

**Mémoire présenté  
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances  
le 11 Juin 2013  
pour l'obtention du  
Master Recherche Gestion des Risques  
en Assurance et Finance**

Par : BAGUI Hasna

Titre : Refonte des lois de maintien en incapacité temporaire de travail

Confidentialité (si oui préciser la durée) :

**Composition du jury des mémoires :**

*Membres du jury des mémoires*

M. COUSIN Areski  
Mme DOROBANTU Diana  
M. LEBOISNE Nicolas  
M. LOISEL Stéphane  
Mme MASIELLO Esterina  
Mme MAUME-DESCHAMPS Véronique  
M. PLANCHET Frédéric  
M. ROBERT Christian  
M. RULLIERE Didier

*Invité :*

*Entreprise :*

BCAC (Bureau Commun des Assurances)

Collectives)

*Tuteur Entreprise :*

M. WOLFRUM Roberto

*Secrétariat :*

Mme BRUNET Marie  
Mme MOUCHON Marie-Claude

*Bibliothèque :*

Mme BARTOLO Patricia





## *Résumé*

*L'objet de ce mémoire est la refonte des lois de maintien en incapacité temporaire de travail réalisées par le BCAC.*

*Pour l'élaboration des tables de maintien en incapacité, l'estimateur retenu pour la loi générale est celui de Kaplan-Meier. Les tables sont segmentées selon la catégorie socioprofessionnelle à l'aide du modèle additif d'Aalen.*

*Les tables de maintien ayant une double dimension (l'âge à l'entrée en incapacité et l'ancienneté du sinistre), un lissage de Whittaker-Henderson à double dimension est effectué.*

*Globalement, nos résultats montrent que notre nouvelle loi de maintien se positionne en dessous de la table réglementaire actuelle.*

*Les tables issues de ce mémoire sont un outil pour calculer les nouvelles provisions et analyser ainsi leur impact sur le provisionnement.*

## *Abstract*

*The principal objective of this paper is to construct tables for temporary disablement recovery rates.*

*The recovery rates analysis was undertaken using the Kaplan-Meier approach, and were segmented as a function of socio-professional category, using the additive Aalen model.*

*The multi dimension nature (entry age and duration of disablement) of the tables implies the need of a double graduation. Then, the Whittaker-Henderson graduation method is used to remove fluctuations due to random errors.*

*The final results show a globally lower claims cost than assumed in the current statutory table.*

*This paper is also a tool for the revaluation of mathematical reserves.*

## *Remerciement*

*Je tiens à remercier, tout particulièrement, Roberto WOLFRUM, mon tuteur d'entreprise, qui a su se rendre très disponible et me faire profiter de son expérience malgré un emploi du temps chargé. Je le remercie aussi pour son soutien inestimable et sa générosité extrême.*

*Je saisis aussi l'occasion pour remercier toute l'équipe technique de la direction de prévoyance pour tous les bons moments qu'elle m'a fait vivre. Spécialement, un grand merci à :*

- ✓ Géraldine; plus qu'une sœur, d'un fond propre et d'une gentillesse particulière.*
- ✓ Mickael ; pour son aide. Il était toujours un support moral.*
- ✓ Bénédicte; serviable, tolérante, compréhensive et toujours à l'écoute.*
- ✓ Mokhtar; d'une âme adorable et d'une énergie extrême. Merci pour les moments de joie pleins de blagues et d'humour.*

*Enfin, je remercie mes enseignants qui ont assuré ma formation tout au long de la période d'étude. En particulier, Mme Esterina MASIELLO pour sa disponibilité, son écoute et ses conseils précieux. Et Mr Frédéric PLANCHET pour son aide et pour son site [www.ressources-actuarielles.net](http://www.ressources-actuarielles.net) qui m'a permis de franchir un par un les obstacles qui se dressaient sur mon chemin.*

*Enfin, je tiens à remercier, de tout mon cœur, les membres de jury qui ont eu l'amabilité d'accepter de juger ce travail.*

## Table des matières

<i>Résumé</i> .....	i
<i>Abstract</i> .....	i
<i>Remerciement</i> .....	ii
<b>Introduction :</b> .....	1
<b>Partie 1 : Présentation générale</b> .....	3
<b>Chapitre 1 : Présentation de la problématique d'arrêt de travail</b> .....	4
<b>I. Contexte général</b> .....	5
<b>I - 1. Définitions</b> .....	6
1. L'incapacité de travail.....	6
2. L'invalidité.....	7
<b>I - 2. Les intervenants et les prestations</b> .....	9
1. La sécurité sociale.....	10
2. Loi de la mensualisation.....	12
3. Régimes complémentaires obligatoires.....	13
4. Exemple.....	15
<b>Chapitre 2: Les tables de provisionnement : Présentation et intérêts</b> .....	17
<b>II. La garantie Incapacité de point de vue de l'assureur</b> .....	18
<b>III. Cadre réglementaire</b> .....	18
<b>III - 1. Loi Evin</b> .....	19
<b>III - 2. Les tables réglementaires actuelles du BCAC</b> .....	20
1. Présentation.....	20
2. Coefficients de provisionnement.....	21
<b>III - 3. La mise à jour des tables réglementaires du BCAC</b> .....	22
<b>Partie 2 : Présentation des données et premières statistiques</b> .....	24
<b>Chapitre 1 : Présentation des données</b> .....	25
<b>IV. Les fichiers des données</b> .....	26
<b>IV - 1. La période d'observation</b> .....	26
<b>IV - 2. Variables concernant l'assuré</b> .....	27
<b>IV - 3. Variables concernant le contrat</b> .....	27
<b>IV - 4. Variables concernant le risque</b> .....	28
<b>V. Gestion des censures et des troncatures</b> .....	29

V - 1.	Notion des censures et des troncatures .....	29
V - 2.	Traitement des censures et des troncatures .....	31
1.	Censures .....	31
2.	Troncatures .....	31
VI.	Retraitement des données .....	31
VI - 1.	Société 1 .....	31
VI - 2.	Société 2 .....	33
VI - 3.	Société 3 .....	34
VI - 4.	Société 4 .....	35
VI - 5.	Société 5 .....	36
VI - 6.	Société 6 .....	37
VI - 7.	Société 7 .....	38
VI - 8.	Résultat de traitement .....	39
Chapitre 2 : Statistiques descriptives .....		40
VII.	Pour le risque d'incapacité .....	41
VII - 1.	Facteurs influents sur la durée de maintien liés à l'assuré .....	42
1.	L'Age à la survenance de l'arrêt de travail .....	42
2.	Le sexe .....	43
3.	La catégorie Socio-professionnelle .....	44
VII - 2.	Facteurs influents sur la durée de maintien liés au contrat .....	46
1.	La franchise .....	46
VIII.	L'intérêt de la segmentation .....	47
Partie 3 : Lois de maintien en incapacité .....		49
Chapitre 1 : L'estimation des lois .....		50
globales de maintien .....		50
IX.	Construction des taux bruts de maintien par le Kaplan-Meier .....	51
IX - 1.	Présentation de l'estimateur de Kaplan-Meier .....	51
1.	Notions de base des modèles de durée .....	51
2.	Censures et troncatures .....	52
3.	Construction .....	53
4.	Les propriétés .....	55
IX - 2.	Résultats .....	57
X.	Lissage des taux bruts .....	59
X - 1.	Lissage de Whittaker-henderson .....	60
1.	Le critère de fidélité .....	60
2.	Le critère de régularité .....	60

X - 2.	<b>Résultats</b> .....	61
X - 3.	<b>Validation du lissage</b> .....	64
XI.	<b>Segmentation de la loi générale</b> .....	65
XI - 1.	<b>Les tests statistiques utilisés pour la segmentation</b> .....	66
1.	<b>Test de Log-Rank</b> .....	66
2.	<b>Test de Gehan (Wilcoxon généralisé)</b> .....	67
XI - 2.	<b>Résultats</b> .....	67
1.	<b>Segmentation selon le sexe</b> .....	67
2.	<b>Segmentation selon la CSP</b> .....	68
Chapitre 2 :	<b>Segmentation des</b> .....	71
lois de maintien	.....	71
XII.	<b>Le modèle de Cox à hasard proportionnel</b> .....	72
XII - 1.	<b>Présentation Théorique du modèle</b> .....	72
1.	<b>Le principe du modèle</b> .....	72
2.	<b>La vraisemblance du modèle</b> .....	73
3.	<b>L'estimation des paramètres</b> .....	74
4.	<b>Les tests statistiques</b> .....	74
XII - 2.	<b>Application du modèle de Cox</b> .....	76
XIII.	<b>Le modèle d'Aalen additif</b> .....	79
XIII - 1.	<b>Présentation Théorique du modèle</b> .....	80
1.	<b>Le principe du modèle</b> .....	80
2.	<b>Tests statistiques du modèle</b> .....	83
XIII - 2.	<b>Résultats du modèle</b> .....	84
1.	<b>Estimation des paramètres</b> .....	84
2.	<b>Validation du modèle</b> .....	85
Partie 4 :	<b>Provisionnement</b> .....	90
XIV.	<b>L'impact de la nouvelle loi de maintien sur le provisionnement</b> .....	91
XIV - 1.	<b>Calcul des coefficients de provisionnement</b> .....	91
XIV - 2.	<b>Comparaison entre les nouveaux et les anciens coefficients des provisions</b> .....	92
1.	<b>Nouveaux coefficients PM</b> .....	92
2.	<b>Coefficients PM actuels</b> .....	93
3.	<b>Comparaison par âge</b> .....	95
XIV - 3.	<b>Impact de la segmentation sur le provisionnement</b> .....	97
1.	<b>Segmentation selon le sexe</b> .....	97
2.	<b>Segmentation selon la CSP</b> .....	97
XIV - 4.	<b>Cas réel du BCAC</b> .....	99

<b>Conclusion :</b> .....	101
<b>Bibliographie</b> .....	103
<b>Annexe :</b> .....	104

## Table des figures

Figure 1: Répartitions des prestations selon les régimes.....	5
Figure 2: Répartitions des prestations selon la cause d'arrêt de travail.....	7
Figure 3: Répartitions des invalides selon les catégories.....	8
Figure 4: Schéma de passage.....	8
Figure 5: Pyramide de la protection sociale.....	9
Figure 6: Extrait des tables de maintien en arrêt de travail du BCAC.....	20
Figure 7: Extrait des tables du BCAC-Coefficients de provision Incapacité et Invalidité.....	22
Figure 8: Schéma des observations possibles.....	30
Figure 9 : Répartition du volume selon société.....	41
Figure 10: L'impact de l'âge sur la durée moyenne de maintien en incapacité.....	42
Figure 11 : La répartition de la population selon l'âge d'entrée en incapacité.....	43
Figure 12: Impact du sexe sur la durée moyenne de maintien.....	43
Figure 13: L'arrêt de travail par sexe selon l'âge d'entrée en incapacité.....	44
Figure 14: La répartition des données selon la CSP.....	45
Figure 15: Impact de la CSP sur la durée de maintien moyenne.....	45
Figure 16: La répartition des sinistres selon la durée de la franchise.....	46
Figure 17: L'impact de la franchise sur la durée moyenne de maintien.....	47
Figure 18: les taux bruts de sortie calculés par l'estimateur de Kaplan-Meier.....	58
Figure 19: la projection des taux bruts pour les âges 20, 40 et 60 ans.....	58
Figure 20: la variance de Greenwood âge par âge.....	59
Figure 21: Taux lissés par Whittaker-Henderson.....	62
Figure 22: Taux de sortie lissés par Whittaker-Henderson.....	62
Figure 23: taux de sortie lissés par Whittaker-Henderson de 2 dimensions.....	63
Figure 24: Loi de maintien selon l'ancienneté et l'âge.....	63
Figure 25: Intervalle de confiance de la courbe de survie pour l'âge 65 ans.....	65
Figure 26: La fonction de survie selon le sexe.....	68
Figure 27: la fonction de survie selon la CSP.....	69
Figure 28: comparaison entre la fonction de survie de Kaplan-Meier et celle d'Aalen.....	85
Figure 29: les résidus martingales selon l'âge à l'entrée en incapacité.....	86
Figure 30: Maintien à l'âge 40 ans.....	87
Figure 31: Maintien à l'âge 20 ans.....	88
Figure 32: Maintien à l'âge 60 ans.....	88
Figure 33: Maintien à l'âge 40 ans.....	88
Figure 34: Maintien à l'âge 65 ans.....	88
Figure 35: les nouveaux coefficients Pm selon l'âge et l'ancienneté.....	92
Figure 36: Projection des nouveaux coefficients PM sur un plan.....	93
Figure 37: Anciens coefficients PM selon l'âge et l'ancienneté.....	94
Figure 38: Projection des anciens coefficients de tous les âges sur un plan.....	94
Figure 39: Coefs PM selon le sexe à l'âge de 42 ans.....	97
Figure 40: Coefs PM à l'âge 20 ans.....	98
Figure 41: Coefs PM à l'âge 60 ans.....	98
Figure 42 : Coefs PM à l'âge 40 ans.....	98
Figure 43 : Coefs PM à l'âge 65 ans.....	98

## Table des tableaux

Tableau 1: Les prestations Incapacité selon la cause d'arrêt de travail.....	10
Tableau 2: Les prestations Invalidité selon la cause d'arrêt de travail.....	12
Tableau 3: Durée des versements de la part de l'employeur selon l'ancienneté du salarié .....	13
Tableau 4: Dessin de fichier de données relatives aux sinistres d'arrêt de travail .....	26
Tableau 5: répartition du volume avant et après retraitement des données.....	39
Tableau 6: La part des données censurées .....	41
Tableau 7: répartition des données selon le sexe.....	44
Tableau 8: Test statistique de Log-rang sur l'impact de sexe .....	68
Tableau 9: Test Statistique de Log-rang sur l'impact de la CSP.....	69
Tableau 10: Répartition de la population selon la CSP .....	70
Tableau 11: Comparaison des différents modes de calcul des provisions.....	100

## Introduction :

Un individu incapable d'exercer sa profession subit une perte de revenus due à la cessation de son activité. L'assurance pour les arrêts de travail se propose d'indemniser cette perte. Elle s'applique à des arrêts de travail temporaires (incapacité) et/ou définitifs (invalidité).

Dans un souci de protection de l'assuré, la loi EVIN (loi 89-1009 du 31 décembre 1989) et ses décrets d'application, a exigé un montant minimum pour les provisions techniques d'incapacité-invalidité, calculé à partir des tables de maintien en incapacité et en invalidité. Celles-ci ont été établies par le BCAC (Bureau Commun des Assurances Collectives) à partir d'une étude réalisée en 1996 sur un portefeuille rassemblant les plus grandes compagnies d'assurance françaises de l'époque.

Construites en 1996, les tables de maintien en arrêt de travail ne représentent probablement pas la sinistralité actuelle. D'où vient l'intérêt de les mettre à jour afin d'examiner si le risque d'arrêt de travail a évolué depuis 1996. La profession de l'assurance avait confié au BCAC la mission de mettre à jour des lois de maintien. Une étude a donc été initiée par le BCAC.

La mise à jour de ces lois permettra d'une part d'ajuster, si nécessaire, le niveau des provisions calculées à l'aide des barèmes actuels et dans le cadre de la réglementation actuelle (norme comptable actuelle).

D'autre part, elle permettra de prendre en compte d'autres critères de segmentation. En effet, outre ces deux critères d'appréciation statistiques (âge et ancienneté), plusieurs critères d'analyse méritent d'être retenus.

Aussi, elle servira de base au calcul du Best Estimate, dans le cadre de Solvabilité 2, pour les sociétés qui n'auront pas construit leur table d'expérience.

La présente note est ainsi le fruit des études réalisées dans le but de mettre à jour les tables réglementaires de maintien en Incapacité du BCAC.

Nous commencerons d'abord par présenter et retraiter les données sur lesquelles on va travailler. Puis, nous étudierons les caractéristiques descriptives de nos données. Ensuite, la modélisation du risque de maintien incapacité et l'estimation des lois de maintien selon trois différents modèles seront traitées.

Pour ce faire, l'estimation non-paramétrique de Kaplan-Meier sera utilisée, dans un premier temps, pour l'estimation des taux de sortie de la population générale. Ces derniers seront lissés par la méthode de lissage non paramétrique de Whittaker-Henderson à deux dimensions.

Dans le but de prendre compte de l'hétérogénéité de notre population, on s'intéressera dans un second temps, au modèle de Cox et à celui d'Aalen. Le premier modèle

introduit un effet multiplicatif des covariables observées alors que le deuxième le fait d'une manière additive. Un lissage de Whittaker-Henderson à une seule dimension est effectué pour ajuster les taux obtenus pour chacun de ces deux modèles. Les résultats obtenus pour les trois méthodes actuarielles seront présentés et validés par des tests statistiques.

Enfin, la dernière partie est consacrée au calcul des coefficients de provisions mathématiques à partir de la nouvelle loi générale de maintien en incapacité puis à l'analyse des écarts avec les tables actuelles de coefficients.

# Partie 1 :

# Présentation générale

# Chapitre 1

## Présentation de la problématique d'arrêt de travail

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter la problématique d'arrêt de travail. Après une brève présentation du contexte général de notre étude, nous définirons plus précisément les notions d'incapacité et d'invalidité, avant de présenter les différents intervenants s'y rattachant et de détailler les garanties offertes par les divers acteurs en cas d'arrêt de travail.

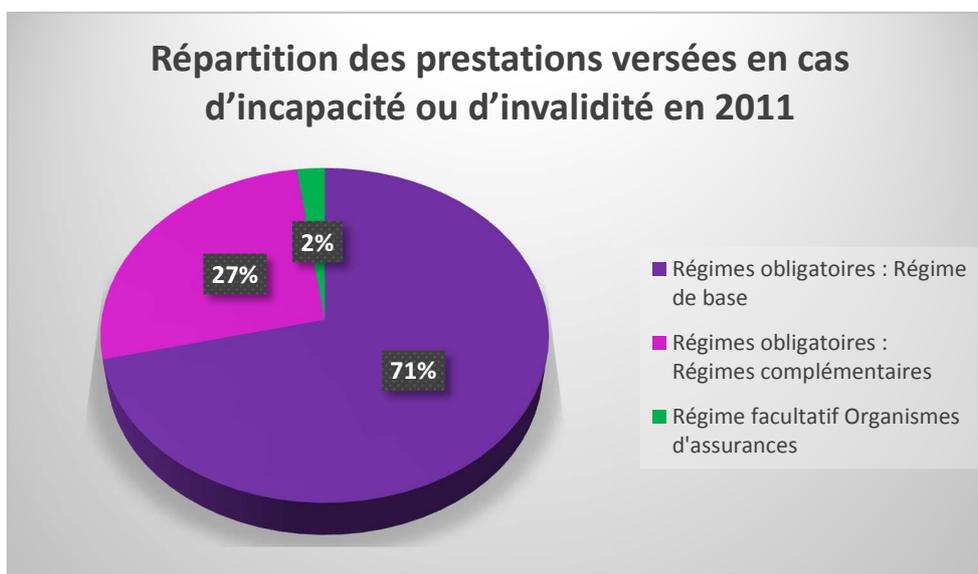
## I. Contexte général

La prévoyance vise à protéger les salariés des conséquences financières liées à un décès, une maladie ou un accident. Ainsi les opérations de prévoyance comprennent l'ensemble des contrats d'assurance de personnes offrant des garanties de versement de prestations en cas de décès, et des contrats d'assurances maladie/accident qui prévoient le remboursement de frais de soins et/ou le versement d'indemnités en cas d'incapacité de travail ou d'invalidité.

Dans notre étude, nous nous intéressons au risque d'incapacité/invalidité et plus précisément aux contrats collectifs à adhésion obligatoire. En effet, au sein du domaine de la prévoyance, nous distinguons les contrats à adhésion individuelle et les contrats collectifs.

Les contrats à adhésion individuelle sont souscrits par des particuliers, de leur propre initiative. Alors que les contrats collectifs sont souscrits par une personne morale ou un chef d'entreprise pour un ensemble de bénéficiaires, par exemple ses salariés ou une catégorie de salariés (l'ensemble des cadres par exemple). Pour le salarié concerné, ils peuvent être soit à adhésion obligatoire, soit à adhésion facultative (rare).

À titre illustratif, les prestations versées en cas d'arrêt de travail se composent de la manière suivante entre les régimes obligatoires qui se composent du régime de base (la sécurité sociale) et des organismes complémentaires et le régime facultatif qui regroupe les compagnies d'assurances : (Voir la partie I-2)



\*Source : Rapport annuel FFSA 2011

Figure 1: Répartitions des prestations selon les régimes

Dans le cadre d'un contrat collectif à adhésion obligatoire, soit l'assureur couvre la totalité du groupe, soit il refuse de couvrir le groupe. En pratique, l'assureur couvre sans sélection médicale les groupes importants, mais il demandera à des petits groupes

de remplir un questionnaire médical ou de se soumettre à une visite médicale, avant de décider s'il accepte ou non de couvrir le groupe en question. S'il décide de le couvrir alors qu'un salarié présente un risque, il pourra appliquer une surprime, mais elle devra être mutualisée sur l'ensemble du groupe. Chaque personne du groupe devra payer le même pourcentage de la base retenue (par exemple de son salaire) comme prime.

Un adhérent ne peut être exclu que s'il ne fait plus partie de l'entreprise ou qu'il ne fait plus partie des bénéficiaires, par exemple à cause d'un changement de catégorie socioprofessionnelle (un employé passant cadre n'est plus concerné par un contrat établi au bénéfice des employés).

L'intérêt principal pour une entreprise de souscrire un contrat collectif est l'outil de motivation qu'il représente. Si la communication interne est performante, un contrat de prévoyance collective peut fidéliser les salariés, voir même attirer des candidats. En effet, une couverture collective est moins chère qu'une couverture individuelle, notamment en raison de frais de gestion plus bas et de la déductibilité fiscale des cotisations.

Après avoir précisé que nous nous intéressons dans notre étude aux contrats collectifs à adhésion obligatoire offrant des garanties en cas d'arrêt de travail, il est le temps de définir précisément les notions d'incapacité de travail et d'invalidité en nous basant sur les définitions de la sécurité sociale.

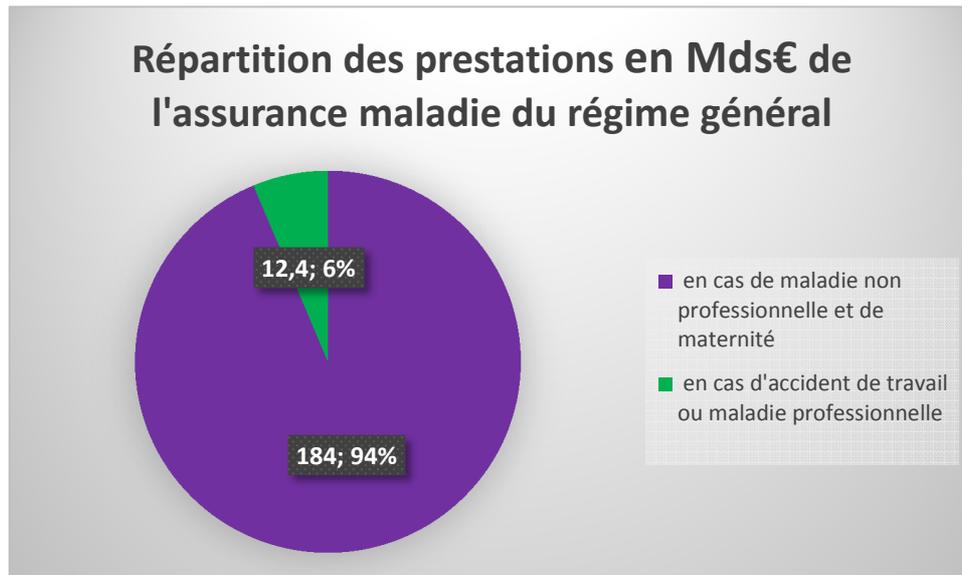
## I - 1. Définitions

### 1. L'incapacité de travail

Une personne est considérée en incapacité temporaire de travail, si, à la suite d'un accident ou d'une maladie, elle est dans l'impossibilité complète d'exercer sa profession. Cette dernière doit alors suivre le traitement médical qui lui est prescrit et se soumettre au repos nécessaire à sa guérison. La constatation de l'état d'incapacité est effectuée par le médecin traitant.

L'incapacité de travail peut être due à une maladie professionnelle ou un accident du travail, ou encore à une maladie ou un accident de la vie privée. Nous verrons par la suite que cette distinction impactera le niveau des prestations de la sécurité sociale et que chaque cas sera traité différemment.

Dans les parties qui suivent, Nous nous limiterons au cas des arrêts de travail causés par des maladies ou des accidents non professionnels. Ce cas représente 94% des arrêts de travail en termes de prestations versées Comme le montre la figure suivante :



\*Source : Compte annuel CNAMTS (Exercice 2011)

Figure 2: Répartitions des prestations selon la cause d'arrêt de travail

Pendant la période d'incapacité, les causes de sorties possibles de cet état sont le rétablissement, le décès ou le passage en invalidité. Après une période d'incapacité de 3 ans, l'individu incapable bascule automatiquement dans l'état d'invalidité. En d'autres termes, l'état d'incapacité a une durée maximale de 3 ans.

## 2. L'invalidité

L'état d'invalidité est appréciée au maximum à l'expiration d'une période de trois ans d'indemnités journalières mais elle peut aussi être appréciée avant l'expiration de ce délai quand l'état de santé du malade s'est stabilisé et n'est plus amélioré par un traitement actif.

Les invalides sont classés dans l'une des trois catégories définies par la réglementation et ce classement détermine le montant des pensions. Les trois catégories d'invalidité, définies par l'article L 341-4 du Code de la Sécurité Sociale, sont les suivantes :

- ❖ Catégorie I : invalides capables d'exercer une activité rémunérée.
- ❖ Catégorie II : invalides absolument incapables d'exercer une profession quelconque.
- ❖ Catégorie III : invalides, qui étant absolument incapables d'exercer une profession, sont, en outre, dans l'obligation, d'avoir recours à l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie.

Les dernières statistiques publiées à ce sujet nous donnent la répartition des invalides en France :

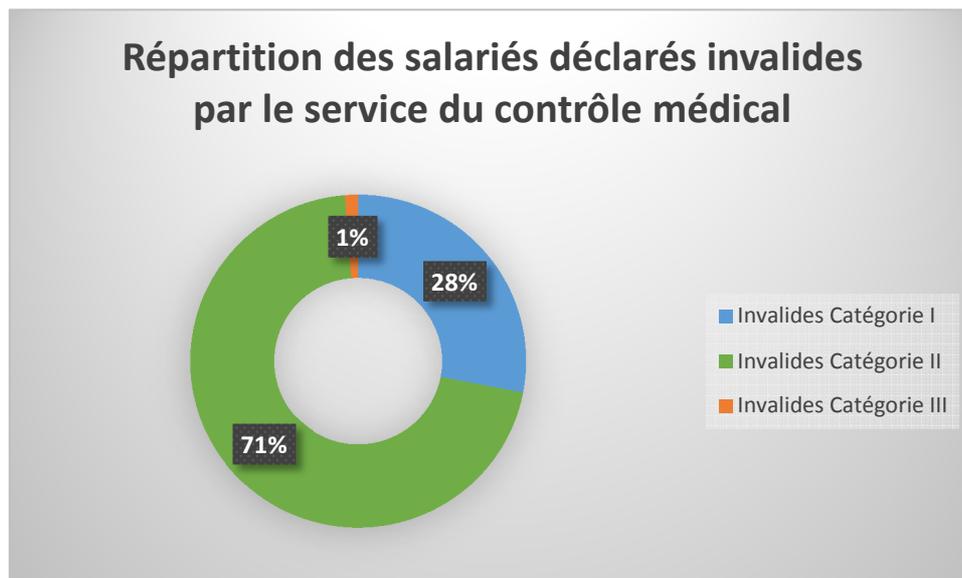


Figure 3: Répartitions des invalides selon les catégories

L'état d'invalidité fait suite à une période d'incapacité. Le passage en invalidité intervient lorsque l'état de santé de l'assuré en incapacité est considéré comme stabilisé. Cette constatation est effectuée par un médecin conseil de la Caisse primaire d'assurance maladie.

La seule cause de sortie de cet état est le décès. Par expérience, on considère que la probabilité de redevenir incapable ou actif est négligeable.

Les passages d'un état à un autre peuvent donc se résumer à l'aide du schéma suivant :

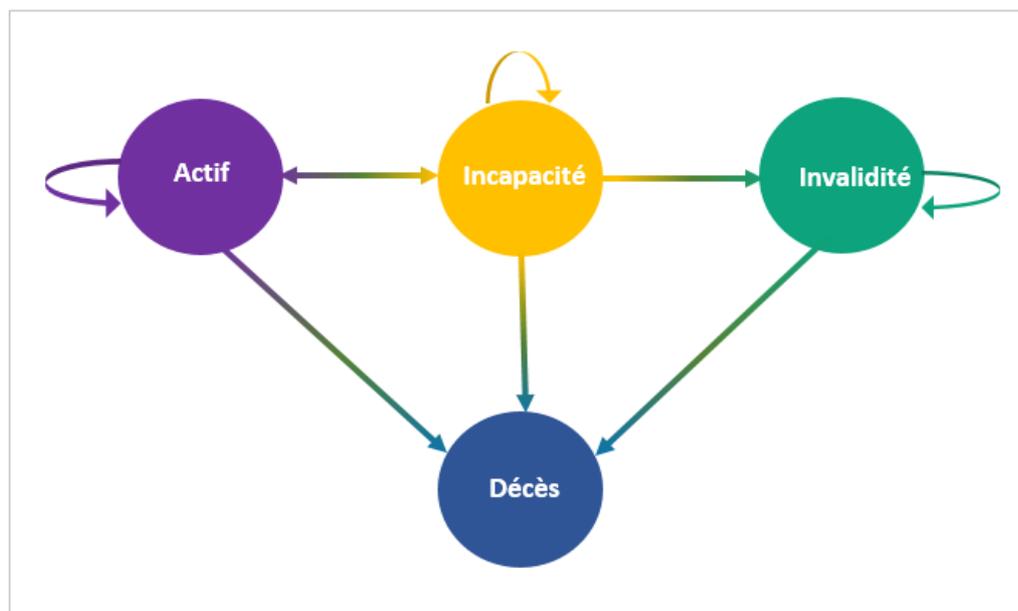


Figure 4: Schéma de passage

Ainsi, la survenance d'un arrêt de travail, que ce soit une incapacité temporaire ou permanente (invalidité), implique le versement d'une prestation. Dans ce sens, plusieurs acteurs interviennent. Chaque acteur verse une partie du salaire à partir d'une certaine durée. Dans la partie suivante, nous expliquerons en détail comment intervient chaque acteur dans le versement des prestations d'arrêt de travail pour un contrat collectif à adhésion obligatoire.

## I - 2. Les intervenants et les prestations

Le système de la protection sociale en France repose sur trois piliers :

- un service public « minimum » s'adressant à l'ensemble de la population et financé par l'impôt.
- un système complémentaire à base conventionnelle financé par des cotisations sociales par des organismes privés.
- un système purement libéral où chacun s'assure volontairement selon ses choix.

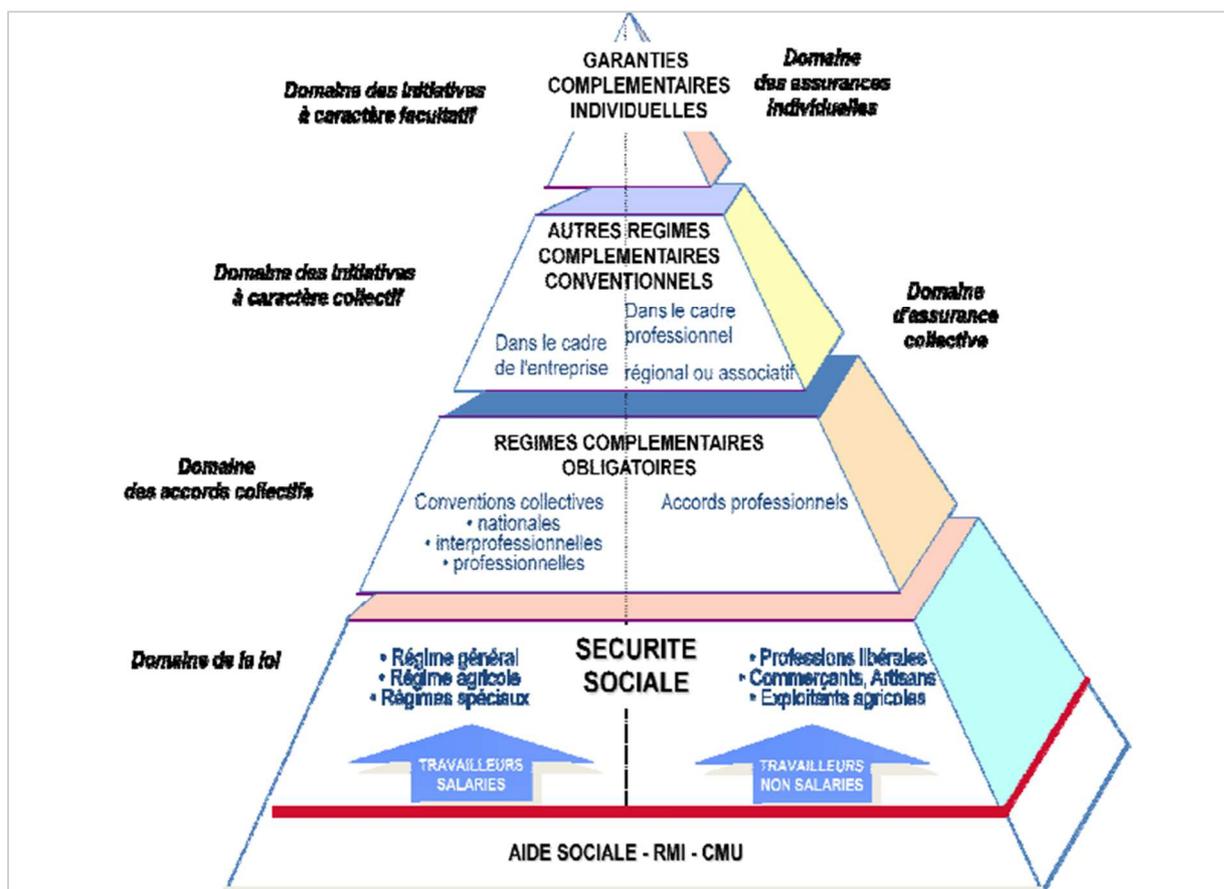


Figure 5: Pyramide de la protection sociale

Dans ce mémoire, nous nous restreindrons au deux premiers acteurs (la sécurité sociale SS et les régimes complémentaires obligatoires) puisque nous sommes intéressés par des contrats collectifs obligatoires.

## 1. La sécurité sociale

### a) La garantie Incapacité

Dans le cadre de cette garantie, la Sécurité Sociale verse des indemnités journalières aux assurés, afin de compenser partiellement la perte de revenus causée par l'arrêt de travail. Le montant de ces indemnités varie en fonction de la cause de l'arrêt.

Dans notre cas (accident/maladie de la vie privée), les indemnités journalières ne débutent qu'après un délai de carence de 3 jours. Cependant, si la durée de travail entre deux arrêts est inférieure à 48 heures, le délai de carence n'est pas appliqué pour le deuxième arrêt (on considère que c'est un seul et même arrêt).

Pour une durée d'arrêt inférieure à six mois, afin de bénéficier d'indemnités journalières, un assuré doit avoir travaillé au moins 200 heures au cours des 3 mois précédant l'arrêt de travail, ou avoir cotisé sur un salaire au moins égal à 1015 fois le montant du SMIC horaire au cours des 6 mois précédant l'arrêt.

Afin de bénéficier d'indemnités journalières au-delà de six mois (« arrêt de longue durée »), un assuré doit, à la date de l'arrêt, justifier de 12 mois d'immatriculation en tant qu'assuré social auprès de l'Assurance Maladie et avoir travaillé au moins 800 heures au cours des 12 derniers mois (dont 200 heures durant les 3 premiers mois), ou avoir cotisé sur un salaire au moins égal à 2030 fois le montant du SMIC horaire au cours des 12 mois précédant l'arrêt (dont au moins 1015 fois le montant du SMIC horaire au cours des 6 derniers mois).

Le montant de l'indemnité journalière est de 50% du salaire journalier brut. Ce dernier est calculé sur la moyenne des salaires des 3 derniers mois travaillés, moyenne plafonnée à 3086 € (plafond de la Sécurité Sociale au 1er janvier 2013).

Pour le cas d'un accident de travail ou une maladie professionnelle (AT/MP), il n'y a pas de délai de carence (les indemnités sont versées dès le 1er jour suivant l'arrêt de travail). Par ailleurs, aucune condition n'est exigée pour le versement des indemnités. Celles-ci se montent à 60% du salaire journalier brut de référence pendant les 28 premiers jours d'arrêt et sont ensuite portées à 80%.

Le tableau ci-dessous récapitule la différence entre ces deux cas de figure :

Cause d'arrêt de travail	Accident/Maladie de la vie privée	Accident de travail/Maladie Professionnelle
Délai de carence :	<b>3 jours</b>	<b>0 jour</b>
Indemnités (% Salaire) :	<b>50%</b>	<b>&lt; 28 jours : 60%</b> <b>&gt; 28 jours : 80%</b>

Tableau 1: Les prestations Incapacité selon la cause d'arrêt de travail

### b) *La garantie Invalidité*

Dans le cadre de cette garantie, la Sécurité Sociale verse une rente d'invalidité mensuelle aux assurés. Cet état fait suite à une période d'incapacité, le passage en invalidité intervenant lorsque l'état d'incapacité de l'assuré peut être considéré comme stabilisé. Le montant de la rente varie en fonction du degré d'invalidité ainsi que du salaire de l'assuré lorsqu'il était encore valide.

L'assurance maladie définit les conditions à remplir pour percevoir une rente d'invalidité :

- ✓ avoir moins de l'âge légal de la retraite (entre 60 et 62 ans)
- ✓ avoir sa capacité de travail ou de revenus réduite d'au moins de deux tiers
- ✓ être immatriculé depuis au moins 12 mois au moment de l'arrêt
- ✓ avoir effectué, dans les 12 mois qui précèdent l'arrêt, au moins 800 heures de travail salarié ou avoir touché un salaire au moins égal à 2030 fois le SMIC horaire (dont au moins 1015 fois le SMIC horaire au cours des 6 premiers mois).

Pour calculer la pension d'invalidité, l'Assurance maladie prend en compte le salaire annuel moyen à partir des 10 meilleures années d'activité (dans la limite du 37032 € le plafond annuel de la sécurité sociale en 2013).

Ensuite, la prestation dépend de la catégorie d'invalidité de l'assuré :

- ❖ Catégorie I : est égale à 30% du salaire annuel moyen (avec un minimum de 276,39 € et un maximum de 925,80 €).
- ❖ Catégorie II : est égale à 50% du salaire annuel moyen (avec un minimum de 276,39 € et un maximum de 1543 €).
- ❖ Catégorie III : est égale au montant de la pension de 2<sup>ème</sup> catégorie majorée de 40 % (majoration pour tierce personne). À noter que cette majoration ne peut être inférieure à un montant fixé par décret (1082,43 € par mois au 1er janvier 2013).

Dans Le cas d'un AT/MP, la variable essentielle est le taux d'invalidité de l'assuré, qui lui est attribué par un médecin conseil de la caisse d'Assurance maladie. Voici tous les cas possibles :

- Si le taux d'invalidité est inférieur à 10%, l'assuré reçoit un montant forfaitaire en capital, qui dépend de ce taux.
- Si le taux d'invalidité est supérieur à 10%, l'assuré perçoit une rente viagère.
  - Si le taux d'invalidité est compris entre 10 et 50%, la rente sera trimestrielle.

- Si le taux d'invalidité est supérieur ou égal à 50%, la rente sera mensuelle.
- Si le taux d'invalidité est supérieur à 80% et que l'assuré doit avoir recours à l'assistance d'une tierce personne, le montant de la rente est majoré de 40%.

Le montant de la rente est fonction du taux d'invalidité et des salaires perçus au cours des 12 mois précédant l'arrêt de travail : elle est égale au salaire annuel (limité au plafond annuel de la sécurité sociale) multiplié par le taux d'invalidité préalablement réduit de moitié pour la partie du taux inférieure à 50% et augmenté de moitié pour la partie supérieure à 50%.

Le tableau récapitulatif de prestations d'invalidité est le suivant :

Cause d'arrêt de travail	Accident/Maladie de la vie privée	Accident de travail/Maladie Professionnelle
Facteur déterminant	<i>Catégorie d'invalidité</i>	<i>Taux d'invalidité</i>
Indemnités (% Salaire) :	- 1ère catégorie : 30% - 2ème catégorie: 50% - 3ème catégorie: 50% + 1082,43€	< 10% : Montant forfaitaire ≥ 10% : Rente

Tableau 2: Les prestations Invalidité selon la cause d'arrêt de travail

La couverture de la sécurité sociale est complétée par un versement obligatoire de la part de l'employeur. C'est la loi de la mensualisation.

## 2. Loi de la mensualisation

La loi de la mensualisation du 19 janvier 1978 prévoit le versement, pour les salariés à ancienneté supérieure à 1 an, d'indemnités journalières de la part de l'employeur, afin de porter les indemnités totales à un taux donné du salaire, pendant une certaine durée.

Ces indemnités sont à verser à partir du 8e jour d'arrêt de travail si la cause est indépendante de l'activité professionnelle, et immédiatement s'il s'agit d'un accident du travail ou une maladie professionnelle.

Ces indemnités complètent les indemnités de la Sécurité Sociale pour porter le total à :

- 90 % du salaire journalier brut pendant les 30 premiers jours de versement, augmentés de 10 jours par tranche d'ancienneté de 5 ans (sans toutefois pouvoir dépasser 90 jours).

- 66,66 % du salaire brut pendant les 30 jours suivants, augmentés de 10 jours par tranche d'ancienneté de 5 ans (sans toutefois pouvoir dépasser 90 jours).

Le tableau ci-dessous résume cette disposition :

Ancienneté du salarié	Nombre de jours indemnisés à 66,66% SBJ	Nombre de jours indemnisés à 90% SBJ
Entre 1 et 6 ans	30 jours	30 jours
Entre 6 et 11 ans	40 jours	40 jours
Entre 11 et 16 ans	50 jours	50 jours
Entre 16 et 21 ans	60 jours	60 jours
Entre 21 et 26 ans	70 jours	70 jours
Entre 26 et 31 ans	80 jours	80 jours
+ 31 ans	90 jours	90 jours

Tableau 3: Durée des versements de la part de l'employeur selon l'ancienneté du salarié

L'employeur peut soit prendre en charge cet engagement lui-même, soit s'assurer auprès d'un organisme assureur (assurances, mutuelles, instituts de prévoyance, ...).

Notons que dans certains cas, les conventions collectives signées par les entreprises peuvent prévoir des conditions plus avantageuses que celles décrites ci-dessus.

### 3. Régimes complémentaires obligatoires

Trois types d'organismes sont habilités (par la loi Evin) à mettre en œuvre un contrat de protection sociale complémentaire :

- Les institutions de prévoyance, paritaires et à but non lucratif.
- Les mutuelles, à but non lucratif.
- Les entreprises d'assurance

#### a) Les institutions de prévoyance

Elles relèvent du Code de la Sécurité sociale et du Code rural, et sont contrôlées par les représentants des entreprises adhérentes et des salariés participants (employeurs et organisations syndicales). L'essentiel de leur activité relève de la prévoyance collective: les institutions de prévoyance n'ont le droit de faire de l'individuel que sous certaines conditions.

### b) Les mutuelles

Régies par le Code de la Mutualité, elles sont contrôlées par les adhérents, qui disposent chacun d'une voix dans le cadre des élections en assemblée générale.

En pratique, l'essentiel de leur activité réside dans la santé individuelle.

### c) Les entreprises d'assurance

Relevant du Code des Assurances, elles sont de deux types :

- ❖ Les sociétés anonymes, sociétés commerciales contrôlées par les actionnaires (sociétés de capitaux à but lucratif), qui en désignent les dirigeants en fonction de jeux d'intérêts.
- ❖ Les compagnies à forme mutuelle (ex : la Maif ou la Macif), gérées par leurs sociétaires par le biais d'élections, et qui revendiquent des valeurs mutualistes ainsi que des buts non lucratif.

Les contrats proposés par ces trois organismes comportent souvent une période de franchise, qui a pour but d'éviter l'indemnisation des arrêts très courts, comportant la majeure partie des arrêts frauduleux.

Elle peut se présenter sous diverses façons :

- Franchise ordinaire
- Franchise atteinte : dès que la durée d'incapacité dépasse  $n$  jours, l'assureur sert des prestations, avec rétroactivité au  $p^{\text{ème}}$  jour ( $p < n$ ).
- Franchise discontinue : si le total des périodes d'incapacité au cours des 365 jours précédant le début de la dernière indisponibilité dépasse le délai de franchise, alors l'assuré est indemnisé.

Bien entendu, plus la franchise est courte, plus la prime à payer est élevée.

Dans le cas de l'incapacité, les garanties prennent la forme d'indemnités journalières, alors que dans le cas de l'invalidité, les garanties sont versées sous forme de rente ou de capital.

Ces garanties sont généralement exprimées en pourcentage du salaire (total, plafonné ou encore en distinguant les tranches A, B, C, D du salaire) qui inclue les versements de la sécurité sociale. Précisons que :

- La tranche A du salaire est la part de la rémunération annuelle comprise entre le 1er euro et le plafond annuel de la sécurité sociale (37 032 € pour l'année 2013),

- La tranche B est la part entre une fois et quatre fois le plafond de la sécurité sociale (donc entre 34 308 € et 148 128 € pour 2013),
- La tranche C est la part entre quatre fois et huit fois le plafond de la sécurité sociale (donc entre 148 128 € et 296 256 € pour 2013),
- Et la tranche D est la part supérieure à huit fois le plafond de la sécurité sociale (donc supérieur à 296 256 € pour 2013).

De plus, pour la garantie invalidité, la rente versée dépend souvent de la catégorie d'invalidité de l'assuré. Généralement, l'assureur se réfère à la position de la Sécurité Sociale en ce qui concerne la reconnaissance des états d'incapacité et d'invalidité.

Pour éviter les risques d'aléa moral le contrat précise souvent que l'indemnisation de l'assuré est plafonnée afin que l'ensemble des indemnités que touche l'assuré (sécurité sociale, employeur, assureur) soit inférieur à son salaire net avant l'arrêt. Cette limitation est appelé « principe indemnitaire » : l'individu ne doit pas pouvoir s'enrichir grâce à la réalisation du risque.

Afin d'illustrer de manière concrète ce qu'un assuré peut espérer obtenir en cas d'arrêt de travail, prenons un exemple simple.

#### 4. Exemple

Un salarié entre dans l'état d'incapacité, pour une cause indépendante de son activité professionnelle. Nous supposons qu'il a une ancienneté de 3ans dans l'entreprise qu'il a suffisamment cotisé pour bénéficier de prestations, et que son salaire est inférieur au plafond de 3086 €.

Le contrat d'assurance prévoit une prestation égale à 80% du dernier salaire brut, avec une franchise ordinaire de 60 jours.

Les différentes indemnités qu'il va recevoir durant sa période d'incapacité sont donc les suivantes :

- ✓ Les 3 premiers jours : aucune indemnité. Son arrêt n'est pas dû à un accident ou à une maladie professionnelle, et la convention collective ne prévoit pas le paiement des 3 jours de carence de la Sécurité Sociale.
- ✓ Le 4<sup>ème</sup> jour : début de versement des indemnités de la Sécurité Sociale (50% du salaire brut journalier)
- ✓ Le 8<sup>ème</sup> jour : début de la période de maintien de salaire à hauteur de 90% par l'employeur (pendant 30 jours)
- ✓ Le 39<sup>ème</sup> jour : début de la période de maintien de salaire à hauteur de 66,66% par l'employeur (durant 30 jours)

- ✓ Le 61<sup>ème</sup> jour : intervention de l'assureur pour maintenir le salaire à 80% (la garantie souscrite a une franchise de 60 jours)

Le graphique ci-dessous représente les différents acteurs qui prennent en charge la perte de revenu lors de l'arrêt de travail du salarié ainsi que les indemnités brutes que touchera ce salarié :

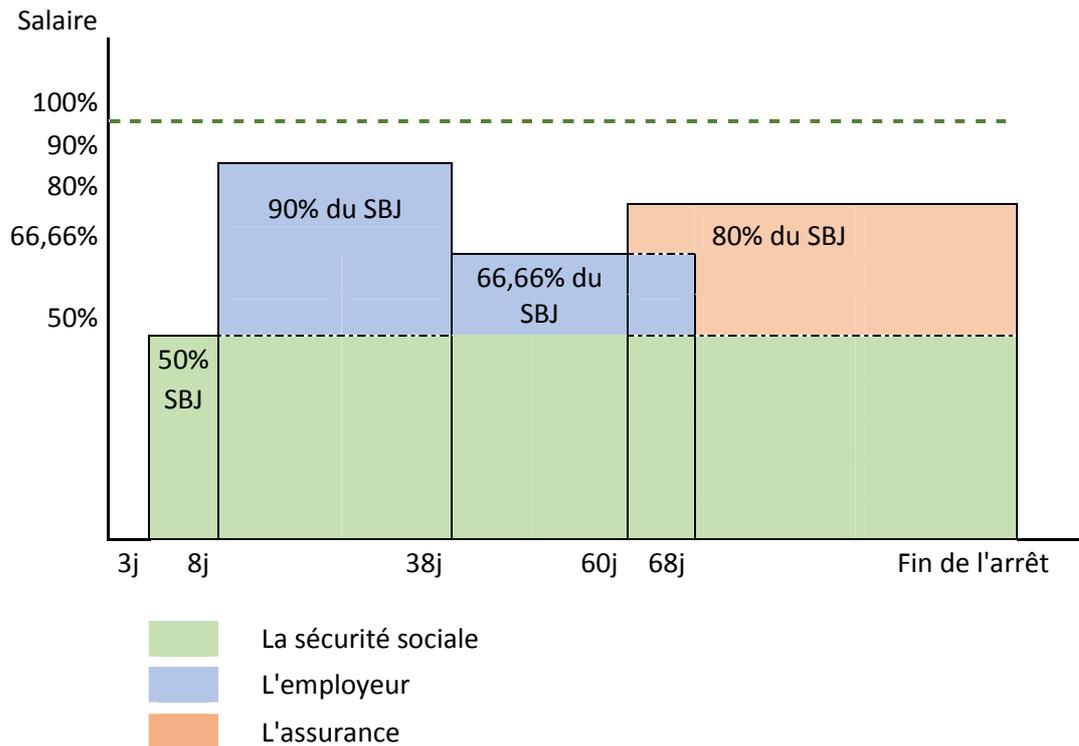


Figure 6: Exemple d'indemnisation

Après avoir expliqué le fonctionnement des garanties incapacité/invalidité, il est le temps de porter la casquette d'un assureur qui se doit, pour couvrir le risque d'arrêt de travail, d'évaluer les engagements relatifs engendrés par ce risque.

## Chapitre 2

### Les tables de provisionnement : Présentation et intérêts

Le présent chapitre a pour objectif de présenter, dans un premier temps, le cadre réglementaire qui oblige les compagnies d'assurance à provisionner pour le risque d'arrêt de travail. Dans un second temps, il décrit les tables réglementaires de maintien en incapacité/invalidité et explique comment se calculent les provisions avant de conclure par l'intérêt de mettre à jour ces tables réglementaires.

## II. La garantie Incapacité de point de vue de l'assureur

Afin de couvrir le risque d'arrêt de travail, l'assureur doit, comme chaque produit d'assurance, tarifier le coût de ce risque et provisionner pour faire face à ses engagements.

La prime pure, évaluée lors de la tarification, représente la contrepartie non risquée que l'assureur soit prêt à recevoir en échange de la prise en charge du risque. L'enjeu de la tarification est donc d'être la plus fidèle possible au risque réel : le tarif doit être à la fois concurrentiel et ne doit pas sous-évaluer le risque.

Si un sinistre est en cours d'indemnisation, l'assureur devra constituer des provisions pour sinistres à payer (PSAP). Pour le provisionnement des arrêts de travail, seuls les sinistres en cours sont concernés : les sinistres probables sont couverts par les primes pures. Celles-ci prennent en compte le risque d'entrée (risque d'entrer en arrêt de travail et d'y rester au-delà de la franchise).

Toutefois, l'enjeu du provisionnement est d'estimer, au plus juste, la durée résiduelle que peut passer un individu, en arrêt de travail. Autrement dit, il est indispensable d'estimer au plus juste le risque pour qu'un assuré sinistré (en arrêt) de rester en arrêt. C'est ce qu'on appelle le risque de maintien.

Ces deux risques (risque d'entrée et risque de maintien) sont différents et les caractéristiques des garanties proposées par les assurances peuvent avoir des effets inverses sur ces deux risques.

Par exemple une garantie IJ avec une franchise absolue de 90 jours va diminuer la probabilité de l'assuré de tomber en incapacité (puisque'il faut que son arrêt dépasse 90 jours) mais va augmenter la probabilité que l'arrêt dure plus longtemps.

Nous nous intéresserons dans la suite, au provisionnement et au plus particulièrement au risque de maintien.

## III. Cadre réglementaire

Avant la loi n°89-1009 du 31 décembre 1989 dite Evin, la réglementation en matière de provisionnement n'était pas homogène sur les trois familles d'organismes assureurs : les compagnies d'assurances (régies par le code d'assurance), les institutions de prévoyance (régies par le livret 14 du code de la sécurité sociale) et les mutuelles 45 (régies par le code de la mutualité).

En pratique, les organismes utilisaient pour le calcul des provisions techniques, les indications fournies par les anciennes versions du Guide de l'Assurance de groupe du Bureau Commun des Assurances Collectives (BCAC). Celles-ci étaient basées sur les travaux réalisés par M<sup>r</sup> Wetzel (1960), dont les limites se sont révélées flagrantes.

### III - 1. Loi Evin

Dans un souci de protection de l'assuré, la loi Evin a imposé des règles. L'article 7 de cette loi a ainsi précisé que « l'engagement doit être couvert à tout moment pour tous les contrats ou conventions souscrits, par des provisions représentées par des actifs équivalents ». Le décret n°90-768 du 30 août 1990 indique le montant minimum à provisionner :

- ❖ « Pour les prestations dues au titre du risque incapacité, lorsque les versements peuvent s'échelonner sur plus de 365 jours et peuvent se poursuivre par des prestations d'invalidité : deux fois le montant annuel des prestations d'incapacité servies au cours de l'exercice ;
- ❖ Pour les prestations dues au titre du risque invalidité : six fois le montant annuel des prestations d'invalidité servies au cours de l'exercice. »

Ces méthodes de provisionnement ont été revues suite à la mise au point des tables des provisions qui ont été introduites le 28 mars 1996 dans l'article A.331-22 du Code des Assurances et qui précise que les provisions techniques des prestations d'incapacité et d'invalidité sont la somme:

- ❖ « Des provisions correspondant aux prestations d'incapacité de travail à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres en cours à cette date majorées des provisions dites pour rentes en attente relatives aux rentes d'invalidité susceptibles d'intervenir ultérieurement au titre des sinistres d'incapacité en cours au 31 décembre de l'exercice ;
- ❖ Des provisions correspondant aux prestations d'invalidité à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres d'invalidité en cours à cette date. »

Le même article poursuit en indiquant que le calcul des provisions techniques de prestations d'incapacité de travail et d'invalidité est effectué à partir des éléments suivants :

- ❖ « Les lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité indiquées en annexe du Code. Toutefois, il est possible pour une entreprise d'assurances d'utiliser une loi de maintien établie par ses soins et certifiée par un actuaire indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaire reconnues par la commission de contrôle des assurances ;
- ❖ Un taux d'actualisation qui ne peut excéder 75% du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur base semestrielle, sans pouvoir dépasser 4,5% »

## III - 2. Les tables réglementaires actuelles du BCAC

### 1. Présentation

La loi Evin, outre le renforcement des procédures des assureurs, a introduit les tables de maintien en incapacité et en invalidité (tableau 7). Celles-ci ont été établies par le BCAC (Bureau Commun des Assurances Collectives) à partir d'une étude réalisée en 1996 sur un portefeuille rassemblant les plus grandes compagnies d'assurance françaises de l'époque. Ce portefeuille comprenait une cohorte d'invalides et/ou d'incapables issus des contrats assurés par les sociétés d'assurance. Essentiellement composé de salariés affiliés au régime général de la Sécurité Sociale, la table est représentative de l'ensemble des catégories professionnelles (ouvriers, cadres, ETAM) des entreprises françaises.

Le BCAC a également construit une table de passage de l'état d'incapable à celui d'invalidé.

Les tables de maintien en incapacité ou en invalidité présentent deux entrées : l'âge à l'événement et la durée de présence dans l'arrêt exprimée en mois pour l'incapacité et en années pour l'invalidité. Elles sont exprimées en termes de population restante : à l'ancienneté 0, on a 10 000 personnes. Au fur et à mesure que l'ancienneté croît, le nombre de personnes décroît.

LOIS DE MAINTIEN EN INCAPACITE TEMPORAIRE (DEFINITION SECURITE SOCIALE)

ÂGE	MOIS																			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98
21	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98
22	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98
23	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98
24	10 000	2 931	1 848	1 215	894	657	478	343	291	256	217	183	166	143	130	121	114	105	95	91
25	10 000	3 080	2 001	1 345	997	739	536	382	327	289	251	216	195	172	159	149	140	129	116	113
26	10 000	3 177	2 112	1 461	1 087	812	591	431	372	325	285	249	226	201	186	171	161	150	137	129
27	10 000	3 251	2 180	1 540	1 156	869	643	476	407	360	320	285	263	237	222	207	192	179	168	159
28	10 000	3 298	2 243	1 600	1 209	915	688	524	448	400	359	322	297	270	255	238	222	210	199	189
29	10 000	3 348	2 273	1 640	1 246	956	726	559	476	425	384	352	327	298	280	262	247	233	220	208
30	10 000	3 386	2 275	1 659	1 264	964	744	583	494	439	396	363	338	308	287	267	252	240	227	214
31	10 000	3 388	2 228	1 618	1 249	965	756	595	501	449	406	375	347	318	295	276	261	250	236	223
32	10 000	3 433	2 238	1 617	1 254	975	772	612	522	468	421	388	357	325	302	279	264	252	235	222
33	10 000	3 466	2 235	1 627	1 260	983	782	628	540	484	431	395	364	332	310	286	270	256	238	223
34	10 000	3 567	2 298	1 684	1 321	1 033	828	684	597	535	477	436	401	366	344	319	298	282	265	247
35	10 000	3 645	2 331	1 705	1 357	1 082	876	732	647	586	528	481	443	402	377	351	331	309	294	275
36	10 000	3 701	2 390	1 747	1 390	1 106	905	771	682	617	560	508	469	428	397	370	347	323	308	287
37	10 000	3 822	2 458	1 804	1 430	1 148	932	801	704	635	579	526	487	443	406	379	357	335	319	298
38	10 000	3 958	2 526	1 851	1 479	1 193	980	841	739	671	616	564	521	477	439	411	384	358	340	319
39	10 000	4 035	2 600	1 923	1 541	1 266	1 055	915	807	739	680	623	572	530	486	455	427	400	381	364
40	10 000	4 073	2 652	1 973	1 575	1 303	1 097	965	853	783	719	659	607	565	521	490	458	428	404	384

LOIS DE MAINTIEN EN INVALIDITE

ÂGE	AN																			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
21	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
22	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
23	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
24	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
25	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
26	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
27	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
28	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
29	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
30	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163	8 994	8 874	8 761	8 696	8 619	8 571	8 429	8 321	8 305	8 283	8 258	8 088	8 049	8 006
31	10 000	9 868	9 731	9 538	9 364	9 174	9 013	8 913	8 815	8 756	8 687	8 641	8 506	8 400	8 372	8 335	8 293	8 117	8 057	7 990
32	10 000	9 843	9 698	9 537	9 306	9 120	8 985	8 846	8 771	8 685	8 632	8 542	8 410	8 325	8 297	8 222	8 100	7 957	7 851	7 785
33	10 000	9 844	9 705	9 562	9 328	9 131	8 997	8 872	8 789	8 695	8 606	8 527	8 384	8 307	8 278	8 172	8 020	7 885	7 783	7 716
34	10 000	9 827	9 669	9 523	9 301	9 084	8 908	8 770	8 665	8 561	8 461	8 386	8 231	8 158	8 129	7 996	7 852	7 725	7 627	7 560
35	10 000	9 818	9 663	9 509	9 281	9 039	8 874	8 734	8 597	8 455	8 380	8 311	8 165	8 071	8 042	7 886	7 719	7 598	7 469	7 367
36	10 000	9 805	9 641	9 495	9 258	9 038	8 852	8 724	8 573	8 456	8 306	8 222	8 067	7 978	7 948	7 778	7 622	7 538	7 415	7 310
37	10 000	9 801	9 640	9 501	9 269	9 051	8 861	8 757	8 601	8 445	8 280	8 154	7 995	7 893	7 864	7 708	7 514	7 351	7 225	7 116
38	10 000	9 787	9 620	9 462	9 253	9 050	8 864	8 761	8 590	8 416	8 254	8 141	7 982	7 890	7 843	7 679	7 479	7 317	7 164	7 052
39	10 000	9 751	9 566	9 414	9 214	9 018	8 861	8 762	8 586	8 397	8 218	8 101	7 936	7 857	7 805	7 631	7 414	7 238	7 072	6 952
40	10 000	9 751	9 562	9 424	9 214	9 012	8 843	8 730	8 537	8 359	8 201	8 085	7 881	7 778	7 694	7 515	7 279	7 105	6 940	6 819

Figure 7: Extrait des tables de maintien en arrêt de travail du BCAC

## 2. Coefficients de provisionnement

Ces lois permettent de calculer les coefficients nécessaires à l'évaluation des provisions mathématiques qui sont égales aux montants actualisés probables des rentes à servir. Des formules de passage sont inscrites par le Bureau Commun des Assurances Collectives dans le Guide de l'Assurance de Groupe.

Si on intègre que dans le cas de l'invalidité, les tables réglementaires sont annuelles alors qu'elles sont mensuelles pour l'incapacité en cours et, si on note :

- $i$  le taux technique annuel
- $x$  l'âge à l'entrée dans l'état
- $\omega$  l'âge à l'entrée dans l'état
- $anc$  l'ancienneté de l'assuré dans l'état d'incapacité
- $l_{x,k}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  et encore en incapacité après  $k$  mois.

Alors le montant de la provision mathématique pour un euro de rente annuelle perçue en une fois, au titre d'une garantie incapacité par un individu entré dans l'état à l'âge  $x$ , présent dans l'état depuis  $t$  mois ou années, est calculé, de façon discrète, comme suit :

$$PM_{incap}(x, anc) = \frac{1}{2 l_{x,anc}} \sum_{k=anc}^{\omega-x} \left[ \frac{l_{x,k}^{incap}}{(1+i)^{(k-anc)/12}} + \frac{l_{x,k+1}^{incap}}{(1+i)^{(k+1-anc)/12}} \right]$$

$$PM_{invcl}(x, anc) = \frac{1}{2 l_{x,anc}} \sum_{k=anc}^{\omega-x} \left[ \frac{l_{x,k}^{inval}}{(1+i)^{(k-anc)}} + \frac{l_{x,k+1}^{inval}}{(1+i)^{(k-anc)}} \right]$$

Cette formulation équivaut à prendre la moyenne du terme échu et du terme à échoir. On suppose ainsi, un paiement en milieu de mois pour l'incapacité et en milieu d'année pour l'invalidité.

Coefficients de Provision INCAPACITE TEMPORAIRE DE TRAVAIL pour une Indemnité mensuelle de 1 € payable pendant 36 mois

Loi de maintien Incapacité de l'arrêté du 28/03/1996 - Actualisation à 2,50 %

Age à l'arrêt de travail	Mois écoulés depuis l'arrêt de travail																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20	1,731	2,602	4,062	4,969	5,780	6,647	7,885	9,276	10,064	10,600	11,299	11,859	12,074	12,538	12,778	12,655	12,479
21	1,731	2,602	4,062	4,969	5,780	6,647	7,885	9,276	10,064	10,600	11,299	11,859	12,074	12,538	12,778	12,655	12,479
22	1,731	2,602	4,062	4,969	5,780	6,647	7,885	9,276	10,064	10,600	11,299	11,859	12,074	12,538	12,778	12,655	12,479
23	1,735	2,602	4,037	4,914	5,703	6,546	7,768	9,176	9,975	10,496	11,178	11,785	12,072	12,469	12,807	12,700	12,432
24	1,772	2,641	3,983	4,786	5,489	6,304	7,459	8,938	9,753	10,193	10,818	11,500	11,868	12,391	12,624	12,598	12,432
25	1,872	2,799	4,131	4,899	5,589	6,399	7,614	9,164	10,013	10,413	10,931	11,528	11,911	12,315	12,456	12,371	12,166
26	1,981	2,989	4,360	5,103	5,813	6,649	7,907	9,435	10,278	10,711	11,163	11,627	11,877	12,186	12,207	12,175	11,989
27	2,088	3,190	4,651	5,422	6,180	7,091	8,381	9,918	10,839	11,291	11,657	12,000	12,167	12,316	12,305	12,191	12,069
28	2,188	3,384	4,932	5,763	6,574	7,552	8,875	10,388	11,320	11,755	12,070	12,351	12,458	12,588	12,475	12,310	12,134
29	2,259	3,515	5,141	6,007	6,856	7,941	9,151	10,624	11,589	12,050	12,343	12,486	12,515	12,594	12,494	12,354	12,109
30	2,291	3,567	5,250	6,137	6,990	8,002	9,231	10,628	11,553	12,061	12,308	12,437	12,420	12,485	12,427	12,296	12,068
31	2,306	3,598	5,360	6,319	7,179	8,158	9,327	10,626	11,593	12,067	12,309	12,372	12,391	12,461	12,461	12,311	12,015
32	2,320	3,608	5,396	6,411	7,265	8,205	9,290	10,493	11,353	11,744	11,992	12,054	12,119	12,176	12,168	12,066	11,790
33	2,348	3,645	5,461	6,480	7,342	8,265	9,309	10,370	11,090	11,452	11,718	11,832	11,838	11,900	11,794	11,708	11,426
34	2,434	3,778	5,664	6,745	7,611	8,558	9,577	10,496	11,067	11,373	11,641	11,760	11,793	11,829	11,713	11,543	11,343

Coefficients de Provision INVALIDITE pour une Rente Annuelle de 1 € payable jusqu'à 60 ans

Loi de maintien Invalidité de l'arrêté du 28/03/1996 - Actualisation à 2,50 %

Age à l'entrée en invalidité	années écoulées depuis l'entrée en invalidité																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20	20,579	20,384	20,211	20,067	19,902	19,830	19,866	19,428	19,134	18,787	18,376	17,975	17,602	17,296	16,787	16,238	15,732
21	20,358	20,154	19,972	19,817	19,701	19,557	19,381	19,132	18,827	18,450	18,048	17,636	17,310	16,931	16,411	15,852	15,334
22	20,127	19,914	19,722	19,556	19,428	19,272	19,083	18,823	18,508	18,117	17,705	17,281	16,941	16,549	16,017	15,448	14,918
23	19,887	19,684	19,481	19,284	19,144	18,975	18,773	18,601	18,172	17,772	17,348	16,912	16,558	16,151	15,808	15,027	14,483
24	19,837	19,404	19,191	19,002	18,849	18,687	18,452	18,188	17,825	17,413	16,977	16,529	16,180	15,739	15,184	14,591	14,033
25	19,377	19,134	18,909	18,708	18,542	18,346	18,117	17,819	17,464	17,040	16,592	16,131	15,746	15,309	14,742	14,137	13,564
26	19,107	18,853	18,617	18,403	18,222	18,013	17,770	17,457	17,089	16,652	16,191	15,717	15,315	14,863	14,282	13,684	13,077
27	18,827	18,562	18,313	18,086	17,891	17,666	17,408	17,081	16,699	16,250	15,775	15,287	14,808	14,399	13,805	13,174	12,571
28	18,536	18,259	17,998	17,758	17,547	17,307	17,034	16,692	16,295	15,832	15,343	14,840	14,405	13,918	13,310	12,665	12,047
29	18,234	17,945	17,671	17,417	17,191	16,935	16,645	16,288	15,876	15,399	14,895	14,378	13,924	13,420	12,797	12,138	11,503
30	17,908	17,600	17,311	17,039	16,798	16,522	16,213	15,834	15,401	14,905	14,381	13,845	13,368	12,845	12,208	11,536	10,886
31	17,517	17,189	16,885	16,595	16,317	16,038	15,702	15,280	14,817	14,291	13,745	13,187	12,680	12,126	11,479	10,809	10,155
32	17,057	16,731	16,391	16,075	15,821	15,520	15,142	14,723	14,222	13,697	13,129	12,583	12,053	11,462	10,801	10,150	9,532
33	16,612	16,278	15,918	15,571	15,297	14,990	14,599	14,153	13,648	13,117	12,564	11,999	11,456	10,838	10,165	9,525	8,910
34	16,081	15,743	15,378	15,010	14,707	14,396	14,019	13,572	13,072	12,543	11,982	11,397	10,839	10,202	9,516	8,877	8,239

Figure 8: Extrait des tables du BCAC-Coefficients de provision Incapacité et Invalidité

Un coefficient intègre la probabilité de maintien en incapacité ou en invalidité d'une personne dont l'âge à l'entrée en incapacité ou en invalidité est «  $x$  », l'entrée dans l'état ayant eu lieu «  $y$  » mois ou années avant la date de calcul. Concrètement, afin de calculer les provisions mathématiques, il sera procédé à une interpolation entre les coefficients correspondant aux âges  $x$  et  $x + 1$ , et aux durées  $y$  et  $y + 1$ .

### III - 3. La mise à jour des tables réglementaires du BCAC

Construites en 1996, les tables de maintien en arrêt de travail ne représentent probablement pas la sinistralité actuelle. D'où vient l'intérêt de les mettre à jour afin d'examiner si le risque d'arrêt de travail a évolué depuis 1996. La profession de l'assurance avait confié au BCAC la mission de mettre à jour des lois de maintien. Une étude a donc été initiée par le BCAC.

La mise à jour de ces lois permettra d'une part d'ajuster, si nécessaire, le niveau des provisions calculées à l'aide des barèmes actuels et dans le cadre de la réglementation actuelle (norme comptable actuelle).

A ce niveau, nous mentionnons qu'à l'époque de la construction des tables, il était admis, pour peu que l'individu puisse justifier d'une carrière complète, de prendre sa retraite à 60 ans. Or, cette faculté ayant évolué au regard des changements de

l'environnement économique et professionnel, les assureurs peuvent aujourd'hui verser des prestations d'incapacité pour des personnes de plus de 65 ans.

D'autre part, la mise à jour permettra de prendre en compte d'autres critères de segmentation. En effet, outre ces deux critères d'appréciation statistiques (âge et ancienneté), plusieurs critères d'analyse méritent d'être retenus.

Aussi, elle servira de base au calcul du Best Estimate, dans le cadre de Solvabilité 2, pour les sociétés qui n'auront pas construit leur table d'expérience.

Le présent rapport est ainsi le fruit des études réalisées dans le but de mettre à jour les tables réglementaires de maintien en Incapacité du BCAC. Ainsi, dans la suite on ne s'intéresse qu'au cas d'incapacité temporaire du travail.

# Partie 2 :

## Présentation des données et premières statistiques

# Chapitre 1

## Présentation des données

La construction d'une table de maintien en incapacité repose sur des données issues de l'observation d'un échantillon. Dans ce chapitre, ces données seront détaillées en premier lieu. Ensuite, un travail préliminaire de traitement des données aberrantes sera effectué, pour obtenir des résultats fiables.

## IV. Les fichiers des données

Afin de construire les nouvelles tables de maintien en incapacité/invalidité, le BCAC a fait une demande de données auprès de ses membres. Cette demande a pour but de regrouper les données représentatives du risque d'arrêt de travail.

Sept sociétés parmi les plus grandes compagnies d'assurance en France nous ont transmis des fichiers de données. Ces derniers présentent le format suivant:

Sujet	Colonne	Nature	Type
	1	Exercice	2011, 2010, 2009, 2008, 2007, 2006, 2005
Assuré	2	Identifiant	numérique
	3	Sexe	1 ou 2
	4	Millésime naissance	AAAA
	5	CSP	Cadre/Employé/Ouvrier
Contrat	6	Numéro contrat	numérique
	7	Contrat	Obligatoire
	8	Adhésion	Collective
	9	Franchise - nombre de jours	numérique
Risque / Prestation	10	Date arrêt de travail	JJMMAAAA
	11	Date début Indemnisation IJ	JJMMAAAA
	12	Date fin IJ	JJMMAAAA
	13	Nombre de jours indemnisés	numérique
	14	Motif sortie IJ	DC ; Reprise travail ; retraite ; en cours
	15	Montant annuel rente (risque IJ)	numérique
	16	Salaire ou montant de référence	numérique
	17	Date passage Invalidité	JJMMAAAA
	18	Catégorie Invalidité	1, 2 ou 3
	19	Montant annuel rente	numérique
	20	Date sortie invalidité	JJMMAAAA
	22	Motif sortie	DC ; Reprise travail ; retraite ; encours ; changement catégorie Invalidité

Tableau 4: Dessin de fichier de données relatives aux sinistres d'arrêt de travail

### IV - 1. La période d'observation

Les fichiers reçus contiennent les sinistres survenant à partir du 01/01/2005 jusqu'au 17/04/2012. En revanche, Il n'a pas été tenu compte des personnes entrées en incapacité (temporaire et permanente) après le 31/12/2011 dans le but d'éviter de travailler sur une information biaisée.

La période d'observation est ainsi fixée du 01/01/2005 au 31/12/2011 et la durée de 7ans nous semble assez suffisante.

## IV - 2. Variables concernant l'assuré

### ❖ L'âge de l'assuré

Sachant que l'âge de l'assuré est un critère généralement déterminant pour la sinistralité et que les tables réglementaires sont proposées par âge, notre objectif est de construire des tables de maintien qui seront fractionnées par âge.

L'âge étant la dimension principale des tables, il est important de déterminer l'âge de l'assuré à la survenance d'un arrêt de travail.

Pour cela nous posons :  $\hat{Age} = Exercice - Millésime\ naissance$

Tel que la variable *Exercice* représente l'année de la survenance du sinistre (année de l'arrêt de travail).

### ❖ L'identifiant

Il arrive qu'une personne soit assurée par plusieurs contrats différents. Afin de ne pas considérer un multi-détenteur comme  $x$  individus différents et donc  $x$  arrêts de travail, une « clé sinistre » correspondant au identifiant de l'assuré combiné avec la date de survenance de sinistre est créée.

### ❖ Autres variables

Il est important d'étudier l'impact de certaines variables sur le risque d'arrêt de travail. Dans ce sens, nous nous intéressons au sexe et à la catégorie socio-professionnelle de l'assuré. On distingue d'un côté les hommes et les femmes et de l'autre côté les cadres et les non cadres.

## IV - 3. Variables concernant le contrat

Seuls les contrats obligatoires à adhésion collective seront traités.

### ❖ Le numéro de contrat

Un assuré sinistré, après avoir repris son travail, peut être amené à cesser son activité de nouveau. C'est ce qu'on appelle des arrêts avec rechutes.

La variable « numéro de contrat » nous permet, en combinaison avec l'identifiant, de détecter ces arrêts avec rechutes afin de les regrouper en un seul arrêt dont la durée d'arrêt est égale à la somme de durées de chacun de ces arrêts avec rechutes.

### ❖ La franchise

Les contrats traités sont de diverses franchises. Celles-ci varient entre 0 et 195 jours.

Toutefois, la franchise n'est pas toujours précisée (valeur manquante) ce qui pose un réel problème car les sinistres avec franchise non nulle sont considérés pour des sinistres tronqués à gauche (nous verrons la notion de troncatures plus loin).

Dans ces cas, nous posons :

$$\text{Franchise} = \text{Date début indemnisation IJ} - \text{Date d'arrêt de travail}$$

## IV - 4. Variables concernant le risque

### ❖ Les variables de calcul

Les variables importantes dans le calcul des durées des sinistres :

- Date arrêt de travail
- Date début Indemnisation IJ
- Date fin IJ
- Nombre de jours indemnisés
- Date passage Invalidité
- Date sortie Invalidité

A partir de ces variables, on crée les variables suivantes :

$$\text{Ancienneté Incapacité} = \text{Franchise} + \text{Nombre de jours indemnisés}$$

$$\text{Ancienneté Invalidité} = \text{Date sortie Invalidité} - \text{Date passage Invalidité}$$

La variable, "*Nombre de jours indemnisés*" a été préférée aux variables "*Date début et fin indemnisation IJ*" car il peut y avoir des rechutes dont les IJ versées vont être cumulées aux IJ versées lors du premier arrêt.

### ❖ Les motifs de sortie

Nous avons identifié plusieurs types de sortie de l'arrêt de travail : la reprise d'activité, le décès, le passage à la retraite, le congé de maternité, la fin de garantie et la « non-sortie » à la fin de la période d'observation.

L'échéance de la garantie (comme le passage à la retraite) ou du contrat (comme la fin de garantie) lorsque l'assuré est encore en arrêt de travail, ainsi que toute limitation contractuelle de l'indemnisation, seront considérées comme une censure puisque l'assuré sort de l'observation sans pour autant reprendre son activité.

Le décès sera par contre considéré comme une sortie de l'état d'incapacité ou d'invalidité puisque celui-ci met fin à tout arrêt de travail. Le décès est donc une vraie sortie de l'arrêt de travail, et non une censure.

Pour le cas d'incapacité, le "*passage en Invalidité*" est considéré comme une vraie sortie même si la durée passée en incapacité est inférieure à 3ans.

## V. Gestion des censures et des troncatures

### V - 1. Notion des censures et des troncatures

Pour élaborer des tables de maintien en arrêt de travail, il faut pouvoir observer le maintien de chaque sinistré dans sa totalité. Or, notre échantillon est limité à la période d'observation allant du 1er janvier 2005 au 31 décembre 2011. De ce fait, il est possible que certains arrêts ne soient pas observés dans leur intégralité.

Dans nos fichiers de données, certains arrêts étaient déjà présents au début de la période d'observation. Les données sont dites tronquées puisque nous n'exploiterons l'information relative à ces arrêts que partiellement, c'est-à-dire à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2005. C'est un cas fréquent pour les invalides qui ont une ancienneté supérieure à 7 ans (la durée de l'observation).

A l'opposé, certains arrêts ne sont pas clos au moment de la fin de l'observation. Nous parlerons de données censurées puisque nous ne tiendrons compte de leur information que jusqu'à la date de fin d'observation, à savoir le 31 décembre 2011. Autrement dit, à la fin de la période d'observation, nous savons que la personne est toujours en arrêt de travail, mais nous perdons l'information sur le « devenir » de son arrêt de travail. Ce sont les cas où les motifs de sortie sont autres que la reprise de travail ou le décès.

Ne tenir compte que des données observées dans leur intégralité n'est pas la bonne solution puisque les censures et troncatures affectent la vraisemblance et les paramètres estimés. Les estimateurs seraient alors biaisés. Intuitivement, nous pouvons dire que :

- Si nous considérons la censure comme un temps de survie, la loi de maintien sera sous-estimée ;
- Si nous omettons la troncature, les taux de sortie d'arrêt de travail seront sur-estimés.

Le schéma ci-dessous synthétise les différentes observations possibles :

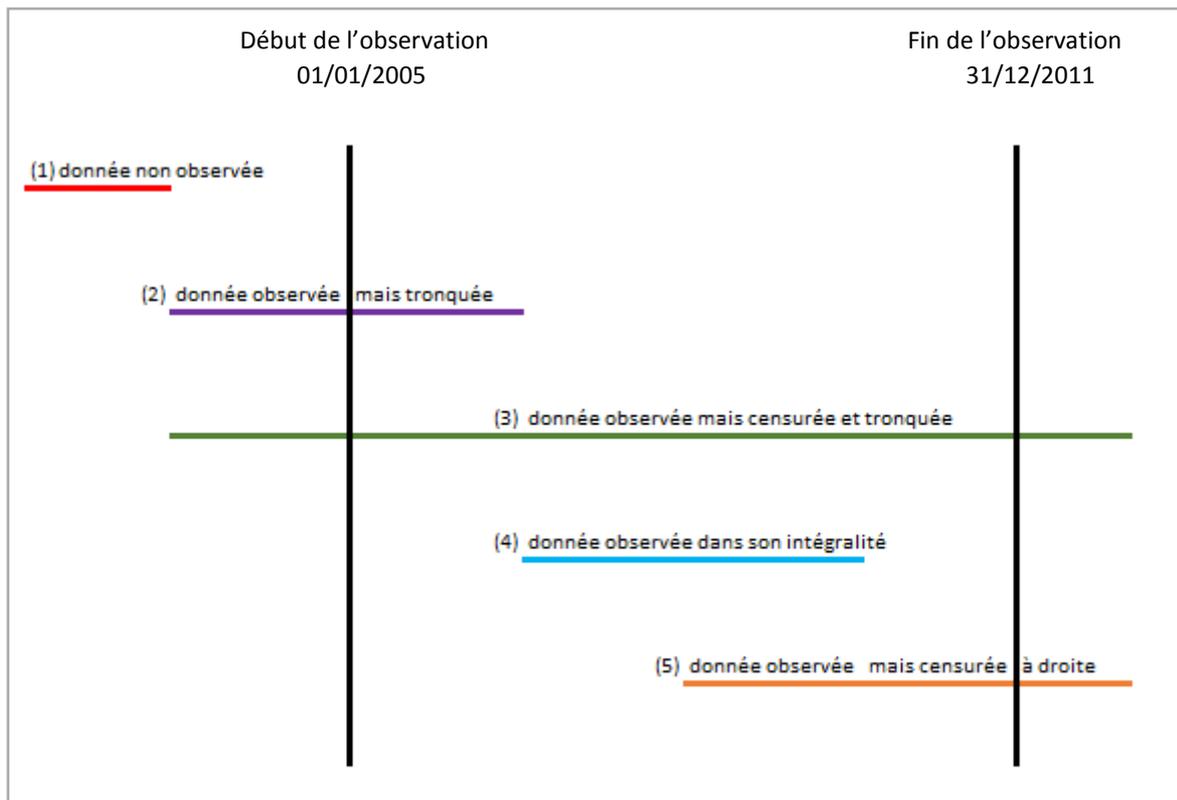


Figure 9: Schéma des observations possibles

- (1) L'arrêt de travail a débuté et s'est terminé avant la période d'observation. L'information quant au sinistre ne sera pas utilisée lors de l'analyse ;
- (2) L'arrêt de travail a débuté avant le début de la période d'observation, mais s'est terminé durant cette dernière. L'information, bien que tronquée, sera utilisée à compter du début de la période d'observation ;
- (3) L'arrêt de travail a débuté avant le début de la période d'observation et s'est terminé après la fin de la période d'observation. L'information sera traitée partiellement puisqu'elle est tronquée et censurée. Seules les valeurs durant la période d'observation seront utilisées ;
- (4) Le début et la fin de l'arrêt de travail se situent dans la période d'observation. L'information sera exploitée dans son intégralité ;
- (5) Le début de l'arrêt de travail est inclus dans la période d'observation. C'est la fin de l'arrêt de travail qui est postérieure à la fin de la période d'observation. L'information est dite censurée.

## V - 2. Traitement des censures et des troncatures

### 1. Censures

Afin de prendre en compte les sinistres récents pour pouvoir avoir une base de données représentative également de la sinistralité actuelle, il faut considérer comme censurés les sinistres sans clôture.

Les sinistres dont la date de fin pour une autre raison que la reprise de travail, le décès ou le passage en invalidité pour le risque d'incapacité (date de fin de garantie, nombre d'indemnisation maximal...) sont également censurés.

### 2. Troncatures

Pour le risque d'incapacité, on ne connaît ni le nombre ni la distribution des arrêts de travail qui sont inférieurs à la durée de la plus petite franchise garantie sur les contrats. Les sinistres sont donc tronqués à gauche par la durée de la franchise. De même, les sinistres dont la durée passée en invalidité est supérieure à la durée de l'observation sont traités comme des troncatures à gauche.

## VI. Retraitement des données

Cette étape de traitement de données est très importante et nécessite énormément de temps et de précision. Ceci est dû à deux raisons :

- ❖ Il faut s'assurer d'avoir une base « propre » afin de pouvoir garantir des résultats fiables.
- ❖ Il faut supprimer le minimum des données d'une part par souci d'avoir à notre disposition le plus de données possible mais d'autre part par souci de ne pas supprimer des sinistres qui pourraient avoir des caractéristiques particulières qui par leur suppression biaiserait le reflet que pourrait avoir notre base. Pour cela, la répartition des sinistres supprimés selon les différentes caractéristiques est comparée à celle de la répartition du portefeuille. Par exemple, si tous les sinistres supprimés s'avéraient être des sinistres sur les femmes, l'effet que peut avoir le sexe de l'assuré sur le maintien serait faussé.

Le détail des travaux de retraitement des données par société est décrit ci-après.

### VI - 1. Société 1

Le fichier contient avant le retraitement de données 89 927 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ Identifiant : il est unique donc les rechutes sont déjà traités et il y'a pas de répétition des arrêts à supprimer.

- ❖ Période d'observation : Tous les arrêts sont survenus entre 01/01/2005 et 31/11/2011. (Aucune suppression)
- ❖ La date début IJ de 10 558 arrêts est non renseignée. Il s'agit des arrêts sans suite (Etat sinistre = « ss suite »), ils sont retraités comme suit :
  - Si  $Montant\ IJ = 0$ , alors supprimer l'arrêt (suppression de 1 147 arrêts)
  - Si  $Montant\ IJ \neq 0$ , alors on pose :
 
$$date\ début\ IJ = date\ AT + franchise$$
- ❖ Pour la date de fin IJ, on a trois dates : date fin période IT, date fin prestation et date clôture. On remarque que date fin période IT = date fin prestation La date fin IJ est construite de la manière suivante :
  - Si Catégorie sinistre = Invalidité,
    - Si  $Montant\ IJ = 0$ , il s'agit alors des passages directs en invalidité qu'on supprime (suppression de 3 426 arrêts).
    - Sinon, on pose :
 
$$date\ fin\ IJ = date\ passage\ Inval$$

$$Etat\ sinistre = "Passage\ Inval"$$
  - Si Catégorie sinistre = Incapacité,
    - Si la date fin période IT est renseignée, alors on pose :
 
$$date\ fin\ IJ = date\ fin\ période\ IT$$
 Pour ces cas, on a déjà :
 
$$Nbres\ jours\ indem = date\ fin\ période\ IT - date\ début\ IJ$$
    - Sinon :
      - Si date clôture est renseignée, alors on pose :
 
$$date\ fin\ IJ = date\ clôture$$

$$Nbres\ jours\ indem = date\ clôture - date\ début\ IJ$$
      - Sinon (aucune des trois dates n'est renseignée). Ce sont des arrêts en cours (Etat sinistres = « En cours »), on pose alors :
 
$$date\ fin\ IJ = 31/12/2011$$

$$Nbres\ jours\ indem = date\ fin\ IJ - date\ début\ IJ$$
- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :
 
$$Age\ Survenance = Exercice - Année\ naissance$$
 On ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans (suppression de 194 arrêts)
- ❖ Les arrêts dont l'état de sinistre est autre que « Clôture » ou « Passage Inval » sont considérés comme des arrêts censurés.
- ❖ La CSP est renseignée. Les arrêts sont classés selon trois catégories : cadres, non cadres et ensemble du personnel.

A la fin de retraitement des données, on obtient 85 160 arrêts.

## VI - 2.Société 2

Le fichier contient avant le retraitement de données 53 2288 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ Suppression des arrêts qui ont le même identifiant et deux numéros de contrats différents ; il s'agit de même arrêts de travail traité par deux contrats différents.
- ❖ Retraitement des rechutes : deux arrêts qui ont le même identifiant et le même numéro de contrats dont la différence entre les dates AT est moins de 60 jours sont regroupés en un seul arrêt dont le nombre de jours indemnisés est égale à la somme de nombres de jours indemnisés des deux arrêts.
- ❖ Il reste 51 294 arrêts.
- ❖ Période d'observation : on ne garde que les arrêts dont la date est comprise entre 01/01/2005 et 31/11/2011.
- ❖ Il reste 41 531 arrêts.
- ❖ La franchise n'est pas renseignée et la date AT = date début IJ. aussi, l'écart entre « le nombre de jours indemnisés » et « la différence entre la date de début et la date de fin d'indemnisation » est nul dans 89% des cas. Donc la franchise ne peut pas être calculée. Ainsi, pour le calcul de l'ancienneté à l'entrée en incapacité, on utilise les dates.
- ❖ Le nombre de jours indemnisés est retraité de la manière suivante :
  - Si *nbre jours indem* = 0
    - Si *Montant IJ* = 0, alors supprimer l'arrêt (suppression de 53 arrêts)
    - Si *Montant IJ* ≠ 0, alors on pose *Nbre jours Indem* = 1
  - Sinon :
    - Si la date fin Ij est renseignée, alors on vérifie que :
 
$$date\ début\ IJ < date\ fin\ IJ$$
 Suppression de 26 arrêts
    - Sinon :
      - ✓ Si *nbre jours indem* ≤ 1 096, il s'agit des arrêts en cours, on pose alors :
 
$$date\ fin\ IJ = 31/12/2011$$

$$Nbre\ jours\ indem = date\ fin\ IJ - date\ debut\ IJ$$

$$motif\ sortie\ IJ = "En\ cours"$$
      - ✓ Sinon, il s'agit des arrêts dont on a perdu l'information. Suppression de 2 169 arrêts

- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :  

$$\text{Age Survenance} = \text{Exercice} - \text{Année naissance}$$
 On ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans (suppression de 113 arrêts)
- ❖ Les arrêts dont le motif de sortie est autre que « Reprise », « Décès » ou « Passage Inval » sont considérés comme des arrêts censurés.
- ❖ La CSP est non renseignée. Tous les arrêts sont classés dans la catégorie de l'ensemble du personnel.

A la fin de retraitement des données, on obtient 39 170 arrêts.

### VI - 3. Société 3

Le fichier contient avant le retraitement de données 96 772 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ Suppression des arrêts qui ont le même identifiant et deux numéros de contrats différents ; il s'agit de même arrêts de travail traité par deux contrats différents.
- ❖ Retraitement des rechutes : Les rechutes sont retraitées mais sans supprimer le premier arrêt.
- ❖ Il reste 96 050 arrêts
- ❖ Période d'observation : Tous les arrêts sont survenus entre 01/01/2005 et 31/11/2011. (Aucune suppression)
- ❖ La franchise n'est toujours pas renseignée. Si c'est le cas, elle vérifie :  

$$\text{Franchise} = \text{date fin IJ} - \text{date début IJ}$$
- ❖ On prend donc comme franchise pour tous les arrêts la différence entre les deux dates.
- ❖ Les cas d'invalidité sont traités à part dans des lignes séparées. Pour détecter ces cas, on a recours à la date de sortie d'invalidité. si cette date n'est pas égale à un vide, on supprime l'arrêt. (suppression de 894 arrêts).
- ❖ Pour 4 978 arrêts, seule la date d'arrêt de travail est communiquée. Aussi le motif de sortie n'est pas communiqué. Ce manque d'information nous oblige à supprimer ces 4 978 arrêts.
- ❖ Les cas où seule la date de fin d'indemnisation manque sont traités comme suit :
- ❖ On pose:  

$$\text{date fin IJ} = 31/12/2011$$
- ❖ Et on recalcule le nombre de jours indemnisés :  

$$\text{Nbre jours indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$
  - Si  $\text{Nbre jours indem} \leq 1096$ , alors ce sont des arrêts en cours qu'on garde

- Sinon. Ce sont des cas où on a perdu de l'information (suppression de 174 arrêts)
- ❖ Les cas où le nombre de jours indemnisés est nul sont retraités de la manière suivante :
  - Si Montant IJ = 0, alors supprimer l'arrêt (suppression de 784 arrêts)
  - Si Montant IJ ≠ 0, alors on pose :
 
$$\text{Nbre jours Indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$
- ❖ Pour la CSP, on classe les cadres et les non cadres, on supprime les TNS (641 arrêts) et le reste est considéré comme ensemble du personnel.
- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :
 
$$\text{Age Survenance} = \text{Exercice} - \text{Année naissance}$$

L'année de naissance n'est pas communiquée dans 4 975 cas, on les supprime et on ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans.
- ❖ Les arrêts dont le motif de sortie est autre que « Reprise de travail », « Assuré décédé », « Cessation des prestations SS » ou « Passage en invalidité » sont considérés comme des arrêts censurés.

A la fin de retraitement des données, on obtient 83 622 arrêts.

#### VI - 4. Société 4

Le fichier contient avant le retraitement de données 104 334 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ Identifiant : il est unique donc les rechutes sont déjà traités et il y'a pas de répétition des arrêts à supprimer.
- ❖ Période d'observation : Tous les arrêts sont survenus entre 01/01/2005 et 31/11/2011. (Aucune suppression)
- ❖ Le nombre de jours indemnisés de 3831 arrêts est nul. Il est retraité de la manière suivante :
  - Si Montant IJ = 0, alors supprimer l'arrêt ; la plupart de ces arrêts sont des passages directs en invalidité. (Suppression de 93 arrêts)
  - Sinon :
    - Si date debut IJ ≠ date fin IJ : on pose
 
$$\text{Nbre jours indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$
    - Sinon, alors on pose :
 
$$\text{Nbre jours Indem} = 1$$

Il s'agit des cas particuliers qui après vérification ont une journée d'indemnisation et non 0
- ❖ Pour tous les arrêts, on a :

$$\text{Nbre jours Indem} \leq 1\ 096$$

- ❖ Pour la CSP, on classe les cadres et les non cadres, on supprime les TNS (282 arrêts) et le reste est considéré comme ensemble du personnel.
- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :
 
$$\text{Age Survenance} = \text{Exercice} - \text{Année naissance}$$
 On ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans (suppression de 256 arrêts)
- ❖ En limitant la franchise à 195 jours, nous supprimons 468 arrêts.
- ❖ Le motif de sortie IJ de 845 des arrêts est non renseigné. On remarque que pour ces arrêts la date fin IJ = date Passage Invalidité. Le motif de sortie est donc remplacé par « Passage en Invalidité ».
- ❖ Les arrêts dont le motif de sortie est autre que « Reprise de travail », « Décès », « Cessation IJ SS », Suite control médical » ou « Passage en invalidité » sont considérés comme des arrêts censurés.

A la fin de retraitement des données, on obtient 103 241 arrêts.

## VI - 5.Société 5

Le fichier reçu contient avant le retraitement de données 35 882 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ Identifiant : il est unique donc les rechutes sont déjà traités et il y'a pas de répétition des arrêts à supprimer.
- ❖ Période d'observation : on ne garde que les arrêts dont la date est comprise entre 01/01/2005 et 31/11/2011.
- ❖ Il reste 32 555 arrêts.
- ❖ Franchise non renseignée : l'écart entre « le nombre de jours indemnisés » et « la différence entre la date de début et la date de fin d'indemnisation » peut être dû soit aux rechutes, soit à la franchise.
- ❖ Tenant en compte que les contrats ont généralement la même franchise, on calcule l'écart pour les arrêts qui ont le même numéro de contrat et on prend comme franchise, pour tous ces arrêts, la durée la plus fréquente.
- ❖ Au début on a :  $\text{date AT} = \text{date début IJ} + \text{franchise}$  après le calcul de la franchise, on pose :
 
$$\text{date début IJ} = \text{date AT} - \text{franchise}$$
- ❖ Dans 971 des cas, la date de fin d'indemnisation est non renseignée et le nombre de jours indemnisés est nul donc il ne peut pas nous servir pour calculer la date de fin d'indemnisation. Ces cas sont retraités selon le motif de sortie IJ comme suit :
  - 415 arrêts ont comme motif de sortie « Direct dossier invalidité » : on les supprime.

- 111 arrêts ont comme motif de sortie « Changement garantie » ça veut dire un passage en invalidité. On pose donc :
 
$$\text{date fin IJ} = \text{date Passage en Invalidité}$$

$$\text{Nbre jours indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$
- 25 arrêts ont comme motif de sortie « En cours ». On pose :
 
$$\text{date fin IJ} = 31/12/2011$$

$$\text{Nbre jours indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$
- 420 arrêts ont comme motif de sortie « Clôture suite refus ». on les supprime.
- ❖ A part les arrêts déjà retraités, 3332 arrêts ont un nombre de jours d'indemnisation nul. Ces cas sont retraités comme suit :
  - Si  $\text{date debut IJ} \neq \text{date fin IJ}$  : on pose
 
$$\text{Nbre jours indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$
  - Sinon on les supprime puisque la durée passée en incapacité est nulle. Ces cas représentent 283 arrêts.
- ❖ 86 des arrêts ont un nombre de jours indemnisés supérieur à 1096 (généralement ceci est dû aux rechutes) puisque ces nombres ne dépassent pas trop 1096, on les a remplacés par 1096 dans le but de ne pas supprimer ces observations.
- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :
 
$$\text{Age Survenance} = \text{Exercice} - \text{Année naissance}$$

On ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans (suppression de 123 arrêts)
- ❖ En limitant la franchise à 195 jours, nous supprimons 177 arrêts.
- ❖ Les arrêts dont le motif de sortie est autre que « Reprise de travail », « Décès » ou « Changement garantie » sont considérés comme des arrêts censurés.
- ❖ CSP est non renseignée.

A la fin de retraitement des données, on obtient 31137 arrêts.

## VI - 6.Société 6

Le fichier contient avant le retraitement de données 36 789 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ Identifiant : il n'est pas renseigné mais les rechutes sont déjà traitées.
  - ❖ Période d'observation : on ne garde que les arrêts dont la date est comprise entre 01/01/2005 et 31/11/2011.
- Il reste 36 236 arrêts.

- ❖ La franchise renseignée est la franchise réelle. Elle est égale à la différence entre la date de l'arrêt de travail et la date de début IJ.
- ❖ Le nombre de jours indemnisés est retraité de la manière suivante :
  - Si nbre jours indem = 0
    - Si Montant IJ = 0, alors supprimer l'arrêt (suppression de 879 arrêts)
    - Si Montant IJ ≠ 0, alors on pose Nbre jours Indem = 1
  - Sinon :
    - Si la date fin Ij est renseignée, alors on vérifie que :  
date AT ≤ date début IJ < date fin IJ
    - Suppression de 286 arrêts
    - Sinon : il s'agit des arrêts en cours, on pose alors :  
date fin IJ = 31/12/2011  
Nbre jours indem = date fin IJ – date debut IJ  
motif sortie IJ = "En cours"
- ❖ Pour la CSP, on classe les cadres et les non cadres, on supprime les TNS (81 arrêts) et le reste est considéré comme ensemble du personnel.
- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :  
Age Survenance = Exercice – Année naissance  
On ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans (suppression de 47 arrêts)
- ❖ En limitant la franchise à 195 jours, nous supprimons 158 arrêts.
- ❖ Les arrêts dont le motif de sortie est autre que « Reprise de travail », « Décès » ou « Passage en invalidité » sont considérés comme des arrêts censurés.

A la fin de retraitement des données, on obtient 34 785 arrêts.

## VI - 7.Société 7

Le fichier contient avant le retraitement de données 18 112 arrêts de travail. Les données sont retraitées de la manière suivante :

- ❖ On regroupe les arrêts dont le type de risque est l'incapacité et les Invalides de moins de deux ans auquel on ajoute un an.
- ❖ On supprime des incapables passant en invalidité et restant moins de deux ans pour ne pas les compter deux fois. (suppression de 1 156 arrêts).
- ❖ Les rechutes sont déjà traitées.
- ❖ Période d'observation : on ne garde que les arrêts dont la date est comprise entre 01/01/2005 et 31/11/2011.  
Suppression de 2 448 arrêts.
- ❖ La franchise est toujours égale à 3 mois (90 jours).

- ❖ Les dates communiquées sont la date d'arrêts de travail et la date de fin d'indemnisation. La date de début d'indemnisation est calculée à partir de la relation suivante :

$$\text{date début IJ} = \text{date AT} + \text{franchise}$$

- ❖ La date de fin IJ n'est pas communiquée pour 2274 des cas. Il s'agit des arrêts dont l'état est « En cours », la date fin IJ est donc remplacée par 31/12/2011.
- ❖ Le nombre de jours indemnisés est calculé:

$$\text{Nbre jours indem} = \text{date fin IJ} - \text{date debut IJ}$$

- ❖ 126 des arrêts ont un nombre de jours indemnisés supérieur à 1096 (généralement ceci est dû aux rechutes) puisque ces nombres ne dépassent pas trop 1096, on les a remplacés par 1096 dans le but de ne pas supprimer ces observations.
- ❖ On calcule l'âge à la survenance de l'arrêt de travail en posant :

$$\text{Age Survenance} = \text{Exercice} - \text{Année naissance}$$

On ne garde que les âges comprise entre 20 et 65 ans (suppression de 54 arrêts)

- ❖ Les arrêts dont l'état de sinistre est autre que « Clôture », ou « Passage en invalidité » sont considérés comme des arrêts censurés.

A la fin de retraitement des données, on obtient 14 454 arrêts.

## VI - 8. Résultat de traitement

Le tableau ci-dessous présente la volumétrie des données traitées.

Société	Volume avant retraitement	Volume après retraitement	% Supprimé
Société 1	89 927	85 160	-5,3%
Société 2	53 228	39 170	-26,4%
Société 3	96 772	83 622	-13,5%
Société 4	104 334	103 241	-1,0%
Société 5	35 882	31 137	-13,2%
Société 6	36 789	34 785	-5,4%
Société 7	18 112	14 454	-20,2%
<b>Total</b>	<b>435 044</b>	<b>391 569</b>	<b>-9,9%</b>

Tableau5 : répartition du volume avant et après retraitement des données

Le traitement des données a conduit à une suppression de 9,9% des sinistres. Ainsi, nous obtenons un portefeuille global composé de 391 569 arrêts de travail.

Les corrections apportées aux données initiales permettent d'obtenir une base plus saine pour commencer notre étude sur les lois de maintien Incapacité. Ainsi, nous débuterons, dans le chapitre qui suit, par une étude statistique pour mieux connaître les caractéristiques descriptives de notre portefeuille global.

# Chapitre 2

## Statistiques descriptives

Nous présenterons, dans ce chapitre, une série de statistiques descriptives sur la base obtenue grâce aux retraitements. Cela nous permettra d'avoir une meilleure connaissance de notre portefeuille de sinistres.

## VII. Pour le risque d'incapacité

Après avoir retraité les données, nous obtenons un volume global de 391 569 arrêts dont la répartition selon les sociétés participantes est la suivante :

Le portefeuille contient 391 569 arrêts de travail temporaire, dont 38 098 sont censurés à droite, soit 9,7% de l'effectif global.

Type d'arrêt	Fréquence	Pourcentage
Censuré	38 098	9,73%
Non censuré	353 371	90,27%
Total	391 569	100,00%

Tableau 6: La part des données censurées

La répartition selon les sociétés participantes est la suivante :

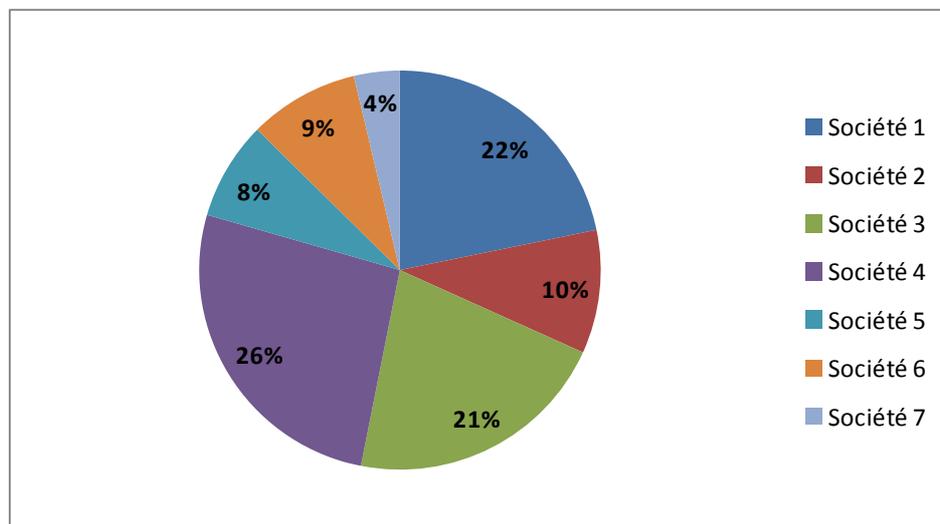


Figure 10 : Répartition du volume selon société

La variable "âge à la survenance" du sinistre se caractérise par une moyenne de 42 et un écart-type de 10,76. La variable "ancienneté en incapacité" se caractérise par une moyenne de 131 et un écart-type de 181,11.

Cependant, concernant cette deuxième variable, ces résultats sont peu significatifs, à cause de la présence de durées censurées. Ainsi, en excluant les données censurées, la variable "âge à la survenance" du sinistre a une moyenne de 41 et un écart-type de 10,52 et la durée moyenne d'arrêt pour les individus non censurés est de 125 et l'écart-type de 176,78.

## VII - 1. Facteurs influents sur la durée de maintien liés à l'assuré

### 1. L'Age à la survenance de l'arrêt de travail

La durée de maintien en incapacité dépend significativement de l'âge. Plus la personne est âgée, plus celle-ci risque de mettre du temps à se rétablir en cas de sinistre. Le graphique ci-dessous montre l'impact de l'âge à la survenance de l'arrêt de travail sur la durée moyenne de maintien en incapacité.

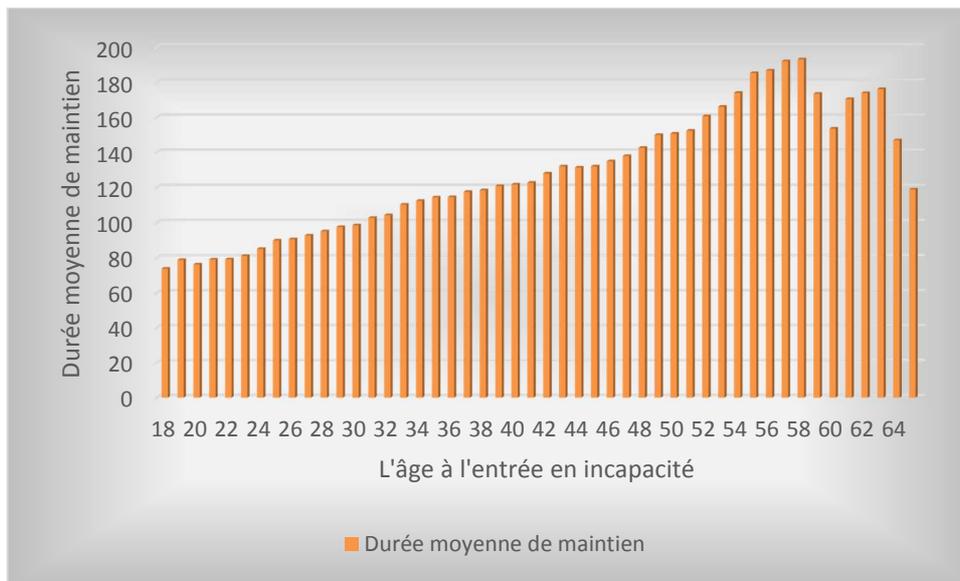


Figure 11: L'impact de l'âge sur la durée moyenne de maintien en incapacité

Un assuré qui entre en arrêt à 55 ans reste en moyenne 185 jours, 70 jours de plus qu'un assuré qui entre en arrêt à 35 ans (il reste en arrêt 115 jours en moyenne).

On remarque que comme prévu la durée de maintien croît avec l'âge. Toutefois, deux creux sont observés : l'un pour les individus ayant 60 et 61 ans et l'autre pour ceux ayant 64 et 65 ans. Ces deux creux peuvent être expliqués par les départs anticipés en retraite, qui raccourcissent le maintien en incapacité. Par ailleurs, l'écart-type croît au cours du temps.

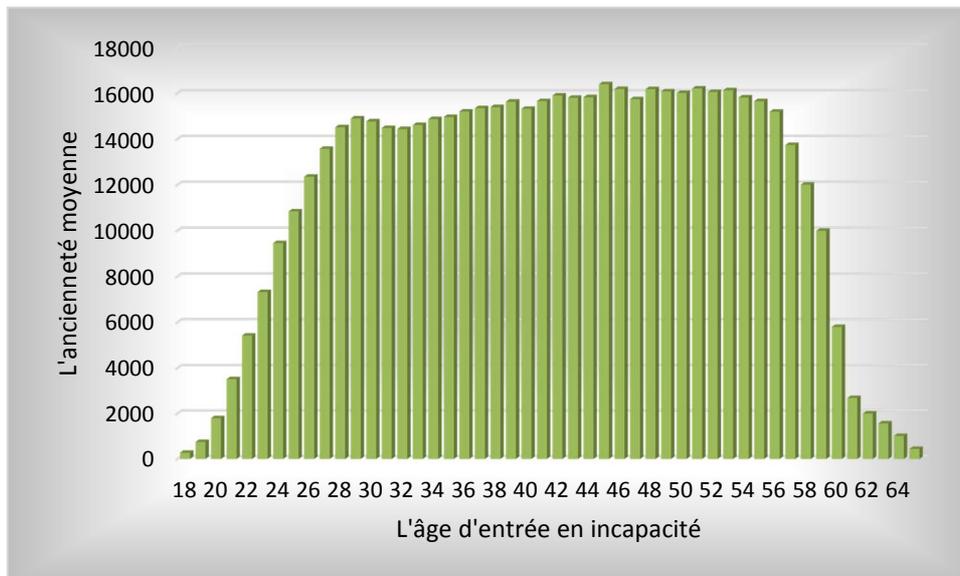


Figure 12 : La répartition de la population selon l'âge d'entrée en incapacité

Par rapport à la répartition de la population selon les âges à la survenance de l'arrêt de travail, on remarque, comme le montre le graphique ci-dessus que les sinistres semblent être symétriquement répartis, avec un nombre plutôt constant pour les âges de 26 à 58 ans.

## 2. Le sexe

Après avoir étudié l'influence de l'âge d'entrée en arrêt de travail sur la durée de maintien, il est le temps de vérifier à quel point le sexe de l'assuré peut impacter l'ancienneté en incapacité.

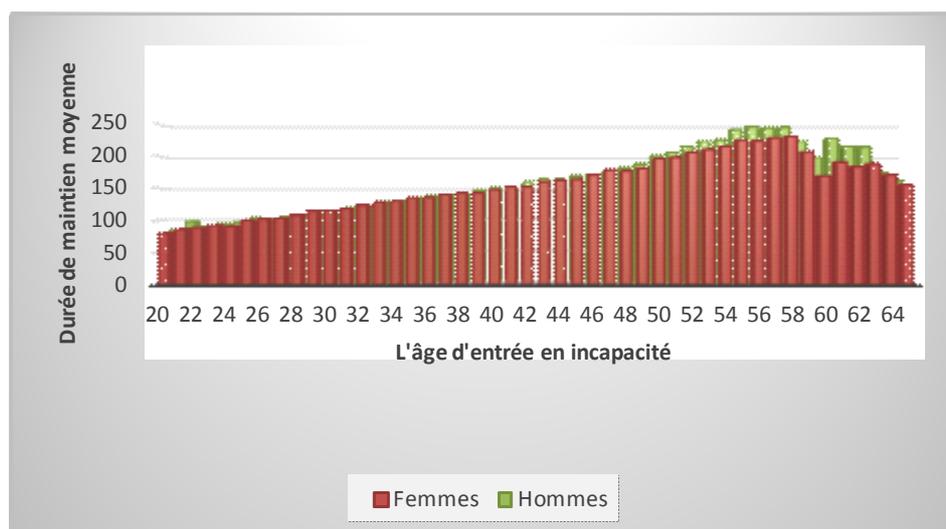


Figure 13: Impact du sexe sur la durée moyenne de maintien

On remarque qu'il ya un tout petit écart pour certaine âge où les femmes sortent plus vite que les hommes.

D'une manière globale, les femmes représentent 52,5% de notre échantillon contre 47.5% des hommes.

Sexe	Effectif	Proportion
Hommes	185 831	47,46%
Femmes	205 738	52,54%
Total	391 569	100,00%

Tableau 7 : répartition des données selon le sexe

La répartition des assurés selon le sexe pour chaque âge est comme suit :

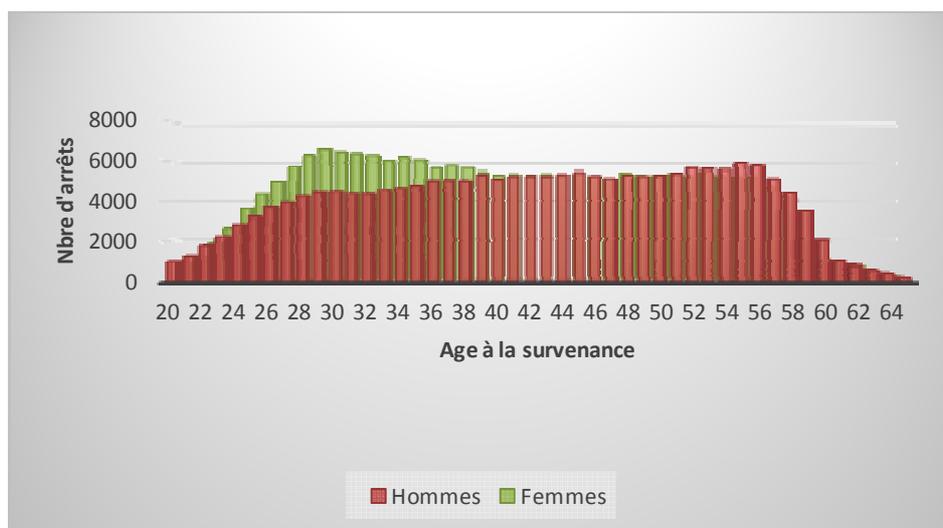


Figure 14: L'arrêt de travail par sexe selon l'âge d'entrée en incapacité

En observant la variable sexe, nous voyons qu'il y a une majorité de femmes pour certains âges (entre 28 et 38 ans).

### 3. La catégorie Socio-professionnelle

Pour la catégorie socio-professionnelle (CSP), nous allons nous intéresser aux catégories suivantes : les cadres, les non cadres et l'ensemble du personnel. Avant d'examiner l'impact de la CSP sur la durée moyenne de maintien, nous étudions d'abord comment elle est répartie notre population selon ce critère.

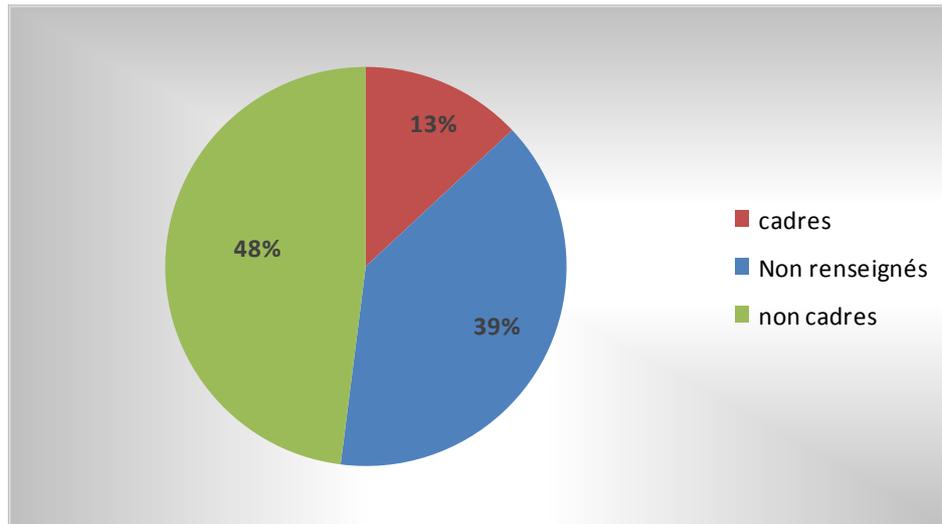


Figure 15: La répartition des données selon la CSP

Nous remarquons que les non-cadres présentent presque la moitié de notre population. Cela peut s'expliquer par la pénalité du travail exercé. Les cadres ne représentent que 13% de la population générale.

A présent, nous examinons l'influence de la CSP sur l'ancienneté en incapacité.

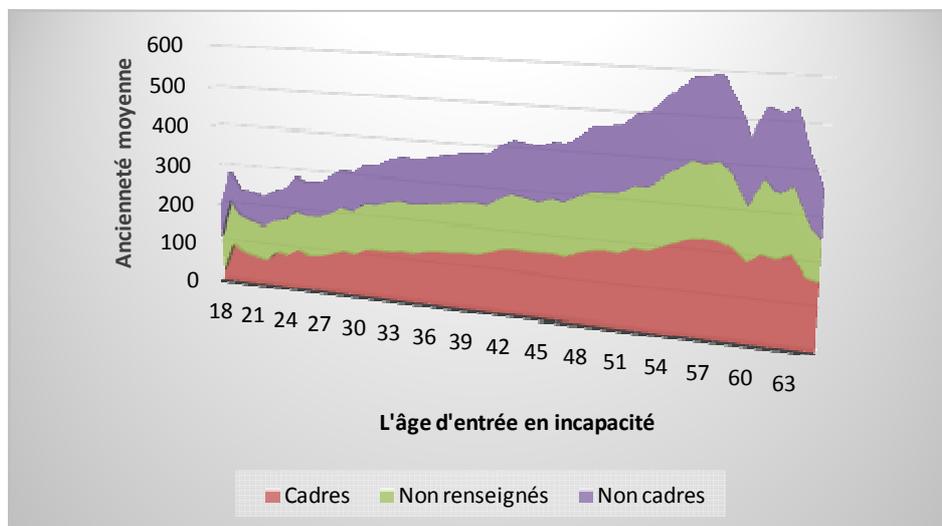


Figure 16: Impact de la CSP sur la durée de maintien moyenne

Sans surprise, nous constatons qu'en moyenne les non-cadres sortent de l'incapacité moins vite que les cadres et l'ensemble du personnel représente un état en milieu entre les cadres et les non-cadres.

Le comportement des différentes catégories est similaire par rapport à l'âge d'entrée en arrêt de travail puisque les courbes sont parallèles.

Les caractéristiques de l'assuré (âge, sexe, CSP) influence non seulement sur la durée de maintien mais aussi elles peuvent être prise en compte pour fixer certains paramètres liés à la garantie souscrite à savoir la franchise.

## VII - 2. Facteurs influents sur la durée de maintien liés au contrat

### 1. La franchise

Les garanties pour le risque d'incapacité proposent généralement des franchises différentes. Le graphique ci-dessous montre la répartition des arrêts de travail selon la franchise du contrat :

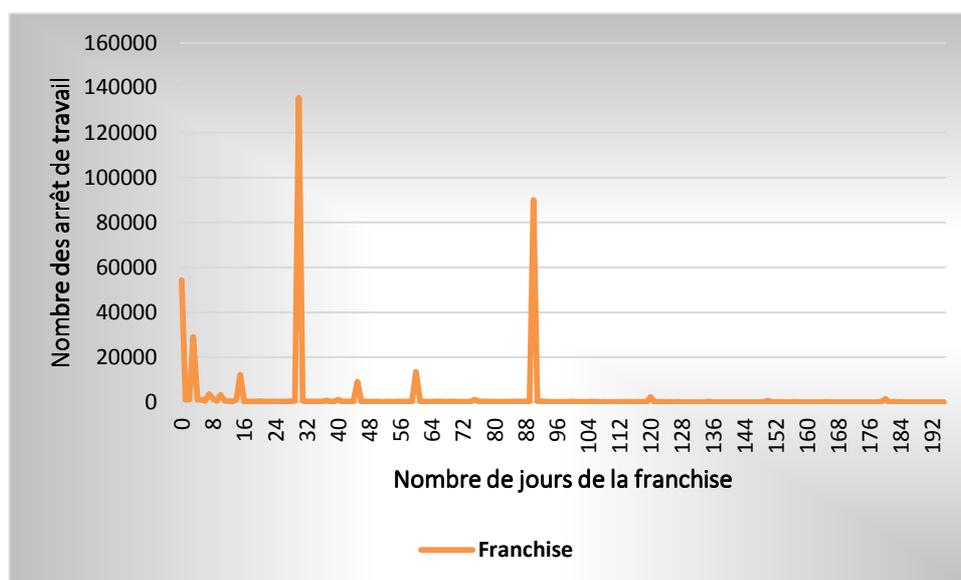


Figure 17: La répartition des sinistres selon la durée de la franchise

Nous constatons que le graphe contient des pics très forts. Ceux-ci correspondent aux franchises dont la durée est égale à 30 jours et 90 jours. Et d'autres moins forts, correspondent aux durées de franchise de 3 jours, 15 jours, 45 jours, 60 jours, 120 jours et 180 jours.

Nous étudions l'influence de la franchise sur la durée moyenne de maintien en tenant compte des franchises nulles et des trois forts pics. Le graphe suivant illustre cet impact :

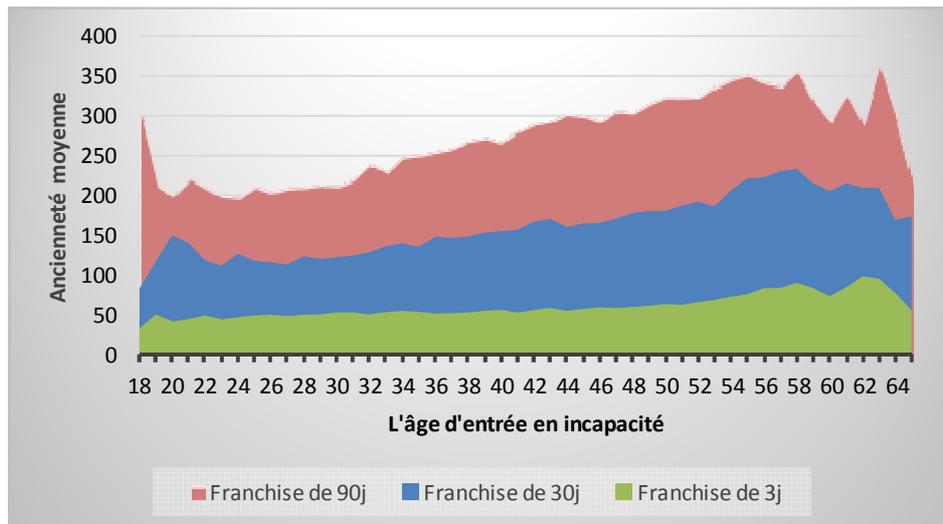


Figure 18: L'impact de la franchise sur la durée moyenne de maintien

La franchise joue donc un rôle important dans la durée des arrêts de notre base de données. Plus la franchise est importante plus la durée du sinistre va avoir tendance à être importante. Cela peut s'expliquer par différentes raisons dont les suivantes :

- ❖ L'assuré ne va pas déclarer un sinistre qui n'a pas dépassé la franchise. Par exemple, pour la franchise de 90 jours, il n'y a aucun sinistre de moins de trois mois pris en compte dans le calcul de la durée moyenne de maintien.
- ❖ Une franchise de 90 jours va donc être traitée moins chère qu'une franchise de 30 jours. Les sinistrés des franchises plus grandes sont des personnes qui peuvent être plus à risque à la souscription du contrat (par exemple des personnes âgées).

Après avoir décrit notre population et étudié l'impact des différentes variables sur la durée de maintien en incapacité, il est le temps de reprendre tout ce qu'on a fait mais cette fois pour l'invalidité.

## VIII. L'intérêt de la segmentation

Dans ce chapitre, nous avons étudié les caractéristiques descriptives de notre portefeuille ainsi que l'influence de certaines variables sur le risque de maintien. En effet, plus une variable aura une influence importante sur la durée des sinistres, plus il peut être intéressant de séparer le risque de maintien selon cette variable.

Une segmentation selon différentes variables met à disposition de l'assureur une probabilité de survie de sinistre qui dépend de différents paramètres et donc un provisionnement plus fidèle des sinistres en cours.

Cependant pour chaque paramètre, l'assureur doit avoir à sa disposition la durée probable de maintien en incapacité pour un assuré entre 20 et 65 ans et un sinistre entre 0 et 1095 jours d'ancienneté.

Pour se permettre d'effectuer une segmentation fine selon différentes variables, nous devons avoir à notre disposition un portefeuille important de sinistres pour chacune des variables explicatives.

Effectivement, nous avons un volume très important mais si on prend, par exemple le cas des cadres. Ces derniers ne représentent que 13% ce qui est équivalent à 49 116 arrêts. Ce volume ne peut être suffisant pour avoir des bonnes estimations par âge.

Par conséquent dans le choix de la segmentation, il faut arbitrer entre l'influence de la variable et la conséquence sur l'échantillonnage qui en résulte sur la base de données. Une « sur-paramétrisation » peut rendre la modélisation inefficace en introduisant des incertitudes dues aux fluctuations d'échantillonnage.

On présentera dans la suite, la construction des tables de maintien non-segmentées et segmentées.

## Partie 3 :

# Lois de maintien en incapacité

# Chapitre 1

## L'estimation des lois globales de maintien

Dans cette partie, nous présenterons les différents estimateurs adoptés pour le calcul des lois de maintien en incapacité et nous commencerons dans ce premier chapitre par l'estimateur non paramétrique de Kaplan-Meier. L'objectif de ce chapitre est double car il traite dans un premier temps, l'estimation d'une loi de survie (ou de maintien) à l'aide de l'estimateur de Kaplan-Meier. Puis il présente dans un second temps, la méthode utilisée pour le lissage de ces estimations.

## IX. Construction des taux bruts de maintien par le Kaplan-Meier

La durée de l'incapacité est très courte, elle est limitée à 3 ans. Ce qui rend le risque d'une hypothèse de loi inadaptée très élevé si on opte pour un modèle paramétrique. Dans ce sens, nous avons choisi de commencer notre étude par l'un des estimateurs non paramétriques le plus reconnu qui a fait preuve de la qualité de ses estimations et qui tient compte des censures et troncatures ; c'est l'estimateur de Kaplan-Meier.

L'objectif de cette partie est double car il traite dans un premier temps, l'estimation d'une loi de survie (ou de maintien) à l'aide de l'estimateur de Kaplan-Meier. Puis il présente dans un second temps, la méthode utilisée pour le lissage de ces estimations. Les résultats obtenus seront présentés dans un dernier temps.

### IX - 1. Présentation de l'estimateur de Kaplan-Meier

#### 1. Notions de base des modèles de durée

Soit  $T_x$  la variable aléatoire non négative représentant la durée de maintien d'un individu entré dans l'état d'incapacité à l'âge  $x$ . C'est-à-dire le temps écoulé entre l'entrée et la sortie de l'incapacité.

- La **fonction de répartition** de  $T_x$  et sa **fonction de densité** sont respectivement notées  $F_x(t)$  et  $f_x(t) = dF_x(t)/dt$ .

$$f_x(t) = \Pr[T_x \leq t] = \int_0^t f_x(s) ds$$

- On définit aussi la probabilité que la durée dépasse  $t$ , appelée **fonction de survie** au point  $t$ , et notée  $S(t)$ .

$$S_x(t) = \Pr[T_x > t] = 1 - F_x(t)$$

La fonction de survie décroît de 1 à 0. L'espérance de la variable aléatoire  $T$ , en tant qu'espérance d'une variable aléatoire positive, vérifie la relation :

$$\mathbb{E}(T) = \int_0^{+\infty} (1 - F_x(s)) ds = \int_0^{+\infty} S_x(s) ds$$

- La probabilité qu'un individu, entré dans l'état à l'âge  $x$ , **quitte l'état d'incapacité entre  $t$  et  $t + u$** , sachant qu'il est encore en incapacité à l'ancienneté  $t$  se note :

$$a_u q_{x,t} = P\left(t < T_x \leq u + \frac{t}{T_x} > t\right) = \frac{\Pr(t < T_x \leq u + t)}{\Pr(T_x > t)} = \frac{F_x(u + t) - F_x(t)}{S_x(t)}$$

$$a_u q_{x,t} = \frac{S_x(t) - S_x(u + t)}{S_x(t)} = 1 - \frac{S_x(u + t)}{S_x(t)}$$

- La probabilité qu'un individu, entré dans l'incapacité à l'âge  $x$ , **se maintienne dans l'état d'incapacité entre  $t$  et  $t + u$** , sachant qu'il est encore en incapacité à l'ancienneté  $t$  se note :

$${}_u p_{x,t} = 1 - {}_u q_{x,t} = \frac{S_x(u+t)}{S_x(t)}$$

- Un concept clé est la fonction de hasard, qui exprime **la probabilité instantanée de quitter un état en  $t$** , conditionnellement à la survie jusqu'à la date  $t$ . Plus précisément :

$$h_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr[t \leq T_x \leq t + \Delta t / T_x \geq t]}{\Delta t} = \frac{f_x(t)}{S_x(t)}$$

On a aussi la relation suivante :

$$h_x(t) = - \frac{d \ln(S_x(t))}{dt}$$

- La fonction de hasard  $h$**  caractérise la distribution de  $T_x$ . En particulier, en intégrant  $h_x(t)$  et en utilisant  $S_x(0) = 1$ , on peut montrer que :

$$S_x(t) = \exp\left(- \int_0^t h_x(u) du\right)$$

- Une dernière fonction d'intérêt est **la fonction de hasard cumulé** :

$$H_x(t) = \int_0^t h_x(u) du = -\ln(S_x(t))$$

Pour tout choix de la distribution de  $T_x$ ,  $H_x(t)$  est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

## 2. Censures et troncatures

On note  $T_{x,i}$  la variable dépendante représentant l' $i$ ème élément d'un échantillon de durées de maintien en incapacité. Le point de départ de l'analyse est que la variable  $T_{x,i}$  est déterminée par les réalisations d'une variable latente  $Y_{x,i}$ .

En cas de la censure à droite, on observe :

$$T_{x,i} = \begin{cases} Y_{x,i}, & Y_{x,i} \leq C_{x,i} \\ C_{x,i}, & Y_{x,i} > C_{x,i} \end{cases}$$

En cas de troncature, on observe seulement :

$$T_{x,i} = Y_{x,i} \text{ si } Y_{x,i} \leq C_{x,i}$$

La variable observée est donc :

$$\left\{ T_{x,i} = Y_{x,i} \wedge C_{x,i}, D_{x,i} = 1_{\{Y_{x,i} \leq C_{x,i}\}} \right\} \quad i = 1, \dots, n$$

On rappelle la notation  $\wedge$  qui signifie  $\text{Inf}(Y_{x,i}, C_{x,i})$ . On suppose que les  $T_{x,i}$  sont ordonnés.

### 3. Construction

#### a) Hors censures et troncatures

Le principe de l'estimation de Kaplan-Meier repose sur une idée simple : « être encore en incapacité après un instant «t», c'est être en incapacité juste avant cet instant «t» et ne pas sortir à cet instant. La probabilité de maintien en incapacité à un instant donné peut donc se calculer conditionnellement au fait d'être en incapacité juste avant cet instant.

Nous cherchons à estimer la probabilité de maintien en incapacité (la fonction de survie) âge par âge avec un pas journalier pour l'ancienneté. Le choix du jour comme unité nous permet avoir plus de précision, en plus il est facile de passer des taux journalier aux taux mensuels. L'inverse est bien entendu plus délicat.

Soit  $x$  l'âge à l'entrée en incapacité. Estimer la probabilité de survie est équivalent à estimer la probabilité de sortie de l'incapacité.

Discretisons le temps entre  $t$  et  $t + 1$  en  $m$  intervalles de type  $[t_i, t_{i+1}[$ , où  $i = 1, \dots, m$

Soit  $T$  la durée de maintien en incapacité au-delà de  $t$ .  $T = t_i$  lorsque la période d'incapacité se termine dans  $[t_i, t_{i+1}[$ . Ainsi nous obtenons la probabilité de sortie de l'état d'incapacité à la date  $t_i$ , notée  $q_{x,i} = \Pr(T = t_i / T \geq t_i)$ .

L'idée intuitive de cette méthode est que la probabilité de maintien en incapacité entre  $t$  et  $t + 1$ , c'est la probabilité de maintien à chaque sous-période entre  $t$  et  $t + 1$ , sachant que l'on était en incapacité à la sous-période précédente.

De manière plus formelle, nous avons :

$$\forall t \in [0; t_m] \quad S_x(t) = \prod_{i/t_i < t} (1 - q_{x,i})$$

Les  $q_{x,i}$  sont ensuite estimés par la méthode du maximum de vraisemblance, à partir de l'observation d'un  $n$ -échantillon.

Soient  $d_{x,i}$  le nombre de sortie d'incapacité à la date  $t_i$  et  $n_{x,i}$  la population sous-risque juste avant la date  $t_i$ . D'après ce modèle, à l'instant  $t_i$ , parmi les  $n_{x,i}$  un individu

incapable a une probabilité  $q_{x,i}$  de sortir de l'incapacité. Le nombre de sorties d'incapacité suit donc une loi binomiale  $B(n_{x,i} ; q_{x,i})$ .

La fonction de vraisemblance, que l'on cherche à maximiser, s'écrit ainsi :

$$L(q_{x,1}, \dots, q_{x,m}) = \prod_{i=1}^m C_{n_{x,i}}^{d_{x,i}} q_{x,i}^{d_{x,i}} (1 - q_{x,i})^{n_{x,i} - d_{x,i}}$$

$$\ln L(q_{x,1}, \dots, q_{x,m}) = \sum_{i=1}^m \ln \left( C_{n_{x,i}}^{d_{x,i}} q_{x,i}^{d_{x,i}} (1 - q_{x,i})^{n_{x,i} - d_{x,i}} \right)$$

Nous pouvons exprimer les conditions de premier ordre de ce problème de maximisation comme suit :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial q_{x,i}} = \frac{d_{x,i}}{\hat{q}_{x,i}} - \frac{n_{x,i} - d_{x,i}}{1 - \hat{q}_{x,i}} = 0$$

$$\hat{q}_{x,i} = \frac{d_{x,i}}{n_{x,i}} \quad \forall i = 1 \dots m$$

Nous en tirons l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de maintien, appliqué à l'âge d'entrée  $x$  :

$$\hat{S}_x(t) = \prod_{i/t_i < t} (1 - \hat{q}_{x,i}) = \prod_{i/t_i < t} \left( 1 - \frac{d_{x,i}}{n_{x,i}} \right)$$

L'estimateur de Kaplan-Meier ne donne lieu à un calcul en  $t_i$  que si une personne sort de l'état à cet instant. Par ailleurs, en toute rigueur, il n'ya pas d'ex-æquo, car la probabilité que deux personnes sortent exactement au même instant est nulle presque sûrement.

Néanmoins, comme nos observations sont volumineuses, et que, la durée des arrêts est comptée en jours (observations discrètes), on ne peut faire autrement que de considérer des ex-æquo.

On utilise donc la formule approchée suivante :

$$\hat{S}_x(t) = \prod_{i=\text{AncMin}}^t \left( 1 - \frac{d_{x,i}}{n_{x,i}} \right)$$

On obtient ainsi une estimation de la fonction de survie journalière pour tous les âges

### b) Introduction de censures et troncatures

Soit  $x$  l'âge d'entrée en incapacité. Supposons maintenant qu'en  $t_i$ ,  $c_{x,i}$  têtes soient censurées et que  $tr_{x,i}$  têtes soient tronquées.

Le nombre de têtes restant présentes face au risque de sortir de l'arrêt de travail en  $t_{i+1}$  sera donnée par :

$$n_{x,i} = n_{x,i-1} - d_{x,i-1} - c_{x,i} + tr_{x,i} \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Pour  $i = 0$ , on pose  $n_{x,0} = n$ ,  $d_{x,0} = 0$ .

Par convention, si la troncature, la censure et la sortie se produisent simultanément, nous retiendrons que l'entrée précède la censure, qui précède elle-même la sortie.

Sous la condition d'indépendance entre les processus de censure et troncature et celui régissant les sorties d'arrêt de travail, les taux de sortie n'ont pas à être modifiés, et la précédente fonction de vraisemblance est toujours valable en utilisant les  $n_{x,i}$  définis ci-dessus.

Ainsi, l'estimateur de Kaplan-Meier en présence de censures et des troncatures est défini d'après comme suit :

$$\hat{S}_x^{KM}(t) = \prod_{i=AncMin}^t \left( 1 - \frac{d_{x,i}}{n_{x,i-1} - d_{x,i-1} - c_{x,i} + tr_{x,i}} \right)$$

On notera que la méthode de Kaplan-Meier présentée ci-avant, a été développée dans un cadre monodimensionnel : taux de sortie par âge à un instant donné. Des travaux relatifs à l'estimation de Kaplan-Meier en dimension deux ont été menés (taux par âge à plusieurs dates). Néanmoins, l'estimation des taux bruts âge par âge par Kaplan-Meier reste la méthode la plus robuste. En effet, F.Planchet et P.Winter, dans leur article de 2006, précisent que « la perte d'information que représente la non prise en compte de la loi conjointe selon les deux dimensions du problème est faible et peu pénalisante ».

L'estimateur de Kaplan-Meier possède un certain nombre de bonnes propriétés.

## 4. Les propriétés

### a) Cohérence

$\hat{S}_x^{KM}(t)$  est l'unique estimateur cohérent de la loi de maintien en arrêt de travail. Ceci veut dire que pour tout instant  $t$ ,  $\hat{S}_x^{KM}$  peut s'écrire comme suit :

$$\hat{S}_x^{KM}(t) = \frac{1}{m} \left[ \sum_{i=1}^m 1_{\{t_{x,i} \geq t\}} + \sum_{i=1}^m 1_{\{t_{x,i} < t, D_i=0\}} \frac{\hat{S}_x^{KM}(t)}{\hat{S}_x^{KM}(t_i)} \right]$$

La première somme dans le crochet représente l'effectif des survivants au-delà de l'instant  $t$  (individus ni sortis, ni censurés). Le second terme représente le fait que les individus censurés à un instant  $t_i$  antérieur à  $t$ , survivent au-delà de  $t$  avec la probabilité conditionnelle  $\frac{\hat{S}_x^{KM}(t)}{\hat{S}_x^{KM}(t_i)}$  qui pondère chacun d'eux.

### b) GLME (Generalized Maximum Likelihood Estimator)

L'estimateur de Kaplan-Meier est un estimateur de maximum de vraisemblance généralisé. On le définit de la manière suivante :

Soit  $\mathcal{P}$  une famille de probabilité sur  $\mathcal{R}^n$  muni de la tribu borélienne  $\mathcal{B}$ , supposée non dominée. Etant donné un élément  $x$  de  $\mathcal{R}^n$  et deux éléments  $P_1$  et  $P_2$  de  $\mathcal{P}$ , on définit :

$$f(x, P_1, P_2) = \frac{dP_1}{d(P_1 + P_2)}$$

$\hat{P}$  est GMLE pour la probabilité  $P$  qui gouverne  $X$  si  $f(x, \hat{P}, P) \geq f(x, P, \hat{P}) \quad \forall P \in \mathcal{P}$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Si les lois de la survie  $Y$  et de la censure  $C$  sont diffuses, et si  $\mathcal{P}$  est n'importe quelle famille de probabilités qui contiennent les probabilités chargeant l'observation  $(T_i, D_i)$ , alors  $\hat{S}_x^{KM}$  est GLME pour  $S$ .

### c) Convergence

On peut montrer que l'estimateur de Kaplan-Meier vérifie un théorème de normalité asymptotique globale. Ce théorème constitue une extension du théorème de Donsker dans le cas où une censure aléatoire droite est présente.

Si la survie et la censure sont deux variables aléatoires indépendantes, de fonctions de répartition respectives  $F$  et  $G$ , et si leurs fonctions de répartition n'ont pas de discontinuités communes, alors :

$$\sqrt{n}(\hat{S}_x^{KM} - S_x^{KM}) \xrightarrow{L} Z$$

Où  $Z$  est un processus gaussien centré, de fonction de covariance :

$$\text{Cov}(Z(t_1), Z(t_2)) = S(t_1)S(t_2) \int_0^{t_1 \wedge t_2} \frac{dF(u)}{(1 - F(u))^2(1 - G(u))}$$

Pour estimer la variance asymptotique de  $\hat{S}_x^{KM}(t)$ , on utilise l'estimateur de Greenwood :

$$\forall t \in \{\text{AncMin} \dots \text{AncMax}\} \quad \text{Var}\hat{S}_x^{KM}(t) = (\hat{S}_x^{KM}(t))^2 \sum_{i/t_i \leq t} \frac{d_{x,i}}{n_{x,i}(n_{x,i} - d_{x,i})}$$

Ramené à un pas journalier, on a :

$$\forall t \in \{\text{AncMin} \dots \text{AncMax}\} \quad \text{Var}\hat{S}_x^{KM}(t) = (\hat{S}_x^{KM}(t))^2 \sum_{i=\text{AncMin}}^t \frac{d_{x,i}}{n_{x,i}(n_{x,i} - d_{x,i})}$$

Le théorème de convergence asymptotique de l'estimateur de Kaplan-Meier justifie la normalité asymptotique de ce dernier. De plus, la variance de Greenwood donne une estimation de la variance de la fonction de survie, point par point.

On peut donc utiliser la formule suivante pour estimer un intervalle de confiance à 95% de  $\hat{S}_x^{KM}(t)$  :

$$\hat{S}_x^{KM}(t) \pm 1.96 \sqrt{\text{Var}\hat{S}_x^{KM}(t)} \quad \forall t \in \{\text{AncMin} \dots \text{AncMax}\}$$

Il ne serait pas tout à fait correct de nommer cet encadrement comme étant un intervalle de confiance à 95% : une telle appellation proviendrait d'un travail effectué sur une bande de confiance asymptotique. Or, ici on travaille terme à terme, supposant à chaque fois que le quantile à 95% est atteint.

Par ailleurs, on peut trouver dans Gill [1980] une démonstration de la normalité asymptotique de  $\hat{S}_x^{KM}(t)$ , fondée sur la théorie des processus ponctuels. La bande de confiance qu'il obtient s'écrit :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \sup_{s \in [0, t]} \left| \frac{\hat{F}(s) - F(s)}{1 - \hat{F}(s)} \right| \leq \frac{\sqrt{\hat{V}(t)}}{1 - \hat{F}(t)} x \right\} \\ \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k [\Phi\{(2k+1)x\} - \Phi\{(2k-1)x\}]$$

Où  $\hat{V}(t) = (\hat{S}_x^{KM}(t))^2 \int_0^t \frac{dN}{R(R-\Delta N)}$  estime la variance du processus gaussien limite Z.

## IX - 2. Résultats

Les taux de sortie ont été estimés âge par âge avec un pas journalier. On représente ici les taux de sortie bruts calculés par l'estimateur de Kaplan-Meier.

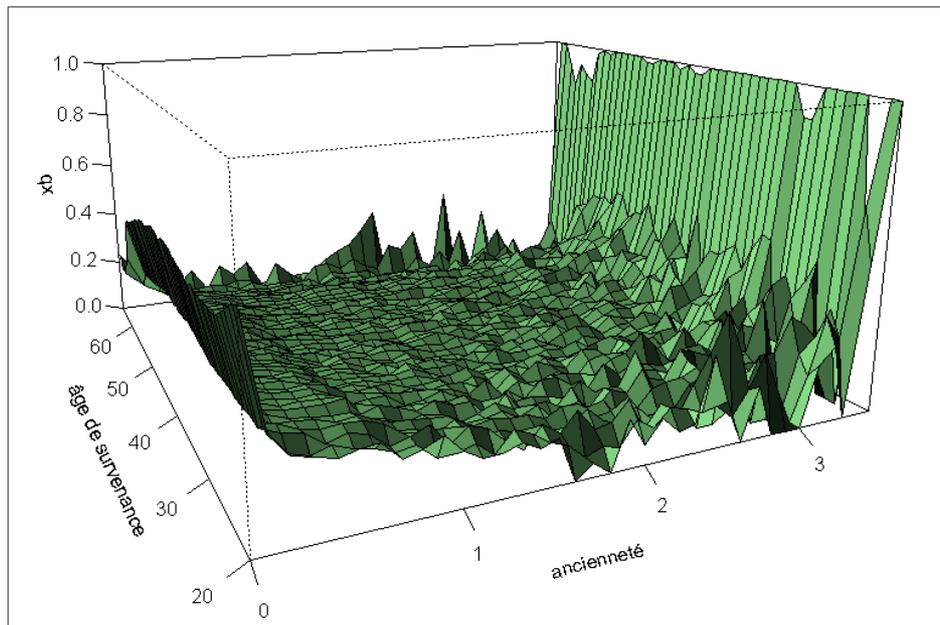


Figure 6: les taux bruts de sortie calculés par l'estimateur de Kaplan-Meier

On remarque que les taux bruts sont très erratiques, le choix d'une unité de temps petite (jour par jour) accentuant encore cette variabilité. Pour plus de visibilité, Voici la projection des taux bruts pour les âges 20, 40 et 60.

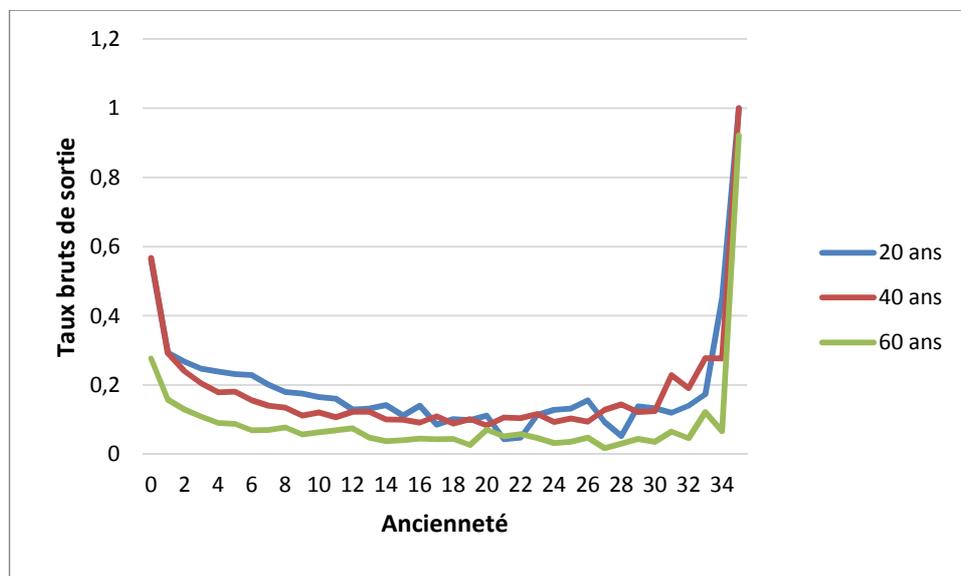


Figure 20: la projection des taux bruts pour les âges 20, 40 et 60 ans

On constate qu'on a plus d'irrégularité aux premiers et aux derniers âges. Ces derniers semblent plus volatiles que les autres âges. Ainsi, il est indispensable de calculer les variances de Greenwood. Celles-ci nous donneront une information précieuse sur la robustesse de l'estimation. Plus particulièrement, elle nous permet de cerner les zones à soumettre à un risque d'échantillonnage.

Une représentation graphique peut nous aider à analyser la plage stable que l'on utilisera par la suite. Pour ceci, les variances grandissant exponentiellement, on applique une transformation log aux données. Cette démarche nous permet simplement d'avoir des graphes plus lisibles, et facilement interprétables.

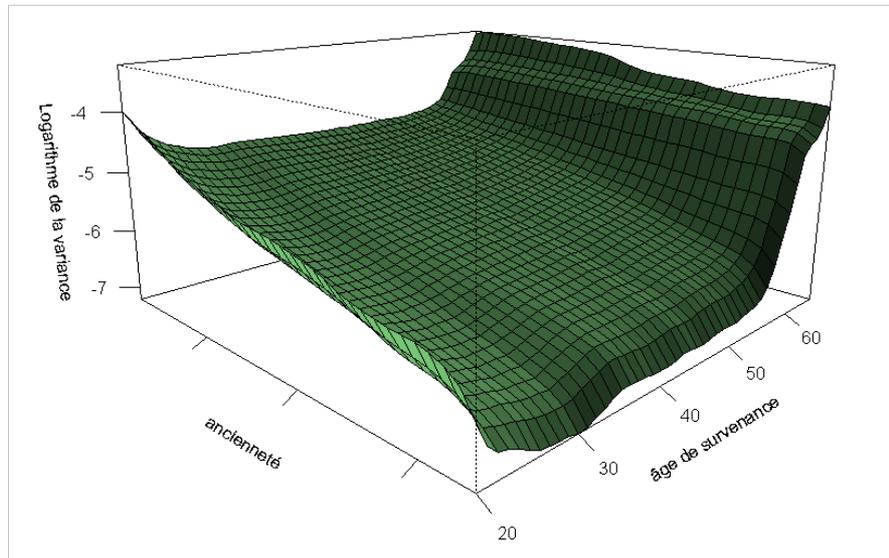


Figure 21 : la variance de Greenwood âge par âge

Une analyse de la variance donnée par l'estimateur de Greenwood nous permet de conclure que les âges 61, 62, 63, 64 et 65 sont volatiles.

Aussi, la croissance du logarithme de la variance est constante pour les grands âges alors que pour le reste la courbe croit beaucoup au début pour ensuite se stabiliser. Un risque d'échantillonnage est ainsi déduit pour les grands âges.

Les taux obtenus grâce à l'estimateur de Kaplan-Meier présentent une certaine irrégularité. Nous effectuons donc un lissage de ces taux.

## X. Lissage des taux bruts

Nous avons choisi d'utiliser la méthode non paramétrique de Whittaker-henderson pour ses avantages décrits ci-après.

Pour cela, il s'agit d'utiliser la méthode sous une forme bidimensionnelle. En effet, dans le cadre de maintien en incapacité, nous sommes dans un cadre bidimensionnel : il faudrait lisser les données en fonction de l'âge d'entrée et de l'ancienneté. Nous pourrions effectuer deux lissages monodimensionnels successifs, mais cela ne permettrait pas de prendre en compte les dépendances entre deux composantes des taux de maintien. Un lissage conjoint dans les deux sens sera ainsi plus efficace qu'un lissage séparé selon chaque variable.

On cherche donc à appliquer un lissage à deux dimensions. L'adaptation de la méthode Whittaker-Henderson dans le cas bidimensionnel cause plus de problèmes pratiques que théoriques. Pour plus de précisions, on se reportera à F. Planchet [2004].

## X - 1. Lissage de Whittaker-henderson

Le principe de cette méthode consiste à combiner deux critères, le premier est un critère de fidélité et l'autre est de régularité. On minimise par la suite une fonction qui tient en compte ces deux critères afin d'obtenir nos taux lissés.

### 1. Le critère de fidélité

C'est un critère des moindres carrés ordinaires pondérés, qui quantifie la qualité de l'ajustement. En dimension deux, il s'écrit :

$$F = \sum_{x=xMin}^{xMax} \sum_{i=AncMin}^{AncMax} w_{x,i} (\hat{q}_{x,i}^{KM} - \hat{q}_{x,i}^{WH})^2$$

Avec :

- $\hat{q}_{x,i}^{KM}$  : Taux bruts estimés avec Kaplan-Meier,
- $\hat{q}_{x,i}^{WH}$  : Taux ajustés avec le lissage Wittaker-henderson,
- $w_{x,i}$  : Matrice des poids.

### 2. Le critère de régularité

L'extension en dimension deux du critère de régularité est un peu plus délicate : il s'agit de prendre en compte deux critères de régularité, à savoir un critère de régularité verticale qui agit sur la régularité des taux d'une même colonne, et un critère de régularité horizontale qui agit sur la régularité des taux d'une même ligne.

Soit  $\Delta^n u(x) = \sum_{j=0}^n C_n^j (-1)^{n-j} u(x+j)$  l'opérateur différence ayant composé n fois.

#### a) Critère de régularité verticale :

C'est la somme des opérateurs différences verticaux (agissant à âge fixé), calculées pour tous les âges et toutes les anciennetés :

$$S_v = \sum_{x=xMin}^{xMax} \sum_{i=AncMin}^{AncMax-z} (\Delta_v^z \hat{q}_{x,i}^{KM})^2$$

#### b) Critère de régularité horizontale :

C'est la somme des opérateurs différences horizontaux (agissant à ancienneté fixée), calculées pour tous les âges et toutes les anciennetés :

$$S_h = \sum_{i=AncMin}^{AncMax} \sum_{x=xMin}^{xMax-z} (\Delta_h^z \hat{q}_{x,i}^{KM})^2$$

On cherche à minimiser la fonction suivante :

$$M = (1 - \alpha - \beta)F + \alpha S_v + \beta S_h$$

Pour mettre aborder ce problème d'optimisation, il est commode d'utiliser une résolution matricielle. Pour ce faire, il faut :

- Réorganiser les  $\hat{q}_{x,i}^{KM}$  en un vecteur colonne  $u$  tel que  $u_{n(i-1)+j} = \hat{q}_{i+xMin-1, j+tMin-1}^{KM}$ , de dimension  $(AncMax - AncMin + 1) \times (xMax - xcMin + 1)$  notée  $m = pq$ .
- Exprimer la matrice des poids sous forme d'une matrice diagonale  $m \times m$  notée  $w$  (de manière à être cohérent avec le vecteur  $u$ ).
- Construire la matrice  $K_v^z$ , de dimensions  $(q(p-z), m)$  de telle façon qu'on a :

$$S_v = {}_t(K_v^z u) (K_v^z u)$$

- Construire la matrice  $K_h^y$ , de dimensions  $(p(q-y), m)$  de telle façon qu'on a :

$$S_h = {}_t(K_h^y u) (K_h^y u)$$

Les taux lissés s'obtiennent alors par :

$$\hat{q}_{x,i}^{WH} = (w + \alpha {}_t(K_h^y K_h^y + \beta {}_t(K_v^z K_v^z))^{-1} w u$$

La construction des matrices  $K_v^z$  et  $K_h^y$  est le point crucial de l'estimation de ces taux lissés.

## X - 2. Résultats

Pour mettre en œuvre cette méthode, le plus simple est de programmer la construction des différentes matrices et le calcul d'optimisation dans un environnement supportant ces calculs.

Les paramètres à fixer sont : la matrice des taux de sortie (déjà calculés à l'aide de Kaplan-Meier), les indices de pondération pour les critères de fidélité (verticale  $\alpha$  et horizontale  $\beta$ ), l'ordre de régularité verticale  $z_v$  et l'ordre de régularité horizontale  $z_h$ .

Les valeurs de la matrice des poids utilisée sont proportionnelles à la taille des effectifs initiaux considérés âge par âge. Prenant comme paramètres  $\{(z_v, z_h, \alpha, \beta) = (1,1,1,1)\}$ , nous obtenons les taux suivants :

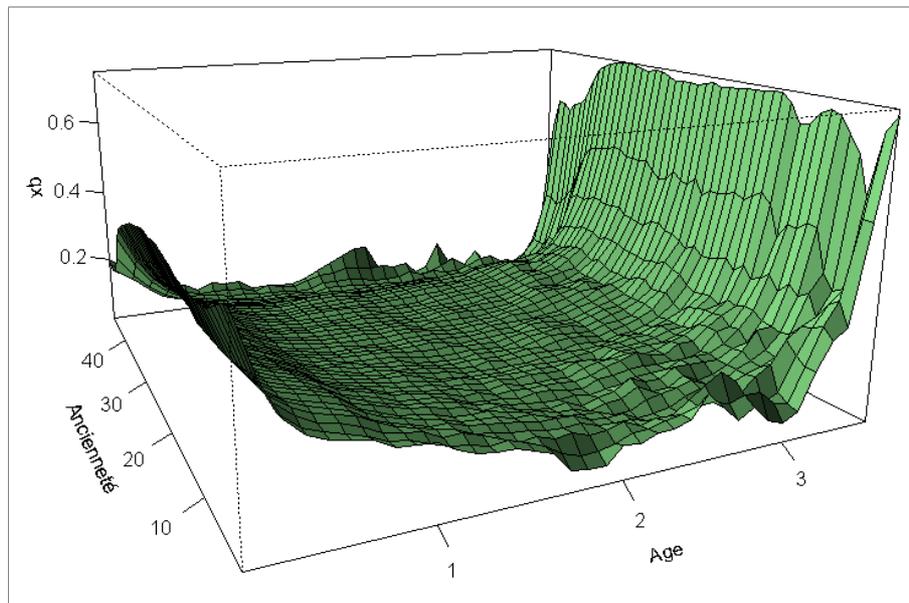


Figure 22 : Taux lissés par Whittaker-Henderson

Il est clair qu'on obtient moins d'irrégularités, mais cela reste insuffisant. Nous essayons donc les paramètres suivants :  $\{(z_v, z_h, \alpha, \beta) = (2,2,1,1)\}$

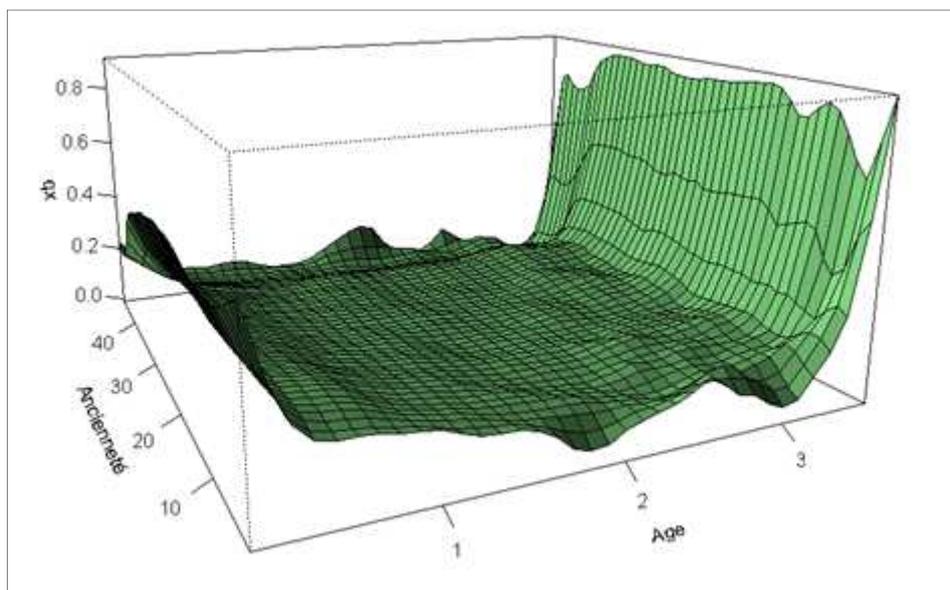


Figure 23: Taux de sortie lissés par Wittaker-Henderson

On remarque que les taux obtenus sont plus lissés qu'auparavant. On constate aussi qu'il est facile d'influencer le lissage, par le biais des paramètres. La pondération des différents critères joue un rôle important. De même la matrice des poids influence grandement sur les résultats obtenus. L'effet des degrés de lissage est plus diffus.

Les paramètres utilisés ci-dessous sont :  $\{(z_v, z_h, \alpha, \beta) = (2,2,3,1)\}$

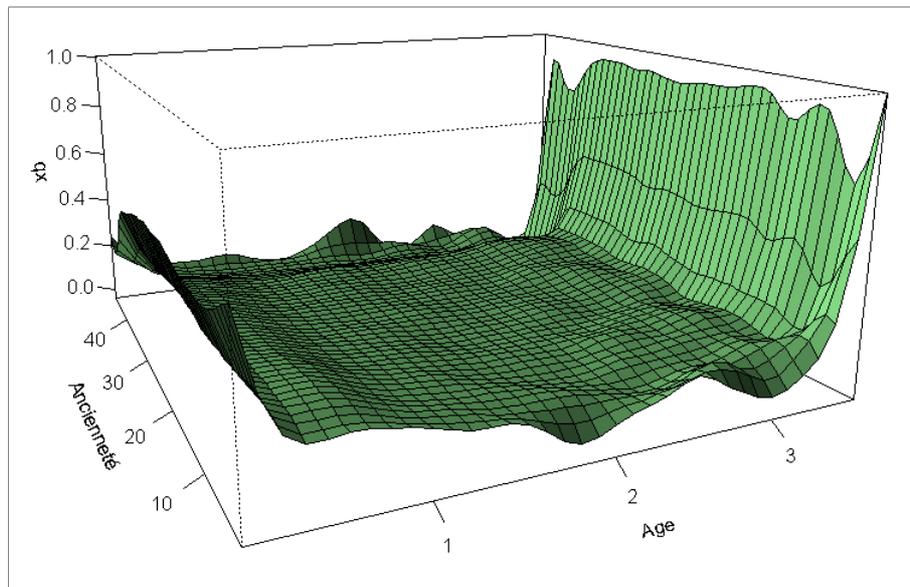


Figure 24: taux de sortie lissés par Whittaker-Henderson de 2 dimensions

A première vue, ce lissage semble bien plus satisfaisant que les deux précédents : les taux semblent plus sensibles à la composante d'âge, tout en semblant être suffisamment réguliers.

La loi de maintien correspondante est la suivante :

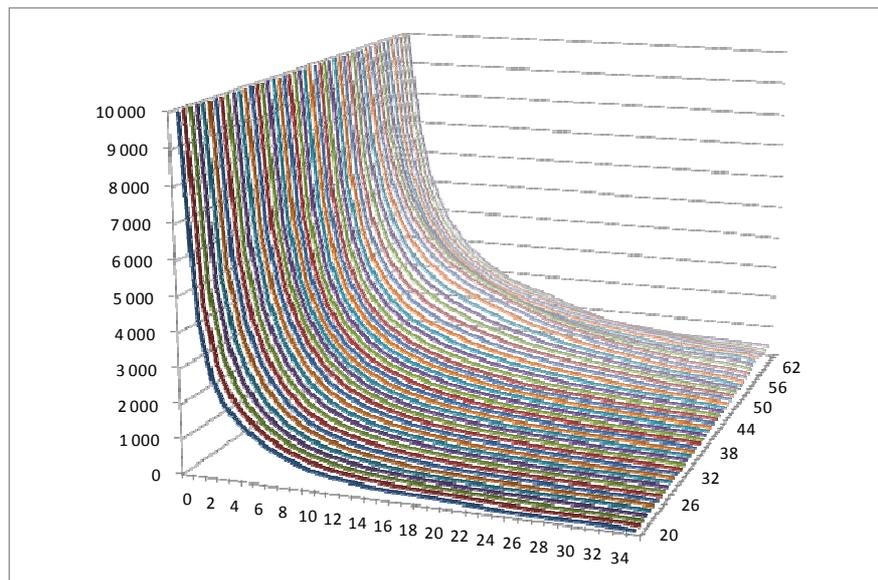


Figure 25: Loi de maintien selon l'ancienneté et l'âge

On constate que la loi est très bien lissée ; en effet la surface est bien entendu très régulière sauf pour les grands âges (à partir de 61 ans), on remarque une pliure due au risque d'échantillonnage détecté par la variance Greenwood. Il nous semble que cette pliure n'est pas trop gênante.

Nous verra par la suite si on va considérer tous les âges, ou bien on ne considérera que les âges stables (les âges d'entrée allant de 20 jusqu'à 60 ans) et les taux pour les âges de 61 ans à 65 ans seront déterminés par extrapolation.

On retient ainsi cette dernière estimation. Cependant, on attendra de mener une étude statistique rigoureuse avant de se prononcer définitivement.

### X - 3. Validation du lissage

La validité du lissage est testée au travers d'une version ad hoc du test du Khi-2.

On effectue des regroupements sur les âges (9 classes) et sur les anciennetés (12 classes), pour obtenir des classes bidimensionnelles. Le test du Khi-2 reste valable dans ce contexte puisque la somme de deux variables indépendantes avec une distribution de Khi-2 est une variable Khi-2, de degré de liberté égale à la somme des degrés de liberté. On obtient alors la statistique :

$$W_{k,l} = \sum_{\ddot{x}=1}^l \sum_{\ddot{t}=1}^k \frac{(D_{\ddot{x},\ddot{t}} - \widehat{D}_{\ddot{x},\ddot{t}})^2}{\widehat{D}_{\ddot{x},\ddot{t}}}$$

Avec

- $D_{\ddot{x},\ddot{t}}$  : Le nombre observé d'individus sortis entre les anciennetés regroupées entre  $\ddot{t}^+$  et  $\ddot{t} + 1$ .
- $\widehat{D}_{\ddot{x},\ddot{t}}$  : Le nombre observé d'individus sortis entre les anciennetés regroupées entre  $\ddot{t}^+$  et  $\ddot{t} + 1$  prévu par le modèle.

On peut montrer que si  $L_{x,0} \rightarrow \infty$ , alors  $W_{k,l}$  est asymptotiquement distribué comme une variable  $\chi_{k+l-2} = \chi_{19}$ . D'où le test consistant à rejeter l'adéquation des taux bruts à notre lissage si la réalisation de  $W_{k,l}$  est trop grande.

Pour un seuil de 95%, on est à 19 degrés de liberté, on obtient comme région critique  $\{W_{k,l} > 10,117\}$ . La valeur de la statistique de test obtenue est de 2,37, ce qui nous conduit à accepter l'ajustement.

Pour les grands âges ( $> 60$  ans), nous calculons point par point l'intervalle de confiance à 95% pour chaque âge. On prend comme exemple le dernier âge (60 ans). Le graphe suivant représente les résultats obtenus :

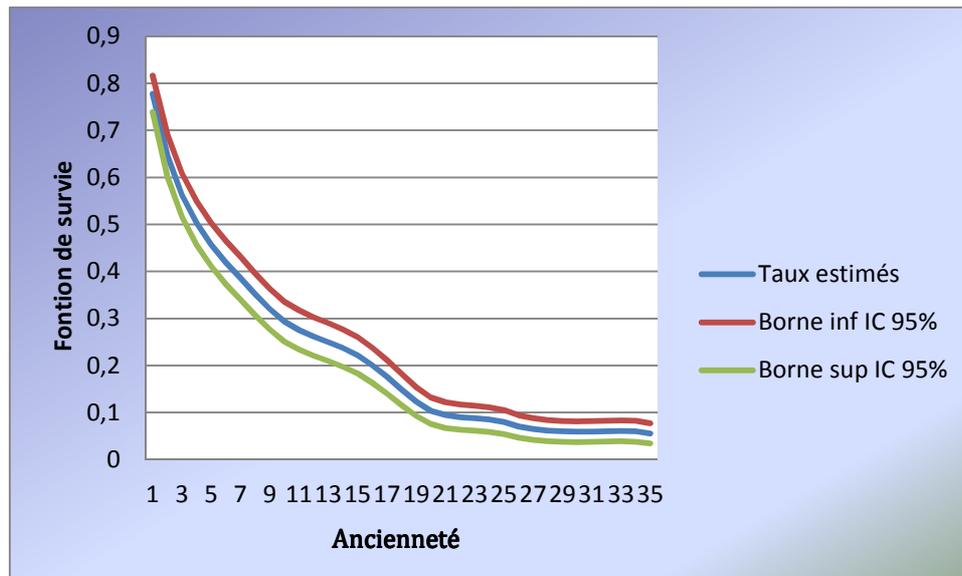


Figure 26: Intervalle de confiance de la courbe de survie pour l'âge 65 ans

D'après le graphique, la loi de maintien lissée par Whittaker-Henderson se trouve bien à l'intérieur des intervalles de confiance. C'est le cas aussi pour tous les autres âges. Ainsi, nous validons notre modèle et nous considérons que nos estimations sont de bonne qualité.

Nos résultats doivent en même temps traduire au mieux le risque supporté par l'assureur mais aussi être applicables aux futurs assurés. Cette double contrainte implique de tenir compte des variables discriminantes du risque pour segmenter la loi générale de maintien en incapacité.

## XI. Segmentation de la loi générale

L'objectif de la segmentation est d'obtenir des populations les plus homogènes possibles en terme d'arrêt de travail tout en tenant compte des facteurs considérés comme discriminants à priori et de permettre une modélisation adéquate des lois.

Ainsi, compte tenu des données, nous analyserons les segmentations suivantes :

- ✓ Segmentation par sexe
- ✓ Segmentation par catégorie socio-professionnelle (CSP)

Afin de valider statistiquement nos comparaisons de courbes de survie, nous procéderons chaque fois au test de Log-Rank et celui de Gehan (Wilcoxon généralisé). L'intérêt d'utiliser les deux tests réside dans le fait que les deux tests pondèrent différemment les observations (les arrêts de travail).

## XI - 1. Les tests statistiques utilisés pour la segmentation

### 1. Test de Log-Rank

Le test du Log-Rank est effectué à partir de deux échantillons. Il compare les taux de sorties des sinistres de chaque échantillon. A partir des taux de sorties de deux échantillons, il compare pour le deuxième échantillon, les taux de sorties observés avec ceux attendus si la sinistralité était la même que le premier échantillon. L'avantage principal de ce test est qu'il s'appuie sur les taux estimés par Kaplan-Meier et permet donc une comparaison qui prend en compte les censures et les troncatures.

On se place dans la situation où on souhaite comparer le maintien en incapacité de deux échantillons indépendants. Plus précisément, on dispose de deux échantillons indépendants et censurés A et B, et on souhaite tester l'hypothèse nulle d'égalité des fonctions de survie des deux échantillons.

Le test de Log-Rank arbitre ainsi entre les deux hypothèses suivantes :

- Hypothèse  $H_0$  :  $S_A = S_B$   
« Les fonctions de survie des deux échantillons sont superposées »
- Hypothèse  $H_1$  :  $S_A \neq S_B$   
« Les fonctions de survie des deux échantillons sont différentes »

Comme auparavant, à chaque instant  $t_i$ , on désigne  $d_{i,j}$  le nombre de sortie dans le groupe  $j$ . Le test de Log-Rank revient à construire des statistiques fondées sur les sommes des  $d_{i,j} - E[d_{i,j}]$ , qui sont asymptotiquement gaussiennes. On utilise finalement des statistiques de la forme :

$$\phi_j = \frac{[\sum_{AncMin}^{AncMax} (d_{i,j} - E[d_{i,j}])]^2}{\sum_{AncMin}^{AncMax} Var[d_{i,j}]}$$

Qui suit asymptotiquement un  $\chi^2(1)$ . (ddl = nombre des échantillons - 1 = 1)

Notons :

- $D_j^{obs} = \sum_{AncMin}^{AncMax} d_{i,j}$  : Le nombre total de sorties observées
- $D_j^{th} = \sum_{AncMin}^{AncMax} E(d_{i,j})$  : Le nombre total de sorties théoriques
- $\sigma_j^2 = \sum_{AncMin}^{AncMax} Var[d_{i,j}]$

On peut prendre indifféremment l'une des deux statistiques :

$$\phi_A = \frac{(D_A^{th} - D_A^{obs})^2}{\sigma_A^2} \quad \text{où} \quad \phi_B = \frac{(D_B^{th} - D_B^{obs})^2}{\sigma_B^2}$$

Il existe une forme approchée de cette statistique qui est facile à mettre en œuvre et dont la valeur ne dépend pas du groupe sur laquelle on l'évalue.

$$\phi = \frac{(D_A^{\text{th}} - D_A^{\text{obs}})^2}{D_A^{\text{th}}} + \frac{(D_B^{\text{th}} - D_B^{\text{obs}})^2}{D_B^{\text{th}}}$$

On peut montrer que cette statistique est inférieure à celle du Log-Rank ; ainsi lorsqu'elle conduit à rejeter  $H_0$ , la statistique exacte conduit a fortiori à la même conclusion).

## 2. Test de Gehan (Wilcoxon généralisé)

Il est semblable au test de Log-Rank. La seule différence est que le test de Log-Rank donne des poids égaux à tous les arrêts de travail ( $w_i = 1, \forall i$ ), alors que pour le test de Gehan  $w_i = n_i$  ce qui conduit à pondérer plus fortement les sorties les plus précoces.

La statistique de ce test n'admet donc pas d'expression simplifiée comme dans le cas du Log-Rank. Elle s'écrit comme suit :

$$\phi_j = \frac{[\sum_{\text{AncMin}}^{\text{AncMax}} w_i (d_{i,j} - E[d_{i,j}])]^2}{\sum_{\text{AncMin}}^{\text{AncMax}} w_i^2 \text{Var}[d_{i,j}]}$$

Le test de Gehan présente l'inconvénient de dépendre assez fortement de la distribution de la censure.

En pratique, on calcule la p-value, selon les deux tests présentés ci-dessus, au niveau de significativité de  $1 - \alpha = 95\%$  ( $\alpha = 0.05$ ) :

- Si  $p \leq \alpha$  : on rejette  $H_0$ .
- Si  $p > \alpha$  : on accepte  $H_0$ .

## XI - 2. Résultats

### 1. Segmentation selon le sexe

La distinction par rapport au sexe du sinistré nous est tout d'abord apparue comme le critère le plus intuitif et le plus classique pour tenter de cerner une éventuelle différence de comportement.

D'après le graphe suivant, il semble que le sexe de l'assuré soit indépendant de son maintien dans l'arrêt de travail :

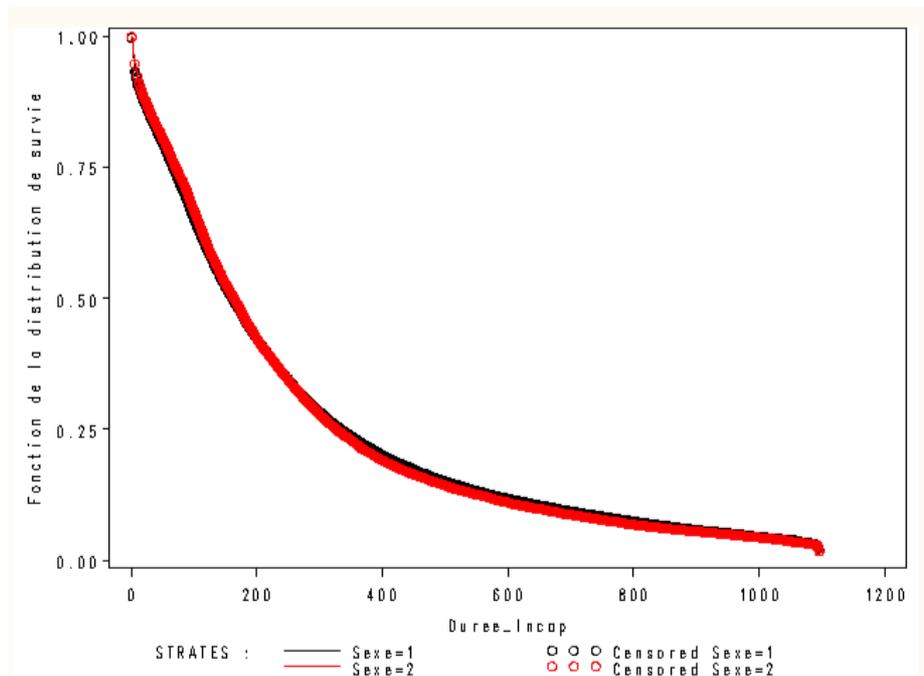


Figure 27: La fonction de survie selon le sexe

On constate du graphe que le sexe n'apporte aucune information complémentaire quant au maintien en incapacité. Statistiquement, les tests nous confirment cette analyse d'indépendance selon le sexe de la personne indemnisée.

Test d'égalité sur niveaux de discétisation			
Test	Khi-2	DDL	Pr>Khi-2
Log-rang	0,2205	1	0,638
Wilcoxon	1,1799	1	0,129
-2Log(LR)	1,2659	1	0,261

Tableau 8: Test statistique de Log-rang sur l'impact de sexe

On remarque que le test de Log-Rank nous donne  $p = 0.63 > 0.05$ , ce qui nous conduit à accepter l'hypothèse nulle. Aussi, le test de Wilcoxon est supérieur à  $\alpha = 0.05$ .

On retient donc que le sexe n'a pas d'impact sur le maintien en incapacité. Toutefois pour être plus prudent, nous allons vérifier par la suite la validité de ce test lors de la construction du modèle qui intègre les variables explicatives (âge, sexe et CSP).

## 2. Segmentation selon la CSP

Pour la catégorie socio-professionnelle (CSP), nous allons nous intéresser aux catégories suivantes : les cadres, les non cadres et l'ensemble du personnel. Avant d'examiner si l'impact de la CSP sur le maintien est significatif ou non significatif selon le test de log-rank, nous étudions d'abord le comportement de la fonction de survie globale, calculée par l'estimateur de Kaplan –Meier, pour chaque catégorie.

Le graphique suivant représente les trois fonctions de survie globales :

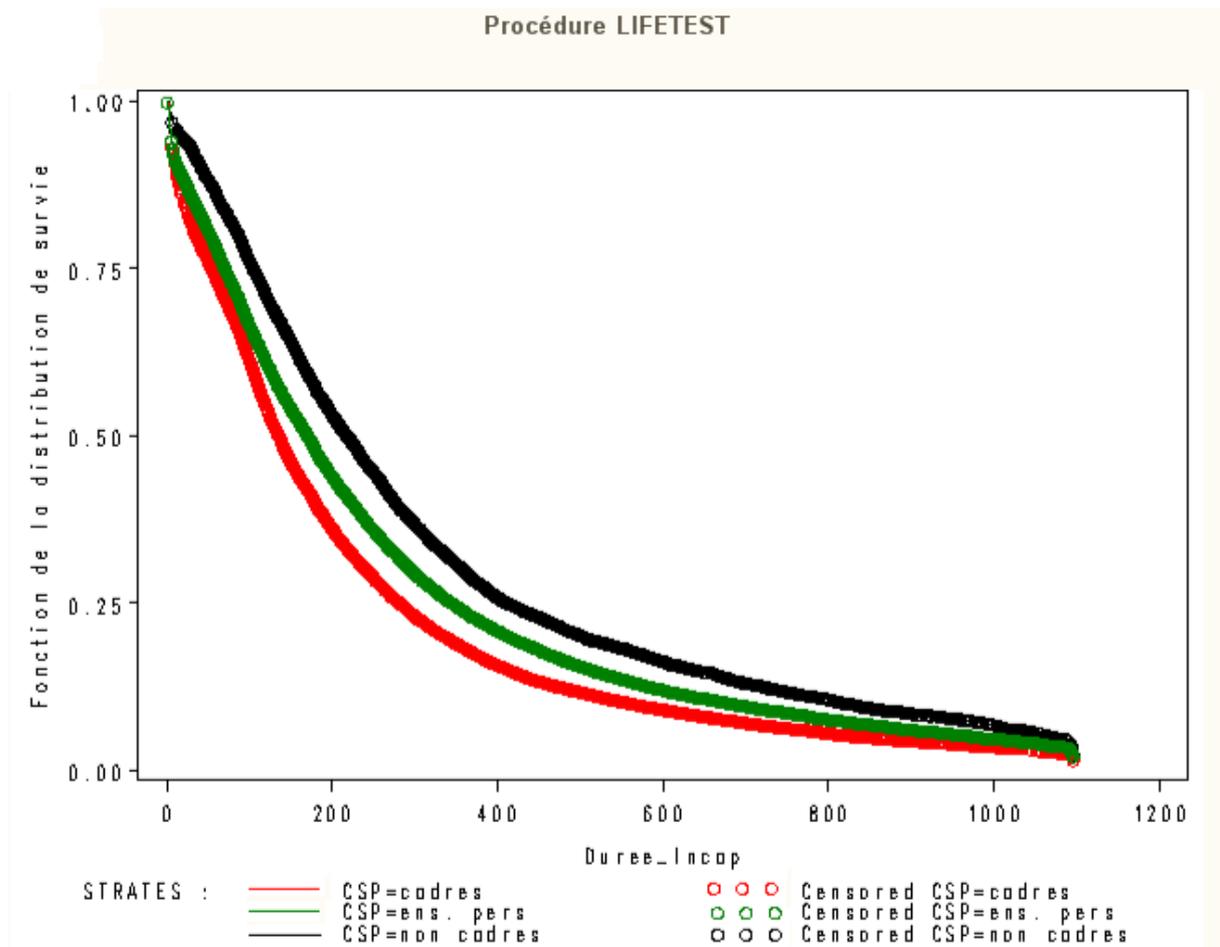


Figure 28 : la fonction de survie selon la CSP

LA CSP semble nous apporter une information complémentaire quant au maintien en incapacité, à savoir les cadres sortent nettement plus vite que les non-cadres.

Cette analyse graphique est corroborée par les tests statistiques. Ces derniers nous confirment que les courbes de maintien selon la CSP sont significativement différentes à savoir la p value calculé est très petite pour les deux tests ( $p < 0.001 \ll 0.05$ ) et plus la valeur de p est petite, plus la probabilité de faire une erreur en rejetant l'hypothèse nulle est faible.

Test d'égalité sur niveaux de discétisation			
Test	Khi-2	DDL	Pr>Khi-2
Log-rang	1083,3018	2	< 0,0001
Wilcoxon	1322,6541	2	< 0,0001
-2Log(LR)	1230,6182	2	< 0,0001

Tableau 9 : Test Statistique de Log-rang sur l'impact de la CSP

Maintenant, nous désirons obtenir pour chacune de ces segmentations une table de maintien à deux dimensions (ancienneté et âge). Or, pour avoir des résultats fiables et robustes, il faut faire en sorte d'avoir pour chaque âge un volume de données suffisant.

CSP	Nombre de sinistres	Pourcentage
Cadres	49 116	13%
Non renseignés	188 228	39%
Non cadres	154 025	48%

*Tableau 10 : Répartition de la population selon la CSP*

Le volume qu'on a pour les cadres est trop petit. Même si on regroupe certains âges ensemble, il reste insuffisant.

L'insuffisance des données accentuent les problématiques de choix de segmentation optimale et majorent le risque d'estimation. On se tourne donc vers les modèles de durée intégrant des facteurs d'hétérogénéité observables à partir des variables explicatives.

# Chapitre 2

## Segmentation des lois de maintien

Lorsqu'un phénomène peut être expliqué par plusieurs variables explicatives, on a recours aux régressions purement paramétriques car on peut facilement trouver des estimateurs convergents. Toutefois, ces modèles s'appuient sur de nombreuses hypothèses qui présentent un risque important de ne pas être fidèles aux données d'expérience. Une alternative consiste alors à se tourner vers des régressions semi-paramétriques, qui s'appuient sur un nombre limité d'hypothèses et sont donc moins contraignants.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'un des modèles de régression semi-paramétriques le plus souvent utilisé ; c'est le modèle de Cox.

## XII. Le modèle de Cox à hasard proportionnel

Le modèle de régression de Cox ou modèle à hasard proportionnel est un modèle semi-paramétrique qui introduit un effet multiplicatif des covariables par rapport à une fonction de hasard de base (fonction pour laquelle l'ensemble des valeurs des covariables est nul). Il est semi-paramétrique car les coefficients des covariables sont constants, seule la fonction de base est inconnue.

Ce modèle multiplicatif est la référence majeure en analyse de durée de vie. Il est très facile d'en estimer les coefficients et de calculer les ratios de hasard. La description des concepts théoriques nécessaires à sa compréhension est maintenant présentée.

### XII - 1. Présentation Théorique du modèle

#### 1. Le principe du modèle

Nous souhaitons étudier l'influence de  $p$  vecteur de variables explicatives  $z = (z_1, \dots, z_p)$  sur la loi de la variable aléatoire durée de maintien  $T$  qui peut éventuellement être censurée.

Nous rappelons que la variable observée était :

$$\{t_i = y_i \wedge c_i, d_i = 1_{\{y_i \leq c_i\}}\} \quad i = 1, \dots, n$$

Soit  $z_i = (z_{i1}, \dots, z_{ip})$  la valeur prise par le vecteur  $z$  de variables explicatives pour l' $i^{\text{ème}}$  individu. Le triplet  $\{t_i, d_i, z_i\}$  est ainsi observé pour chaque individu.

Nous supposons dorénavant que le hasard s'écrit sous la forme :

$$h(t, z) = h_0(t) \times \exp(\beta^t z)$$

Avec  $h_0(t)$  est le taux de hasard de base c'est-à-dire le taux de hasard en l'absence des variables explicatives.

Dans ce cadre, ce modèle fait l'hypothèse que les variables ont un effet multiplicatif sur la potentialité de sortie. Les risques de tous les individus sont donc proportionnels à une fonction de base. En particulier, pour deux individus  $i$  et  $j$  ayant des covariables différentes, les risques de sorties de ces deux individus sont proportionnels au cours du temps.

$$\frac{h(t, z_i)}{h(t, z_k)} = \exp\left(\sum_{k=1}^p \beta_k \times (z_{ik} - z_{jk})\right)$$

## 2. La vraisemblance du modèle

La vraisemblance du modèle s'écrit comme suit :

$$L(t_1, \dots, t_n / \beta_1, \dots, \beta_p) = \prod_{i=1}^n h_0(t_i) \times \exp\left(\sum_{k=1}^p \beta_k z_{ik}\right) \times (S_0(t_i))^{d_i \exp(\beta_k z_{ik})}$$

La vraisemblance dépend de la fonction de hasard de base qui n'est pas spécifiée. Pour mener l'inférence statistique dans ce modèle, Cox [1972] a proposé de s'appuyer sur une vraisemblance partielle dans laquelle le paramètre de nuisance  $h_0$  n'intervient pas.

La vraisemblance partielle est alors introduite avec des données exactes, c'est-à-dire l'ensemble des données non censurées :  $\{(t_i, d_i) / d_i = 1\}$

Soient  $i$  un individu sortant (une vraie sortie) après une durée  $t$  et  $expo(t)$  les individus exposés au risque de sortie en  $t$ . Sachant qu'un individu  $k$  est sorti en  $t$ , la probabilité que ce soit l'individu  $i$  est :

$$\frac{h(t, z_i)}{\sum_{k \in expo(t)} h(t, z_k)} = \frac{\exp(\sum_{j=1}^p \beta_j z_{ij})}{\sum_{k \in expo(t)} \exp(\beta_j z_{jk})}$$

Ce rapport représente la probabilité que l'individu  $i$  sorte le premier parmi tous ceux qui sont exposés au risque de sortie en  $t$ .

Du fait de l'hypothèse des censures non informatives et de l'hypothèse d'indépendance entre les temps de censure et les temps de sortie en arrêt de travail, seule l'information de la vraisemblance partielle.

Soit  $m$  sorties effectives c'est-à-dire que  $card((t_i, d_i); d_i = 1) = m$

Supposant dans un premier temps qu'on a qu'une seule sortie par date, ceci revient à dire que les  $m$  sorties sont distinctes. En décomposant la vraisemblance de sorte que l'on isole dans un terme que l'on négligera l'incidence de hasard de base, on obtient après une série de développements fastidieux qui ne sont pas repris ici, l'expression suivante de la vraisemblance partielle de Cox :

$$L_{Cox}(t_1, \dots, t_m / \beta) = \prod_{i=1}^m \frac{\exp(\beta^t z_i)}{\sum_{k \in expo(t)} \exp(\beta^t z_k)}$$

Du fait de l'hypothèse des censures non informatives et de l'hypothèse d'indépendance entre les temps de censure et les temps de sortie en arrêt de travail, seule l'information de la vraisemblance partielle.

Maintenant, supposons qu'à chaque date, plusieurs sorties se produisent au même temps et notons :  $N_i = \{(t_j, 1, z_j); t_j = t_i\}$ . Pour ce cas, Breslow [1974] propose une adaptation de la vraisemblance de Cox en écrivant :

$$L_{Cox}(t_1, \dots, t_m/\beta) = \prod_{i=1}^m \frac{\exp(\beta^t \sum_{j \in N_i} z_j)}{\sum_{k \in expo(t)} \exp(\beta^t z_k)}$$

### 3. L'estimation des paramètres

Les coefficients de régression sont obtenus en maximisant cette vraisemblance partielle ou de façon équivalente la log-vraisemblance partielle.

La log-vraisemblance avec une seule sortie par date s'écrit :

$$\log(L_{Cox}(t_1, \dots, t_m/\beta)) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p \beta_j z_{ji} - \sum_{i=1}^m \log \left( \sum_{k \in expo(t)} \exp \left( \sum_{j=1}^p \beta_j z_{jk} \right) \right)$$

Soit  $U$  le vecteur des scores dont les éléments de régression sont constitués par :

$$u_j = \frac{\delta \log(L_{Cox}(t_1, \dots, t_n/\beta))}{\delta \beta_j} \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, p\}$$

En dérivant la log-vraisemblance, on obtient:

$$u_j = \sum_{i=1}^m z_{ji} - \sum_{i=1}^m \frac{\sum_{k \in expo(t)} z_{jk} \exp(\sum_{j=1}^p \beta_j z_{jk})}{\sum_{k \in expo(t)} \exp(\sum_{j=1}^p \beta_j z_{jk})}$$

Le vecteur  $\beta_j$  des coefficients de la régression est estimé en résolvant le système d'équations engendré par  $U = 0$ .

Il est nécessaire d'avoir recours aux méthodes numériques comme l'algorithme de Newton-Raphson par exemple pour résoudre ce système d'équations.

### 4. Les tests statistiques

#### a) Tests de nullité des coefficients

Le principe de l'estimation de Kaplan-Meier repose sur une idée simple : « être encore en incapacité après un instant «t», c'est être en incapacité juste avant cet instant «t» et ne pas sortir à cet instant. La probabilité de maintien en incapacité à un instant donné peut donc se calculer conditionnellement au fait d'être en incapacité juste avant cet instant.

Une fois le vecteur des paramètres estimé, certaines hypothèses sur les paramètres sont testées notamment l'hypothèse de nullité globale des coefficients.

$$H_0 : \beta = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta \neq 0$$

Trois tests asymptotiques faisant appel à la vraisemblance sont classiquement utilisés : le rapport du maxima de vraisemblance, le test de Wald et le test du score.

Soit  $I(\beta)$  la matrice d'information de Fisher constituée des éléments suivant :

$$\left[ \frac{-\delta\delta \log(L_{Cox}(t_1, \dots, t_n/\beta))}{\delta\beta_i \delta\beta_j} \right]_{ij}$$

On note  $\beta_0$  l'estimateur du maximum de vraisemblance contraint et  $\hat{\beta}$  l'estimateur du maximum de vraisemblance non contraint.

- ❖ Rapport des maxima de vraisemblance : L'idée ici est de comparer les vraisemblances contraintes et non contraintes et d'accepter l'hypothèse nulle si ces deux valeurs sont proches. On utilise donc la statistique :

$$\xi^R = 2[\log(L(\hat{\beta})) - \log(L(\beta_0))]$$

Cette statistique suit sous l'hypothèse  $H_0$  une loi de Khi-2 à  $p$  degré de liberté.

- ❖ Le test de Wald est basé sur les propriétés asymptotiques des estimateurs du maximum de vraisemblance. La statistique s'écrit :

$$\xi^W = n(\hat{\beta} - \beta_0)^t I(\hat{\beta})(\hat{\beta} - \beta_0)$$

Elle converge, sous l'hypothèse de nullité, vers une loi du Khi-2 à  $p$  degré de liberté.

- ❖ Le test du score s'intéresse à la condition du premier ordre du modèle contraint. De manière formelle, la statistique de ce test est la suivante :

$$\xi^S = \frac{1}{n} (U(\beta_0))^t I^{-1} U(\beta_0)$$

Où  $I^{-1}$  est l'inverse de la matrice f=d'information de Fisher.

Sous  $H_0$ , cette statistique suit une loi de Khi-2 à  $p$  degrés de liberté.

### b) Test de proportionnalité

Le modèle de Cox repose sur la forte hypothèse de proportionnalité qui n'est pas toujours vérifiée en pratique. Cette hypothèse signifie que le rapport des taux de hasard entre deux sous-ensembles de valeurs des covariables est constant dans le temps.

Pour vérifier cette hypothèse, plusieurs méthodes sont possibles. Nous traiterons les deux méthodes suivantes :

- Tests graphiques basés sur des estimateurs des fonctionnelles de survie : Pour chaque sous-ensembles de valeurs de covariables, il faut :

- Soit tracer des courbes de la fonction survie versus le temps de maintien pour les différents sous-ensembles de valeurs des covariables : on doit obtenir des courbes proportionnelles,
  - Soit tracer des fonctions de hasard cumulées des différentes valeurs des covariables versus le temps de maintien : on doit obtenir des courbes translatées,
  - Soit tracer les graphes du rapport des fonctions de hasard cumulées pour différentes valeurs des covariables versus le temps de maintien : on doit obtenir des droites parallèles à l'axe des abscisses.
- Test basés sur les résidus de Schoenfeld : Pour chaque individu  $i$ , on définit le vecteur  $s_i = (s_{i1}, \dots, s_{ij}, \dots, s_{ip})^t$  dont la  $j^{\text{ième}}$  composante mesure la différence entre la valeur de la covariable  $j$  pour l'individu  $i$  et une moyenne pondérée des valeurs de cette covariable sur l'ensemble des individus exposés au risque de sortie au temps  $t_{(i)}$  (temps de l'observation de l'individu  $i$ ).

$$s_{ij} = \delta_i (z_{ij} - \bar{z}_{expo(t_{(i)})j})$$

Avec :  $\bar{z}_{expo(t_{(i)})j} = \sum_{k \in expo(t_{(i)})} z_{kj} p_k$ ,  $p_k =$  est la vraisemblance d'observer  $k$ .

Sous l'hypothèse PH ces résidus ont les caractéristiques d'une marche au hasard et on peut donc les utiliser pour vérifier la validité de cette hypothèse. . On commence par construire des résidus de Schoenfeld pondérés :

$$s_{ij}^* = d_{(i)} \hat{\Sigma} s_i$$

Avec:  $d_{(i)}$  le nombre de sorties observées en  $t_{(i)}$  et  $\hat{\Sigma}$  la matrice de variance-covariance de  $\hat{\beta}$ .

L'analyse des résidus de Schoenfeld permet de tester la constance du coefficient  $\beta_j$  dans le temps, pour chaque covariable  $z_j$ :

$$H_0 : \beta_j(t) = \beta_j \quad vs \quad H_1 : \beta_j(t) \neq \beta_j$$

Supposons qu'il y ait un ou plusieurs coefficients dépendant du temps. On peut montrer que :

$$s_{ij}^* \approx \beta_j(t_{(i)}) - \beta_j$$

L'idée de ce test est d'effectuer, pour chaque covariable  $z_j$ , une régression des résidus sur le temps :  $s_{ij}^* = at_i + \varepsilon_i$  et on teste la nullité de  $a$ .

Graphiquement, on trace les  $s_{ij}^*$  versus les temps de maintien : pour accepter HP, les résidus doivent être répartis aléatoirement à l'intérieur d'une bande horizontale centrée en zéro.

## XII - 2. Application du modèle de Cox

Après avoir étudié la théorie statistique du modèle de Cox, il faut déterminer si ce modèle est adapté à nos données.

Nous commençons d'abord par le calcul de la fonction de hasard de base. Pour cela, nous avons pris comme population de base les femmes non cadres et nous avons

calculé à partir de cette population la fonction de hasard de base par l'estimateur de Kaplan-Meier. Puis nous avons lissé nos taux bruts obtenus par la méthode de Whittaker-henderson en une seule dimension :

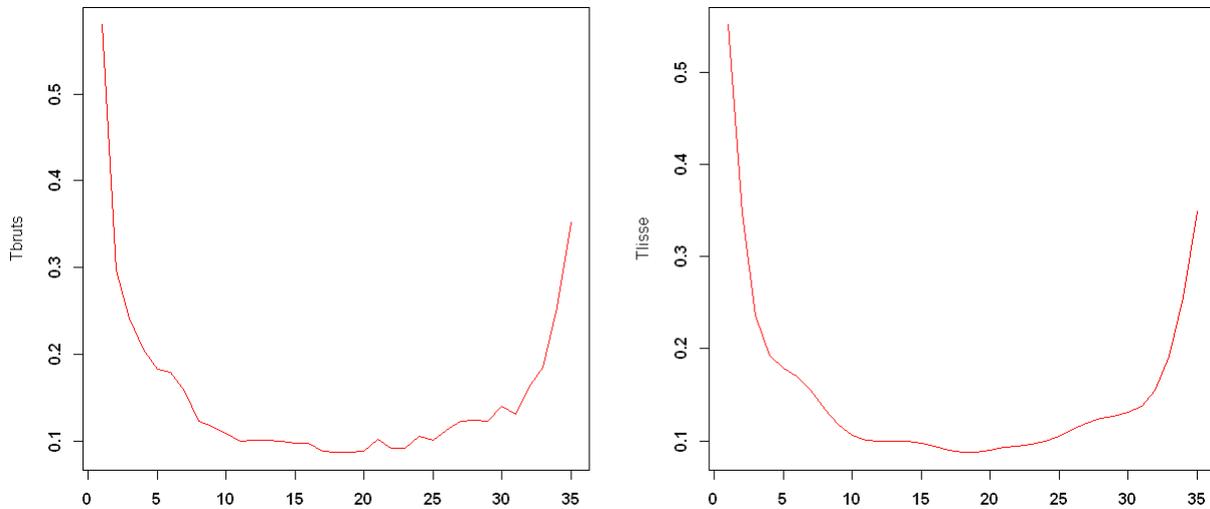


Figure 29 : Lissage des taux bruts de la population de référence

Pour déduire le taux de hasard de notre modèle, il suffit de poser :

$$h(t, z) = h_0(t) \times \exp(\beta_1 \times \text{Age} + \beta_2 \times \text{Sexe} + \beta_3 \times \text{CSP}_{\text{cadres}} + \beta_4 \times \text{CSP}_{\text{ens}})$$

On a donc quatre coefficients à estimer. Ci-dessous la sortie R de l'estimation des paramètres du modèle et de l'ensemble des tests de significativité.

```
Call:
coxph(formula = Surv(Anc_Entree, Anc_Sortie, Censure, "counting") ~
      Age_Survenance + Sexe + CSP, data = tData)

n= 563989, number of events= 520685

              coef exp(coef)    se(coef)      z Pr(>|z|)
Age_Survenance -0.0129484  0.9871351  0.0001312 -98.69 <2e-16
Sexe            0.0887974  1.0928592  0.0028452  31.21 <2e-16
CSPcadres      -0.1376385  0.8714137  0.0046691 -29.48 <2e-16
CSPens. pers   -0.0824339  0.9208723  0.0036422 -22.63 <2e-16
```

On remarque que la p-values de chaque covariable est très petite soient inférieure à 5%. Donc on rejette l'hypothèse de nullité de chaque estimateur. On peut conclure que Chaque covariable est individuellement significative dans le modèle.

D'une manière globale, on teste la nullité des coefficients selon les trois tests cités auparavant, on obtient :

```

Concordance= 0.545 (se = 0 )
Rsquare= 0.023 (max possible= 1 )
Likelihood ratio test= 13080 on 4 df, p=0
Wald test = 13031 on 4 df, p=0
Score (logrank) test = 13074 on 4 df, p=0

```

Les trois tests (Rapport de vraisemblance, Wald et Score) indiquent l'hypothèse de non nullité des coefficients  $\beta$ . La valeur de la p-value est inférieure à 5% pour les trois tests.

Une fois les coefficients estimés, on obtient facilement notre loi de maintien. Toutefois, avant d'aller plus loin dans l'interprétation du modèle, il est utile de voir si l'hypothèse d'un modèle de HP est vérifiée. Cette vérification est à faire sur le modèle global, avant même d'interpréter les tests (qui ne sont pas valables lorsque l'hypothèse n'est pas vérifiée) : il se peut qu'une covariable ait un effet non significatif lorsque cet effet est moyenné dans le temps mais qu'elle ait une interaction significative avec le temps.

Pour ce faire, nous débuterons par la méthode graphique qui consiste à tracer les fonctions de survie pour les différentes valeurs de chaque covariable. Nous obtenons les graphes suivants :

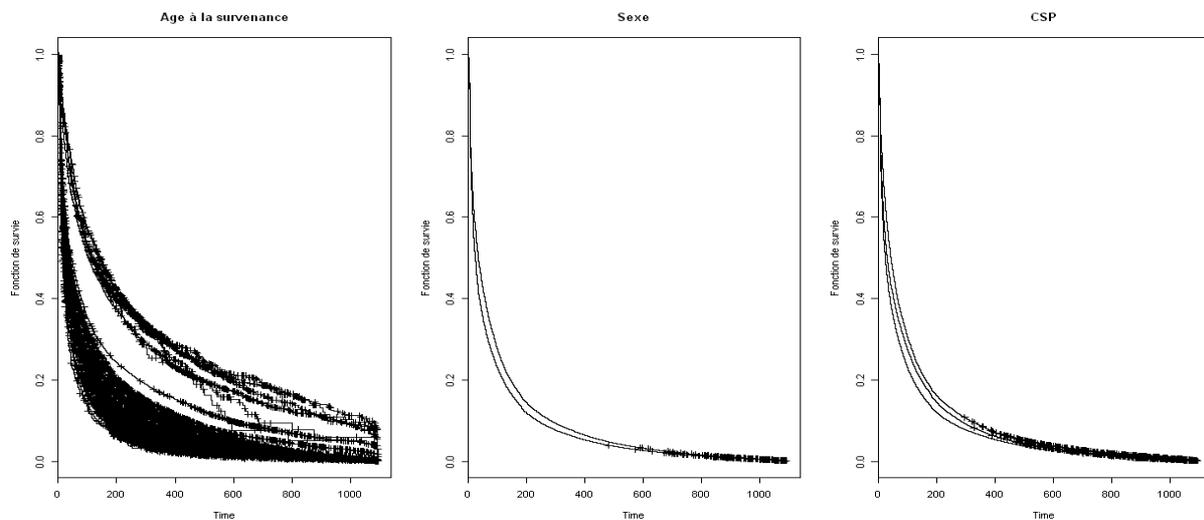


Figure 70: la fonction de survie pour les différentes valeurs d'âge, de sexe et de la CSP

On remarque que pour l'âge les courbes ne sont pas proportionnelles et donc l'hypothèse de HP est éventuellement n'est pas vérifiée. Pour valider l'hypothèse de non proportionnalité statistiquement, on a recours au test statistique basé sur les résidus de Schoenfeld.

La sortie de R du test de résidus de Schoenfeld est présentée ci-dessous :

	rho	chisq	p
Age_Survenance	-0.0333	556	0
Sexe	-0.0346	621	0
CSPcadres	0.0389	784	0
CSPens. pers	0.0240	299	0
GLOBAL	NA	2059	0

Le test global de validité de l'hypothèse de HP conduit à rejeter cette hypothèse : toutes les covariables ont un effet dépendant du temps.

La représentation graphique des résidus faite sous R en incluant par défaut un lissage par des splines donne les graphiques suivantes :

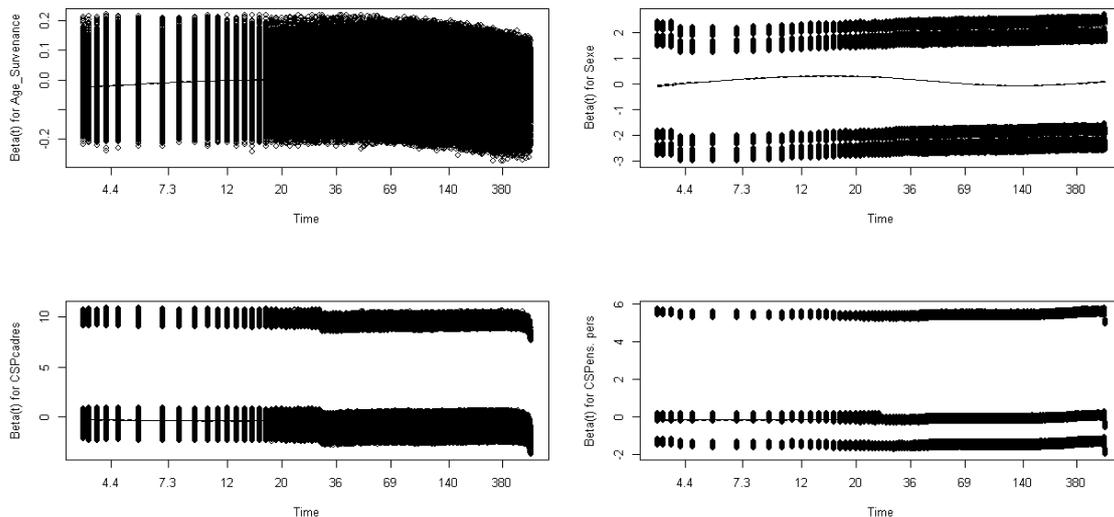


Figure 31: les résidus de Schoenfeld pour chaque covariable

Tout éloignement de l'horizontale traduit un effet dépendant du temps. L'effet de l'âge décroît linéairement avec le temps.

Le modèle de cox est donc inadapté à notre étude. Il faut alors employer un modèle qui permette de s'affranchir de l'hypothèse de proportionnalité et d'intégrer l'influence au travers du temps de la variable âge à l'entrée en incapacité. Nous allons tenter d'y répondre en introduisant le modèle d'Aalen.

### XIII. Le modèle d'Aalen additif

Le modèle à hasard additif d'Aalen permet de mesurer l'effet des covariables sur une échelle absolue et non plus de manière relative comme pour le modèle de Cox. De plus, les coefficients de régression estimés varient en fonction du temps.

Nous allons introduire les outils statistiques qui permettent l'explication du modèle, puis l'estimation des paramètres et la validation du modèle, enfin nous présenterons les résultats sur notre portefeuille.

## XIII - 1. Présentation Théorique du modèle

### 1. Le principe du modèle

Avant de présenter notre modèle, nous allons introduire d'abord des résultats fondamentaux sur les processus de comptage.

#### a) Les processus ponctuels

Nous pouvons étudier les durées de vie selon un autre procédé. Le processus ponctuel  $N(t)$  répond à ce critère. Il vaut 0 tant que le sujet est soumis au risque et 1 dès que l'événement a eu lieu (sortie de l'incapacité).

$$N(t) = 1\{X \leq t\}, t \geq 0$$

Ce processus fait intervenir les fonctions de taux de hasard instantané  $h(t)$  et taux de hasard cumulé  $H(t)$ .

Considérons une durée de vie sous l'aspect un processus ponctuel  $N(t)$  qui saute d'une unité de temps lorsque il y a une sortie de l'incapacité.

$$P(dN(t) = 1/N(t^-) = 0) = h(t)dt$$

$$P(dN(t) = 1/N(t^-) = 1) = 0$$

Que l'on peut écrire :

$$P(dN(t) = 1/N(t^-)) = \begin{cases} h(t)dt & \text{si l'assuré est en incapacité en } t \\ 0 & \text{si l'assuré sort de l'incapacité avant } t \end{cases}$$

Le processus  $\lambda(t)$  à l'instant  $t$  est aléatoire :

$$\lambda(t) = Y(t)h(t)$$

Où  $Y(t) = 1\{t \leq X\}$  est l'indicateur de présence du sujet à risque juste avant l'instant  $t$ .

Le processus  $\lambda$  s'appelle l'intensité du processus ponctuel.

Soit la fonction  $\Lambda(t)$  qui s'écrit :

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du = \int_0^t Y(u)h(u)du = H(t \wedge X)$$

C'est l'intensité cumulée du processus ponctuel  $N$ .

*b) L'estimation des paramètres du modèle*

Soient :

$T_i$  : La durée passée en incapacité de l'individu  $i$ .

$C_i$  : L'indicateur de non censure pour l' $i$ ème individu.

$z_i(t) = (z_{i1}(t), \dots, z_{ip}(t))$  : La durée passée en incapacité de l'individu

Pour l'individu  $i$ , nous définissons :

$$Y_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{si l'individu } i \text{ est toujours en incapacité à la date } t^- \\ 0 & \text{si l'individu } i \text{ sort de l'incapacité à la date } t^- \end{cases}$$

Pour les censures à droite,  $Y_i(t)$  vaut 1 si  $t \leq T_i$

Le taux de hasard conditionnel à la date  $t$ , pour l'individu  $i$ , est modélisé par Aalen par :

$$h(t/z_i(t)) = \beta_0(t) + \sum_{k=1}^P \beta_k(t) \times z_{ik}(t)$$

Le taux de hasard à un instant  $t$  est la somme d'une intensité de base  $\beta_0(t)$ , et une combinaison linéaire des variables  $z_i(t)$ . Les coefficients  $\beta_k(t)$  sont des fonctions de régression inconnues à estimer. Comme ces fonctions de régression dépendent du temps, leurs analyses révèlent des changements dans l'influence des covariables au cours du temps. Ce modèle est non paramétrique au sens où aucune forme fonctionnelle n'est donnée aux fonctions de régression.

La fonction de survie est estimée par :

$$S(t) = \exp\left(-\int_0^t \left(\beta_0(s) + \sum_{k=1}^P \beta_k(s) \times z_{ik}(s)\right) ds\right)$$

L'intensité du modèle de comptage pour l'individu  $i$  s'écrit :

$$\lambda_i(t) = Y_i(t)(z_i(t))^t \beta_i(t)$$

Posons :  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))^t$ ,  $N(t) = (N_1(t), \dots, N_n(t))^t$  et  $X(t) = (Y_1(t)Z_1(t), \dots, Y_n(t)Z_n(t))^t$ .

Soit  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$ , le processus vectoriel de taille  $n$  des intensités cumulées.

Posons :  $M(t) = N(t) - \Lambda(t)$ , on a  $M(t)$  est une martingale.

On déduit que :  $dN(t) = \lambda(t)dt + dM(t) = X(t)\beta(t)dt + dM(t)$

Comme  $dM(t)$  est centré et que les incréments de la martingale sont non corrélés,  $dB(t) = \beta(t)dt$  peut être estimé par des techniques de régression linéaire. Le calcul de cet estimateur se ramène à des sommes discrètes aux instants de sauts de processus.

Le vecteur colonne  $B(t)$  avec les éléments  $B_k(t) = \int_0^t \beta_k(u)du$   $k = 1 \dots p$  peut alors être estimé. Pour calculer ces estimations, nous calculons d'abord la  $n \times (p + 1)$  matrice  $X(t)$  qui est définie comme suit :

Pour la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $X(t)$ , nous posons  $X_i(t) = Y_i(t)(1, Z_i(t))$ .

- Si le  $i^{\text{ème}}$  individu est sous risque au temps  $t$  (l'individu n'est pas encore sorti de l'incapacité et n'est pas censuré), alors la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $X(t)$  est le vecteur  $X_i(t) = (1, z_{i1}(t), \dots, z_{ip}(t))$ .
- Si le  $i^{\text{ème}}$  individu n'est pas sous risque à la date  $t$ , la ligne correspondante de ne contient que des 0.

Une fois la matrice  $X(t)$  est calculée, l'estimateur des moindres carrés du vecteur  $B(t) = (B_0(t), \dots, B_p(t))^t$  est donné par Klein et Moeschberger par :

$$\hat{B}(t) = \sum_{T_i < t} [X^t(T_i)X(T_i)]^{-1}X^t(T_i)I(T_i)$$

Où  $I(T_i)$  est le  $n \times 1$  vecteur où le  $i^{\text{ème}}$  élément vaut 1 si l'individu  $i$  est sous risque au temps  $T_i$  et 0 sinon.

Les  $T_i$  sont les durée de maintien en incapacité dans l'ordre dans le quel les sorties d'incapacité se déroulent :  $T_1 < T_2 < \dots$

Posons la matrice  $X^-(t) = [X^t(t)X(t)]^{-1}X^t(t)$ . Cette matrice s'appelle la matrice inverse généralisée  $X(t)$  de taille  $(p + 1) \times n$  et vérifie  $X(t) X^-(t) = J(t)I_{p+1}$  avec  $J(t)$  vaut 1 si l'inverse existe et 0 sinon. Le calcul de l'estimateur nécessite  $\hat{B}(t)$  nécessite donc la détermination de  $X^-(T_i)$  à chaque temps de sortie  $T_i$ .

Les  $\beta_k(t)$  sont estimés en dérivant au premier ordre les  $\hat{B}_k(t)$ .

La matrice de variance covariance s'écrit :

$$\text{Var}(\hat{B}(t)) = \sum_{T_i < t} [X^t(T_i)X(T_i)]^{-1}X^t(T_i)I^D(T_i)X(T_i)[X^t(T_i)X(T_i)]^{-1}t$$

Où  $I(T_i)$  est la matrice diagonale des éléments valant  $I(T_i)$ .

Dans le cas des variables qualitatives, une version semi-paramétrique du modèle additif d'Aalen peut être utilisée. Le modèle semi-paramétrique d'Aalen, appelé aussi le modèle de Lin Ying, permet de mesurer le risque additionnel dû à l'effet des variables explicatives. Pour ce cas particulier, on peut écrire :

$$h(t/z_i(t)) = h_0(t) + \sum_{k=1}^P \beta_k \times z_{ik}$$

Pour modéliser de façon satisfaisante les taux de hasard, il est indispensable de lisser les taux de hasard de manière non paramétrique. Nous optons pour le lissage de Whittaker-Henderson d'une seule dimension.

## 2. Tests statistiques du modèle

Dans cette partie, nous allons présenter les tests permettant la validation du modèle additif d'Aalen.

### a) La nullité des coefficients de régression :

Scheike et Martinussen indiquent dans leur ouvrage qu'il est difficile de travailler avec les estimations des coefficients de régression  $\beta_k(t)$ . Ils expliquent que la distribution asymptotique des  $\beta_k(t)$  se décompose en une partie avec variance et une autre partie avec biais. Ils estiment que les coefficients de régression cumulés possèdent de meilleures propriétés pour les statistiques inférentielles et proposent différents tests.

Soit l'hypothèse  $H_0 : \beta_k(t) = 0$

Cette hypothèse teste la nullité des coefficients de régression sur une période  $[0, T]$ , ce qui implique si on utilise les coefficients de régression cumulés :  $H_0 : B_k(t) = 0$

Scheike et Martinussen proposent la statistique suivante :

$$\tilde{T}_s = \sup_{t \in [0, T]} |\hat{B}_k(t)|$$

Soit  $U^{(n)} = \sqrt{n}(\hat{B} - B)$ . On a  $U^{(n)}$  converge vers une distribution limite qui est une martingale gaussienne  $U$  de variance  $\phi(t)$ . Ce la implique que  $\sqrt{n} \tilde{T}_s$  a une distribution limite équivalente à  $\sup_{t \in [0, T]} |U_k(t)|$  où  $U_k$  dénote la  $k^{\text{ième}}$  composante de  $U$ .

Une distribution asymptotique des quantiles est obtenue grâce à l'estimation de la variance  $\hat{\phi}(t)$ . Cette distribution peut être simulée par  $\hat{\phi}_{kk}(t)$  (le  $k^{\text{ième}}$  élément de  $\hat{\phi}(t)$ ).

### b) Les résidus de martingales :

Pour le modèle additif, au temps  $t$ , quand les covariables sont indépendantes du temps, la fonction de régression des coefficients cumulés s'écrit :

$$\hat{H}(t/z) = \hat{B}_0(t) + \sum_{k=1}^P \hat{B}_k(t) \times z_k$$

Le résidu martingale est défini comme la différence au temps  $t$  entre le nombre observé de sorties  $N_i(t)$  et le nombre de sorties théoriques du modèle  $\hat{H}(t/z_i(t))$ .

$$\hat{M}_i(t) = N_i(t) - \hat{H}(t/z_i(t))$$

Par construction, à n'importe quel instant  $t$ , la somme des résidus sur l'ensemble des  $n$  individus doit être égale à zéro. La différence entre le nombre de sorties observées et le nombre de sorties théoriques par rapport à la population sous risque est calculée pour analyser comment évolue l'erreur relative en fonction du temps. Le modèle est satisfaisant si la valeur de l'erreur relative est faible.

## XIII - 2. Résultats du modèle

### 1. Estimation des paramètres

Les fichiers réalisés lors du modèle de Cox sont utilisés pour le modèle d'Aalen. Le modèle additif s'écrit alors de la façon suivante :

$$h(t/z_j) = \text{Intercept}(t) + \beta_1 \times \text{Age} + \beta_2 \times \text{Sexe} + \beta_3 \times \text{CSP}_{\text{cadres}} + \beta_4 \times \text{CSP}_{\text{ens}}$$

Pour déterminer si les variables ont une influence sur le modèle d'Aalen, le calcul des p-values obtenu à partir de l'estimation de ce modèle est réalisé et ses valeurs sont les suivantes :

```
Call:
aareg(formula = Surv(Anc_Entree, Anc_Sortie, Censure, "counting") ~
      Age_Survenance + Sexe + CSP, data = tData)

n= 563989
1095 out of 1095 unique event times used

      slope      coef se(coef)      z      p
Intercept  0.054700  8.00e-06  2.98e-08  268.0  0.00e+00
Age_Survenance -0.000377 -6.59e-08  6.64e-10 -99.1  0.00e+00
SexeH      -0.002700 -4.42e-07  1.47e-08 -30.0  1.39e-197
CSPcadres  -0.003420 -6.75e-07  2.26e-08 -29.9  1.64e-196
CSPens. pers -0.002940 -4.37e-07  1.81e-08 -24.1  5.06e-128
```

On constate que toutes les p-value sont significatives. Donc notre modèle prendra compte de toutes les covariables et on va avoir six tables de maintien.

La pente calculée indique comment la variable influence la durée de maintien. En effet, les coefficients de régression sont constants au cours du temps, cela implique que le fonction de régression au cours du temps est une droite passant par l'origine avec une pente de la valeur de ce coefficient.

Une pente positive est associée à un accroissement de la fonction de hasard et une pente négative à une baisse de la fonction de hasard car les covariables ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

## 2. Validation du modèle

Après avoir estimé notre modèle, il est temps de le valider. Dans un premier temps, les courbes de survie estimées par l'estimateur de Kaplan-Meier pour les populations des femmes non cadres et des hommes non cadres seront comparées à celles estimées à partir du modèle d'Aalen. Puis nous traiterons le test des résidus de martingales sur ce modèle.

La figure suivante représente les deux courbes de survie estimées respectivement par le modèle d'Aalen et l'estimateur de Kaplan-Meier à l'âge moyen 42 ans :

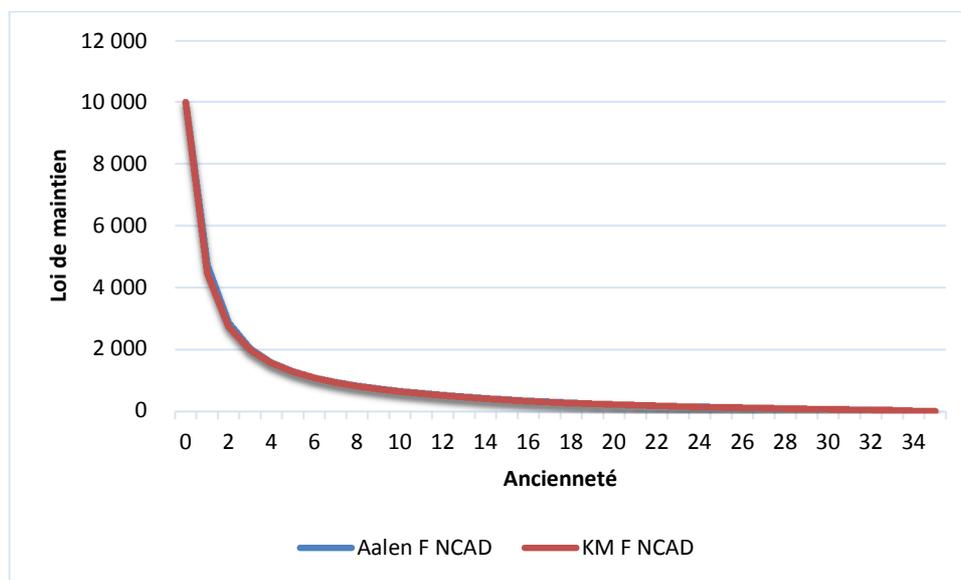


Figure 32 : comparaison entre la fonction de survie de Kaplan-Meier et celle d'Aalen

Nous remarquons que les deux courbes sont superposées. En moyenne, l'écart relatif entre les deux modèles est de 1,39% ce qui est acceptable puisque les courbes de survie du modèle d'Aalen sont contenues dans l'intervalle de confiance des courbes de survie estimées par Kaplan-Meier.

Pour valider statistiquement notre modèle, on est amené à réaliser le test statistique basé sur les résidus de martingales. Voici le résultat obtenu :

Chisq=13229.91 on 4 df, p=0; test weights=aalen

Le test statistique basé sur les résidus de martingales nous donne une p-value nulle. On déduit que le modèle additif est adapté à nos données.

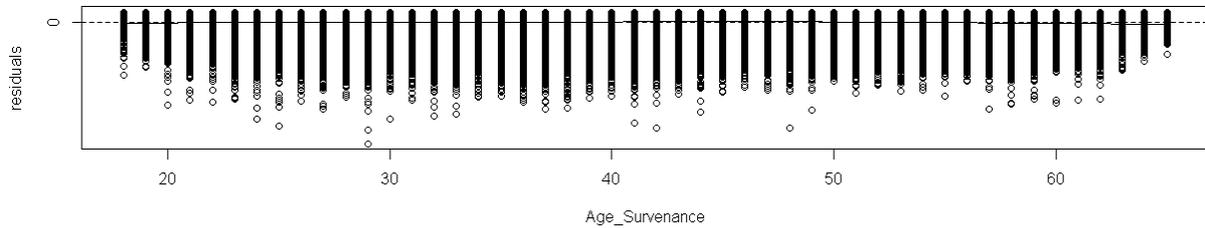


Figure 33: les résidus martingales selon l'âge à l'entrée en incapacité

Une visualisation graphique de l'ensemble des résidus martingales montre que la somme de ces derniers est très proche de 0 pour les âges moins de 20 ans, entre 40 et 50 ans et supérieur à 57 ans. Et nulle pour le reste. Ainsi, la valeur de l'erreur relative est presque nulle ce qui confirme, d'une part, le résultat du test statistique précédent et nous permet de conclure, d'autre part, que notre modèle est satisfaisant.

Nous nous servons du modèle additif pour calculer les coefficients qui nous permettent d'obtenir des tables adaptées à chaque population en multipliant terme par terme la table de la loi de maintien générale (obtenue par l'estimateur de Kaplan-Meier) par la table des coefficients correspondante. Les cinq tables des coefficients permettant la segmentation ainsi que la loi générale de maintien sont présentées en Annexe.

Ici nous représenterons les lois de maintien de différentes valeurs de covariable (le sexe puis la CSP) pour différents âges afin de les comparer à la loi de maintien globale.

Lois de maintien selon le sexe :

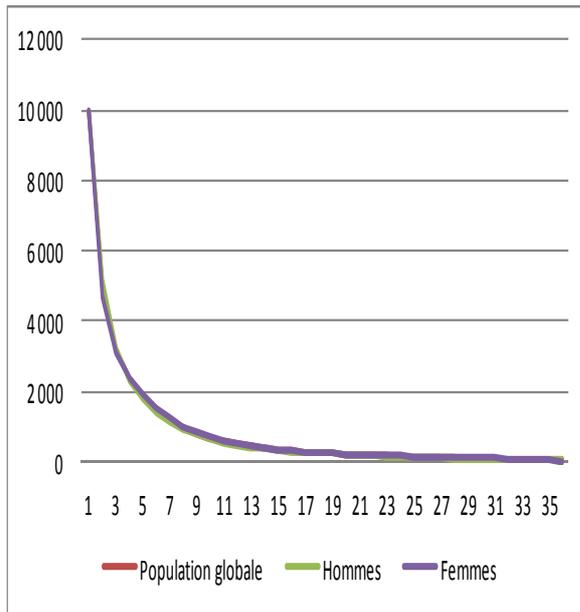


Figure 34: Maintien à l'âge 20 ans

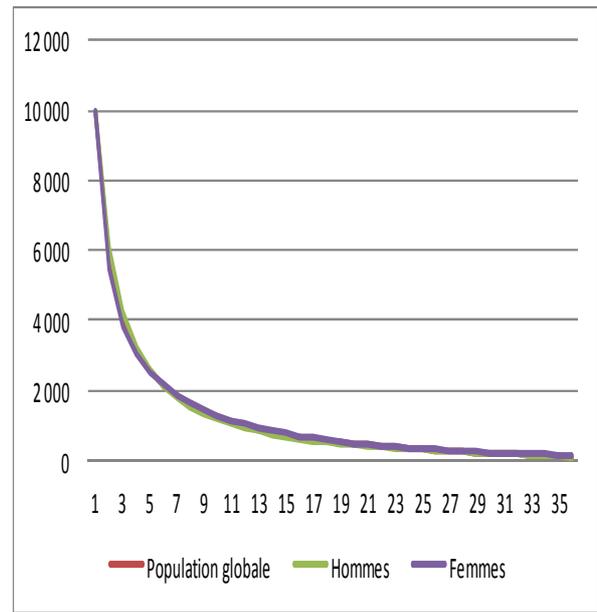


Figure 358 : Maintien à l'âge 40 ans

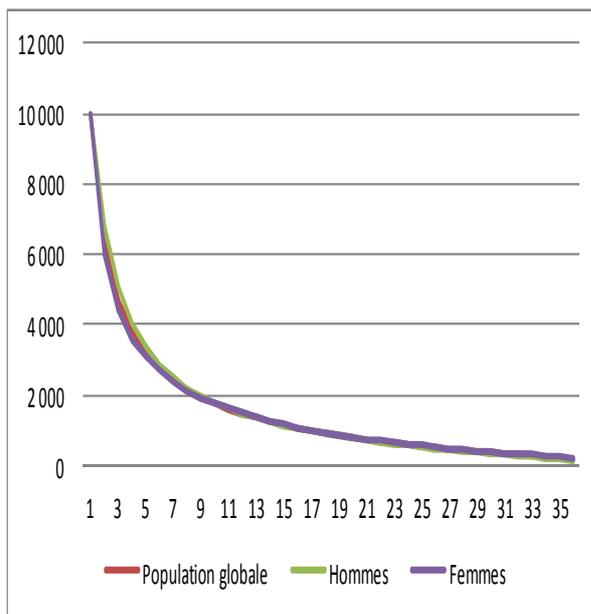


Figure 36 : Maintien à l'âge 60 ans

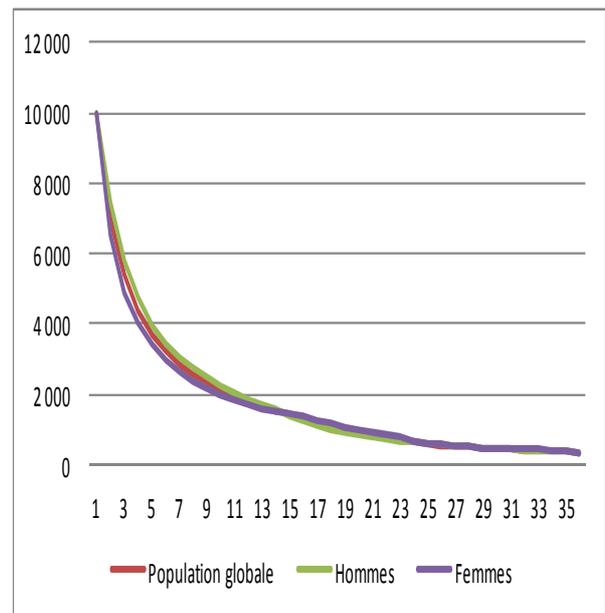


Figure 37 : Maintien à l'âge 65 ans

Lois de maintien selon la CSP :

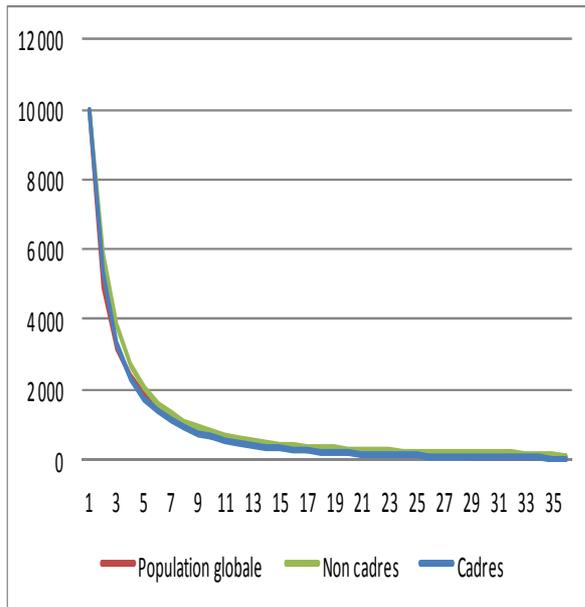


Figure 38: Maintien à l'âge 20 ans

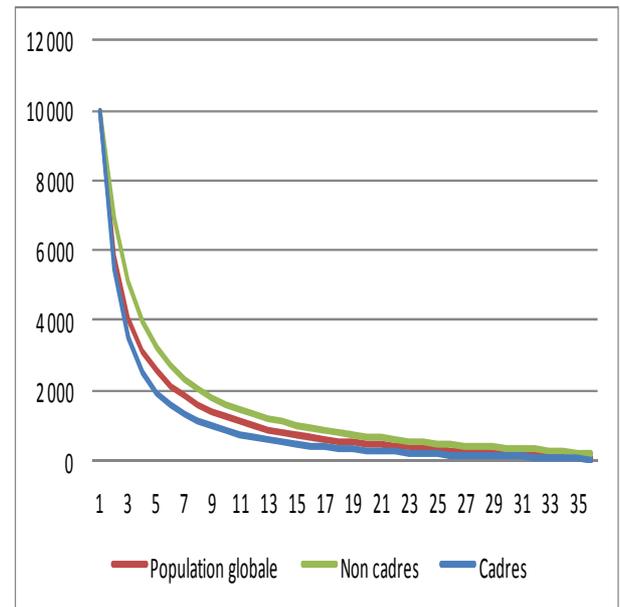


Figure 39 : Maintien à l'âge 40 ans

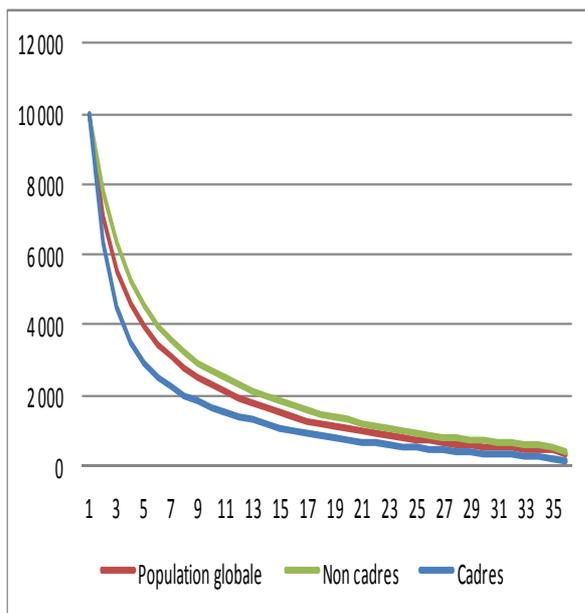


Figure 40: Maintien à l'âge 60 ans

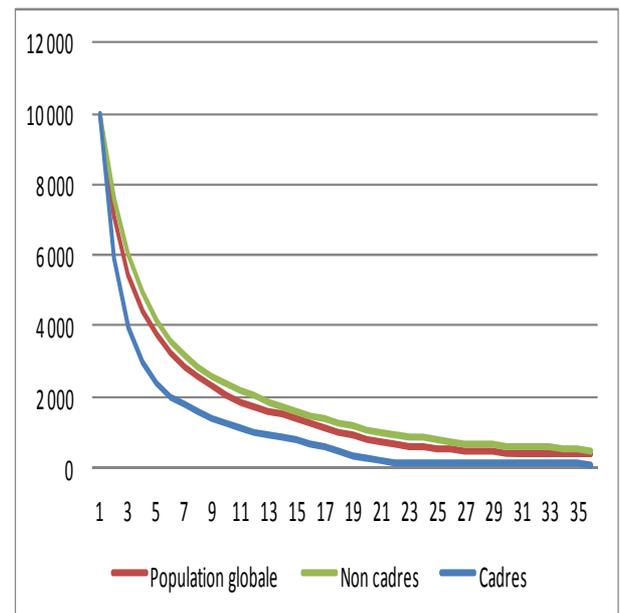


Figure 41 : Maintien à l'âge 65 ans

On remarque que les cadres sortent plus vite de l'incapacité que les non-cadres. La loi globale présente un cas entre les cadres et les non-cadres. Ceci nous semble logique puisque cette catégorie contient au même temps des cadres et des non cadres. Pour le sexe, on n'observe pas de différence entre chaque sexe et la population générale.

Les résultats obtenus pour les segmentations, que ce soit selon le sexe ou selon la CSP, sont cohérents avec les statistiques descriptives et avec les tests statistiques réalisés.

Après avoir estimé les nouvelles lois de maintien, il est le temps d'étudier l'impact de ces nouvelles lois sur le provisionnement.

# Partie 4 :

## Provisionnement

Dans cette partie, nous allons calculer les coefficients des provisions mathématiques, les comparer avec les coefficients actuels, et étudier l'impact de la segmentation sur le provisionnement.

## XIV. L'impact de la nouvelle loi de maintien sur le provisionnement

Pour chaque individu en état d'incapacité, les entreprises d'assurance doivent constituer deux types de provisions techniques : une provision d'incapacité en cours et une provision d'invalidité en attente (couvrant le risque que l'incapable puisse devenir invalide).

Dans cette partie nous allons nous intéresser au premier type des provisions, c'est la provision en cours de service. À partir des lois de maintien lissées précédemment constituées, nous allons calculer les coefficients de provisions en fonction de l'ancienneté de l'âge de l'assuré.

### XIV - 1. Calcul des coefficients de provisionnement

Nous rappelons que les provisions des sinistres en cours de service sont égales à la valeur actuelle probable des prestations à servir.

Le coefficient de provision pour un individu entré en incapacité à l'âge  $x$ , et présent dans l'état depuis  $k$  mois, présente le montant de la provision mathématique pour un euro de rente annuelle.

Si on note :

- $i$  le taux technique annuel
- $x$  l'âge à l'entrée dans l'état
- $anc$  l'ancienneté de l'assuré dans l'état d'incapacité
- $l_{x,k}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  et encore en incapacité après  $k$  mois.
- $IT$  indemnité annuelle

Alors les coefficients des provisions, au titre d'une garantie incapacité, est calculé, de façon discrète selon l'âge à l'entrée et l'ancienneté, comme suit :

$$\text{Coef PM}_{\text{incap}}(x, \text{anc}) = \frac{1}{2 l_{x,\text{anc}}} \sum_{k=\text{anc}}^{35} \left[ \frac{l_{x,k}}{(1+i)^{(k-\text{anc})/12}} + \frac{l_{x,k+1}}{(1+i)^{(k+1-\text{anc})/12}} \right]$$

La provision pour rente d'incapacité en cours est écrite comme suit :

$$\text{PM IT}(x, \text{anc}) = \text{Coef PM}_{\text{incap}}(x, \text{anc}) \times \frac{IT}{12}$$

L'indemnité prévue en incapacité devra être versée mois par mois, à condition que l'individu soit toujours en incapacité. Ainsi, nous calculons la valeur probable de l'engagement de l'assureur, en actualisant les indemnités grâce à un taux d'actualisation, et en intégrant les probabilités de maintien en incapacité, représentées

par  $\frac{l_{x,k}}{l_{x,anc}}$ . Nous intégrons dans les bornes de la somme le fait que l'incapacité a une durée maximale de 3 ans.

Enfin, le BCAC préconise de ne considérer non pas des flux, mais la moyenne de deux flux, l'un étant versé en début de période, l'autre en fin de période. Ceci a pour objectif de diminuer l'écart dû à la discrétisation de l'intégral.

## XIV - 2. Comparaison entre les nouveaux et les anciens coefficients des provisions

### 1. Nouveaux coefficients PM

En utilisant la table de maintien globale en incapacité, constituée à partir de l'estimateur de Kaplan-Meier et lissée par Whittaker-Henderson, nous calculons les coefficients des provisions pour chaque âge et chaque ancienneté. Nous fixons le taux d'actualisation à 2%.

Nous obtenons les représentations graphiques suivantes :

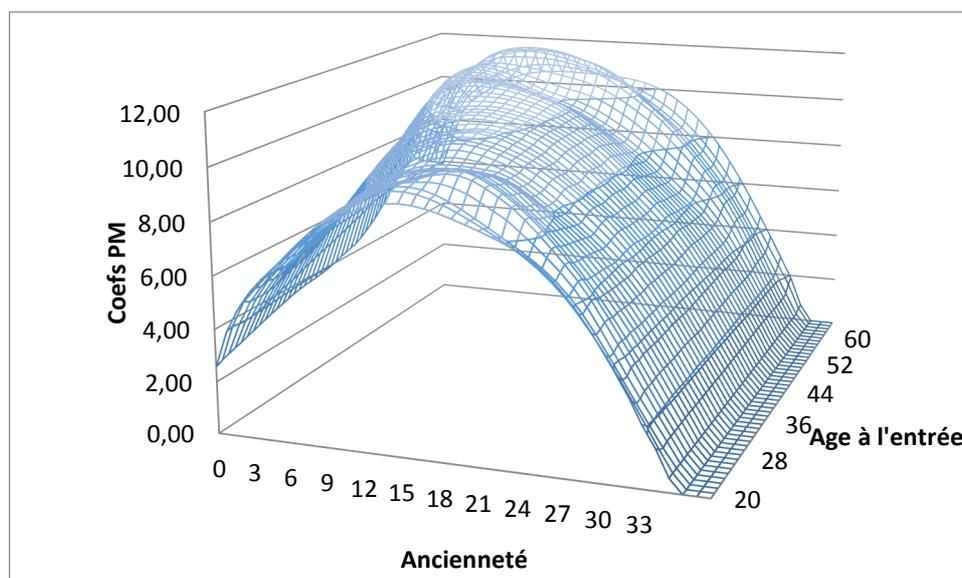


Figure 42: les nouveaux coefficients Pm selon l'âge et l'ancienneté

Nous voyons que les provisions ont d'abord tendance à augmenter, puis à diminuer. Cela s'explique de la manière suivante : au début, les probabilités de maintien en incapacité augmentent fortement (car le nombre de sortie chute au début), pour se stabiliser vers la fin, ce qui conduit à la diminution observée graphiquement en plus de l'impact de la diminution de nombre de versements possibles.

On remarque aussi que, pour les grands âges, les coefficients atteignent des valeurs très élevées. Pour plus de visibilité voici la projection des coefficients des provisions sur un plan :

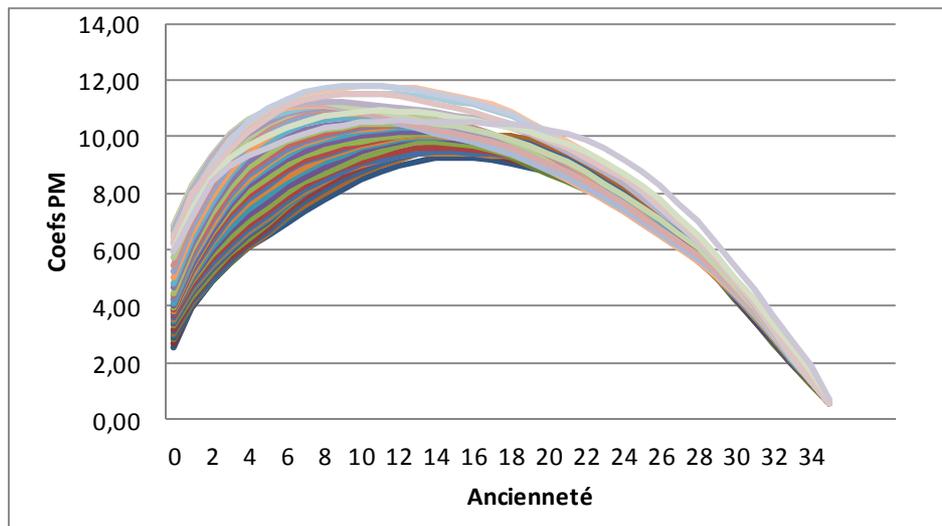


Figure 43 : Projection des nouveaux coefficients PM sur un plan

On constate que les courbes des provisions se décalent vers le haut en augmentant l'âge de l'assuré à l'entrée en incapacité. De plus, à partir de 57 ans l'écart entre les courbes des provisions devient important.

On déduit que plus l'assuré est âgé, plus il faut provisionner. Et en dépassant les 57ans, il faut provisionner encore plus.

## 2. Coefficients PM actuels

Afin de bien mener la comparaison des nouveaux coefficients avec les anciens, nous avons harmonisé le calcul de ces derniers avec celui des nouveaux. Pour cela nous avons calculé les taux de sortie brut à partir de la loi de maintien ancienne, lissé ces taux par la même méthode de lissage déjà utilisée (Whittaker-Henderson) et en utilisant les mêmes paramètres de lissage et enfin calculer les coefficients PM à partir de ces taux lissés avec le même taux d'actualisation 2%.

La représentation graphique des coefficients obtenus est la suivante :

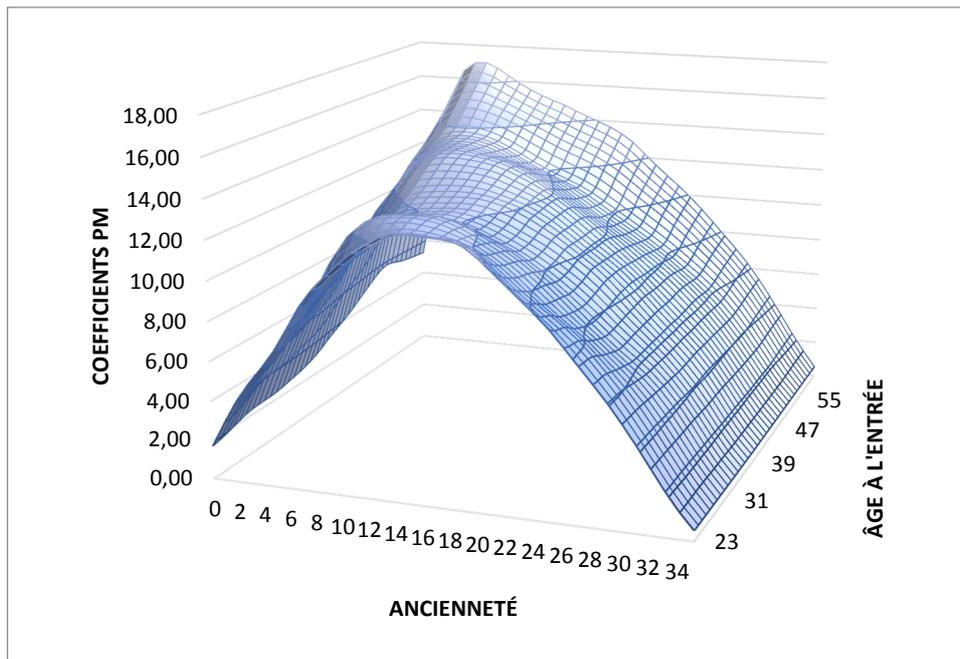


Figure 44: Anciens coefficients PM selon l'âge et l'ancienneté

On observe que la figure a la même tête que celle d'avant, sauf que celle-ci est plus homogène et il y a moins de d'écart entre les courbes pour les grands âges. Ceci peut être mis en évidence en projetant les courbes des provisions sur un plan.

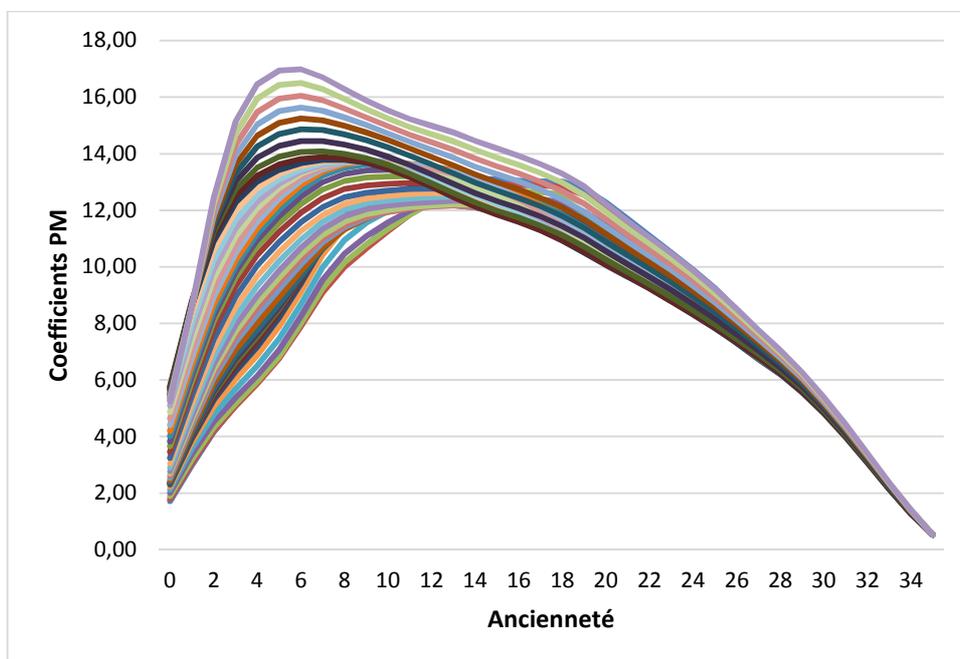


Figure 95 : Projection des anciens coefficients de tous les âges sur un plan

La présentation globale des courbes des provisions nous donne une idée générale sur la forme des courbes et les différences flagrantes (surtout selon l'âge de l'assuré).

Toutefois, elle ne permet pas de bien comparer les coefficients en termes d'ancienneté. Par conséquent, nous procédons à une comparaison par âge.

### 3. Comparaison par âge

En comparant, âge par âge, les courbes des coefficients PM, nous constatons que les coefficients actuels sont plus élevés que les nouveaux et l'écart entre les deux courbes devient petit à petit de plus en plus grand.

Pour illustrer cette comparaison, nous représentons les deux coefficients (actuels et nouveaux) selon l'ancienneté pour les âges suivants : 20, 40, 60 et 65 ans.

Comparaison des Coefs PM par âge :

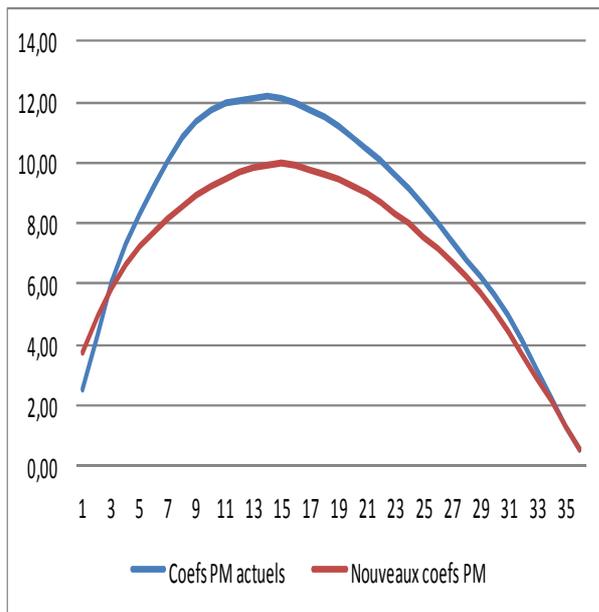


Figure 46: Coefs PM à l'âge 20 ans

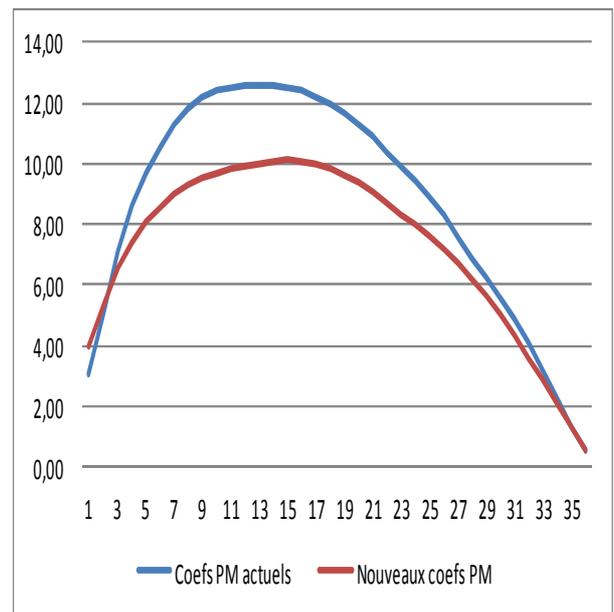


Figure 47 : Coefs PM à l'âge 40 ans

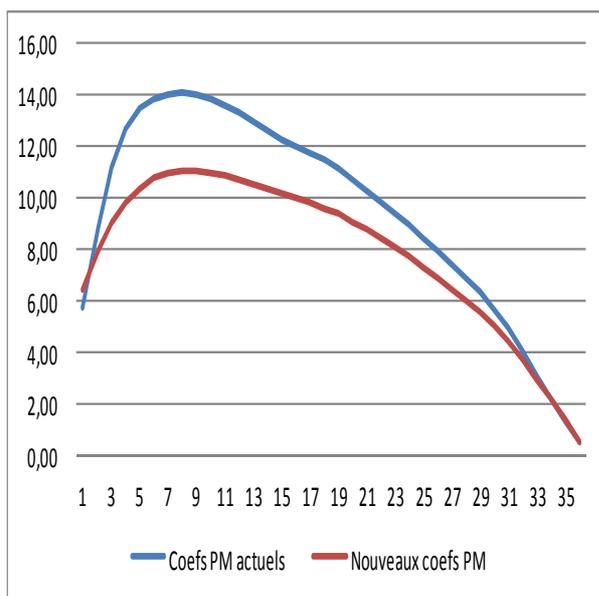


Figure 48 : Coefs PM à l'âge 60 ans

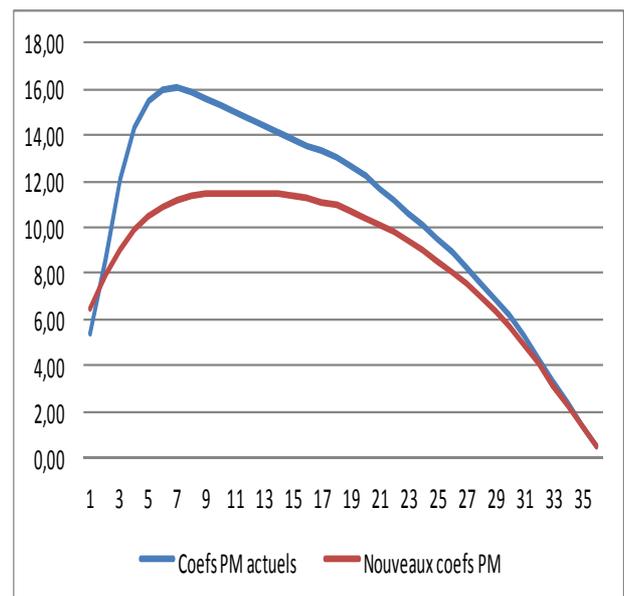


Figure 49 : Coefs PM à l'âge 65 ans

On déduit donc qu'avec les nouveaux coefficients, les assureurs sont amenés à provisionner moins qu'avant.

Dans notre étude, nous avons segmenté notre loi de maintien en tenant compte de sexe et de la CSP. A présent, dans l'objectif d'étudier l'impact de la segmentation sur le provisionnement, nous tenons compte des coefficients de la segmentation dans le calcul des coefficients PM pour chaque sous-population.

### XIV - 3. Impact de la segmentation sur le provisionnement

#### 1. Segmentation selon le sexe

Après avoir calculé les coefficients PM pour les hommes et les femmes, nous avons comparé, âge par âge, leurs courbes à celle des coefficients globaux.

Nous avons remarqué que pour tous les âges les trois courbes sont presque superposées. Comme illustration, on représente la courbe de coefficients PM de chaque sexe pour l'âge moyen :

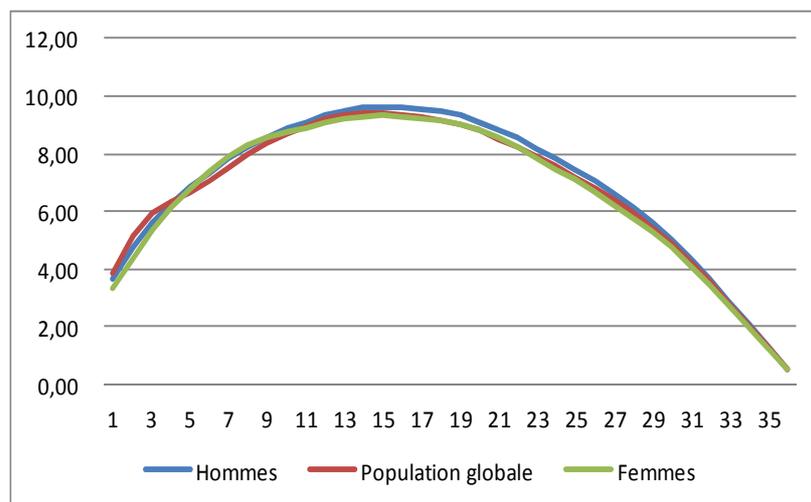


Figure 100 : Coefs PM selon le sexe à l'âge de 42 ans

On peut déduire que le sexe n'a pas d'impact sur le provisionnement.

#### 2. Segmentation selon la CSP

D'après notre étude, la CSP a un impact plus important significatif sur la loi de maintien. Nous verrons par la suite son impact sur le provisionnement en représentant les courbes des coefficients PM des cadres et des non cadres pour les petits (20 ans), moyens (40 ans) et grands âges (60 et 65 ans):

Comparaison des Coefs PM Selon la CSP :

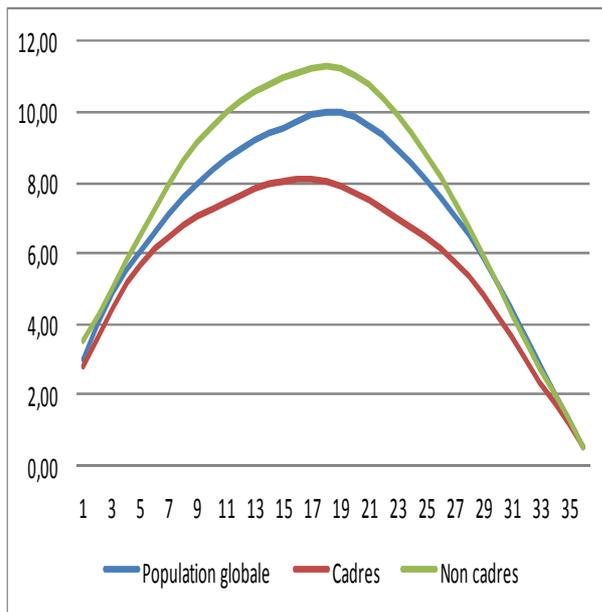


Figure 51: Coefs PM à l'âge 20 ans

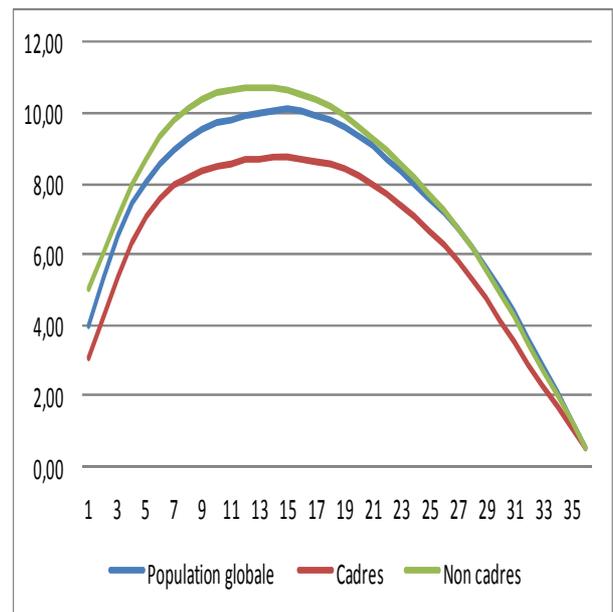


Figure 52 : Coefs PM à l'âge 40 ans

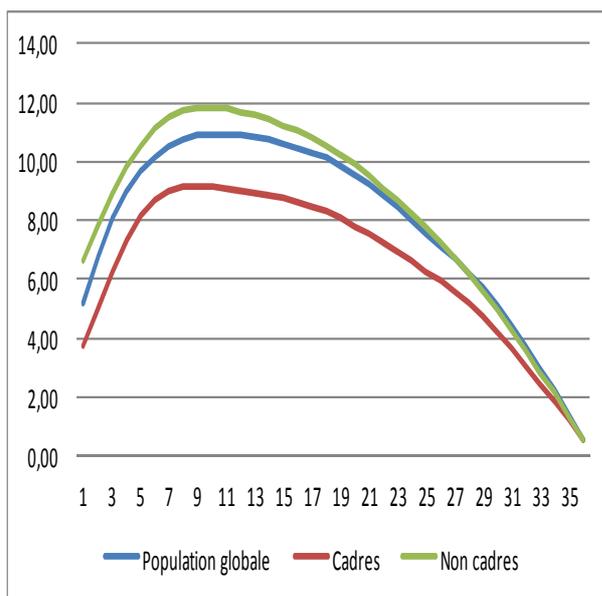


Figure 53 : Coefs PM à l'âge 60 ans

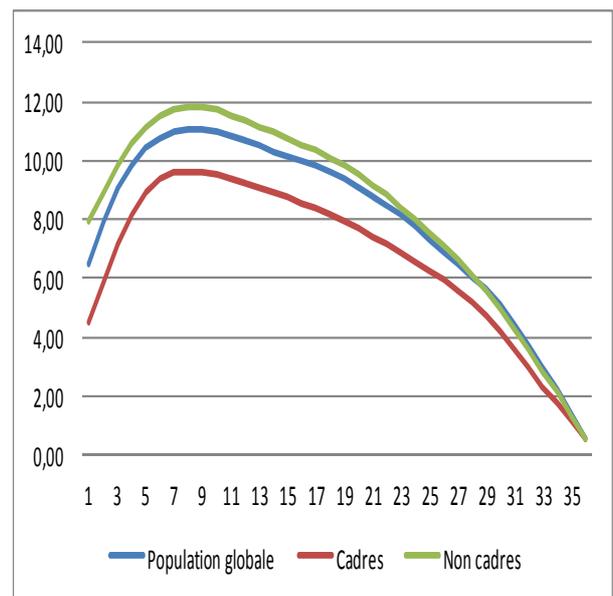


Figure 54 : Coefs PM à l'âge 65 ans

On remarque que l'impact de la CSP est très important sur le provisionnement. En effet, les courbes des cadres se situent au-dessous des courbes générales, et celles des non cadres sont au dessus. Il faut donc moins provisionner pour les cadres que pour les non cadres.

Pour plus de clarté, nous allons présenter un cas réel. C'est celui du BCAC.

#### XIV - 4. Cas réel du BCAC

Dans cette partie, nous allons calculer les provisions à constituer par le BCAC en utilisant les différents coefficients PM présentés ci-avant.

L'application sur le portefeuille du BCAC nécessite de prendre en compte la spécificité du RPP (Régime Professionnel de Prévoyance). En effet, Le BCAC n'a pas retenu la même définition de l'incapacité que la sécurité sociale. La durée maximale de l'incapacité pour un contrat RPP est d'un an à la place de 3 ans. Après cette période, l'assuré est considéré par le BCAC comme invalide.

Pour cette raison et afin d'homogénéiser le cadre de nos calculs, nous avons regroupé les incapables et les invalides de moins de deux ans pour constituer notre portefeuille d'incapacité.

Ce dernier se compose de 2241 assurés en état d'incapacité dont 1731 sont des femmes (68%) et 810 des hommes (32%). Les cadres et les non-cadres représentent respectivement 26,6% et 51,2% du total des incapables. On ignore la CSP des 563 incapables restant (soit 22,2%).

On dispose, de plus du sexe et de la CSP de l'assuré, de l'âge de l'assuré à l'entrée en incapacité, de l'ancienneté de l'assuré dans l'état d'incapacité en mois et de la rente annuelle.

Nous commençons par calculer les provisions à constituer tête par tête, sans tenant compte du sexe et de la CSP de l'assuré. Voici les résultats obtenus :

- ✓ 25 975 335 € à provisionner en utilisant les anciens coefficients PM
- ✓ 23 011 325 € à provisionner en utilisant les nouveaux coefficients PM

On remarque qu'en utilisant les nouveaux coefficients, le BCAC provisionne 11,4% de moins. Cet écart est très important et l'utilisation des coefficients actuels conduit à un sur-provisionnement.

Prenant en considération les segmentations selon le sexe et la CSP, nous obtenons les montants à provisionner présentés par le tableau suivant :

Mode de calcul	Coefs PM Actuels	Nouveaux Coefs PM	Ecart en %
Global	25 975 335	23 011 325	-11,4%
Segmentation selon Sexe	25 975 335	22 925 826	-11,7%
Segmentation selon CSP	25 975 335	21 670 261	-16,6%

*Tableau 11: Comparaison des différents modes de calcul des provisions*

On remarque que dans tous les cas, l'utilisation des nouveaux coefficients permet aux assureurs de mettre à côté des montants moins élevés que celles constituer actuellement.

On remarque que puisque l'influence du sexe sur les provisions à constituer est négligeable. Alors que l'impact de la CSP sur le provisionnement est très important. La segmentation selon la CSP permet de provisionner encore -5,2% de moins.

Pour conclure, les résultats obtenus sont cohérents avec les tests statistiques déjà réalisés.

## Conclusion :

La construction d'une loi de maintien en incapacité commence donc d'abord par une compréhension fine du risque incapacité propre à chaque assurance. Cette étude aide à déterminer la méthode la plus adéquate à la construction des taux de maintien en incapacité même si la disponibilité d'un volume suffisant de données ajoute une contrainte supplémentaire et limite le choix de la segmentation de la loi de maintien.

Dans une première étape, nous avons construit une loi générale de maintien en arrêt de travail en ne tenant compte que de l'âge (il constitue logiquement un facteur discriminant majeur sur la probabilité de maintien en arrêt).

Construire une loi par âge entraîne de nombreuses irrégularités. Un lissage des taux obtenus est donc nécessaire. Le lissage par la méthode de Whittaker Henderson a été utilisé. Cette dernière permet un lissage plus efficace tout en restant fidèle aux taux bruts obtenus.

Ensuite, nous avons recherché les facteurs discriminants, à savoir le sexe et la CSP. Les résultats sont conformes à nos attentes concernant ces deux facteurs :

- ❖ Le sexe n'influe pas significativement sur le maintien en arrêt de travail ;
- ❖ La CSP influe sur le taux de sortie – la comparaison entre les cadres et les non cadres montre un taux de sortie plus faible pour les non cadres.

Dans notre cas, une segmentation par âge et par catégorie socio-professionnelle a été choisie. La non-vérification du hasard proportionnel, nous oblige à ne pas appliquer le modèle de Cox et se tourner vers le modèle additif d'Aalen.

Les écarts constatés entre la nouvelle loi générale de maintien en arrêt de travail et les tables réglementaire actuelles impliquent des écarts aux niveaux des provisions. En effet, les coefficients de provisions mathématiques obtenus à partir de la nouvelle loi générale de maintien en arrêt sont systématiquement plus faibles que les coefficients de l'actuelle table réglementaire.

En résumé, nous constatons un sur-provisionnement en appliquant les tables officielles actuelles. L'utilisation de la nouvelle loi générale permet de provisionner 11,4% de moins et les lois segmentées selon la CSP permettent de provisionner encore moins. L'écart entre les provisions actuelles et les nouvelles atteint 16,6%.

Cette mission de construction de tables de maintien en incapacité au sein de l'équipe prévoyance a donc été très riche en nouvelles connaissances actuarielles et dans la compréhension des problématiques posées à l'assureur. De plus ce stage m'a permis de me rendre compte qu'il peut être compliqué de récupérer des données des contrats, qu'il faut savoir détecter des erreurs et retraiter les données. Enfin une construction

statistique déconnectée de toutes études annexes comme la composition du portefeuille ou l'impact des provisionnements est inutile.

Les travaux réalisés par le BCAC, dans le cadre le cadre de ce mémoire, doivent être complétés par une étude sur les lois de passage de l'incapacité à l'invalidité ainsi que les lois de maintien en invalidité.

## Bibliographie

- [1] AALEN O. [1978] “Non-parametric inference for a family of counting processes “, Ann. Stat. 6, 710-726.
- [2] AKCIN. H. M, “Direct Adjustment Method on Aalen's Additive Hazards Model for Competing Risks Data”, (2008)
- [3] CAO. H [2005] “A Comparison Between the Additive and Multiplicative Risk Models”.
- [4] CHOUKROUN M. [2008] « Le modèle additif d'Aalen, une alternative au modèle de Cox dans le cadre de la construction d'une loi de maintien en incapacité de travail » Bulletin français d'actuariat, vol. 8, n°16.
- [5] COX D.R. [1972] « Regression models and life-tables (with discussion) ». J. R. Statist. Soc. Ser. B, pages 187-220.
- [6] FINAS. S, [2009] “ Modélisation du risque de maintien en incapacité ”.
- [7] GAUMET. A [2001] “Construction de tables d'expérience pour l'entrée et le maintien en incapacité”.
- [8] GUGUMUS. M, [2009] “ Modélisation de l'incapacité temporaire et de l'invalidité en prévoyance collective ”.
- [9] Martinussen. T [2008] “The Aalen additive frailty hazards model”.
- [10] MARTINUSSEN T., SCHEIKE T. [2006] Dynamic Regression Models for Survival Data, New York : Springer.
- [11] PLANCHET F., THÉRON P.E. [2006] Modèles de durée – applications actuarielles, Paris : Economica.
- [12] PLANCHET. F, WINTER. P [2005] “ Méthodes bidimensionnelles pour l'ajustement de lois de maintien d'expérience en arrêt de travail ”
- [13] ROLLAND. A, AUBIN. I [2005] “Comparaison des méthodes de construction des lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité, et analyse de l'impact du choix sur les niveaux de provisionnement et de charge ultime”.
- [14] SCHANNES, B. [2010] “Risque incapacité-invalidité des salariés des entreprises françaises : Modélisation, tarification et provisionnement.”.
- [15] WOLFRUM. R [1992] “une alternative non-paramétrique au calcul des provisions techniques en Assurance Invalidité ”.

# Annexe :

## 1 – Lois de maintien actuelles

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
-23	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98	94	91	87	84	80	76	76	74	72	68	68	65	63	62	58	55	15
24	10 000	2 931	1 848	1 215	894	657	478	343	291	256	217	183	166	143	130	121	114	105	95	91	88	87	84	82	79	74	72	68	67	62	62	58	57	55	52	46	14
25	10 000	3 080	2 001	1 345	997	739	536	382	327	289	251	216	195	172	159	149	140	129	116	113	110	106	102	97	92	87	83	78	76	73	73	70	67	66	63	58	16
26	10 000	3 177	2 112	1 461	1 087	812	591	431	372	325	285	249	226	201	186	171	161	150	137	129	124	119	114	107	102	95	91	89	87	82	81	78	76	73	69	63	23
27	10 000	3 251	2 180	1 540	1 156	869	643	476	407	360	320	285	263	237	222	207	192	179	168	159	151	144	140	134	128	118	111	108	104	97	93	90	88	85	81	74	28
28	10 000	3 298	2 243	1 600	1 209	915	688	524	448	400	359	322	297	270	255	238	222	210	199	189	180	172	167	160	153	143	132	128	120	112	105	103	99	96	90	82	33
29	10 000	3 348	2 273	1 640	1 246	956	726	559	476	425	384	352	327	298	280	262	247	233	220	208	199	190	184	175	168	159	147	143	133	125	118	113	109	106	98	91	35
30	10 000	3 386	2 275	1 659	1 264	964	744	583	494	439	396	363	338	308	287	267	252	240	227	214	202	193	185	177	171	161	149	143	134	125	117	111	108	105	97	89	34
31	10 000	3 388	2 228	1 618	1 249	965	756	595	501	449	406	375	347	318	295	276	261	250	236	223	212	204	194	186	179	172	159	154	141	131	121	114	111	108	101	93	30
32	10 000	3 433	2 238	1 617	1 254	975	772	612	522	468	421	388	357	325	302	279	264	252	235	222	211	202	192	183	176	170	159	153	137	127	118	110	106	102	96	89	25
33	10 000	3 466	2 235	1 627	1 260	983	782	628	540	484	431	395	364	332	310	286	270	256	238	223	212	202	191	181	172	162	154	146	134	122	117	105	100	98	94	88	18
34	10 000	3 567	2 298	1 684	1 321	1 033	828	684	597	535	477	436	401	366	344	319	298	282	265	247	233	220	207	197	186	175	167	158	146	134	126	117	110	106	101	96	21
35	10 000	3 645	2 331	1 705	1 357	1 082	876	732	647	586	528	481	443	402	377	351	331	309	294	275	261	246	234	220	207	199	191	179	166	153	146	135	126	121	115	109	24
36	10 000	3 701	2 390	1 747	1 390	1 106	905	771	682	617	560	508	469	428	397	370	347	323	308	287	273	255	246	230	217	208	199	186	174	160	153	142	132	128	120	114	23
37	10 000	3 822	2 458	1 804	1 430	1 148	932	801	704	635	579	526	487	443	406	379	357	335	319	298	279	263	252	235	222	212	204	191	181	167	161	149	135	130	123	114	19
38	10 000	3 958	2 526	1 851	1 479	1 193	980	841	739	671	616	564	521	477	439	411	384	358	340	319	299	282	270	252	242	235	229	217	203	188	180	167	154	148	141	131	21
39	10 000	4 035	2 600	1 923	1 541	1 266	1 055	915	807	739	680	623	572	530	486	455	427	400	381	364	343	329	314	294	279	268	260	248	234	215	207	189	177	170	162	148	24
40	10 000	4 073	2 652	1 973	1 575	1 303	1 097	965	853	783	719	659	607	565	521	490	458	428	404	384	362	349	332	313	295	281	272	263	246	228	214	195	184	178	171	156	21
41	10 000	4 214	2 776	2 096	1 680	1 408	1 193	1 054	937	866	798	731	676	626	582	552	519	483	455	433	407	393	372	352	330	314	304	295	276	260	244	224	213	205	194	182	19
42	10 000	4 364	2 930	2 237	1 814	1 540	1 314	1 162	1 039	971	895	825	764	710	666	630	593	553	521	499	476	457	432	411	381	364	353	340	322	300	280	257	247	236	223	213	26
43	10 000	4 473	3 046	2 341	1 907	1 633	1 400	1 243	1 120	1 045	965	892	830	774	726	691	654	614	582	558	532	513	488	464	432	409	396	378	362	337	311	290	278	263	244	231	35
44	10 000	4 621	3 155	2 417	1 974	1 676	1 441	1 282	1 158	1 077	1 000	928	872	809	760	725	682	643	608	581	555	531	503	479	453	431	417	396	379	353	323	302	287	273	254	241	26
45	10 000	4 780	3 318	2 557	2 097	1 776	1 529	1 361	1 240	1 148	1 069	1 001	938	872	825	791	745	705	675	642	614	588	559	536	509	488	466	442	421	393	363	344	328	310	286	264	33
46	10 000	4 895	3 392	2 641	2 190	1 860	1 609	1 437	1 319	1 218	1 132	1 066	997	929	882	843	793	756	728	690	658	632	602	573	547	520	492	463	441	412	380	360	343	320	297	273	45
47	10 000	5 015	3 486	2 742	2 284	1 933	1 696	1 527	1 403	1 294	1 207	1 138	1 067	994	947	904	854	818	786	741	705	675	636	601	574	543	509	483	462	435	404	387	369	347	321	292	46
48	10 000	5 161	3 662	2 911	2 441	2 076	1 836	1 659	1 534	1 418	1 328	1 259	1 179	1 099	1 047	991	937	898	864	813	779	744	697	655	623	588	549	520	494	470	438	414	389	359	338	311	45
49	10 000	5 140	3 702	2 995	2 536	2 181	1 939	1 772	1 642	1 523	1 423	1 352	1 271	1 191	1 137	1 073	1 018	968	929	881	837	798	749	699	667	629	586	557	525	497	470	448	419	384	358	334	51
50	10 000	5 245	3 801	3 093	2 637	2 305	2 057	1 875	1 736	1 618	1 518	1 440	1 358	1 285	1 220	1 148	1 087	1 037	988	945	898	847	794	739	697	649	609	567	538	505	483	455	427	391	367	345	51
51	10 000	5 310	3 904	3 198	2 746	2 414	2 175	1 984	1 838	1 715	1 614	1 527	1 447	1 374	1 302	1 226	1 158	1 096	1 040	995	943	883	827	776	732	685	646	607	572	536	514	482	451	414	389	366	42
52	10 000	5 297	3 931	3 260	2 828	2 506	2 276	2 082	1 941	1 815	1 709	1 623	1 543	1 467	1 391	1 318	1 239	1 165	1 109	1 063	1 009	950	895	843	796	741	705	652	615	572	543	512	480	432	404	383	49
53	10 000	5 336	3 992	3 361	2 939	2 618	2 384	2 198	2 055	1 920	1 813	1 724	1 643	1 568	1 491	1 407	1 324	1 241	1 176	1 121	1 058	994	932	879	829	771	735	672	632	582	556	521	490	443	412	387	48
54	10 000	5 316	3 998	3 395	2 976	2 673	2 440	2 252	2 120	1 987	1 882	1 793	1 706	1 631	1 550	1 457	1 368	1 282	1 208	1 145	1 090	1 023	956	903	840	779	739	677	638	591	565	532	504	463	433	409	44
55	10 000	5 336	3 875	3 271	2 878	2 582	2 367	2 202	2 075	1 947	1 842	1 758	1 671	1 592	1 514	1 426	1 332	1 246	1 175	1 111	1 062	1 001	939	885	830	776	737	685	637	589	564	535	506	470	439	414	59
56	10 000	5 375	3 714	3 123	2 753	2 474	2 265	2 115	2 003	1 890	1 791	1 710	1 627	1 546	1 478	1 396	1 314	1 236	1 171	1 112	1 071	1 013	957	902	852	798	762	711	670	622	600	569	540	508	475	450	107
57	10 000	5 422	3 502	2 930	2 581	2 322	2 125	1 991	1 889	1 788	1 700	1 623	1 547	1 469	1 407	1 330	1 258	1 187	1 127	1 070	1 032	979	930	882	839	795	762	722	682	642	624	595	571	547	520	496	174
58	10 000	5 426	3 437	2 876	2 544	2 297	2 108	1 986	1 894	1 798	1 710	1 636	1 558	1 476	1 416	1 339	1 263	1 192	1 131	1 071	1 041	990	942	892	848	804	770	734	691	650	633	606	582	562	533	509	181
59	10 000	5 449	3 311	2 762	2 450	2 217	2 039	1 931	1 849	1 762	1 679	1 608	1 530	1 448	1 392	1 317	1 245																				

## 2 – Nouvelles Loïs de maintien

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
20	10 000	4 113	2 477	1 787	1 379	1 082	846	665	531	427	346	288	245	209	179	155	139	131	126	120	111	101	90	79	67	56	47	43	38	36	35	33	29	24	18	8	15
21	10 000	4 251	2 579	1 857	1 424	1 108	866	683	547	443	365	305	258	220	189	165	147	134	124	114	105	94	85	75	66	56	48	42	36	32	30	28	24	19	14	7	15
22	10 000	4 424	2 713	1 938	1 467	1 133	879	689	551	446	367	306	257	219	190	167	147	131	117	105	94	84	76	69	62	54	46	39	33	30	27	25	21	16	12	7	15
23	10 000	4 610	2 861	2 038	1 533	1 174	903	703	559	454	375	313	264	226	196	172	151	133	117	103	93	84	76	69	64	58	52	46	41	36	32	28	23	19	14	9	15
24	10 000	4 787	3 009	2 154	1 618	1 233	947	737	588	481	399	335	284	244	210	183	159	140	123	108	97	88	80	74	69	63	56	50	44	39	35	30	26	22	16	10	14
25	10 000	4 940	3 142	2 258	1 700	1 296	995	774	619	507	422	355	302	260	225	195	170	149	132	118	107	97	89	82	74	67	59	53	47	42	37	32	28	24	18	9	16
26	10 000	5 043	3 236	2 335	1 760	1 342	1 027	799	641	527	441	372	317	273	237	206	180	159	142	128	117	107	97	88	78	70	62	55	49	43	38	33	28	24	18	9	23
27	10 000	5 104	3 294	2 384	1 803	1 377	1 057	826	664	546	457	386	328	282	244	214	189	168	152	138	125	115	104	94	82	73	65	57	50	43	38	33	29	24	18	9	28
28	10 000	5 137	3 328	2 417	1 833	1 407	1 087	854	689	568	476	404	344	296	256	226	201	180	163	147	134	121	110	99	88	78	69	61	53	46	40	35	30	25	18	10	33
29	10 000	5 167	3 358	2 443	1 858	1 431	1 111	879	713	590	495	421	360	310	270	239	213	191	173	155	140	126	114	102	91	80	70	61	54	47	41	35	30	24	18	10	35
30	10 000	5 178	3 375	2 465	1 883	1 459	1 139	904	735	609	512	437	375	324	283	250	223	200	180	161	145	131	118	105	93	81	70	61	53	46	40	34	28	23	17	9	34
31	10 000	5 186	3 391	2 490	1 910	1 485	1 167	933	764	637	539	461	399	347	304	269	239	215	192	173	156	140	127	113	99	87	75	66	58	50	43	37	31	26	19	9	30
32	10 000	5 176	3 395	2 502	1 928	1 507	1 192	961	795	668	568	488	423	369	325	288	256	229	205	184	165	149	134	119	106	94	82	72	63	55	48	41	35	30	22	11	25
33	10 000	5 186	3 411	2 522	1 954	1 539	1 225	995	829	702	600	517	449	392	345	306	273	245	220	198	179	160	144	130	117	105	93	82	72	63	55	48	42	35	25	13	18
34	10 000	5 156	3 391	2 513	1 955	1 549	1 244	1 018	851	724	621	537	467	407	359	320	287	259	235	213	193	174	157	142	128	115	103	91	80	70	62	54	47	40	29	14	21
35	10 000	5 107	3 342	2 476	1 935	1 542	1 246	1 025	861	734	632	550	480	420	371	331	297	269	245	223	202	184	166	150	135	122	110	98	87	77	68	60	53	45	33	17	24
36	10 000	5 050	3 284	2 430	1 906	1 529	1 243	1 029	869	743	643	561	491	433	384	343	309	280	255	231	210	190	172	155	140	126	113	102	92	82	73	64	56	47	35	18	23
37	10 000	4 998	3 239	2 398	1 886	1 521	1 246	1 039	882	758	657	575	506	448	398	358	324	294	267	243	221	200	181	163	146	130	117	105	94	84	75	65	56	46	33	17	19
38	10 000	4 962	3 209	2 379	1 878	1 522	1 253	1 050	897	776	676	592	523	464	413	372	337	307	280	254	231	210	190	171	152	136	121	109	97	86	76	66	56	46	33	17	21
39	10 000	4 922	3 176	2 360	1 870	1 524	1 264	1 065	913	794	695	613	542	481	428	384	348	316	287	260	237	216	196	176	156	139	124	110	98	86	76	66	56	45	32	16	24
40	10 000	4 897	3 154	2 345	1 864	1 527	1 272	1 076	926	808	711	629	558	495	441	395	356	321	291	264	240	219	198	178	159	141	126	113	100	88	77	66	56	45	32	16	21
41	10 000	4 901	3 156	2 344	1 863	1 529	1 279	1 086	940	824	728	647	575	513	459	412	370	333	300	273	249	226	205	185	165	148	132	118	105	92	80	69	58	47	33	16	19
42	10 000	4 935	3 188	2 371	1 888	1 555	1 304	1 113	967	851	755	674	602	539	485	438	394	354	320	290	264	240	217	196	176	158	141	126	111	97	84	72	62	50	35	17	26
43	10 000	4 976	3 225	2 404	1 921	1 587	1 336	1 143	996	878	780	697	624	562	508	459	413	371	335	303	276	251	227	205	185	166	149	132	116	101	87	75	64	52	37	19	35
44	10 000	4 966	3 222	2 405	1 924	1 591	1 340	1 151	1 004	886	787	704	632	568	512	461	414	372	336	305	278	253	230	207	186	167	149	131	115	99	85	74	63	52	37	19	26
45	10 000	4 954	3 211	2 400	1 923	1 591	1 342	1 157	1 013	896	797	714	641	576	518	466	419	378	343	312	284	259	235	213	192	171	151	132	114	99	85	74	64	52	37	19	33
46	10 000	4 974	3 237	2 426	1 947	1 618	1 371	1 185	1 041	924	824	737	661	593	533	480	433	392	357	324	294	266	242	219	198	177	156	135	117	101	87	76	65	53	38	18	45
47	10 000	5 032	3 289	2 474	1 994	1 665	1 419	1 231	1 084	964	861	771	691	620	558	504	456	415	377	343	311	280	253	229	208	186	164	142	124	108	94	82	70	56	40	19	46
48	10 000	5 095	3 350	2 532	2 050	1 716	1 466	1 274	1 127	1 006	902	812	729	656	592	535	485	442	404	368	333	300	272	246	222	199	177	154	134	117	103	90	77	61	43	20	45
49	10 000	5 150	3 408	2 591	2 106	1 767	1 511	1 316	1 167	1 045	940	849	767	693	626	565	512	467	427	390	354	321	291	264	238	213	189	165	144	124	108	93	79	64	44	21	51
50	10 000	5 192	3 462	2 648	2 163	1 821	1 560	1 360	1 206	1 081	975	881	798	722	653	590	534	487	446	408	372	338	307	278	250	223	198	173	150	129	111	94	79	63	44	21	51
51	10 000	5 257	3 536	2 719	2 230	1 884	1 621	1 418	1 260	1 130	1 021	925	839	759	685	619	561	512	468	429	392	357	322	290	261	232	206	180	155	134	114	96	81	64	45	21	42
52	10 000	5 355	3 640	2 817	2 320	1 972	1 705	1 498	1 336	1 203	1 090	991	898	812	733	662	600	547	500	458	419	380	343	308	276	245	216	188	162	140	119	102	85	68	47	22	49
53	10 000	5 462	3 749	2 919	2 418	2 066	1 794	1 582	1 414	1 278	1 161	1 057	960	870	788	715	649	591	540	491	447	404	363	326	291	259	228	197	169	145	124	106	90	73	51	24	48
54	10 000	5 570	3 870	3 035	2 524	2 164	1 889	1 673	1 500	1 360	1 240	1 132	1 031	936	849	771	701	639	583	530	479	431	386	346	309	274	241	208	177	152	132	114	98	79	55	26	44
55	10 000	5 661	3 973	3 138	2 628	2 264	1 985	1 765	1 590	1 445	1 321	1 210	1 104	1 002	908	823	748	683	623	566	512	460	412	370	332	295	258	224	192	165	144	126	108	88	62	30	59
56	10 000	5 750	4 070	3 237	2 727	2 363	2 079	1 853	1 673	1 524	1 396	1 281	1 172	1 065	963	872	793	725	664	604	547	494	445	401	361	323	285	249	217	189	166	147	129	108	78	40	107
57	10 000	5 863	4 201	3 369	2 859	2 490	2 201	1 970	1 785	1 631	1 499	1 381	1 269	1 158	1 051	955	870	797	733	671	613	560	511	468	428	390	350	313	280	251	227						

## 3 – Coefficients PM actuels :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
20	1,72	2,98	4,16	5,11	5,94	6,86	7,99	9,16	10,06	10,76	11,42	12,00	12,44	12,84	13,08	13,11	13,04	13,03	13,01	12,75	12,28	11,70	11,10	10,50	9,90	9,25	8,48	7,70	6,91	6,11	5,21	4,26	3,24	2,23	1,32	0,53
21	1,72	2,98	4,16	5,11	5,94	6,86	7,99	9,16	10,06	10,76	11,42	12,00	12,44	12,84	13,08	13,11	13,04	13,03	13,01	12,75	12,28	11,70	11,10	10,50	9,90	9,25	8,48	7,70	6,91	6,11	5,21	4,26	3,24	2,23	1,32	0,53
22	1,72	2,98	4,16	5,11	5,94	6,86	7,99	9,16	10,06	10,76	11,42	12,00	12,44	12,84	13,08	13,11	13,04	13,03	13,01	12,75	12,28	11,70	11,10	10,50	9,90	9,25	8,48	7,70	6,91	6,11	5,21	4,26	3,24	2,23	1,32	0,53
23	1,72	2,98	4,16	5,11	5,94	6,86	7,99	9,16	10,06	10,76	11,42	12,00	12,44	12,84	13,08	13,11	13,04	13,03	13,01	12,75	12,28	11,70	11,10	10,50	9,90	9,25	8,48	7,70	6,91	6,11	5,21	4,26	3,24	2,23	1,32	0,53
24	1,79	3,06	4,18	5,08	5,86	6,75	7,88	9,09	10,00	10,65	11,26	11,84	12,30	12,71	12,92	12,94	12,88	12,88	12,83	12,53	12,02	11,39	10,78	10,18	9,61	9,02	8,36	7,65	6,88	6,08	5,19	4,24	3,23	2,22	1,31	0,53
25	1,89	3,19	4,31	5,17	5,93	6,83	7,99	9,24	10,16	10,79	11,33	11,84	12,27	12,60	12,75	12,74	12,68	12,64	12,56	12,23	11,71	11,11	10,53	9,98	9,46	8,92	8,32	7,65	6,90	6,08	5,19	4,24	3,24	2,23	1,32	0,53
26	2,01	3,37	4,52	5,38	6,15	7,07	8,26	9,53	10,47	11,09	11,56	11,98	12,30	12,54	12,62	12,59	12,50	12,41	12,26	11,94	11,46	10,91	10,34	9,82	9,32	8,83	8,25	7,57	6,83	6,05	5,18	4,24	3,24	2,24	1,33	0,53
27	2,12	3,58	4,79	5,69	6,50	7,46	8,68	9,98	10,94	11,55	11,97	12,29	12,50	12,64	12,64	12,57	12,45	12,29	12,06	11,72	11,28	10,74	10,17	9,61	9,10	8,62	8,07	7,41	6,72	5,99	5,17	4,24	3,24	2,25	1,34	0,53
28	2,23	3,78	5,06	6,02	6,87	7,87	9,12	10,42	11,40	12,00	12,37	12,60	12,73	12,80	12,75	12,63	12,47	12,24	11,95	11,58	11,13	10,61	10,02	9,44	8,89	8,39	7,86	7,24	6,59	5,91	5,13	4,22	3,24	2,25	1,35	0,53
29	2,30	3,92	5,29	6,30	7,18	8,19	9,42	10,71	11,69	12,29	12,62	12,78	12,84	12,88	12,81	12,68	12,47	12,19	11,87	11,49	11,05	10,52	9,94	9,35	8,77	8,23	7,70	7,10	6,49	5,84	5,09	4,20	3,23	2,25	1,35	0,53
30	2,33	4,00	5,43	6,48	7,38	8,38	9,57	10,80	11,76	12,36	12,66	12,78	12,82	12,84	12,79	12,66	12,42	12,10	11,76	11,39	10,96	10,45	9,88	9,28	8,67	8,10	7,56	6,97	6,39	5,77	5,05	4,19	3,22	2,24	1,34	0,53
31	2,34	4,05	5,53	6,63	7,53	8,51	9,63	10,79	11,72	12,28	12,56	12,67	12,71	12,74	12,70	12,57	12,32	11,99	11,66	11,29	10,86	10,36	9,81	9,22	8,60	7,99	7,42	6,85	6,30	5,71	5,03	4,19	3,22	2,23	1,33	0,53
32	2,35	4,07	5,60	6,73	7,64	8,58	9,63	10,70	11,53	12,04	12,32	12,43	12,48	12,51	12,47	12,35	12,10	11,79	11,48	11,13	10,71	10,23	9,70	9,14	8,53	7,91	7,32	6,75	6,23	5,66	4,99	4,18	3,22	2,23	1,32	0,53
33	2,38	4,13	5,70	6,86	7,78	8,69	9,67	10,63	11,36	11,81	12,08	12,21	12,27	12,29	12,23	12,10	11,86	11,57	11,28	10,95	10,54	10,09	9,59	9,06	8,49	7,90	7,30	6,73	6,20	5,64	4,96	4,17	3,23	2,23	1,31	0,53
34	2,44	4,24	5,87	7,08	8,02	8,92	9,85	10,70	11,32	11,71	11,96	12,10	12,16	12,18	12,10	11,95	11,73	11,46	11,16	10,83	10,45	10,03	9,56	9,05	8,51	7,93	7,33	6,75	6,20	5,62	4,94	4,15	3,22	2,22	1,31	0,53
35	2,52	4,37	6,07	7,34	8,31	9,20	10,09	10,86	11,39	11,72	11,94	12,07	12,14	12,17	12,10	11,96	11,74	11,48	11,17	10,84	10,47	10,05	9,60	9,11	8,57	7,98	7,37	6,79	6,22	5,62	4,92	4,12	3,20	2,21	1,31	0,53
36	2,60	4,49	6,23	7,54	8,53	9,43	10,29	10,99	11,48	11,77	11,94	12,06	12,13	12,17	12,13	12,00	11,79	11,53	11,22	10,89	10,53	10,13	9,67	9,19	8,65	8,04	7,42	6,82	6,23	5,61	4,90	4,09	3,18	2,20	1,30	0,53
37	2,68	4,58	6,36	7,71	8,72	9,62	10,45	11,13	11,59	11,86	12,01	12,11	12,16	12,21	12,20	12,09	11,89	11,62	11,31	10,98	10,64	10,23	9,78	9,30	8,74	8,12	7,47	6,85	6,24	5,60	4,87	4,07	3,16	2,19	1,29	0,53
38	2,78	4,72	6,54	7,94	8,98	9,87	10,68	11,34	11,79	12,04	12,17	12,24	12,29	12,33	12,32	12,22	12,04	11,79	11,47	11,14	10,78	10,36	9,90	9,42	8,85	8,19	7,51	6,86	6,24	5,60	4,87	4,07	3,15	2,18	1,28	0,53
39	2,90	4,91	6,80	8,25	9,32	10,20	10,97	11,59	12,02	12,24	12,35	12,42	12,46	12,48	12,46	12,35	12,18	11,94	11,62	11,25	10,85	10,40	9,93	9,45	8,89	8,24	7,54	6,87	6,23	5,60	4,88	4,08	3,16	2,17	1,28	0,53
40	3,05	5,14	7,09	8,58	9,67	10,53	11,26	11,83	12,22	12,41	12,51	12,57	12,60	12,59	12,53	12,40	12,21	11,98	11,68	11,30	10,87	10,39	9,91	9,43	8,90	8,27	7,58	6,88	6,24	5,60	4,90	4,11	3,17	2,17	1,27	0,53
41	3,24	5,41	7,43	8,94	10,04	10,88	11,58	12,11	12,46	12,62	12,70	12,75	12,77	12,73	12,63	12,45	12,24	12,02	11,71	11,32	10,88	10,38	9,90	9,42	8,91	8,31	7,61	6,91	6,26	5,61	4,92	4,12	3,17	2,18	1,28	0,53
42	3,45	5,71	7,77	9,31	10,41	11,24	11,92	12,43	12,75	12,88	12,94	12,97	12,97	12,91	12,77	12,56	12,33	12,08	11,76	11,35	10,87	10,37	9,88	9,40	8,90	8,30	7,62	6,92	6,26	5,61	4,92	4,12	3,17	2,18	1,28	0,53
43	3,65	5,96	8,05	9,61	10,72	11,55	12,23	12,73	13,04	13,16	13,20	13,21	13,18	13,09	12,93	12,69	12,43	12,15	11,81	11,38	10,89	10,37	9,87	9,37	8,86	8,27	7,59	6,91	6,24	5,60	4,91	4,10	3,15	2,17	1,28	0,53
44	3,83	6,15	8,25	9,82	10,94	11,80	12,48	12,99	13,29	13,40	13,42	13,40	13,34	13,24	13,06	12,79	12,51	12,21	11,84	11,40	10,91	10,40	9,89	9,37	8,82	8,22	7,56	6,89	6,23	5,59	4,90	4,08	3,13	2,16	1,27	0,53
45	4,01	6,34	8,44	10,02	11,15	12,02	12,72	13,21	13,59	13,62	13,63	13,58	13,50	13,38	13,17	12,89	12,58	12,24	11,84	11,39	10,91	10,40	9,88	9,34	8,78	8,17	7,53	6,89	6,24	5,60	4,89	4,06	3,11	2,15	1,27	0,53
46	4,20	6,55	8,66	10,23	11,35	12,22	12,90	13,36	13,62	13,73	13,72	13,65	13,55	13,42	13,19	12,89	12,56	12,18	11,74	11,30	10,83	10,33	9,82	9,28	8,72	8,13	7,53	6,91	6,26	5,61	4,89	4,04	3,10	2,14	1,27	0,53
47	4,40	6,79	8,91	10,47	11,57	12,42	13,04	13,46	13,68	13,76	13,73	13,63	13,51	13,36	13,11	12,80	12,45	12,04	11,59	11,16	10,69	10,21	9,73	9,22	8,68	8,13	7,56	6,95	6,30	5,62	4,88	4,03	3,09	2,14	1,27	0,53
48	4,63	7,08	9,22	10,75	11,81	12,61	13,17	13,52	13,70	13,74	13,68	13,55	13,40	13,22	12,97	12,67	12,31	11,89	11,43	10,99	10,52	10,06	9,61	9,14	8,63	8,11	7,56	6,96	6,31	5,61	4,86	4,01	3,09	2,14	1,27	0,53
49	4,86	7,40	9,56	11,06	12,07	12,79	13,28	13,58	13,71	13,72	13,63	13,46	13,28	13,06	12,80	12,50	12,15	11,74	11,29	10,83	10,37	9,92	9,50	9,06	8,58	8,07	7,54	6,95	6,31	5,61	4,85	4,00	3,08	2,14	1,27	0,53
50	5,09	7,71	9,89	11,36	12,30	12,93	13,36	13,61	13,71	13,70	13,58	13,38	13,15	12,89	12,61	12,32	11,98	11,59	11,15	10,68	10,23	9,81	9,39	8,97	8,51	8,02	7,50	6,93	6,30	5,61	4,84	3,99	3,08	2,15	1,27	0,53
51	5,31	8,02	10,23	11,67	12,53	13,09	13,44	13,66	13,73	13,69	13,54	13,32	13,04	12,75	12,45	12,16	11,85	11,48	11,06	10,61	10,16	9,75	9,34	8,91	8,45	7,96	7,44	6,88	6,26	5,58	4,82	3,98	3,08	2,14	1,27	0,53
52	5,53	8,35	10,59	11,99	12,79	13,27	13,56	13,73	13,76	13,69	13,52	13,27	12,96	12,63	12,32	12,02	11,73	11,40	11,00	10,55	10,12	9,70	9,28	8,84	8,37	7,88	7,35	6,81	6,22	5,56	4,81	3,97	3,07	2,14	1,27	0,53
53	5,70	8,62	10,90	12,26	13,01	13,43	13,67	13,78	13,78	13,68	13,48	13,20	12,86	12,51	12,18	11,88	11,60	11,29	10,92	10,50	10,07	9,65	9,23	8,78	8,31	7,83	7,31	6,78	6,21	5,57	4,82	3,98	3,07	2,14	1,27	

## 4 – Nouveaux Coefficients PM

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
20	2,56	3,96	5,10	5,81	6,21	6,50	6,80	7,15	7,54	8,02	8,55	8,95	9,19	9,37	9,58	9,72	9,65	9,30	8,80	8,30	7,98	7,83	7,66	7,66	7,96	8,34	8,23	7,68	6,88	5,94	4,91	3,84	2,80	1,89	1,14	0,53
21	2,69	4,00	5,07	5,78	6,25	6,64	7,02	7,43	7,87	8,30	8,73	9,09	9,37	9,60	9,80	9,90	9,79	9,52	9,15	8,75	8,40	8,11	7,85	7,68	7,61	7,53	7,28	6,82	6,18	5,39	4,47	3,52	2,64	1,87	1,18	0,53
22	2,78	3,98	4,96	5,67	6,19	6,62	7,06	7,50	7,94	8,35	8,73	9,06	9,35	9,55	9,66	9,67	9,61	9,46	9,25	8,97	8,65	8,35	8,06	7,76	7,46	7,16	6,82	6,41	5,83	5,07	4,21	3,35	2,58	1,89	1,23	0,53
23	2,86	3,97	4,90	5,59	6,12	6,60	7,07	7,54	7,98	8,39	8,75	9,07	9,34	9,53	9,65	9,71	9,75	9,72	9,61	9,44	9,18	8,91	8,62	8,24	7,83	7,41	6,95	6,42	5,80	5,06	4,27	3,48	2,72	1,99	1,27	0,53
24	2,94	4,00	4,88	5,54	6,07	6,57	7,06	7,53	7,96	8,33	8,66	8,95	9,21	9,42	9,60	9,75	9,90	9,98	9,95	9,82	9,58	9,30	8,97	8,57	8,11	7,61	7,10	6,55	5,90	5,17	4,41	3,63	2,84	2,05	1,29	0,53
25	3,03	4,06	4,92	5,56	6,09	6,59	7,10	7,57	7,99	8,35	8,67	8,94	9,18	9,38	9,56	9,76	9,92	10,02	10,00	9,85	9,60	9,31	8,96	8,56	8,11	7,60	7,06	6,50	5,87	5,17	4,43	3,66	2,85	2,05	1,29	0,53
26	3,11	4,13	4,97	5,60	6,13	6,65	7,17	7,67	8,10	8,46	8,76	9,03	9,25	9,42	9,57	9,73	9,87	9,94	9,90	9,73	9,49	9,17	8,81	8,40	7,97	7,47	6,91	6,35	5,74	5,07	4,36	3,62	2,84	2,06	1,30	0,53
27	3,20	4,22	5,06	5,70	6,24	6,76	7,30	7,81	8,24	8,60	8,89	9,14	9,36	9,51	9,64	9,74	9,83	9,86	9,81	9,64	9,40	9,06	8,67	8,27	7,87	7,40	6,87	6,32	5,74	5,11	4,43	3,68	2,89	2,09	1,32	0,53
28	3,28	4,32	5,17	5,82	6,37	6,91	7,44	7,94	8,37	8,71	9,00	9,22	9,40	9,54	9,64	9,70	9,73	9,74	9,70	9,57	9,34	9,02	8,61	8,20	7,78	7,33	6,83	6,27	5,69	5,08	4,40	3,67	2,89	2,11	1,33	0,53
29	3,37	4,41	5,27	5,93	6,48	7,01	7,53	8,00	8,40	8,74	9,02	9,23	9,40	9,51	9,59	9,62	9,62	9,60	9,54	9,44	9,24	8,93	8,55	8,15	7,72	7,29	6,81	6,26	5,67	5,04	4,37	3,66	2,90	2,11	1,33	0,53
30	3,44	4,48	5,33	5,98	6,53	7,05	7,55	8,00	8,39	8,72	8,99	9,18	9,32	9,42	9,46	9,47	9,47	9,44	9,38	9,27	9,06	8,77	8,41	8,04	7,65	7,22	6,77	6,24	5,66	5,04	4,36	3,65	2,89	2,11	1,33	0,53
31	3,51	4,55	5,41	6,05	6,60	7,11	7,61	8,05	8,42	8,72	8,97	9,15	9,28	9,36	9,38	9,39	9,38	9,35	9,29	9,16	8,91	8,60	8,25	7,92	7,57	7,17	6,72	6,20	5,64	5,04	4,36	3,63	2,87	2,09	1,32	0,53
32	3,59	4,65	5,50	6,15	6,70	7,20	7,69	8,13	8,48	8,77	9,01	9,19	9,33	9,41	9,44	9,43	9,40	9,36	9,29	9,12	8,85	8,52	8,18	7,84	7,50	7,10	6,66	6,17	5,64	5,05	4,39	3,65	2,88	2,09	1,32	0,53
33	3,66	4,75	5,62	6,29	6,84	7,34	7,82	8,25	8,58	8,86	9,11	9,31	9,47	9,58	9,62	9,59	9,54	9,45	9,31	9,11	8,84	8,53	8,19	7,83	7,44	7,03	6,61	6,14	5,61	5,02	4,37	3,64	2,88	2,09	1,32	0,53
34	3,71	4,84	5,76	6,45	7,00	7,51	7,98	8,38	8,71	8,99	9,25	9,47	9,65	9,77	9,81	9,76	9,67	9,53	9,35	9,12	8,86	8,56	8,22	7,83	7,43	7,03	6,62	6,15	5,63	5,03	4,38	3,66	2,90	2,11	1,33	0,53
35	3,76	4,94	5,90	6,63	7,20	7,71	8,17	8,57	8,91	9,20	9,45	9,67	9,83	9,94	9,96	9,90	9,79	9,64	9,46	9,24	8,98	8,68	8,34	7,96	7,57	7,15	6,71	6,22	5,69	5,08	4,41	3,68	2,91	2,12	1,33	0,53
36	3,79	5,02	6,04	6,81	7,40	7,91	8,36	8,75	9,07	9,34	9,57	9,76	9,91	9,98	9,98	9,92	9,81	9,67	9,49	9,29	9,05	8,75	8,41	8,04	7,64	7,23	6,77	6,25	5,70	5,08	4,40	3,68	2,91	2,12	1,33	0,53
37	3,82	5,11	6,18	6,98	7,59	8,10	8,55	8,92	9,21	9,45	9,66	9,84	9,97	10,03	10,02	9,95	9,85	9,70	9,52	9,30	9,05	8,75	8,41	8,05	7,67	7,26	6,80	6,27	5,69	5,05	4,37	3,65	2,89	2,11	1,33	0,53
38	3,85	5,19	6,30	7,13	7,76	8,28	8,72	9,07	9,34	9,55	9,74	9,91	10,04	10,10	10,12	10,05	9,94	9,77	9,56	9,33	9,05	8,72	8,36	8,00	7,64	7,25	6,80	6,28	5,69	5,05	4,37	3,64	2,88	2,10	1,33	0,53
39	3,90	5,27	6,42	7,28	7,91	8,42	8,83	9,16	9,41	9,60	9,76	9,89	10,01	10,08	10,10	10,05	9,94	9,78	9,57	9,33	9,03	8,68	8,31	7,94	7,58	7,19	6,75	6,24	5,68	5,05	4,35	3,62	2,85	2,09	1,32	0,53
40	3,96	5,36	6,54	7,42	8,06	8,56	8,97	9,29	9,54	9,71	9,83	9,93	10,02	10,08	10,10	10,05	9,95	9,80	9,61	9,36	9,06	8,71	8,34	7,97	7,58	7,17	6,70	6,19	5,64	5,03	4,35	3,62	2,86	2,09	1,32	0,53
41	4,04	5,45	6,66	7,56	8,23	8,74	9,15	9,48	9,72	9,88	9,99	10,08	10,15	10,18	10,17	10,11	10,02	9,90	9,71	9,45	9,15	8,81	8,44	8,05	7,64	7,20	6,70	6,17	5,63	5,02	4,36	3,64	2,89	2,11	1,34	0,53
42	4,12	5,55	6,77	7,69	8,38	8,90	9,32	9,64	9,88	10,04	10,15	10,23	10,28	10,28	10,23	10,15	10,06	9,93	9,75	9,50	9,21	8,88	8,51	8,10	7,66	7,19	6,68	6,15	5,60	5,00	4,36	3,66	2,90	2,12	1,34	0,53
43	4,20	5,64	6,87	7,81	8,50	9,02	9,44	9,75	9,97	10,13	10,24	10,32	10,36	10,34	10,27	10,17	10,08	9,95	9,77	9,52	9,23	8,88	8,50	8,09	7,64	7,17	6,67	6,15	5,60	5,01	4,36	3,66	2,91	2,13	1,35	0,53
44	4,26	5,72	6,96	7,90	8,59	9,11	9,51	9,81	10,03	10,18	10,29	10,36	10,39	10,37	10,30	10,21	10,12	9,98	9,79	9,54	9,24	8,88	8,48	8,06	7,61	7,14	6,66	6,16	5,63	5,05	4,40	3,69	2,92	2,14	1,35	0,53
45	4,34	5,82	7,08	8,03	8,72	9,24	9,63	9,91	10,11	10,25	10,35	10,40	10,43	10,41	10,34	10,25	10,14	9,99	9,79	9,54	9,23	8,85	8,45	8,02	7,57	7,12	6,65	6,17	5,64	5,06	4,41	3,69	2,93	2,14	1,35	0,53
46	4,46	5,97	7,24	8,20	8,89	9,40	9,78	10,05	10,22	10,33	10,41	10,46	10,47	10,44	10,36	10,25	10,13	9,98	9,78	9,54	9,23	8,88	8,48	8,04	7,59	7,15	6,70	6,23	5,69	5,09	4,43	3,70	2,93	2,14	1,35	0,53
47	4,62	6,15	7,44	8,41	9,10	9,60	9,97	10,22	10,38	10,48	10,54	10,56	10,57	10,53	10,44	10,32	10,19	10,02	9,81	9,55	9,26	8,93	8,54	8,11	7,66	7,21	6,77	6,29	5,74	5,13	4,45	3,71	2,94	2,15	1,36	0,53
48	4,79	6,33	7,63	8,60	9,30	9,81	10,18	10,43	10,58	10,65	10,68	10,68	10,67	10,62	10,52	10,40	10,25	10,06	9,82	9,56	9,27	8,94	8,56	8,13	7,69	7,24	6,78	6,30	5,76	5,14	4,46	3,73	2,95	2,16	1,36	0,53
49	4,98	6,52	7,82	8,78	9,47	9,97	10,34	10,59	10,72	10,77	10,78	10,76	10,72	10,64	10,55	10,42	10,27	10,06	9,81	9,53	9,23	8,89	8,50	8,07	7,63	7,19	6,73	6,25	5,72	5,12	4,46	3,74	2,97	2,17	1,37	0,53
50	5,20	6,76	8,05	8,99	9,67	10,16	10,52	10,76	10,88	10,92	10,92	10,88	10,82	10,73	10,62	10,48	10,31	10,10	9,83	9,53	9,20	8,83	8,43	8,00	7,56	7,12	6,67	6,19	5,68	5,10	4,46	3,75	2,99	2,19	1,38	0,53
51	5,44	6,99	8,26	9,17	9,83	10,30	10,65	10,86	10,97	11,00	10,98	10,93	10,85	10,75	10,62	10,48	10,31	10,08	9,81	9,50	9,15	8,76	8,36	7,94	7,51	7,07	6,63	6,16	5,65	5,08	4,45	3,75	2,99	2,19	1,38	0,53
52	5,70	7,22	8,45	9,34	9,97	10,42	10,74	10,93	11,01	11,02	10,97	10,90	10,81	10,69	10,57	10,41	10,24	10,03	9,76	9,44	9,09	8,70	8,30	7,89	7,47	7,05	6,61	6,15	5,65	5,08	4,44	3,74	2,98	2,19	1,39	0,53
53	5,95	7,44	8,63	9,50	10,10	10,52	10,81	10,97	11,03	11,01	10,94	10,83	10,71	10,58	10,44	10,28	10,09	9,87	9,61	9,31	8,97	8,61	8,23	7,82	7,41	6,99	6,55	6,11	5,63	5,08	4,45	3,74	2,98	2,19	1,38	0,53
54	6,19	7,65	8,82	9,65	10,24	10,64	10,89	11,02	11,05	11,00	10,88	10,74	10,59	10,44	10,28	10,11	9,93	9,71	9,46	9,17	8,85	8,52	8,16	7,78	7,37	6,94	6,50	6,07	5,62	5,08	4,44	3,74	2,97	2,18	1,38	0,53
55	6,45	7,91	9,05	9,86	10,41																															

## 5 – Rapport Coefficients PM : (Nouveau / Actuel)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	
20	167%	133%	118%	109%	103%	96%	88%	82%	79%	78%	77%	76%	75%	74%	74%	75%	75%	74%	74%	75%	76%	78%	78%	79%	80%	82%	83%	84%	83%	82%	82%	84%	89%	97%	100%		
21	167%	133%	118%	109%	103%	96%	88%	82%	79%	78%	77%	76%	75%	74%	74%	74%	75%	75%	74%	74%	75%	76%	78%	78%	79%	80%	82%	83%	84%	83%	82%	84%	89%	97%	100%		
22	167%	133%	118%	109%	103%	96%	88%	82%	79%	78%	77%	76%	75%	74%	74%	74%	75%	75%	74%	74%	75%	76%	78%	78%	79%	80%	82%	83%	84%	83%	82%	84%	89%	97%	100%		
23	167%	133%	118%	109%	103%	96%	88%	82%	79%	78%	77%	76%	75%	74%	74%	74%	75%	75%	74%	74%	75%	76%	78%	78%	79%	80%	82%	83%	84%	83%	82%	84%	89%	97%	100%		
24	164%	131%	117%	109%	104%	97%	90%	83%	80%	78%	77%	76%	75%	74%	74%	75%	77%	77%	78%	78%	80%	82%	83%	84%	84%	85%	86%	86%	85%	85%	86%	88%	92%	98%	100%		
25	160%	127%	114%	108%	103%	97%	89%	82%	79%	77%	77%	76%	75%	74%	75%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	84%	85%	86%	86%	85%	85%	85%	85%	85%	86%	88%	92%	98%	100%		
26	155%	122%	110%	104%	100%	94%	87%	80%	77%	76%	76%	75%	75%	75%	76%	77%	79%	80%	81%	81%	83%	84%	85%	86%	85%	85%	84%	84%	84%	84%	85%	88%	92%	98%	100%		
27	151%	118%	106%	100%	96%	91%	84%	78%	75%	74%	74%	74%	75%	75%	76%	78%	79%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	86%	86%	85%	85%	85%	85%	86%	87%	89%	93%	99%	100%	
28	148%	114%	102%	97%	93%	88%	82%	76%	73%	73%	73%	73%	74%	75%	76%	77%	78%	80%	81%	83%	84%	85%	86%	87%	87%	87%	87%	87%	86%	86%	87%	89%	94%	99%	100%		
29	147%	112%	100%	94%	90%	86%	80%	75%	72%	71%	72%	72%	73%	74%	75%	76%	77%	79%	80%	82%	84%	85%	86%	87%	88%	89%	88%	88%	87%	86%	87%	90%	94%	99%	100%		
30	148%	112%	98%	92%	88%	84%	79%	74%	71%	71%	71%	72%	73%	73%	74%	75%	76%	78%	80%	81%	83%	84%	85%	87%	88%	89%	90%	89%	89%	87%	86%	87%	90%	94%	99%	100%	
31	150%	113%	98%	91%	88%	84%	79%	75%	72%	71%	71%	72%	73%	73%	74%	75%	76%	78%	80%	81%	82%	83%	84%	86%	88%	90%	90%	91%	90%	88%	87%	87%	89%	94%	100%	100%	
32	153%	114%	98%	91%	88%	84%	80%	76%	74%	73%	73%	74%	75%	75%	76%	76%	78%	79%	81%	82%	83%	83%	84%	86%	88%	90%	91%	91%	91%	89%	88%	87%	89%	94%	100%	100%	
33	154%	115%	99%	92%	88%	84%	81%	78%	76%	75%	75%	76%	77%	78%	79%	79%	80%	82%	83%	83%	84%	85%	85%	86%	88%	89%	90%	91%	90%	89%	88%	87%	89%	94%	101%	100%	
34	152%	114%	98%	91%	87%	84%	81%	78%	77%	77%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	84%	84%	85%	86%	87%	87%	89%	90%	91%	91%	90%	89%	88%	90%	95%	101%	100%		
35	149%	113%	97%	90%	87%	84%	81%	79%	78%	79%	79%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	85%	85%	86%	86%	87%	87%	88%	90%	91%	92%	91%	90%	90%	89%	91%	96%	102%	100%	
36	146%	112%	97%	90%	87%	84%	81%	80%	79%	79%	80%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	84%	85%	85%	86%	86%	87%	88%	88%	90%	91%	92%	91%	90%	90%	90%	92%	96%	103%	100%	
37	143%	111%	97%	91%	87%	84%	82%	80%	79%	80%	80%	81%	82%	82%	82%	82%	83%	83%	84%	85%	85%	86%	86%	87%	88%	89%	91%	92%	91%	90%	90%	90%	92%	96%	103%	100%	
38	139%	110%	96%	90%	86%	84%	82%	80%	79%	79%	80%	81%	82%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	84%	85%	86%	88%	91%	92%	91%	90%	90%	90%	91%	96%	103%	100%	
39	134%	107%	94%	88%	85%	83%	80%	79%	78%	78%	79%	80%	80%	81%	81%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	87%	89%	91%	91%	90%	89%	89%	90%	96%	103%	100%
40	130%	104%	92%	86%	83%	81%	80%	79%	78%	78%	79%	79%	80%	81%	81%	81%	82%	82%	82%	83%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	87%	88%	90%	90%	90%	89%	88%	90%	96%	104%	100%
41	125%	101%	90%	85%	82%	80%	79%	78%	78%	78%	79%	79%	79%	80%	80%	81%	82%	82%	83%	83%	84%	85%	85%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	89%	89%	88%	91%	97%	105%	100%	
42	119%	97%	87%	83%	81%	79%	78%	78%	77%	78%	78%	79%	79%	80%	80%	81%	82%	82%	83%	84%	85%	86%	86%	86%	86%	87%	88%	89%	89%	89%	88%	89%	92%	98%	105%	100%	
43	115%	95%	85%	81%	79%	78%	77%	77%	76%	77%	78%	78%	79%	79%	79%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	86%	86%	86%	87%	88%	89%	90%	90%	89%	89%	92%	98%	106%	100%	
44	111%	93%	84%	80%	78%	77%	76%	76%	75%	76%	77%	77%	78%	78%	79%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	85%	86%	86%	86%	87%	88%	89%	90%	90%	90%	90%	93%	99%	106%	100%	
45	108%	92%	84%	80%	78%	77%	76%	75%	75%	75%	76%	77%	77%	78%	78%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	85%	86%	86%	86%	87%	88%	89%	90%	90%	90%	91%	94%	100%	106%	100%	
46	106%	91%	84%	80%	78%	77%	76%	75%	75%	75%	76%	77%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	86%	87%	87%	88%	89%	90%	91%	91%	91%	91%	95%	100%	106%	100%	
47	105%	91%	84%	80%	79%	77%	76%	76%	76%	76%	77%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	83%	85%	86%	87%	88%	88%	88%	88%	89%	89%	90%	91%	91%	91%	92%	95%	101%	107%	100%	
48	103%	89%	83%	80%	79%	78%	77%	77%	77%	77%	78%	79%	80%	80%	81%	82%	83%	85%	86%	87%	88%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	90%	90%	91%	92%	93%	96%	101%	107%	100%	
49	102%	88%	82%	79%	78%	78%	78%	78%	78%	79%	79%	80%	81%	81%	82%	83%	85%	86%	87%	88%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	90%	91%	91%	92%	94%	96%	101%	108%	100%	
50	102%	88%	81%	79%	78%	79%	79%	79%	79%	80%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	90%	90%	89%	89%	89%	89%	89%	90%	91%	92%	94%	97%	102%	108%	100%	
51	102%	87%	81%	79%	78%	79%	79%	80%	80%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	90%	90%	89%	89%	89%	89%	89%	90%	90%	91%	92%	94%	97%	102%	109%	100%	
52	103%	87%	80%	78%	78%	79%	79%	80%	80%	80%	81%	82%	83%	85%	86%	87%	87%	88%	89%	90%	90%	90%	89%	89%	89%	89%	90%	90%	91%	91%	92%	94%	97%	103%	109%	100%	
53	104%	86%	79%	77%	78%	78%	79%	80%	80%	81%	81%	82%	83%	85%	86%	86%	87%	87%	88%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	89%	90%	90%	91%	91%	92%	94%	97%	102%	109%	100%	
54	107%	87%	79%	77%	77%	78%	79%	79%	80%	80%	81%	81%	83%	84%	85%	86%	86%	86%	86%	87%	88%	88%	88%	88%	88%	88%	89%	90%	90%	91%	93%	96%	102%	109%	100%		
55	112%	90%	80%	77%	77%	78%	78%	79%	79%	79%	80%	80%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	86%	86%	87%	87%	87%	86%	87%	88%	89%	89%	90%	92%	95%	100%	107%	100%	
56	118%	93%	81%	77%	76%	76%	77%	77%	78%	78%	78%	78%	79%	80%	80%	81%	81%	82%	82%	83%	84%	85%	85%	85%	85%	85%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	91%	94%	99%	105%	100%
57	123%	96%	81%	76%	74%	74%	75%	75%	76%	76%	77%	77%	77%	78%	79%	79%	80%	81%	81%	82%	83%	84%	84%	85%	85%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	91%	93%	97%	102%	100%	
58	125%	96%	80%	74%	72%	72%	73%	74%	75%	75%	76%	77%	77%	78%	79%	80%	80%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	86%	87%	87%	88%	90%	90%	91%	91%	92%	93%	96%	100%	100%	
59	124%	94%	78%	72%	70%	70%	71%	72%	74%	75%	76%	77%	78%	79%	80%	81%	82%	83%	83%	84%	86%	87%	88%	89%	89%	90%	91%	92%	93%	93%	93%	94%	95%	98%	100%		
60	122%	92%	75%	69%	67%	68%	69%	71%	73%	75%	77%	78%	80%	81%	82%	83%	84%	84%	84%	85%	86%	88%	89%	90%	90%	91%	92%	92%	93%	93%	94%	94%	95%	97%	100%		
61	121%	90%	73%	67%	66%	67%	68%	70%	73%	75%	77%	79%	80%	81%	82%	83%	83%	84%	84%	84%	85%	86%	87%	88%	88%	89%	90%	91%	91%	92%	93%	93%	94%	95%	96%	100%	
62	120%	89%	71%	65%	64%	65%	67%	69%	72%	74%	76%	77%	78%	79%	80%	80%	81%	81%	81%	81%	82%	83%	84%	85%	86%	87%	88%	89%	90%	91%	92%	93%	94%	96%	100%		