



**Mémoire présenté**  
**devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances**  
**pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**  
**le \_10 Octobre 2013\_\_**

Par : Marie MOUKHAIBER

Titre: Gestion Actif-Passif pour un portefeuille de produits d'épargne : Application  
par immunisation et par allocation d'actifs.

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

*Membres du jury de l'Institut des Actuaires*

M. Christian FETTIG

M. Frédéric PLANCHET

*Entreprise :*

Actuscope

*Membres du jury I.S.F.A.*

M. Alexis BIENVENÜE

M. Denis CLOT

*Directeur de mémoire en entreprise :*  
M. Samih Geha

*Invité :*

**Autorisation de mise en ligne sur  
un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

*Secrétariat*

Mme Marie-Claude MOUCHON

Signature du candidat

*Bibliothèque :*

Mme Patricia BARTOLO

# ***Résumé***

Le débat sur la gestion Actif-Passif et la recherche de l'allocation optimale des actifs s'étend aujourd'hui de plus en plus dans la vie des institutions financières. Face à l'environnement en perpétuelle mutation, les gérants de fonds sont appelés à s'y adapter en mettant une gestion Actif-Passif adéquate.

La gestion Actif-Passif consiste à identifier, mesurer et maîtriser les risques d'inadéquation Actif-Passif afin de protéger la valeur de la société, son résultat, ses fonds propres et de maîtriser la compétitivité des produits. Son rôle principal en assurance vie, consiste à allouer de manière optimale l'actif en fonction des engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrats et en fonction d'objectifs de revalorisation des contrats et de rémunération des actionnaires.

Le développement de la gestion Actif-Passif s'est effectué parallèlement au développement des techniques de gestion des risques. Et il y a quelques années que les compagnies d'assurance se sont vues dans l'obligation de mettre en place des outils conformes à un nouveau cadre réglementaire de gestion de ces risques.

La finalité du présent mémoire est la mise en œuvre d'un modèle de gestion Actif-Passif en choisissant plusieurs outils de projection des données et d'analyse de résultats. Nous commençons par une projection déterministe du portefeuille visant à gérer les inadéquations Actif-passif grâce aux modèles les plus classiques et se poursuit par la mise en place d'une allocation d'actifs stratégique optimale par l'application du modèle de Leibowitz.

**Les mots clés :** Actif-Passif, Duration, Immunisation, rendement, volatilité, taux d'intérêt, obligations, actions, Markowitz, Leibowitz.

# ***Abstract***

The debate on the asset-liability management and the search for the optimal assets allocation extend now more and more in the life of financial institutions. Given the ever-changing environment, fund managers are required to adapt by setting an appropriate Asset-Liability Management (ALM).

ALM consists on identifying, measuring and controlling risks of Asset-Liability mismatching, in order to protect the company, its results, its assets and master the competitiveness of products. ALM is the ongoing process of formulating, implementing, monitoring, and revising strategies related to assets and liabilities in an attempt to achieve financial objectives for a given set of risk tolerances and constraints.

Its development was done in parallel to the development of risk management techniques. Since few years ago, insurance companies have been under the obligation to establish tools in compliance with a new regulatory framework to manage their risks.

The aim of the present report is the implementation of an Assets-liabilities management model by choosing different tools for projecting data and analyzing results. Our work started with a deterministic portfolio projection aiming to manage Assets-liabilities mismatching with classical tools and continues to implement an optimal strategic asset allocation by applying Leibowitz model.

**Keywords:** Assets-Liabilities, Duration, Immunization, return, Volatility, Interest rate, bonds, shares, Markowitz, Leibowitz.

# Sommaire

|                                                                                       |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction.....</b>                                                              | <b>7</b>  |
| <b>Partie 1 : Introduction aux différentes étapes de la gestion Actif-Passif.....</b> | <b>11</b> |
| <b>Chapitre I : Introduction à la Gestion Actif-Passif .....</b>                      | <b>12</b> |
| I.1 Définition.....                                                                   | 12        |
| I.2. Evolution de la gestion Actif-Passif.....                                        | 12        |
| I.3 Place de la gestion Actif-Passif au sein d’une compagnie d’assurance.....         | 14        |
| I.4 Par qui et comment sont prises les décisions.....                                 | 15        |
| I.5 Comptabilité et Actuariat en gestion Actif-Passif.....                            | 16        |
| <b>Chapitre II: Etapes et Outils.....</b>                                             | <b>17</b> |
| II.1 Etapes et Outils - Approche Statique.....                                        | 17        |
| II.1.1 Introduction.....                                                              | 17        |
| II.1.2 Projection des flux.....                                                       | 17        |
| II.1.3 Approche statique.....                                                         | 18        |
| II.1.4 Mesure des impasses/excédents de liquidité.....                                | 19        |
| II.1.5 Immunisation du portefeuille.....                                              | 20        |
| II.1.6 Duration et Immunisation.....                                                  | 21        |
| II.1.7 Convexité : Effet de Variations non infinitésimales.....                       | 27        |
| II.1.8 Limitations des modèles statiques.....                                         | 29        |
| II.2 Etapes et Outils – Modèle Dynamique.....                                         | 30        |
| II.2.1 Introduction.....                                                              | 30        |
| II.2.2 Approche Dynamique.....                                                        | 30        |
| II.2.3 Construction d’un modèle déterministe.....                                     | 31        |
| II.2.4 Eléments d’un modèle déterministe.....                                         | 31        |
| II.2.5 Scénarios.....                                                                 | 32        |
| II.2.6 Etude de l’allocation d’actifs.....                                            | 33        |

|                                                                                              |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| II.3 Etapes et Outils – Modèles Stochastiques.....                                           | 34        |
| II.3.1 Introduction.....                                                                     | 34        |
| II.3.2 Application à la gestion Actif-Passif.....                                            | 34        |
| II.3.3 Du Déterministe au Stochastique.....                                                  | 35        |
| <b>Partie 2 : Projection Déterministe de l'actif et du Passif – Couverture par</b>           |           |
| <b>Immunisation.....</b>                                                                     | <b>36</b> |
| <b>Chapitre I : Présentation et modélisation du contrat.....</b>                             | <b>37</b> |
| I.1 Présentation du contrat.....                                                             | 37        |
| I.1.1 Durée de vie du produit.....                                                           | 37        |
| I.1.2 Déroulé General.....                                                                   | 37        |
| I.1.3 Clause de revalorisation.....                                                          | 38        |
| I.2 Projection du Passif.....                                                                | 39        |
| I.2.1 Projection des Primes.....                                                             | 39        |
| I.2.2 Modélisation du décès.....                                                             | 39        |
| I.2.3 Modélisation des rachats.....                                                          | 41        |
| I.2.4 Les primes de risque.....                                                              | 44        |
| I.2.5 Les frais et les chargements.....                                                      | 45        |
| I.2.6 Les commissions.....                                                                   | 46        |
| I.2.7 La projection de la valeur en compte par contrat.....                                  | 46        |
| <b>Chapitre II : Construction de la courbe des taux et modélisation des classes d'actifs</b> |           |
| II.1 Construction de la courbe des taux.....                                                 | 48        |
| II.1.1 Swap.....                                                                             | 48        |
| II.1.2 Taux zéro-coupon.....                                                                 | 50        |
| II.1.3 Application: Construction de la courbe des taux.....                                  | 51        |
| II.2 Modélisation de la classe action.....                                                   | 54        |

|                                                                                  |            |
|----------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Chapitre III : Couverture par un cadre de gestion actif-Passif.....</b>       | <b>57</b>  |
| III.1 Introduction.....                                                          | 57         |
| III.2 Cash flow matching.....                                                    | 57         |
| III.3 Immunisation par la duration.....                                          | 61         |
| III.4 Immunisation par la méthode du vecteur de duration « DurationVector »..... | 62         |
| III.5 Immunisation par le key rate duration.....                                 | 64         |
| <b>Conclusion Deuxième Partie.....</b>                                           | <b>68</b>  |
| <b>Partie 3 : Allocation Stratégique d’actifs.....</b>                           | <b>69</b>  |
| <b>Chapitre I : Modélisation des actifs dans un cadre stochastique.....</b>      | <b>70</b>  |
| I.1 Modélisation stochastiques taux d’intérêt.....                               | 70         |
| I.1.1 Modèle de Vasicek (1977).....                                              | 73         |
| I.1.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985).....                                   | 74         |
| I.1.3 Modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM) – 1990.....                            | 75         |
| I.2 Application.....                                                             | 79         |
| I.2.1 Taux court terme.....                                                      | 79         |
| I.2.2 Calcul des taux longs et Pricing des Zéro-coupons.....                     | 80         |
| I.3 Modélisation des actions par le modèle de Black and Scholes.....             | 83         |
| I.4 Corrélation des Browniens.....                                               | 83         |
| <b>Chapitre II : Allocation Stratégique d’actifs.....</b>                        | <b>86</b>  |
| II.1 Introduction.....                                                           | 87         |
| II.2 Modèles de choix de portefeuilles.....                                      | 88         |
| II.2.1 Modèle de Markowitz.....                                                  | 88         |
| II.2.2 Markowitz – Maximisation d’une fonction d’utilité.....                    | 91         |
| II.2.3 Frontières Efficientes.....                                               | 95         |
| II.2.4 Modèle de Leibowitz.....                                                  | 96         |
| II.3 Interprétation des résultats.....                                           | 104        |
| <b>Conclusion.....</b>                                                           | <b>105</b> |
| <b>Bibliographie.....</b>                                                        | <b>107</b> |
| <b>Annexes.....</b>                                                              | <b>111</b> |

# Introduction

Devant l'évolution rapide de l'industrie de l'assurance et l'évolution des techniques de gestions des risques, le développement de la gestion Actif-Passif était une nécessité, représentant le point de rencontre de la politique commerciale et de la politique financière.

La gestion Actif-Passif connaît un remarquable essor depuis quelques années. En schématisant de manière pertinente, on peut dire que la gestion Actif-Passif appelée le plus souvent l'ALM (*Asset Liability Management*) est un outil de *risk management* devant prémunir l'entreprise concernée contre les principaux risques auxquels elle se trouve confrontée tout au long de ses activités, tout en lui garantissant une gestion optimale de la rentabilité de ses fonds propres.

Rappelons qu'une compagnie d'assurance est soumise à divers risques principalement le risque de taux, le risque de change, le risque commercial, le risque de liquidité, le risque de contrepartie, le risque systémique et le risque de modélisation;

Le risque systémique consiste en un emballement possible du système financier international en tout ou en partie, local (crise asiatique, etc.) ou global (crise de 1929, krach 1987, etc.) ;

Le risque de modélisation, est annoncé aux écarts que peut provoquer l'utilisation des modèles théoriques par rapport aux résultats des opérations effectuées sur la base de leur application.

C'est la gestion Actif-Passif qui aide à trouver le bon curseur qui optimisera le couple rendement/risque selon le contexte financier et l'horizon de placement. Cette technique résulte du besoin d'équilibrer des flux financiers dus (Passif) et reçus (Actif), de gérer les risques financiers générés par leurs écarts et d'assurer la solvabilité des entreprises grâce à un choix pertinent des actifs.

La gestion Actif-Passif est née dans la deuxième partie du siècle dernier au sein des cellules de gestion de trésorerie des banques afin d'identifier et de combler les écarts de trésorerie, créateurs de risques de refinancement et se traduisant par des risques de liquidité et des risques de taux.

Comme pour les banques, la première approche de la gestion Actif-Passif en assurance vie consistait à identifier les flux périodiques générés par les engagements au passif et à rechercher les investissements les mieux à même de les couvrir, montant par montant, date à date, afin d'annuler autant que possible tout risque de revente ou de taux d'intérêt. Une approche qui se basait sur la Duration afin d'identifier le risque de taux.

Découvert par Macaulay en 1938 puis redécouvert par Hopewell et Kaufman en 1973, le concept de duration a vu sa définition évoluer au fil du temps. Macaulay (1938), Hicks (1939), Samuelson (1945), et Redington (1952) ont progressivement mis en évidence ses propriétés : la duration fut considérée tout d'abord comme une expression de la durée de vie moyenne, puis de la sensibilité, avant que n'apparaisse son rôle dans l'immunisation des portefeuilles.

Puis, sous l'effet d'une concurrence vive entre les compagnies d'assurance, portant sur les taux de rémunération de l'épargne, conjuguée à une période de baisse de rentabilité des actifs à taux fixe, se sont développés des techniques plus complexes visant à intégrer dans la gestion le recours à des placements à rentabilité plus élevée. La gestion Actif-Passif a connu son âge d'or avec l'intégration des notions connues des actuaires, notant que ces derniers ont su développer un savoir faire bien structuré et précis.

C'était en 1952 que Harry Markowitz énonça « Il ne faut pas mettre tous ses œufs dans le même panier » exposant comment des investisseurs rationnels utilisent la diversification afin d'optimiser leur portefeuille. Le modèle de Markowitz a constitué le fondement de la théorie moderne de la gestion de portefeuille.

Boyle (2004) montre les limites de l'utilisation des approches de Markowitz inspirées de techniques financières, lorsque l'on intègre des paramètres des actifs.

Depuis 2001, des auteurs comme Battocchio, Menoncin, Scaillet (2004) ont développé des modèles intégrant les contraintes assurantielles (notamment le risque de mortalité), mais leur mise en œuvre pratique est délicate (choix d'une fonction d'utilité, calcul stochastique complexe).

Dans le cadre des réflexions sur la solvabilité issues de « Solvabilité II », de nouveaux modèles intégrant les paramètres de solvabilité par le biais d'une contrainte sur la probabilité de ruine sont apparus. On détermine ainsi une allocation qui contrôle la probabilité de ruine de l'assureur ou en d'autres termes la capacité de faire face à ses engagements.

Nous présentons dans ce document une gestion Actif-Passif d'un portefeuille d'assurance vie composés d'un produit Epargne (en devises) visant à cantonner dans des limites consciemment déterminées les conséquences négatives éventuelles des risques financiers principalement le risque de taux. Pour ce faire, elle passe par la mesure et l'analyse des risques financiers et débouche sur des préconisations d'actions.

Nous nous attachons dans ce document aux méthodes d'appréhension et de quantification des différents risques d'inadéquation d'Actif-Passif afin d'identifier une méthode qui conduise à une gestion saine de ces risques. Nous nous intéressons ensuite à l'aide d'un exemple aux divers types de couverture qui pourront être mis en place.

Comme mentionné ci-haut les méthodes d'intégration d'une fonction gestion Actif-Passif se divisent en plusieurs générations, chaque génération venait compléter l'ancienne et ajouter des gestions et des méthodes techniques spécifiques pouvant mesurer et quantifier les risques variés auxquels un portefeuille est soumis. Nous exposons dans un premier chapitre les différentes étapes d'évolution de la gestion Actif-Passif ainsi qu'une définition présentant ses principaux objectifs.

Nous présentons ensuite dans une seconde partie une application directe du modèle sur un portefeuille d'assurance vie débutant par une définition et détermination des caractéristiques du portefeuille débouchant par la recherche des éléments de risque. La première approche effectuée est basée sur une projection déterministe du Passif ainsi que de l'Actif cherchant à déterminer les impasses/excédents de flux, suivie par la recherche de la valeur actuelle nette ainsi que de la duration et la sensibilité de l'Actif ainsi que du Passif et débouchant par l'intégration de la notion d'immunisation.

La 3ème et dernière partie repose sur une approche de projection stochastique visant à chercher l'allocation d'actifs optimale sous des contraintes principalement du Passif. Cette partie consistera à chercher la décomposition optimale d'actifs sous des contraintes du Passif dans le cadre d'une gestion actif-passif par l'application du modèle de Leibowitz.

# **Partie 1 : Introduction aux différentes étapes de la gestion Actif-Passif**

# Chapitre I : Introduction à la Gestion Actif-Passif

## I.1 Définition

La gestion Actif-Passif consiste à allouer de manière optimale l'actif en fonction des engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrats et en fonction d'objectifs de revalorisation des contrats et de rémunération des actionnaires.

Lorsqu'un actuaire implémente une stratégie Actif-Passif, il a principalement 2 objectifs :

1. Essayer d'avoir les meilleurs rendements sur les fonds investis ;
2. Garder une adéquation Actif-Passif convenable permettant de financer les engagements futurs pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires.

Plusieurs questions se posent:

Quelle est la place de la fonction gestion Actif-Passif au sein d'une société d'assurance vie?

Comment expliquer son évolution?

Pourquoi assurance vie et pas non-vie ?

Le paragraphe suivant répondra à ces questions.

## I.2. Evolution de la gestion Actif-Passif

Afin d'appréhender la place de la fonction gestion Actif-Passif au sein d'une société d'assurance vie et de mesurer son importance grandissante, un rappel historique semble s'imposer.

Jusqu'au début des années 90, l'ALM (*Assets liabilities management*) fut largement ignorée par les compagnies d'assurance vie, alors même qu'elle constituait l'un des piliers du monde bancaire. Cette technique est née dans la deuxième partie du siècle dernier au sein des cellules de gestion de trésorerie des banques, elle a été développée par les chercheurs en finance qui se sont appuyés sur les mathématiques appliquées pour optimiser la gestion des écarts de trésorerie dans le but de préserver le surplus présentant la richesse de l'actionnaire. Elle s'est étendue ensuite au domaine de l'assurance et en particulier de l'assurance vie pour constituer aujourd'hui un outil essentiel à la bonne gestion des sociétés d'assurance vie.

### ***Comment expliquer une telle évolution?***

Les raisons sont complexes (rôle croissant du contrôle prudentiel, influence des assureurs américains) et dépassent le cadre de notre réflexion. Nous limiterons dès lors notre analyse à celui qui nous semble le plus essentiel:

*Le développement considérable de l'assurance vie* impulsée par la conjoncture de 3 phénomènes majeurs :

- la réussite des bancassureurs (La part des guichets bancaires dans la distribution des produits d'assurance vie est passée de 46 % en 1992 à 62 % en 2003<sup>1</sup>). Aujourd'hui au Liban<sup>2</sup>, les bancassureurs représentent 60% de la part de production de l'assurance vie
- Le grand succès des produits d'épargne ;
- La commercialisation sur un marché extrêmement concurrentiel conduisant à des conditions financières extrêmement tendues.

Alors, l'intrusion réussie des banquiers dans l'assurance, ainsi que la croissance considérable des ventes de produits d'épargne par les compagnies d'assurance-vie, susciteront naturellement chez les assureurs vie traditionnels, au-delà même du rapprochement entre assureurs et financiers, le souci d'une meilleure gestion financière.

### ***Pourquoi assurance vie et pas non-vie ?***

Il existe un grand nombre de similitudes entre les métiers de Banquier et d'assureurs vie, ce qui n'est pas le cas pour l'assureur non-vie pour les raisons suivantes :

- La durée de l'engagement en assurance vie est longue ;
- En non-vie, l'engagement de nature financière est moins crucial qu'en vie ;
- Le principe de revalorisation de l'épargne existant chez les banquiers et les assureurs vie est loin de l'assurance non-vie où le principe indemnitaire engage l'assureur dans des risques spécialement techniques ;

1. FFSA – Rapport 2003

2. Rapport Insurance Control Commission (ICC) Liban pour l'année 2012

Il est évident de conclure que le rapprochement entre l'assureur-vie et le banquier constitue l'origine du développement de la gestion Actif-Passif chez l'assureur Vie. Ce jugement est pourtant exagéré, au regard de la dichotomie récurrente du métier d'assureur, « partagé » entre son activité intrinsèque (les opérations d'assurance mesurées entre autre par un ratio technique) et son activité financière (la gestion financière et l'optimisation recherchée de ses investissements financiers - ratio financier).

La frénésie boursière et la chute qui s'en suivit (New York 6 Mai 2009, Efondrement Lehman Brothers en Mars 2010), montra récemment à quelle point la nécessité d'une bonne gestion Actif-Passif n'était pas une évidence.

### **I.3 Place de la gestion Actif-Passif au sein d'une compagnie d'assurance-vie**

La place de la gestion Actif-Passif au sein d'une société d'assurance-vie est d'une importance capitale et quasi proportionnelle au sérieux de la société, étant à la fois un outil de pilotage, un instrument essentiel pour répondre aux enjeux économiques et financiers de plus en plus massifs. Elle apparaît donc comme un outil de pilotage tant pour la Direction Générale que pour les directions techniques et financières, en pouvant faciliter la prise de décision sur les politiques financière, de rémunération des contrats, de réassurance, ainsi que sur les éléments techniques des contrats.

La gestion Actif-Passif permet non seulement de fournir une analyse détaillée du retour sur fonds propre, via la mention des différentes contributions des différents acteurs, mais également de mesurer son aptitude à respecter ses engagements, en toutes circonstances, envers les assurés et bénéficiaires des contrats.

En effet, la compagnie d'assurance-vie doit être en mesure d'honorer ses engagements à tout instant et quel que soit les facteurs exogènes et endogènes.

En revenant sur les frénésies boursières enregistrées récemment citées ci-dessus et la déroute qui en a découlé révélant que certaines compagnies délaissèrent leur résultat technique, affichant des ratios combinés médiocres pour se lancer dans une course aux actions avantageuses qui finalement fragilisèrent leurs résultats lorsque la conjoncture s'inversa, nous pouvons assurer que la surveillance drastique de l'adéquation entre les actifs de la compagnie d'assurance-vie et ses passifs protège l'assureur de risques techniques et financiers préjudiciables à son activité.

#### **I.4 Par qui et comment sont prises les décisions ?**

La gestion Actif-Passif est coordonnée par un comité (qui peut également être le comité financier dans les sociétés de taille moyenne) qui réunit périodiquement les directions intéressées (direction technique, direction financière, direction comptable). Les membres du comité nomment un responsable chargé de la gestion Actif-Passif. Ce responsable peut exercer cette fonction en toute indépendance, c'est à dire indépendamment des directions opérationnelles.

L'objectif principal de cette organisation responsable de la gestion Actif-Passif est de définir une politique financière, de la faire respecter, et enfin, de l'adapter et de l'améliorer en fonction de l'expérience accumulée. La gestion Actif-Passif se conçoit en effet comme :

« Un problème de maximisation sous contrainte ayant pour double objectif, d'une part d'optimiser le retour sur fonds propres (variables à maximiser), d'autre part de maîtriser les risques financiers (contrainte à prendre en compte) » [Céline Tassin et al],

Ce qui nécessite la rédaction d'un cahier des charges de la gestion financière décrivant de façon détaillée les placements autorisés et les allocations d'actifs cible.

Par ailleurs, l'application de la politique financière décidée en comité doit être contrôlée, notamment via un tableau de bord financier adapté.

Les compagnies de taille moyenne, ne pouvant pas se procurer une fonction de gestion Actif-Passif interne, délèguent parfois cette tâche à des spécialistes externes.

#### **I.5 Comptabilité et Actuariat en gestion Actif-Passif**

Bien que l'actuaire se base principalement sur des écritures comptables pour effectuer ses projections et simulations dans l'analyse de la gestion Actif-Passif, il est essentiel de constater que le rôle de la comptabilité s'arrête à ce point concernant ce sujet. En effet, l'analyse Actif-Passif ne peut jamais être effectuée par les yeux d'un comptable mais doit être maîtrisée par des outils actuariels précis.

En effet :

- Différemment de la vision de l'actuaire, le comptable cherche à remplir son bilan avec des valeurs réelles actif et passif sous les normes et réglementations comptables suivies, afin de trouver une valeur réelle globale normalisée, de son portefeuille. L'actuaire, même s'il privilège d'un ensemble d'hypothèses d'évolution dites centrales, envisagera les conséquences d'hypothèses alternatives. Il cherchera à générer différents scénarios d'hypothèses modifiées par rapport aux hypothèses centrales ainsi que générer des hypothèses de scénarios contrastés (stress tests) afin d'observer les situations de la société dans différents états.
- Les écritures comptables reflètent les engagements pris par l'assureur à l'égard des assurés sans engager l'assureur à aucune revalorisation du contrat (ce point dépend des réglementations ; notant que la réglementation en général, au Liban par exemple, définit seulement un minimum global de participation de l'ensemble des assurés aux bénéfices de l'assureur). Par contre, pour construire son modèle, l'actuaire se base sur des anticipations futures reliées aux comportements de l'assuré par exemple des anticipations reliées à son comportement relativement aux participations aux bénéfices futures distribués.

Ces 2 différences nous ramènent à la conclusion suivante : l'intégration de certaines notions de point de vue comptable est nécessaire pour la gestion Actif-Passif. Mais cette gestion ne peut jamais être accomplie par des écritures comptables.

## **Chapitre II: Etapes et Outils**

### **II.1 Etapes et Outils - Approche Statique**

Les premiers outils de gestion Actif-Passif sont inspirés par des outils de gestion bancaire se basant sur le contrôle des risques de taux et de liquidité. Ces outils se basent sur une projection de flux Actif et Passif avec une approche statique et débouchant par des notions de sensibilité et d'immunisation.

#### **II.1.1 Introduction**

Identiquement aux outils utilisés par les gestionnaires bancaires, la gestion Actif-Passif en assurance vie se basait sur la mesure des impasses/excédents de flux de trésorerie pour différentes maturités et l'analyse de la sensibilité de l'Actif et du Passif envers une variation parallèle de la courbe des taux. Cette première approche s'initialise par une projection et comparaison des flux issus de l'Actif et du Passif, de type statique, ne prenant en compte aucune production nouvelle, suivie par le calcul de la valeur actuelle nette de chacune des séries de flux d'actif et de Passif et une comparaison de la sensibilité de ces deux valeurs par rapport à l'évolution des taux.

#### **II.1.2 Projection des flux**

C'est le point de départ de la gestion Actif-Passif. Il s'agit d'une projection des flux provenant des actifs et des passifs. Son rôle principal est de quantifier la liquidité de la compagnie à travers le temps (notion d'impasse ou d'excédent de liquidité figurant au sein de la gestion Actif-Passif bancaire). Elle cherche à voir, si en termes de liquidité, l'assureur est capable à tout moment d'honorer ses engagements (Passif) à l'égard des assurés et des bénéficiaires. Cette projection était en premier lieu de type statique telle que décrite ci-après.

### II.1.3 Approche statique

« L'approche statique consiste à effectuer les projections des flux à partir des stocks d'actifs et de passifs arrêtés à une certaine date, sans prendre en compte aucune opération créant ultérieurement de nouveaux passifs». Alors l'approche statique ne prend en considération aucune production nouvelle et se basent sur des données arrêtés à une date donnée. Cette approche est généralement simple à modéliser.

**Flux Passif** : Il s'agit d'une projection des engagements de l'assureur à l'égard des bénéficiaires, des assurés et des agents de commercialisation recevant les commissions. Les flux Passif à projeter sont :

- Les primes
- Le profit sharing du réassureur
- les sinistres
- les rachats
- les maturités
- la prime du réassureur
- les frais
- les commissions
- les impôts

Comme les flux projetés présentent un engagement, la valeur des flux Passif sera un additionnement par période du suivant:

Sinistres + Rachats + maturités + frais + commission + impôts +/- profit net de réassurance – primes.

**Flux Actif :** Les flux Actif projetés:

- Dividendes reçues des actions
- La valeur nominale payable à l'échéance des obligations
- Les coupons libérés des Obligations
- L'intérêt des dépôts de cash dans les banques
- Les intérêts provenant des dépôts légaux (réserves légales)
- Etc.

Afin de faire cette projection, il est nécessaire d'effectuer certaines hypothèses. La projection des flux de l'actif consiste à additionner par période, les éléments des revenus futurs (intérêts, loyers, dividendes, coupons) et les éléments d'amortissement des obligations (remboursements au terme). A noter que, dans cette étape, on cherche uniquement à projeter les flux (Cash Flows) ; Il ne s'agit pas de valoriser les actifs mais uniquement de projeter les flux des revenus et remboursements dégagés.

#### **II.1.4 Mesure des impasses/excédents de liquidité**

C'est une approche utilisée jusqu'à nos jours par les banquiers, il s'agit de la quantification du risque de liquidité en contrôlant, en terme de flux (cash flows) les impasses et les excédents entre l'Actif et le Passif.

Une approche qui est simple et modélisable sans contraintes, son rôle essentiel est le suivant :

A base d'une projection à pas mensuel ou annuel (en notant que mensuel est préférable), est-ce que les flux provenant de l'actif (positifs) peuvent financer les flux (négatifs) du passif à tout moment ?

Il s'agit d'une comparaison simple entre les flux de l'actif et du passif, la différence des deux est nommé surplus :

- Un surplus négatif exprime une impasse de liquidité
- Un surplus positif exprime un excédent de liquidité
- Un surplus nul exprime que l'assureur est juste capable d'honorer ses engagements.

La projection devrait idéalement être prolongée jusqu'à l'extinction du stock de contrats. Même si elle est menée sur une période plus courte, l'intérêt de cette approche réside dans la possibilité pour l'assureur de prévoir à l'avance les montants qu'il devra investir (en cas de surplus positif) ou au contraire le montant des actifs qu'il devra liquider pour faire face à ses engagements (en cas de surplus négatif).

En fonction de ces informations, l'assureur peut procéder à des ajustements de son portefeuille financier ou mettre en œuvre une couverture financière appropriée des risques liés au réinvestissement ou à la liquidation des actifs.

### **II.1.5 Immunisation du portefeuille**

« C'est l'investissement de l'actif d'une telle manière que le portefeuille soit protégé contre un changement des taux d'intérêt » Redington (1952)

C'est une stratégie d'investissements qui, dans le cas de l'assurance vie, produit les flux exactement adossés en maturité et en valeur à ceux que doit payer l'entreprise.

L'immunisation passe par 2 approches statiques :

- L'adossement des cash flows de l'Actif à ceux du Passif.
- L'adossement des durations de l'Actif et du Passif.

### **L'adossement des Cash flows**

C'est la procédure d'immunisation la plus simple et la plus ancienne. Elle consiste à investir la richesse initiale dans un portefeuille de titres (le plus souvent des zéros coupons) qui produisent exactement, et aux échéances prévues, les flux du Passif. Cette méthode est valable à très court terme, mais malheureusement elle ne trouve pas d'applications pratiques à long terme.

En effet, les flux de l'Actif et ceux du Passif sont très influencés par des facteurs externes, notamment les taux d'intérêt. Ils sont donc eux-mêmes sujet à des variations dans des sens différents.

## **L'adossement par la Duration**

Cette technique consiste à appairer les sensibilités de l'Actif et du Passif vis-à-vis de la variation des taux d'intérêt.

En d'autres termes, elle consiste à définir une stratégie d'investissement qui fait que la valeur de marché des actifs suit tout mouvement de la valeur actuelle des engagements.

L'immunisation par la duration définit un portefeuille dont la valeur, au premier ordre, évolue comme la valeur actuelle des engagements.

La règle de décision dans cette technique est basée sur l'indice de « sensibilité » défini par Macaulay (1938). Il est obtenu à partir de la formule de développement limité de Taylor du prix en fonction des taux d'intérêt.

Pour un titre, dont les caractéristiques contractuelles sont déterminées indépendamment du mouvement des taux, la sensibilité est exprimée comme la variation relative de cette valeur induite par une variation infinitésimale de taux d'intérêt.

Les deux concepts de Duration et d'immunisation sont décrits par la suite dans ce chapitre.

### **II.1.6 Duration et Immunisation**

Il s'agit de deux concepts qui sont très utiles dans la gestion Actif-Passif spécialement dans la gestion des portefeuilles obligataires. Ces deux concepts commencent par le calcul de la valeur actuelle Nette et débouche par l'étude de sa sensibilité à l'égard d'une variation parallèle de la courbe des taux.

#### **Valeur Actuelle Nette**

On exprime dans la méthode de duration l'exposition au risque de taux relative à chacun des actifs et passifs en termes de sensibilité de leur Valeur Actuelle Nette (VAN). Ainsi, on cherche tout d'abord à déterminer la Valeur Actuelle Nette.

On peut alors écrire :

$VAN = \text{Valeur actuelle des actifs} - \text{Valeur actuelle des passifs}$

L'évaluation de la valeur actuelle de certains actifs peut être dispensée et remplacée par:

- une valeur de marché directement observable pour les instruments négociés sur un marché organisé,
- une valeur théorique obtenue par une actualisation des flux au taux de rendement actuariel d'opérations de marché de durée et de risque comparables à ceux de l'instrument évalué,
- une valeur estimée à l'aide d'un modèle d'évaluation stochastique lorsqu'il s'agit d'instruments dérivés ou conditionnels.

L'actualisation des flux (Cash flows) du Passif s'effectue logiquement en utilisant la courbe des taux zéro-coupon. Elle permet de tenir compte de la maturité de chacun des flux pour lui attribuer un taux d'actualisation précis. Par analogie avec la valorisation des actifs, nous ajoutons à cette courbe des taux sans risque une prime de risque (marge de sécurité).

### **Définition du risque de taux**

Risque de voir la rentabilité de l'établissement se dégrader par une évolution défavorable des taux d'intérêt.

### **Sensibilité et Duration:**

Se basant sur l'expression simplifiée de la valeur de l'obligation à taux fixe en fonction du taux d'actualisation unique  $r$  :

$$\text{Valeur Actuelle} = VA(r) = \sum_{i=1}^n \frac{F_{ti}}{(1+r)^{ti}}$$

La variation de la valeur actuelle pour une variation du taux d'actualisation est donnée par le calcul de la dérivée première :

$$\frac{dVA(r)}{dr} = \sum_{i=1}^n -ti * \frac{F_{ti}}{(1+r)^{ti+1}}$$

La sensibilité de la valeur actuelle nette est la variation de prix relative  $\frac{dVA}{VA dr}$ .

Nous obtenons la formule suivante : 
$$\frac{dVA(r)}{VA dr} = -\frac{1}{VA} * \sum_{i=1}^n t_i * \frac{F_{ti}}{(1+r)^{ti+1}}$$

Lorsque les cash flows  $F_t$  sont tous positifs, la sensibilité de la valeur actuelle aux variations du taux d'actualisation est nécessairement négative. Il en est bien sûr ainsi dans le cas des obligations, dont la valeur de marche baisse quand les taux montent et réciproquement.

#### Duration de Macaulay :

Formulée par Frederick Macaulay en 1938, mesurée en années, elle est utilisée spécialement pour le calcul de la duration des obligations à taux fixe.

La Duration de Macaulay d'un instrument zéro coupon est égale à la date quand elle arrive à maturité.

En prenant la formule de sensibilité ci-haut et en mettant en facteur  $(1+r)^{-1}$  :

$$\text{Sensibilité} = -\left(\frac{1}{1+r}\right) * \left(\sum_{i=1}^n t_i * \frac{F_{ti}}{VA * (1+r)^{ti+1}}\right)$$

La duration d'une série de flux fixes ( $F_{ti}$ ) est égale à :

$$\text{Duration} = \sum_{i=1}^n t_i * \frac{F_{ti}}{VA * (1+r)^{ti+1}}$$

La sensibilité et la duration d'une série de flux fixes sont donc reliées par la formule de Hicks

$$(1946) : \text{Sensibilité} = -\frac{\text{duration}}{1+r}$$

Cette sensibilité est appelée duration modifiée, elle admet les propriétés suivantes :

1. Elle n'est applicable qu'aux flux fixes et n'a pas une utilisation en dehors de l'évaluation du risque de taux.
2. Elle donne la sensibilité globale de l'instrument à une translation de la courbe des taux et c'est seulement sous l'hypothèse de translation uniforme de la courbe des taux qu'on peut généraliser cette sensibilité à des taux de diverses maturités.

Alors par application on considère 3 Durations :

- Duration de Macauley
- Duration modifiée ou « Modified Duration »
- Duration effective ou « Effective Duration »

Les 2 premières décrites ci-dessus admettent certaines limites d'utilisation, en effet :

La Duration sert à mesurer le risque de taux d'un titre. L'utilisation des ces 2 durations présume :

- De petites variations de taux (dr) (inhérentes au calcul différentiel)
- Des variations parallèles de la gamme des taux (même dr quelque soit le titre et la maturité)

Ces hypothèses n'étant pas satisfaisantes, la duration calculée par ces 2 méthodes est un instrument imparfait de mesure et de gestion de taux. Pour cette raison, on introduit une troisième mesure de Duration : la duration effective ou « effective Duration ».

### **Duration effective ou Effective Duration :**

Les mesures de cette duration sont basées sur des évaluations stochastiques des modèles de taux d'intérêt. Mais les processus stochastiques de taux d'intérêt n'ont pas des solutions explicites pour le calcul de la duration (les processus stochastiques de taux d'intérêt généralement utilisés pour le calcul de la duration sont ceux du modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) dont l'EDS n'admet pas de solutions explicites (les modèles de taux d'intérêt seront décrits dans la partie 2 du mémoire); On se base sur des calculs numériques.

On augmente les taux de 0,5% puis on les diminue de 0,5% et on calcule à chaque fois les valeurs actuelles nettes, ces valeurs participeront au calcul de l'effective Duration de la manière suivante :

$$D_{\text{eff}} = \frac{PV- - PV+}{2 P_0 \Delta r}$$

Où

$PV_-$  est la valeur actuelle du portefeuille calculée en faisant diminuer le vecteur de taux de 0.5%

$PV_+$  est la valeur actuelle du portefeuille calculée en faisant augmenter le vecteur de taux de 0.5%

$P_0$  la valeur du portefeuille à la date 0

$\Delta r$  la variation du taux

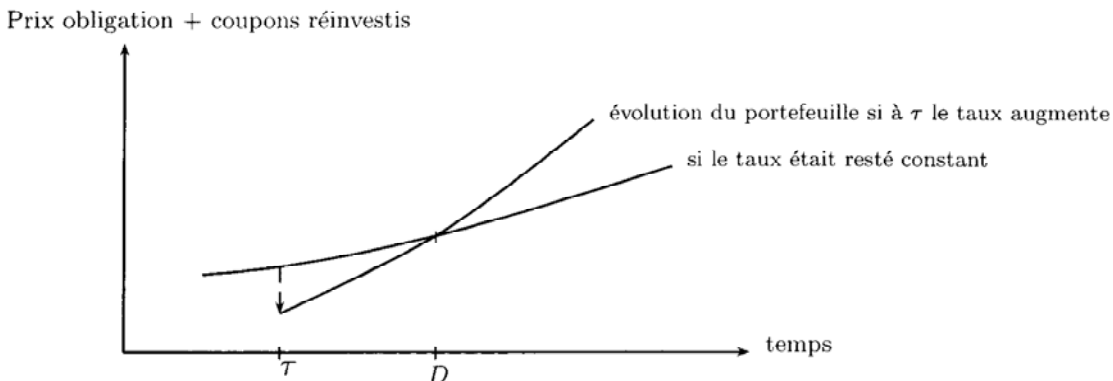
### **Immunisation**

L'importance de la duration est montrée par un premier concept fréquemment utilisé par les banques, nommé immunisation de la valeur nette ou « net worth immunization ». Ce concept est basé sur une insensibilité de la valeur actuelle nette (qui est la différence entre la valeur actuelle de l'actif et la valeur actuelle du passif) contre une variation parallèle de la courbe de taux. Il s'agit d'un alignement des sensibilités de l'actif et du passif.

Un autre concept, pris par les compagnies d'assurance et les fonds de pension s'appelle immunisation de la date cible ou « Target Date Immunization », décrit ci-dessous :

Les compagnies sont intéressées à générer des cash flows prédéterminés pour des dates spécifiques. Ils peuvent acheter des obligations à la date  $t = 0$ , réinvestir les coupons et vendre les obligations à la date spécifique. Si le rendement à échéance,  $y$ , augmente le prix de l'obligation va baisser. D'un autre côté, le réinvestissement des coupons donnera des cash flows plus élevés. Le graphique suivant permet de représenter l'évolution de l'obligation et des coupons réinvestis.

## Prix des obligations et des coupons réinvestis vis-à-vis de la variation des taux



Source : site [www.fimarkets.com](http://www.fimarkets.com)

Une propriété importante est que pour l'instant quand la date spécifique coïncide avec la duration, le coupon réinvesti en addition à la valeur marchande de l'obligation donne le même montant, même si le rendement à échéance, y a changé d'un montant pas trop grand.

Objectif de l'immunisation par la Duration:  $A \cdot DA = L \cdot DL$

Où  $A$  désigne l'actif

$L$  désigne le passif

$DA$  et  $DL$  les durations respectives de l'Actif et du Passif.

Ou en d'autre termes une Duration nulle du Surplus c.à.d.

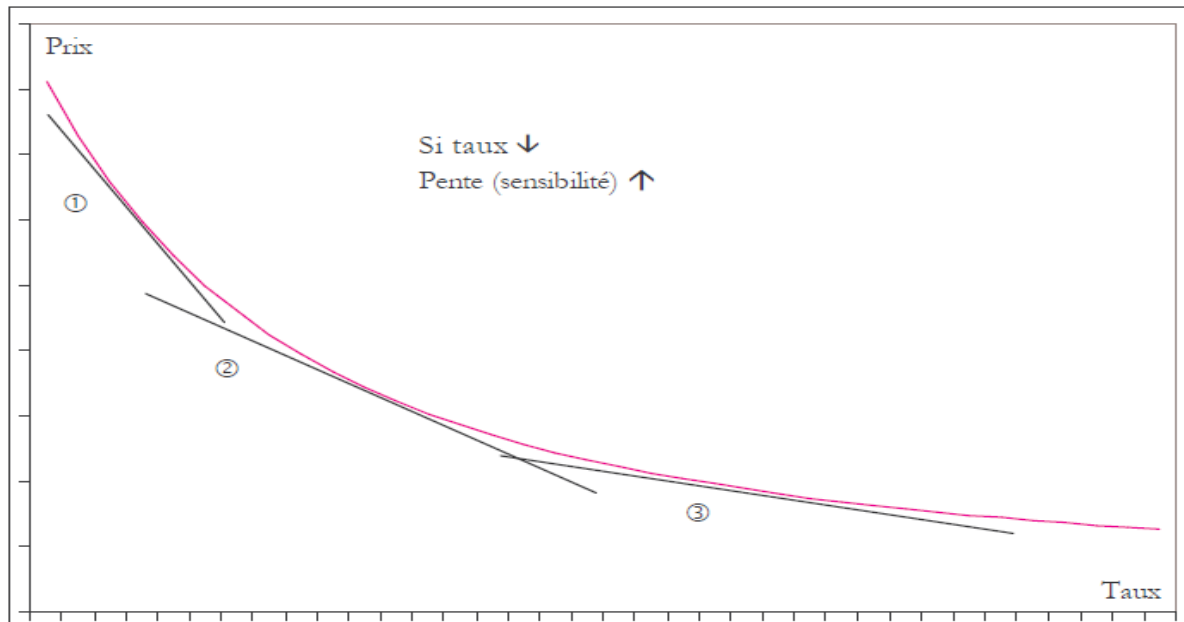
$$DS = (DA - DL) \cdot A/S + DL \equiv S \cdot DS = A \cdot DA - L \cdot DL$$

Cette méthode a l'avantage d'être très synthétique. En effet, l'ensemble des flux futurs est résumé à une seule valeur (la Valeur Actuelle Nette) par le biais de l'actualisation.

## II.1.7 Convexité : Effet de Variations non infinitésimales

La duration permet de traiter de la variation du cours par rapport aux « petites variations parallèles » de la courbe des taux.

### Evolution du prix d'une obligation en fonction du taux



Source : site [www.melafrut.com](http://www.melafrut.com)

Comme on le constate sur le graphique ci-dessus, lorsque la variation des taux  $\Delta r$  est forte, l'erreur obtenue en mesurant la variation relative du cours par la droite tangente  $\Delta VA / VA$  devient importante. Alors, en cas de variations « non petites » des taux, la duration simple conduit à :

- Une surestimation des effets des hausses de taux (baisse des prix)
- Une surestimation des effets des baisses des taux (hausse des prix)

Il est naturel à chercher à améliorer notre estimation de la variation relative de VA en recourant au développement de Taylor du second ordre :

$$\frac{\Delta VA}{VA} \approx \frac{\Delta VA'}{VA} \Delta r + \frac{1}{2!} \frac{\Delta VA''}{VA} (\Delta r)^2$$

Formule où  $VA'$  et  $VA''$  représentent respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de  $VA(r)$ . La dérivée première  $VA'$  s'exprime en fonction des cash flows  $F_j$  :

$$VA' = \sum_{i=1}^n -t_i * \frac{F_{ti}}{(1+r)^{t_i+1}}$$

Nous pouvons calculer la dérivée seconde en dérivant terme à terme  $VA'$  :

$$VA'' = \sum_{i=1}^n [(-t_i)(-t_i - 1) \frac{F_{ti}}{(1+r)^{t_i+2}}] = \frac{1}{(1+r)^2} \sum_{i=1}^n (t_i)(t_i + 1) \frac{F_{ti}}{(1+r)^{t_i}}$$

$$\text{Le terme } VA'' / VA = \text{convexité} = \frac{1}{VA (1+r)^2} \sum_{i=1}^n (t_i)(t_i + 1) \frac{F_{ti}}{(1+r)^{t_i}}$$

Avec la définition usuelle que nous avons retenue, l'approximation de la variation actuelle est la suivante :

$$\Delta VA \approx VA \times [\text{sensibilité} \times \Delta r + \frac{\text{convexité}}{2} \times (\Delta r)^2]$$

Lorsque les cash flows sont tous fixes et positifs, la convexité est positive. Quel que soit le sens de la variation du taux d'actualisation, le terme  $\frac{\text{convexité}}{2} \times (\Delta r)^2$  intervient positivement dans la variation du cours. Alors, la convexité, liée à la dispersion des cash flows donne une meilleure estimation de la sensibilité du taux.

Cependant, la convexité repose sur les mêmes hypothèses que la Duration, et n'est donc applicable que pour des variations parallèles de la courbe des taux.

Tous les modèles mentionnés ci-haut sont des modèles statiques (nommés de 1ère génération), ces modèles consistent à projeter les actifs et les passifs à une date d'arrêt fixe sans tenir compte des paramètres futurs.

### II.1.8 Limitations des modèles statiques

La question qui se pose ici, l'immunisation du portefeuille est-elle suffisante pour dire qu'on est arrivé à contourner totalement les risques, en notant que la méthode de l'immunisation est utilisée depuis des années par les gestionnaires d'actif-passif et peut être considérée comme un des outils les plus importants de la gestion Actif-Passif bancaire ?

La réponse est non. Aujourd'hui, cette méthode n'est pas suffisante, mais présente plusieurs limitations:

- Limitation au seul risque de taux : les outils cette première méthode limitent toute la question sur la gestion Actif-Passif sur le risque de taux et sur la sensibilité de la valeur actuelle nette à ce risque. Cette approche simple, considérant que les flux générés par les actifs et les passifs sont fixes, est non pertinente ; en effet elle ne peut envisager que des solutions basées sur des obligations ayant comme rôle de couvrir le portefeuille contre les petites variations de taux.
- Les risques de marché non directement liés aux taux obligataires (risque boursier ou immobilier, risque d'inflation) ne peuvent pas être non plus analysés par cet outil.
- La recherche d'immunisation du risque de taux est fondée sur un concept mathématique : la sensibilité ou la duration du passif. Mais en toute rigueur, la duration n'est définie que pour des séries de flux financiers fixes et indépendants des taux. Or les engagements des assureurs vie ne présentent que rarement cette caractéristique de fixité, en effet :
  1. Une variation des taux peut fortement affecter le comportement de la clientèle.
  2. Le taux de rémunération des contrats ne peut être indépendant des taux de marché.

Par la suite, une hypothèse de flux fixes de Passif semble loin de la réalité.

## **II.2 Etapes et Outils – Modèle Dynamique**

### **II.2.1 Introduction**

Comme déjà mentionné, la projection et l'analyse de cash flows ne peut contourner toute la question de l'adéquation Actif-Passif, elle ne sert qu'à résoudre une petite partie des problèmes.

Pour progresser, il serait important de considérer:

- La nouvelle production et les versements futurs doivent être intégrés dans les projections ;
- Les flux du passif doivent être variantes et dépendantes du comportement de la clientèle, il serait alors nécessaire pour une bonne gestion de tester différentes hypothèses de taux de rachat ou taux de prorogation.
- Les provisions prudentielles et la vision comptable des résultats doivent être intégrées dans les calculs.

Ainsi pour dépasser l'analyse statique, il faut utiliser une projection dynamique des flux financiers, qui tient compte des primes futures et qui permet d'en mesurer l'impact sur le rendement financier des actifs. Mais là également, les versements futurs dépendent du comportement de la clientèle, lui-même lié à la conjoncture économique. La simulation des primes doit être effectuée en fonction de différentes hypothèses concernant principalement l'évolution des taux obligataires. Et le modèle doit traduire les éléments financiers en comptes prévisionnels de façon à calculer les principales provisions prudentielles.

Pour conclure, les modèles déterministes sont des modèles de simulation, dépassent la concentration de l'analyse sur la mesure de la seule et unique Valeur Actuelle Nette, mais projettent les évolutions des actifs et des passifs par période en simulant plusieurs scénarios décrivant l'évolution des marchés.

### **II.2.2 Approche Dynamique**

« L'approche dynamique consiste à projeter la totalité des cash flows issus des actifs et passifs présents à la date de l'étude, ou constitués ultérieurement en fonction d'hypothèses sur l'activité future de la société. »

L'approche dynamique doit prendre en considération la production future ainsi que les versements anticipés sur les contrats existants. Pour passer de la dynamique à la statique, il suffit de considérer que la production future est nulle.

### **II.2.3 Construction d'un modèle dynamique**

Les modèles dynamiques sont plus complexes à réaliser que les modèles statiques se basant sur des opérations mathématiques simples. Il s'agit d'un modèle détaillé de l'activité de l'assureur (production, évolution du stock de contrats et investissements) n'est pas une tâche aisée, pas plus d'ailleurs que la traduction de cette activité en termes de résultats prévisionnels.

C'est pour cela que la construction des modèles dynamiques dépasse la capacité des tableurs et nécessite des programmes informatiques appartenant à la famille des logiciels de simulation.

### **II.2.4 Eléments d'un modèle déterministe (dynamique)**

Les projections sont dans ce cas à pas de temps fixe et portent sur les résultats et les stocks de l'Actif et du Passif.

Les projections des résultats sont période par période, se basant sur les résultats de la période (n-1) pour projeter celle de l'année n en prenant en compte les versements futurs anticipés (nouvelle production, versements futurs sur les contrats existants) et le scénario économique durant la période n.

On distingue les résultats provisoires avant participation des assurés aux bénéfices de l'assureur, et les résultats définitifs après distribution de cette participation. Pour passer des résultats « avant » aux résultats « après », il faut appliquer la politique de taux servis aux contrats qu'a décidée l'assureur.

La projection peut être « micro » ou « macro » ; Le modèle macro projette les comptes globaux de l'activité de l'assureur, tandis que pour le modèle micro, il s'agit d'une projection contrat par contrat.

Le modèle porte sur des variables endogènes et exogènes. Une variable endogène est déduite du modèle. Une variable exogène est saisie et modifiée librement par l'utilisateur à chaque pas du modèle. La politique financière, les taux servis et le comportement des clients sont des variables exogènes. Afin de faciliter la tâche, on a recours dans certains modèles d'implémenter des fonctions permettant le calcul endogène de certains éléments exogènes, par exemple le taux de rachat anticipé de la période n est relié à l'ancienneté des contrats et aux taux de rémunération des contrats de la période (n-1).

### II.2.5 Scénarios

Les modèles déterministes sont conçus pour simuler l'évolution du bilan et des résultats des assureurs vie en fonction de scénarios économiques exogènes. Il s'agit bien de scénarios au pluriel, car il n'est pas question d'utiliser un scénario unique.

Les scénarios envisageables sont littéralement innombrables, de nombreuses variantes pouvant être envisagées tant que pour les hypothèses économiques et financières que pour les hypothèses de production et de comportement de la clientèle.

Il faut pourtant sélectionner un nombre limité de scénarios représentatifs. Le premier scénario qui vient à l'esprit est celui de la continuité, les marchés financiers conservent leur position ou leur tendance sans forte variation. Par rapport à ce scénario de référence, généralement qualifié comme scénario central, il faut ensuite étudier des scénarios contrastés dont la conception est beaucoup moins évidente.

Scénario Central : C'est le scénario de référence utilisé pour comparer avec les scénarios de stress tests décrites ci-après. Ce scénario correspond à une situation stable des marchés financiers.

Scénarios contrastés (stress tests) : Il s'agit de projeter les résultats associés à des scénarios arbitraires, dont certains peuvent être particulièrement défavorables. Le rôle de ces scénarios est d'analyser les résultats du portefeuille par rapport à des scénarios arbitraires afin d'évaluer spécialement les pertes en cas de scénario de dommages (appelé Worst case scenario)

Comparaison des résultats : Comment comparer les résultats obtenus entre différents scénarios ?

Il s'agit de comparer les séquences de résultats relatives à différents scénarios, ou pour un même scénario économique, comparer les séquences de résultats relatives à différentes politiques financières par exemple.

Dans le cadre d'un modèle dynamique, la séquence des résultats est en principe infinie puisque le stock de contrats est perpétuellement renouvelé. En pratique, la simulation est limitée à quelques dizaines d'exercices.

Il n'est donc plus suffisant d'actualiser la séquence des résultats d'exploitation, il faut y ajouter un terme final qui est la situation nette réévaluée en fin de simulation.

En pratique, il faut ajouter trois éléments au résultat d'exploitation final :

- Les plus-values latentes des actifs en fin de simulation,
- Le montant final de la réserve de capitalisation,
- Et la valeur intrinsèque du stock de contrats en fin de simulation.

Enfin, la valorisation précise du stock final de contrats est un exercice délicat. Mais l'objectif n'est ici que de bâtir un indicateur de rentabilité à long terme. On procède donc à des calculs simples et très approximatifs.

## **II.2.6 Etude de l'allocation d'actifs**

Dans ce modèle, la question financière n'est plus limitée au choix de la durée des investissements obligataires, mais de créer une certaine tactique financière. Il est dans ce cas essentiel d'au moins traiter la répartition par classes d'actifs et la durée des investissements obligataires. Ces éléments représentatifs de la stratégie de l'assureur sont désignés sous l'appellation de politique d'allocations d'actifs, ou d'allocation stratégique des actifs. L'allocation stratégique d'actifs débute par la composition initiale des actifs, et l'analyse des différents scénarii permet de conduire à des décisions d'investissement (ou désinvestissement) selon les risques détectés.

L'allocation d'actifs est assurément le problème central de la gestion Actif-Passif. Le stress testing apporte un éclairage particulier sur ce problème, orienté vers le contrôle des risques comptables et financiers.

La politique financière peut être prédéterminée, ou tout simplement constaté, d'après la composition actuelle des actifs en portefeuille. Mais si la politique financière est remise en cause, la question qui doit se poser : Quelle est la politique financière qui assure le meilleur rapport rendement/risque ?

Il est beaucoup plus difficile de répondre à cette question. Elle demande d'effectuer un travail théorique considérable (notamment pour définir les notions de rendement et de risque dans le cadre de l'activité de l'assurance) avant de l'aborder au plan pratique.

Mais pour conclure sur les modèles déterministes, il faut dire que ces modèles ne permet pas de trouver « le meilleur rapport rendement/risque ». Elle permet surtout de rejeter certaines allocations d'actifs dont le risque perçu apparaît trop élevé dans l'un ou l'autre des scénarios testés. La question doit donc être reformulée avec moins d'ambition : « Quelle politique financière assure un compromis convenable entre la rentabilité (mesurée avec le scénario central) et les risques (mesures avec les différents scénarios de stress) ?

Les outils permettant de faire une analyse adéquate afin de trouver l'allocation d'actifs optimale sont de type Stochastique, décrits par la suite.

## **II.3 Etapes et Outils – Modèles Stochastiques**

### **II.3.1 Introduction**

L'objectif de la modélisation stochastique est d'évaluer par la méthode de Monte Carlo les lois de probabilités associées aux résultats de l'assureur vie et de fournir une mesure cohérente des risques d'Actif-Passif. Alors si l'on admet que les variables économiques et financières (les taux obligataires, les cours de bourse, l'inflation, etc.) peuvent être représentées par des processus stochastiques, il devient possible de définir une densité de probabilité conditionnelle (fonction du temps et de la valeur initiale) pour les différentes variables étudiées.

### **II.3.2 Application à la gestion Actif-Passif**

Le modèle stochastique ne vient pas remplacer ou substituer les principes de base des simulations de type déterministe en gestion Actif-Passif mais vient simplement les compléter.

Dans ce modèle de gestion Actif-Passif, les scénarios déterministes sont substitués par des scénarios stochastiques. La technique consiste à tirer aléatoirement de nombreux scénarios économiques, puis à utiliser pour chacun d'eux un modèle de simulation. On pourra dans ce cas obtenir divers indicateurs. Cependant, pour l'analyse Actif-Passif, la méthode de Monte-Carlo est d'abord un outil d'exploration. L'objectif n'est pas seulement de calculer tel ou tel autre indicateur, mais aussi d'observer la distribution de nombreuses variables comptables et financières dans un large éventail de scénarios.

Pour conclure, le principe est simple et consiste que dans le cadre de modèle de simulation, les variables économiques et financières doivent être représentés par des processus stochastiques discrets.

### II.3.3 Du Déterministe au Stochastique

Les fonctionnalités d'un modèle déterministe et d'un modèle stochastique sont identiques. Il s'agit de projeter les actifs et les passifs en fonction de plusieurs scénarios économiques et financiers. Il suffirait donc de générer des scénarios stochastiques et de les injecter dans un modèle de simulation déterministe déjà existant.

En pratique, il reste quand même beaucoup de travail et quelques obstacles à surmonter :

1. Il n'est pas si simple de générer des scénarios stochastiques raisonnables à moyen terme.
2. Il faut simuler plusieurs centaines, même parfois plusieurs milliers de scénarios dans certains cas. Compte tenu du temps de traitement constaté pour un seul scénario avec la plupart des modèles déterministes, il faut effectuer un travail d'optimisation très poussé des logiciels, ou/et recourir à des processeurs très puissants.
3. Il n'est pas plus possible d'intervenir manuellement pour intégrer à chaque pas du modèle des hypothèses exogènes concernant le comportement des clients, la politique financière ou les taux servis. Tous ces éléments doivent donc être automatisés par le recours à des fonctions de comportement ou à des politiques paramétrables.

Pour conclure, les modèles stochastiques venaient apporter un progrès dans les outils de simulations dans le cadre de la gestion Actif-Passif mais leur gestion n'est pas simple.

Par la suite de ce mémoire, on va effectuer deux applications qui sont complémentaires dans la mesure où nous devons dans un premier temps réaliser une modélisation déterministe qui va dépendre, dans notre cas, d'hypothèses stables concernant les indices boursiers et la structure par terme de la courbe de taux d'intérêts, puis dans un second temps réaliser un modèle stochastique où ces hypothèses varieront au cours du temps (scénarios).

## **Partie 2 : Projection Déterministe de l'Actif et du Passif – Couverture par Immunisation**

# **Chapitre I : Présentation et modélisation du contrat**

## **I.1 Présentation du contrat**

Le produit est un « Contrat en devises » ne comportant qu'un seul fonds dont les garanties sont libellées en USD. Un contrat faisant partie des activités les plus attractives des compagnies d'assurance, où l'assureur garantit à l'assuré un taux minimum pour la rémunération de son compte et lui garantit aussi une participation à ces bénéfices financiers.

On présentera par la suite les paramètres qui entrent dans le calcul, puis on décrira la modélisation ainsi que l'articulation du produit. A travers les paragraphes suivants, nous allons exposer les principales hypothèses retenues en termes de déroulé du Passif.

### **I.1.1 Durée de vie du produit**

Dans notre modélisation, on suppose que la commercialisation de ce produit sera effectuée sur une période de 20 années. Ce point est pris en considération dans la projection des primes (nouveaux contrats).

### **I.1.2 Déroulé Général**

Dès la souscription d'un contrat d'assurance, un compte virtuel sera ouvert auprès de la compagnie d'assurance au nom du contractant. L'assureur garantit à l'assuré un taux minimum pour la rémunération de son compte; et dans le cas de décès de l'assuré, l'assureur verse un capital à ces bénéficiaires.

La valeur du compte pour une période donnée représente les primes accumulées, après déduction des chargements et des taxes et après prélèvement de la prime de risque qui correspond à cette même période. La prime de risque, les frais de gestion ainsi que les commissions à payer seront déduits au début de la période. Par contre les intérêts créditeurs (distribués aux assurés) seront versés dans le compte à la fin de chaque période.

La valeur du compte peut être calculée d'une manière récursive d'une année à l'autre ; la valeur du compte au début du contrat est supposée être égale à zéro.

La compagnie d'assurance investit les fonds sur le marché financier, et elle est dans l'obligation de donner aux assurés une participation aux excédents financiers (lorsque le taux de rendement des placements est supérieur au taux garanti).

### **I.1.3 Clause de revalorisation**

Avant de définir la clause de revalorisation, il serait important de donner les définitions suivantes :

Le contrat d'assurance vie propose un premier niveau de revalorisation appelé « valorisation minimale » déterminé par le taux d'intérêt technique notant que la participation aux bénéfices ne saurait être définie sans préalablement présenter le taux minimum garanti.

Au sein de ses contrats, l'assureur peut donc garantir aux assurés un taux minimum de rémunération sur les supports. Ce taux, désigné sous le nom de « taux technique », « taux minimum garanti » ou « taux d'intérêts techniques » sert de référence, d'une part, pour la tarification des contrats et, d'autre part, au calcul des engagements de l'assureur envers les assurés. Dans notre cas, ce taux technique est de 2%

La compagnie d'assurance garantit dans ses contrats un montant total d'intérêts techniques et de participations bénéficiaires qui, rapporté aux provisions mathématiques, ne sera pas inférieur au taux minimum garanti.

Au Liban, La participation aux bénéfices (PB) n'admet pas un minimum réglementée, différemment des pays plus développés. Citons à titre d'exemple la réglementation française fixant la minimum PB comme étant ;

- 90% du bénéfice technique (ou 100% de la perte technique) ;
- 85% du bénéfice financier (ou 0% de la perte financière).

Dans notre modèle la PB est fixée à 85% du bénéfice total de la compagnie (technique + financier) ; La compagnie espérant garder 15% comme spread d'intérêts.

## I.2 Projection du Passif

### I.2.1 Projection des Primes

Pour une année  $n$ , les primes peuvent provenir des :

- Nouveaux contrats ;
- Contrats en vigueur à  $n-1$  ;

Le modèle de projection de la nouvelle production (nouveaux contrats) est le modèle agrégé en supposant que le produit sera commercialisé sur les 20 ans qui suivent.

Dans la projection de primes, il était nécessaire de tenir compte de :

- la loi de chute des contrats dont la modélisation sera décrite ultérieurement
- la probabilité de décès des assurés dont la modélisation sera décrite ultérieurement

### I.2.2 Modélisation du décès

Comme la mortalité représente un facteur légèrement matériel par rapport aux types de contrats modélisés, nous avons choisi de la modéliser par un modèle relationnel simple qui est le modèle de Brass (1971).

Le modèle de Brass définit la mortalité en fonction d'une table de référence, où la relation est le Logit-linéaire. Cette relation permet à partir d'un nombre très restreint de paramètres (seulement deux) de capter le lien entre deux populations et ainsi de répercuter la tendance dans le temps de la population de référence sur la population modélisée. Elle est aussi utile pour obtenir des projections.

La formule est la suivante :

$$\text{Ln} \left( \frac{q_x^{obs}}{1-q_x^{obs}} \right) = \alpha. \text{Ln} \left( \frac{q_x^{ref}}{1-q_x^{ref}} \right) + \beta$$

$\alpha$  et  $\beta$  constants, par la suite le modèle est utile pour effectuer des projections.

Les tables de mortalité de référence sont les tables du réassureur (une table pour femmes et une table pour hommes). Et pour la détermination de  $\alpha$  et  $\beta$ , on a utilisé les mortalités du portefeuille sur les années 2008 -> 2011.

Sur la plage de temps allant de 2008 jusqu'à 2011, on estime les taux de mortalité réels du portefeuille en additionnant par âge les décès observés au cours de ces années et en divisant par l'exposition au risque (la somme sous risque) pour chaque année.

L'estimation de  $\alpha$  et  $\beta$  peut s'effectuer par la résolution de l'équation de régression linéaire simple suivante :  $y_x = \alpha z_x + \beta$

où  $y_x = \text{Ln} \left( \frac{q_x^{obs}}{1 - q_x^{obs}} \right)$  et  $z_x = \text{Ln} \left( \frac{q_x^{ref}}{1 - q_x^{ref}} \right)$

Par la suite pour chaque année d'observation  $k$ , on calcule une estimation des paramètres  $(\alpha_k, \beta_k)$ . En optimisant les paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance, on déduit les valeurs suivantes :

|          | Hommes | Femmes |
|----------|--------|--------|
| $\alpha$ | 0,80   | 0,86   |
| $\beta$  | -0,45  | -0,28  |

A noter que les coefficients de corrélation  $R^2$  sont les suivants :

Hommes : 0,96

Femmes : 0,97

Cette modélisation de la mortalité sera utile pour la projection de la population couverte ainsi que dans le calcul des sinistres à venir.

### I.2.3 Modélisation des rachats :

Les rachats sont très importants dans la projection des contrats Epargne. La modélisation doit prendre en considération des paramètres à plusieurs niveaux:

- Au niveau des conditions contractuelles (taux technique, échéance officielle du contrat (avant prorogation, pénalités de rachat).
- Au niveau de la situation personnelle de l'assuré (âge, valeur de rachat)
- Au niveau de la compétitivité du produit (taux de revalorisation servi, taux de marché).
- Au niveau du réseau de distribution.

Nous distinguons 2 genres de rachats :

Rachats structurels : ce sont les rachats que l'assureur peut observer dans un contexte économique normal. Ils traduisent des sorties d'épargne motivés par des besoins de trésorerie de la part des assurés. Ils sont indépendants de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance. Nous les modélisons donc par une loi de rachat qui dépend de la durée de détention du contrat. Ce vecteur provient d'une étude effectuée par la compagnie portant sur les 5 dernières années :

| <b>Année (contrat)</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6 et plus</b> |
|------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------|
| <b>Taux de chute</b>   | 40%      | 25%      | 20%      | 15%      | 5%       | 5%               |

Rachats conjoncturels (RC) : Ils interviennent dans un contexte fortement concurrentiel lorsque l'assuré arbitre son contrat d'assurance au profit d'autres supports financiers (produits assurantiels, bancaires ou immobiliers). Ils dépendent donc de l'évolution des marchés financiers et de la politique de revalorisation de l'épargne de la société d'assurance.

En effet, si le taux servi est inférieur au taux attendu, les assurés auront tendance à racheter plus que ne l'indique le taux de rachats structurels. A l'inverse, si les assurés se voient offrir un taux supérieur à leurs attentes, ils rachèteront moins que par le passé.

Il est important de noter qu'il n'existe aucune orientation ou réglementation au Liban ou à la région où nous existons menant à modéliser un modèle de rachat conjoncturel adapté au pays ou à la région, et la création d'un tel modèle nécessite un historique non existant.

Nous nous sommes basés alors sur une fonction simple utilisée par le département Actuariat de la compagnie où l'on considère le suivant :

1. les rachats conjoncturels sont une fonction croissante de l'écart entre :
  - le taux de revalorisation attendu de la période précédente qui peut être fonction des taux du marché obligataire sur des horizons semblables à ceux des contrats d'épargne,
  - et le taux de revalorisation du contrat de la période précédente.
2. les rachats conjoncturels ne s'opèrent qu'au-delà d'un écart de 2% entre les deux taux ci-haut mentionnés.

Dans notre modèle, le taux attendu est le taux zéro-coupon à maturité 10 ans ; 10 ans étant la durée moyenne de détention des contrats d'assurance. En d'autres termes, on dit qu'un assuré rationnel aura tendance à comparer le dernier rendement de son contrat d'assurance au taux zéro-coupon à 10 ans du jour. Et le taux de revalorisation est le taux de distribution des Participations aux Bénéfices (PB) distribué annuellement.

Le taux conjoncturel sera limité à un seuil  $RC_{max}$ .

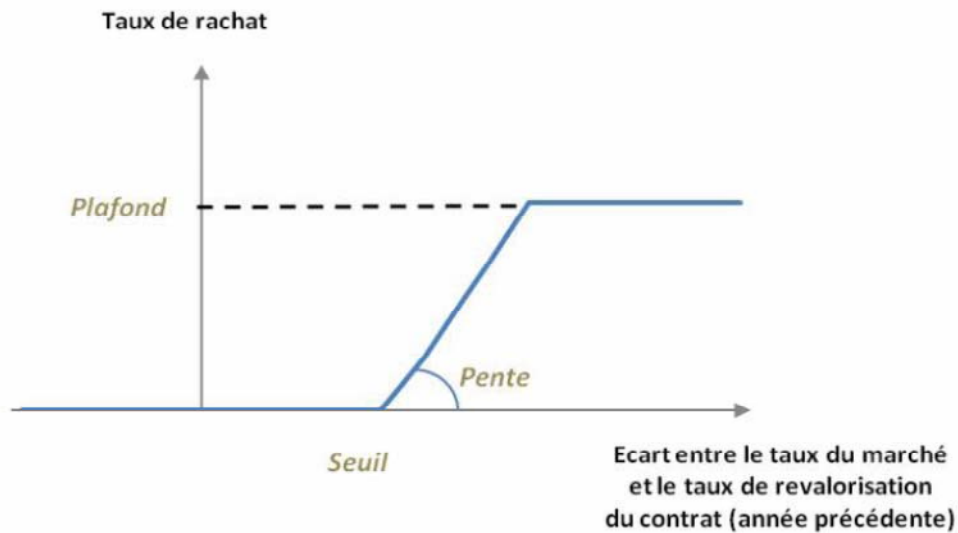
La formule appliquée, après déclenchement des rachats, est alors la suivante :

$$RConj(t) = \text{Min}(RC_{max} ; \text{Max}(0 ; \alpha \text{Max.}(\text{taux attendu}(t-1) - \text{taux distribué}(t-1))) ;$$

Où :

- $Rconj(t)$  est le taux conjoncturel à appliquer pour l'année  $t$
- $\alpha$  représente la sensibilité du taux de rachat de l'année  $t$  à l'écart entre le taux cible et le taux de revalorisation sur l'année  $(t-1)$ . En d'autres termes, c'est la vitesse de réaction de l'assuré face à cet écart.
- $RC_{max}$  est un taux de rachat maximal traduisant le fait qu'une vague de rachat excessive ne serait pas isolée au cas de l'assureur et entraînerait une intervention de la part de l'Etat. Nous fixons  $RC_{max} = 30\%$ .

Ainsi la fonction de rachat conjoncturel retenue peut être présentée comme suit :



Reste à déterminer la sensibilité  $\alpha$ . Ce coefficient est très délicat à paramétrer ; Disposer de données permettant son approximation est difficile. Dans notre cas, l'idée est donc de retenir une valeur qui permette d'atteindre des déformations réalistes proche de que l'on peut attendre *a priori*.

Nous utilisons les résultats d'un modèle interne effectué par le département Actuariat de la compagnie, en l'appliquant à un contrat type de notre portefeuille. Il s'agit en effet d'un exercice simplifié qu'on décrira très brièvement par la suite n'étant pas le sujet de notre mémoire :

- on considère un assuré type du portefeuille projeté : âge 40 ans, durée du contrat 10 ans, avec une somme épargnée égale à la valeur moyenne des réserves par contrat à la date de projection
- le contrat est conclu avec la compagnie A (qui est notre compagnie) dont l'actif est connu par l'assuré pouvant calculer le taux servi futur
- on considère une compagnie B ne détenant qu'une obligation zéro coupon, par la suite le taux servi futur est égal au taux zéro-coupon (moins une marge de profit pour la compagnie)
- et pour effectuer le test, on considère que les taux zéro-coupons subiront une montée brutale après une phase de stabilité.

Le modèle considéré suppose que l'assuré est rationnel connaissant bien les détails de son contrat. Ce qui veut dire que la projection effectuée de son contrat prendra en compte les justes valeurs.

La valeur du contrat est alors les valeurs des flux projetés dans notre modèle décrit ci-haut (actualisés selon la courbe des taux construite) avant de prendre compte des rachats conjoncturels, ce qui veut dire que la projection de la valeur du contrat considère les rachats et les prestations en cas de décès probables ainsi que les marges et les frais prélevés par l'assureur.

L'exercice consiste au suivant : l'assuré va calculer la juste valeur de son contrat et va la comparer à la valeur obtenue s'il résilie son contrat et souscrit à la compagnie B (la résiliation prenant compte des pénalités et la souscription prenant compte des frais d'inscription pris).

L'hypothèse retenue dans ce modèle était de supposer que la courbe de taux de rachat est très proche de la droite de gain réalisé si un changement de compagnie a été effectué. En d'autres termes,  $\alpha$  est déduite de la pente de la courbe de gain réalisé par rapport à la différence entre les taux si un changement de compagnie a été effectué.

Nous retiendrons alors  $\alpha = 6$ .

#### 1.2.4 Les primes de risque

Les capitaux assurés sont à la fois fonction de l'âge moyen et de la loi de mortalité de la population assurée. Supposons qu'on a un assuré d'âge  $x$  à la souscription du contrat.

Après  $t$  années et si l'assuré est encore vivant, on a :

- i. soit il y a décès dans cette année avec une probabilité  $q_{x+t}$ ,
- ii. soit il n'y a pas décès avec une probabilité de  $1 - q_{x+t}$

La variable sinistre découle de la variable décès; le montant de sinistre attendu pour une année  $t$  est égal au produit de la probabilité de décès de l'individu par le capital garanti en cas de décès de l'assuré.

**Prime de risque** =  $SSR_t \cdot q_{x+t}$  avec  $SSR_t$  est la somme sous risque à la date  $t$ , et  $q_{x+t}$  est la probabilité de décès d'un individu d'âge  $x + t$ .

### **I.2.5 Les frais et les chargements**

Les chargements étant les ressources que la compagnie prélève auprès des assurés pour financer les frais. Ces chargements sont divisés comme suit :

Les chargements de gestion s'expriment en pourcentage des primes commerciales, ils sont prélevés lors du paiement de la prime. Les chargements de gestion peuvent être décomposés en deux catégories :

- les chargements opérationnels liés au frais relatif aux contrats ;
- les chargements liés aux structures fonctionnelles de la compagnie.

Les chargements de maintenance s'expriment aussi en pourcentage de la prime acquise et par un montant fixe par police. Ils sont prélevés mensuellement ou selon la périodicité du versement de la prime.

Les chargements de gestion et de maintenance peuvent correspondre aux chargements d'administration des contrats tout au long de leur existence, aux chargements de règlement des prestations et aux chargements résultant de la modification du contrat comme dans le cas du rachat, la transformation, la prorogation et la réduction du contrat par l'assuré.

Les chargements d'acquisition et d'entrée ne sont pas pris en compte si ces chargements sont payés lors de la souscription du contrat. Ils correspondent aux coûts déboursés par la compagnie à titre de création et de lancement du produit, les coûts publicitaires et le prix d'émission du contrat.

Quant aux frais supportés par la compagnie, ils sont modélisés comme un coût unitaire inflaté. Ce coût était le résultat d'une étude de comptabilité analytique effectuée par la compagnie. L'inflation doit être prise en compte dans la détermination et dans la projection de chargements (l'inflation est projetée avec un taux fixe de 4%).

$$C_t = C_{(t-1)} * (1 + \text{inflation}(t)).$$

### I.2.6 Les commissions

Les commissions versées par la compagnie aux apporteurs du contrat sont supposées être linéaires, elles sont en général exprimées en pourcentage de la prime commerciale. Le montant de ces charges dépend de la politique suivie par la compagnie d'assurance dans la rémunération des courtiers.

Ces chargements sont calculés en respectant les études qui ont été faites par la société pour garantir un taux de rendement interne suffisant. Le pourcentage de ces chargements peut être différent d'une année à l'autre, en général ils décroissent avec le temps. Ils sont payés ou prélevés lors du paiement de la prime à l'assuré.

Il faut prendre en compte l'amortissement de l'écart de zillmèrisation si dans le calcul de la prime commerciale payée par l'assuré les commissions ont été zillmerisées sur toute la période du paiement de la prime.

### I.2.7 La projection de la valeur en compte par contrat

On va noter par  $r_i(t)$  le taux d'intérêt distribué à la fin de l'année  $t$ .

La valeur annuelle du compte est déterminée chaque année en calculant les  $(r_i(t))_{t=1 \dots T}$  ;

$T$  étant la date de maturité du contrat.

Calcul de la valeur du compte : à partir de la définition précédente de la valeur en compte, on peut écrire les formules de récurrences suivantes :

$$CV_t = CV_{t-1} \cdot (1 + r_i(t)) + [PC_t - Chgt - PR_t] \cdot (1 + r_i(t))$$

$$CV_0 = 0$$

La prime  $PC$  se projette avec un taux de croissance  $t_{xp}$  :

$PC_t = PC_0 \cdot (1 + t_{xp})^{t-1}$ , notons que le taux de croissance est facultatif, il est défini dès la conclusion du contrat et pourra être nul.

Les chargements  $Chgt$  étant décomposés comme suit :

$$Chgt = \alpha_t \cdot PC_t + Com_t \cdot PC_t + \beta_t \cdot SA_t + C_t \cdot e_t$$

$\alpha_t \cdot PC_t$ ;  $\beta_t \cdot SA_t$  et  $C_t \cdot e_t$  correspondent aux frais d'installation et de maintenance de la police ;

$Com_t \cdot PC_t$  représente les commissions payées aux agents

Et la prime de risque  $PR_t$  est calculé comme suit :  $PR_t = q_{x+t-1} \cdot SSR_t \cdot v^{1/2}$

La somme sous risque relative à la couverture décès se calcule comme suit : en cas de décès de l'assuré, l'assureur verse à ses bénéficiaires le maximum entre le solde de son compte et la somme assurée en cas de décès. Dans ce cas, la somme sous risque est égale à :

$$SSR_t = \text{Max} [SAt - CV_t; 0]$$

La projection déterministe effectuée est de type micro contrat par contrat. Le portefeuille initial projeté contient 27000 contrats.

## **Chapitre II : Construction de la courbe des taux et modélisation des classes d'actifs dans un cadre déterministe**

### **II.1 Construction de la courbe des taux**

La particularité comptable d'une compagnie d'assurance par rapport à une autre compagnie est son cycle inversé de production. Cette particularité nécessite la constitution de provisions réglementaires afin d'honorer les engagements, et réciproquement elle nécessite la gestion d'un actif lourd.

Dans une compagnie d'assurance vie, les placements constituent la part la plus importante de l'actif (80% à peu près). Dans cette étude, nous divisons notre actif en 3 classes d'actifs :

- Les obligations
- Les actions
- Le monétaire

La modélisation des classes obligataire et monétaire nécessitant une construction de la courbe des taux. La courbe des taux sera utilisée aussi pour l'actualisation des flux de passif.

Comme cette partie est essentielle pour la suite de ce mémoire on détaillera les étapes effectuées pour la construction de la courbe des taux zéro-coupons à partir des taux swaps existants sur le marché.

#### **II.1.1 Swap**

Commençons par définir la notion de swap notant qu'il existe plusieurs structures : les swaps de devises, les swaps de taux, le « basis swaps », les swaps d'indice et les swaps de matière première, nous allons nous intéresser aux swaps de taux d'intérêts (existant et utilisable au Liban). Reprenons la définition suivante :

« Un swap de taux est une opération dans laquelle deux contreparties contractent simultanément un prêt et un emprunt dans une même devise, pour un même nominal mais sur des références de taux différentes ».

Donc, Le swap de taux d'intérêt est un accord aux termes duquel les contreparties acceptent d'échanger une série de paiements d'intérêt basés sur une somme hypothétique, le “notionnel”, pendant une période de temps donnée. Ce type de swap sert le plus souvent à transformer un emprunt à taux fixe en emprunt à taux variable, ou vice versa. C'est ce qu'on appelle le “ swap à la vanille”.

Voici comment se déroule un swap de taux d'intérêt typique. L'emprunteur A a obtenu un prêt à un taux d'intérêt flottant. Pour sa part, B a réussi à se financer au moyen d'un prêt à taux fixe. Si A désire convertir son emprunt en emprunt à taux fixe et B souhaite faire le contraire, les deux parties peuvent effectuer un swap. A accepte alors de verser périodiquement à B un montant calculé par l'application d'un taux d'intérêt fixe à une somme hypothétique, négociée entre les deux parties, pendant une période de temps spécifique. La somme hypothétique ne change pas de main (c'est-à-dire que le principal n'est pas échangé). Parallèlement, B promet de verser à A un montant calculé par application d'un taux flottant au notionnel. Le taux flottant est ajusté à intervalles prédéterminés durant la vie du swap. En concluant une telle entente, A transforme son emprunt à taux flottant en emprunt à taux fixe alors que B fait l'inverse.

Nous distinguons deux types de swaps de taux :

1. Les swaps taux fixe – taux flottant : Ce contrat prévoit qu'une partie paie un taux fixe (intérêts) à l'autre partie qui verse en retour un taux variable. Par convention, le vendeur du swap paie le taux variable et reçoit le taux fixe (spéculation à la baisse des taux).
2. Les swaps taux flottant-taux flottant : Une contrepartie emprunte (prête) à taux variable et prête (emprunte) à taux variable sur une référence différente.

La référence variable utilisée sur le marché libanais pour les swaps en USD est le Libor ayant des maturités allant de 1 semaine à 12 mois.

Afin de construire la courbe des swaps, on considère le suivant : Le taux swap en  $t$  est la valeur du taux fixe qui permet d'égaliser la jambe fixe (somme des flux actualisés d'intérêts à taux fixe) et la jambe variable du swap (somme des flux actualisés d'intérêts à taux variable).

### II.1.2 Taux zéro-coupon

La valeur de la plupart des instruments financiers se calcule par la somme des montants actualisés aujourd'hui des flux générés par ceux-ci. Ces actualisations se font à l'aide des taux zéro-coupon.

*« Un produit financier dit « zéro-coupon » est un instrument qui ne comporte aucun détachement de coupon et ne donne lieu qu'à un flux initial  $I$  (prix d'achat) et un flux final de remboursement  $N$  (nominal). Le taux de rendement actuariel de cet instrument est son **taux zéro-coupon** ».*

Une obligation zéro-coupon d'échéance  $T$  est un contrat qui garantit à son détenteur le paiement d'une seule unité monétaire à la date  $T$ , sans coupons intermédiaires. Sa valeur à la date  $t$  est noté  $Z(t, T)$ . On a  $Z(T, T) = 1$ .

Le zéro-coupon est appelé aussi facteur d'actualisation car à partir de ce taux, nous pouvons déduire le prix de nombreux taux d'intérêt. En temps discret,  $Z(t, T)$  est défini comme suit :

$$Z(t, T) = \frac{1}{(1+r(t,T))^{T-t}}$$

Où  $r(t, T)$  est le taux zéro-coupon correspondant à  $Z(t, T)$ .

La courbe zéro-coupon à construire correspond aux couples  $(t, r(t, T))$  qui s'appelle également « Structure par terme des taux d'intérêts. » Cette courbe permettant d'actualiser chacun des flux d'un produit avec le facteur d'actualisation correspondant, n'est pas disponible sur les marchés pour toutes les maturités. Nous la construisons dans cette partie du mémoire à partir des taux swaps.

De la courbe zéro-coupon, nous pouvons déduire la courbe des taux forward et évaluer tous les produits de taux à flux déterministes. Cette courbe est également le point de départ pour modéliser l'évolution des taux zéro-coupon dans le futur.

### II.1.3 Application : Construction de la courbe des taux

Avant de commencer notre application, distinguons entre les courbes de marché et les courbes implicites :

- Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps.
- Les courbes implicites sont dérivées indirectement à partir des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps.

Parmi les courbes de marché:

- la courbe des taux de rendement à maturité: elle est construite à partir des taux de rendement des obligations.
- la courbe des taux de swaps: elle est construite à partir des taux de swaps.

Parmi les courbes implicites:

- la courbe des taux zéro-coupon
- la (les) courbe(s) de taux forwards
- la courbe des taux forwards instantanés
- la courbe des taux de rendement au pair

La courbe de taux zéro-coupon est donc une courbe implicite. Pour notre application, elle sera dérivée à partir des swaps de taux d'intérêt.

La courbe de taux zéro-coupon sera construite grâce à la méthode de proche en proche dite «**méthode de bootstrap**». C'est une procédure en plusieurs étapes qui permet de reconstituer une courbe de taux d'intérêt pas à pas, elle présente l'avantage d'être précise et simple à mettre en œuvre. La méthode consiste à s'avancer segment de maturité par segment de maturité :

Pour les taux inférieurs à 1 an : nous prenons les taux « dépôts » qui sont les taux monétaires. Un prêt monétaire est remboursé à l'échéance en même temps que les intérêts et s'apparente déjà en zéro-coupon.

Mais comme il faut travailler dans les mêmes conventions de bases de calculs (cf. Annexe 1). Les taux monétaires sont en base Exact/360, il faut les transformer en base Exact/Exact qui est la base actuarielle de calcul des produits obligataires. Le passage du taux de dépôt monétaire  $r_M$  au taux  $r$  transformé en base actuarielle (taux zéro-coupon actuarielle), se fait par application de la formule suivante :

$$r = \left( 1 + \frac{r_M * \text{nbjoursplacement}}{360} \right)^{1/f} - 1$$

$f$  correspond à la fraction d'année du placement en base Exact/Exact, soit pour un taux de dépôt monétaire de maturité 3 mois,  $f = 0,25$ .

Calcul des taux zéro-coupon supérieurs à 1 an : nous prenons les swaps de taux d'intérêt disponibles sur le marché. Nous utiliserons les taux fixes contre lesquels sont échangés les swaps sur Libor USD - 6 mois. Le taux fixe du swap est vu comme un taux actuariel obligataire sur le marché Libor, car un swap s'apparente à une obligation à taux fixe financée par une obligation à coupon variable. Ces taux fixes, exprimés en base annuelle, étaient disponibles à partir de sources bancaires.

Les swaps admettent des coupons intermédiaires. Pour trouver la valeur actuelle de ces coupons, on effectue une actualisation à l'aide des facteurs d'actualisation issus des taux zéro-coupon.

Notons par  $C_i$  le taux du swap de maturité  $i$  années et  $r_i$  le taux zéro-coupon associé. On procède par itération. Considérons  $N$  swaps de taux correspondants à  $N$  maturités différentes.

$C_i$  le taux du swap de maturité  $i$  années et  $r_i$  taux zéro-coupon associé.

Pour calculer les  $N$  taux zéro-coupon et les  $N$  facteurs d'actualisation  $FA_n$  (pour  $n$  allant de 1 à  $N$ ), on procède par itération : ainsi au rang  $n$ , nous avons besoin des taux de tous les rangs précédents.

Le swap de maturité 1 an, n'entraînant pas de versement de flux fixe intermédiaire, coïncide avec le taux zéro-coupon 1 an, on a  $r_1 = C_1$

A partir du taux zéro-coupon 1 an, on crée le taux zéro-coupon 2 ans.

On réalise deux opérations : le prêt d'un montant unitaire sur 2 ans et l'emprunt d'un montant

$\frac{C_2}{1+C_1}$  au taux  $r_1$  sur un an.

Nous avons alors la formule suivante pour  $r_2$  :

$$r_2 = \left( \frac{1+C_2}{1-\frac{C_2}{1+r_1}} \right)^{1/2} - 1$$

Ainsi, pour calculer le taux zéro coupon 3 ans  $r_3$ , on utilise les taux zéro-coupon 1 an et 2 ans et, récursivement on a la formule suivante pour le taux zéro-coupon  $r_n$

$$r_n = \left[ \frac{1+C_n}{1-C_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+r_i)^i}} \right]^{1/n} - 1$$

On calcule les facteurs d'actualisations (FA) afin de trouver les taux zéro-coupon, en effet:

$$FA_i = \frac{1}{(1+r_i)^i} \text{ alors ; } FA_n = \frac{1-C_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} FA_i}{1+C_n}$$

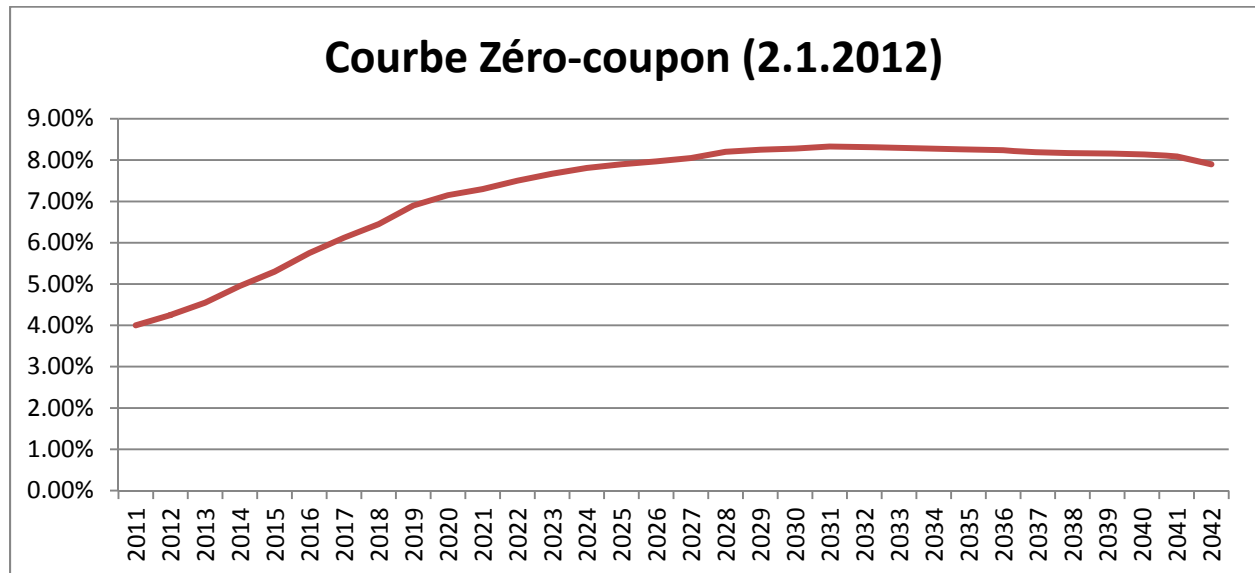
$$\text{Ce qui conduit à : } FA_n = \frac{1-\frac{C_n}{C_n-1}(1-FA_{n-1})}{1+C_n}$$

**Tableau des taux au 2/1/2012 :**

| Maturité en années | Swap taux variable | Maturité Swap | Valeur du Taux | Facteur d'actualisation | Taux Zéro-coupon |
|--------------------|--------------------|---------------|----------------|-------------------------|------------------|
| 1                  | Libor USD - 6 mois | 1 an          | 4,23%          | 0,9594                  | 4,25%            |
| 2                  | Libor USD - 6 mois | 2 ans         | 4,50%          | 0,9156                  | 4,55%            |
| 3                  | Libor USD - 6 mois | 3 ans         | 4,88%          | 0,8662                  | 4,95%            |
| 4                  | Libor USD - 6 mois | 4 ans         | 5,22%          | 0,8144                  | 5,30%            |
| 5                  | Libor USD - 6 mois | 5 ans         | 5,65%          | 0,7564                  | 5,75%            |
| 6                  | Libor USD - 6 mois | 6 ans         | 5,98%          | 0,7003                  | 6,12%            |
| 7                  | Libor USD - 6 mois | 7 ans         | 5,95%          | 0,6624                  | 6,45%            |
| 8                  | Libor USD - 6 mois | 8 ans         | 6,84%          | 0,5727                  | 6,90%            |
| 9                  | Libor USD - 6 mois | 9 ans         | 6,95%          | 0,5290                  | 7,15%            |
| 10                 | Libor USD - 6 mois | 10 ans        | 7,18%          | 0,4791                  | 7,30%            |
| 11                 | Libor USD - 6 mois | 11 ans        | 7,37%          | 0,4333                  | 7,50%            |
| 12                 | Libor USD - 6 mois | 12 ans        | 7,49%          | 0,3946                  | 7,67%            |
| 15                 | Libor USD - 6 mois | 15 ans        | 7,82%          | 0,3412                  | 7,97%            |
| 20                 | Libor USD - 6 mois | 20 ans        | 8,02%          | 0,3003                  | 8,33%            |
| 30                 | Libor USD - 6 mois | 30 ans        | 7,75%          | 0,3005                  | 8,09%            |

Comme il n'existe pas de valeurs de taux pour toutes les maturités, nous avons utilisé des méthodes d'interpolation (cf. Annexe 2) pour trouver les taux manquants. Nous procédons à une interpolation cubique par segments de courbes.

Voici la courbe des taux zéro-coupon construite à partir des taux swaps au 2/1/2012 :



Les passifs seront actualisés à partir des facteurs d'actualisation déjà trouvés.

## II.2 Modélisation de la classe Action

La classe action est formée des actions réparties comme suit :

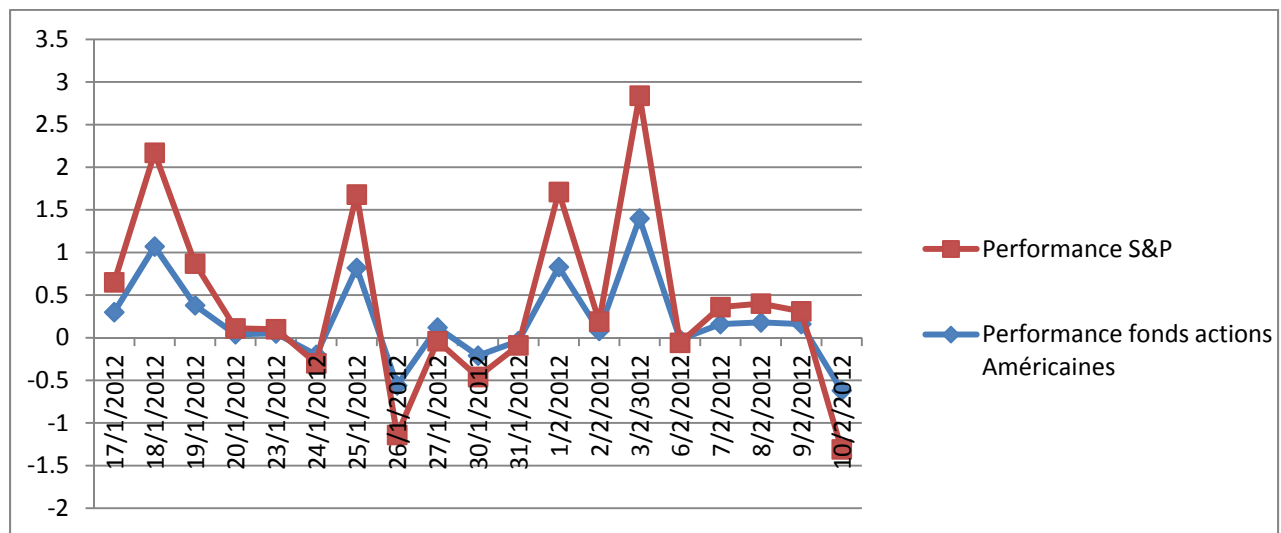
- Actions du marché Américain
- Actions du marché Libanais

A 90% du volume des actions dans le portefeuille, il s'agit d'actions appartenant à l'indice S&P (500) (indice représentatif des 500 plus grandes sociétés cotées sur les bourses américaines), nous étudions la performance des actions comme étant relatif à celle de S&P.

Rappelons qu'un indice boursier correspond à une mesure statistique calculée par le regroupement des valeurs des titres de plusieurs sociétés cotées en bourse. Il sert généralement à mesurer la performance d'une bourse ou d'un marché.

La plupart des actions américaines en USD sont des actions des sociétés du S&P 500. Nous avons considéré l'ensemble de ces actions comme un fonds dont nous avons comparé l'évolution de la valeur de marché à l'évolution de l'indice S&P 500 (SPX).

|           | <b>Performance fonds actions<br/>Américaines</b> | <b>Performance S&amp;P</b> |
|-----------|--------------------------------------------------|----------------------------|
| 17/1/2012 | 0,3                                              | 0,35                       |
| 18/1/2012 | 1,07                                             | 1,1                        |
| 19/1/2012 | 0,38                                             | 0,49                       |
| 20/1/2012 | 0,04                                             | 0,07                       |
|           |                                                  |                            |
| 23/1/2012 | 0,05                                             | 0,05                       |
| 24/1/2012 | -0,2                                             | -0,1                       |
| 25/1/2012 | 0,82                                             | 0,86                       |
| 26/1/2012 | -0,56                                            | -0,58                      |
| 27/1/2012 | 0,12                                             | -0,16                      |
|           |                                                  |                            |
| 30/1/2012 | -0,21                                            | -0,25                      |
| 31/1/2012 | -0,04                                            | -0,05                      |
| 1/2/2012  | 0,83                                             | 0,88                       |
| 2/2/2012  | 0,08                                             | 0,11                       |
| 3/2/2012  | 1,4                                              | 1,44                       |
|           |                                                  |                            |
| 6/2/2012  | -0,02                                            | -0,04                      |
| 7/2/2012  | 0,16                                             | 0,2                        |
| 8/2/2012  | 0,18                                             | 0,22                       |
| 9/2/2012  | 0,16                                             | 0,15                       |
| 10/2/2012 | -0,62                                            | -0,69                      |



Nous constatons que la performance de ce fonds et de l'indice boursier évoluent de manière similaire. La valeur de marché du fonds actions américaines sera donc évaluée en fonction du taux de rendement prospectif affecté à l'indice S&P500.

Pour notre calcul, on considère un taux de rendement prospectif de l'indice S&P500 égal à 6,5%. Ce rendement était conseillé par le département finance de la compagnie.

## **Chapitre III : Couverture par un cadre de gestion Actif-Passif**

### **III.1 Introduction**

Après la modélisation du Passif, il s'agit de couvrir un échéancier de flux probables calculés à partir des hypothèses mentionnées ci-dessus.

L'objectif de cette partie est de présenter les outils correspondant à une couverture du risque de taux pour un portefeuille d'assurance Epargne. Citons par la suite les différents outils :

1. Cash flow matching : une méthode qui consiste à coupler à chaque flux du passif un instrument de l'actif
2. Immunisation par la duration : une méthode qui consiste à considérer que la duration est un bon proxy du risque de taux et à construire un portefeuille de duration égale à celle du passif.
3. Immunisation par le vecteur de duration : une méthode qui s'appuie sur l'analyse des vecteurs de duration généralisé, où les piliers sont choisis afin de répartir la sensibilité totale sur un nombre fixé d'instruments de façon homogène.

### **III.2 Cash flow Matching**

« Le cash flow matching consiste à construire un portefeuille de placements obligataires tel que les flux futurs qu'il génère soient égaux, à chaque date, aux flux (supposés fixes) générés par les engagements de la société à l'égard des assurés et des bénéficiaires de contrats. »

C'est l'une des méthodes de couverture les plus intuitives, consistant à adosser à chacun des flux de Passif un produit taux dont la maturité coïncide avec la date de paiement du flux par l'utilisation spécialement de 2 types d'instruments: les obligations ou les swaps de taux d'intérêt.

Par la pratique, les obligations les plus utilisées sont les zéro-coupons, notant que:

- Les zéro-coupons sont moins liquides que les obligations à coupons, ce qui implique une détérioration du prix, car la différence entre l'offre et la demande est plus large et l'acquisition se fait au regard du paiement d'une prime de liquidité.

- Par contre, les obligations à coupons intermédiaires sont plus liquides, on ne voit pas cette détérioration du prix, mais ne sont pas les instruments les plus adéquats pour une telle opération comme les coupons intermédiaires déforment l'adéquation actif-passif comme leur existence augmentera la valeur de l'actif. On prendra en compte ce point en application.

Le Cash Flow matching est un moyen de couverture qui pourra être efficace à court terme, mais ne donne pas des résultats satisfaisants à long terme vu que les flux de l'Actif et du Passif sont eux-mêmes dépendants des taux d'intérêts.

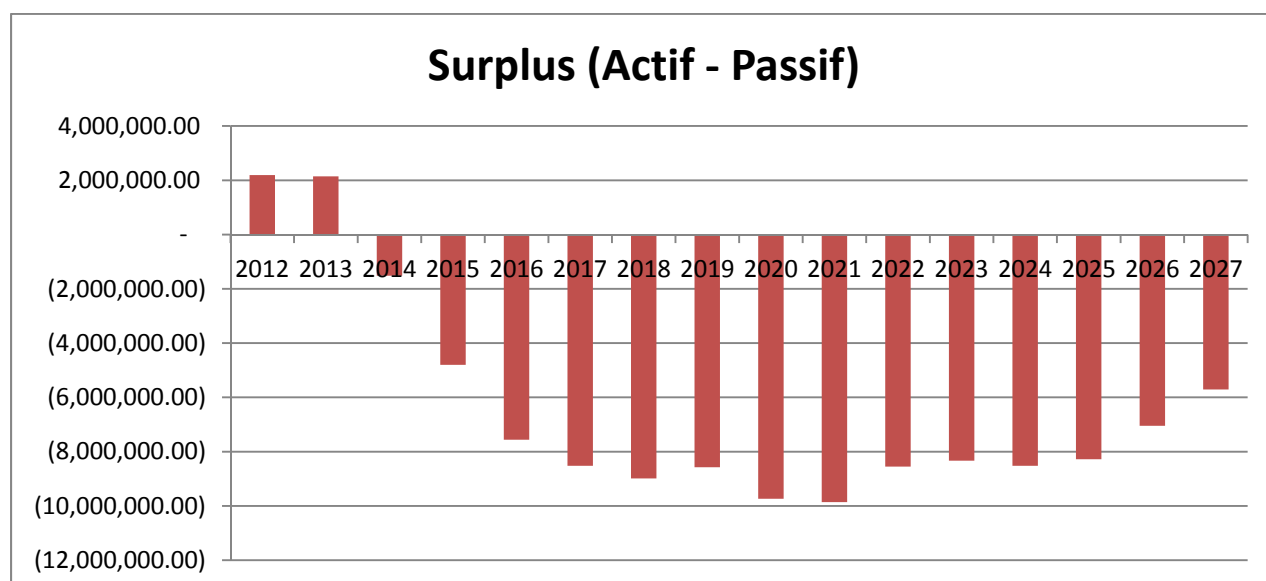
### Application

Les étapes d'application suivies sont celles mentionnées dans le livre « Gestion Actif Passif en assurance vie » :

- Choisir une obligation à taux fixe dont l'échéance coïncide avec la date la plus éloignée de sortie de fonds ;
- Investir dans cette obligation un montant tel que le flux généré par cette obligation à son échéance soit égal aux flux générés par le Passif ;
- Retrancher aux autres flux résultant du Passif (correspondant donc à des dates antérieures) les montants de coupons détachés par la précédente obligation ;
- Recommencer pour l'avant dernière date la plus éloignée de sortie de fonds, et ainsi de suite....

La couverture est effectuée par l'utilisation des obligations émises par l'Etat Libanais. La couverture s'étendra jusqu'à l'année 2026.

Tenant compte du portefeuille d'actifs initial : Notre projection doit prendre en compte les flux d'actif provenant de l'actif existant. Ci-dessous la projection du Surplus (Actif – Passif) avant la réalisation du Cash flow matching :



Comme on remarque, il existe une inadéquation qui sera constatée dans deux ans, les surplus commencent à devenir de plus en plus déficitaires après la 3<sup>ème</sup> année de projection. Par la suite, les flux qui doivent être couverts sont les déficits.

Alors l'application effectuée porte sur les mêmes étapes décrites ci-dessous mais en couvrant les séries de flux déficitaires à chaque date  $t$  notés  $P_t$  tout au long de 14 ans. Par la suite notre portefeuille de couverture portera sur 13 lignes obligataires émises par le l'Etat Libanais (à taux fixe), cherchant à couvrir 13 flux annuels probables. Les 13 lignes obligataires sont les suivantes :

| ISSUER            | MATURITY  | CUR | CPN   | FREQ. | PRICE BID | PRICE OFFER |
|-------------------|-----------|-----|-------|-------|-----------|-------------|
| LEBANESE REPUBLIC | 2-May-14  | USD | 9,00% | 2     | 111,5     | 112,25      |
| LEBANESE REPUBLIC | 6-Aug-15  | USD | 8,50% | 2     | 113,625   | 114,375     |
| LEBANESE REPUBLIC | 2-Nov-16  | USD | 4,75% | 2     | 100       | 101         |
| LEBANESE REPUBLIC | 31-Dec-17 | USD | 4,00% | 2     | 99        | 99,75       |
| LEBANESE REPUBLIC | 12-Nov-18 | USD | 5,15% | 2     | 99,625    | 100,375     |
| LEBANESE REPUBLIC | 28-Nov-19 | USD | 5,45% | 2     | 99,5      | 100,25      |
| LEBANESE REPUBLIC | 9-Mar-20  | USD | 6,38% | 2     | 105,5     | 106,5       |
| LEBANESE REPUBLIC | 12-Apr-21 | USD | 8,25% | 2     | 118,5     | 119,25      |
| LEBANESE REPUBLIC | 4-Oct-22  | USD | 6,10% | 2     | 101,75    | 102,5       |
| LEBANESE REPUBLIC | 6-Nov-23  | USD | 6,50% | 2     | 103,75    | 105,5       |
| LEBANESE REPUBLIC | 3-Dec-24  | USD | 7,00% | 2     | 107,75    | 108,5       |
| LEBANESE REPUBLIC | 11-Oct-25 | USD | 6,45% | 2     | 104,5     | 106,75      |
| LEBANESE REPUBLIC | 28-Nov-26 | USD | 6,60% | 2     | 102,75    | 103,5       |

Ces obligations ayant un nominal de 100,000 USD, on génère les flux produits par ces obligations choisies et on procède au calcul suivant :

Les sorties de fonds P' à couvrir sont fin année 2014 jusqu'au 2026. Le portefeuille obligataire considéré est formé de 13 obligations in fine à taux fixe.

Soit :

$F_{ti}^{P'}$  pour i allant de 1 jusqu'à n le portefeuille à couvrir

$F_{ti}^{Oj}$  le flux généré par la jème obligation ( $O_j$ ) à la date  $t_i$

$\alpha_j$  représente la quantité de la jème obligation qui entrera dans la composition du portefeuille financière.

Par la suite on obtient :

$$\alpha_n = \frac{F_{tn}^{P'}}{A_{tn}^{On}}$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{F_{tn-1}^{P'} - \alpha_n F_{tn-1}^{On}}{F_{tn-1}^{On-1}}$$

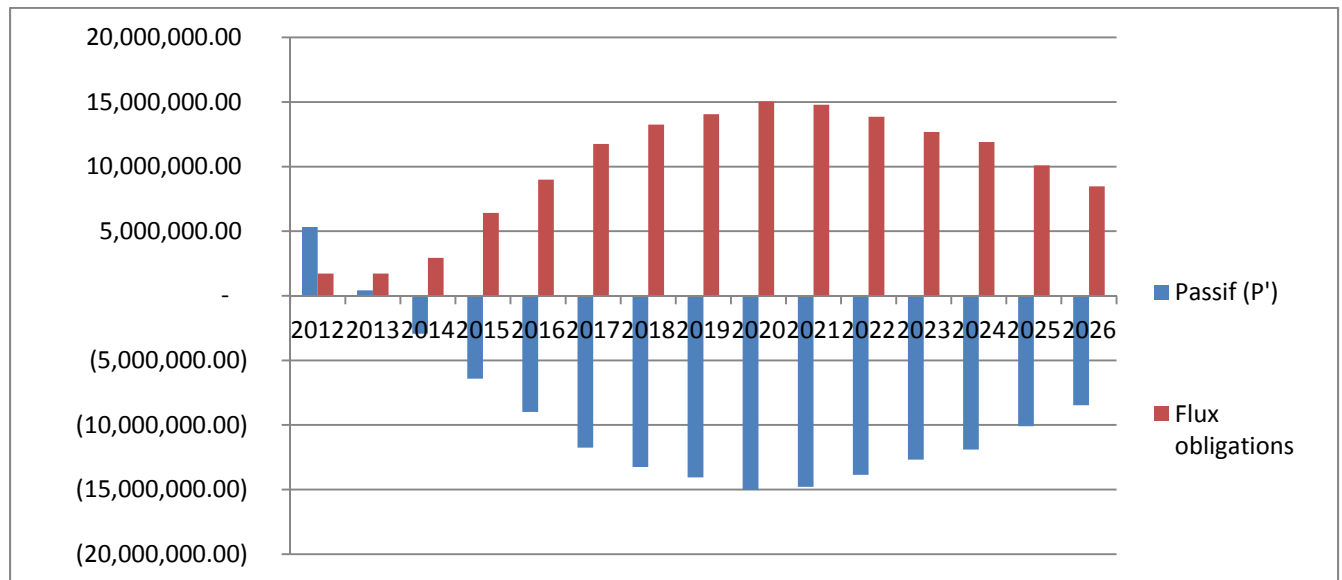
etc

$$\alpha_{n-k} = \frac{F_{tn-k}^{P'} - \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{n-l} F_{tn-k}^{On-l}}{F_{tn-k}^{On-k}}$$

On commence par la sortie de fonds la plus éloignée ce qui veut dire pour la maturité 2026, on calcule

$\alpha_{26} = F_{26}^{P'} / F_{26}^{O26}$  et après date à date, on retranche les sorties de fonds antérieures, et on obtient une nouvelle série de flux P' pour calculer  $\alpha_{25}$ , et ainsi de suite.

Le graphe suivant illustre les flux projetés après Cash flow matching :



#### Inconvénients et limites de l'application effectuée :

La couverture en « cash-flow matching » a l'avantage d'être intuitive, donne d'excellents résultats dans le temps à condition d'être réalisée par les instruments convenables, ce qui implique de trouver sur le marché la profondeur suffisante pour pouvoir investir le Passif dans de bonnes conditions de prix : ceci n'est pas assuré.

D'autre part, il est important de souligner que les fonds à couvrir en question sont des flux probables. Ce qui implique que la structure du portefeuille obligataire déduite du cash flow matching dépend fortement des hypothèses et des prévisions faites pour la projection du Passif. Par la suite une importante variante des sorties de fonds autour des prévisions faites peut donc rendre inefficace la stratégie du cash flow matching.

### III.3 Immunisation par la duration

La formule de la valeur du marché du Passif à la date  $t$  est :  $VM(t) (\text{Passif}) = \sum_k \frac{F_k}{(1+r_k)^{t_k-t}}$

Où :

$F_k$  est le flux probable du Passif

$r_k$  est le taux zéro coupon correspondant à la maturité  $t_k$

La duration  $D$  est définie comme :  $D = \frac{\partial VM(r)}{\partial r}$

Comme l'Actif d'une compagnie d'assurance est constitué en majorité en produit taux vu des contraintes réglementaires, ainsi on pourra dire que l'aléa entre l'Actif et le Passif provient des taux. La méthode de Duration matching consiste à diminuer l'écart entre la duration de l'Actif et celle du Passif, par la suite diminuer l'écart entre l'Actif et le Passif par la diminution de la sensibilité de l'Actif et du Passif contre un mouvement parallèle de la courbe des taux. Mais ceci n'est pas suffisant car le problème principal n'est pas les changements de la duration à cause du passage du temps mais à cause des déformations de la courbe des taux.

La technique de Duration matching ne sera pas développée par la suite n'étant pas l'objet d'une application comme l'agrégation en un chiffre unique implique une déperdition de l'information dont la conséquence est un manque de précision de la couverture lors de mouvements non uniformes de la courbe de taux.

On passera par la suite à une autre méthode d'immunisation en utilisant la duration qui est immunisation par Vecteur de duration.

#### **III.4 Immunisation par la méthode du vecteur de duration "Duration Vector"**

Il s'agit d'une méthode qui consiste à la construction d'un portefeuille d'actifs composé de produits de taux en cherchant à rapprocher (tant que possible) le vecteur de duration de l'Actif à celui du Passif.

En premier lieu, il faut trouver le vecteur des durations du Passif tout en ayant une série de flux  $F_i$  où  $F_i$  correspond au flux de Passif probable correspondant à la date  $t_i$  pour  $i$  allant de 1 jusqu'à  $P$ .

Soit  $d^{F_i}$  la duration relative au flux  $F_i$ , on construit en utilisant la courbe des taux le vecteur de duration  $(d^{F1}, d^{F2}, \dots, d^{FP})$  qui représente le vecteur de duration du Passif.

Notre objectif est la construction d'un portefeuille d'actifs composé de  $N$  produits taux ayant un vecteur de durations le plus proche possible de  $(d^{F1}, d^{F2}, \dots, d^{FP})$ .

Soit N obligations. Pour chaque obligation, on calcule le vecteur de durations correspondant à la duration du titre pour les dates  $t_i$  pour  $i$  allant de 1 jusqu'à P.

L'objectif est de calculer pour chaque titre, son poids  $w_l$  où  $w_l$  est le poids optimal du titre  $l$  pour  $l$  allant de 1 jusqu'à N. Ceci sera effectué par une optimisation numérique par la méthode des moindres carrés visant à approcher tant que possible les deux vecteurs de durations.

Soit  $d_i^l$  la duration de l'obligation  $l$  relativement à la date d'échéance  $t_i$  ( $i$  allant de 1 jusqu'à P). Grâce à la courbe des taux zéro-coupon déjà construite, soit  $r(i)$  le taux zéro-coupon correspondant à la date  $t_i$  ( $i$  allant de 1 jusqu'à P). A partir de cette courbe on peut calculer pour chaque obligation  $O_l$  son prix  $P_l$ .

On cherche à optimiser la quantité  $\delta(w)$  où  $w$  est le vecteur représentant les poids des N obligations choisies, avec :

$$\delta(w) = \sqrt{\sum_{i=1}^P (d_i^w - d_i^F)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^P (\sum_{l=1}^N w_l d_i^l - d_i^F)^2}$$

avec  $d_i^l$  et  $d_i^F$  calculés comme suit à partir de la courbe des taux zéro-coupon :

$d_i^F = -\frac{ti}{VP(F)} \cdot \frac{F_i}{(1+\tau_i)^{t_{i+1}}}$  Pour  $i$  allant de 1 jusqu'à P avec  $VP(F) = \sum_{i=1}^P \frac{F_i}{(1+\tau_i)^{t_i}}$  la valeur présente des Flux.

Et  $d_i^l = -\frac{1}{VP} \frac{\partial P_l}{\partial \tau_i}$  avec  $VP = \sum_{l=1}^N P_l$  ( $\tau_{i,i=1 \dots P}$ )

Le portefeuille est totalement couvert si le vecteur d'allocation  $w$  permet d'égaliser, pour chaque échéance  $t_i$  les durations  $d_i^w$  et  $d_i^F$ .

On résout :  $w^* = \arg \min \delta(w)$

Cette méthode n'était pas le sujet d'une application pour plusieurs raisons :

1. Choix des instruments : le choix des titres s'effectue d'une manière ad hoc. Cette étape n'est pas reliée à la couverture, ainsi le risque de choisir des instruments inadéquats est assez grand.
2. Effectuer une optimisation numérique pour aboutir aux poids de chaque instrument traite de façon homogène toutes les maturités. Notant que le principal souci devant être présent est l'évolution de l'écart actif-passif à court terme, l'optimisation sur les poids égalise l'importance de l'adéquation à long-terme à celle à court-terme.

On passera par la suite à une autre méthode qui est le Key rate Duration.

### III.5 Immunisation par le *Key rate duration vector*:

Une méthode qui consiste sur un principe très proche que la méthode précédente avec une différence que le nombre d'éléments du vecteur de duration n'est pas lié au nombre de flux du Passif, mais il s'agit d'un fixé arbitrairement selon les caractéristiques du Passif et la structure du portefeuille de couverture à mettre en place.

Le principe de construction est très proche que le précédent :

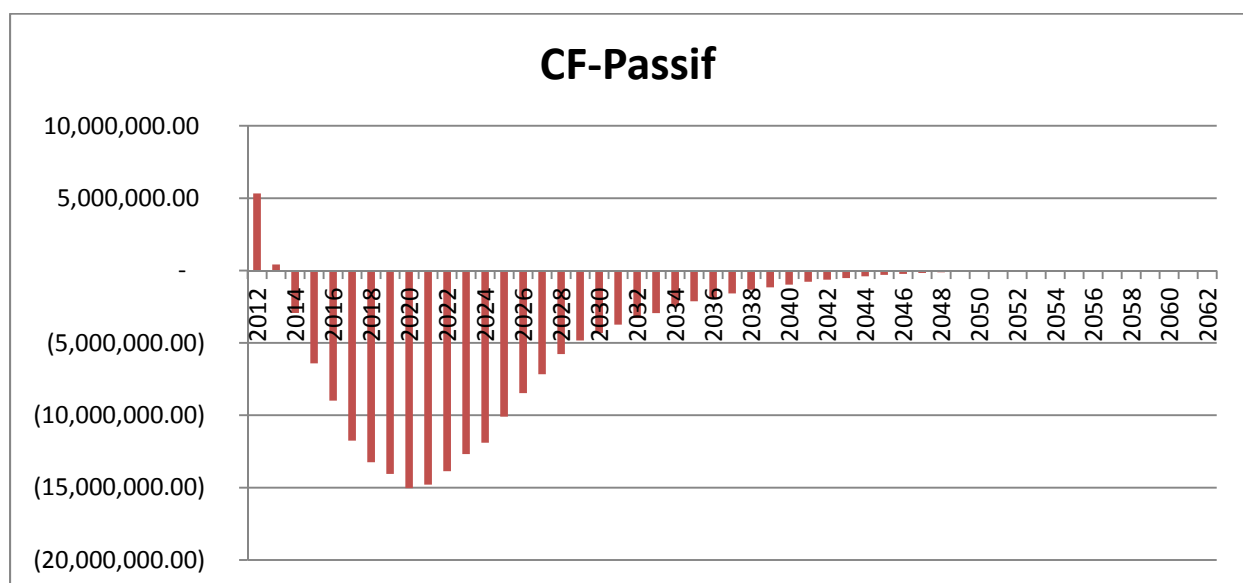
1. Définition des M maturités clé du vecteur de KRD,  $t_{i,i=1,...,M}^{KRD}$
2. Construction du vecteur de KRD du passif,  $KRD_{i,i=1,...,M}$
3. Sélection des P titres utilisés pour la couverture
4. Calculer les M\*P KRD des titres aux maturités-clé  $d_i^k, i=1...M, k=1,...,P$
5. Calcul des poids  $w^*=w^*_{k,k=1...P}$  par optimisation numérique

$$\delta^{KRD}(w) = \sqrt{\sum_{i=1}^M (\sum_{k=1}^P w_k d_i^{T^k} - KRD_i)^2}$$

$$w^* = \arg \min \delta^{KRD}(w)$$

#### Application au KRD duration

La couverture s'étendra dans ce cas jusqu'au dernier flux du Passif daté 2062, par la suite, ci-dessous la projection des flux Passif jusqu'à cette date :



Le graphe ci-dessus est dressé afin de clarifier le choix des maturités Clés qui ont été choisi. On cherche à couvrir M maturités Clés qui sont les suivantes : 2017, 2020, 2023, 2025, 2031 et 2049 ; Elles sont à l'ordre de 6. Le Passif, ayant une période de couverture allant jusqu'à 2062, a une valeur présente de 81 013 000 USD et une durée totale de 10,39.

| Durée | Année | CF-Passif       | Taux zéro-coupon | Valeur Présente | Duration |
|-------|-------|-----------------|------------------|-----------------|----------|
| 1     | 2012  | 5 329 725,59    | 4,25%            | 5 112 446,61    | (0,06)   |
| 2     | 2013  | 416 695,48      | 4,55%            | 381 215,64      | (0,07)   |
| 3     | 2014  | (2 929 679,06)  | 4,95%            | (2 534 385,75)  | 0,02     |
| 4     | 2015  | (6 411 947,10)  | 5,30%            | (5 215 265,78)  | 0,28     |
| 5     | 2016  | (8 992 104,33)  | 5,75%            | (6 799 225,69)  | 0,70     |
| 6     | 2017  | (11 758 792,28) | 6,12%            | (8 233 401,06)  | 1,31     |
| 7     | 2018  | (13 247 997,92) | 6,45%            | (8 553 238,67)  | 2,05     |
| 8     | 2019  | (14 057 875,59) | 6,90%            | (8 243 242,08)  | 2,86     |
| 9     | 2020  | (15 034 779,73) | 7,15%            | (8 075 464,11)  | 3,76     |
| 10    | 2021  | (14 788 384,98) | 7,30%            | (7 310 103,54)  | 4,66     |
| 11    | 2022  | (13 862 584,73) | 7,50%            | (6 256 783,20)  | 5,51     |
| 12    | 2023  | (12 679 116,88) | 7,67%            | (5 223 389,94)  | 6,28     |
| 13    | 2024  | (11 899 016,79) | 7,81%            | (4 476 550,40)  | 7,00     |
| 14    | 2025  | (10 091 428,70) | 7,90%            | (3 480 586,49)  | 7,60     |
| 15    | 2026  | (8 464 799,70)  | 7,97%            | (2 679 601,21)  | 8,10     |
| 16    | 2027  | (7 164 589,54)  | 8,05%            | (2 075 845,25)  | 8,51     |
| 17    | 2028  | (5 773 984,86)  | 8,20%            | (1 512 210,36)  | 8,83     |
| 18    | 2029  | (4 833 948,67)  | 8,25%            | (1 160 378,69)  | 9,09     |
| 19    | 2030  | (4 310 849,87)  | 8,28%            | (950 924,86)    | 9,31     |
| 20    | 2031  | (3 737 496,77)  | 8,33%            | (754 407,44)    | 9,49     |
| 21    | 2032  | (3 289 350,02)  | 8,32%            | (614 084,89)    | 9,65     |
| 22    | 2033  | (2 942 613,61)  | 8,29%            | (510 257,57)    | 9,79     |
| 23    | 2034  | (2 456 702,28)  | 8,28%            | (394 223,81)    | 9,90     |
| 24    | 2035  | (2 118 949,68)  | 8,26%            | (315 419,18)    | 10,00    |
| 25    | 2036  | (1 897 461,45)  | 8,24%            | (262 106,85)    | 10,08    |
| 26    | 2037  | (1 583 396,19)  | 8,19%            | (204 514,66)    | 10,14    |
| 27    | 2038  | (1 325 604,30)  | 8,17%            | (159 048,47)    | 10,20    |
| 28    | 2039  | (1 157 528,72)  | 8,16%            | (128 725,56)    | 10,24    |
| 29    | 2040  | (974 678,61)    | 8,14%            | (100 752,74)    | 10,28    |
| 30    | 2041  | (773 460,78)    | 8,09%            | (74 967,46)     | 10,31    |
| 31    | 2042  | (636 030,43)    | 7,90%            | (60 230,03)     | 10,33    |
| 32    | 2043  | (521 211,07)    | 7,90%            | (45 743,29)     | 10,35    |
| 33    | 2044  | (398 328,96)    | 7,90%            | (32 399,19)     | 10,36    |
| 34    | 2045  | (301 286,94)    | 7,90%            | (22 711,78)     | 10,37    |

|    |      |              |       |             |       |
|----|------|--------------|-------|-------------|-------|
| 35 | 2046 | (235 725,89) | 7,90% | (16 468,60) | 10,38 |
| 36 | 2047 | (166 396,23) | 7,90% | (10 773,86) | 10,38 |
| 37 | 2048 | (123 798,29) | 7,90% | (7 428,84)  | 10,38 |
| 38 | 2049 | (84 664,16)  | 7,90% | (4 708,52)  | 10,39 |
| 39 | 2050 | (59 782,09)  | 7,90% | (3 081,31)  | 10,39 |
| 40 | 2051 | (40 390,03)  | 7,90% | (1 929,37)  | 10,39 |
| 41 | 2052 | (26 530,00)  | 7,90% | (1 174,51)  | 10,39 |
| 42 | 2053 | (15 017,89)  | 7,90% | (616,18)    | 10,39 |
| 43 | 2054 | (9 197,87)   | 7,90% | (349,76)    | 10,39 |
| 44 | 2055 | (4 579,98)   | 7,90% | (161,41)    | 10,39 |
| 45 | 2056 | (2 283,23)   | 7,90% | (74,57)     | 10,39 |
| 46 | 2057 | (946,36)     | 7,90% | (28,65)     | 10,39 |
| 47 | 2058 | (482,95)     | 7,90% | (13,55)     | 10,39 |
| 48 | 2059 | (216,75)     | 7,90% | (5,64)      | 10,39 |
| 49 | 2060 | (180,82)     | 7,90% | (4,36)      | 10,39 |
| 50 | 2061 | (135,27)     | 7,90% | (3,02)      | 10,39 |
| 51 | 2062 | (36,38)      | 7,90% | (0,75)      | 10,39 |

### Choix des instruments

Il fallait répondre à plusieurs questions :

- Dans quel type d'instruments investir ?
- Où positionner la maturité de l'instrument ?

On a choisi pour notre application des swaps de taux d'intérêt, En effet, l'approche la plus simple consistait à investir dans un portefeuille d'obligations zéro-coupon de maturité  $t_i$  et de nominal  $F_i$ , mais ceci peut avoir comme conséquence des coûts non négligeables à chaque mise à jour des montants  $F_i$  car comme mentionné avant, les zéro coupons sont beaucoup moins liquides que d'autres obligations. Pour cette raison notre choix s'est limité entre des obligations nominales et des swaps de taux d'intérêt.

Le portefeuille de couverture choisie était constitué de swaps de taux Libor 6 mois, Comment ces swaps étaient choisis :

Selon les Maturités choisies, on a divisé le portefeuille de Passifs en périodes :

- Période 1 : entre 2012 et 2017
- Période 2 : entre 2017 et 2020
- Période 3 : entre 2020 et 2023
- Période 4 : entre 2023 et 2025
- Période 5 : entre 2025 et 2031
- Période 6 : entre 2031 et 2049

Pour chacun de ces périodes, on a choisi un swap de taux ayant comme objectif d'immuniser le portefeuille contre le risque de taux en égalisant les durations pour chaque maturité,

Ci-dessous la description du portefeuille de couverture choisie :

| Swap # | Nominal   | Maturité | Taux variable - Swap | Taux fixe - swap | Duration Actif |
|--------|-----------|----------|----------------------|------------------|----------------|
| 1      | 2 775 456 | 2017     | Libor USD - 6 mois   | 5,95%            | 1,3            |
| 2      | 2 753 574 | 2020     | Libor USD - 6 mois   | 6,60%            | 3,76           |
| 3      | 1 867 000 | 2023     | Libor USD - 6 mois   | 7,12%            | 6,28           |
| 4      | 1 517 012 | 2025     | Libor USD - 6 mois   | 7,35%            | 7,6            |
| 5      | 1 378 145 | 2031     | Libor USD - 6 mois   | 7,78%            | 9,49           |
| 6      | 1 221 653 | 2049     | Libor USD - 6 mois   | 7,35%            | 10,39          |

## **Conclusion Deuxième Partie**

La deuxième partie de ce mémoire était le sujet d'une projection déterministe du portefeuille Actif-Passif visant à faire en premier lieu une projection du portefeuille en termes de flux probables selon des hypothèses. Le choix d'hypothèses prédéterminées admet comme principal avantage la simplification du modèle, et comme principal inconvénient le fait qu'une détérioration d'un des facteurs d'hypothèses peuvent influencer beaucoup les résultats et même détériorer toute l'étude effectuée.

Cette deuxième partie a présenté quelques outils de couverture dans le cadre d'une gestion Actif-Passif. On a commencé par un cash flow matching visant à construire un portefeuille afin d'égaliser chacun des flux ; Cette méthode est simple mais porte plusieurs désavantages principalement sur la validité des instruments choisis et sur le fait qu'elle peut être simplement invalidée par la modification d'une des hypothèses prises.

Par la suite, on a passé à la couverture par la duration, Une application portant sur l'immunisation en prenant compte des durations des maturités Clé ; La méthode des durations admet aussi l'avantage d'être simple mais admet beaucoup de désavantages principalement sur le choix d'instruments et la qualité de la précision apportée par l'optimisation numérique.

Ce mémoire sera complété par une troisième partie visant à trouver l'allocation stratégique d'actifs pour une gestion Actif-Passif saine. Dans cette 3ème partie, l'Actif sera projeté par des outils stochastiques.

## **Partie 3 : Allocation stratégique d'actifs**

## **Chapitre I : Modélisation des actifs dans un cadre stochastique**

Dans le cadre d'un modèle déterministe, la vision des résultats futurs s'effectue par la projection selon un scénario prédéfini en prenant des hypothèses qui peuvent être moyennes ou extrêmes. Mais, pour obtenir une vision plus complète du champ des possibilités, la vision déterministe doit être complétée par une approche stochastique qui, à travers la multiplication des scénarios aléatoires, permettra de capter des situations non anticipées en déterministe ; Cela est notamment vrai en raison de la complexité des interactions Actif-Passif. Un modèle déterministe ne fournit qu'une valeur moyenne, un modèle stochastique est capable de nous renseigner sur l'ensemble de la distribution de la quantité étudiée et permet notamment d'en étudier la variance et les quantiles.

Dans cette partie, le Passif considéré sera présenté par la série de flux probabilistes trouvée dans la partie 2 de ce mémoire ce qui veut dire les flux de Passif probables calculés ci-haut par une approche déterministe. Il aurait dû être certainement meilleur de projeter l'Actif et le Passif par des approches stochastiques comme le Passif lui-même est variable selon les variations de taux (Comportement du Client, etc.) mais afin de simplifier le modèle et se concentrer sur l'objectif spécifique de cette partie qui est la recherche de l'allocation stratégique optimale, on acceptera ceci et on continuera le modèle en utilisant les flux probables du Passif déduits de la partie 2.

### **I.1 Modélisation stochastique des taux d'intérêt**

Ce chapitre sera consacré à la modélisation des taux d'intérêt dans un cadre stochastique. Tout d'abord, nous allons passer sur quelques caractéristiques des taux d'intérêt puis aborder quelques modèles.

Le domaine de recherche de modélisation des taux d'intérêt est très vaste :

- Une première branche de ce domaine avait un objectif d'explorer les caractères prédictifs de la courbe des taux actuelle. Eugene Fama (1984) se sert des taux forward pour établir un modèle de projection des taux spot futurs. Il fait la découverte que les taux forward à très court terme (un mois) sont dans une certaine mesure capable de prédire les taux spot à horizon un mois.

- Une autre branche s'est intéressée aux évolutions historiques des taux d'intérêt, mettant en exergue 3 caractéristiques essentielles qui sont :
  - ✓ La volatilité des taux d'intérêt est plus importante à court terme qu'à long terme. Ahlgrim, D'Arcy et Gorrivett (1999) observent, sur la période de 1953 à 1999, que les taux d'intérêt à court terme sont sensiblement plus dispersés que leurs équivalents de long terme.
  - ✓ Les taux d'intérêt se caractérisent par un phénomène de retour à la moyenne. En effet, lorsque les taux d'intérêt sont élevés, ils ont généralement une tendance baissière, et vice versa. Bien que cette notion soit économiquement plausible, Chapman et Pearson (2001) font l'argument qu'étant donné l'historique de taux relativement court, la théorie du retour à la moyenne n'est pas nécessairement très robuste. Les seules situations où ce phénomène apparaît de manière claire sont les situations extrêmes.
  - ✓ Bien que les taux se caractérisent par des évolutions complexes, 99 % des variations observées dans la courbe des taux peuvent être expliqués par trois caractéristiques fondamentales. Litterman et Sheinkman (1988) montrent que 90 % des variations de la courbe des taux peuvent être expliquées par de simples translations – cette composante est appelée niveau de la courbe. Par le biais d'un facteur additionnel appelé pente de la courbe, on explique alors 95 % des variations. Finalement, en tenant compte de sa courbure, on atteint 99 % de variations rationalisées.

En 1995 Rogers, a défini les caractéristiques que doit avoir un modèle de taux pour être idéal (cf. annexe 3). Un modèle de taux idéal tel que défini par Rogers n'existe pas, mais il existe plusieurs modèles chacun ayant ses avantages et ses inconvénients.

Les modèles d'évaluation de la structure temporelle des taux d'intérêt peuvent être classés en deux catégories selon l'approche utilisée :

1. Les modèles d'équilibre faisant usage d'un seul facteur stochastique qui est les variations du taux court. Ces modèles reposent sur la diffusion du taux instantané et présentent le phénomène de retour à la moyenne. Citons, à titre d'exemple, le modèle de Vasicek (1977) qui comporte une variable d'état et celui de Cox, Ingersoll et Ross (1985) basé sur une description globale de l'économie.

2. Les modèles à AOA (à absence d'opportunité d'arbitrage), qui sont des modèles de déformation qui partent de la structure des taux d'intérêt observée et lui font subir des chocs. Le modèle de Ho et Lee (1986) ainsi que sa généralisation proposée par Heath, Jarrow et Morton (1987) sont sans aucun doute les plus connus dans cette catégorie.

Les modèles d'équilibre génèrent la courbe des taux en tant qu'output, tandis que les modèles AOA prennent la courbe des taux actuelle comme input.

Avant de présenter les différents modèles de taux en temps continu, il faut préalablement préciser quelles sont les principales hypothèses retenues pour leur détermination :

- Pas de coûts de transaction ;
- Titres parfaitement divisibles ;
- Les agents sont rationnels et disposent du même niveau d'information ;
- Les marchés sont efficients : ils ne permettent pas de possibilité d'arbitrage ;
- Les taux d'emprunts et de prêts sont identiques.

Notons que les modèles de taux étudiés modélisent de façon générale le taux court terme instantanée  $r_t$  à l'aide de l'équation différentielle stochastique :

$$dr(t) = \mu(r_t, t) dt + \sigma(r_t, t) dW_t$$

Avec :

- $dr$  : variation du taux  $r$  au cours de l'instant  $dt$
- $\mu(r_t, t)$  : coefficient de dérive, qui est la moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps
- $\sigma(r_t, t)$  : volatilité ou coefficient de diffusion qui est l'écart-type des changements instantanés du taux par unité de temps
- $dW_t$  : un processus de Wiener

Cette formule de base permettra de retrouver les principales dynamiques continues des taux tel que décrit par la suite. Nous allons décrire les modèles suivants :

- Le modèle de Vasicek (1977)
- Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985)
- Le modèle de Heath-Jarrow-Merton (1990)

### I.1.1 Modèle de Vasicek (1977)

C'est un modèle d'équilibre général, l'un des premiers modèles de construction de la courbe des taux appartenant à la famille des modèles classiques. C'est un modèle à un facteur car il décrit les mouvements des taux d'intérêt par une seule source de risque de marché.

Le modèle de Vasicek, décrit par l'équation suivante, considère que pour le taux court  $r_t$ , il s'agit d'un processus gaussien (se référant au processus d'Ortestein Uhlenbeck) pour expliquer l'effet de retour à la moyenne empiriquement observé sur les courbes de taux.

$dr(t) = a (b - r_t) dt + \sigma dW_t$  ; où  $a$ ,  $b$  et  $\sigma$  sont des constantes positives

avec :

- $r_t$  : taux d'intérêt instantané
- $a$  : vitesse de retour à la moyenne (c'est la force de rappel vers le taux d'équilibre)
- $b$  : moyenne long terme du taux autour de laquelle évolue le taux court instantané
- $\sigma$  : volatilité instantanée supposée constante autour de  $b$
- $W_t$  : un processus de Wiener standard

Cette modélisation permet de prendre en compte, l'effet de retour à la moyenne constatée sur les taux d'intérêt et explicité précédemment.

Nous constatons que lorsque  $r_t$  est éloigné de  $b$ , le facteur  $a (b - r_t)$  est positif si  $r_t < b$ . Dans ce cas, le taux court a tendance à augmenter, se rapprochant ainsi du taux moyen d'autant plus intensément qu'il s'est écarté et que le paramètre  $a$  est grand.

A l'inverse si  $r_t > b$ , l'espérance de variation instantanée est négative et diminue dans le temps pour se rapprocher de  $b$ .

Cette équation différentielle stochastique dispose d'une solution explicite, il existe donc une discrétisation exacte de ce processus :

$$r_{t+dt} = r_t \exp(-a dt) + b (1 - \exp(-a dt)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2adt)}{2a}} \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \sim N(0,1)$$

Le modèle de Vasicek est simple, compréhensible et modélisable simplement dans la pratique de point de vue interprétation des paramètres ou son implémentation d'un point de vue informatique. Aussi le modèle fournit des expressions analytiques pour le pricing des produits de taux standards.

En outre, cette modélisation du taux suit un processus gaussien, donc est négatif avec une probabilité non nulle. Ce qui incompatible avec l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. En effet, un agent économique rationnel, préférera toujours garder son argent plutôt que de le prêter à un taux négatif.

### I.1.2 Modèle de Cox-Ingersoll-Ross (1985)

On passe à un autre modèle qui est le modèle de COX, INGERSOLL, ROSS possédant toujours la propriété de retour à la moyenne des taux mais n'a pas l'inconvénient de modéliser des taux négatifs. Il a ainsi cet avantage par rapport au modèle de VASICEK.

Dans ce modèle, le taux  $r$  s'écrit par l'équation suivante :

$$dr_t = a(b-r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$$

$\sigma\sqrt{r}$  l'écart type instantané du taux court. L'introduction d'un processus en racine carrée interdit à un taux initialement positif de devenir négatif. En effet, le facteur  $\sigma\sqrt{r}$  appliqué au processus de Wiener assure que les taux ne seront pas négatifs si la relation  $2ab > \sigma^2$  est vérifiée.

Il n'existe pas de solution explicite pour l'équation différentielle stochastique, alors la discrétisation se fait par approximation. Plusieurs méthodes sont envisageables, comme les schémas d'EULER ou de MILSTEIN qui sont des développements de TAYLOR à des ordres plus ou moins importants de l'EDS.

Discrétisation de premier ordre :  $r_{t+dt} = r_t + a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dt \varepsilon$

Discrétisation de second ordre :  $r_{t+dt} = r_t + a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dt \varepsilon + \frac{\sigma^2}{4}dt (\varepsilon^2-1)$

Où  $\varepsilon \sim N(0,1)$

Ce modèle repose sur le principe d'équilibre du marché entre l'offre et la demande. Il bénéficie du même effet de retour à la moyenne que dans le modèle de Vasicek et reste toujours positif. Lorsque  $r(t)$  devient nul, la dynamique du taux court est ici décrite par l'équation déterministe positive. Ce modèle de taux n'a plus le caractère gaussien.

En effet, on dit que Zéro est une « barrière réfléchissante » pour le taux d'intérêt ; Ce qui veut dire que le taux court ne peut jamais être négatif, et d'autre part qu'il redevient immédiatement positif juste après avoir atteint la valeur zéro.

En outre, les modèles de Vasicek et CIR qui sont des modèles d'équilibre, possèdent les inconvénients suivants :

- Les paramètres du processus de la diffusion sont constants. Tout se passe comme si un seul facteur (le taux instantané) était à l'origine des déformations de la courbe des taux ; ce qui suppose que les taux soient parfaitement corrélés,
- La courbe des taux zéro-coupon au comptant du modèle est différente de la courbe des taux zéro-coupon observable sur le marché. On ne peut obtenir dans le modèle des courbes inversées sur le court puis croissantes, ni des formes à un creux et un bosse.

### **I.1.3 Modèle de HEATH, JARROW, MORTON (HJM) – 1990**

La méthodologie HJM permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt du point de vue de la théorie d'arbitrage. L'approche HJM prend en considération les différentes limites énoncées pour les structures de taux énoncées précédemment. Il faut bien comprendre que HJM ne propose pas une structure dynamique spécifique, mais plutôt un cadre de travail.

C'est une généralisation du modèle de HO et LEE (1986). Il englobe toute une classe de modèles de taux forward. Le modèle HJM ne repose alors plus sur la diffusion du taux instantané  $r_t$  mais sur la diffusion de l'ensemble des taux instantané forward  $f(t, T)$ . C'est un modèle plus général puisqu'il y a équivalence entre la connaissance des taux instantané forward  $f(t, \cdot)$  et celle des prix zéro-coupon  $P(t, \cdot)$ .

Ce modèle repose aussi sur la diffusion de toute la gamme des prix zéro-coupons. De plus il est à remarquer que  $f(t,t) = r_t$ . C'est donc toute la courbe des taux qui est représentée, et non plus le seul taux instantané.

Parmi les modèles que représente HJM, nous nous intéressons à celui de **HO et LEE (1986)** et celui de **HULL et WHITE (1996)**.

L'équation générale d'un modèle HJM s'écrit comme suit :

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T) dW_t$$

Cette classe de modèles fait référence à une structure initiale de taux forward, et utilise des paramètres dépendants du temps et de la maturité. Cela permet de modéliser la structure à terme de taux d'intérêt au point de vue de la théorie d'arbitrage.

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage impose alors une condition sur la prime de risque du marché,  $\lambda(t,T)$  est indépendante de la maturité  $T$  :  $\lambda(t,T) = \lambda(t)$ ,

Elle impose également la condition suivante, reliant le drift au terme de diffusion du processus :

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T) \left( \int_t^T \sigma(t,s)ds - \lambda(t) \right)$$

En se plaçant dans l'univers risque neutre nous retrouvons la même dynamique du taux instantané forward.

$$df(t,T) = \mu(t,T)dt + \sigma(t,T) dW_t$$

Où  $W_t$  est un processus de WIENER dans l'univers risque neutre,

La condition reliant le drift et le terme de diffusion devient :

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s)ds$$

Cette relation sera utile pour définir les modèles :

### **Modèle de HO et LEE :**

L'hypothèse de base est de considérer le coefficient de diffusion constant :

$$\sigma(t,T) = \sigma$$

Par la relation  $\mu(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s)ds$ , vérifiant l'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'univers risque neutre, on obtient :

$$\mu(t,T) = \frac{\sigma^2}{2} (T-t)$$

L'EDS du modèle de HO et LEE s'écrit donc dans l'univers risque neutre :

$$df(t-T) = \frac{\sigma^2}{2} (T-t) dt + \sigma d\tilde{w}_t$$

### **Modèle de HULL et WHITE ou modèle de VASICEK généralisé :**

L'hypothèse de base est de considérer le coefficient de diffusion comme exponentielle de la maturité :

$$\sigma(t, T) = \sigma \exp(-k(T-t))$$

Par la relation :  $\mu(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds$  vérifiant l'absence d'opportunité d'arbitrage dans l'univers risque neutre, on obtient :

$$\mu(t, T) = \frac{\sigma^2}{k} (\exp(-k(T-t)) - \exp(-2k(T-t)))$$

L'EDS du modèle de HULL et WHITE s'écrit donc dans l'univers risque neutre :

$$df(t, T) = \sigma^2/k \cdot (\exp(-k(T-t)) - \exp(-2k(T-t)))dt + \sigma \exp(-k(T-t))d\tilde{W}_t$$

Différemment des deux modèles de Vasicek et de Cox-Ingersoll-Ross présentés ci-dessus, les modèles de HJM sont compatibles avec la courbe des taux du marché. En effet toutes les formes de courbes sont atteignables. Le modèle de HULL et WHITE a bien une volatilité décroissante avec la maturité.

Les deux modèles présentés gardent un caractère gaussien, les taux ont donc une probabilité non nulle d'être négatifs. Mais il existe d'autres modèles appartenant à la famille HJM qui n'ont pas cet inconvénient, comme par exemple le modèle de CIR augmenté :

$$dr_t = (\theta(t) - \alpha(t) r_t) + \sigma(t)\sqrt{r_t}dW_t$$

Le codage informatique et le paramétrage sont compliqués du fait des paramètres temporels. De plus ces modèles dépendent de toute une courbe de valeur à l'origine : la courbe des taux instantanés forward difficilement observable sur le marché, alors que les modèles classiques de VASICEK et CIR nécessitent seulement de connaître le taux instantané.

Les modèles de HO et LEE et de HULL et WHITE sont les modèles les plus utilisés dans la classe d'HJM car ils sont les plus simples d'implémentation. Il existe d'autres modèles, dans cette classe, qui sont plus proches du modèle de taux idéal. Certains sont des modèles multifactoriels afin de mieux rendre compte des problématiques de corrélation entre les taux selon différentes maturités.

#### I.1.4 Choix du modèle

*Equilibre ou AOA* : Le choix d'une approche par équilibre ou d'une approche à AOA dépend de l'application souhaitée du modèle. Les 3 critères mentionnés ci-dessous sont utiles pour faire ce choix :

1. Court terme ou long terme : Fitton et McNatt (1997) établissent que les modèles à AOA sont les plus utiles à des fins de pricing à court terme, lorsque les données de marché nécessaires à la calibration sont aisément accessibles. Cependant, ces modèles sont plus difficiles à maîtriser sur le long terme.

En effet, les modèles AOA utilisent la courbe des taux forward afin de projeter les taux d'intérêt futurs :

- Les taux forward étant fonction de la pente de la courbe des taux, sont susceptibles alors d'exploser lorsque celle-ci est raide.
- A long terme, les taux forward correspondant à certains segments de la courbe peuvent ressortir négatifs. Ainsi, dans le cas de projections à long terme, les trajectoires simulées sont susceptibles de présenter des comportements extrêmes, dans la mesure où d'infimes fluctuations de la courbe des taux se voient démultipliées à travers le calcul des taux forward.

C'est pourquoi, pour les analyses portant sur le long terme, les modèles d'équilibre sont à privilégier.

2. Cohérence des résultats dans le temps : Pour Wilmott (1998), les modèles AOA accusent une certaine incohérence dans le temps. Les modèles AOA font l'hypothèse que le taux sans risque est très lié à la courbe des taux forward. Si ce modèle était exact, il en découlerait que les taux forward sont d'excellents prédicteurs des taux spot futurs. Mais, il est clair que la véritable trajectoire des taux d'intérêt sera différente de la courbe des taux forward modélisée, ce qui signifie que les projections futures font des hypothèses différentes concernant les taux spot futurs et leurs volatilités.

Les modèles d'équilibre fournissent des résultats plus cohérents dans le temps que les modèles AOA.

3. Incomplétude éventuelle des données de marché : Les modèles AOA se basent en général sur la courbe des taux déduite des obligations sans risque pour la détermination des inputs. Cependant, il existe certaines difficultés dans l'utilisation des données de marché relatives à ces obligations :

- La liquidité de ces obligations à long terme est discutable.
- La courbe des taux est initialement déterminée par les taux forward, mais pour des maturités plus longues, les problèmes de liquidité prennent le dessus. Il en résulte une courbe des taux pouvant adopter des formes étranges, et pouvant montrer des ondulations causées par les problèmes d'illiquidité sur certaines obligations.

Les modèles AOA particulièrement délicats à des inefficiences de ce type. Les modèles d'équilibre, quant à eux, ne souffrent pas de ces problèmes de données de marché incomplètes.

La décision quant au choix du modèle de taux à implémenter pour l'application est tombée sur le modèle de CIR. En effet, étant dans un exercice de pilotage stratégique nécessitant des projections de long terme, les modèles d'équilibre semblent s'imposer. On a préféré d'utiliser le modèle de CIR n'ayant pas l'inconvénient de négativité des taux trouvé dans le modèle de Vasicek.

## **I.2 Application**

### **I.2.1 Taux court terme**

Par la suite de cette application, on utilisera le modèle de CIR pour modéliser le taux d'intérêt instantané. La calibration du modèle de taux de CIR s'effectuera, tel que décrit ci-dessous, en utilisant la courbe des taux zéro-coupons construite dans la partie 2 de ce mémoire. Notant que cette courbe était utilisée pour calculer les valeurs actuelles des passifs.

Le processus de taux instantané de CIR est supposé suivre l'équation différentielle stochastique suivante:  $dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma\sqrt{r_t} dW_t$

a, b et  $\sigma$  des constantes positives et  $2ab > \sigma^2$

Le paramètre  $b$  s'interprète comme étant la valeur du taux spot asymptotique, ce qui veut dire qu'à très long terme,  $a$  est un paramètre de rappel, plus  $a$  est grand et plus la variance asymptotique se resserre et donc plus vite la convergence vers le taux spot  $b$  s'effectuera.

$\sigma$  est appelé le paramètre de volatilité du modèle. Plus ce coefficient est grand et plus on accorde de l'importance à l'aléa dans le modèle et donc, plus les fluctuations aléatoires seront importantes.

La discrétisation approximative du modèle est :

$$r_{t+\delta} = r_t + a(b-r_t)\delta + \sigma\sqrt{r_t}\delta \varepsilon$$

$$\varepsilon \sim N(0,1)$$

$\delta$  est le pas de temps (1/12 dans notre cas)

La formule de discrétisation nous permettra d'aboutir à :

$$\frac{r_{t+\delta} - r_t}{\sqrt{r_t}} = \frac{ab\delta}{\sqrt{r_t}} - a\sqrt{r_t}\delta + \sigma\sqrt{\delta}\varepsilon$$

On obtient alors une formule de régression linéaire à estimer sur des données historiques. Le problème de ce type de calibration est de bien choisir le pas de temps et la longueur des données historiques.

Pour estimer les paramètres du modèle, on va utiliser une approche de type Moindres Carrés Ordinaires (MCO). Les paramètres sont alors déterminés en minimisant la fonction suivante :

$$(\hat{a}, \hat{b}) = \operatorname{argmin}_{a,b} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{r_{t_{i+1}} - r_{t_i}}{\sqrt{r_{t_i}}} - \frac{ab\delta}{\sqrt{r_{t_i}}} + a\sqrt{r_{t_i}}\delta \right)^2$$

L'estimation du paramètre  $\hat{\sigma}$  correspond à l'écart-type des résidus.

Pour  $\delta = 1/12$  (le pas de discrétisation retenu), les paramètres du modèle de CIR sont présentés dans le tableau suivant :

|          |        |
|----------|--------|
| a        | 0,1242 |
| b        | 0,0645 |
| $\sigma$ | 0,0092 |

## Calcul des taux longs et Pricing des Zéro-coupons

L'équation différentielle du prix d'un zéro-coupon est obtenue de manière classique en utilisant en premier lieu le lemme d'Itô, puis le théorème de Girsanov.

Soit  $P(t,T)$  le prix du Zéro-coupon qu'on souhaite évaluer. L'application du lemme d'Itô fournit l'équation vérifiée par le prix du zéro-coupon :

$$dP = [P_t + \mu(r,t) P_r + \frac{1}{2} \sigma^2(r,t) P_{rr}] dt + \sigma(r,t) P_r dw$$

Où  $P_t$ ,  $P_r$  et  $P_{rr}$  désignent respectivement la dérivée partielle première par rapport à  $t$ , la dérivée partielle première par rapport à  $r$  et la dérivée du second ordre par rapport à  $r$ .

En appliquant le théorème de Girsanov avec  $d\tilde{w} = dw_T + \lambda(r,t) dt$  ( $\lambda$  correspond au prix du marché du risque), la formule précédente devient :

$$dP = [P_t + \mu(r,t) P_r + \frac{1}{2} \sigma^2(r,t) P_{rr} - \lambda(r,t) \sigma(r,t) P_r] dt + \sigma(r,t) P_r d\tilde{w}$$

Or dans un univers risque neutre  $dP = rPdt$  doit être vérifiée. Cette remarque nous conduit donc à poser :

$$P_t + [\mu(r,t) - \lambda(r,t) \sigma(r,t)] P_r + \frac{1}{2} \sigma^2(r,t) P_{rr} = 0$$

Cette relation est primordiale dans la mesure où elle permet (lorsqu'elle est complétée par une condition aux limites) la détermination de la valeur du taux  $r$  modélisé par différents dynamiques.

- a. Modèle de Vasicek : Comme mentionné ci-haut, le modèle de Vasicek est un modèle de modélisation du taux instantané à court terme utilisant le processus autorégressif (dit d'Orstein-Uhlenbeck) défini comme suit :  $dr(t) = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t$   
Il convient d'indiquer ici que le taux du marché  $\lambda$  est supposé constant.

Une méthode de résolution assez classique propose d'affecter à  $P(t,T)$  la forme suivante :

$$P(t,T) = \exp(A(t,T) + B(t,T) r(t))$$

Cette structure affine permet alors d'obtenir la valeur zéro-coupon :

$$P(t,T) = \exp\left\{ \frac{1}{a} (1 - e^{-a\tau}) [R(\infty) - r(t)] - \tau R(\infty) - \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \right\}$$

Avec les notations suivantes :

$$\tau = T-t, \tau > 0$$

$$R(\infty) = b + \frac{\lambda\sigma}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

$\lambda$  indépendant de  $r$ .

La relation  $r(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t,T)$  conduit finalement à la valeur de  $r$  :

$$P(t,T) = \exp \left\{ R(\infty) + [r(t) - R(\infty)] \frac{1}{a\tau} (1 - e^{-a\tau}) + \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a\tau})^2 \right\}$$

- b. Modèle de Cox-Ingersoll-Ross : En reprenant les notations de la partie précédente et se rappelant le processus de taux de CIR s'écrivant :  $dr(t) = a(b - r_t) dt + \sigma \sqrt{r} dW_t$

La valeur du Zéro-coupon relativement à ce modèle est déterminée par la formule suivante :

$$P(r,t,T) = A(t,T) \exp(-B(t,T) r(t))$$

Avec

$$t < T$$

$$A(t,T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(\gamma+a+\lambda)\frac{T-t}{2}}}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{\frac{2ab}{\sigma^2}}$$

$$B(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma+a+\lambda)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{(a + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

$$\lambda(r,t) = \frac{\lambda}{\sigma} \sqrt{r}$$

La relation  $R(r,t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t,T)$  permet d'aboutir à la structure par terme de taux :

$$R(r,t,T) = \frac{B(t,T)r(t) - \ln A(t,T)}{T-t}$$

Par ces formules, nous modélisons les taux et obligations zéro-coupons 4 ans, 8 ans et 12 ans, avec une valeur de  $\lambda$  retenue égale à 0,2%

### I.3 Modélisation des actions par le modèle de Black & Scholes

Le modèle de référence pour la modélisation du cours d'une action reste le modèle de BLACK et SCHOLES (1973). Il a l'avantage d'être un modèle simple, facile à calibrer et à estimer en considérant que la trajectoire des rendements des prix des actifs financiers décrit un mouvement brownien.

Ce modèle repose sur la résolution d'une équation différentielle stochastique (EDS), en supposant que le cours d'une action suit un mouvement brownien géométrique (ou processus de WIENER généralisé). L'EDS a la forme suivante :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW(t))$$

$S_t$  étant l'indice action en  $t$ ,  $\mu$  l'indicateur de rentabilité moyenne et  $\sigma$  la volatilité de la composante stochastique ( $\mu$  et  $\sigma$  constantes).

Pour le calibrage de  $\mu$  et  $\sigma$ , et en collaboration avec le département Financier de la compagnie, nous avons utilisé l'historique du cours de l'indice S&P 500, nous retenons :  $\mu = 7,12\%$  et  $\sigma = 20\%$

### I.4 Corrélation des browniens

Afin de trouver les corrélations entre les différents browniens générés, la première étape sera de simuler  $n$  gaussiennes  $Z(i)$  indépendantes  $N(0,1) \rightarrow Z=(Z(1), \dots, Z(d))$

Pour la loi normale, nous avons utilisé la méthode de Box-Muller : Si deux nombres aléatoires  $x_1$  et  $x_2$  suivent une loi uniforme sur  $]0,1[$ , les nombres  $y_1$  et  $y_2$  définis par :

$$y_1 = \sqrt{-2\ln x_1} \cos(2\pi x_2) \text{ et } y_2 = \sqrt{-2\ln x_1} \sin(2\pi x_2) \text{ suivent la loi normale centrée réduite,}$$

Alors :  $z_1 = m + s y_1$  et  $z_2 = m + s y_2$  suivent la loi  $N(m,s)$

On commence à générer k séries de tirages indépendants dans une loi normale  $N(0,1)$ .

Le passage de mouvements browniens indépendants aux mouvements browniens corrélés s'effectue par la matrice de Choleski.

$$\begin{matrix} X^1_1, \dots, X^1_n \\ X^2_1, \dots, X^2_n \\ \dots \\ X^k_1, \dots, X^k_n \end{matrix}$$

Soient  $T_1, T_2, \dots, T_n$  les dates de simulation exprimées en fractions d'année.

On génère ensuite les  $Z^j_i$  ;  $i$  appartenant à l'intervalle  $[1, n]$ ,  $j$  appartenant à l'intervalle  $[1, k]$

$$\begin{matrix} Z^1_1 = W^1_{T1} = X^1_1 \sqrt{T1}, Z^1_2 = W^1_{T2} - W^1_{T1} = X^1_2 \sqrt{T2 - T1}, \dots, Z^1_n = W^1_{Tn} - W^1_{Tn-1} = X^1_n \sqrt{Tn - Tn-1} \\ Z^2_1 = W^2_{T1} = X^2_1 \sqrt{T1}, Z^2_2 = W^2_{T2} - W^2_{T1} = X^2_2 \sqrt{T2 - T1}, \dots, Z^2_n = W^2_{Tn} - W^2_{Tn-1} = X^2_n \sqrt{Tn - Tn-1} \\ \dots \\ Z^k_1 = W^k_{T1} = X^k_1 \sqrt{T1}, Z^k_2 = W^k_{T2} - W^k_{T1} = X^k_2 \sqrt{T2 - T1}, \dots, Z^k_n = W^k_{Tn} - W^k_{Tn-1} = X^k_n \sqrt{Tn - Tn-1} \end{matrix}$$

Soit  $\Sigma$  la matrice de corrélation des k mouvements browniens et C la matrice de Cholesky triangulaire inférieure de  $\Sigma$  (C vérifie  $C^t C = \Sigma$ ) telle que  $\Sigma$  symétrique définie positive.

$$\text{Soit } V_i \text{ le vecteur de dimension } k \text{ défini par : } V_i = \begin{pmatrix} Z^1_i \\ Z^2_i \\ \vdots \\ Z^k_i \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } V'_i \text{ le vecteur défini par : } V'_i = C * V_i$$

On note :  $Z^{1}_i, Z^{2}_i, \dots, Z^{k}_i$  les coefficients du vecteur  $V'_i$ ,

$$\text{On génère les } W^{j}_{T1} = Z^{j}_1, W^{j}_{T2} = W^{j}_{T1} + Z^{j}_2, \dots, W^{j}_{Tn} = W^{j}_{Tn-1} + Z^{j}_n$$

Les k mouvements browniens  $W^{1}_T, \dots, W^{k}_T$  ont une matrice de corrélation  $\Sigma$ . Pour obtenir la volatilité voulue à chaque date, il suffit de multiplier chacun des mouvements browniens par la volatilité requise.

### **Performance et corrélation des différentes classes d'actifs**

Les différentes étapes de calcul mentionnées ci-dessous nous emmènent au tableau de résultats ci-dessous, qui sera utilisé dans le dernier chapitre de ce mémoire :

|                        | <b>Rendement</b> | <b>Volatilité</b> |
|------------------------|------------------|-------------------|
| <b>Monétaire</b>       | 3,5%             | 1,2%              |
| <b>Oblig. (4 ans)</b>  | 4,4%             | 3,5%              |
| <b>Oblig. (8 ans)</b>  | 4,55%            | 4,5%              |
| <b>Oblig. (12 ans)</b> | 4,5%             | 4,8%              |
| <b>Actions</b>         | 7%               | 20%               |

La corrélation entre les différents actifs utilisés est présentée dans le tableau ci-dessous :

#### **Corrélation entre les actifs:**

|                             | <b>Monétaire</b> | <b>Obligations (4 ans)</b> | <b>Obligations (8 ans)</b> | <b>Obligations (12 ans)</b> | <b>Actions</b> |
|-----------------------------|------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------|
| <b>Monétaire</b>            | 100%             | 40%                        | 30%                        | 30%                         | 20%            |
| <b>Obligations (4 ans)</b>  | 40%              | 100%                       | 90%                        | 88%                         | 25%            |
| <b>Obligations (8 ans)</b>  | 30%              | 90%                        | 100%                       | 95%                         | 25%            |
| <b>Obligations (12 ans)</b> | 30%              | 88%                        | 95%                        | 100%                        | 25%            |
| <b>Actions</b>              | 20%              | 25%                        | 25%                        | 25%                         | 100%           |

## **Chapitre II : Allocation stratégique d'actifs**

La gestion actif-passif d'un portefeuille retraite peut être basée sur l'optimisation de la valeur de la réserve, compte tenu des contraintes liées au passif qu'il doit respecter. C'est dans ce cadre que le choix d'une « bonne » allocation stratégique joue un rôle essentiel dans le pilotage actif-passif, étant donné que les réserves contribuent à part entière à la solidité du régime.

La détermination de l'allocation d'actif est un thème central dans les problématiques d'assurance vie, particulièrement développé dans le contexte des contrats d'épargne et des régimes de retraite supplémentaire. Les premiers modèles d'allocation d'actifs à intégrer le risque lié aux placements ont été inspirés de techniques financières, en particulier de critères de type Markowitz [1952]. Mais ces modèles n'intègrent en général pas les contraintes propres à un régime de rente. Certains auteurs tels que Leibowitz et Kogelman [1991] et Campbell et al. [2001] ont proposé des adaptations de ces modèles pour intégrer ces contraintes spécifiques et, en particulier, la prise en compte de la probabilité de réaliser un rendement minimum (shortfall-risk). Toutefois, BOYLE [2004] montre les limites de l'utilisation de telles approches lorsque l'on intègre l'estimation des paramètres des actifs, qui peut conduire à une allocation sous-optimale.

Cette dernière partie du mémoire sera consacré à des applications sur des modèles d'allocation d'actifs. Le but de l'allocation d'actifs cherchée est de faire le lien entre les contraintes issues du Passif d'une part et la gestion des investissements d'autre part. L'étude d'allocation d'actif sera réalisée à partir de flux déterministes de Passif calculés dans la partie 1 de ce mémoire. Une étude portant sur la détermination d'une allocation d'actifs optimale sera effectuée en étudiant et en appliquant plusieurs modèles. Nous utiliserons les résultats des modélisations d'actifs effectuées dans le chapitre 1 de cette partie.

## II.1 Introduction

L'allocation des actifs financiers correspond à la répartition du capital financier sur différentes classes d'actifs. Les classes d'actifs intégrés dans notre cas sont :

- Les actions
- Les obligations
- Le monétaire

Les actions apportent un rendement élevé à long terme et une forme de protection contre l'inflation. En contrepartie, elles sont affectées d'une forte volatilité et présentent donc des risques comptables importants.

Les placements monétaires offrent une protection du capital ainsi qu'une sorte de protection contre l'inflation. Ils sont en revanche tout en bas de l'échelle des rendements.

Les placements obligataires longs assurent généralement un rendement supérieur assorti d'avantages comptables importants (non comptabilisation des moins-values latentes). Cependant, plus les placements sont longs et plus ils sont exposés au risque d'inflation,

Dans le reste de cette partie, on cherche l'allocation optimale d'actifs ayant pour but de faire le lien entre les contraintes issues du Passif d'une part et la gestion des investissements d'autre part.

Le portefeuille d'actifs cherché sert à couvrir les engagements du passif d'une part et à fournir un surcroît de performance afin de revaloriser d'autre part.

L'étude d'allocation stratégique d'actif est réalisée à partir de flux déterministes du Passif. Ces flux proviennent de l'étude actuarielle réalisée dans la deuxième partie de ce mémoire.

En premier lieu, différenciations entre l'allocation stratégique et l'allocation tactique. L'allocation stratégique porte sur un horizon long de plusieurs années, elle cherche à désigner la répartition en moyenne du portefeuille selon les besoins d'une institution en égard notamment à ses engagements au passif en tenant compte des liquidités nécessaires sur la période. L'allocation tactique s'effectue sur un horizon court, un mois ou un trimestre, elle cherche à modifier le portefeuille d'actifs en fonction des opportunités de marché.

On commencera par la présentation de quelques modèles de choix de portefeuille.

## **II.2 Modèles de choix de portefeuille**

### **II.2.1 Modèle de Markowitz**

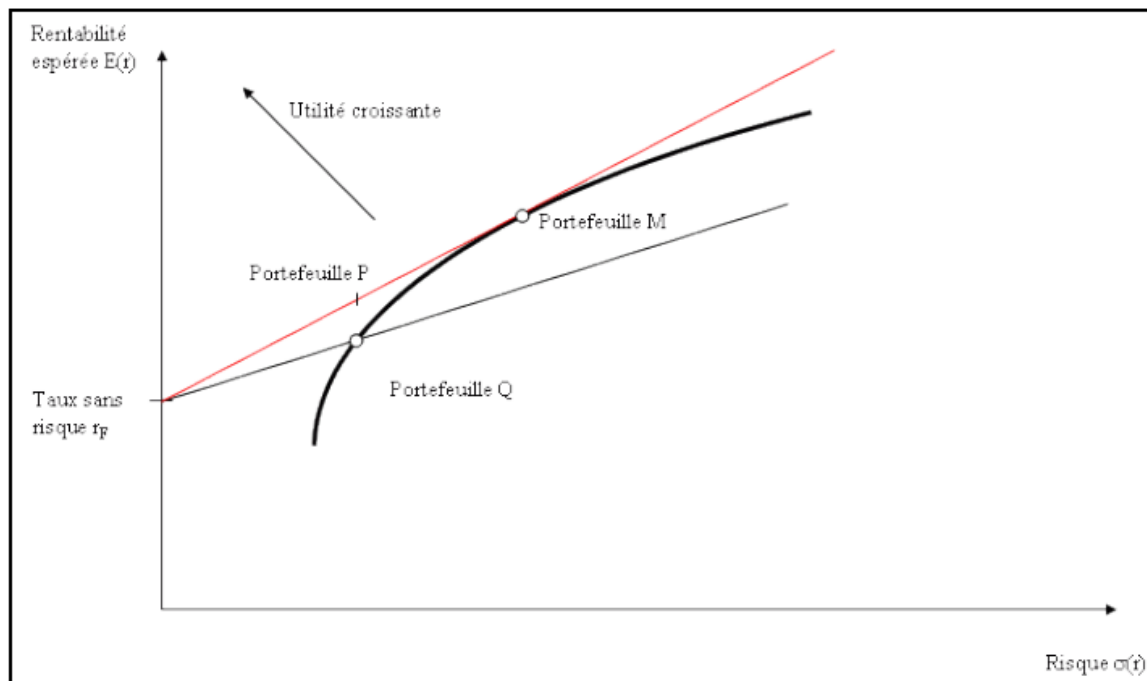
C'est un modèle de structure à long terme qui a conduit à de nombreux développements sur la théorie de la gestion de portefeuille, utilisé souvent dans le cadre d'une gestion Actif-Passif mais qui admet beaucoup de limites. C'est un modèle qui utilise les concepts de moyenne pour la rentabilité espérée et de variance pour l'incertitude associée à cette rentabilité.

Markowitz (en 1952) était le premier à distinguer le risque du rendement et à pouvoir leur donner une mesure : l'espérance de rentabilité pour le rendement et sa variance pour le risque encouru. Selon cette approche "moyenne-variance", un gestionnaire constituera son portefeuille en fonction de ses prévisions sur les espérances, les variances et les covariances des titres du marché. Une fois ces paramètres estimés, la résolution du problème d'optimisation "minimiser la variance du portefeuille pour une espérance de rentabilité donnée" fournit la composition du portefeuille "efficient" et décide donc de la politique de diversification du gestionnaire.

L'objectif de ce modèle est de résoudre le problème suivant : pour une rentabilité espérée fixée par l'investisseur, trouver les proportions à investir dans chaque titre, conduisant à un portefeuille de risque minimum et sous un ensemble de contraintes. L'ensemble des portefeuilles vérifiant le programme d'optimisation de Markowitz pour différents niveaux de rentabilité espérée, décrit une hyperbole dans le repère (risque mesuré par l'écart type de la rentabilité / rentabilité espérée).

Si l'on suppose le marché constitué par  $n$  actifs risqués, on montre, que la frontière efficiente est une parabole. Si l'on suppose en plus qu'il existe un actif sans risque alors la frontière efficiente devient une demi-droite. Ces deux cas seront décrits par la suite.

### Illustration graphique de frontière efficiente :



Source : [www.vernimmen.net](http://www.vernimmen.net)

Sur ce graphique, nous voyons trois portefeuilles théoriques, les portefeuilles Q et M sont optimaux au sens de Markowitz ; en effet pour un risque donné, le rendement ne peut dépasser celui de la courbe en gris qui correspond à la frontière efficiente. Tous les portefeuilles en dessous de la frontière efficiente sont dits « sous-optimaux » et il n'intéresse pas un investisseur rationnel. Notons que lorsque le risque est très faible, la frontière efficiente correspond à un rendement plus faible que le taux sans risque ; il n'y a donc intérêt de s'y engager, de même lorsque le risque est trop élevé le rendement devient inférieur au portefeuille réalisable et d'utilité maximal M. La frontière efficiente rationnelle est donc comprise entre le portefeuille Q et le portefeuille M.

Le modèle de Markowitz est donc un problème d'optimisation sous contrainte. Il est choisi ici de le formuler sous forme d'une maximisation du rendement sous un risque choisi.

## Markowitz – Frontiere efficiente sans actif non risqué

La problématique à résoudre est comme suit : pour une rentabilité espérée fixée, trouver les parts à investir dans chaque titre, conduisant à un portefeuille de risque minimum et sous un ensemble de contraintes. Ces contraintes pouvant être des contraintes sur la rentabilité du portefeuille ou par exemple sur sa composition.

L'ensemble des portefeuilles décrit, pour différents niveaux de rentabilité espérée, une hyperbole dans le repère (risque mesuré par l'écart-type de la rentabilité/rentabilité espérée) dont la partie supérieure représente la frontière efficiente. Chaque portefeuille étant composé de  $n$  actifs risqués de rentabilités  $R_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $R_i$  étant une variable aléatoire telle que  $E(R_i) = \mu_i$  et  $\sigma^2_i = \text{Var}(R_i)$ . Le but est de trouver le portefeuille  $x$  qui minimise la variance pour une rentabilité espérée  $\mu$ .

Nous considérons un portefeuille composé de  $n$  classes d'actifs. On doit trouver le portefeuille  $x$  qui minimise la variance pour une rentabilité espérée donnée :

$$\begin{aligned} &\text{Min } x'Vx \\ &\quad x \\ &\text{avec } \mu'x = x'\mu = \bar{R} \\ &e'x = x'e = 1 \end{aligned}$$

$x$  étant le vecteur représentant le poids des actifs,

$e' = (1, 1, \dots, 1)$  le vecteur unité transposé

Pour  $n$  actifs risqués, l'équation analytique de la frontière efficiente est la suivante :

$$\sigma^2 = \frac{c\bar{R}^2 - 2b\bar{R} + a}{ac - b^2}$$

$$\begin{aligned} a &= \mu'V^{-1}\mu, \quad b = \mu'V^{-1}e, \quad c = e'Ve \text{ où } e \text{ est le vecteur unité} \\ ac - b^2 &> 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées du sommet de l'hyperbole qui caractérise le portefeuille à variance minimale sont :  $(\frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{b}{c})$

Ainsi le portefeuille de rentabilité  $\bar{R}$  efficient admet un vecteur de poids des actifs comme suit :

$X\bar{R} = X_{\min} + \frac{\bar{R} - \frac{b}{c}}{ac - b^2} V^{-1} (c\mu - be)$  avec  $X_{\min}$  le vecteur de poids des actifs composant le vecteur à variance minimale ( $X_{\min}$  est le sommet de l'hyperbole) tel que  $X_{\min} = \frac{1}{c} V^{-1}e$ ,

### Markowitz – Frontière Efficiente avec actif sans risque

$\bar{R}$  aura la fonction analytique suivante :  $\bar{R} = r_f + (\pi' V^{-1} \pi)^{1/2} \sigma$

Avec :  $r_f$  le taux de rendement sans risque

$\Pi = \mu - r_f e$  étant la prime de risque

$\sigma > 0$

Le portefeuille efficient de rentabilité  $\bar{R}$  :

$X_{\text{actif sans risque}} = \frac{\pi' V^{-1} (\mu - \bar{R} e)}{\pi' V^{-1} \pi}$  est la proportion d'investissement dans un actif sans risque

Et  $X = \frac{\bar{R} - r_f}{\pi' V^{-1} \pi} V^{-1} \pi$

### II.2.2 Markowitz – Maximisation d'une fonction d'utilité

Il s'agit d'un modèle de Markowitz consistant à déterminer le portefeuille qui maximise l'utilité espérée de la richesse finale. Si  $W$  la richesse initiale, pour le cas d'un portefeuille composé de  $n$  actifs risqués et un actif sans risque. La richesse finale est alors :

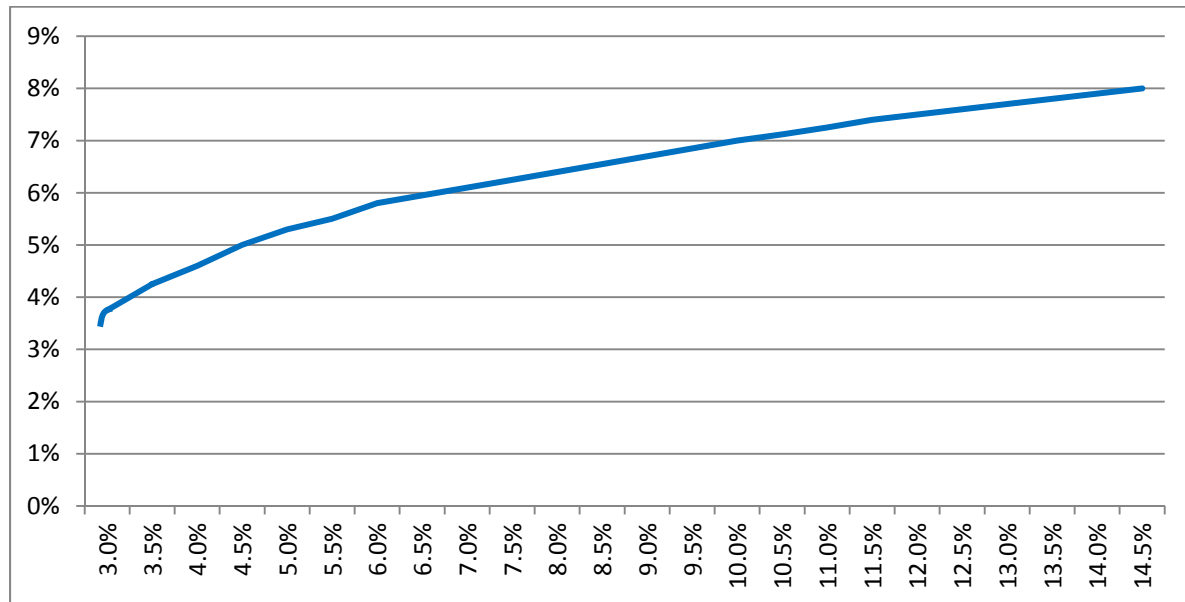
$$W' = W (1 + r'x + x_{n+1} r_f)$$

Ainsi le portefeuille cherché est le résultat du programme d'optimisation sous contraintes suivant :  $\text{Max}_x E\{u[W(1 + r'x + x_{n+1} r_f)]\}$  où  $u$  est la fonction d'utilité.

### Application : modèle de Markowitz

Il s'agit d'une optimisation moyenne-variance, On cherche à trouver l'allocation optimale qui minimise le risque pour un niveau de rentabilité de 5,5%,

Ci-dessous la frontière efficiente dressée :



Pour une rentabilité de 5,5%, correspond un niveau de risque de 5,72%, pour un portefeuille optimal composé comme suit :

|                    |     |
|--------------------|-----|
| Monétaire          | 0%  |
| Obligations 4 ans  | 12% |
| Obligations 8 ans  | 45% |
| Obligations 12 ans | 13% |
| Actions            | 30% |

### Limites du modèle de Markowitz :

Un grand nombre de littérature sur ce sujet développe de façon très exhaustive l'aspect technique et mathématique de ce problème d'optimisation sous contrainte. Pour plus de détails, les travaux de Meucci [2005] en sont une référence particulièrement intéressante.

Nous pouvons discerner plusieurs limites au modèle de Markowitz ; la présentation succincte des principales justifiera l'utilisation d'autres modèles plus robuste :

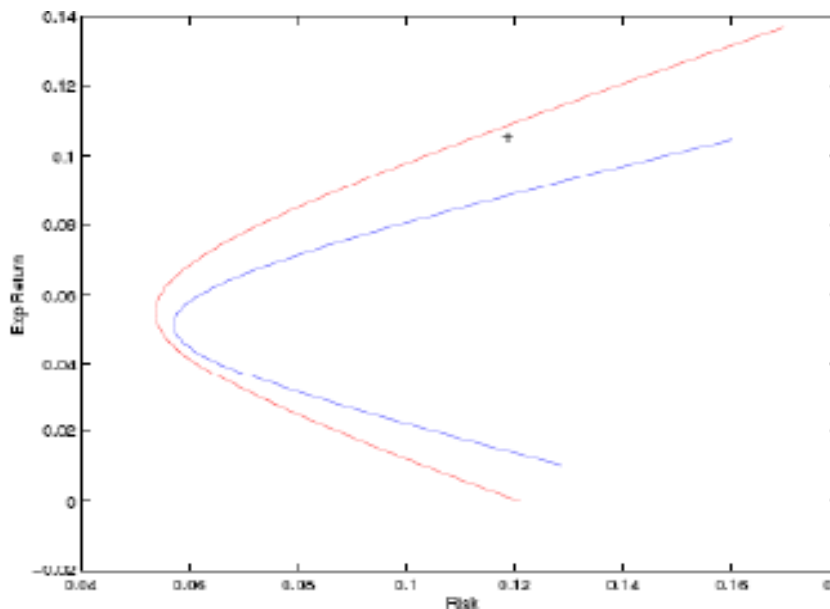
- Tout le modèle repose sur la modélisation moyenne-variance, c'est à dire qu'il limite la caractérisation du portefeuille à son moment d'ordre 1 (l'espérance) et son moment d'ordre 2 (la variance). En d'autres termes, les actifs du portefeuille sont modélisés par une loi gaussienne ; or certains actifs n'obéissent pas à ce prédicat comme par exemple certains titres de créances ou des actifs très risqués.
- La matrice de covariance est supposée définie positive ; cette hypothèse est forte surtout lorsque le nombre d'actifs à profil similaire devient important. Certaines méthodes statistiques comme l'ACP peuvent déterminer une matrice de variance covariance plus fiable.
- L'optimisation de Markowitz repose sur l'estimation des rendements moyens or ces derniers peuvent évoluer de façon très importante à court terme. Ceci rend donc très instable l'estimation du modèle Markowitz.
- De manière plus général, la détermination des paramètres, en entrée du modèle, (rendement et variance) n'est la fait que d'une unique réalisation historique or la loi des grands nombres nous impose un très grand nombre de réalisations pour nous assurer des paramètres normalement distribués.
- De façon plus pratique, un investisseur peut imposer des contraintes sur les poids qui ne sont pas pris en compte dans le modèle. De ce fait, malgré une solution théorique très simple, l'optimisation peut être plus difficile. En effet, des contraintes d'achats ou de ventes sont très fréquentes lors d'un investissement et le modèle standard de Markowitz ne les prend pas en compte.

**Boyle et Windcliff** (2004) dans « The 1/n pension investment puzzle » soulignent le risque d'estimation : les paramètres estimés qui alimenteront le modèle sont entachés d'une erreur. Les conséquences de cette erreur peuvent être lourdes dans le cas d'un modèle peu robuste comme celui de Markowitz.

L'estimation des paramètres selon l'approche de Markowitz se fait dans un cadre historique, ce qui peut induire une perte d'information significative. L'exercice effectué par Boyle et Windcliff, consistait à la détermination de l'allocation optimale « à la Markowitz » avec 5 supports d'investissement, en utilisant les vraies valeurs des paramètres rendement, variance et covariance, et ont comparé cette allocation estimée avec l'allocation uniforme en « 1/N », donc comparé la frontière efficiente théorique avec la frontière réelle construite sur la base des pondérations des supports estimées et de la vraie loi sous-jacente :

En rouge la frontière en utilisant les vraies valeurs des paramètres ;

En bleu, la frontière en utilisant les données déduites dans un cadre historique ;



Source : Présentation Phelim Boyle, Université de Waterloo Canada, 2004 (existant sur le site [www.ressourcesactuarielles.com](http://www.ressourcesactuarielles.com))

On remarque qu'en prenant une position courte, on modifie la frontière efficiente, qui n'a plus d'expression paramétrique.

### II.2.3 Frontières Efficientes

Il s'agit d'un modèle visant à chercher l'ensemble des portefeuilles efficients ayant comme contrainte, une contrainte sur le déficit exprimée en probabilité d'insuffisance donnée par l'expression suivante :  $P[R < u] \leq p$

Si  $R$  suit une loi normale de moyenne  $\bar{R}$  et d'écart type  $\sigma$ , la contrainte devient :

$$P\left[N(0,1) < \frac{u - \bar{R}}{\sigma}\right] \leq p \text{ avec } \bar{R} \geq q_p \sigma + u$$

$q_p$  étant le quantile de la loi normale centrée réduite associé à la probabilité  $1 - p$

L'ensemble des portefeuilles vérifiant la contrainte de déficit se situe dans le plan (risque, rentabilité espérée) au dessus de la droite de déficit d'équation :  $\bar{R} = q_p \sigma + u$

Plusieurs modèles traitent les frontières efficientes, on cite :

- La frontière efficiente d'Harlow à Seuil Fixe
- Modèle de Fishburn

Ces modèles ne seront pas décrites. Mais on s'intéressera par la suite aux modèles basés sur le Surplus, on développera spécialement le modèle de Leibowitz qui sera le sujet de notre application par la suite.

Soit  $S$  le Surplus étant défini comme la différence entre la valeur des actifs et la valeur actuelle du passif. Plusieurs modèles se basent sur le Surplus dans un modèle d'optimisation de portefeuille dans le cadre de gestion actif-passif, citant le modèle de Kim et Santome, ainsi que le modèle de Sharpe et Tint. Le modèle qui sera développé par la suite est le modèle de Leibowitz.

## II.2.4 Modèle de Leibowitz

Le modèle de Leibowitz(1992) objet de note étude s'applique sur un modèle de portefeuilles composés de deux actifs : actions et obligations.

La méthode de Leibowitz est une approche « duale » (« dual shortfall approach ») qui a été développée par Martin Leibowitz et son équipe au sein de la banque Salomon Brothers. Elle est basée sur le principe que pour gérer efficacement le portefeuille représentant l'engagement d'une assurance dans un contrat de prévoyance, il ne faut pas seulement tenir compte de l'actif, mais également du passif. Elle consiste à se fixer :

- Une contrainte de rentabilité minimale du surplus
- Une contrainte de rentabilité minimale de l'actif

et à rechercher le portefeuille maximisant la rentabilité du surplus, et appartenant à l'intersection des ensembles de solutions de ces deux contraintes.

Alors pour un portefeuille composé d'actions et d'obligations, on cherche à déterminer :

- Le pourcentage d'actions
- La « duration » de la composante obligataire, qui permet de maximiser la rentabilité du Surplus et donc la rentabilité du portefeuille tout en respectant des contraintes sur l'actif et le passif.

Les contraintes seront modélisées en probabilité « d'insuffisance » et concernant des grandeurs et des rentabilités exprimées en valeur de marché ou valeur actuelle.

Soient :

$R_A$  : Rentabilité des actions (suit une loi normale)

$\overline{R}_A$  : Rentabilité attendue des actions

$\sigma_A$  : Volatilité des actions, écart-type de la rentabilité  $R_A$

$R_0$  : Rentabilité des obligations (suit une loi normale)

$\overline{R}_0$  : Rentabilité attendue des obligations

$\sigma_0$  : Volatilité des obligations, variable endogène au modèle

$\rho$  : Corrélacion entre  $R_A$  et  $R_0$

$R_{pf}$  : Rentabilité du portefeuille (suit une loi normale de moyenne  $\overline{R}_{pf}$ )

avec  $R_{pf} = \alpha R_A + (1 - \alpha) R_0$

$\alpha$  : Pourcentage d'actions

$\sigma_{pf}$  : Volatilité du portefeuille

$$\sigma_{pf}^2 = \alpha^2 \sigma_A^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_0^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_A \sigma_0 \rho$$

$R_p$  variation relative des valeurs actuelles du passif

$rf_0$  : Ratio de financement initial (valeur de marché initiale de l'actif diversifiée par la valeur actuelle initiale du passif)

$D_0$  : Duration des obligations

La volatilité de la composante obligataire est supposée proportionnelle à sa duration

$\sigma_0 = D_0 \sigma_{\text{taux 1 an}}$  avec  $\sigma_{\text{taux 1 an}}$  Ecart-type d'intérêt pour les emprunts 1 an

Les obligations de toutes les maturités fournissent le même rendement.

La rentabilité du surplus est représentée dans ce modèle par le rapport entre la variation du surplus et la valeur actuelle initiale du passif

$$R_S = \frac{S_1 - S_0}{P_0}$$

$S_0$  le surplus initial,  $S_1$  le surplus final et  $P_0$  la valeur actuelle initiale du passif.

En décomposant l'expression du surplus, la rentabilité du surplus devient :  $R_S = rf_0 R_{pf} - R_p$

Contraintes à mettre :

**La contrainte sur l'actif** : se traduit par la probabilité pour que la rentabilité du portefeuille d'actifs soit inférieure à un certain seuil ne doit pas dépasser une probabilité donnée.

$$P(R_{pf} < u') < p'$$

La probabilité d'insuffisance  $p'$  et le seuil critique  $u'$  sont fixés arbitrairement selon la « tolérance au risque » de la compagnie. Cette contrainte dans le plan risque/rentabilité espérée est caractérisée par une droite de « déficit » (tous les portefeuilles au dessus de cette droite vérifiant cette contrainte)

$$\overline{R}_{pf} = u' + \sigma_{pf} q_{p'}^{N(0,1)}$$

**La contrainte sur le Surplus** : se traduit par la probabilité pour que la rentabilité du surplus soit inférieure à un certain seuil ( $u$ ) ne doit pas dépasser une probabilité donnée ( $p$ ).

$$P(R_s < u) < p$$

$R_{pf}$  et  $R_p$  sont normalement distribuées, et que toute combinaison linéaire de ces deux variables aléatoires est aussi normalement distribuée.

On a donc :  $R_s$  suit une loi normale  $N(\bar{R}_s, \sigma_s)$

De la même façon que la contrainte de « déficit » sur l'actif, on déduit l'inéquation suivante :

$$u + \sigma_s q_p^{N(0,1)} < \bar{R}_s$$

La frontière de la courbe qui décrit cette contrainte est caractérisée par :

$$u + \sigma_s q_p^{N(0,1)} = \bar{R}_s$$

$$\bar{R}_s = rf R_{pf} - \bar{R}_p$$

$$\sigma_s^2 = rf^2 \sigma_{pf}^2 + \sigma_p^2 - 2 rf \sigma_p \text{corr}(R_{pf}, R_p)$$

L'équation de la frontière devient après substitution des expressions ci-dessus:

$$[rf^2 (1 - \alpha^2)] \sigma_0^2 + [2 rf^2 \alpha (1 - \alpha) \sigma_A \rho - 2 rf (1 - \alpha) \sigma_p] \sigma_0 -$$

$$\left[ \left( \frac{rf (\alpha \bar{R}_0 + (1 - \alpha) \bar{R}_0) - \bar{R}_p - u}{q_p^{N(0,1)}} \right) - \sigma_p^2 - rf^2 \alpha^2 \sigma_A^2 + 2 rf \alpha \sigma_A \sigma_p \rho \right] = 0$$

Les seules inconnues restantes sont le pourcentage d'action  $\alpha$  et la volatilité de l'obligation à détenir dans le portefeuille  $\sigma_0$ .

Pour un  $\alpha$  donné, cela revient à résoudre une équation du second degré en  $\sigma_0$ .

La condition de positivité sur le discriminant de cette équation permet d'obtenir un ensemble de portefeuilles de coordonnées  $(\sigma_{pf}, \bar{R}_{pf})$  dans le repère risque/rentabilité dont les surplus associés vérifient la contrainte de déficit.

La contrainte sur le surplus est représentée par une courbe convexe en forme d'œuf.

### Portefeuille optimal vérifiant les deux contraintes

La partie supérieure à la droite de déficit et à l'intérieur de « l'œuf » représente tous les portefeuilles qui vérifient les deux contraintes.

Le portefeuille intersection de la droite et de « l'œuf » de surplus, de caractéristiques  $\bar{R}_{pf}^*$  et  $\sigma_{pf}^*$ , correspond au portefeuille de rentabilité espérée la plus grande qui remplit les deux demandes de « déficit »

La part optimale d'actions à détenir en portefeuille :  $\alpha^* = \frac{\bar{R}_{pf}^* - \bar{R}_0}{\bar{R}_A - \bar{R}_0}$

La volatilité optimale des obligations à détenir en portefeuille :  $\sigma_0^* = \frac{\sqrt{(\sigma_{pf}^*)^2 + (\alpha^*)^2 \sigma_A^{2s} - \alpha^* \sigma_A \rho}}{1 - \alpha^*}$

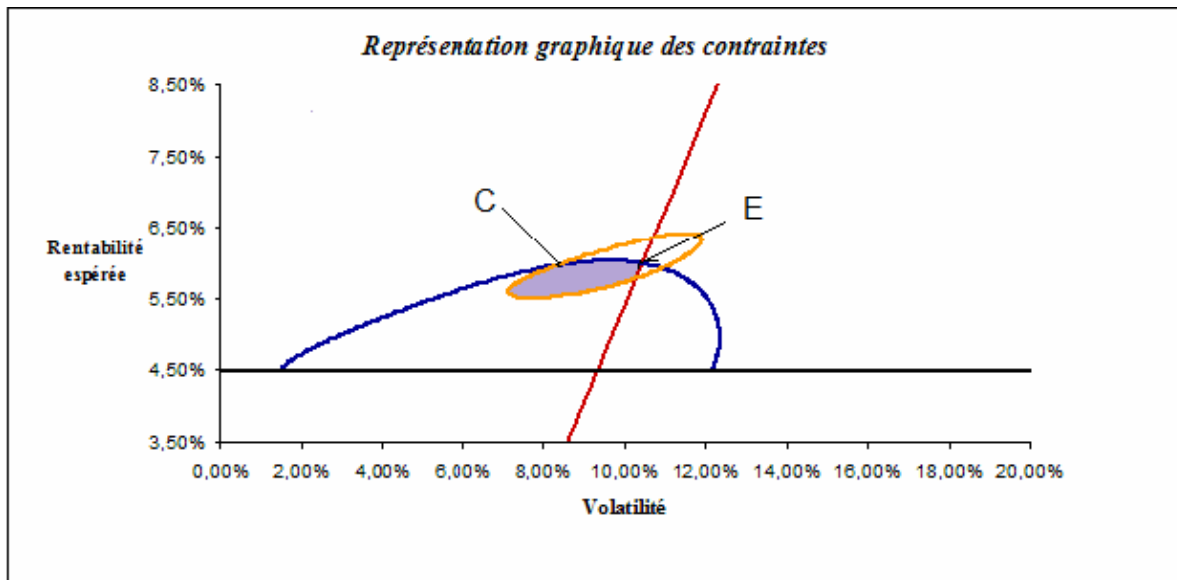
Aux contraintes déjà mentionnées ci-dessous, on pourra ajouter une contrainte sur la rentabilité relative par rapport à un Benchmark. Une contrainte qui est estimée par la probabilité pour que la rentabilité d'actifs soit inférieure d'un certain seuil à la rentabilité du benchmark ne doit pas dépasser une certaine probabilité.

$$P[R_{\text{rel}} < u'] = p''$$

$R_{\text{rel}}$  : la rentabilité relative, c'est l'écart entre la rentabilité du portefeuille d'actifs et la rentabilité du benchmark.

Aussi la contrainte sur la rentabilité du Surplus peut être remplacée par une contrainte sur la rentabilité du ratio de financement.

L'ensemble des portefeuilles vérifiant les contraintes décrit une courbe convexe en forme d'œuf :



Source : mémoire R. BEDOUI, 2007, Recherche d'une allocation stratégique optimale

L'ensemble de portefeuilles optimaux respectant les contraintes de Leibowitz se situe dans la zone grise. Les portefeuilles efficients se situent alors sur l'arc [CE].

Le portefeuille E correspond au portefeuille efficient répondant à la recherche d'un rendement optimal. Le point C indique un portefeuille efficient qui a un risque inférieur.

### Limites du modèle

Cette méthode présente le grand avantage d'inclure une modélisation stochastique du risque des actifs. Mais la contrainte de surplus sur le rendement n'induit pas de manière directe une variance minimale. Le traitement numérique de cette gestion est lourd. En effet, à la fin de chaque période, nous disposons d'un nouveau paramétrage du montant de l'actif et du passif.

Ce modèle surestime la capacité de prise de risque. Il ne respecte aucune autre contrainte (réglementaire, comptable, etc.) se basant sur des hypothèses parfois irréelles : la volatilité de la composante obligataire est proportionnelle à sa « duration », les obligations de toutes les maturités fournissent le même rendement, les rentabilités sont normalement distribuées, etc,

## **Application sur le modèle de Leibowitz (Contrainte sur le Surplus)**

Cette partie d'application porte sur la détermination d'une allocation stratégique d'actifs en appliquant le modèle de Leibowitz. Notant qu'on considère dans notre cas que le régime est non fiscalisé, la performance financière est nette de frais de gestion financière.

Nous travaillons dans un horizon de placement de 30 ans.

Pour le Passif : Il s'agit du montant des engagements de l'assureur. Nous connaissons dès la souscription du contrat les montants estimés et les dates de paiement (étant modélisé dans la partie 1 de ce mémoire).

Il fallait prendre en compte la composition d'actifs initiale (actuelle) du portefeuille composé de (85% taux, 15% actions). Les instruments intégrés dans le portefeuille d'investissement futur dans le cadre de la recherche de l'allocation stratégique optimale sont de même nature, plus précisément composés de :

- Monétaire
- Obligations à taux fixe de durée 4 ans (zéro-coupon)
- Obligations à taux fixe de durée 8 ans (zéro-coupon)
- Obligations à taux fixe de durée 12 ans (zéro-coupon)
- Actions

Afin de simplifier le calcul, on a adopté la procédure suivante :

- Nous avons fait une gestion annuelle des flux d'actif et de passif, c'est-à-dire que nous avons enchaîné l'approche de Leibowitz avec un horizon de gestion d'un an, et nous avons effectué une réévaluation de l'actif, du passif, et donc du Surplus, à la fin de chaque année. Notant que pour cette raison on était amené à refaire les modélisations d'actifs effectués dans le chapitre 1 avec un pas annuel (notons qu'adopter un pas annuel pour la modélisation de taux apporte parfois des résultats biaisés, mais nous avons accepté ceci afin de simplifier le modèle). Nous recherchons alors l'allocation optimale de Leibowitz pour l'année suivante.
- Nous réitérons ce processus sur 30 ans pour obtenir une succession d'allocations qui seront optimales chaque année, compte tenu du scénario de rentabilité des actifs rencontré durant la simulation.

- L'étape suivante consiste à générer un maximum de scénarios de rentabilité des actifs afin d'étudier l'intérêt du comportement à long terme de notre suite d'allocations.
- Nous calculons le rendement de notre portefeuille la première année ; et on a alors la proportion à investir dans chaque actif.
- A la fin de la première année, nous calculons le surplus que nous réinvestissons au même taux que notre actif. Nous retirons les flux à payer et nous obtenons le surplus de la deuxième année.
- La dernière étape sera de simuler plusieurs scénarios possibles de rendement de portefeuille afin d'obtenir le portefeuille optimal
- Ce processus est réitéré 30 fois et nous obtenons donc 30 allocations.

Les contraintes considérées lors de l'application du modèle sont les suivantes:

1. Contrainte sur l'actif : on prend  $P(R_f < 15\%) > 99\%$ ,  
 Alors par application au modèle, il faut tracer la droite d'équation :  $\bar{R} = \sigma_{pf} * q_{99\%} - 15\%$   
 et considérer tous les portefeuilles qui sont en dessus de cette droite de déficit (la droite en vert dans le graphe ci-dessous)
2. Contrainte sur le Surplus : on prend  $P(R_s < 3\%) < 10\%$

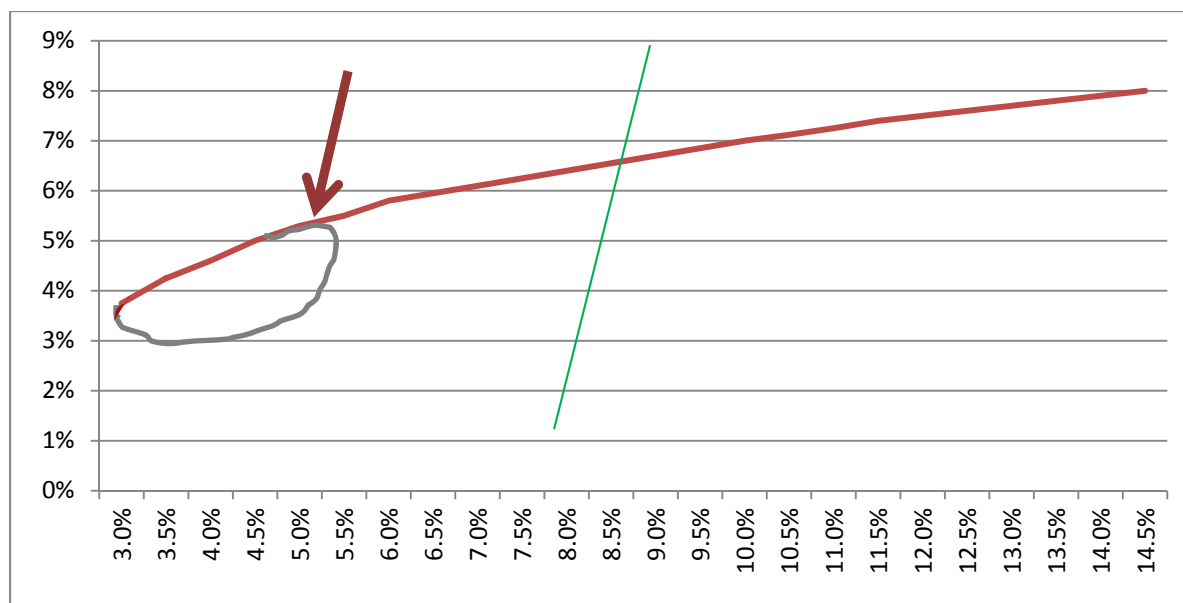
En addition à cette contrainte, on a pris 2 autres contraintes :

1. Rentabilité positive : l'allocation optimale est celle qui minimise le risque pour un niveau de rentabilité financière égal à 5,5%
2. Contraintes sur les poids de chaque actif:
  - Monétaire entre 5% et 10%
  - Obligations taux fixe 4 ans entre 10% et 15%
  - Obligations taux fixe 8 ans entre 25% et 40%
  - Obligations taux 12 ans entre 25% et 35%
  - Actions entre 10% et 20%

Les solutions de ce modèle forment l'œuf de Leibowitz (Courbe grise) :

- La contrainte de rentabilité minimale du portefeuille définit un demi-plan situé à gauche des droites obliques.
- La contrainte de rentabilité minimale du surplus se caractérise par un ovoïde centré sur le portefeuille immunisant. Les portefeuilles intérieurs à l'ovoïde correspondent à une rentabilité minimale de 15% avec une probabilité de 99%.

Le portefeuille optimal est le portefeuille de rentabilité maximale dans l'ensemble des portefeuilles satisfaisants toutes les contraintes : l'ensemble des portefeuilles possibles respectant la contrainte de Leibowitz se situe dans la surface délimitée par la frontière efficiente (en rouge), la droite de la Value-At-Risk (en vert) ( $\text{Var } 1\% < 15\%$ ) et l'œuf de Leibowitz (en gris).



La solution optimale est présentée par le portefeuille qui est en haut de l'œuf admettant un rendement de 5,5% et une volatilité de 5,20% dont la composition est:

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| <b>Monétaire</b>          | 10% |
| <b>Obligations 4 ans</b>  | 12% |
| <b>Obligations 8 ans</b>  | 33% |
| <b>Obligations 10 ans</b> | 30% |
| <b>Actions</b>            | 15% |

### **II.3 Interprétation des résultats**

On a présenté dans cette dernière partie deux modèles de recherche d'allocations stratégique d'actifs. On remarque la différence des résultats de composition du portefeuille optimal suivant les différentes contraintes mises. En effet le modèle de Leibowitz impose plusieurs contraintes additionnelles par rapport au modèle de Markowitz qui n'a présenté qu'une seule contrainte ; Et une frontière efficiente se situera toujours en dessous d'une frontière « moins contrainte ».

L'ajout des contraintes (spécialement sur le Passif) nous a permis de protéger le portefeuille dans le cadre d'une gestion actif-passif en conservant le même rendement d'actifs pour un niveau de risque inférieur.

# *Conclusion*

C'est dans le cadre de l'analyse de l'adéquation Actif-Passif ainsi que des principaux outils de modélisation que se situe l'objectif de notre travail. Gestion Actif-Passif, l'expression empruntée aux banquiers, est devenue aujourd'hui l'un des piliers du monde de l'assurance Vie. Le but de la gestion Actif-Passif est de faire le lien entre les contraintes issues du passif d'une part et la gestion des investissements d'autre part, tout en tenant compte des différents facteurs de risques pouvant entrer en ligne.

J'ai présenté dans ce mémoire différents outils et méthodes de gestion Actif-Passif, en exposant la manière d'application de chacun d'eux tout en les critiquant. Pour palier aux différentes méthodes d'analyse des modèles de gestion actif-passif, nous avons présenté deux modèles synthétiques qui permettent, à partir d'outils de projection déterministe en première partie et stochastique dans la deuxième de maintenir un certain équilibre Actif-passif selon différents contextes.

La première partie de ce mémoire a exposé les enjeux de la gestion Actif-Passif en décrivant les outils d'évaluation des risques d'actif-passif en assurance vie, présentant ces outils par ordre chronologique depuis les prévisions d'impasse de trésorerie jusqu'aux simulations de scénarios.

La deuxième partie était une étape d'application se situant dans un cadre déterministe projetant pas à pas les flux de Passifs. Cette étape a commencé par une projection et comparaison des flux de trésorerie générés par les actifs financiers d'une part et par les engagements d'assurance d'autre part. L'adéquation d'actif-passif effectuée n'était qu'un adossement de flux visant à combler les impasses et excédents de trésorerie. Cette étape était poursuivie par un adossement de duration.

Les deux concepts d'adossement de flux ou de duration sont des méthodes empruntées des banquiers, traditionnellement utilisées par les compagnies d'assurance, se concentrant sur un seul risque qui est le risque de taux. Comme la majorité des actifs des compagnies d'assurance sont des instruments à base de taux, la protection contre ses fluctuations semble importante, mais non suffisante vis-à-vis de la sophistication des produits d'assurance offerts et la grande concurrence sur le marché. A ce stade, les compagnies d'assurance se sont trouvées à la recherche d'une allocation optimale d'actifs pouvant donner les meilleurs rendements sur les actifs sous contrainte des engagements de passifs.

La recherche de l'allocation stratégique optimale était le sujet de la partie 3 du mémoire. L'application était effectuée en utilisant les passifs déterministes constatés de la partie 2, tout en modélisant dans un cadre stochastique les actifs financiers. Cette recherche était effectuée en utilisant dans une première étape le modèle de Markowitz et dans un second celui de Leibowitz. Il est vrai que le plus récent de ces modèles date depuis 20 ans, mais l'objectif principal était de mettre le curseur sur le fait que l'introduction des contraintes du Passif dans la recherche de l'allocation optimal est essentielle permettant de protéger le portefeuille tout en conservant le même rendement d'actifs pour un niveau de risque inférieur. Cette introduction pourra dans certains cas donner une composition d'actifs complètement différente de celle retenue lorsque seule la contrainte sur le rendement des actifs est conservée.

Ce mémoire admet certainement plusieurs limites, citons que :

- les données utilisées concernant le passif dans la dernière partie était les flux déterministes déduits de la partie 2. Il serait intéressant de voir les résultats des allocations d'actifs obtenues en projetant le passif dans un cadre stochastique
- les actifs intégrés dans l'étude sont traditionnels, nous n'avons pas utilisé de produits dérivés. Ceci est dû au fait que le marché libanais est peu développé ; Les produits dérivés sont rarement utilisés.
- les modèles utilisés datent depuis 20 ans, l'introduction de modèles plus récents (citons par exemple le modèle de Black-Litterman pour la recherche de l'allocation optimale) pourrait donner plus de valeurs à notre étude.

Finalement, on s'interroge sur l'affectation d'autres facteurs de risques sur le portefeuille, et est-il possible de simuler des mesures de politiques financière et technique pouvant contourner tout genre de risque ?

# ***Bibliographie***

- AHLGRIM K., D'ARCY S., GORVETT R. [1999], *Parametrizing interest rate models*, Forums of the Casualty Actuarial Society.
- BATTOCHIO P., MENONCM F., SCAILLET O. [2003], *Optimal Asset Allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and the decumulation phases*, Annals of operations research, 142.
- BEDOUI R. [2007], *Recherche d'une allocation stratégique optimale dans le cadre de la gestion actif-passif : Application sur un fonds de retraite*, Mémoire d'actuariat, ISFA
- BIERWAG G., CORRADO C., KAUFMAN G. [1990], *Computing durations for bond portfolios*, The Journal of Portfolio Management.
- BONOLA C., RICHARD A.C. [2009], *Choix de portefeuille et allocation d'actifs : Une revue*, Travail d'étude et de recherche, ISFA.
- BOYLE P., WINDCLIFF H. [2004], *The 1/n pension investment puzzle*, North American actuarial journal, 8 (3).
- BRASS W. [1971], *On the Scale of Mortality, Biological assets of demography*, W. Brass (ed.), Taylor and Francis
- BRENNAN M., SHWARTZ E. [1979], *A continuous time approach to the pricing of bonds*, Journal of Banking and Finance, 3(2)
- CAMPBELL J., CHAN Y., VICEIRA L. [2003], *A multivariate model of strategic asset allocation*, Journal of financial economics, 67 (1)
- CHAMBERS D, CARLETON and MCERALLY [1988], *Immunization Default-Free Bond Potfolios with a Duration vector*, Journal of Financial and Quantitative Analysis 23.
- COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A. [1985], *A theory of the term structure of interest rates*, Econometrica, 53 (2).
- DUBERNET M. [1997], *Gestion actif passif et tarification des services bancaires*, Economica
- FAMA. E. [1984], *Forward and Spot exchange rates*, Journal of monetary economics, 14.
- FAMA E. [1984], *The information in the term structure*, Journal of financial economics, 13.

- FISCHER B., SCHOLLES M. [1973], *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of political economy, 81(3).
- FISHBURN P. [1977], *Mean Risk analysis with risk associated with below target returns*, American Economic review, 67.
- FITTON P., MCNATT [1997], *The four faces of an interest rate model*, F. Fabozzi association.
- GERBER G. [2010], *Allocation d'actifs sous Solvabilité 2 : cas de l'assurance vie épargne*, Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine
- HARLOW W., RAO R. [1989], *Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework*, Journal of financial and quantitative analysis, 24(3).
- HARRIS G. [1986], *Multifactor duration and Immunization*, Applied Research 6, J.P Morgan Investment management Inc.
- HEATH D., JARROW R., Morton A. [1992], *Bond pricing and the term structure of interest rates, a new methodology for contingent claims valuation*, Econometrica 60.
- HO T. [1992], *Key rate durations: Measures of interest rate risks*, Journal of Fixed Income , 2.
- HOPEWELL M., KAUFMAN G. [1973], *Bond price volatility and Term to maturity: a generalized re-specification*, The American Economic Review, 63.
- HULL J. [1993], *Options, Futures, and other Derivatives securities*, Second Edition, Prentice Hall.
- HULL J., WHITE A. [1993], *One Factor Interest Rate Models and the valuation on interest rate derivative Securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 28(2).
- LANGMEIER R. [2000], *Séminaire Asset/Liability Management : application aux caisses de pensions*, Ecole des HEC de l'Université de Lausanne.
- LEIBOWITZ M., HENRIKSSON R. [1988], *Portfolio Optimization within a Surplus framework*, Financial Analyst Journal, 44(2).
- LEIBOWITZ M. [1987], *Pension Allocation through Surplus Management*, Financial Analysts Journal, 43(2).
- LEIBOWITZ M., KOGELMAN S., BADER L., [1992], *Asset Performance and Surplus control: a Dual Shortfall Approach*, Journal of Portfolio Management.
- LE VALLOIS F., PALSKEY P., PARIS B., ET TOSETTI A., [2003], *Gestion actif-passif en assurance vie*, Economica.

- LITTERMAN R., SCHEINKMAN J., [1991], *Common Factors affecting Bond returns*, Journal of fixe Income, 1(1)
- MACCAULAY F. [1938], *Some theoretical Problems suggested by the movement of interest rates, bond yields and stock prices in the US since 1856*, National bureau of economic Research
- MARKOWITZ H. [1952], *Portfolio selection*, Journal of finance.
- MARKOWITZ [1959], *Portfolio selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley and Sons.
- MARTELLINI L., PRIAULET P., AND PRIAULET S., [2003], *Fixed-Income Securities: Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*, John Wiley and Sons.
- MEUCCI A. [2005], *Risk and Asset Allocation*, Springer
- PETAUTON [1996], *Actuariat de l'assurance vie*, Dunod
- PLANCHET F., THEROND P. [2005], Simulation trajectoires de processus continus, Belgian Actuarial Bulletin, 5.
- PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J., [2005], *Modèles financiers en assurance – analyses de risques dynamiques*, Economica
- PLANCHET, JACQUEMIN [2003], *L'utilisation de méthodes de simulations en assurance*, Bulletin Français d'Actuariat, 6(11).
- REDINGTON F. M. [1952], *Review of the Principles of Life Office Valuation*, Journal of Institute of actuaries, 78.
- ROGERS E.M., [1995], *Diffusion of Innovations*, The Free Press
- ROY A. [1952], *Safety first and the holding of assets*, Econometrica
- SAMUELSON A. [1945], The effect of interest rate increases on the Banking system, American economic review, 35(1)
- SHARPE, TINT [1990], Liabilities: *A new Approach*, Journal of Portfolio management, 16(2).
- SIMONET G. [1998], *La comptabilité des entreprises d'assurance*, L'Argus
- THEROND P. [2010], *Calibrage du SCR en assurance de personnes*, Journées d'étude IA-SACEI.

- VASICEK O. [1977], *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of financial economics, 5.
- WILHELMY F. [2010], *Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif*, Mémoire d'actuariat, ISFA
- WILMOTT P. [1998], *Derivatives: the theory and Practice of financial engineering*, John Wiley and sons

# ANNEXES

## Annexe 1 : Les bases de calculs

Les **bases de calculs** sont des conventions de base qui précisent la méthode de calcul de la fraction d'année  $f$  ; par exemple pour le calcul du nombre de jours entre deux dates. Si l'on note par  $B$ .

$f = n/B$  la fraction d'année écoulée avec  $B$  le nombre de jours d'une année.  $n$  est égal au :

- nombre de jours total du placement lorsqu'il est *in fine*.
- nombre de jours entre deux détachements de coupons.

Nous allons redéfinir les deux types de bases que nous avons employées :

1. La base Exact/360 : Cette base est essentiellement utilisée pour les taux proportionnels sur les instruments monétaires, c'est-à-dire pour les durées inférieures à 1 an.  
 $B$  vaut 360 et  $n$  correspond au **nombre de jours calendaires exact** du placement
2. La base Exact/Exact : Elle sert essentiellement au calcul des intérêts courus sur les marchés des capitaux français (obligations, swaps, etc....).  $B$  vaut 365 ou 366 lors des années bissextiles et  $n$  est également le nombre de jours calendaires exact.

## Annexe 2: Interpolation linéaire et cubique

Interpolation linéaire : Soient les taux zéro-coupons  $r(t, T_1)$  et  $r(t, T_2)$  de maturités respectives  $T_1$  et  $T_2$ . Nous voulons interpoler le taux de maturité  $T$  avec  $T_1 < T < T_2$ . Nous utilisons la formule d'interpolation linéaire suivante :

$$r(t, T) = \frac{(T_2 - T_1)r(t, T_1) + (T - T_1)r(t, T_2)}{(T_2 - T_1)}$$

Interpolation cubique : Une interpolation cubique s'opère par segment de courbe. Définissons un premier segment entre  $T_1$  et  $T_4$  où l'on dispose des 4 taux zéro-coupons  $r(t, T_1)$ ,  $r(t, T_2)$ ,  $r(t, T_3)$  et  $r(t, T_4)$ .

Alors si le taux  $r(t, T)$  de maturité  $t$  est défini par :

$$r(t, T) = aT^3 + bT^2 + cT + d$$

La contrainte est que la courbe doit passer par les 4 taux connus, d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} r(t, T_1) = aT_1^3 + bT_1^2 + cT_1 + d \\ r(t, T_2) = aT_2^3 + bT_2^2 + cT_2 + d \\ r(t, T_3) = aT_3^3 + bT_3^2 + cT_3 + d \\ r(t, T_4) = aT_4^3 + bT_4^2 + cT_4 + d \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi interpoler sur plusieurs taux zéro-coupons de maturités différentes en considérant plusieurs segments de dates et de taux zéro-coupons déjà connus.

### **Annexe 3 : Critères de Rogers**

D'après les critères de Rogers (1995), le modèle de taux idéal doit avoir les caractéristiques suivantes :

1. Réaliste en ce sens qu'il permet de prendre en compte les propriétés empiriques de la courbe des taux
2. L'étude historique de la courbe des taux permet de mettre en relief les points suivants :
  - ✓ Les taux d'intérêt ne sont pas négatifs
  - ✓ Les taux d'intérêt sont affectés par des effets de retour à la moyenne
  - ✓ Les taux n'évoluent pas de façon parfaitement corrélés
  - ✓ Les taux à court terme sont plus volatiles que les taux à long terme
  - ✓ 3 facteurs : niveau, pente et courbure sont à l'origine de plus de 95% du mouvement de la courbe
3. Bien construit en ce sens que les paramètres du modèle sont observables sur le marché, facilement estimables, et en outre fréquemment rejetables
4. Compatible avec les prix des marchés de produits (obligations à taux fixe ou variable, swaps standards, swaptions, caplets...)
5. Suffisamment simple pour permettre des calculs rapides et intuitifs
6. Un modèle qui n'oublie pas un facteur de risque
7. Cohérent d'un point de vue théorique, ce qui veut dire satisfaisant l'absence d'opportunité d'arbitrage
8. Offrant une méthode de couverture du produit de taux qui permette au vendeur de dupliquer aisément le produit, et par conséquent de sécuriser tout au long de la vie du produit la marge dégagée initialement lors de la vente.