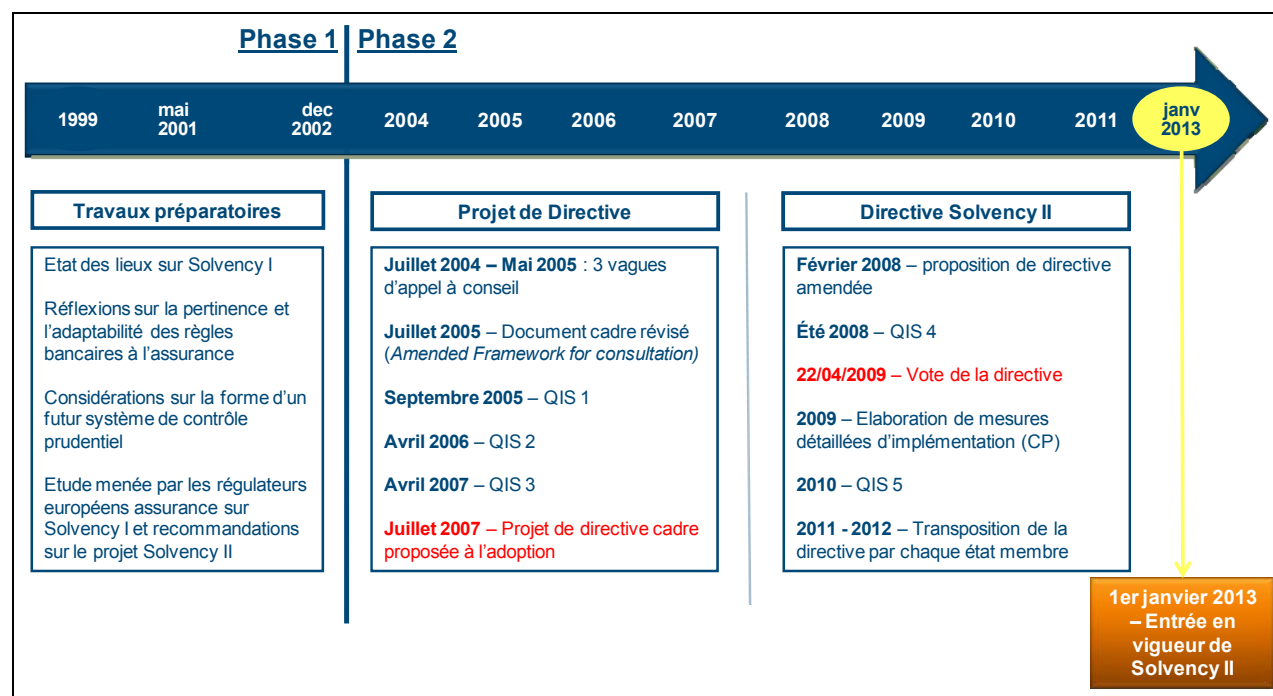
³ Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisor : il s'agit de l'organe qui regroupe les Autorités de contrôle européennes.

Ce QIS servira en vue de l'adoption de spécifications définitives et fait suite à une série de quatre QIS successifs, qui ont couvert un champ de plus en plus large :

- le QIS1 se limitait à l'évaluation des provisions techniques,
- le QIS2 incluait une première approche pour la détermination des exigences de capital, ainsi que les aspects relatifs aux éléments éligibles à la couverture des exigences,
- le QIS3 a abordé pour la première fois les problématiques relatifs aux groupes d'assurance sous l'angle quantitatif,
- le QIS4 avait notamment pour objectifs de fournir des renseignements détaillés quant aux impacts quantitatifs de Solvabilité 2 sur le bilan des assureurs, de vérifier l'adéquation des spécifications techniques développées par le CEIOPS aux principes définis dans la directive (qui était alors en cours d'élaboration) et de collecter des données tant quantitatives que qualitatives sur les différentes options.

Les spécifications techniques du QIS5 seront élaborées par la Commission Européenne (contrairement aux précédents QIS, proposées par le CEIOPS) sur la base notamment de la synthèse par le CEIOPS des avis techniques sur les mesures de niveau 2. La publication est prévue pour fin Juin 2010. Des pré-spécifications ont été publiées le 15 Avril 2010, celles-ci faisant l'objet d'une consultation des différents acteurs du marché de l'assurance européen.

L'entrée en vigueur définitive du nouveau référentiel Solvabilité 2 est prévue pour le 1^{er} Janvier 2013, suite à la transposition des textes par chaque état membre.



3. LES EXIGENCES DU PREMIER PILIER

Le premier pilier a pour objectif de définir des seuils quantitatifs aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres. Ces seuils deviendront des seuils réglementaires. Deux niveaux de fonds propres sont définis : le MCR (Minimum Capital Requirement ou Capital Minimum Requis) et le SCR (Solvency Capital Requirement ou Solvabilité Complète Requête) :

- Le **MCR** représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'autorité de contrôle pourra demander le retrait de l'agrément à l'entreprise d'assurance concernée,
- Le **SCR** représente le capital cible nécessaire pour absorber des chocs provoqués par des événements imprévus.

Nous présentons dans cette partie les points clés relatifs aux exigences quantitatives, dont les grands principes sont connus, même si certains points restent en cours de finalisation.

3.1. La valorisation des actifs et des passifs

L'article 75 de la Directive définit les règles de valorisation des actifs et des passifs :

- Les actifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être échangés dans le cadre d'une transaction conclue dans des conditions de concurrence normales entre des parties informées et consentantes,
- Les passifs sont valorisés au montant pour lequel ils pourraient être transférés ou réglés dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes.

La valorisation du bilan repose donc sur une approche économique des actifs et des passifs. En particulier, les placements seront évalués à leur valeur de marché, et non en valeur historique comme dans le cadre de Solvabilité 1.

3.2. Les provisions techniques

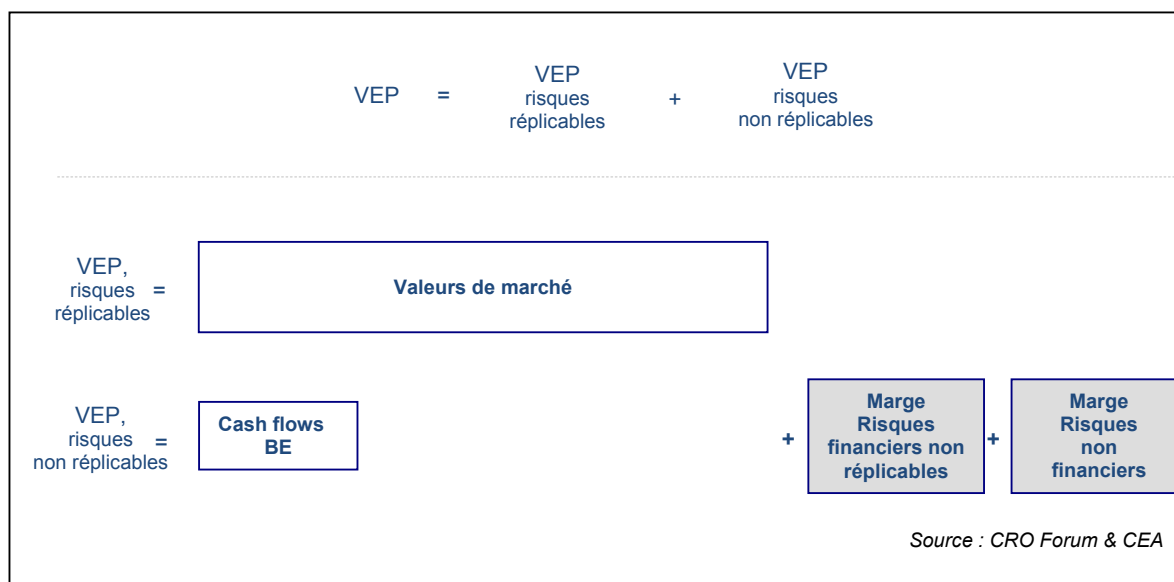
L'article 76 de la Directive définit les provisions techniques comme le montant correspondant à ce que l'entreprise d'assurance devrait payer en cas de transfert immédiat de son portefeuille à un tiers.

Le calcul des provisions techniques doit être cohérent avec les informations fournies par les marchés financiers et se baser sur les données techniques disponibles. Enfin les provisions techniques doivent être calculées d'une manière « prudente, fiable et objective ».

En pratique, le calcul des provisions distingue :

- Les risques répliquables (« hedgeables ») par des instruments financiers, qui sont alors enregistrés dans les comptes à leur valeur de marché,
- Les risques non répliquables (« non-hedgeables ») qui sont des risques pour lesquels aucune couverture ne peut être trouvée. Il s'agit de la plupart des risques d'assurance. Dans ce cas, le montant des provisions techniques correspond à la somme d'un Best estimate des engagements et d'une marge pour risques.

Les composantes de cette valeur économique des passifs (VEP) sont donc les suivantes :



3.2.1. L'évaluation Best estimate des engagements

L'article 77 de la Directive définit le Best estimate comme l'espérance des flux futurs actualisés permettant d'honorer les engagements envers les assurés.

Plusieurs notions méritent d'être soulignées dans cette définition :

- **Espérance** : le Best estimate est défini comme l'estimation au plus juste du montant des provisions, sans marge de prudence, contrairement au montant des provisions établi dans le référentiel Solvabilité 1,
- **Valeur probable** : la définition tient compte du fait que les flux futurs sont stochastiques et que par conséquent, une incertitude existe lors de leur évaluation,
- **Valeur temps** : contrairement au cadre Solvabilité 1, les flux futurs sont actualisés (à l'aide d'une courbe de taux sans risque).

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper ou CP 39⁴) précisent en outre que, pour les activités non-vie, un calcul séparé devra être mis en œuvre pour évaluer la provision pour primes d'une part (relative aux sinistres survenant après la date d'évaluation, sur la période d'exposition résiduelle) et la provision pour sinistres d'autre part (relative aux sinistres survenus avant la date d'évaluation).

Nous reviendrons plus spécifiquement dans le Chapitre 2 sur la définition et les principes d'évaluation de la provision pour sinistres.

⁴ CP39 - Actuarial and statistical methodologies to calculate the Best estimate

3.2.2. La marge pour risques

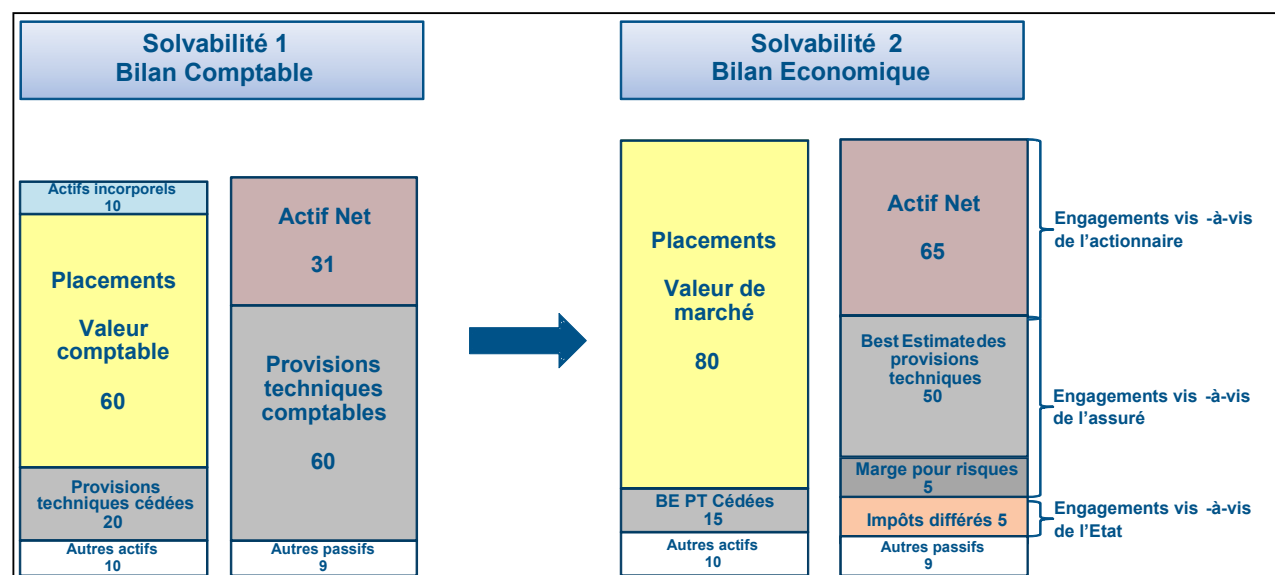
L'article 77 de la Directive précise que la marge pour risques est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques corresponde au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance attendraient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.

Cette marge pour risque doit être évaluée selon la méthode « coût du capital », c'est-à-dire en déterminant le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au Capital de Solvabilité Requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance sur toute la durée de vie de ceux-ci.

La directive précise en outre que :

- Le calcul du Best estimate doit se baser sur des informations fiables et des hypothèses réalistes et doit se déduire de méthodes actuarielles et statistiques adéquates, applicables et pertinentes.
- Le Best estimate doit être calculé brut de réassurance, les flux liés à la réassurance et aux véhicules de titrisation étant évalués séparément (et leur valeur comptabilisée à l'actif du bilan).
- Les provisions techniques doivent être calculées par classes homogènes de risque. Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 27⁵) proposent une segmentation en 14 classes pour les activités non-vie et santé (ces segments seront présentés dans le Chapitre 2).

Le schéma ci-dessous présente de façon simplifié le passage d'un bilan actuel à un bilan Solvabilité 2 :



NB : Echelle non respectée

⁵ CP27 - Technical Provisions - Lines of business on the basis of which (re)insurance obligations are to be segmented

Les principales différences entre le bilan établi selon les normes Solvabilité 1 et le bilan établi selon les normes Solvabilité 2 sont les suivantes :

- La valeur de marché des actifs se compose de la valeur comptable et des plus-values latentes,
- La suppression des actifs incorporels dans le référentiel Solvabilité 2 repose sur l'hypothèse que, dans l'illustration simplifiée présentée ci-dessus, aucun de ces actifs ne peut être évalué en valeur de marché,
- Le passage des provisions techniques comptables à une valorisation Best estimate inclut la suppression de la prise en compte d'un niveau de prudence et la prise en compte de l'actualisation des cash-flows futurs,
- L'impôt différé correspond aux impôts payés dans le futur au titre de différences temporelles (écart entre la valeur comptable et la valeur de la base taxable),
- La différence entre la valeur des actifs et la valeur des passifs correspond à l'actif net (ou NAV : « Net Asset Value »).

La valorisation économique des actifs et des passifs permet une distinction directe des dettes de l'entreprise d'assurance envers les actionnaires, les assurés et l'Etat.

Hormis la valorisation des provisions techniques, nous ne détaillerons pas davantage dans la suite la valorisation des autres postes du bilan.

3.3. Les exigences en capital

Le calcul du niveau de capital requis dans le nouveau régime de solvabilité est détaillé dans les sections 4 et 5 de la Directive.

Deux niveaux de fonds propres sont définis : le MCR (Minimum Capital Requirement ou Capital Minimum Requis) et le SCR (Solvency Capital Requirement ou Capital Cible) :

- Le **MCR** représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'autorité de contrôle pourra demander le retrait de l'agrément,
- Le **SCR** représente le capital cible nécessaire pour absorber des chocs provoqués par des événements imprévus.

Les paragraphes suivants détaillent les principes généraux et les définitions qui sous-tendent ces deux grandeurs.

3.3.1. Le Capital Minimum Requis ou MCR

Le MCR correspond à un montant de fonds propres de base éligibles en-deçà duquel les preneurs et les bénéficiaires seraient exposés à un niveau de risque inacceptable si l'entreprise d'assurance ou de réassurance concernée était autorisée à poursuivre son activité.

Il sera calculé de façon simple, par une formule linéaire qui s'exprimera à partir des grandeurs suivantes : primes, provisions, capitaux sous risque, frais. Cette formule sera soumise à un plancher et un plafond s'exprimant en pourcentage du SCR (respectivement 25% et 45%) et à un plancher absolu.

Cette formule linéaire sera calibrée de manière à correspondre à la Valeur-en-Risque (VaR) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 85 %, à l'horizon d'un an.

3.3.2. Le Capital de Solvabilité Requis ou SCR

- **Définition générale**

L'article 101 de la directive définit le SCR comme correspondant à la Valeur-en-Risque (Value at Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99.5 % à l'horizon d'un an.

La définition donnée correspond à un calcul de capital économique, qui peut se définir de façon générale comme suit : le montant de capitaux propres, évalué sur une base réaliste, nécessaire à une société pour couvrir les risques qu'elle gère ou collecte, ou encore : le niveau de capital requis pour assurer la solvabilité économique de la compagnie à un horizon et un niveau de probabilité donnés.

La ruine se produisant lorsque les actifs deviennent insuffisants pour couvrir les passifs, le capital économique correspond donc au montant d'actifs que l'entreprise d'assurance se doit de détenir en sus du passif « économique » pour assurer une situation nette positive à un horizon de temps et un niveau de confiance prédéterminés. « Economique » s'entend par « évalué en cohérence avec le marché ».

Dans le cadre de Solvabilité 2 :

- l'**horizon** est de **1 an**,
- le niveau de confiance est de **99.5%**,
- la mesure du risque est une mesure de type Valeur-en-Risque (VaR).

Le SCR correspond donc au montant de capital nécessaire pour ne pas être en ruine avec une probabilité de 99.5% et à horizon défini 1 an.

Les entreprises d'assurance et de réassurance devront démontrer qu'ils détiennent des fonds propres de base éligibles couvrant le SCR.

NB : Les fonds propres de base se composent des éléments suivants :

- *L'excédent des actifs par rapport aux passifs, évalués conformément à l'article 75 (comme décrit au paragraphe 3.1)*
- *Des passifs subordonnés.*

- **Les risques pris en compte dans le calcul du SCR**

Le Capital de Solvabilité Requis couvre au minimum les risques suivants :

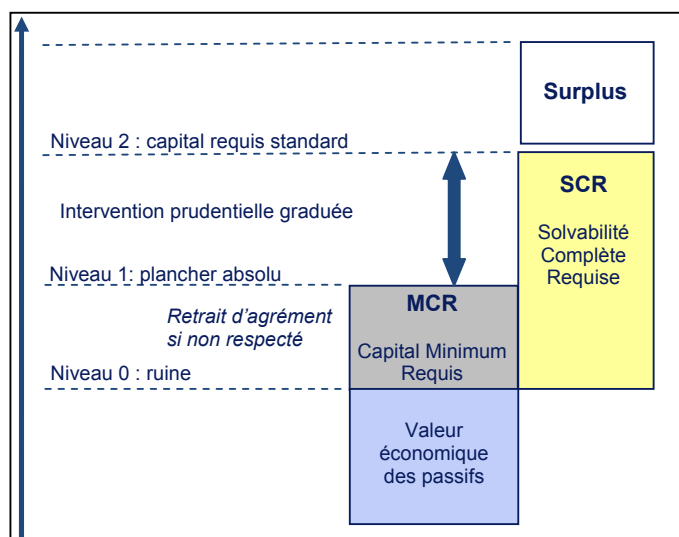
- **Le risque de souscription** : il s'agit du risque de perte ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, en raison d'hypothèses inadéquates en matière de tarification et de provisionnement.
Ce risque sera évalué pour les activités vie, non-vie et santé.
- **Le risque de marché** : ce risque est lié au niveau ou à la volatilité de la valeur de marché des instruments financiers ayant un impact sur la valeur des actifs et des passifs de l'entreprise concernée. Il reflète toute inadéquation structurelle entre les actifs et les passifs, en particulier au regard de leur duration. L'exposition au risque de marché est mesurée par l'impact des mouvements de variables financières, comme le prix des actions, les taux d'intérêts, le prix de l'immobilier, et les taux de change.
- **Le risque de crédit** : il s'agit du risque de perte ou de changement défavorable de la situation financière résultant de fluctuations affectant la qualité de crédit d'émetteurs de valeurs mobilières, de contreparties ou de tout autre débiteur et auquel les entreprises d'assurance ou de réassurance sont exposées sous forme de risque de contrepartie (le principal pour les entreprises d'assurance étant le risque de défaut des réassureurs), de risque de spread ou de concentration.

- **Le risque opérationnel** : il s'agit du risque de perte résultant de procédures internes inadéquates ou défaillantes, ou de membres du personnel et de systèmes, ou d'événements extérieurs. Cette définition recouvre donc notamment les erreurs humaines, les fraudes et malveillances, les défaillances des systèmes d'information, les problèmes liés à la gestion du personnel, les litiges commerciaux, etc.

Le calcul du SCR tient compte de l'impact des techniques d'atténuation des risques : réassurance, couverture des actifs, etc.

Le calcul du SCR sera effectué annuellement et notifié aux autorités de contrôle. Néanmoins, lorsque des éléments semblent indiquer que le profil de risque d'une entreprise d'assurance ou de réassurance a changé significativement depuis la date de la dernière notification du SCR, les autorités de contrôle peuvent exiger de cette entreprise que le SCR soit recalculé.

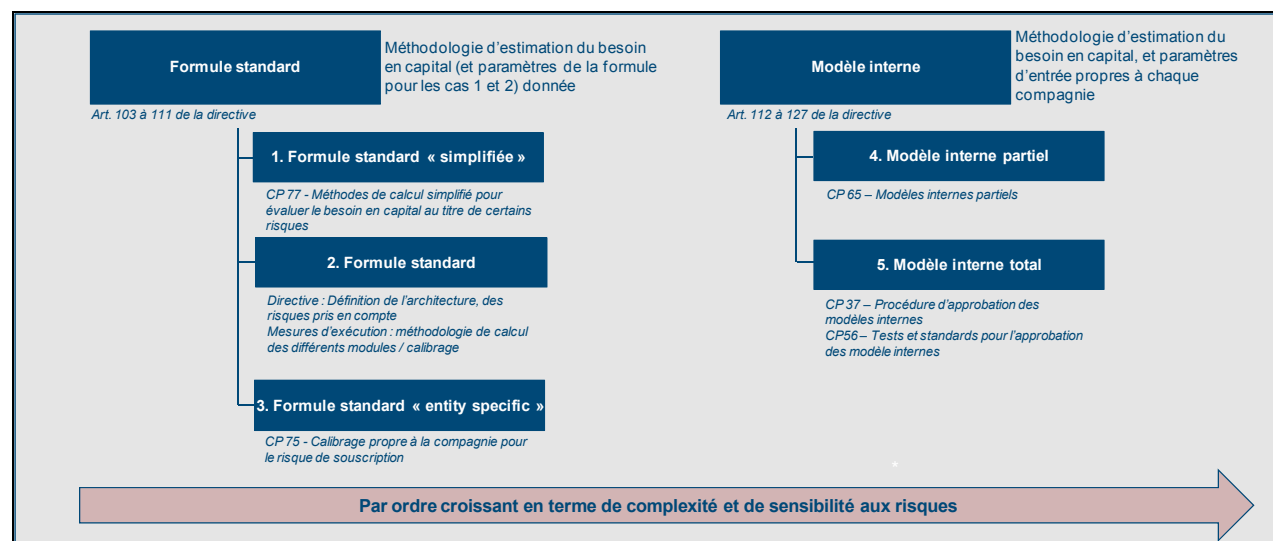
Les nouvelles exigences peuvent se traduire schématiquement de la façon suivante :



Sous certaines circonstances exceptionnelles, les autorités de contrôle pourront en outre imposer une exigence de fonds propres supplémentaire (« capital add-on » ou SCR majoré).

3.4. Formule standard vs modèle interne

Le schéma ci-dessous présente les différents modèles d'évaluation du besoin en capital :



Ces différents modèles peuvent être classés en deux grandes familles : formule standard et modèle interne.

La formule standard est le modèle « de base » et l'utilisation par une entreprise d'assurance d'un modèle autre que la formule standard pour évaluer son besoin en capital devra être justifiée.

3.4.1. Formule standard

La directive définit un certain nombre de principes généraux tels que la structure générale de la formule, les risques à prendre en compte, mais certains points tels que le calibrage restent à définir.

Pour mener à bien la construction de cette formule, en concertation avec les organismes d'assurances, la Commission Européenne a demandé au CEIOPS d'étudier les répercussions quantitatives probables du nouveau système par le biais d'études quantitatives d'impact.

A ce jour, quatre Etudes Quantitatives d'Impact ont eu lieu ; elles ont permis de définir d'ores et déjà un certain nombre de choix structurants (structure de la formule, approche de calcul de la marge pour risques, ... etc) et de mesurer l'impact des calibrages. Le QIS5 revêtira une importance particulière, puisqu'il devrait être le dernier et ainsi constituer pour l'ensemble des acteurs :

- une dernière opportunité d'évaluer l'adaptation de l'ensemble des processus à Solvabilité 2 par tous les acteurs concernés,
- une mesure des impacts quantitatifs de Solvabilité 2 sur le bilan des assureurs et plus particulièrement de l'introduction des futures mesures techniques de niveau 2,
- une source d'information pour déterminer les derniers ajustements en termes de calibrage (notamment du MCR, de la formule standard du SCR et des simplifications proposées).

- **Une approche modulaire**

L'approche retenue par le CEIOPS pour la conception de la formule standard est une approche dite « bottom-up » ou « approche modulaire ».

Dans cette approche les différents risques sont modélisés séparément, puis agrégés. L'article 104 de la directive précise que chaque module de risque est calibré sur la base d'une mesure de risque de type Valeur-en-Risque (Value-at-Risk), avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an.

Cette approche présente un certain nombre d'avantages pratiques ; elle permet notamment de tester plusieurs méthodes pour la modélisation d'un même risque et de mesurer l'impact de ce choix de modélisation sur le niveau de SCR. De plus, les modules de risque étant clairement définis, les Autorités de contrôle et les entreprises d'assurance auront une vision détaillée de l'exposition des assureurs aux différents risques.

L'inconvénient majeur de cette approche modulaire est la difficulté d'agréger les différents risques évalués séparément de manière exacte. Lors des différentes Etudes Quantitatives d'Impact, l'agrégation des risques reposait sur une hypothèse de dépendance linéaire, par l'intermédiaire d'une matrice de corrélation linéaire entre les différents risques.

L'article 103 de la directive précise que le SCR calculé à l'aide de la formule standard est la somme des éléments suivants :

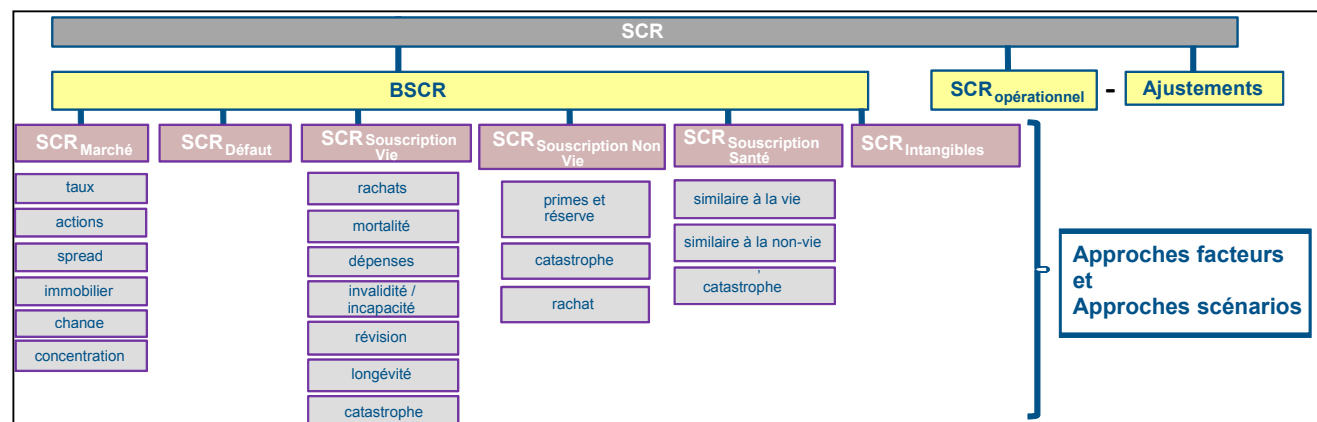
- Le BSCR (Capital de Solvabilité Requis de Base), qui correspond *a minima* à l'agrégation des risques suivants :
 - ✓ Le risque de souscription non-vie,
 - ✓ Le risque de souscription vie,
 - ✓ Le risque de souscription santé,
 - ✓ Le risque de marché,
 - ✓ Le risque de contrepartie.

Ces différents risques ont été définis au paragraphe 3.3.2.

Dans la structure de la formule standard telle que proposée dans les différents QIS, chacun de ces risques correspond lui-même à l'agrégation de différents sous-risques. Par exemple, dans les QIS 3 et 4, le risque de souscription non-vie correspondait à l'agrégation du risque de primes et de réserve et du risque catastrophe. Nous ne détaillerons pas ici la définition de chacun de ces risques, étant entendu que les chapitres suivants porteront sur la définition, la mesure et l'analyse du risque de réserve.

- Le capital requis au titre du risque opérationnel (ce risque ne fait pas l'objet d'une mesure de dépendance avec les autres risques, étant donnée la difficulté d'une telle mesure).
- L'ajustement réalisé en vue de tenir compte de la capacité d'absorption des pertes par les mécanismes de participation aux bénéfices et d'impôts différés.

A titre d'illustration, le schéma ci-dessous présente la structure de la formule standard telle que proposée dans les pré-spécifications du QIS5 :



• Les approches de calcul

Deux types d'approches existent pour déterminer le besoin en capital au titre des différents sous-risques. Il s'agit de l'approche facteur et de l'approche scénario.

✓ L'approche facteur

Cette approche est basée sur l'utilisation de formules fermées pour évaluer le besoin en capital au titre d'un risque. La formule s'exprime en fonction d'un certain nombre de paramètres qui seront fixés dans la formule standard et de grandeurs propres à la compagnie.

En particulier, le risque de primes et de réserve, composante du risque de souscription non-vie, repose, selon les spécifications techniques des derniers QIS, sur une approche facteur.

✓ L'approche scénario

Cette approche est basée sur l'application de chocs définis par le CEIOPS. Le besoin en capital au titre d'un risque est alors évalué en mesurant l'impact du choc sur l'actif net (ou NAV : « Net Asset Value ») de la compagnie. La NAV est définie comme étant la différence entre la valeur de marché des actifs et la valeur économique des passifs. Le SCR relatif au risque est alors égal à : Actif net central - Actif net après choc.

- **Formule standard « entity specific »**

Les entreprises d'assurance pourront, sous réserve de l'accord des autorités de contrôle, utiliser des paramètres qui lui sont propres (calibrés sur la base des données internes de l'entreprise). On parle dans ce cas de « formule standard entity specific ». Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 75⁶) fixent le cadre et les conditions d'application de la formule standard « entity specific ».

Les entreprises d'assurance souhaitant évaluer leur besoin en capital à l'aide d'une formule standard « entity specific » devront notamment démontrer que le calibrage de la formule standard ne reflète pas le profil de risque de leur portefeuille. Avant de donner leur accord, les autorités de contrôle vérifieront l'exhaustivité, l'exactitude et la pertinence des données utilisées pour le calibrage.

La formule standard « entity specific » s'applique pour certains risques uniquement, en particulier le risque de primes et de réserve et les méthodes de calibrage candidates sont imposées.

Nous détaillerons dans le Chapitre 2 les méthodes proposées dans le cadre de la formule standard « entity specific » pour le risque de réserve.

- **Formule standard simplifiée**

Sous certaines conditions, selon l'ampleur, la nature et la complexité du risque et en application du principe de proportionnalité, les entreprises d'assurance pourront avoir recours à certaines simplifications par rapport aux spécifications techniques de la formule standard.

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 77⁷) fixent le cadre et les conditions d'application des simplifications. En particulier, seuls certains risques peuvent faire l'objet de simplifications : le risque de primes et de réserve n'entre pas dans ce cadre.

Notons également que l'évaluation du Best estimate des engagements (ex Consultation Paper 76⁸) peut faire l'objet de simplifications, notamment pour prendre en compte les flux liés à la réassurance. De plus amples précisions concernant ce point seront apportées dans le Chapitre 2.

3.4.2. Modèle interne

- **Définition d'un modèle interne**

La directive ne définit pas les modèles internes mais en permet explicitement l'utilisation par les entreprises d'assurances pour le calcul du capital de solvabilité, sous réserve notamment de leur validation.

Les actuaires de l'IAA fournissent eux une définition générale de ce qu'est un modèle interne : « *c'est un modèle développé par une entreprise d'assurance pour sa propre gestion des risques, et le calcul du capital économique ; il reflète la réalité du portefeuille et des risques de l'assureur.* »

Le CEIOPS donne lui aussi une définition dans ses avis sur les mesures de niveau 1 (ex Consultation Paper 20⁹) : « *Un modèle actuariel est un système qui transforme les données d'exposition aux risques (le nombre et le type de contrats souscrits) et des indicateurs de risques (informations historiques et connaissance de la probabilité de certains événements) en une prévision de la distribution des profits et pertes.* »

Outre la notion de calcul du capital économique, il ressort de ces deux définitions la notion d'identification et de gestion des risques propres à la compagnie.

⁶ CP75 - Undertaking Specific Parameters for SCR

⁷ CP77 - Simplification for SCR

⁸ CP76 - Simplifications for Technical Provisions

⁹ CP20 – Advice to the European Commission in the Framework of the Solvency II Project on Pillar I issues

- **Champs d'application**

Les entreprises d'assurance pourront calculer leur SCR :

- à l'aide d'un **modèle interne complet**, c'est-à-dire un modèle prenant en compte l'ensemble des risques inhérents à l'entreprise d'assurance,
- à l'aide d'un **modèle partiel**, c'est-à-dire un modèle permettant de calculer un ou plusieurs des éléments suivants :
 - ✓ un ou plusieurs des modules ou sous-modules de risque composant le SCR,
 - ✓ l'exigence de fonds propres au titre du risque opérationnel,
 - ✓ l'ajustement réalisé en vue de tenir compte de la capacité d'absorption des pertes par les mécanismes de participation aux bénéfices et d'impôts différés.

Une modélisation partielle peut, en outre, concerner l'ensemble de l'activité de l'entreprise d'assurance, ou seulement une partie de son portefeuille.

Le capital requis obtenu avec ce modèle pourra, le cas échéant, être inférieur à celui résultant de la formule standard.

- **Conditions d'application**

Le calcul du SCR sur la base d'un modèle interne complet ou partiel est sujet à approbation par les autorités de contrôle.

Afin de recevoir l'agrément des superviseurs nationaux les entreprises d'assurance devront satisfaire un certain nombre de critères tels que :

- ✓ **Utilisation du modèle** (article 120 de la directive) : les entreprises d'assurance doivent démontrer que le modèle joue un rôle important dans leur système de gouvernance, c'est-à-dire à la fois dans la gestion des risques, dans l'évaluation et l'allocation des fonds propres... Elles doivent également être en mesure de démontrer que la fréquence de calcul du capital de solvabilité requis est cohérente avec la fréquence d'utilisation du modèle à des fins de gestion des risques. De plus elles doivent garantir le bon fonctionnement du modèle et son évolution pour toujours refléter leur profil de risque.
- ✓ **Normes de qualité statistique** (article 121 de la directive) : Les données utilisées doivent être fiables, exhaustives et pertinentes et les hypothèses réalistes. Les méthodes utilisées pour déterminer les distributions de pertes devront être cohérentes avec les méthodes de calcul des provisions. Les entreprises d'assurance peuvent tenir compte des effets de diversification, de techniques d'atténuation des risques et de l'impact de futures décisions de gestion.
- ✓ **Normes de calibrage** (article 122 de la directive) : les entreprises d'assurance peuvent à des fins de modélisation interne utiliser une mesure de risque et un horizon différent de ceux présentés dans la directive (VaR à 99,5%; horizon 1 an) à condition que le calcul du capital de solvabilité requis garantisse aux assurés une protection équivalente à celle prévue dans la directive.

Si le modèle interne ne permet pas de déduire directement le capital de solvabilité requis de la distribution de probabilité prévisionnelle générée par leur modèle interne, les autorités de contrôle peuvent accepter l'emploi de « proxies » dans le processus.

Afin de tester le modèle, les autorités de contrôle peuvent imposer aux entreprises d'appliquer leur modèle interne sur des portefeuilles de référence marché.
- ✓ **Normes de validation** (article 122 de la directive) : Les entreprises d'assurance et de réassurance mettent en place un cycle régulier de validation de leur modèle interne, qui comprend un suivi de son bon fonctionnement, un contrôle de l'adéquation permanente de ses spécifications et une confrontation des résultats qu'il produit aux données tirées de l'expérience.

- ✓ **Normes de documentation** (article 125 de la directive) : les entreprises d'assurance et de réassurance doivent produire une documentation détaillant l'architecture et le fonctionnement de leur modèle interne. Cette documentation fournira une description détaillée de la théorie, des hypothèses et des fondements mathématiques et empiriques qui sous-tendent le modèle interne, et démontrera que le modèle satisfait aux normes énoncées précédemment.

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 précisent en détail chacun des ces points. Ces derniers ont fait l'objet de Consultation Papers en 2009. Elles précisent notamment les différentes phases du processus d'approbation des modèles internes par les superviseurs, ainsi que le détail des exigences de tests et de normes énoncées dans le cadre de la directive.

• Calcul du SCR à l'aide d'un modèle interne

Comme mentionné au paragraphe 3.3.2, le SCR correspond donc au montant de capital nécessaire pour ne pas être en ruine avec une probabilité de 99.5% et un horizon défini de 1 an.

Le besoin en capital s'écrit donc :

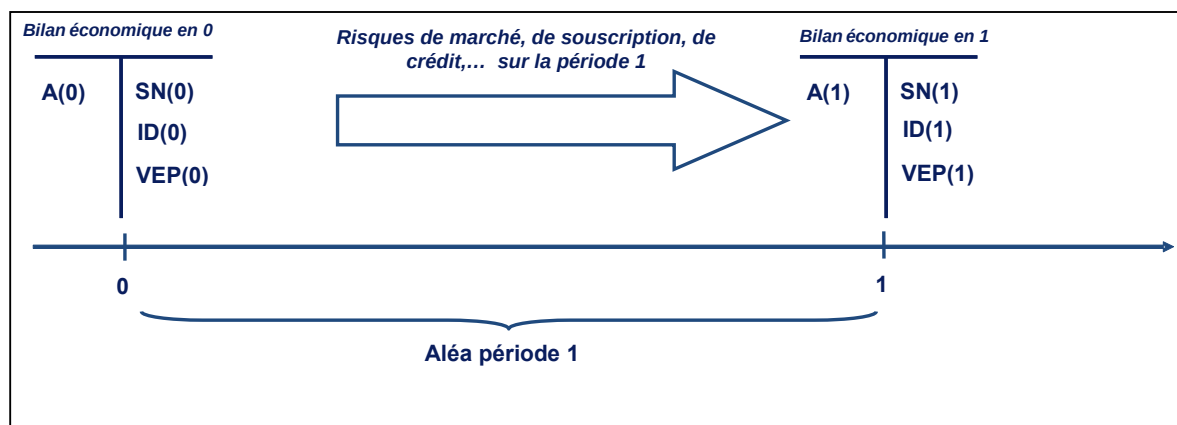
$$SCR = SN(0) - VaR_{0.5\%}(SN(1)) \times \text{facteur_actualisation}$$

La VaR d'une variable aléatoire X avec un niveau de confiance α se définissant par :

$$VaR_{99.5\%}(X) = \inf \{x \mid \text{Proba}[X \leq x] \geq 99.5\%$$

Afin de déterminer le SCR, il est donc nécessaire de déterminer une distribution de la situation nette en $t=1$ de l'entreprise d'assurance. Entre la date $t=0$ et la date $t=1$, un ensemble de risques auxquels l'entreprise d'assurance est soumise (risques financiers, risque de souscription,...) devra être pris en compte.

Le schéma ci-dessous illustre cette modélisation :



Avec :

- $A(0)$: valeur de marché des actifs à la date $t=0$,
- $VEP(0)$: valeur économique des passifs à la date $t=0$,
- $ID(0)$: impôts différés à la date $t=0$,
- $SN(0)$: situation nette de la compagnie à la date $t=0$.

Ces variables constituent le bilan économique de la compagnie à la date $t=0$.

-
- $A(1)$: valeur de marché des actifs à la date $t=1$,
 - $VEP(1)$: valeur économique des passifs à la date $t=1$,
 - $ID(1)$: impôts différés à la date $t=1$,
 - $SN(1)$: situation nette de la compagnie à la date $t=1$.

Les valeurs des différents postes en date $t=1$ est inconnue et dépendent d'un ensemble de facteurs de risques aléatoires.

La distribution de la situation nette de la compagnie à la date $t=1$ est obtenue par des techniques simulatoires (de type Monte Carlo), prenant en compte un ensemble de variables modélisées de façon stochastique et permettant d'obtenir une distribution des postes du bilan économique en date $t=1$. Par exemple, l'évolution des indices actions, des taux, le niveau de sinistralité survenant entre $t=0$ et $t=1$, le niveau du montant Best estimate des provisions pour sinistres évalué en $t=0$, le montant des règlements relatifs aux sinistres survenus avant la date $t=0$ et qui seront effectués entre $t=0$ et $t=1$,... sont autant de variables aléatoires qui seront projetées de façon stochastique dans les différentes simulations.

Deux cas sont alors envisageables :

- Le quantile à 0.5% de la distribution de la situation nette en 1 est négatif : l'entreprise d'assurance ne dispose pas de suffisamment de capital disponible pour ne pas être en ruine dans un an avec une probabilité de 99.5%,
- Le quantile à 0.5% de la distribution de la situation nette en 1 est positif : l'entreprise d'assurance dispose de suffisamment de capital disponible pour ne pas être en ruine dans un an avec une probabilité de 99.5%, et l'excédent en capital correspond à la valeur du quantile.

Une autre approche consiste en une approche dite « par silo », ou bottom-up. Cette approche consiste à évaluer chaque module ou sous-module de risque (risque de primes, risque de réserve, risque action,...) séparément (par le biais de formules fermées ou de simulations), puis à les agréger. Cette approche est celle utilisée dans la formule standard. L'avantage d'une telle approche est qu'elle permet d'obtenir en lecture directe le besoin en capital au titre des différents sous-risques. La difficulté de mise en œuvre réside en la détermination d'une structure de corrélation entre les différents sous-risques et entre les risques.

4. LES CONSEQUENCES ATTENDUES DE SOLVABILITE 2

La mise en place du projet Solvabilité 2 constitue une réforme majeure de la mesure des exigences quantitatives de besoin en capital, mais également du mode de gestion des risques par les entreprises d'assurance, et de la communication financière.

Sans être exhaustif, nous présentons dans ce paragraphe quelques conséquences attendues. Les conséquences présentées ici sont en partie issues d'un document de travail des services de la Commission¹⁰.

4.1. Conséquences positives envisagées

Les principaux agents économiques pourraient tirer profit de la réforme.

- **Secteur de l'assurance**

En encourageant une saine gestion des risques, et en alignant les exigences prudentielles sur les pratiques du marché, le nouveau régime récompensera les entreprises d'assurance bien gérées, créera également une véritable égalité des conditions de concurrence et favorisera une intégration plus poussée du marché européen de l'assurance. Les entreprises d'assurance européennes verront leur compétitivité renforcée par l'alignement des exigences réglementaires de nature quantitative sur le coût économique réel des risques qu'ils encourent.

- **Autorités de contrôle**

Les Autorités de contrôle seront dotées de meilleurs outils prudentiels, gages d'une action plus opportune et plus efficace, et habilitées à procéder à des contrôles réguliers de tous les risques auxquels les assureurs sont exposés. Le partage des tâches entre Autorités respectivement chargées du contrôle « solo » (c'est-à-dire des entreprises individuelles) et du contrôle des groupes permettra une meilleure compréhension des entités constitutives d'un groupe d'assurance et favorisera la coopération de ces diverses Autorités ainsi que la convergence de leurs pratiques.

- **Preneurs d'assurance**

Les preneurs d'assurances seront les principaux bénéficiaires indirects du régime Solvabilité 2. D'une part, le nouveau régime leur garantira une protection uniforme et renforcée dans toute l'Union européenne. Leur risque de subir des pertes à la suite de difficultés financières de leur assureur se trouvera ainsi réduit. Par ailleurs, grâce à l'instauration d'une approche économique fondée sur le risque, promouvant une meilleure gestion des risques, une tarification saine et un contrôle renforcé, ils auront davantage confiance dans les produits offerts par les assureurs.

- **Ensemble de l'économie**

En sus de renforcer la compétitivité internationale des assureurs, l'alignement des exigences réglementaires sur la réalité économique permettra une meilleure allocation du capital au niveau de l'entreprise, au niveau sectoriel et au sein de l'économie européenne. En conséquence, la mobilisation de capitaux coûtera moins cher au secteur de l'assurance et, peut-être aussi, à l'économie européenne dans son ensemble, du fait du rôle joué par les assureurs en tant qu'investisseurs institutionnels. Une allocation plus efficiente du capital et des risques au sein de l'économie favorisera en outre la stabilité financière sur le moyen à long terme.

Ces différents points répondent aux objectifs fixés pour pallier aux limites du régime Solvabilité 1.

¹⁰ Document de travail des services de la Commission - Document accompagnant la Proposition de directive du Parlement Européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance directe et de la réassurance et leur exercice - SOLVABILITÉ II RÉSUMÉ DE L'ANALYSE D'IMPACT

4.2. Conséquences négatives potentielles

Même si l'impact global du régime Solvabilité 2 devrait être positif pour les différents agents économiques, des effets négatifs, notamment à court terme, sont craints par certains acteurs.

- **Coûts du projet**

Le projet Solvabilité 2 sera synonyme de coûts initiaux importants, tant pour les entreprises d'assurance qui n'auraient pas encore mis en place de systèmes modernes de gestion des risques que pour les Autorités de contrôle qui ne seraient pas encore passées à un système de contrôle fondé sur le risque.

Un article récent¹¹ faisait état d'un budget de 20 à 40 M€ par établissement et par pays affecté au projet Solvabilité 2, pour les 40 principaux assureurs.

- **Assurabilité**

Dès lors que les risques recevront un traitement réglementaire proportionné à leur coût économique réel, les branches d'assurance couvrant les risques lourds sur le long terme feront l'objet d'exigences quantitatives élevées.

La conséquence pourrait en être, à court terme, une réduction de couverture pour certains types d'assurance. Mais les assureurs pourront sûrement, à long terme, continuer à fournir des couvertures pour ce type de risque, en recourant à des techniques d'atténuation des risques, en mettant en place des produits novateurs et en ajustant leurs tarifs.

- **Tarification**

Une tarification basée sur le couple {risque, rentabilité} mettra en évidence les financements croisés qui peuvent exister actuellement entre les branches d'assurances couvrant les risques de fréquence (comme l'assurance automobile) et les branches couvrant les risques lourds (comme l'assurance aviation). On ne saurait exclure que les assureurs puissent décider de limiter ces financements croisés, ce qui pourrait tirer les tarifs à la hausse dans certaines branches.

- **Stratégie d'investissement**

Contrairement à ce que prévoit le régime actuel, les risques de marché feront l'objet d'exigences de fonds propres dans le cadre du régime Solvabilité 2, ce qui pourrait ainsi avoir une incidence sur les stratégies d'investissement des assureurs. En particulier, en vertu du régime Solvabilité 2, les produits de taux seront soumis à une exigence de fonds propres moins importante que les actions (parce que les actifs sous-jacents sont moins volatils). En conséquence, les assureurs pourraient décider de rééquilibrer leur portefeuille dans le sens d'une meilleure congruence entre leurs actifs et leurs passifs et acheter plus d'obligations au détriment des actions s'ils estiment que le retour sur investissement potentiellement plus élevé qu'ils pourraient obtenir sur des actions ne compense pas le coût inhérent à la détention de fonds propres plus importants. A court terme, le marché européen des actions pourrait s'en ressentir.

¹¹ L'argus de l'assurance – 27/03/2009 – Les conséquences déjà surprenantes de Solvabilité 2

CHAPITRE 2 – LE RISQUE DE RESERVE

Pour les entreprises d'assurance exerçant leur activité en assurance non-vie, le risque de souscription est l'un des risques majeurs auquel elles sont soumises. Le risque lié à l'évaluation du Best estimate des provisions pour sinistres à payer est l'une des composantes de ce risque.

Ce deuxième chapitre est dédié à la définition de ce risque.

Dans un premier temps, le cadre général de l'évaluation des provisions pour sinistres à payer sera défini, en précisant notamment les principes d'évaluation dans les référentiels Solvabilité 1 et Solvabilité 2.

Nous présentons ensuite les méthodes les plus couramment utilisées par les entreprises d'assurance pour évaluer leur niveau de provisions pour sinistres à payer.

Enfin, nous définirons les principes du risque de réserve, et nous exposerons la méthode d'évaluation de ce risque au sein de la formule standard d'une part, et la façon d'appréhender ce risque dans un modèle interne d'autre part.

1. CADRE GENERAL : LES PROVISIONS POUR SINISTRES A PAYER

Le Chapitre 1 a notamment mis en exergue que l'un des piliers de la solvabilité d'une entreprise d'assurance consiste en l'évaluation des provisions techniques, et, dans le cadre du référentiel Solvabilité 2, en la mesure du risque inhérent à cette évaluation.

1.1. Les provisions pour sinistres à payer : définitions

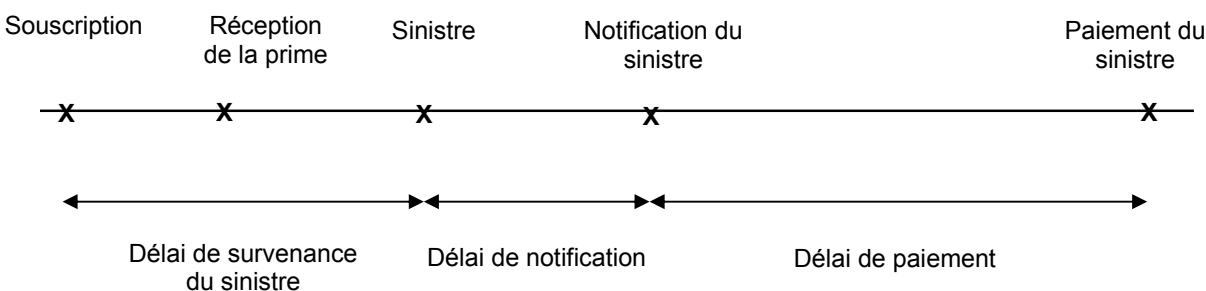
Afin de pouvoir honorer ses engagements, et compte tenu du fait que les primes sont perçues avant la réalisation du risque amenant au versement des prestations, une entreprise d'assurance est dans la nécessité économique et l'obligation réglementaire de constituer des provisions techniques.

Comme mentionné dans le Chapitre 1, les provisions techniques correspondant à l'activité de l'assurance non-vie sont constituées de plusieurs types de provisions : les provisions pour sinistres à payer, les provisions pour primes non acquises, les provisions pour risques en cours, les provisions mathématiques des rentes, les provisions pour risques croissants (pour les opérations d'assurance contre les risques de maladie ou d'invalidité), les provisions pour égalisation (provision destinée à faire face aux risques exceptionnels tels que les risques naturels, attentats ...), les provisions mathématiques des rentes, les provisions pour risque d'exigibilité, la réserve de capitalisation.

Nous nous intéressons dans notre étude à la provision pour sinistres à payer qui est l'une des provisions clé pour une entreprise d'assurance non-vie. Ainsi, au 31 Décembre 2008, les provisions pour sinistres, en brut de réassurance, représentaient plus de la moitié du total du bilan de l'ensemble des assureurs non-vie sur le marché français.

D'après le Code des assurances (article R. 331-6), la provision pour sinistres à payer est la valeur estimative des dépenses en principal et en frais, tant internes qu'externes (frais d'expertise, frais judiciaires), nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore mises à la charge de l'entreprise.

En effet, comme l'illustre le graphique ci-dessous, les sinistres relatifs à un contrat sont constatés et payés plus ou moins longtemps après sa signature; les prestations à payer par l'entreprise d'assurance, relatives à une année de souscription, concernent plusieurs années de développement. Il y a alors une nécessité de provisionner. Le délai de règlement peut être plus ou moins long : en dommages matériels automobile, il faut en général moins de deux années pour régler la charge de sinistres contre plusieurs années en dommages corporels automobile (consolidation du sinistre à payer qui peut prendre plusieurs années).



D'après l'article R331-15 du code des assurances, l'évaluation des sinistres connus est effectuée dossier par dossier, le coût d'un dossier comprenant toutes les charges externes individualisables; elle est augmentée d'une estimation du coût des sinistres survenus mais non déclarés.

Pour les branches d'assurance les plus « classiques » (hors branches Transport, Construction, Caution par exemple), le classement des dossiers par exercice de survenance permet d'apprécier l'adéquation d'un tarif en rapportant la charge des sinistres survenus une année donnée aux primes acquises lors de cet exercice (ratio sinistres à primes ou ratio S/P).

La provision pour sinistres à payer (PSAP) est destinée à couvrir les règlements des sinistres survenus avant une date d'évaluation t. Cette provision doit être calculée exercice par exercice sous certaines règles d'applications. Elle peut s'écrire comme la somme de deux composantes :

$$PSAP = \text{Provision dossier/dossier} + IBNR$$

Avec :

- la provision dossier par dossier qui est évaluée par les gestionnaires sinistres; elle correspond au montant restant à payer sur chaque sinistre non clos ;
- les IBNR (Incurred But Not Reported) qui peuvent être calculés soit de manière forfaitaire, soit de manière statistique; les sinistres IBNR comprennent les sinistres survenus mais non encore déclarés (IBNYR : Incurred But Not Yet Reported) encore appelés « tardifs » et les sinistres connus de l'assureur mais dont la liquidation future va générer des boni ou des mali (IBNER : Incurred But Not Enough Reported).

1.2. Les provisions pour sinistres à payer : évaluation dans le référentiel solvabilité 1

Comme mentionné dans le Chapitre 1, l'article R331-1 du code des assurances précise que le montant de la provision pour sinistres à payer doit être **suffisant** pour liquider tous les sinistres.

Le montant de PSAP, calculé exercice par exercice, est déterminé en brut de recours.

Les recours sont des sommes encaissées sous forme de récupération partielle ou totale d'une indemnité de sinistre versée à l'assuré. Les prévisions de recours à encaisser, qui doivent faire l'objet d'une évaluation distincte, correspondent à l'estimation des recours futurs, pour l'ensemble des sinistres survenus à la date d'évaluation.

Le montant de PSAP est complété, à titre de chargement, par une évaluation des charges de gestion qui, compte tenu des éléments déjà inclus dans la provision, doit être suffisante pour liquider tous les sinistres (provision pour frais de gestion des sinistres).

Le montant de PSAP est évalué en brut de réassurance. En contrepartie, la provision pour sinistres réassurés apparaît à l'actif du bilan.

Les provisions pour sinistres doivent être suffisantes au jour du règlement et pas seulement à la date de l'inventaire : les évaluations doivent donc prendre en compte un coefficient d'érosion monétaire.

Réglementairement, la PSAP doit être ventilée entre les catégories ministérielles 20 à 39 :

- 20 et 21- Dommages corporels,
- 22 et 23- Automobile,
- 24, 25 et 26- Dommages aux biens,
- 27- Catastrophes naturelles,
- 28- Responsabilité civile générale,
- 29- Protection juridique,
- 30- Assistance,
- 31- Pertes pécuniaires diverses,
- 34- Transport,
- 35 et 36- Assurance construction,

37- Crédit,

38- Caution,

39- Acceptations en réassurance (Non Vie).

Comme précisé au paragraphe précédent, la méthode réglementaire pour calculer la provision pour sinistres déclarés est la méthode dossier par dossier, tandis que la provision pour sinistres tardifs ne fait pas l'objet d'une réglementation spécifique et peut ainsi être calculée de façon forfaitaire ou statistique.

Une approche largement répandue consiste à mobiliser un ensemble de méthodes statistiques, dans un souci de comparer les estimations de la provision qu'elles produisent. Nous détaillerons par la suite une de ces méthodes statistiques, qui est la plus répandue sur le marché : la méthode Chain-Ladder. Une convergence de ces estimations conduit à une provision qualitativement « fiable ». Une divergence de celles-ci est un avertissement sur l'instabilité des données analysées et sur la nécessité d'adopter une démarche « prudentielle » dans l'estimation de la provision.

Notons que le Code des Assurances ne précise pas de méthodes particulières excepté pour certains risques de masses (par exemple les dommages matériels en automobile – article R331.26 du code des assurances) ou pour les sinistres de moins de deux ans après accord de la commission de contrôle des assurances (article R331.15 du code des assurances).

1.3. Les provisions pour sinistres à payer : évaluation dans le référentiel solvabilité 2

Comme mentionné au Chapitre 1, les provisions techniques sont évaluées selon une **approche Best estimate**, se définissant comme l'espérance des flux futurs permettant d'honorer les engagements envers les assurés, en prenant en compte la **valeur temps**.

A ce Best estimate des engagements s'ajoute une marge pour risques évaluée selon une approche coût du capital.

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 apportent des précisions sur :

- Les techniques d'évaluation¹²,
- Le niveau de segmentation à retenir pour le calcul du Best estimate¹³.

Les différentes Etudes Quantitatives d'Impact ont apporté également des précisions sur ces points et ont permis de mesurer les niveaux de marge de prudence contenus dans les provisions actuelles.

1.3.1. Techniques d'évaluation

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Papers 26 et 39) précisent les points suivants relatifs à l'évaluation du Best estimate des engagements pour les activités non-vie :

- Une distinction sera effectuée entre les provisions pour primes et les provisions pour sinistres. Notre étude porte spécifiquement sur les provisions pour sinistres. Par abus de langage, dans les paragraphes suivants, le terme « Best estimate » s'entendra par « Best estimate des provisions pour sinistres »,
- Le Best estimate des engagements doit être calculé brut de réassurance, les flux relatifs à la réassurance et autres techniques d'atténuation/transfert des risques techniques étant évalués séparément et placés à l'actif du bilan,
- Le calcul du Best-Estimate doit prendre en compte l'ensemble des cash-flows potentiels permettant d'honorer les engagements envers les assurés.

¹² Ex CP26 et CP39 : Technical provisions – Elements of actuarial and statistical methodologies for the calculation of the Best estimate

¹³ Ex CP27 : Technical Provisions - Lines of business on the basis of which (re)insurance obligations are to be segmented

Ces cash-flows doivent être identifiés et évalués. En particulier, la provision pour sinistres devra correspondre à la somme actualisée des cash-flows suivants :

- ✓ Les prestations liées aux paiements des sinistres survenus,
 - ✓ Les recours encaissés,
 - ✓ Les frais permettant d'honorer les engagements envers les assurés.
- L'évaluation du Best estimate des engagements net de réassurance doit prendre en compte la probabilité de défaut des réassureurs et la perte attendue en cas de défaut. L'évaluation du Best estimate des engagements net de réassurance nécessiterait en théorie de disposer de triangles de liquidation nets de réassurance, ce qui n'est pas toujours le cas au sein des entreprises d'assurance. Le Consultation Paper 76¹⁴ présente des simplifications possibles, notamment basées sur l'utilisation de ratios de passage du brut au net de réassurance observés sur l'historique pour évaluer le Best estimate des engagements net de réassurance à partir de l'évaluation brute de réassurance.
 - Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 n'imposent pas de technique actuarielle ou statistique d'évaluation des provisions pour sinistres. Ils mentionnent seulement plusieurs méthodes candidates : projection sur la base de triangles de liquidation, modèles fréquence-coût, méthodes basées sur la projection d'un ratio sinistres à primes attendu, combinaison de l'une de ces méthodes. Nous décrivons ces méthodes par la suite.
 - Le calcul du Best estimate s'inscrit dans un processus comprenant les étapes suivantes : collecte et analyse des données, estimation des hypothèses sous-jacentes à l'évaluation, méthodologie d'évaluation. Ces différentes phases doivent faire l'objet d'une documentation détaillée, d'une validation (notamment par des techniques de backtesting) et d'une revue indépendante.

Les différents QIS ont précisé certains points relatifs à ces définitions, notamment concernant les techniques d'évaluation du Best estimate. Nous précisons ci-dessous les principaux points issus du QIS4 :

- Le calcul du Best estimate doit reposer sur une méthode actuarielle fiable, et qui corresponde à une technique « de place », c'est-à-dire largement utilisée et reconnue par les professionnels,
- L'estimation du Best estimate doit en principe (selon la disponibilité et la qualité des données) se baser sur des techniques actuarielles, sur la base de triangles de liquidation,
- Lorsque les données disponibles ne permettent pas l'utilisation de méthodes basées sur les triangles de liquidation, l'utilisation de benchmarks ou de méthodes simplifiées est envisageable.

Nous détaillerons dans la section 2 de ce Chapitre quelques méthodes « de place », en particulier la méthode Chain Ladder.

1.3.2. Segmentation pour le calcul du BE des engagements

L'article 80 de la directive stipule que le Best estimate des engagements doit être évalué par classe de risques homogènes.

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 27) définit une segmentation *a minima* de 14 classes de risques homogènes :

- 1- Accident du travail,
- 2- Accident et maladie,
- 3- Automobile, Responsabilité Civile,
- 4- Automobile, autres branches,

¹⁴ CP76 - Simplifications for Technical Provisions

-
- 5- Marine, aviation, transport,
 - 6- Incendie et dommages aux biens,
 - 7- Responsabilité Civile,
 - 8- Crédit et caution,
 - 9- Protection juridique,
 - 10- Assistance,
 - 11- Divers,
 - 12- Acceptations Non Proportionnelles – Responsabilité Civile,
 - 13- Acceptations Non Proportionnelles – Dommages,
 - 14- Acceptations Non Proportionnelles – Marine, aviation, transport.

Les acceptations proportionnelles sont ventilées dans les segments 1 à 11.

Cette segmentation se définit en fonction des risques portés par les contrats. Ainsi, un même contrat peut être réparti en plusieurs segments en fonction des risques portés par celui-ci.

On note ainsi des différences entre la segmentation par catégorie ministérielle du référentiel Solvabilité 1 et la segmentation par segment de risque du référentiel Solvabilité 2. Par exemple, les contrats d'assurance Construction, sont, selon la segmentation Solvabilité 2, répartis entre le segment « Incendie et dommages aux biens » (pour la garantie Dommage Ouvrage) et le segment « Responsabilité Civile » pour la garantie RC Décennale. Dans le référentiel Solvabilité 1, ils sont classés dans les catégories 35 et 36 propres à l'assurance Construction.

1.4. Impact du référentiel Solvabilité 2 sur le montant des provisions pour sinistres à payer

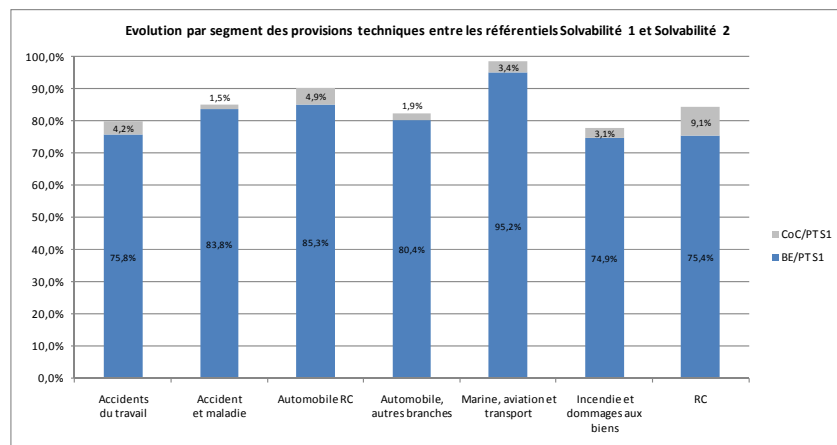
D'un point de vue quantitatif, les deux grandes évolutions dans l'évaluation des provisions pour sinistres à payer sont :

- Le passage d'une évaluation incluant une marge de prudence à une évaluation Best estimate,
- La prise en compte de la valeur temps (actualisation des flux futurs).

Les différents QIS ont permis de mesurer l'impact de ces deux effets. Les retours de l'ACAM sur le QIS4¹⁵ montrent que, pour les activités non-vie, les provisions techniques diminuent en moyenne de 20%. Ces résultats sont en ligne avec ceux obtenus lors du QIS3. En raison d'un impact lié à l'actualisation des paiements futurs plus important, la baisse est d'autant plus prononcée que l'horizon des engagements s'établit dans la durée (dommages aux biens, responsabilité civile).

¹⁵ Principaux enseignements de la quatrième étude quantitative d'impact

Le graphique suivant détaille la mesure d'impact pour les principaux segments :



PT : Provisions Techniques
CoC : Marge pour risques évaluée selon l'approche coût du capital
Source : FFSA – consolidation QIS4 – Bureau Ecofin 17/09/2008

La marge pour risques représente quant à elle 6.9% des provisions techniques évaluées dans le référentiel Solvabilité 1. On observe que les branches à duration longue (exemple : la RC Générale) ont une marge pour risques supérieure à la moyenne.

2. EVALUATION « TRADITIONNELLE » DES PROVISIONS POUR SINISTRES

Nous avons évoqué dans le paragraphe précédent l'existence de méthodes statistiques et actuarielles pour évaluer le montant de provisions pour sinistres à payer.

En particulier, les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 39¹⁶) mentionnent plusieurs méthodes candidates : projection sur la base de triangles de liquidation, modèles fréquence-coût, méthodes basées sur la projection d'un ratio sinistres à primes attendu, combinaison de ces méthodes. Les spécifications du QIS4 précisait en outre que l'estimation du Best estimate devait en principe se baser sur des techniques actuarielles, sur la base de triangles de liquidation.

Cette partie a pour vocation d'expliquer les méthodes actuarielles usuelles pour évaluer les provisions pour sinistres à payer.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une évaluation Best estimate.

2.1. La méthode Chain Ladder

La méthode Chain Ladder, l'une des méthodes les plus fréquemment utilisées par les entreprises d'assurance, est basée sur les triangles de liquidation.

2.1.1. Techniques de triangulation

Les données relatives aux sinistres individuels sont regroupées en année d'origine et de développement.

Nous considérons, sans perte de généralité, le cas particulier d'un triangle de données avec N années d'origine et N années de développement.

Illustration d'un triangle de liquidation

Année d'origine	Délai de règlement					
	1	2	...	j	...	n
1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1j}	...	y_{1n}
2	y_{21}	y_{22}	...	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	y_{i1}	...	...	y_{ij}	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	y_{n1}					

En fonction des segments considérés, les sinistres sont rattachés à des années d'origine qui correspondent :

- à l'année de survenance du sinistre,
- à l'année de souscription du sinistre,
- à l'année de déclaration du sinistre.

Le rattachement le plus fréquent étant celui à l'année de survenance.

¹⁶ Technical provisions – Elements of actuarial and statistical methodologies for the calculation of the Best estimate

Nous désignons les montants relatifs aux années d'origine i et de développement j par y_{ij} (ou, par simplification d'écriture y_{ij}). Les données observées sont alors :

$$D_i = \{y_{ij} : i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, n - i + 1\}$$

Les trois dimensions « naturelles » d'un triangle sont donc : les années d'origine, les années de développement et les années calendaires, correspondant aux diagonales du triangle.

Les montants y_{ij} peuvent représenter :

- les charges de sinistres : la charge d'un sinistre à une date t est la somme des règlements déjà effectués sur ce sinistre et de l'évaluation des provisions au dossier (appelées provisions dossier à dossier), c'est-à-dire l'évaluation des paiements futurs par les gestionnaires sinistres,
- les règlements des sinistres.

D'autre part, les montants relatifs à l'année d'origine i et au développement j peuvent s'exprimer sous la forme cumulée ou non cumulée, respectivement

- C_{ij} et c_{ij} ($i=1, \dots, n ; j=1, \dots, n-i+1$) lorsque les y_{ij} représentent les charges sinistres,
- P_{ij} et p_{ij} ($i=1, \dots, n ; j=1, \dots, n-i+1$) lorsque les y_{ij} représentent les paiements des sinistres.

A partir des données connues du triangle supérieur, l'actuaire cherche à évaluer :

- La charge sinistre $\hat{C}_i = \hat{P}_i$ de chaque année d'origine i (appelée charge ultime),
- Le montant de la provision pour sinistres $\hat{R}_i = \hat{P}_i - P_{i,n-i+1}$ à constituer pour chaque année d'origine,
- Le montant de la provision pour sinistres à payer globale $\hat{R} = \sum_i \hat{R}_i$.

2.1.2. Estimation du montant des provisions pour sinistres à payer

La méthode Chain Ladder s'applique à des triangles de paiements ou de charges cumulés P_{ij} ou C_{ij} . On se place ici dans le cas d'un triangle de paiements, la transposition au cas d'un triangle de charges se faisant aisément.

Cette méthode est basée sur l'utilisation de facteurs de développements, implicitement supposés constants pour toutes les années d'origine :

$$(H1) : \text{pour } j=1, \dots, n, \text{ les ratios } \frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \text{ (ou } \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}) \text{ sont indépendants de l'année d'origine } i.$$

Cette hypothèse peut être validée graphiquement : pour tout j fixé, les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1, \dots, n-j}$ doivent être sensiblement alignés sur une droite.

Dans la pratique, cette hypothèse est une hypothèse forte. Les paragraphes suivants reviendront sur ce point et sur une façon opérationnelle de s'en approcher par un « retraitement » des données du triangle de liquidation.

Les facteurs de développement $\hat{f}_j$ sont estimés par la formule :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j}}, 1 \leq j \leq n-1$$

Disposant des facteurs de développement $\hat{f}_j$, il est alors aisé d'obtenir une estimation des sinistres futurs, une estimation du montant de provisions lié à une année d'origine ainsi qu'une estimation du montant total des provisions pour sinistres.

$$\hat{P}_{ij} = P_{i,n+1-i} \times \prod_{k=n+1-i}^{j-1} \hat{f}_k, \quad n-i+2 \leq j \leq n, \quad \text{et} \quad \hat{P}_{in} = P_{i,n+1-i} \times \prod_{k=n+1-i}^{n-1} \hat{f}_k$$

$$\hat{R}_i = \hat{P}_{in} - P_{i,n+1-i} \quad \text{et} \quad \hat{R} = \sum_i \hat{R}_i$$

2.1.3. Application

Nous détaillons ci-dessous un exemple chiffré de l'application de la méthode Chain Ladder.

Nous considérons le triangle de paiements cumulés suivant :

Origine	Année de développement					
	1	2	3	4	5	6
2003	713	3015	3139	3243	3243	3290
2004	947	4461	4934	5009	5061	
2005	906	5001	5246	5308		
2006	1427	5182	5743			
2007	831	4529				
2008	201					

Facteurs de développement

Exemple : estimation du facteur de développement $\hat{f}_1$:

$$\hat{f}_1 = \frac{\sum_{i=2003}^{2007} P_{i,2}}{\sum_{i=2003}^{2007} P_{i,1}} = \frac{(3015 + 4461 + 5001 + 5182 + 4529)}{(713 + 947 + 906 + 1427 + 831)} = 4.60$$

L'estimation des facteurs de développement permet d'estimer les paiements futurs (triangle inférieur) et, par suite, la charge ultime et le montant des provisions pour sinistres à payer, par exercice d'origine et pour l'ensemble des exercices :

Origine	Année de développement					
	1	2	3	4	5	6
2003	713	3015	3139	3243	3243	3290
2004	947	4461	4934	5009	5061	5134
2005	906	5001	5246	5308	5341	5419
2006	1427	5182	5743	5847	5884	5969
2007	831	4529	4889	4977	5009	5081
2008	201	925	998	1016	1022	1037

La charge ultime est ici égale à 25 931 (somme de la dernière colonne); le montant de provisions pour sinistres à payer est, pour chaque exercice, la différence entre l'estimation de la charge ultime et le montant de règlements déjà effectuée à la date d'évaluation des provisions (correspondant à la valeur de la dernière diagonale du

triangle). Par exemple, pour l'exercice 2005, le montant de la provision pour sinistres à payer est égal à $R_{2005} = 5419 - 5308 = 111$

2.1.4. Facteurs de développement et cadences de règlements

Dans le cas d'un triangle de paiements, la détermination des facteurs de développement est équivalente à l'estimation d'une cadence moyenne de règlements:

$$cadcum_j = \frac{1}{\prod_{k=j}^{n-1} f_k} \quad \text{et } cadcum_n = 100\%$$

$cadcum_j$ représente la cadence de règlements cumulée au bout du $j^{\text{ème}}$ développement. La cadence incrémentale se déduit aisément comme suit :

$$\begin{cases} cad_1 = cadcum_1 \\ cad_j = cadcum_j - cadcum_{j-1}, \quad 1 < j \leq n \end{cases}$$

En reprenant l'exemple précédent, on a :

	1	2	3	4	5	6
Facteurs de développement	4,60	1,08	1,02	1,01	1,01	1,00
cadcum	19,4%	89,1%	96,2%	98,0%	98,6%	100%
cad	19,4%	69,8%	7,1%	1,7%	0,6%	1,4%

La cadence de paiements permet une lecture de la courbe de développement des paiements estimés, ainsi que la possibilité d'estimer les paiements futurs à partir du montant de provisions pour sinistres estimé à la date d'évaluation :

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\hat{R}_i}{(1 - cadcum_{n-i+1})} \cdot cad_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad n \geq j > n - i + 1$$

Les vecteurs de cadences $\{cadcum_j\}_{1 \leq j \leq n}$ et de facteurs de développement $\{\hat{f}_j\}_{1 \leq j \leq n}$ sont en correspondance et le calcul de la $i^{\text{ème}}$ provision $R_i = P_{i,n} - P_{i,n-i+1}$ s'écrit :

$$R_i = P_{i,n-i+1} \cdot (\hat{f}_{n-i+1} \times \dots \times \hat{f}_n - 1) = P_{i,n-i+1} \cdot \frac{1 - cadcum_{n-i+1}}{cadcum_{n-i+1}}$$

2.1.5. Prise en compte de l'actualisation

La détermination d'une cadence de liquidation des paiements permet également de déterminer les paiements pour chaque année calendaire future, jusqu'à la liquidation complète des engagements.

Le montant actualisé des provisions pour sinistres à payer relatif à l'exercice de survénance i est alors égal à :

$$\hat{R}_i^{act} = \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\hat{p}_{ij}}{(1+r_{j-i+1})^{j-(n-i+1)}}, 2 \leq i \leq n$$

où r_l représente le taux d'actualisation à horizon l années.

Pour l'ensemble des exercices de survénance, le montant actualisé de la provision pour sinistres à payer s'écrit :

$$\hat{R}^{act} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i^{act}$$

2.1.6. Avantages et limites de la méthode Chain Ladder

La méthode Chain Ladder présente les avantages suivants :

- simplicité d'utilisation,
- référence incontournable sur le marché, correspondant au Best Practice de la place,
- « traçabilité » des résultats (comme cela sera évoqué au paragraphe 2.3).

Néanmoins, la méthode Chain Ladder repose sur l'hypothèse très forte suivante : la cadence de règlement des sinistres est la même quelle que soit l'année d'origine.

Ainsi, en cas de changement de cadence des paiements pour une année d'origine particulière (en raison par exemple d'un changement réglementaire, d'une modification dans la politique de gestion des sinistres,...), ou lors d'événements exceptionnels (par exemple les tempêtes Lothar et Martin de 1999), cette hypothèse n'est pas vérifiée.

Enfin, la méthode de Chain Ladder est sur-paramétrée¹⁷, ce qui nuit à la stabilité et à la robustesse de l'estimation du montant des provisions pour sinistres, en particulier pour les exercices d'origine les plus récents : ainsi, dans l'exemple précédent, pour la dernière année d'origine, on applique cinq facteurs de développement estimés à un seul montant observé avec autant d'erreurs liées à l'estimation.

2.2. Autres méthodes

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'estimer le montant des provisions pour sinistres à payer. Nous nous contenterons de présenter brièvement les méthodes suivantes, en raison du fait que celles-ci soient parmi les plus utilisées sur le marché :

- Les méthodes basées sur le coût moyen,
- Les méthodes basées sur un ratio sinistres à primes,
- La méthode Bornhuetter-Ferguson.

¹⁷ Cf. Claims reserving and generalised additive models, Verrall, 1996

- **La méthode basée sur le coût moyen**

Cette méthode repose sur l'application d'un coût moyen à un nombre de sinistres estimé à l'ultime :

- L'estimation du nombre de sinistres à l'ultime nécessite une estimation du nombre de sinistres tardifs, par le biais d'une méthode de triangulation par exemple, ou d'une hypothèse de fréquence de sinistralité appliquée à une base d'exposition (le nombre de contrats).
- L'hypothèse du coût moyen peut reposer sur des données internes (détermination d'un coût moyen en ligne avec la tendance observée sur l'historique par exemple) ou des données de marché.

- **La méthode basée sur un ratio sinistres à primes (S/P)**

Cette méthode repose sur l'application d'un ratio sinistres à primes attendu à un montant de primes acquises. L'hypothèse du ratio S/P peut être déterminée à partir d'un jugement d'expert, sur la base de données de marché, sur l'analyse de l'historique des ratios S/P estimés à l'ultime,...

- **La méthode Bornhuetter-Ferguson**

Cette méthode repose sur l'application d'un ratio sinistres à primes à un montant de primes acquises ; le ratio sinistres à primes utilisé est une combinaison entre :

- Un ratio S/P issu d'une méthode basée sur les données propres à l'entreprise d'assurance (par exemple la méthode Chain Ladder), noté S/P_{CL} ,
- Un ratio S/P (souvent appelé « prior », noté S/P_{prior}) issu d'un S/P attendu (sur la base de données de marché, d'un jugement d'expert, de l'analyse de l'historique des ratios S/P estimés à l'ultime,...).

Le ratio S/P estimé à l'ultime pour l'exercice i s'écrit donc :

$$S/P_i = \alpha_i S/P_{i,CL} + (1 - \alpha_i) \cdot S/P_{i,prior}$$

On montre que $\alpha_i = \text{cadcum}_{n-i+1}$.

Cette méthode est généralement utilisée sur les branches à développement long, pour les exercices les plus récents, sur lesquelles l'incertitude liée à l'évaluation du montant des provisions basée sur une seule méthode de liquidation (Chain-Ladder par exemple) est élevée. Les entreprises de réassurance notamment ont souvent recours à cette méthode de crédibilité.

NB : Les méthodes reposant sur l'utilisation de données de marché peuvent présenter les inconvénients suivants :

- Ces méthodes ne tiennent pas compte des conditions de souscription propres à la compagnie.
- Ces méthodes utilisent des résultats généraux établis sur des périmètres ne correspondant pas toujours à celui étudié.

Leur application nécessite donc une attention particulière.

2.3. Points nécessitant une attention particulière

Lors de l'évaluation des provisions pour sinistres à payer, les points suivants doivent faire l'objet d'une attention particulière :

- **Le facteur de queue de développement**

Lors de l'utilisation de méthodes basées sur les triangles de liquidation, l'historique disponible n'est pas toujours suffisant (en particulier pour les branches à développement long) pour dériver une cadence de liquidation totale. Il se peut en effet que le développement des années d'exercice les plus anciens ne soit pas achevé.

Concrètement, les derniers facteurs de développement sont supérieurs à 1, ce qui laisse présager de la nécessité d'appliquer un dernier facteur de développement (appelé facteur de queue de développement ou tail factor) permettant le passage de la dernière colonne du triangle à l'ultime.

Dans ce cas, les facteurs de développement pour j allant au-delà de l'historique du triangle sont le plus fréquemment estimés par extrapolation d'une fonction ajustée sur les facteurs de développement historiques, le lissage exponentiel étant l'un des plus usités.

On a dans ce cas : $\ln(\hat{f}_j - 1) = a + b \cdot j + \varepsilon_j$, $1 \leq j \leq n-1$, et il est alors possible de déterminer une série de $\hat{f}_j$ pour $j > n-1$, jusqu'à convergence vers 1 :

$$\hat{f}_j = 1 + \exp(\hat{a} + \hat{b} \cdot j), \quad n-1 < j \leq p$$

Le facteur de queue est alors égal à : $\hat{f}_{ult} = \prod_{j=n}^p \hat{f}_j$.

La qualité de l'ajustement se juge au regard du R^2 de la régression log-linéaire.

On a alors : $\hat{C}_{i,ult} = \hat{C}_{i,n} \times \hat{f}_{ult} = C_{i,n-i+1} \prod_{j \geq n-i+1} \hat{f}_j$.

- **La détermination d'une cadence représentative du futur**

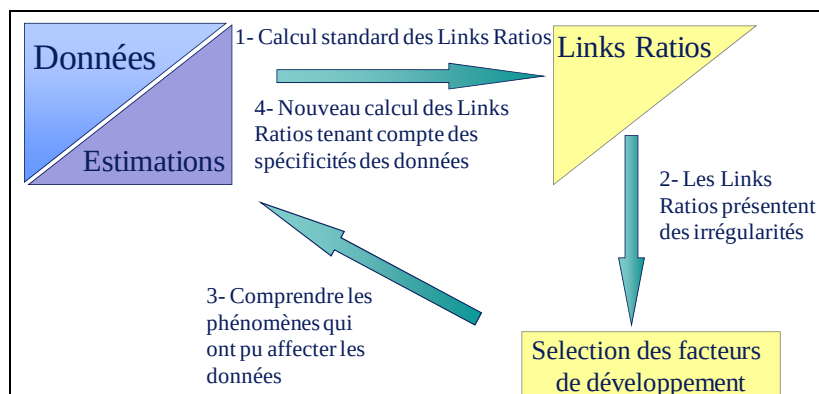
Les méthodes de triangulation reposent sur l'hypothèse que les développements futurs seront identiques au passé. Il s'agit d'une hypothèse forte qui peut ne pas être vérifiée pour des raisons internes ou externes à l'entreprise d'assurance :

- Modification de la politique de gestion des sinistres (mise en place de forfaits d'ouverture des sinistres, mise en place de procédures d'accélération du versement des prestations,...),
- Modification de la politique de souscription,
- Présence de sinistres exceptionnels sur certains exercices, rendant les développements de ceux-ci atypiques, etc.

Il est alors nécessaire d'ajuster les méthodes standards afin de « corriger » les facteurs de développements des phénomènes qui a priori ne se répèteront pas dans le futur, et, par suite, d'estimer un montant de provisions pour sinistres à payer qui soit Best estimate. Plusieurs solutions sont envisageables :

- Non prise en compte de certains développements individuels (appelés « Link ratios ») dans le calcul des facteurs de développement,
- Calcul des facteurs de développement uniquement sur un nombre de diagonales limité,
- Utilisation de cadences de développement de marché ou déterminées à dire d'expert.

L'estimation du montant de provisions pour sinistres à payer peut donc se concevoir comme un processus itératif schématisé comme suit :



Dans le référentiel Solvabilité 2, les choix effectués doivent être justifiés et documentés dans un rapport actuariel.

Cette possibilité offerte par les méthodes de triangulation permet une traçabilité des résultats, par une identification aisée des hypothèses et des choix retenus en amont.

Cette traçabilité des résultats permet une communication relativement simple sur les résultats obtenus, et permet, lors d'exercices d'évaluations successives, de mettre en place des procédures de backtesting (analyse de l'écart entre les paiements futurs projetés et les paiements réalisés) afin de valider les hypothèses retenues.

3. DEFINITION ET MESURE DU RISQUE DE RESERVE

Les deux paragraphes précédents ont permis de définir les provisions pour sinistres à payer, et d'illustrer les méthodes les plus couramment utilisées pour en estimer le montant, notamment dans une vision Best estimate.

Ce paragraphe définit dans un premier temps le risque de réserve, c'est-à-dire le risque lié à l'évaluation du montant des provisions pour sinistres à payer. Nous présentons ensuite le mode d'évaluation de ce risque dans la formule standard et les problématiques sous-jacentes à son évaluation dans le cadre d'un modèle interne.

Beaucoup d'acteurs s'interrogent actuellement sur l'approche à retenir pour évaluer leur besoin en capital (prise en compte de paramètres « entity specific », construction d'un modèle interne), ainsi que sur la méthodologie de calcul et le calibrage à retenir pour être en adéquation avec l'horizon d'un an édicté par Solvabilité II.

Le sujet de notre étude s'inscrit au cœur de cette problématique.

3.1. Définitions

3.1.1. Justification du risque de réserve

L'évaluation des provisions pour sinistres à payer repose sur l'évaluation des flux futurs et celle-ci contient de fait une incertitude, ces flux futurs n'étant pas certains.

Les principales sources d'incertitude inhérentes à l'évaluation des provisions pour sinistres sont :

- Le montant des flux futurs, correspondant aux montants des prestations qui seront réellement payées. Ces déviations peuvent être liées :
 - ✓ à une mauvaise évaluation des flux futurs (sous-estimation ou sur-estimation) par l'entreprise d'assurance,
 - ✓ à des raisons « externes » à l'entreprise d'assurance, comme par exemple une modification de la jurisprudence dans les décisions des tribunaux.
- Le cadencement de ces paiements, ces déviations se traduisant par un impact sur l'actualisation des flux futurs.
- Le volume de frais qu'il sera nécessaire d'engager pour que l'entreprise d'assurance puisse honorer ses engagements (frais de gestion des sinistres).

Le risque de réserve se justifie donc par ces différentes sources d'incertitude liées à l'évaluation des engagements de l'entreprise d'assurance envers ses assurés.

Nous nous intéressons spécifiquement dans notre étude à la mesure de la volatilité portant sur le montant des prestations qui seront réellement versées, ce point constituant la principale source d'incertitude. Les autres sources d'incertitude ne sont par ailleurs pas traitées dans la formule standard.

NB : Deux autres sources d'incertitude liées à l'évaluation des provisions pour sinistres sont liées à :

- *Une évaluation défavorable de l'inflation future,*
- *Une déviation de la courbe de taux sans risque, utilisée pour actualiser les flux futurs.*

Les incertitudes portant sur l'inflation future et la courbe de taux ne sont pas traitées dans notre étude. Dans le cadre de la formule standard, le risque de taux est traité au sein du module correspondant au risque de marché et il n'existe pas de mesure liée au risque d'inflation.

3.1.2. Le risque de réserve : définition

Comme défini au Chapitre 1, le capital économique correspond au capital nécessaire pour ne pas être en ruine avec une probabilité et un horizon de temps donnés. Dans le cadre du référentiel Solvabilité 2, le capital requis correspond à une mesure de risque de type Valeur-en-Risque (Value-at-Risk), avec un niveau de confiance de 99.5% à l'horizon d'un an. Le besoin/surplus en capital correspond quant à lui à l'écart entre le capital disponible et le besoin en capital.

Par analogie, le capital requis au titre du risque de réserve correspond au capital nécessaire pour que, avec une probabilité de 99.5% et un horizon de un an, l'entreprise d'assurance puisse honorer ses engagements relatifs aux paiements futurs des sinistres survenus à la date d'évaluation. A horizon 1 an, l'entreprise d'assurance doit donc être en mesure de disposer de suffisamment de capital disponible pour faire face à une déviation défavorable de l'estimation Best estimate du montant des provisions pour sinistres à payer.

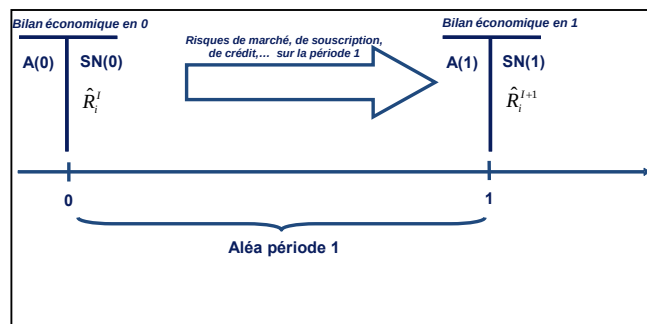
Supposons une entreprise d'assurances qui ne soit exposée qu'au seul risque de réserve (en particulier : pas de variabilité des actifs, pas d'affaires nouvelles souscrites entre $t=0$ et $t=1$), et, pour ne pas alourdir les notations, considérons uniquement un exercice de survenance i .

Nous ne tiendrons pas compte également, par simplification, de l'impôt différé, de la marge pour risques et de l'effet de l'actualisation.

On a alors :

$$SN(0) = A(0) - \hat{R}_i^I = A - (\hat{P}_{i,ult}^I - P_{i,n-i+1})$$

$$SN(1) = A(1) - \hat{R}_i^{I+1} = A(0) - p_{i,n-i+2} - (\hat{P}_{i,ult}^{I+1} - P_{i,n-i+1} - p_{i,n-i+2})$$



avec :

- $A(0)$: valeur de marché des actifs à la date $t=0$,
- $SN(0)$: situation nette de la compagnie à la date $t=0$,
- $SN(1)$: situation nette de la compagnie à la date $t=1$,

- $\hat{P}_{i,ult}^I$: estimation Best estimate de la charge ultime de l'exercice i , connaissant le triangle D_i (triangle connu à la date $t=0$),
- $\hat{R}_i^I$: évaluation Best estimate du montant des provisions pour sinistres relatif à l'exercice de survenance i , connaissant le triangle D_i (triangle connu à la date $t=0$)
- $\hat{P}_{i,ult}^{I+1}$: estimation Best estimate de la charge ultime de l'exercice i , connaissant le triangle D_{i+1} (triangle connu à la date $t=1$),
- $\hat{R}_i^{I+1}$: évaluation Best estimate du montant des provisions pour sinistres relatif à l'exercice de survenance i , connaissant le triangle D_{i+1} (triangle connu à la date $t=1$)
- $p_{i,n-k}$ les paiements incrémentaux relatifs à l'exercice i , effectués entre la date $n-k-1$ et $n-k$,
- $P_{i,n-k}$ les paiements cumulés relatifs à l'exercice i , vus en date $n-k$.

L'entreprise n'étant exposée qu'au risque de réserve, on a :

$$\begin{aligned}
 SCR_{reserve} &= SN(0) - VaR_{0.5\%}(SN(1)) \\
 SCR_{reserve} &= A(0) - (\hat{P}_{i,ult}^I - P_{i,n-i+1}) - VaR_{0.5\%}(A(0) - p_{i,n-i+2} - (\hat{P}_{i,ult}^{I+1} - P_{i,n-i+1} - p_{i,n-i+2})) \\
 SCR_{reserve} &= A(0) - \hat{P}_{i,ult}^I + P_{i,n-i+1} - A(0) - P_{i,n-i+1} + VaR_{99.5\%}(\hat{P}_{i,ult}^{I+1}) \\
 SCR_{reserve} &= VaR_{99.5\%}(\hat{P}_{i,ult}^{I+1}) - \hat{P}_{i,ult}^I \\
 SCR_{reserve} &= -VaR_{0.5\%}(\hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}) \\
 SCR_{reserve} &= -VaR_{0.5\%}(\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))
 \end{aligned}$$

La grandeur $(\hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}) = (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))$, appelée $CDR_i(I+1)$, représente la différence entre deux estimations successives de la charge ultime à la date $t=0$ et à la date $t=1$. Elle a été introduite pour la première fois par M. Wüthrich, M. Merz et N Lysenko¹⁸ sous le nom de Claims Development Result (CDR).

Par définition, le besoin en capital au titre du risque de réserve est donc égal à l'opposé du quantile à 0.5% de la distribution du CDR.

Nous reviendrons en détail sur la notion et mesure du CDR dans le Chapitre 3.

3.2. Mesure du risque de réserve dans la formule standard

La formule standard étant toujours en cours d'élaboration, les définitions données dans ce paragraphe font référence à l'Etude Quantitative d'Impact n°4.

Néanmoins, les mesures d'exécution et les pré-spécifications du QIS5 laissent présager que la structure de la formule standard, pour le risque de primes et de réserve, sera, dans les grandes lignes, similaire à celle testée dans le QIS4.

Nous présenterons l'évolution du calibrage du risque de réserve entre le QIS4, les mesures de niveau 2 et les pré-spécifications du QIS5.

3.2.1. Définition de la formule standard

Les spécifications techniques du QIS4 traitent dans un même sous-module le risque de primes et de réserve. Ce sous-module est une composante du risque de souscription non-vie (qui intègre un second sous-module propre au risque catastrophe) et est défini dans l'article 105 de la directive. Il couvre les fluctuations liées :

- au montant des paiements relatifs aux sinistres survenus à la date d'évaluation (risque de réserve),
- au nombre d'affaires qui seront souscrites l'année à venir et leurs tarifs (risque de primes),
- au volume de prime nécessaire pour couvrir les passifs (montants des sinistres et frais liés à ces sinistres) liés au business souscrit (risque de primes).

L'évaluation du capital requis au titre du risque de primes et réserve repose d'une part sur une mesure du volume de l'activité non-vie de la compagnie et d'autre part sur une fonction de la volatilité des primes et des réserves.

¹⁸ Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method, Scandinavian Actuarial Bulletin - 2008

On note NL_{pr} le besoin en capital au titre du risque de primes et de réserves :

$$NL_{pr} = \rho(\sigma) * V$$

Avec :

- V = Mesure du volume de l'activité en non-vie :

$$V = \sum_{lob} V_{lob}$$

$$V_{lob} = (V_{prem,lob} + V_{res,lob}) \times (0.75 + 0.25 \cdot DIV_{pr,lob})$$

- ✓ $V_{prem,lob}$ est basé sur le volume de primes qui sera souscrit l'année à venir,
- ✓ $V_{res,lob} = PCO_{lob}$: montant Best estimate de la provision pour sinistres nette de réassurance, pour chaque segment de risque (cf Chapitre 1 pour la définition de la segmentation)
- ✓ $DIV_{pr,lob}$: indice de Herfindhal permettant, dans le cas où une entreprise d'assurance souscrit du business dans plusieurs pays, de tenir compte d'un effet lié à la diversification géographique.

Sans tenir compte du risque de primes et en supposant que l'ensemble de portefeuille est souscrit dans un seul pays, on obtient une formule permettant d'isoler le risque de réserve :

$$SCR_{reserve} = \rho(\sigma) * \sum_{lob} PCO_{lob}$$

- $\rho(\sigma)$ = Fonction d'un coefficient de variation σ

$$\rho(\sigma) = \exp\left(\frac{N_{0,995} \times \sqrt{\log(\sigma^2 + 1)}}{\sqrt{\sigma^2 + 1}}\right) - 1$$

- ✓ $N_{0,995}$ est le quantile à 99,5% d'une loi Normale (0,1).
La fonction ρ est calibrée par le CEIOPS de façon à obtenir une Var à 99,5% sous l'hypothèse que ce risque suit une loi log-normale.
- ✓ σ : coefficient de volatilité issue de l'agrégation linéaire des coefficients de volatilité σ_{lob} de chacun des segments. Les σ_{lob} reflètent la volatilité de l'estimation des provisions pour sinistres.

Les coefficients de volatilité associés à chacun des segments de risque, ainsi que la matrice de corrélation permettant d'agréger les segments sont fournis par le CEIOPS. Ces coefficients sont basés sur des données de marché.

Coefficients de volatilité des provisions par segment – QIS4												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\sigma_{res,lob}$	12%	7%	10%	10%	15%	15%	10%	10%	10%	15%	15%	15%

1- Automobile, Responsabilité Civile,
 2- Automobile, autres branches,
 3- Marine, aviation, transport,
 4- Incendie et dommages aux biens,
 5- Responsabilité Civile,
 6- Crédit et caution,
 7- Protection juridique,
 8- Assistance,
 9- Divers,
 10- Acceptations Non Proportionnelles – Responsabilité Civile,
 11- Acceptations Non Proportionnelles – Dommages,
 12- Acceptations Non Proportionnelles – Marine, aviation, transport.

3.2.2. Sensibilité

Dans le cadre du QIS4, une sensibilité relative au calcul des σ_{lob} pouvait être testée : les entreprises d'assurance avaient en effet la possibilité de tester l'impact sur le besoin en capital d'une estimation des $\sigma_{res,lob}$ basée sur les données propres à l'entreprise.

Ce calcul était demandé à titre de sensibilité uniquement, les entreprises d'assurance devant retenir pour le calcul du SCR les coefficients de volatilité fournis par le CEIOPS. Nous présentons néanmoins cette méthode car nous verrons par la suite que l'une des méthodes proposées dans le cadre de la formule standard « entity specific » repose sur cette approche.

La méthode d'estimation des $\sigma_{res,lob}$ reposait sur le calcul du coefficient de variation de la série formée par le résultat du run-off observé sur la dernière année pour chaque exercice de survénance :

On note $RunOff_y$ la valeur absolue du résultat du run-off pour l'exercice y :

$$RunOff_y = |PCO_0^y - (PCO_{-1}^y - p_0^y)|$$

- PCO_0^y représente l'évaluation Best estimate du montant des provisions pour sinistres à payer en date t=0 (date d'évaluation), pour l'exercice y,
- PCO_{-1}^y représente l'évaluation Best estimate du montant des provisions pour sinistres à payer en date t=-1 (à la fin de l'année précédant la date d'évaluation), pour l'exercice y,
- p_0^y représente le montant des paiements réalisés entre t=-1 et t=0 (pendant l'année précédant la date d'évaluation), relatifs aux sinistres de l'exercice y.

« $RunOff_y$ » représente une vision rétrospective de la définition du CDR donnée au début de cette partie. Dans le cas où les paiements observés seraient parfaitement en ligne avec la cadence estimée en date t=-1, la valeur pour $RunOff_y$ serait nulle.

Ces montants sont ensuite exprimés en pourcentage de l'évaluation Best estimate du montant des provisions pour sinistres à payer en date t=0 (PCO_0^y) :

$$RR_y = \frac{RunOff_y}{PCO_0^y}$$

Le coefficient de volatilité est par suite égal à la racine de la somme pondérée des écarts à la moyenne de RR_y , en l'occurrence 0 :

$$\sigma_{(res,lob)} = \sqrt{\frac{1}{(n-1) \cdot \sum_{1 \leq y \leq n-1} PCO_0^y} \sum_{1 \leq y \leq n-1} PCO_0^y \cdot (RR_y - 0)^2}$$

Le principal inconvénient de l'utilisation d'une méthode rétrospective pour mesurer la volatilité dans les réserves à horizon un an repose sur le risque que la volatilité historique ne corresponde plus à la volatilité courante.

3.2.3. Analyse critique de la formule standard

La formule standard, bien que définie dans ses grandes lignes, suscite encore des critiques de la part des acteurs du marché.

Les principales critiques relatives au risque de réserve sont les suivantes :

- Le risque de réserve est basé sur des coefficients de volatilité et une matrice de corrélation qui sont définis par le CEIOPS, et qui ne reflètent donc pas la volatilité et la structure de dépendance intrinsèques à l'entreprise d'assurances, ainsi que son programme de réassurance.

Il convient toutefois de noter que, dans le cadre de la formule standard « entity specific », les entreprises d'assurances pourront, sous certaines conditions, utiliser des paramètres calibrés sur les données de leur portefeuille (cf. paragraphe 3.3).

- Différents intervenants ont soulevé la question de la non adéquation du calibrage du risque de réserve avec l'horizon d'un an défini dans la Directive. Citons par exemple le document publié en Mai 2009 par le CRO Forum : « We recommend to (...) check whether the calibration methods for premium and reserving risk properly reflect the one-year time horizon »¹⁹. Les documents publiés par le CEIOPS relatifs au calibrage de la formule standard lors des QIS3 et QIS4²⁰ n'abordaient pas la problématique de volatilité à horizon un an.

Il convient néanmoins de préciser que le calibrage des paramètres de la formule standard fait l'objet d'un avis du CEIOPS dans le cadre des mesures de niveau 2. Cet avis précise les méthodes de calibrage utilisées par le CEIOPS (cf paragraphe ci-après).

- Certains acteurs soulèvent également la problématique du sur-calibrage du risque de souscription non-vie, pouvant engendrer une sur-estimation du besoin en capital au titre de ce risque, notamment pour les branches à développement long.
- Enfin, la formule standard est basée sur l'hypothèse que le risque de réserve suit une loi log-normale ; cette hypothèse paramétrique est, dans les faits, difficilement démontrable.

3.2.4. Impacts des mesure de niveau 2 sur le risque de réserve

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 48²¹) ont notamment proposé de légères modifications dans la structure générale du risque de réserve par rapport à la structure testée dans le QIS4. En particulier, le facteur de prise en compte d'un effet de diversification géographique est abandonné. Néanmoins, ce facteur est réapparu dans les pré-spécifications du QIS5 publiées en Avril 2010.

¹⁹ Calibration Principles for the Solvency II Standard Formula, CRO Forum, May 2009

²⁰ QIS3 Calibration of the underwriting risk, market risk and SCR, April 2007

²¹ QIS4 Background document Calibration of SCR, MCR and proxies, April 2008

²¹ SCR Standard Formula : non-life underwriting risk

En Novembre 2009, le CEIOPS a également publié un Consultation Paper (CP71²²) portant exclusivement sur le calibrage du risque de primes et de réserve. Le calibrage a été fortement revu à la hausse par rapport au calibrage proposé dans le QIS4.

Le Consultation Paper 71 présente les méthodes et données utilisées pour le calibrage de ces coefficients :

- Les données utilisées sont des triangles issus de différentes compagnies européennes. Néanmoins, le CEIOPS a considéré que les données utilisées pour le calibrage n'étaient pas suffisantes. A titre d'illustration, pour le segment « Incendie et dommages aux biens », le calibrage repose sur des données de 106 entreprises d'assurance, englobant uniquement 3 pays (UK, Luxembourg et Pologne).
- Six méthodes de calibrage ont été testées. Ces six méthodes peuvent être regroupées en deux grandes familles :
 - ✓ La méthode rétrospective, s'apparentant à celle proposée en approche alternative du QIS4,
 - ✓ La méthode Wüthrich-Merz qui sera détaillée dans le Chapitre suivant.

Pour chacun de ces deux grands groupes de méthodes, les différences entre les six méthodes reposent sur la façon d'agréger les résultats issus des différents portefeuilles.

La publication du CP71 a soulevé un certain nombre de questions (manque de données, problématiques méthodologiques) et de lobbying de la part des différents acteurs ; le CEIOPS a d'ailleurs demandé, et obtenu, un délai supplémentaire à la Commission européenne avant de rendre un avis final sur le calibrage de ce risque.

L'avis final a été rendu le 8 Avril 2010. Les mêmes méthodes de calibrage que celles utilisées dans le CP71 ont été utilisées et s'appuient sur des données plus nombreuses ; ainsi, sur le segment « Incendie et dommages aux biens » par exemple, le calibrage de l'avis final repose des données de 8 pays. Dans cet avis final, le calibrage a été effectué sur des données brutes de réassurance. Un facteur d'ajustement a ensuite été pris en compte pour déduire des coefficients de volatilité nets de réassurance. Les coefficients de volatilité ont été globalement revus à la baisse par rapport au CP71.

Les coefficients retenus dans les pré-spécifications du QIS5 ont été revus à la baisse par rapport à ceux présentés dans l'avis final du CEIOPS.

Le tableau suivant présente les coefficients du CP71, de l'avis final et des pré-spécifications du QIS5, avec, pour rappel, les coefficients testés dans le QIS4.

Coefficients de volatilité des provisions par segment												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
QIS4	12%	7%	10%	10%	15%	15%	10%	10%	10%	15%	15%	15%
CP71	12.5%	12.5%	17.5%	15%	20%	20%	12.5%	15%	20%	30%	30%	30%
Avis final	9.5%	12.5%	17.5%	12%	16%	25%	9%	12.5%	20%	25.5%	25%	25%
Pré-spécifications QIS5	9.5%	10%	14%	11%	15.5%	20%	9%	11%	15%	20%	20%	20%

1- Automobile, Responsabilité Civile,
 2- Automobile, autres branches,
 3- Marine, aviation, transport,
 4- Incendie et dommages aux biens,
 5- Responsabilité Civile,
 6- Crédit et caution,
 7- Protection juridique,
 8- Assistance,
 9- Divers,
 10- Acceptations Non Proportionnelles – Responsabilité Civile,
 11- Acceptations Non Proportionnelles – Dommages,
 12- Acceptations Non Proportionnelles – Marine, aviation, transport.

²² SCR Standard Formula : Calibration of non-life underwriting risk

3.3. Mesure du risque de réserve dans le cadre d'une formule standard « entity specific »

Les entreprises d'assurance pourront, sous réserve de l'accord des autorités de contrôle, utiliser des paramètres qui lui sont propres (calibrés sur la base des données internes de l'entreprise). On parle dans ce cas de « formule standard entity specific ».

Les entreprises d'assurance souhaitant évaluer leur besoin en capital à l'aide d'une formule standard « entity specific » devront notamment démontrer que le calibrage de la formule standard ne reflète pas le profil de risque de leur portefeuille. Avant de donner leur accord, les autorités de contrôle vérifieront notamment l'exhaustivité, l'exactitude et la pertinence des données utilisées.

Les avis du CEIOPS sur les mesures de niveau 2 (ex Consultation Paper 75²³) précisent les risques pour lesquels les entreprises d'assurance pourront utiliser des paramètres qui lui sont propres : le risque de primes, le risque de révision et le risque de réserve.

Pour le risque de réserve, le calibrage doit reposer sur une des trois méthodes proposées dans les avis du CEIOPS :

- La première méthode s'apparente à celle proposée en approche alternative dans le QIS4 (approche rétrospective), à la différence près qu'elle ne se limite pas au résultat du run-off sur la dernière année, mais sur l'ensemble de l'historique disponible,
- Les deux autres méthodes reposent sur la méthode proposée par Wüthrich-Merz et qui sera détaillée dans le Chapitre suivant.

Beaucoup d'acteurs ont émis le souhait que le panel de méthodes de calibrage candidates pour le risque de réserve soit plus large, et intègre notamment des méthodes simulatoires telles que celle proposée dans le Chapitre 3 (adaptation de la procédure bootstrap à horizon un an).

Le coefficient de volatilité utilisé pour mesurer le risque de réserve sera issu d'une pondération entre le coefficient de volatilité issu de l'application de l'une de ces méthodes et du coefficient de volatilité donné dans la formule standard. Le coefficient de pondération dépend d'une part du segment de risque et d'autre part de l'historique de données disponible pour calibrer le coefficient de volatilité sur la base des données internes de l'entreprise.

3.4. Mesure du risque de réserve dans un modèle interne

La notion de CDR pour un exercice de survénance a été définie au paragraphe 3.1 comme suit :

$$CDR_i(I+1) = (\hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}) = (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} - p_{i,n-i+2})).$$

Cela correspond à la différence entre deux estimations successives de la charge ultime à la date $t=0$ et à la date $t=1$.

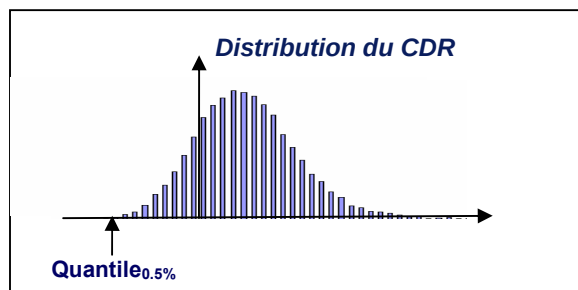
Le besoin en capital au titre du risque de réserve pour un exercice de survénance i donné correspond à :

$$SCR_{reserve} = -VaR_{0.5\%}(CDR_i(I+1))$$

Pour l'ensemble des exercices de survénance, on aura :

$$SCR_{reserve} = -VaR_{0.5\%}(\sum_i CDR_i(I+1)) = -VaR_{0.5\%}(CDR(I+1))$$

Dans le cadre d'un modèle interne, il s'agira donc de déterminer le quantile à 0.5% de la distribution du $CDR(I+1)$.



²³ SCR standard formula – undertaking specific parameters.

L'obtention du quantile à 0.5% de la distribution du $\hat{CDR}(I+1)$ permet de mesurer le risque de réserve dans une vision « stand-alone » (avant agrégation avec les autres risques). Cela s'avère suffisant dans le cadre de l'utilisation d'un modèle interne partiel ne s'intéressant qu'au risque de réserve ou dans le cadre d'un modèle interne fonctionnant en « silos » (modélisation des risques en « stand-alone » puis agrégation des différents risques).

Dans le cadre de l'utilisation d'un modèle interne projetant simultanément un ensemble de risques (cf. Chapitre 1, paragraphe 3.4.2), par exemple par des techniques de Monte-Carlo, se pose la question de l'intégration de la mesure du risque de réserve avec les autres risques.

Les méthodes qui seront décrites dans le Chapitre 3 peuvent être classées en 2 groupes :

- **Cas 1** : méthodes ne permettant pas d'obtenir directement, à partir de la distribution du CDR :
 - ✓ une distribution relative aux paiements de première période,
 - ✓ une distribution de l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$.

La méthode proposée par Wüthrich et Merz (cf Chapitre suivant) s'intègre dans cette famille de méthodes.

Dans le cas de l'utilisation de telles méthodes, l'obtention d'un bilan économique en date $t=1$, et, par suite, d'une distribution de situation nette en date $t=1$, n'est pas directe.

Ces méthodes pourront être utilisées soit dans le cadre de modèles internes se basant sur une approche par silo, soit dans le cadre d'un modèle interne partiel se concentrant sur le risque de réserve.

Seule une hypothèse de cadencement des paiements (éventuellement stochastique) permettrait de « ventiler » le $\hat{CDR}(I+1)$ en deux composantes correspondant aux paiements de première période et à l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$.

- **Cas 2** : méthodes permettant d'obtenir directement, à partir de la distribution du CDR :
 - ✓ une distribution relative aux paiements de première période,
 - ✓ une distribution de l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$.

L'adaptation de la procédure Bootstrap pour la rendre compatible avec l'horizon de un an (cf Chapitre suivant) s'intègre dans cette famille de méthodes.

Dans ce cadre, une projection, pour chaque simulation des variables $(\sum_i p_{i,n-i+2})$ et $(\sum_i \hat{R}_i^{t+1} / \sum_i p_{i,n-i+2})$ permet l'obtention d'un bilan économique en date $t=1$.

CHAPITRE 3 – MESURE DE VOLATILITE A UN AN DES PROVISIONS POUR SINISTRES A PAYER

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la mise en œuvre de méthodes stochastiques permettant d'évaluer le risque de réserve dans le cadre du projet Solvabilité 2.

Nous expliquerons dans un premier temps pourquoi il est nécessaire d'adapter les méthodes de provisionnement stochastiques habituellement utilisées par les entreprises d'assurance, pour les rendre en conformité avec la définition de la mesure de volatilité à un an.

Nous décrirons ensuite la théorie sous-jacente aux méthodes « usuelles » et à leur adaptation pour être conforme avec l'horizon d'un an fixé par la réglementation Solvabilité 2.

Une attention particulière sera apportée à la fois au formalisme théorique de ces méthodes mais également à leur mise en place opérationnelle.

1. NOTATIONS

Nous présentons les principales notations qui seront utilisées tout au long de notre étude.

	année de développement j				
exercice i	1	2	...		n
1					
2					
...					
n					

D_t

	année de développement j				
exercice i	1	2	...		n
1					
2					
...					
n					

D_{t+1}

- **Triangles de liquidation**

- $D_t = \{y_{ij}; i \leq n, i + j \leq n + 1\}$ représente le triangle de liquidation en date $t=0$, constitué de n années d'origine i et n années de développement j .

y_{ij} représente le montant relatif à l'année d'origine i et l'année de développement j .

Les montants y_{ij} peuvent représenter les charges ou les règlements incrémentaux des sinistres respectivement :

- ✓ c_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n-i+1$) lorsque les y_{ij} représentent les charges sinistres,
- ✓ p_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n-i+1$) lorsque les y_{ij} représentent les paiements des sinistres.

y_{ij} peut être considéré comme la réalisation de la variable aléatoire Y_{ij} .

Les montants de paiements et de charges de sinistres peuvent également s'exprimer sous la forme cumulée, respectivement :

- ✓ C_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n-i+1$) pour les charges sinistres cumulées,
- ✓ P_{ij} ($i=1, \dots, n; j=1, \dots, n-i+1$) pour les paiements cumulés.

- $D_{t+1} = \{y_{ij}; i \leq n \text{ et } i + j \leq n + 2\} = D_t \cup \{y_{i, n-i+2}; i \leq n\}$ représente le triangle de liquidation en date $t=1$ (pour les sinistres survenus avant la date $t=0$), constitué de n années d'origine i et $n+1$ années de développement j .

On notera indifféremment $t=0$ ou $t=l$, et $t=1$ ou $t=l+1$.

La diagonale correspondant aux paiements qui seront effectués entre la date $t=0$ et la date $t=1$ sera notée diagonale $[l; l+1]$, et les diagonales ultérieures les diagonales $[l+1; \dots]$.

- **Provisions pour sinistres**

On notera :

- $\hat{P}_{i,n}^t = \hat{C}_{i,n}^t = \hat{E}(P_{i,n}^t / D_t)$ l'estimation de la charge ultime à la date $t=0$ (connaissant le triangle de liquidation D_t), pour l'exercice de survenance i (et $\hat{P}_{i,ult}^t = \hat{C}_{i,ult}^t = \hat{E}(P_{i,ult}^t / D_t)$ en présence d'un facteur de queue de développement),

- $\hat{R} = \hat{R}^I = \hat{E}(R^I / D_I) = BE_0$ l'estimation du montant Best estimate des provisions pour sinistres, à la date 0 (connaissant le triangle de liquidation D_I), pour les exercices de survenance 1 à n (et $\hat{R}_i = \hat{R}_i^I = \hat{E}(R_i^I / D_{I,i})$ pour l'exercice de survenance i),
- $\hat{P}_{i,n}^{I+1} = \hat{C}_{i,n}^{I+1} = \hat{E}(P_{i,n}^{I+1} / D_{I+1})$ l'estimation de la charge ultime à la date t=1 (connaissant le triangle de liquidation D_{I+1}), pour l'exercice de survenance i (et $\hat{P}_{i,ult}^{I+1} = \hat{C}_{i,ult}^{I+1} = \hat{E}(P_{i,ult}^{I+1} / D_{I+1})$ en présence d'un facteur de queue de développement),
- $\hat{R}^{I+1} = \hat{E}(R^{I+1} / D_{I+1}) = BE_1$ l'estimation du montant Best estimate des provisions pour sinistres, à la date 1 (connaissant le triangle de liquidation D_{I+1}), pour les exercices de survenance 1 à n (et $\hat{R}_i^{I+1} = \hat{E}(R_i^{I+1} / D_{I+1,i})$ pour l'exercice de survenance i),
- $p_{i,n-i+2}$ le montant des règlements effectués entre la date 0 et la date 1, pour l'exercice de survenance i et $\sum_{i=1}^n p_{i,n-i+2}$ le montant des règlements effectués entre la date 0 et la date 1, pour les exercices de survenance 1 à n (respectivement $p_{i,n-i+k}$ et $\sum_{i=1}^n p_{i,n-i+k}$ pour le montant des règlements effectués entre la date k-2 et la date k-1).

Par souci de simplification, on notera également : $P_1 = \sum_{i=1}^n p_{i,n-i+2}$ et $P_{k-1} = \sum_{i=1}^n p_{i,n-i+k}$.

• Claims Development Result

On notera :

- $C\hat{D}R_i(I+1) = (\hat{P}_{i,n}^I - \hat{P}_{i,n}^{I+1}) = (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))$, le « Claims Development Result » pour un exercice de survenance i. Le CDR représente la différence entre deux évaluations successives de la charge ultime (et $C\hat{D}R_i(I+1) = (\hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}) = (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))$ en présence d'un facteur de queue de développement),
- $C\hat{D}R(I+1) = \sum_{i=1}^n (\hat{P}_{i,n}^I - \hat{P}_{i,n}^{I+1}) = \sum_{i=1}^n (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))$ le « Claims Development Result » pour les exercices de survenance 1 à n (et $C\hat{D}R(I+1) = \sum_{i=1}^n (\hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}) = \sum_{i=1}^n (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))$ en présence d'un facteur de queue de développement).

2. LA NECESSAIRE ADAPTATION DES METHODES DE PROVISIONNEMENT STOCHASTIQUES « USUELLES »

Nous analysons dans cette première partie les fondements sous-jacents aux modèles de provisionnement stochastiques habituellement utilisés par les entreprises d'assurance.

Cette analyse permettra notamment de comprendre que ces méthodes fournissent dans leur version « classique » une vision à l'ultime de la volatilité des provisions pour sinistres et non pas une vision à 1 an comme requise dans une approche compatible avec le cadre Solvabilité 2 décrit dans le Chapitre 1.

2.1. Introduction aux méthodes stochastiques

L'avènement de nouvelles normes réglementaires et comptables (Solvabilité 2, normes IFRS, etc), la nécessité pour les entreprises d'assurance de mieux évaluer et gérer leurs risques et les progrès effectués depuis une quinzaine d'années dans le domaine du provisionnement stochastique, ont progressivement conduit les entreprises d'assurance à recourir à des méthodes stochastiques dans le cadre de l'évaluation de leurs provisions pour sinistres à payer.

Les méthodes de provisionnement déterministes décrites dans le chapitre précédent ne permettent en effet pas une mesure du risque associé à l'estimation du montant de la provision pour sinistres à payer.

Les méthodes stochastiques répondent à cette problématique. Elles supposent que les constituants y_{ij} du rectangle de liquidation sont des réalisations de variables aléatoires Y_{ij} , observées pour $i+j \leq n+1$. Ainsi, il est possible d'obtenir une estimation de la distribution du montant des provisions pour sinistres à payer et d'en déduire les caractéristiques de celui-ci (quantiles, écart-type, Value at risk, probabilité d'insuffisance,...).

Les méthodes stochastiques permettent également :

- d'explicitier les hypothèses utilisées dans le modèle de provisionnement et de les valider, au moins partiellement,
- d'évaluer la variabilité du montant des provisions pour sinistres à payer « prévu » par le modèle,
- de construire des intervalles de confiance.

- **Exemple d'application**

Une application concrète des méthodes de provisionnement stochastiques consiste en la détermination d'une marge pour risques et incertitudes (MRI), dont le principe général est le suivant :

$$\text{MRI} = \beta\%. \text{ Montant Best estimate des provisions pour sinistres à payer}$$

Cette marge permet d'évaluer un intervalle de confiance autour de l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres à payer, et de déduire une probabilité d'insuffisance. Certaines entreprises d'assurance peuvent recourir également au calcul d'une marge pour risques afin de mieux appréhender et piloter leur risque ; par exemple, pour estimer le quantile correspondant au montant de provisions pour sinistres inscrit dans leurs comptes sociaux.

La détermination du coefficient β est rendue possible par les méthodes de provisionnement stochastiques. Ce coefficient peut en effet être déduit d'un quantile de la distribution du montant des provisions pour sinistres à payer, ou de l'estimation de l'écart-type de cette distribution.

Cette marge pourrait également permettre de déterminer le montant supplémentaire ajouté à l'évaluation Best estimate des engagements qui serait demandé par un tiers dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale, traduisant ainsi le risque pris par l'investisseur, l'incertitude liée à l'évaluation Best estimate des provisions et à l'absence de marché pour des transactions de portefeuilles d'assurance. Rappelons que, dans le cadre de la construction d'un bilan selon les normes Solvabilité 2, cette marge pour risques est évaluée selon une méthode « coût du capital ».

Il convient de souligner que les méthodes de provisionnement stochastiques sont utilisées dans la grande majorité des cas en complément des méthodes de provisionnement déterministes mais ne se substituent pas aux méthodes déterministes classiques qui sont encore largement utilisées pour estimer le Best estimate des engagements en assurance non-vie.

2.2. Erreur d'estimation et erreur de processus

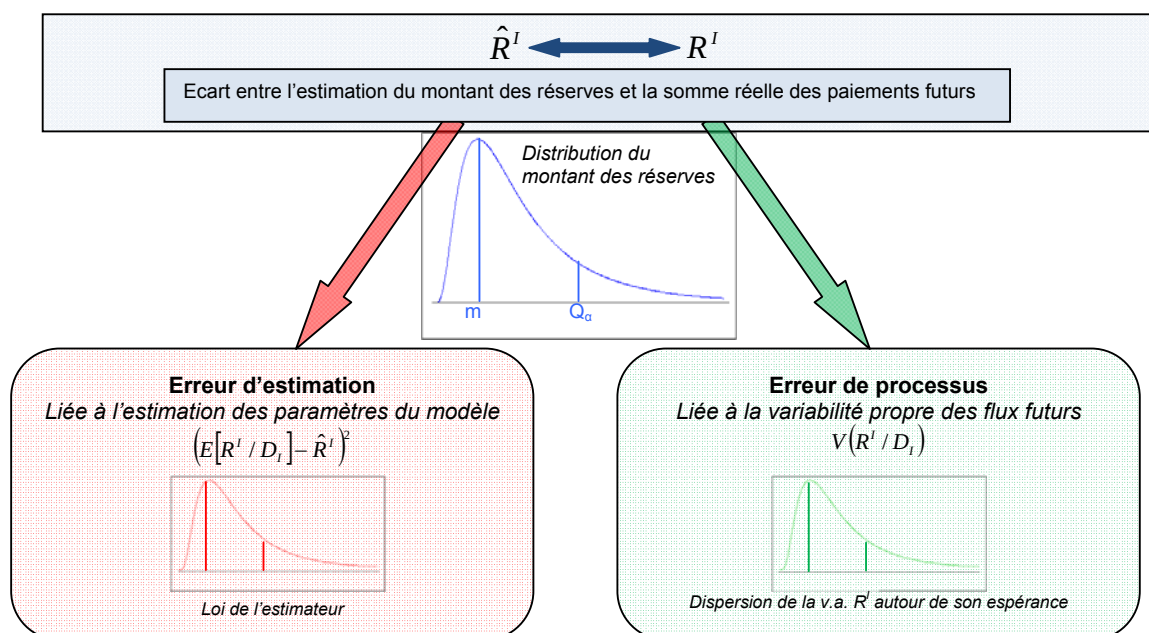
La variabilité de l'estimation $\hat{R}^t$ (évaluation Best estimate du montant des provisions pour sinistres en date 0) par rapport à la somme des paiements futurs qui seront effectivement versés se mesure par l'écart quadratique moyen de prédiction : $E\left(\left(R^t - \hat{R}^t\right)^2 / D_t\right)$, D_t représentant l'information connue en date 0.

La grandeur R^t ne sera connue qu'une fois l'ensemble des sinistres liquidés. Les méthodes stochastiques usuelles mesurent donc une variabilité du montant Best estimate des provisions pour sinistres dans une approche liquidative totale. Plus précisément, elles permettent de mesurer l'écart entre l'estimation en date 0 du montant des provisions pour sinistres et ce qui sera réellement réglé in fine par l'entreprise d'assurance pour honorer ses engagements envers les assurés.

Les méthodes stochastiques usuelles prennent en compte deux types d'erreur :

- Une erreur d'estimation : $\left(E[R^t / D_t] - \hat{R}^t\right)^2$. Cette erreur traduit l'erreur inhérente à l'estimation des paramètres du modèle et correspond à l'écart entre les paiements espérés et la valeur de l'estimateur des paiements espérés,
- Une erreur de processus : $V(R^t / D_t)$. Cette erreur traduit la volatilité intrinsèque liée aux paiements futurs et correspond à l'écart entre les paiements espérés et les paiements réels.

La prise en compte de ces deux erreurs est schématisée ci-dessous :



$$\text{On a : } E\left(\left(R^I - \hat{R}^I\right)^2 / D_t\right) = msep(\hat{R}^I) = \underbrace{\left(E\left[R^I / D_t\right] - \hat{R}^I\right)^2}_{\text{Erreur d'estimation}} + \underbrace{V\left(R^I / D_t\right)}_{\text{Erreur de processus}}.$$

Cette relation se démontre du fait que $E(X - a)^2 = V(X) + (E(X) - a)^2$.

La msep (« mean square error of prediction ») concerne la variabilité de la prévision en tenant compte de l'incertitude liée à l'estimation des paramètres et de la variabilité inhérente de la variable à prévoir.

On notera de plus $sep = \sqrt{msep}$ l'erreur standard de prédiction.

Il est important de signaler qu'il ne faut pas confondre la msep avec la mse (mean square error ou écart quadratique moyen) qui mesure l'erreur d'estimation. On notera : $se = \sqrt{mse}$ l'erreur standard d'estimation.

Ces deux notions seront largement développées dans le cadre des modèles factoriels stochastiques (cf. paragraphe 3.2).

Ces deux notions d'erreur d'estimation et d'erreur de processus sont fondamentales pour appréhender au mieux les modèles stochastiques, et notamment leur adaptation à l'horizon un an.

2.3. Adaptation des méthodes stochastiques « usuelles »

Comme précisé au paragraphe précédent, les méthodes stochastiques « usuelles » permettent une mesure de l'écart quadratique moyen, c'est-à-dire une mesure de l'écart entre l'estimation du montant des provisions pour sinistres à payer et ce qui sera réellement payé, cette dernière valeur n'étant connue qu'in fine, une fois liquidé l'ensemble des sinistres survenus avant la date d'évaluation. Les méthodes stochastiques usuelles mesurent donc une variabilité du montant Best estimate des provisions pour sinistres dans une approche liquidative totale.

La mesure du risque de réserve dans le cadre du nouveau référentiel Solvabilité 2 a été définie ainsi (cf. Chapitre 2, paragraphe 3.1) :

$$SCR_{\text{reserve}} = -VaR_{0.5\%} \left(\sum_i C\hat{D}R_i(I+1) \right) = -VaR_{0.5\%} \left(\sum_i (\hat{R}_i^I - \hat{R}_i^{I+1} - p_{i,n-i+2}) \right)$$

On ne cherche donc pas à mesurer – dans une approche liquidative totale – une volatilité du montant des provisions pour sinistres évalué en date 0, mais plutôt une mesure de la déviation à horizon 1 an de l'évaluation en date 0 du montant des provisions pour sinistres.

Cela met en exergue la nécessaire adaptation des méthodes de provisionnement stochastique usuelles.

Les méthodes stochastiques de mesure de la volatilité du montant Best estimate des provisions pour sinistres dans une approche liquidative totale les plus utilisées par les entreprises d'assurance sont :

- **La méthode Mack :**

Cette méthode fournit une estimation des deux premiers moments de la distribution du montant des provisions pour sinistres à payer. Cette approche n'est pas simulatoire ; une hypothèse de loi de distribution (le plus fréquemment la loi lognormale) permet d'estimer les quantiles de la distribution de $\hat{R}^I$.

- **La procédure bootstrap :**

Il s'agit d'une technique de ré-échantillonnage des résidus issus de l'application d'un modèle statistique. Cette technique simulatoire permet d'obtenir un univers de pseudo triangles initiaux à partir desquels les paiements futurs sont simulés.

Les modèles statistiques sous-jacents sont le plus fréquemment des modèles factoriels de type GLM ou Christophides.

Dans les deux cas, l'erreur d'estimation (liée au modèle) et l'erreur de processus (liée à la volatilité intrinsèque) sont prises en compte sur l'ensemble de la durée de liquidation résiduelle.

Ces méthodes sont décrites en détail dans la section 3 de ce Chapitre.

L'adaptation de ces méthodes afin de les rendre conformes au référentiel Solvabilité 2 sont :

- **La méthode Wüthrich-Merz :**

Cette méthode fournit une estimation des deux premiers moments de la distribution de $C\hat{D}R(I+1)$. Au même titre que la méthode Mack, bien que les hypothèses sous-jacentes au modèle de Wüthrich-Merz soient plus fortes, cette approche n'est pas simulatoire et une hypothèse de loi de distribution (la loi normale par exemple) permet d'estimer les quantiles de la distribution de $C\hat{D}R(I+1)$.

- **L'adaptation de la procédure Bootstrap :**

Nous présenterons et analyserons deux adaptations de la procédure Bootstrap, permettant d'évaluer :

- ✓ Une distribution des paiements qui seront effectués entre $t=0$ et $t=1$: $\sum_{i=1}^n p_{i,n-i+2}$,
- ✓ Une distribution de l'évaluation du montant Best estimate des provisions pour sinistres, à la date 1 $\hat{R}^{t+1}$.

Dans ce cas, l'erreur d'estimation (liée au modèle) est prise en compte sur l'ensemble de la durée de liquidation résiduelle et l'erreur de processus (liée à la volatilité intrinsèque) porte uniquement sur les paiements qui seront effectués entre $t=0$ et $t=1$.

Ces méthodes sont décrites en détail dans la section 4 de ce Chapitre.

3. METHODES STOCHASTIQUES « USUELLES »

Nous présentons dans cette partie deux familles de modèles stochastiques « usuels » :

- Le modèle Mack,
- Les modèles factoriels stochastiques, en particulier le modèle Christophides et la famille des modèles GLM. Ces derniers, associés à une procédure Bootstrap, permettent l'obtention d'une distribution du montant des provisions pour sinistres à payer.

3.1. Le modèle Mack

3.1.1. Spécifications du modèle

Nous suivons l'approche proposée par Mack dans son article de 1993²⁴.

Non paramétrique, au sens où aucune hypothèse de distribution n'est faite sur les composantes du triangle, et conditionnel, au sens où les espérances sont prises connaissant les réalisations du triangle supérieur, ce modèle s'applique aux montants cumulés C_{ij} ou P_{ij} sous les deux hypothèses suivantes :

H1 : Indépendance des exercices d'origine

Les variables aléatoires $(C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ et $(C_{i,j})_{j=1,\dots,n}$ sont pour $i_1 \neq i_2$ indépendantes.

H2 : Pour $j=1,\dots, n-1$, il existe un paramètre f_j tel que conditionnellement :

$$E(C_{i,j+1} / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = f_j C_{ij} \text{ pour } i=1,\dots,n$$

Sous ces deux hypothèses, Mack a montré que le modèle stochastique induit fournit exactement le même montant de provisions pour sinistres à payer que la méthode Chain Ladder.

Sous ces hypothèses et conditionnellement au triangle $D_i = \{C_{ij}; i+j \leq n+1\}$ des variables aléatoires observables,

on obtient les résultats suivants : pour $j=1,\dots, n-1$, le facteur Chain Ladder $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{ij}}$ est un estimateur sans

biais du facteur de développement f_j .

Il en est de même pour les valeurs « calculées » par Chain-Ladder :

$$\hat{P}_{in} = \hat{C}_{in} = \hat{f}_{n-i+1} \times \dots \times \hat{f}_{n-1} C_{i,n-i+1} \text{ pour } E(C_{in} / D_i) = f_{n-i+1} \times \dots \times f_{n-1} C_{i,n-i+1}$$

$$\hat{R}_i = \hat{P}_{in} - P_{i,n-i+1} \text{ pour } E(R_i / D_i) = E(P_{in} / D_i) - P_{i,n-i+1}$$

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i \text{ pour } E(R / D_i)$$

Pour mesurer l'erreur de prédiction, T. Mack introduit une hypothèse, analogue à H2, sur la variabilité au sein du rectangle :

H3 : Pour $j=1,\dots, n-1$, il existe un paramètre σ_j^2 tel que :

$$V(C_{i,j+1} / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = \sigma_j^2 C_{ij} \text{ pour } i=1,\dots,n$$

²⁴ DISTRIBUTION-FREE CALCULATION OF THE STANDARD ERROR OF CHAIN LADDER RESERVE ESTIMATES – Mack - Munich Re – ASTIN Bulletin, Vol.23, No 2, 1993

On estime σ_j^2 comme suit : $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2$ pour $k=1, \dots, n-2$.

La valeur de $\hat{\sigma}_k^2$ pour $k=n-1$ est extrapolée de telle sorte que $\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^2}{\hat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-1}^2}$, ce qui donne :

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min \{ \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \} \right\}$$

L'incertitude présente dans la prédiction de C_{in} par $\hat{C}_{in}$, classiquement mesurée par l'écart quadratique moyen, s'écrit :

$$mse_p(\hat{C}_{i,n}) = E \left[(C_{i,n} - \hat{C}_{i,n})^2 / D_i \right] = \underbrace{E[C_{i,n} / D_i] - \hat{C}_{i,n}}_{\text{Erreur d'estimation}}^2 + \underbrace{V(\hat{C}_{i,n} / D_i)}_{\text{Erreur de processus}}$$

De plus, la relation $R_i - \hat{R}_i = C_{in} - \hat{C}_{in}$ conduit à $msep(\hat{R}_i) = mse_p(\hat{C}_{i,n})$

Sous les hypothèses H1, H2 et H3, les grandeurs $msep(\hat{R}_i)$ et $msep(\hat{R})$ sont estimées par :

$$m\hat{sep}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right)$$

Cette expression est la somme de deux termes principaux, dont le premier correspond à l'erreur de processus et le second à l'erreur d'estimation.

Pour l'ensemble des exercices de survénance, on a :

$$m\hat{sep}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left(m\hat{sep}(\hat{R}_i) \right)^2 + \hat{C}_{i,n} \cdot \left(\sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{j,n} \right) \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\frac{2 \cdot \hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}}$$

Pour la démonstration de ces résultats, nous renvoyons à l'article de Mack (1993).

3.1.2. Validation du modèle

La méthode Mack repose sur 3 hypothèses fondamentales qu'il est donc nécessaire de valider :

- L'hypothèse H1, supposant l'indépendance entre les différents exercices de survénance, peut ne pas être vérifiée en pratique pour différentes raisons (évolution de la politique de gestion des sinistres par exemple).
- L'hypothèse H2 peut être validée graphiquement : pour tout j fixé, les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i=1, \dots, n-j}$ doivent être sensiblement alignés sur une droite.
- De même, l'hypothèse H3 peut être validée graphiquement : pour tout j fixé, le graphe des résidus $\frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j \cdot C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$, $i = 1, \dots, n-j$, ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire.

3.1.3. Avantages et limites du modèle Mack

Le modèle Mack est l'un des modèles stochastiques les plus utilisés par les entreprises d'assurance ; son intérêt repose essentiellement sur :

- Le fait qu'il reproduise exactement les évaluations de la méthode Chain Ladder,
- Le fait (comme pour la méthode Chain-Ladder) de pouvoir facilement comprendre et analyser les résultats, et le cas échéant, de pouvoir « corriger » les données du triangle : non prise en compte dans le calcul des σ_k^2 de développements individuels ou de certains exercices de survenance anciens jugés non représentatifs,...
- Sa simplicité de mise en œuvre.

En revanche, le modèle Mack ne fournit pas directement une distribution du montant des réserves. Une hypothèse de loi de distribution (le plus fréquemment la loi lognormale), dont les deux premiers moments sont donnés par $\hat{R}$ et $m\hat{s}ep(\hat{R})$ est alors nécessaire pour déterminer des indicateurs de risque tels que la Value-at-Risk.

3.2. Les modèles factoriels stochastiques

La plupart de ces modèles font intervenir les montants non cumulés (incrémentes) considérés comme des variables aléatoires Y_{ij} , $i, j=1, \dots, n$. On fait de plus l'hypothèse forte d'indépendance de ces variables aléatoires. Cette hypothèse exclut en particulier, pour un exercice d'origine donné, tout phénomène de compensation d'une année de développement à une autre.

Parmi ces n^2 variables aléatoires, celles $(Y_{i,j})_{i+j \leq n+1}$ du triangle supérieur ont été observées, $(Y_{i,j})_{i+j \leq n+1}$ étant leur réalisation.

Dans le cas où Y_{ij} correspond à des paiements, la provision pour sinistres à payer (ce montant étant une variable aléatoire), pour la $i^{\text{ème}}$ année d'origine est la somme des variables aléatoires $Y_{i,n-i+2}, \dots, Y_{i,n}$: $R_i = \sum_{h=n-i+2}^n Y_{ih}$. La provision

globale s'écrit : $R = \sum_{i=1}^n R_i$. R étant, sous l'hypothèse d'indépendance des variables Y_{ij} , une somme de variables aléatoires indépendantes, la distribution de R et ses caractéristiques pourraient théoriquement se déduire de celles des Y_{ij} . La mise en œuvre de cette remarque rencontre de graves difficultés pratiques.

Ces modèles sont majoritairement paramétriques au sens où les Y_{ij} sont munies de distributions de même « type » (Poisson, LogNormale, Gamma, ...), dépendant de paramètres θ_{ij} réels ou vectoriels. Ils sont explicatifs et très proches des modèles de tarification.

- **Estimation d'un paramètre**

Celui-ci est le plus souvent lié à la loi de probabilité des R_i ou à celle de R . Ce paramètre peut être :

- Un indicateur de valeurs centrales de la loi de R : moyenne, médiane,...
- Un indicateur de volatilité : variance, écart-type,...
- La probabilité d'insuffisance d'un montant de provision R_0 donné : $P(R > R_0) = 1 - F_r(R_0)$, où F_r représente la fonction de répartition de R ,

- Un indicateur de queue : la Value-at-Risk ($P(R > VaR_\varepsilon) = \varepsilon$, où VaR_ε coïncide avec le quantile d'ordre $1-\varepsilon$ de R), la Tail Value-at-Risk ($P(R / R > VaR_\varepsilon)$),...

Si $\hat{\pi} = \hat{\pi}[(Y_{ij})_{i+j \leq n+1}]$ est un estimateur de $\pi(F_r)$, l'incertitude liée à cette estimation est classiquement mesurée par l'écart quadratique moyen : $mse(\hat{\pi}) = E\{[\hat{\pi} - \pi(F_r)]^2\} = V(\hat{\pi}) + [E(\hat{\pi}) - \pi(F_r)]^2$, ou par l'erreur standard d'estimation : $se(\hat{\pi}) = \sqrt{mse(\hat{\pi})}$. Ces fonctions sont elles mêmes estimées respectivement par : $\hat{mse}(\hat{\pi})$ et $\hat{se}(\hat{\pi})$.

Dans le cas d'un paramètre de valeur centrale (moyenne ou médiane), il est alors souhaitable que l'estimation de la provision qui en résulte soit proche de celle donnée par chain ladder ou même strictement égale à celle-ci.

- **Prévision d'une fonction des variables aléatoires du triangle inférieur**

Un prédicteur de la variable aléatoire $f[(Y_{ij})_{i+j > n+1}]$ est une fonction $h[(Y_{ij})_{i+j \leq n+1}]$ des variables aléatoires du triangle supérieur ; la prédiction correspondante est $h[(y_{ij})_{i+j \leq n+1}]$.

L'incertitude liée à cette prédiction est mesurée par l'écart quadratique moyen (de prédiction) : $msep(h) = E\{[h(Y_{ij}) - f(Y_{hk})]^2\}$, l'espérance portant sur les variables du triangle supérieur et inférieur. L'indépendance des variables $f[(Y_{ij})_{i+j > n+1}]$ et $h[(Y_{ij})_{i+j \leq n+1}]$ permet d'écrire : $msep(h) = V(f(Y_{hk})_{h+k > n+1}) + E\{[h(Y_{ij})_{i+j \leq n+1} - E[f(Y_{ij})_{i+j > n+1}]]^2\}$, où $V(f(Y_{hk})_{h+k > n+1})$ est une incertitude intrinsèque au modèle (indépendant du processus de prédiction). Le second terme de l'égalité est l'erreur quadratique d'estimation de $E[f(Y_{ij})_{i+j > n+1}]$ par $h[(Y_{ij})_{i+j \leq n+1}]$.

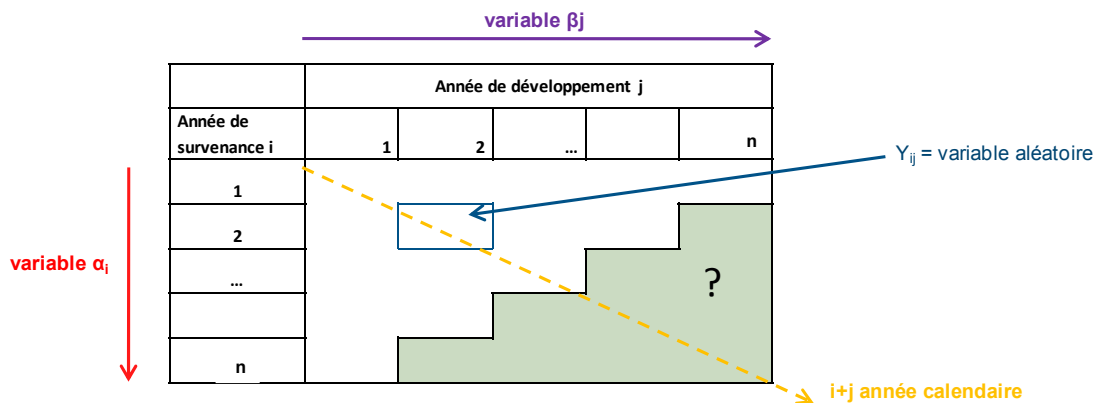
Le terme additionnel, par rapport au cas de l'estimation, provient du fait qu'une procédure de prédiction de la valeur prise par une variable aléatoire doit intégrer la variabilité de celle-ci.

De manière analogue à l'erreur standard, on peut retenir comme mesure d'erreur, l'erreur standard de prédiction :

$$sep(h) = \sqrt{msep(h)}.$$

3.2.1. Variables explicatives et fonction lien

Les variables explicatives sont les trois dimensions « naturelles » du triangle de liquidation :



- La variable « année de développement » est une variable quantitative discrète à valeurs $0, 1, \dots$. Elle peut être traitée :
 - ✓ Comme des facteurs à n modalités avec paramétrage $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$,
 - ✓ Comme une variable discrète. Dans ce cas, une modélisation de l'influence du délai serait, par exemple, paramétrée à l'aide de $\beta_j, \lambda \cdot \log(j+1), \dots$
- Les variables « année d'origine » et « année calendaire » sont quant à elles des variables qualitatives ordinales. Cependant les procédures de mise en œuvre des méthodes explicatives ne permettent pas d'intégrer ce type de covariates. C'est pourquoi, dans la suite, les variables année seront considérées le plus souvent qualitatives pures.

L'année d'origine est un facteur à n modalités $1, 2, \dots, n$. On lui substitue n variables auxiliaires disjonctives en $0, 1$ à paramétrage $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. La modalité 1, par exemple, sert de référence : $\alpha_1 = 0$.

De même, l'année calendaire serait paramétrée en μ_{i+j} . Nous supposons dans la suite que $\mu_{i+j} = \mu$ (ce qui revient à supposer une inflation constante dans le temps).

Dans la suite, on se limitera à la modélisation selon des variables qualitatives à paramétrage $(\alpha_i)_{i=1, \dots, n}$ et $(\beta_j)_{j=1, \dots, n}$ et un paramètre constant μ . Il n'a pas été introduit d'interaction entre année d'origine et délai de règlement.

Un modèle factoriel nécessite également la donnée d'un lien entre cette loi et les facteurs ci-dessus. Ce lien s'exprime sous la forme d'une fonction g : $\mu_{ij} = E(Y_{ij})$ et $\eta_{ij} = g(\mu_{ij})$. Les formes standards du lien sont la forme additive et multiplicative, respectivement :

- $\mu_{ij} = \eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$,
- $\eta_{ij} = \log(\mu_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$.

3.2.2. Estimation

La méthode du maximum de vraisemblance, appliquée aux données du triangle supérieur, fournit les estimateurs « emv » $\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_j)$ des $\mu, (\alpha_i), (\beta_j)$.

On en déduit (par invariance fonctionnelle du maximum de vraisemblance) les emv $\hat{\mu}_{ij}$ des $\mu_{ij} = E(Y_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. $\hat{E}(Y_{ij}) = \hat{\mu}_{ij}$ est la valeur « prévue » par le modèle.

Il en résulte un estimateur $\hat{E}(R_i) = \sum_{h=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ih}$ de $E(R_i)$ et un estimateur $\hat{E}(R) = \sum_{i=1}^n \hat{E}(R_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ih}$ de

$$E(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=n-i+2}^n E(Y_{ih}).$$

Dans l'évaluation de l'incertitude de cette estimation, il faut noter que le calcul de $V(\hat{E}(R_i))$ et $V(\hat{E}(R))$ nécessite la connaissance des variances et covariances des $\hat{\mu}_{ij}$: $V(\hat{\mu}_{ij}), Cov(\hat{\mu}_{i_1 j_1}, \hat{\mu}_{i_2 j_2})$.

On écrit alors $V(\hat{E}(R_i)) = \sum_{h=n-i+2}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{h_1=n-i+2}^n \sum_{h_2=n-i+2}^n Cov(\hat{\mu}_{h_1 i}, \hat{\mu}_{h_2 i})$,

et $V(\hat{E}(R)) = \sum_{i=1}^n \sum_{h=n-i+2}^n V(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{h_1=n-i_1+2}^n \sum_{h_2=n-i_2+2}^n Cov(\hat{\mu}_{h_1 i_1}, \hat{\mu}_{h_2 i_2})$.

Le calcul exact des variances et covariances des $\hat{\mu}_{ij}$ pose souvent problème. On a souvent recours dans ce cas à la méthode delta ou la mise en place de la procédure bootstrap (cf paragraphe suivant).

3.2.3. Mesure de la précision de l'estimation du montant des provisions pour sinistres à payer : méthode delta et bootstrap

Comme précisé dans la section 1 de ce Chapitre, la variabilité de l'estimation $\hat{R}^i$ par rapport à la somme des paiements futurs qui seront effectivement versés se mesure par l'écart quadratique moyen (MSEP), et se décompose en deux termes appelés respectivement la variance du processus et l'erreur d'estimation.

Considérons l'exercice i et l'année de développement j . L'erreur de prédiction s'écrit :

$$E[(Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2] = [E(Y_{ij}) - E(\hat{\mu}_{ij})]^2 + V(Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}) \cong V(Y_{ij}) + V(\hat{\mu}_{ij}).$$

Renshaw (1994)²⁵ a montré que cette relation était valable pour des modèles log-normaux, poisson surdispersé et gamma.

- **Méthode delta : cas des modèles de Poisson surdispersé et gamma**

Pour des modèles poisson surdispersé et gamma, on a la relation (cf paragraphe 3.3.1) : $V(Y_{ij}) = \Phi \cdot \mu_{ij}^p$, avec $p=1$ dans le cas d'un modèle de poisson et $p=2$ dans le cas d'un modèle gamma, et $\mu_{ij} = E(Y_{ij})$.

Pour l'erreur d'estimation, en considérant une structure multiplicative et une fonction lien logarithmique, on a : $\hat{\mu}_{ij} = \exp(\hat{\eta}_{ij}) = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$.

La méthode delta²⁶ stipule que si l'on dispose d'un estimateur asymptotiquement gaussien (c'est le cas pour la plupart des estimateurs que l'on construit en pratique), toute transformation bijective de cet estimateur reste

asymptotiquement Gaussien. En utilisant cette méthode, et en posant $f = \sum_{i=1}^n \sum_{h=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ih} = \sum_{i=1}^n \sum_{h=n-i+2}^n \exp(\eta_{ih})$, on a :

$$V(\hat{\mu}_{ij}) = \left| \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right| V(\hat{\eta}_{ij}) \text{ et } V(\hat{R}_i) = \nabla'_f \cdot \Sigma_{\hat{\theta}} \cdot \nabla_f.$$

On obtient ainsi : $E[(Y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2] \cong \phi \hat{\mu}_{ij}^p + \hat{\mu}_{ij}^2 V(\hat{\eta}_{ij})$.

On peut montrer que le calcul de la msep pour l'estimation $\hat{R}_i = \sum_{i+j>n+1} \hat{\mu}_{ij}$ est²⁷ :

$$msep(\hat{R}_i) \approx \sum_{j>n+1-i}^n \phi \hat{\mu}_{ij}^p + \sum_{j>n+1-i}^n \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{j,k>n+1-i \\ j<k}}^n \hat{\mu}_{ij} \hat{\mu}_{ik} Cov(\hat{\eta}_{ij}, \hat{\eta}_{ik}), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Ainsi, pour le montant total des provisions pour sinistres à payer, on a :

$$\hat{R} = \sum_{i=2}^n \hat{R}_i, \text{ on a : } msep(\hat{R}) \approx \underbrace{\sum_{i+j>n+1} Var(Y_{ij})}_{1^{\text{er}} \text{ terme}} + \underbrace{\sum_{i+j>n+1} \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{(i,j) \neq (i_2, k) \\ (i_1, j) > n+1-i_2}} \hat{\mu}_{i_1 j} \hat{\mu}_{i_2 k} Cov(\hat{\eta}_{i_1 j}, \hat{\eta}_{i_2 k})}_{2^{\text{ème}} \text{ terme}}$$

Le 1^{er} terme est la somme des variances du processus alors que le 2^{ème} terme traduit la variance de l'estimation.

²⁵ Renshaw, A.E., 1994. On the second moment properties and the implementation of certain GLIM based stochastic claims reserving models. Actuarial Research Paper No. 65, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London, EC1V 0HB.

²⁶ Cf Annexe B

²⁷ On the second moment properties and the implementation of certain GLIM based stochastic claims reserving models, Renshaw, A. E. , 1994.

• Vision analytique : cas des modèles lognormaux

Dans le cas d'une régression lognormale, le calcul de la msep est quelque peu différent.

Le modèle s'écrit (cf. paragraphe 3.4) : $\ln(Y_{i,j}) = Z_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ (ou $\ln(Y_{i,j}) = Z_{i,j} = \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$), d'où

$$\hat{\mu}_{ij} = \exp(\hat{\eta}_{ij} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{ij}^2) \text{ avec } \hat{\eta}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j \text{ (ou } \hat{\eta}_{ij} = \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j \text{)} \text{ et } \text{Var}(Y_{ij}) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu_{ij} + \sigma^2}.$$

On a dans ce cas :

$$m\hat{s}ep(\hat{R}_i) \approx \sum_{j>n+1-i}^n \exp\left(\hat{\eta}_{ij} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\right) + \sum_{j>n+1-i}^n \hat{\mu}_{ij}^2 V(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{j,k>n+1-i \\ j<k}}^n \hat{\mu}_{ij} \hat{\mu}_{ik} \text{Cov}(\hat{\eta}_{ij}, \hat{\eta}_{ik}) + \frac{1}{4} V(\hat{\sigma}^2) \sum_{j>n+1-i}^n \hat{\mu}_{ij}^2 + \frac{1}{2} V(\hat{\sigma}^2) \sum_{\substack{j,k>n+1-i \\ j<k}}^n \hat{\mu}_{ij} \hat{\mu}_{ik}, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

A partir des matrices de variance-covariance des log-incréments, on obtient les fonctions de covariance du prédictor η_{ij} .

• Procédure Bootstrap

La méthodologie du Bootstrap est décrite en détail dans le paragraphe 3.5.2 de ce chapitre.

Il s'agit d'une technique de ré-échantillonnage des résidus du modèle qui permet d'obtenir une estimation de la distribution des provisions pour sinistres.

On peut donc en particulier obtenir une estimation de l'écart-type ou erreur standard de la distribution. Cette erreur standard issue du Bootstrap est une estimation de la racine carrée de la variance.

Pour obtenir l'erreur de prédiction du Bootstrap et pouvoir ainsi la comparer avec la racine carrée de la msep, il est nécessaire de tenir compte du nombre de paramètres dans le modèle en ajustant l'erreur standard et d'ajouter une estimation de la variance du processus (laquelle est, dans le cas d'un GLM Poisson, le paramètre d'échelle multiplié par l'estimation du montant des provisions pour sinistres à payer). Cette estimation des provisions est donnée par la projection initiale du modèle ajusté. On a alors :

$$msep_{bs} = \sum_{j>n+1-i}^n \phi \hat{\mu}_{ij}^p + (SE_{bs}(R))^2$$

(cas d'un modèle GLM Poisson ou Gamma)

où $SE_{bs}(R)$ est l'erreur standard de l'estimation des provisions pour sinistres à payer issue du Bootstrap²⁸.

NB :

- La formule précédente suppose que, dans la procédure bootstrap, les résidus ont été ajustés pour tenir compte du nombre de paramètres estimés. Dans le cas où les résidus seraient calculés sans prendre en considération la méthode utilisée pour les obtenir, la formule deviendrait :

$$MSEP_{bs} = \sum_{j>n+1-i}^n \phi \hat{\mu}_{ij}^p + \frac{n}{n-p} (SE_{bs}(R))^2.$$

- La prise en compte de l'erreur de processus peut également être intégrée à la procédure bootstrap, en simulant chaque « case » du triangle inférieur par tirage selon la distribution sous-jacente au modèle. C'est cette dernière procédure qui sera présentée dans le paragraphe 3.5.2.

²⁸ Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving, England, P. et Verrall, R., 1999.

3.3. Modèles stochastiques GLM

Les modèles linéaires généralisés (GLM pour Generalized Linear Models) ont été introduits par J.Nelder et R.Wedderburn en 1972. Extensions du modèle linéaire Normal, ils sont très courants dans de nombreux domaines d'application de la statistique. Utilisés pour la première fois pour la tarification de risques de masse dans les années 1980, ils y sont devenus incontournables. Leur introduction, dans les années 1990, pour la détermination des provisions pour sinistres s'est avérée extrêmement fructueuse.

L'Annexe A présente de plus amples détails sur les modèles GLM.

3.3.1. Principes des modèles linéaires généralisés

Les modèles linéaires généralisés sont caractérisés par trois composantes :

- La composante aléatoire,
- La composante systématique,
- La fonction lien.

• La composante aléatoire

La composante aléatoire identifie la distribution de probabilités de la variable à expliquer. On suppose que l'échantillon statistique est constitué de n variables aléatoires $\{Y_{ij}; i,j=1,\dots,n\}$ indépendantes admettant des distributions issues d'une même *structure exponentielle*. Cela signifie que les lois de ces variables sont dominées par une même mesure dite de référence et que la famille de leurs densités par rapport à cette mesure se met sous la forme :

$$f(y_{ij}; \theta_{ij}, \phi) = \exp \left\{ \frac{y_{ij} \theta_{ij} - b(\theta_{ij})}{\phi} + c(y_{ij}; \phi) \right\}.$$

Où :

- θ_{ij} est un paramètre réel, appelé paramètre naturel,
- $\phi > 0$ est un paramètre d'échelle indépendant de i et de j ,
- b et c sont des fonctions régulières spécifiques de la distribution.

Cette formalisation inclut la plupart des lois usuelles comportant un ou deux paramètres : gaussienne, gaussienne inverse, gamma, poisson, binomiale, ... Le paramètre θ_i est appelé paramètre naturel de la famille exponentielle.

La théorie standard de ce genre de distribution donne de plus une expression de la variance et de la moyenne de Y :

$$E(Y_{ij}) = b'(\theta_{ij})$$

$$\text{Var}(Y_{ij}) = b''(\theta_{ij}) \phi$$

Si μ_{ij} représente la moyenne de Y_{ij} , alors l'expression de la variance en fonction de la moyenne est donnée par : $V(Y_{ij}) = \phi V(\mu_{ij})$. La fonction V est appelée fonction variance de la distribution.

Dans les modèles linéaires généralisés, la distribution de probabilité de Y est généralement exprimée en fonction de la moyenne μ et du paramètre de dispersion ϕ , et non en fonction du paramètre naturel θ .

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de lois (notamment celles qui sont le plus utilisées dans le cadre du provisionnement) appartenant à la famille exponentielle.

- **La composante systématique**

Comme dans le modèle de régression linéaire classique, les variables explicatives produisent un prédicteur linéaire η donné, dans le cadre du provisionnement, par :

$$\eta_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Pour des raisons d'identifiabilité du modèle, on pose $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.

- **La fonction lien**

La troisième composante exprime la relation fonctionnelle entre la composante aléatoire et le prédicteur linéaire :

$$\eta_{ij} = g(\mu_{ij})$$

où g , appelée fonction lien, est supposée monotone et différentiable.

Cette fonction lien doit satisfaire les conditions posées par la probabilité de distribution de la variable réponse y . Par exemple, si y suit une loi de Poisson, les valeurs de la variable y doivent être positives. On peut alors utiliser la fonction lien $g(\mu_{ij}) = \log(\mu_{ij})$.

Pour chaque fonction appartenant à la famille exponentielle, il existe une fonction lien, appelée fonction lien canonique (g vérifie la relation $\eta_{ij} = g(\mu_{ij}) = \theta_{ij}$). L'utilisation de cette fonction lien canonique permet d'obtenir des propriétés statistiques simplificatrices dans le modèle, mais rien n'oblige a priori, comme le font remarquer McCullagh et Nelder, à utiliser la fonction lien canonique : « *there is in general no a priori reason why the systematic effects in a model should be additive on the scale given by that link. It is convenient if they are, but convenience alone must not replace quality of fit as a model selection criterion* ».

Les liens standards sont :

- Le lien identité : $\eta_{ij} = \mu_{ij}$,
- Le lien log : $\eta_{ij} = \ln(\mu_{ij})$.

3.3.2. Estimation des paramètres

L'hypothèse d'indépendance des Y_{ij} conduit à l'expression de la fonction de vraisemblance

$$L\left[\left(y_{ij}\right)_{i+j \leq n+1}; \mu, (\alpha_i), (\beta_j), \phi\right]$$

associée aux variables du triangle supérieur.

L'annulation des dérivées partielles de $\ln L$ par rapport aux paramètres $\mu, (\alpha_i), (\beta_j)$ conduit au système des équations suivantes :

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j \leq n+1}}^n \frac{(y_{ij} - \mu_{ij})}{V(\mu_{ij})} \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial \eta_{ij}} b_{ij}^{(k)} = 0, \quad k = 1, \dots, p$$

Ce sont des équations non linéaires dont la résolution requiert des méthodes itératives dans lesquelles interviennent le Hessien (Newton-Raphson) ou la matrice d'information (Scores de Fischer), dont l'inverse est la matrice de Var-Cov des estimateurs $\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_j)$ de $\mu, (\alpha_i), (\beta_j)$.

Par invariance fonctionnelle, $\hat{\mu}_{ij} = g^{-1}(\hat{\eta}_{ij})$, avec $\hat{\eta}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$, est l'emv de $\mu_{ij} = E(Y_{ij})$. Les $\hat{\mu}_{ij}$ correspondent aux valeurs prévues par le modèle.

La variance asymptotique $\sigma_{as}^2(\hat{\eta}_{ij})$ se déduit aisément des variances et des covariances :

$$\sigma_{as}^2(\hat{\eta}_{ij}) = \sigma_{as}^2(\hat{\mu}) + \sigma_{as}^2(\hat{\alpha}_i) + \sigma_{as}^2(\hat{\beta}_j) + 2.\text{cov}_{as}(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i) + 2.\text{cov}_{as}(\hat{\mu}, \hat{\beta}_j) + 2.\text{cov}_{as}(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j)$$

Si g est une fonction dérivable à dérivée non nulle, la méthode delta conduit (cf. Annexe B et paragraphe 3.2.3) à la variance asymptotique de $\hat{\mu}_{ij}$:

$$\sigma_{as}^2(\hat{\mu}_{ij}) = \left[(g^{-1})'(\eta_{ij}) \right]^2 \cdot \sigma_{as}^2(\hat{\eta}_{ij})$$

En ce qui concerne les provisions, on a :

- $R_i = \sum_{j>n-i+1} Y_{ij}$, $E(R_i) = \sum_{j>n-i+1} E(Y_{ij})$, $V(R_i) = \sum_{j>n-i+1} V(Y_{ij}) = \sum_{j>n-i+1} \phi.V(\mu_{ij})$
- $\hat{E}(R_i) = \sum_{j>n-i+1} \hat{\mu}_{ij}$ est l'emv de $E(R_i)$
- $\hat{V}(\hat{E}(R_i)) = \sum_{j>n-i+1} \sigma_{as}^2(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{j1>n-i+1 \\ j1 \neq j2}} \sum_{j2>n-i+1} \text{cov}_{as}(\hat{\mu}_{ij1}, \hat{\mu}_{ij2})$ où $\text{cov}_{as}(\hat{\mu}_{ij1}, \hat{\mu}_{ij2})$ se déduit comme $\sigma_{as}^2(\hat{\mu}_{ij})$ des variances et covariances des $\hat{\eta}_{ij}$.

De la relation $R = \sum_{i=1}^n R_i$, on a :

- $E(R) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j>n+1}} E(Y_{ij})$, $V(R) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j>n+1}} V(Y_{ij}) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j>n+1}} \phi.V(\mu_{ij})$
- $\hat{E}(R) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j>n+1}} \mu_{ij}$ est l'emv de $E(R)$
- $\hat{V}(\hat{E}(R)) = \sum_{\substack{i,j \\ i+j>n+1}} \sigma_{as}^2(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{\substack{i1,j1 \\ i1+j1>n+1 \\ j1 \neq j2}} \sum_{\substack{i2,j2 \\ i2+j2>n+1}} \text{cov}_{as}(\hat{\mu}_{i1j1}, \hat{\mu}_{i2j2})$ où $\text{cov}_{as}(\hat{\mu}_{i1j1}, \hat{\mu}_{i2j2})$ se déduit des variances et covariances des $\hat{\eta}_{ij}$.

Il ressort de ces formules que l'expression de $mse(\hat{R})$ (et donc de $msep(\hat{R})$), même asymptotique, est donc difficile à appréhender en pratique.

C'est pourquoi, dans notre analyse, nous privilégierons l'approche bootstrap pour mesurer l'erreur de prédiction.

3.3.3. Validation du modèle

Nous présentons les étapes de validation d'un modèle GLM.

Il est important de signaler que la mise en œuvre des modèles GLM dans le cadre du provisionnement repose davantage sur une pratique de marché que sur des tests statistiques permettant de juger la qualité du modèle.

- **Choix de la loi et qualité d'ajustement**

Pour juger de la qualité statistique du modèle d'estimation, il serait souhaitable de mesurer le degré d'adéquation du modèle aux données.

Pour cela, une approche descriptive avec le calcul des distances de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson Darling pourrait être mise en œuvre. Cependant, ces tests statistiques reposent sur l'hypothèse « forte » d'indépendance et d'équidistribution des données alors que les variables Y_{ij} ne sont pas équidistribuées. De plus, le nombre de données est trop faible et engendre une bande de confiance beaucoup trop grande nous forçant à accepter toutes les lois testées.

La qualité de l'ajustement peut se mesurer à l'aide du critère de maximisation de la Quasi-Vraisemblance Etendue. La statistique de Quasi Vraisemblance Etendue repose en partie sur le critère de déviance. La déviance est une mesure de bon ajustement au sein du modèle.

- **Déviance** : le modèle estimé est comparé avec le modèle dit saturé, c'est-à-dire le modèle possédant autant de paramètres que d'observations et estimant donc exactement les données. Cette comparaison est basée sur l'expression de la déviance D des log-vraisemblances L et L_{sat} :

$$D = -2.(L - L_{\text{sat}}).$$

Cet indicateur généralise l'usage des sommes de carrés propres au cas gaussien et donc à l'estimation par moindres carrés. Maximiser L revient à minimiser la déviance. On montre qu'asymptotiquement, D/ϕ (appelé *scaled déviance*) suit une loi du χ^2 à $n-p$ degrés de liberté, ce qui permet de construire un test de rejet ou d'acceptation du modèle selon que la déviance est jugée significativement ou non importante. Nelder et McCullagh, ainsi que les travaux de Brockman et Wright incitent à une extrême prudence face à l'utilisation de ce test.

- **Statistique du χ^2 généralisée (de Pearson)** : $\chi^2 = \sum_{i+j \leq n+1} \frac{(y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})^2}{V(\hat{\mu}_{ij})}$. On montre que χ^2/ϕ admet asymptotiquement la même loi que la déviance, mais, une nouvelle fois, les propriétés asymptotiques sont à considérer avec prudence.

Dans la pratique du provisionnement, ces critères sont peu utilisés, en raison notamment du nombre d'observations souvent très limité.

D'autre part, les tests de significativité des coefficients permettent de valider le pouvoir discriminant des différents modalités des variables explicatives.

Enfin, l'analyse graphique et statistique des résidus constitue une aide précieuse à la validation d'un modèle.

- **Résidus**

Les graphiques de résidus permettent de valider partiellement les hypothèses de normalité et d'équidistribution des résidus. Ils permettent également d'évaluer la bonne adéquation des modèles ajustés.

Pour $i+j \leq n+1$, on considère, pour la cellule (i,j) les résidus suivants :

- les résidus « bruts » : $r_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}$

- les résidus non scalés de Pearson : $r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$,
- les résidus scalés de Pearson $r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi} \cdot V(\hat{\mu}_{ij})}}$,
- les résidus de Pearson ajustés pour tenir compte du nombre de degrés de liberté : $r_{ij}^{(p')} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot r_{ij}^{(p)}$ (où n est le nombre d'observations et p le nombre de degrés de liberté du modèle).

D'autres résidus peuvent être étudiés : les résidus de Pearson standardisés et les résidus déviance notamment (cf. Annexe A).

L'analyse graphique des résidus vise à détecter d'éventuelles cellules atypiques : les représentations graphiques des résidus en fonction des observations, des valeurs prévues par le modèle, de l'année d'origine i et de l'année de développement j , ne doivent faire apparaître aucune structure non aléatoire. Dans le cas contraire, un diagnostic de non-conformité aux hypothèses peut être porté.

Il est également intéressant de détecter la présence de résidus atypiques (bien que rien ne présume de la normalité des résidus, les résidus scalés supérieurs à 2 en valeur absolu sont souvent considérés comme atypiques).

Enfin, un test d'indépendance (de type « up and down ») permet de valider l'hypothèse d'indépendance des résidus de Pearson qui seront utilisés dans la procédure bootstrap (cf. paragraphe 3.5. de ce Chapitre).

L'Annexe C détaille les principes du « test up and down ».

• Modèles utilisés dans notre analyse

Dans le cadre de notre étude, nous avons utilisé les modèles GLM suivants :

- Modèle GLM-Poisson surdispersé : Cette distribution diffère de la loi de Poisson car sa variance n'est pas égale mais proportionnelle à sa moyenne. Le modèle de Poisson Surdispersé suppose que les variables aléatoires Y_{ij} sont indépendantes et suivent une loi de Poisson Surdispersé, dont la moyenne et la variance vérifient :

$$E(Y_{ij}) = \mu_{ij} \text{ et } \text{Var}(\mu_{ij}) = \phi \mu_{ij}$$

$$\eta_{ij} = \ln(\mu_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad (\alpha_1 = \beta_1 = 0)$$

Ce modèle donne exactement les résultats du modèle de Chain Ladder²⁹.

- Modèle GLM-Gamma. Dans ce cas, on a :

$$E(Y_{ij}) = \mu_{ij} \text{ et } \text{Var}(\mu_{ij}) = \phi \mu_{ij}^2$$

$$\eta_{ij} = \ln(\mu_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad (\alpha_1 = \beta_1 = 0)$$

²⁹ A stochastic model underlying the chain-ladder Technique, Renshaw, A. E. et Verrall, R. J., 1998, B.A.J. 4, 903-923

Distribution	Densité de Y	Domaine des paramètres	Lien	Fonction variance	Paramètre de dispersion
Poisson surdispersé	$\frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$	$\lambda > 0$	$g(\mu) = \ln(\mu)$	$V(\mu) = \mu$	Φ
Gamma	$\frac{1}{\Gamma(v)y} \left(\frac{yv}{\mu}\right)^v \exp\left(-\frac{yv}{\mu}\right)$	$\mu, v > 0$	$g(\mu) = \ln(\mu)$	$V(\mu) = \mu^2$	$\Phi = 1/v$

Le principal inconvénient de ces modèles réside dans le fait qu'ils requièrent que les montants incrémentaux du triangle de liquidation D_i soient positifs. En pratique, cette contrainte est rarement vérifiée, en raison :

- De la présence de boni de liquidation dans le déroulement de la charge des sinistres,
- De l'encaissement de recours en fin de développement, pour les triangles de paiements.

L'application de ces méthodes nécessite donc en pratique l'utilisation de triangles de paiements bruts de recours encaissés (ou, le cas échéant, de translater les données d'origine).

3.4. Le modèle log-linéaire de Christophides

Le modèle de régression log-normale est le premier modèle stochastique d'analyse des provisions pour sinistres ; il a été introduit par Kremer en 1982 et a donné lieu à de nombreux développements et applications : Zenhworth (1985, 1989, 1991), Renshaw (1989), Verall (1989), Christophides (1990) notamment.

Nous nous intéressons spécifiquement dans le cadre de cette analyse au modèle de Christophides.

• Spécification du modèle

On suppose que les incréments du triangle vérifient :

$$Y_{i,j} = r_j \cdot p_i$$

Où p_i correspond à la charge ultime des sinistres survenus au cours de l'année i , et r_j à la proportion du montant p_i payé l'année j (qui ne dépend que de j). En passant au logarithme, on peut alors considérer le modèle log-linéaire suivant :

$$\ln(Y_{i,j}) = Z_{i,j} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} = \eta_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

où les ε_{ij} correspondent aux termes d'erreur.

La condition d'identifiabilité du modèle s'écrit ici $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. On supposera que les erreurs sont indépendantes et gaussiennes, ie $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$. Dès lors, $Z_{i,j} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma^2)$ et les $Z_{i,j}$ sont indépendants.

Ce modèle étant simplement un modèle de régression, il est aisément mis en œuvre.

On peut donc écrire $\underline{Z} = M\theta + \underline{\varepsilon}$, avec :

- ${}^t \underline{Z} = (Z_{11}, Z_{12}, \dots, Z_{1n}, Z_{21}, \dots, Z_{2,n-1}, \dots, Z_{n,1})$ est le vecteur des éléments du triangle écrits ligne à ligne,
- ${}^t \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{n,1})$ est le vecteur associé des erreurs,
- $\theta = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ est le vecteur de paramètres,

- M est la matrice de régression (matrice « design »), intégrant, sous forme matricielle, les expressions de $E(Z_{i,j})$ en fonction des paramètres.

- **Estimation des paramètres**

Le vecteur des paramètres s'évalue à l'aide de la formule classique de régression linéaire :

$$\hat{\theta} = ({}^t M.M)^{-1}.{}^t M.Z \text{ (estimateur sans biais de } \theta \text{)}$$

$$\hat{\theta} = ({}^t M.M)^{-1}.{}^t M.Z \text{ est la valeur prévue par le modèle, et } e = Z - \hat{Z} \text{ le vecteur des résidus.}$$

La matrice de Var-Cov des log-incréments s'écrit : $\sum_{\hat{\theta}} = \sigma^2.({}^t M.M)^{-1}$. Ses éléments sont des variances et covariances de type : $V(\hat{\mu}), V(\hat{\alpha}_i), \text{cov}(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i), \dots$

L'estimateur de maximum de vraisemblance de cette matrice est : $\hat{\sigma}^2.({}^t M.M)^{-1}$. Si l'on considère le vecteur ${}^t \hat{\eta} = (\hat{\eta}_{ij})$ des valeurs prévues $\hat{\eta}_{ij} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$, ${}^t \hat{\eta}$ étant fonction linéaire de $\hat{\theta}$, a une distribution Normale dont la matrice de Var-Cov $\sum_{\hat{\eta}}$ s'exprime simplement en fonction de $\sum_{\hat{\theta}}$.

Le principal intérêt porte plus particulièrement sur $\mu_{ij} = E(Y_{ij}) = \exp(\mu + \alpha_i + \beta_j + \sigma^2 / 2) = \exp(\eta_{ij} + \sigma^2 / 2)$. Par invariance du maximum de vraisemblance, $\hat{\mu}_{ij} = \exp(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\sigma}^2 / 2) = \exp(\hat{\eta}_{ij} + \hat{\sigma}^2 / 2)$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ_{ij} , appelé valeur prévue. Les nouveaux résidus, $(y_{ij} - \hat{\mu}_{ij})$ sont plus directement interprétables que les précédents.

NB : par le passage à l'exponentielle, $\hat{\mu}_{ij}$ est un estimateur biaisé, asymptotiquement sans biais sous des hypothèses faibles.

- **Compléments sur le modèle log-linéaire de Christophides**

En pratique, la validation du modèle log-linéaire reposera essentiellement sur l'analyse des résidus, de façon similaire aux modèles GLM.

L'inconvénient majeur de ce modèle est qu'il n'est pas possible de le mettre en œuvre si des incréments sont négatifs, ce qui est souvent le cas en pratique, notamment si les données utilisées correspondent à des liquidation de la charge des sinistres ou à des paiements nets de recours encaissés. Une possibilité sera alors de translater l'ensemble des valeurs du triangle.

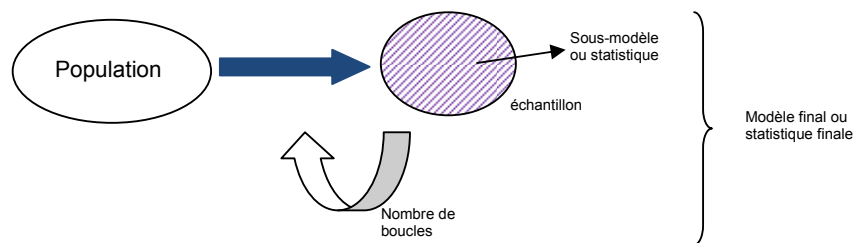
Enfin, le montant des provisions croît avec la variance des données.

3.5. Bootstrap et provisionnement

3.5.1. Principes

Le bootstrap³⁰ est une technique de ré-échantillonnage simple et puissante, permettant d'obtenir à partir d'un unique échantillon de données plusieurs informations généralement obtenues par des outils analytique.

Son but est de fournir des indications sur une statistique autre que sa valeur (dispersion, distribution, intervalles de confiance) afin de connaître la précision des estimations réalisées. Ces informations sont obtenues sans recours à de nouvelles observations. Le bootstrap permet d'engendrer des modèles plus robustes, c'est à dire aux performances d'un niveau sensiblement constant face à des données inconnues.



Dans le cadre du provisionnement, le bootstrap permet, à partir d'un triangle de liquidation et d'un modèle statistique sous-jacent d'estimation du montant des provisions pour sinistres, de simuler un ensemble de « pseudo » triangles. Le modèle sous-jacent est ré-estimé sur la base de cet ensemble de pseudo triangles afin d'obtenir, pour chacun d'eux, une estimation du montant des provisions pour sinistres, et, in fine, obtenir une distribution du montant des paiements futurs.

Dans l'application classique du ré-échantillonnage, les données sont supposées indépendantes et identiquement distribuées. Cependant dans le cadre des modèles GLM, les variables sont supposées indépendantes mais pas identiquement distribuées. Par conséquent, la méthode du ré-échantillonnage sera appliquée non pas directement aux variables mais aux résidus de Pearson qui sont « plus susceptibles » de posséder cette propriété.

³⁰ En anglais, le bootstrapping fait référence aux aventures du baron de Münchhausen, lequel est censé s'être sorti d'un marécage où il était embourbé rien qu'en se tirant par les bottes et se propulsant ainsi dans les airs. Les bootstraps sont les anneaux, en cuir ou en tissu, cousus sur le rebord des bottes et dans lesquels on passe les doigts pour s'aider à les enfiler.

3.5.2. Algorithme général du bootstrap

Nous nous plaçons ici dans le cas général. Nous proposerons ensuite une simplification dans le cas où le modèle sous-jacent est le modèle GLM Poisson.

1. Préliminaires

- Estimation des paramètres du modèle sous-jacent (modèle GLM ou Christophides) : $\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_j)$
- Calcul des valeurs prévues sur le triangle supérieur $\hat{\mu}_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n - i + 1$)
- Estimation du paramètre d'échelle

$$\hat{\phi} = \frac{\sum (r_{ij}^{(p)})^2}{n - p}$$

- Calcul des résidus, des résidus de Pearson, des résidus de Pearson ajustés pour tenir compte du nombre de degrés de liberté

$$r_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu}_{ij} \quad r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}} \quad r_{ij}^{(adj)} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot r_{ij}^{(p)}$$

NB : dans la procédure de ré-échantillonnage, il n'est pas nécessaire de considérer des résidus « scalés », le terme $\hat{\phi}$ étant constant.

2. Boucle Bootstrap (à répéter N fois)

- Obtention d'un pseudo triangle initial :
 - ✓ Ré-échantillonnage des résidus $r_{ij}^{(adj)}$ par tirage avec remise, permettant d'obtenir un nouveau triangle supérieur de résidus $r_{ij}^{(*)}$
 - ✓ Obtention d'un pseudo triangle initial d'incrément $y_{ij}^{(*)}$, en utilisant la relation $r_{ij}^{(*)} = \frac{y_{ij}^{(*)} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$

- Ré-estimation du modèle statistique $(\hat{\mu}^{(*)}, (\hat{\alpha}_i^{(*)}), (\hat{\beta}_j^{(*)}))$ pour obtenir les nouvelles valeurs prévues sur le triangle inférieur $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ ($i = 1, \dots, n; n - i + 1 < j \leq n$)

Cette étape permet de prendre en compte l'erreur d'estimation

- Prise en compte de l'erreur de processus : pour chaque « case » du triangle inférieur, tirage d'un montant incrémental $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i = 1, \dots, n; n - i + 1 < j \leq n$) par un tirage aléatoire selon une distribution de moyenne $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ et de variance $\hat{\phi} V(\hat{\mu}_{ij}^{(*)})$
- Evaluation de la somme des paiements futurs, par exercice d'origine i , par année comptable future k et au total, respectivement $\sum_{j=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}, i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}, j = n - i + k$ et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}$. On note

$$P_k^s = \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}, j = n - i + k + 1 \text{ le montant des paiements effectués entre } t=k-1 \text{ et } t=k, \text{ pour la simulation } s.$$

3. Résultats

- On déduit de la somme des paiements futurs pour chaque simulation une distribution de la somme des paiements futurs

- **Cas du GLM Poisson**

Le cas du GLM Poisson mérite d'y accorder une importance particulière, dans le sens où ce modèle permet de reproduire exactement les évaluations de la méthode Chain Ladder.

Dans ce cadre, la procédure bootstrap peut être simplifiée : l'étape '1.Préliminaires' reste identique au cas général, mais la boucle bootstrap peut être adaptée comme suit :

Boucle Bootstrap (à répéter N fois)

- Obtention d'un pseudo triangle initial :
 - ✓ Ré-échantillonnage des résidus $r_{ij}^{(adj)}$ par tirage avec remise, permettant d'obtenir un nouveau triangle supérieur de résidus $r_{ij}^{(*)}$
 - ✓ Obtention d'un pseudo triangle initial d'incrément $y_{ij}^{(*)}$, en utilisant la relation $r_{ij}^{(*)} = \frac{y_{ij}^{(*)} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$, puis d'un pseudo triangle de données cumulées
 - Calcul des facteurs de développement à l'aide de la méthode Chain-Ladder
 - Projection des paiements cumulés futurs (triangle inférieur) puis des paiements incrémentaux futurs $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ ($i = 1, \dots, n; n - i + 1 < j \leq n$).
- Cette étape permet de prendre en compte l'erreur d'estimation
- Prise en compte de l'erreur de processus : pour chaque « case » du triangle inférieur, simulation d'un montant de paiement incrémental par un tirage aléatoire selon une distribution de moyenne $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ (obtenue à l'étape précédente) et de variance $\hat{\phi} \cdot \hat{\mu}_{ij}^{(*)}$
 - Evaluation de la somme des paiements futurs, par exercice d'origine i , par année comptable future k et au total, respectivement $\sum_{j=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}, j = n - i + k$ et $\sum_{i=1}^n \sum_{j=n-i+2}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}$.

Afin d'effectuer les simulations permettant de prendre en compte l'erreur de processus et être en cohérence avec notre modèle, on aurait tendance à choisir une loi de Poisson sur-dispersée. Pour simuler cette loi, il suffit de simuler une réalisation d'une loi de Poisson de moyenne $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ et de variance $\phi \cdot \hat{\mu}_{ij}^{(*)}$. Les réalisations sont alors des multiples de $\hat{\phi}$, ce qui est un inconvénient, surtout dans le cas où $\hat{\phi}$ est grand. Il peut alors être jugé préférable d'utiliser une loi Gamma de mêmes paramètres.

• Cas du Bootstrap associé au modèle de Christophides

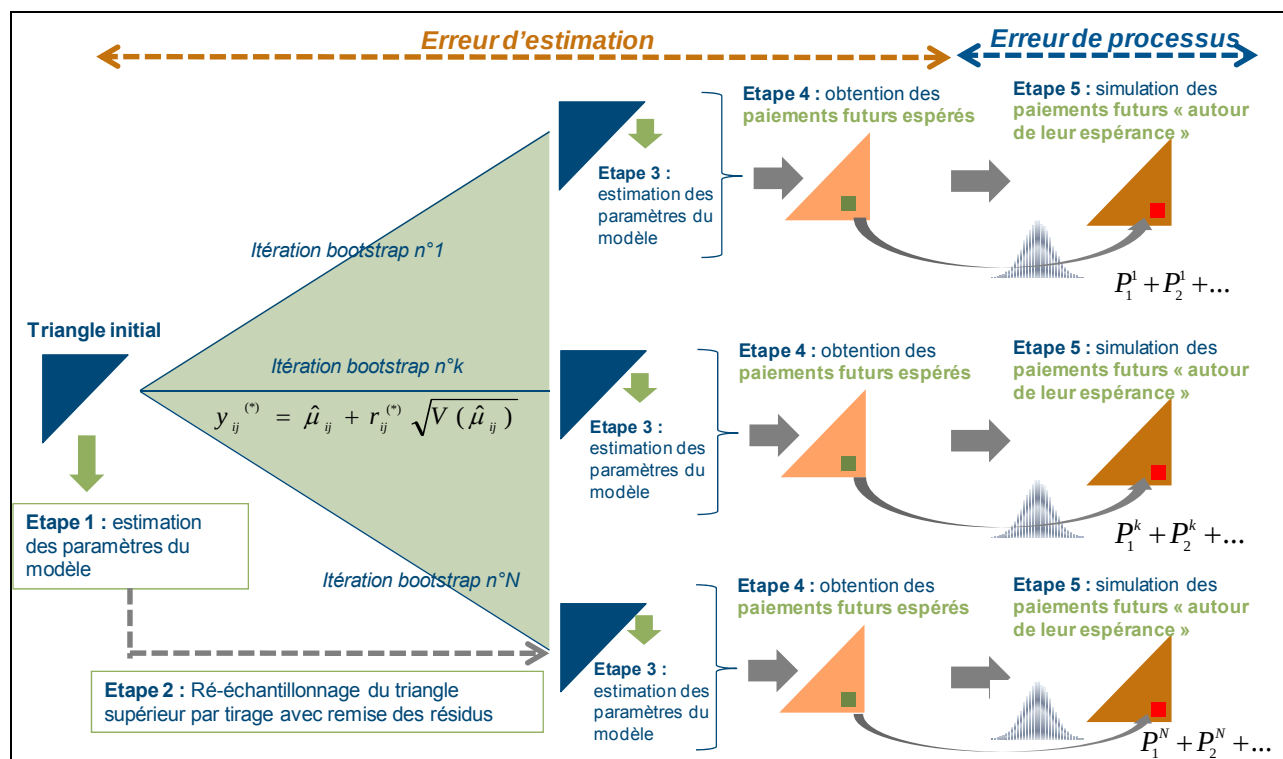
Dans le cadre du modèle log-normal, le ré-échantillonnage des résidus est réalisé à partir des résidus obtenus sur les log-incréments : $\ln(y_{i,j}) - \hat{Z}_{i,j}$, avec $\hat{Z}_{i,j} = \hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j$.

A chaque itération de la procédure, la ré-estimation du modèle statistique $(\hat{\mu}^{(*)}, \hat{\alpha}_i^{(*)}, \hat{\beta}_j^{(*)}, \hat{\sigma}^{2(*)})$, amenant à considérer des $\hat{Z}_{ij}^{(*)}$, est effectuée à partir d'un triangle de pseudo log-incréments. Les nouvelles valeurs prévues sur le triangle inférieur sont obtenus par la formule : $\hat{y}_{ij}^{(*)} = \exp(\hat{\mu}^{(*)} + \hat{\alpha}_i^{(*)} + \hat{\beta}_j^{(*)} + \hat{\sigma}^{2(*)}/2)$.

La prise en compte de l'erreur de processus est également obtenue en deux temps :

- tirage de log-incréments $\hat{Z}_{ij}^{(**)}$ selon une loi normale de paramètres $\hat{Z}_{ij}^{(*)}$ et $\hat{\sigma}^{2(*)}$,
- obtention d'un montant incrémental futur $\hat{y}_{ij}^{(**)} = \exp(\hat{Z}_{ij}^{(**)})$.

Le schéma ci-dessous synthétise les différentes étapes de la procédure bootstrap :



3.5.3. Avantages et limites du bootstrap

Le principal intérêt du bootstrap est que cette technique simulatoire permet d'obtenir une distribution des paiements futurs, ce qui permet de déduire en lecture directe des quantiles, des probabilités d'insuffisances, des intervalles de confiance,...

De façon identique au modèle Mack, les deux erreurs (estimation et processus) peuvent être quantifiées distinctement. La quantification de l'erreur de processus est soit directement intégrée à la procédure bootstrap (comme décrit précédemment), soit obtenue en considérant la grandeur $\sum_{j>n+1-i}^n \phi \hat{\mu}_{ij}^{\rho}$ (dans le cas poissonien et gamma).

Les deux principales limites relatives à cette technique résident :

- dans le choix de la famille de loi, souvent à support positif, et nécessitant donc des incréments positifs,
- dans une traçabilité ou une compréhension moins aisée des résultats (et par suite une communication moins aisée des résultats obtenus). En particulier, les possibilités qu'offraient le modèle Mack en terme de « pilotage » des calculs (non prise en compte de développements individuels ou de certains exercices de survie anciens jugés non représentatifs dans le calcul des $\hat{\sigma}_k^2$ et des $\hat{f}_k$) sont moins directement réalisable dans la mise en œuvre de la procédure bootstrap associée à des modèles statistiques. Seule l'exclusion de certains résidus jugés atypiques dans le processus de tirage avec remise, ou le fait de partitionner les résidus permettent de « piloter » le modèle.

3.6. Choix de la méthode

Dans le panorama des méthodes de provisionnement (les modèles Mack, GLM et Christophides présentés dans notre étude n'étant que les plus couramment utilisés), il n'existe pas a priori de méthode universelle qui puisse s'appliquer à toutes les entreprises d'assurance, tous les types de gestion des sinistres, tous les types de risque,...

Dans ce cadre, le choix de l'actuaire pourra s'avérer délicat. Au-delà des conditions d'applicabilité des modèles (vérification des hypothèses) et de la validité statistique de ces derniers (indicateurs de type R^2 , déviance, analyse des résidus,...), l'actuaire cherchera en premier lieu à comprendre, maîtriser et pouvoir communiquer les résultats.

Il convient de souligner que les méthodes de provisionnement stochastique, offrant la possibilité de mesurer l'incertitude liée à la réalisation des paiements futurs, ne se substituent pas aux méthodes déterministes. Ainsi, le calcul du montant Best estimate des provisions pour sinistres reste souvent déduit de l'application d'une ou plusieurs méthodes déterministes, celles-ci, et en particulier la méthode Chain Ladder, étant aisément compréhensibles et explicables au management de l'entreprise d'assurance, et largement reconnues comme des pratiques de marché. En cela, les méthodes Mack et GLM Poisson possèdent un avantage puisqu'elles permettent de reproduire exactement les résultats de Chain Ladder.

Dans ce cadre, il est fréquent que la moyenne de la distribution des provisions pour sinistres issue de l'application de la procédure bootstrap ne corresponde pas au montant Best estimate des provisions pour sinistres sélectionné par l'actuaire. Dans ce cas, une translation ou une homothétie de la distribution obtenue pourra être effectuée (une translation permettra de conserver les différents moments de la distribution initiale, alors qu'une homothétie permettra de conserver les rapports entre les différents moments et la moyenne de la distribution initiale).

3.7. Prise en compte d'un facteur de queue de développement

Comme mentionné au paragraphe 2.3 du Chapitre 2, l'historique disponible n'est pas toujours suffisant (en particulier pour les branches à développement long) pour dériver une cadence de liquidation totale. Il se peut en effet que le développement des années d'exercice les plus anciens ne soit pas achevé. Dans le cadre du provisionnement déterministe, une régression sur les facteurs de développement historiques de la forme

$$\ln(\hat{f}_k - 1) = a + b.k + \varepsilon_k \text{ permet d'estimer un facteur de queue tel que } \hat{f}_{ult} = \prod_{k=n}^p \hat{f}_k \text{ où } \hat{f}_p \cong 1.$$

Dans le cadre du provisionnement stochastique, la problématique posée est d'estimer une volatilité associée au facteur de queue de développement.

Nous détaillons ci-dessous comment appréhender cette problématique, dans le cadre de la méthode Mack d'une part, et dans le cadre de la procédure bootstrap d'autre part.

3.7.1. Méthode Mack et facteur de queue de développement

Mack a proposé en 1999³¹ une formule récursive pour le calcul de $m\hat{s}e(\hat{R}_i)$:

$$m\hat{s}e(\hat{R}_i) = \hat{P}_{in} \left(m\hat{s}e(F_{ik}) + m\hat{s}e(\hat{f}_k) \right) + m\hat{s}e(\hat{P}_{in}) \hat{f}_k^2$$

ce qui permet de donner une formulation de l'erreur quadratique en présence d'un facteur de queue de développement :

$$m\hat{s}e(\hat{R}_i) = \hat{P}_{in} \left(m\hat{s}e(F_{i,ult}) + m\hat{s}e(\hat{f}_{ult}) \right) + m\hat{s}e(\hat{P}_{in}) \hat{f}_{ult}^2$$

Pour l'ensemble des exercices de survénance, on a :

$$m\hat{s}e(\hat{R}) = m\hat{s}e\left(\sum_{i=1}^n \hat{R}_i\right) \text{ et } m\hat{s}e\left(\sum_{i=n+1-k}^n \hat{P}_{i,k+1}\right) = m\hat{s}e\left(\sum_{i=n+2-k}^n \hat{P}_{i,k}\right) + \sum_{i=n+1-k}^n \hat{P}_{ik}^2 . m\hat{s}e(F_{ik}) + \left(\sum_{i=n+1-k}^n \hat{P}_{ik}^2\right) . m\hat{s}e(\hat{f}_k)$$

Afin de pouvoir appliquer les formules récursives ci-dessus, il est nécessaire de déterminer $\hat{\sigma}_{ult}^2$ et $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult})$.

Nous détaillons ci-dessous l'estimation de ces deux grandeurs.

- **Calcul de $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult}) = V(\hat{f}_{ult})$**

Dans son article, Mack propose de déduire $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult})$ de l'observation des $m\hat{s}e(\hat{f}_k) = \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\sum_{j=1}^{n-k} P_{jk}}$ historiques. En

particulier Mack propose de trouver k tel que $\hat{f}_{k-1} > \hat{f}_{ult} > \hat{f}_k$ et de fixer $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult})$ tel que $m\hat{s}e(\hat{f}_{k-1}) > m\hat{s}e(\hat{f}_{ult}) > m\hat{s}e(\hat{f}_k)$.

Nous nous proposons ici de déduire $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult})$ du fait que $\hat{f}_{ult}$ ait été déterminé par régression.

³¹ The standard error of Chain Ladder reserves estimates : recursive calculation and inclusion of a tail factor

Dans ce cadre, on a $\hat{f}_{ult} = f(\hat{a}, \hat{b}) = \prod_{k=n}^p \hat{f}_k$, avec $\begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ vecteur gaussien $N\left(\begin{pmatrix} \mu \\ \Sigma \end{pmatrix}\right)$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \text{var}(\hat{a}) & \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) \\ \text{cov}(\hat{a}, \hat{b}) & \text{var}(\hat{b}) \end{pmatrix}$.

Par application de la méthode delta (cf Annexe B), on a donc : $\hat{f}_{ult} \sim N\left(\begin{pmatrix} f(\mu) \\ \nabla f \Sigma \nabla f^T \end{pmatrix}\right)$, avec $\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$V(\hat{f}_{ult}) = \left(\frac{\partial f}{\partial b}(\hat{f}_{ult})\right)^2 \text{var}(\hat{b}) + \left(\frac{\partial f}{\partial a}(\hat{f}_{ult})\right)^2 \text{var}(\hat{a}) + 2 \cdot \frac{\partial f}{\partial a}(\hat{f}_{ult}) \cdot \frac{\partial f}{\partial b}(\hat{f}_{ult}) \cdot \text{cov}(\hat{a}, \hat{b})$$

- **Calcul de $\hat{\sigma}_{ult}^2$**

Dans son article, Mack propose d'utiliser la relation $\hat{\sigma}_{ult}^2 = m\hat{s}e(F_{i,ult}) \cdot \hat{P}_{in}$, et de déduire $m\hat{s}e(F_{i,ult})$, en fixant un i donné, de l'observation des $m\hat{s}e(F_{i,k})$ historiques. Comme pour $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult})$ Mack propose de trouver un k tel que $\hat{f}_{k-1} > \hat{f}_{ult} > \hat{f}_k$ et de fixer $m\hat{s}e(F_{i,k})$ tel que $m\hat{s}e(F_{i,k-1}) > m\hat{s}e(F_{i,ult}) > m\hat{s}e(F_{i,k})$.

Nous nous proposons, dans la suite de ce paragraphe, de démontrer que, sous hypothèse d'indépendance et de log-normalité des $(F_{i,k})$, on a : $\hat{V}(F_{i,ult}) = \hat{f}_{ult}^2 \left(\prod_{k=n}^p \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2 \cdot \hat{C}_{ik}} \right) \right)$

Démonstration :

Résultats préalables

Pour déterminer $\hat{V}(F_{i,ult})$, il est nécessaire de connaître $\hat{\sigma}_k^2$ pour $k=n, \dots, p$. De façon similaire à la détermination du facteur de queue de développement, on peut effectuer une extrapolation linéaire sur $\ln(\hat{\sigma}_k)$. On jugera de la qualité de la régression grâce au R^2 .

NB : l'extrapolation se fera jusqu'à p , c'est-à-dire sur le même horizon de projection que celui ayant servi à dériver $\hat{f}_{ult}$.

On rappelle les résultats suivants :

- $F_{i,k} = \frac{P_{i,k+1}}{P_{ik}}$
- $E(F_{i,k} / P_{i1}, \dots, P_{ik}) = f_k$
- $V(F_{i,k} / P_{i1}, \dots, P_{ik}) = \frac{\sigma_k^2}{P_{ik}^2}$

On rappelle également que, si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ et $Y = e^X$, alors on a :

- $E(Y) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$ $V(Y) = (\exp(\sigma^2) - 1) \cdot \exp(2\mu + \sigma^2)$
- $\mu = \ln(E(Y)) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{V(Y)}{E(Y)^2}\right)$ $\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{V(Y)}{E(Y)^2}\right)$

On a : $F_{i,ult} = \prod_{k=n}^p F_{ik}$, et, par hypothèse : $F_{i,k} = \exp(G_{ik})$, avec $F_{i,k} = \exp(G_{ik}) \sim N(\mu_{ik}, \sum_{ik}^2)$. On a donc, d'après les

rappels précédents : $\mu_{ik} = \ln(f_k) - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right)$ et $\sum_{ik}^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right)$

On pose $G_{ik} = \mu_{ik} + \sum_{ik} \cdot \varepsilon_{ik}$ avec $\varepsilon_{ik} \sim N(0,1)$, et $\hat{f}_{ult} = \prod_{k=n}^p \hat{f}_k$ où $\hat{f}_p \cong 1$

On a donc : $F_{i,ult} = \prod_{k=n}^p F_{ik} = f_{ult} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=n}^p \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right) + \sum_{k=n}^p \varepsilon_{ik} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right)}\right\}$

En supposant les $(\varepsilon_{i,k})$ indépendants³², on a :

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=n}^p \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right) + \sum_{k=n}^p \varepsilon_{ik} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right)} \sim N\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=n}^p \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right); \sum_{k=n}^p \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right)\right)$$

Par conséquent (en utilisant les résultats du rappel), on a :

$$V(F_{i,ult}) = f_{ult}^2 \cdot \exp\left\{\sum_{k=n}^p \ln\left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right)\right\} - 1 = f_{ult}^2 \left(\prod_{k=n}^p \left(1 + \frac{\sigma_k^2}{f_k^2 P_{ik}}\right) - 1\right)$$

On a donc l'estimateur suivant :

$$\hat{V}(F_{i,ult}) = \hat{f}_{ult}^2 \left(\prod_{k=n}^p \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2 \hat{P}_{ik}}\right) - 1\right)$$

Et par suite, on considèrera l'estimateur suivant :

$$\hat{\sigma}_{ult}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \hat{V}(F_{k,ult}) \cdot \hat{P}_{kn}$$

3.7.2. Procédure bootstrap et facteur de queue de développement

Dans le cadre de la procédure bootstrap, la prise en compte d'un facteur de queue de développement s'effectue en deux temps :

Étape 1 : estimation d'un facteur de queue

A chaque itération de la procédure bootstrap, l'objectif sera d'estimer un facteur de queue de développement noté $\hat{f}_{ult}^{(*)}$.

- **Cas du GLM Poisson**

Le GLM Poisson permettant de répliquer les résultats de la méthode Chain Ladder, la problématique est similaire à celle étudiée dans le cadre de la méthode Chain-Ladder (cf paragraphe 2.3 du Chapitre 2) : sur chaque pseudo triangle initial, une courbe paramétrique est ajustée aux facteurs de développements estimés par le modèle, puis extrapolée jusqu'à obtenir des facteurs égaux (ou très proches) à 1.

³² L'hypothèse d'indépendance intervient dans le calcul de la variance de la somme des lois normales

- **Autres modèles**

Dans le cas d'un modèle GLM Gamma ou d'un modèle log-normal, des facteurs de développement dits « équivalents » (« equivalent development factors »³³) sont estimés à chaque itération. Cela signifie que sur chaque pseudo triangle (mis sous la forme de données cumulées), des facteurs de développements estimés selon la méthode Chain Ladder sont calculés.

La procédure d'ajustement de courbe sur ces facteurs et d'extrapolation reste ensuite identique.

Etape 2 : prise en compte de l'erreur liée à l'estimation du facteur de queue

Dans les deux cas (modèle GLM Poisson ou autres modèles), le facteur de queue sera obtenu in fine, pour chacune des itérations par tirage selon une loi de moyenne $\hat{f}_{ult}^{(*)}$ et de variance obtenue par la méthode delta

$$V(\hat{f}_{ult}^{(*)}) = \left(\frac{\partial f^{(*)}}{\partial b^{(*)}}(\hat{f}_{ult}^{(*)}) \right)^2 \cdot \text{var}(\hat{b}^{(*)}) + \left(\frac{\partial f^{(*)}}{\partial a^{(*)}}(\hat{f}_{ult}^{(*)}) \right)^2 \cdot \text{var}(\hat{a}^{(*)}) + 2 \cdot \frac{\partial f^{(*)}}{\partial a^{(*)}}(\hat{f}_{ult}^{(*)}) \cdot \frac{\partial f^{(*)}}{\partial b^{(*)}}(\hat{f}_{ult}^{(*)}) \cdot \text{cov}(\hat{a}^{(*)}, \hat{b}^{(*)}).$$

Dans notre analyse, le tirage est effectué selon une hypothèse de lognormalité du facteur de queue de développement.

³³ England et Verrall, 2002

4. ADAPTATION DES METHODES STOCHASTIQUES « USUELLES » : MESURE DE VOLATILITE A HORIZON 1 AN

Dans cette partie, nous proposons dans un premier temps de développer le modèle présenté par Merz et Wüthrich, d'en analyser les hypothèses sous-jacentes, les avantages et les limites.

Nous proposons ensuite deux adaptations possibles de la procédure bootstrap permettant de capter une mesure de la volatilité à horizon un an dans le montant de la provision pour sinistres Best estimate évalué en date $t=0$.

Nous montrerons que la première adaptation proposée, correspondant à une approche intuitive, présente un certain nombre de limites. Ces dernières ont engendré un besoin de proposer une nouvelle approche (cf. paragraphe 4.3), qui correspond à notre adaptation de la procédure bootstrap permettant une mesure de la volatilité à horizon un an.

4.1. La méthode Wuthrich-Merz

Nous suivrons l'approche proposée par M. Wüthrich et M. Merz³⁴. Néanmoins, les formules présentées dans les articles publiés par M. Wüthrich et M. Merz se basent sur des triangles avec des années d'origine et des années de développement allant de 0 à n , soit $D_i = \{P_{ij}; 0 \leq i \leq n; i + j \leq n\}$. Les formules ont été adaptées pour correspondre au cadre fixé dans notre étude ($D_i = \{P_{ij}; 1 \leq i \leq n; i + j \leq n + 1\}$).

Comme précisé dans le Chapitre 2, la différence entre deux estimations successives du Best estimate des provisions pour sinistres à la date $t=0$ et à la date $t=1$ est appelée Claims Development Result (CDR).

La valeur observée du CDR a un impact direct sur le compte de résultats et sur la solidité financière d'une entreprise d'assurance : si l'estimation du Best estimate en date 0 est plus élevée que l'estimation réalisée en date 1 (à l'ajustement près des paiements effectués sur la période), cela se traduit dans le compte de résultats par une variation de provisions sur les exercices antérieurs positive, et donc à une dégradation du résultat.

Dans une vision prospective, on cherche à évaluer une déviation défavorable à horizon un an de l'estimation Best estimate des provisions pour sinistres effectuée en date 0.

On a : $SCR_{reserve} = -VaR_{0.5\%}(\sum_i \hat{CDR}_i(I+1)) = -VaR_{0.5\%}(\hat{CDR}(I+1))$.

L'approche proposée par M. Wüthrich et M. Merz permet d'obtenir une estimation des deux premiers moments de $\hat{CDR}(I+1)$ connaissant l'information uniquement jusqu'en date 0, à savoir $\hat{E}(\hat{CDR}(I+1)/D_i)$ et $\hat{V}(\hat{CDR}(I+1)/D_i)$.

³⁴ M. Wüthrich, M. Merz, N. Lysenko, Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method. Scandinavian Actuarial Journal, 2008

M. Wüthrich, M. Merz, Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes, CAS, 2008

M. Wüthrich, M. Merz, Prediction Error of the Expected Claims Development Result in the Chain Ladder Method, Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung, 2007

4.1.1. Cadre du modèle

	année de développement j				
exercice i	1	2	...		n
1	D_t				
2					
...					
n					

	année de développement j					
exercice i	1	2	...	n	n+1	
1	D_{t+1}					
2						
...						
n						

Inconnu en date 0

On se place au temps $t=0$ (ou $t=1$) et on considère l'année calendaire suivante.

D_t représente l'information connue en date 0 et D_{t+1} l'information connue en date 1. Concrètement, il s'agit respectivement du triangle de liquidation des paiements ou des charges pour les exercices d'origine 1 à n et les développements 1 à n , et le trapèze de liquidation des paiements ou des charges pour les exercices 1 à n et les développements 1 à $n+1$:

$$D_t = \{P_{ij}; i \leq n; i+j \leq n+1\} \text{ et}$$

$$D_{t+1} = \{P_{ij}; i \leq n; i+j \leq n+2\} = D_t \cup \{P_{i,n-i+2}; i \leq n\}.$$

Plus formellement, cela signifie que l'on étend la tribu engendrée par les observations D_t à la tribu engendrée par les observations D_{t+1} .

On cherche à évaluer $(\hat{CDR}(I+1)/D_t)$, ce qui revient à évaluer, connaissant les informations en date 0, les grandeurs suivantes, soit simultanément, soit séparément :

- $\hat{R}^t = \hat{E}(R^t / D_t) = \hat{E}(R / D_t),$
- $\hat{R}^{t+1} = \hat{E}(R^{t+1} / D_{t+1}),$
- $\sum_i P_{n-i+2}.$

Les hypothèses du modèle sont les suivantes :

H1 : Les montants cumulés $P_{i,j}$ pour les différents exercices d'origine i ($i \in \{1, \dots, n\}$) sont indépendants

H2 : Les $P_{i,j}$ suivent la dynamique ci-dessous et il existe des constantes $f_j > 0$ et $\sigma_j > 0$ telles que, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $2 \leq j \leq n$, on a :

$$P_{ij} = f_{j-1} P_{i,j-1} + \sigma_{j-1} \sqrt{P_{i,j-1}} \varepsilon_{ij}$$

Où, sachant $B_0 = \{P_{1,1}, \dots, P_{n,1}\}$ avec $P_{i,1} > 0$, les ε_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes avec $E[\varepsilon_{ij} / B_0] = 0$, $E[\varepsilon_{ij}^2 / B_0] = 1$ et $P[P_{ij} > 0 / B_0] = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $2 \leq j \leq n$.

Les variables aléatoires ε_{ij} sont définies conditionnellement à B_0 avec $P_{i,1} > 0$ afin d'imposer que l'ensemble des montants $P_{i,j}$ soient positifs.

On remarque que le processus ainsi défini permet de garantir que : $E[P_{ij} / P_{i,j-1}] = f_{j-1} P_{i,j-1}$, $V[P_{ij} / P_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 P_{i,j-1}$, et que les exercices de survenance sont indépendants. Cette hypothèse est plus forte que celle de Mack, qui supposait seulement que les deux premiers moments de P_{ij+1} ne dépendaient que de P_{ij} et non de P_{it} pour $t < j$.

Comme pour la méthode Mack, la validation du modèle peut être mise en œuvre de façon graphique.

Il est de plus facile de voir que ce modèle satisfait les hypothèses du modèle de Chain Ladder, et que l'on a :

$$E[P_{in} / D_I] = P_{i,j-i+1} \cdot \prod_{j=n-i+1}^{n-1} f_j \quad \text{et} \quad E[P_{in} / D_{I+1}] = P_{i,j-i+2} \cdot \prod_{j=n-i+2}^{n-1} f_j$$

A la date $t=0$, les facteurs Chain Ladder sont estimés par : $\hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j+1}}{S_j^I}$ avec $S_j^I = \sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j}$

A la date $t=1$, les facteurs Chain Ladder sont estimés par $\hat{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} P_{i,j+1}}{S_j^{I+1}}$ avec $S_j^{I+1} = \sum_{i=1}^{n+1-j} P_{i,j}$.

Cela signifie que ces derniers facteurs utilisent l'information provenant de la diagonale supplémentaire intégrant les paiements réalisés entre la date 0 et la date 1. On remarque qu'à la date 0, les réalisations de $\hat{f}_j^{I+1}$ ne sont pas connues puisque les $P_{n,2}, \dots, P_{1,n+1}$ sont inconnus.

Mack (cf paragraphe 3.1 de ce Chapitre) a démontré que ces estimateurs sont des estimateurs sans biais de f_j et sont non corrélés.

De plus, conditionnellement à $P_{i,n-i+1}$, $\hat{P}_{i,j}^I = P_{i,n-i+1} \cdot \prod_{k=n-i+1}^{j-1} \hat{f}_k^I$ est un estimateur sans biais de $E[P_{ij} / D_I]$ pour $j > n-i+1$ et

conditionnellement à $P_{i,n-i+2}$, $\hat{P}_{i,j}^I = P_{i,n-i+2} \cdot \prod_{k=n-i+2}^{j-1} \hat{f}_k^{I+1}$ est un estimateur sans biais de $E[P_{ij} / D_{I+1}]$ pour $j > n-i+2$.

On note également que, étant donné $P_{i,n-i+1}$, $\hat{R}_i^I = \hat{P}_{i,n}^I - P_{i,n-i+1}$ est un estimateur sans biais de $E[R_i^I / D_I]$, et que, étant donné $P_{i,n-i+2}$, $\hat{R}_i^{I+1} = \hat{P}_{i,n}^{I+1} - P_{i,n-i+2}$ est un estimateur sans biais de $E[R_i^{I+1} / D_{I+1}]$.

4.1.2. Définitions

Wüthrich, Merz et Lysenko définissent les notions de CDR « réel » et CDR « observable ». Nous en donnons ci-dessous les définitions :

- Le CDR « réel » pour un exercice de survénance i donné ($i \in \{1, \dots, n\}$) et l'année calendaire $[I; I+1]$ est défini par :

$$CDR_i(I+1) = E[R_i^I / D_I] - (p_{i,n-i+2} + E[R_i^{I+1} / D_{I+1}]) = E[P_{i,ult}^I / D_I] - E[P_{i,ult}^{I+1} / D_{I+1}]$$

$CDR_i(I+1)$ est une variable aléatoire D_{I+1} -mesurable. On remarque que $E[CDR_i(I+1) / D_I] = 0$, c'est-à-dire que pour les facteurs de développement réels, le CDR attendu est nul.

En général, les facteurs de développement Chain Ladder f_j ne sont pas connus et sont estimés par respectivement par $\hat{f}_j^I$ et $\hat{f}_j^{I+1}$. Ainsi, en remplaçant $E[R_i^I / D_I]$ et $E[R_i^{I+1} / D_{I+1}]$ par leurs estimations $\hat{R}_i^I$ et $\hat{R}_i^{I+1}$, le CDR « réel » pour un exercice de survénance i donné est estimé dans la méthode Chain Ladder par le CDR « observable ».

- Le CDR « observable » pour un exercice de survénance i donné ($i \in \{1, \dots, n\}$) et l'année calendaire $[I; I+1]$ est défini par :

$$C\hat{D}R_i(I+1) = \hat{E}[R_i^I / D_i] - (p_{i,n-i+2} + \hat{E}[R_i^{I+1} / D_{I+1}]) = \hat{E}[P_{i,ult}^I / D_i] - \hat{E}[P_{i,ult}^{I+1} / D_{I+1}]$$

$$C\hat{D}R_i(I+1) = \hat{R}_i^I - (p_{i,n-i+2} + \hat{R}_i^{I+1}) = \hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}$$

A la date $t=0$, il n'est pas possible d'évaluer la variable aléatoire $C\hat{D}R_i(I+1)$: sa réalisation n'est connue qu'en date $t=1$.

A la date $t=1$, $C\hat{D}R_i(I+1)$ correspond au boni/mali comptable pour l'exercice de survénance i ; si ce montant est négatif cela signifie que la charge ultime estimée en fin d'année 1 est plus élevée que celle estimée en fin d'année 0. Cela peut s'expliquer par deux phénomènes :

- ✓ des paiements observés entre $t=0$ et $t=1$ plus élevés que ceux anticipés en fin d'année 0,
- ✓ une ré-estimation du montant des provisions à la date $t=1$.

Dans le cadre de Solvabilité 2, on cherchera à mesurer, en date $t=0$, une déviation négative de $\hat{R}_i^I$, avec une probabilité de 99.5% et un horizon de un an.

La méthode proposée par Wüthrich, Merz permet :

- d'obtenir une estimation des deux premiers moments de $CDR(I+1) / D_i$ et $C\hat{D}R(I+1) / D_i$,
- d'obtenir, à $t=0$, une mesure de la variabilité entre les CDR réels et les CDR observables, en considérant la msep. On définit l'erreur de prédiction conditionnelle du CDR observable par :

$$mse_{CDR(I+1)/D_i}(C\hat{D}R_i(I+1)) = E\left[\left(CDR_i(I+1) - C\hat{D}R_i(I+1)\right)^2 / D_i\right]$$

On se place ici dans le cadre d'une vision rétrospective.

- d'obtenir, de même, une mesure de l'erreur de prédiction du CDR par 0 dans le compte de résultats prévisionnel :

$$mse_{C\hat{D}R_i(I+1)/D_i}(0) = E\left[\left(C\hat{D}R_i(I+1) - 0\right)^2 / D_i\right]$$

On se place ici dans le cadre d'une vision prospective : en effet, cette erreur quantifie les déviations du CDR à la fin de l'année comptable autour de 0 (valeur prévue dans le compte de résultats prévisionnel).

Dans le cadre de notre analyse, nous nous concentrerons sur le premier et le troisième point.

4.1.3. Estimateurs des deux premiers moments du CDR « observable »

Dans le cadre de notre analyse, la méthode proposée par Wüthrich, Merz va nous permettre d'obtenir une estimation des deux premiers moments de la loi de $\hat{CDR}(I+1)/D_I$.

- **Calcul de u_biais**

La moyenne de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)/D_I$ sera donnée par $\sqrt{(u_biais)^2}$, où

$$(u_biais)^2 = \hat{E}_{D_I} \left[\left(E \left[\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_I \right] \right)^2 \right].$$

Wüthrich, Merz et Lysenko démontrent que l'on a³⁵ :

$$(u_biais)^2 = \sum_{i=2}^I (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \hat{\Delta}_{i,J}^I + 2 \cdot \sum_{i>k>1} \hat{C}_{i,J}^I \cdot \hat{C}_{k,J}^I \cdot \hat{\Lambda}_{k,J}^I$$

$$\checkmark \quad \hat{\Delta}_{i,J}^I = \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{S_{I-i+1}^I} + \sum_{l=i+2}^{J-1} \left(\frac{C_{l-i+1}^I}{S_l^{I+1}} \right)^2 \cdot \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{S_j^I}$$

$$\checkmark \quad \hat{\Lambda}_{k,J}^I = \frac{C_{k,I-k+1}^I}{S_{I-k+1}^{I+1}} \cdot \frac{(\hat{\sigma}_{I-k+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-k+1}^I)^2}{S_{I-k+1}^I} + \sum_{l=i+2}^{J-1} \left(\frac{C_{l-i+1}^I}{S_j^{I+1}} \right)^2 \cdot \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{S_j^I}$$

- **Calcul de $\hat{V}\left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_I\right)$**

Wüthrich, Merz et Lysenko démontrent que l'on a³⁶ :

$$\hat{V}\left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_I\right) = \sum_{i=2}^I (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \hat{\Gamma}_{i,J}^I + 2 \cdot \sum_{i>k>1} \hat{C}_{i,J}^I \cdot \hat{C}_{k,J}^I \cdot \hat{\gamma}_{i,k}^I$$

$$\checkmark \quad \hat{\Gamma}_{i,J}^I = \hat{V}\left(\hat{CDR}_i(I+1)/D_I\right) = \left\{ \left[\left[1 + \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I} \right] \cdot \prod_{l=i+2}^{J-1} \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{(S_l^{I+1})^2} \cdot C_{l-i+1,l}^I \right) \right] - 1 \right\}$$

$$\checkmark \quad \hat{\gamma}_{i,k}^I = Cov\left(\hat{CDR}_i(I+1), \hat{CDR}_k(I+1)/D_I\right) = \hat{C}_{i,J}^I \cdot \hat{C}_{k,J}^I \cdot \left\{ \left[\left[1 + \frac{(\hat{\sigma}_{I-k+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-k+1}^I)^2}{S_{I-k+1}^I} \right] \cdot \prod_{l=i+2}^{J-1} \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{(S_l^{I+1})^2} \cdot C_{l-i+1,l}^I \right) \right] - 1 \right\}$$

A partir de ces deux premiers moments de $\hat{CDR}(I+1)/D_I$, une hypothèse de loi permettra de déduire l'ensemble de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)/D_I$, et, par suite, le risque de réserve, égal à l'opposé du quantile à 0.5% de cette distribution.

Dans notre analyse, nous supposons que $\hat{CDR}(I+1)/D_I$ est distribuée selon une loi normale : en effet, cette loi permet que la distribution admette des valeurs négatives, ce que nous cherchons à obtenir dans notre cas (une valeur négative $\hat{CDR}(I+1)/D_I$ correspondant à une déviation négative de $\hat{R}_I^I$ à horizon un an).

³⁵ Cf. M. Wüthrich, M. Merz, N. Lysenko, Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method. Scandinavian Actuarial Journal, 2008 pour la démonstration
³⁶ Cf. M. Wüthrich, M. Merz, N. Lysenko, Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method. Scandinavian Actuarial Journal, 2008 pour la démonstration

- Erreur de prédiction du CDR par 0

L'erreur de prédiction est donnée par :

$$m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0) = \hat{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1) - 0 \right)^2 / D_i \right] = (u_biais)^2 + \hat{V} \left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1) / D_i \right)$$

Pour un exercice de survenance donné, on a : $m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0) = (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \hat{\Delta}_{i,J}^I + (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \hat{\Gamma}_{i,J}^I$

Le paragraphe suivant va permettre de comparer cette erreur avec l'erreur de prédiction du montant des provisions pour sinistres donnée par Mack.

4.1.4. Comparaison avec la formule de Mack

Wüthrich et Merz³⁷ donnent une simplification des formules précédentes en utilisant la relation :

$\prod_{j=1}^J (1+a_j) - 1 \approx \sum_{j=1}^J a_j$, lorsque les a_j sont des scalaires positifs tels que $1 \gg a_j$.

En posant $a_j = \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I}$ (en pratique, on a souvent $1 \gg \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I}$), on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{i,J}^I &= \left(\left[1 + \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I} \right] \cdot \prod_{l=I-i+2}^{J-1} \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{(S_l^{I+1})^2} \cdot C_{I-l+1,l} \right) \right) - 1 = \left(\left[1 + \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I} \right] \cdot \prod_{l=I-i+2}^{J-1} \left(1 + \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{C_{I-l+1,l}^I} \cdot \left(\frac{C_{I-l+1,l}^I}{S_l^{I+1}} \right)^2 \right) \right) - 1 \\ &\approx \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I} + \sum_{l=I-i+2}^{J-1} \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{(C_{I-l+1,l}^I)} \cdot \left(\frac{C_{I-l+1,l}^I}{S_l^{I+1}} \right)^2 \end{aligned}$$

Cette simplification permet d'obtenir une formule simplifiée de $m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0)$:

$$\begin{aligned} m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0) &= (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \hat{\Delta}_{i,J}^I + (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \hat{\Gamma}_{i,J}^I \\ &\approx (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \left(\frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{S_{I-i+1}^I} + \sum_{j=I-i+2}^{J-1} \left(\frac{C_{I-j+1,l}^I}{S_j^{I+1}} \right)^2 \cdot \frac{(\hat{\sigma}_j^I)^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{S_j^I} \right) + (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \left(\frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I} + \sum_{l=I-i+2}^{J-1} \frac{(\hat{\sigma}_l^I)^2 / (\hat{f}_l^I)^2}{(C_{I-l+1,l}^I)} \cdot \left(\frac{C_{I-l+1,l}^I}{S_l^{I+1}} \right)^2 \right) \\ &\approx (\hat{C}_{i,J}^I)^2 \cdot \left(\frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I} + \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{S_{I-i+1}^I} + \sum_{j=I-i+2}^{J-1} \frac{(\hat{\sigma}_j^I)^2 / (\hat{f}_j^I)^2}{(S_j^I)} \cdot \left(\frac{C_{I-j+1,l}^I}{S_j^{I+1}} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

³⁷ Cf. M. Wüthrich, M. Merz, Modelling The Claims Development Result For Solvency Purposes, CAS, 2008

Rappelons la formule donnée par Mack permettant de quantifier l'erreur de prédiction du montant des provisions pour sinistres à payer :

$$m\hat{sep}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \underbrace{\frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2}}_{\text{Erreur de processus}} \underbrace{\left(\frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right)}_{\text{Erreur d'estimation}}$$

Si on compare cette formule avec la formule simplifiée de la $m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0)$, on observe que :

- Les deux premiers termes de la formule de la $m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0)$ correspondent à la prise en compte de l'erreur d'estimation et de l'erreur de processus pour la diagonale à venir (cas $k=n-i+1$ dans la formule de Mack),
- Sur les diagonales suivantes, dans la formule de la $m\hat{sep}_{\hat{CDR}_i(I+1)/D_i}(0)$, on observe que seule l'erreur d'estimation est conservée par rapport à la formule de $m\hat{se}(\hat{R}_i)$. D'autre part, la prise en compte de cette erreur est « écrasée » par le terme $\left(\frac{C_{I-j+1,j}}{S_j^{I+1}} \right) \leq 1$.

Néanmoins, il est possible de trouver dans la littérature des exemples de triangles pour lesquels l'incertitude de court terme (donnée par Merz-Wüthrich) excède l'incertitude à long terme (donnée par Mack)³⁸.

4.1.5. Avantages et limites du modèle

Comme pour la méthode Mack, la simplicité de mise en œuvre du modèle proposé par Wüthrich et Merz ainsi que le fait de pouvoir facilement comprendre et analyser les résultats, et le cas échéant, de pouvoir « corriger » les données du triangle (non prise en compte dans le calcul de certains développements individuels ou de certains exercices de survénance anciens jugés non représentatifs,...) sont les principaux avantages de celui-ci.

En revanche, ce modèle ne fournit pas directement une distribution de $\hat{CDR}(I+1)/D_i$.

Une hypothèse de loi de distribution à support dans $\Re$ (loi normale par exemple) dont les deux premiers moments sont donnés par $\sqrt{(u_biais)^2}$ et $\hat{V}\left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_i\right)$ serait alors nécessaire pour déterminer le besoin en capital

au titre du risque de réserve. Néanmoins, on notera que Wüthrich et Merz donnent une estimation de $\sqrt{(u_biais)^2}$, et non pas de (u_biais) , ce qui engendre que (u_biais) est toujours positif. Dans la pratique, on pourrait s'attendre à ce que ce montant puisse être positif ou négatif. D'autre part, l'hypothèse de loi normale n'est pas très conservatrice.

Une autre approche pour mesurer le risque de réserve consisterait à considérer que le risque de réserve suit une loi log-normale, d'écart-type $\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_i}(0)}$. Cela revient à retenir la méthodologie de la formule standard, calibrée en retenant la volatilité donnée par le modèle de Merz et Wüthrich.

Le passage d'une mesure de volatilité à horizon un an à une mesure de risque de réserve n'est donc pas triviale.

³⁸ Cf par exemple le triangle GAV proposé par Arnaud Lacoume et Arthur Charpentier - [http://blogperso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/index.php/post/2009/11/18/Incertitude\(s\)-dans-les-triangles-de-paiements](http://blogperso.univ-rennes1.fr/arthur.charpentier/index.php/post/2009/11/18/Incertitude(s)-dans-les-triangles-de-paiements)

D'autre part, il n'existe pas de méthodologie proposée à ce jour pour inclure un facteur de queue de développement. Cela peut être un frein à l'utilisation de cette méthode pour les branches à développement long ou lorsque l'historique des données est limité.

Enfin, il est important de préciser que le modèle proposé par Wüthrich et Merz ne permet pas de « décomposer » la distribution du $\hat{C}\hat{D}R(I+1)/D_t$ entre les paiements de l'année à venir et l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$. Ceci peut s'avérer être un inconvénient majeur dans le cadre de l'intégration de cette méthode dans un modèle interne ne modélisant pas uniquement le risque de réserve. En effet, dans ce cas, il est nécessaire (à l'exception des modèles internes basés sur une approche « par silo ») d'obtenir une distribution de l'actif net en date $t=1$, et par suite une distribution de l'ensemble des postes du bilan économique en date $t=1$, donc de l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$, ce que ne permet pas l'approche proposée par Wüthrich et Merz. Une hypothèse de cadence de règlements permettrait néanmoins de « ventiler » le $\hat{C}\hat{D}R(I+1)/D_t$ entre les paiements de l'année à venir et l'évaluation Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$. Cela engendre néanmoins d'ajouter une hypothèse supplémentaire au modèle, avec autant de risque de sur-paramétrage de celui-ci.

4.2. Adaptation de la procédure bootstrap – méthode 1

Nous présentons dans cette partie une première réflexion concernant l'adaptation de la procédure bootstrap « classique » afin de la rendre en conformité avec la nécessité, dans le cadre de Solvabilité 2, de mesurer la volatilité à horizon 1 an du montant des provisions pour sinistres à payer évalué en date $t=0$, l'objectif étant

d'obtenir une distribution de $C\hat{D}R(I+1) = \sum_{i=1}^n (\hat{P}_{i,ult}^I - \hat{P}_{i,ult}^{I+1}) = \sum_{i=1}^n (\hat{R}_i^I - (\hat{R}_i^{I+1} + p_{i,n-i+2}))$.

Nous montrerons que cette première réflexion présente des limites, qui nous ont amené à considérer une autre approche qui sera développée dans le paragraphe 4.3.

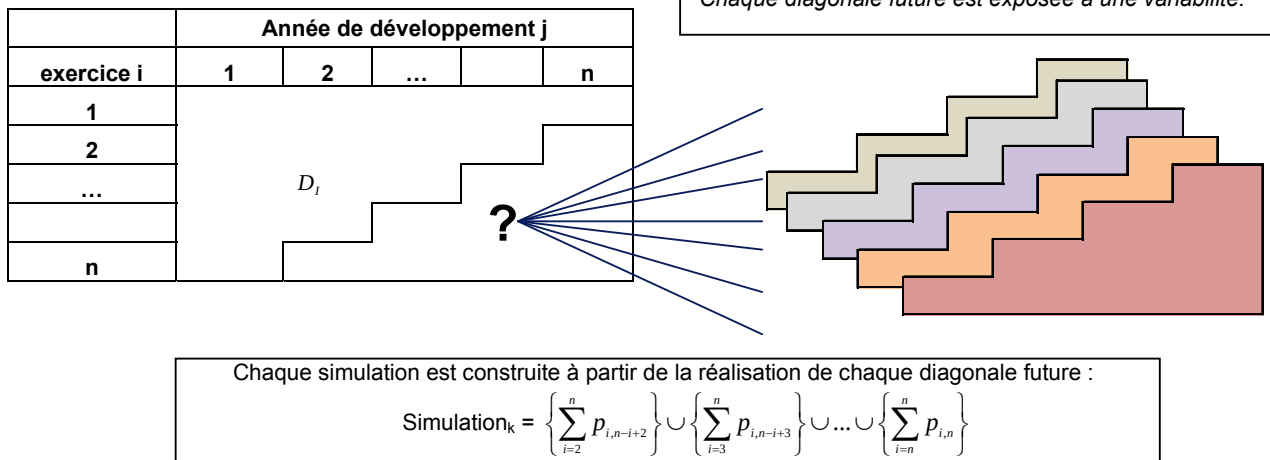
4.2.1. Adaptation de la procédure bootstrap à horizon 1 an : problématiques et enjeux

Contrairement à la procédure bootstrap « classique », qui a pour vocation de calculer un univers possible de trajectoires de paiements futurs jusqu'à liquidation totale de provisions, une approche à un an doit considérer :

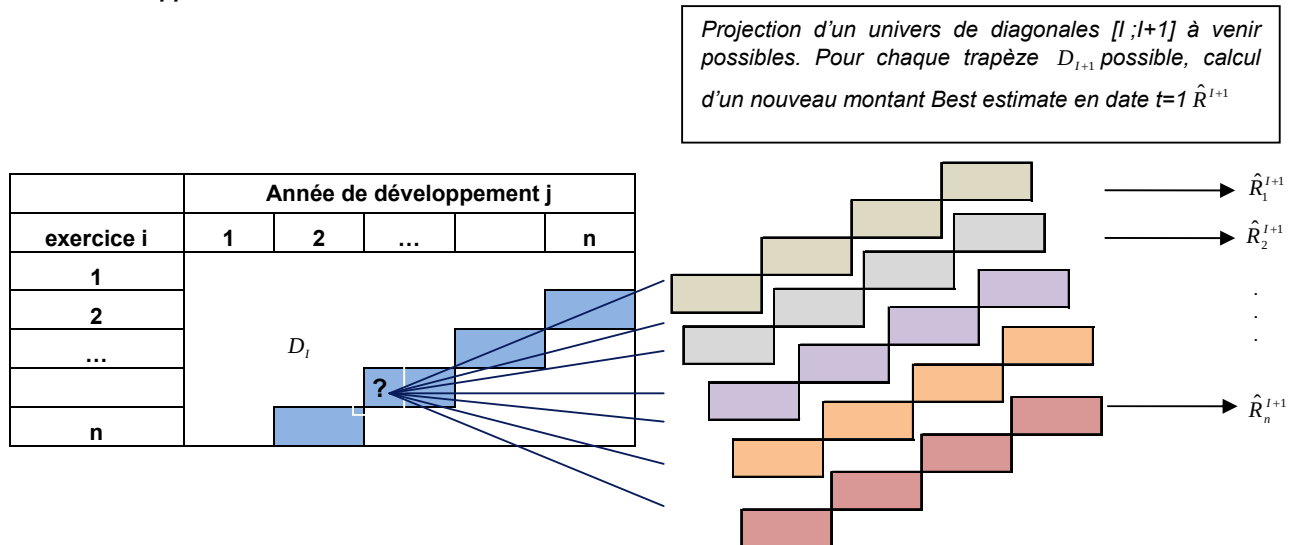
- un univers possible de trajectoires de paiements futurs qui seront effectués entre la date $t=0$ et la date $t=1$ ($\sum_{i=1}^n p_{i,n-i+2}$),
- une évaluation du montant des provisions pour sinistres en date $t=1$, ayant connaissance des paiements effectués entre la date $t=0$ et la date $t=1$ ($\hat{R}^{I+1} = \hat{E}(R^{I+1} / D_{I+1}) = BE_1$).

La différence entre les deux approches est schématisée ci-dessous :

- **Approche à l'ultime - illustration**



- **Approche à un an - illustration**



Chaque simulation est construite à partir de la réalisation de la diagonale à venir et d'un calcul Best estimate (c'est-à-dire une vision en espérance des flux futurs) conditionnellement à cette réalisation :

$$\text{Simulation}_i = \left\{ \sum_{i=2}^n p_{i,n-i+2} \right\} \cup \hat{E}[R^{I+1} / D_{I+1}]$$

Dans l'approche de la procédure bootstrap à l'ultime, une erreur d'estimation et une erreur de processus étaient prises en compte sur chacune des diagonales futures.

Dans l'approche à un an, ne cherchant pas à obtenir un ensemble possible de paiements futurs sur l'horizon de projection résiduel, il est nécessaire de différencier le traitement de la diagonale à venir (correspondant aux paiements qui seront effectués entre la date $t=0$ et la date $t=1$) et des diagonales ultérieures :

- Une erreur d'estimation et une erreur de processus doivent être prises en compte pour la diagonale à venir. On cherche en effet à obtenir un univers possible de paiements qui seront effectués entre la date $t=0$ et la date $t=1$.
- A la date $t=1$, on cherche à évaluer un montant de provisions pour sinistres Best estimate, connaissant D_{I+1} . On raisonne donc en espérance, et, dans ce cadre, les diagonales ultérieures doivent uniquement tenir compte d'une erreur d'estimation (liée au modèle d'évaluation du Best estimate).

Dans la suite, la diagonale correspondant aux paiements qui seront effectués entre la date $t=0$ et la date $t=1$ sera notée diagonale $[I; I+1]$, et les diagonales ultérieures les diagonales $[I+1; \dots]$.

4.2.2. Algorithme du Bootstrap à un an – premières réflexions

Nous présentons ci-dessous un algorithme de bootstrap « à un an ». Cet algorithme présente l'avantage d'être intuitif.

Nous montrerons néanmoins dans le paragraphe suivant qu'il souffre d'un certain nombre de limites statistiques le rendant difficilement applicable.

1. Préliminaires

Cette étape est identique à celle du bootstrap « classique » en vision à l'ultime.

- Estimation des paramètres du modèle sous-jacent : $\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_j)$
- Calcul des valeurs prévues sur le triangle supérieur $\hat{\mu}_{ij}$ ($i=1,...,n; j=1,...,n-i+1$)
- Calcul des résidus, des résidus de Pearson, des résidus de Pearson ajustés pour tenir compte du nombre de degrés de liberté et du paramètre d'échelle

$$r_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu}_{ij} \quad r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}} \quad r_{ij}^{(adj)} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot r_{ij}^{(p)} \quad \hat{\phi} = \frac{\sum (r_{ij}^{(p)})^2}{n-p}$$

2. Boucle Bootstrap (à répéter N fois)

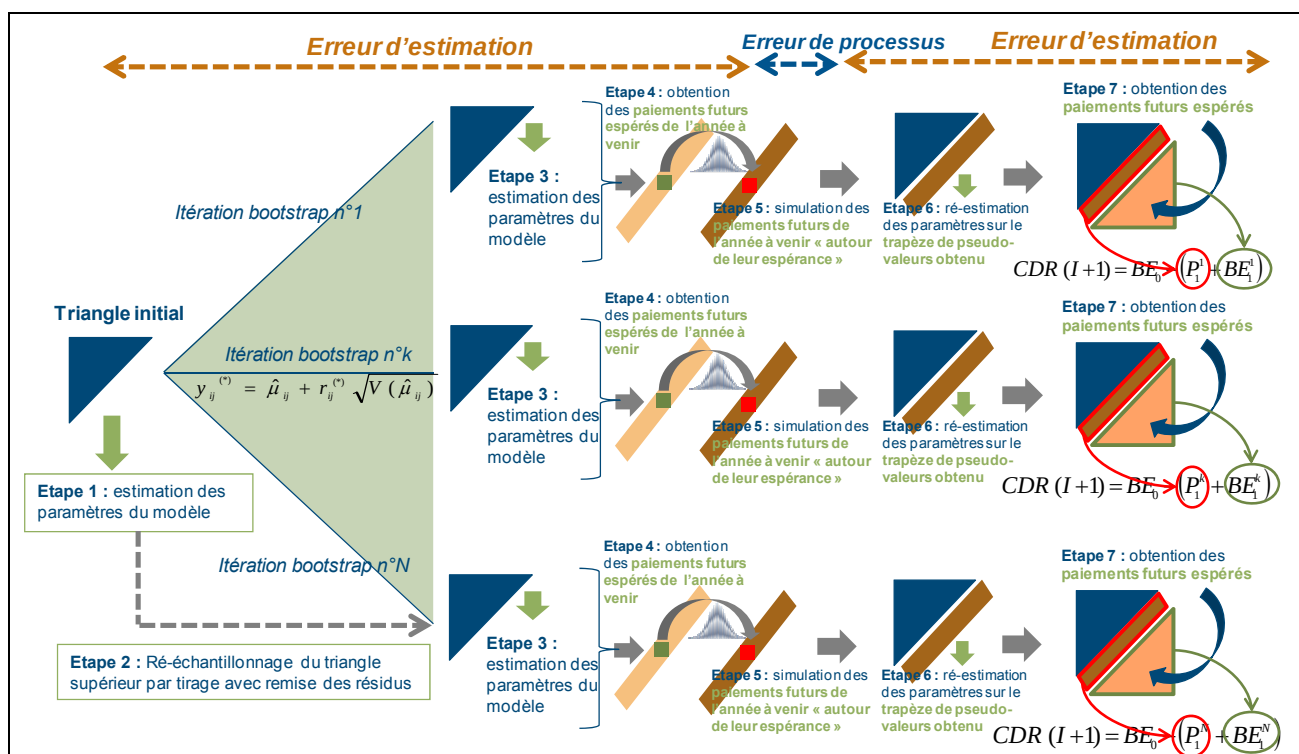
- Obtention d'un pseudo triangle initial :
 - ✓ Ré-échantillonnage des résidus $r_{ij}^{(adj)}$ par tirage avec remise, permettant d'obtenir un nouveau triangle supérieur de résidus $r_{ij}^{(*)}$
 - ✓ Obtention d'un pseudo triangle initial d'incrément $y_{ij}^{(*)}$, en utilisant la relation $r_{ij}^{(*)} = \frac{y_{ij}^{(*)} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$
- Obtention de la diagonale [l ; l+1]
 - ✓ Ré-estimation du modèle statistique $(\hat{\mu}^{(*)}, (\hat{\alpha}_i^{(*)}), (\hat{\beta}_j^{(*)}))$ pour obtenir les nouvelles valeurs prévues sur la diagonale à venir [l ; l+1] $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ ($i=2,...,n; j=n-i+2$). Cette étape permet de prendre en compte l'erreur d'estimation sur la diagonale [l ; l+1].
 - ✓ Prise en compte de l'erreur de processus sur la diagonale [l ; l+1] : pour chaque « case » de la diagonale [l ; l+1], tirage d'un montant incrémental $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i=2,...,n; j=n-i+2$) par un tirage aléatoire selon une distribution de moyenne $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ et de variance $\hat{\phi} V(\hat{\mu}_{ij}^{(*)})$
- Estimation d'un montant Best estimate des provisions en date t=1
 - ✓ Ré-estimation du modèle statistique $\hat{\mu}^{(**)}, (\hat{\alpha}_i^{(**)}), (\hat{\beta}_j^{(**)})$ sur le trapèze $D_{l+1}^{(*)}$ constitué de $y_{ij}^{(*)}$ ($i=1,...,n; 1 \leq j \leq n-i+1$) et $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i=2,...,n; j=n-i+2$) pour obtenir les nouvelles valeurs prévues sur les diagonales [l+1 ; ...] $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i=3,...,n; n-i+2 < j \leq n$)
 - ✓ Le montant Best estimate des provisions en date t=1, pour la simulation k, est égal à : $\sum_{i=3}^n \sum_{j=n-i+3}^n \hat{\mu}_{ij}^{(**)}$.

3. Résultats

- On déduit :

- ✓ N répétitions de paiements sur la diagonale $[I ; I+1] \left(P_1 = \sum_{i=2}^n p_{i,n-i+2} \right)$,
- ✓ N répétitions de l'évaluation du montant des provisions pour sinistres en date $t=1$ $\left(BE_1 = \hat{R}^{I+1} = \hat{E}(R^{I+1} / D_{I+1}) \right)$,
- Par suite, on déduit une distribution de $\hat{CDR}(I+1)$.

Le schéma ci-dessous synthétise les différentes étapes de la procédure bootstrap :



4.2.3. Limites

Cette méthode, relativement intuitive, pose néanmoins un certains nombre de problèmes :

- **Hypothèse d'indépendance des variables aléatoires**

L'application d'un modèle GLM suppose que l'échantillon statistique soit constitué de variables aléatoires indépendantes.

Si cette hypothèse reste à vérifier lors de l'application du modèle sur le triangle initial et sur l'ensemble des pseudo-triangles initiaux, celle-ci n'est pas, par construction de l'algorithme, vérifiée lors de la ré-estimation du modèle statistique sur le trapèze constitué de $y_{ij}^{(*)}$ ($i = 1, \dots, n; n - i + 1 < j \leq n$) et $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i = 2, \dots, n; j = n - i + 2$).

En effet, on a $\hat{\mu}_{ij}^{(**)} = f(\hat{\theta}^*)$ où $\hat{\theta}^* = \{\hat{\mu}^{(*)}, (\hat{\alpha}_i^{(*)}), (\hat{\beta}_j^{(*)})\}$ correspond aux paramètres estimés du modèle sur le pseudo triangle $y_{ij}^{(*)}$ ($i = 1, \dots, n; 1 \leq j \leq n - i + 1$).

A titre d'illustration, le tableau ci-dessous présente les coefficients de corrélation linéaire entre la somme des $y_{ij}^{(*)}$ ($i = 1, \dots, n; n - i + 1 < j \leq n$) (somme des incréments du triangle supérieur) et la somme des $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i = 2, \dots, n; j = n - i + 2$) (somme des incréments de la diagonale [I ; I+1]), à partir du triangle « RC Automobile » qui sera présenté dans le chapitre 4 et sur la base d'un échantillon bootstrap de 50 000 simulations :

Coefficient de corrélation linéaire	
Modèle sous-jacent	
Gamma	17.0%
Poisson	18.0%
Christophides	21.4%

Ces coefficients ne sont pas nuls, ce qui tend à prouver qu'il n'y a pas indépendance entre les variables aléatoires constituant le trapèze D_{I+1} .

- **Erreur d'estimation**

Dans l'algorithme énoncé précédemment, chaque boucle bootstrap nécessite deux ré-estimations du modèle statistique, en sus du premier modèle effectué sur le triangle initial : une première fois pour obtenir les paiements de la diagonale [I ; I+1] puis une seconde fois pour obtenir les paiements en espérance sur les diagonales [I+1 ; ...]. Cela a tendance à augmenter significativement l'erreur d'estimation, et par suite, l'écart-type de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$.

Pour pallier ces problématiques rendant difficilement applicable l'algorithme décrit ci-dessous, une autre adaptation de la procédure bootstrap « standard » est proposée dans le paragraphe suivant.

4.3. Adaptation de la procédure bootstrap – méthode 2

Nous présentons dans cette partie une seconde méthode permettant d'adapter la procédure bootstrap « classique » afin de la mettre en conformité avec la nécessité, dans le cadre de Solvabilité 2, de mesurer la volatilité à horizon 1 an du montant des provisions pour sinistres à payer évalué en date $t=0$.

Après avoir posé les principaux objectifs attendus, nous présenterons l'algorithme de cette seconde méthode. Nous présenterons enfin certains points méritant d'être soulignés lors de la mise en œuvre opérationnelle de cette méthode, tels que la prise en compte d'un facteur de queue de développement et l'introduction dans l'algorithme de « management rules ».

4.3.1. Problématiques

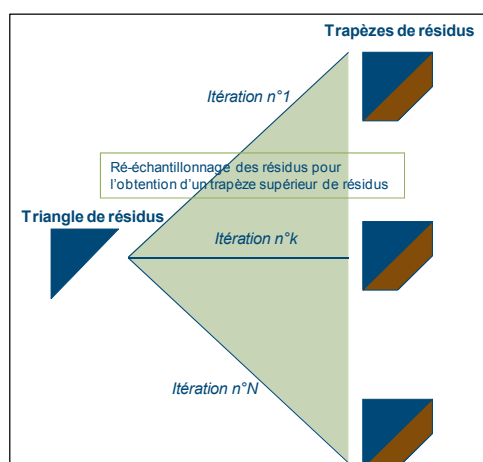
Cette seconde méthode doit répondre aux objectifs suivants :

- D'une part, comme pour la première méthode, elle doit permettre de mesurer la volatilité à horizon 1 an du montant des provisions pour sinistres à payer évalué en date $t=0$, en considérant :
 - ✓ Une erreur d'estimation et une erreur de processus sur la diagonale à venir,
 - ✓ Une erreur d'estimation sur les diagonales ultérieures (afin d'évaluer un montant de provisions pour sinistres Best estimate en date $t=1$).
- Elle doit permettre également de pallier les limites de la méthode 1 mises en exergue dans le paragraphe précédent. En particulier, le modèle permettant d'évaluer un montant de provisions pour sinistres Best estimate en date $t=1$ doit reposer sur des réalisations de variables aléatoires indépendantes.

Pour ce faire, l'obtention de la diagonale $[l; l+1]$ ne va pas (comme cela était le cas dans la méthode 1) être réalisée en 2 phases :

- ✓ Ré-estimation du modèle statistique $(\hat{\mu}^{(*)}, (\hat{\alpha}_i^{(*)}), (\hat{\beta}_j^{(*)}))$ pour obtenir les nouvelles valeurs prévues sur la diagonale à venir $[l; l+1]$ $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ ($i = 2, \dots, n; j = n - i + 2$),
- ✓ Prise en compte de l'erreur de processus sur la diagonale $[l; l+1]$: pour chaque « case » de la diagonale $[l; l+1]$, tirage d'un montant incrémental $\hat{\mu}_{ij}^{(**)}$ ($i = 2, \dots, n; j = n - i + 2$) par un tirage aléatoire selon une distribution de moyenne $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ et de variance $\hat{\phi}.V(\hat{\mu}_{ij}^{(*)})$.

mais en une seule phase.



Pour chaque itération bootstrap, le trapèze $D_{l+1}^{(*)}$ va « directement » être obtenu par ré-échantillonnage des résidus sur un échantillon plus grand que l'échantillon initial.

Les résidus issus de l'application du modèle statistique sur le triangle initial vont en effet être ré-échantillonnés pour générer N trapèzes supérieurs de résidus.

Pour un triangle de taille n , cela revient à générer un trapèze de $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ résidus à partir d'un triangle de $\frac{n(n+1)}{2}$ résidus.

Les pseudo-trapèzes supérieurs $D_{l+1}^{(*)}$ sont ensuite générés en

utilisant la relation $r_{ij}^{(*)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$.

Cette procédure assure que les données des trapèzes $D_{i+1}^{(*)}$ correspondent à des réalisations de variables aléatoires indépendantes. La prise en compte de l'erreur d'estimation et de l'erreur de processus sur la diagonale $[i; i+1]$ est elle aussi assurée par les propriétés du ré-échantillonnage.

4.3.2. Algorithme du Bootstrap à un an

1. Préliminaires

Cette étape est identique à celle du bootstrap « classique » en vision à l'ultime.

- Estimation des paramètres du modèle sous-jacent : $\hat{\mu}, (\hat{\alpha}_i), (\hat{\beta}_j)$
- Calcul des valeurs prévues sur le triangle supérieur $\hat{\mu}_{ij}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n - i + 1$)
- Calcul des résidus, des résidus de Pearson, des résidus de Pearson ajustés pour tenir compte du nombre de degrés de liberté et du paramètre d'échelle

$$r_{ij} = y_{ij} - \hat{\mu}_{ij} \quad r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}} \quad r_{ij}^{(adj)} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot r_{ij}^{(p)} \quad \hat{\phi} = \frac{\sum (r_{ij}^{(p)})^2}{n-p}$$

2. Boucle Bootstrap (à répéter N fois)

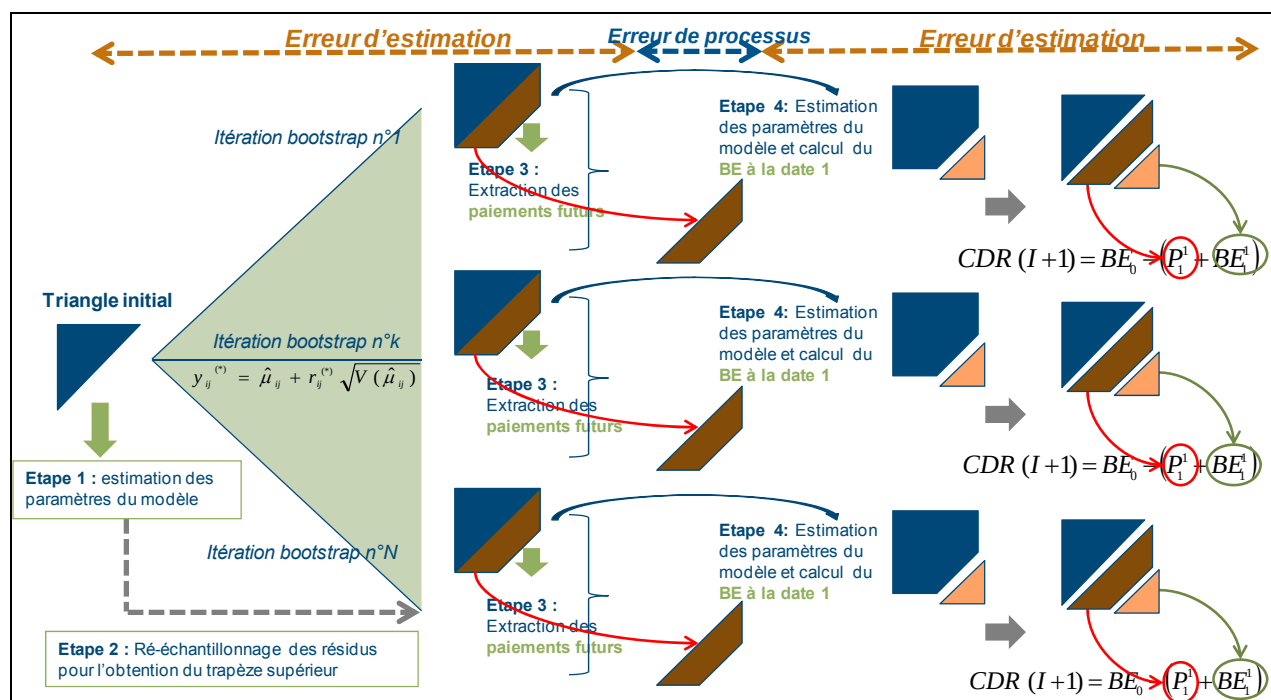
- Obtention d'un pseudo trapèze initial :
 - ✓ Ré-échantillonnage des résidus $r_{ij}^{(adj)}$ par tirage avec remise, afin d'obtenir un trapèze de résidus $r_{ij}^{(*)}$.
 - ✓ Obtention d'un pseudo trapèze $D_{i+1}^{(*)}$ d'incrémentes $y_{ij}^{(*)}$, en utilisant la relation $r_{ij}^{(*)} = \frac{y_{ij}^{(*)} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$
- Estimation d'un montant Best estimate des provisions en date $t=1$
 - ✓ Ré-estimation du modèle statistique sur le trapèze constitué de $y_{ij}^{(*)}$ ($i = 1, \dots, n; 1 \leq j \leq n - i + 2$) pour obtenir les nouvelles valeurs prévues sur les diagonales $[i+1; \dots]$ $\hat{\mu}_{ij}^{(*)}$ ($i = 3, \dots, n; n - i + 2 < j \leq n$)
 - ✓ Le montant Best estimate des provisions en date $t=1$, pour la simulation k , est égal à :

$$\hat{R}_k^{t+1} = \sum_{i=3}^n \sum_{j=n-i+3}^n \hat{\mu}_{ij}^{(*)}.$$

3. Résultats

- On déduit :
 - ✓ N répétitions de paiements sur la diagonale $[i; i+1]$ $\left(P_i = \sum_{j=2}^n p_{i, n-i+2} \right)$,
 - ✓ N répétitions de l'évaluation du montant des provisions pour sinistres en date $t=1$ $\left(BE_1 = \hat{R}^{t+1} = \hat{E}(R^{t+1} / D_{i+1}) \right)$,
- Par suite, on déduit une distribution de $\hat{CDR}(i+1)$.

Le schéma ci-dessous synthétise les différentes étapes de la procédure bootstrap :



4.3.3. Prise en compte d'un facteur de queue de développement

La prise en compte d'un facteur de queue de développement lors de l'évaluation du montant Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$ s'effectue de façon similaire à la procédure présentée dans le cadre de la méthode Chain-Ladder (cf. paragraphe 2.3 du Chapitre 2) :

- **Cas du GLM Poisson**

Le GLM Poisson permettant de répliquer les résultats de la méthode Chain Ladder, la problématique est similaire à celle étudiée dans le cadre de la méthode Chain-Ladder (cf paragraphe 2.3 du Chapitre 2) : sur chaque pseudo trapèze, une courbe paramétrique est ajustée aux facteurs de développement estimés par le modèle, puis extrapolée jusqu'à obtenir des facteurs égaux à 1.

- **Autres modèles**

Dans le cas d'un modèle GLM Gamma ou d'un modèle log-normal, des facteurs de développement dits « équivalents » (« equivalent development factors »³⁹) sont estimés à chaque itération. Cela signifie que sur chaque pseudo trapèze (mis sous la forme de données cumulées), des facteurs de développement estimés selon la méthode Chain Ladder sont calculés.

La procédure d'ajustement de courbe sur ces facteurs et d'extrapolation reste ensuite identique.

Contrairement à la procédure décrite au paragraphe 3.7.2 relative à la prise en compte d'un facteur de queue de développement dans le cas du bootstrap « classique », il n'est pas nécessaire de procéder à un tirage selon une loi spécifiée, car nous nous situons ici dans le cadre d'une évaluation en espérance.

³⁹ England et Verrall, 2002

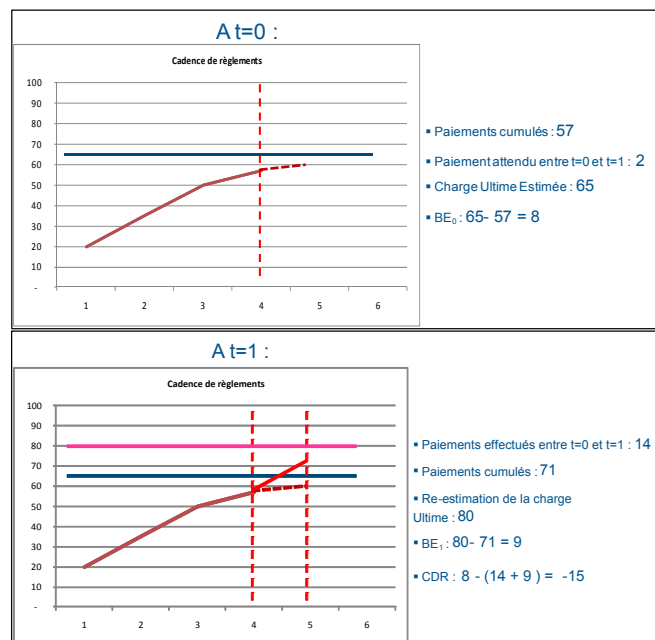
4.3.4. Prise en compte de management rules

Dans la procédure décrite précédemment, on cherche in fine à obtenir la pire déviation (avec une probabilité de 99.5%), à horizon un an de l'évaluation du montant Best estimate des provisions effectuée en date $t=0$:

$$SCR_{reserve} = -VaR_{0.5\%} \left(\sum_i \hat{R}_i^t - \sum_i (\hat{R}_i^{t+1} + p_{i,n-i+2}) \right)$$

Dans la procédure bootstrap décrite précédemment, l'évaluation de $\hat{R}_i^{t+1}$ dépend notamment des paiements effectués entre la date $t=0$ et $t=1$ ($\sum_i p_{i,n-i+2}$). Ainsi, lorsque le montant de ces paiements déviara significativement à la hausse par rapport au montant prévu en date $t=0$, l'évaluation de $\hat{R}_i^{t+1}$ sera de facto dégradée par rapport à l'estimation du montant des provisions en date $t=0$ $\hat{R}_i^{t+1}$.

Ceci est illustré sur les graphiques ci-dessous :



Supposons un seul exercice de surveillance, développé depuis 4 années à la date $t=0$.

A la date $t=0$, le montant attendu de paiements entre $t=0$ et $t=1$ est de 2, ce qui amène à considérer une évaluation du montant Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=0$ de 8.

Supposons que les paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$ de soient pas de 2 mais de 14.

Cette forte déviation à la hausse des paiements sur la période par rapport au montant attendu va impacter l'évaluation du montant Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$.

En pratique, l'actuaire jugerait les paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$ atypiques et ne les prendrait pas en considération dans son modèle pour évaluer le montant Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$. Cette problématique avait été présentée au paragraphe 2.3 du Chapitre 2.

Afin de refléter au mieux dans la procédure bootstrap ce phénomène, c'est-à-dire afin de prendre en compte les normes de l'entreprise d'assurance en termes de politique de provisionnement, le modèle permettant d'évaluer le montant Best estimate des provisions en date $t=1$ pourrait tenir compte aisément d'un ensemble de règles de décisions (« management rules »).

Ces règles pourraient se traduire par exemple par l'exclusion de certains facteurs de développement individuels jugés atypiques et seraient déterminées à dire d'expert.

4.3.5. Avantages et limites du modèle

Les principales limites relatives à la procédure ci-dessus sont les mêmes que celles évoquées dans la cadre de la procédure bootstrap « classique » (cf paragraphe 3.5.3 de ce Chapitre) :

- Choix de la famille de loi, souvent à support positif, et nécessitant donc des incréments positifs,
- Traçabilité ou compréhension parfois peu aisée des résultats (et par suite une communication moins aisée des résultats obtenus). La prise en compte de « management rules » permet cependant de pallier cette difficulté.

Néanmoins le modèle décrit présente de nombreux avantages.

En premier lieu, contrairement au modèle de Merz et Wüthrich, le fait de disposer en sortie du modèle d'une distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ permet de déduire directement une évaluation du risque de réserve.

D'autre part, le fait ce modèle permet d'obtenir en lecture directe une distribution des paiements effectués entre la date $t=0$ et $t=1$ et une distribution du montant Best estimate des provisions en date $t=1$, ce que ne permettait pas le modèle proposé par Merz et Wüthrich. L'intégration de cette méthode dans un modèle interne ne modélisant pas uniquement le risque de réserve est donc directe.

Un autre avantage réside dans la possibilité d'adapter facilement la méthode proposée afin de mesurer une volatilité à horizon K années du montant des provisions pour sinistres à payer évalué en date $t=0$. Cela peut s'avérer très utile, par exemple dans le cadre de l'ORSA⁴⁰. L'ORSA est le moyen par lequel les entreprises devront mener une évaluation complète de leurs propres risques. Cela doit prendre en compte leur profil de risques, leur appétence pour le risque, mais aussi leur stratégie de pilotage face à ces risques. L'ORSA est un des un pré-requis important permettant de répondre aux exigences du « Use Test » (utilisation du modèle) comprises dans la directive Solvabilité 2. Dans ce cadre les entreprises d'assurance peuvent définir notamment un horizon de ruine différent de l'horizon de un an.

⁴⁰ Own Risk and Solvency Assessment

CHAPITRE 4 – APPLICATIONS

Nous présentons dans ce Chapitre les applications numériques réalisées à partir de données de marché américaines.

Après avoir présenté les données utilisées, nous évaluerons dans un premier temps le montant Best estimate des provisions pour sinistres à payer.

Nous comparerons et analyserons dans un deuxième temps les résultats obtenus en appliquant d'une part les méthodes de provisionnement stochastique « usuelles » (cf. partie 3 du Chapitre 3) et d'autre part l'adaptation de ces méthodes afin de mesurer une volatilité dans les provisions pour sinistres à horizon un an (cf. partie 4 du Chapitre 3).

Nous calculerons également selon différentes méthodes le besoin en capital au titre du risque de réserve des différents segments étudiés.

Nous présenterons enfin les résultats obtenus sur un benchmark constitué de plusieurs portefeuilles européens.

1. PRESENTATION DE L'EXEMPLE ET CALCUL DU BEST ESTIMATE DES PROVISIONS POUR SINISTRES

Les applications numériques relatives à l'estimation de la volatilité dans les provisions pour sinistres à payer et le calcul du risque de réserve ont été réalisées à partir de triangles de liquidation sur trois segments différents : Automobile Responsabilité Civile (« RC Auto »), Dommages aux biens des professionnels (« DAB professionnels ») et RC Générale (« RCG »).

Les données proviennent de statistiques du marché américain.

Nous présentons dans cette partie une description des données utilisées, puis proposons une évaluation du montant Best estimate des provisions pour sinistres sur chacun des trois segments.

1.1. Présentation des données

Nous avons considéré les données provenant des états règlementaires américains au 31.12.2008.

Ces états contiennent, pour l'ensemble du marché américain, les données relatives à la liquidation des sinistres (paiements, provisions) sur 10 années d'historique, pour chacune des catégories ministérielles.

En vue de remplir les conditions d'applicabilité de l'ensemble des méthodes exposées dans le Chapitre précédent, nous avons considéré les triangles de paiements, car ceux-ci contiennent des incréments qui sont tous positifs.

Les triangles de paiements sont nets de réassurance, bruts de recours encaissés, incluent les frais de gestion des sinistres alloués mais n'incluent pas les frais de gestion non alloués.

Nous avons considéré les catégories suivantes :

- « Private passenger auto liability » (Automobile Responsabilité Civile), inclus au segment de risque Solvabilité 2 « Automobile RC »,
- « Commercial multiple peril » (DAB professionnels), inclus au segment de risque Solvabilité 2 « Dommages aux biens »,
- « Other Liability » (Responsabilité Civile Générale), inclus au segment de risque Solvabilité 2 « Responsabilité Civile ».

Nous présentons en Annexe D les triangles de paiements cumulés par exercice de survenance / année de développement pour chacun de ces segments.

Sur ces segments, le marché américain correspond à un volume de primes en 2008 de 100 392 m\$ pour le segment Automobile Responsabilité Civile, 38 238 m\$ sur le segment DAB professionnels et 39 733 m\$ pour le segment Responsabilité Civile Générale.

- **Commentaires sur les données utilisées**

Certaines remarques relatives aux données peuvent être formulées. Certaines de ces remarques seront utiles lors de l'analyse des résultats :

- Bien que le projet Solvabilité 2 soit un projet européen, les données utilisées dans le cadre de notre étude proviennent du marché américain. Cela se justifie par le fait que, sur le marché français, nous ne disposons pas de données publiques avec un historique aussi important.
- Les données analysées proviennent de l'agrégation de données de l'ensemble de l'industrie américaine : or, cette agrégation porte sur des données qui ne sont pas totalement homogènes. En effet, les programmes de réassurance, le mode de gestion relatif au règlement des sinistres, etc diffèrent d'une entreprise d'assurance à une autre. Cela peut engendrer un biais dans les résultats obtenus.
- D'autre part, le fait d'agréger les données sur l'ensemble de l'industrie américaine a un effet de « lissage ». Ainsi, des irrégularités qui pourraient être observées dans les cadences de liquidation au niveau solo (entreprise d'assurance par entreprise d'assurance) peuvent être fondues dans la masse des données relatives à l'ensemble de l'industrie. Cela peut amener à sous-estimer la volatilité incluse dans les données.
- Les triangles de paiements étant nets de réassurance, les indicateurs calculés tels que le Best estimate des provisions pour sinistres seront nets de réassurance. Cela est en phase avec la définition du risque de réserve dans le référentiel Solvabilité 2.

Il convient néanmoins de noter que les paiements cédés aux réassureurs sont en valeur « historique », c'est-à-dire qu'ils dépendent du traité en vigueur à la date du paiement. Cela peut constituer un biais dans l'estimation du montant des provisions lorsque, sur l'historique observé, les programmes de réassurance ont évolué. En effet, cela peut engendrer des cadences de liquidation différentes d'un exercice de survénance à un autre (l'hypothèse de Chain Ladder est dans ce cas non vérifiée). Il conviendrait alors de travailler par regroupement d'années impactées par le même programme de réassurance. Néanmoins, comme cela sera illustré dans le paragraphe suivant, le biais engendré semble limité sur chacun des segments étudiés, les cadences étant quasiment identiques sur chacun des exercices de survénance.

Afin de pallier ces différentes limites, et de présenter des résultats plus facilement interprétables au niveau d'une entreprise d'assurance, nous présentons dans la Section 4 de ce chapitre un benchmark réalisé sur un panel d'entreprises européennes.

1.2. Calcul du Best estimate des provisions pour sinistres à payer

Nous nous proposons, pour chacun des trois segments de calculer le montant Best estimate des provisions pour sinistres à payer. Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode Chain Ladder, décrite dans le Chapitre 2.

1.2.1. Facteurs de développement et cadence de liquidation

Le tableaux suivants présentent, pour chacun des segments, les facteurs de développement issus de l'application de la méthode Chain Ladder, et la cadence de règlements cumulée.

On remarquera que :

- Le segment « RC Auto » se caractérise par un développement court : après trois années de développement, 84.5% des sinistres ont été réglés,
- Le segment « DAB Professionnels » se caractérise par un développement de durée intermédiaire : après trois années de développement, 73.2% des sinistres ont été réglés,
- Le segment « RCG » se caractérise par un développement long : après trois années de développement, moins de la moitié des sinistres ont été réglés.

NB : En France, la cadence de liquidation des sinistres du segment « RC Auto » est plus longue. Cela peut s'expliquer par le fait que, aux Etats Unis, le montant de la garantie est souvent plafonné alors que la garantie est illimitée en France.

Segment RC Auto										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Facteurs de développement	1.72	1.19	1.09	1.04	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00	
Cadence cumulée	41.2%	71.1%	84.5%	92.2%	96.3%	98.1%	99.0%	99.5%	99.8%	100%

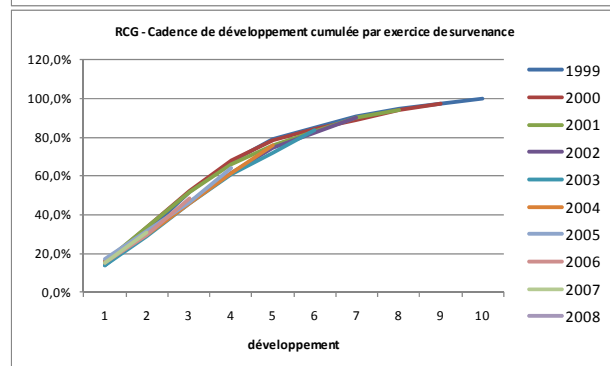
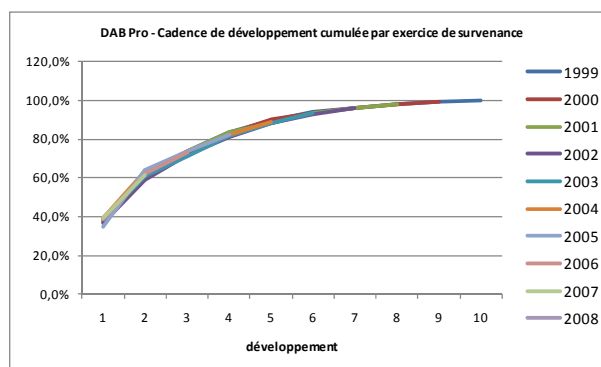
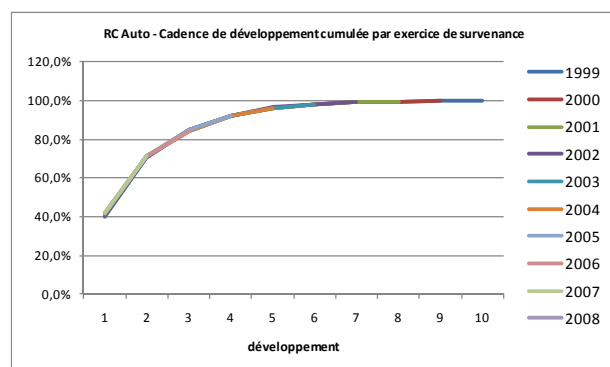
DAB Professionnels										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Facteurs de développement	1.62	1.18	1.13	1.08	1.05	1.03	1.02	1.01	1.01	
Cadence cumulée	38.1%	61.8%	73.2%	82.6%	89.1%	93.3%	95.9%	97.8%	99.1%	100%

RC Générale										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Facteurs de développement	1.99	1.58	1.32	1.18	1.10	1.08	1.05	1.03	1.03	
Cadence cumulée	15.5%	30.8%	48.5%	64.0%	75.8%	83.5%	90.0%	94.2%	97.1%	100%

Sont représentées graphiquement ci-dessous les cadences de développement cumulées pour chaque exercice de survenance, en pourcentage du montant cumulé estimé (par application de la méthode Chain Ladder) en fin de

10^{ème} développement : $\frac{P_{ij}}{P_{in}}$, pour tout i allant de 1 à 10 et j allant de 1 à n-i+1.

Ces représentations permettent de valider graphiquement l'applicabilité de la méthode Chain Ladder (pour un développement donné, chaque facteur de développement individuel est supposé identique quelque soit l'exercice de survenance). On observe en effet que les cadences de développement cumulées de chaque exercice de survenance sont « superposées ».



On remarque que les cadences sont superposées pour le segment « Auto RC », ce qui traduit que l'on vérifie bien l'hypothèse de Chain Ladder.

De même, pour le segment « DAB Professionnels », les cadences sont quasi-superposées.

Enfin, pour le segment « RCG », même si la cadence de développement des exercices de survenance les plus récents semble être légèrement plus lente que sur les exercices de survenance les plus anciens, les cadences peuvent être considérées comme similaires pour chaque exercice de survenance et la méthode Chain Ladder applicable.

L'Annexe E présente les facteurs de développements individuels (ou link ratios) $\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}}$, pour chacun des segments.

L'observation de ces facteurs permet de confirmer que la méthode Chain Ladder peut être appliquée, l'hypothèse que les facteurs individuels sont identiques quel que soit l'exercice de survenance étant globalement vérifiée. Il n'y a pas lieu de retraiter certaines données (non prise en compte de facteurs individuels ou d'exercices de survenance) pour estimer les facteurs de développement.

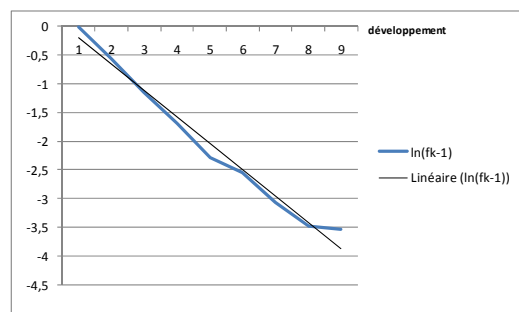
Cette stabilité s'explique certainement en partie par le fait que les données analysées correspondent à des données agrégées (cf paragraphe 1.1 de ce Chapitre).

1.2.2. RC Générale : prise en compte d'un facteur de queue de développement

Pour le segment « RCG », on peut s'apercevoir que la cadence de développement ne semble pas achevée au bout de 10 années de développement (on a $\hat{f}_9 = 1.03$). Il semble donc justifié de considérer sur ce segment un facteur de queue de développement.

Comme expliqué dans le Chapitre 2 (paragraphe 2.3), nous allons ajuster les facteurs de développement $\hat{f}_j$ à une courbe de la forme $\hat{f}_j = 1 + \exp(\hat{a} + \hat{b} \cdot j)$, $1 \leq j \leq n-1$.

Le graphique suivant présente la qualité de l'ajustement :



Le R^2 , égal à 98% montre une bonne qualité d'ajustement.

La méthode des moindres carrées donne :

$$\hat{a} = 0.26$$

$$\hat{b} = -0.46$$

$$\text{et } \hat{f}_{ult} = \prod_{j=10}^{26} \hat{f}_j = 1.04$$

1.2.3. Montant Best estimate des provisions pour sinistres

Le montant Best estimate des provisions pour sinistres à payer est estimé :

- en calculant la charge ultime pour chaque exercice de survénance : $\hat{P}_{i,ult} = P_{i,n+1-i} \times \prod_{k \geq n+1-i} \hat{f}_k$,
- en déduisant le montant Best estimate des provisions pour sinistres à payer, par exercice de survénance et au total : $\hat{R}_i = \hat{P}_{i,ult} - P_{i,n+1-i}$ et $\hat{R} = \sum_i \hat{R}_i$

Le tableau suivant présente, pour chacun des segments, le montant Best estimate des provisions pour sinistres à payer, ainsi que les ratios sinistres à primes (par exercice de survénance et au total). Les ratios sinistres à primes

sont déterminés comme suit : $\left(\frac{S}{P}\right)_i = \frac{\hat{P}_{i,ult}}{\text{primes acquises exercice } i}$.

Les primes acquises sont nettes de réassurance pour être cohérent avec l'estimation de la charge ultime.

Montant BE des provisions pour sinistres et ratios S/P						
Exercice	RC Auto		DAB Professionnels		RCG	
	BE	S/P	BE	S/P	BE	S/P
1999	-	74.5%	-	77.9%	409	94.6%
2000	107	79.5%	129	77.6%	725	93.6%
2001	260	77.8%	344	74.3%	1 116	93.5%
2002	564	74.3%	540	56.5%	1 702	73.7%
2003	1 091	67.0%	883	49.9%	2 554	60.3%
2004	2 180	63.5%	1 628	52.6%	3 386	49.4%
2005	4 649	63.6%	2 919	58.0%	4 808	49.0%
2006	9 442	64.3%	3 834	46.2%	7 351	48.5%
2007	18 832	68.4%	6 084	50.4%	10 505	52.4%
2008	38 480	69.3%	13 930	72.8%	9 550	42.6%
Total	75 605	69.6%	30 290	60.1%	42 106	59.9%

Montants en m\$

Les ratios sinistres à primes étant assez erratiques d'un exercice de survenance à un autre (en particulier pour les segments « DAB Professionnels » et « RCG »), il est assez difficile soit de valider le montant de la charge ultime obtenu par l'application de la méthode Chain Ladder, soit de mettre en œuvre une méthode basée sur un ratio sinistres à primes attendu (Bornhuetter-Ferguson par exemple).

Nous présentons en Annexe E les triangles de liquidation complétés pour chaque développement futur, sur chacun des segments.

La valeur du montant Best estimate des provisions pour sinistres prenant en compte l'effet de l'actualisation est obtenue en appliquant à chaque paiement futur un facteur d'actualisation. La courbe des taux sans risque au 31.12.2008 et le calcul du montant escompté des provisions pour sinistres sont détaillés en Annexe E. On obtient les résultats suivants :

Montant BE des provisions pour sinistres - prise en compte de l'actualisation			
Segment	BE non actualisé	BE actualisé	Effet actualisation
RC Auto	75 605	72 204	4,5%
DAB Pro	30 290	28 945	4,4%
RCG	42 106	38 501	8,6%
Total	148 001	139 650	5,6%

Montants en m\$

L'effet de l'actualisation est d'autant plus important que le segment est à développement long.

En pratique, il faudrait compléter le montant Best estimate des provisions par un montant de frais de gestion des sinistres.

2. COMPARAISON DES METHODES USUELLES ET DE LEUR ADAPTATION A L'HORIZON 1 AN

Nous présentons dans ce paragraphe une analyse comparative de la mesure de volatilité dans les provisions pour sinistres, sur la base des méthodes stochastiques usuelles (vision « à l'ultime ») et de leur adaptation pour être conforme à l'horizon de un an fixé par le référentiel Solvabilité 2.

Le tableau ci-dessous synthétise les méthodes qui feront l'objet d'applications numériques :

Méthodes stochastiques analysées	
Méthodes usuelles Vision « à l'ultime »	Adaptation des méthodes Vision à un an
Mack	Wüthrich-Merz
GLM Poisson + Bootstrap GLM Gamma + Bootstrap Christophides + Bootstrap	Adaptation de la procédure Bootstrap – méthodes 1 et 2

Nous attacherons une attention particulière à l'analyse des résultats obtenus, ainsi qu'à la validation des hypothèses qui sous-tendent chacun des modèles.

Le corps du mémoire synthétise les résultats nécessaires à l'analyse et à l'interprétation de ces derniers. Des détails complémentaires sont présentés en Annexes.

2.1. Indicateurs de comparaison

Pour chacune des méthodes stochastiques usuelles, et son adaptation à horizon un an, nous nous concentrerons sur les mesures suivantes :

- Pour les méthodes « vision à l'ultime » :

✓ Le ratio $\frac{\text{écart - type de la distribution des provisions}}{BE \text{ des provisions}} = \frac{\hat{\sigma}_{ult}}{\hat{E}(R^I)}$.

Ce ratio est un indicateur de la volatilité de l'évaluation des provisions pour sinistres dans une vision liquidative totale.

- Pour les méthodes « vision à 1 an », un ratio de mesure « équivalente », à savoir $\frac{\hat{\sigma}_{1an}}{\hat{E}(R^I)}$:

✓ Dans le cadre de la procédure bootstrap, cela correspondra au ratio $\frac{\text{écart - type de la distribution de } \hat{CDR}(I+1)}{\hat{E}(R^I)}$,

✓ Dans le cadre de la méthode Merz et Wüthrich, cela correspondra au ratio $\frac{\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_t}(0)}}{\hat{E}(R^I)}$.

Ces ratios sont des indicateurs de la volatilité à un an de l'évaluation des provisions pour sinistres effectuée en date $t=0$.

2.2. Modèle Mack vs Modèle Wüthrich-Merz

Nous présentons dans cette partie les résultats donnés par le modèle de Mack (mesure « à l'ultime » de la volatilité) et le modèle de Merz et Wüthrich (mesure « à un an » de la volatilité).

Nous présentons dans un premier temps une analyse de la validité des hypothèses qui sous-tendent ces deux modèles, avant d'en présenter les principaux résultats et de les analyser.

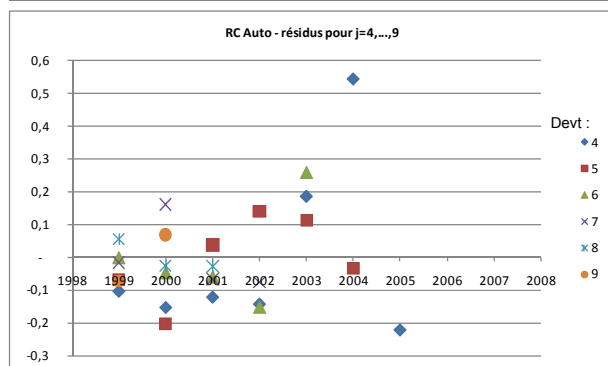
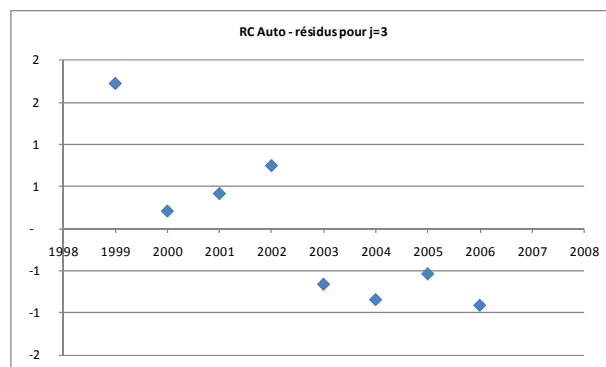
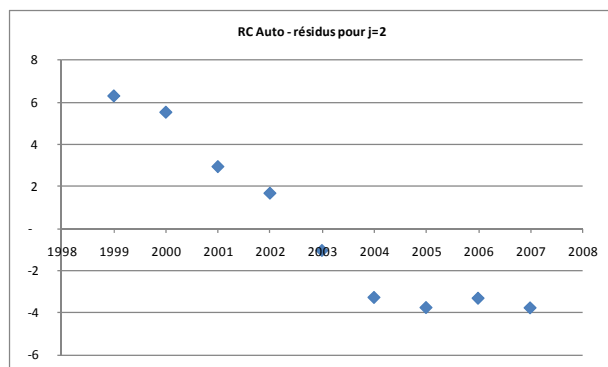
2.2.1. Validation des modèles

• Modèle Mack

Pour le modèle Mack, l'hypothèse (H2) stipulant que pour $j=1, \dots, n-1$, il existe un paramètre f_j tel que conditionnellement $E(C_{i,j+1} / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = f_j C_{ij}$ pour $i=1, \dots, n$, a été discutée lors de l'application de la méthode Chain Ladder.

L'hypothèse H3 (pour $j=1, \dots, n-1$, il existe un paramètre σ_j^2 tel que $V(C_{i,j+1} / C_{i1}, \dots, C_{ij}) = \sigma_j^2 C_{ij}$ pour $i=1, \dots, n$) peut être validée graphiquement : pour tout j fixé, le graphe des résidus $\frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j \cdot C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$, $i=1, \dots, n-j$, ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire.

Les graphiques suivants présentent, pour le segment « Auto RC », les résidus pour le premier développement, le second développement et pour les développements suivants :



On remarque que, pour le second développement, les résidus sont positifs pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs, et négatifs pour les exercices 2004 et ultérieurs. Il en va de même pour le 3^{ème} développement.

Pour le second développement, cela s'explique par le fait que les facteurs de développement individuels sont supérieurs à 1.74 pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs et inférieurs à 1.72 ensuite.

Pour le 3^{ème} développement, cela s'explique par le fait que les facteurs de développement individuels sont supérieurs à 1.19 pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs et inférieurs ensuite. Néanmoins, nous

avons jugé que cela ne nécessitait pas, dans le calcul de l'évaluation Best estimate des provisions, de retraitements des facteurs de développement individuels, les écarts étant relativement minimes.

L'hypothèse H3 ne semble donc pas parfaitement vérifiée pour $j=2$ et $j=3$.

Pour les développements suivants, aucune structure non aléatoire ne semble apparaître.

Les graphiques correspondants pour les segments « DAB Professionnels » et « RCG » sont présentés en Annexe F. Pour ces deux segments, l'hypothèse (H3) du modèle Mack ne semble pas parfaitement vérifiée pour certains développements.

En toute rigueur, il serait souhaitable alors d'appliquer le modèle Mack, pour certains développements, sur un sous-ensemble d'exercice de survenance. Cet exercice reste néanmoins délicat à mener sans une nécessaire compréhension préalable des données et des phénomènes de gestion pouvant expliquer les tendances observées.

• Modèle Wüthrich-Merz

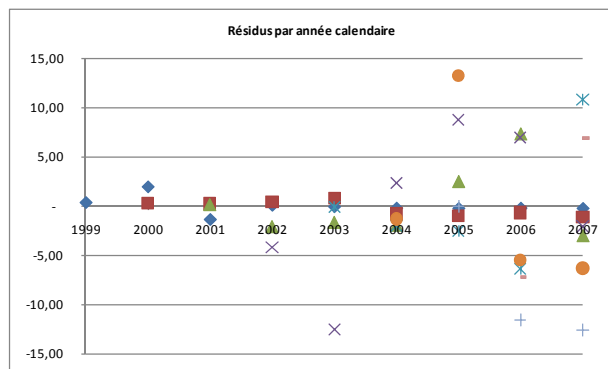
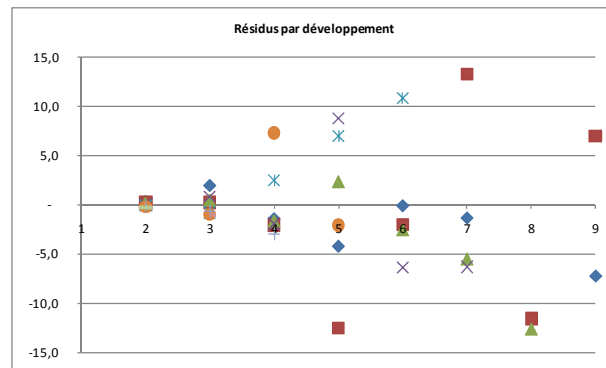
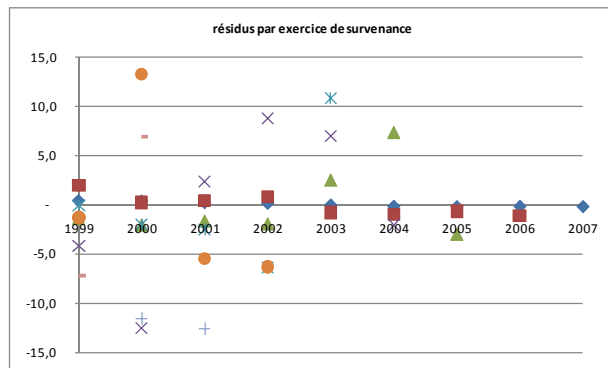
L'hypothèse que les observations du triangle supérieur suivent le processus dynamique défini dans le modèle de Merz et Wüthrich peut, partiellement, être validée graphiquement.

On doit avoir en effet :

$$P_{ij} = f_{j-1} P_{ij-1} + \sigma_{j-1} \sqrt{P_{ij-1}} \cdot \varepsilon_{ij}$$

Où, sachant $B_0 = \{P_{1,1}, \dots, P_{n,1}\}$ avec $P_{i,1} > 0$, les ε_{ij} sont des variables aléatoires indépendantes avec $E[\varepsilon_{ij} / B_0] = 0$, $E[\varepsilon_{ij}^2 / B_0] = 1$ et $P[P_{ij} > 0 / B_0] = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $2 \leq j \leq n$.

Nous allons donc représenter sur un graphique les résidus $e_{ij} = \frac{P_{ij} - \hat{f}_{j-1} P_{ij-1}}{\hat{\sigma}_{j-1} \sqrt{P_{ij-1}}}$, pour chacune des dimensions naturelles du triangle. Nous présentons ces graphiques pour le segment « RC Auto » :



Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

Il semble néanmoins que les résidus soient plus élevés au fur et à mesure des développements et des années calendaires. On a de plus $\frac{1}{n} \sum e_{ij} = -0.01$ et $\frac{1}{n} \sum e_{ij}^2 = 41.9$.

Les hypothèses du modèle ne semblent donc pas totalement vérifiées.

NB : le résidu $e_{1999,8} = 25.8$ n'est pas représenté pour des raisons de lisibilité des graphiques.

D'autre part, le test « up and down » (présenté en Annexe C) permet de ne pas rejeter l'hypothèse d'indépendance des résidus.

Les graphiques correspondant pour les segments « DAB Professionnels » et « RC Générale » sont présentés en Annexe G. Les hypothèses du modèle ne semblent pas totalement vérifiées sur le segment « DAB Pro » (pour les mêmes raisons que sur le segment « RC Auto »). En revanche, on n'observe pas de structure non aléatoire des résidus sur le segment « RC Générale ».

Comme pour le modèle de Mack, il serait souhaitable en toute rigueur d'appliquer le modèle de Merz et Wüthrich sur un sous-ensemble d'exercice de survenance. Cet exercice reste néanmoins délicat à mener sans une nécessaire compréhension préalable des données et des phénomènes de gestion pouvant expliquer les tendances observées. D'autre part, les hypothèses nous semblent « globalement » vérifiées.

2.2.2. Comparaison des erreurs de prédiction

Les tableaux suivants présentent, pour les trois segments étudiés :

- L'erreur de prédiction donnée par Mack, par exercice de survenance et au total, respectivement $\sqrt{ms\hat{e}p(\hat{R}_i)}$ et $\sqrt{ms\hat{e}p(\hat{R})}$,
- L'erreur de prédiction conditionnelle du CDR observable (modèle de Wüthrich-Merz) par exercice de survenance et au total, respectivement $\sqrt{m\hat{s}ep_{\hat{C}DR(I+1)/D_i}(0)}$ et $\sqrt{m\hat{s}ep_{\hat{C}DR(I+1)/D_i}(0)}$.

Ces deux grandeurs sont également exprimées en pourcentage de l'évaluation Best-Estimate des provisions en date t=0.

✓ Segment « RC Auto »

Erreurs de prédiction des modèles Mack et Wüthrich							
Exercices de survenance	BE des provisions	Mack				Wüthrich-Merz	
		Erreur d'estimation	Erreur de processus	SEP _{mack}	Ratio SEP _{mack} /BE	SEP _{wüthrich}	Ratio SEP _{wüthrich} /BE
2000	107	11	11	16	14.6%	16	14.6%
2001	260	21	26	33	12.8%	30	11.7%
2002	564	23	29	37	6.5%	19	3.4%
2003	1 091	26	39	47	4.3%	33	3.0%
2004	2 180	31	54	62	2.9%	44	2.0%
2005	4 649	35	63	72	1.5%	38	0.8%
2006	9 442	44	92	102	1.1%	74	0.8%
2007	18 832	100	254	273	1.5%	253	1.3%
2008	38 480	348	976	1 036	2.7%	1 000	2.6%
TOTAL	75 605			1 114	1.5%	1 058	1.4%

Montants en m\$

✓ **Segment « DAB Professionnels »**

Erreurs de prédiction des modèles Mack et Wüthrich							
Exercices de survenance	BE des provisions	Mack				Wüthrich-Merz	
		Erreur d'estimation	Erreur de processus	SEP _{mack}	Ratio SEP _{mack} /BE	SEP _{wüthrich}	Ratio SEP _{wüthrich} /BE
2000	129	4	4	6	4.5%	6	4.5%
2001	344	6	7	9	2.6%	8	2.2%
2002	540	5	7	9	1.7%	5	1.0%
2003	883	27	56	62	7.0%	61	7.0%
2004	1 628	75	161	178	10.9%	165	10.2%
2005	2 919	111	236	261	8.9%	182	6.2%
2006	3 834	101	237	258	6.7%	108	2.8%
2007	6 084	160	399	430	7.1%	335	5.5%
2008	13 930	476	1 125	1 221	8.8%	1 106	7.9%
TOTAL	30 290			1 454	4.8%	1 250	4.1%

Montants en m\$

✓ **Segment « RC Générale »**

Pour le segment « RC Générale », la présence d'un facteur de queue de développement ne permet pas de mettre en œuvre le modèle de Merz et Wüthrich.

Nous présentons dans le tableau suivant les résultats issus du modèle Mack en présence d'un facteur de queue de développement.

Erreurs de prédiction du modèle Mack					
Exercices de survenance	BE des provisions	Mack			
		Erreur d'estimation	Erreur de processus	SEP _{mack}	Ratio SEP _{mack} /BE
1999	409			12	2.9%
2000	725	55	55	82	11.3%
2001	1 116	71	79	112	10.0%
2002	1 702	99	135	175	10.3%
2003	2 554	138	228	278	10.9%
2004	3 386	211	426	494	14.6%
2005	4 808	247	529	607	12.6%
2006	7 351	304	651	748	10.2%
2007	10 505	384	849	970	9.2%
2008	9 550	398	1 149	1 263	13.2%
TOTAL	42 106			2 559	6.1%

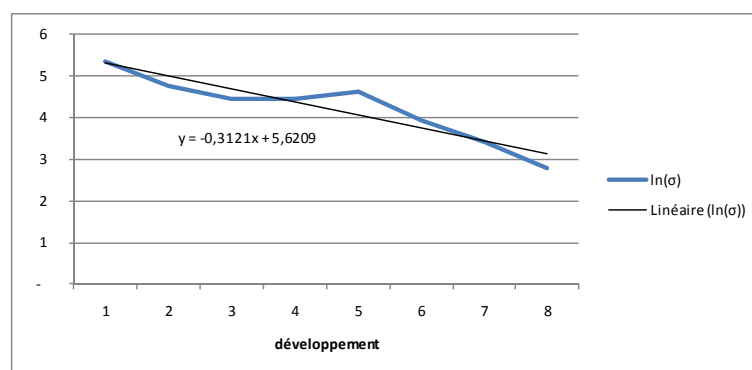
Montants en m\$

Nous avons suivi l'approche présentée dans le paragraphe 3.7.1 du Chapitre 2. L'erreur de prédiction est calculée en utilisant la formule réursive :

$$m\hat{s}e(\hat{R}_i) = \hat{P}_{in} \left(m\hat{s}e(F_{i,ult}) + m\hat{s}e(\hat{f}_{ult}) \right) + m\hat{s}e(\hat{P}_{in}) \hat{f}_{ult}^2 \text{ et}$$

$$m\hat{s}e\left(\sum_{i=n+1-k}^n \hat{P}_{i,k+1}\right) = m\hat{s}e\left(\sum_{i=n+2-k}^n \hat{P}_{i,k}\right) + \sum_{i=n+1-k}^n \hat{P}_{ik}^2 \cdot m\hat{s}e(F_{ik}) + \left(\sum_{i=n+1-k}^n \hat{P}_{ik}^2\right) \cdot m\hat{s}e(\hat{f}_k).$$

- $m\hat{s}e(\hat{f}_{ult}) = 3.8 \cdot 10^{-5}$ est obtenue par méthode delta (du fait que $\hat{f}_{ult}$ a été déterminé par régression linéaire),
- $\hat{\sigma}_{ult}^2$ est obtenu par régression : $\ln(\hat{\sigma}_k) = a + b.k + \varepsilon_k$.



On obtient $\hat{a} = 0.26$ $\hat{b} = -0.46$ et $R^2 = 0.91$.

On déduit ainsi les $\hat{\sigma}_k$, $n-1 \leq k \leq p$ où p correspond à l'horizon de projection utilisé dériver $\hat{f}_{ult}$.

$$\text{On en déduit } \hat{V}(F_{i,ult}) = \hat{f}_{ult}^2 \left(\prod_{k=n}^p \left(1 + \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k \cdot \hat{C}_{ik}} \right) \right),$$

$$\text{et } \hat{\sigma}_{ult}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \hat{V}(F_{k,ult}) \cdot \hat{P}_{kn} = 333.09.$$

Le tableau suivant présente les résultats avant prise en compte du facteur de queue de développement, afin de permettre une comparaison entre les modèles Mack et Wüthrich :

Erreurs de prédiction des modèles Mack et Wüthrich (non prise en compte du tail factor)							
Exercices de survenance	BE des provisions	Mack				Wüthrich-Merz	
		Erreur d'estimation	Erreur de processus	SEP _{mack}	Ratio SEP _{mack} /BE	SEP _{wüthrich}	Ratio SEP _{wüthrich} /BE
2000	319	55	55	77	24.3%	40	12.5%
2001	685	71	79	106	15.5%	72	10.4%
2002	1 247	99	135	167	13.4%	130	10.4%
2003	2 092	138	228	266	12.7%	212	10.1%
2004	2 943	211	426	476	16.2%	403	13.7%
2005	4 366	247	529	584	13.4%	352	8.1%
2006	6 865	304	651	719	10.5%	385	5.6%
2007	9 979	384	849	932	9.3%	566	5.7%
2008	9 156	398	1 149	1 216	13.3%	931	10.2%
TOTAL	37 652			2 305	6.1%	1 593	4.2%

Montants en m\$

Pour la méthode Mack, la prise en compte d'un facteur de queue de développement n'engendre pas d'augmentation du coefficient de variation (l'augmentation de $\hat{s}ep(\hat{R})$ étant similaire à l'augmentation du montant

de l'évaluation des provisions pour sinistres, avant et après prise en compte d'un facteur de queue de développement, soit environ 11%).

Des résultats complémentaires relatifs à la méthode Mack et Wüthrich-Merz sont présentés en Annexes F et G.

2.2.3. Analyse des résultats

Les tableaux présentés permettent de tirer les conclusions suivantes :

- Le montant Best estimate des provisions pour sinistres donné par la méthode Mack et la méthode Merz et Wüthrich coïncide avec le montant issu de la méthode Chain-Ladder. Cela est conforme avec les hypothèses qui sous-tendent ces modèles.
- On peut s'apercevoir que la volatilité donnée par le modèle de Mack est, pour les trois segments étudiés, supérieure à la volatilité donnée par le modèle de Merz et Wüthrich.

Pour les trois segments, on a bien $1 \gg a_j$, avec $a_j = \frac{(\hat{\sigma}_{I-i+1}^I)^2 / (\hat{f}_{I-i+1}^I)^2}{C_{I-i+1}^I}$. Nous avons montré

(cf. paragraphe 4.1.4 du Chapitre 3) que si cette condition était vérifiée, alors on avait :

$$\sqrt{m\hat{sep}_{mack}(\hat{R})} > \sqrt{m\hat{sep}_{CDR(I+1)/D_i}(0)}.$$

- L'écart entre la volatilité donnée par le modèle de Mack et la volatilité donnée par le modèle de Merz et Wüthrich est d'autant plus élevé que le segment est à développement long et irrégulier. Cela s'explique par le fait, que, pour les segments à développement très réguliers (dans notre exemple le segment « Auto RC » par exemple), l'incertitude au-delà de l'horizon d'un an est limitée, les développements individuels étant quasi-identiques quel que soit l'exercice de survenance.

2.3. Bootstrap « à l'ultime » vs Bootstrap à un an

Nous présentons dans cette partie les résultats donnés par la procédure bootstrap « classique » (mesure « à l'ultime » de la volatilité) et les deux adaptations proposées de cette procédure pour mesurer une volatilité à horizon un an.

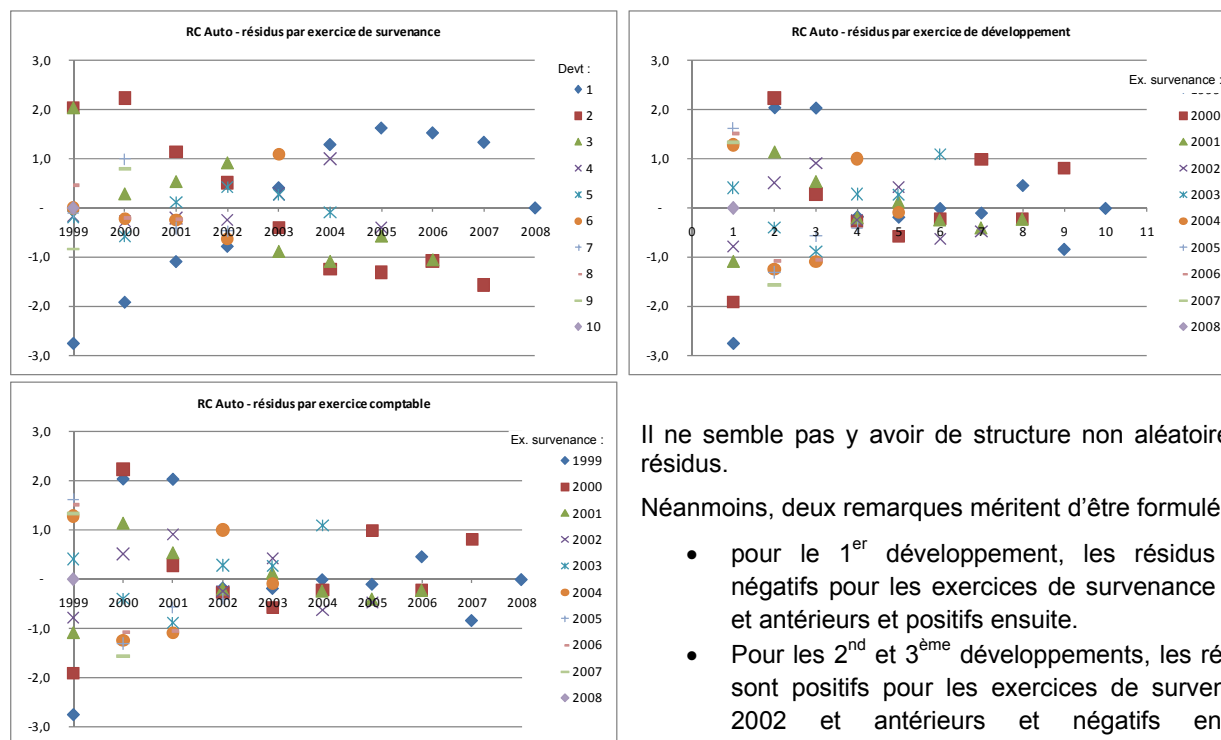
Nous présentons dans un premier temps une analyse de la validité des hypothèses qui sous-tendent ces deux modèles, avant d'en présenter les principaux résultats et de les analyser.

2.3.1. Validation des modèles

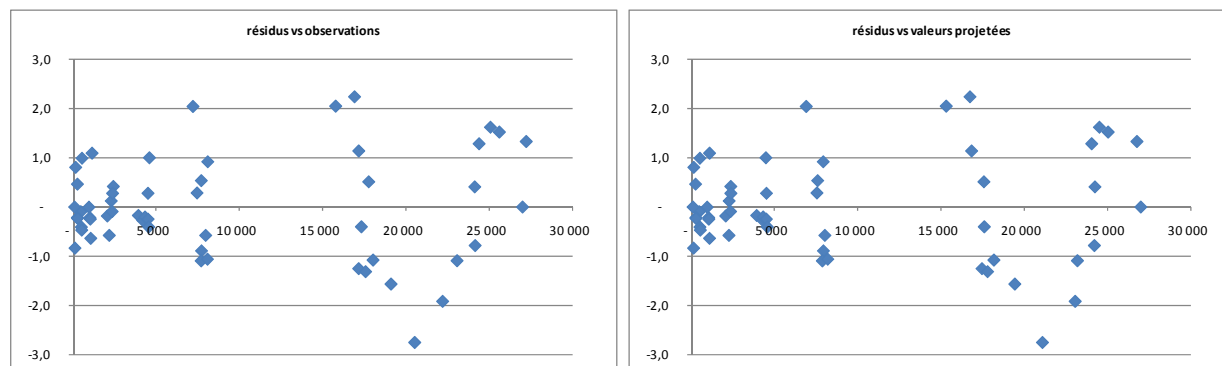
Nous avons notamment basé la validation des modèles sur l'observation des résidus :

- Représentation graphique des résidus de Pearson scalés et ajustés pour tenir compte du nombre de paramètres estimés ($\sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi} V(\hat{\mu}_{ij})}}$) selon les trois dimensions naturelles du triangle,
- Représentation graphique des résidus en fonction des valeurs observées et projetées par le modèle,
- Représentation graphique des valeurs observées et projetées par le modèle,
- Test d'indépendance des résidus de Pearson standardisés, sur la base du test « up and down ».

Dans le corps du rapport, nous présentons les résultats correspondant au modèle GLM Poisson (la loi utilisée pour prendre l'erreur de processus étant la loi gamma, afin d'éviter que les incréments générés soient tous des multiples du paramètre d'échelle – cf. paragraphe 3.5.2 du Chapitre 3). Les résultats correspondant aux modèles GLM-gamma et au modèle log-normal sont présentés en Annexes.

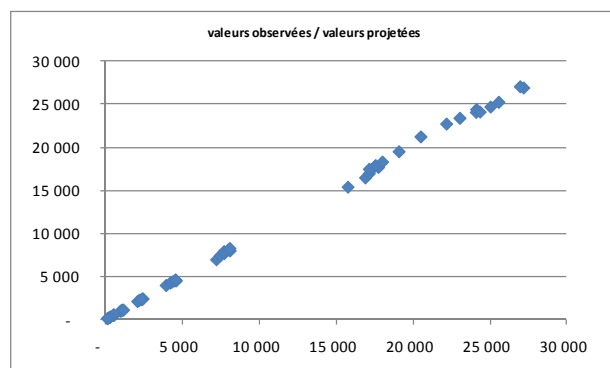


L'interprétation est la même que celle donnée dans le cadre du modèle Mack.



De même, il ne semble pas y avoir de structure non aléatoire des résidus en fonction des valeurs observées et projetées.

D'autre part, le test « up and down » valide l'hypothèse d'indépendance des résidus.



Les valeurs observées / projetées par le modèle sont elles aussi alignées sur une droite. Cela signifie que la variable aléatoire Y_{ij} est proche de son espérance. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait de l'utilisation de données agrégées (phénomène de « gommage » d'un certain nombre d'irrégularités dans les développements observés).

Les graphiques correspondants pour les segments « DAB Professionnels » et « RCG », ainsi que pour les autres modèles, sont présentés en Annexe H.

L'Annexe H présente également les paramètres estimés des modèles, ainsi que les tests de significativité des modalités des variables explicatives.

On notera les éléments suivants :

- L'examen des graphiques des résidus en fonction des dimensions du triangle, des valeurs observées et des valeurs estimées ne révèle pas de façon évidente de structure non aléatoire. Sur le segment « RC Auto » néanmoins, on notera que les résidus semblent d'autant plus faibles que les montants observés ou projetés sont grands.
- Les valeurs observées / projetées par le modèle sont elles aussi alignées sur une droite.
- Excepté le cas du segment « RCG » avec la loi Gamma et la loi log-normale, nous ne rejetons pas l'hypothèse du caractère indépendant des résidus pour l'ensemble des autres modèles.
- Les p-values associées au terme constant, et aux différentes modalités des variables explicatives sont :
 - ✓ inférieures à 5% quelque soit le modèle pour le segment « RC Auto », rejetant ainsi le test de nullité de ces coefficients
 - ✓ inférieures à 5% pour le modèle GLM Poisson et le modèle log-normal pour le segment « DAB Professionnels », et supérieures à 5% pour certaines modalités de la variable année de développement pour le modèle GLM Gamma,
 - ✓ inférieures à 5% pour le modèle GLM Poisson pour le segment « RCG », et supérieures à 5% pour certaines modalités de la variable année de développement pour les modèles GLM Gamma et le modèle log-normal.

Pour le segment « RC Auto », les critères sélectionnés amènent à considérer que les différents modèles testés présentent une qualité correcte. Le choix de la loi reste délicat à ce stade.

Pour le segment « DAB Professionnels », les critères sélectionnés amènent à considérer que les modèles GLM Poisson et log-normal présentent une qualité correcte. L'utilisation d'un modèle GLM Gamma amène en effet à ne pas rejeter l'hypothèse de nullité de certains coefficients.

Pour le segment « RCG », les critères sélectionnés amènent à considérer que le modèle GLM Poisson présente une qualité correcte. L'utilisation d'un modèle GLM Gamma ou d'un modèle log-normal amène en effet à ne pas rejeter l'hypothèse de nullité de certains coefficients. D'autre part, seule la loi de Poisson permet de ne pas rejeter l'hypothèse d'indépendance des résidus.

Nous présentons dans le paragraphe qui suit un autre critère permettant de sélectionner le « meilleur » modèle.

2.3.2. Choix du modèle

Dans le panorama des modèles GLM testés (GLM-Poisson, GLM-Gamma et GLM-Log-normal), il n'existe pas de critère unique permettant de sélectionner le « meilleur modèle ».

En sus des tests statistiques et des validations graphiques présentées ci-dessus, le premier critère est souvent de choisir le modèle qui amène à considérer le montant de provisions le plus proche de celui correspondant au Best estimate. En cela, le modèle de Poisson présente un avantage certain.

Il est également utile de s'intéresser au pouvoir prédictif du modèle, par une analyse de backtesting par exemple : quel est l'écart entre les valeurs prédites par le modèle et les valeurs réellement observées ?

Pour ce faire, nous avons estimé les paramètres du modèle sur chacun des triangles, en ne considérant pas la dernière diagonale. Cela permet de comparer l'écart entre les valeurs observées et les valeurs prédites par le modèle sur cette diagonale, et, par suite, de trouver un indicateur de comparaison des différents modèles. Nous

avons retenu comme indicateur : $\frac{\sum_{i=2}^{n-1} |y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}|}{\sum_{i=2}^{n-1} y_{ij}}$, $j = n - i + 1$.

Cette méthode s'inspire de celle proposée par M.Denuit et A.Charpentier⁴¹.

Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

Résultats des tests		
Segment	Modèle	Ecart
RC Auto	GLM-Poisson	3,17%
	GLM-Gamma	3,09%
	Christophides	3,11%
DAB Professionnels	GLM-Poisson	0,01%
	GLM-Gamma	0,01%
	Christophides	0,01%
RCG	GLM-Poisson	0,02%
	GLM-Gamma	0,02%
	Christophides	0,02%

Les modèles présentent tous des écarts entre le projeté et le réalisé très faibles, ce qui est satisfaisant.

D'autre part, ces deux seuls critères (choix du modèle donnant le montant le plus proche de l'évaluation Best estimate et analyse de backtesting) sont uniquement basés sur des résultats en espérance, alors qu'en fine, on cherche à estimer le risque de réserve, donc un quantile à 99.5%.

Le modèle poissonien, permettant d'assurer une convergence en termes de montant Best estimate des provisions, et d'obtenir les p-values relatives au test de significativité des modalités des variables explicatives les plus faibles, présente un avantage indéniable. L'erreur d'estimation est d'ailleurs, pour les trois segments, plus faible dans le cas du GLM Poisson. Ces éléments traduisent un meilleur « fit » du modèle GLM Poisson aux données des triangles.

Une pratique courante consiste néanmoins à utiliser le panel des méthodes dont on dispose et de retenir, parmi celles pour lesquelles les hypothèses de départ sont validées ou « globalement » validées, l'approche la plus conservatrice en termes de mesure du risque.

Par la suite, nous avons fait le choix de présenter les résultats obtenus avec l'ensemble des méthodes. Notre objectif s'inscrit en effet davantage dans la comparaison des mesures à l'ultime et à un an que dans la sélection du « meilleur » modèle.

⁴¹ Michel Denuit, Arthur Charpentier – Mathématique de l'assurance non-vie – Tome II : tarification et provisionnement - Economica

2.3.3. Mesure de volatilité

Les tableaux suivants présentent, pour les trois segments étudiés et les différents modèles (GLM Poisson, GLM Gamma et modèle log-normal) :

- L'écart-type de la distribution du montant des provisions pour sinistres, dans une approche « à l'ultime »,
- L'écart-type de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ donné par les deux adaptations proposées de la procédure bootstrap pour mesurer une volatilité à horizon un an.

L'écart-type de la distribution du montant des provisions pour sinistres, ainsi que l'écart-type de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ se déduisent des procédures décrites aux paragraphes 3.5.1, 4.2.2 et 4.3.2 du Chapitre 3.

Afin d'assurer une convergence des résultats, la procédure bootstrap a été réalisée sur la base de 50 000 simulations.

✓ Segment « RC Auto »

Résultats du bootstrap							
Modèle	BE des provisions	Bootstrap - vision ultime		Bootstrap - vision 1 an - méthode 1		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2	
		SEP _{bootstrap}	Ratio SEP _{bootstrap} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE
Poisson	75 605	943	1.2%	953	1.3%	674	0.9%
Gamma	75 475	1 906	2.5%	2 076	2.8%	1 297	1.7%
Log-normal	75 513	1 877	2.5%	2 082	2.8%	1 313	1.7%

Montants en m\$

✓ Segment « DAB Professionnels »

Résultats du bootstrap							
Modèle	BE des provisions	Bootstrap - vision ultime		Bootstrap - vision 1 an - méthode 1		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2	
		SEP _{bootstrap}	Ratio SEP _{bootstrap} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE
Poisson	30 290	1 537	5.1%	1 592	5.3%	1 120	3.7%
Gamma	30 193	2 205	7.3%	2 418	8.0%	1 502	5.0%
Log-normal	30 300	2 065	6.8%	2 505	8.3%	1 558	5.1%

Montants en m\$

✓ Segment « RCG »

Résultats du bootstrap							
Modèle	BE des provisions	Bootstrap - vision ultime		Bootstrap - vision 1 an - méthode 1		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2	
		SEP _{bootstrap}	Ratio SEP _{bootstrap} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio $\sigma_{\text{CDR}}/\text{BE}$	Ecart-type du CDR	Ratio $\sigma_{\text{CDR}}/\text{BE}$
Poisson	42 106	3 382	8.0%	3 526	8.4%	2 358	5.6%
Gamma	42 461	3 171	7.5%	3 258	7.7%	2 213	5.2%
Log-normal	42 643	3 239	7.6%	3 365	7.9%	2 266	5.3%

Montants en m\$

Pour le segment « RCG », un facteur de queue de développement a été pris en compte dans les différentes procédures bootstrap, tel qu'expliqué dans les paragraphes 3.7.2 et 4.3.3 du Chapitre 3.

Dans le cadre de la procédure à l'ultime, avec un modèle poissonien, et après tirage selon une loi lognormale, le facteur de queue de développement est en moyenne égal à 1.04 (ce montant est cohérent avec le facteur de queue de développement estimé dans le cadre de l'évaluation Best estimate des provisions). Le minimum est égal à 0.99 et le maximum est égal à 1.12. Le R^2 moyen de la régression, sur l'ensemble des simulations, est de 0.97.

Dans le cadre de la procédure à un an (méthode 2), le facteur de queue de développement est égal en moyenne à 1.04, avec un minimum de 1.02 et un maximum de 1.07. L'intervalle est plus réduit que dans le cas de la procédure à l'ultime. En effet, dans le cadre de la procédure à un an, il n'y a pas de tirage du facteur de queue de développement issu de l'extrapolation des facteurs de développements historiques « équivalents ». Le R^2 moyen de la régression, sur l'ensemble des simulations, est de 0.97.

Des résultats complémentaires sont présentés en Annexes H et I.

L'annexe H présente, pour l'ensemble des segments et des modèles, les résultats complémentaires suivants, pour la procédure bootstrap à l'ultime (méthode 2) :

- Le montant Best estimate des provisions estimé selon le modèle spécifié, par exercice de survenance et au total,
- L'erreur standard d'estimation, par exercice de survenance et au total. Ce montant correspond à l'écart-type de la distribution du montant des provisions, avant tirage selon la loi spécifiée,
- L'erreur standard de prédiction, par exercice de survenance et au total. Ce montant correspond à l'écart-type de la distribution du montant des provisions, après tirage selon la loi spécifiée,
- L'erreur de processus, par exercice de survenance et au total (par différence entre l'erreur de prédiction et l'erreur d'estimation)
- Le ratio $\frac{\text{erreur standard de prédiction}}{\text{BE des provisions}} = \frac{\hat{\sigma}_{\text{ult}}}{\hat{E}(R')}$, par exercice de survenance et au total,
- Le quantile à 99.5% de la distribution des provisions, par exercice de survenance et au total,
- La moyenne de la distribution des provisions donnée par la procédure bootstrap,
- L'erreur de prédiction issue de la méthode delta pour l'erreur d'estimation et de la forme analytique pour l'erreur de processus ($\sum_{i=1}^n \sum_{j>n-i+1} \text{Var}(\hat{\mu}_{ij})$).

L'annexe I présente, pour l'ensemble des segments et des modèles, les résultats complémentaires suivants, pour la procédure bootstrap à un an (méthode 2) :

- Le montant Best estimate des provisions estimé selon le modèle spécifié, par exercice de survenance et au total,
- Le quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date $t=1$, par exercice de survenance et au total,
- L'erreur standard de prédiction des paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$,
- L'erreur d'estimation du montant des provisions à la date $t=1$,
- La moyenne de la distribution des paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$,
- La moyenne de la distribution des provisions à la date $t=1$,
- La moyenne de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$,
- L'opposé du quantile à 0.5% de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$, correspondant au risque de réserve.

2.3.4. Analyse des résultats

Nous présentons dans ce paragraphe une analyse des principaux résultats obtenus par les différentes procédures bootstrap.

- **Volatilité à l'ultime vs volatilité à un an – méthode 1**

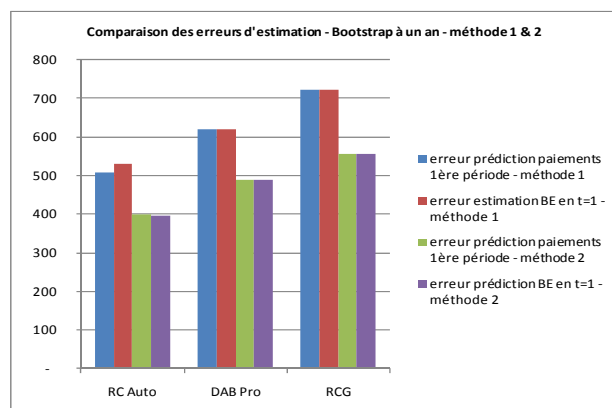
Les résultats de la première adaptation proposée du bootstrap amènent à considérer une volatilité à horizon un an supérieure à la volatilité à l'ultime.

Ce résultat, contre-intuitif, s'explique par les limites de cette procédure mises en exergue au paragraphe 4.2.3 du Chapitre 3.

En particulier, le fait :

- Que les réalisations de chaque pseudo-trapèze supérieur ne correspondent pas, par construction, à un échantillon constitué de variables aléatoires indépendantes,
- Que chaque boucle bootstrap nécessite deux ré-estimations du modèle statistique sous-jacent,

engendre une augmentation de l'erreur d'estimation du montant Best estimate des provisions en date $t=1$ et de l'erreur de prédiction relative au montant des paiements qui seront effectués entre $t=0$ et $t=1$.



Ce phénomène est illustré sur le graphique ci-contre. Pour les trois segments analysés, en se plaçant dans le cadre d'un modèle poissonien, ce graphique présente une comparaison entre les deux adaptations de la procédure bootstrap à un an :

- ✓ De l'erreur de prédiction relative au montant des paiements qui seront effectués entre $t=0$ et $t=1$,
- ✓ De l'erreur d'estimation du montant Best estimate des provisions en date $t=1$.

In fine, l'écart-type de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ est plus élevé que l'écart-type de la distribution du montant de provisions pour sinistres.

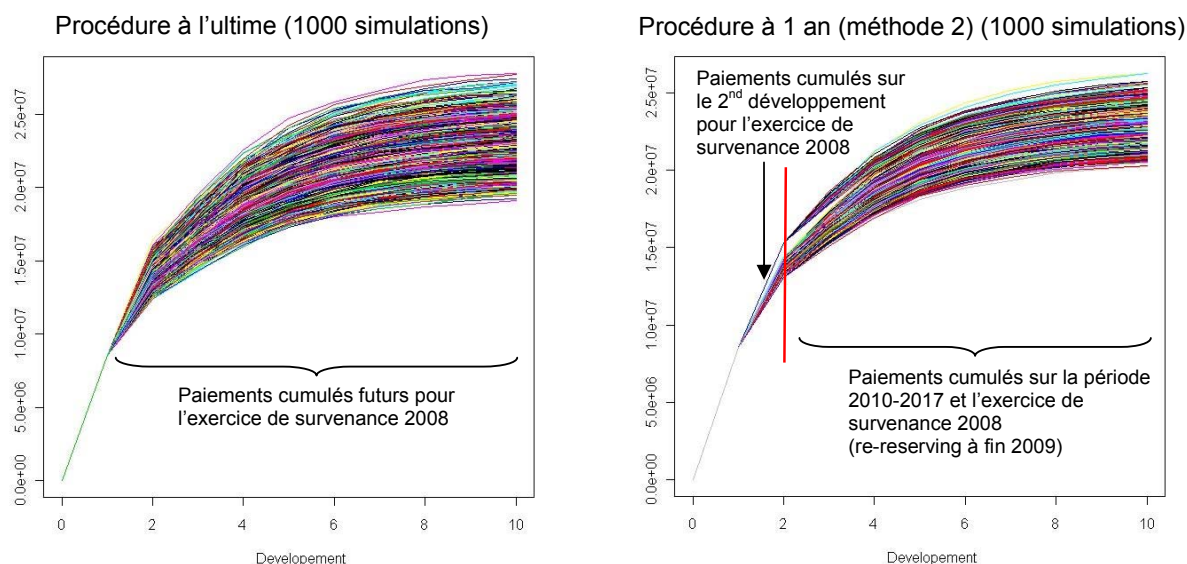
Etant données les limites énoncées concernant la première méthode relative à l'adaptation de la procédure bootstrap à horizon un an, nous ne nous étendrons pas davantage sur l'analyse des résultats.

• Volatilité à l'ultime vs volatilité à un an – méthode 2

Les résultats de la seconde adaptation proposée du bootstrap amènent à considérer une volatilité à horizon un an inférieure à la volatilité à l'ultime.

Ce résultat est assez intuitif et peut s'expliquer par le fait que dans la procédure à horizon un an, contrairement à la procédure à l'ultime, il n'y a pas d'erreur de processus qui est prise en compte pour les diagonales $[I+1 ; \dots]$, c'est-à-dire d'erreur de processus portée par les paiements effectués au-delà de la date $t=1$. Cela génère de facto une diminution de la volatilité.

Les graphiques suivants présentent, pour l'exercice de survénance 2008 du segment « DAB Professionnels », et sur la base d'un modèle poissonien, les trajectoires des paiements futurs dans le cadre de la procédure à l'ultime et dans le cadre de la procédure à un an.



Dans la procédure à un an, l'amplitude du faisceau correspondant aux paiements effectués au-delà de $t=1$ est moindre que dans la procédure à l'ultime, de fait de la non-prise en compte de l'erreur d'estimation.

Il est également intéressant de noter que, dans le cadre de la procédure à horizon un an, l'évaluation du montant Best estimate des provisions en date $t=1$ est effectuée à partir du trapèze D_{t+1} . Cette évaluation dépend donc notamment des paiements effectués entre la date $t=0$ et $t=1$.

L'Annexe J présente la matrice de corrélation entre les paiements futurs (triangle inférieur), pour le segment « DAB Professionnels » et le modèle poissonien. On observera que les corrélations sont plus élevées dans le cadre de la procédure à un an, en particulier entre éléments relatifs au même exercice de survénance ou relatifs au même développement. Ceci s'explique par la procédure d'évaluation du Best estimate en date $t=1$.

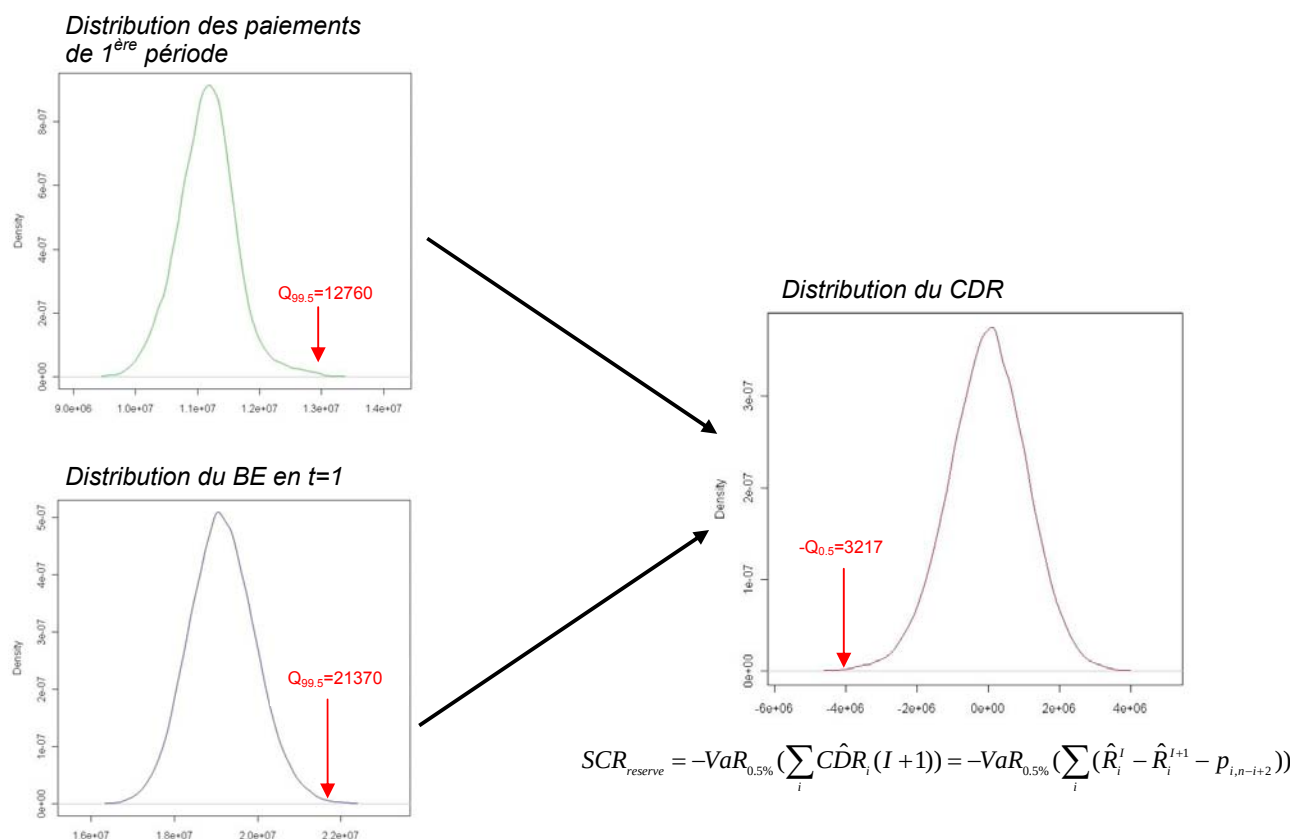
Au contraire, dans la procédure à l'ultime, les paiements effectués au-delà de la date $t=1$ ne dépendent pas du montant des paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$.

On notera également, que, dans le cadre de la méthode 1, les corrélations sont très élevées, en raison de la « double » ré-estimation du modèle statistique sous-jacent.

• **Distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ – paiements en Best estimate en date $t=1$**

Dans le cadre de la procédure à un an (méthode 2), la méthode bootstrap permet d'obtenir une distribution de $\hat{CDR}(I+1)$, mais également une distribution des paiements de première période ($\sum_{i=2}^n p_{i,n-i+2}$) et du montant des provisions pour sinistres en date $t=1$ ($\hat{R}^{I+1}$). Ceci peut s'avérer très utile dans le cadre de l'intégration de cette méthode dans un modèle interne.

Les graphiques suivants présentent les distributions obtenus sur le segment « DAB Professionnels » (le modèle sous-jacent étant le GLM-Poisson).



Pour le segment « DAB Professionnels », dans le cadre d'un modèle GLM Poisson, le coefficient de corrélation linéaire entre les paiements de première période et l'évaluation du Best estimate en date $t=1$ est de 45.5%.

Bien entendu, il n'y a pas de « correspondance » entre le quantile à 0.5% de $\hat{CDR}(I+1)$ et les quantiles de la distribution des paiements de première période et de la distribution des provisions en date $t=1$:

- ✓ Le quantile à 99.5% des paiements de première période correspond au quantile à 98.1% de l'évaluation des provisions en date $t=1$ et au quantile 0.38% du $\hat{CDR}(I+1)$,
- ✓ Le quantile à 0.5% de $\hat{CDR}(I+1)$ correspond quant à lui au quantile à 99.7% des paiements de première période et au quantile à 95.9% de l'évaluation des provisions en date $t=1$.

- **Management rules**

Comme précisé au paragraphe 4.3.4 du Chapitre 3, le modèle permettant d'évaluer le montant Best estimate des provisions en date $t=1$ pourrait tenir compte d'un ensemble de règles de décisions, afin de prendre en compte les normes de l'entreprise d'assurance en termes de politique de provisionnement.

Dans ce cadre, nous avons fixé arbitrairement les règles de décision suivantes :

- Sur le segment « DAB Professionnels », tout facteur de développement individuel supérieur aux facteurs fixés ci-dessous n'est pas pris en compte dans l'évaluation du montant Best estimate des provisions en date $t=1$:

Segment DAB Pro – règle de décision									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
facteurs de développement	1.90	1.25	1.15	1.11	1.07	1.05	1.03	1.02	1.01

- Sur le segment « RCG », tout facteur de développement individuel supérieur aux facteurs fixés ci-dessous n'est pas pris en compte dans l'évaluation du montant Best estimate des provisions en date $t=1$:

Segment RCG – règle de décision									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
facteurs de développement	2.30	1.75	1.40	1.25	1.20	1.15	1.10	1.05	1.05

Les tableaux suivants présentent les résultats tenant compte des ces « management rules » :

✓ **Segment « DAB Professionnels »**

Résultats du bootstrap							
Modèle	BE des provisions	Bootstrap - vision ultime		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2 avec management rules	
		SEP _{bootstrap}	Ratio SEP _{bootstrap} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE
Poisson	30 290	1 537	5.1%	1 120	3.7%	1 035	3.4%

Montants en m\$

✓ **Segment « RCG »**

Résultats du bootstrap							
Modèle	BE des provisions	Bootstrap - vision ultime		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2		Bootstrap - vision 1 an - méthode 2 avec management rules	
		SEP _{bootstrap}	Ratio SEP _{bootstrap} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE	Ecart-type du CDR	Ratio σ_{CDR} /BE
Poisson	42 106	3 382	8.0%	2 358	5.6%	2 236	5.3%

Montants en m\$

De façon intuitive, la prise en compte de « management rules » vient diminuer la volatilité du CDR, et par suite, le risque de réserve.

A titre d'illustration, sur le segment « DAB Professionnels », le coefficient de corrélation linéaire entre les paiements de première période et l'évaluation du Best estimate des provisions en date $t=1$ passe de 45.5% sans management rules à 41.9% avec management rules.

La prise en compte de ces managements rules est possible dans le cadre d'un modèle sous-jacent poissonien ; en effet, celui-ci amenant à considérer les mêmes résultats qu'un modèle Chain Ladder, il est alors possible d'utiliser la méthode Chain-Ladder pour estimer le montant Best estimate des provisions en date $t=1$, et par suite, de mettre en œuvre certaines adaptations de la méthode telle que l'exclusion de facteurs de développement individuels.

Pour le modèle GLM Poisson, la cadence étant très régulière, l'impact de la prise en compte de « management rules » n'est pas significatif.

- **Comparaison des modèles**

Pour les segments « RC Auto » et « DAB Professionnels », la volatilité issue du modèle GLM Poisson est plus faible que celle engendrée par un modèle GLM Gamma ou un modèle log-normal. Comme signalé au paragraphe 2.3.2 de ce Chapitre, l'erreur d'estimation est plus faible et les p-values relatives au test de significativité des modalités sont également plus faibles dans le cas d'un GLM Poisson.

La comparaison des volatilités issues de la procédure bootstrap et celles issues de la méthode Merz et Wüthrich est relativement complexe, étant donné que ces deux approches sont différentes. On observe néanmoins que les résultats obtenus par ces deux approches sont dans des ordres de grandeur relativement comparables.

3. MESURE DU RISQUE DE RESERVE

Nous présentons dans ce paragraphe une synthèse de la mesure de volatilité à horizon un an issue de l'application des différentes méthodes.

Nous présentons également une mesure du risque de réserve selon différentes approches :

- Approche formule standard, par application de la méthodologie et du calibrage des pré-spécifications du QIS5,
- Approche formule standard « entity specific », par application de la méthodologie des pré-spécifications du QIS5 et en utilisant le calibrage issue de l'application de la méthode Merz et Wüthrich.

Le coefficient de volatilité utilisé dans ce cadre est issu d'une pondération entre :

- ✓ le ratio $\frac{\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_t}(0)}}{\hat{R}^I}$ issu de la méthode Merz et Wüthrich,
- ✓ le coefficient de volatilité donné dans la formule standard.

$$\text{On a donc : } \sigma_{res, entity_specific} = c \cdot \frac{\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_t}(0)}}{\hat{R}^I} + (1-c) \cdot \sigma_{res, formule_standard}$$

Avec, compte tenu de l'historique de 10 ans dont on dispose, $c=74\%$ pour les segments « RC Auto » et « RCG » et $c=100\%$ pour le segment « DAB Professionnels ».

- Approche modèle interne. Dans ce cadre, le risque de réserve est égal à l'opposé du quantile à 0.5% de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$.
 - ✓ Pour la méthode Merz et Wüthrich, on supposera que le risque de réserve suit une loi log-normale, d'écart-type $\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_t}(0)}$ (cela revient à considérer une formule standard « entity specific » où le coefficient de crédibilité serait égal à 100%).
 - ✓ Dans le cadre de l'adaptation de la procédure bootstrap (méthode 2), la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ est directement obtenue par la méthode.

NB : Comme discuté au paragraphe 4.1.5 du Chapitre 3, le modèle proposé par Merz et Wüthrich ne permet pas d'obtenir directement un quantile de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$. D'autre part, supposer une normalité de la distribution du $\hat{CDR}(I+1)$ est une hypothèse relativement forte et peu conservatrice. Dans ce cadre, nous avons préféré retenir la méthodologie de la formule standard, calibrée en retenant la volatilité donnée par le modèle de Merz et Wüthrich.

Les tableaux suivants résument ces différentes grandeurs :

✓ **Segment « RC Auto »**

RC Auto - Risque de réserve		
Méthode	Coefficient volatilité	Risque de réserve
Formule standard	9.5%	20 513
Formule standard "entity specific"	3.5%	7 105
Wüthrich-Merz	1.4%	2 773
Bootstrap Poisson	0.9%	1 778
Bootstrap Gamma	1.7%	4 196
Bootstrap Christophides	1.7%	4 382

Montants en m\$

✓ **Segment « DAB Professionnels »**

DAB Professionnels - Risque de réserve		
Méthode	Coefficient volatilité	Risque de réserve
Formule standard	11.0%	9 665
Formule standard "entity specific"	4.1%	3 374
Wüthrich-Merz	4.1%	3 374
Bootstrap Poisson	3.7%	3 217
Bootstrap Gamma	5.0%	3 889
Bootstrap Christophides	5.1%	4 335

Montants en m\$

✓ **Segment « RCG »**

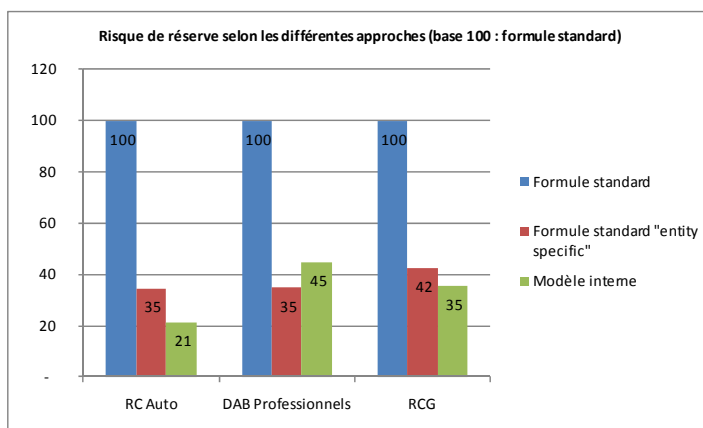
RCG - Risque de réserve		
Méthode	Coefficient volatilité	Risque de réserve
Formule standard	15.5%	19 814
Formule standard "entity specific"	7.2%	8 402
Wüthrich-Merz	4.2%	4 811
Bootstrap Poisson	5.6%	6 671
Bootstrap Gamma	5.2%	6 507
Bootstrap Christophides	5.3%	7 026

Montants en m\$

En retenant la méthode la plus conservatrice pour l'approche modèle interne, l'économie en termes de besoin en capital au titre du risque de réserve engendrée par l'utilisation de la formule standard « entity specific » ou d'un modèle interne est significative.

Néanmoins, ces résultats doivent être considérés avec prudence. En effet, les coefficients de volatilité issus de l'application des différents modèles stochastiques sont très faibles, du fait de l'utilisation de données agrégées à un niveau national, ceci ayant tendance à « gommer » un certain nombre d'irrégularités que l'on pourrait observer si l'on menait une analyse au niveau de chaque entreprise d'assurance.

Afin de mesurer de façon plus réaliste l'économie en termes de besoin en capital au titre du risque de réserve engendrée par l'utilisation de la formule standard « entity specific » ou d'un modèle interne, nous avons mené une étude sur la base d'un benchmark d'entreprises européennes.



4. BENCHMARK

Nous présentons dans ce paragraphe une mesure de volatilité à horizon un an et à horizon ultime, ainsi qu'une mesure du risque de réserve issue de l'application des différentes approches, sur un panel d'entreprises d'assurance européennes.

Ce panel est issu, pour les segments de risque « Automobile, Responsabilité Civile », « Automobile, Autres Branches », « Incendie et dommages aux biens » et « Responsabilité Civile », de différentes entreprises européennes.

- Toutes les tailles d'entreprises sont représentées : certaines entreprises sont des acteurs majeurs sur leur marché (appartenant au top 10 des entreprises d'assurance), d'autres des acteurs de taille moyenne (entre le top 10 et le top 20 des entreprises d'assurance), d'autres enfin ont des parts de marché beaucoup plus réduites (au-delà du top 20 des entreprises d'assurance),
- Les données utilisées correspondent à des triangles de paiements bruts de réassurance, nets de recours encaissés et n'incluant pas les frais de gestion non alloués,
- L'historique utilisé est de 10 ans.

4.1.1. Points d'attention

Nous présentons quelques points nécessitant une attention particulière lors la mise en œuvre opérationnelle des calculs.

Ces points n'avaient pas été mis en exergue lors des applications effectuées sur les données de marché américaines ; notamment, certaines irrégularités qui auraient pu être observées au niveau d'une entreprise d'assurance étaient « gommées » au niveau agrégé.

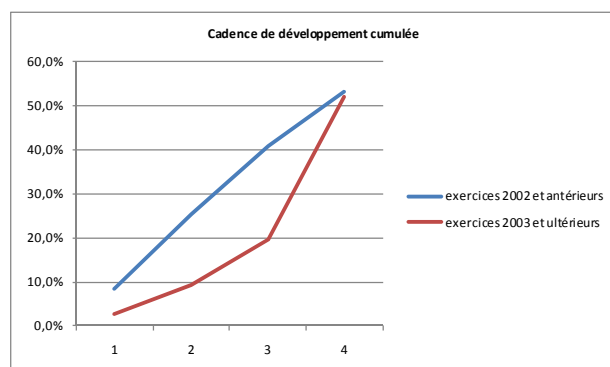
- **Paiements négatifs**

Le fait de travailler sur des données nettes de recours encaissés peut engendrer l'apparition de données négatives. Les lois utilisées étant à support positif, nous avons choisi de translater les incréments afin que ceux-ci soient tous positifs.

Nous supposons que les ratios $\left(\frac{\hat{\sigma}_{1an}}{\hat{E}(R^I)} \right)$ ou $\left(\frac{\hat{\sigma}_{ult}}{\hat{E}(R^I)} \right)$ évalués sur des données translatées restent identiques sur les données initiales. Il est difficile d'évaluer le biais engendré par cette approche.

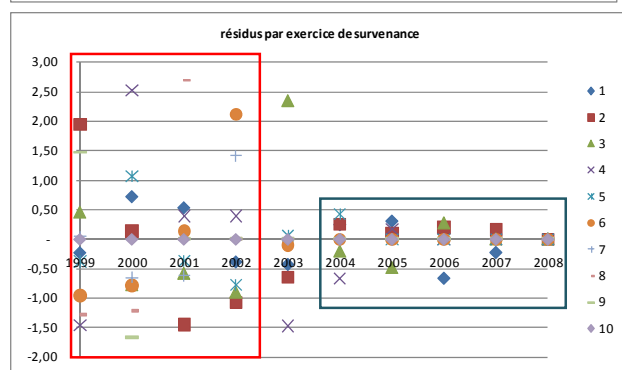
- **Modification de la cadence de développement**

Il est fréquent que la cadence de développement évolue au cours du temps.



A titre d'illustration, nous avons représenté la cadence de règlements cumulée pour les quatre premiers développements d'un portefeuille « Responsabilité Civile », d'une part pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs, d'autre part pour les exercices de survénance 2003 et ultérieurs. On observe un ralentissement de la cadence des paiements sur ces derniers exercices.

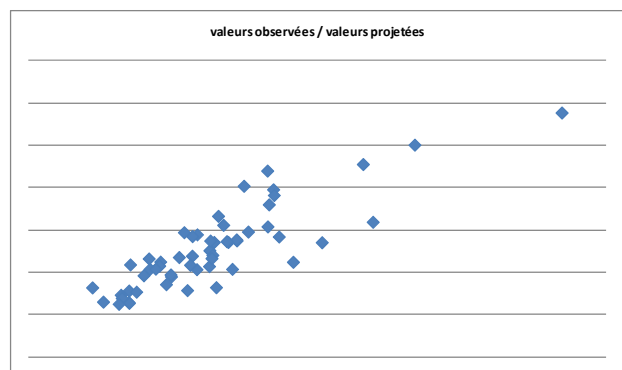
L'application d'un même modèle à l'ensemble des données aura tendance à engendrer une mauvaise adéquation du modèle.



A titre d'illustration, le graphique ci-contre présente les résidus de Pearson par exercice de survénance (modèle GLM Poisson). On remarque que les résidus sont élevés pour les exercices anciens.

Dans un modèle Mack ou un modèle Merz et Wüthrich, il est alors possible de ne retenir que la volatilité observée sur les exercices de survénance les plus récents.

Dans un modèle GLM, plusieurs possibilités sont envisageables : partitionnement des résidus lors la procédure bootstrap (on autorisera le ré-échantillonnage à l'intérieur d'une partition donnée), regroupement de modalités, prise en compte de deux sous-modèles.



Les valeurs observées et les valeurs projetées ne sont plus « aussi bien » alignés sur une droite que ne pouvaient l'être les valeurs issues des triangles du marché américain. Cela traduit la variabilité de la variable aléatoire Y_{ij} autour de son espérance.

4.1.2. Mesure de volatilité

Les graphiques suivants comparent

- Pour les méthodes « vision à l'ultime » :

✓ Méthode Mack : le ratio $\frac{\sqrt{m\hat{sep}(\hat{R})}}{\hat{E}(R^I)} = \frac{\hat{\sigma}_{ult}}{\hat{E}(R^I)}$.

✓ Procédure bootstrap : le ratio $\frac{\text{écart – type de la distribution des provisions}}{BE \text{ des provisions}} = \frac{\hat{\sigma}_{ult}}{\hat{E}(R^I)}$.

Ces ratios sont un indicateur de la volatilité de l'évaluation des provisions pour sinistres dans une vision liquidative totale.

- Pour les méthodes « vision à 1 an », un ratio de mesure « équivalente », à savoir $\frac{\hat{\sigma}_{1an}}{\hat{E}(R^I)}$:

✓ Dans le cadre de la méthode Merz et Wüthrich, cela correspondra au ratio $\frac{\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_I}(0)}}{\hat{E}(R^I)}$.

✓ Dans le cadre de la procédure bootstrap (méthode 2), cela correspondra au ratio $\frac{\text{écart – type de la distribution de } \hat{CDR}(I+1)}{\hat{E}(R^I)}$,

Ces ratios sont des indicateurs de la volatilité à un an de l'évaluation des provisions pour sinistres effectuée en date $t=0$.

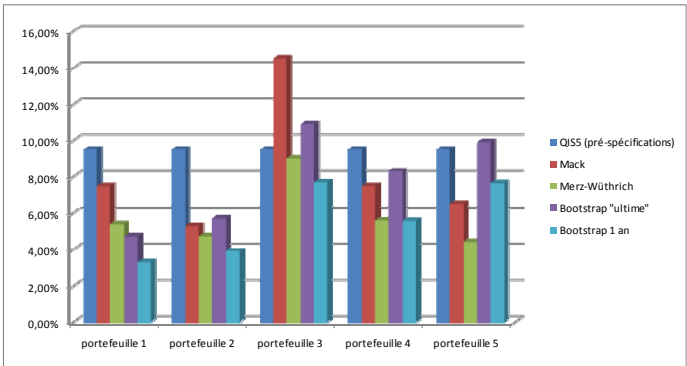
Ces différents ratios sont également comparés au coefficient de volatilité donné par les pré-spécifications du QIS5.

Pour la procédure bootstrap, le modèle sous-jacent est le modèle GLM Poisson.

Nous présentons également une mesure du risque de réserve selon différentes approches (base 100 : approche formule standard) :

- Approche formule standard, par application de la méthodologie et du calibrage des pré-spécifications du QIS5,
- Approche formule standard « entity specific », par application de la méthodologie des pré-spécifications du QIS5 et en utilisant le calibrage issue de l'application de la méthode Merz et Wüthrich.
- Approche modèle interne. Dans ce cadre, le risque de réserve est égal à l'opposé du quantile à 0.5% de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$.
 - ✓ Pour la méthode Merz et Wüthrich, on supposera que le risque de réserve suit une loi log-normale, d'écart-type $\sqrt{m\hat{sep}_{\hat{CDR}(I+1)/D_I}(0)}$ (cela revient à considérer une formule standard « entity specific » où le coefficient de crédibilité serait égal à 100%).
 - ✓ Dans le cadre de l'adaptation de la procédure bootstrap (méthode 2), la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$ est directement obtenue par la méthode.

• Benchmark RC Auto

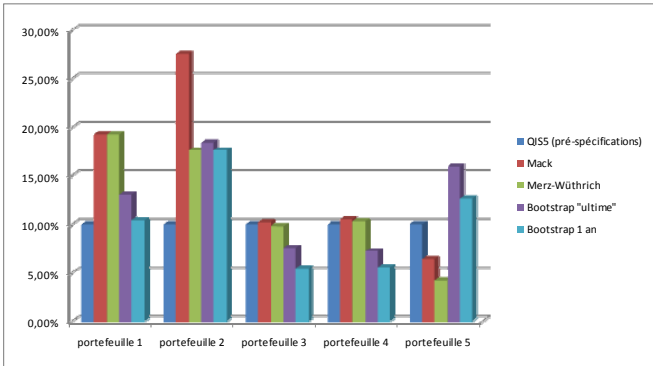


RC Auto - Risque de réserve		
	méthode	Risque de réserve
Portefeuille 1	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	66
	Wüthrich	54
	Bootstrap Poisson	31
Portefeuille 2	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	60
	Wüthrich	47
	Bootstrap Poisson	38
Portefeuille 3	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	96
	Wüthrich	94
	Bootstrap Poisson	62
Portefeuille 4	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	68
	Wüthrich	57
	Bootstrap Poisson	54
Portefeuille 5	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	58
	Wüthrich	44
	Bootstrap Poisson	79

Sur les 5 portefeuilles européens testés, on observe que la volatilité issue de la méthode Merz et Wüthrich et celle issue de l'adaptation de la procédure bootstrap à un an sont inférieures à la volatilité donnée par les pré-spécifications du QIS5, parfois de façon assez significative.

L'utilisation d'une formule standard « entity specific » ou d'un modèle interne engendre de fait une économie en termes de besoin en capital au titre du risque de réserve pouvant être significative (pouvant atteindre 69%).

• Benchmark Dommages Auto

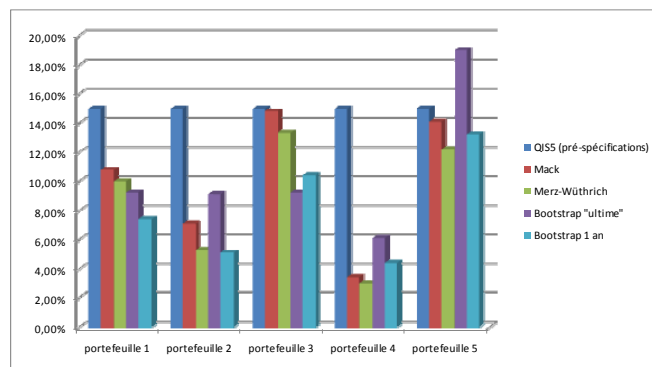


Dommages Auto - Risque de réserve		
	méthode	Risque de réserve
Portefeuille 1	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	211
	Wüthrich	211
	Bootstrap Poisson	158
Portefeuille 2	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	190
	Wüthrich	190
	Bootstrap Poisson	185
Portefeuille 3	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	98
	Wüthrich	98
	Bootstrap Poisson	45
Portefeuille 4	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	103
	Wüthrich	103
	Bootstrap Poisson	51
Portefeuille 5	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	40
	Wüthrich	40
	Bootstrap Poisson	137

Pour 4 des 5 portefeuilles européens testés, au moins l'une des méthodes Merz et Wüthrich ou bootstrap à horizon un an amène à considérer des coefficients de volatilité supérieurs au coefficient donné par les pré-spécifications du QIS5. Dans ce cas, l'utilisation de la formule standard peut s'avérer moins « couteuse » qu'une formule standard « entity specific » ou un modèle interne pour évaluer le risque de réserve.

Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que les montants de provisions pour sinistres sont souvent faibles sur ce segment, et qu'une légère irrégularité dans les données du triangle se traduit par un coefficient de volatilité élevé.

• Benchmark Dommages Aux Biens

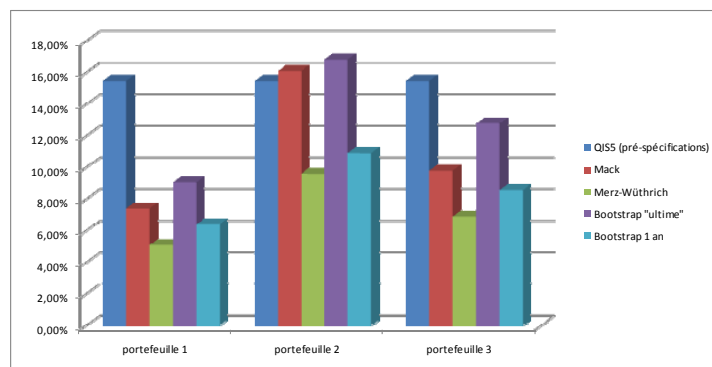


Dommages aux biens - Risque de réserve		
	méthode	Risque de réserve
Portefeuille 1	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	90
	Wüthrich	90
	Bootstrap Poisson	60
Portefeuille 2	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	45
	Wüthrich	45
	Bootstrap Poisson	47
Portefeuille 3	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	124
	Wüthrich	124
	Bootstrap Poisson	93
Portefeuille 4	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	25
	Wüthrich	25
	Bootstrap Poisson	37
Portefeuille 5	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	112
	Wüthrich	112
	Bootstrap Poisson	145

Sur les 5 portefeuilles européens testés, on observe que la volatilité issue de la méthode Merz et Wüthrich et celle issue de l'adaptation de la procédure bootstrap à un an sont inférieures à la volatilité donnée par les pré-spécifications du QIS5, parfois de façon assez significative.

L'utilisation d'une formule standard « entity specific » ou d'un modèle interne engendre de fait une économie en termes de besoin en capital au titre du risque de réserve pouvant être significative.

• Benchmark RC Générale



RCG - Risque de réserve		
	méthode	Risque de réserve
Portefeuille 1	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	47
	Wüthrich	30
	Bootstrap Poisson	36
Portefeuille 2	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	69
	Wüthrich	58
	Bootstrap Poisson	75
Portefeuille 3	Formule standard	100
	Formule standard "entity specific"	55
	Wüthrich	41
	Bootstrap Poisson	50

Sur les 3 portefeuilles européens testés, on observe que la volatilité issue de la méthode Merz et Wüthrich et celle issue de l'adaptation de la procédure bootstrap à un an sont inférieures à la volatilité donnée par les pré-spécifications du QIS5, parfois de façon assez significative.

L'utilisation d'une formule standard « entity specific » ou d'un modèle interne engendre de fait une économie en termes de besoin en capital au titre du risque de réserve significative (pouvant atteindre 70%).

D'autre part, sur l'ensemble des portefeuilles testés, la volatilité issue des méthodes « standards » à horizon ultime est plus élevée que la volatilité issue de l'adaptation des méthodes à horizon un an.

Il est difficile à ce jour de comparer les résultats issus de la méthode Merz et Wüthrich avec ceux issus de la procédure bootstrap à un an. Cette analyse reste à mener afin de comprendre les écarts parfois relativement importants constatés entre les deux méthodes.

Les écarts constatés avec le coefficient de volatilité donné dans les pré-sécifications techniques du QIS5 proviennent notamment du fait que ce dernier correspond à un coefficient « moyen », englobant la volatilité d'un ensemble de sous-risques distincts.

Par exemple, le coefficient de volatilité du segment « RC Générale » englobe des risques tels que « RC Professionnelle », « RC vie privée », etc potentiellement différents. Les portefeuilles constitutifs de notre panel sont des portefeuilles majoritairement composés de contrats « RC vie privée » (dont les développements sont a priori moins volatils que ceux des contrats « RC Professionnelle »).

Ceci illustre bien le fait que les coefficients donnés par la formule standard peuvent ne pas être adaptés au profil de risque de l'entreprise d'assurance. Ceci incite d'ailleurs beaucoup d'entreprises d'assurance à s'orienter vers une formule standard « entity specific » ou un modèle interne pour évaluer le risque de souscription non-vie.

Pour une entreprise d'assurance, le choix entre l'utilisation d'une formule standard « entity specific » et l'utilisation d'un modèle interne pour évaluer le risque de réserve repose notamment sur l'analyse de son programme de réassurance (la formule standard « entity specific » appréhendant mal la réassurance non proportionnelle), et le coût de développement d'un modèle.

CONCLUSION ET PROLONGEMENTS

Dans le cadre du nouveau régime prudentiel Solvabilité 2, le risque de réserve est l'un des risques majeurs pour les entreprises d'assurance non-vie. Il concerne en effet le risque de perte, ou de changement défavorable de la valeur des engagements d'assurance, résultant de fluctuations affectant la date et le montant des règlements de sinistres survenus à la date d'évaluation. D'autre part, le risque doit être évalué avec un horizon de temps égal à un an. La mesure de la volatilité à horizon un an dans les provisions pour sinistres nécessite une adaptation des méthodes de provisionnement stochastiques « standards » permettant de mesurer une volatilité à l'ultime.

Dans le cadre de la formule standard, le calibrage est donné, et il n'est donc pas nécessaire de recourir à des modèles sophistiqués de mesure de la volatilité dans les provisions pour sinistres.

Néanmoins, l'utilisation d'une approche formule standard « entity specific » ou d'un modèle interne peut engendrer une économie significative en termes de besoin en capital au titre du risque de réserve. Dans le cadre de la formule standard « entity specific », le modèle proposé par M.Merz et M.Wüthrich, ou le recours à approche rétrospective sont les méthodes candidates pour mesurer la volatilité à horizon un an dans les provisions pour sinistres.

Nous avons proposé dans le cadre de ce mémoire une approche alternative au modèle proposé par M.Merz et M.Wüthrich, consistant en une adaptation de la procédure bootstrap « standard » permettant une mesure de la volatilité à horizon un an.

Par rapport à la méthode de M.Merz et M.Wüthrich, notre adaptation de la procédure bootstrap présente de nombreux avantages. Dans le cadre d'un modèle interne notamment, elle permet d'obtenir une distribution des paiements qui seront effectués l'année à venir et une distribution du montant Best estimate des provisions pour sinistres en date $t=1$. Un autre avantage réside dans la possibilité d'adapter facilement la méthode proposée afin de mesurer une volatilité à horizon K années du montant des provisions pour sinistres à payer évalué en date $t=0$. Cela peut s'avérer très utile, par exemple dans le cadre de l'ORSA. Beaucoup d'acteurs du marché militent d'ailleurs pour que des méthodes simulatoires soient proposées par les instances européennes comme méthodes candidates pour le calibrage « entity specific ».

Plusieurs axes pourraient compléter l'étude présentée dans ce mémoire.

En premier lieu, une analyse de la théorie sous-jacente au modèle de M.Merz et M.Wüthrich et à la procédure Bootstrap reste à mener, en vue de permettre une analyse des écarts obtenus entre les deux modèles sur certains segments.

D'autre part, dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à une vision « stand-alone », sans tenir compte d'un effet diversification entre segments de risque. Néanmoins, de nombreux assureurs sont conduits à modéliser les dépendances entre branches et entités au sein de leur modèle interne. Un des axes de développement serait de concevoir des méthodes généralisant l'approche du Bootstrap sur les résidus de Pearson en situation de dépendance. La modélisation de la corrélation entre les résidus de Pearson de chacun des triangles correspondant aux différents segments de risque à l'aide d'une copule unique C serait une possibilité envisageable.

Enfin, dans le cadre d'un modèle interne, le risque de réserve pourrait être modélisé conjointement avec d'autres risques. Il faudrait alors dans ce cas identifier les liens avec les autres risques (le risque de primes notamment) et les modéliser au sein du modèle.

BIBLIOGRAPHIE

- Textes réglementaires

Site du CEIOPS : <http://www.ceiops.org/>

Spécifications techniques des QIS : <http://www.ceiops.eu/content/view/118/124/>.

Final Advice relatifs aux mesures d'exécution de niveau 2 : <http://www.ceiops.eu/content/view/706/329/>.

Consultation Papers relatifs aux mesures d'exécution de niveau 2 : <http://www.ceiops.eu/content/view/14/18/>.

Directive européenne Solvabilité 2 : DIRECTIVE 2009/138/CE DU PARLEMENT EUROPÉEN ET DU CONSEIL du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II) (refonte) (Texte présentant de l'intérêt pour l'EEE).

- Articles

Chambers J. M. et Hastie T. J. *Statistical models in S*, 1992. Chapman and Hall, London.

Green P. J. et Silverman B. W. *Nonparametric regression and generalized linear models*, 1994. Chapman and Hall, London.

England P. D. et Verrall R. J. *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*, 1999. *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 281-293.

England P. D. Addendum to 'Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving', 2001. *Actuarial Research Paper No. 138*, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London, EC1V 0HB.

England P. D. et Verrall R. J. *A flexible framework for stochastic claims Reserving*, 2001. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*.

England P. D. et Verrall R. J. *Stochastic claims reserving in general insurance*, 2002. *Institute of Actuaries*.

Mack T. *Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates*, 1993. *ASTIN Bulletin*, 23, 213-225.

Mack T. *The standard error of chain-ladder reserve estimates : recursive calculation and inclusion of a tail factor*, 1999. *ASTIN Bulletin*, 29, 361-366.

Mack T. *Which stochastic model is underlying the chain-ladder model ?*, 1994. *Insurance: Mathematics and Economics*, 15, 133-138.

Mack T. *Measuring the variability of chain-ladder reserve estimates*, 1994. *Casualty Actuarial Society, Spring Forum*.

Mack T. et Venter G. *A comparison of stochastic models that reproduce chain-ladder reserve estimates*, 2000. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, 101-107.

Partrat C., Pey N. et Schilling J. *Delta method and Reserving*, 2005. *Astin Colloq.*, Zurich.

Pinheiro P., Andrade e Silva J., et Centeno M. *Bootstrap methodology in claim reserving*, 2001. *Astin Colloq.*, Washington.

Renshaw A. E. et Verrall R. J. *A stochastic model underlying the chain-ladder Technique*, 1998. *B.A.J.* 4, 903-923.

Renshaw A. E. *On the second Moment Properties and the implementation of certain GLIM Based Stochastic Claims Reserving Models*, 1994. *Actuarial Research Paper No. 65*. City University, London.

Verrall R. J. *An investigation into stochastic claims reserving models and the chain-ladder technique*, 2000. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, 91-99.

Christophides S *Regression models based on log-incremental payments*, 1997, *Faculty and Institute of Actuaries, Claims Reserving Manual v.2, Section D5*.

Verrall, R. J. *On the estimation of reserves from loglinear models*, 1991, *Mathematics and Economics* 10, 75-80.

Merz M, Wüthrich M. *Prediction error of the expected claims development result in the Chain Ladder method*, 2007, *Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung*.

Merz M, Wüthrich M. *Modelling the claims development result for solvency purposes*, 2008, *Casualty Actuarial Society E-Forum*.

Merz M, Wüthrich M., Lysenko N. *Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method*, 2008, *Scandinavian Actuarial Journal*, ISSN 0346-1238.

Buchwalder M., Bühlman H., Merz M, Wüthrich M. : *The mean square error prediction in the Chain Ladder reserving method (Mack and Murphy revisited)*, 2006, *Astin Bulletin* 36 (2), 521-542.

Mack T., Quarg G., Braun C. *The mean square error prediction in the Chain Ladder reserving method – a comment*, 2006, *Astin Bulletin* 36 (2), 543-552.

Buchwalder M., Bühlman H., Merz M, Wüthrich M. : *The mean square error prediction in the Chain Ladder reserving method – fina remark*, 2006, *Astin Bulletin* 36 (2), 553.

- **Mémoires d'actuariat**

Lacoume A. *Mesure du risque de réserve sur un horizon de un an*, 2008, *ISFA*.

Bonnefoi A. *Méthodes de provisionnement en assurance non-vie*, 2003. *ISUP*.

Bonnet C., Gilbert O. *Etude des branches Dommages et Responsabilité Civile d'AXA Global Risks, Allocation de Fonds propres*, 1999. *ENSAE*.

Raymond M. *Le calcul des Provisions pour Sinistres A Payer – Approches Stochastiques*, 2001. *CEA*.

Charpenel C. *Le projet de directive européenne sur la solvabilité des compagnies d'assurance Solvency 2 – Etude d'impact sur le marché de l'assurance vie*, 2006. *ISFA*.

Damas V. *Modélisation dynamique du bilan d'une compagnie d'assurance non-vie*, 2003. *ENSAE*.

Amouch, L. *Projet de directive européenne sur la solvabilité des compagnies d'assurance : Modélisation d'une compagnie d'assurance non-vie*, 2006. *ISUP*.

Lheureux E. *Une méthode alternative de provisionnement stochastique en Assurance Non Vie : Les Modèles Additifs Généralisés*, 2005. *ISUP*.

- **Cours d'actuariat**

Partrat, C. *Evaluation de la provision pour sinistre à payer*. *ISFA, Université Claude Bernard*.

Partrat, C. *Modèles linéaires*. *ISFA, Université Claude Bernard*.

Devineau, L. *Provisionnement non-vie : méthodes déterministes*. *ISFA, Université Claude Bernard*.

Devineau, L. *Provisionnement non-vie : méthodes stochastiques*. *ISFA, Université Claude Bernard*.

Schmidt K.D. *Modèles et méthodes de réservation – petit cours donné à l'université de Strasbourg*, 2003.

- **Ouvrages**

Besson J. L., Partrat C. *Assurance Non Vie*, 2005, Economica.

Denuit M., Charpentier A. *Mathématiques de l'assurance non-vie – Tome I : principes fondamentaux de théorie du risque*, 2005, Economica.

Denuit M., Charpentier A. *Mathématiques de l'assurance non-vie – Tome II : tarification et provisionnement*, 2005, Economica.

Planchet F., Jacquemin J., Therond P. *Modèles financiers et analyses de risques dynamiques en assurance*, 2005, Economica.

Tosetti A., Behar T., Fromenteau M., Ménart S. *Assurance: comptabilité, réglementation et actuariat*, 2002, Economica.

Partrat C., Besson J.L. *Assurance non-vie. Modélisation, simulation*, 2005, Economica.

McCullagh, P., J.A. Nelder *Generalized Linear Models*, 1989, Chapman and Hall: London.

- **Autres documents**

Commission européenne *Conception d'un futur système de contrôle prudentiel applicable dans l'Union Européenne - Recommandations des services de la Commission*, Mars 2003.

Document de travail des services de la Commission *Document accompagnant la Proposition de directive du Parlement Européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance directe et de la réassurance et leur exercice - SOLVABILITÉ II RÉSUMÉ DE L'ANALYSE D'IMPACT*

FFSA *Consolidation QIS4*, Bureau Ecofin, 2008.

ACAM, Banque de France *Evolutions récentes de la structure des placements des assureurs*, 2009.

ACAM *Principaux enseignements de la quatrième étude quantitative d'impact (QIS4)*, 2008.

Milliman *Solvabilité II : Problématiques et enjeux des nouvelles exigences réglementaires pour les assureurs non-vie*, 2010.

Deloitte *Uncertainty in short-term claims development*, GIRO 2008.

ROC/GIRO Working Party *Best Estimates and Reserving Uncertainty*, 2007.

Swiss Re *Provisionnement des sinistres en assurance de dommages : progresser sur un sujet stratégique*, Sigma n°2, 2008.

AISAM-ACME study on non-life long tail liabilities *Reserve risk and risk margin assessment under Solvency II*, 2007.

Angoua Y. *Développement d'un outil du calcul du risque de reserve – rapport de stage*, 2010, ENSAE.

Dr rer. nat. Dorothea Diers *Stochastic re-reserving in multi-year internal models – an approach based on simulations*, Provinzial NordWest Holding AG in cooperation with Ulm University.

Pitrebois S., De Longueville P., Denuit M., Walhin J.F. *Etude de techniques IBNR modernes*.

Pantzoupoulou E. *The Concept of Reserving And Reserving Methodologies in General Insurance*, 2003, A dissertation submitted for the award of the degree of Master of Science in Actuarial Management Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.

ANNEXE A : LES MODELES GLM

L'objet de cette annexe est d'introduire le cadre théorique global permettant de regrouper tous les modèles (linéaire gaussien, logit, log-linéaire) qui cherchent à exprimer l'espérance d'une variable réponse Y en fonction d'une combinaison linéaire des variables explicatives. Le modèle linéaire généralisé n'est ici qu'esquissé afin de définir les concepts communs à ces modèles : famille exponentielle, estimation par maximum de vraisemblance, tests, diagnostics, résidus.

1. Composantes des modèles

Les modèles catalogués dans la classe des modèles linéaires généralisés sont caractérisés par trois composantes.

1.1. Distribution

La composante aléatoire identifie la distribution de probabilités de la variable à expliquer. On suppose que l'échantillon statistique est constitué de n variables aléatoires $\{Y_i; i=1, \dots, n\}$ indépendantes admettant des distributions issues d'une même structure exponentielle. Cela signifie que les lois de ces variables sont dominées par une même mesure dite de référence et que la famille de leurs densités par rapport à cette mesure se met sous la forme :

$$f(y_i; \theta_i; \phi) = \exp \left\{ \frac{y_i \theta_i - \nu(\theta_i)}{u(\phi)} + w(y_i; \phi) \right\}.$$

Cette formalisation inclut la plupart des lois usuelles comportant un ou deux paramètres : gaussienne, gaussienne inverse, gamma, poisson, binomiale, ... Le paramètre θ_i est appelé paramètre naturel de la famille exponentielle.

Pour certaines lois, la fonction u est de la forme :

$$u(\phi) = \frac{\theta}{\omega_i}$$

où les poids ω_i sont les poids connus des observations, fixés ici à 1 pour simplifier; ϕ est appelé alors paramètre de dispersion, c'est un paramètre de nuisance intervenant, par exemple, lorsque la variance des lois gaussiennes sont inconnues, mais égal à 1 pour les lois à un paramètre (Poisson, binomiale). L'expression de la structure exponentielle (1) se met alors sous la forme canonique en posant :

$$Q(\theta) = \frac{\theta}{\phi},$$

$$a(\theta) = \exp \left\{ -\frac{\nu(\theta)}{\phi} \right\},$$

$$b(y_i) = \exp\{\omega(y_i, \theta)\},$$

On obtient :

$$f(y_i; \theta_i) = a(\theta_i) \cdot b(y_i) \cdot \exp\{y_i \cdot Q(\theta_i)\}$$

1.2. Prédicteur linéaire

Les observations planifiées de p variables explicatives sont organisées dans la matrice $\mathbf{X}$ de planification d'expérience (design matrix). Soit β un vecteur de p paramètres, le prédicteur linéaire, composante déterministe du modèle, est le vecteur à n composantes :

$$\eta = \mathbf{X} \cdot \beta$$

1.3. Lien

La troisième composante exprime une relation fonctionnelle entre la composante aléatoire et le prédicteur linéaire. Soit $\{\mu_i = E(Y_i; i = 1, \dots, n)\}$, on pose :

$$\eta_i = g(\mu_i) \quad i = 1, \dots, n$$

où g , appelée fonction lien, est supposée monotone et différentiable. Ceci revient donc à écrire qu'une fonction de la moyenne appartient au sous-espace engendré par les variables explicatives :

$$g(\mu_i) = x_i' \beta \quad i = 1, \dots, n$$

La fonction lien qui associe la moyenne μ_i au paramètre naturel est appelée fonction lien canonique.

$$g(\mu_i) = \theta_i = x_i' \beta$$

1.4. Exemples

Loi gaussienne

Dans le cas d'un échantillon gaussien, les densités d'une famille de lois $\mathbf{N}(\mu_i, \sigma)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(y_i; \mu_i) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\mu_i^2}{\sigma^2}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)\right\} \exp\left\{-y_i \frac{\mu_i}{\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

En posant :

$$Q(\theta_i) = \frac{\theta_i}{\phi} = \frac{\mu_i}{\sigma^2},$$

$$a(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\mu_i^2}{\sigma^2}\right\},$$

$$b(y_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2)\right\} \exp\left\{-y_i \frac{\mu_i}{\sigma^2}\right\},$$

la famille gaussienne se met sous la forme canonique (2) qui en fait une famille exponentielle de paramètre de dispersion $\phi = \sigma^2$ et de paramètre naturel

$$\theta_i = (Y_i) = \mu_i$$

et donc de fonction lien canonique, la fonction identité.

Loi de Bernouilli

Considérons n variables binaires aléatoires indépendantes Z_i de probabilité de succès π_i et donc d'espérance $E(Z_i) = \pi_i$. Les fonctions de densité de ces variables sont éléments de la famille :

$$f(y_i; \pi_i) = \pi_i^{z_i} (1 - \pi_i)^{1-z_i} = (1 - \pi_i) \exp\left\{z_i \ln \frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right\}$$

qui est la forme canonique d'une structure exponentielle de paramètre naturel

$$\theta_i = \ln \frac{\pi_i}{1 - \pi_i}.$$

Cette relation définit la fonction logit pour fonction lien canonique associée à ce modèle. La loi binomiale conduit à des résultats identiques en considérant les sommes de n_i (n_i connus) variables de Bernouilli.

Loi de Poisson

On considère n variables indépendantes Y_i de loi de Poisson de paramètre $\mu_i = E(Y_i)$. Les Y_i sont par exemple les effectifs d'une table de contingence. Ces variables admettent pour densités :

$$f(y_i; \mu_i) = \frac{\mu_i^{y_i} e^{-\mu_i}}{y_i!} = \exp\{-\mu_i\} \frac{1}{y_i!} \exp\{y_i \ln \mu_i\}$$

qui sont issues d'une structure exponentielle et mises sous la forme canonique de paramètre naturel

$$\theta_i = \ln(\mu_i)$$

définissant comme fonction lien canonique le logarithme pour ce modèle.

2. Estimation

L'estimation des paramètres β_j est calculée en maximisant la log-vraisemblance du modèle linéaire généralisé. Celle-ci s'exprime pour toute famille de distributions mise sous la forme d'une structure exponentielle.

2.1. Expression des moments

Notons $l(\theta_i; \phi; y_i) = \ln f(y_i; \theta_i; \phi)$ la contribution de la $i^{\text{ème}}$ observation à la log-vraisemblance. L'étude de son maximum nécessite la connaissance des dérivées :

$$l(\theta_i; \phi; y_i) = [y_i \theta_i - v(\theta_i)]/u(\phi) + \varpi(y_i; \phi)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = [y_i - v'(\theta_i)]/u(\phi)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_i^2} = -v''(\theta_i)/u(\phi).$$

Pour des lois issues de structures exponentielles, les conditions de régularité vérifiées permettent d'écrire :

$$E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right) = 0 \quad \text{et} \quad -E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right) = E\left(\frac{\partial l}{\partial \theta}\right)^2.$$

Alors,

$$E(Y_i) = \mu_i = v'(\theta_i)$$

et comme

$$v''(\theta_i)/u(\phi) = \{E[Y_i - v'(\theta_i)]/u(\phi)\}^2 = \text{Var}(Y_i)/u^2(\phi)$$

il vient donc

$$\text{Var}(Y_i) = v''(\theta_i) \cdot u(\phi)$$

2.2. Equations de vraisemblance

Considérons p variables explicatives dont les observations sont rangées dans la matrice de plan d'expérience $\mathbf{X}$, β un vecteur de p paramètres et le prédicteur linéaire à n composantes

$$\eta = \mathbf{X} \cdot \beta.$$

La fonction lien g est supposée monotone différentiable telle que : $\eta_i = g(\mu_i)$;

c'est la fonction lien canonique si : $g(\mu_i) = \theta_i$.

Pour n observations supposées indépendantes et en tenant compte que θ dépend de β , la log-vraisemblance s'écrit :

$$L(\beta) = \sum_{i=1}^n \ln f(y_i; \theta_i; \phi) = \sum_{i=1}^n l(\theta_i; \phi; y_i).$$

Calculons

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial l_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}.$$

Comme

$$\frac{\partial l}{\partial \theta_i} = [y_i - v'(\theta_i)]/u(\phi) = (y_i - \mu_i)/u(\phi),$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} = v''(\theta_i) = \text{Var}(Y_i)/u(\phi),$$

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = x_{ij} \text{ car } \eta_i = x_i' \beta,$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \text{ dépend de la fonction lien } \eta_i = g(\mu_i),$$

Les équations de la vraisemblance sont :

$$\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i) \cdot x_{ij}}{\text{Var}(Y_i)} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = 0 \quad j = 1, \dots, p.$$

Ce sont des équations non linéaires en β dont la résolution requiert des méthodes itératives dans lesquelles interviennent le Hessien (Newton-Raphson) ou la matrice d'information (Scores de Fischer). La matrice d'information est la matrice

$$F = X'WX$$

de terme général

$$[F]_{jk} = E \frac{\partial^2 L(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = - \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} x_{ik}}{\text{Var}(Y_i)} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \right)^2$$

et où W est la matrice diagonale :

$$[W]_{ii} = \frac{1}{\text{Var}(Y_i)} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \right)^2.$$

2.3. Fonction lien canonique

Dans le cas particulier où la fonction lien du modèle linéaire généralisé utilisée est la fonction lien canonique associée à la structure exponentielle alors plusieurs simplifications interviennent :

$$\eta_i = \theta_i = x_i' \beta,$$

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i} = \frac{\partial v'(\theta_i)}{\partial \theta_i} = v''(\theta_i).$$

Ainsi,

$$\frac{\partial l_i}{\partial \beta_j} = \frac{(y_i - \mu_i)}{\text{Var}(Y_i)} v''(\theta_i) x_{ij} = \frac{(y_i - \mu_i)}{u(\phi)} x_{ij}.$$

De plus, le Hessien est alors égal à la matrice d'information et donc les méthodes de résolution du score de Fisher et de Newton-Raphson coïncident.

Si, de plus, $u(\phi)$ est constante pour les observations, les équations de vraisemblance deviennent :

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\mu}$$

Ainsi, dans le cas gaussien, le modèle s'écrivant $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ avec la fonction de lien canonique identité, on retrouve la solution :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

qui coïncide avec celle obtenue par minimisation des moindres carrés.

3. Qualité d'ajustement

Il s'agit d'évaluer la qualité d'ajustement du modèle sur la base des différentes observations et estimations. Plusieurs critères sont proposés.

3.1. Déviance

Le modèle estimé est comparé avec le modèle dit saturé, c'est à dire le modèle possédant autant de paramètres que d'observations et estimant donc exactement les données. Cette comparaison est basée sur l'expression de la déviance D des log-vraisemblances L et L_{sat} :

$$D : -2.(L - L_{\text{sat}})$$

Qui est le logarithme du carré du rapport des vraisemblances. Ce rapport remplace ou "généralise" l'usage des sommes des carrés propres au cas gaussien et donc à l'estimation des moindres carrés.

On montre qu'asymptotiquement, D suit une loi du χ^2 à $n-p$ degrés de liberté ce qui permet de construire un test de rejet ou d'acceptation du modèle selon que la déviance est jugée significativement ou non importante.

Attention, l'approximation de loi du χ^2 peut être douteuse. De plus, dans le cas de données non groupées (modèle binomial), le cadre asymptotique n'est plus adapté car le nombre de paramètres estimés tend également vers l'infini avec n et il ne faut plus se fier à ce test.

Voici les expressions des déviiances de quelques lois appartenant à la famille exponentielle :

Distribution	Déviance
Normale	$\sum_i w_i (y_i - \mu_i)^2$
Poisson	$2 \cdot \sum_i w_i \left\{ y_i \log \frac{y_i}{\mu_i} - (y_i - \mu_i) \right\}$
Gamma	$2 \cdot \sum_i w_i \left\{ -\log \frac{y_i}{\mu_i} + \frac{y_i - \mu_i}{\mu_i} \right\}$

3.2. Test de Pearson

Un test du χ^2 est également utilisé pour comparer les valeurs observées y_i à leur prévision par le modèle. La statistique du test est définie par :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^I \frac{(y_i - \mu_i)^2}{\hat{Var}(\hat{\mu}_i)}$$

(μ_i) est remplacé par $n_i\pi_i$ dans le cas binomial et on montre qu'elle admet asymptotiquement la même loi que la déviance.

En pratique, ces deux approches conduisent à des résultats peu différents et, dans le cas contraire, c'est une indication de mauvaise approximation de la loi asymptotique. Sachant que l'espérance d'une loi du χ^2 est son nombre de degrés de liberté et, connaissant les aspects approximatifs des tests construits, l'usage est souvent de comparer les statistiques avec le nombre de degrés de liberté. Le modèle peut être jugé satisfaisant pour un rapport D/ddl plus petit que 1.

4. Tests

Deux critères sont habituellement proposés pour aider au choix du modèle.

4.1. Rapport de vraisemblance

Comme dans le cas de la régression multiple où un test permet de comparer un modèle avec un modèle réduit, le rapport de vraisemblance ou la différence de déviance est une évaluation de l'apport des variables explicatives supplémentaires dans l'ajustement du modèle. La différence des déviances entre deux modèles emboîtés respectivement à q_1 et q_2 ($q_2 > q_1$) variables explicatives

$$\begin{aligned} D_2 - D_1 &= 2.(L_1 - L_{\text{sat}}) - 2.(L_2 - L_{\text{sat}}) \\ &= 2.(L_1 - L_2) \end{aligned}$$

suit approximativement une loi du χ^2 à $(q_2 - q_1)$ degrés de liberté pour les lois à 1 paramètre (binomial, poisson) et une loi de Fisher pour les lois à deux paramètres (gaussienne). Ceci permet donc de tester la significativité de la diminution de la déviance par l'ajout de variables explicatives ou la prise en compte d'interactions.

4.2. Test de Wald

Ce test est basé sur la forme quadratique faisant intervenir la matrice de covariance des paramètres, l'inverse de la matrice d'information observée $X'WX^{-1}$. Cette matrice est calculée à partir du Hessien approché par l'algorithme de maximisation. Elle généralise la matrice $X'WX^{-1}$ utilisée dans le cas du modèle linéaire gaussien en faisant intervenir une matrice W de pondération. Ainsi, test de Wald et test de Fisher sont équivalents dans le cas particulier du modèle gaussien.

Si la matrice K , dite contraste, définit l'ensemble H_0 des hypothèses à tester sur les paramètres :

$$K'\beta = 0,$$

On montre que la statistique

$$(K'b)' \cdot (K' \cdot (X'WX)^{-1}K)^{-1} K'b$$

suit asymptotiquement une loi du χ^2 .

Attention, le test de Wald, approximatif, peut ne pas être précis si le nombre d'observations est faible.

5. Diagnostics

De nombreux indicateurs, comme dans le cas de la régression linéaire multiple, sont proposés afin d'évaluer la qualité ou la robustesse des modèles estimés. Ils concernent la détection des valeurs influentes et l'étude graphique des résidus. La définition de ces derniers pose quelques difficultés.

5.1. Effet levier

On construit la matrice de projection (hat matrix)

$$H = W^{1/2} X \cdot (X'WX)^{-1} X' W^{1/2},$$

relative au produit scalaire de matrice W , sur le sous-espace engendré par les variables explicatives. Les termes diagonaux de cette matrice supérieurs à $(3p/n)$ indiquent des valeurs potentiellement influentes. Le graphe représentant les points d'ordonnées h_{ii} et d'abscisses le numéro de l'observation les visualise.

5.2. Résidus

Avec des erreurs centrées, additives, c'est à dire dans le cas du modèle gaussien utilisant la fonction lien identité, il est naturel de définir les résidus par :

$$\varepsilon_i = y_i - E(y_i) = y_i - \mu_i.$$

comme dans le cas du modèle linéaire. Ce cadre est ici inadapté au cas général et différents substituts sont proposés. Chacun possède par ailleurs une version *standardisée* et une version *studentisée*.

Pearson

Les résidus obtenus en comparant valeurs observées y_i et valeurs prédites $\hat{y}_i$ sont pondérés par leur précision estimée par l'écart-type : s_i de $\hat{y}_i$. Ceci définit les résidus de Pearson :

$$r_{p_i} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{s_i}$$

dont la somme des carrés conduit à la statistique du même nom. Ces résidus mesurent donc la contribution de chaque observation à la significativité du test découlant de cette statistique. Par analogie au modèle linéaire, on vérifie que ce sont également les résidus de la projection par la matrice H .

Ces résidus ne sont pas de variance unité et sont donc difficiles à interpréter. Une estimation de leurs écarts-types conduit à la définition des résidus de Pearson standardisés :

$$r_{psi} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{s_i \sqrt{h_{ii}}}$$

De plus, prenant en compte que les estimations des écarts types s_i dépendent de la $i^{\text{ème}}$ observation et sont donc biaisés, des résidus studentisés sont obtenus en approchant au premier ordre le paramètre de dispersion $s_{(i)}$ calculé sans la $i^{\text{ème}}$ observation :

$$r_{psi} = \frac{y_i - \hat{y}_i}{s_{(i)} \sqrt{h_{ii}}}$$

Déviance

Ces résidus mesurent la contribution de chaque observation à la déviance du modèle par rapport au modèle saturé. Des versions standardisées et studentisées en sont définies comme pour ceux de Pearson.

Anscombe

Les lois des résidus précédents sont inconnues et même dissymétriques. Anscombe a donc proposé de faire opérer une transformation préalable afin de construire des résidus suivant une loi normale :

$$r_{Ai} = \frac{t(y_i) - t(\hat{y}_i)}{t'(y_i)s_i}$$

L'explicitation de la fonction t dans le cadre du modèle linéaire généralisé est relativement complexe mais le calcul en est fourni par les logiciels. Comme précédemment, des versions standardisées et studentisées sont également calculées.

Un graphe utilisant ces résidus en ordonnée et les numéros d'observation en abscisse permet d'identifier les observations les moins bien ajustées par le modèle.

5.3. Mesures d'influence

De nombreux indicateurs sont proposés afin d'évaluer l'influence d'une observation sur l'estimation d'un paramètre, sur les prédictions ou encore sur la variance des estimateurs. Le plus utilisé, la distance de Cook, mesure globalement l'influence sur l'ensemble des paramètres. C'est la distance, au sens de la métrique définie par l'inverse de la covariance des paramètres, entre les valeurs des paramètres $\mathbf{b}$ estimé avec toutes les observations et celui estimé lorsque la $i^{\text{ème}}$ observation est supprimée.

$$D_i = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_{(i)})' \cdot (\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{b}_{(i)}).$$

Cet indicateur prend simultanément en compte l'effet levier et l'importance du résidu de chaque observation. Le graphe de ces valeurs est donc plus synthétique et interprétable en tenant compte du graphe des résidus et de celui des termes diagonaux de $\mathbf{H}$.

6. Compléments

6.1. Sur-dispersion

Dans certaines situations, par exemple lors d'observations dépendantes, la variance de la variable Y_i supposée binomiale ou de Poisson, qui est théoriquement fixée par le modèle, est plus importante, multipliée par un facteur d'échelle (*scale parameter*) σ^2 . Si ce paramètre est plus grand que 1, on dit qu'il y a sur-dispersion. Une méthode basée sur une maximisation de la formule de quasi-vraisemblance est alors utilisée pour estimer à la fois σ et β .

6.2. Variable "offset"

Lorsque la variable à expliquer dans le cas d'un modèle linéaire généralisé dépend d'une autre variable, cette dernière est déclarée *offset* et sert ainsi à "tarer" le modèle.

Exemple : pour modéliser le nombre de sinistres déclarés par catégorie de conducteurs, la variable *nombre de contrats* est déclarée "offset".

ANNEXE B : LA METHODE DELTA

Théorème : la méthode Delta

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$, une suite de vecteurs aléatoires de $\mathfrak{R}^p$ asymptotiquement normaux de moyenne μ et de matrice de variance-covariance $c_n^2 \Sigma^2$ avec $c_n \xrightarrow{+\infty} 0$ et Σ^2 semi-définie positive.

- Soit $g : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^m$

$$x \rightarrow (g_1(x), \dots, g_m(x))$$

une application différentiable dans un voisinage de μ .

- Considérons la matrice $(D_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq i \leq p}} : D_{ij} = \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{x=\mu}$

Si tous les éléments diagonaux de la matrice $D \Sigma^2 D'$ sont non nuls alors :

$$c_n^{-1}(g(X_n) - g(\mu)) \xrightarrow{L} N(0, D \Sigma^2 D')$$

Rappel des propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance (emv)

Sous de bonnes hypothèses, l'emv est asymptotiquement :

- gaussien
- sans biais
- efficace, i.e sa matrice de variance-covariance est égale à l'inverse de la matrice d'information de Fisher du modèle

Utilisation de la méthode Delta avec un emv

Soit $X_n \in \mathfrak{R}^p$ l'emv du paramètre μ (n représente le nombre d'observations sur lesquelles se base l'estimation).

Supposons que l'on veuille estimer $g(\mu)$ à l'aide de l'estimateur $g(X_n)$ (avec $g : \mathfrak{R}^p \rightarrow \mathfrak{R}^m$ différentiable).

On procède alors en plusieurs étapes :

- Calcul de l'information de Fisher I du modèle. Par propriété de l'emv $\Sigma^2(X_n) = I^{-1}$
- Comme on a par propriété de l'emv (pour n suffisamment grand)

$$X_n - \mu \rightarrow N(0, \Sigma^2)$$

Par utilisation de la méthode Delta, il vient :

$$g(X_n) - g(\mu) \rightarrow N(0, D \Sigma^2 D')$$

ANNEXE C : TEST « UP AND DOWN »

Test d'indépendance des résidus : « Up and Down »

Ce test est effectué sur les résidus issus des modèles étudiés, afin de vérifier l'hypothèse d'indépendance. La théorie du test « Up and Down » est la suivante :

Soit $Y_1, \dots, Y_n$ une suite de v.a.r telles que :

$$P(Y_i = Y_j) = 0 \text{ pour } i \neq j$$

Au vu d'une réalisation $y_1, \dots, y_n$ de ces v.a.r, on teste, pour un seuil $\alpha > 0$,

$$H_0 : Y_1, \dots, Y_n \text{ v.a.r indépendantes}$$

$$H_1 : Y_1, \dots, Y_n \text{ v.a.r non indépendantes}$$

Considérons, pour $i=1, \dots, n-1$, les indicatrices up ou down :

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si } Y_{i+1} > Y_i \text{ (up)} \\ 0 & \text{si } Y_{i+1} < Y_i \text{ (down)} \end{cases}$$

et leur réalisation $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$.

On appelle séquence de la suite $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ (composée de 0 et de 1) une succession du même symbole (0 ou 1) suivie et précédée de l'autre symbole ou du vide.

Soit R la v.a.r. nombre total de séquences de 0 et de 1 relevées dans la réalisation de $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$.

On montre que, sous l'hypothèse H_0 ,

(i) la loi de R est libre (i.e. indépendante de la loi commune des Y_i),

$$(ii) E(R) = \frac{2n-1}{3}, \sigma^2(R) = \frac{16n-29}{90}$$

$$(iii) \frac{R - E(R)}{\sigma(R)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Cette approximation normale est utilisable dès que $n \geq 25$.

Le test Up and Down rejette naturellement l'hypothèse H_0 si on observe un nombre trop faible ou trop élevé de séquences. Sa région critique, de seuil asymptotique α , est donc :

$$W_\alpha = \left\{ (y) : \frac{|R - E(R)|}{\sigma(R)} > q_{1-\alpha/2} \right\} \text{ où } q_{1-\alpha/2} \text{ est le quantile de la loi Normale.}$$

Sa P-valeur a pour expression :

$$\hat{\alpha} = 2P \left[N(0,1) > \frac{|R - E(R)|}{\sigma(R)} \right]$$

ANNEXE D : TRIANGLES DE LIQUIDATION

Nous présentons les triangles de paiements cumulés par exercice de survenance / année de développement pour chacun des segments.

Segment RC Auto										
en m\$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Origine/devt										
1999	20 506	36 268	43 467	47 392	49 454	50 411	50 879	51 146	51 266	51 366
2000	22 180	39 076	46 521	50 711	52 888	53 901	54 443	54 709	54 871	
2001	23 047	40 194	47 894	52 215	54 512	55 553	56 057	56 331		
2002	24 131	41 878	49 966	54 469	56 889	57 955	58 479			
2003	24 107	41 413	49 126	53 626	56 002	57 147				
2004	24 368	41 512	49 207	53 794	56 143					
2005	25 051	42 608	50 571	55 112						
2006	25 583	43 589	51 659							
2007	27 198	46 283								
2008	26 977									

DAB Professionnels										
en m\$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Origine/devt										
1999	5 643	9 014	10 774	12 182	13 087	13 693	13 997	14 266	14 466	14 592
2000	5 577	9 123	10 977	12 375	13 447	13 838	14 264	14 539	14 736	
2001	6 143	9 466	11 458	12 980	13 745	14 479	14 906	15 201		
2002	4 830	7 848	9 508	10 785	11 723	12 338	12 718			
2003	5 089	7 997	9 380	10 698	11 631	12 263				
2004	5 923	9 467	11 030	12 349	13 330					
2005	5 849	10 807	12 393	13 895						
2006	5 513	8 896	10 470							
2007	6 235	9 849								
2008	8 566									

<i>en m\$</i>	RC Générale									
Origine/devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	1 578	3 435	5 825	7 527	8 838	9 529	10 225	10 607	10 900	11 221
2000	1 723	3 765	5 818	7 567	8 747	9 375	9 915	10 474	10 836	
2001	1 869	3 942	6 138	7 784	8 948	9 821	10 655	11 148		
2002	1 995	3 678	5 817	7 716	9 315	10 272	11 250			
2003	1 791	3 703	5 818	7 684	9 155	10 585				
2004	1 969	3 599	5 548	7 488	9 212					
2005	2 112	3 787	5 646	7 753						
2006	2 062	3 974	6 476							
2007	2 163	4 443								
2008	1 679									

ANNEXE E : CALCUL DU BEST ESTIMATE DES PROVISIONS POUR SINISTRES

- Facteurs de développement individuels

Les triangles suivants présentent les facteurs de développement individuels $\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}}$, pour chacun des trois segments étudiés. Ceux-ci permettent de vérifier l'hypothèse de Chain Ladder : pour chaque j donné, les facteurs $\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}}$ doivent être identiques.

RC Auto - facteurs de développement individuels									
Origine/devt	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
1999	1.77	1.20	1.09	1.04	1.02	1.01	1.01	1.00	1.00
2000	1.76	1.19	1.09	1.04	1.02	1.01	1.00	1.00	
2001	1.74	1.19	1.09	1.04	1.02	1.01	1.00		
2002	1.74	1.19	1.09	1.04	1.02	1.01			
2003	1.72	1.19	1.09	1.04	1.02				
2004	1.70	1.19	1.09	1.04					
2005	1.70	1.19	1.09						
2006	1.70	1.19							
2007	1.70								

DAB Professionnels - facteurs de développement individuels									
Origine/devt	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
1999	1.60	1.20	1.13	1.07	1.05	1.02	1.02	1.01	1.01
2000	1.64	1.20	1.13	1.09	1.03	1.03	1.02	1.01	
2001	1.54	1.21	1.13	1.06	1.05	1.03	1.02		
2002	1.62	1.21	1.13	1.09	1.05	1.03			
2003	1.57	1.17	1.14	1.09	1.05				
2004	1.60	1.17	1.12	1.08					
2005	1.85	1.15	1.12						
2006	1.61	1.18							
2007	1.58								

RC Générale - facteurs de développement individuels									
Origine/devt	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10
1999	2.18	1.70	1.29	1.17	1.08	1.07	1.04	1.03	1.03
2000	2.18	1.55	1.30	1.16	1.07	1.06	1.06	1.03	
2001	2.11	1.56	1.27	1.15	1.10	1.08	1.05		
2002	1.84	1.58	1.33	1.21	1.10	1.10			
2003	2.07	1.57	1.32	1.19	1.16				
2004	1.83	1.54	1.35	1.23					
2005	1.79	1.49	1.37						
2006	1.93	1.63							
2007	2.05								

- Les triangles suivants présentent le déroulé des paiements futurs $\hat{P}_{ij} = P_{i,n+1-i} \times \prod_{k=n+1-i}^{j-1} \hat{f}_k$, $n-i+2 \leq j \leq n$.

RC Auto										
Origine/devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	20 506	36 268	43 467	47 392	49 454	50 411	50 879	51 146	51 266	51 366
2000	22 180	39 076	46 521	50 711	52 888	53 901	54 443	54 709	54 871	54 978
2001	23 047	40 194	47 894	52 215	54 512	55 553	56 057	56 331	56 481	56 592
2002	24 131	41 878	49 966	54 469	56 889	57 955	58 479	58 771	58 928	59 043
2003	24 107	41 413	49 126	53 626	56 002	57 147	57 682	57 970	58 125	58 238
2004	24 368	41 512	49 207	53 794	56 143	57 230	57 766	58 055	58 209	58 323
2005	25 051	42 608	50 571	55 112	57 527	58 641	59 190	59 486	59 644	59 761
2006	25 583	43 589	51 659	56 348	58 817	59 956	60 517	60 819	60 981	61 101
2007	27 198	46 283	55 053	60 050	62 682	63 895	64 493	64 816	64 988	65 115
2008	26 977	46 526	55 342	60 365	63 011	64 230	64 832	65 156	65 329	65 457

en m\$	DAB Professionnels									
Origine/devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1999	5 643	9 014	10 774	12 182	13 087	13 693	13 997	14 266	14 466	14 592
2000	5 577	9 123	10 977	12 375	13 447	13 838	14 264	14 539	14 736	14 864
2001	6 143	9 466	11 458	12 980	13 745	14 479	14 906	15 201	15 410	15 544
2002	4 830	7 848	9 508	10 785	11 723	12 338	12 718	12 965	13 143	13 258
2003	5 089	7 997	9 380	10 698	11 631	12 263	12 610	12 855	13 032	13 145
2004	5 923	9 467	11 030	12 349	13 330	13 953	14 348	14 627	14 828	14 958
2005	5 849	10 807	12 393	13 895	14 983	15 684	16 128	16 441	16 668	16 813
2006	5 513	8 896	10 470	11 822	12 748	13 344	13 722	13 988	14 181	14 305
2007	6 235	9 849	11 662	13 167	14 199	14 863	15 284	15 580	15 795	15 933
2008	8 566	13 906	16 466	18 591	20 048	20 986	21 580	21 999	22 302	22 496

en m\$	RC Générale										
Origine/devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	ult
1999	1 578	3 435	5 825	7 527	8 838	9 529	10 225	10 607	10 900	11 221	11 629
2000	1 723	3 765	5 818	7 567	8 747	9 375	9 915	10 474	10 836	11 155	11 562
2001	1 869	3 942	6 138	7 784	8 948	9 821	10 655	11 148	11 495	11 833	12 264
2002	1 995	3 678	5 817	7 716	9 315	10 272	11 250	11 774	12 140	12 497	12 952
2003	1 791	3 703	5 818	7 684	9 155	10 585	11 412	11 943	12 314	12 677	13 139
2004	1 969	3 599	5 548	7 488	9 212	10 149	10 942	11 452	11 808	12 155	12 598
2005	2 112	3 787	5 646	7 753	9 185	10 119	10 910	11 418	11 773	12 120	12 561
2006	2 062	3 974	6 476	8 535	10 111	11 139	12 010	12 569	12 960	13 341	13 827
2007	2 163	4 443	7 001	9 226	10 930	12 042	12 983	13 588	14 010	14 422	14 948
2008	1 679	3 338	5 259	6 931	8 211	9 046	9 753	10 207	10 524	10 834	11 229

- **Prise en compte de l'effet d'actualisation**

Les tableaux suivants présentent le calcul de la prise en compte de l'effet actualisation :

- ✓ Calcul des paiements de chaque année calendaire future, jusqu'à la liquidation complète des engagements. Pour une année calendaire c ($c > 2008$) et une année de survénance i donnés, on a :

$$\hat{p}_{ic} = \hat{R}_i \cdot \frac{1}{1 - \text{cad}_{2009-i}} \cdot \text{cad}_{c-i}$$

- ✓ Le montant actualisé des provisions pour sinistres à payer relatif à l'exercice de survénance i est alors égal à :

$$\hat{R}_i^{act} = \sum_c \frac{\hat{p}_{ic}}{(1 + r_{c-2008})^{c-2008}}$$

où r_i représente le taux d'actualisation à horizon i années.

RC Auto										
exercices	BE non actualisé au 31.12.2008	Paielements futurs								
		2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1999	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	107	107	0	0	0	0	0	0	0	0
2001	260	150	111	0	0	0	0	0	0	0
2002	564	292	156	115	0	0	0	0	0	0
2003	1 091	535	288	154	114	0	0	0	0	0
2004	2 180	1 087	536	289	154	114	0	0	0	0
2005	4 649	2 415	1 114	549	296	158	117	0	0	0
2006	9 442	4 689	2 469	1 138	561	302	162	119	0	0
2007	18 832	8 770	4 997	2 632	1 213	598	322	172	127	0
2008	38 480	19 549	8 816	5 023	2 645	1 220	601	324	173	128
total	75 605	37 594	18 487	9 901	4 984	2 392	1 202	616	301	128
courbe de taux		1.87%	2.21%	2.45%	2.66%	2.84%	3.00%	3.15%	3.29%	3.41%
facteur actualisation		0.98	0.96	0.93	0.90	0.87	0.84	0.80	0.77	0.74
paielements actualisés		36 904	17 696	9 207	4 487	2 080	1 007	496	232	95
BE actualisé	72 204									

DAB professionnels										
exercices	BE non actualisé au 31.12.2008	Paielements futurs								
		2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
1999	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2000	129	129	0	0	0	0	0	0	0	0
2001	344	198	146	0	0	0	0	0	0	0
2002	540	280	150	110	0	0	0	0	0	0
2003	883	433	233	125	92	0	0	0	0	0
2004	1 628	812	400	216	115	85	0	0	0	0
2005	2 919	1 516	699	345	186	99	73	0	0	0
2006	3 834	1 904	1 003	462	228	123	66	48	0	0
2007	6 084	2 833	1 614	850	392	193	104	56	41	0
2008	13 930	7 077	3 191	1 819	958	442	218	117	63	46
total	30 290	15 181	7 437	3 927	1 971	942	461	221	104	46
courbe de taux		1.87%	2.21%	2.45%	2.66%	2.84%	3.00%	3.15%	3.29%	3.41%
facteur actualisation		0.98	0.96	0.93	0.90	0.87	0.84	0.80	0.77	0.74
paielements actualisés		14 903	7 119	3 652	1 774	819	386	178	80	34
BE actualisé	28 945									

RCG											
		Paiements futurs									
exercices	BE non actualisé au 31.12.2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	...
1999	409	148	95	61	38	24	15	10	6	4	...
2000	725	319	147	94	60	38	24	15	10	6	...
2001	1 116	346	338	156	100	64	41	26	16	10	...
2002	1 702	524	366	357	165	106	67	43	27	17	...
2003	2 554	827	531	371	362	168	107	68	43	28	...
2004	3 386	937	793	510	356	347	161	103	66	42	...
2005	4 808	1 432	934	791	508	355	346	160	103	65	...
2006	7 351	2 059	1 576	1 029	871	559	391	381	176	113	...
2007	10 505	2 558	2 225	1 704	1 112	941	605	422	412	191	...
2008	9 550	1 659	1 921	1 672	1 280	835	707	454	317	310	...
total	42 106	10 809	8 929	6 744	4 853	3 438	2 465	1 683	1 177	786	...

courbe de taux		1.87%	2.21%	2.45%	2.66%	2.84%	3.00%	3.15%	3.29%	3.41%	...
facteur actualisation		0.98	0.96	0.93	0.90	0.87	0.84	0.80	0.77	0.74	...
paiements actualisés		10610.89	8546.626	6271.94	4369.103	2988.871	2064.04	1354.682	908.4592	581.0015	...

BE actualisé	38 501
--------------	--------

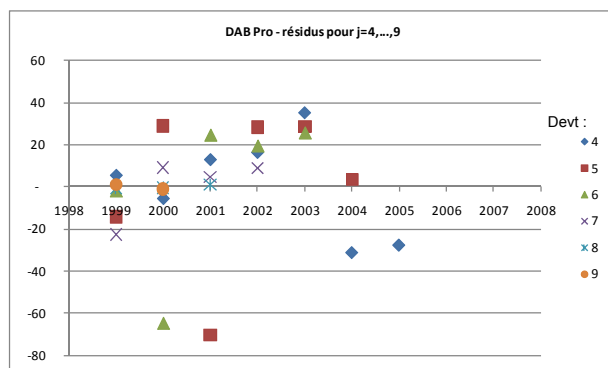
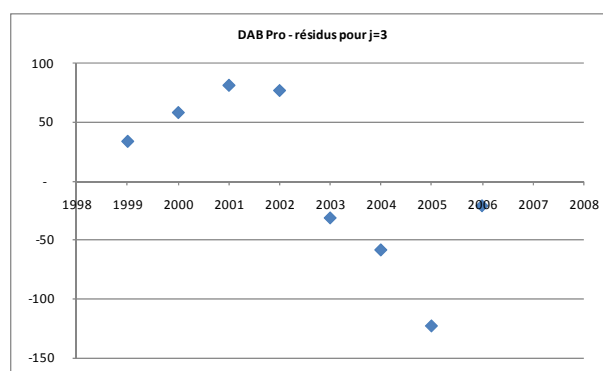
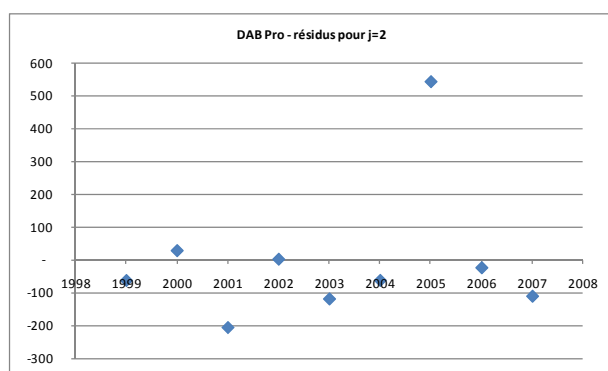
ANNEXE F : RESULTATS DU MODELE MACK

• Validation graphique de l'hypothèse (H3)

L'hypothèse H3 (pour $j=1, \dots, n-1$, il existe un paramètre σ_j^2 tel que $V(C_{i,j+1}/C_{i1}, \dots, C_{ij}) = \sigma_j^2 C_{ij}$ pour $i=1, \dots, n$) peut être validée graphiquement : pour tout j fixé, le graphe des résidus $\frac{C_{i,j+1} - \hat{f}_j \cdot C_{i,j}}{\sqrt{C_{i,j}}}$, $i=1, \dots, n-j$, ne doit faire apparaître aucune structure non aléatoire.

Les graphiques suivants présentent, pour les segments « RCG » et « DAB Professionnel », les résidus pour chaque développement :

✓ Segment DAB Professionnels



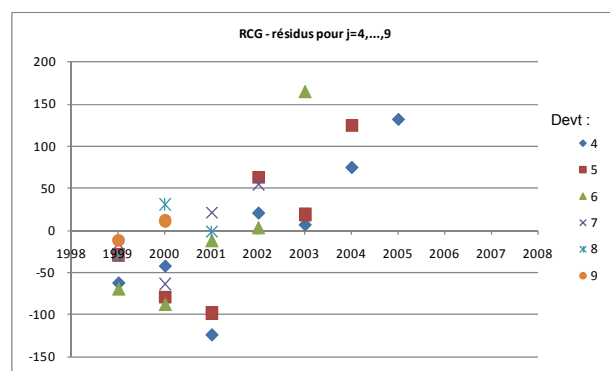
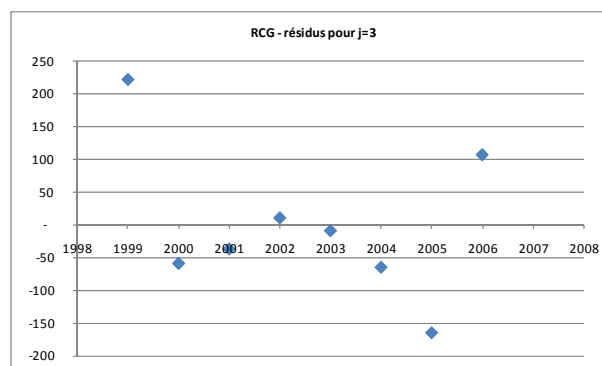
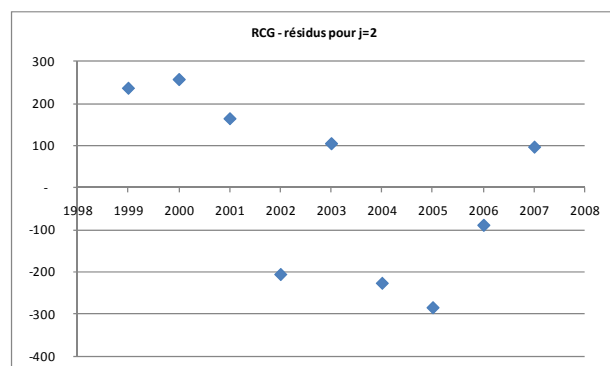
Même si le résidu pour l'exercice de surveillance 2005 pour $j=2$ semble atypique, aucune structure non aléatoire ne semble apparaître pour le développement correspondant à $j=2$. Cela est dû au fait que le facteur de développement individuel correspondant est égal à 1.85, relativement éloigné du coefficient moyen $\hat{f}_1 = 1,62$.

On remarque que, pour le 3^{ème} développement, les résidus sont positifs pour les exercices de surveillance 2002 et antérieurs, et négatifs pour les exercices 2004 et ultérieurs.

Pour les développements suivants, aucune structure non aléatoire ne semble apparaître.

L'hypothèse H3 ne semble donc pas parfaitement vérifiée pour $j=3$.

✓ Segment RC Générale



Aucune structure non aléatoire ne semble apparaître pour les développements correspondant à $j=2$ et $j=3$.

On remarque en revanche que, pour les 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} développements, les résidus sont négatifs pour les exercices de survénance 2001 et antérieurs, et positifs ensuite. L'hypothèse H3 ne semble donc pas parfaitement vérifiée pour ces développements.

• Résultats complémentaires

Les tableaux suivant présentent, pour les segments « RC Auto », « DAB Professionnels » et « RC Générale » :

- L'estimation des facteurs de développement $\hat{f}_k$, identiques à ceux estimés dans la méthode Chain-Ladder,
- L'estimation des coefficients $\hat{\sigma}_k$,

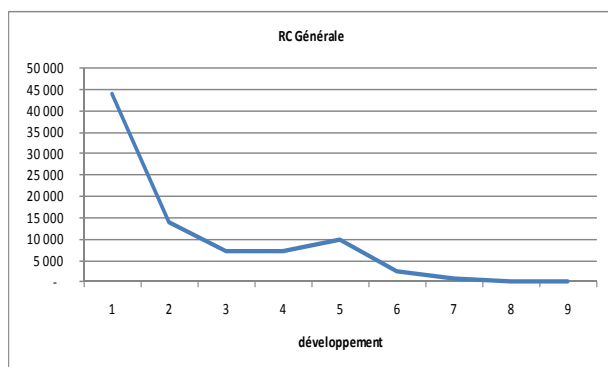
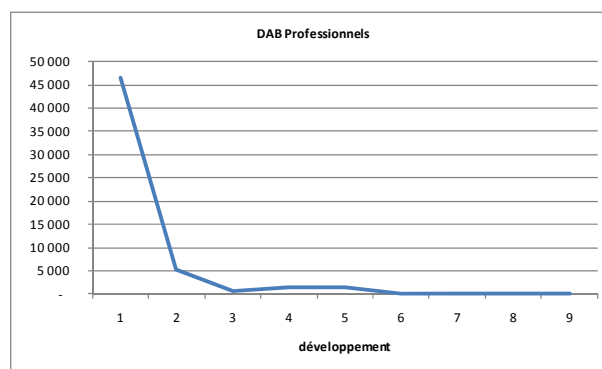
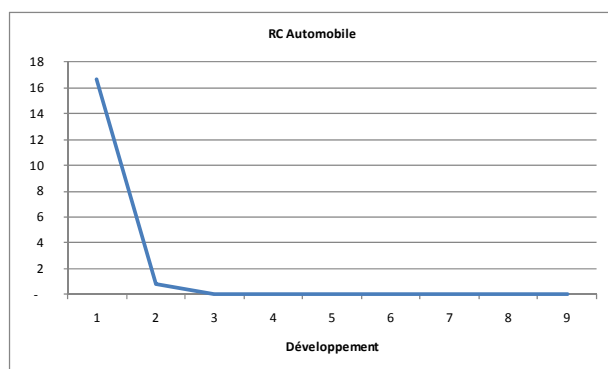
$$\hat{se}(\hat{f}_k) = \hat{V}(\hat{f}_k) = \frac{\hat{\sigma}_k}{\sum_{j=1}^{I-k} C_{jk}}.$$

	RC Auto									
devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{f}_k$	1,72	1,19	1,09	1,04	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00
$se(\hat{f}_k)$	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
σ_k	4,08	0,93	0,27	0,13	0,15	0,11	0,05	0,10	0,05	

DAB Professionnels										
devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_k	1,62	1,18	1,13	1,08	1,05	1,03	1,02	1,01	1,01	1,00
$se(f_k)$	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
σ_k	215,38	72,53	24,07	39,02	38,26	15,16	1,05	1,42	1,05	

RC Générale										
devt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_k	1,99	1,58	1,32	1,18	1,10	1,08	1,05	1,03	1,03	1,04
$se(f_k)$	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00	0,01	0,01
σ_k	209,65	118,00	85,81	85,49	99,89	50,64	30,17	16,08	16,64	18,25

• Graphes de développement des $\hat{\sigma}_k^2$



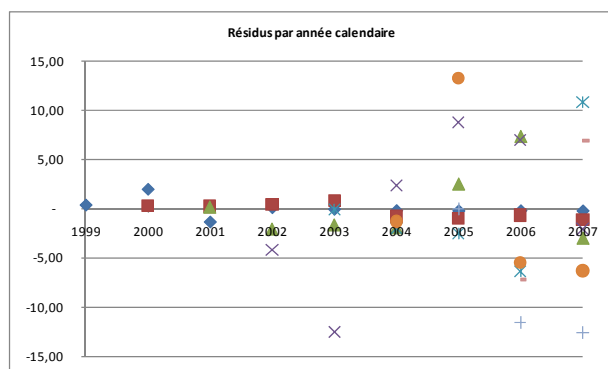
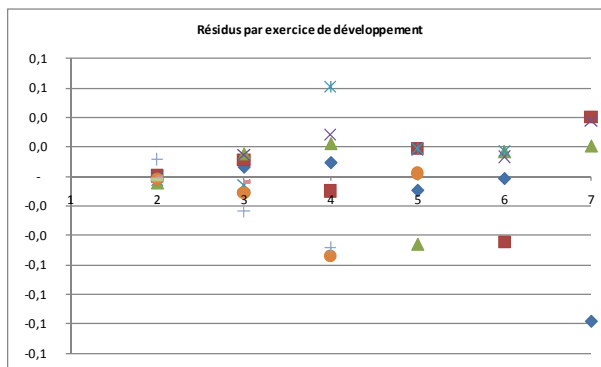
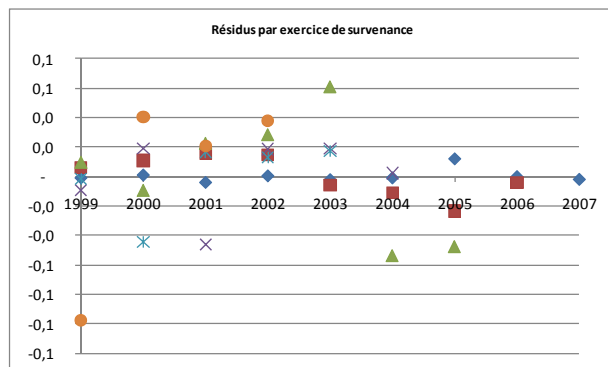
ANNEXE G : RESULTATS DU MODELE DE WÜTHRICH-MERZ

• Validation graphique des hypothèses

Pour les segments « DAB Professionnels » et « RC Générale », nous représentons sur un graphique les résidus

$$e_{ij} = \frac{P_{ij} - \hat{f}_{j-1} P_{ij-1}}{\hat{\sigma}_{j-1} \sqrt{P_{ij-1}}}, \text{ pour chacune des dimensions naturelles du triangle.}$$

✓ Segment DAB Professionnels

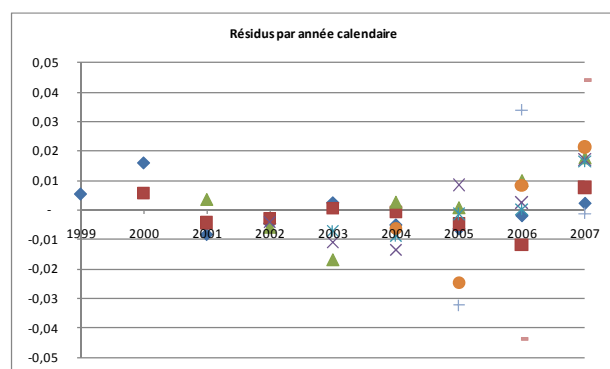
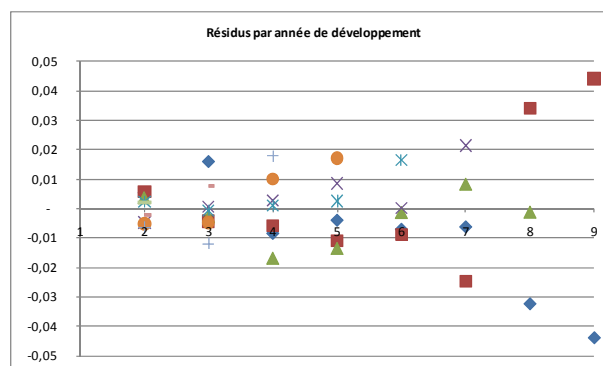
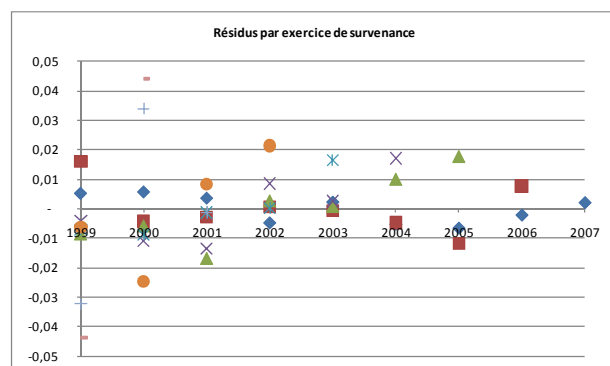


Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

Néanmoins, les résidus $e_{1999,8} = -0.7$, $e_{1999,9} = 0.5$, $e_{2000,8} = -0.4$, $e_{2000,9} = -0.5$ et $e_{2001,8} = 1.1$ ne sont pas représentés sur les graphiques : il semble que les résidus soient plus élevés au fur et à mesure des développements et des années calendaires, ce qui ne semble pas valider les hypothèses du modèle.

On a $\frac{1}{n} \sum e_{ij} = -2.10^{-4}$ et $\frac{1}{n} \sum e_{ij}^2 = 0.05$.

✓ Segment RC Générale



Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

$$\frac{1}{n} \sum e_{ij} = 5.10^{-5} \text{ et } \frac{1}{n} \sum e_{ij}^2 = 2.10^{-4}.$$

• Résultats complémentaires

Les tableaux suivant présentent, pour les segments « RC Auto », « DAB Professionnels » et « RC Générale » :

- L'estimation de la moyenne de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)/D_I$, $\sqrt{(u_biais)^2}$, où

$$(u_biais)^2 = \hat{E}_{D_I} \left[\left(E \left[\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_I \right] \right)^2 \right],$$

- L'estimation de l'écart-type de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)/D_I$, $\sqrt{\hat{V} \left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_I \right)}$,

- L'erreur de prédiction conditionnelle du CDR observable par exercice de survie et au total, respectivement $\hat{s}ep_{\hat{CDR}(I+1)/D_I}(0)$ et $\hat{s}ep_{\hat{CDR}(I+1)/D_I}(0)$, avec

$$\hat{s}ep_{\hat{CDR}(I+1)/D_I}(0) = \sqrt{\hat{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1) - 0 \right)^2 / D_I \right]} = \sqrt{(u_biais)^2 + \hat{V} \left(\sum_{i=1}^n \hat{CDR}_i(I+1)/D_I \right)}$$

✓ **Segment RC Auto**

Résultats modèle Merz-Wüthrich					
exercices de survenance	BE des provisions	u_bias	écart-type du CDR	SEP _{wüthrich}	ratio SEP _{wüthrich} /BE
1999	-	-	-	-	
2000	107	11	11	16	14,6%
2001	260	18	24	30	11,7%
2002	564	11	15	19	3,4%
2003	1 091	16	29	33	3,0%
2004	2 180	19	39	44	2,0%
2005	4 649	16	34	38	0,8%
2006	9 442	28	69	74	0,8%
2007	18 832	89	236	253	1,3%
2008	38 480	333	943	1 000	2,6%
TOTAL	75 605	363	993	1 058	1,4%

Montants en m\$

✓ **Segment DAB Professionnels**

Résultats modèle Merz-Wüthrich					
exercices de survenance	BE des provisions	u_bias	écart-type du CDR	SEP _{wüthrich}	ratio SEP _{wüthrich} /BE
1999	-	-	-	-	
2000	129	4	4	6	4,5%
2001	344	5	6	8	2,2%
2002	540	3	5	5	1,0%
2003	883	26	55	61	7,0%
2004	1 628	69	150	165	10,2%
2005	2 919	74	166	182	6,2%
2006	3 834	39	101	108	2,8%
2007	6 084	116	314	335	5,5%
2008	13 930	420	1 023	1 106	7,9%
TOTAL	30 290	476	1 156	1 250	4,1%

Montants en m\$

✓ Segment RC Générale (sans prise en compte de facteur de queue de développement)

Résultats modèle Merz-Wüthrich					
exercices de survenance	BE des provisions	u_bias	écart-type du CDR	SEP _{wüthrich}	ratio SEP _{wüthrich} /BE
1999	-	-	-	-	
2000	319	28	28	40	12,5%
2001	685	43	57	72	10,4%
2002	1 247	68	110	130	10,4%
2003	2 092	99	187	212	10,1%
2004	2 943	168	367	403	13,7%
2005	4 366	136	324	352	8,1%
2006	6 865	146	356	385	5,6%
2007	9 979	206	527	566	5,7%
2008	9 156	279	888	931	10,2%
TOTAL	37 652	615	1 469	1 593	4,2%

Montants en m\$

ANNEXE H : RESULTATS DE LA PROCEDURE BOOTSTRAP « A L'ULTIME »

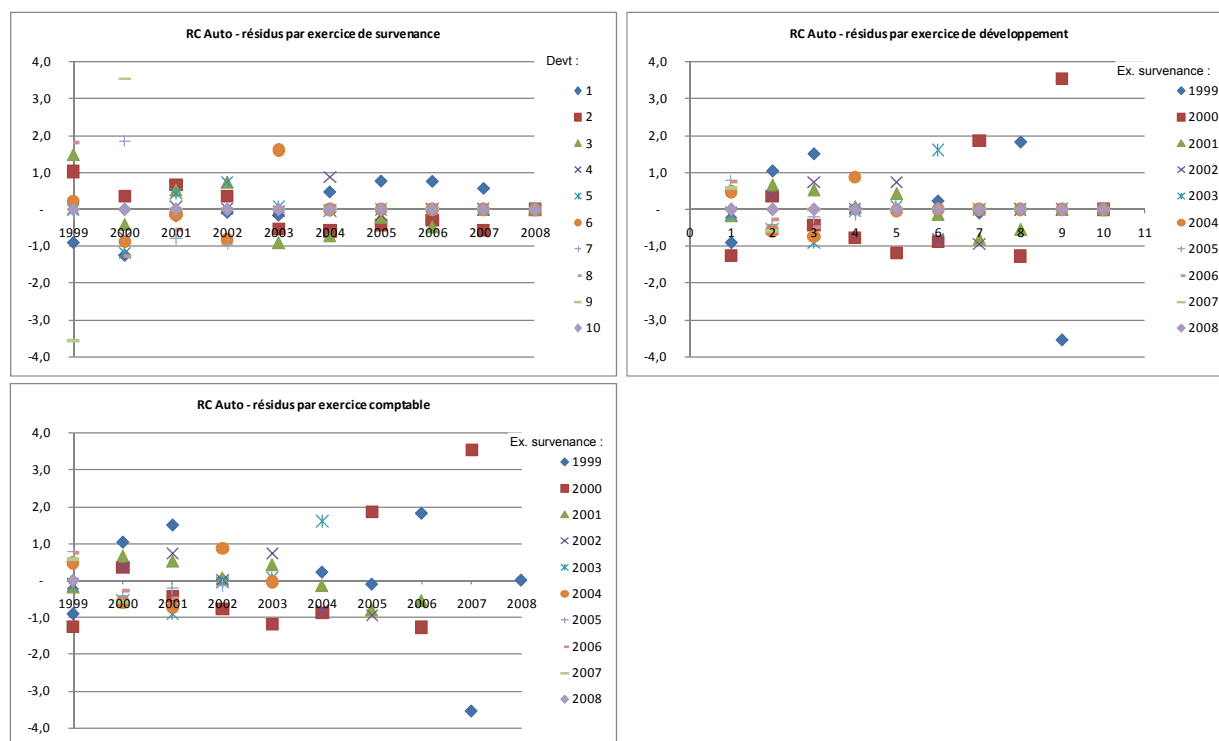
• Validation graphique des hypothèses

Pour les différents segments et modèles statistiques sous-jacents, nous présentons :

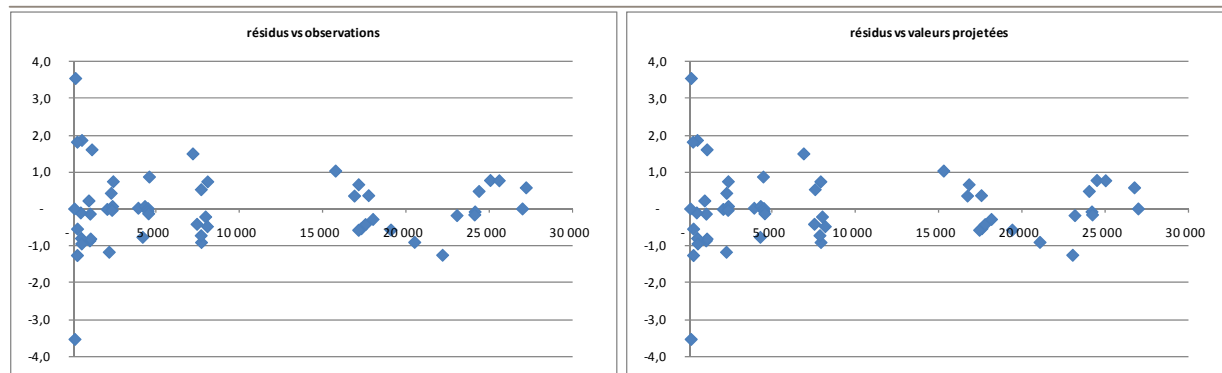
- Représentation graphique des résidus de Pearson standardisés ($r_{ij}^{(adj)} = \sqrt{\frac{n}{n-p}} \cdot r_{ij}^{(p)}$, avec $r_{ij}^{(p)} = \frac{y_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$) selon les trois dimensions naturelles du triangle,
- Représentation graphique des résidus selon en fonction des valeurs observées et projetées par le modèle,
- Représentation graphique des valeurs observées et projetées par le modèle,
- Test d'indépendance des résidus de Pearson standardisés, sur la base du test « up and down ».

✓ Segment RC Auto

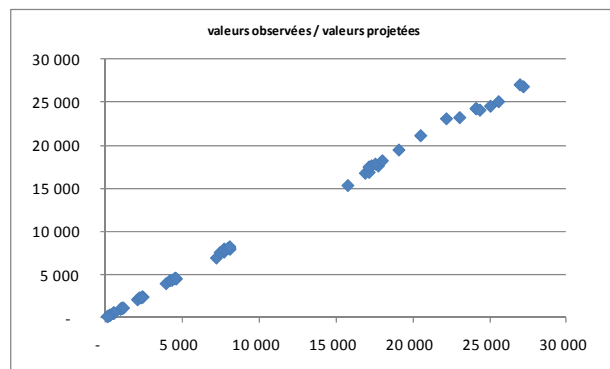
▪ Modèle GLM Gamma



Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

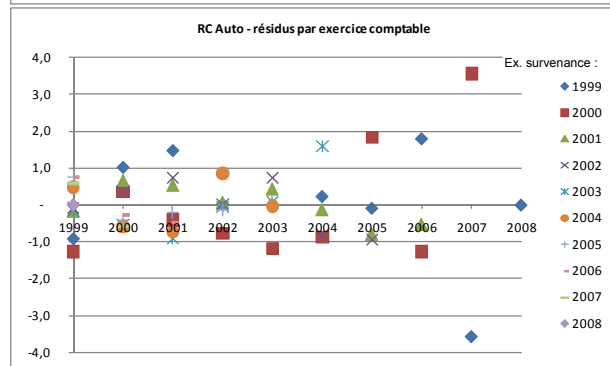
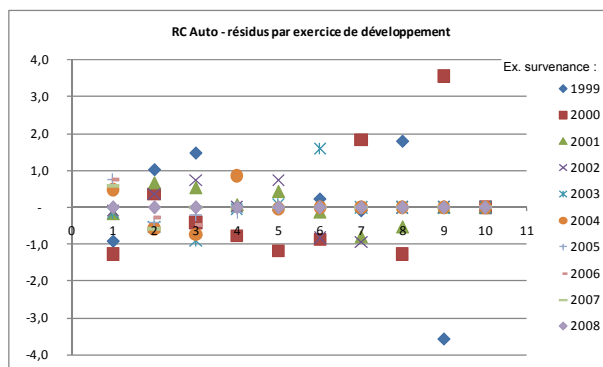
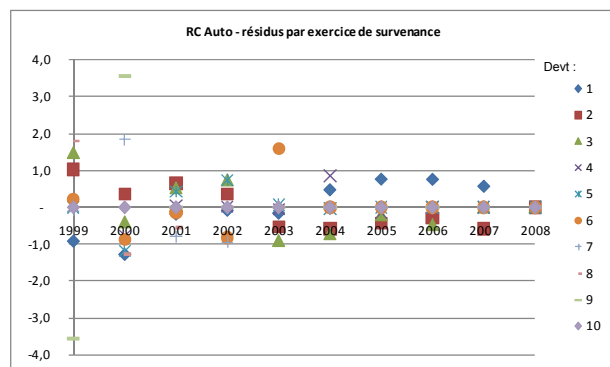


Les résidus semblent d'autant plus faibles que les montants observés ou projetés sont grands.



Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.

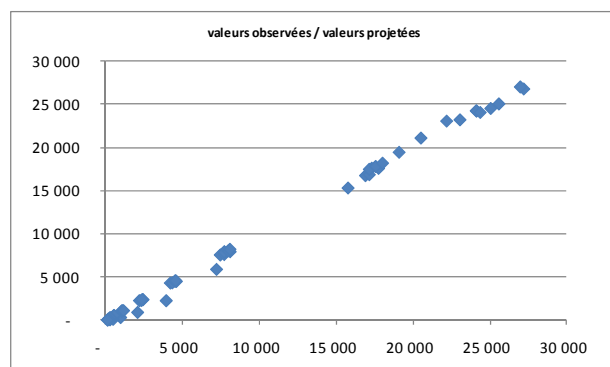
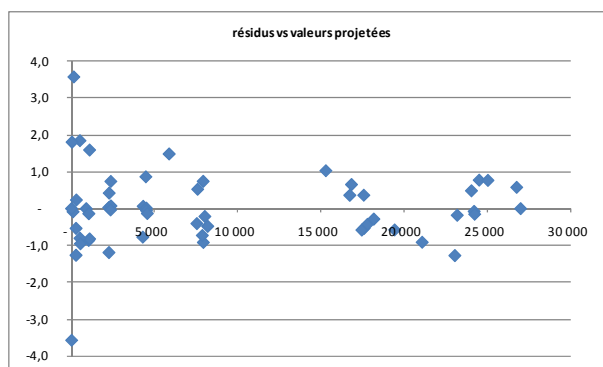
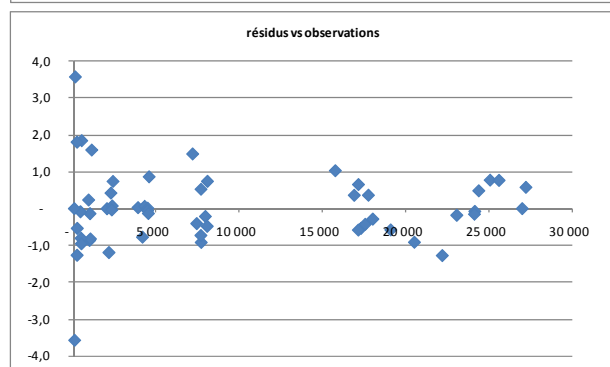
■ Modèle Christophides



Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

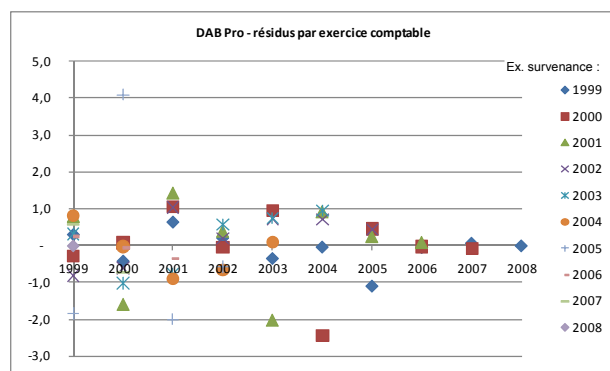
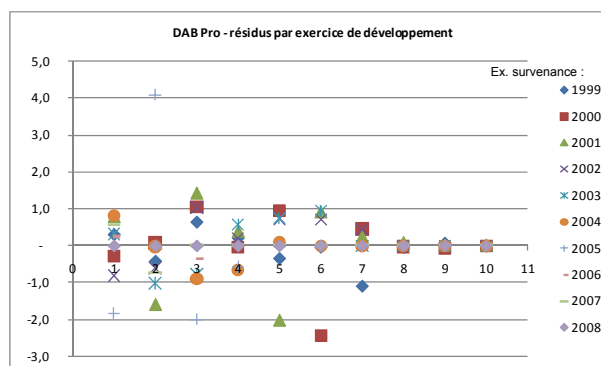
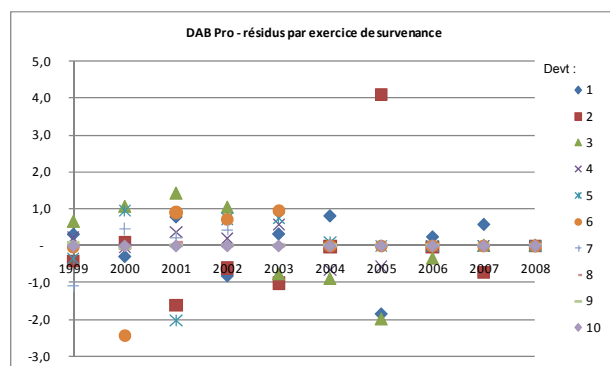
Néanmoins, les résidus semblent d'autant plus faibles que les montants observés ou projetés sont grands.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.



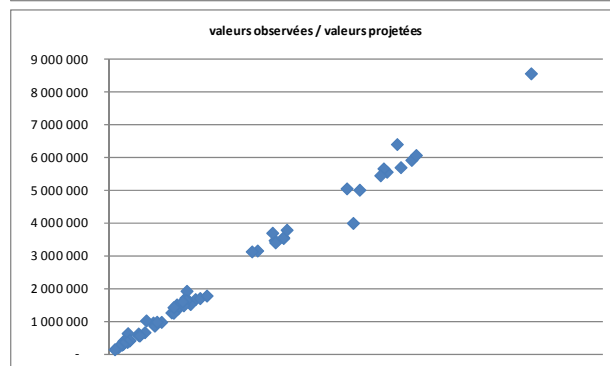
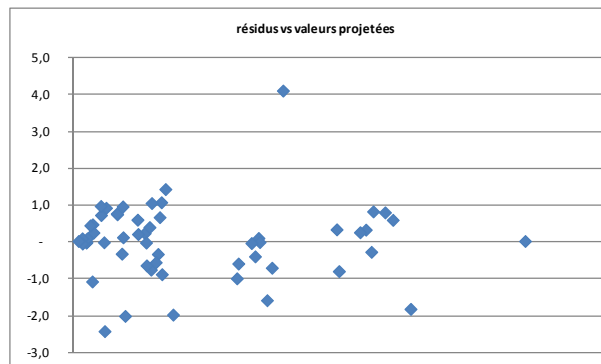
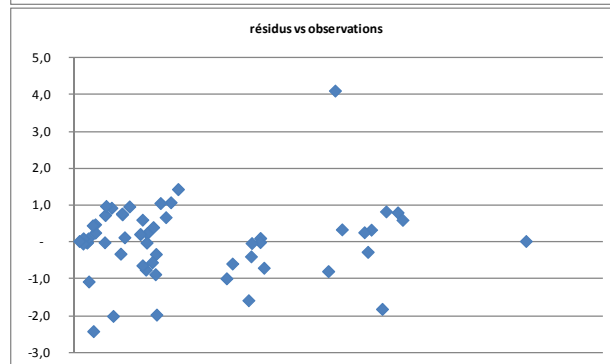
✓ Segment DAB Professionnel

▪ Modèle GLM Poisson

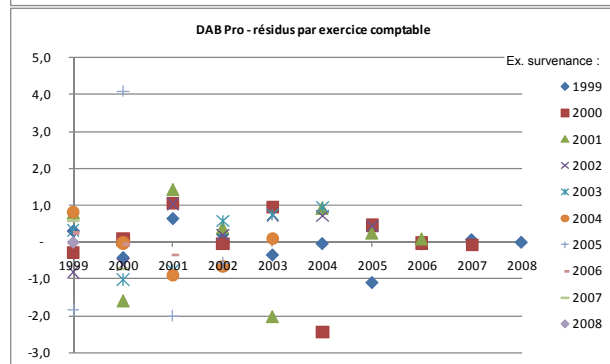
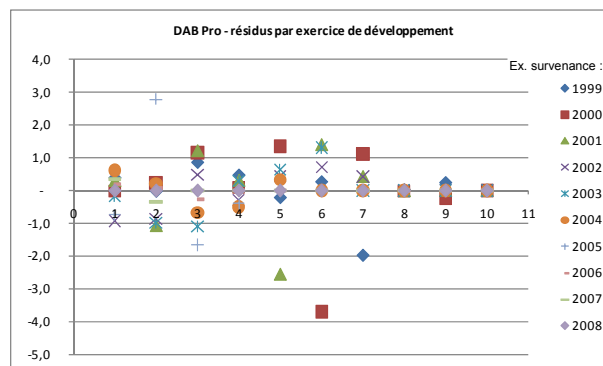
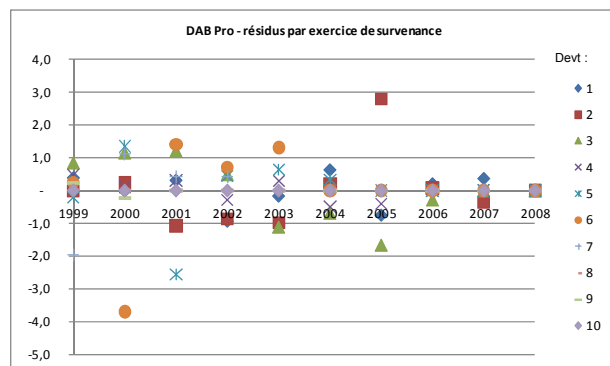


Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus. On remarque néanmoins que, pour le 3^{ème} développement, les résidus sont positifs pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs, et négatifs pour les exercices 2004 et ultérieurs.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.

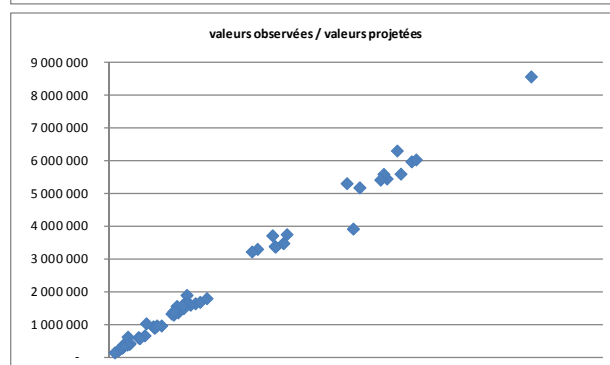
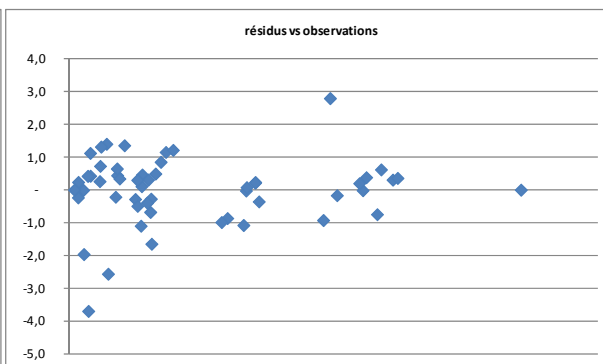
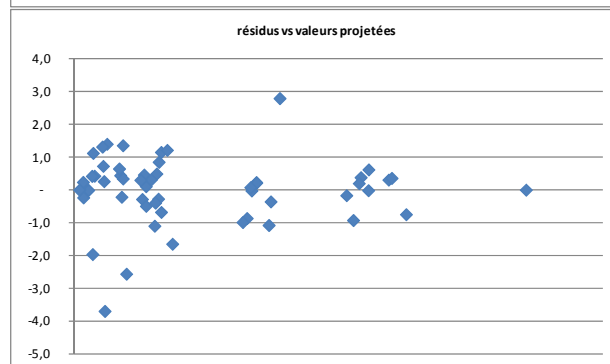


Modèle GLM Gamma

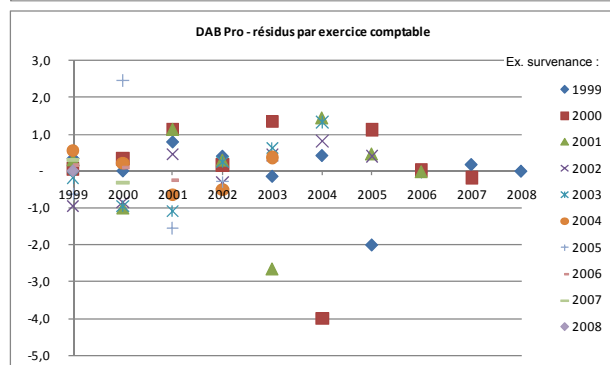
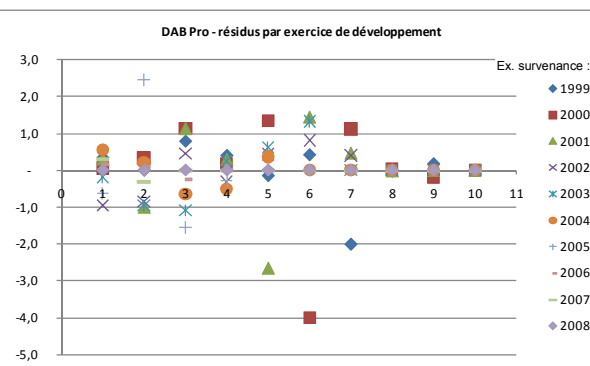
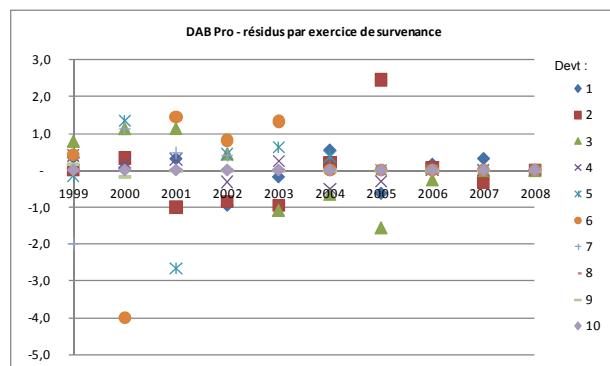


Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus. On remarque néanmoins que, pour le 3^{ème} développement, les résidus sont positifs pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs, et négatifs pour les exercices 2004 et ultérieurs.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.



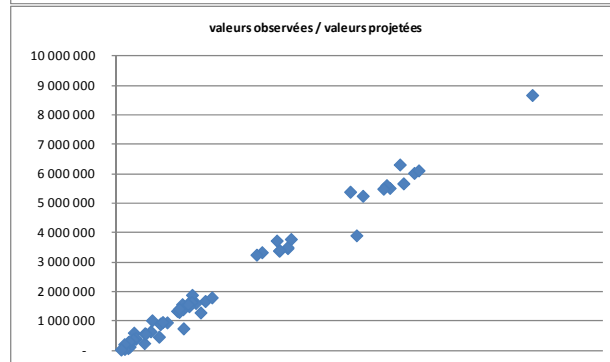
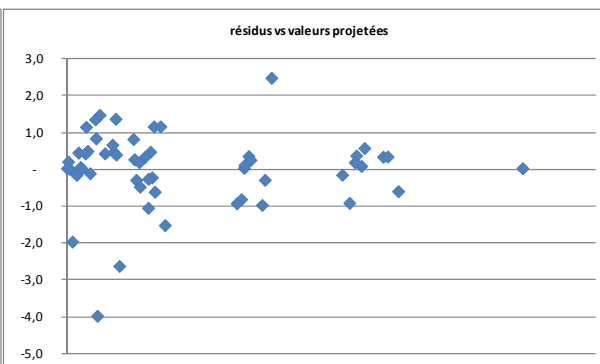
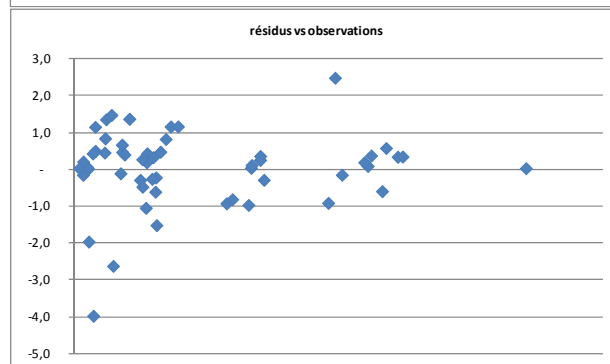
Modèle Christophides



Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

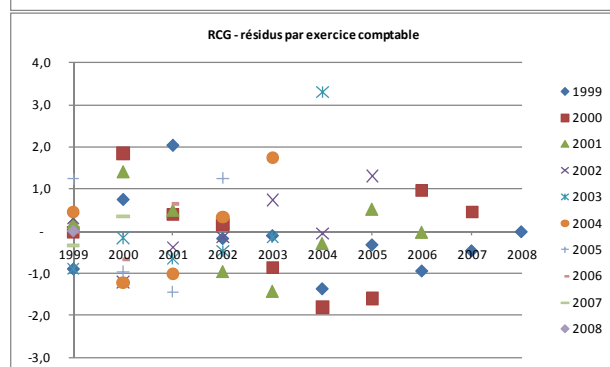
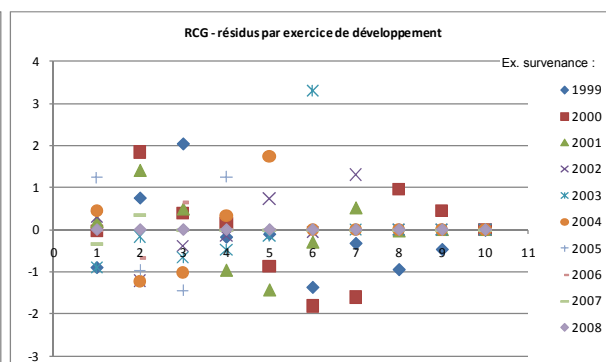
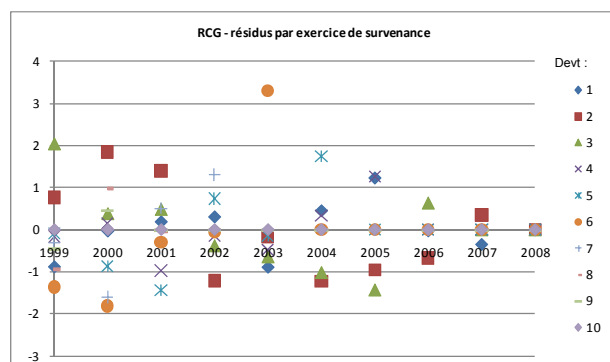
On remarque néanmoins que, pour le 3^{ème} développement, les résidus sont positifs pour les exercices de survénance 2002 et antérieurs, et négatifs pour les exercices 2004 et ultérieurs.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.



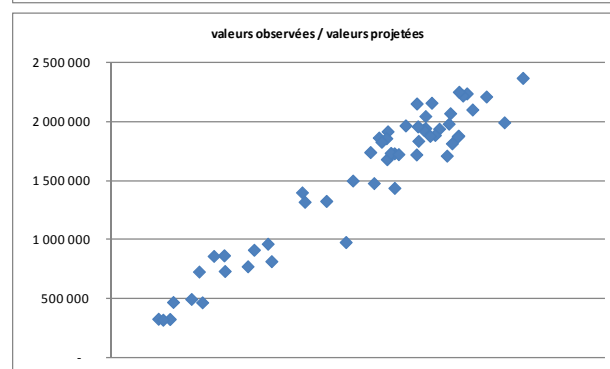
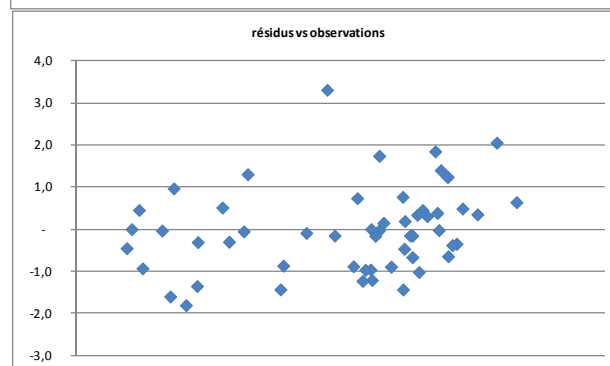
Segment RC Générale

Modèle GLM Poisson

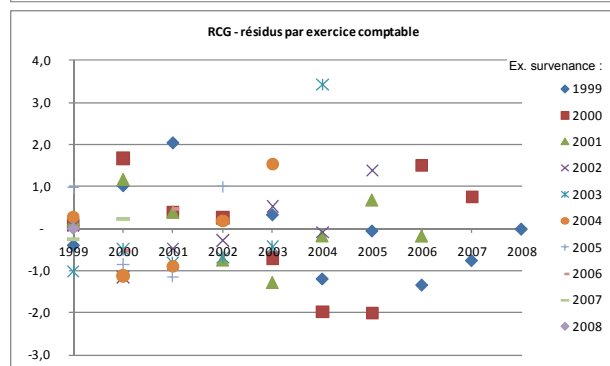
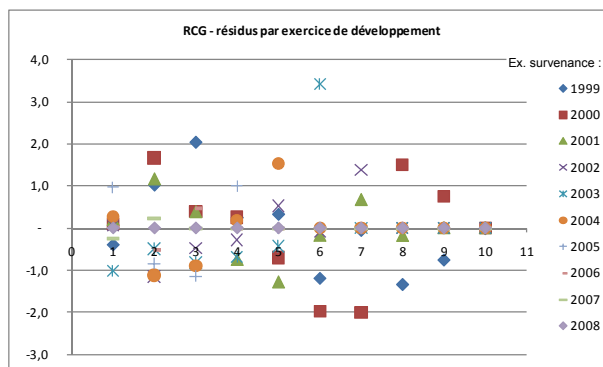
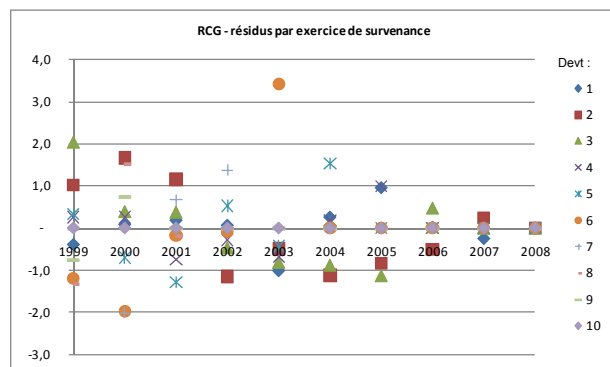


Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.

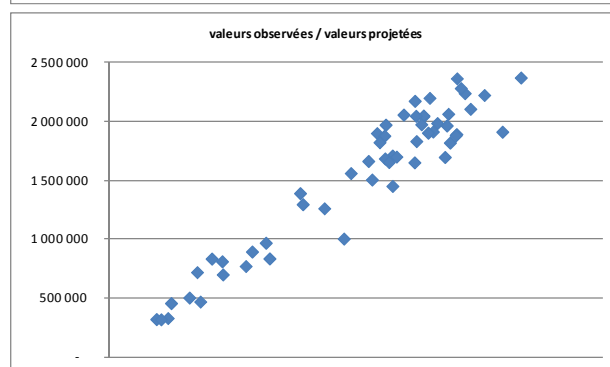
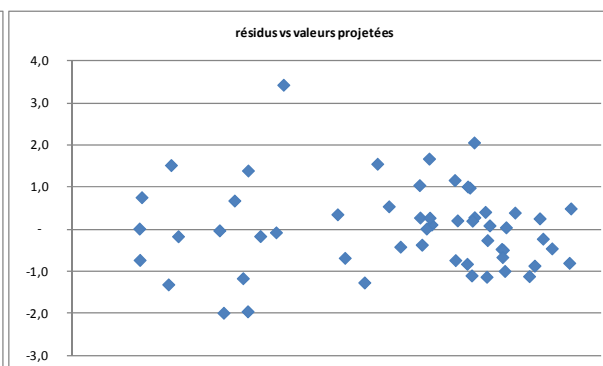
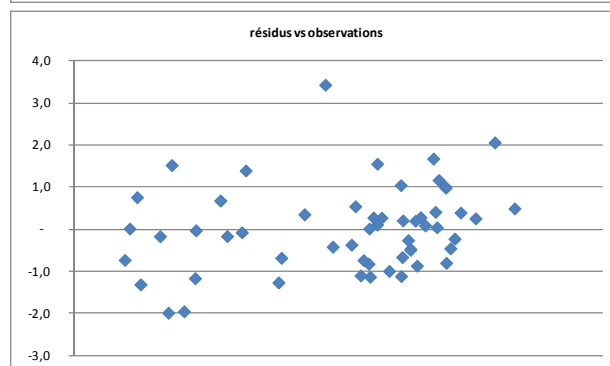


■ Modèle GLM Gamma

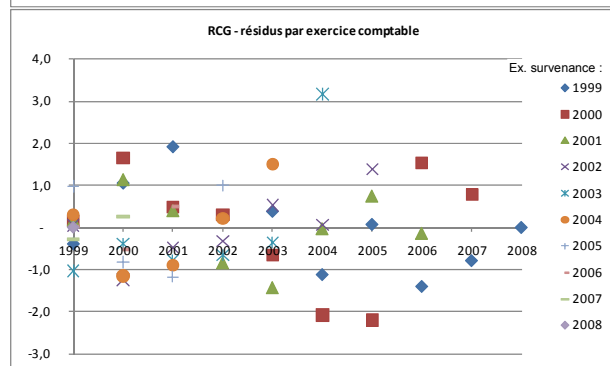
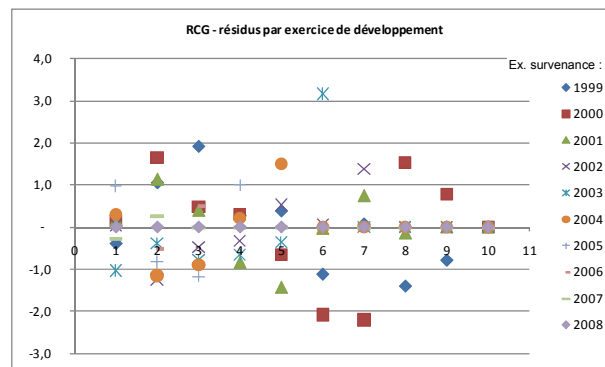
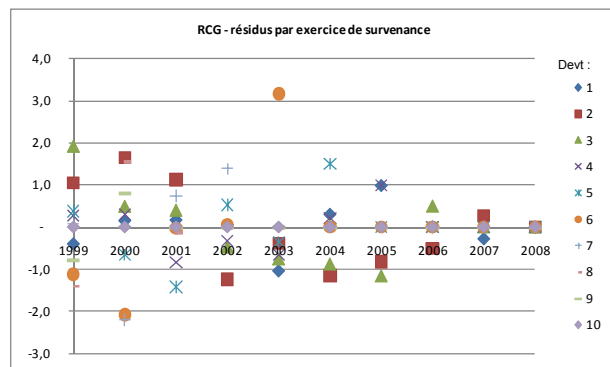


Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.

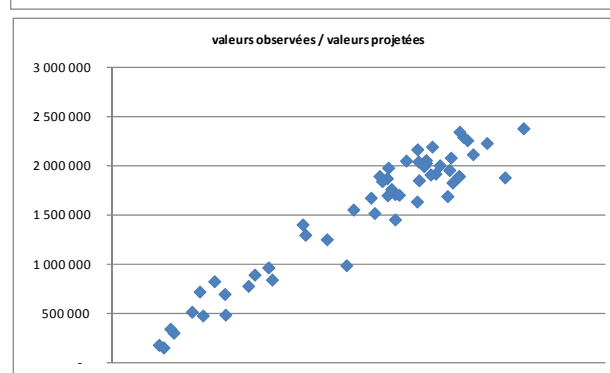
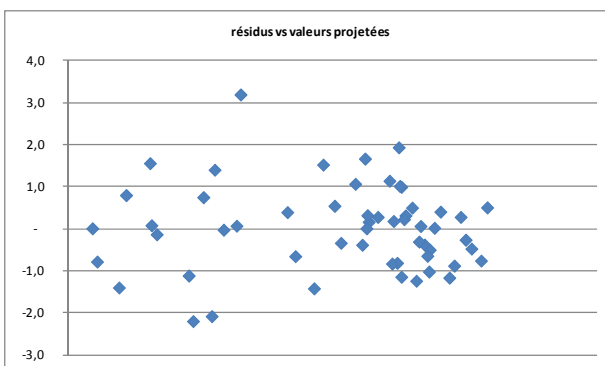
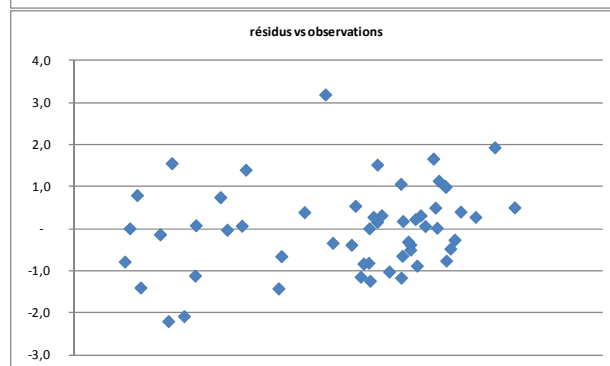


■ Modèle Christophides



Les graphiques ne montrent pas une structure non aléatoire des résidus.

Les valeurs observées / projetées par le modèle sont alignées sur une droite.



Le tableau ci-dessous présente les résultats du test « up and down » pour les différents segments et modèles GLM testés :

Résultats du tests up and down		
Segment	modèle	p-value
RC Auto	GLM-Poisson	0.16
	GLM-Gamma	0.13
	Christophides	0.13
DAB Pro	GLM-Poisson	0.91
	GLM-Gamma	0.91
	Christophides	0.23
RCG	GLM-Poisson	0.16
	GLM-Gamma	0.01
	Christophides	0.04

Excepté le cas du segment « RCG » avec la loi Gamma et la loi log-normale, nous ne rejetons pas l'hypothèse du caractère indépendant des résidus pour l'ensemble des autres modèles. Ainsi, nous pouvons considérer que pour chaque branche étudiée, les variables de paiements non cumulés Y_{ij} sont indépendantes.

- **Sorties de la régression initiale**

Nous présentons ici l'estimation des paramètres des différents modèles (sur triangle initial), ainsi que les tests de significativité des coefficients :

- ✓ **Segment RC Auto**

- **Modèle GLM Poisson**

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)  9.960333   0.004742 2100.38 <2e-16 ***
devF2        -0.322072   0.003318  -97.07 <2e-16 ***
devF3       -1.118454   0.004601 -243.09 <2e-16 ***
devF4       -1.680863   0.006174 -272.26 <2e-16 ***
devF5       -2.322146   0.008886 -261.31 <2e-16 ***
devF6       -3.096422   0.014073 -220.03 <2e-16 ***
devF7       -3.803558   0.022312 -170.47 <2e-16 ***
devF8       -4.422235   0.035346 -125.11 <2e-16 ***
devF9       -5.047158   0.059683  -84.57 <2e-16 ***
devF10      -5.351649   0.099937  -53.55 <2e-16 ***
anF2         0.067959   0.006143   11.06 <2e-16 ***
anF3         0.096881   0.006106   15.87 <2e-16 ***
anF4         0.139285   0.006055   23.00 <2e-16 ***
anF5         0.125565   0.006091   20.61 <2e-16 ***
anF6         0.127017   0.006123   20.75 <2e-16 ***
anF7         0.151368   0.006161   24.57 <2e-16 ***
anF8         0.173541   0.006278   27.64 <2e-16 ***
anF9         0.237181   0.006492   36.53 <2e-16 ***
anF10        0.242412   0.007717   31.41 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Null deviance: 509017.02 on 54 degrees of freedom
Residual deviance: 151.29 on 36 degrees of freedom

```

- **Modèle GLM Gamma**

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.95570   0.01762  564.927 < 2e-16 ***
devF2       -0.32033   0.01720  -18.622 < 2e-16 ***
devF3       -1.11710   0.01799  -62.097 < 2e-16 ***
devF4       -1.68133   0.01885  -89.195 < 2e-16 ***
devF5       -2.32376   0.01987 -116.929 < 2e-16 ***
devF6       -3.09832   0.02117 -146.348 < 2e-16 ***
devF7       -3.80305   0.02293 -165.841 < 2e-16 ***
devF8       -4.42253   0.02555 -173.109 < 2e-16 ***
devF9       -5.05818   0.03004 -168.388 < 2e-16 ***
devF10      -5.34702   0.04052 -131.953 < 2e-16 ***
anF2         0.08913   0.01720   5.182 8.61e-06 ***
anF3         0.09495   0.01799   5.278 6.41e-06 ***
anF4         0.13797   0.01885   7.319 1.26e-08 ***
anF5         0.13936   0.01987   7.013 3.16e-08 ***
anF6         0.13131   0.02117   6.203 3.73e-07 ***
anF7         0.15041   0.02293   6.559 1.25e-07 ***
anF8         0.17157   0.02555   6.716 7.77e-08 ***
anF9         0.23839   0.03004   7.936 2.02e-09 ***
anF10        0.24705   0.04052   6.097 5.16e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Null deviance: 92.902305 on 54 degrees of freedom
Residual deviance: 0.047854 on 36 degrees of freedom

```


■ Modèle Christophides

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
anF1   9.95534    0.01760  565.72 <2e-16 ***
anF2  10.04444    0.01760  570.78 <2e-16 ***
anF3  10.05063    0.01786  562.81 <2e-16 ***
anF4  10.09352    0.01830  551.71 <2e-16 ***
anF5  10.09478    0.01893  533.22 <2e-16 ***
anF6  10.08681    0.01984  508.28 <2e-16 ***
anF7  10.10598    0.02119  476.86 <2e-16 ***
anF8  10.12714    0.02332  434.21 <2e-16 ***
anF9  10.19392    0.02716  375.35 <2e-16 ***
anF10 10.20274    0.03644  280.01 <2e-16 ***
devF2  -0.32026    0.01718  -18.64 <2e-16 ***
devF3  -1.11715    0.01796  -62.19 <2e-16 ***
devF4  -1.68119    0.01882  -89.32 <2e-16 ***
devF5  -2.32368    0.01984 -117.09 <2e-16 ***
devF6  -3.09843    0.02114 -146.56 <2e-16 ***
devF7  -3.80336    0.02290 -166.09 <2e-16 ***
devF8  -4.42302    0.02551 -173.38 <2e-16 ***
devF9  -5.06331    0.03000 -168.80 <2e-16 ***
devF10 -5.34665    0.04046 -132.13 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.03644 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared:  1, Adjusted R-squared:  1
F-statistic: 1.558e+05 on 19 and 36 DF, p-value: < 2.2e-16

```

✓ Segment DAB Professionnels

■ Modèle GLM Poisson

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) 15.5305042  0.0002889 53752.21 <2e-16 ***
devF2      -0.4727085  0.0002264 -2087.79 <2e-16 ***
devF3      -1.2077341  0.0003100 -3895.47 <2e-16 ***
devF4      -1.3940598  0.0003543 -3934.40 <2e-16 ***
devF5      -1.7715346  0.0004517 -3922.04 <2e-16 ***
devF6      -2.2121723  0.0006033 -3666.97 <2e-16 ***
devF7      -2.6688019  0.0008255 -3232.93 <2e-16 ***
devF8      -3.0171236  0.0011086 -2721.57 <2e-16 ***
devF9      -3.3425967  0.0016034 -2084.67 <2e-16 ***
devF10     -3.7848493  0.0028297 -1337.55 <2e-16 ***
anF2        0.0184511  0.0003701   49.85 <2e-16 ***
anF3        0.0631955  0.0003679  171.75 <2e-16 ***
anF4       -0.0958939  0.0003856  -248.70 <2e-16 ***
anF5       -0.1044393  0.0003900  -267.80 <2e-16 ***
anF6        0.0247242  0.0003824   64.65 <2e-16 ***
anF7        0.1416630  0.0003798  373.01 <2e-16 ***
anF8       -0.0199140  0.0004114   -48.40 <2e-16 ***
anF9        0.0878743  0.0004213  208.60 <2e-16 ***
anF10       0.4328444  0.0004475  967.35 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Null deviance: 95671087 on 54 degrees of freedom
Residual deviance: 778388 on 36 degrees of freedom

```

Modèle GLM Gamma

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 15.510057  0.057222 271.050 < 2e-16 ***
devF2      -0.476628  0.055853  -8.534 3.59e-10 ***
devF3      -1.207616  0.058412 -20.674 < 2e-16 ***
devF4      -1.395367  0.061206 -22.798 < 2e-16 ***
devF5      -1.773091  0.064529 -27.477 < 2e-16 ***
devF6      -2.221663  0.068742 -32.319 < 2e-16 ***
devF7      -2.675400  0.074460 -35.930 < 2e-16 ***
devF8      -3.009078  0.082954 -36.274 < 2e-16 ***
devF9      -3.325567  0.097537 -34.096 < 2e-16 ***
devF10     -3.764402  0.131576 -28.610 < 2e-16 ***
anF2        0.025788  0.055853  0.462 0.64706
anF3        0.091974  0.058412  1.575 0.12410
anF4       -0.026611  0.061206  -0.435 0.66632
anF5       -0.051095  0.064529  -0.792 0.43366
anF6        0.026788  0.068742  0.390 0.69907
anF7        0.146053  0.074460  1.961 0.05759
anF8       -0.006349  0.082954  -0.077 0.93942
anF9        0.101827  0.097537  1.044 0.30345
anF10       0.453292  0.131576  3.445 0.00147 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Null deviance: 52.55954 on 54 degrees of freedom
Residual deviance: 0.55186 on 36 degrees of freedom

```

Modèle Christophides

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
anF1  15.51057  0.06119 253.468 < 2e-16 ***
anF2  15.52783  0.06119 253.750 < 2e-16 ***
anF3  15.59900  0.06210 251.201 < 2e-16 ***
anF4  15.48690  0.06362 243.437 < 2e-16 ***
anF5  15.46096  0.06583 234.853 < 2e-16 ***
anF6  15.53831  0.06901 225.169 < 2e-16 ***
anF7  15.64559  0.07369 212.303 < 2e-16 ***
anF8  15.50594  0.08110 191.189 < 2e-16 ***
anF9  15.61325  0.09444 165.326 < 2e-16 ***
anF10 15.96335  0.12670 125.990 < 2e-16 ***
devF2 -0.48054  0.05973  -8.045 1.47e-09 ***
devF3 -1.21097  0.06247 -19.386 < 2e-16 ***
devF4 -1.39393  0.06545 -21.296 < 2e-16 ***
devF5 -1.78040  0.06901 -25.800 < 2e-16 ***
devF6 -2.24094  0.07351 -30.484 < 2e-16 ***
devF7 -2.68046  0.07963 -33.662 < 2e-16 ***
devF8 -3.00557  0.08871 -33.881 < 2e-16 ***
devF9 -3.32207  0.10431 -31.849 < 2e-16 ***
devF10 -3.76491  0.14071 -26.757 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1267 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9999, Adjusted R-squared: 0.9999
F-statistic: 3.637e+04 on 19 and 36 DF, p-value: < 2.2e-16

```

✓ **Segment RCG**▪ **Modèle GLM Poisson**

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) 14.3685027 0.0003859 37236.62 <2e-16 ***
devF2       -0.0116095 0.0003414  -34.01 <2e-16 ***
devF3        0.1351728 0.0003470  389.58 <2e-16 ***
devF4       -0.0040919 0.0003783  -10.82 <2e-16 ***
devF5       -0.2712319 0.0004326  -626.97 <2e-16 ***
devF6       -0.6979505 0.0005395 -1293.79 <2e-16 ***
devF7       -0.8645081 0.0006373 -1356.59 <2e-16 ***
devF8       -1.3071866 0.0008855 -1476.27 <2e-16 ***
devF9       -1.6662303 0.0012766 -1305.21 <2e-16 ***
devF10      -1.6900605 0.0018073  -935.11 <2e-16 ***
anF2        -0.0058438 0.0004290  -13.62 <2e-16 ***
anF3         0.0531283 0.0004276   124.24 <2e-16 ***
anF4         0.1077333 0.0004284   251.49 <2e-16 ***
anF5         0.1220165 0.0004370   279.23 <2e-16 ***
anF6         0.0800027 0.0004551   175.81 <2e-16 ***
anF7         0.0770730 0.0004805   160.39 <2e-16 ***
anF8         0.1730984 0.0005121   337.99 <2e-16 ***
anF9         0.2510259 0.0005875   427.27 <2e-16 ***
anF10        -0.0350618 0.0008629   -40.63 <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Null deviance: 15706391 on 54 degrees of freedom
Residual deviance: 1027662 on 36 degrees of freedom

```

▪ **Modèle Gamma**

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 14.320524 0.074275 192.804 < 2e-16 ***
devF2       -0.006954 0.072497  -0.096 0.92412
devF3        0.139000 0.075820  1.833 0.07504 .
devF4       -0.005194 0.079446  -0.065 0.94823
devF5       -0.275703 0.083760  -3.292 0.00224 **
devF6       -0.715054 0.089228  -8.014 1.61e-09 ***
devF7       -0.862184 0.096651  -8.921 1.20e-10 ***
devF8       -1.286127 0.107675 -11.945 4.40e-14 ***
devF9       -1.636166 0.126604 -12.924 4.35e-15 ***
devF10      -1.642081 0.170787  -9.615 1.76e-11 ***
anF2         0.027276 0.072497  0.376 0.70895
anF3         0.096563 0.075820  1.274 0.21097
anF4         0.176598 0.079446  2.223 0.03259 *
anF5         0.212238 0.083760  2.534 0.01577 *
anF6         0.139768 0.089228  1.566 0.12600
anF7         0.128219 0.096651  1.327 0.19299
anF8         0.215245 0.107675  1.999 0.05320 .
anF9         0.296793 0.126604  2.344 0.02470 *
anF10        0.012917 0.170787  0.076 0.94013
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Null deviance: 13.53885 on 54 degrees of freedom
Residual deviance: 0.82679 on 36 degrees of freedom

```

■ Modèle Christophides

```

Coefficients:
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
anF1  14.318930  0.072693 196.978 < 2e-16 ***
anF2  14.340868  0.072693 197.280 < 2e-16 ***
anF3  14.419858  0.073767 195.478 < 2e-16 ***
anF4  14.499692  0.075573 191.863 < 2e-16 ***
anF5  14.523087  0.078204 185.708 < 2e-16 ***
anF6  14.456043  0.081975 176.346 < 2e-16 ***
anF7  14.443387  0.087544 164.985 < 2e-16 ***
anF8  14.537879  0.096343 150.896 < 2e-16 ***
anF9  14.619653  0.112187 130.315 < 2e-16 ***
anF10 14.333441  0.150514  95.230 < 2e-16 ***
devF2 -0.012532  0.070953  -0.177  0.86080
devF3  0.134450  0.074204   1.812  0.07835 .
devF4 -0.004488  0.077754  -0.058  0.95429
devF5 -0.279372  0.081975  -3.408  0.00163 **
devF6 -0.736401  0.087328  -8.433  4.79e-10 ***
devF7 -0.874918  0.094592  -9.249  4.79e-11 ***
devF8 -1.294672  0.105381 -12.286 1.94e-14 ***
devF9 -1.636238  0.123907 -13.205 2.28e-15 ***
devF10 -1.640488  0.167149  -9.815 1.02e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1505 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9999,    Adjusted R-squared: 0.9999
F-statistic: 2.553e+04 on 19 and 36 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

- **Résultats complémentaires**

Les tableaux suivants présentent des résultats complémentaires par rapport à ceux présentés dans le corps du rapport.

Pour chacun des segments et des modèles, on trouvera dans les tableaux :

- Le montant Best estimate des provisions estimé selon le modèle spécifié, par exercice de survenance et au total,
- L'erreur standard d'estimation, par exercice de survenance et au total. Ce montant correspond à l'écart-type de la distribution du montant des provisions, avant tirage selon la loi spécifiée,
- L'erreur standard de prédiction, par exercice de survenance et au total. Ce montant correspond à l'écart-type de la distribution du montant des provisions, après tirage selon la loi spécifiée,
- L'erreur de processus, par exercice de survenance et au total (par différence entre l'erreur de prédiction et l'erreur d'estimation)
- Le ratio $\frac{\text{erreur standard de prédiction}}{\text{BE des provisions}} = \frac{\hat{\sigma}_{ult}}{\hat{E}(R^t)}$, par exercice de survenance et au total,
- Le quantile à 99.5% de la distribution des provisions, par exercice de survenance et au total,
- La moyenne de la distribution des provisions donnée par la procédure bootstrap,
- L'erreur de prédiction obtenue à partir de la méthode delta pour l'erreur d'estimation et de la forme analytique $(\sum_{i=1}^n \sum_{j>n-i+1} \text{Var}(\hat{\mu}_{ij}))$ pour l'erreur de processus.

Tous les montants sont en m\$.

✓ **Segment Auto RC**

- Modèle GLM Poisson

RC Auto - résultats Bootstrap à l'ultime (Poisson)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	-	-	-	-		-
2000	107	22	21	31	28,4%	199
2001	260	29	33	44	17,0%	386
2002	564	38	49	62	11,0%	735
2003	1 091	45	68	82	7,5%	1 312
2004	2 180	58	96	112	5,2%	2 481
2005	4 649	83	139	162	3,5%	5 078
2006	9 442	129	200	238	2,5%	10 075
2007	18 832	227	281	361	1,9%	19 785
2008	38 480	533	402	668	1,7%	40 220
TOTAL	75 605	754	566	943	1,2%	78 053

moyenne distribution bootstrap	75 612
erreur de prédiction (delta+analytique)	672

 ■ Modèle GLM Gamma

RC Auto - résultats Bootstrap à l'ultime (Gamma)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	-	-	-	-		-
2000	110	4	21	6	28,4%	128
2001	258	7	33	10	17,0%	284
2002	559	12	49	18	11,0%	607
2003	1 100	23	68	32	7,5%	1 187
2004	2 176	45	96	64	5,2%	2 347
2005	4 616	100	139	141	3,5%	4 995
2006	9 371	226	200	300	2,5%	10 192
2007	18 770	535	281	658	1,9%	20 641
2008	38 516	1 503	402	1 704	1,7%	44 229
TOTAL	75 605	1 670	566	1 906	1,2%	81 452

moyenne distribution bootstrap	75 485
erreur de prédiction (delta+analytique)	1 914

 ■ Modèle Christophides

RC Auto - résultats Bootstrap à l'ultime (Christophides)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	-	-	-	-		-
2000	110	5	21	6	28,4%	129
2001	257	7	33	10	17,0%	285
2002	559	13	49	18	11,0%	607
2003	1 100	23	68	33	7,5%	1 188
2004	2 176	45	96	64	5,2%	2 353
2005	4 617	102	139	142	3,5%	5 005
2006	9 375	228	200	303	2,5%	10 221
2007	18 778	537	281	658	1,9%	20 721
2008	38 542	1 540	402	1 739	1,7%	44 580
TOTAL	75 605	1 708	566	1 941	1,2%	81 804

moyenne distribution bootstrap	75 568
erreur de prédiction (delta+analytique)	1 913

✓ **Segment DAB Professionnels**

- Modèle GLM Poisson

DAB Pro - résultats Bootstrap à l'ultime (Poisson)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	-	-	-	-		-
2000	129	54	53	76	58,7%	410
2001	344	76	86	115	33,5%	711
2002	540	79	109	135	24,9%	947
2003	883	95	137	167	18,9%	1 368
2004	1 628	132	187	229	14,1%	2 279
2005	2 919	191	253	317	10,9%	3 820
2006	3 834	232	288	370	9,7%	4 870
2007	6 084	349	363	503	8,3%	7 520
2008	13 930	803	543	970	7,0%	17 194
TOTAL	30 290	1 307	809	1 537	5,1%	34 665

moyenne distribution bootstrap	30 321
erreur de prédiction (delta+analytique)	807

 ▪ Modèle GLM Gamma

DAB Pro - résultats Bootstrap à l'ultime (Gamma)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	-	-	-	-		-
2000	130	17	16	23	17,9%	196
2001	353	31	30	44	12,3%	474
2002	575	42	41	59	10,3%	739
2003	917	63	58	86	9,4%	1 155
2004	1 598	108	96	144	9,0%	1 995
2005	2 870	206	166	264	9,2%	3 585
2006	3 805	300	216	370	9,7%	4 799
2007	6 041	564	322	650	10,8%	7 780
2008	13 904	1 773	783	1 938	13,9%	19 426
TOTAL	30 193	2 013	899	2 205	7,3%	36 303

moyenne distribution bootstrap	30 241
erreur de prédiction (delta+analytique)	2 180

 ▪ Modèle Christophides

DAB Pro - résultats Bootstrap à l'ultime (Christophides)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	-	-	-	-		-
2000	129	18	17	24	18,8%	205
2001	355	33	33	46	13,0%	493
2002	583	45	45	64	10,9%	766
2003	926	66	64	92	9,9%	1 187
2004	1 601	114	103	154	9,6%	2 038
2005	2 842	211	176	274	9,7%	3 598
2006	3 828	312	234	390	10,2%	4 902
2007	6 074	586	344	679	11,2%	7 975
2008	13 961	1 829	864	2 023	14,5%	20 248
TOTAL	30 300	2 077	983	2 298	7,6%	37 216

moyenne distribution bootstrap	30 542
erreur de prédiction (delta+analytique)	2 343

✓ **Segment RCG**

- Modèle GLM Poisson

RCG - résultats Bootstrap à l'ultime (Poisson)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	409	87	92	127		873
2000	725	182	136	227	31,4%	1 526
2001	1 116	228	176	288	25,8%	2 063
2002	1 702	270	224	351	20,6%	2 806
2003	2 554	310	274	413	16,2%	3 809
2004	3 386	345	322	472	13,9%	4 767
2005	4 808	430	382	575	12,0%	6 447
2006	7 351	627	472	785	10,7%	9 601
2007	10 505	983	567	1 135	10,8%	13 829
2008	9 550	1 361	548	1 467	15,4%	14 408
TOTAL	42 106	3 048	1 465	3 382	8,0%	52 164

moyenne distribution bootstrap	42 097
erreur de prédiction (delta+analytique)	1 047

 ■ Modèle GLM Gamma

RCG - résultats Bootstrap à l'ultime (Gamma)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	409	48	83	96		716
2000	736	106	102	147	20,0%	1 243
2001	1 141	142	123	188	16,4%	1 760
2002	1 772	191	159	249	14,0%	2 561
2003	2 693	259	214	336	12,5%	3 734
2004	3 448	319	252	407	11,8%	4 663
2005	4 841	452	335	563	11,6%	6 536
2006	7 328	745	492	893	12,2%	10 070
2007	10 512	1 250	688	1 427	13,6%	14 975
2008	9 581	1 583	583	1 687	17,6%	15 449
TOTAL	42 461	2 803	1 481	3 171	7,5%	51 932

moyenne distribution bootstrap	42 731
erreur de prédiction (delta+analytique)	2 687

 ▪ Modèle Christophides

RCG - résultats Bootstrap à l'ultime (Christophides)						
exercices de survenance	BE des provisions	Bootstrap ultime				
		erreur d'estimation	erreur de processus	erreur de prédiction	ratio $SEP_{bootstrap}/BE$	quantile à 99.5% de la distribution des provisions
1999	409	49	86	99		739
2000	738	110	104	152	20,5%	1 292
2001	1 152	148	126	194	16,8%	1 815
2002	1 787	196	163	255	14,3%	2 642
2003	2 682	263	213	338	12,6%	3 763
2004	3 435	321	249	406	11,8%	4 706
2005	4 828	458	336	568	11,8%	6 570
2006	7 381	755	491	901	12,2%	10 256
2007	10 596	1 278	676	1 446	13,6%	15 303
2008	9 636	1 655	585	1 756	18,2%	16 369
TOTAL	42 643	2 885	1 472	3 239	7,6%	53 008

moyenne distribution bootstrap	43 275
erreur de prédiction (delta+analytique)	2 650

ANNEXE I : RESULTATS DE LA PROCEDURE BOOTSTRAP « A UN AN »

- **Résultats complémentaires**

Les tableaux suivants présentent des résultats complémentaires par rapport à ceux présentés dans le corps du rapport.

Les résultats présentés concernent la méthode 2 de l'adaptation de la procédure bootstrap à horizon un an.

Pour chacun des segments et des modèles, on trouvera dans les tableaux :

- Le montant Best estimate des provisions estimé selon le modèle spécifié, par exercice de survenance et au total,
- Le quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date $t=1$, par exercice de survenance et au total,
- L'erreur standard de prédiction des paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$,
- L'erreur d'estimation du montant des provisions à la date $t=1$,
- La moyenne de la distribution des paiements effectués entre $t=0$ et $t=1$ donnée par la procédure bootstrap,
- La moyenne de la distribution des provisions à la date $t=1$ donnée par la procédure bootstrap,
- La moyenne de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$,
- L'opposé du quantile à 0.5% de la distribution de $\hat{CDR}(I+1)$.

Tous les montants sont en m\$.

✓ **Segment Auto RC**

- Modèle GLM Poisson

RC Auto - résultats Bootstrap à un an (Poisson)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	-	-
2000	107	-
2001	260	151
2002	564	331
2003	1 091	633
2004	2 180	1 191
2005	4 649	2 369
2006	9 442	4 954
2007	18 832	10 395
2008	38 480	19 509
TOTAL	75 605	39 048

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	398
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	395
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	37 597
moyenne de la distribution des provisions à t=1	38 014
écart-type de la distribution du CDR	674
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	0,9%
moyenne de la distribution du CDR	- 6
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	1 778

 ■ Modèle GLM Gamma

RC Auto - résultats Bootstrap à un an (Gamma)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	-	-
2000	110	-
2001	258	120
2002	559	285
2003	1 100	590
2004	2 176	1 149
2005	4 616	2 339
2006	9 371	5 003
2007	18 770	10 692
2008	38 516	20 540
TOTAL	75 475	39 725

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	803
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	626
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	37 566
moyenne de la distribution des provisions à t=1	37 919
écart-type de la distribution du CDR	1 297
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	1,7%
moyenne de la distribution du CDR	- 11
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	4 196

 ▪ Modèle Christophides

RC Auto - résultats Bootstrap à un an (Christophides)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	-	-
2000	110	-
2001	257	121
2002	559	285
2003	1 100	590
2004	2 176	1 150
2005	4 617	2 344
2006	9 375	5 011
2007	18 778	10 721
2008	38 542	20 611
TOTAL	75 513	39 788

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	814
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	633
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	37 590
moyenne de la distribution des provisions à t=1	37 950
écart-type de la distribution du CDR	1 313
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	1,7%
moyenne de la distribution du CDR	- 26
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	4 382

✓ **Segment DAB Professionnels**

- Modèle GLM Poisson

DAB Pro - résultats Bootstrap à un an (Poisson)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	-	-
2000	129	-
2001	344	273
2002	540	443
2003	883	719
2004	1 628	1 258
2005	2 919	2 192
2006	3 834	2 943
2007	6 084	5 010
2008	13 930	9 962
TOTAL	30 290	21 370

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	488
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	810
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	11 153
moyenne de la distribution des provisions à t=1	19 157
écart-type de la distribution du CDR	1 120
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	3,7%
moyenne de la distribution du CDR	- 21
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	3 217

 ▪ Modèle GLM Gamma

DAB Pro - résultats Bootstrap à un an (Gamma)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	-	-
2000	130	-
2001	353	174
2002	575	373
2003	917	656
2004	1 598	1 153
2005	2 870	2 100
2006	3 805	2 892
2007	6 041	5 070
2008	13 904	10 615
TOTAL	30 193	21 588

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	697
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	964
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	11 102
moyenne de la distribution des provisions à t=1	19 112
écart-type de la distribution du CDR	1 502
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	5,0%
moyenne de la distribution du CDR	- 21
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	3 889

 ▪ Modèle Christophides

DAB Pro - résultats Bootstrap à un an (Christophides)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	-	-
2000	129	-
2001	355	177
2002	583	382
2003	926	672
2004	1 601	1 177
2005	2 842	2 104
2006	3 828	2 942
2007	6 074	5 180
2008	13 961	10 877
TOTAL	30 300	21 921

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	712
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	1 010
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	11 138
moyenne de la distribution des provisions à t=1	19 259
écart-type de la distribution du CDR	1 558
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	5,1%
moyenne de la distribution du CDR	- 97
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	4 335

✓ **Segment RCG**

- Modèle GLM Poisson

RCG - résultats Bootstrap à un an (Poisson)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	409	608
2000	725	608
2001	1 116	1 205
2002	1 702	1 725
2003	2 554	2 365
2004	3 386	3 173
2005	4 808	4 227
2006	7 351	6 509
2007	10 505	9 780
2008	9 550	10 349
TOTAL	42 106	37 208

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	559
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	2 041
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	10 658
moyenne de la distribution des provisions à t=1	31 420
écart-type de la distribution du CDR	2 358
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	5,6%
moyenne de la distribution du CDR	27
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	6 671

 ▪ Modèle GLM Gamma

RCG - résultats Bootstrap à un an (Gamma)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	409	530
2000	736	543
2001	1 141	1 070
2002	1 772	1 634
2003	2 693	2 363
2004	3 448	3 195
2005	4 841	4 315
2006	7 328	6 686
2007	10 512	10 390
2008	9 581	10 865
TOTAL	42 461	36 961

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	654
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	1 829
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	10 742
moyenne de la distribution des provisions à t=1	31 978
écart-type de la distribution du CDR	2 212
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	5,2%
moyenne de la distribution du CDR	- 263
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	6 507

 ▪ Modèle Christophides

RCG - résultats Bootstrap à un an (Christophides)		
exercices de survenance	BE des provisions	quantile à 99.5% de la distribution des provisions à la date t=1
1999	409	538
2000	738	548
2001	1 152	1 100
2002	1 787	1 669
2003	2 682	2 378
2004	3 435	3 207
2005	4 828	4 323
2006	7 381	6 816
2007	10 596	10 592
2008	9 636	11 112
TOTAL	42 643	37 563

erreur de prédiction des paiements effectués entre t=0 et t=1	675
erreur d'estimation des provisions évaluées à t=1	1 847
moyenne de la distribution des paiements effectués entre t=0 et t=1	10 793
moyenne de la distribution des provisions à t=1	32 303
écart-type de la distribution du CDR	2 266
ratio écart-type de la distribution du CDR/BE des provisions à t=0	5,3%
moyenne de la distribution du CDR	- 454
-Quantile0.5% de la distribution du CDR	7 026

ANNEXE J : CORRELATIONS DES PAIEMENTS FUTURS

Nous présentons la matrice de corrélation entre les paiements futurs (triangle inférieur), pour le segment « DAB Professionnels » et le modèle poissonien, dans le cadre :

- De la procédure bootstrap à l'ultime,
- De la procédure bootstrap à un an – méthode 1,
- De la procédure bootstrap à un an – méthode 2,

On observera que les corrélations sont plus élevées dans le cadre de la procédure à un an, en particulier entre éléments relatifs au même exercice de survenance ou à la même année de développement.

Les éléments relatifs à un même exercice de survenance sont surlignés en violet et les éléments relatifs à un même développement sont surlignés en jaune.

- Procédure bootstrap à l'ultime

Matrice de corrélation des incréments futurs

	cases du triangle inférieur																																													
	(10,2)	(9,3)	(8,4)	(7,5)	(6,6)	(5,7)	(4,8)	(3,9)	(2,10)	(10,3)	(9,4)	(8,5)	(7,6)	(6,7)	(5,8)	(4,9)	(3,10)	(10,4)	(9,5)	(8,6)	(7,7)	(6,8)	(5,9)	(4,10)	(10,5)	(9,6)	(8,7)	(7,8)	(6,9)	(5,10)	(10,6)	(9,7)	(8,8)	(7,9)	(6,10)	(10,7)	(9,8)	(8,9)	(7,10)	(10,8)	(9,9)	(8,10)	(7,9)	(10,9)	(9,10)	(10,10)
(10,2)	100%	-1%	0%	0%	0%	-1%	-1%	0%	0%	30%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	27%	-1%	0%	0%	0%	0%	-1%	22%	0%	0%	-1%	1%	-1%	18%	-1%	-1%	0%	0%	14%	-1%	-1%	0%	11%	0%	1%	10%	0%	6%	
(9,3)	-1%	100%	1%	-1%	-1%	0%	0%	1%	-1%	13%	14%	1%	0%	0%	-1%	1%	0%	1%	12%	-1%	0%	0%	0%	0%	1%	8%	0%	-1%	1%	-1%	0%	8%	0%	0%	0%	7%	1%	-1%	0%	5%	0%	0%	3%	0%		
(8,4)	0%	1%	100%	0%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	13%	10%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	14%	2%	8%	-1%	0%	1%	0%	2%	1%	6%	0%	0%	2%	1%	6%	0%	1%	1%	0%	4%	0%	1%	1%	3%	1%	1%	0%	
(7,5)	0%	-1%	0%	100%	-1%	0%	1%	0%	1%	0%	0%	16%	6%	-1%	0%	0%	0%	-1%	16%	1%	5%	-1%	0%	0%	18%	1%	1%	4%	0%	0%	1%	1%	3%	0%	1%	1%	0%	2%	0%	1%	1%	0%	1%	1%	1%	
(6,6)	0%	-1%	1%	-1%	100%	0%	0%	1%	1%	-1%	0%	0%	19%	4%	0%	1%	0%	0%	-1%	18%	1%	3%	1%	0%	0%	18%	1%	0%	2%	0%	20%	1%	0%	0%	1%	1%	0%	1%	1%	0%	1%	1%	1%	1%	1%	
(5,7)	-1%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	19%	2%	0%	0%	0%	1%	0%	20%	1%	1%	0%	0%	-1%	19%	1%	0%	2%	0%	20%	0%	0%	1%	1%	0%	1%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	1%	
(4,8)	-1%	0%	0%	1%	0%	0%	100%	-1%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	23%	2%	0%	0%	1%	0%	0%	24%	0%	2%	0%	-1%	1%	24%	0%	0%	1%	1%	23%	0%	0%	1%	24%	-1%	0%	27%	0%	1%	0%	1%	0%	
(3,9)	0%	1%	0%	0%	1%	0%	-1%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	-1%	33%	1%	1%	0%	0%	0%	0%	34%	0%	1%	0%	34%	0%	0%	0%	0%	36%	1%	0%	0%	35%	0%	0%	36%	0%	39%	1%	0%		
(2,10)	0%	-1%	0%	1%	1%	1%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	-1%	1%	0%	0%	0%	51%	0%	0%	0%	0%	0%	49%	0%	-1%	1%	0%	-1%	49%	1%	0%	0%	51%	1%	0%	1%	52%	0%	0%	51%	0%	52%	56%		
(10,3)	30%	13%	0%	0%	-1%	0%	0%	0%	0%	100%	2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	21%	2%	-1%	0%	0%	0%	0%	17%	0%	-1%	0%	1%	0%	13%	1%	0%	1%	1%	1%	0%	10%	1%	1%	7%	0%	4%			
(9,4)	0%	14%	13%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	100%	2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	15%	11%	1%	-1%	0%	0%	0%	2%	9%	0%	0%	0%	0%	1%	7%	0%	0%	0%	1%	6%	1%	0%	2%	5%	0%	1%	3%	1%	
(8,5)	0%	0%	10%	16%	0%	0%	1%	0%	-1%	0%	2%	100%	2%	0%	0%	0%	0%	1%	15%	7%	1%	1%	0%	0%	17%	1%	5%	1%	0%	0%	1%	0%	5%	1%	0%	1%	1%	4%	0%	1%	0%	2%	0%	0%	0%	
(7,6)	0%	0%	0%	0%	6%	19%	0%	0%	1%	0%	0%	2%	100%	1%	-1%	0%	1%	0%	1%	19%	5%	-1%	0%	1%	1%	19%	1%	3%	1%	1%	20%	1%	0%	2%	1%	0%	3%	0%	1%	1%	1%	1%	1%	1%		
(6,7)	0%	0%	0%	-1%	4%	19%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	100%	0%	1%	1%	0%	0%	1%	21%	2%	1%	0%	0%	0%	20%	1%	2%	0%	1%	20%	0%	2%	23%	1%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	0%	1%		
(5,8)	0%	-1%	1%	0%	0%	2%	23%	-1%	0%	0%	0%	0%	-1%	0%	100%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	24%	1%	0%	0%	-1%	0%	24%	1%	1%	0%	0%	24%	0%	0%	1%	23%	0%	0%	28%	0%	1%	0%	1%		
(4,9)	0%	1%	1%	0%	1%	0%	2%	33%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	100%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	3%	1%	0%	0%	3%	1%	32%	1%	0%	0%	0%	34%	1%	0%	0%	33%	1%	1%	33%	0%	36%	1%	1%		
(3,10)	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	51%	0%	0%	0%	1%	1%	0%	1%	100%	0%	0%	1%	0%	-1%	1%	50%	0%	0%	0%	0%	50%	1%	0%	0%	51%	0%	0%	1%	53%	0%	0%	51%	1%	52%	56%			
(10,4)	27%	1%	14%	-1%	0%	0%	0%	1%	0%	21%	15%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	1%	1%	-1%	0%	0%	0%	15%	1%	1%	-1%	1%	-1%	13%	1%	1%	1%	0%	10%	1%	8%	1%	7%	1%	4%				
(9,5)	-1%	12%	2%	16%	-1%	1%	1%	0%	0%	2%	11%	15%	1%	0%	0%	0%	1%	100%	2%	1%	0%	0%	0%	0%	17%	8%	1%	1%	0%	0%	1%	6%	1%	1%	5%	0%	1%	4%	1%	1%	3%	0%				
(8,6)	0%	-1%	8%	1%	18%	0%	0%	0%	0%	-1%	1%	7%	19%	1%	0%	0%	1%	1%	2%	100%	1%	0%	0%	1%	2%	18%	5%	1%	0%	1%	20%	1%	4%	1%	1%	1%	1%	3%	1%	1%	2%	0%	1%	0%		
(7,7)	0%	0%	-1%	5%	1%	20%	0%	0%	0%	-1%	1%	5%	21%	0%	0%	0%	-1%	1%	100%	1%	0%	1%	1%	1%	1%	21%	4%	0%	0%	1%	21%	0%	1%	1%	24%	1%	0%	2%	1%	0%	1%	0%	1%	1%		
(6,8)	0%	0%	0%	-1%	3%	1%	24%	0%	0%	0%	0%	1%	-1%	2%	24%	0%	-1%	0%	0%	1%	100%	-1%	0%	0%	0%	1%	26%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	25%	0%	1%	1%	25%	0%	0%	29%	0%	1%	1%	0%	
(5,9)	0%	0%	1%	0%	1%	1%	0%	34%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	1%	31%	1%	0%	0%	0%	-1%	100%	1%	0%	-1%	0%	1%	32%	1%	0%	1%	32%	1%	0%	1%	33%	1%	0%	32%	1%	0%	33%	1%	1%		
(4,10)	-1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	50%	0%	0%	1%	1%	0%	1%	100%	0%	0%	1%	0%	47%	1%	0%	0%	1%	49%	0%	1%	51%	0%	1%	49%	1%	50%	54%			
(10,5)	22%	1%	2%	18%	0%	0%	0%	1%	0%	17%	2%	17%	1%	0%	0%	0%	15%	17%	2%	1%	0%	0%	0%	100%	2%	1%	1%	1%	1%	1%	2%	0%	8%	1%	1%	0%	7%	1%	0%	6%	0%	4%				
(9,6)	0%	8%	1%	1%	18%	-1%	-1%	0%	-1%	0%	9%	1%	19%	0%	-1%	0%	1%	8%	18%	1%	0%	-1%	0%	2%	2%	100%	1%	-1%	0%	-1%	21%	6%	0%	1%	0%	1%	4%	0%	0%	3%	-1%	1%	1%	0%		
(8,7)	0%	0%	6%	1%	1%	19%	1%	1%	1%	-1%	0%	5%	1%	20%	0%	0%	1%	1%	5%	21%	1%	0%	1%	1%	100%	1%	1%	1%	1%	20%	3%	1%	1%	23%	1%	2%	0%	1%	1%	3%	1%	1%	1%			
(7,8)	-1%	-1%	0%	4%	0%	1%	24%	0%	0%	0%	0%	1%	3%	1%	24%	1%	0%	-1%	1%	1%	4%	26%	1%	1%	-1%	1%	100%	0%	0%	1%	26%	2%	0%	2%	26%	0%	2%	30%	1%	0%	1%	1%	0%			
(6,9)	1%	1%	0%	0%	2%	0%	0%	34%	-1%	1%	0%	0%	1%	2%	1%	32%	0%	1%	0%	0%	1%	32%	0%	1%	0%	1%	0%	100%	0%	0%	1%	35%	1%	1%	0%	34%	0%	0%	35%	-1%	38%	0%	0%			
(5,10)	-1%	-1%	0%	0%	0%	0%	2%	0%	0%	49%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	50%	-1%	0%	1%	0%	0%	1%	1%	47%	0%	-1%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	1%	49%	0%	1%	50%	0%	0%	48%	0%	49%	53%		
(10,6)	18%	0%	2%	1%	20%	0%	1%	0%	1%	13%	1%	1%	20%	1%	0%	0%	1%	13%	1%	20%	1%	0%	0%	1%	1%	21%	0%	0%	1%	1%	21%	0%	0%	1%	20%	1%	0%	1%	6%	1%	6%	1%	5%	1%	3%	
(9,7)	-1%	8%	1%	1%	1%	20%	1%	0%	0%	1%	7%	0%	1%	20%	0%	0%	1%	6%	1%	21%	0%	0%	1%	6%	20%	1%	0%	0%	1%	6%	20%	1%	0%	1%	23%	4%	0%	2%	3%	1%	0%	2%	0%			
(8,8)	-1%	0%	6%	1%	0%	0%	23%	0%	0%	0%	5%	0%	0%	24%	0%	0%	1%	4%	0%	25%	1%	0%	1%	3%	26%	1%	1%	1%	1%	100%	0%	1%	0%	25%	2%	0%	28%	2%	2%	2%	1%	1%				
(7,9)	0%	0%	0%	3%	0%	0%	0%	36%	0%	1%	0%	1%	2%	0%	0%	34%	0%	1%	1%	1%	3%	33%	1%	2%	1%	2%	35%	0%	0%	0%	0%	1%	36%	0%	1%	36%	0%	40%	0%	0%	0%					
(6,10)	0%	0%	1%	0%	2%	0%	1%	51%	0%	0%	0%	0%	1%	2%	0%	1%	51%	0%	0%	1%	1%	1%	1%	49%	0%	0%	1%	1%	49%	1%	1%	100%	1%	1%	2%	52%	0%	0%	50%	1%	52%	56%				
(10,7)	14%	1%	1%	1%	0%	22%	1%	0%	1%	11%	1%	1%	23%	1%	0%	0%	10%	1%	1%	24%	1%	0%	0%	8%	1%	23%	2%	1%	0%	6%	23%	0%	1%	100%	-1%	0%	1%	4%	0%	3%	1%	0%				
(9,8)	-1%	7%	0%	1%	0%	0%	24%	0%	0%	1%	6%	1%	0%	1%	23%	0%	0%	5%	1%	1%	25%	0%	1%	4%	1%	26%	0%	1%	1%	4%	25%	0%	1%	100%	-1%	0%	29%	2%	1%	0%	2%	1%				
(8,9)	-1%	1%	4%	0%	1%	0%	-1%	35%	1%	1%	1%	4%	0%	1%	0%	33%	1%	1%	0%	3%	0%	32%	1%	1%	0%	2%	0%	34%	1%	0%	0%	2%	35%	2%	0%	-1%	100%	1%	0%	34%	1%	37%	1%</			

- Procédure bootstrap à un an – méthode 1

Matrice de corrélation des incréments futurs

	"cases" du triangle inférieur																																														
	(10,2)	(9,3)	(8,4)	(7,5)	(6,6)	(5,7)	(4,8)	(3,9)	(2,10)	(10,3)	(9,4)	(8,5)	(7,6)	(6,7)	(5,8)	(4,9)	(3,10)	(10,4)	(9,5)	(8,6)	(7,7)	(6,8)	(5,9)	(4,10)	(10,5)	(9,6)	(8,7)	(7,8)	(6,9)	(5,10)	(10,6)	(9,7)	(8,8)	(7,9)	(6,10)	(10,7)	(9,8)	(8,9)	(7,10)	(10,8)	(9,9)	(8,10)	(10,9)	(9,10)	(10,10)		
(10,2)	100%	-1%	1%	0%	-1%	1%	-1%	0%	1%	70%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	66%	0%	0%	0%	-1%	0%	0%	57%	0%	0%	-1%	0%	1%	47%	0%	-1%	0%	0%	37%	-1%	0%	0%	28%	0%	0%	20%	0%	12%		
(9,3)	-1%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	-1%	35%	48%	0%	0%	0%	0%	0%	-1%	5%	41%	0%	-1%	0%	0%	-1%	4%	33%	0%	0%	0%	-1%	4%	25%	0%	0%	-1%	2%	19%	0%	-1%	2%	13%	-1%	1%	7%	0%		
(8,4)	1%	0%	100%	0%	0%	0%	-1%	0%	0%	0%	42%	35%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	40%	4%	28%	0%	0%	0%	4%	3%	21%	0%	0%	0%	4%	3%	16%	0%	0%	3%	2%	11%	0%	2%	1%	7%	1%	1%	1%		
(7,5)	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	55%	21%	0%	0%	1%	1%	0%	0%	54%	3%	16%	1%	1%	0%	51%	3%	3%	12%	1%	0%	3%	2%	2%	9%	0%	2%	2%	2%	5%	2%	2%	1%	2%	1%	1%		
(6,6)	-1%	0%	0%	0%	100%	0%	-1%	0%	1%	0%	0%	64%	13%	0%	0%	1%	0%	0%	62%	2%	9%	0%	1%	-1%	61%	2%	1%	6%	1%	58%	2%	1%	4%	2%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	1%	2%	1%			
(5,7)	1%	0%	-1%	0%	0%	100%	1%	1%	0%	1%	-1%	0%	0%	68%	8%	1%	-1%	0%	0%	-1%	68%	2%	6%	0%	1%	-1%	67%	2%	2%	2%	0%	66%	2%	2%	0%	65%	2%	2%	0%	2%	2%	0%	2%	0%	0%		
(4,8)	-1%	0%	0%	0%	-1%	1%	100%	0%	0%	-1%	0%	1%	0%	1%	75%	4%	0%	-1%	0%	0%	1%	75%	1%	3%	0%	0%	1%	75%	1%	1%	-1%	1%	75%	1%	1%	0%	74%	1%	1%	73%	1%	1%	1%	1%	1%		
(3,9)	0%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	86%	2%	0%	0%	1%	1%	0%	86%	1%	0%	1%	1%	0%	86%	1%	1%	0%	86%	1%	1%	0%	86%	1%	0%	86%	1%	0%	86%	1%	85%	1%	1%
(2,10)	1%	-1%	0%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	94%	1%	-1%	1%	0%	0%	0%	94%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	94%	1%	-1%	0%	0%	94%	0%	0%	94%	0%	0%	94%	0%	94%	0%	94%	
(10,3)	70%	35%	42%	0%	0%	1%	-1%	0%	0%	100%	10%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	63%	9%	0%	0%	-1%	0%	0%	55%	7%	0%	-1%	0%	0%	45%	5%	-1%	0%	0%	35%	3%	0%	26%	3%	0%	18%	2%	11%			
(9,4)	0%	48%	42%	0%	0%	-1%	0%	0%	0%	10%	100%	8%	0%	0%	0%	0%	0%	50%	46%	6%	0%	0%	0%	6%	37%	5%	0%	0%	0%	5%	28%	3%	0%	0%	4%	21%	2%	0%	3%	15%	1%	2%	8%	1%			
(8,5)	0%	0%	35%	55%	0%	0%	1%	0%	0%	0%	8%	100%	7%	0%	0%	0%	0%	8%	66%	30%	5%	0%	0%	0%	63%	4%	23%	4%	0%	0%	5%	3%	18%	3%	0%	3%	3%	12%	1%	3%	2%	7%	2%	1%	1%		
(7,6)	0%	0%	0%	0%	21%	64%	0%	0%	0%	1%	0%	0%	7%	100%	5%	0%	0%	1%	0%	6%	81%	15%	4%	0%	1%	6%	80%	3%	11%	3%	1%	77%	3%	2%	8%	2%	3%	2%	5%	2%	2%	2%	2%	1%			
(6,7)	0%	0%	0%	0%	13%	68%	1%	1%	0%	0%	0%	5%	100%	3%	1%	0%	0%	0%	4%	91%	9%	3%	0%	0%	4%	89%	3%	7%	1%	4%	88%	2%	2%	3%	86%	2%	2%	1%	2%	2%	1%	2%	1%				
(5,8)	0%	0%	0%	1%	0%	8%	75%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	3%	100%	2%	0%	0%	0%	0%	3%	94%	6%	1%	0%	0%	3%	95%	2%	3%	0%	3%	93%	2%	1%	3%	93%	2%	1%	92%	2%	1%	2%	1%			
(4,9)	0%	0%	0%	1%	0%	1%	4%	86%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	2%	100%	1%	0%	0%	1%	2%	97%	2%	0%	1%	2%	97%	1%	0%	1%	2%	97%	1%	1%	2%	97%	1%	1%	2%	97%	1%	96%	1%	1%			
(3,10)	0%	-1%	1%	0%	1%	-1%	0%	1%	-1%	0%	2%	94%	0%	0%	1%	0%	100%	1%	-1%	1%	0%	0%	1%	99%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	99%	1%	-1%	0%	1%	99%	0%	1%	99%	0%	1%	99%	1%	99%			
(10,4)	66%	5%	40%	0%	0%	0%	-1%	0%	1%	63%	50%	8%	0%	0%	0%	0%	1%	100%	6%	6%	0%	-1%	0%	1%	52%	5%	5%	-1%	0%	1%	43%	4%	3%	0%	1%	33%	2%	2%	1%	25%	2%	2%	17%	2%	11%		
(9,5)	0%	41%	4%	54%	0%	0%	0%	0%	-1%	9%	46%	66%	6%	0%	0%	0%	-1%	6%	100%	4%	5%	0%	1%	1%	62%	32%	3%	4%	1%	-1%	5%	25%	3%	3%	-1%	4%	19%	2%	1%	3%	13%	0%	2%	7%	0%		
(8,6)	0%	0%	28%	3%	62%	-1%	0%	1%	1%	0%	6%	30%	81%	4%	0%	0%	1%	6%	4%	100%	3%	3%	0%	1%	4%	78%	19%	2%	3%	1%	76%	3%	14%	2%	2%	3%	2%	10%	1%	2%	2%	6%	2%	2%			
(7,7)	0%	-1%	0%	16%	2%	68%	1%	1%	0%	0%	5%	15%	91%	3%	1%	0%	0%	5%	3%	100%	2%	3%	0%	4%	3%	89%	9%	2%	1%	3%	88%	2%	7%	0%	87%	2%	2%	3%	2%	0%	2%	0%	0%				
(6,8)	-1%	0%	0%	1%	9%	2%	75%	0%	0%	-1%	0%	0%	4%	9%	94%	2%	0%	-1%	0%	3%	2%	100%	2%	1%	0%	3%	2%	95%	5%	1%	3%	2%	94%	2%	3%	2%	93%	1%	1%	92%	1%	1%	1%	1%			
(5,9)	0%	0%	0%	1%	0%	6%	1%	86%	0%	0%	0%	0%	0%	3%	6%	97%	1%	0%	1%	0%	3%	2%	100%	1%	0%	1%	3%	2%	97%	3%	0%	3%	2%	97%	1%	3%	2%	97%	1%	2%	97%	1%	96%	1%	1%		
(4,10)	0%	-1%	0%	0%	1%	0%	3%	1%	94%	0%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	1%	-1%	1%	0%	1%	1%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	1%	99%	1%	-1%	1%	1%	99%	0%	1%	1%	99%	1%	1%	99%	1%	99%		
(10,5)	57%	4%	4%	51%	-1%	1%	0%	0%	55%	6%	63%	6%	0%	0%	0%	0%	52%	62%	4%	4%	0%	0%	0%	100%	5%	3%	3%	0%	0%	38%	4%	2%	3%	0%	38%	4%	2%	3%	30%	3%	2%	1%	23%	2%	1%	16%	1%
(9,6)	0%	33%	3%	3%	61%	-1%	0%	1%	0%	7%	37%	4%	80%	4%	0%	1%	0%	5%	32%	78%	3%	3%	1%	0%	5%	100%	3%	2%	3%	0%	75%	20%	2%	2%	1%	3%	15%	2%	1%	3%	11%	1%	2%	6%	1%		
(8,7)	0%	0%	21%	3%	2%	67%	1%	1%	0%	0%	5%	23%	3%	89%	3%	1%	0%	5%	3%	19%	89%	2%	3%	0%	3%	3%	100%	3%	2%	1%	3%	87%	11%	2%	0%	85%	2%	8%	0%	3%	2%	4%	2%	0%			
(7,8)	-1%	0%	0%	12%	1%	2%	75%	0%	0%	-1%	0%	4%	11%	3%	95%	2%	0%	-1%	4%	2%	9%	95%	2%	1%	3%	2%	3%	100%	2%	1%	2%	2%	94%	5%	1%	2%	93%	2%	3%	92%	2%	1%	1%	1%			
(6,9)	0%	0%	0%	1%	6%	2%	1%	86%	1%	0%	0%	0%	3%	7%	2%	97%	1%	0%	1%	3%	2%	5%	97%	1%	0%	3%	2%	2%	100%	1%	2%	2%	97%	3%	2%	2%	97%	1%	2%	97%	1%	96%	1%	1%			
(5,10)	1%	-1%	0%	0%	1%	2%	1%	1%	94%	0%	0%	0%	1%	1%	3%	1%	99%	1%	-1%	1%	1%	1%	1%	1%	3%	99%	0%	0%	1%	1%	1%	100%	1%	0%	1%	99%	1%	1%	99%	1%	1%	99%	1%	99%			
(10,6)	47%	4%	4%	3%	58%	0%	-1%	1%	1%	45%	5%	5%	77%	4%	0%	0%	1%	43%	5%	76%	3%	3%	0%	1%	38%	75%	3%	2%	2%	1%	100%	3%	2%	2%	2%	25%	2%	2%	2%	19%	2%	2%	13%	2%	8%		
(9,7)	0%	25%	3%	2%	2%	66%	1%	1%	-1%	5%	28%	3%	3%	88%	3%	1%	-1%	4%	25%	3%	88%	2%	3%	-1%	4%	20%	87%	2%	2%	0%	3%	100%	2%	2%	0%	85%	13%	2%	0%	3%	9%	0%	2%	4%	0%		
(8,8)	-1%	0%	16%	2%	1%	2%	75%	0%	0%	-1%	3%	18%	2%	2%	93%	2%	0%	3%	3%	14%	2%	94%	2%	1%	2%	2%	11%	94%	2%	1%	2%	2%	100%	2%	1%	2%	93%	6%	1%	91%	2%	4%	2%	1%			
(7,9)	0%	0%	0%	9%	1%	2%	1%	86%	0%	0%	0%	3%	8%	2%	2%	97%	1%	0%	3%	2%	2%	97%	1%	0%	3%	2%	2%	5%	97%	1%	2%	2%	100%	1%	2%	2%	97%	1%	2%	97%	1%	96%	1%	1%			
(6,10)	0%	-1%	0%	0%	4%	0%	1%	94%	0%	0%	0%	2%	3%	1%	1%	99%	1%	-1%	2%	0%	3%	1%	99%	0%	1%	0%	1%	3%	99%	2%	0%	1%	100%	0%	1%	1%	99%	1%	1%	99%	1%	99%					
(10,7)	37%	2%	3%	2%	2%	65%	0%	1%	0%	35%	4%	3%	3%	86%	3%	1%	0%	33%	4%	3%	87%	2%	3%	0%	30%	3%	85%	2%	2%	1%	25%	85%	2%	2%	0%	100%	2%	2%	1%	15%	2%	1%	11%	1%	6%		
(9,8)	-1%	19%	2%	2%	1%	2%	74%	0%	0%	3%	3%	21%	3%	2%	2%	93%	2%	0%	2%	19%	2%	2%	93%	2%	1%	3%	15%	2%	93%	2%	1%	2%	13%	93%	2%	1%	2%	100%	2%	1%	91%	7%	1%	2%	4%	1%	

- Procédure bootstrap à un an – méthode 2

Matrice de corrélation des incréments futurs

	"cases" du triangle inférieur																																														
	(10,2)	(9,3)	(8,4)	(7,5)	(6,6)	(5,7)	(4,8)	(3,9)	(2,10)	(10,3)	(9,4)	(8,5)	(7,6)	(6,7)	(5,8)	(4,9)	(3,10)	(10,4)	(9,5)	(8,6)	(7,7)	(6,8)	(5,9)	(4,10)	(10,5)	(9,6)	(8,7)	(7,8)	(6,9)	(5,10)	(10,6)	(9,7)	(8,8)	(7,9)	(6,10)	(10,7)	(9,8)	(8,9)	(7,10)	(10,8)	(9,9)	(8,10)	(10,9)	(9,10)	(10,10)		
(10,2)	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	-1%	1%	43%	0%	0%	0%	-1%	0%	-1%	1%	40%	0%	0%	-1%	0%	-1%	1%	34%	0%	-1%	0%	-1%	1%	27%	-1%	0%	-1%	1%	20%	0%	-1%	1%	16%	-1%	1%	12%	1%	9%		
(9,3)	0%	100%	0%	0%	0%	-1%	0%	0%	1%	23%	27%	0%	-1%	-1%	-1%	-1%	1%	3%	23%	0%	-1%	0%	-1%	1%	3%	18%	-1%	0%	-1%	1%	2%	13%	0%	-1%	1%	11%	-1%	1%	8%	1%	0%	7%	2%				
(8,4)	0%	0%	100%	1%	0%	0%	0%	-1%	0%	0%	24%	20%	-1%	0%	0%	0%	1%	25%	2%	15%	0%	0%	0%	3%	1%	12%	0%	-1%	0%	1%	1%	9%	0%	0%	2%	1%	7%	0%	1%	0%	5%	0%	1%	1%			
(7,5)	0%	0%	1%	100%	0%	1%	0%	0%	0%	0%	1%	31%	12%	0%	0%	1%	0%	31%	2%	10%	0%	1%	1%	31%	2%	2%	7%	1%	1%	2%	2%	1%	2%	1%	6%	0%	2%	1%	2%	4%	1%	2%	1%	1%			
(6,6)	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	-1%	0%	37%	7%	0%	0%	0%	0%	-1%	36%	1%	6%	0%	0%	0%	36%	1%	1%	4%	0%	36%	1%	1%	3%	1%	1%	3%	1%	1%	0%	1%	0%	1%	0%	0%		
(5,7)	0%	-1%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	-1%	-1%	1%	1%	40%	4%	1%	-1%	0%	1%	40%	0%	4%	-1%	0%	40%	1%	2%	2%	0%	39%	1%	2%	0%	40%	0%	2%	0%	0%	1%	0%	1%	0%	0%	0%		
(4,8)	0%	0%	0%	1%	0%	0%	100%	0%	-1%	-1%	0%	0%	1%	1%	46%	3%	-1%	0%	0%	1%	46%	1%	1%	-1%	0%	0%	46%	1%	1%	4%	0%	0%	1%	45%	1%	0%	0%	45%	1%	0%	46%	1%	0%	1%	0%	0%	
(3,9)	-1%	0%	-1%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	-1%	0%	0%	0%	-1%	57%	1%	-1%	0%	0%	0%	-1%	57%	0%	0%	0%	0%	-1%	57%	0%	0%	0%	0%	-1%	57%	0%	-1%	57%	0%	-1%	57%	0%	57%	0%	0%	0%	
(2,10)	1%	1%	0%	0%	0%	0%	-1%	0%	100%	0%	1%	1%	0%	0%	-1%	0%	70%	1%	1%	0%	0%	-1%	0%	70%	1%	0%	0%	-1%	0%	70%	0%	1%	-1%	0%	70%	0%	-1%	0%	70%	-1%	0%	70%	0%	70%	0%	70%	0%
(10,3)	43%	23%	0%	0%	0%	-1%	-1%	0%	0%	100%	1%	0%	0%	0%	-1%	0%	0%	52%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	44%	0%	0%	0%	0%	0%	36%	0%	-1%	0%	27%	0%	0%	21%	0%	0%	16%	0%	16%	0%	11%		
(9,4)	0%	27%	24%	1%	-1%	-1%	0%	-1%	1%	1%	100%	1%	-1%	0%	-1%	-1%	1%	56%	45%	0%	-1%	-1%	-1%	1%	6%	36%	-1%	-1%	0%	1%	4%	28%	-1%	-1%	1%	3%	21%	-1%	1%	2%	16%	1%	2%	12%	2%		
(8,5)	0%	0%	20%	31%	0%	1%	0%	0%	1%	0%	1%	100%	1%	0%	0%	0%	0%	65%	32%	1%	0%	1%	0%	67%	5%	25%	0%	0%	1%	4%	4%	19%	1%	1%	3%	3%	15%	1%	3%	2%	10%	2%	2%	2%	2%		
(7,6)	0%	-1%	-1%	12%	37%	1%	0%	0%	0%	0%	-1%	1%	100%	0%	1%	0%	0%	0%	79%	17%	1%	1%	0%	0%	1%	79%	2%	14%	0%	0%	80%	2%	3%	10%	0%	2%	3%	2%	6%	3%	2%	1%	2%	1%	1%		
(6,7)	-1%	-1%	0%	0%	7%	40%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	89%	11%	0%	0%	0%	0%	0%	-1%	87%	2%	8%	0%	-1%	87%	2%	1%	6%	88%	2%	1%	1%	2%	1%	1%	1%	1%	1%		
(5,8)	0%	-1%	0%	0%	0%	4%	46%	-1%	-1%	-1%	0%	1%	0%	100%	0%	-1%	-1%	0%	1%	0%	92%	7%	1%	0%	1%	0%	93%	1%	4%	0%	0%	92%	1%	0%	92%	1%	0%	92%	1%	0%	92%	1%	0%	1%	0%	0%	
(4,9)	-1%	-1%	0%	1%	0%	1%	3%	57%	0%	0%	-1%	0%	0%	0%	100%	0%	-1%	0%	1%	0%	95%	4%	0%	0%	0%	0%	96%	1%	0%	0%	96%	1%	0%	0%	96%	1%	0%	95%	1%	-1%	95%	1%	95%	1%	1%		
(3,10)	1%	1%	1%	1%	0%	0%	-1%	1%	70%	0%	1%	0%	-1%	0%	-1%	0%	100%	0%	1%	0%	-1%	0%	98%	0%	0%	0%	-1%	0%	98%	-1%	1%	-1%	0%	98%	0%	-1%	0%	98%	-1%	0%	98%	0%	98%	1%	98%	1%	
(10,4)	40%	3%	25%	0%	0%	-1%	0%	-1%	1%	52%	56%	0%	0%	0%	-1%	-1%	0%	100%	5%	0%	0%	-1%	-1%	0%	42%	4%	0%	-1%	-1%	0%	34%	3%	-1%	-1%	0%	26%	2%	-1%	0%	20%	1%	0%	15%	2%	11%		
(9,5)	0%	23%	2%	31%	-1%	0%	0%	0%	0%	0%	45%	65%	0%	0%	0%	0%	1%	5%	100%	4%	0%	0%	0%	1%	67%	32%	3%	0%	0%	1%	4%	25%	2%	0%	1%	3%	20%	2%	1%	3%	15%	2%	2%	11%	2%		
(8,6)	0%	0%	15%	2%	36%	1%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	32%	79%	0%	1%	1%	0%	4%	100%	2%	1%	1%	0%	4%	77%	20%	3%	1%	0%	78%	2%	17%	2%	0%	2%	3%	13%	1%	3%	2%	8%	2%	1%	1%		
(7,7)	-1%	-1%	0%	10%	1%	40%	1%	0%	0%	-1%	1%	17%	89%	0%	0%	0%	0%	0%	2%	100%	2%	0%	0%	0%	2%	88%	11%	1%	0%	2%	88%	2%	8%	1%	88%	2%	1%	6%	2%	1%	1%	1%	1%	1%			
(6,8)	0%	0%	0%	0%	6%	0%	46%	-1%	-1%	0%	-1%	0%	1%	11%	92%	0%	-1%	-1%	0%	1%	2%	100%	1%	-1%	0%	1%	2%	93%	6%	0%	1%	2%	92%	1%	4%	2%	92%	1%	0%	92%	1%	0%	1%	0%	0%		
(5,9)	-1%	-1%	0%	1%	0%	4%	1%	57%	0%	0%	-1%	1%	0%	0%	7%	95%	0%	-1%	0%	1%	0%	1%	100%	1%	0%	0%	1%	96%	4%	0%	0%	1%	96%	1%	0%	1%	95%	1%	1%	95%	1%	95%	1%	1%	1%		
(4,10)	1%	1%	0%	1%	0%	-1%	0%	0%	70%	0%	1%	0%	0%	0%	-1%	4%	98%	0%	1%	0%	-1%	1%	100%	0%	0%	0%	-1%	1%	98%	-1%	0%	-1%	1%	98%	0%	-1%	1%	98%	-1%	1%	98%	1%	98%	1%			
(10,5)	34%	3%	3%	31%	0%	0%	-1%	0%	1%	44%	6%	67%	1%	0%	0%	0%	42%	67%	4%	0%	0%	0%	0%	0%	100%	5%	3%	0%	0%	30%	4%	2%	0%	0%	23%	3%	2%	0%	18%	2%	1%	13%	2%	9%			
(9,6)	0%	18%	1%	2%	36%	0%	0%	0%	0%	0%	36%	5%	79%	-1%	1%	0%	0%	4%	32%	77%	2%	1%	0%	0%	5%	100%	2%	3%	1%	0%	79%	19%	3%	2%	0%	2%	17%	2%	1%	3%	13%	1%	2%	8%	1%		
(8,7)	-1%	-1%	12%	2%	1%	40%	0%	0%	0%	-1%	25%	2%	87%	0%	0%	0%	0%	3%	20%	88%	2%	0%	0%	3%	2%	100%	2%	2%	0%	2%	86%	13%	2%	1%	87%	2%	10%	1%	2%	1%	7%	2%	1%	1%			
(7,8)	0%	0%	0%	7%	1%	1%	46%	-1%	-1%	0%	-1%	0%	14%	2%	93%	0%	-1%	-1%	0%	3%	11%	93%	1%	-1%	0%	3%	2%	100%	1%	0%	3%	2%	92%	6%	0%	2%	92%	1%	3%	93%	1%	0%	1%	0%	0%		
(6,9)	-1%	-1%	-1%	1%	4%	2%	1%	57%	0%	0%	0%	0%	8%	1%	96%	0%	-1%	0%	1%	6%	96%	1%	0%	1%	2%	1%	100%	1%	0%	2%	1%	96%	3%	1%	1%	95%	1%	1%	95%	1%	1%	96%	1%	0%			
(5,10)	1%	1%	0%	1%	0%	2%	0%	0%	70%	0%	1%	1%	0%	0%	4%	1%	98%	0%	1%	0%	0%	0%	4%	98%	0%	0%	0%	1%	100%	-1%	0%	0%	1%	98%	0%	0%	1%	98%	0%	1%	98%	1%	98%	1%			
(10,6)	27%	2%	1%	2%	36%	0%	0%	0%	36%	4%	4%	80%	-1%	0%	0%	-1%	34%	4%	78%	2%	1%	0%	-1%	30%	79%	2%	3%	0%	-1%	100%	2%	3%	2%	-1%	18%	3%	2%	1%	15%	2%	1%	11%	1%	7%			
(9,7)	-1%	13%	1%	2%	1%	39%	1%	0%	1%	0%	28%	4%	2%	87%	0%	0%	1%	3%	25%	2%	88%	2%	0%	4%	19%	86%	2%	2%	0%	4%	19%	86%	2%	2%	1%	87%	13%	2%	2%	2%	10%	2%	7%	2%			
(8,8)	0%	0%	9%	1%	1%	1%	45%	-1%	-1%	-1%	19%	3%	2%	92%	0%	-1%	-1%	2%	17%	2%	92%	1%	-1%	2%	3%	13%	92%	1%	0%	3%	2%	100%	1%	0%	2%	91%	8%	0%	92%	1%	4%	1%	0%	0%			
(7,9)	-1%	-1%	0%	6%	1%	2%	1%	57%	0%	0%	-1%	1%	10%	1%	1%	96%	0%	-1%	0%	2%	8%	1%	96%	1%	0%	2%	2%	6%	96%	1%	2%	2%	1%	100%	1%	1%	95%	3%	1%	95%	1%	96%	1%	1%			
(6,10)	1%	1%	0%	0%	3%	0%	0%	0%	70%	0%	1%	1%	0%	6%	0%	1%	98%	0%	1%	0%	1%	4%	1%	98%	0%	0%	1%	0%	3%	98%	-1%	1%	0%	1%	100%	1%	0%	98%	0%	1%	98%	1%	98%	1%			
(10,7)	20%	1%	2%	2%	1%	40%	0%	0%	27%	3%	3%	2%	88%	0%	0%	0%	26%	3%	2%	88%	2%	0%	0%	23%	2%	87%	2%	1%	0%	18%	87%	2%	1%	1%	100%	2%	1%	1%	11%	1%	1%	8%	1%	6%			
(9,8)	0%	11%	1%	1%	1%	0%	45%	-1%	-1%	0%	21%	3%	3%	2%	92%	0%	-1%	2%	20%	3%	2%	92%	1%	-1%	3%	17%	2%	92%	1%	0%	3%	13%	91%	1%	0%	2%	100%	1									