

**Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaire
le 15/02/2018**

Par : **Mohamed Amine OUADEIH**

Titre : **Implémentation d'une nouvelle méthode de
modélisation des flux de passif d'un contrat
Épargne dans un modèle ALM et comparaison
avec la méthode "Flexing"**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière :

Entreprise : Crédit Agricole Assurances

Nom :

Signature :

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :*

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Pierre-Hugues GILLE

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :

Résumé

L'un des principaux enjeux pour les assureurs depuis les évolutions récentes ou à venir des nouvelles dispositions réglementaires (Solvabilité II), de communication financière (EEV/MCEV) ou comptables (IFRS) est la valorisation économique du passif, c'est-à-dire le calcul de la « fair value » des engagements. L'une des solutions possibles consiste à utiliser un modèle Actif/Passif stochastique pour projeter les flux futurs générés par l'activité puis les valoriser.

La méthode de modélisation de passif actuellement utilisée, par Crédit Agricole Assurances, est la méthode "Flexing". Elle repose sur l'utilisation de proxys basés sur des flux de passif déterministes, c'est-à-dire des flux de passif ne prenant pas en compte le rachat conjoncturel, l'inflation, le taux de rendement des actifs et le taux de participation aux bénéfices. Vu la complexité des produits d'assurance vie et des interactions Actif/Passif, la mise en œuvre de cette méthode "Flexing" peut s'avérer inadéquate.

Une approche alternative, reposant sur l'application d'une nouvelle méthode dite "Internal" qui consiste à projeter directement les flux de passif dans le modèle ALM sans utiliser de proxys basés sur des flux de passif déterministes, ainsi les flux de passif prennent en compte le rachat conjoncturel, l'inflation, le taux de rendement des actifs et le taux de participation aux bénéfices.

La modélisation Actif/Passif est effectuée sous "Prophet", un logiciel permettant de projeter les flux futurs et de modéliser les interactions entre l'actif et le passif afin de :

- Projeter le compte de résultat et le bilan,
- Valoriser les passifs en « fair value »,
- Calculer l'Embedded Value "EV",
- Calculer le Best Estimate "BE", Minimum de Capital Requis "MCR" et Capital de Solvabilité Requis "SCR".

L'objectif de ce mémoire est de mettre en œuvre cette nouvelle méthode de modélisation de passif "Internal" et de la comparer avec la méthode "Flexing". Une étude de son impact sera faite sur le Best Estimate "BE" et la Value of In Force "VIF" afin d'établir une zone de validité de la méthode actuelle et un ordre de grandeur de son incertitude.

Mots clés

Solvabilité II, IFRS, Fair Value, Modélisation Actif /Passif, Flexing, Internal, Rachat Conjoncturel, Inflation, Taux de Rendement des Actifs, Taux de Participation aux Bénéfices, Value of In Force, Best Estimate, Embedded Value, Minimum de Capital Requis, Capital de Solvabilité Requis.

Abstract

One of the main challenges for insurers since the recent or coming evolutions of the new regulatory (Solvency II), financial communication (EEV/MCEV) or new accounting standards (IFRS) is the economic valuation of liabilities, i.e. the calculation of the "fair value" of liabilities. One of the possible solutions consists in using a stochastic Asset/Liability model to project the future cash-flows generated by the activity and then to value them.

The liability modeling method currently used by Crédit Agricole Insurances is "Flexing" method based on the use of proxies issued on deterministic liabilities cash-flows, that is liabilities cash-flows not taking into account the dynamic lapse, the inflation, the rate of return on assets and the profit-sharing rate. Given the complexity of life insurance products and Asset/Liability interactions, the implementation of this "Flexing" method may be inadequate.

An alternative approach, based on the application of a new method called "Internal" which consists in projecting the liabilities cash-flows directly in the ALM model without using proxies based on deterministic liabilities cash-flows, thus the liabilities cash-flows take into account the dynamic lapse, the inflation, the rate of return on assets and the profit-sharing rate.

Asset/Liability modeling is performed under "Prophet", which is a software that projects future cash-flows and models the interactions between assets and liabilities in order to :

- Project income statement and balance sheet,
- Valuing liabilities in « fair-value »,
- Calculate Embedded Value "EV",
- Calculate Best Estimate "BE", Minimum Capital Requirement "MCR" and Solvency Capital Requirement "SCR".

The objective of this report is to implement this new method of modelling liabilities "Internal" and to compare it with the "Flexing" method. A study of its impact will be made on the Best Estimate "BE" and the Value of In Force "VIF" in order to establish a validity zone of the current method and an order of magnitude of its uncertainty.

Key words

Solvency II, IFRS, Fair Value, Asset/Liability Modeling, Flexing, Internal, Cyclical Repurchase, Inflation, Asset Return Rates, Profit Sharing Rates, Embedded Value, Best Estimate, Minimum Capital Requirements, Solvency Capital Requirement, Value of In Force.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon tuteur professionnel, Monsieur Pierre-Hugues GILLE, Expert conseil modélisation au sein de Crédit Agricole Assurances, pour m'avoir accueilli dans son équipe, pour ses conseils, son soutien, sa confiance, son aide et surtout pour avoir su trouver du temps afin de me guider durant ma période de stage. Grâce à son expérience professionnelle et son expertise, j'ai pu développer des compétences en modélisation ALM. Je lui exprime toute mon admiration et ma reconnaissance.

Je remercie également, mon tuteur académique, Monsieur Pierre PICARD, professeur d'économie à l'École Polytechnique, pour son aide et ses explications.

Mes remerciements sincères à Madame Nada EL CHIDIAC, Senior Manager chez FIS, pour les orientations précieuses dont elle m'a fait part et aussi pour m'avoir guidé durant mon stage. J'ai grandement apprécié son soutien, son implication et son expérience tout au long de ma période de stage.

De chaleureux remerciements à toute l'équipe enseignante de l'ENSAE pour la qualité de l'enseignement qui nous a été dispensé.

Enfin, j'adresse ma profonde gratitude à ma famille qui a été toujours à mes côtés. Merci de m'avoir toujours soutenu et de m'avoir permis d'en arriver là où j'en suis aujourd'hui. Je remercie également tous mes amis.

Une pensée pour mon très cher ami Thomas JEDRECY parti beaucoup trop tôt ...

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction générale | 8 |
| I Principes fondamentaux de l'assurance vie | 10 |
| 1 Les contrats d'assurance vie | 11 |
| 1.1 L'assurance vie | 11 |
| 1.1.1 Définition générale | 11 |
| 1.1.2 Contrat d'assurance vie "Épargne" | 11 |
| 1.2 Les caractéristiques des contrats d'assurance vie | 13 |
| 1.2.1 Durée du contrat | 13 |
| 1.2.2 Les cotisations | 14 |
| 1.2.3 Les frais du contrat d'assurance vie | 14 |
| 1.2.4 L'option de rachat | 14 |
| 1.2.5 La revalorisation d'un contrat d'assurance vie en euros | 15 |
| 1.3 Les principaux risques des contrats d'assurance vie | 16 |
| 2 Valorisation d'un portefeuille d'assurance vie sous Solvabilité II | 18 |
| 2.1 Présentation de Solvabilité II | 18 |
| 2.1.1 Définition et objectifs de Solvabilité II | 18 |
| 2.1.2 Les trois piliers de Solvabilité II | 19 |
| 2.1.3 Solvabilité I vs Solvabilité II | 19 |
| 2.2 Principes de valorisation du bilan en « juste valeur » | 20 |
| 2.2.1 Bilan économique sous Solvabilité II | 20 |
| 2.2.2 Les différents postes du bilan économique | 20 |
| 2.2.3 Valorisation du bilan économique | 22 |
| II Modélisation Actif/Passif d'un portefeuille d'assurance vie | 25 |
| 3 Principes de modélisation Actif/Passif | 26 |
| 3.1 Présentation de modélisation Actif/Passif | 26 |
| 3.1.1 Nécessité d'un modèle ALM en assurance vie | 26 |
| 3.1.2 Définition d'un modèle ALM | 27 |
| 3.2 Algorithme d'un modèle ALM | 27 |
| 3.2.1 Introduction | 27 |
| 3.2.2 Principes de l'ALM | 28 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 4 | Modélisation Actif/Passif | 32 |
| 4.1 | Modélisation du Passif | 32 |
| 4.1.1 | Hypothèses de modélisation du passif | 32 |
| 4.1.2 | Projection des flux d'un contrat épargne en euros | 33 |
| 4.2 | Modélisation des interactions Actif/Passif | 38 |
| 4.2.1 | Stratégie de calcul de la participation aux bénéfices | 38 |
| 4.2.2 | Valorisation du portefeuille après stratégie de PB | 48 |
| | | |
| III | Méthodes de modélisation des flux de passif "Flexing" et "Internal" | 50 |
| | | |
| 5 | Modélisation des flux de passif en "Flexing" | 51 |
| 5.1 | Présentation de la méthode | 51 |
| 5.1.1 | Principe général | 51 |
| 5.1.2 | Modèle de passif "Contrat" | 52 |
| 5.2 | Méthode "Flexing" | 53 |
| 5.2.1 | Principe du "Flexing" | 53 |
| 5.2.2 | Algorithme de calcul du ratio de flexing | 54 |
| | | |
| 6 | Modélisation des flux de passif en "Internal" | 63 |
| 6.1 | Présentation de la méthode | 63 |
| 6.1.1 | Principe général | 63 |
| 6.1.2 | Avantages et inconvénients | 64 |
| 6.1.3 | Principales étapes de la mise en place | 64 |
| 6.2 | Méthode "Internal" | 65 |
| 6.2.1 | Modélisation de la PM sous "Internal" | 65 |
| | | |
| IV | Comparaison des deux méthodes de modélisation des flux de passif "Flexing" et "Internal" | 68 |
| | | |
| 7 | Analyse des résultats | 69 |
| 7.1 | Indicateurs d'analyse des résultats VIF et BE | 69 |
| 7.1.1 | Composants du BE | 69 |
| 7.1.2 | Composantes de la VIF | 71 |
| 7.2 | Étude des résultats obtenus du BE et de la VIF | 71 |
| 7.2.1 | Convergence Monte-Carlo | 72 |
| 7.2.2 | Hypothèses des contrats projetés | 72 |
| 7.2.3 | Résultats obtenus du BE et de la VIF | 73 |
| 7.2.4 | Analyse des écarts entre les deux méthodes | 74 |
| 7.3 | Séquencement des calculs | 85 |
| 7.3.1 | Différentes étapes d'enchaînement de calcul | 85 |
| 7.3.2 | Conclusion | 88 |
| | | |
| | Conclusion générale | 89 |
| | | |
| | Annexes | 92 |
| | | |
| A | Démonstration de la formule de calcul du ratio de flexing | 92 |

| | |
|---|------------|
| B Démonstration de la formule de récurrence de calcul de la PM | 95 |
| Table des figures | 97 |
| Bibliographie | 98 |
| Note de synthèse | 99 |
| Executive summary | 103 |

Introduction générale

La contrainte principale pour une compagnie d'assurance, en particulier d'assurance vie, est de respecter ses engagements vis-à-vis des assurés. En assurance, le cycle de production est inversé : le paiement de la prime est effectué avant le règlement des sinistres ou prestations, autrement dit avant que le service ne soit fourni, d'où la préoccupation d'un assureur envers ses engagements et l'intérêt de la valorisation économique du passif. Or la détermination de la valeur à long terme d'une société d'assurance vie n'est pas simple.

En effet, le passif d'un assureur vie se compose de plusieurs engagements à long terme (Provision Mathématique) vis-à-vis des assurés par le biais des contrats d'épargne. Cette provision mathématique, pour les contrats d'épargne en euros, est capitalisée chaque année à un taux dépendant de la production financière de l'assureur. Par conséquent, le passif d'un assureur vie dépend de sa production financière et donc de son actif. Or l'actif d'un assureur vie est constitué d'actions, d'obligations, d'actifs immobiliers et d'autres instruments financiers. C'est pourquoi les calculs de la valeur économique des passifs et des fonds propres économiques sont beaucoup plus délicats. En effet, les liens de dépendances actif/passif provenant des mécanismes de participation aux bénéfices et des comportements de rachats dynamiques des assurés ne permettent pas une mise en œuvre de type « formules fermées ». Il est donc nécessaire de recourir à des méthodes de type Monte-Carlo pour estimer la valeur économique des passifs.

D'autre part, avec l'évolution considérable de la réglementation dans le monde de l'assurance, la préoccupation des risques supportés occupe une place primordiale. Ces changements visent à garantir les engagements des assureurs vis-à-vis des assurés et à leur permettre de faire face aux aléas inhérents à l'activité d'assurance. En effet, toute compagnie d'assurance doit pouvoir retracer le plus fidèlement possible l'image de la société, de ses engagements, tout en se basant sur une vision économique de celle-ci. Elle doit donc s'appuyer sur des indicateurs susceptibles d'évaluer au plus juste sa richesse et la hauteur de ses engagements, des indicateurs de type « Capital Économique », « Best Estimate », « Value of In Force », etc.

La méthode de modélisation de passif actuellement utilisée par la compagnie Crédit Agricole Assurances, dite "Flexing", repose sur l'utilisation de proxys basés sur des flux de passif déterministes. En effet, les échanges entre l'actif et le passif se font par l'intermédiaire d'une table de cash-flows donnée en input dans le modèle ALM en $t = 0$. Cette table est obtenue en projetant les cash-flows futurs du stock des contrats selon un scénario financier déterministe dans un modèle de passif déterministe, appelé modèle "Contrat". Les flux de passif générés par le modèle déterministe seront ensuite *flexés* dans le modèle ALM afin d'ajuster le montant de la provision mathématique obtenu par le modèle déterministe pour rajouter la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques. Ainsi, avec cette méthode actuelle, il y a inévitablement une perte d'information et donc une incertitude dans les résultats obtenus.

Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à la mise en œuvre d'une nouvelle méthode de modélisation de passif dite "Internal". Dans cette méthode, la modélisation des flux de passif sera effectuée directement dans le modèle ALM sans passer par de proxys basés sur des flux de passif déterministes. Ainsi les flux de passif projetés dans le modèle stochastique ALM prennent directement en compte les rachats dynamiques, l'inflation, le taux de rendement des actifs et

le taux de participation aux bénéficiaires. Par conséquent, cette nouvelle méthode de modélisation de passif peut apporter une amélioration de la pertinence des résultats. Ce qui nous permettra d'établir une zone de validité de la méthode actuelle "Flexing" et un ordre de grandeur de son incertitude.

Ce rapport est organisé en quatre parties. La partie 1 est entièrement consacrée à la présentation des principaux concepts qui serviront de bases à ce mémoire, à savoir l'assurance vie, le cadre réglementaire de la réforme européenne Solvabilité II (en exposant de manière détaillée les aspects quantitatifs de Solvabilité II), les différents éléments du bilan prudentiel, l'évaluation des passifs en « fair value », le calcul du Best Estimate et de la Value of In Force. La partie 2 aborde la modélisation du passif et des interactions Actif/Passif, plus précisément la stratégie de calcul du taux servi. La partie 3 expose la méthode actuelle "Flexing" employée au sein du Crédit Agricole Assurances pour la modélisation de passif ; dans cette partie on présentera la méthode "Flexing", son mode de fonctionnement et ses limites. La même partie expose la nouvelle méthode "Internal" pour la modélisation de passif, on présentera dans cette partie la méthode "Internal", son mode de fonctionnement, sa mise en œuvre notamment l'intégration des règles de modélisation du passif dans le modèle stochastique actif/passif de Crédit Agricole Assurances. On précisera également dans cette partie le périmètre d'étude utilisé pour la mise en œuvre de cette nouvelle méthode. Enfin, la dernière partie expose notre étude complète sur cette nouvelle méthode et sa comparaison avec la méthode actuellement utilisée.

Première partie

Principes fondamentaux de l'assurance vie

Chapitre 1

Les contrats d'assurance vie

1.1 L'assurance vie

1.1.1 Définition générale

Un contrat d'assurance vie est un contrat par lequel l'assureur garantit à l'assuré ou à une personne désignée, le bénéficiaire, le versement d'une prestation, capital ou rente, si survient l'événement garanti par le contrat, décès ou survie de l'assuré au terme du contrat. En contrepartie, l'assureur perçoit une cotisation, une prime. On distingue essentiellement deux types de garantie :

- La garantie en cas de vie : il s'agit d'un contrat qui garantit le versement d'un capital ou d'une rente aux bénéficiaires si l'assuré est toujours en vie à la fin du contrat.
- La garantie en cas de décès : il s'agit d'un contrat qui garantit le versement d'un capital ou d'une rente aux bénéficiaires en cas de décès de l'assuré.

1.1.2 Contrat d'assurance vie "Épargne"

L'assurance en cas de vie pure n'existe quasiment pas en France. Ce qu'on appelle fréquemment « assurance vie » en France est en fait un contrat qui contient à la fois une garantie en cas de vie et une garantie en cas de décès. C'est ce qui en fait un contrat d'épargne, avec la particularité que l'échéance du contrat est aléatoire et dépend de la durée de vie de la personne assurée. Il existe deux principaux types de contrats épargne, à savoir :

Contrat d'épargne en euros

Dans ce type de contrat, l'épargne de l'assuré qui correspond à la provision mathématique est placée sur le fonds euros et est capitalisée chaque année à un taux dépendant de la production financière de l'assureur. La principale caractéristique de ce type de contrat est que l'investissement de l'assuré est protégé. En effet, la provision mathématique est toujours au moins égale à l'investissement de l'assuré.

En cas de décès de l'assuré, de rachat total du contrat ou d'arrivée au terme du contrat, la provision mathématique est versée à l'assuré ou aux bénéficiaires, moyennant éventuellement certaines pénalités en cas de rachat.

Exemple de fonctionnement d'un contrat épargne en euros avec une prime unique P :

$$PM(t) = \begin{cases} PM(t-1) \times (1 + Taux_servi(t)) & \text{pour } t = 1, \dots, T' \\ P & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

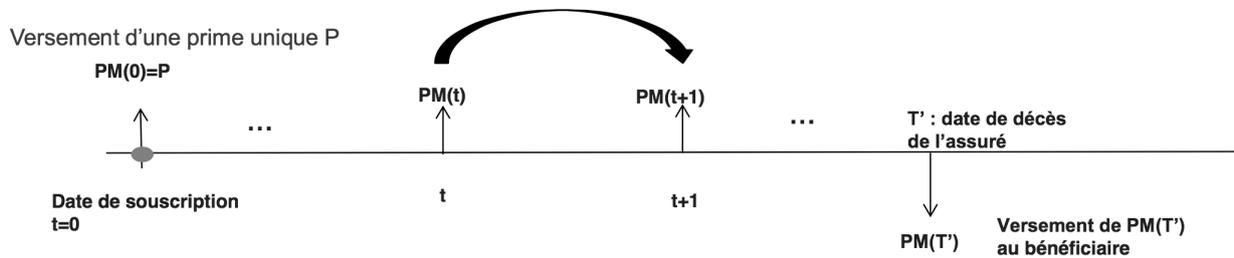


FIGURE 1.1 – Représentation schématique du fonctionnement d'un contrat d'épargne en euros avec prime unique

Le taux servi ou le taux de revalorisation du contrat est un taux défini par l'assureur pour revaloriser l'épargne de l'assuré (provision mathématique) et dépendant d'un taux minimum garanti "TMG" (qui représente le rendement minimum du contrat) et de sa production financière.

D'autre part, les contrats d'assurance vie en euros contiennent des options cachées telles que la possibilité de rachat du contrat à tout moment par l'assuré. Pendant la durée de vie du contrat, l'assuré cherche à obtenir le meilleur rendement possible sur son épargne. Lorsque le taux de rendement que lui verse l'assureur n'est pas suffisant face à ce que propose la concurrence, l'assuré peut racheter son contrat pour investir son épargne sur un produit concurrent plus rentable. Ainsi, ces rachats, appelés rachats dynamiques ou conjoncturels, sont liés à la faiblesse des participations aux bénéfices que reçoit l'assuré. Par conséquent, le taux de revalorisation du contrat est un point clé pour l'assureur (l'algorithme utilisé par la compagnie pour le calcul du taux servi sera décrit plus en détail au chapitre 4 section 2).

Contrat d'épargne en Unités de Compte

Pour ce type de contrat, l'épargne de l'assuré correspond à un portefeuille d'actifs financiers, exprimé en nombre de parts de supports du type SICAV, FCP, ..., et évolue selon les mouvements observés sur les marchés financiers. La principale caractéristique de ce type de contrat est que l'investissement de l'assuré n'est pas protégé car il est soumis aux aléas financiers. En effet, la provision mathématique peut devenir inférieure à l'investissement de l'assuré.

En cas de décès de l'assuré, de rachat total du contrat ou d'arrivée au terme du contrat, la provision mathématique est versée à l'assuré ou aux bénéficiaires, moyennant certaines pénalités en cas de rachat.

Exemple de fonctionnement d'un contrat épargne en unités de compte "UC" avec une prime unique P :

Notons $S(t)$ la valeur du support UC à la date t et supposons que le nombre de parts sur l'horizon de vie du contrat est constant, i.e les frais de gestion financière sont nuls.

$$PM(t) = \begin{cases} N \times S(t) & \text{pour } t = 1, \dots, T' \\ N \times S(0) & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Avec

$N = P/S(0)$ déterminé à la date de souscription du contrat.

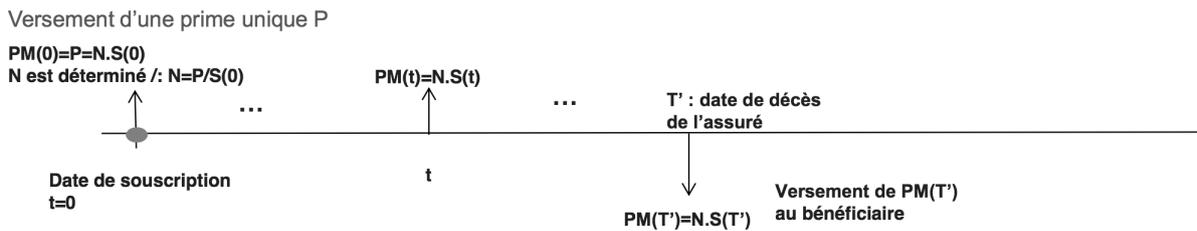


FIGURE 1.2 – Représentation schématique du fonctionnement d'un contrat épargne en UC avec prime unique

Contrairement aux contrats d'épargne en euros, les contrats en unités de compte sont des contrats à capital variable où le montant des garanties et des primes sont exprimés non pas en euros mais par référence à une unité de compte (contrats dits monosupports) ou à plusieurs (contrats dits multisupports). Les garanties sous-jacentes sont donc liées aux variations de hausse ou de baisse des marchés financiers.

Le taux de rendement espéré sur les contrats d'épargne en unités de compte est plus élevé que sur le fonds en euros mais en contrepartie d'un risque en capital. En effet, une grande partie des contrats en unités de compte est investie en actions, donc très sensible aux chocs des marchés.

1.2 Les caractéristiques des contrats d'assurance vie

1.2.1 Durée du contrat

Les contrats d'assurance vie sont des contrats conclus sur le long terme et donc n'ont pas de durée légale. Par ailleurs, elle est fixée librement pour une durée déterminée prolongeable par tacite reconduction d'année en année sauf en cas de décès ou, par anticipation, en cas de rachat total. D'autre part, pour tirer le meilleur bénéfice d'un contrat d'assurance vie et de la fiscalité qui y est rattachée, les souscripteurs conservent en général leur contrat pour une durée de huit ans ou plus.

1.2.2 Les cotisations

Il est possible d'investir dans un contrat d'assurance vie sous plusieurs formes :

- Un versement unique : il correspond au versement d'une prime unique au moment de la souscription du contrat d'assurance.
- Des versements libres : l'assuré a la possibilité d'effectuer plusieurs versements, dont le montant et la périodicité ne sont pas fixés au moment de la souscription.
- Des versements programmés : la fréquence et le montant des versements sont définis à la souscription du contrat avec possibilité d'effectuer des versements complémentaires, de modifier la fréquence ou d'arrêter les versements.

1.2.3 Les frais du contrat d'assurance vie

Les contrats d'assurance vie en euros sont soumis à plusieurs catégories de frais :

- Les frais d'entrée ou d'acquisition : ils correspondent aux frais d'entrée et aux frais prélevés à chaque versement effectué.
- Les frais de gestion : ils correspondent à la rémunération de l'assureur. Ces frais sont prélevés pendant toute la durée du contrat d'assurance vie sur les supports en unités de compte et sur le fonds euros. Ils sont calculés sur la totalité de l'épargne constituée. On distingue les frais de gestion sur le fonds euro et les frais de gestion sur les supports en unités de compte.
- Les frais d'arbitrage : ils correspondent aux frais dus aux transferts de fonds d'un support vers un autre. Ils sont prélevés sur le montant des sommes transférées.
- Les prélèvements sociaux : Les intérêts des contrats d'épargne en euros et en unités de compte sont soumis aux prélèvements sociaux. Ils ne s'appliquent que sur les gains dégagés par le contrat.
- Autres frais de l'assurance vie : frais de sortie anticipée et autres frais.

1.2.4 L'option de rachat

Avant l'échéance du contrat, l'assuré a le droit de récupérer toute ou une partie de sa mise initiale ainsi que les intérêts correspondants. L'assureur lui verse alors un capital, appelé valeur de rachat du contrat, qui est calculé à chaque instant conformément aux conditions générales du contrat. Elle correspond à la partie disponible de la provision mathématique, moyennant certaines pénalités plus ou moins importantes selon l'ancienneté du contrat. Ces pénalités sont exprimées en pourcentage de la provision mathématique tout en ne dépassant pas 5% de la somme retirée. La partie non rachetée reste investie dans le contrat. Dans le cas d'un rachat total, l'assuré met fin à son contrat d'assurance vie d'une manière anticipée et sa provision mathématique lui est donc versée en sa totalité.

Cette option constitue un élément important que l'assureur doit prendre en compte lors de l'évaluation des provisions techniques.

1.2.5 La revalorisation d'un contrat d'assurance vie en euros

Un contrat d'assurance vie en euros permet de garantir à son détenteur un taux de revalorisation qui est en principe identique pour chacun des assurés appartenants à une même famille de contrats. Ce taux dépend d'un taux minimum garanti et d'une participation aux bénéfices.

Taux minimum garanti "TMG"

Lors de la souscription d'un contrat d'épargne en euros, l'assureur s'engage à garantir un taux de rendement minimum, qui correspond au taux minimum garanti "TMG", sur le contrat pour une période donnée. Ce taux peut être fixe ou variable suivant un indice de référence (par exemple le Taux Moyen des Emprunts de l'État français "TME").

Ce taux minimum garanti "TMG" est donc une contrainte forte pour les assureurs. En effet, son choix par la compagnie est stratégique et délicat. Celui-ci ne doit être ni trop bas pour que les produits restent compétitifs et attirent des nouveaux souscripteurs, ni trop élevé, car l'assureur pourrait alors ne plus être capable d'investir dans des titres suffisamment rentables pour honorer ses engagements.

D'autre part, ce taux est limité par le code des Assurances "Article A132-1" en fonction de la durée d'engagement et ne pourra dépasser :

— Pour les contrats à prime unique ou à versements libres :

- 75% du Taux Moyen des Emprunts d'Etat "TME" si l'engagement est inférieur à 8 ans,
- $\text{Min}(60\% \text{ TME} ; 3,5\%)$ si l'engagement est supérieur à de 8 ans.

— Pour les contrats à primes périodiques ou à capital variable, quelle que soit leur durée, ce taux ne peut excéder le plus bas des deux taux suivants : 3,5% ou 60% TME.

Toutefois, lorsque le taux garanti est fixé annuellement pour l'année, on parle du Taux Minimum Annuel Annoncé "TMAA", il ne peut excéder 85% de la moyenne des taux de rendement des actifs financiers de la compagnie d'assurance calculés sur les deux derniers exercices.

L'objectif de cette limite est d'éviter que les assureurs ne prennent des engagements trop élevés. Dans les années 90, la réglementation en matière de TMG était moins stricte, et des contrats bénéficiant de fortes garanties de taux servi, tel qu'un TMG de 4,5%, ont été commercialisés. À cause de ces anciens contrats encore en portefeuille, servant un TMG élevé, les assureurs subissent des pertes importantes. En effet, depuis le milieu des années 2000, les taux disponibles sur les marchés financiers ont chuté et sont au plus bas. Par conséquent, le rendement du portefeuille des assureurs a donc fortement baissé. Actuellement, la majorité des contrats d'épargne en euros disponible sur le marché comportent des TMG de 0%.

Participation aux bénéfices "PB"

L'assureur gère l'actif en représentation des contrats en euros et a l'obligation de verser à l'assuré, sous forme de participation aux bénéfices "PB", tout ou une partie des bénéfices des produits financiers et techniques réalisés pendant l'année pour la valorisation du contrat. Toutefois, ce montant ne peut être inférieur à 85% du résultat financier et 90% du résultat technique.

$$\text{Minimum réglementaire de PB} = 85\% \times \text{résultat financier} + \begin{cases} 90\% \times \text{résultat technique si } \geq 0 \\ 100\% \times \text{résultat technique si } < 0 \end{cases}$$

Les dispositions contractuelles en matière de PB sont souvent plus contraignantes que le minimum réglementaire. En effet, la concurrence entre différents organismes assureurs se mesure fréquemment à partir des taux de participation aux résultats servis.

Lors de la valorisation des contrats, l'assureur a la possibilité de ne pas incorporer l'intégralité de la participation aux bénéfices immédiatement aux provisions mathématiques. En effet, cela peut dépendre par exemple du taux cible (taux attendu par les assurés). Par contre, il dispose d'un délai de huit ans pour le faire. Dans cet intervalle de temps, il la provisionne, pour tout ou partie, dans un compte appelé Provision pour Participation aux Bénéfices "PPB" ou Provision pour Participation aux Excédents "PPE". Cette provision permet, soit de lisser les rendements du contrat et d'offrir ainsi une rémunération plus stable, soit de pallier les résultats d'une année marquée à la baisse.

Il est important de noter que la participation aux bénéfices ne s'applique pas aux contrats en unités de compte.

1.3 Les principaux risques des contrats d'assurance vie

L'assurance vie est un placement financier qui permet à l'assuré de percevoir des intérêts sur son contrat en fonction du capital investi. Les assureurs sont donc exposés aux aléas des marchés financiers.

Pour les contrats en UC, les risques financiers sont supportés par l'assuré. L'assureur est néanmoins exposé à un risque opérationnel, lié à un éventuel mauvais adossement des contrats.

Concernant les contrats en euros, les risques financiers sont supportés par l'assureur. À savoir :

— Le risque de taux :

- **La baisse des taux :** Sur une période longue, une baisse des taux d'intérêt imposerait à l'assureur, en cas d'arrivée à maturité de certaines obligations détenues en portefeuille, de réinvestir sur des obligations ayant un taux de rendement plus faible qu'auparavant. L'assureur peut alors se retrouver avec un portefeuille d'actifs ne permettant pas de servir aux assurés le taux minimum garanti sur les contrats.

- **La hausse des taux** : En cas de hausse des taux, le taux servi par l'assureur risque d'être dans un premier temps très en dessous des taux de marché. Les assurés peuvent alors décider de racheter leur contrat pour investir leur épargne sur un produit concurrent plus rémunérateur. Ces rachats, s'ils deviennent significatifs, peuvent obliger l'assureur à vendre leurs titres obligataires en réalisant des moins-values. De plus, dans un cas extrême, si la réserve de capitalisation ne suffit pas à absorber les pertes causées par les moins-values réalisées, l'assureur réalisera des pertes.

— **Le risque actions** :

- **La baisse des actions** : Pour de nombreux assureurs, la volatilité des actions joue un rôle important que ce soit à travers les investissements qu'ils détiennent ou à travers les options et garanties proposées dans leurs contrats. En cas de baisse des marchés actions, la dépréciation des actifs relevant du mode d'évaluation défini dans l'article R332-20 du Code des assurances, peut amener l'assureur à constituer des provisions pour dépréciation durable et/ou une provision pour risque d'exigibilité, entraînant ainsi une sensible diminution des revenus des placements et la constitution d'une provision pour aléas financiers.

Chapitre 2

Valorisation d'un portefeuille d'assurance vie sous Solvabilité II

La nouvelle réforme réglementaire Solvabilité II définit une nouvelle vision de la solvabilité, dont le but est de prendre en compte les risques réels supportés par l'assureur. La principale évolution est que les différents postes du bilan sont valorisés à leur juste valeur en prenant compte du profil de risque auquel est soumis chaque assureur.

2.1 Présentation de Solvabilité II

2.1.1 Définition et objectifs de Solvabilité II

Solvabilité II est une réforme réglementaire prudentielle européenne du monde de l'assurance (assureurs vie et non vie, mutuelles, instituts de prévoyance, réassureurs), dont le but est de prendre en compte les risques réels supportés par l'assureur.

Le projet Solvabilité II a pour objectif de :

- renforcer la protection des preneurs d'assurance et des ayants droit ;
- encourager les organismes à mieux connaître, évaluer et gérer leurs risques ;
- harmoniser le cadre de surveillance prudentiel dans le secteur de l'assurance au sein de la communauté européenne ;
- instaurer des normes prudentielles prenant en compte l'ensemble des risques effectivement assumés par les entreprises d'assurances, pour une meilleure réglementation ;
- accroître la rentabilité des établissements et leur résistance en cas de crise afin d'être plus compétitifs tout en protégeant mieux leurs clients ;
- protéger le système financier et éviter le risque systémique.

2.1.2 Les trois piliers de Solvabilité II

Le projet de Solvabilité II repose sur trois piliers fondamentaux :

— **Pilier 1** : Exigences de quantification des risques

- Évaluation économique du bilan (provisions techniques, fonds propres) ;
- Détermination du Minimum de Capital Requis "MCR" et du Capital de Solvabilité Requis "SCR" avec la formule standard ou un modèle interne.

— **Pilier 2** : Exigences qualitatives de gestion des risques et de gouvernance

- Mise en place d'un système de gouvernance des risques ;
- Dispositif d'évaluation interne du risque et de la solvabilité "ORSA".

— **Pilier 3** : Exigences de communication financière

- Communication au marché, reportings auprès de l'autorité de contrôle "ACPR" et auprès du public ;
- Reportings quantitatifs aux régulateurs.

2.1.3 Solvabilité I vs Solvabilité II

Dans la réglementation Solvabilité I, plusieurs types de risques parmi les risques fondamentaux pour les assureurs n'étaient pas correctement pris en compte. D'où le fait d'instaurer le nouveau régime prudentiel Solvabilité II qui assure un équilibre entre la protection des assurés et le coût du capital pour les assureurs, donc favorise une approche fondée sur le profil de risque particulier de l'entreprise d'assurance.

Les principales différences entre les deux régimes :

| Solvabilité I | Solvabilité II |
|---|---|
| 1. Capital requis = fonction d'indicateurs comptables | 1. Capital requis = fonction des risques et de la stratégie d'investissement |
| 2. Vision réglementaire et comptable | 2. Vision économique et "market consistent" |
| 3. Règles propres à chaque pays de l'europe | 3. Règles harmonisées pour les 30 pays de l'European Economic Area "EEA" |
| 4. Indicateurs de solvabilité globaux | 4. Prise en compte de la diversification |
| 5. Pas de possibilité de développer un modèle interne | 5. Développement de modèles internes permettant de mieux appréhender le profil de risques |

2.2 Principes de valorisation du bilan en « juste valeur »

2.2.1 Bilan économique sous Solvabilité II

Le bilan d'une entreprise d'assurance donne une photographie du patrimoine de la compagnie d'assurance à une date donnée. Il fait appel à deux notions qui sont l'actif et le passif :

- **L'Actif** : correspond à l'ensemble des biens (incorporels, mobiliers, immobiliers) de l'entreprise,
- **Le Passif** : correspond à l'ensemble des dettes (vis-à-vis des actionnaires ou des membres fondateurs pour la partie des fonds propres et vis-à-vis des assurés pour la partie provisions).

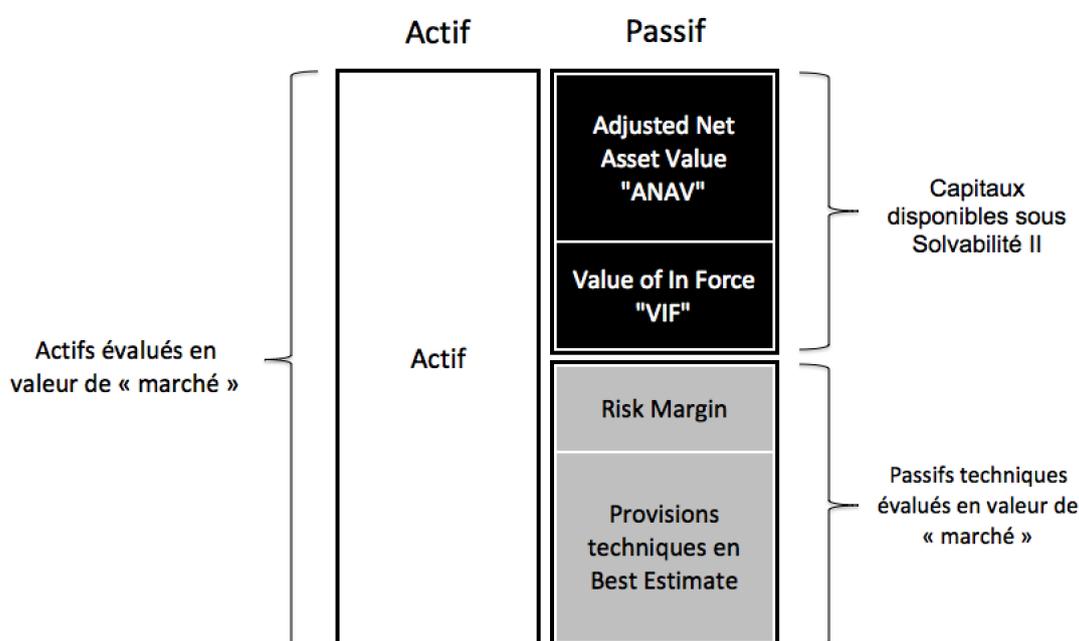


FIGURE 2.1 – Représentation graphique du Bilan économique sous Solvabilité II

La définition du capital dans l'environnement Solvabilité II repose sur une vision économique du bilan de la compagnie. En effet, les actifs et les passifs des entreprises d'assurances doivent être évalués à leur juste valeur (c'est-à-dire au montant pour lequel un actif ou un passif peut être échangé ou réglé entre deux parties informées et consentantes, dans des conditions normales de concurrence).

2.2.2 Les différents postes du bilan économique

Dans cette partie, nous allons présenter les différents postes du bilan économique. Il est essentiel de comprendre ces différents éléments du bilan, puisque la comparaison des deux méthodes de modélisation de passif repose sur ces derniers.

Capitaux disponibles sous Solvabilité II

- **Adjusted Net Asset Value "ANAV" ou Actif Net Réévalué "ANR"** : correspond à la richesse, accumulée dans le passé par la compagnie, immédiatement disponible pour l'actionnaire. C'est la valeur nette comptable des fonds propres statutaires, réévaluée des plus-values latentes nettes d'impôt revenant à l'actionnaire.
- **Value of In Force "VIF"** : valeur actuelle des résultats futurs distribuables à l'actionnaire générés par le portefeuille de contrats de la société. C'est la valeur économique des fonds propres, espérance de la valeur actualisée des marges futures sous la probabilité risque neutre.

Passifs techniques évalués en valeur de « marché »

Le passif technique du bilan économique est valorisé en valeur de marché, il se compose de :

- **Provisions techniques en Best Estimate "BE"** : espérance des flux futurs sortants diminués des flux futurs entrants estimés en utilisant des hypothèses probabilistes sur les facteurs de risques, tout en actualisant les flux avec la courbe des taux sans risque à la date d'évaluation,
 - Les flux entrants : correspondent aux primes futures (éventuellement) et aux créances reçues,
 - Les flux sortants : correspondent aux prestations et aux dépenses liées aux engagements de l'assureur,
 - prestations : rachats/décès/arrérages/maturités,
 - frais : d'administration, d'acquisition, de gestion des sinistres, de gestion des placements, etc,
 - commissions,
- **Marge pour risque "Risk Margin"** : partie complémentaire à la meilleure estimation calculée sur la base du SCR. C'est la part des provisions techniques permettant de s'assurer que le montant de ces derniers est équivalent au montant que l'assureur doit disposer pour honorer ses engagements. Elle est destinée à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant dont des entreprises auraient besoin pour reprendre et honorer les engagements.

Elle est calculée à partir du coût d'immobilisation des fonds propres nécessaires pour atteindre jusqu'au terme le SCR relatif aux engagements d'assurance :

$$\text{Risk Margin} = \text{CoC} \times \sum_{t \geq 0} \frac{\text{SCR}_t}{(1 + r_t)^t}$$

où CoC est le taux du coût du capital, SCR_t est le capital de solvabilité requis à la date t et r_t le taux sans risque à la date t .

Actifs évalués en valeur de « marché »

Les différents actifs du bilan économique sont évalués à leur valeur de marché. Lorsqu'ils sont fiables, et que des cours de marché observables sur des marchés très actifs et liquides existent, les valeurs des actifs sont égales à ces cours du marché. Concernant les actifs incorporels, ils sont égaux à leur valeur de marché s'ils sont « cédables », et sont égaux à zéro sinon.

Les actifs doivent être investis de façon à garantir la sécurité, la qualité, la liquidité et la rentabilité de l'ensemble du portefeuille.

2.2.3 Valorisation du bilan économique

La définition du capital dans l'environnement Solvabilité II repose sur une vision économique du bilan de la compagnie. À chaque date t , il est possible de construire le bilan économique suivant :

| Bilan économique en t | |
|-----------------------|-------------------|
| A_t | FP_t VEP_t |

Sous les notations :

- A_t : valeur de marché de l'actif en date t ,
- VEP_t : valeur économique du passif en date t ,
- FP_t : fonds propres économiques en date t .

Le bilan étant équilibré, on a la relation : $FP_t = A_t - VEP_t$.

En date initiale, les valeurs de l'actif, du passif et des fonds propres de la compagnie sont des variables aléatoires dépendant des aléas (financiers, démographiques, ...).

Sous Solvabilité II, la valorisation du bilan économique doit se faire dans un environnement d'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de chacun des postes du bilan correspond alors à l'espérance sous la probabilité risque neutre des cash-flows futurs actualisés.

Soient :

- δ_u : le facteur d'actualisation s'exprimant à l'aide du taux sans risque instantané r_u ,
soit $\delta_u = \exp^{-\int_0^u r_x dx}$
- P_u : les cash-flows de passif (prestations, commissions, frais,...) en période u ,
- R_u : le résultat de la compagnie en période u .
- \mathcal{F}_0 : la filtration permettant de caractériser l'information financière disponible en t_0 .

Sous ces notations, les fonds propres économiques et la valeur économique des passifs en date initiale se calculent de la manière suivante :

Fonds propres économiques en $t = 0$

FP_0 : Valeur économique des fonds propres, espérance de la valeur actualisée des marges futures sous la probabilité risque neutre en t_0 .

$$FP_0 = \mathbb{E}_Q \left[\sum_{u \geq 1} \delta_u R_u | \mathcal{F}_0 \right]$$

Valeur économique des passifs en $t = 0$

VEP_0 : Valeur économique des passifs, espérance de la valeur actualisée des cash-flows de passif (prestations, commissions, frais, ...) sous la probabilité risque neutre en t_0 .

$$VEP_0 = \mathbb{E}_Q \left[\sum_{u \geq 1} \delta_u P_u | \mathcal{F}_0 \right]$$

Remarque. Le calcul de la VIF et VEP dans le cadre des contrats en euros fait intervenir différentes provisions, à savoir :

- **Réserve de capitalisation "RC"** : réserve destinée à parer à la diminution des valeurs des titres obligataires lors de leurs ventes. Cette réserve est alimentée lorsque le prix de cession est supérieur au prix théorique de l'obligation. Ce prix théorique est déterminé avec un taux d'actualisation égal au taux de rendement de l'obligation à l'achat. La réserve est diminuée dans le cas inverse.
Cette provision a la particularité de faire partie des capitaux propres de l'assureur, et d'être éligible à la constitution de la marge de solvabilité.
- **Provisions pour dépréciation des actifs** : les placements sont évalués à leur coût d'acquisition et une provision pour dépréciation est constituée dès que la valeur de réalisation d'un placement donné est inférieure à sa valeur au bilan. Ces provisions sont destinées à faire face à une insuffisance de liquidité des placements des titres R332-20.

Le provisionnement pour dépréciation emporte deux formes :

- **Provision pour dépréciation durable "PDD"** : Cette provision est constituée en cas de moins-value latente importante par rapport au prix de revient (20% ou 30% selon la volatilité des marchés financiers) et lorsque la dépréciation de la valeur d'un élément d'actif est considérée comme durable (6 mois généralement). Cette provision est constituée ligne à ligne, et n'est pas une provision technique (elle ne constitue pas un engagement réglementé). Dans le modèle ALM de la compagnie, cette provision n'est pas modélisée.

- **Provision pour risque d'exigibilité "PRE"** : Cette provision est constituée lorsque les titres R332-20 sont en moins-value latente après "PDD" et est lissée sur 3 ans. Sa constitution est automatique, par tiers ou à 100%, dès que la valeur globale des titres concernés devient inférieure à la valeur globale d'acquisition. Cette provision est une provision technique, portée au passif du bilan.

- **Provision pour participation aux excédents "PPE"** : Cette provision est constituée lorsque le montant des participations aux bénéfices attribué aux bénéficiaires des contrats n'est pas payable immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits. L'assureur est toutefois tenu de redistribuer ces bénéfices dans les huit ans qui suivent leur constatation.

Deuxième partie

Modélisation Actif/Passif d'un portefeuille d'assurance vie

Chapitre 3

Principes de modélisation Actif/Passif

3.1 Présentation de modélisation Actif/Passif

3.1.1 Nécessité d'un modèle ALM en assurance vie

En assurance vie, en particulier pour les contrats d'épargne en euros, le rendement financier de l'actif de l'assureur a une grande influence sur le passif, sur la revalorisation des provisions mathématiques. En effet, l'épargne de l'assuré est capitalisée chaque année à un taux dépendant de la production financière de l'assureur. Toutefois, si ce taux ne correspond pas aux attentes des assurés, alors ces derniers peuvent racheter leur contrat. Cependant, il existe un lien étroit entre :

- la production financière de l'assureur qui dépend de la performance financière constatée à l'actif,
- la revalorisation des contrats par le biais de la participation aux bénéfices,
- le comportement de rachat des assurés.

Afin de modéliser ces interactions qui existent entre l'actif et le passif, l'utilisation d'un modèle ALM (Asset & Liability Management) est indispensable.

En effet, un modèle ALM permet de donner une vision prospective de l'actif et du passif en prenant en compte les interactions Actif/Passif. Il fait partie des outils mis à disposition de la gestion Actif/Passif contribuant à la maîtrise des risques financiers.

Un modèle ALM est utilisé pour de multiples études. Ses principales utilisations sont :

- Pilotage : établissement des résultats prévisionnels, suivi de la marge de solvabilité prévisionnelle, études actif-passif diverses,
- Gestion des risques du bilan : stress tests, risque de taux, risque actions, etc,
- Calcul de l'Embedded Value "EV", du Best Estimate "BE", de la Value of In Force "VIF", du Minimum de Capital Requis "MCR" et du Capital de Solvabilité Requis "SCR",
- Valoriser les passifs en « fair-value ».

3.1.2 Définition d'un modèle ALM

Un modèle ALM est un outil de gestion Actif/Passif, qui consiste à allouer de manière optimale l'actif de la compagnie d'assurance en fonction des engagements pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires des contrats et aussi en fonction d'objectifs de revalorisation des contrats et de rémunération des actionnaires.

Chaque compagnie d'assurance vie a son propre modèle ALM. En effet, la stratégie financière (Achat/Vente/Réallocation), la politique de participation aux bénéfices à distribuer et le calcul de la marge financière réalisée sont déterminés différemment pour chaque assureur. Toutefois, l'objectif d'un assureur lors de l'implémentation d'un modèle ALM reste toujours le même, à savoir :

- Essayer d'avoir les meilleurs rendements sur les fonds investis ;
- Garder une adéquation actif-passif convenable permettant de financer les engagements futurs pris à l'égard des assurés et des bénéficiaires.

3.2 Algorithme d'un modèle ALM

3.2.1 Introduction

Un modèle ALM est un modèle de projection des flux d'actif et de passif avec les interactions qui existent entre les flux d'actif et de passif. Il intègre aussi les stratégies dynamiques définies par l'organe décisionnel en termes d'allocation d'actifs, de participation aux bénéfices, de réalisation de plus ou moins values, etc.

Le modèle se base sur les primes versées par les assurés, les provisions calculées par l'assureur et la collecte perçue qui est placée en actifs financiers dont le revenu permet de faire face à certains types d'engagements ou d'événements et de verser une participation aux bénéfices discrétionnaire.

La modélisation prospective doit donc prendre en compte :

- les cash-flows liés aux contrats du passif et des produits financiers : modélisation du passif et valorisation des produits financiers,
- la modélisation du comportement des assurés : lois d'expérience structurelles,
- l'évolution des actifs financiers dans le temps : modèles de diffusion pour les sous-jacents financiers,
- les règles de management de l'assureur : les investissements, les marges et la participation aux bénéfices,
- la réglementation : test de participation aux bénéfices minimale, etc.

3.2.2 Principes de l'ALM

Un modèle ALM est construit sur le principe de l'adossement Actif/Passif qui peut être résumé par la relation fondamentale suivante :

$$A_t = FP_t + VEP_t$$

Un modèle ALM est implémenté en quatre étapes :

1. Détermination des cash-flows d'actif et de passif,
2. Constitution des stocks avant l'étape de revalorisation,
3. Revalorisation,
4. Construction des stocks pour passer à l'année $t + 1$.

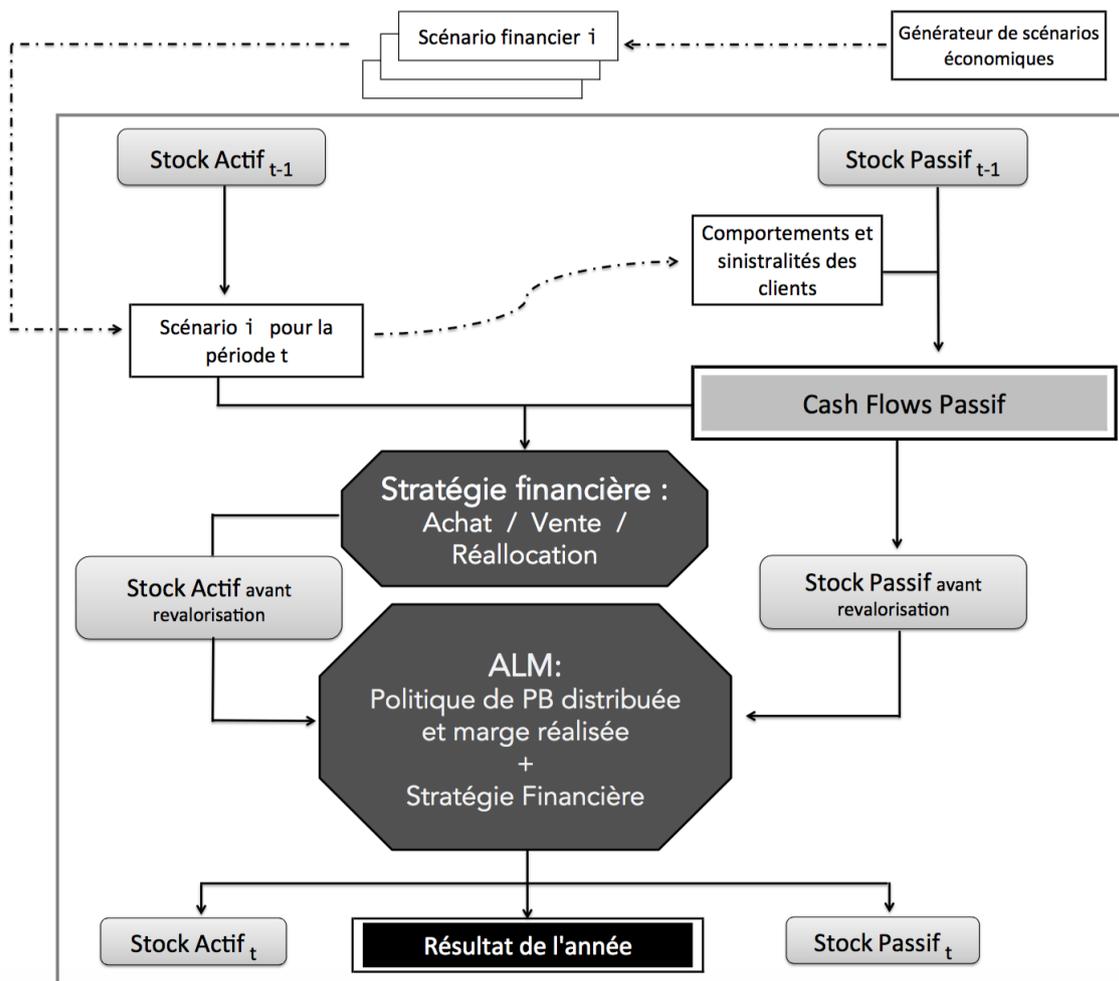


FIGURE 3.1 – Représentation graphique de l'Algorithmme ALM

Étape 1 : Détermination des Cash Flows d'Actif et de Passif

Cash Flows de Passif

Les cash-flows liés aux contrats du passif correspondent à l'engagement de l'assureur vis-à-vis de ses assurés. Ainsi l'engagement d'un assureur envers un assuré se caractérise par le contrat souscrit. Vu le grand nombre de contrats d'épargne détenus dans le portefeuille de l'assureur, ces derniers sont regroupés en un nombre suffisant de groupes homogènes de contrats appelés « Model Points », tout en conservant les caractéristiques nécessaires pour préserver une modélisation reflétant au mieux chaque produit. Les Model Points offrent une vision agrégée des données de gestion de portefeuilles sources.

La construction de Model Points consiste à regrouper les polices qui ont des caractéristiques semblables :

- Le produit, le réseau et la garantie souscrite,
- L'âge et le sexe de l'assuré,
- L'ancienneté du contrat,
- Le montant des primes périodiques et la durée de la prime périodique,
- Le taux minimum garanti, taux de PB contractuel, taux de frais de gestion, etc.

Une fois que les Model Points construits, la détermination des cash-flows est réalisée en trois étapes :

1. **L'évaluation de l'engagement théorique** : il s'agit de projeter les conditions initiales du contrat. Cela qui consiste à évaluer le montant des primes encaissées par police et le montant des provisions mathématiques en cours par police,
2. **L'estimation de l'aléa** : il s'agit d'évaluer le nombre de décès "NO_DEATHS", le nombre de rachats "NO_SURRS", le nombre de polices en cours en fin de période "NO_POLS_IF", le nombre de polices en cours en début de période "NO_POLS_IFSM",
3. **L'évaluation de l'engagement probabilisé du contrat** : il s'agit de projeter l'évolution réelle du contrat (engagement théorique probabilisé). Cela consiste à calculer le nouveau montant des primes encaissées et des provisions mathématiques en cours après l'estimation de l'aléa.

Cash Flows d'Actif

La détermination des cash-flows d'actif s'effectue également à partir d'un regroupement homogène de la base d'actif en Model Points. En effet, vu le très grand nombre d'actifs détenus, une projection ligne à ligne de l'actif n'est pas toujours possible.

La construction de Model Points consiste à regrouper les différents actifs détenus selon leur nature (obligations d'État, obligations d'entreprises dites obligations « corporate », actions, immobilier, swap, etc.), leur maturité, leur type de taux (fixe, variable, indexé), etc.

Ces Model Points (donnant les caractéristiques des produits détenus ainsi que leur valeur comptable et leur valeur de marché en $t=0$) permettent de donner une valeur initiale au stock d'actifs dans le modèle ALM.

Étape 2 : Constitution des stocks avant l'étape de revalorisation

La constitution des stocks avant l'étape de revalorisation consiste à l'application de la stratégie financière : Achat/Vente/Réallocation selon des règles fixées par l'entreprise.

Les règles d'achat et de vente sont définies selon les catégories d'actifs, par exemple :

- **Pour la catégorie des actions** : La vente est effectuée en se basant sur un taux de détention réalisé en valeur de marché et valeur comptable du portefeuille, tout en limitant ce taux à un seuil maximal de vente à ne pas dépasser. L'achat est effectué en se basant sur les flux de trésorerie avec des contraintes exprimées en fonction du seuil de détention.

Un test est effectué sur ce taux de détention afin de limiter la réalisation de moins-values :

- En cas de moins-values : la vente est limitée en ajustant si nécessaire le seuil maximal de détention.
 - En cas de plus-values : la vente est limitée en respectant le seuil maximal de détention.
- **Pour la catégorie des obligations** : L'achat et la vente sont effectués en se basant sur certaines caractéristiques des obligations définies a priori selon le portefeuille initial en date d'évaluation : le type d'obligation, la fréquence du coupon, le secteur d'activité de l'émetteur, etc.

La stratégie financière : Achat/Vente/Réallocation fait intervenir une table de scénarios économiques issue d'un ESG "Générateur de scénarios économiques", donnée en input dans le modèle ALM et qui contient pour chaque simulation et sur chaque horizon de projection, les évolutions :

- des courbes des taux nominaux et réels (zéro-coupon),
- des indices « actions » (avec et hors dividendes),
- du taux de dividendes « actions »,
- de l'indice d'inflation,
- des facteurs d'actualisation ou déflateurs.

Étape 3 : Revalorisation

La revalorisation fait intervenir la stratégie de participation aux bénéfices "PB". Cette stratégie permet de déterminer :

- Les produits financiers de l'année qui sont constitués des :
 - Intérêts sur la trésorerie et sur les sorties,
 - Intérêts sur les flux sortants de passif : décès, rachats totaux et partiels, maturités, commissions, etc.
 - Tombées de coupons ou des cash-flows d'actifs financiers : revenus obligataires, dividendes, flux de trésorerie, etc,
 - Plus ou moins-values latentes réalisées sur R343-10,
 - Variations de la réserve de capitalisation, variations de la provision pour risque d'exigibilité.

- Le taux cible qui, selon chaque compagnie, est déterminé à partir de :
 - L'évolution du taux moyen des emprunts d'État "TME",
 - Taux servi de l'année précédente,
 - Richesse latente réalisée,
 - Taux minimum garanti "TMG", etc.

- La marge financière de l'assureur qui dépend de la marge sur encours et de la marge liée aux produits financiers. La marge sur encours est exprimée en pourcentage de la provision mathématique et la marge liée aux produits financiers est calculée à partir des produits financiers nets de frais d'investissement,

- Les produits financiers distribuables de l'année qui sont exprimés à partir des produits financiers en ayant soustrait les frais financiers et la marge financière de l'assureur,

- Le taux servi qui, selon chaque compagnie, est déterminé à partir de :
 - La production financière distribuable de l'année,
 - Taux minimum garanti "TMG",
 - Taux cible,
 - Plus-values latentes disponibles,
 - Provision pour participation aux excédents "PPE",

- Le montant de la provision pour participation aux excédents "PPE" par génération.

Étape 4 : Construction des stocks pour passer à l'année $t + 1$

Une fois que le taux servi est calculé, on applique ce taux aux provisions mathématiques avant revalorisation afin d'obtenir le nouveau montant des provisions mathématiques après revalorisation. Ce qui nous permettra de déterminer le résultat de l'année et les nouveaux stocks d'actifs et de passif pour passer à l'année suivante et reproduire les calculs effectués dans les étapes 2, 3 et 4 jusqu'à la date de fin de projection.

Chapitre 4

Modélisation Actif/Passif

Dans ce chapitre nous présenterons la méthode de modélisation utilisée par la compagnie lors de la valorisation d'un portefeuille de contrats d'épargne en euros. Pour ce faire, nous présenterons dans une première section la méthode de modélisation de passif, puis dans une deuxième section la modélisation des interactions Actif/Passif, en particulier la modélisation de la stratégie de calcul de la participation aux bénéfécies. La mise en œuvre de la nouvelle méthode de modélisation de passif "Internal" repose sur la modélisation effectuée dans ces deux sections.

4.1 Modélisation du Passif

Dans cette section nous présenterons le principe de modélisation de passif. Cependant, il est important de noter que la méthode de modélisation de passif est différente pour les deux méthodes "Flexing" et "Internal" que nous allons voir dans la partie suivante, mais le principe reste le même.

4.1.1 Hypothèses de modélisation du passif

La projection des flux de passif dans le modèle est basée sur un certain nombre d'hypothèses. Ces hypothèses sont déterminées à l'aide d'études statistiques sur le portefeuille et doivent permettre de prédire raisonnablement les événements pouvant impacter les cash-flows de passif : rachats totaux et partiels, décès, maturités, évolution des primes périodiques, etc.

Les hypothèses de modélisation retenues dans le modèle sont les suivantes :

- Les cash-flows de passif sont projetés en run-off, c'est-à-dire sans production future,
- La durée des contrats est supposée viagère pour l'ensemble du portefeuille,
- Les taux de rachat sont estimés à partir d'une moyenne des sorties et par ancienneté,
- Les contrats arrivant à échéance sont assimilés à des rachats totaux,
- Les calculs sont effectués en pas mensuel dans le modèle "Contrat" et en pas annuel dans le modèle ALM sous la méthode "Internal",

- Les sorties (décès, rachats totaux, maturités et rachats partiels) sont supposées arriver en milieu de période,
- Les taux de décès sont évalués à partir d'une table d'expérience et en fonction de l'âge de l'assuré,
- Tous les calculs sont effectués par police (i.e. une ligne du Model Point).

4.1.2 Projection des flux d'un contrat épargne en euros

Modélisation du nombre des sorties

Dans un premier temps, nous allons calculer le nombre probabiliste des sorties par intervalle de temps (dans notre cas annuel) de la date de souscription à la date de terme. Ce qui nous permettra de déterminer le nombre de polices en cours en fin de période. En effet, le nombre de polices en fin de période correspond au nombre de polices à la fin de la période précédente diminué du nombre de décès, rachats totaux et maturités effectués au cours de la période :

$$\text{NO_POLS_IF}(t) = \text{NO_POLS_IF}(t-1) - \text{NO_DEATHS}(t) - \text{NO_SURRS}(t) - \text{NO_MATS}(t)$$

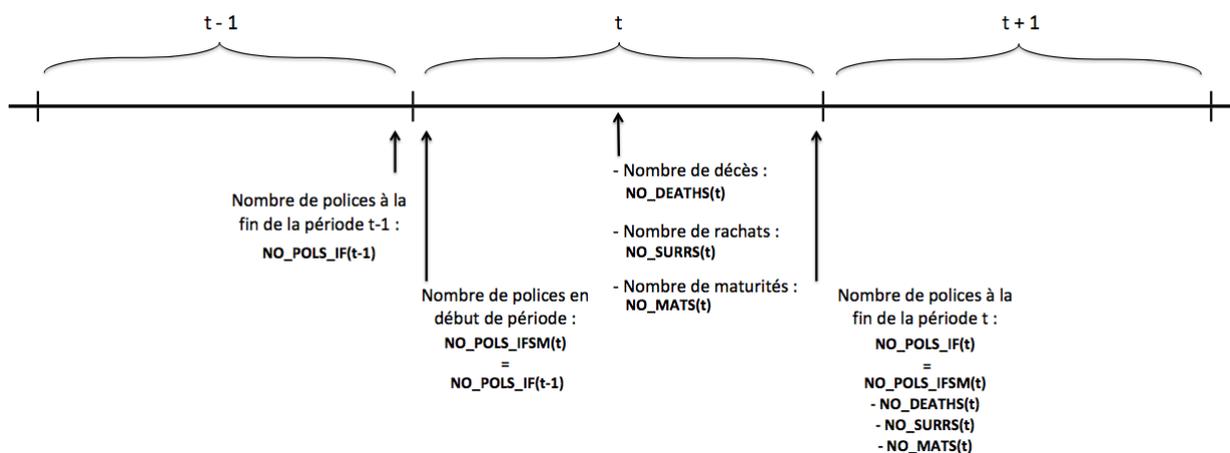


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du séquençage des flux

Cependant, il est nécessaire de déterminer :

- le nombre de polices arrivés à terme "NO_MATS",
- le nombre de polices en début de période "NO_POLS_IFSM",
- le nombre de décès "NO_DEATHS",
- le nombre de rachats totaux et partiels "NO_SURRS",

Nombre de polices en début de période "NO_POLS_IFSM"

Le nombre de polices en début de période correspond au nombre de polices en cours à la fin de la période précédente :

$$\text{NO_POLS_IFSM}(t) = \text{NO_POLS_IF}(t - 1)$$

Nombre d'arrivés à terme "NO_MATS"

Le nombre de contrats arrivés à terme est calculé à partir du nombre de polices en début de période multiplié par le taux de maturité de la période en cours :

$$\text{NO_MATS}(t) = \text{NO_POLS_IFSM}(t) \times \text{MAT_RATE}(t)$$

Avec :

- $\text{MAT_RATE}(t)$: taux de maturité de l'année t calculé à partir du taux annuel de sortie en cas de maturité. Ce dernier est égal à 1 au terme du contrat, donc, à l'échéance l'ensemble de l'épargne acquise est retirée.

Nombre de décès "NO_DEATHS"

Le nombre de décès est calculé à partir du nombre de polices en début de période multiplié par le taux annuel de décès et le taux annuel de contrats non rachetés :

$$\text{NO_DEATHS}(t) = \text{NO_POLS_IFSM}(t) \times \text{DEATH_RATE}(t) \times [1 - (1 - \text{LAPSE_TIMING}) \times \text{LAPSE_RATE}(t)]$$

Avec :

- $\text{DEATH_RATE}(t)$: taux de décès de l'année t déterminé à partir de la table de mortalité en fonction de l'âge et de la génération,
- $\text{LAPSE_RATE}(t)$: taux de rachat de l'année t .
- LAPSE_TIMING : taux correspondant à la date d'impact du taux de rachat.
 - $\text{LAPSE_TIMING} \mapsto 0 \Leftrightarrow$ Les rachats se produisent avant les décès,
 - $\text{LAPSE_TIMING} \mapsto 1/2 \Leftrightarrow$ Les rachats et les décès sont concomitants,
 - $\text{LAPSE_TIMING} \mapsto 1 \Leftrightarrow$ Les rachats se produisent après les décès.

Nombre de rachats "NO_SURRS"

Le nombre de rachats est calculé à partir du nombre de polices en début de période multiplié par le taux annuel de rachat et le taux annuel de survie :

$$\text{NO_SURRS}(t) = \text{NO_POLS_IFSM}(t) \times \text{LAPSE_RATE}(t) \times (1 - \text{LAPSE_TIMING} \times \text{DEATH_RATE}(t))$$

Remarque. Les taux utilisés ci-dessus sont des taux soit mensuels, soit annuels. Cela dépend de la méthode de modélisation de passif utilisée "Flexing" ou "Internal" sous PROPHET. Pour passer d'un taux annuel à un taux mensuel, on suppose une répartition mensuelle uniforme sur l'année :

$$DEATH_RATE_{Month} = 1 - (1 - DEATH_RATE_{Year})^{\frac{1}{12}}$$

$$LAPSE_RATE_{Month} = 1 - (1 - LAPSE_RATE_{Year})^{\frac{1}{12}}$$

Modélisation des flux de prestations

Les flux de prestations comportent les décès, les rachats totaux, les rachats partiels, les maturités et les prélèvements sociaux. En effet, le montant total des flux de prestations n'est que la somme de ces derniers :

$$MT_TOT_PREST(t) = MT_PART_SURRE(t) + MT_DEATHS(t) + MT_SURRE(t) + MT_MAT(t)$$

Dans les hypothèses de projection des flux de passif, les rachats partiels sont supposés arriver en début de milieu de période, c'est-à-dire arriver avant les sorties totales (décès, rachats totaux et maturités) et sont revalorisés au TMG.

Les sorties totales (décès, rachats totaux et maturités) sont supposées arriver en milieu de période, après les rachats partiels, et sont revalorisées au taux de PB de sortie.

D'autre part, du fait que les rachats partiels sont supposés arriver avant les sorties totales, l'assiette de calcul des sorties totales par police est alors diminuée des rachats partiels par police.

Le montant des rachats partiels "MT_PART_SURRE"

Le montant des rachats partiels est calculé à partir du montant des rachats partiels par police multiplié par le nombre de polices en cours en début de période :

$$MT_PART_SURRE(t) = MT_PART_SURRE_PP(t) \times NO_POLS_IFSM(t)$$

Et

$$MT_PART_SURRE_{Après\ TMG_Sortie}(t) = MT_PART_SURRE(t) \times (1 + TMG)^{\frac{1}{2}}$$

Avec :

— $MT_PART_SURRE_PP(t)$: montant des rachats partiels par police pour l'année t .

Où

$$MT_PART_SURRE_PP(t) = (MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t)) \\ \times PART_SURRE_RATE(t)$$

Et

- $MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1)$: montant de la provision mathématique revalorisée par police pour l'année $t-1$ correspondant à l'épargne acquise par police revalorisée au taux servi,
- $MT_PREM_PP(t)$: montant des primes nettes investies en date t par police,
- $PART_SURR_RATE(t)$: taux de rachats partiels en t .

Le montant des décès "MT_DEATHS"

Le montant des décès payé est défini comme étant égal au nombre de décès multiplié par la valeur acquise du contrat :

$$MT_DEATHS(t) = MT_DEATHS_PP(t) \times NO_DEATHS(t)$$

Et

$$MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}(t) = MT_DEATHS(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}$$

Avec :

- $Taux_PB_Sortie(t)$: taux de revalorisation des sorties en date t .
- $MT_DEATHS_PP(t)$: montant des décès par police pour l'année t .

Où

$$MT_DEATHS_PP(t) = MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \\ - MT_PART_SURR_PP(t)$$

Le montant des maturités "MT_MAT"

Le montant des maturités est calculé à partir du nombre d'échéances multiplié par le montant des maturités par police :

$$MT_MAT(t) = MT_MAT_PP(t) \times NO_MATS(t)$$

Et

$$MT_MAT_{Après\ PB_Sortie}(t) = MT_MAT(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}$$

Avec :

- $MT_MAT_PP(t)$: montant versé au terme par police pour l'année t .

Où

$$MT_MAT_PP(t) = MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \\ - MT_PART_SURR_PP(t)$$

Le montant des rachats totaux "MT_SURR"

Le montant des rachats totaux est calculé à partir du montant des rachats totaux par police multiplié par le nombre de rachats totaux :

$$MT_SURR(t) = MT_SURR_PP(t) \times NO_SURRS(t)$$

Et

$$MT_SURR_{Après\ PB_Sortie}(t) = MT_SURR(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}$$

Avec :

— $MT_SURR_PP(t)$: montant des rachats totaux par police pour l'année t .

Où

$$MT_SURR_PP(t) = \left(MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) - MT_PART_SURR_PP(t) \right) \times (1 - SURR_PEN_RATE)$$

Et

- $SURR_PEN_RATE$: Taux de pénalité de rachat défini en entrée du modèle.

Le montant des frais de gestion "MT_REN_EXP"

Le montant des frais de gestion est calculé à partir du montant des frais de gestion par police multiplié par le nombre de police en début de période :

$$MT_REN_EXP(t) = MT_REN_EXP_PP(t) \times NO_POLS_IFSM(t)$$

Avec :

— $MT_REN_EXP_PP(t)$: montant des frais de gestion par police pour l'année t calculé à partir du taux des frais de gestion et du taux d'inflation des frais de gestion.

Où

$$MT_REN_EXP_PP(t) = REN_EXP_RATE \times ADJ_INFL_REN_EXP(t)$$

- REN_EXP_RATE : taux des frais de gestion défini en entrée du modèle,
- $INFL_RATE$: taux d'inflation défini en entrée du modèle,
- $ADJ_INFL_REN_EXP(t)$: frais de gestion après ajustement par l'inflation.

$$ADJ_INFL_REN_EXP(t) = \begin{cases} ADJ_INFL_REN_EXP(t-1) \times (1 + INFL_RATE) & \text{pour } t \neq 0 \\ 1 & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

Le montant des commissions "MT_REN_COM"

Le montant des commissions est calculé à partir du taux des commissions multiplié par la PM et le nombre de polices en début de période :

$$MT_REN_COM(t) = MT_PM_PP_{Début Période}(t) \times NO_POLS_IFSM(t) \times REN_COM_RATE$$

Avec :

- REN_COM_RATE : taux des commissions défini en entrée du modèle,
- $MT_PM_PP_{Début Période}(t)$: montant de la provision mathématique par police en début de période de l'année t .

$$MT_PM_PP_{Début Période}(t) = MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t)$$

Remarque.

- Les calculs effectués précédemment sont tous au niveau Model Point.
- Les calculs des flux de passif sous la méthode "Flexing" sont effectués dans un modèle déterministe, appelé modèle "Contrat".(voir chapitre 5)
- Dans le modèle déterministe "Contrat", le taux de revalorisation des sorties (décès, rachats totaux, maturité et rachats partiels) est supposé nul.

4.2 Modélisation des interactions Actif/Passif

Dans cette section, nous présenterons la modélisation des interactions Actif/Passif, plus précisément, la stratégie de calcul de la participation aux bénéfices "PB" effectuée par la compagnie.

4.2.1 Stratégie de calcul de la participation aux bénéfices

La revalorisation de l'épargne de l'assuré est effectuée avec le taux servi calculé à partir de la participation aux bénéfices. En effet, le montant de la provision mathématique est augmenté chaque année avec le taux servi déterminé par l'assureur. Cela se traduit par :

$$MT_PM_{Revalorisé}(t) = MT_PM_{Avant revalorisation}(t) \times (1 + Taux Servi(t))$$

La détermination de ce taux s'effectue en plusieurs étapes :

1. Détermination des produits financiers de l'année,
2. Détermination du taux cible,
3. Calcul de la marge financière de l'assureur,
4. Calcul des produits financiers distribuables de l'année,
5. Calcul du taux servi,
6. Calcul du montant de la provision pour participation aux excédents "PPE" par génération.

Détermination des produits financiers de l'année

Afin de calculer le montant de la participation aux bénéficiaires, il est important de déterminer dans un premier temps, les produits financiers de l'année $Prod_{\varphi}(t)$:

$$Prod_{\varphi}(t) = \text{Intérêts}(t) + \text{CashFlows_Actifs_Financiers}(t) + \text{PMVL_Réalisées}(t) - \text{MT_PB_Sorties}(t)$$

Avec :

- $\text{Intérêts}(t)$: les intérêts de l'année t sur la trésorerie et sur les flux sortant (décès, rachats, maturités, commissions, etc),
- $\text{CashFlows_Actifs_Financiers}(t)$: correspondant aux revenus obligataires, dividendes, flux de trésorerie, etc, de l'année t ,
- $\text{PMVL_Réalisées}(t)$: les plus ou moins values latentes réalisées l'année t ,
- $\text{MT_PB_Sorties}(t)$: montant de la participation aux bénéficiaires des sorties de l'année t .

$$\begin{aligned} \text{MT_PB_Sorties}(t) &= \text{MT_PM_SORT_PP}(t) \times \text{Taux_PB_Sortie}(t) \\ &\quad \times (\text{NO_SURRS}(t) + \text{NO_MATS}(t) + \text{NO_DEATHS}(t)) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \text{MT_PM_SORT_PP}(t) &= \text{MT_PM_PP}_{\text{Revalorisé}}(t-1) + \text{MT_PREM_PP}(t) \\ &\quad - \text{MT_PART_SURRE_PP}(t) \end{aligned}$$

Détermination du taux cible

Dans cette étape, la détermination du taux cible n'est pas explicitée pour des raisons de confidentialité. Par ailleurs, la définition retenue permet de déterminer le taux cible par police en fonction du taux de marché "TME" traduisant la concurrence.

Le taux cible dépend notamment du taux cible de l'année précédente, de la variation du taux moyen des emprunts d'État "TME" et du taux minimum garanti "TMG". Dans le modèle ALM, le taux zéro coupon 10 ans est considéré comme le taux de référence "TME".

Étape 1 : Détermination du taux cible en fonction du taux cible de l'année précédente et du "TME"

Dans le modèle ALM, le taux cible est déterminé de la manière suivante :

$$Taux\ Cible^{étape\ 1}(t) = Taux\ Cible(t-1) + x \Delta TME(t)$$

Avec :

— $\Delta TME(t)$: la variation du "TME" de l'année t ,

$$\Delta TME(t) = TME(t) - TME(t-1)$$

— x : pourcentage calculé en fonction du signe de la variation du TME,

$$x = 40\% \mathbb{1}_{\{\Delta TME(t) \leq 0\}} + 85\% \mathbb{1}_{\{\Delta TME(t) > 0\}}$$

Étape 2 : Détermination du taux cible en fonction du "TMG"

Cette étape consiste à appliquer le TMG et à limiter le taux cible pour les polices ayant un TMG fort. Le taux de rémunération cible de certains contrats est forcé au TMG lorsque ce dernier est supérieur à un certain seuil s défini par la compagnie :

Appliquer le TMG :

$$Taux\ Cible^{étape\ 2.1}(t) = \text{Max}(Taux\ Cible^{étape\ 1}(t), \text{TMG})$$

Limiter le taux cible :

$$Taux\ Cible^{étape\ 2}(t) = \text{Min}(Taux\ Cible^{étape\ 2.1}(t), \text{TMG}) \mathbb{1}_{\{\text{TMG} > s\}} + Taux\ Cible^{étape\ 2.1}(t) \mathbb{1}_{\{\text{TMG} \leq s\}}$$

Avec :

— s : seuil au-delà duquel le taux cible est limité au minimum entre le taux cible calculé dans l'étape 2.1 et le TMG,

Cette étape est effectuée afin de limiter le taux cible des contrats ayant un TMG fort. Aujourd'hui, avec la baisse des taux de marché, l'assureur n'est plus capable d'investir dans des titres suffisamment rémunérateurs. Ces TMG forts sont alors une contrainte importante pour les assureurs.

Étape 3 : Calcul du besoin TMG et besoin cible par produit

Cette étape consiste à calculer le montant global pour chaque produit (i.e. regroupement de Model Points) du besoin TMG et du besoin cible.

Besoin TMG :

$$\text{Besoin}_{TMG}^{PRD}(t) = \sum_{i \in PRD} TMG^i \times MT_PM^i_{Avant\ revalorisation}(t)$$

Avec :

- TMG^i : taux minimum garanti net des prélèvements pour frais de gestion pour le Model Point i ,
- $MT_PM_{Avant\ revalorisation}^i(t)$: provision mathématique de l'année t avant revalorisation pour le Model Point i .

$$MT_PM_{Avant\ revalorisation}^i(t) = MT_PM_{Revalorisé}^i(t-1) + MT_PREM^i(t) - MT_TOT_PREST^i(t)$$

- $MT_PM_{Revalorisé}^i(t-1)$: provision mathématique de l'année $t-1$ après revalorisation pour le Model Point i ,
- $MT_PREM^i(t)$: prime nette de l'année t du Model Point i ,
- $MT_TOT_PREST^i(t)$: le montant des sorties (décès, rachats totaux et partiels et maturités) de l'année t calculé précédemment pour le Model Point i .

Besoin Cible :

$$Besoin_{Cible}^{PRD}(t) = \sum_{i \in PRD} Taux\ Cible^{i, \acute{e}tape\ 2}(t) \times MT_PM_{Avant\ revalorisation}^i(t)$$

- $Taux\ Cible^{i, \acute{e}tape\ 2}(t)$: taux cible de l'année t pour le Model Point i calculé dans la deuxième étape.

Calcul de la marge financière de l'assureur

La marge financière de l'assureur est la somme de la marge sur encours et de la marge liée aux produits financiers :

$$Marge_{\varphi}(t) = Marge_{Produits_Financiers}(t) + Marge_{Encours}(t)$$

Avec :

- $Marge_{Produits_Financiers}(t)$: la marge liée aux produits financiers de l'année t ,

$$Marge_{Produits_Financiers}(t) = \frac{Prod_{\varphi, nets}(t) \times (1 - \tau_{\varphi}(t))}{MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t)}$$

- $\tau_{\varphi}(t)$: taux de distribution des produits financiers de l'année t ,
- $Prod_{\varphi, nette}(t)$: le montant des produits financiers nets de l'année t , c'est-à-dire produits financiers hors frais financiers d'investissement.

$$Prod_{\varphi, nets}(t) = Prod_{\varphi}(t) - Frais_{\varphi}(t)$$

- $Marge_{Encours}(t)$: la marge sur encours de l'année t .

$$Marge_{Encours}(t) = \tau_{Encours} \times MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t)$$

- $\tau_{Encours}$: taux des chargements sur encours.

Calcul des produits financiers distribuables de l'année

Les produits financiers distribuables sont égaux aux produits financiers après déduction des frais financiers et de la marge de l'assureur :

$$Prod_{\varphi, Distribuables}^1(t) = Prod_{\varphi, nets}(t) - Marge_{\varphi}(t)$$

Calcul du taux servi

Le taux servi de chaque produit est obtenu en rapportant les produits financiers distribuables et les PM au niveau produit :

$$Taux\ Servi(t) = \frac{Prod_{\varphi, Distribuables}^1(t)}{MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t)}$$

Le montant de la participation aux bénéfiques à servir n'est alors que le montant de PM revalorisé au taux servi, ce qui correspond au montant des produits financiers distribuables :

$$PB_Servie(t) = Taux\ Servi(t) \times MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t) = Prod_{\varphi, Distribuables}^1(t)$$

Une fois les produits financiers distribuables servis, on calcule le nouveau montant du besoin TMG et du besoin cible, qui correspond en date t à :

$$Besoin_{TMG}^{PRD, 1}(t) = Max(Besoin_{TMG}^{PRD}(t) - PB_Servie(t), 0)$$

Et

$$Besoin_{Cible}^{PRD, 1}(t) = Max(Besoin_{Cible}^{PRD}(t) - PB_Servie(t), 0)$$

Avec :

— $Besoin_{TMG}^{PRD}(t)$ et $Besoin_{Cible}^{PRD}(t)$: le besoin TMG et le besoin cible calculé précédemment.

Remarque. Le montant de la PM avant revalorisation correspond à la somme des montants de la PM avant revalorisation pour les Model Points $i \in PRD$, i.e :

$$MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t) = \sum_{i \in PRD} MT_PM_{Avant\ revalorisation}^i(t)$$

Dans le cas où le montant des produits financiers distribuables ne suffit pas à servir le besoin TMG, l'assureur est amené à dégager plus de produits financiers afin d'atteindre le besoin TMG. Le graphe suivant permet de montrer les différentes règles abordées pour déterminer le montant de la participation aux bénéfiques à servir " PB_Servie " :

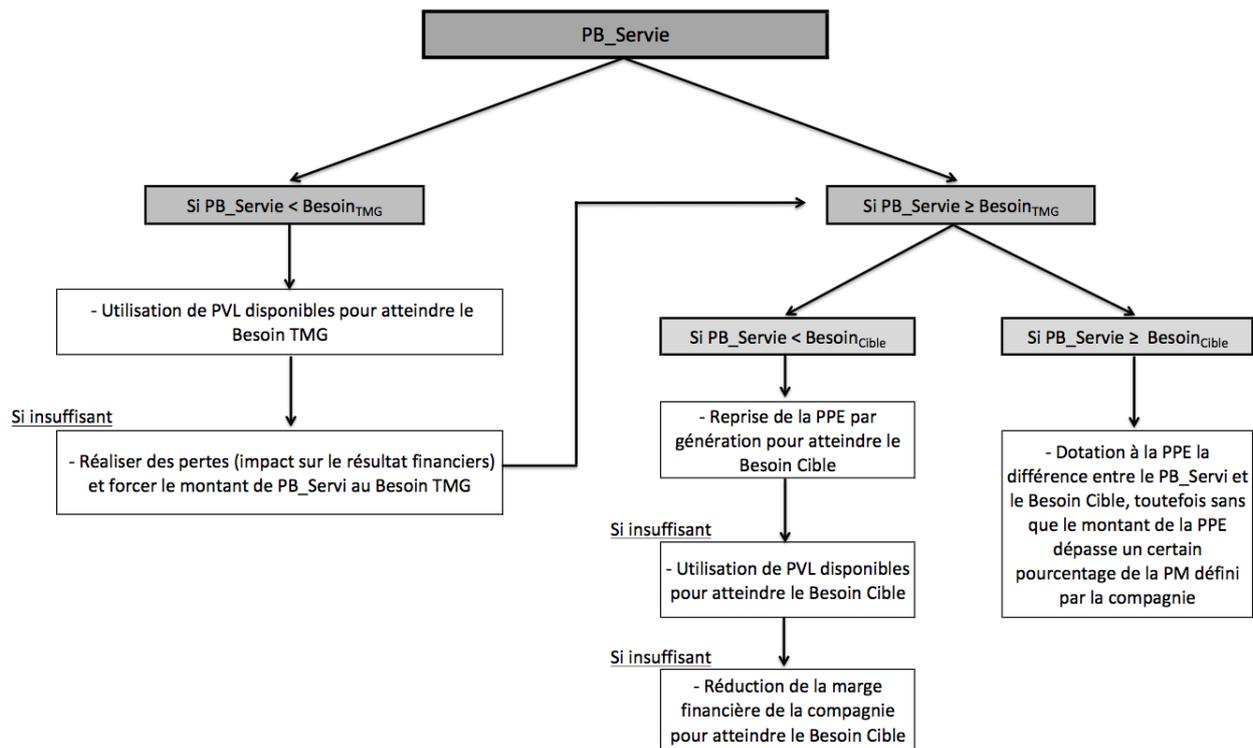


FIGURE 4.2 – Représentation schématique des étapes de calcul du montant de la participation aux bénéfices à servir

1^{er} Cas : $PB_Servie < Besoin_{TMG}$

Utilisation des PVL disponibles pour atteindre le Besoin TMG

Dans le cas où la production financière de l'année ne suffit pas pour servir le besoin TMG, l'assureur peut utiliser la réalisation de plus-values latentes disponibles à la vente pour atteindre le besoin TMG :

$$PVL_{Réalisées}^1(t) = \text{Min} \left(\text{Max}(\text{Besoin}_{TMG}^{PRD, 1}(t), \text{Min_PVL}(t)) ; \text{Max_PVL}(t) ; PVL_{Disponible}(t) \right)$$

Avec :

- $\text{Min_PVL}(t)$ et $\text{Max_PVL}(t)$: le montant minimum, respectivement maximum des PVL, à distribuer l'année t . En effet, lors de l'utilisation des PVL pour atteindre le besoin TMG ou besoin cible, le montant des PVL à distribuer est borné par deux montants $\text{Min_PVL}(t)$ et $\text{Max_PVL}(t)$,
- $PVL_{Disponible}(t)$: le montant des PVL disponibles à distribuer l'année t .

Le montant restant pour atteindre tous les TMG du produit est diminué du montant de ces PVL réalisées :

$$\text{Besoin}_{TMG}^{PRD, 2}(t) = \text{Max}(\text{Besoin}_{TMG}^{PRD, 1}(t) - PVL_{Réalisées}^1(t), 0)$$

La participation aux bénéfices est recalculée en prenant en compte la réalisation de PVL supplémentaires :

$$\begin{aligned}
 PB_Servie^1(t) &= Prod_{\varphi, Distribuable}^2(t) \\
 &= Prod_{\varphi, Distribuable}^1(t) + PVL_{Réalisées}^1(t) \\
 &= PB_Servie(t) + PVL_{Réalisées}^1(t)
 \end{aligned}$$

Une fois le besoin TMG mis à jour, on vérifie si ce dernier est toujours positif ou non. Dans le cas où le besoin TMG est toujours positif, i.e tous les TMG du produit ne sont toujours pas atteints, le financement de cette opération se retrouve intégralement en perte (impact sur les résultats financiers) et le montant de la participation aux bénéfices est alors forcé au besoin TMG qui reste :

$$PB_Servie^2(t) = PB_Servie^1(t) + Besoin_{TMG}^{PRD, 2}(t)$$

À la fin de cette étape, les taux servis sont au minimum au niveau des TMG, le montant manquant pour atteindre les TMG est donc nul et le montant manquant pour atteindre les taux cibles est mis à jour :

$$Besoin_{TMG}^{PRD, 3}(t) = 0$$

Et

$$\begin{aligned}
 Besoin_{Cible}^{PRD, 2}(t) &= Max(Besoin_{Cible}^{PRD, 1}(t) - PVL_{Réalisées}^1(t) - Besoin_{TMG}^{PRD, 2}(t), 0) \\
 &= Max(Besoin_{Cible}^{PRD}(t) - PB_Servie^2(t), 0)
 \end{aligned}$$

Maintenant que le montant global du besoin TMG est atteint, la prochaine étape consiste à atteindre le besoin cible.

2^{ème} Cas : $Besoin_{TMG} \leq PB_Servie < Besoin_{Cible}$

Reprise de la PPE par génération pour atteindre le Besoin Cible

La réglementation impose actuellement une distribution des montants dotés en PPE dans les 8 exercices suivants cette dotation, le modèle est amené à gérer 9 générations à chaque date d'arrêté :

- La première génération $PPE^1(t)$ correspond au montant de PPE qui va être doté à la période actuelle t , et devra être distribué entre $t + 1$ et $t + 8$,
- La deuxième génération $PPE^2(t)$ correspond au montant de PPE doté en $t - 1$, et devra être distribué entre t et $t + 7$,
- ... ,

- La neuvième génération $PPE^9(t)$ correspond au montant résiduel de PPE doté en $t - 8$, et qui doit être intégralement distribué à la période actuelle t .

Remarque. En fin de période, le montant de la neuvième génération $PPE^9(t)$ doit donc impérativement être nul et les autres générations de PPE issues de l'année t vieilles d'un an :

- En $t + 1$, la huitième génération $PPE^8(t)$ en fin de période sera vieillie d'un an et donc correspondra à la neuvième génération $PPE^9(t + 1)$ en début de période de $t + 1$, i.e :

$$PPE_{Début\ période}^i(t + 1) = PPE_{Fin\ période}^{i-1}(t), \quad \text{pour } i = 2, \dots, 9.$$

Dans le cas où la production financière est insuffisante pour servir l'intégralité des taux cibles, i.e. $Besoin_{Cible}(t) > 0$, une reprise de PPE au niveau produit peut être réalisée avec pour contrainte l'utilisation des générations de PPE les plus anciennes « First in First out », tout en appliquant une limite sur cette reprise correspondant à $1/3$ du stock de PPE de début d'année :

$$\begin{aligned} Reprise_{PPE}^k(t) = \text{Min} \left(\text{Besoin}_{Cible}^{PRD, 2}(t) - \sum_{j=k+1}^9 Reprise_{PPE}^j(t), PPE_{Début\ période}^k(t), \right. \\ \left. \frac{1}{3} PPE_{Début\ période}(t) - \sum_{j=k+1}^9 Reprise_{PPE}^j(t) \right), \quad \text{pour } k = 9, \dots, 2. \end{aligned}$$

Avec :

- $Reprise_{PPE}^k(t)$: montant de la reprise PPE correspondant à la k ème génération de l'année t ,
- $PPE_{Début\ période}^k(t)$: montant de la PPE de la k ème génération en début de période de l'année t ,
- $PPE_{Début\ période}(t)$: montant total de la PPE en début de période de l'année t , qui correspond à la somme du montant de la PPE en début de période de la deuxième génération jusqu'à la neuvième.

Remarque. La limite de $1/3$ sur la reprise du stock de PPE est effectuée afin de ne pas épuiser tout le stock de la PPE et de se retrouver avec des écarts trop importants des taux servis.

Donc le montant total de la reprise PPE pour l'année t :

$$Reprise_{PPE}(t) = \sum_{k=2}^9 Reprise_{PPE}^k(t)$$

Enfin, le besoin pour atteindre le taux cible et le montant de la participation aux bénéfices sont mis à jour de ce montant de reprise. On obtient alors :

$$Besoin_{Cible}^{PRD, 3}(t) = Besoin_{Cible}^{PRD, 2}(t) - Reprise_{PPE}(t)$$

Et

$$PB_Servie^3(t) = PB_Servie^2(t) + Reprise_{PPE}(t)$$

Utilisation des PVL disponibles pour atteindre le Besoin Cible

Si malgré la reprise PPE, le besoin cible n'est toujours pas atteint, on peut utiliser les PVL disponibles à la vente, tout en prenant en compte les PVL déjà utilisées précédemment pour atteindre le besoin TMG :

$$PVL_{Réalisées}^2(t) = Min \left(Max(Besoin_{Cible}^{PRD,3}(t), Min_PVL(t) - PVL_{Réalisées}^1(t)), Max_PVL(t) - PVL_{Réalisées}^1(t), PVL_{Disponible}(t) - PVL_{Réalisées}^1(t) \right)$$

Une fois que le montant des PVL réalisées est calculé, on remet à jour le besoin cible et le montant de la participation aux bénéfices :

$$Besoin_{Cible}^{PRD,4}(t) = Besoin_{Cible}^{PRD,3}(t) - PVL_{Réalisées}^2(t)$$

Et

$$PB_Servie^4(t) = PB_Servie^3(t) + PVL_{Réalisées}^2(t)$$

Réduction de la marge financière de la compagnie pour atteindre le Besoin Cible

Dans le cas où le besoin cible n'est toujours pas atteint, un dernier levier peut être utilisé pour atteindre le besoin cible. Ce levier est la réduction de la marge financière :

$$Réduction_{Marge}(t) = Min(Besoin_{Cible}^{PRD,4}(t), Marge_{\varphi}(t) - Min_Marge_{\varphi}(t))$$

Avec :

— $Min_Marge_{\varphi}(t)$: Le montant minimal de la marge financière que l'assureur doit conserver.

On remet à jour le besoin cible et le montant de la participation aux bénéfices :

$$Besoin_{Cible}^{PRD,5}(t) = Besoin_{Cible}^{PRD,4}(t) - Réduction_{Marge}(t)$$

Et

$$PB_Servie^5(t) = PB_Servie^4(t) + Réduction_{Marge}(t)$$

Conclusion

Après l'utilisation des différents leviers (reprise PPE, PVL, réduction de la marge) pour atteindre le besoin cible, si le montant du besoin cible est toujours positif, on distribue alors le montant de la participation aux bénéfices généré par les différents leviers.

3^{ème} Cas : $PB_Servie \geq Besoin_{Cible}$

Dans ce dernier cas, on a le montant de participation aux bénéfices qui est supérieur au besoin cible. Donc tous les taux cibles du produit sont déjà atteints. Par conséquent, l'assureur a la possibilité, soit de servir entièrement le montant de la participation aux bénéfices, soit de distribuer une partie et de doter l'autre partie dans la PPE.

Afin de lisser les rendements des contrats et d'offrir une rémunération stable ou de pallier les résultats d'une année difficile, l'assureur préfère distribuer une partie et doter l'autre partie dans la PPE. La dotation de PPE peut arriver, soit en utilisant les leviers pour atteindre les taux cibles et dans ce cas on peut être amené à dépasser les taux cibles, soit lors de la distribution de la production financière et dans ce cas le montant des produits financiers est supérieur au besoin cible.

Le montant de dotation de PPE est calculé comme la différence entre le montant de la participation aux bénéfices et le besoin cible global :

$$Dotation_{PPE}(t) = PB_Servie^5(t) - Besoin_{Cible}^{PRD}(t)$$

Et le montant de participation aux bénéfices à servir est limité alors au besoin cible global :

$$PB_Servie^6(t) = Min(PB_Servie^5(t), Besoin_{Cible}^{PRD}(t))$$

Le montant de la $Dotation_{PPE}(t)$ alimente la première génération de la PPE : $PPE^1(t)$ tout en respectant une contrainte sur le montant maximal de PPE au regard des PM. En effet, le montant maximal de la PPE est fixé en fonction d'un pourcentage du montant des provisions mathématiques.

Cette contrainte est fixée par l'entreprise afin de limiter le montant de la PPE pour qu'il ne devienne pas trop important au regard du montant de la PM. Dans le cas où le montant de la PPE dépasse cette limite, une reprise supplémentaire est réalisée. Ce surplus est égal à :

$$\begin{aligned} Surplus_{PPE}(t) = & Max(PPE_{Début\ période}(t) + Dotation_{PPE}(t) - Reprise_{PPE}(t) \\ & - PPE_Max \times MT_PM_{Avant\ Revalorisation}(t), 0) \end{aligned}$$

Avec :

— PPE_Max : le pourcentage du montant des provisions mathématiques à ne pas dépasser.

Donc le montant final de la PPE en fin de période est égal à :

$$PPE_{Fin\ période}(t) = PPE_{Début\ période}(t) + Dotation_{PPE}(t) - Reprise_{PPE}(t) - Surplus_{PPE}(t)$$

Si le montant du surplus est positif, on remet alors à jour le montant de la participation aux bénéfiques en ajoutant les surplus :

$$PB_Servie^7(t) = PB_Servie^6(t) + Surplus_{PPE}(t)$$

Distribution de la dernière génération de PPE

Avant de distribuer la participation aux bénéfiques, il faut vérifier une dernière contrainte qui est le montant de la neuvième génération de PPE. En effet, en fin de période, le montant de $PPE_{Fin\ période}^9(t)$ doit impérativement être nul.

Si à ce stade la dernière génération de PPE est non nulle, i.e. $PPE_{Fin\ période}^9(t) > 0$ cela signifie, soit qu'aucune reprise n'est faite et que le montant des produits financiers de l'année distribuables est suffisant pour atteindre le besoin cible, soit que le besoin cible est atteint lors de la reprise PPE de la neuvième génération.

On affecte le solde de la dernière génération de PPE au montant de la participation aux bénéfiques :

$$Solde_{PPE}(t) = PPE_{Fin\ période}^9(t) = PPE_{Début\ période}^9(t) - Reprise_{PPE}^9(t)$$

Donc le montant de la neuvième génération de la PPE et de la participation aux bénéfiques sont mis à jour et valent :

$$PPE_{Fin\ période}^9(t) = 0$$

Et

$$PB_Servie^8(t) = PB_Servie^7(t) + Solde_{PPE}(t)$$

4.2.2 Valorisation du portefeuille après stratégie de PB

Après la réalisation de la stratégie de PB, la provision mathématique de chaque Model Point est mise à jour avec le montant de la participation aux bénéfiques :

$$MT_PM_{Revalorisé}^i(t) = MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^i(t) \times (1 + Taux\ Servi(t)) \quad \text{pour } i \in PRD$$

Avec :

$$Taux\ Servi(t) = \frac{PB_Servie^8(t)}{MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^{PRD}(t)}$$

Et

$$MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^{PRD}(t) = \sum_{i \in PRD} PM_{Avant\ Revalorisation}^i(t)$$

Remarque.

- Les calculs effectués précédemment sont tous au niveau produit, donc le montant de la participation aux bénéfices servie PB_Servie est aussi au niveau produit. Or la revalorisation de PM s'effectue au niveau Model Point, donc il faut répartir le montant de la participation aux bénéfices servie au niveau Model Point. La répartition de PB_Servie s'effectue au prorata de la PM avant revalorisation niveau produit auquel les Model Points appartiennent.
- Le TMG utilisé dans la stratégie de calcul de la participation aux bénéfices correspond au taux minimum garanti net des prélèvements pour frais de gestion.

Troisième partie

Méthodes de modélisation des flux de passif "Flexing" et "Internal"

Chapitre 5

Modélisation des flux de passif en "Flexing"

5.1 Présentation de la méthode

Dans ce chapitre nous allons présenter la méthode "Flexing" actuellement utilisée par la compagnie pour la modélisation des flux de passif.

5.1.1 Principe général

La méthode "Flexing" est une méthode de modélisation des flux de passif du modèle ALM, qui consiste dans un premier temps, à projeter les cash-flows futurs du stock de contrat en cours à la date d'évaluation selon un scénario financier déterministe. La projection des cash-flows est effectuée ligne à ligne (Model Points de passif) dans un modèle de projection de passif, appelé modèle "Contrat". Les différents Model Points sont regroupés au niveau produit selon différents critères (TMG, taux de chargement, type de contrat, ...). Puis ensuite, dans un deuxième temps, à alimenter le modèle ALM par l'intermédiaire d'une table de Cash-Flows, appelé "DET_CF" (Déterministe Cash-Flows) et une deuxième table de contrôle qui contient toutes les caractéristiques des produits utilisés. Ces deux tables sont obtenues par le modèle "Contrat".

Les flux de passif générés par le modèle déterministe "Contrat" seront ensuite *Flexés* (modifiés ou ajustés) dans le modèle ALM. Ces modifications des flux de passif permettent de prendre en compte les scénarios économiques et les actions des assurés et du management. L'ajustement des flux déterministes permet ainsi de rajouter la participation aux bénéfices et les rachats dynamiques au montant de la provision mathématique déterministe.

En effet, la projection des cash-flows dans le modèle "Contrat" est effectuée sans prendre en compte le taux de participation aux bénéfices, l'inflation, taux de rendement et les rachats dynamiques.

Une fois les cash-flows de passif *flexés* (ajustés), le modèle ALM procède aux interactions qui existent entre l'actif et le passif. Ces interactions sont modélisées selon des scénarios Monte-Carlo de type risque neutre ou historique.

Le graphe suivant montre le principe de modélisation Actif/Passif sous la méthode "Flexing" :

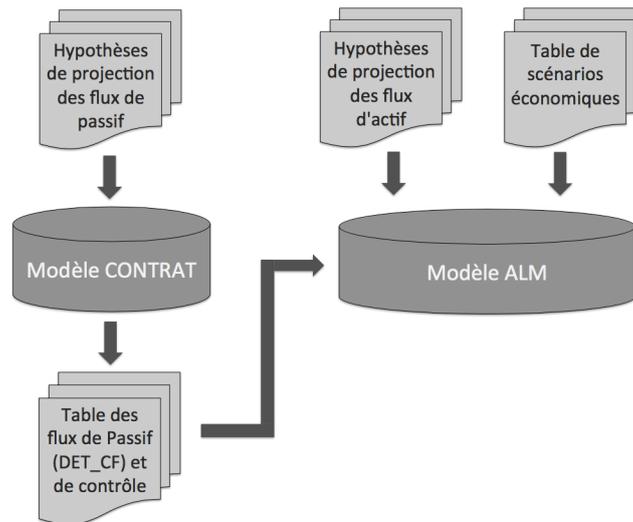


FIGURE 5.1 – Représentation graphique du principe de modélisation Actif/Passif sous la méthode "Flexing"

5.1.2 Modèle de passif "Contrat"

Le modèle de passif "Contrat" permet de modéliser un contrat multisupport, a fortiori un contrat monosupport et d'autres produits de la compagnie. Ce modèle repose sur la librairie standard SUNGARD « Unit-Linked » avec des développements spécifiques pour la modélisation des produits de la compagnie sous l'outil PROPHET.

Le modèle "Contrat" projette ligne à ligne les flux de passif selon un scénario financier déterministe (la projection ligne à ligne est fondée sur des Model Points avec une granularité fine). Les cash-flows créés par le modèle sont au niveau produit, une maille moins fine que les Model Points (le regroupement au niveau produit est défini dans les Model Points de passif).

Après projection des cash-flows de passif par le modèle "Contrat", ce dernier génère deux tables :

— Une table des cash-flows "DET_CF", qui comporte pour chaque année de projection :

- Le nombre de polices en fin de période,
- La provision mathématique sans taux de PB,
- Le montant des primes brutes reçues,
- Le montant des primes nettes,
- Le montant des prestations décès,
- Le montant des maturités (Contrats arrivés à terme),
- Le montant des rachats structurels,
- Le montant des arrérages,

- Le montant des rachats partiels,
 - Les frais de gestion,
 - Les commissions sur encours, sur primes,
 - Les frais d'acquisition,
- Une table de contrôle qui contient les paramètres liés à chaque produit (TMG, type de contrat, taux de chargement, taux de prélèvement sociaux, etc).

Remarque.

- Les cash-flows et les paramètres que contient, respectivement la table "DET_CF" et la table de contrôle, sont obtenus au niveau produit.

- La gestion dynamique et stochastique des rachats dynamiques et de la participation aux bénéficiaires est réalisée dans le modèle ALM.

- Le modèle "Contrat" peut générer plusieurs tables "DET_CF" selon l'étude effectuée. Par exemple, pour le calcul du SCR, le modèle produit une table "DET_CF" pour les différents chocs au niveau du passif (chocs décès, chocs rachats, etc).

5.2 Méthode "Flexing"

5.2.1 Principe du "Flexing"

Le modèle stochastique ALM prend en entrée des flux de passif déterministes générés par le modèle "Contrat" par l'intermédiaire de la table "DET_CF". Ces flux déterministes servent de base pour calculer les flux de passif stochastiques.

Le calcul des flux de passif stochastiques se fait en *flexant* (ajustant) les flux déterministes. Le *flexing* ou l'ajustement est effectué en multipliant les flux déterministes par un ratio de flexing construit par récurrence dans le modèle ALM :

Le ratio de flexing ρ_{Flex} est calculé de façon générale en t de la manière suivante :

$$\rho_{Flex}(t) = \frac{PM_{ALM}(t)}{PM_{Passif}(t)}$$

Avec :

- L'indice *Passif* désigne la PM provenant du modèle de passif "Contrat" et l'indice *ALM* la PM fictive calculée dans le modèle stochastique ALM, cette PM est utilisée afin de refléter la PM calculée dans le modèle "Contrat" qui aurait été obtenue si on lui avait rajoutée les produits financiers distribués.

Remarque. Dans la méthode "Flexing", un autre ratio (ratio sur le nombre de polices) est calculé afin de capter l'effet des rachats dynamiques. En effet, le taux de rachat dans le portefeuille dépend lui aussi du rendement de l'actif via les rachats dynamiques (ou conjoncturels). Pour simplifier la mise en œuvre de la nouvelle méthode "Internal" et sa comparaison avec la méthode "Flexing", ce ratio n'est pas pris en compte dans le cadre de notre étude.

5.2.2 Algorithme de calcul du ratio de flexing

Pour la modélisation des contrats épargne en euros, l'algorithme de calcul du ratio de flexing développé par la compagnie est à pas annuel.

L'objectif de l'algorithme est de calculer pour chaque simulation et à chaque pas de temps les ratios de flexing utilisés pour l'ajustement des flux de passif déterministes afin de refléter les hypothèses stochastiques et de calculer les flux de passif stochastiques.

Trois ratios de flexing sont calculés, à savoir :

- Le ratio utilisé pour déterminer les prestations liées aux rachats totaux, aux décès, aux arrivées à échéance, prestations capitalisées au taux de PB de sortie, ρ_{Flex}^{PB} ,
- Le ratio utilisé pour déterminer les prestations liées aux rachats partiels, prestations capitalisées au TMG uniquement, ρ_{Flex}^{TMG} ,
- Le ratio utilisé pour calculer les prestations liées au calcul de la PM avant revalorisation, assiette utilisée lors de la stratégie de calcul de taux servi, prestations non capitalisées, ρ_{Flex}^{NC} .

La valorisation des sorties totales est différente de la valorisation des sorties partielles. Les sorties totales sont revalorisées au taux de PB de sortie alors que les sorties partielles sont revalorisées au TMG.

Algorithme de calcul des ratios de flexing ρ_{Flex}^{PB} , ρ_{Flex}^{TMG} et ρ_{Flex}^{NC} :

Par définition de la PM, on a :

$$MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t) = MT_PM_PP_{Avant\ revalorisation}(t) \times NO_POLS_IF(t)$$

Avec :

$$MT_PM_PP_{Avant\ revalorisation}(t) = MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \\ - MT_PART_SURRE_PP(t)$$

En développant la formule ci-dessus, on obtient alors une récurrence sur la PM :

$$MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t) = MT_PM_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM(t) - MT_PART_SURRE(t) \\ - MT_DEATHS(t) - MT_SURRE(t) - MT_MAT(t)$$

Si un mécanisme de versement de PB existe, une capitalisation des flux a lieu au taux τ :

$$MT_PM_{Revalorisé}(t) = MT_PM_{Avant\ revalorisation}(t) \times (1 + \tau_t)$$

Dans le modèle "Contrat", les PM issues intègrent un taux τ considéré comme nul.

Soient $(t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_n)$ les différents pas de temps. Dans notre cas, le pas de temps est annuel ($t_{i+1} - t_i = 1$ an).

Le ratio de flexing est construit par récurrence :

Au temps t_0 :

On a :

$$\text{MT_PM}_{Revalorisé}^{ALM}(t_0) = \text{MT_PM}_{Avant revalorisation}^{ALM}(t_0) = \text{MT_PM}^{Passif}(t_0)$$

Donc :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_0) = \rho_{Flex}^{TMG}(t_0) = \rho_{Flex}^{NC}(t_0) = 1$$

Par définition, aucune allocation de PB sur la PM à t_0 n'est faite. Les cash-flows sont nuls à t_0 .

Au temps $t_1 = 1$ an :

Au point de départ en t_1 , on a :

$$\text{MT_PM}_{Avant revalorisation Et Avant prestations}^{ALM}(t_1) = \text{MT_PM}_{Revalorisé}^{ALM}(t_0)$$

On ajoute les primes et les flux de prestations :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{Avant revalorisation Et Après prestations}^{ALM}(t_1) &= \text{MT_PM}_{Avant revalorisation Et Avant prestations}^{ALM}(t_1) \\ &\quad + \text{MT_PREM}(t_1) - \text{MT_TOT_PREST}^{ALM}(t_1) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \text{MT_TOT_PREST}^{ALM}(t_1) &= \text{MT_PART_SURR}^{ALM}(t_1) + \text{MT_DEATHS}^{ALM}(t_1) \\ &\quad + \text{MT_SURR}^{ALM}(t_1) + \text{MT_MAT}^{ALM}(t_1) \end{aligned}$$

Où :

- $\text{MT_DEATHS}^{ALM}(t_1)$: le montant des décès calculé dans le modèle ALM en t_1 à partir du montant des décès obtenu par le modèle de passif "Contrat" multiplié par le ratio $\rho_{Flex}^{PB}(t_1)$, (de même pour $\text{MT_SURR}^{ALM}(t_1)$ et $\text{MT_MAT}^{ALM}(t_1)$),
- $\text{MT_PART_SURR}^{ALM}(t_1)$: le montant des rachats partiels calculé dans le modèle ALM en t_1 à partir du montant des rachats partiels obtenu par le modèle de passif "Contrat" multiplié par le ratio $\rho_{Flex}^{TMG}(t_1)$,

Une fois le montant de la PM avant revalorisation calculé, on ajoute le montant de la participation aux bénéficiaires à servir. On obtient alors :

$$MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t_1) = MT_PM_{Avant revalorisation Et Après prestations}^{ALM}(t_1) \times (1 + Taux\ Servi(t_1))$$

On définit les cash-flows des sorties stochastiques : décès, rachat total et maturité, de la période avec PB de sortie comme : $MT_DEATHS_{Après PB_Sortie}^{ALM}$, $MT_SURR_{Après PB_Sortie}^{ALM}$ et $MT_MAT_{Après PB_Sortie}^{ALM}$. La relation entre la version passif et la version ALM des cash-flows est définie par le ratio de flexing :

$$MT_DEATHS_{Après PB_Sortie}^{ALM}(t_1) = \rho_{Flex}^{PB}(t_1) \times MT_DEATHS^{Passif}(t_1)$$

Ainsi, on obtient :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_1) = \frac{MT_DEATHS_{Après PB_Sortie}^{ALM}(t_1)}{MT_DEATHS^{Passif}(t_1)}$$

En développant la formule ci-dessus, le ratio de flexing est alors obtenu en divisant la PM après PB de sortie calculée dans le modèle ALM par la PM provenant du modèle de passif :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_1) = \frac{MT_PM_{Après PB_Sortie}^{ALM}(t_1)}{MT_PM^{Passif}(t_1)}$$

(Démonstration voir annexe A)

En écrivant la formule avec tous les éléments, on obtient :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_1) = \frac{1}{MT_PM^{Passif}(t_1)} \times \left(MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t_0) + MT_PREM(t_1) - MT_PART_SURR^{ALM}(t_1) - MT_SORT_TOT^{ALM}(t_1) \right) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t_1))^{\frac{1}{2}}$$

À partir de la formule ci-dessus, on remarque que le ratio de flexing $\rho_{Flex}^{PB}(t_1)$ dépend des sorties totales et partielles stochastiques qu'on souhaite déterminer avec le même ratio de flexing.

Ainsi, pour résoudre cette équation d'inconnu $\rho_{Flex}^{PB}(t_1)$, on a approximé les sorties totales et partielles stochastiques utilisées dans la formule de calcul du ratio de flexing par :

$$MT_SORT_TOT^{ALM}(t_1) \simeq \rho_{Flex}^{PB}(t_0) \times MT_SORT_TOT^{Passif}(t_1)$$

Et

$$MT_PART_SURR^{ALM}(t_1) \simeq \rho_{Flex}^{TMG}(t_0) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t_1)$$

Où

$$MT_SORT_TOT^{Passif}(t_1) = MT_DEATHS^{Passif}(t_1) + MT_SURR^{Passif}(t_1) + MT_MAT^{Passif}(t_1)$$

Or le ratio de flexing $\rho_{Flex}^{PB}(t_0)$ utilisé pour déterminer les prestations liées aux décès, rachats totaux et les maturités, est connu et égal à 1. De même pour le ratio de flexing $\rho_{Flex}^{TMG}(t_0)$.

Tous les éléments de la formule sont connus. Par conséquent, on obtient :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_1) \simeq \frac{1}{MT_PM^{Passif}(t_1)} \times \left(MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t_0) + MT_PREM(t_1) - MT_PART_SURRE^{Passif}(t_1) - MT_SORT_TOT^{Passif}(t_1) \right) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t_1))^{\frac{1}{2}}$$

Donc

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_1) \simeq (1 + Taux_PB_Sortie(t_1))^{\frac{1}{2}}$$

Pour le ratio de flexing utilisé pour déterminer les prestations liées aux rachats partiels ρ_{Flex}^{TMG} , le principe est le même. Au lieu de revaloriser au taux de PB de sortie, on revalorise au TMG. On obtient :

$$\rho_{Flex}^{TMG}(t_1) \simeq (1 + TMG)^{\frac{1}{2}}$$

Pour le ratio de flexing utilisé pour déterminer les prestations liées au calcul de la PM avant revalorisation ρ_{Flex}^{NC} , le principe est le même. Au lieu de revaloriser au taux de PB de sortie pour les sorties totales et au TMG pour les sorties partielles, on ne revalorise pas. Ainsi, on obtient :

$$\rho_{Flex}^{NC}(t_1) \simeq 1$$

Au temps $t_2 = 2$ ans :

La formule de départ pour le calcul du ratio de flexing ρ_{Flex}^{PB} en date t_2 est donnée par :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t_2) = \frac{MT_PM_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t_2)}{MT_PM^{Passif}(t_2)}$$

D'autre part, on a :

$$MT_PM_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t_2) = \left(MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t_1) + MT_PREM(t_2) - MT_PART_SURRE^{ALM}(t_2) - MT_SORT_TOT^{ALM}(t_2) \right) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t_2))^{\frac{1}{2}}$$

Or

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{Revalorisé}^{ALM}(t_1) &= \text{MT_PM}_{Avant revalorisation}^{ALM}(t_1) \times (1 + \text{Taux Servi}(t_1)) \\ &= \text{MT_PM}^{Passif}(t_1) \times (1 + \text{Taux Servi}(t_1)) \end{aligned}$$

La formule de calcul du ratio de flexing ρ_{Flex}^{PB} en date t_2 devient :

$$\begin{aligned} \rho_{Flex}^{PB}(t_2) &= \frac{\text{MT_PM}^{Passif}(t_1)}{\text{MT_PM}^{Passif}(t_2)} \times (1 + \text{Taux Servi}(t_1)) \times (1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t_2))^{\frac{1}{2}} + \frac{(1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t_2))^{\frac{1}{2}}}{\text{MT_PM}^{Passif}(t_2)} \\ &\quad \times \left(\text{MT_PREM}(t_2) - \text{MT_PART_SURR}^{ALM}(t_2) - \text{MT_SORT_TOT}^{ALM}(t_2) \right) \end{aligned}$$

À partir de la formule ci-dessus, on remarque que le ratio de flexing $\rho_{Flex}^{PB}(t_2)$ dépend des sorties totales et partielles stochastiques qu'on souhaite déterminer avec le même ratio de flexing.

Pour résoudre cette équation d'inconnu $\rho_{Flex}^{PB}(t_2)$, on a approximé les sorties totales et partielles stochastiques utilisées dans la formule de calcul du ratio de flexing par :

$$\text{MT_SORT_TOT}^{ALM}(t_2) \simeq (1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t_2))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t_1) \times \text{MT_SORT_TOT}^{Passif}(t_2)$$

Et

$$\text{MT_PART_SURR}^{ALM}(t_2) \simeq \rho_{Flex}^{TMG}(t_1) \times \text{MT_PART_SURR}^{Passif}(t_2)$$

On obtient alors la formule de calcul du ratio de flexing $\rho_{Flex}^{PB}(t_2)$ en date t_2 :

$$\begin{aligned} \rho_{Flex}^{PB}(t_2) &\simeq \frac{\text{MT_PM}^{Passif}(t_1)}{\text{MT_PM}^{Passif}(t_2)} \times (1 + \text{Taux Servi}(t_1)) \times (1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t_2))^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{(1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t_2))^{\frac{1}{2}}}{\text{MT_PM}^{Passif}(t_2)} \times \left(\text{MT_PREM}(t_2) - \rho_{Flex}^{TMG}(t_1) \times \text{MT_PART_SURR}^{Passif}(t_2) \right. \\ &\quad \left. - (1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t_2))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t_1) \times \text{MT_SORT_TOT}^{Passif}(t_2) \right) \end{aligned}$$

La formule de calcul du ratio de flexing $\rho_{Flex}^{TMG}(t_2)$ en date t_2 :

$$\begin{aligned}\rho_{Flex}^{TMG}(t_2) &\simeq \frac{MT_PM^{Passif}(t_1)}{MT_PM^{Passif}(t_2)} \times (1 + Taux\ Servi(t_1)) \times (1 + TMG)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{(1 + TMG)^{\frac{1}{2}}}{MT_PM^{Passif}(t_2)} \times \left(MT_PREM(t_2) - \rho_{Flex}^{TMG}(t_1) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t_2) \right. \\ &\left. - (1 + Taux_PB_Sortie(t_2))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t_1) \times MT_SORT_TOT^{Passif}(t_2) \right)\end{aligned}$$

La formule de calcul du ratio de flexing $\rho_{Flex}^{NC}(t_2)$ en date t_2 :

$$\begin{aligned}\rho_{Flex}^{NC}(t_2) &\simeq \frac{MT_PM^{Passif}(t_1)}{MT_PM^{Passif}(t_2)} \times (1 + Taux\ Servi(t_1)) \\ &+ \frac{1}{MT_PM^{Passif}(t_2)} \times \left(MT_PREM(t_2) - \rho_{Flex}^{TMG}(t_1) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t_2) \right. \\ &\left. - (1 + Taux_PB_Sortie(t_2))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t_1) \times MT_SORT_TOT^{Passif}(t_2) \right)\end{aligned}$$

Remarque. L'approximation effectuée dans la formule de calcul du ratio de flexing $\rho_{Flex}^{PB}(t_2)$ reste valable dans la formule de calcul du ratio de flexing $\rho_{Flex}^{TMG}(t_2)$ et $\rho_{Flex}^{NC}(t_2)$.

Au temps t_n :

Ainsi par récurrence, on obtient la formule de calcul du ratio de flexing $\rho_{Flex}^{PB}(t_n)$ utilisé pour déterminer les prestations liées aux décès, rachats totaux et les maturités en date t_n , pour $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}\rho_{Flex}^{PB}(t_n) &\simeq \frac{MT_PM^{Passif}(t_1)}{MT_PM^{Passif}(t_n)} \times (1 + Taux_PB_Sortie(t_n))^{\frac{1}{2}} \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_k)) \\ &+ \frac{(1 + Taux_PB_Sortie(t_n))^{\frac{1}{2}}}{MT_PM^{Passif}(t_n)} \times \sum_{k=2}^n Prestations_{Approxim\acute{e}}^{ALM}(t_k) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_j))\end{aligned}$$

Le ratio de flexing $\rho_{Flex}^{TMG}(t_n)$ utilisé pour déterminer les prestations liées aux rachats partiels en date t_n :

$$\begin{aligned} \rho_{Flex}^{TMG}(t_n) &\simeq \frac{MT_PM^{Passif}(t_1)}{MT_PM^{Passif}(t_n)} \times (1 + TMG)^{\frac{1}{2}} \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_k)) \\ &\quad + \frac{(1 + TMG)^{\frac{1}{2}}}{MT_PM^{Passif}(t_n)} \times \sum_{k=2}^n Prestations_{Approximé}^{ALM}(t_k) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_j)) \end{aligned}$$

Le ratio de flexing $\rho_{Flex}^{NC}(t_n)$ utilisé pour déterminer les prestations liées au calcul de la PM avant revalorisation en date t_n :

$$\begin{aligned} \rho_{Flex}^{NC}(t_n) &\simeq \frac{MT_PM^{Passif}(t_1)}{MT_PM^{Passif}(t_n)} \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_k)) \\ &\quad + \frac{1}{MT_PM^{Passif}(t_n)} \times \sum_{k=2}^n Prestations_{Approximé}^{ALM}(t_k) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_j)) \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned} Prestations_{Approximé}^{ALM}(t_k) &= MT_PREM(t_k) - MT_PART_SURR_{Approximé}^{ALM}(t_k) \\ &\quad - MT_SORT_TOT_{Approximé}^{ALM}(t_k) \end{aligned}$$

Où :

$$MT_SORT_TOT_{Approximé}^{ALM}(t_k) := (1 + Taux_PB_Sortie(t_k))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t_{k-1}) \times MT_SORT_TOT^{Passif}(t_k)$$

Et

$$MT_PART_SURR_{Approximé}^{ALM}(t_k) := \rho_{Flex}^{TMG}(t_{k-1}) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t_k)$$

Remarque. Il existe une relation entre les trois ratios de flexing ρ_{Flex}^{PB} , ρ_{Flex}^{TMG} et ρ_{Flex}^{NC} . En effet, on a :

$$\rho_{Flex}^{TMG}(t) = \frac{(1 + TMG)^{\frac{1}{2}}}{(1 + Taux_PB_Sortie(t_n))^{\frac{1}{2}}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t)$$

$$\rho_{Flex}^{PB}(t) = (1 + Taux_PB_Sortie(t_n))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{NC}(t)$$

$$\rho_{Flex}^{TMG}(t) = (1 + TMG)^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{NC}(t)$$

Calcul des flux de prestations stochastiques :

Une fois les trois ratios de flexing ρ_{Flex}^{PB} , ρ_{Flex}^{TMG} et ρ_{Flex}^{NC} sont calculés, les flux de prestations stochastiques sont ainsi obtenus en multipliant les flux de prestations déterministes par le ratio de flexing correspondant. Les sorties totales sont ajustées par le ratio de flexing ρ_{Flex}^{PB} , les sorties partielles par le ratio de flexing ρ_{Flex}^{TMG} et les sorties utilisées pour déterminer la PM avant revalorisation par le ratio de flexing ρ_{Flex}^{NC} .

On calcul deux types des flux de prestations stochastiques :

- Les flux de prestations stochastiques revalorisés au taux de PB de sortie pour les sorties totales et au TMG pour les rachats partiels,

$$MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{PB}(t) \times MT_DEATHS^{Passif}(t)$$

$$MT_SURR_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{PB}(t) \times MT_SURR^{Passif}(t)$$

$$MT_MAT_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{PB}(t) \times MT_MAT^{Passif}(t)$$

Et

$$MT_PART_SURR_{Après\ TMG_Sortie}^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{TMG}(t) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t)$$

- Les flux de prestations stochastiques non revalorisés utilisés pour le calcul de la PM,

$$MT_DEATHS^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{NC}(t) \times MT_DEATHS^{Passif}(t)$$

$$MT_SURR^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{NC}(t) \times MT_SURR^{Passif}(t)$$

$$MT_MAT^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{NC}(t) \times MT_MAT^{Passif}(t)$$

Et

$$MT_PART_SURR^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{NC}(t) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t)$$

Détermination de la PM :

Maintenant que les flux de prestation stochastiques sont déterminés, on peut calculer la PM à utiliser dans l'algorithme de calcul de la participation aux bénéfices, ce qui nous permettra de déterminer la PM revalorisée en fin de période. Donc, pour $t = \{1, \dots, n\}$, on obtient :

$$MT_PM_{Revalorisé}(t) = MT_PM_{Avant\ Revalorisation}(t) \times (1 + Taux\ Servi(t))$$

Avec

$$\begin{aligned} MT_PM_{Avant\ Revalorisation}(t) = & MT_PM_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM(t) - MT_PART_SURR^{ALM}(t) \\ & - MT_DEATHS^{ALM}(t) - MT_SURR^{ALM}(t) - MT_MAT^{ALM}(t) \end{aligned}$$

Le graphe ci-dessous expose les étapes de calcul effectuées dans le modèle ALM pour déterminer les flux de prestations revalorisés et la PM avant revalorisation avec la méthode "Flexing" :

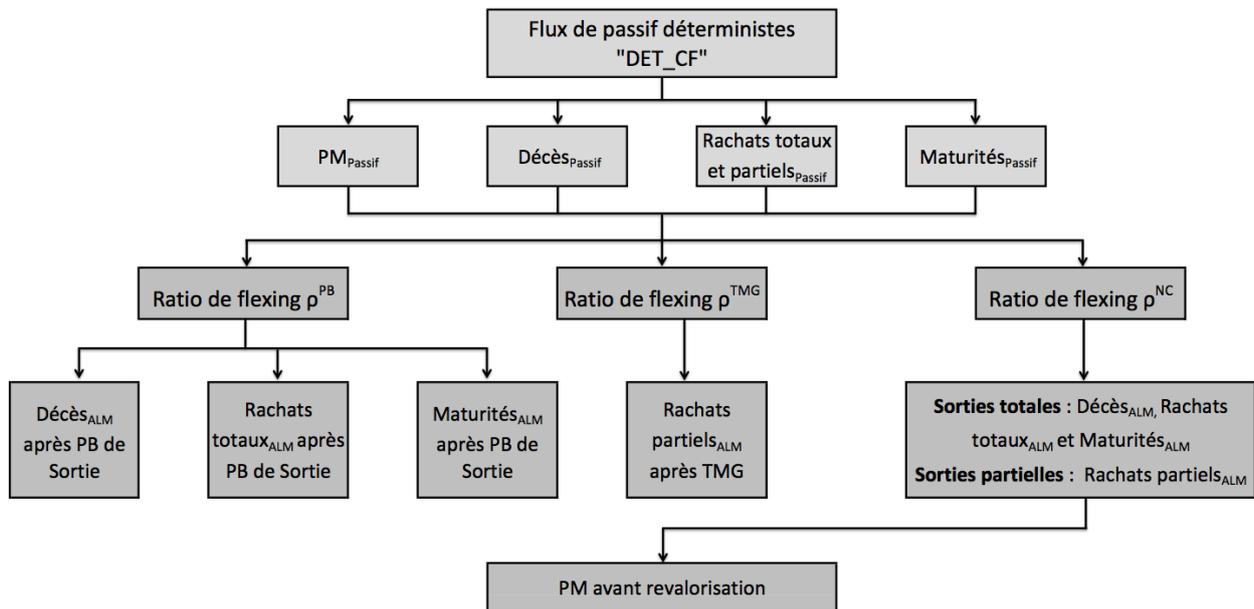


FIGURE 5.2 – Représentation graphique des étapes de calcul des flux de prestations revalorisés et de la PM avant revalorisation avec la méthode "Flexing"

Remarque.

- Les montants des sorties ALM (décès, rachats totaux, maturités et rachats partiels) calculés dans la formule du ratio de flexing sont approximatifs. En effet, grâce à cette approximation, on peut calculer le ratio de flexing qu'on utilisera pour déterminer les flux de prestations stochastiques.
- La PM utilisée dans l'algorithme de flexing et celle utilisée dans l'algorithme de calcul de la participation aux bénéfices sont différentes. En effet, la PM appliquée dans l'algorithme de flexing est une PM fictive, elle est utilisée afin de refléter la PM calculée dans le modèle "Contrat" qui aurait été obtenue si on lui avait rajoutée les produits financiers distribués. La différence entre les deux PM vient du fait que la PM utilisée dans le calcul du ratio de flexing nous sert d'approximation afin de déterminer le ratio de flexing à utiliser pour le calcul des sorties stochastiques. Ces sorties sont ensuite utilisées pour déterminer la PM avant revalorisation.

Chapitre 6

Modélisation des flux de passif en "Internal"

6.1 Présentation de la méthode

6.1.1 Principe général

La méthode "Internal" est une méthode de modélisation de passif du modèle ALM, qui consiste à modéliser les flux de passif (décès, rachats totaux, maturités et rachats partiels) directement dans le modèle ALM. Ainsi, les cash-flows du stock en cours à la date d'évaluation seront projetés dans le modèle ALM selon des scénarios financiers stochastiques.

En effet, en début de période de l'année de projection t , une fois la stratégie financière (Achat/Vente/Réallocation) déterminée et les cash-flows du stock calculés, on détermine la PM avant revalorisation qui sera utilisée dans l'algorithme de calcul de la participation aux bénéfices. Ensuite, on déduit la PM revalorisée en fin de période en ajoutant à la PM avant revalorisation les produits financiers distribués. Ainsi, au passage à l'année de projection $t + 1$, les flux de passif sont calculés à partir de la PM revalorisée en t . Cette PM prend en compte les produits financiers distribués. Par conséquent, l'échange entre le passif et l'actif s'effectue directement dans le modèle ALM, sans passer par la table des cash-flows intermédiaire.

Le graphe suivant montre le principe de modélisation Actif/Passif sous la méthode "Internal" :

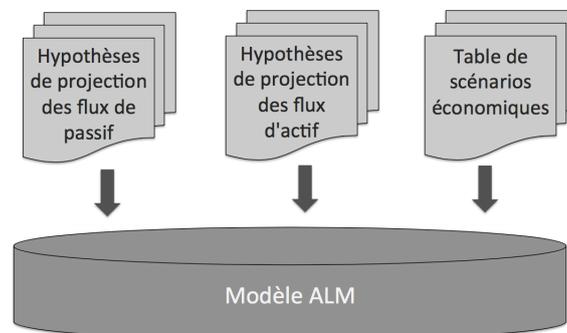
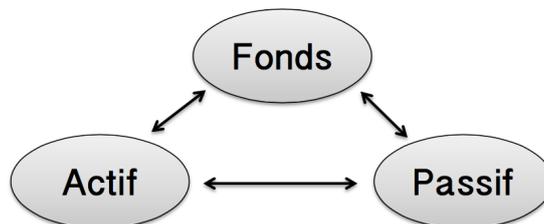


FIGURE 6.1 – Représentation graphique du principe de modélisation Actif/Passif sous la méthode "Internal"

6.1.2 Avantages et inconvénients

Un modèle ALM est mis en place pour modéliser le fonds, l'actif et le passif, y compris leurs interactions.



La méthode de modélisation de passif "Internal" adopte une approche "top-down" pour construire le modèle. Cette méthode se concentre principalement sur le fonds plutôt que sur le passif. Ainsi, la modélisation du passif au sein du modèle ALM comporte des avantages et des inconvénients.

Avantages :

- Pertinence des résultats : les flux de passif sont projetés directement dans le modèle ALM, il s'agit des flux de passif stochastiques. Par conséquent, on n'a pas besoin de passer par un proxy pour valoriser le passif.

Inconvénient :

- Des performances d'exécution moins rapide peuvent être obtenues comparé à la méthode "Flexing". En effet, en "Internal", le calcul des flux de passif dans le modèle ALM est effectué pour chaque Model Point à chaque pas de temps et pour chaque simulation. Ainsi si le nombre des model Points est élevé, cela conduit à des temps d'exécution très élevés.
- La modélisation du passif est moins précise. En effet, en "Internal", le calcul des flux de passif est effectué à un pas de temps annuel, alors qu'en "Flexing" dans le modèle déterministe "Contrat", le calcul des flux de passif est effectué à un pas de temps mensuel.

6.1.3 Principales étapes de la mise en place

La mise en place de la méthode "Internal" est effectuée en trois grandes étapes :

- **Étape 1** : Importation des Model Points liés aux produits d'épargne à étudier, ainsi que des tables nécessaires pour la projection des flux de passif, à savoir :
 - Table de taux des rachats totaux (rachats structurels),
 - Table de taux des rachats partiels,
 - Table de mortalités,

- Table de taux des frais et des commissions,
- Table de taux de pénalités en cas de rachat.

- **Étape 2** : Relier les tables des Model Points du passif et de paramétrage au modèle ALM. La liaison consiste à modifier le programme des variables du modèle ALM de sorte qu'il puisse lire, pour n'importe quelle méthode de projection "Internal" ou "Flexing" choisi, les tables associées. En effet, la mise en place du modèle est effectuée de sorte que les deux méthodes fonctionnent en même temps et que l'utilisateur puisse choisir la méthode de projection à utiliser.
- **Étape 3** : Modélisation des flux de passif que contient la table "DET_CF" dans le modèle ALM et d'une nouvelle stratégie de PB. Puis modification du programme des variables du modèle, de sorte qu'il puisse lire les flux de passif obtenus par la méthode "Internal" ou "Flexing", en fonction de la méthode de projection choisie.

6.2 Méthode "Internal"

En "Internal", comme les flux de passif sont modélisés dans le modèle ALM, l'échange entre l'actif et le passif s'effectue directement dans le modèle ALM sans passer par la table "DET_CF". Par conséquent, tous les flux de passif contenus dans la table "DET_CF" doivent être modélisés dans le modèle ALM.

Pour la modélisation des sorties (décès, rachats totaux, maturités et rachats partiels) la formule de calcul est définie dans le chapitre 4, section 1.

6.2.1 Modélisation de la PM sous "Internal"

En "Internal", comme le calcul des flux de passif est effectué au niveau Model Point, la formule de calcul de la PM avant revalorisation a été développée afin de garder le niveau de calcul Model Point.

La PM avant revalorisation correspond à la PM revalorisée de l'année antérieure plus les primes moins les sorties. Donc :

$$MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^{Internal}(t) = MT_PM_{Revalorisé}^{Internal}(t-1) + MT_PREM(t) - MT_TOT_PREST^{Internal}(t)$$

Avec :

$$MT_TOT_PREST^{Internal}(t) = MT_PART_SURR^{Internal}(t) + MT_DEATHS^{Internal}(t) \\ + MT_SURR^{Internal}(t) + MT_MAT^{Internal}(t)$$

Où

$$MT_PART_SURR^{Internal}(t) = MT_PART_SURR_PP(t) \times NO_POLS_IFSM(t)$$

$$MT_DEATHS^{Internal}(t) = MT_DEATHS_PP(t) \times NO_DEATHS(t)$$

$$MT_SURR^{Internal}(t) = MT_SURR_PP(t) \times NO_SURRS(t)$$

$$MT_MAT^{Internal}(t) = MT_MAT_PP(t) \times NO_MATS(t)$$

Et

$$\begin{aligned} MT_DEATHS_PP(t) &= MT_SURR_PP(t) = MT_MAT_PP(t) \\ &= MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) - MT_PART_SURR_PP(t) \\ &= MT_SORT_TOT_PP(t) \end{aligned}$$

Donc la formule de la PM avant revalorisation devient :

$$\begin{aligned} MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^{Internal}(t) &= MT_PM_{Revalorisé}^{Internal}(t-1) + MT_PREM(t) - MT_PART_SURR_PP(t) \times NO_POLS_IFSM(t) \\ &\quad - MT_SORT_TOT_PP(t) \times (NO_DEATHS(t) + NO_SURRS(t) + NO_MATS(t)) \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} MT_PM_{Revalorisé}^{Internal}(t-1) &= MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) \times NO_POLS_IF(t-1) \\ &= MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) \times NO_POLS_IFSM(t) \end{aligned}$$

$$MT_PREM(t) = MT_PREM_PP(t) \times NO_POLS_IFSM(t)$$

Et

$$NO_POLS_IF(t) = NO_POLS_IFSM(t) - NO_DEATHS(t) - NO_SURRS(t) - NO_MATS(t)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^{Internal}(t) &= \left(MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \right. \\ &\quad \left. - MT_PART_SURR_PP(t) \right) \times NO_POLS_IFSM(t) \\ &\quad - MT_SORT_TOT_PP(t) \times (NO_POLS_IFSM(t) - NO_POLS_IF(t)) \\ &= MT_SORT_TOT_PP(t) \times NO_POLS_IF(t) \end{aligned}$$

Par conséquent, la formule de la PM avant revalorisation s'écrit :

$$\text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t) = \left(\text{MT_PM_PP}_{\text{Revalorisé}}(t-1) + \text{MT_PREM_PP}(t) - \text{MT_PART_SURRE_PP}(t) \right) \times \text{NO_POLY_IF}(t)$$

Dans cette méthode, les cash-flows de passif sont calculés dans le modèle ALM au niveau Model Point ensuite regroupés au niveau produit afin de pouvoir appliquer la stratégie de calcul de la participation aux bénéficiaires. Cette dernière nous permet de déterminer le taux servi qu'on applique à la PM avant revalorisation.

Remarque.

Lors de l'étude de l'exactitude des cash-flows de passif obtenus avec la méthode "Internal", nous avons effectué un premier test qui consiste à projeter les flux de passif en déterministes dans le modèle ALM sous la méthode "Internal" et de les comparer avec les flux de passif déterministes obtenus avec le modèle "Contrat".

La projection des flux de passif en déterministes sous la méthode "Internal" consiste à ne pas revaloriser la PM au taux servi, les sorties totales au taux de PB de sortie et les rachats partiels au TMG comme s'est effectué dans le modèle "Contrat". À l'issue de ces projections, nous avons constaté des écarts entre les flux de passif déterministes obtenus avec les deux modèles. Ces écarts proviennent principalement du pas de temps effectué lors de la projection des flux de passif. En effet, dans le modèle "Contrat", les flux de passif sont projetés en pas de temps mensuel alors que dans le modèle ALM, les flux de passif sont projetés en pas de temps annuel.

Comme dans notre étude on s'intéresse à la validation de la méthode "Flexing", nous avons alors décidé de projeter les flux de passif déterministes dans le modèle "Contrat" en pas de temps annuel et non pas en mensuel afin qu'ils coïncident avec les flux de passif projetés en déterministes dans le modèle ALM sous la méthode "Internal".

Quatrième partie

Comparaison des deux méthodes de
modélisation des flux de passif "Flexing"
et "Internal"

Chapitre 7

Analyse des résultats

Dans ce chapitre, nous allons présenter les deux indicateurs BE et VIF que nous utiliserons afin d'analyser et de comparer les résultats obtenus pour chacune des deux méthodes. Ce qui nous permettra de justifier la pertinence de la méthode "Flexing".

7.1 Indicateurs d'analyse des résultats VIF et BE

Avant de commencer l'analyse des résultats, nous allons définir dans cette section les deux indicateurs BE et VIF sur lesquels nous nous baserons dans l'analyse.

Nous avons défini dans le deuxième chapitre de la première partie la formule théorique de calcul du BE et VIF, qui n'est autre que l'espérance de la valeur actualisée des cash-flows des passifs sous probabilité risque neutre pour le BE et l'espérance de la valeur actualisée des marges futures sous probabilité risque neutre pour la VIF.

Dans cette section, nous allons présenter les différentes composantes des deux indicateurs BE et VIF.

7.1.1 Composants du BE

La valeur économique du passif est égale à l'espérance sous la probabilité risque neutre de la somme, sur toute la durée de projection, des éléments suivants :

- les prestations (décès, rachats totaux et partiels, arrivées à échéance) versées aux assurés,
- les commissions versées aux réseaux,
- les frais généraux attachés aux contrats.

Le BE est calculé comme la somme des cash-flows de passif actualisés et est obtenu numériquement par la méthode de Monte-Carlo.

Dans le modèle ALM, le BE est calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\text{BE} &= \mathbb{E}_Q [\text{Frais} + \text{Commissions} - \text{Prestations}] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Déflateur}^i(T) \times (\text{PM}_{\text{Revalorisé}}(T) + \text{PPE}^i(T)) \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \text{Déflateur}^i(t) \times (\text{Frais}^i(t) + \text{Commissions}^i(t) - \text{Prestations}^i(t)) \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max} \left[0, \text{Déflateur}^i(T) \times \left(\tau_{\text{Prod_fin}} \times (\text{PVL}^i(T) + \text{MVL}^i(T)) \right) \right]
\end{aligned}$$

Avec :

- N : le nombre de simulations (en général, on lance sur 5000 simulations),
- T : la date de fin de projection (en général, on projette sur 30 ans),
- $\tau_{\text{Prod_fin}}$: le taux de PB initial. Il correspond au pourcentage des PMVL revenant aux assurés.

Et

$$\text{Prestations}^i(t) = \text{Primes}^i(t) - \text{Décès}^i(t) - \text{Rachats totaux}^i(t) - \text{Maturités}^i(t) - \text{Rachats partiels}^i(t)$$

Remarque. Lorsque la date de fin de projection est antérieure à la maturité des contrats, la valeur économique du passif est augmentée de la valeur actuelle du passif revenant aux assurés à la fin de projection :

- des provisions mathématiques résiduelles,
- de la richesse résiduelle : provision pour participation aux bénéfiques, et un pourcentage (basé sur les clauses de PB) des plus ou moins values latentes.

Ce qui explique les deux termes supplémentaires dans la formule.

7.1.2 Composantes de la VIF

La VIF est égale à l'espérance sous la probabilité risque neutre de la somme des profits sur toute la durée de projection.

Elle est calculée comme la somme des résultats futurs de la compagnie actualisés et est obtenue numériquement par la méthode de Monte-Carlo.

Dans le modèle ALM, la VIF est calculée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{VIF} = & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Déflateur}^i(T) \times \left(\text{Res_Cap}^i(T) + \text{PRE}^i(T) + (\text{PVL}^i(T) + \text{MVL}^i(T)) \right) \\ & + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \text{Déflateur}^i(t) \times \text{Profits}^i(t) \\ & - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{Max} \left[0, \text{Déflateur}^i(T) \times \left(\tau_{\text{Prod_fin}} \times (\text{PVL}^i(T) + \text{MVL}^i(T)) \right) \right] \end{aligned}$$

Remarque. De même pour la VIF, lorsque la date de fin de projection est antérieure à la maturité des contrats, la VIF est augmentée de la valeur actuelle des profits futurs revenant aux actionnaires à la fin de projection :

- de la réserve de capitalisation,
- de la provision pour risque d'exigibilité,
- d'un pourcentage des plus ou moins values latentes.

7.2 Étude des résultats obtenus du BE et de la VIF

Dans cette section, nous allons analyser les résultats obtenus par les deux méthodes afin d'étudier la pertinence de la méthode actuelle "Flexing".

Pour cela, nous allons dans un premier temps présenter un graphique de convergence Monte-Carlo qui valide le choix de 5000 simulations. Dans un deuxième temps, nous présenterons les hypothèses des contrats projetés. Enfin nous nous intéresserons à l'étude des résultats obtenus du BE et de la VIF avec les deux méthodes "Flexing" et "Internal" et à l'analyse des écarts observés en les démontrant.

7.2.1 Convergence Monte-Carlo

Les deux graphes ci-dessus, de convergence du BE et de la VIF, nous permettront de valider le choix de nombre de simulations qui est de 5000 simulations. En faisant varier le nombre de simulations N de 1 à 5000, on obtient :

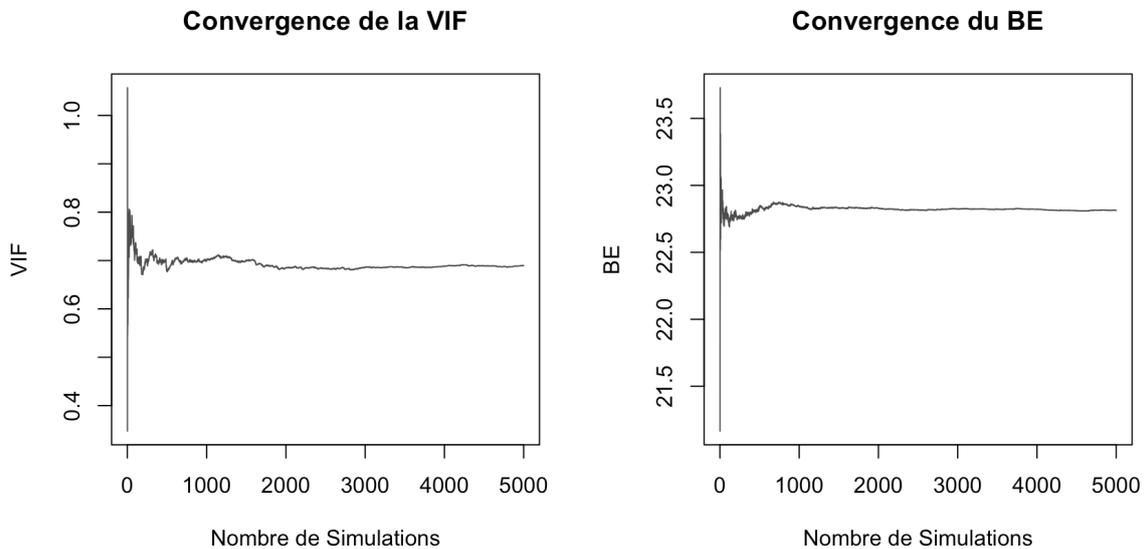


FIGURE 7.1 – Représentation graphique du montant du BE et de la VIF en Millions d'euros obtenus avec la méthode "Flexing" en fonction de nombre de simulations

À partir des deux graphes, on remarque que les deux montants du BE et de la VIF convergent pour 5000 simulations. On peut alors valider le choix de 5000 simulations retenu pour l'étude du BE et de la VIF entre les deux méthodes de modélisation de passif "Flexing" et "Internal".

7.2.2 Hypothèses des contrats projetés

L'étude est réalisée sur un portefeuille de contrats d'épargne en support euros avec sortie en capital uniquement. Le portefeuille est projeté sur 30 ans selon des scénarios économiques centraux.

Le portefeuille se compose d'un produit d'épargne en euros à prime unique versée lors de la souscription de 24 650 000 €, réparti sur 230 contrats. On considère qu'il a pas de production future, i.e les cash-flows de passif sont projetés en run-off.

Le produit d'épargne offre un TMG à hauteur des frais de gestion, permettant ainsi aux bénéficiaires de récupérer au minimum la somme investie. Le taux servi dépend de la production financière de l'assureur, comme défini dans le chapitre précédent, tout en respectant la contrainte de minimum réglementaire de PB.

Les assurés ont la possibilité de racheter totalement ou partiellement leur contrat. Les rachats totaux et partiels et les décès sont supposés arriver en milieu de période. Les contrats arrivant à échéance sont assimilés à des rachats totaux. Les rachats totaux correspondent aux rachats structurels (les rachats dynamiques n'ont pas été pris en compte).

La composition d'actifs du portefeuille est de 80% obligations et 20% actions.

7.2.3 Résultats obtenus du BE et de la VIF

Dans cette sous section, nous allons présenter les résultats du BE et de la VIF obtenus avec les deux méthodes de modélisation de passif "Flexing" et "Internal".

Remarque. Les données en entrée du modèle ont été modifiées pour des raisons de confidentialité. La modification a été faite en appliquant un scalaire à l'actif et au passif tout en partant d'un bilan équilibré en date de début de projection. Comme la modification est faite au niveau des inputs du modèle, cela n'affecte pas les écarts entre les deux méthodes mais par contre les montants du BE et de la VIF ne correspondent pas aux vrais montants de la compagnie.

Le tableau ci-dessous expose les deux montants du BE obtenu avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|----|-----------------|-----------------|
| BE | Flexing | 22 830 511,23 € |
| | Internal | 22 813 086,65 € |
| | Écart | 0,0764% |

Le tableau ci-dessous expose les deux montants de la VIF obtenus avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|-----|-----------------|-----------------|
| VIF | Flexing | 672 354,24 € |
| | Internal | 689 654,79 € |
| | Écart | -2,5086% |

À partir des deux tableaux ci-dessus, on remarque un écart entre les deux montants du BE et de la VIF obtenus par les deux différentes méthodes de modélisation de passif "Flexing" et "Internal".

À partir du tableau du BE, on remarque que le montant du Best Estimate obtenu par la méthode "Flexing" est supérieur au montant du BE obtenu par la méthode "Internal", soit une hausse en pourcentage de 0,0764%, correspondant à une hausse en montant de 17 424,58 euros.

On observe également à partir du tableau de la VIF que le montant de la VIF obtenu par la méthode "Flexing" est inférieur au montant de la VIF obtenu par la méthode "Internal", soit une baisse en pourcentage de 2,5086%, correspondant à une baisse en montant de 17 300,56 euros.

Comme les deux modèles ont été projetés par deux méthodes de modélisation de passif différentes, alors ces écarts proviennent essentiellement des cash-flows de passif, à savoir la PM, les sorties (décès, rachats totaux et partiels, maturités), les frais et les commissions.

Par ailleurs, la valorisation du portefeuille d'épargne au sein du modèle ALM assure une égalité entre la valeur du portefeuille en date $t = 0$ et la somme des flux futurs actualisés sur l'horizon de projection. En d'autre terme, la valeur des flux futurs du passif doit être égale à la valeur des flux de l'actif, et donc à la valeur initiale du portefeuille. Ainsi, la relation suivante doit être vérifiée :

$$\text{BE} + \text{VIF} = \text{Valeur du portefeuille d'actifs en date } t_0$$

En pratique, cette égalité n'est pas strictement vérifiée, l'écart engendré est dit "*écart de convergence*". Cet écart vient principalement de l'approximation de l'actualisation, de l'interpolation/extrapolation, de la convergence Monte-Carlo, de l'application de la technique de risque neutralisation, etc.

Comme la valeur du portefeuille d'actifs de la compagnie en date $t = 0$ est la même pour les deux méthodes, cela explique la même grandeur des écarts obtenus en montant entre les deux méthodes pour le BE et la VIF. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{BE}_{Flexing} + \text{VIF}_{Flexing} \simeq A_0 \\ \quad \& \quad \quad \quad \implies \text{BE}_{Flexing} - \text{BE}_{Internal} \simeq \text{VIF}_{Internal} - \text{VIF}_{Flexing} \\ \text{BE}_{Internal} + \text{VIF}_{Internal} \simeq A_0 \end{array} \right.$$

À partir de cette relation, on déduit que l'écart généré au niveau du BE est approximativement égal à l'écart généré au niveau de la VIF. En effet, grâce à l'égalité entre la valeur des flux futurs du passif et la valeur des flux de l'actif, le montant qu'on gagne en BE est perdu en VIF.

Toutefois, comme le montant du BE est plus élevé que celui de la VIF, alors quand on compare les écarts en pourcentage, l'écart au niveau de la VIF est plus important que l'écart au niveau du BE (écart de 2,5086% en VIF contre 0,0764% en BE). Par conséquent, l'écart observé entre les deux méthodes n'a pas un grand impact sur le BE, ce qui n'est pas le cas pour la VIF.

Nous expliciterons plus en détail les écarts des cash-flows de passif dans le paragraphe suivant.

7.2.4 Analyse des écarts entre les deux méthodes

D'après la formule de calcul du BE présentée précédemment, ce dernier dépend principalement des sorties, des commissions, des frais, des primes ainsi que des éléments de fin de projection à savoir la PM, le PPE et les PMVL.

Or, nous avons vu dans la partie précédente que les sorties en "Flexing" et "Internal" ne sont pas modélisées de la même manière. La méthode "Flexing" repose sur l'utilisation d'un

proxy basé sur des flux de passifs déterministes alors qu'en "Internal" le passif est calculé dans le modèle ALM à sa véritable valeur à chaque pas de temps.

Par conséquent, la principale origine de l'écart entre le $BE_{Flexing}$ et le $BE_{Internal}$ vient de la différence de méthode de modélisation des sorties. Et comme la VIF dépend aussi des cash-flows du passif, alors la différence de modélisation de passif intervient également dans l'écart entre la $VIF_{Flexing}$ et la $VIF_{Internal}$.

Principe d'écart des rachats partiels

Nous avons vu dans les chapitres précédents que les rachats partiels sont calculés comme :

$$MT_PART_SURR_{Après\ TMG}(t) = MT_PART_SURR_PP(t) \times NO_POLS_IFSM(t) \times (1 + TMG)^{\frac{1}{2}}$$

D'après la formule ci-dessus, le montant des rachats partiels dépend du montant des rachats partiels par police, du nombre de polices en début de période et du TMG. Et comme le nombre de polices en début de période est calculé de la même manière avec les deux méthodes, alors l'écart vient principalement du montant des rachats partiels par police.

Rappelons que les rachats partiels par police projetés avec la méthode "Flexing" sont calculés en premier dans le modèle "Contrat" et sont ensuite *flexés* dans le modèle ALM.

Alors :

$$\begin{aligned} \Delta MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}(t) &= MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{Flexing}(t) - MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{Internal}(t) \\ &= \rho_{Flex}^{TMG}(t) \times MT_PART_SURR_PP^{Passif}(t) - MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{Internal}(t) \end{aligned}$$

Or on a :

$$\rho_{Flex}^{TMG}(t) = \frac{MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{ALM}(t)}{MT_PART_SURR_PP^{Passif}(t)}$$

Donc :

$$\Delta MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}(t) = MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{ALM}(t) - MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{Internal}(t)$$

Avec

- $MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{ALM}(t)$: le montant des rachats partiels par police calculé dans le modèle ALM par la méthode "Flexing" servi aux assurés ayant racheté partiellement leur contrat,
- $MT_PART_SURR_PP_{Après\ TMG}^{Internal}(t)$: le montant des rachats partiels par police calculé dans le modèle ALM par la méthode "Internal" servi aux assurés ayant racheté partiellement leur contrat.

Le tableau ci-dessous expose les deux montants des rachats partiels revalorisés au TMG en date de fin de projection obtenus avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|------------------|-----------------|----------------|
| Rachats partiels | Flexing | 77 402,37 € |
| | Internal | 75 405,77 € |
| | Écart | 2,6478% |

Et le graphique ci-dessous expose l'évolution des écarts en pourcentage entre les deux montants des rachats partiels obtenus avec les deux méthodes en fonction de l'année de projection :

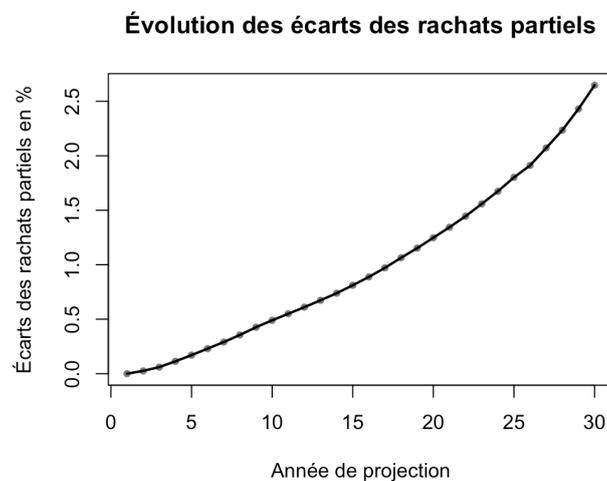


FIGURE 7.2 – Évolution des écarts entre les deux montants des rachats partiels obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection

On remarque à partir du graphe ci-dessus que l'écart entre les deux montants des rachats partiels, obtenus avec les deux différentes méthodes de modélisation de passif "Flexing" et "Internal", croît d'année en année de projection. Cette évolution de l'écart vient du fait que l'assiette de calcul des rachats partiels dépend du montant de la PM de l'année précédente. En effet, si un écart est généré pendant la période $t - 1$, alors cet écart intervient pendant la période t .

On explicitera plus en détail dans la section suivante l'écart obtenu entre les deux méthodes.

Principe d'écart des décès, rachats totaux et maturités

Pour les sorties totales, nous avons vu dans les chapitres précédents que les décès sont calculés comme :

$$MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}(t) = MT_DEATHS_PP(t) \times NO_DEATHS(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}$$

D'après la formule ci-dessus, le montant des décès dépend du montant des décès par police, du nombre de décès et du taux de PB de sortie. Comme le nombre de décès est calculé de la même manière avec les deux méthodes, alors l'écart vient principalement du montant des décès par police.

Donc :

$$\begin{aligned}\Delta MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}(t) &= MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{Flexing}(t) - MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{Internal}(t) \\ &= \rho_{Flex}^{PB}(t) \times MT_DEATH_PP^{Passif}(t) - MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{Internal}(t)\end{aligned}$$

Or on a :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t) = \frac{MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t)}{MT_DEATH_PP^{Passif}(t)}$$

Donc :

$$\Delta MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}(t) = MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) - MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{Internal}(t)$$

Avec

— $MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t)$: le montant des décès par police revalorisé au taux de PB de sortie calculé dans le modèle ALM par la méthode "Flexing".

D'autre part, on a en cas de "Flexing" :

$$\begin{aligned}MT_DEATH_PP^{ALM}(t) \times NO_POLIS_IF(t) &= \left(MT_PM_PP_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \right. \\ &\quad \left. - MT_PART_SURR_PP^{ALM}(t) \right) \times NO_POLIS_IF(t) \\ &= MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) + MT_PREM(t) \\ &\quad - MT_PART_SURR_{Approximé}^{ALM}(t) - MT_SORT_TOT_{Approximé}^{ALM}(t)\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) &= MT_PM_{Avant\ Revalorisation}^{ALM}(t-1) \times (1 + Taux\ Servi(t-1)) \\ &= \left(MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t-2) + MT_PREM(t-1) - MT_PART_SURR_{Approximé}^{ALM}(t-1) \right. \\ &\quad \left. - MT_SORT_TOT_{Approximé}^{ALM}(t-1) \right) \times (1 + Taux\ Servi(t-1))\end{aligned}$$

Et

$$MT_SORT_TOT_{Approximé}^{ALM}(t) = (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t-1) \times MT_SORT_TOT^{Passif}(t)$$

$$MT_PART_SURR_{Approximé}^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{TMG}(t-1) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t)$$

Et en cas de "Internal", on a :

$$\begin{aligned}
MT_DEATH_PP^{Internal}(t) \times NO_POL_IF(t) &= \left(MT_PM_PP^{Internal}_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \right. \\
&\quad \left. - MT_PART_SURR_PP(t) \right) \times NO_POL_IF(t) \\
&= MT_PM^{Internal}_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM(t) \\
&\quad - MT_PART_SURR^{Internal}(t) - MT_SORT_TOT^{Internal}(t)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
MT_PM^{Internal}_{Revalorisé}(t-1) &= MT_PM^{Internal}_{Avant Revalorisation}(t-1) \times (1 + Taux\ Servi(t-1)) \\
&= \left(MT_PM^{Internal}_{Revalorisé}(t-2) + MT_PREM(t-1) - MT_PART_SURR^{Internal}(t-1) \right. \\
&\quad \left. - MT_SORT_TOT^{Internal}(t-1) \right) \times (1 + Taux\ Servi(t-1))
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut écrire la formule de l'écart entre le montant des décès revalorisé au taux de PB de sortie obtenu en "Flexing" et celui obtenu en "Internal" comme :

$$\begin{aligned}
\Delta MT_DEATH_PP_{Après\ PB_Sortie}(t) \times NO_POL_IF(t) &= (MT_DEATH_PP^{ALM}(t) - MT_DEATH_PP^{Internal}(t)) \\
&\quad \times NO_POL_IF(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}} \\
&= \left((MT_PM^{ALM}_{Revalorisé}(t-1) - MT_PM^{Internal}_{Revalorisé}(t-1)) \right. \\
&\quad - (MT_PART_SURR^{ALM}_{Approximer}(t) - MT_PART_SURR^{Internal}(t)) \\
&\quad \left. - (MT_SORT_TOT^{ALM}_{Approximer}(t) - MT_SORT_TOT^{Internal}(t)) \right) \\
&\quad \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\Delta MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}(t) &= \frac{NO_DEATHS(t)}{NO_POL_IF(t)} \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left[\left(MT_PM^{ALM}_{Revalorisé}(t-1) - MT_PM^{Internal}_{Revalorisé}(t-1) \right) \right. \\
&\quad - \left(\rho_{Flex}^{TMG}(t-1) \times MT_PART_SURR^{Passif}(t) - MT_PART_SURR^{Internal}(t) \right) \\
&\quad \left. - \left((1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}} \times \rho_{Flex}^{PB}(t-1) \times MT_SORT_TOT^{Passif}(t) - MT_SORT_TOT^{Internal}(t) \right) \right]
\end{aligned}$$

L'assiette de calcul du montant des décès par police est la même pour les rachats totaux et les maturités, alors cette formule reste valable pour les deux autres sorties (rachats totaux et maturités) tout en remplaçant le nombre de décès par le nombre de sorties correspondant (nombre des rachats totaux ou nombre des maturités).

À partir de cette formule, on peut constater que l'origine de l'écart entre les deux montants des décès obtenus, avec la méthode "Flexing" et "Internal", vient de l'écart entre les montants de la PM de la période précédente et de l'approximation effectuée au niveau des rachats partiels et au niveau des sorties totales (décès, rachats totaux et maturités) pour le calcul du ratio de flexing.

D'autre part, le montant de la PM est calculé à partir du montant de la PM de l'année précédente plus les primes moins les sorties partielles et totales. Et comme le montant de la PM de l'année antérieure dépend aussi des sorties, alors par récurrence, l'écart entre $MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}$ et $MT_PM_{Revalorisé}^{Internal}$ vient des écarts générés par les sorties partielles et totales.

Si on projette notre portefeuille sur T années, alors les écarts générés entre les deux méthodes vont se cumuler, et cela à partir de l'année de début de projection jusqu'à la T ème année de projection.

Le tableau ci-dessous expose les deux montants des décès revalorisés au taux de PB de sortie en date de fin de projection, obtenus avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|-------|-----------------|----------------|
| Décès | Flexing | 170 175,83 € |
| | Internal | 167 139,08 € |
| | Écart | 1,8169% |

Le tableau ci-dessous expose les deux montants des rachats totaux revalorisés au taux de PB de sortie en date de fin de projection, obtenus avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|----------------|-----------------|----------------|
| Rachats totaux | Flexing | 22 508,20 € |
| | Internal | 22 114,07 € |
| | Écart | 1,7823% |

Le graphique de gauche ci-dessous expose l'évolution des écarts en pourcentage entre les deux montants des décès et celui de droite entre les deux montants des rachats totaux obtenus avec les deux méthodes en fonction de l'année de projection :

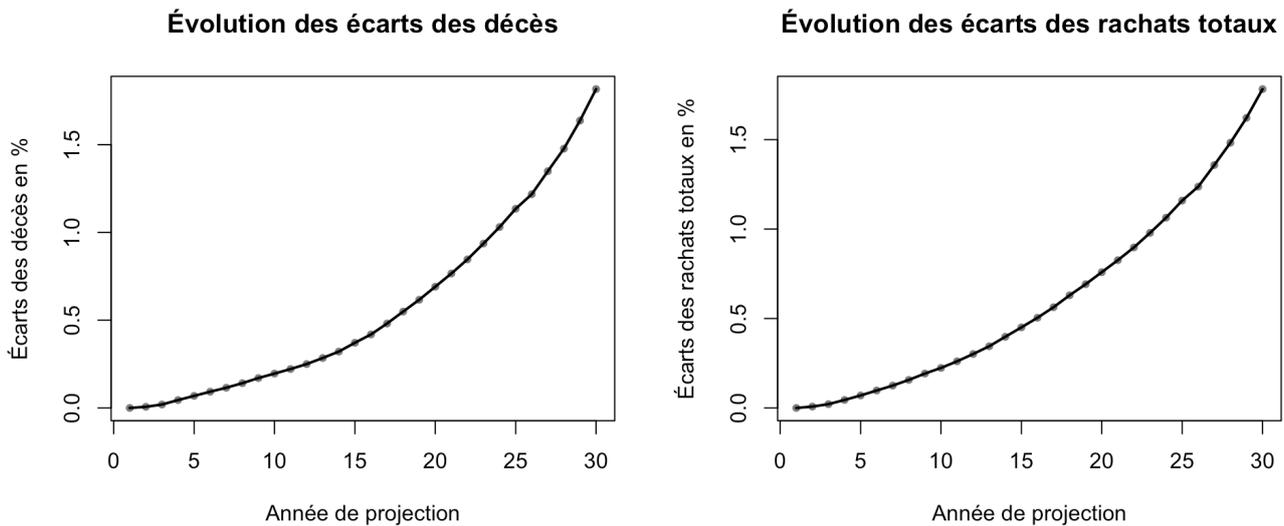


FIGURE 7.3 – Évolution des écarts entre les deux montants des décès et entre les deux montants des rachats totaux obtenus par les deux méthodes en fonction de l’année de projection

Principe d’écart de la PM

Pour la PM, nous avons vu dans les chapitres précédents que cette dernière est calculée comme :

$$MT_PM_{Revalorisé}(t) = MT_PM_{Avant Revalorisation}(t) \times (1 + Taux\ Servi(t))$$

Avec

$$MT_PM_{Avant Revalorisation}(t) = MT_PM_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM(t) - MT_PART_SURR(t) - MT_SORT_TOT(t)$$

À partir de la formule ci-dessus, on remarque que la PM avant revalorisation de l’année t dépend essentiellement de la PM revalorisée de l’année $t-1$, de la prime et des sorties de l’année t . Comme la PM revalorisée de l’année $t-1$ dépend aussi de la PM revalorisée de l’année $t-2$ et des sorties de l’année $t-1$, on peut ainsi écrire, par récurrence, la formule de calcul de la PM avant revalorisation en date t en fonction de la PM revalorisée en date t_0 , des primes et des sorties.

En effet, la formule de récurrence de calcul de la PM avant revalorisation en date t_n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 MT_PM_{Avant Revalorisation}(t_n) = & MT_PM(t_0) \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_k)) \\
 & + \sum_{k=1}^n Prestations(t_k) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + Taux\ Servi(t_j))
 \end{aligned}$$

Avec

$$\text{Prestations}(t_k) = \text{MT_PREM}(t_k) - \text{MT_PART_SURR}(t_k) - \text{MT_SORT_TOT}(t_k)$$

(Démonstration voir annexe B)

Comme on part du même montant de la PM en t_0 , on peut alors en conclure que l'origine des écarts de la PM entre les deux méthodes de modélisation de passif "Flexing" et "Internal" vient principalement des écarts engendrés par les sorties, à savoir les rachats partiels et totaux, décès et maturités.

On a :

$$\Delta\text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t) = \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^{\text{Flexing}}(t) - \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^{\text{Internal}}(t)$$

Comme on part du même montant de la PM en t_0 , alors :

$$\text{MT_PM}^{\text{Flexing}}(t_0) = \text{MT_PM}^{\text{Internal}}(t_0)$$

Si on suppose que les taux servis entre les deux méthodes sont les mêmes, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta\text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_n) = & \sum_{k=1}^n \left((\text{MT_PART_SURR}^{\text{Flexing}}(t_k) - \text{MT_PART_SURR}^{\text{Internal}}(t_k)) \right. \\ & \left. - (\text{MT_SORT_TOT}^{\text{Flexing}}(t_k) - \text{MT_SORT_TOT}^{\text{Internal}}(t_k)) \right) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + \text{Taux Servi}(t_j)) \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} \text{MT_SORT_TOT}^{\text{Flexing}}(t_k) &= \text{MT_DEATHS}^{\text{Flexing}}(t_k) + \text{MT_SURR}^{\text{Flexing}}(t_k) + \text{MT_MAT}^{\text{Flexing}}(t_k) \\ &= \rho_{\text{Flex}}^{\text{NC}}(t_k) \times (\text{MT_DEATHS}^{\text{Passif}}(t_k) + \text{MT_SURR}^{\text{Passif}}(t_k) + \text{MT_MAT}^{\text{Passif}}(t_k)) \\ &= \rho_{\text{Flex}}^{\text{NC}}(t_k) \times \text{MT_SORT_TOT}^{\text{Passif}}(t_k) \end{aligned}$$

$$\text{MT_PART_SURR}^{\text{Flexing}}(t_k) = \rho_{\text{Flex}}^{\text{NC}}(t_k) \times \text{MT_PART_SURR}^{\text{Passif}}(t_k)$$

Et

$$\text{MT_SORT_TOT}^{\text{Internal}}(t_k) = \text{MT_DEATHS}^{\text{Internal}}(t_k) + \text{MT_SURR}^{\text{Internal}}(t_k) + \text{MT_MAT}^{\text{Internal}}(t_k)$$

À partir de la formule ci-dessus, on remarque que les écarts générés par les sorties interviennent dans la PM avant revalorisation. On a montré dans la section précédente que les écarts entre les sorties sont générés par l'approximation effectuée pour calculer le ratio de flexing. Ainsi, on peut en déduire que cette approximation est l'origine de l'écart observé au niveau de la PM avant revalorisation.

D'autre part, pour la détermination de cette formule, on a supposé que les taux servis sont les mêmes pour les deux méthodes, ce qui n'est pas le cas si on projette notre portefeuille selon des scénarios économiques extrêmes (chocs actions, chocs taux, ...). Dans notre étude, on a projeté le portefeuille selon des scénarios économiques centraux, ainsi l'écart observé entre les taux servis est assez faible qu'il n'affecte pas les écarts obtenus par l'approximation de calcul du ratio de flexing.

Le tableau ci-dessous expose les deux montants de la PM revalorisée en date de fin de projection obtenus avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|----------------|-----------------|-----------------|
| PM revalorisée | Flexing | 2 210 926,99 € |
| | Internal | 2 338 709,79 € |
| | Écart | -5,4638% |

Le graphique ci-dessous expose l'évolution des écarts en pourcentage (en valeur absolue) entre les deux montants de PM revalorisée obtenus avec les deux méthodes en fonction de l'année de projection :

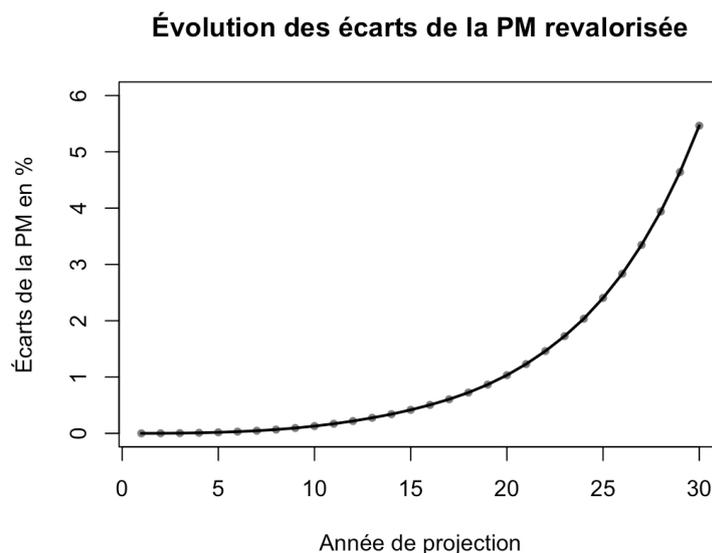


FIGURE 7.4 – Évolution des écarts entre les deux montants de PM revalorisée obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection

Principe d'écart des commissions

Pour les commissions, nous avons vu dans les chapitres précédents que ces dernières sont calculées comme :

$$MT_REN_COM(t) = MT_PM_PP_{Début Période}(t) \times NO_POLS_IFSM(t) \times REN_COM_RATE$$

D'après cette formule, on remarque que le montant des commissions dépend du montant de la PM par police, du nombre de polices en début de période et du taux des commissions. Donc l'origine des écarts du montant des commissions entre les deux méthodes vient principalement de la PM. Or, on a vu dans le paragraphe précédent que l'écart entre le montant de la PM obtenu par les deux méthodes est généré par les sorties. Ainsi, on peut en déduire que l'origine des écarts des commissions entre les deux méthodes vient essentiellement des sorties, à savoir, les rachats partiels et totaux, les décès et les maturités.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \Delta MT_REN_COM(t) &= MT_REN_COM^{Flexing}(t) - MT_REN_COM^{Internal}(t) \\ &= \left(MT_PM_PP_{Début Période}^{Flexing}(t) - MT_PM_PP_{Début Période}^{Internal}(t) \right) \\ &\quad \times NO_POLS_IFSM(t) \times REN_COM_RATE \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que :

$$MT_PM_{Début Période}(t) = MT_PM_PP_{Début Période}(t) \times NO_POLS_IFSM(t)$$

Or

$$\begin{aligned} MT_PM_{Début Période}(t) &= MT_PM_{Revalorisé}(t-1) + MT_PREM(t) \\ &= MT_PM_{Avant Revalorisation}(t-1) \times (1 + Taux Servi(t-1)) + MT_PREM(t) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \Delta MT_REN_COM(t) &= \Delta MT_PM_{Avant Revalorisation}(t-1) \times (1 + Taux Servi(t-1)) \\ &\quad \times REN_COM_RATE \end{aligned}$$

Le tableau ci-dessous expose les deux montants des commissions en date de fin de projection, obtenus avec les deux méthodes et l'écart engendré :

| | | |
|-------------|-----------------|----------------|
| Commissions | Flexing | 6 285,83 € |
| | Internal | 6 175,06 € |
| | Écart | 1,7938% |

Le graphique ci-dessous expose l'évolution des écarts en pourcentage entre les deux montants des commissions obtenus avec les deux méthodes en fonction de l'année de projection :

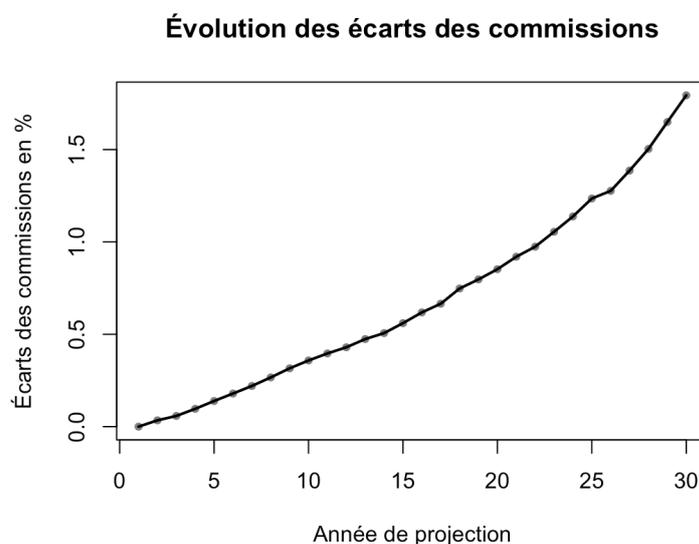


FIGURE 7.5 – Évolution des écarts entre les deux montants des commissions obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection

Conclusion

À partir de ce qui précède, on peut conclure que l'origine des écarts entre les deux méthodes de modélisation de passif "Flexing" et "Internal" vient principalement des sorties, à savoir, les rachats partiels et totaux, les décès et maturités. En particulier, de l'approximation effectuée pour calculer le ratio de flexing.

D'autre part, les écarts entre les deux méthodes évoluent d'année en année. En effet, la formule de calcul des sorties dépend de la PM de l'année antérieure qui est elle-même déterminée à partir des sorties obtenues grâce à l'approximation effectuée pour calculer le ratio de flexing, cela conduit alors à l'accumulation de ces écarts année après année.

Comme dans notre étude on s'intéresse aux montants de fin de projection, alors ces écarts sont cumulés depuis la date de début de projection jusqu'à la date de fin de projection.

7.3 Séquencement des calculs

Dans cette section, nous allons voir l'enchaînement des calculs des variables afin de déterminer où les écarts entre les deux méthodes de modélisation de passif interviennent et sur quelles variables.

Le graphe ci-dessous expose les différentes étapes de calculs effectuées dans le modèle ALM sous "PROPHET" :

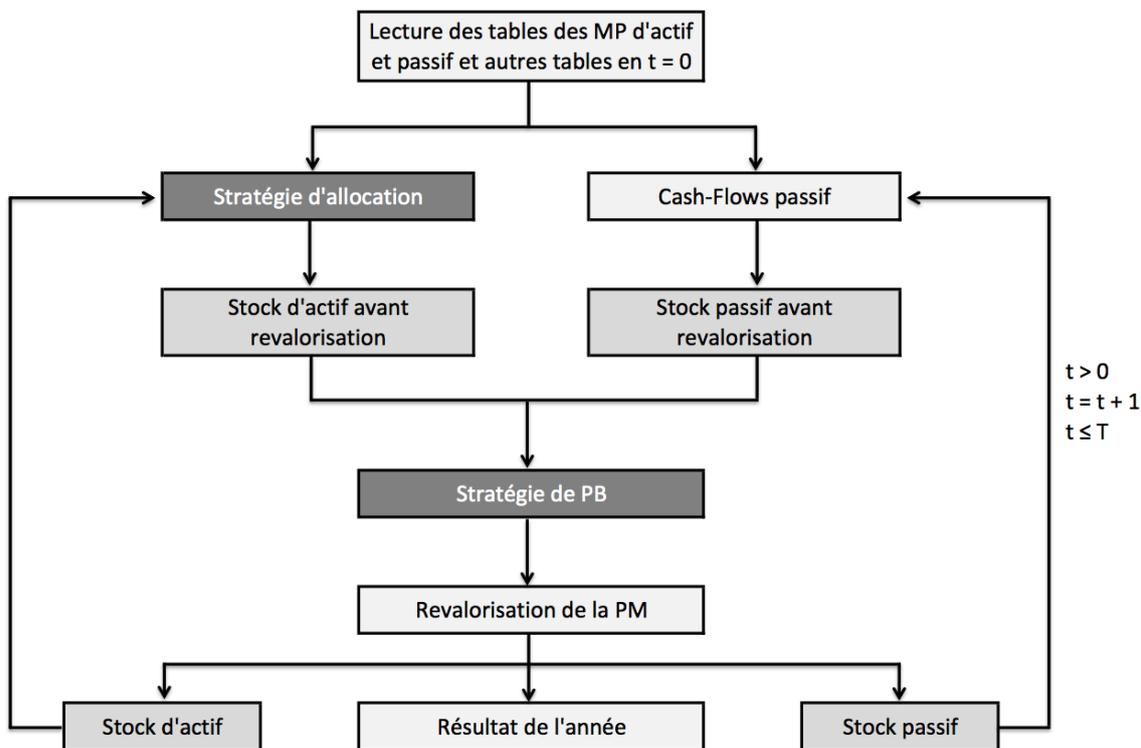


FIGURE 7.6 – Différentes étapes de calculs effectuées dans le modèle ALM sous "PROPHET"

7.3.1 Différentes étapes d'enchaînement de calcul

Étape 1 : Lectures des tables d'entrées du modèle

Cette étape consiste à lire les tables d'entrées du modèle, à savoir :

- Les tables des Model Points d'actifs,
- Les tables des scénarios économiques,
- Les tables de cash-flows de passif :
 - En cas de "Flexing" :
 - La table "DET_CF",
 - La table de contrôle flexing,

- En cas de "Internal" :
 - La table des Model Points de passif,
 - La table de contrôle internal,
 - La table de mortalités,
 - La table de taux des rachats totaux,
 - La table de taux des rachats partiels,
 - La table de taux des frais et commissions,
 - La table de taux de pénalité en cas de rachat,
- Autres tables ...

Étape 2 : Détermination des sorties, frais, commissions et de la PM avant revalorisation

Cette deuxième étape consiste à déterminer les cash-flows de passif, à savoir, les décès, rachats totaux et partiels, maturités, frais et commissions.

Méthode "Flexing" :

Dans le cas du flexing, on calcule dans un premier temps les ratios de flexing. Ces ratios de flexing dépendent des cash-flows de passif définis dans la table "DET_CF" et des taux de PB des sorties.

À $t = 0$, les taux de PB de sorties sont lus de la table de contrôle de flexing et pour $t \geq 1$, on fait appel aux taux servis de $t - 1$. En effet, les taux de PB de sorties à $t \geq 1$ dépendent des taux servis de l'année antérieure.

Une fois que les ratios de flexing sont calculés, on les applique aux sorties totales et partielles déterministes définies dans la table "DET_CF" afin de les ajuster. L'ajustement des sorties est effectué en multipliant les sorties déterministes par le ratio de flexing correspondant. On obtient ensuite les sorties stochastiques, qu'on utilise afin de déterminer la PM avant revalorisation.

On a :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^{\text{Flexing}}(t) &= \text{MT_PM}_{\text{Revalorisé}}^{\text{Flexing}}(t-1) + \text{MT_PREM}(t) \\ &\quad - \text{MT_PART_SURRE}^{\text{ALM}}(t) - \text{MT_SORT_TOT}^{\text{ALM}}(t) \end{aligned}$$

Avec

$$\text{MT_PART_SURRE}^{\text{ALM}}(t) = \rho_{\text{Flex}}^{\text{NC}}(t) \times \text{MT_PART_SURRE}^{\text{Passif}}(t)$$

Et

$$\text{MT_SORT_TOT}^{\text{ALM}}(t) = \rho_{\text{Flex}}^{\text{NC}}(t) \times \text{MT_SORT_TOT}^{\text{Passif}}(t)$$

Méthode "Internal" :

Dans le cas de "Internal", le calcul des sorties et de la PM s'effectue directement dans le modèle ALM. La formule de calcul de ces derniers dépend de la PM par police, des primes par police et des nombres de polices.

Ainsi, dans le modèle ALM, on commence par calculer le nombre des sorties à partir des tables d'entrées du modèle. On calcule ensuite le montant de la PM par police, qui est lu à partir des Model Points de passif en $t = 0$ et en $t \geq 1$, le montant de la PM par police fait appel au montant de la PM par police de $t - 1$. Le montant des sorties et de la PM calculés sont stochastiques, car ils font intervenir le montant de la PM calculé dans le modèle ALM en prenant en compte le taux servi, ce qui n'est pas le cas pour les sorties de la table "DET_CF" calculées dans le modèle déterministe "Contrat" (d'où l'intérêt de *flexer* (ajuster) les sorties en "Flexing").

Une fois que les montants des sorties totales et partielles sont calculés, on détermine le montant de la PM avant revalorisation.

On a :

$$\text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^{\text{Internal}}(t) = \left(\text{MT_PM_PP}_{\text{Revalorisé}}(t-1) + \text{MT_PREM_PP}(t) - \text{MT_PART_SURRE_PP}(t) \right) \times \text{NO_POLS_IF}(t)$$

Avec

$$\text{MT_PART_SURRE_PP}(t) = \left(\text{MT_PM_PP}_{\text{Revalorisé}}(t-1) + \text{MT_PREM_PP}(t) \right) \times \text{PART_SURRE_RATE}(t)$$

Et

$$\text{NO_POLS_IF}(t) = \text{NO_POLS_IFSM}(t) - \text{NO_SURRE}(t) - \text{NO_DEATHS}(t) - \text{NO_MATS}(t)$$

Remarque. La formule de calcul de la PM avant revalorisation dans le cas de "Flexing" est identique à celle utilisée dans le cas de "Internal". (Voir chapitre 6 section 2)

Étape 3 : Détermination de la PM revalorisée et des réserves additionnelles

Cette étape consiste à déterminer le montant de la PM revalorisée. Ce qui revient à calculer le taux servi ou le taux de PB servi. En effet, le taux servi est égal au montant de participation aux bénéficiaires servi divisé par le montant de la PM avant revalorisation. Comme le montant de la PM avant revalorisation est calculé dans l'étape précédente, il nous reste le montant de PB servi à déterminer.

Pour cela, dans un premier temps, on applique la stratégie financière : Achat/Vente/Réallocation, ce qui nous permet de calculer les éléments qui entrent dans le calcul du montant des produits financiers, par exemple, les PMVL, la PRE, la réserve de capitalisation, etc. Le montant des produits financiers est ensuite utilisé dans la stratégie de participation aux bénéfices, afin de déterminer le montant de participation aux bénéfices à servir (voir chapitre 4 partie 2). Le montant de participation aux bénéfices à servir dépend aussi d'autres leviers comme la reprise PPE, les PVL et la réduction de marge.

Une fois que le montant de participation aux bénéfices à servir est déterminé, on l'ajoute à la PM avant revalorisation afin d'obtenir la PM revalorisée.

En effet, on a :

$$MT_PM_{Revalorisé}(t) = MT_PM_{Avant Revalorisation}(t) \times (1 + Taux\ Servi(t))$$

Avec

$$Taux\ Servi(t) = \frac{PB_Servie(t)}{MT_PM_{Avant Revalorisation}(t)}$$

Étape 4 : Calcul du BE et de la VIF

Cette étape consiste à calculer le montant du BE et de la VIF. Maintenant que tous les éléments qui constituent le BE et la VIF sont déterminés à chaque pas de temps et pour chacune des 5000 simulations, on calcule le montant du BE et de la VIF avec la méthode de Monte-Carlo, en appliquant la moyenne sur les 5000 simulations effectuées.

7.3.2 Conclusion

À partir du paragraphe précédent des différentes étapes de calcul, on remarque que les écarts générés par les deux différentes méthodes de modélisation de passif interviennent dans tout l'enchaînement des calculs. En effet, on commence par déterminer les cash-flows de passif, en particulier la PM avant revalorisation. Cette PM nous permet d'effectuer la stratégie de PB afin de calculer le taux servi. Ainsi, s'il existe un écart dans la PM avant revalorisation alors cet écart interviendra dans la stratégie de calcul de la participation aux bénéfices (voir chapitre 4 partie 2). Par conséquent, l'écart obtenu dans la PM revalorisée sera généré à la fois par la PM avant revalorisation et par le taux servi. Comme la PPE est calculée dans la stratégie de PB, alors l'écart interviendra aussi dans cette provision.

D'autre part, en fin d'année, une fois le montant de la PM revalorisé au taux servi et les réserves additionnelles calculées, le modèle réaligne le stock d'actif en fonction du stock de passif. Comme le stock du passif obtenu par la méthode "Flexing" est différent de celui obtenu par "Internal", alors les écarts dans le passif interviendront dans l'actif et par conséquent dans tous les éléments qui dépendent de l'actif, à savoir, la PRE, la réserve de capitalisation, les PMVL, etc.

Par conséquent, les écarts générés par les deux méthodes interviendront dans le calcul du BE ainsi que dans le calcul de la VIF.

Conclusion générale

C'est dans le cadre de la validation de la méthode "Flexing", actuellement utilisée par Crédit Agricole Assurances, que se situe l'objectif de notre étude. En effet, l'étude s'est portée sur la comparaison entre la méthode "Flexing" qui repose sur l'utilisation de proxys basés sur des flux de passif déterministes et une nouvelle méthode, dite "Internal", qui consiste à projeter directement les flux de passif en stochastiques dans le modèle ALM sans utiliser de proxys basés sur des flux de passif déterministes.

Dans la première partie, nous avons vu en quoi consiste l'assurance vie, quels sont les avantages qu'elle procure à ses clients et les différents risques auxquels une compagnie d'assurance vie doit faire face. Puis nous avons présenté le cadre réglementaire Solvabilité II et le principe de valorisation d'un bilan en « juste valeur ».

Dans la deuxième partie, nous nous sommes concentrés sur la modélisation Actif/Passif, en particulier, sur la modélisation des flux de passif et de la stratégie de calcul de la participation aux bénéficiaires. Cette partie constitue un pas important pour la mise en place de la nouvelle méthode de modélisation des flux de passif. En effet, des modifications ont été faites dans le modèle ALM de la compagnie afin de pouvoir projeter les cash-flows de passif directement dans le modèle ALM et de pouvoir appliquer la stratégie de calcul de la participation aux bénéficiaires. Ainsi, nous avons présenté dans cette partie les formules de calcul des cash-flows de passif, à savoir, les sorties (décès, rachats totaux et partiels et maturités), la PM, les frais de gestion et les commissions. Nous avons aussi présenté les différentes étapes effectuées dans le modèle ALM pour la détermination du montant de la participation aux bénéficiaires à distribuer.

Dans la troisième partie, nous avons présenté les deux méthodes différentes de modélisation des flux de passif "Flexing" et "Internal". Pour la méthode "Flexing", nous avons présenté son principe général et le modèle de projection des flux de passif déterministes sur lequel repose cette méthode, puis nous avons présenté l'algorithme de calcul des ratios de flexing utilisé par la compagnie pour transformer les flux de passif déterministes en stochastiques. La présentation de l'algorithme de calcul des ratios de flexing est très importante pour comparer les deux méthodes et comprendre comment cette méthode permet de transformer les flux de passif déterministes en stochastiques. Pour la méthode "Internal", nous avons présenté son principe général, ses avantages et inconvénients ainsi que les principales étapes à effectuer pour la mise en œuvre de cette méthode, puis nous avons présenté la formule de calcul de la PM. La présentation de la formule de calcul de la PM permet de comprendre comment les calculs sont effectués dans cette méthode et comment nous pouvons comparer les flux de passif obtenus avec les deux méthodes. En effet, comme les tables d'entrée des hypothèses de passif sont au niveau Model Point, alors les cash-flows de passif sont calculés aussi au niveau Model Point, puis regroupés au niveau produit afin de pouvoir appliquer la stratégie de calcul de la participation aux bénéficiaires.

Dans la dernière partie, nous avons exposé les résultats obtenus avec les deux méthodes qui nous permettaient d'étudier la pertinence de la méthode "Flexing" dans le cadre des hypothèses de projection, en particulier, dans le cadre de projection selon des scénarios économiques centraux et en absence de rachats dynamiques. En effet, en dehors de ces principales hypothèses,

la pertinence de la méthode "Flexing" reste à étudier.

Nous avons aussi présenté dans cette dernière partie l'origine des écarts observés entre les deux méthodes au niveau du BE, de la VIF et des cash-flows de passif. On a constaté que l'origine des écarts observés vient principalement des sorties, à savoir, les rachats partiels et totaux, les décès et les maturités, et en particulier de l'approximation effectuée dans la formule de calcul du ratio de flexing utilisé pour déterminer les sorties stochastiques. D'autre part, l'assiette de calcul des sorties dépend de la PM de l'année antérieure qui dépend elle-même des sorties obtenues grâce à l'approximation effectuée pour calculer le ratio de flexing, cela conduit alors à l'accumulation de ces écarts année après année. Puisque dans notre étude nous nous intéressons aux montants de fin de projection, alors ces écarts sont cumulés depuis la date de début de projection jusqu'à la date de fin de projection.

Pour finir, les résultats obtenus au niveau du BE et de la VIF nous permettent de valider la pertinence de la méthode "Flexing" dans le cadre des hypothèses effectuées lors de la projection. Les principales hypothèses effectuées sont :

- projection selon des scénarios économiques centraux,
- les rachats totaux correspondent aux rachats structurels (les rachats dynamiques ne sont pas pris en compte).

Par ailleurs, pour la zone de validité de la méthode "Flexing", les hypothèses effectuées lors de la projection ne nous permettent pas d'en définir une. En effet, il faut aussi effectuer des projections en dehors de ces hypothèses, par exemple, de projeter le portefeuille selon des scénarios économiques extrêmes (chocs actions, chocs taux, ...), de prendre en compte les rachats dynamiques, de projeter le portefeuille sur un horizon de temps supérieur à 30 ans, d'effectuer des chocs de souscription (chocs décès, chocs rachats, ...).

Pour envisager des travaux faisant suite à ce mémoire, il serait très intéressant d'étudier la pertinence de la méthode "Flexing" dans le cadre :

- **des scénarios économiques extrêmes (chocs actions, chocs taux, ...)** : nous avons vu que la formule d'écart entre les deux montants de la PM, obtenus avec la méthode "Flexing" et "Internal", dépend du taux servi que nous avons supposé le même pour les deux méthodes. Cela est dû au fait que l'écart observé au niveau de ce taux est assez faible qu'il n'affecte pas l'écart généré par l'approximation effectuée dans la formule de calcul du ratio de flexing, or dans des cas des scénarios économiques extrêmes, cet écart au niveau du taux servi peut devenir important. En effet, comme le stock du passif obtenu par la méthode "Flexing" est différent de celui obtenu par "Internal" et le modèle réaligne le stock d'actif en fonction du stock de passif, alors les écarts dans le passif interviendront dans l'actif et par conséquent dans tous les éléments qui dépendent de l'actif, à savoir, la PRE, la réserve de capitalisation, les PMVL, etc.
- **des chocs de souscription (chocs décès, chocs rachats, ...)** : nous avons vu que la formule d'écart entre les deux montants de décès, obtenus avec la méthode "Flexing" et "Internal", dépend du rapport entre le nombre de décès et le nombre de polices en fin de période, par conséquent, pour un choc décès, le nombre de décès va augmenter et le nombre de polices en fin de période va diminuer, conduisant ainsi à l'augmentation du rapport entre le nombre de décès et le nombre de polices en fin de période et donc

à l'augmentation de l'écart entre les deux montants de décès. Pour un choc de rachats totaux, ce raisonnement reste aussi valable sur le rapport entre le nombre de rachats totaux et le nombre de polices en fin de période.

- **d'une projection sur un horizon de temps supérieur à 30 ans** : nous avons vu que l'origine des écarts constatés vient principalement des sorties, à savoir, les rachats partiels et totaux, les décès et maturités, en particulier, de l'approximation effectuée dans la formule de calcul du ratio de flexing utilisé pour déterminer les sorties stochastiques en "Flexing". Or l'assiette de calcul des sorties dépend de la PM de l'année antérieure qui dépend elle-même des sorties obtenues grâce à l'approximation effectuée pour calculer le ratio de flexing, cela conduit alors à l'accumulation des écarts année après année. Comme dans notre étude nous nous intéressons aux montants de fin de projection, alors ces écarts sont cumulés depuis la date de début de projection jusqu'à la date de fin de projection. Par conséquent, plus la date de fin de projection sera élevée plus les écarts des flux de passif entre les deux méthodes seront eux aussi élevés.
- **des rachats dynamiques** : Pour simplifier la mise en œuvre de la nouvelle méthode "Internal" et sa comparaison avec la méthode "Flexing", les rachats dynamiques n'ont pas été pris en compte dans le cadre de notre étude. En effet, pour la méthode "Flexing", un autre ratio (ratio sur le nombre de polices) est calculé afin de capter l'effet des rachats dynamiques. Il serait utile d'étudier la pertinence de la méthode "Flexing" en prenant en compte les rachats dynamiques.

Annexe A

Démonstration de la formule de calcul du ratio de flexing

Dans cette annexe **A**, on démontre la formule obtenue pour le calcul du ratio de flexing qu'on utilise tout au long de ce mémoire.

Formule à démontrer :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t) = \frac{MT_PM_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t)}{MT_PM^{Passif}(t)}$$

Démonstration :

On a comme formule de départ :

$$MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) = \rho_{Flex}^{PB}(t) \times MT_DEATHS^{Passif}(t)$$

On obtient alors :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t) = \frac{MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t)}{MT_DEATHS^{Passif}(t)}$$

Or on sait que :

$$MT_DEATHS_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) = MT_DEATHS^{ALM}(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}$$

Et

$$MT_DEATHS^{Passif}(t) = MT_DEATHS_PP^{Passif}(t) \times NO_DEATHS(t)$$

Avec

$$MT_DEATHS^{ALM}(t) = MT_DEATHS_PP^{ALM}(t) \times NO_DEATHS(t)$$

Par conséquent, la formule de calcul du ratio de flexing devient :

$$\begin{aligned} \rho_{Flex}^{PB}(t) &= \frac{MT_DEATHS_PP^{ALM}(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}}}{MT_DEATHS_PP^{Passif}(t)} \\ &= \frac{MT_DEATHS_PP^{ALM}(t) \times (1 + Taux_PB_Sortie(t))^{\frac{1}{2}} \times NO_POLS_IF(t)}{MT_DEATHS_PP^{Passif}(t) \times NO_POLS_IF(t)} \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} MT_DEATHS_PP^{ALM}(t) &= \left(MT_PM_PP_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \right. \\ &\quad \left. - MT_PART_SURRE_PP^{ALM}(t) \right) \end{aligned}$$

Et

$$NO_POLS_IF(t) = NO_POLS_IFSM(t) - NO_SORTIES(t)$$

Où

$$NO_SORTIES(t) = NO_DEATHS(t) + NO_SURRE(t) + NO_MATS(t)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} MT_DEATHS_PP^{ALM}(t) \times NO_POLS_IF(t) &= \left(MT_PM_PP_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) + MT_PREM_PP(t) \right. \\ &\quad \left. - MT_PART_SURRE_PP^{ALM}(t) \right) \\ &\quad \times (NO_POLS_IFSM(t) - NO_SORTIES(t)) \\ &= MT_PM_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) + MT_PREM(t) \\ &\quad - MT_PART_SURRE^{ALM}(t) - MT_SORT_TOT^{ALM}(t) \\ &= MT_PM_{Avant Revalorisation}^{ALM}(t) \end{aligned}$$

Car

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) &= \text{MT_PM_PP}_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) \times \text{NO_POLY_IF}(t-1) \\ &= \text{MT_PM_PP}_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) \times \text{NO_POLY_IFSM}(t) \end{aligned}$$

$$\text{MT_PREM}(t) = \text{MT_PREM_PP}(t) \times \text{NO_POLY_IFSM}(t)$$

$$\text{MT_PART_SURRE}^{ALM}(t) = \text{MT_PART_SURRE_PP}^{ALM}(t) \times \text{NO_POLY_IFSM}(t)$$

Et

$$\begin{aligned} \text{MT_SORT_TOT}^{ALM}(t) &= \text{MT_SORT_TOT_PP}^{ALM}(t) \times \text{NO_SORTIES}(t) \\ &= \left(\text{MT_PM_PP}_{Revalorisé}^{ALM}(t-1) + \text{MT_PREM_PP}(t) \right. \\ &\quad \left. - \text{MT_PART_SURRE_PP}^{ALM}(t) \right) \times \text{NO_SORTIES}(t) \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\text{MT_PM}_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t) = \text{MT_PM}_{Avant\ Revalorisation}^{ALM}(t) \times (1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t))^{\frac{1}{2}}$$

Donc, on obtient :

$$\text{MT_DEATHS_PP}^{ALM}(t) \times (1 + \text{Taux_PB_Sortie}(t))^{\frac{1}{2}} \times \text{NO_POLY_IF}(t) = \text{MT_PM}_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t)$$

Pour le montant des décès $\text{MT_DEATHS_PP}^{Passif}$, les calculs effectués précédemment restent valables tout en changeant ALM par $Passif$. La seule différence est qu'il n'y a pas de taux de revalorisation. Dans le modèle de passif, le taux de revalorisation est supposé nul.

On obtient alors :

$$\text{MT_DEATHS_PP}^{Passif}(t) \times \text{NO_POLY_IF}(t) = \text{MT_PM}^{Passif}(t)$$

Par conséquent, la formule de calcul du ratio de flexing devient :

$$\rho_{Flex}^{PB}(t) = \frac{\text{MT_PM}_{Après\ PB_Sortie}^{ALM}(t)}{\text{MT_PM}^{Passif}(t)}$$

Annexe B

Démonstration de la formule de récurrence de calcul de la PM

Dans cette annexe **B**, on démontre la formule de récurrence de calcul de la PM qu'on utilise dans l'analyse des écarts obtenus avec les deux méthodes de modélisation de passif.

Formule à démontrer :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_n) &= \text{MT_PM}(t_0) \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \text{Taux Servi}(t_k)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \text{Prestations}(t_k) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + \text{Taux Servi}(t_j)) \end{aligned}$$

Avec

$$\text{Prestations}(t_k) = \text{MT_PREM}(t_k) - \text{MT_PART_SURR}(t_k) - \text{MT_SORT_TOT}(t_k)$$

Démonstration :

On veut démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété est vraie. Pour cela, on procède au raisonnement par récurrence :

On démontre dans un premier temps que la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_1) &= \text{MT_PM}(t_0) + \text{MT_PREM}(t_1) \\ &\quad - \text{MT_PART_SURR}(t_1) - \text{MT_SORT_TOT}(t_1) \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour $n = 1$.

Soit $n \geq 1$, on suppose que la propriété est vraie pour n . On montre alors qu'elle vraie pour $n + 1$.

On a :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_{n+1}) &= \text{MT_PM}_{\text{Revalorisé}}(t_n) + \text{MT_PREM}(t_{n+1}) \\ &\quad - \text{MT_PART_SURR}(t_{n+1}) - \text{MT_SORT_TOT}(t_{n+1}) \\ &= \text{MT_PM}_{\text{Revalorisé}}(t_n) + \text{Prestations}(t_{n+1}) \end{aligned}$$

Or

$$\text{MT_PM}_{\text{Revalorisé}}(t_n) = \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_n) \times (1 + \text{Taux Servi}(t_n))$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_n) &= \text{MT_PM}(t_0) \times \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \text{Taux Servi}(t_k)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \text{Prestations}(t_k) \times \prod_{j=k}^{n-1} (1 + \text{Taux Servi}(t_j)) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Revalorisé}}(t_n) &= \text{MT_PM}(t_0) \times \prod_{k=1}^n (1 + \text{Taux Servi}(t_k)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \text{Prestations}(t_k) \times \prod_{j=k}^n (1 + \text{Taux Servi}(t_j)) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_{n+1}) &= \text{MT_PM}(t_0) \times \prod_{k=1}^n (1 + \text{Taux Servi}(t_k)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \text{Prestations}(t_k) \times \prod_{j=k}^n (1 + \text{Taux Servi}(t_j)) \\ &\quad + \text{Prestations}(t_{n+1}) \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}(t_{n+1}) &= \text{MT_PM}(t_0) \times \prod_{k=1}^n (1 + \text{Taux Servi}(t_k)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} \text{Prestations}(t_k) \times \prod_{j=k}^n (1 + \text{Taux Servi}(t_j)) \end{aligned}$$

La propriété reste donc encore vraie au rang $n + 1$. Ainsi, par récurrence, elle vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Représentation schématique du fonctionnement d'un contrat d'épargne en euros avec prime unique | 12 |
| 1.2 | Représentation schématique du fonctionnement d'un contrat épargne en UC avec prime unique | 13 |
| 2.1 | Représentation graphique du Bilan économique sous Solvabilité II | 20 |
| 3.1 | Représentation graphique de l'Algorithme ALM | 28 |
| 4.1 | Représentation schématique du séquençage des flux | 33 |
| 4.2 | Représentation schématique des étapes de calcul du montant de la participation aux bénéfices à servir | 43 |
| 5.1 | Représentation graphique du principe de modélisation Actif/Passif sous la méthode "Flexing" | 52 |
| 5.2 | Représentation graphique des étapes de calcul des flux de prestations revalorisés et de la PM avant revalorisation avec la méthode "Flexing" | 62 |
| 6.1 | Représentation graphique du principe de modélisation Actif/Passif sous la méthode "Internal" | 63 |
| 7.1 | Représentation graphique du montant du BE et de la VIF en Millions d'euros obtenus avec la méthode "Flexing" en fonction de nombre de simulations | 72 |
| 7.2 | Évolution des écarts entre les deux montants des rachats partiels obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection | 76 |
| 7.3 | Évolution des écarts entre les deux montants des décès et entre les deux montants des rachats totaux obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection | 80 |
| 7.4 | Évolution des écarts entre les deux montants de PM revalorisée obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection | 82 |
| 7.5 | Évolution des écarts entre les deux montants des commissions obtenus par les deux méthodes en fonction de l'année de projection | 84 |
| 7.6 | Différentes étapes de calculs effectuées dans le modèle ALM sous "PROPHET" . | 85 |

Bibliographie

- [1] BEN DBABIS M. [2013] « *Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement solvabilité II* ».
- [2] DEVINEAU L., LOISEL S. [2009] « *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II* ».
- [3] DREYFUSS M.-L. [2015] « *Les grands principes de Solvabilité 2* ».
- [4] FALEH A. [2011] « *Allocation stratégique d'actifs et ALM pour les régimes de retraite* ».
- [5] GERBER G. [2010] « *Allocation d'actifs sous Solvabilité 2 : cas de l'assurance vie épargne* ».
- [6] Groupe de travail - Institut des actuaires, [2016] « *Best Estimate Liabilities Vie* », *Exemples de pratiques actuarielles applicables au marché français*.
- [7] ZEGHMAR B. [2012] « *Modélisation de la politique de distribution des produits financiers dans le cadre d'une gestion d'une compagnie d'assurance vie* ».

Note de synthèse

Problématique et objectifs

Le passif d'un assureur vie se compose de plusieurs engagements à long terme (Provision Mathématique "PM") vis-à-vis des assurés par le biais des contrats d'épargne. Cette provision mathématique, pour les contrats d'épargne en euros, est capitalisée chaque année à un taux dépendant de la production financière de l'assureur. Par conséquent, le passif d'un assureur vie dépend de sa production financière et donc de son actif. Afin de modéliser ces interactions qui existent entre l'actif et le passif, l'utilisation d'un modèle ALM est indispensable.

Le nombre élevé de scénarios économiques à générer et de Model Points d'actif et de passif à projeter dans un modèle ALM, conduit à des temps de calculs conséquents. Afin d'optimiser les temps de calculs, la compagnie utilise une méthode, dite "Flexing", qui consiste, dans un premier temps, à projeter les flux de passif dans un modèle déterministe, appelé Modèle "Contrat", en réduisant le nombre de Model Points de passif projetés à un nombre de produits très faible (dizaines de milliers de Model Points vs centaines de produits), puis dans un deuxième temps, à ajuster ces flux de passif déterministes dans un modèle ALM afin de les rendre stochastiques. L'ajustement des cash-flows de passif déterministes est effectué en multipliant ces derniers par un coefficient construit par récurrence dans le modèle ALM. Ce coefficient, appelé ratio de flexing, prend en compte les scénarios économiques et les actions des assurés et du management, et il est calculé de façon générale en date t de la manière suivante :

$$\rho_{Flex}(t) = \frac{PM_{ALM}(t)}{PM_{Passif}(t)}$$

L'indice *Passif* désigne la PM provenant du modèle déterministe de passif et l'indice *ALM* désigne la PM fictive calculée dans le modèle ALM, cette PM est utilisée afin de refléter la PM calculée dans le modèle "Contrat" qui aurait été obtenue nous lui avons rajoutée les produits financiers distribués.

Par ailleurs, le calcul de ce ratio de flexing repose sur une approximation effectuée au niveau des sorties utilisées pour calculer la PM fictive, d'où l'intérêt d'étudier la pertinence de cette méthode et son domaine d'application. Pour ce faire, il existe une méthode alternative, dite "Internal", qui consiste à projeter directement les flux de passif dans un modèle ALM stochastique sans utiliser de proxys basés sur des flux de passif déterministes. Ainsi, les cash-flows de passif obtenus avec cette nouvelle méthode seront projetés dans le modèle ALM en prenant en compte les scénarios financiers stochastiques.

L'objectif de ce mémoire est de mettre en œuvre cette nouvelle méthode de modélisation de passif "Internal" et de la comparer avec la méthode "Flexing" actuellement utilisée afin d'évaluer la pertinence de la méthode "Flexing" et d'étudier sa précision et son domaine d'application. La comparaison entre les deux méthodes reposera sur l'étude des deux indicateurs BE et VIF.

Méthodologie suivie

La différence entre la méthode "Flexing" et "Internal" vient principalement de l'application du taux servi à la PM. En effet, pour la méthode "Flexing", les cash-flows de passif sont projetés, dans un premier temps, dans un modèle de passif déterministe qui ne prend pas en compte le taux servi pour la revalorisation de la PM. À l'issue de cette projection des flux de passif dans le modèle déterministe, nous obtenons une table des cash-flows de passif déterministe, dite "DET_CF", et une deuxième table de contrôle contenant les caractéristiques des produits utilisés. Ces deux tables nous servent d'inputs dans le modèle ALM. Ensuite, dans un deuxième temps, les flux de passif générés par le modèle de passif déterministe seront *flexés* (i.e. ajustés) dans le modèle ALM par le biais du ratio de flexing. Une fois les cash-flows de passif *flexés*, le modèle ALM procède aux interactions qui existent entre l'actif et le passif, une des interactions consiste à revaloriser la PM avec le taux servi.

En revanche, pour la méthode "Internal", les flux de passif sont projetés directement dans le modèle ALM, ainsi la PM calculée prend en compte le taux servi en revalorisant à chaque pas de temps la PM avant revalorisation.

À partir de cette description, nous pouvons constater que les points-clés pour la mise en place de cette nouvelle méthode sont de modéliser :

- les cash-flows de passif dans le modèle ALM,
- une nouvelle stratégie de calcul de la participation aux bénéfices adaptée à cette méthode.

Modélisation des flux de passif

La modélisation des flux de passif dans le modèle ALM est effectuée en trois grandes étapes, à savoir :

- Calculer le nombre de polices en début de période et le nombre de sorties (nombre de décès, nombre de rachats totaux et nombre de maturités), puis ensuite calculer le nombre de polices en fin de période. Le calcul des nombres de sorties s'effectue à partir de la table de mortalités et la table de taux de rachats totaux,
- Calculer le montant de la PM revalorisée de la période précédente par police et le montant des primes nettes investies par police, puis ensuite calculer le montant des rachats partiels par police. Le calcul du montant des rachats partiels par police s'effectue à partir des deux premiers montants calculés (le montant de la PM revalorisée de la période précédente par police et le montant des primes nettes investies par police) et de la table de taux de rachats partiels,
- Calculer les montants des cash-flows de passif, à savoir, le montant de sorties partielles et totales, de la PM avant revalorisation, des frais de gestion et des commissions. Le calcul de ces derniers s'effectue à partir des valeurs déterminées dans les deux premières étapes.

Modélisation d'une nouvelle stratégie de calcul de la participation aux bénéfices

Dans le modèle actuellement utilisé par la compagnie, la stratégie de calcul du taux servi est effectuée au niveau produit (i.e regroupement de Model Points), alors que dans la nouvelle méthode, les calculs sont effectués au niveau Model Point. Ainsi, dans cette étape, il faut modéliser une nouvelle stratégie de calcul du taux servi de sorte que le taux servi calculé soit au niveau Model Point.

La modélisation de cette nouvelle stratégie de calcul de la participation aux bénéfices est effectuée en quatre grandes étapes, à savoir :

- Calculer le taux cible pour chaque Model Point puis calculer ensuite le besoin cible pour chaque produit en sommant les besoins cibles au niveau Model Point appartenant au même produit,

$$\text{Besoin}_{\text{Cible}}^{\text{PRD}}(t) = \sum_{i \in \text{PRD}} \text{Taux Cible}^i(t) \times \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^i(t)$$

- Calculer le besoin TMG pour chaque produit,

$$\text{Besoin}_{\text{TMG}}^{\text{PRD}}(t) = \sum_{i \in \text{PRD}} \text{TMG}^i(t) \times \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^i(t)$$

- Utiliser les différents leviers disponibles pour atteindre le besoin TMG et le besoin cible et déterminer ensuite le montant de participation aux bénéfices à servir pour chaque produit,
- Répartir le montant de participation aux bénéfices à servir pour chaque Model Point.

$$\text{Taux Servi}^i(t) = \frac{\text{MT_PB_Servie}^{\text{PRD}}(t)}{\text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^{\text{PRD}}(t)} \quad \text{avec } i \in \text{PRD}$$

Une fois que le taux servi est calculé pour chaque Model Point, nous revalorisons la PM avant revalorisation avec ce taux, ainsi nous obtenons :

$$\text{MT_PM}_{\text{Revalorisé}}^i(t) = \text{MT_PM}_{\text{Avant Revalorisation}}^i(t) \times (1 + \text{Taux Servi}^i(t))$$

Avec i désigne le i ème Model Point.

Maintenant que les différents flux de passif et la nouvelle stratégie de calcul du taux servi sont modélisés dans le modèle ALM, nous déterminons les deux indicateurs BE et VIF pour les deux différentes méthodes "Flexing" et "Internal" afin de pouvoir étudier la pertinence de la méthode "Flexing".

Résultats et conclusions

L'étude de la méthode "Flexing" actuellement utilisée par la compagnie repose sur sa comparaison avec la méthode "Internal". Pour cela, nous avons projeté les deux méthodes de modélisation de passif sur 5000 simulations selon des scénarios économiques centraux, ensuite nous avons calculé le montant du BE et de la VIF pour chacune de ces deux méthodes.

Suite à cette projection des deux méthodes, nous obtenons des écarts au niveau du BE et de la VIF. Comme les deux modèles ont été projetés par deux méthodes de modélisation de passif différentes, ces écarts proviennent essentiellement des cash-flows de passif, à savoir la PM, les sorties (décès, rachats totaux et partiels, maturités) et les commissions.

Pour la méthode "Flexing", les sorties sont ajustées dans le modèle ALM en multipliant les sorties obtenues avec le modèle déterministe par le ratio de flexing. Or la formule de calcul du ratio de flexing s'appuie sur une approximation. Ainsi, nous avons pu démontrer que l'origine des écarts entre les sorties obtenues avec la méthode "Flexing" et la méthode "Internal" vient principalement de cette approximation. Comme la PM dépend des sorties, cela génère alors des écarts au niveau de la PM.

D'autre part, la formule de calcul de la PM, des sorties et des commissions dépend de la PM revalorisée de la période précédente qui dépend elle-même de la PM de la période antérieure. Ainsi par récurrence, les écarts entre les deux méthodes s'accumulent d'année en année de projection.

Nous pouvons alors en conclure que l'origine des écarts entre les deux méthodes au niveau du BE et de la VIF vient principalement des sorties, de la PM et des commissions, en particulier de l'approximation effectuée au niveau du ratio de flexing pour le calcul des sorties.

Par ailleurs, l'étude de la pertinence de la méthode "Flexing" s'est reposée sur les deux indicateurs BE et VIF qui constituent le passif de notre bilan économique. Nous avons obtenu une hausse du $BE_{Flexing}$ de 17 424,58 euros par rapport au $BE_{Internal}$. Comme la valeur des flux futurs du passif est égale à la valeur des flux de l'actif, alors le montant que nous gagnons en BE est perdu en VIF, et donc la hausse de notre $BE_{Flexing}$ va diminuer notre $VIF_{Flexing}$. Or le montant du BE est plus élevé que celui de la VIF, alors quand nous comparons ces écarts en pourcentage, ce gain en $BE_{Flexing}$ ne représente qu'une hausse de 0,0764% alors que la perte en $VIF_{Flexing}$ représente une baisse de 2,5086%. Nous pouvons déduire à partir des résultats obtenus (dans le cadre des hypothèses effectuées) que du point de vu des assurés, la méthode "Flexing" assure une meilleure protection des preneurs d'assurance et des ayants droit. En revanche, du point de vu des actionnaires, la méthode "Flexing" diminue la valeur actuelle des résultats futurs distribuables à l'actionnaire.

Pour finir, les résultats obtenus au niveau du BE et de la VIF nous permettent de confirmer la pertinence de la méthode "Flexing" dans le cadre des hypothèses effectuées lors de la projection, en particulier, dans le cadre de projection selon des scénarios économiques centraux et en absence de rachats dynamiques. En effet, en dehors de ces hypothèses, la pertinence de la méthode "Flexing" reste à étudier.

Executive summary

Problematic and purpose

The liabilities of a life insurer consists of several long-term commitments (Mathematical Reserve "MR") towards policyholders through savings contracts. This mathematical reserve, for saving contracts in euros, is capitalized each year at a rate depending on the insurer's financial production. As a result, a life insurer's liabilities depend on its financial production and thus on its assets. In order to model these interactions that exist between assets and liabilities, the use of an ALM model is essential.

The high number of economic scenarios to be generated and the asset and liability Model Points to be projected in an ALM model leads to substantial computation times. In order to optimize calculation times, the company uses a method, said "Flexing", which consists, in a first step, on projecting the cash-flows of liabilities in a deterministic model, called "Contract" model, by reducing the number of Model Points of liabilities to a very low number of products (tens of thousands of Model Points vs hundreds of products), and then, in a second step, to adjust these deterministic liability cash-flows in an ALM model to make them stochastic. The adjustment of deterministic liability cash-flows is done by multiplying them with a coefficient built by recurrence in the ALM model. This coefficient, called flexing ratio, takes into account the economic scenarios and the actions of policyholders, and is generally calculated in t as follows :

$$\rho_{Flex}(t) = \frac{MR_{ALM}(t)}{MR_{Liability}(t)}$$

With $MR_{Liability}$ refers to the mathematical reserve resulting from the determinist model of liabilities and MR_{ALM} refers to the fictitious mathematical reserve calculated in the stochastic ALM model. This mathematical reserve is used to reflect the mathematical reserve calculated in the "Contract" model that would have been obtained if we had added the distributed financial products.

Otherwise, the calculation of this flexing ratio is based on an approximation made in the outflows used to calculate the fictitious mathematical reserve, thus the interest in studying the relevance of this method and its field of application. To do this, there is an alternative method, called "Internal", which consists in projecting the cash-flows of liabilities directly in a stochastic ALM model without using proxies based on deterministic liabilities cash-flows. Thus, the cash-flows of liabilities obtained with this new method will be projected in the ALM model taking into account the stochastic financial scenarios.

The purpose of this report is to implement this new method of modelling of liabilities "Internal" and to compare it with the currently used "Flexing" method in order to justify the relevance of the "Flexing" method and to study its precision and its field of application. The comparison between this two methods will be based on the study of the two indicators BE and VIF.

Methodology followed

The difference between the two methods comes mainly from the application of the served rate to the mathematical reserve. Indeed, for the "Flexing" method, the cash-flows of liabilities are projected, in a first step, in a deterministic liability model that does not take into account the rate used for the revaluation of the mathematical reserve. At the end of this projection of the liability cash-flows in the deterministic model, we obtain a table of deterministic liabilities cash-flows, called "DET_CF", and a second table of control containing the characteristics of used products. These two tables serve as input in the ALM model. Then, in a second step, the cash-flows of liabilities generated by the deterministic liability model will be *flexed*, that is, adjusted, in the ALM model. Once the cash-flows of liabilities *flexed*, the ALM model proceeds to the interactions that exist between the assets and the liabilities, one of the interactions consists in revaluing the mathematical reserve with the served rate.

On the other hand, for the "Internal" method, the cash-flows of the liabilities are projected directly into the ALM model without passing by the deterministic model, and the resulting liabilities cash-flows take into account the served rate by revaluing at each time step the mathematical reserve before revaluation calculated in the ALM model.

From this description, we can notice that the keys points for the implementation of this new method are to model :

- the cash-flows of liabilities in the ALM model,
- A new strategy of calculation of profit-sharing adapted to this new method.

Modelling of the cash-flows of liabilities

The modelling of the liabilities cash-flows in the ALM model is made in three main steps, namely :

- Calculate the number of policies at the beginning of period and the number of outflows (number of deaths, number of total surrenders and number of maturities), and then calculate the number of policies at the end of period. The calculation of the numbers of outflows is made from the life table and the table of rate of total surrenders,
- Calculate the amount of the revalued mathematical reserve of the previous period per policy and the amount of net premiums invested per policy, and then calculate the amount of partial surrenders per policy. The calculation of the amount of partial surrenders per policy is based on the first two amounts calculated (the amount of the revalued mathematical reserve of the previous period per policy and the amounts of net premiums invested per policy) and the partial surrenders rate table,
- Calculate the amount of liabilities cash-flows, i.e. the amount of partial and total outflows, the mathematical reserve before revaluation, management expenses and commissions. The calculation of the latter is made from the values determined in the first two steps.

Modeling a new strategy of calculation of profit-sharing

In the current model used by the company, the strategy of calculation of the served rate is performed at the product level (i.e. grouping of Model Points), while in the new method, the calculations are performed at the Model Point level. Thus, in this step, it is necessary to model a new strategy of calculation of profit-sharing so that the served rate calculated is at the Model Point level.

The modelling of this new strategy of calculation of profit-sharing is made in four main steps, namely :

- Calculate the target rate for each Model Point and then calculate the target requirement for each product by summing the targets requirements at the Model Point level belonging to the same product,

$$\text{Requirement}_{\text{Target}}^{\text{PRD}}(t) = \sum_{i \in \text{PRD}} \text{Target Rate}^i(t) \times \text{MR}_{\text{Before Revaluation}}^i(t)$$

- Calculate the minimum guaranteed interest requirement for each product,

$$\text{Requirement}_{\text{TMG}}^{\text{PRD}}(t) = \sum_{i \in \text{PRD}} \text{TMG}^i(t) \times \text{MR}_{\text{Before Revaluation}}^i(t)$$

- Use the different levers available to reach the minimum guaranteed interest requirement and the target requirement and then determine the amount of profit-sharing to serve for each product,
- Distribute the amount of profit-sharing to be served for each Model Point.

$$\text{Served Rate}^i(t) = \frac{\text{Profit-Sharing_Served}^{\text{PRD}}(t)}{\text{MR}_{\text{Before Revaluation}}^{\text{PRD}}(t)} \quad \text{with } i \in \text{PRD}$$

Once the served rate is calculated for each Model Point, we revalue the mathematical reserve before revaluation with this rate, so we obtain :

$$\text{MR}_{\text{revalued}}^i(t) = \text{MR}_{\text{Before Revaluation}}^i(t) \times (1 + \text{Served Rate}^i(t))$$

With i indicate the i th Model Point.

Now that the liabilities cash-flows and the new strategy of calculation of profit-sharing are modelled in the ALM model, we determine the two indicators BE and VIF for both different methods "Flexing" and "Internal" in order to study the relevance of the "Flexing" method.

Results and conclusions

The study of "Flexing" method currently used by the company is based on its comparison with "Internal" method. For this, we projected both methods of liabilities modelling on 5000 simulations, then we calculated the amount of the BE and the VIF for each of these two methods.

Further to this projection of both methods, we obtain variance in the BE and the VIF. As both models were projected by two different liability modeling methods, these variance results essentially from cash-flows of liabilities, namely, mathematical reserve, outflows (Deaths, total and partial surrenders, maturities), expenses and commissions.

For the "Flexing" method, the outflows obtained with the deterministic model are adjusted in the ALM model by multiplying them by the flexing ratio. Yet the formula of calculation of the flexing ratio is based on an approximation. Thus, we were able to demonstrate that the origin of the variance between the outflows obtained with "Flexing" method and "Internal" method comes mainly from this approximation. And as the mathematical reserve depends on the outflows, it generates then variance in the mathematical reserve.

Furthermore, the formula for calculating the mathematical reserve, outflows and commissions depends on the mathematical reserve revalued of the previous period which also depends on the mathematical reserve of the previous period, thus by recurrence, the variance between the two methods accumulate from year to year of projection.

We can then conclude that the origin of the variance between the two methods in BE and VIF comes mainly from outflows, mathematical reserves and commissions, in particular the approximation made at the level of the flexing ratio for the calculation of the outflows.

Otherwise, the study of the relevance of "Flexing" method based on BE and VIF, which establish the liability of our economic balance sheet. We obtained an increase of the $BE_{Flexing}$ 17 424,58 euros compared to the $BE_{Internal}$. As the value of the future liabilities cash-flows is equal to the value of the assets cash-flows, then the amount we earn in the BE is lost in the VIF, thus this increase in our $BE_{Flexing}$ will decrease our $VIF_{Flexing}$. Yet the amount of the BE is higher than that of the VIF, then when we compare these variance in percentage, this gain in $BE_{Flexing}$ represents only an increase of 0,0764% while the loss in $VIF_{Flexing}$ represents a decrease of 2,5086%. It can be deduced from the results obtained (in the context of the assumptions made) that from the point of view of policyholders that "Flexing" method provides better protection for policyholders and beneficiaries. While from the point of view of shareholders, the "Flexing" method reduces the present value of the future results distributable to the shareholder.

Finally, the results obtained in the BE and the VIF allow us to confirm the relevance of the "Flexing" method in the context of the assumptions made during the projection, in particular, in the central economic scenarios projection and in the absence of dynamic surrenders. Indeed, outside these assumptions, the relevance of the method "Flexing" remains to be studied.