Françoise PERONNET

Benoît SELLAM

THÈSE IAF

ENSAE, ANNÉE 2001

ALLOCATION DE FONDS PROPRES EN ASSURANCE VIE

Étude effectuée à la CNP, Direction Financière, Département d'actuariat central, sous la direction d'Olivier PEKMEZIAN.

Correspondante ENSAE : Nathalie PISTRE, professeur de finance

SOMMAIRE

INTRODUCTION

La **problématique générale de l'allocation de fonds propres** est double. Il s'agit, pour le dirigeant d'entreprise, d'évaluer d'abord le montant de fonds propres nécessaire pour couvrir l'activité globale (notamment éviter la faillite) et ensuite de trouver une clé de répartition de ces ressources entre les différentes branches qui composent son activité.

Dans le monde de l'assurance, la gestion du risque est réglementée et contrôlée. Une série de provisions et de réserves permettent la gestion et le lissage des risques dans le temps, et en France un montant de capital minimum est exigé, la marge de solvabilité, afin de permettre à l'assureur, en dernier recours, de faire face aux engagements qu'il a contractés vis à vis des assurés. Le capital de couverture global pour l'entreprise d'assurance est donc réglementairement fixé ; cette norme fait néanmoins l'objet de plusieurs étude actuellement. En revanche, le capital alloué à chaque branche de la compagnie est libre, ce qui pose branche par branche une question d'arbitrage entre solvabilité et rentabilité. Nous avons choisi dans ce mémoire d'aborder la question de la solvabilité et de l'allocation de capital en utilisant la Value At Risk (en abrégé **VaR**), appelée aussi « mesure de perte potentielle ».

Après nous être approprié les notions essentielles sur les risques et les réserves propres aux entreprises d'assurance, nous avons articulé notre démarche en trois étapes :

- ⇒ La détermination de la source du risque d'un produit et du capital de couverture correspondant par la VaR ;
- ⇒ L'étude spécifique du comportement de la VaR vis à vis de l'agrégation des risques ;
- ⇒ Enfin, l'allocation du capital entre les produits, avec à la fois des objectifs de prudence et de rentabilité.

Nous avons testé numériquement notre allocation de capital dans le cadre de la gestion de deux produits d'assurance vie de type épargne individuelle. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel interne de gestion actif passif de la CNP qui permet de simuler différents résultats de la compagnie par produit et qui nous a servi de base pour les différents calculs de VaR.

I - PROBLÉMATIQUE DE L'ALLOCATION DE CAPITAL

La problématique de l'allocation de fonds propres est devenue essentielle dès les années 70 aux Etats-Unis dans le domaine bancaire, avant de se développer progressivement. Pour un dirigeant d'une compagnie d'assurance, il s'agit de déterminer les montants de capitaux à allouer entre les différents produits (ou classes de produits) détenus par la compagnie. Ils doivent lui permettre d'une part de faire face à des situations exceptionnelles, c'est à dire à des situations où le contrôle du risque par les différents mécanismes de provisionnement et de réserves se révèle insuffisant, et d'autre part d'optimiser le rendement.

Dans un premier temps, nous précisons les types de risques auxquels est confrontée une entreprise d'assurance vie. Nous présentons ensuite les diverses mesures de prudence réglementaires destinées à garantir sa solvabilité. Enfin, nous évoquons l'arbitrage qui résulte des contraintes de rentabilité et de solvabilité.

1. Les risques en assurance vie

1.1. Types de risques

On distingue deux types de risques :

- Les **risques de l'actif** dépendent des placements et du marché ;
- Les **risques du passif** sont engendrés par les risques techniques mais surtout par les options cachées des contrats.

Le risque de marché peut être défini [2] comme :

- L'impact que peuvent avoir des changements de valeur de variables de marché (taux de change et d'intérêt, liquidité des actifs) sur la valeur du patrimoine de personnes ;
- L'impossibilité pour ces dernières de couvrir les risques susmentionnés en temps opportun et à un prix, considérés par elles raisonnables.

Un risque de liquidité existe si la duration (durée moyenne des flux d'un bien) du passif est inférieure à celle de l'actif, ce qui entraîne une difficulté à fournir des liquidités.

Un risque de contrepartie est le risque de faire face à des émetteurs d'emprunts qui n'honorent pas leurs engagements. Enfin les risques de taux et de change sont liés aux rendements des placements.

Les risques techniques sont les risques de tarification (certains événements sont difficiles à prévoir, comme le chômage) et des risques de sinistralité extrême. Quant aux options cachées, comme les rachats ou le type de versements, elles engendrent des fluctuations des encours et sont difficiles à évaluer et à gérer. De plus, en règle générale, le chargement par produit dépend de la concurrence sur ce type de produit et non du risque, la tarification ne prend donc pas du tout en compte ces risques cachés.

Remarquons dès à présent qu'il peut y avoir des liens entre ces risques, comme entre le risque de rachat et le risque de taux. Ainsi, le danger en cas de brusque variation des taux est double et opposé : en cas de hausse, il y a un risque de rachat puis un risque de moins value en cas de vente, en cas de baisse, il y a un risque de perte de rentabilité des placements.

1.2. Exemple de l'obligation

Généralement considérée comme un actif non risqué, l'obligation est pourtant soumise à divers risques :

- Risque de défaut de l'emprunteur qui ne respecte pas son engagement à terme ;
- Risque de fluctuation du taux d'intérêt.

Deux effets s'opposent pour ce dernier :

- Le réinvestissement des coupons (une augmentation des taux est alors favorable) ;
- La réalisation de l'obligation, en cas de vente avant échéance (une augmentation des taux est alors défavorable).

Ce risque est particulièrement intéressant car il a incité à la création d'une réserve particulière pour y faire face (développé dans *l'annexe 2*), ce qui nous amène à parler des réserves réglementaires.

2. Les mesures de prudence réglementaires

2.1. Justification

L'assurance est un domaine réglementé et contrôlé par la Commission de Contrôle des Assurances. Ceci est justifié par la volonté de l'État de protéger les assurés, novices, contre le risque de défaut des compagnies d'assurance. En effet l'inversion du cycle de production[1] interdit tout particulièrement les faillites pour une compagnie d'assurance. D'où la présence de deux réserves réglementaires au passif : les **provisions** pour couvrir les engagements (risques classiques) et la **marge de solvabilité** pour couvrir les pertes exceptionnelles (risques extrêmes ou accumulation de risques).

2.2. Principales définitions

Pour plus de précision, il est utile de se référer à *l'annexe 2* présentant les différentes réserves réglementées par le Code des Assurances [3] et détaillant le principe de fonctionnement de la réserve de capitalisation.

Ci dessous, nous donnons cependant la définition des principales provisions qui nous seront utiles par la suite :

1. **PM**, Provisions Mathématiques : différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés ;
2. **PPE**, Provision pour Participation aux Excédents : montant des participations aux bénéfices attribués aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits ;
3. **Réserve de capitalisation** : réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu, elle est provisionnée par les plus values sur cessions de titres obligataires ;
4. **PREET**, Provision pour Risque d'Exigibilité des Engagements Techniques : provision destinée à faire face à une insuffisante liquidité des placements, notamment en cas de modification du rythme de règlement des sinistres.

[1] Les primes sont payées avant les prestations.

Alors que les réserves et provisions couvrent les charges espérées dans le cours normal de l'activité, les fonds propres, via la marge de solvabilité, garantissent l'activité (absorber les pertes exceptionnelles). La marge de solvabilité vaut entre 1% et 4% des provisions mathématiques, selon le risque de placement subi, elle est couverte par les fonds propres, les plus values latentes et la réserve de capitalisation. Il s'agit donc de gérer ces fonds correctement ainsi que les actifs en représentation des réserves (article R332 du Code des Assurances, [3]). Ceci nous amène à nous interroger sur l'arbitrage entre rentabilité et solvabilité.

3. L'arbitrage entre rentabilité et solvabilité

La volatilité accrue sur les marchés et la pression sur les bénéfices ont rendu les entreprises plus soucieuses de leur rentabilité. Mais par ailleurs, la solvabilité des entreprises d'assurance est essentielle si l'on considère la protection des intérêts des assurés et l'importance des assureurs en tant qu'investisseurs. Or ces deux objectifs sont incompatibles :

D'une part, le coût d'immobilisation du capital (placé au taux sans risque) nuit à la rentabilité pour laquelle il faut un retour sur fonds propres le plus élastique possible et donc un capital immobilisé minimal. D'autre part, un trop faible capital nuit à la solvabilité, car il ne garantit pas à l'entreprise de pouvoir faire face à des risques exceptionnels.

La gestion des fonds propres nécessite donc un arbitrage entre **solvabilité** (couvrir les aléas liés à l'activité) et **rentabilité** (optimiser le rendement du portefeuille).

3.1. Rentabilité

Il est ici utile de préciser la notion de rentabilité pour le pilotage du risque. En interne, l'allocation de fonds propres permet de valoriser le risque ; le montant de marge de solvabilité est global pour la société, si on le répartit uniformément selon les produits, ceux ci ont la même rentabilité que le rendement, sinon, la rentabilité peut différer du rendement.

Exemple : deux produits P1 et P2, de rendements 12 et 10, entre lesquels on alloue une MS (marge de solvabilité) de 200 :

- ⇒ P1 de rendement 12 avec MS 100 a une rentabilité de 12
- ⇒ P2 de rendement 10 avec MS 100 a une rentabilité de 10

Alors que

⇒ P1 de rendement 12 avec MS 120 a une rentabilité de 10

⇒ P2 de rendement 12 avec MS 80 a une rentabilité de 15

La **rentabilité est donc différente selon l'allocation** du capital entre les produits, dans le premier cas celle de P1 est meilleure, c'est l'inverse dans le deuxième cas.

3.2. Gestion Actif Passif

La Gestion Actif Passif ou ALM (Assets and Liabilities Management) existe depuis les années 70 dans le domaine bancaire aux USA et se développe depuis les années 90 dans le domaine de l'assurance. Cette gestion consiste en un pilotage des risques et des résultats.

Les modèles Actif Passif consistent en la simulation des comportements de marché, les plus performants permettent la simulation de scénarii stochastiques pour calculer les **flux futurs d'actif et de passif** en prenant en compte des **interactions** entre ceux-ci. Ils permettent ainsi de mesurer les conséquences probables de décisions stratégiques et la sensibilité aux variations de l'environnement [9].

Le pilotage porte sur le bilan actuel et la croissance : le pilotage du bilan actuel se fait au niveau global, il s'agit de la gestion financière de l'allocation stratégique des actifs et de la gestion des réserves ; le pilotage de la croissance se fait produit par produit et prend en compte sa durée de vie et de sa structure technique.

3.3. Spécificité de l'assurance

La gestion ALM est particulièrement fine dans le domaine de l'assurance, essentiellement du fait de spécificités :

- La duplicité des résultats : technique et financier ;
- La fiscalité qui engendre des placements d'une durée supérieure à huit ans ;
- La difficulté de calculer la valeur du passif, constituant la principale source de risque, du fait des options cachées qui mènent à une fluctuation de l'encours ;
- La réglementation de la participation aux bénéfices (article A132 du code) ;
- La substitution d'une partie du capital à risque par la possibilité de réassurance ou de coassurance.

Sur ce dernier point il faut garder à l'esprit qu'il n'est pas intéressant de réduire tout le risque du fait qu'il existe des moyens de couvrir le risque.

Ainsi, une entreprise d'assurance est comme toute entreprise soumise à des contraintes de rentabilité, alors que par ailleurs la gestion du risque y est essentielle et réglementée. Afin d'optimiser l'arbitrage entre risque et rentabilité, l'allocation de capital est très importante.

Dans un but de communication interne, un système d'allocation doit permettre une prise de conscience de l'importance de cet arbitrage ainsi que justifier les choix stratégiques faits entre les différents produits.

II - COUVERTURE D'UN PRODUIT

Après une analyse de la problématique de l'allocation de fonds propres, la première étape de l'étude consiste à mesurer le capital nécessaire pour couvrir un produit, c'est à dire le capital qui permettra à l'entreprise d'honorer, à toute époque et en toutes circonstances, ses engagements contractuels sur ce produit envers les assurés (notamment si les réserves sont insuffisantes).

Le capital de couverture d'un produit est calculé par application de la Value at Risk sur des simulations de résultats, via le logiciel de Gestion Actif Passif de la CNP. Après avoir présenté le logiciel et les variables simulées, nous justifions le choix d'indicateurs de risque cohérents sur lesquels appliquer la VaR. Enfin, nous nous penchons sur les défauts de la Value at Risk en tant qu'instrument de mesure de risque, mais sur son intérêt pour déterminer le capital de couverture.

1. GAP et variables simulées

Le logiciel interne mis en place à la CNP est un modèle de gestion Actif Passif de la dernière génération permettant des simulations basées sur des scénarii aléatoires de l'actif et du passif avec prise en compte des interactions.

Les sources de risque sont les risques de taux et de rachat ; le risque de défaut n'est pas modélisé. Ce sont les risques principaux :

- une hausse des taux entraîne une dépréciation des actifs au moment où les assurés souhaitent récupérer leurs investissements (rachats massifs) ;
- une baisse des taux implique plus de difficultés à servir le taux garanti.

Remarque : produits en Unité de Compte. Même si le risque financier des produits est transféré aux clients, la volatilité des actifs entraîne un comportement instable des clients. La volatilité du chiffre d'affaires et des encours qui en résulte contribue à une plus grande volatilité du résultat de la compagnie d'assurance.

Le logiciel étant de nature confidentielle, nous ne décrivons pas son fonctionnement mais juste les hypothèses faites et les paramètres saisis.

1.1. Hypothèses

En plus de l'horizon de prévision, des hypothèses sont faites d'une part sur le passif et d'autre part sur l'actif ; elles portent sur le marché et sur la stratégie de l'entreprise (placements et revalorisation des produits).

Pour le passif :

- *Fiche produit* : descriptif technique ;
- *Scénario de production* : comportements des clients via les souscriptions, la loi de chute, et les versements (prime unique ou versements libres) ;
- *Stratégie de revalorisation* : taux de chargement, PPE (définition p8) ;

Et pour l'actif, les données saisies par le département financier sont :

- *Scénario de marché financier ;*
- *Stratégie financière* : choix d'investissement.

1.2. Paramètres

Les variables saisies à chaque série de simulations sont de trois ordres :

- La courbe des taux (modèle de Heath, Jarrow, Morton) ;
- La loi de rachat ;
- Le choix des produits.

Le modèle de Heath, Jarrow, Morton est valide sur une dizaine d'années.

La loi de rachat est constituée par les rachats dits structurels, liés à l'ancienneté, et les rachats conjoncturels, liés à la variation des taux (comme le TME, Taux Moyen des emprunts d'Etat) et à un indice de réactivité des clients. Remarquons qu'elle n'est pas validée empiriquement et difficile à évaluer.

Enfin le choix des produits consiste à déterminer les caractéristiques techniques (taux garanti, fréquence des primes, etc.) et les actifs mis en représentation ainsi qu'à faire des hypothèses sur la clientèle (âge, réactivité, etc.)

1.3. Résultats

En fonction des stocks d'actif et de passif et des hypothèses faites, les résultats sont les comptes de résultat successifs de toutes les années de simulation, par produit. Il n'y a actuellement pas de consolidation sur différents types de produits. Il y a une deuxième version de résultats, simplifiée, ne faisant intervenir que des variables « clés ».

1. **Les variables de résultat**, **stocks** calculés en fin d'année, sont les suivantes (une définition plus complète des réserves et provisions est donnée en *annexe 2*) :

- PREET : provision destinée à faire face à une insuffisante liquidité des placements,
- Résultat : somme des résultats techniques, administratifs et financiers,
- Résultat financier,
- Réserve de Capitalisation : destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif et à la diminution de leur revenu,
- PPE : montant des participations aux bénéfices attribuables aux bénéficiaires de contrats.

2. Les variables **explicatives** de ces résultats sont :

- Taux financier : taux du portefeuille d'actions,
- PM : provisions mathématiques, égalent à la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés,
- TME : taux moyen délivré par le marché,
- CAC : rendement du CAC, donc des actions.

3. Enfin, sont donnés le nombre de contrats et les PM moyennes.

En ce qui concerne la simulation complète, elle donne le détail des trois résultats, avec les conventions prises par la CNP (cf. *annexe 1*) :

- Technique ;
- Administratif ;
- Financier.

2. Indicateur de risque

Dans cette section, nous cherchons à déterminer un indicateur de risque, fonction des variables décrivant l'activité de l'entreprise. A partir de ses simulations par GAP, nous appliquons la VaR qui permet alors de trouver le montant de fonds propres nécessaire pour couvrir le produit. Pour cela, nous exhibons tout d'abord les variables importantes pour l'exposition au risque.

2.1. Choix des variables

Quatre variables sont importantes pour la santé de l'entreprise : le Résultat, les Plus ou moins values latentes, la Preet et la Réserve de capitalisation. Le résultat mesure un risque opérationnel, alors que les trois variables suivantes mesurent un risque financier.

1. Résultat :

C'est le résultat financier plus le résultat administratif, le résultat technique étant nul par définition pour un produit d'épargne.

La production financière est égale à la somme des coupons des obligations, des dividendes, des plus ou moins values réalisées et du flux de réserve de capitalisation. Le résultat financier est négatif ou nul. Il est nul si la situation est bonne, alors tous les produits financiers sont réalloués (la plus grande partie est redistribuée aux assurés au titre de participation aux bénéfices). En revanche, lorsque la production financière est insuffisante pour servir le taux garanti, c'est le cas lors de forts rachats et de ventes d'actifs en moins values, le résultat est alors négatif, c'est à dire qu'il faut puiser dans les fonds propres pour servir le taux garanti.

2. Plus ou moins values latentes :

C'est une valeur de marché, elle représente une volatilité, donc est un indice pour l'évolution à venir du risque. Dans GAP, trois classes de PMVL sont simulées : la première, PMVL1, concerne les actifs pris en compte dans la Preet (actions, immobilier et SICAV) ; la deuxième, PMVL2, concerne les actifs à taux variable (c'est une partie limitée pour le risque car l'actif suit les variations du taux par hypothèse) ; la dernière classe, PMVL3, concerne les actifs à taux fixe (ils ont un rôle important pour la réserve de capitalisation) et présente donc un élément important de l'exposition au risque.

A titre d'illustration, les plus values sont de l'ordre de 70 milliards à la CNP ; même si elles ne passent pas en moins value, le fait de perdre ces plus values constitue un risque significatif. Prenons l'exemple suivant :

	Valeur initiale	Valeur actuelle	PMVL	Valeur future	PMVL
Produit 1 acheté en t_1	66.66	100	50 %	80	10 %
Produit 1 acheté en t_2	95	100	5 %	80	**- 10 %**

Le produit ayant aujourd'hui une plus value plus faible représente un plus grand risque ; il est actuellement sans risque mais n'est pas très sûr pour l'avenir.

3. Preet :

C'est une valeur comptable, elle représente un risque de difficulté financière, et est reliée au niveau de ce risque et non à son évolution comme les plus ou moins values. Il faut noter qu'on ne peut additionner les Preet de différents produits car les plus values de l'un peuvent compenser les moins values de l'autre.

Elle est dotée en cas de moins values latentes des actions et reprise en cas de moins values réalisées. Elle joue un rôle essentiel en cas de rachats massifs, en prémunissant l'assureur contre une variation du résultat, mais elle n'est pas inépuisable.

4. Réserve de capitalisation :

Son objet est de garantir un rendement constant des obligations (cf. *annexe 3*), elle est globale et répartie entre les produits. Elle est dotée en cas de plus values des obligations. Contrairement à la Preet, on la reprend lorsque la situation est mauvaise. Il y aura probablement une évolution comptable en 2001 de sorte que la réserve de capitalisation pourrait être incluse dans le résultat consolidé. Dans GAP, la réserve initiale est très élevée (elle est globale pour l'ensemble des produits), c'est donc la reprise de réserve (flux) qui est la variable d'intérêt.

Remarques :

1. Les interactions entre les produits viennent entre autres de la présence de ces réserves transversales.
2. Il y aurait d'autres provisions à prendre en compte mais celles ci représentent des montants beaucoup plus faibles.
3. La réserve de capitalisation a en fait un double effet : elle absorbe les moins values obligataires et elle est en représentation de la marge. Il y a donc un phénomène d'amplification en cas de mauvaise situation (à comparer, sur un autre plan, avec le problème d'amplification de la dette de l'Etat).

Ainsi sur une année, un coût de fonds propres a lieu lorsque la somme du résultat et des plus ou moins values des placements (actions et obligations) est négative.

2.2. Valeurs ou fluctuations ?

Il s'agit ensuite de savoir si on retient les valeurs des variables Preet, PMVL et Capi ou bien leurs variations d'une année sur l'autre, c'est à dire des flux, notés Δ.

Nous avons choisi dans notre étude de raisonner de manière dynamique en terme de flux, c'est à dire concrètement de chercher les fonds nécessaires chaque année à une compagnie afin d'honorer ses engagements de l'année.

Plusieurs raisons ont motivé ce choix :

- Il nous a paru important d'exprimer les capitaux de couverture non pas en numéraire mais en pourcentage des provisions mathématiques. Or ces provisions, qui constituent le volume du risque, varient d'année en année.
- La contrainte de solvabilité de l'entreprise est annuelle.

Le raisonnement en termes de flux permet d'évaluer une **exposition annuelle au risque**. Il est possible car nous faisons une l'hypothèse de continuité d'exploitation. Pour avoir une idée de l'exposition globale au risque, il faudra analyser conjointement les montants de fonds propres nécessaires pour diverses années successives.

Cette optique est différente de la vision bancaire où la VaR est traditionnellement calculée sur des stocks afin de trouver les montants nécessaires pour un temps déterminé.

Nous considérerons donc dans la suite les variations des Preet, plus ou moins values et réserve de capitalisation. Ces variables présentent en outre l'avantage d'être homogènes avec les résultats (administratif, technique, financier) qui sont des flux, et en combinant toutes ces variables, nous allons construire un indicateur représentant l'exposition annuelle au risque de la compagnie.

2.3. Choix de l'indicateur

Nous avons deux objectifs : la détermination du capital de couverture, mais aussi l'allocation des capitaux entre produits, d'où le choix de deux indicateurs, MFPN et RISK. L'indicateur RISK1 sert de transition entre les deux précédents.

Dans notre modélisation, **un indicateur négatif signifie un coût en fonds propres pour l'année courante et un indicateur positif signifie à l'inverse un gain en capital**.

1. **MFPN** = résultat total - ΔPreet + ΔCapi

Ce premier indicateur sert à déterminer le montant de fonds propres nécessaire à l'assureur pour faire face aux engagements de l'année courante. Le terme « res total » représente, lorsqu'il est négatif, le montant que l'assureur doit décaisser afin de servir le taux garanti. Le terme ΔPreet représente une charge de provisionnement réglementaire et le terme ΔCapi représente les plus ou moins values réalisées sur les obligations du portefeuille assuré (plus précisément sur les obligations en représentation des engagements techniques).

2. **RISK1** = résultat total + ΔPMVL1 + ΔCapi

Ce deuxième indicateur est une vision plus pertinente de l'exposition au risque et à son évolution, de plus il est « comparable » avec l'indicateur précédent puisque les mêmes actifs concernent PMVL1 et Preet. Il sert de transition avec le dernier indicateur.

3. **RISK** = résultat total + ΔPMVL1 + ΔPMVL3 + ΔCapi

Il s'agit du dernier indicateur, qui rend davantage compte variations des plus ou moins values **latentes** annuelles des actifs financiers. A ce titre, **il mesure plutôt une exposition au risque** ; un indicateur RISK<0 n'implique pas nécessairement un coût de fonds propres. Bien sûr, si cet indicateur est très négatif, il y a de grandes chances que de grosses moins values latentes soient couplées à un coût élevé de fonds propres, mais le lien n'est pas automatique.

On s'attend à ce qu'il soit plus volatile que les deux autres. Il sera particulièrement intéressant pour le pilotage du risque. Par ailleurs, on se rapproche avec cet indicateur des normes IASC qui considèrent la valeur de marché comme une meilleure représentation de la réalité que la valeur comptable.

2.4. Volume du risque

Enfin, il faut prendre en compte le volume du risque, donc le nombre d'encours. Cette prise en compte est très importante car dans des scénarii où les taux montent fortement, les rachats peuvent être conséquents et ainsi la « base du risque » (i.e. le nombre de contrats gérés) se déforme dans le temps. On tient compte de cette déformation en divisant les indicateurs précédents par les Provisions Mathématiques. Les PM sont la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés. Elles représentent donc le montant agrégé de ce que l'assureur doit aux assurés et sont directement reliées au nombre de contrats gérés.

Le fait de diviser les indicateurs précédents par les PM présente un autre intérêt : en exprimant les montants de fonds propres nécessaires en pourcentage des PM, on fait le lien avec la notion fondamentale du Code des assurances : la marge de solvabilité. Nous rappelons que c'est le montant de fonds propres réglementaire que doit détenir une entreprise d'assurance vie pour faire face au risque. Celle ci est exprimée en pourcentage des PM et vaut 4% quel que soit le produit considéré. Cette marge constituera un bon élément de référence auquel nous comparerons nos résultats.

Une fois ces indicateurs (ratios de PM) mis en place, on applique la VaR et on obtient pour chaque année un montant de fonds propres nécessaire pour assurer la solvabilité de l'entreprise sur le produit considéré.

3. Définition et intérêt de la VaR

3.1. Mesure classique du risque : l'écart type

La « Théorie Moderne du portefeuille », introduite par Markowitz en 1952, reste une référence en matière de choix de portefeuille et de mesure de risque. Elle utilise comme critère de choix optimal le couple espérance variance sur la variable aléatoire de rendement, définie comme suit : $R_t=(C_t-C_0)/C_0$ avec C_t cours de l'action en t

Elle permet de déterminer une frontière efficiente, constituée de l'ensemble des portefeuilles qu'il est possible de construire à partir d'un ensemble donné de titres, et qui sont les meilleurs du point de vue du critère Espérance Variance. Ces résultats d'optimalité font partie des fondements de la gestion moderne du risque, même si des méthodes plus sophistiquées existent aujourd'hui.

Cette approche du risque par l'écart type est particulièrement séduisante du fait de son lien avec la Théorie de l'utilité. Par ailleurs, elle s'applique aussi bien à des risques isolés qu'à des risques multiples corrélés.

En revanche, cette mesure de risque présente des inconvénients :

- Elle ne distingue pas les bons et les mauvais risques (c'est à dire les gains ou les pertes autour du rendement espéré) ;
- La prise en compte des deux paramètres espérance et variance ne qualifie pas la distribution du risque, sauf dans un monde normal, peu réaliste. D'autre part, la notion de variance (ou d'écart type) ne rejoint la notion intuitive de « dispersion » que dans le cas de distributions relativement proches de gaussiennes. Dans les cas non standards, cette notion s'interprète mal ;
- Le couple moyenne/variance ne constitue pas, une mesure directement utilisable du risque, notamment dans une problématique d'allocation de capital, sauf encore une fois dans le cas gaussien où le couple moyenne/variance est directement relié à la notion d'intervalle de confiance ;

En conclusion, l'approche moyenne/variance est très satisfaisante sous hypothèse de normalité des distributions, mais elle n'est pas nécessairement la plus pertinente dans notre cadre d'étude où les distributions qui se présentent ne sont pas gaussiennes (en particulier, elles ne représentent pas des rendements) et dans notre problématique de capital de couverture de risque.

3.2. Value at Risk

Définition : la mesure la plus répandue dans le domaine bancaire, du **risque global** lié à l'activité est la VaR ; c'est une mesure de risque comme quantile.

En notant H l'horizon de prévision et x le seuil de confiance, on a donc : $\Pr ob(perte(H) > VaR_x) = x$

La VaR est donc une mesure de la perte potentielle, elle peut aussi être définie comme une mesure de la perte potentielle par rapport à l'espérance de résultat.

Citons ici L.L. Duplat, Président de la Commission bancaire et financière, Belgique :

« L'intérêt de la VaR s'est accru en grande partie sous l'impulsion du Comité de Bâle qui regroupe les autorités de contrôle bancaire du G10. En 1996, il a admis que les banques utilisent, dans le cadre des exigences réglementaires de fonds propres pour le risque de marché, leurs modèles VaR internes. »

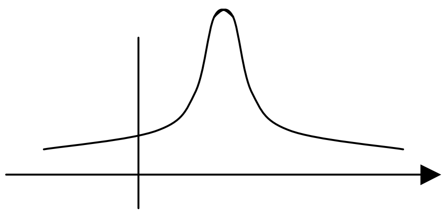
Ces modèles expriment dans un seul chiffre la perte maximale qu'un établissement pourrait subir sur son portefeuille d'instruments financiers en cas de mouvements défavorables du marché et ce sur une période donnée et avec un degré déterminé de probabilité.

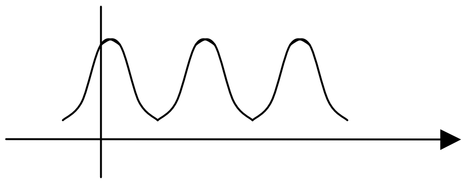
On considère généralement les trois méthodes classiques de calcul de la VaR :

- VaR analytique : méthode fondée sur l'hypothèse de normalité des rendements du portefeuille ; la VaR est alors un multiple de la volatilité des rendements.
- VaR historique : méthode fondée sur les variations historiques des facteurs de risque, non soumise aux critiques sur la normalité et convenant aux distributions à queues épaisses ; cependant elle nécessite beaucoup de valeurs, et il y a une faible vitesse de convergence du quantile, enfin les résultats sont liés à la période d'observation.
- VaR de Monte Carlo : méthode fondée sur la simulation des facteurs de marché par une loi admissible, par génération d'un grand nombre de scénarii, on obtient une distribution simulée du portefeuille qui converge vers la vraie distribution (inconnue) ; les limites sont l'effort important de simulation et le risque de modèle.

3.3. Comparaison et avantages de la VaR

L'approche du risque par la VaR est bien différente de l'approche dite « moyenne – variance ». Fondamentalement, la variance cherche à rendre compte de l'étalement d'une distribution, en revanche, la VaR est un quantile de distribution (elle est donc une mesure de risque qui ne renseigne pas sur l'étalement des distributions). On peut illustrer ces deux conceptions par les distributions suivantes :





La première distribution a une variance faible contrairement à la deuxième, par contre elles peuvent avoir même VaR. Chaque mesure correspond à une approche particulière du risque ; le choix de la mesure doit donc se faire en fonction des objectifs poursuivis.

Dans le cadre de notre étude, le principal intérêt de la Value At Risk est que par construction, elle permet de passer directement d'une situation risquée à un capital permettant de faire face à cette situation à un seuil donné (par exemple, dans 99% des cas). En tant que mesure de risque, la VaR fait l'objet de nombreuses critiques fondées que nous serons amenés à examiner par la suite (cf. § III.2.2). Nous verrons cependant que son utilisation fait sens dans une perspective réglementaire prudentielle

Notons enfin que dans le cas particulier (important) des distributions gaussiennes, les approches VaR et moyenne/variance sont équivalentes. On a alors la formulation explicite suivante, avec E()=moyenne, σ()=écart type et z_q le quantile normal d'ordre q :

$$VaR_q = E(L_t) + z_q*\sigma(L_t)$$

C'est le seul cas pour lequel il est équivalent de raisonner en VaR ou en variance pour déterminer la couverture de X.

Nous ne poussons pas plus loin les développements sur la VaR et la comparaison avec les autres mesures de risques pour un produit unique, la littérature sur le sujet est très abondante.

Il s'avère donc que la VaR est un outil particulièrement intéressant pour déterminer le capital nécessaire à la compagnie pour couvrir un produit, c'est à dire éviter la faillite (sur ce produit) avec une certaine probabilité (celle ci sera fixée dans les applications numériques). Elle est par ailleurs facile à implémenter à partir des simulations de GAP.

Le seul inconvénient de la VaR est son comportement lorsqu'il y a plus d'un produit. La partie suivante présente notre analyse du problème. Ses résultats donnent en particulier le mode de calcul du capital de couverture de plusieurs produits.

III - AGRÉGATION DE PRODUITS

Nous avons vu dans la deuxième partie comment trouver le capital de couverture d'un produit d'assurance vie : en utilisant la VaR sur des indicateurs précis, ceci à partir de simulations faites par le logiciel interne de la CNP, GAP.

Il est donc important de se pencher maintenant sur le problème de la consolidation du risque entres produits, donc entre différentes sources de risque. Cette partie est essentielle pour bien comprendre l'allocation de capital. Dans un premier temps, nous exposons notre point de vue sur le comportement de la VaR vis à vis des produits agrégés. Nous confrontons ensuite ce point de vue aux critiques classiques faites à la VaR (non sous-additivité principalement).

1. Exemple introductif

1.1. Amélioration ou détérioration de la solvabilité

On considère deux distributions X_1 et X_2, avec la convention que des valeurs positives représentent des gains. On note $X = X_1 + X_2$ le risque agrégé. Il n'existe pas de lien simple entre VaR(X) d'une part et VaR(X_1) et Var(X_2) d'autre part ; autrement dit, la VaR est une mesure de risque qui n'est ni additive, ni sous-addititive, ni sur-additive. La raison intuitive est que la quantité VaR(X_1) + VaR(X_2) ne tient pas compte de la loi jointe du couple ($X_{1,}$ X_2.) L'exemple qui suit montre que couvrir le risque X_1 par VaR(X_1) et X_2 par VaR(X_2) à un certain seuil α dans le but de couvrir la situation agrégée X peut conduire aussi bien à une couverture de X à un seuil $\beta<\alpha$ (situation « d'amélioration de la solvabilité ») qu'à un seuil $\beta>\alpha$ (situation de « dégradation de la solvabilité »).

Supposons que X_1 et X_2 soient deux variables trinomiales, X_1 pouvant prendre les valeurs 100, -10 et –150 et X_2 les valeurs 150, -10 et –100 (les valeurs négatives représentent des pertes). Supposons que l'on ait 3 états du monde ω_1, ω_2, ω_3 équiprobables. Avec le montant 10, on couvre ainsi X_1 dans 2/3 des cas, et de même pour X_2. 10 est donc la VaR de X1 (et X2) au seuil 1/3. Si l'on couvre le risque X= X_1+ X_2 avec la somme des montants précédents (soit 20), plusieurs cas peuvent se présenter, selon la distribution des pertes pour X_1 et X_2 dans les différents états du monde. Nous allons présenter trois situations différentes :

Premier cas : « solvabilité inchangée »

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
ω_1	100	150	250
ω_2	-10	-10	-20
ω_3	-150	-100	-250

Avec le montant 20, on couvre états du monde ω_1 et ω_2 , c'est à dire 2/3 des cas. On a donc au seuil 1/3 : VaR(X1+X2)=VaR(X1)+VaR(X2) = 20.

Deuxième cas : « dégradation de la solvabilité »

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
ω_1	100	150	250
ω_2	-10	-100	-110
ω_3	-150	-10	-160

Il faut donc un capital de 110 pour couvrir la situation agrégée au seuil 1/3 : VaR(X1+X2) = 110. On a donc VaR(X1+X2)>VaR(X1)+VaR(X2) = 20.

Le montant nécessaire pour couvrir 2/3 des cas est 110. Avec le montant VaR(X1)+VaR(X2), on couvre seulement 1/3 des cas. La situation en terme solvabilité s'est dégradée. **Dans ce cas, la somme des VaR n'est pas une mesure prudente : elle ne rend pas compte du fait que les pertes faibles de X_1 sont associées à des pertes élevées pour X_2 et vice versa, ce dont rend bien sûr compte la VaR de la somme des distributions (VaR(X)).**

Troisième cas : « amélioration de la solvabilité »

	X_1	X_2	$X_1 + X_2$
ω_1	100	-100	0
ω_2	-10	-10	-20
ω_3	-150	150	0

On a alors : VaR(X1+X2) = 0 : un capital de couverture nul suffit à faire face à 2/3 des cas.

On note par ailleurs qu'avec un montant de 20 on est couvert dans tous les cas. **Dans cette configuration, la somme des VaR est donc une mesure prudente, elle ne rend pas compte du fait que les pertes élevées de l'activité 1 sont associées à des gains élevés de l'activité 2 et inversement, ce dont rend compte la quantité VaR(X).**

1.2. Conclusion

Cet exemple simple permet de voir que :

- La somme des VaR ne tient pas compte des interactions des risques. La quantité $VaR(X_1)+VaR(X_2)$ (où les VaR sont au seuil x%) ne s'interprète pas en terme de « capital permettant de couvrir le risque X_1+X_2 dans (100-x)% des cas » et peut conduire aussi bien à des situations améliorées que dégradées en termes de solvabilité.

- La VaR du risque global rend compte au mieux des interactions éventuelles et s'interprète directement en terme de « capital permettant de couvrir le risque global dans (100-x)% des cas ».

La bonne manière de contrôler la situation agrégée en terme de VaR est donc de considérer $VaR(X_1+X_2)$.

Si l'on veut fonder une allocation de capital sur la VaR de chaque activité, il faut absolument réintégrer une information liée à la loi jointe de (X_1, X_2). Pour cela, nous introduisons une nouvelle grandeur γ.

1.3. L'indicateur γ

Notons $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le risque agrégé et introduisons l'indicateur d'absence de sous-additivité :

$$\boxed{\gamma = \sum_i VaR(X_i) - VaR(X)}$$

γ contient par construction une information liée à la loi jointe des Xi. Que permet-il de conclure quant à la détérioration ou l'amélioration de la solvabilité ?

- γ positif signifie qu'il faut, à un seuil fixé, moins de capital pour couvrir le risque global (somme des Xi) que pour couvrir tous les risques considérés séparément (i.e. sans tenir compte d'éventuelles améliorations). Plus γ est grand (et positif), plus l'effet « amélioration » est important.
- Les conclusions pour γ négatif sont symétriques : il faut, à un seuil fixé, plus de capital pour couvrir le risque global (somme des Xi) que pour couvrir tous les risques considérés. Plus γ est petit (et négatif), plus l'effet « dégradation » est important.

Dans la suite, nous utiliserons donc γ pour mesurer l'amélioration ou la dégradation de la solvabilité.

2. VaR et agrégation des risques

Dans cette partie, nous exposons les critiques classiques faites à la VaR comme instrument de mesure du risque puis nous généralisons la définition de l'indicateur d'absence de sous-additivité vu dans l'exemple introductif précédent.

2.1. Critiques classiques de la VaR

La VaR n'est pas sous-additive

C'est la critique la plus courante.

En gestion de portefeuille, le cadre classique de travail est le cadre moyenne variance. Dans ce cadre, on a une règle forte qui dit que la diversification réduit le risque (Markowitz). Cela provient, au fond, de la relation suivante sur les écarts type : $\sigma(X1+X2)< \sigma(X1)+ \sigma (X2)$. En fait, la diversification réduit le risque au sens des écarts types.

On a vu dans les exemples précédents qu'avec la VaR, on n'avait pas de relation de sous-additivité du même type ; dans certains cas, VaR(X1+X2)>VaR(X1)+VaR(X2). La **diversification ne réduit pas nécessairement le risque au sens de la VaR**. En fait, dans notre cadre de travail, cela n'est pas choquant : en diversifiant le risque, on limite l'écart type global mais on n'augmente pas nécessairement le nombre de cas où l'on peut faire face à ses engagements. On peut aussi dire que ce n'est pas parce qu'on diversifie le risque qu'on augmente le pourcentage de chances de pouvoir faire face à ses engagements.

Pour illustrer cette proposition, on peut prendre l'exemple suivant, où les 3 états du monde considérés sont équiprobables :

Soit la configuration

	X_1	X_2
ω_1	100	100
ω_2	0	-150
ω_3	-150	0

On note que les deux variables aléatoires sont égales en distribution. La question que l'on se pose ici est : est-ce que le fait de diversifier le risque $2X_1$ en X_1+X_2 améliore la situation en termes de solvabilité ?

Si on supporte le risque $2X_1$, un capital de couverture nul suffit à faire face dans 2/3 des cas. En revanche, si on supporte le risque X_1+X_2, ce capital permet seulement de faire face à 1/3 des cas. **En terme de solvabilité, la diversification n'a donc pas amélioré la situation.**

Une autre conséquence directe de la non sous-additivité de la VaR est que le contrôle individuel des risques n'implique pas nécessairement un contrôle sur le risque global, comme vu précédemment (1.1). Soit la configuration suivante, ω_1, ω_2 et ω_3 désignant trois états du monde équiprobables (la probabilité de réalisation de chaque état est donc 1/3) :

	X_1	X_2
ω_1	100	100
ω_2	0	-100
ω_3	-150	0

On observe alors qu'un capital nul suffit à couvrir chaque risque pris indépendamment. Autrement dit, si une compagnie supporte le risque 1 seul, avec un capital de couverture nul, elle est certaine de ne pas faire de pertes dans 2/3 des cas et de même pour le deuxième risque. En revanche, si une compagnie supporte le risque $X_1 + X_2$, il lui faut un capital de 100 pour ne pas faire de pertes dans 2/3 des cas. En termes de VaR au seuil 1/3, ce qui précède s'écrit :

VaR(X1) =0 , VaR(X2)=0

VaR(X1+X2) = 100

Et donc dans cet exemple $VaR(X_1)+ VaR(X_2)< VaR(X)$

Cette inégalité (qui caractérise la non sous-additivité de la VaR) traduit le fait que les états du monde qui correspondent à une perte nulle pour X_1 sont associés à une perte élevée pour X_2 et inversement, c'est en ce sens qu'il y a « dégradation de la solvabilité ».

Insistons sur le fait que cette dégradation ne correspond pas nécessairement à une augmentation de la variance. De manière symétrique une amélioration de la situation se traduira par une VaR sur additive, mais cette amélioration de la solvabilité au niveau agrégé ne correspondra pas nécessairement à une diminution de la variance.

La VaR ne rend pas compte de la concentration des risques

Cette seconde critique reprend et étend la première. Elle est remarquablement illustrée par un exemple à coloration financière tiré d'un article d'Albanese [6] (1997).

On se place dans un cas où le taux d'intérêt est nul (on peut toujours se ramener à un tel cas en divisant le prix des actifs par le prix de l'actif sans risque) et on considère des obligations de rendement 2% et de probabilité de défaut 1%. On suppose que le risque de défaut est indépendant des compagnies. Un investisseur emprunte un montant de 1.000.000 au taux nul. On va maintenant comparer deux stratégies :

1ere stratégie : on investit 1.000.000 sur une seule obligation ;

2eme stratégie : on investit ce même montant dans 100 obligations ayant les mêmes caractéristiques (diversification).

Le résultat net de l'opération est la valeur finale du portefeuille moins le montant de l'emprunt (emprunt à taux nul).

Les deux stratégies ont la même espérance de gain : 9800. L'écart type dans le premier cas vaut 100.000 et il vaut 1000 dans le deuxième : au sens de l'écart type, la deuxième stratégie est clairement moins risquée.

Analysons maintenant le problème en terme de VaR au seuil 5% : vu que la probabilité de défaut vaut 1%, il est clair que la VaR à 5% est nulle dans le premier cas. C'est à dire qu'avec un capital de couverture égal à 0, j'ai un résultat final positif dans au moins 95% des cas. C'est le sens de l'affirmation « la première stratégie n'est pas risquée en terme de VaR à 5% ».

La deuxième stratégie se présente différemment :

- Probabilité de n'avoir aucun défaut : $P_0 = (0,99)^\wedge 100 = 0,366$.

Dans ce cas, le résultat net vaut 20.000.

- Probabilité d'avoir un unique défaut : $P_1 = 0.01*(0,99)^\wedge 99 * 100 = 0,37$.

Et le résultat net vaut dans ce cas 9800.

La probabilité d'avoir au moins deux défauts vaut donc environ 0,265 et un calcul simple montre qu'à partir de deux défauts, le résultat net est négatif : il y a donc des pertes. Ainsi, la probabilité d'avoir des pertes est, dans cette stratégie, bien supérieure à 5% ; la VaR à ce seuil sera donc strictement positive.

Au sens de la VaR, la deuxième stratégie est donc plus risquée que la première ; ceci traduit le fait que la probabilité d'avoir un résultat net négatif est plus grande dans la deuxième stratégie que dans la première.

Cet exemple montre bien que la VaR et l'écart type ne mesurent pas la même chose : la deuxième stratégie est moins risquée au sens de l'écart type car les pertes y sont « limitées » du fait de la diversification. Cependant, si un résultat net négatif signifie une faillite certaine, cette même stratégie est bien plus risquée car la probabilité de faillite y est alors bien plus élevée ; c'est l'analyse du risque en termes de VaR.

Cependant, on peut objecter à juste titre que la VaR n'indique pas du tout que les pertes potentielles de la première stratégie sont énormes (10^6 dans l'exemple). En ce sens, elle ne rend pas bien compte de la concentration des risques.

2.2. Présentation générale de l'indicateur d'absence de sous-additivité

On se reporte au premier paragraphe de ce chapitre et on généralise l'indicateur d'absence de sous-additivité introduit.

Soit une série de risques X_i. Si le risque global s'exprime comme $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, le terme $\gamma = \sum_i VaR(X_i) - VaR(X)$ mesure la dégradation (ou l'amélioration) de la solvabilité lors de l'agrégation des risques entre eux. En fait, l'hypothèse de linéarité $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ peut se révéler assez contraignante dans la pratique ; cela sera notamment le cas dans cette étude lorsque nous étudierons la PREET, qui n'a pas un comportement linéaire. On peut donc généraliser la formule de la manière suivante.

On considère une série de risques X_i et un risque global $X = f(X_1,..., X_n)$ qui dérive de la prise en compte de tous les risques X_i simultanément et qui est homogène aux X_i.

Si les X_i et X sont homogènes, c'est à dire si cela a un sens de les sommer (c'est le cas par exemple si les X_i représentent des montants de perte mais ça ne sera pas le cas en général si les X_i sont des ratios, sauf bien sûr si ces ratios représentent des fractions d'une même quantité), alors :

- La quantité $\sum VaR(X_i)$ a un sens : elle représente la somme des montants qu'il faut pour couvrir, à un certain seuil, les risques X_i pris indépendamment (c'est à dire sans tenir compte d'éventuelles améliorations/dégradations) ; il faut bien noter que même si chaque VaR est au seuil x %, la quantité $\sum VaR(X_i)$ ne permet pas d'être couvert dans (100-x)% des cas.
- La quantité $VaR(X) = VaR(f(X_1,..., X_n))$ représente le montant qu'il faut pour couvrir à un certain seuil le risque agrégé X

Ces deux quantités représentent des mesures sur des risques homogènes, on peut donc à nouveau définir γ comme leur différence : $\gamma = \sum_i VaR(X_i) - VaR(X)$

γ mesure alors la dégradation / amélioration de la solvabilité lors de l'agrégation des risques :

- Un γ grand et positif signifie qu'il faut beaucoup plus de capital pour couvrir chaque risque indépendamment à un certain seuil que pour couvrir le risque agrégé à ce même seuil : il y a donc eu amélioration des risques entre eux.
- Un γ petit et négatif signifie symétriquement une dégradation des activités entre elles en termes de solvabilité.

3. Conclusion

L'utilisation de la VaR nous semble pertinente dans une perspective prudentielle d'assurance, c'est à dire pour étudier spécifiquement **le nombre de cas où la compagnie peut faire face à ses engagements**. Par contre **elle ne rend pas compte du niveau du risque (typiquement sa variance)**.

Dans cette approche du risque, la non sous-additivité de la VaR s'interprète assez naturellement en termes d'amélioration ou de dégradation de la solvabilité lors de l'agrégation des risques. Il n'en reste pas moins que cette non sous-additivité signifie que le contrôle individuel des risques par la VaR n'implique pas nécessairement un contrôle au niveau global.

Dans une approche prudentielle, il est donc impératif d'appliquer en premier lieu la VaR au risque global afin de connaître le montant nécessaire afin d'assurer la solvabilité globale. L'allocation du capital de couverture entre les différents risques ne se fait que dans un deuxième temps. Il n'est ni prudent ni optimal de fonder une allocation de capital sur la seule donnée des VaR des différents risques. Nous préciserons tous ces points dans la partie traitant de l'allocation de capital.

IV - ALLOCATION DE CAPITAL

En supposant le montant de fonds propres déterminé par la VaR sur le risque global, il s'agit maintenant de répartir les fonds propres de la société entre les différentes sources de risques. L'allocation des fonds propres consiste donc en la mutualisation des réserves, entre produits.

Nous avons vu à cet égard que la VaR ne convient pas, mais nous cherchons tout de même une allocation basée sur cette dernière. L'allocation que nous proposons est fondée sur deux propriétés de la VaR, développées précédemment :

- La VaR est une mesure de risque qui permet de traduire directement un risque en un montant de capitaux nécessaires à sa couverture, à un seuil fixé à l'avance ;
- La VaR permet de mesurer les dégradations et les améliorations de risques multiples entre eux, et cela de manière cohérente avec l'approche du risque que nous avons choisie ;

1. Présentation

1.1. Problématique

On considère n distributions $X_1,\dots X_n$ .On note $X = f(X_1,\dots,X_n)$ la distribution de la situation agrégée. Si l'on choisit comme mesure de risque la VaR à un certain seuil s fixé, le capital nécessaire pour couvrir X dans (100-s)% des cas est noté VaR(X). Le problème qui se pose à celui qui pilote l'activité X est d'allouer le capital VaR(X) entre les n activités.

La solution qui consiste à couvrir chaque X_i par VaR(X_i) à un seuil x n'est pas bonne. Nous avons vu dans la partie traitant de la VaR et de l'agrégation des risques qu'une telle allocation ne permet pas de contrôler le risque global. En particulier, le capital $\sum VaR(X_i)$ ne permet pas d'être couvert pour le risque X au seuil x. Il peut aussi bien aboutir à une situation plus risquée qu'à une situation plus sûre que la couverture au seuil x.

Dans la suite, nous allons essayer de déterminer une allocation de capital qui tienne compte des effets liés à l'amélioration ou la dégradation de la solvabilité lors de l'agrégation des risques, en nous appuyant sur les résultats de la partie II 2. **La non sous-additivité de la VaR impose la contrainte fondamentale prudentielle suivante :** $\sum CR_i = VaR(X)$ où CR_i désigne le capital de couverture du risque i. La formule exprime que quelle que soit l'allocation choisie, la somme des capitaux alloués doit permettre de faire face au risque global au seuil x.

1.2. Système proposé par Drouffe et Soupé (1998)

Nous présentons ici les résultats de la thèse d'actuariat IAF de J. Drouffe et F. Soupé [8]. Cette thèse aborde la problématique de l'allocation de capital dans la branche IARD, cependant de nombreux résultats sont intéressants pour notre étude, c'est pourquoi nous en disons quelques mots.

Le calcul du Capital à risque pour un ensemble de risques est obtenu par la méthode de la Value at Risk. On note CaR_i, le capital marginal nécessaire à l'activité de la maison mère dû à la prise en compte de la filiale. Par extension, ce sera le capital marginal nécessaire à l'activité de la compagnie dû à la prise en compte d'un certain produit.

On note i- l'entité globale privée de i, CaR est le capital nécessaire pour l'entité globale. L'allocation proposée pour i est la suivante :

$$\boxed{CaR_i = \frac{VaR(X) - VaR(X_{i-})}{\sum_j (VaR(X) - VaR(X_{j-}))} * VaR(X)}$$

CaR_i s'interprète comme une fraction du montant de couverture total VaR(X). Cette fraction dépend du risque marginal apporté par l'activité i . Le dénominateur est un facteur de normalisation. Nous allons voir que cette allocation peut s'obtenir dans le cas de deux risques comme un cas particulier du système d'allocation que nous allons mettre en place.

2. Allocation de capital dans le cas de deux risques

Exemple introductif :

Supposons que X_1 soit une partie d'un risque X. On note X_{1-} le risque X privé de X_1. Enfin, on suppose : Var $X_1 = 10$ et VaR X = VaR X_{1-} +15

Cela signifie que X_1 a un risque propre nécessitant un capital de couverture de 10, mais que lors de son agrégation avec X_{1-}, le capital de couverture de X_{1-} augmente de 15. Quelle est alors le capital de couverture à attribuer au risque X_1 ? 10 ou 15.

2.1. Capital à répartir

Comme défini dans la partie précédente, on note γ l'indicateur de sous-additivité, c'est à dire : $\gamma = VaR(X_1)+VaR(X_2) - VaR(X_1+X_2)$.

Le cas $\gamma > 0$ correspond à une amélioration des risques entre X_1 et X_2 et le cas $\gamma < 0$ correspond à une dégradation. Cet indicateur va servir à compenser les défauts de la VaR.

On note CR_i le capital utilisé pour couvrir le risque Xi. On pose alors :

$$\mathbf{CR_i = VaR(X_i) - \mu_i.\gamma}$$

L'idée est que pour couvrir le risque Xi, on corrige le terme VaR(Xi), qui représente le capital nécessaire pour couvrir le risque Xi seul, par un terme qui prenne en compte les interactions des risques entre eux.

Les contraintes que l'on impose a priori sur les μ_i sont doubles :

- $\Sigma\, \mu_i = 1$: pour assurer Σ CRi = VaR(Σ Xi)= VaR(X) ;
- $\mu_i > 0$: cette contrainte correspond au fait que lorsqu'on anticipe une amélioration des activités en termes de solvabilité ($\gamma>0$), on diminue le capital de couverture de l'activité i (et inversement s'il y a dégradation).

On peut noter que le cas $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 = 0$ (ou l'inverse) correspond à une approche dite « ΔVaR ». Le choix des coefficients μ_i dépend de la manière dont on veut piloter l'activité. Il en découle plusieurs approches.

Retour à l'exemple :

On a alors $CR_1 = 10\text{-}5\mu_1$ avec μ_1 à déterminer.

2.2. Allocations

Il s'agit de chercher les montants de couverture qui couvrent le mieux chaque risque pris indépendamment, tout en tenant compte des interactions qui peuvent dégrader ou bien améliorer la situation. Deux systèmes d'allocation sont proposés.

On rappelle que : $\mathbf{CR_i = VaR(X_i) - \mu_i.\gamma}$ et $\mathbf{\gamma = \Sigma\, VaR(X_i) - VaR(X)}$

- Proposition 1 : $\mu_i = \dfrac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)}$

On a alors

$$CR_i = VaR(X_i) - \frac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)} * \left(\sum_j VaR(X_j) - VaR(X)\right)$$

On corrige ainsi le montant de couverture brut VaR(Xi) avec un terme γ (qui rend compte de l'interaction des risques) pondéré par un coefficient proportionnel au risque intrinsèque, VaR(Xi). **Un produit possédant un risque propre élevé verra ainsi son capital de couverture sensiblement augmenter en cas de dégradation de la solvabilité et sensiblement diminuer en cas d'amélioration.**

Cette approche est la plus intuitive au sens ou elle cherche à rendre compte au plus près au risque intrinsèque VaR(Xi), en tenant néanmoins compte des interactions éventuelles.

NB : Dans cette approche, le dénominateur $\Sigma VaR(X_j)$ est un terme de normalisation, indispensable pour assurer la contrainte fondamentale prudentielle Σ CRi = VaR(X).

On a une formule équivalente : $\boxed{CR_i = \dfrac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)} * VaR(X)}$

Dans cette formulation, le capital de couverture s'interprète comme une fraction du capital de couverture global. Cette fraction ne dépend que des risques individuels intrinsèques. Toute l'information sur les interactions des risques entre eux se trouve dans le terme VaR(X).

- Proposition 2 (Drouffe et Soupé) :

$$\boxed{CaR_i = \frac{VaR(X) - VaR(X_{i-})}{\sum_j (VaR(X) - VaR(X_{j-}))} * VaR(X)}$$

où on a noté : $X_{i-} = \sum_{k \neq i} X_k$ (soit pour deux risques $X_{i-} = X_j$)

Dans ce cas, le capital de couverture s'interprète comme une fraction du capital de couverture global, fraction qui dépend du risque marginal, c'est à dire de l'augmentation du besoin en capital (ou bien de sa diminution éventuelle) qu'apporte l'activité i aux autres activités.

On tient ainsi compte dans cette deuxième proposition des interactions des risques entre eux de deux manières bien distinctes : une manière qui compare le risque global aux risques individuels (terme VaR(X)) et une autre qui compare le risque i à tous les autres. Cette approche est, à ce titre, plus dynamique que la précédente.

Un calcul simple montre que cette deuxième allocation correspond, *dans le cas de deux risques*, à

$$\mu_i = \frac{VaR(X) - VaR(X_i)}{\sum_j (VaR(X) - VaR(X_j))}$$

2.3. Comparaison des deux propositions précédentes

La première allocation proposée est plutôt fondée sur le risque propre des produits, et la seconde sur leur risque marginal. Le choix d'une de ces allocations, qui sont équivalentes en terme de risque global, dépendra des rentabilités induites et de la réglementation.

On définit la rentabilité globale de l'activité par r = E(X)/VaR(X) et les rentabilités des produits par $r_i = E(X_i)/CR_i$. Après avoir fixé les μ_i, nous pourrons donc calculer les rentabilités des différents produits, et arbitrer entre les différentes allocations que nous proposerons.

On peut aussi fixer les μ_i de manière arbitraire, par exemple en répartissant γ uniformément entre les risques.

Remarque : notons qu'il est possible, une fois des critères de rentabilité fixés de manière exogène, de calculer les μ_i.

La relation Σ E(X_i) = E(X) impose : $r_1.CR_1 + r_2.CR_2 = r.VaR(X)$

soit $r_1. VaR(X_1) + r_2. VaR(X_2) - r_1.\mu_1.\gamma - r_2.\mu_2.\gamma = r. VaR(X)$

On a ainsi le système :

(1) $$r_1\mu_1 + r_2\mu_2 = \frac{rVaR(X_1 + X_2) - r_1VaR(X_1) - r_2VaR(X_2)}{\gamma}$$

(2) $\Sigma\ \mu_i = 1$

On obtient alors une détermination unique des μ_i qui correspond aux rendements annoncées (système linéaire de deux équations à deux inconnues) pourvu que $r_1 \neq r_2$. Enfin, il convient de s'assurer in fine que les μ_i trouvés sont bien positifs. Si ce n'est pas le cas, c'est que les objectifs fixés avec ces spécifications du risque et de rentabilité ne peuvent être atteints.

Nous avons insisté sur l'allocation entre deux risques car ce sont les allocations que nous avons testées numériquement, elles se généralisent pour n risques.

3. Généralisation à n risques

Dans cette partie, nous allons généraliser le système que nous avons développé dans la partie précédente.

3.1. Prise en compte de l'indicateur d'absence de sous-additivité

On note $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ le risque agrégé et on généralise l'indicateur d'absence de sous-additivité $\gamma = \sum_i VaR(X_i) - VaR(X)$

On prend à nouveau : $CR_i = VaR(X_i) - \mu_i * \gamma$

Avec $\sum_i \mu_i = 1$ de façon à s'assurer que $\sum_i CR_i = VaR(X)$

3.2. Cas particuliers d'allocation

Ce sont les mêmes que ceux développés dans le cas de 2 risques :

- μ_i proportionnel au risque du produit : $\mu_i = \frac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)}$

On obtient alors le capital à répartir suivant : $\boxed{CR_i = \frac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)} * VaR(X)}$

- $$CR_i = \frac{VaR(X) - VaR(X_{i-})}{\sum_j (VaR(X) - VaR(X_{j-}))} * VaR(X)$$

Dans le cas de plus de deux risques, on n'a pas de formulation simple des μ_i.

3.3. Application à un système d'allocation en terme de ratios

En assurance vie, l'allocation de fonds propres s'exprime souvent en terme de pourcentage de provisions mathématiques, et donc sous forme de ratios. Or, nous avons déjà remarqué que les développements précédents étaient valides seulement dans le cas de risques homogènes et donc en particulier invalides pour des ratios (cf.II-2.1). Il s'agit donc dans cette partie de proposer une méthode pour contourner cette difficulté.

Soient $X_1 \ldots X_n$, n risques exprimés en pourcentage de provisions mathématiques (PM), X_i est donc un ratio exprimé en % de PM_i : $\boxed{X_i = 100 * \frac{CR_i}{PM_i}}$ **Les X_i ne sont pas homogènes.** Le risque global X (montant de couverture ramené aux PM totales) est ici défini par : $X = 100 * \frac{\sum_i CR_i}{\sum_i PM_i}$. On observe au passage que **X ne dépend pas linéairement des X_i.**

Introduisons les ratios $\boxed{X_i^* = X_i * \frac{PM_i}{\sum_j PM_j}}$

Ils représentent les n risques exprimés en pourcentage des provisions mathématiques totales des différents risques ; ce sont donc n quantités homogènes.

On a alors $X = \sum_i X_i^*$ et on est dans le cadre d'application de l'allocation proposée précédemment. On pose donc $\gamma = \sum_i VaR(X_i^*) - VaR(X)$

On propose alors l'allocation suivante, exprimée en pourcentage des PM totales :

$$CR_i^* = VaR(X_i^*) - \mu_i \gamma$$

Mais les ratios qui nous intéressent sont en fait les montants de couverture du risque i ramenés aux provisions PM_i (et non pas aux provisions totales) ; nous proposons la formule empirique suivante qui a l'inconvénient d'être non pas un scalaire mais une variable aléatoire : $CR_i = CR_i^* * \frac{\sum_j PM_j}{PM_i}$

Si on souhaite obtenir un ordre de grandeur théorique de CR_i, on peut estimer sa moyenne : $E(CR_i) = CR_i^* * E(\frac{\sum_j PM_j}{PM_i})$ ainsi que sa variance en faisant des simulations.

4. Considérations pratiques sur l'allocation

Nous développons ici les différentes étapes nécessaires à l'allocation des fonds propres, i.e. l'implémentation des formules ci dessus. Par ailleurs nous développons les formules pour réaliser l'allocation d'un capital quelconque.

4.1. Etapes de l'allocation de capital

Dans une compagnie qui fait face à plusieurs types de risques, l'allocation s'insère dans un procédé plus large. On peut distinguer trois étapes successives :

- 1° étape : on répartit les produits par classes (épargne en francs, épargne en unités de compte, prévoyance …).
- 2° étape : on définit le capital à répartir par classe. Soit on prend, comme l'oblige la réglementation 4 % des provisions mathématiques pour chaque classe, soit on utilise le système d'allocation proposé ci dessus en sachant que sur l'ensemble des produits, toutes classes confondues, le capital à répartir est de 4 % des provisions mathématiques.
- 3° étape : à l'intérieur de chaque classe, on effectue la répartition du capital alloué entre les différents produits de la classe, par la méthode développée ci dessus (i.e. en spécifiant les coefficients μ).

Remarque : Dans notre cas, GAP n'étant au point que pour les produits d'épargne en francs, pour les applications numériques nous nous contentons de travailler sur une classe unique.

Les calculs précédents sont longs, or il peut être intéressant avant l'introduction d'un nouveau produit par une compagnie d'étudier son impact en terme de risque sur l'ensemble agrégé. Afin de faire des calculs plus rapides, nous proposons la méthode ci-après.

On répartit le capital entre 2 produits comme vu dans la première partie : le produit X_1 est le nouveau produit que l'on souhaite introduire, le « produit » X_2 est en fait l'ensemble agrégé des produits déjà en place.

4.2. Allocation d'un capital prédéterminé

Notre système d'allocation aborde en même temps le problème de la solvabilité globale et celui de l'allocation de capital. En effet, après avoir choisi un indicateur, on couvre le risque global avec le montant VaR(X) et ensuite on alloue ce montant entre les diverses activités. Le fait de traiter les deux questions ensembles peut dans certains cas être limitatif ; on peut souhaiter par exemple vouloir utiliser un certain indicateur pour déterminer la solvabilité globale et un autre pour la question spécifique de l'allocation ou encore on peut souhaiter imposer de manière exogène le montant de couverture global, notamment en le fixant de manière réglementaire. On peut alors utiliser les résultats précédents de manière suivante :

Partons d'un capital de couverture global K imposé, en numéraire. On souhaite allouer ce capital entre deux produits, K_1 couvrant le premier produit et K_2 le second. Par l'une des méthodes développées précédemment, on détermine en pourcentage des provisions mathématiques individuelles une allocation « théorique » CR_1 et CR_2. Une manière d'allouer K est de prendre K_1 et K_2 solutions du système :

$$K_1 + K_2 = K$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{CR_1 * PM_1}{CR_2 * PM_2}$$

ce qui revient à garder les proportions de l'allocation théorique.

En notant $r = \frac{CR_1 * PM_1}{CR_2 * PM_2}$ on obtient :

$$K_1 = \frac{r}{1+r} K$$

$$K_2 = \frac{1}{1+r} K$$

V - RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET INTERPRÉTATIONS

Cette dernière partie est consacrée aux résultats numériques obtenus à partir de simulations de GAP et à l'analyse que l'on peut en faire. Après avoir décrit les modalités des simulations et donné quelques résultats sur les indicateurs utilisés et la qualité de la VaR obtenue pour un produit spécifique, nous étudions la sensibilité aux conditions initiales.

Nous portons alors notre attention sur l'agrégation de deux produits et l'allocation de capital entre ces deux produits. Nous voyons tout particulièrement l'importance des actifs mis en représentation des produits.

N.B. : les valeurs de VaR négatives signifient qu'un capital de couverture nul suffit à couvrir le produit qui dégage suffisamment de bénéfices.

1. Simulations

1.1. Méthodologie

- 1000 simulations : ce chiffre est très faible ; nous n'avons pas étudié **le nombre de simulations** nécessaire pour avoir de bons résultats sur la VaR, il s'agit là d'un problème complexe qui nécessiterait un développement. 1000 simulations présentent évidemment l'avantage de la rapidité du calcul.
- Les simulations sont sur 20 ans, cependant, nous nous contentons ici de **prévisions sur 5 ans** qui donnent des résultats plus réalistes. D'une part les prévisions du logiciel de gestion actif passif ne sont pas fiables au-delà de 10 ans et d'autre part, il faut régulièrement prendre en compte de nouveaux produits, il ne sert donc à rien de faire des prévisions sur trop long terme.
- 3 indicateurs de risque : MFPN, RISK1 et RISK, développés ci dessous.
- mesure du risque sur les indicateurs divisés par les PM.

1.2. Résultats préliminaires sur les indicateurs

C'est l'occasion de faire quelques remarques préliminaires sur les résultats obtenus pour un produit et de comparer les indicateurs. On prend ici un produit à prime unique PU, avec des actifs en représentation essentiellement obligataires (une description plus précise de ce type de produit se trouve en *annexe 3*).

On rappelle dans le cadre suivant les principales caractéristiques des indicateurs étudiés (cf. II.2.3).

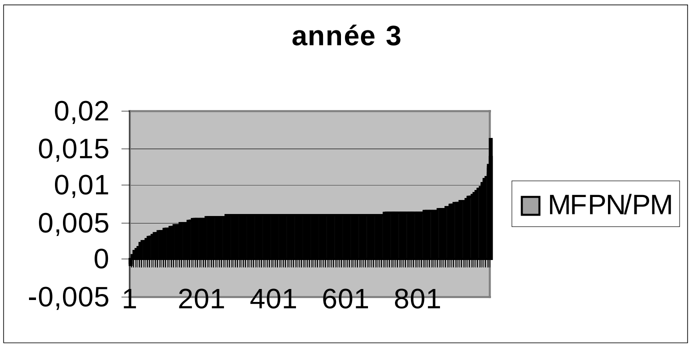
- **MFPN** = résultat total - ΔPreet + ΔCapi : sert à déterminer le **montant de fonds propres nécessaire** à l'assureur pour faire face aux engagements de l'année courante ; il est basé sur les valeurs comptables.
- **RISK1** = résultat total + ΔPMVL1 + ΔCapi : est une vision plus pertinente de l'exposition au risque et de son évolution, de plus il est « comparable » avec l'indicateur précédent puisque les mêmes actifs concernent PMVL1 et Preet.
- **RISK** = résultat total + ΔPMVL1 + ΔPMVL3 + ΔCapi : mesure plutôt une **exposition au risque** (RISK<0 n'implique pas nécessairement un coût de fonds propres, sauf si les moins values latentes se réalisent) ; il est basé sur les valeurs de marché. Il sera utile pour maîtriser à un certain seuil la baisse potentielle du résultat financier.

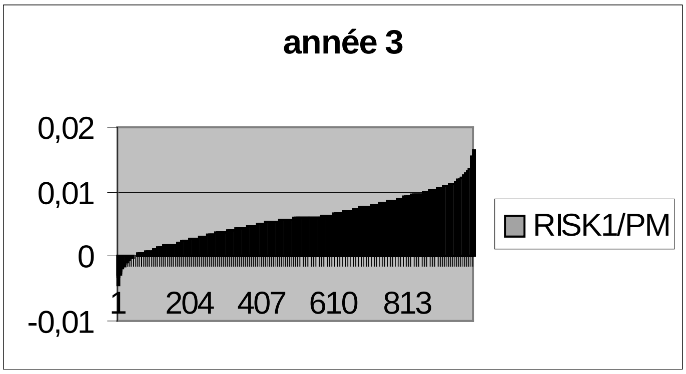
Les graphes ci dessous montrent les *1000 résultats obtenus la troisième année* pour les trois indicateurs en pourcentage des PM. En abscisse, les 1000 scénarii sont classés par ordre décroissant de besoin de fonds propres.

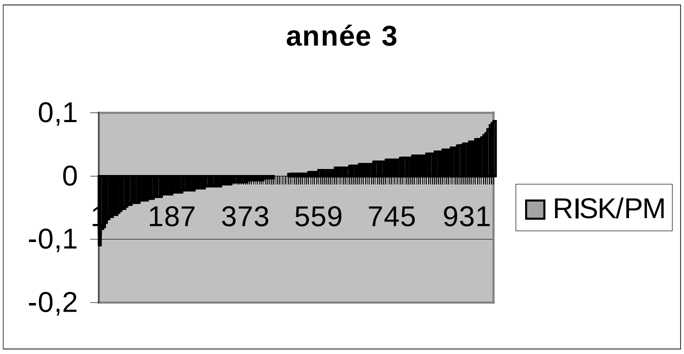
Le besoin en fonds propres est le moins important pour MFPN/PM, puis il augmente pour RISK1/PM et enfin le plus gros besoin est pour RISK/PM. Ce dernier est basé sur les plus ou moins values latentes, qui sont par nature plus volatiles que la Preet, il n'est donc pas étonnant que le coût de capital qui en découle soit plus important.

Notons bien que RISK représente davantage une volatilité annuelle de la valeur des actifs financiers et donc une **exposition au risque** ; il sert par la suite pour l'allocation, mais n'implique pas nécessairement un coût de fonds propres. MFPN quant à lui montre une impossibilité de faire face à ses engagements dans l'année, lorsqu'il est négatif il est égal au **niveau de capital de couverture nécessaire**.

On note que dans la plupart des scénarii, il n'y a pas de coût de fonds propres, c'est à dire que les indicateurs sont presque toujours positifs (graphes 1 et 2).







1.3. Qualité de la VaR

Nous donnons ci dessous trois tableaux pour les trois indicateurs (MFPN, RISK1 et RISK en pourcentage des PM) sur la **précision de la VaR à 1%,** toujours pour le produit PU, **ceci par année de calcul**.

N.B. : Les valeurs de VaR ici négatives signifient qu'au seuil de 1% il n'y a pas besoin de fonds propres (les gains sont systématiques)

Nous avons étudié la différence entre les résultats lorsque le seuil de confiance varie de 0.1% au voisinage de 1%. La précision est donnée par :

$$P = (VaR_{1.1\%} - VaR_{0.9\%}) / 2.VaR_{1\%}$$

La précision est bonne, de l'ordre de 1%.

	2001	2002	2003	2004	2005
M/PM					
VaR 0,9%	6,78E-03	-1,34E-04	7,02E-04	-5,35E-04	-2,59E-03
VaR 1%	6,78E-03	-5,19E-05	7,96E-04	-4,27E-04	-2,35E-03
VaR 1,1%	6,78E-03	6,87E-04	8,22E-04	-1,38E-04	-2,35E-03
V=VaR 1%	6,78E-03	-5,19E-05	7,96E-04	-4,27E-04	-2,35E-03
$d=V_{1,1\%}-V_{0,9\%}$	2,17E-07	8,21E-04	1,21E-04	3,97E-04	2,35E-04
r=d/2	1,08E-07	4,11E-04	6,03E-05	1,99E-04	1,18E-04
precision=r/V	1,60E-05	-7,92E+00	7,58E-02	-4,65E-01	-5,00E-02

R1/PM					
VaR 0,9%	-4,98E-03	-5,11E-03	-1,83E-03	-3,09E-03	-3,20E-03
VaR 1%	-4,95E-03	-5,09E-03	-1,76E-03	-2,69E-03	-3,14E-03
VaR 1,1%	-4,78E-03	-5,05E-03	-1,64E-03	-2,28E-03	-3,05E-03
V=VaR 1%	-4,95E-03	-5,09E-03	-1,76E-03	-2,69E-03	-3,14E-03
$d=V_{1,1\%}-V_{0,9\%}$	1,97E-04	6,53E-05	1,94E-04	8,05E-04	1,46E-04
r=d/2	9,83E-05	3,27E-05	9,69E-05	4,02E-04	7,28E-05
precision=r/V	-1,99E-02	-6,42E-03	-5,49E-02	-1,50E-01	-2,32E-02

R/PM					
VaR 0,9%	-6,65E-02	-6,43E-02	-8,13E-02	-7,55E-02	-7,47E-02
VaR 1%	-6,55E-02	-6,38E-02	-8,04E-02	-7,52E-02	-7,47E-02
VaR 1,1%	-6,39E-02	-6,35E-02	-7,75E-02	-7,50E-02	-7,39E-02
V=VaR1%	-6,55E-02	-6,38E-02	-8,04E-02	-7,52E-02	-7,47E-02
$d=V_{1,1\%}-V_{0,9\%}$	2,53E-03	8,43E-04	3,81E-03	5,52E-04	8,34E-04
r=d/2	1,26E-03	4,21E-04	1,90E-03	2,76E-04	4,17E-04
precision=r/V	-1,93E-02	-6,61E-03	-2,37E-02	-3,67E-03	-5,58E-03

2. Sensibilité aux conditions initiales

2.1. Hypothèses

La PPE et la PREET n'ont pas la même influence en cas de conjecture difficile pour la compagnie, car le code ne tient pas compte de la PPE comme d'une réserve, et son utilisation est différente. De même le fait d'avoir une richesse initiale, un « matelas », permet de retarder des difficultés financières et éventuellement d'éviter une faillite. Pour faire des comparaisons, on étudie 3 scénarii de conditions initiales :

- Garder les plus values latentes dans la PREET (par produit) ;
- Les réaliser en PPE (la PPE est donnée par produit) ;
- Ne pas avoir de plus values latentes.

Remarque : la PPE est éventuellement dotée en cas de plus values latentes, elle ne dépasse jamais 0.5 à 2 % des provisions mathématiques.

PU : matelas de richesse à l'actif constitué par des PVL

Plus-Values Latentes	
ACTIF	PASSIF = PM + PPE init

PUppe : matelas de richesse au passif constitué par l'importance de la PPE

	PPE
ACTIF	PASSIF = PM

Pupvl0 : pas de réserve de richesse que ce soit à l'actif ou au passif :

ACTIF	PASSIF = PM + PPE initiale

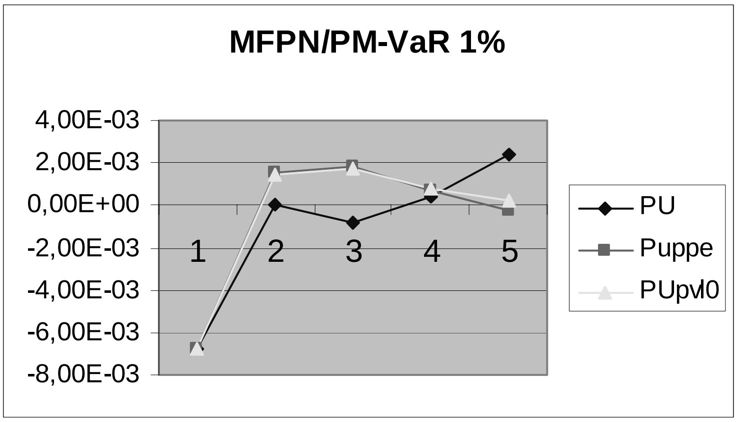
Numériquement, dans GAP, on a :

- PVL=310 millions ;
- PPE=350 millions ;
- Réserve capitalisation=80 milliards ;

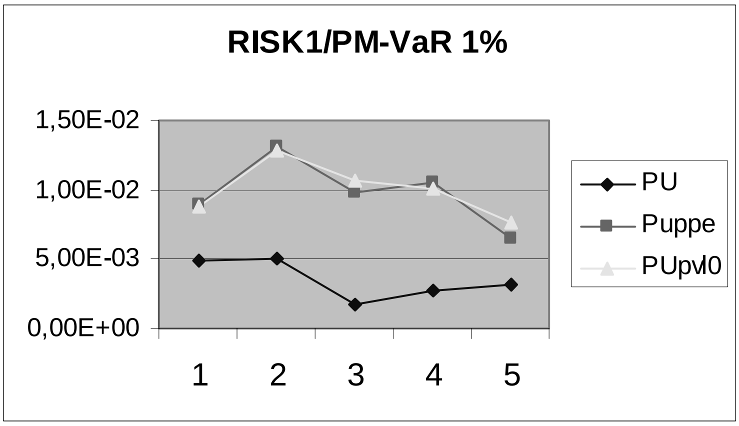
2.2. Résultats

On donne ci dessous les graphes des trois indicateurs MFPN/PM, RISK1/PM puis RISK/PM (rappel de définition page 43) pour comparer les conditions initiales :

- **PU** : matelas de richesse à l'actif constitué par des PVL ;
- **PUppe** : matelas de richesse au passif constitué par l'importance de la PPE ;
- **Pupvl0** : pas de réserve de richesse que ce soit à l'actif ou au passif.

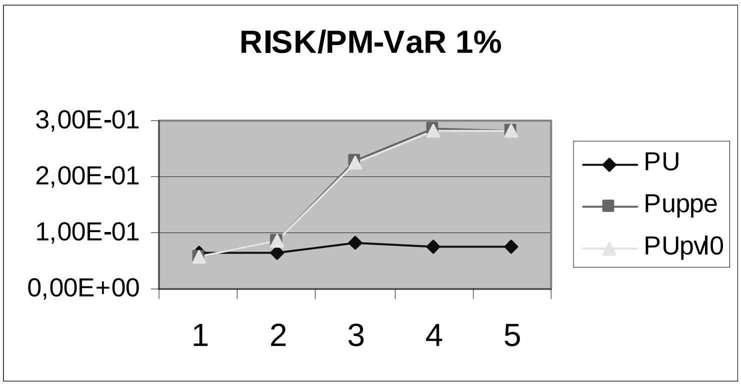


Pour cet indicateur, à base de Preet, Pupvl0 et PUppe ont même comportement et nécessitent au départ plus de fonds propres que PU.



Pour ce deuxième indicateur, à base des plus ou moins values sur les mêmes actifs que ceux de la Preet, on a à nouveau besoin de plus de fonds propres pour PUppe et Pupvl0 que pour PU.

Pour ce dernier indicateur, on voit nettement que l'exposition au risque est beaucoup plus forte dans les scénarii PUppe et Pupvl0 que dans PU. Les scénarii PUppe et Pupvl0 apparaissent identiques pour certains indicateurs, cependant les valeurs sont distinctes, même si elles sont proches.



Les conclusions sont les suivantes : il y a évidemment moins de risque lorsqu'il y a un matelas de réserve initial. Et il est dans cette optique préférable de garder ce matelas en plus ou moins values latentes, plutôt que de la passer en provision pour excédent.

Après ces résultats préliminaires nous abordons l'agrégation de deux produits et l'allocation de capital entre eux.

3. Agrégation de deux produits

Cette partie illustre numériquement la partie III. Nous prenons ici un produit à prime unique et un autre à versements libres, décrits dans la partie 3.1 de ce chapitre.

Par ailleurs, de nombreux résultats se trouvent en *annexe 5*.

3.1. Précision pour l'agrégation par GAP

Le fonctionnement du logiciel GAP a été décrit au II.1. Nous rappelons ici ses principales caractéristiques. Le risque de défaut n'est pas modélisé, seul le risque de taux l'est avec par ailleurs des hypothèses sur le rachat des produits par les assurés. Cependant, chaque produit est géré indépendamment, notamment en ce qui concerne les entrées et les sorties des assurés sur les produits. Le comportement des clients qui passent d'un produit à l'autre de la compagnie n'est donc pas directement simulé.

Il s'agit alors d'agréger les risques de deux portefeuilles. Les actifs en représentation des deux produits sont bien distincts, comme imposé par la réglementation.

Pour l'agrégation, on alloue les réserves à priori entre les deux produits puis on fait tourner GAP pour chacun des produits. On agrège les résultats (les PMVL et les Capi s'ajoutent, la Preet est plus délicate), scénario par scénario. On peut alors évaluer le risque agrégé.

Les deux produits utilisés pour la consolidation du risque ont des caractéristiques qui entraînent une source de risque différente. La principale différence des deux produits est que l'un, dénommé PU, consiste en une prime unique versée à la souscription, alors que l'autre, VL, est un produit à versements libres, en montant comme en date. Par ailleurs, PU est un produit d'épargne en francs, alors que VL est un mixte de produits en francs et en unité de compte. De plus, on fait des hypothèses différentes sur les rachats des contrats, notamment avec une réactivité spécifique des assurés aux offres concurrentielles. Pour plus de précision, on se référera à *l'annexe 3*.

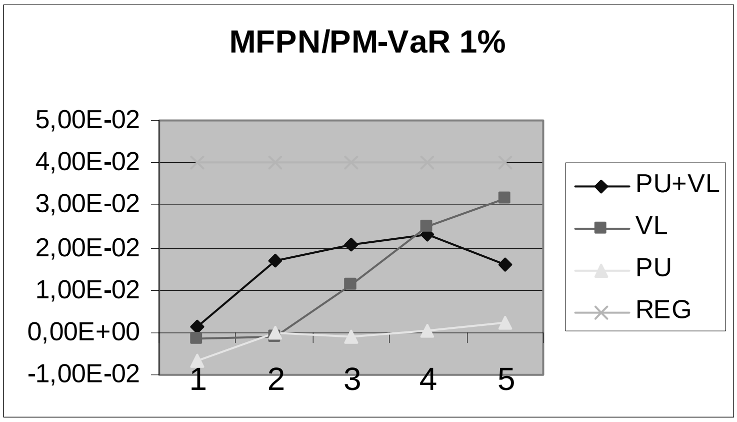
Le scénario d'évolution du marché financier est le même, mais les stocks d'actifs mis en représentation sont différents : ainsi, le pourcentage d'actions est de 0 pour PU et de 15 pour VL.

3.2. Résultats

On appelle ici **$VaR_{1\%}$ individuelle** d'un produit le capital de couverture d'un produit pris isolément, i.e. le capital nécessaire à la compagnie qui posséderait cet unique produit, pour être sûre avec une probabilité de 0,99 de faire face à ses engagements sur ce produit. On appelle **$VaR_{1\%}$ globale** de plusieurs produits le capital de couverture des produits pris ensemble.

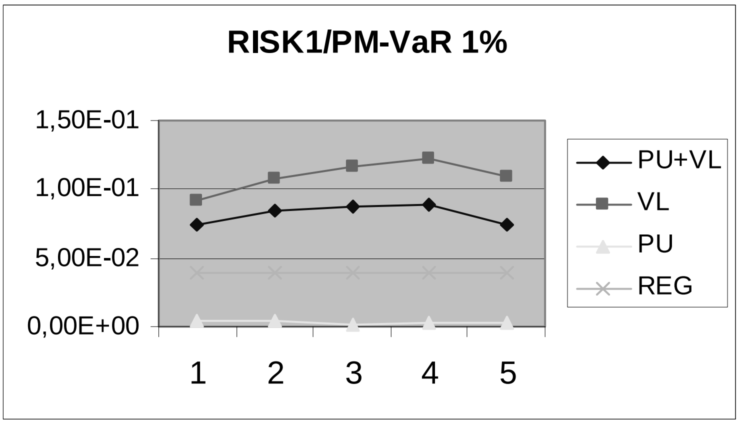
On utilise à nouveau les trois indicateurs MFPN, RISK1 et RISK (tableau p44), en pourcentage des Provisions Mathématiques. Enfin, les produits utilisés sont PU et VL, définis page 50.

Le premier graphe montre pour l'indicateur MFPN les $VaR_{1\%}$ individuelles de PU et VL, ainsi que la $VaR_{1\%}$ globale des produits PU et VL. On peut ainsi comparer chaque produit pris séparément, et les « produits agrégés ». On fait par ailleurs apparaître la marge réglementaire de 4% des PM.



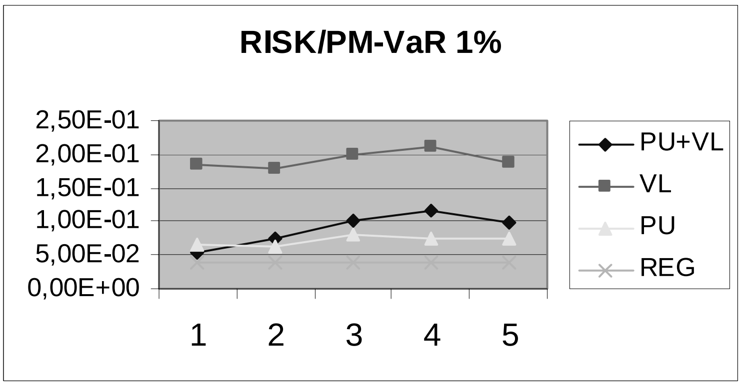
Le besoin en fonds propres est plus grand pour VL que pour PU. Par ailleurs, le capital de couverture pour les produits agrégés est encore plus grand. Il y a donc détérioration de la solvabilité lors de l'agrégation. Enfin, le capital reste toujours inférieur à la marge de solvabilité réglementaire de 4% des PM.

Le deuxième graphe montre pour l'indicateur RISK1 les $VaR_{1\%}$ individuelles de PU et VL, ainsi que la $VaR_{1\%}$ globale des produits PU et VL. On peut ainsi comparer chaque produit pris séparément, et les « produits agrégés ».



Le besoin en fonds propres est de nouveau plus grand pour VL que pour PU. Par contre le capital de couverture global de PU et VL est compris entre les capitaux de couverture des produits. Il y a donc cette fois une amélioration de la solvabilité lors de l'agrégation. Seul le capital de couverture de PU reste inférieur à la marge de solvabilité réglementaire de 4% des PM. Le besoin est plus important du fait que l'indicateur est plus volatile, comme vu en début de chapitre (cf. V.1.2).

Le troisième graphe montre pour l'indicateur RISK les $VaR_{1\%}$ individuelles de PU et VL, ainsi que la $VaR_{1\%}$ globale des produits PU et VL.



On trouve comme pour RISK1 classés par ordre croissant de besoin en capital : PU, PU+VL puis VL. Il y a de nouveau une amélioration de la solvabilité lors de l'agrégation.

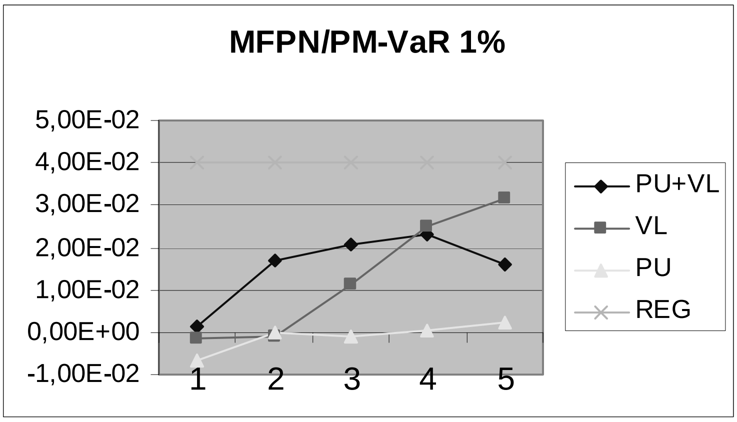
Tous les besoins sont supérieurs à la marge de solvabilité réglementaire de 4% des PM. Attention, ceci ne signifie pas que la marge réglementaire est insuffisante, l'indicateur RISK a une signification bien particulière « d'exposition au risque » et nous intéresse dans le cadre de l'allocation, mais pas dans celui du pur calcul du capital de couverture.

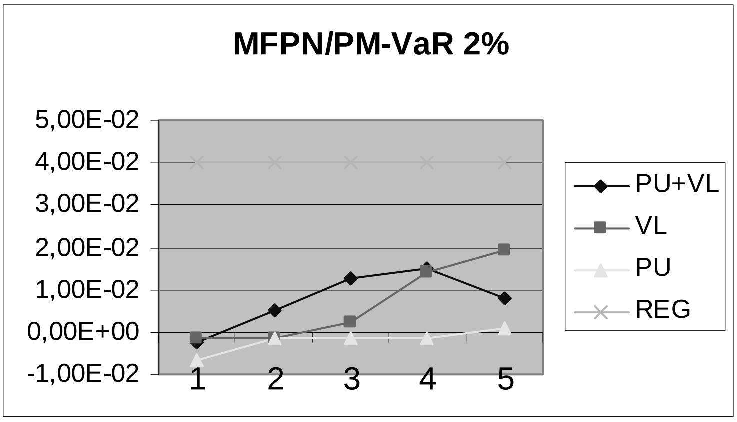
Nous avons de nouveau des résultats permettant de comparer les indicateurs (cf. définitions p 44). Seul MFPN peut être comparé à la marge réglementaire et celle-ci est ici suffisante. On remarque ici une détérioration de la situation en termes de solvabilité pour l'indicateur MFPN, et une amélioration pour RISK. L'allocation qui en découle sera étudiée plus loin.

3.3. Stabilité de la VaR par rapport au seuil de VaR pour une agrégation

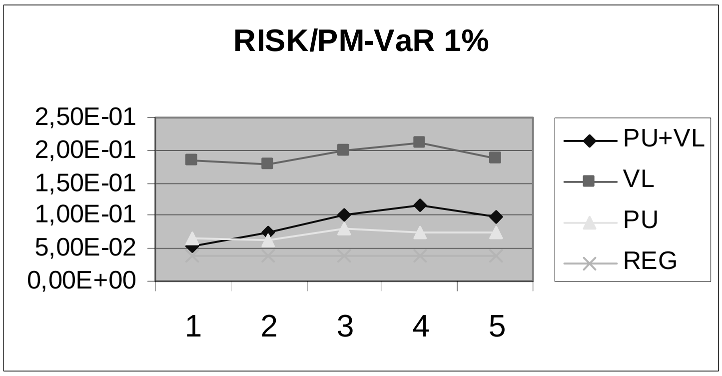
Cette partie consiste à voir si l'ordre de niveau de capital de couverture entre les produits est le même selon le seuil de VaR choisi. On compare donc les $VaR_{1\%}$ et $VaR_{2\%}$ individuelles pour les produits PU et VL et globales pour les produits PU et VL agrégés (plus de résultats sont disponibles en *annexe 4*).

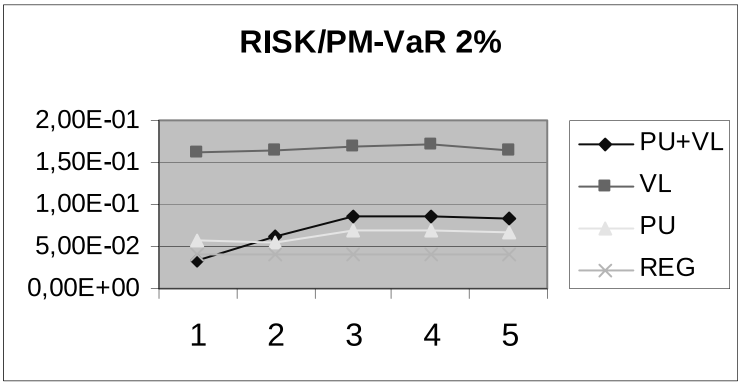
Les deux graphes suivants sont les $VaR_{1\%}$ puis $VaR_{2\%}$ pour les produits pour l'indicateur MFPN. Le seuil de VaR ne change pas l'ordre des différents produits. Bien entendu, le capital de couverture nécessaire au seuil de 2% est plus petit.





Les deux graphes suivants sont les $VaR_{1\%}$ puis $VaR_{2\%}$ pour les produits pour l'indicateur RISK. À nouveau, le seuil de VaR ne change pas l'ordre des différents produits et le capital de couverture nécessaire au seuil de 2% est plus petit.





L'ordre du besoin en capital des produits n'est donc pas instable par rapport au seuil de la VaR. C'est une bonne chose en vue d'une allocation basée sur la VaR.

3.4. Comparaison avec le critère d'espérance d'utilité

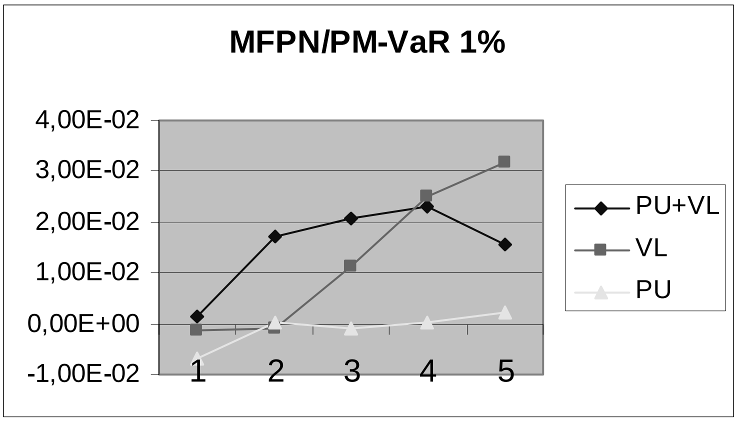
Des études importantes ont été faites par Rotshild et Stiglitz à propos de la mesure du risque. Ils démontrent notamment que la seule mesure de risque universelle est le critère d'espérance d'utilité. Le problème d'une telle mesure est de déterminer la fonction d'utilité de tout un chacun, ce qui est loin d'être résolu. Une telle fonction doit vérifier certaines propriétés, comme être croissante et convexe. Une fonction souvent utilisée pour sa simplicité et ses propriétés est la fonction exponentielle : u = -exp(-ax), où a représente le niveau d'aversion au risque. Ensuite on mesure le risque de la variable aléatoire X par E(-exp(-aX)).

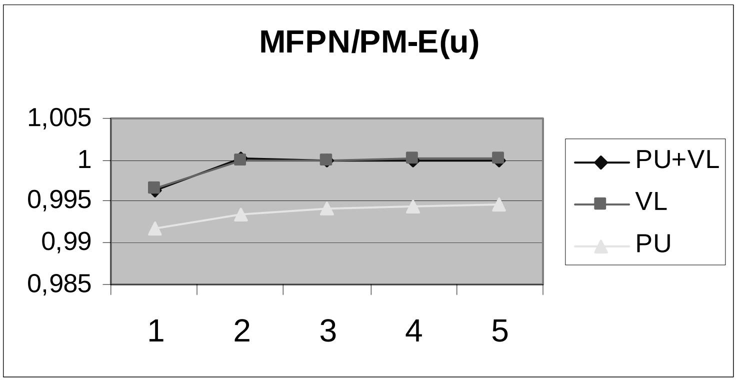
Il s'agit ici de vérifier si, lorsqu'un produit est plus risqué selon le critère d'espérance d'utilité, il a aussi un besoin de fonds propres plus important par le critère de la VaR.

En prenant a=1 dans la fonction exponentielle, nous avons pu comparer les classements des différents produits selon les critères d'espérance d'utilité et de Value at Risk.

Dans un premier temps, nous avons donc estimé **E(-exp(-aX))**, où X est un des deux indicateurs MFPN/PM ou RISK/PM sur les produits PU, VL et agrégés, par la moyenne des 1000 résultats. Dans un deuxième temps, nous avons comparé les classements des produits entre eux en niveau de VaR et en niveau d'espérance d'utilité.

Nous donnons pour exemple ci dessous les graphes de l'indicateur MFPN/PM pour les produits PU, VL et agrégés, ceci pour les deux critères. Dans le deuxième graphe, PU+VL et VL sont quasiment confondus, mais en regardant les résultats numériques on vérifie bien les classements.





Il s'avère que les classements entre les produits PU, VL et agrégés sont identiques, sauf pour la première année pour laquelle il peut y avoir des différences, c'est à dire que si un produit est plus risqué selon le critère d'espérance d'utilité, il s'avère avoir un besoin de fonds propres plus important par le critère de la VaR.

4. Allocation de fonds propres

4.1. Rappels sur les allocations

On rappelle les formules suivantes (cf. IV) :

$\gamma = VaR(X_1)+VaR(X_2) - VaR(X_1+X_2)$

$CRi = VaR(Xi) - \mu_i.\gamma$

Nous allons tester numériquement, dans le cas de deux risques, les deux allocations suivantes qui sont des cas particuliers de notre système d'allocation (la deuxième allocation étant en fait celle proposée par Drouffe et Soupé en 1998) :

$\Rightarrow$ $$CR_i = \frac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)} * VaR(X) \quad \text{(allocation 1)}$$

$\Rightarrow$ $$CR_i = \frac{VaR(X) - VaR(X_{i-})}{\sum_j (VaR(X) - VaR(X_{j-}))} * VaR(X) \quad \text{(allocation 2)}$$

L'indicateur de risque que nous allons utiliser est RISK.

Rappel : **RISK** = res total + ΔPMVL1 + ΔPMVL3 + ΔCapi.

Cet indicateur mesure une **exposition au risque de solvabilité et pas un niveau de risque** (RISK<0 n'implique pas nécessairement un coût de fonds propres) ; il est basé sur les valeurs de marché des actifs et non pas sur leurs valeurs d'acquisition.

4.2. Calculs pour la première allocation

On détermine d'abord les VaR individuelles et agrégées**, exprimées en pourcentage des provisions mathématiques totales** :

VaR(PU+VL)	5,28%	7,43%	10,27%	11,50%	9,84%
VaR(VL*)	15,24%	14,24%	15,23%	15,95%	12,66%
VaR(PU*)	1,09%	1,32%	1,85%	2,21%	2,36%

Ce calcul permet d'avoir une première idée de la répartition en volume du risque entre les deux produits. On remarque que les VaR agrégées sont sensiblement inférieures aux sommes de VaR individuelles, ce qui préfigure des améliorations fortes entre produits. On note aussi que le risque du produit à versement libre est nettement plus élevé que celui du produit à prime unique

NB : Insistons sur le fait que les valeurs de VaR sont ici en pourcentage des PM totales, contrairement aux parties précédentes où les VaR étaient en pourcentage des PM individuelles.

Les VaR précédemment déterminées permettent de dérouler le calcul des allocations : calcul du gamma, des μ, des CR* puis des CR (on rappelle que les définitions de ces termes se trouvent en IV.3). Les résultats sont rassemblés années après années dans le tableau suivant :

γ	11,05%	8,13%	6,81%	6,66%	5,18%

μ(VL)	93,33%	91,52%	89,17%	87,83%	84,29%
μ(PU)	6,67%	8,48%	10,83%	12,17%	15,71%
CR(VL*)	**4,93%**	**6,80%**	**9,16%**	**10,10%**	**8,29%**
CR(PU*)	**0,35%**	**0,63%**	**1,11%**	**1,40%**	**1,55%**
coeff PM (VL)	1,2	1,26	1,32	1,39	1,47
coeff PM (PU)	6,09	4,88	4,15	3,63	3,24
CR(VL)	**5,91%**	**8,57%**	**12,09%**	**14,04%**	**12,19%**
CR(PU)	**2,15%**	**3,08%**	**4,62%**	**5,08%**	**5,01%**

Où on a noté (cf. IV.3.3) :

$$coeffPM(PU) = E\left(\frac{PM(PU)+PM(VL)}{PM(PU)}\right)$$

$$coeffPM(VL) = E\left(\frac{PM(PU)+PM(VL)}{PM(VL)}\right)$$

4.3. Interprétations

Les coefficients γ sont élevés, ce qui signifie que les améliorations sont fortes entre produits. Une part non négligeable des scénarii qui correspondent à des pertes pour un produit sont associées à des scénarios plus favorables pour l'autre produit. On note cependant que le phénomène d'amélioration de la solvabilité diminue avec les années.

Les coefficients μ sont stables, ce qui est normal car les VaR de départ le sont. Cela correspond à l'idée que les « risques propres » de chaque produit, en termes de solvabilité, sont stables dans le temps.

Les coefficients de PM montrent que si, au départ, la part de PM(VL) est bien plus importante dans PM(PU+VL) que celle de PM(PU), la tendance est à l'augmentation nette de cette dernière. En 2000, PM(PU) représente empiriquement 16% des provisions totales ; cette part est doublée en 2004. **Cette évolution de la base du risque** va se retrouver dans toutes les allocations que nous allons étudier.

Enfin, concernant les allocations à proprement parler, trois commentaires :

- Le produit VL nécessite plus de capitaux de couverture que PU, il est donc plus risqué en terme de solvabilité ;
- Le besoin en capitaux croît dans le temps, ce qui est dû uniquement aux interactions des produits entre eux car on a vu que les VaR individuelles restaient stables ;
- Lorsqu'on compare ces allocations au premier tableau concernant les VaR individuelles en % de provisions individuelles, on mesure toute l'importance des améliorations.

4.4. Deuxième allocation

Nous indiquons ici seulement les résultats.

CR(VL)	**-4,60%**	**-81,72%**	**32,99%**	**30,68%**	**23,22%**
CR(PU)	**55,51%**	**352,74%**	**-61,10%**	**-38,38%**	**-19,29%**

Ces résultats ne sont manifestement pas interprétables. La raison est la suivante.

La formule de base de cette allocation est :

$$CR_i = \frac{VaR(X) - VaR(X_{i-})}{\sum_j (VaR(X) - VaR(X_{j-}))} * VaR(X)$$

Ainsi, lorsque les interactions entre les produits sont fortes (c'est le cas lorsque γ est élevé), les termes du type $aR(X) - VaR(X_i)$ peuvent aussi bien être positifs que négatifs. Le facteur de normalisation de la formule précédente peut donc être une somme de termes avec des signes alternés. Au total, cette somme peut être très petite devant l'un de ses termes. Ainsi, il y a des instabilités qui rendent les interprétations impossibles dans certains cas où les interactions sont fortes. Dans ces cas là, on aura donc intérêt à opter pour une allocation proche de celle vue en 4.2 qui ne peut, par construction, présenter de telles instabilités.

Nous allons voir par la suite que lorsque les coefficients γ sont faibles, les deux allocations donnent des résultats tout à fait comparables. En fait, plus généralement, le choix des coefficients μ influe peu sur les allocations dans les cas de faibles interactions ; cela provient de la construction même de notre système d'allocations.

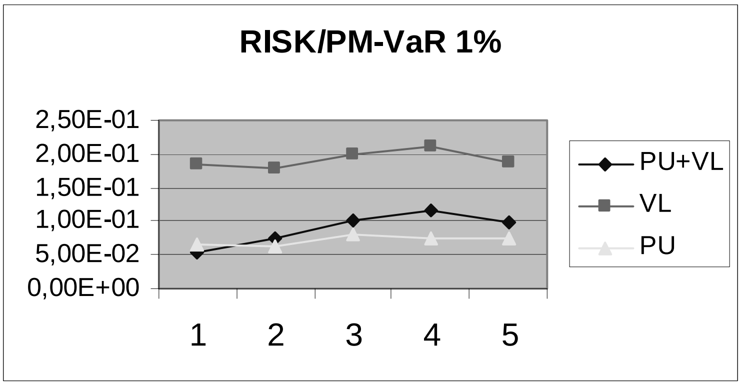
5. Problème des actifs en représentation

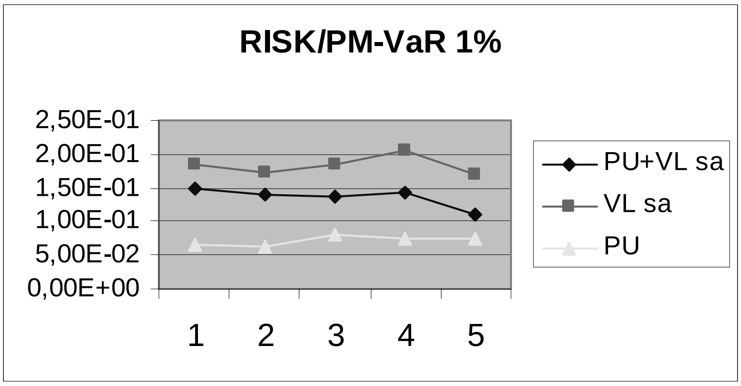
Au vu des comportements des VaR pour PU et VL, et compte tenu des différences entre les actifs mis en représentation pour ces deux produits, le premier comportant beaucoup d'obligations et le deuxième des actions, il nous a semblé opportun de modifier ces deux produits pour saisir l'importance des actifs.

Nous avons donc effectué de nouvelles simulations avec un produit PUa possédant les mêmes caractéristiques que PU mais avec des actions en représentation de manière analogue au produit VL initial. De même nous avons créé VLsa, possédant les mêmes caractéristiques que VL mais avec des obligations en représentation comme le produit PU initial.

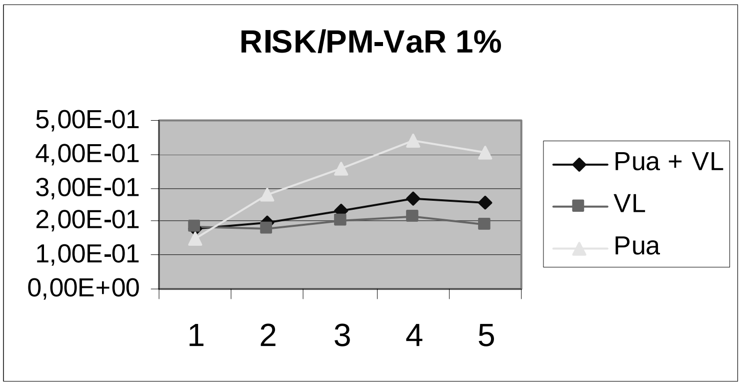
5.1. Valeurs de VaR

Nous avons alors comparé les niveaux de risque de ces produits par le critère de la VaR. Il s'avère, comme supposé, que les produits avec beaucoup d'actions sont plus risqués que les produits avec peu d'actions. La différence est plus importante entre Pu et Pua qu'entre VL et VLsa. Par ailleurs, l'agrégation PU+VL et similaire à PU+VLsa en ce sens qu'elle ne modifie pas les classements entre les différents produits, seuls et agrégés.





Le classement entre PUa et VL est par contre modifié, PU devenant plus risqué que VL, lorsque les deux produits ont le même type d'actifs en représentation.



5.2. Allocation entre les produits

Nous avons ensuite vérifié si les allocations entre produits étaient différentes.

Allocation PUa + VL

La démarche est strictement analogue à celle suivie en 4.2. Nous nous bornerons donc à indiquer les principaux résultats.

Dans le tableau suivant, VaR(PUa+VL) est exprimé en pourcentage des provisions mathématiques totales, VaR(VL) en pourcentage des provisions du produit à versements libres et VaR(PUa) en pourcentage des provisions du produit à prime unique.

VaR(PUa+VL)	17,80%	19,70%	23,02%	26,69%	25,31%
VaR(VL)	15,24%	14,05%	15,24%	15,95%	12,95%
VaR(PUa)	2,66%	5,86%	8,62%	11,48%	13,47%

On détermine ensuite la première allocation :

CR(VL)	**18,14%**	**17,49%**	**19,40%**	**21,53%**	**18,15%**
CR(PU)	**16,12%**	**28,44%**	**34,82%**	**40,98%**	**42,38%**

On note que la VaR de PUa est bien plus élevé que celle de PU, ce qui traduit le fait qu'on ait mis des actifs plus risqués en représentation du produit à prime unique. On note par ailleurs que la VaR agrégée est, elle aussi, bien plus élevée que dans le cas de l'allocation PU+VL. Ceci est dû bien sûr au fait que VaR(PUa) est plus élevé que VaR(PU), mais il y a une autre raison : les interactions entre les produits PUa et VL concernant la solvabilité sont faibles (cf. γ). Plus précisément, les améliorations sont quasi inexistantes. Cela provient du fait que les actifs mis en représentation pour VL et PUa sont semblables (tout en étant risqués).

Deuxième allocation :

CR (VL)	**18,22%**	**17,61%**	**19,72%**	**21,70%**	**18,12%**
CR (PU)	**15,70%**	**28,01%**	**33,80%**	**40,53%**	**42,45%**

Ces résultats sont tout à fait semblables aux précédents. Cela est dû, comme nous l'avons vu, aux interactions faibles entre les produits.

Allocation PU + VLsa

La démarche est à nouveau la même que précédemment.

Tableau des VaR à 1% des produits agrégés en pourcentage des PM totales et des produits en pourcentage des PM individuelles :

VaR(PU+VLsa)	15,01%	14,09%	13,68%	14,26%	11,16%
VaR(VLsa)	18,44%	17,17%	18,40%	20,44%	16,89%
VaR(PU)	6,55%	6,38%	8,04%	7,52%	7,47%
γ	1,19%	0,61%	2,15%	2,64%	2,94%

Première allocation :

CR(VLsa)	**16,76%**	**16,16%**	**15,98%**	**17,29%**	**13,64%**
CR(PU)	**6,13%**	**6,16%**	**6,64%**	**6,66%**	**6,02%**

En regardant les VaR, on note que VLsa est, en terme de solvabilité, plus risqué que VL, ce qui est conforme aux actifs mis en représentation. Par ailleurs, les actifs de PU ne sont pas très risqués. Donc au total, dans cette allocation, les actifs sont peu risqués.

En revanche, étant de même type, on ne peut pas espérer de grandes améliorations, ce qui se traduit par un γ faible.

Dans ce cas, les deux facteurs nature des actifs et interactions ne jouent pas dans le même sens. Au niveau de l'allocation, on arrive globalement à un besoin en capital plus important que dans le cas PU+VL alors même que, rappelons le, les actifs sont moins risqués pour PU+VLsa. Cela souligne à nouveau le rôle crucial des interactions.

Deuxième allocation :

CR(VLsa)	**18,10%**	**16,82%**	**18,56%**	**20,64%**	**17,55%**
CR(PU)	**-0,69%**	**3,61%**	**-1,48%**	**-2,11%**	**-2,65%**

Les résultats ont même ordre de grandeur que les précédents. Rappelons qu'en terme de solvabilité globale, les deux allocations sont équivalentes.

6. Comparaison des rentabilités

Ce paragraphe final permet de comparer les différentes allocations ainsi que de voir de nouveau l'importance des actifs en représentation. Nous avons calculé les différentes rentabilités des produits.

La rentabilité du produit A est donnée par la formule :

$$R(A) = E(RISK(A))/CR_A$$

E(RISK(A)) est l'espérance de l'indicateur RISK pour le produit A, espérance estimée par la moyenne des 1000 simulations, CR_A est le capital alloué au produit A.

Nous allons effectuer des calculs de rentabilités sur les deux allocations suivantes :

⇒ Allocation 1 : $$CR_i = \frac{VaR(X_i)}{\sum_j VaR(X_j)} * VaR(X)$$

⇒ Allocation 2 : $$CR_i = VaR(X_i) - 0.5 * \gamma$$

Cette deuxième allocation correspond à une allocation « moyenne » au sens où, en fixant μ=0.5, on a également distribué γ entre les deux produits.

Le tableau ci dessous donne pour 5 années successives la rentabilité des deux produits, lorsque l'allocation 1 ou bien l'allocation 2 se fait entre ces deux produits. Ces produits sont tout d'abord PUa et VL, puis PUa et VL, enfin PU et VLsa.

PU-VL					
R1(VL)	16,42%	12,28%	9,28%	6,79%	10,22%
R1(PU)	-27,77%	1,30%	5,52%	2,40%	7,88%
R2(VL)	8,33%	8,20%	7,19%	5,43%	8,42%
R2(PU)	2,21%	-0,30%	-3,95%	-2,99%	-52,98%
PUa-VL					
R1(VL)	5,35%	6,01%	5,78%	4,43%	6,87%
R1(Pua)	11,69%	9,24%	10,28%	9,94%	12,89%
R2(VL)	5,34%	5,99%	5,74%	4,41%	6,87%
R2(PUa)	11,84%	9,31%	10,43%	10,00%	12,88%
PU-VLsa					
R1(VLsa)	5,28%	5,81%	5,64%	3,70%	5,52%
R1(PU)	-9,73%	0,65%	3,84%	1,83%	6,56%
R2(VLsa)	5,10%	5,70%	5,28%	3,43%	4,99%
R2(PU)	-19,94%	0,81%	7,92%	3,94%	13,97%

<u>Interprétations :</u>

Commençons par quelques remarques sur l'interprétabilité de ces résultats, commune à l'ensemble des allocations précédentes. Les rentabilités négatives ne signifient pas toujours que les produits ne sont pas rentables. C'est parfois le cas la première année, par exemple pour le produit PU dans les allocations PU-VL et PU-VLsa, le signe moins provenant ici du fait que E(RISK(PU))<0 (donc résultat négatif). En revanche, les autres signes moins s'expliquent par un capital de couverture négatif, qui signifie qu'au seuil considéré, on n'a pas besoin de capital de couverture. Pour contrer cet effet qui nuit à l'interprétation, il faudrait baisser le seuil des VaR de manière à toujours obtenir des capitaux de couverture positifs. Cependant pour baisser ce seuil, il faudrait augmenter grandement le nombre de simulations. Dans le même ordre d'idées, il ne faut pas accorder trop d'importance aux rentabilités très élevées en valeur absolue, car elles sont dues à des capitaux de couverture proches de zéro, qui introduisent donc une instabilité artificielle dans les calculs de rentabilité. Pour pallier à cette difficulté, une solution serait à nouveau de baisser le seuil des VaR afin d'obtenir des capitaux de couverture plus conséquents.

Ces remarques étant faites, on note que les calculs de rentabilité ne permettent pas de différentier nettement les allocations 1 et 2 dans le cas PUa-VL. En revanche, dans le cas PU-VLsa, on observe que la deuxième allocation rend sensiblement plus rentable le produit PU (par rapport à la première allocation), tout en diminuant légèrement la rentabilité du produit à versements libres. Par ailleurs, comme on pouvait s'y attendre, les rentabilités dépendent grandement des actifs mis en représentation des produits. Par exemple, pour PU-VL le produit VL est bien plus rentable que PU. En revanche, c'est l'inverse pour PUa-VL.

CONCLUSION

La Value at Risk fait l'objet de critiques fondées comme instrument de mesure du risque ; elle nous a cependant semblé intéressante pour la problématique de l'allocation de capital en Assurance Vie. Elle permet de passer directement d'un indicateur de risque au montant de couverture nécessaire pour éviter une faillite (ou maîtriser une perte) à un certain seuil et elle permet de mesurer efficacement la dégradation ou l'amélioration de la situation en terme de solvabilité lors de l'agrégation de sources de risque.

Ces deux propriétés nous ont permis de construire un système, paramétré et facilement calculable, d'allocation de capitaux qui tienne compte à la fois de la solvabilité globale, des risques propres à chaque produit pris séparément ainsi que des interactions entre ces produits. Ces interactions entre produits, qui se traduisent par une détérioration ou une amélioration de la situation en terme de solvabilité, sont au cœur de notre étude. Ne pas les prendre en compte peut conduire tantôt à des situations imprudentes tantôt à des situations non rentables.

Les applications numériques ont été basées sur les simulations du logiciel de la CNP de gestion Actif Passif pour le calcul de la VaR. Elles portent sur l'agrégation de deux produits d'épargne individuelle pour lesquels on a fait varier les actifs mis en représentation des engagements techniques des produits.

Les résultats sur la VaR sont cohérents : les classements des produits selon leur besoin en capital sont stables par rapport au seuil de VaR et semblables aux classements selon le critère universel d'espérance d'utilité, les conclusions sur l'importance d'un matelas de richesse initiale (sous forme de plus ou moins values latentes) pour retarder la survenance de difficultés ainsi que celles sur l'importance des actifs mis en représentation des engagements des produits font sens.

Notre système d'allocation a été testé pour certains paramétrages particuliers. Cela a permis de quantifier l'importance des interactions entre produits dans les allocations, et notamment de voir le rôle prépondérant joué par les actifs mis en représentation des engagements techniques sur ces interactions. Ce système a par ailleurs été comparé à un autre système d'allocation, développé dans une étude antérieure, basé sur la VaR.

Cependant, les applications sont à prendre avec précautions. En effet, il est clair que le nombre de simulations, 1000, est largement insuffisant et doit être augmenté. De plus, nous n'avons pas spécifiquement étudié les modélisations en jeu dans le logiciel GAP. Enfin, la pertinence des hypothèses faites pour les simulations du logiciel GAP est parfois difficile à estimer, notamment concernant le comportement des clients.

Plusieurs prolongements sont envisageables afin de compléter utilement notre travail, comme l'étude de la stabilité temporelle des allocations, l'étude des réallocations éventuelles et la prise en compte du placement des capitaux de couverture en produits financier. Enfin, un axe particulièrement prometteur nous semble être la recherche, une fois la solvabilité globale assurée, de l'allocation optimale en termes de rentabilité, en jouant sur les paramètres μi de notre système d'allocation.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Pétauton, « Théorie et pratique de l'assurance Vie », Dunod, 1996

[2] Esch, Kieffer, Lopez, « Value at Risk – Vers un Risk Management moderne », De Boeck Université, 1997

[3] Le Code des Assurances, L'Argus, 1999

<u>Articles et publications</u>

[4] Ph. Artzer, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath, « Coherent measures of Risk », 1998

[5] Ph. Artzer, « Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance », North American Actuarial Journal, 1999

[6] C. Albanese, "Credit exposure, Diversification risk and Coherent VaR ", working paper, dept of mathematics, university of Toronto, 1997

<u>Mémoires d'actuariat</u>

[7] M. Biojout, E. Lehmann, « Application de la VaR pour le calcul de fonds propres en Assurance Vie », Ensae, 2000

[8] J. Douffre, F. Soupé, « Allocation de capital : Détermination du besoin en capital dans les différentes branches d'une compagnie d'assurance », Ensae, 1998

[9] V. Mattei, P. Coumes, « La gestion Actif – Passif : un outil de pilotage stratégique pour les sociétés d'assurance Vie », ISEA

<u>Polycopiés</u>

[10] N. Pistre, « VaR et Mesures de risque », Ensae 2000

[11] G. Deelstra, « Théorie du Risque et de la Réassurance », Ensae, 1999

[12] P.F. Koel, « Sélection de Portefeuille », Ensae, 2000

ANNEXE 1 : BILAN D'UNE COMPAGNIE D'ASSURANCE

COMPTE TECHNIQUE

Primes Pures

Intérêts techniques crédités

Participation aux bénéfices

Total Produits

Prestations

Variation de PM

Chargements de gestion sur encours

Prélèvements fiscaux

Total Charges

COMPTE ADMINISTRATIF

Chargements d'acquisition

Résultat sur Frais d'Acquisition

Chargements de gestion

Frais de gestion CNP

Rémunération sur encours

Résultat sur frais de gestion

COMPTE FINANCIER

Produits financiers nets des placements

Dotation pour réserve de PB

Variation de PPE

Intérêts Techniques crédités

PB

Chargements de gestion sur produits financiers

ANNEXE 2 : EXTRAITS DU CODE DES ASSURANCES SUR LES RÉSERVES ET PROVISIONS

Nous présentons ici les différentes réserves réglementées dans le code des assurances.

Provisions techniques (vie) : R 331.3

Les provisions techniques correspondant aux opérations d'assurance sur la vie, d'assurance nuptialité et aux opérations de capitalisation sont les suivantes :

5. PM, Provisions mathématiques : différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés ;
6. PPE, Provision pour participation aux excédents : montant des participations aux bénéfices attribués aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits ;
7. **Réserve de capitalisation** : réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu ;
8. Provision de gestion : réserve destinée à couvrir les charges de gestion future des contrats non couvertes par ailleurs ;
9. Provision pour aléas financiers : destinée à compenser la baisse de rendement de l'actif ;
10. **PREET, Provision pour risque d'exigibilité des provisions techniques** : provision destinée à faire face à une insuffisante liquidité des placements, notamment en cas de modification du rythme de règlement des sinistres ; elle est calculée dans les conditions définies dans l'article R331 5 1 ;
11. Provision pour frais d'acquisition reportés ;
12. PPE, Provision pour égalisation.

Précisions sur la PREET : R 331-5-1

Cette provision doit être constituée lorsque la valeur globale inscrite au bilan est supérieure à la valeur globale de réalisation de ces mêmes placements (situation de moins value latente).

Mouvements sur la réserve de capitalisation : R331-1

En cas de vente de valeurs évaluées conformément à l'article R332-19, à l'exception des obligations à taux variables, des versements ou des prélèvements sont effectués sur la réserve de capitalisation. Le montant de ces versements ou prélèvements doit être tel que le rendement actuariel des titres soit, après prélèvement ou versement, égal à celui qui en était attendu lors de l'acquisition de ces mêmes titres.

Maintien du revenu net des placements : R332-2

Les entreprises d'assurance sur la vie, d'assurance nuptialité natalité ou de capitalisation doivent maintenir le revenu net de leurs placements à un montant au moins égal à celui des intérêts dont sont créditées les provisions mathématiques

Mécanisme

Dans son ouvrage, P. Petauton [1] décrit le mécanisme associé à la réserve de capitalisation dans le cas d'obligations à taux fixes.

Lorsque les obligations sont comptabilisées au prix d'achat, leur valeur en bourse dépend de la situation des taux d'intérêts à long terme : si les taux montent, les cours des titres anciens baissent et inversement. En considérant que les obligations acquises par un assureur sont affectées à la couverture des provisions mathématiques, et qu'il y a nécessité d'assurer l'attribution d'un revenu constant à ces provisions et la conservation du capital couvert, un mécanisme avait été imaginé dès 1938 pour qu'en cas de vente d'obligation le réemploi soit suffisant pour maintenir le revenu et conserver le capital.

Considérons par exemple une obligation remboursable au niveau 100 avec un coupon annuel d'intérêt 5%. Si le titre a été acquis au taux actuariel de 5% et si le marché anticipe toujours un tel rendement, le cours du titre va être constant égal à 100. Une baisse des taux anticipés à 4% ferait grimper les cours ; le bénéfice qui viendrait d'une vente doit être porté dans la réserve de capitalisation, de sorte que la somme nécessaire pour couvrir à la fois les provisions mathématiques et la réserve, placée aux nouvelles conditions de marché conduira à récupérer la même somme au terme. Dans le cas d'une hausse des taux engendrant une baisse des cours la vente est possible sans dommage, si on peut prélever sur la réserve de capitalisation la différence entre la valeur actuelle au taux initial et le cours de bourse. Il faut évidemment que le niveau de réserve soit suffisant.

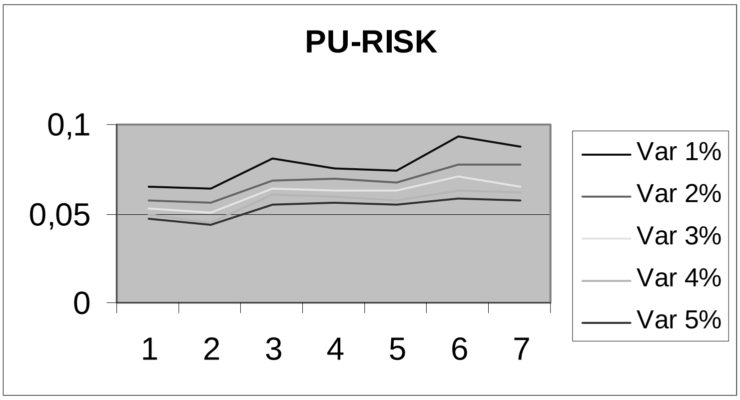
ANNEXE 3 : FICHES TECHNIQUE DES PRODUITS PU ET VL

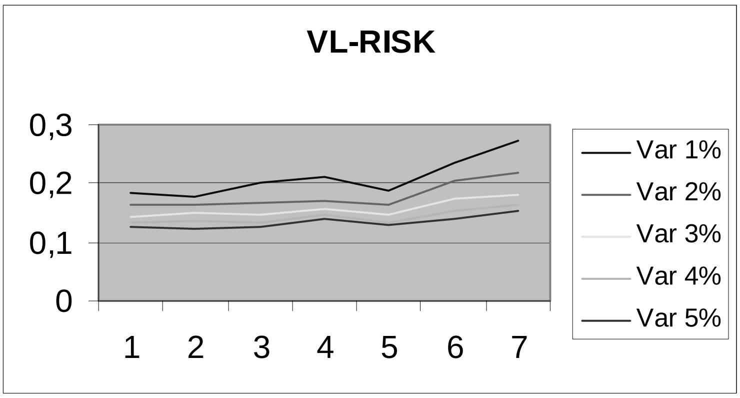
On synthétise dans le tableau qui suit les principales caractéristiques des deux produits :

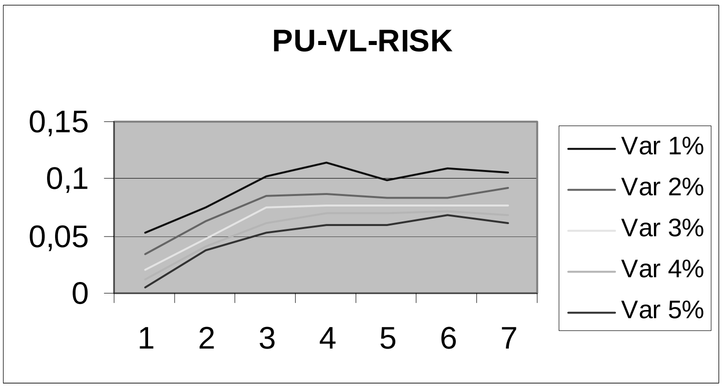
	PU	**VL**
Car techniques	Epargne F	Epargne F+UC
	Prime unique à souscription	Prime à souscription puis Versements libres
	TMG = 75% TME	TMG = 60% TME
	Pas de PB si sortie	PB si sortie
Car d'évolution portefeuille		
Montants souscription entrants	Décroissant de 15 à 5 Mds	En % de 4 Mds selon l'écart (TME-TGR)
		VL en % du total des PM et selon l'ancienneté, avec un effet taux
Age moyen Table mortalité	52 TD 88-90	50 table d'expérience particulière
Taux rachat partiel	1% des PM quelle que soit l'ancienneté	1.8 puis 4% des PM
Taux rachat total	De 4.5 à 30% selon l'ancienneté et moyennant un taux de réactivité face aux offres concurrentielles	De 1.2 à 10 selon l'ancienneté et moyennant un taux de réactivité face aux offres concurrentielles
Stocks d'actifs	Distincts	
Car évolution marché financier	Les mêmes	
% des actions	0 %	15 %

ANNEXE 4 : SEUILS DE VAR

On donne ci dessous les VaR de seuil 1% à 5% pour l'indicateur RISK sur les produits PU, VL et agrégé :







ANNEXE 5 : RÉSULTATS NUMÉRIQUES DES VAR

Nous donnons ci dessous les différents résultats numériques des $VaR_{1\%}$ (la VaR est négative lorsqu'il y a un bon résultat et qu'un capital de couverture nul suffit) :

- **PU-VL**

MFPN					
PU+VL	1,36E-03	1,71E-02	2,07E-02	2,30E-02	1,58E-02
VL	-1,49E-03	-8,85E-04	1,13E-02	2,49E-02	3,15E-02
PU	-6,78E-03	5,19E-05	-7,96E-04	4,27E-04	2,35E-03
RISK					
PU+VL	5,28E-02	7,43E-02	1,03E-01	1,15E-01	9,84E-02
VL	1,85E-01	1,78E-01	2,00E-01	2,12E-01	1,88E-01
PU	6,55E-02	6,38E-02	8,04E-02	7,52E-02	7,47E-02

- **PU-VLsa**

MFPN					
PU+VL sa	-1,75E-03	1,27E-02	1,08E-02	1,12E-02	2,74E-03
VL sa	-1,49E-03	-1,27E-03	5,41E-03	1,60E-02	2,20E-02
PU	-6,78E-03	5,19E-05	-7,96E-04	4,27E-04	2,35E-03
RISK					
PU+VL sa	1,50E-01	1,41E-01	1,37E-01	1,43E-01	1,12E-01
VL sa	1,84E-01	1,72E-01	1,84E-01	2,04E-01	1,69E-01
PU	6,55E-02	6,38E-02	8,04E-02	7,52E-02	7,47E-02

- <u>PU**a-VL**</u>

<u>MFPN</u>					
Pua + VL	-4,21E-03	6,83E-02	9,68E-02	1,09E-01	1,13E-01
VL	-1,49E-03	-8,85E-04	1,13E-02	2,49E-02	3,15E-02
Pua	-6,75E-03	6,71E-02	1,40E-01	1,96E-01	1,94E-01
<u>RISK</u>					
Pua + VL	1,78E-01	1,97E-01	2,30E-01	2,67E-01	2,53E-01
VL	1,85E-01	1,78E-01	2,00E-01	2,12E-01	1,88E-01
Pua	1,47E-01	2,79E-01	3,55E-01	4,43E-01	4,03E-01