

Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires
le 19/02/2019

Par : **Julien Mattei**

Titre : **Apports de la data science dans l'analyse des résultats
d'un modèle de gestion actif-passif en assurance-vie**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de la filière

Entreprise : Mazars Actuariat

Nom : Alexandre GUCHET

Signature :

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Alice THOU

Signature :

Nom : Ismaël TAHRI HASSANI

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature du candidat

Bibliothèque :

Remerciements

Je souhaiterais remercier les associés de Mazars Actuariat Alexandre GUCHET et Grégory BOUTIER pour m'avoir permis de réaliser mon mémoire au sein du cabinet ainsi que toute l'équipe de Mazars Actuariat pour leur accueil et leur soutien tout au long de ce mémoire.

En particulier, je remercie Alice THOU et Ismaël TAHRI HASSANI pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet passionnant. J'aimerais sincèrement les remercier pour la qualité de leur encadrement et de leurs précieux conseils qui ont fait de ce mémoire une expérience enrichissante.

Enfin, je remercie également Caroline HILLAIRET et Nicolas BARADEL, responsables de la voie Actuariat de l'ENSAE pour la qualité de leurs enseignements.

Résumé

Le sujet du mémoire porte sur l'apport des outils proposés par la data science afin d'analyser les résultats d'un modèle de gestion actif-passif (ALM) en assurance-vie. Les compagnies d'assurance-vie ont construit des modèles dits de gestion actif-passif afin de gérer au mieux leur bilan économique. L'objectif est de prévoir l'impact d'une augmentation (ou d'une baisse) des taux ou des actions sur le bilan économique. Mais aussi de prévoir le comportement des assurés comme le déclenchement de rachats de contrats, les décès et également le comportement des concurrents. Dans un contexte économique changeant, les organismes d'assurance ont observé une forte volatilité des résultats produits par leurs modèles ALM sur la dernière décennie, s'agit t-il d'un biais de modèle ou d'une réelle modification de la rentabilité de l'organisme ? Il est souvent difficile de comprendre l'origine de l'évolution de ces résultats, c'est pour cela que nous avons analysé les données en entrée et en sortie d'un modèle ALM afin d'essayer de comprendre les mécanismes et aussi l'impact des hypothèses du modèle ALM sur les résultats du bilan. Rappelons qu'il ne s'agit pas de retrouver les hypothèses du modèle ALM car on suppose que l'assureur a construit son modèle et qu'il les connaît donc. L'objectif de notre étude est d'explicitier quels sont les impacts concrets du choix de ses hypothèses sur le calcul du *best estimate* dans le modèle ALM.

Le modèle ALM que nous avons utilisé est un modèle développé dans le cadre d'un mémoire précédent[6]. Celui-ci prend en entrée 1000 scénarios, projetés sur 30 ans et produit en sortie une valeur de *best estimate* qui est calculée comme la valeur moyenne sur les 1000 scénarios des provisions que l'assureur doit posséder pour pouvoir honorer ses engagements envers les assurés. La variabilité des résultats observés par les assureurs dans leur modèle ALM provient uniquement des scénarios économiques. En effet, le modèle ALM est construit à partir de règles déterministes. En d'autres termes, toute choses égales par ailleurs pour un scénario économique donné, le modèle donnera toujours la même valeur de *best estimate* en sortie.

Ainsi, notre étude se concentre sur l'analyse des scénarios économiques de taux, de rendements actions et immobiliers utilisés en entrée du modèle ALM. Nous avons proposé une démarche afin de résumer l'information de ces scénarios économiques. Pour cela, nous avons proposé plusieurs méthodes dont l'analyse en composantes principales, la méthode de classification dites des *k-means* afin de regrouper les scénarios économiques avec des comportements similaires en *clusters*. Puis une méthode de classification plus adaptée aux séries temporelles, dite de *Dynamic Time Warping* permettant de capter les similitudes entre deux séries temporelles même si celles-ci sont décalées dans le temps. Cette dernière méthode a donné des résultats satisfaisants en terme de visualisation des scénarios économiques, en regroupant les scénarios dans des groupements avec des trajectoires aux comportements similaires.

Ensuite, nous nous sommes intéressés à une variable présente dans le modèle ALM : le taux concurrent. Nous avons appliqué les méthodes de classification précédentes sur les séries de taux concurrents. Cela a permis d'extraire un groupement de scénarios économiques conduisant à des fortes valeurs de *best estimate* en sortie du modèle ALM.

Pouvoir détecter les scénarios économiques à l'origine des grandes valeurs de *best estimate* permet à l'assureur d'avoir une meilleure compréhension de l'impact des hypothèses sur son modèle ALM et éventuellement de remettre en cause ses hypothèses ou de mettre en place des règles spécifiques pour traiter les scénarios extrêmes. En d'autres termes, cela permet à l'assureur de mieux apprécier la cohérence des hypothèses liées à son modèle ALM et ainsi limiter le risque de modèle.

Abstract

This thesis is about the application of data science tools for outputs analysis of an asset liability management (ALM) model in life insurance. Insurance companies built ALM models to optimize the management of their balance sheet. The role of this models is to study the impact of a rise (or a fall) in rates or equities on the balance sheet. Also predict the behavior of their clients, some of them will repurchase their contract or die. The behavior of their economic rival is also important. In an unstable economic environment, insurance companies notice a great volatility in their ALM results during the last decade. Can this be explained by a model bias or a real change in profitability? It's often difficult to understand the origin of this results, this is why we analyze the inputs and outputs of an ALM model in order have a deeper understanding of the hypothesis chosen and the mechanism. One must keep in mind that the purpose of our study is not to find the hypothesis but to explain the impact of these hypothesis one the best estimate in output.

The ALM model we used was built for another actuarial thesis [6]. The model has 1000 scenarios in input, projected onto 30 years. The output is an average of the best estimate of each scenario. The best estimate is defined as the amount of money the insurance company has to own in order to honor its commitments. The observed variability of results comes from the variability of the economic scenarios. In fact, the rules defined in the ALM model are deterministic.

Thus, we will focus our study on the rates, equity and real estate rates scenarios in input. We proposed a methodology in order to summarized the information of the economic scenarios in input. Thus, we used several methods as principal components analysis, classification methods like the "k-means" in order to regroup the economic scenarios with similarities. Then we used a classification method called "Dynamic Time Warping" to spot similarities between lagged time series. This last method gives the best results by grouping the scenarios with similarities in the same clusters.

Then, we focused on a variable called the rival rate. We applied the same classification methods but on the rival rate. We manage to extract clusters of scenarios that lead to high value of best estimate in output of the ALM model.

The ability to identify the scenarios that lead to high values of best estimate in output gives a better understanding of the impact of hypothesis chosen. This can lead the insurance company to take specific actions or at least to reduce the risk linked to its model.

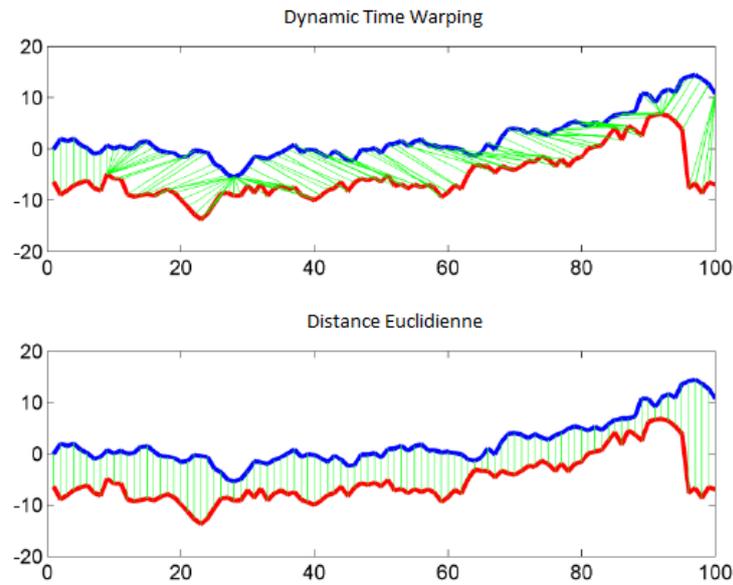
Note de synthèse

Le sujet du mémoire porte sur l'apport des outils proposés par la data science afin d'analyser les résultats d'un modèle de gestion actif-passif (ALM) en assurance-vie. Les compagnies d'assurance-vie ont construit des modèles dits de gestion actif-passif afin de gérer au mieux leur bilan économique. L'objectif est de prévoir l'impact d'une augmentation (ou d'une baisse) des taux ou des actions sur le bilan économique. Mais aussi de prévoir le comportement des assurés comme le déclenchement de rachats de contrats, les décès et également le comportement des concurrents. Dans un contexte économique changeant, les organismes d'assurance ont observé une forte volatilité des résultats produits par leurs modèles ALM sur la dernière décennie, s'agit-il d'un biais de modèle ou d'une réelle modification de la rentabilité de l'organisme ? Il est souvent difficile de comprendre l'origine de l'évolution de ces résultats, c'est pour cela que nous avons analysé les données en entrée et en sortie d'un modèle ALM afin d'essayer de comprendre les mécanismes et aussi l'impact des hypothèses du modèle ALM sur les résultats du bilan. Rappelons qu'il ne s'agit pas de retrouver les hypothèses du modèle ALM car on suppose que l'assureur a construit son modèle et qu'il les connaît donc. L'objectif de notre étude est d'explicitier quels sont les impacts concrets du choix de ses hypothèses sur le calcul du *best estimate* dans le modèle ALM.

Le modèle ALM que nous avons utilisé est un modèle développé dans le cadre d'un mémoire précédent[6]. Celui-ci prend en entrée 1000 scénarios, projetés sur 30 ans et produit en sortie une valeur de *best estimate* qui est calculée comme la valeur moyenne sur les 1000 scénarios des provisions que l'assureur doit posséder pour pouvoir honorer ses engagements envers les assurés. La variabilité des résultats observés par les assureurs dans leur modèle ALM provient uniquement des scénarios économiques. En effet, le modèle ALM est construit à partir de règles déterministes. En d'autres termes, toute chose égales par ailleurs pour un scénario économique donné, le modèle donnera toujours la même valeur de *best estimate* en sortie.

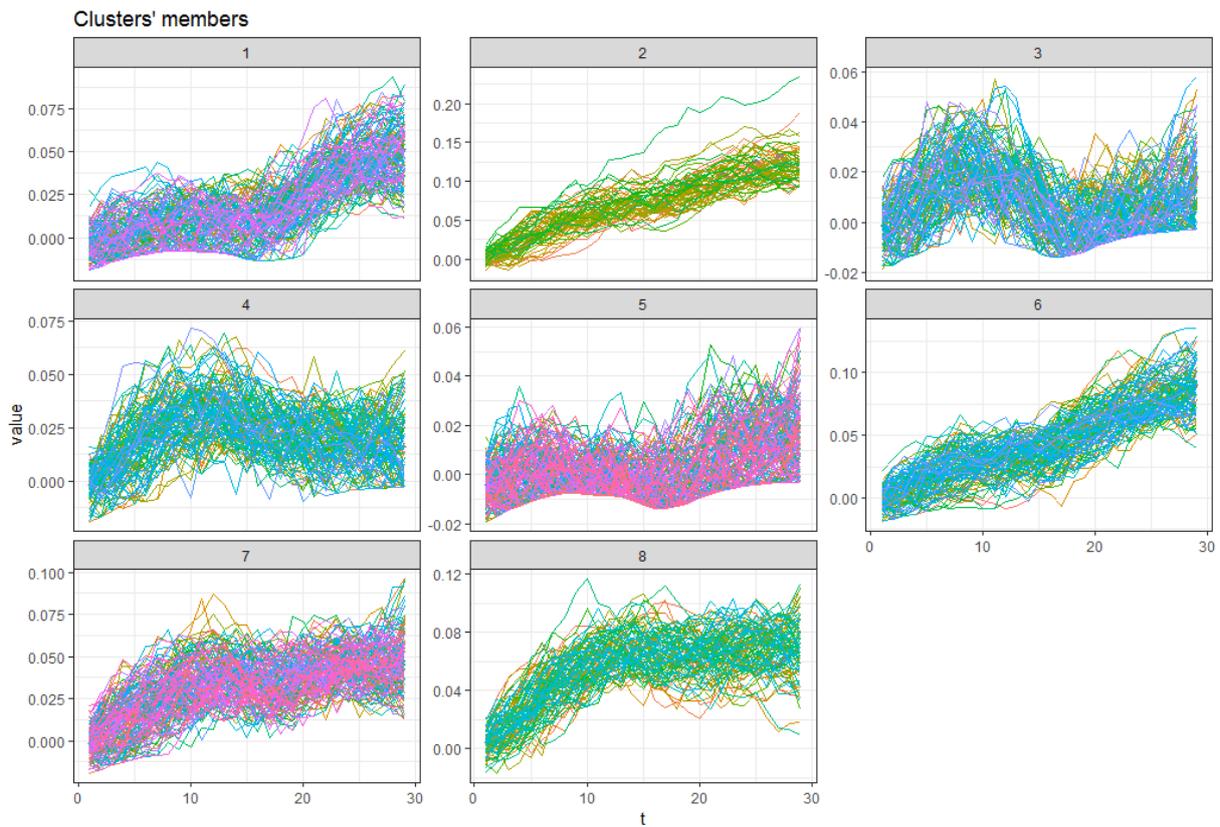
Ainsi, notre étude se concentre sur l'analyse des scénarios économiques de taux, de rendements actions et immobiliers utilisés en entrée du modèle ALM. Nous avons proposé une démarche afin de résumer l'information de ces scénarios économiques. Nous avons proposé plusieurs méthodes comme l'analyse en composantes principales et la méthode de classification des *k-means* dont les résultats sont détaillés dans le mémoire. Mais nous nous attarderons ici sur la méthode qui a donné les meilleurs résultats tant en terme de visualisation des scénarios économiques que d'interprétations des mécanismes du modèle ALM. Il s'agit de la méthode de *Dynamic Time Warping*.

Le *Dynamic Time Warping* (DTW) est un algorithme qui permet de comparer des séries temporelles en calculant une distance qui prend en compte l'évolution dans le temps des séries. Contrairement à la distance Euclidienne qui mesure à un instant t donné la distance entre deux séries, le *Dynamic Time Warping* prend en compte le décalage temporel qui peut exister entre deux séries pourtant similaires. La manière la plus intuitive de comprendre l'idée du DTW est de faire une représentation graphique. La figure ci-dessous montre comment la distance entre deux séries temporelles est calculée par la méthode DTW et par la distance Euclidienne. Avec la méthode DTW, seuls les premiers et les derniers points de la série sont comparés exactement à la même date, pour les autres points les comparent à des dates différentes si celles-ci permettent de trouver des similarités.



Comparaison de la méthode DTW et distance Euclidienne¹.

Nous avons utilisé l'algorithme de *Dynamic Time Warping* sur les trajectoires de taux zéro-coupons 1 an. Les résultats ci-dessous montrent les différents groupements ou *clusters* de scénarios générés par l'algorithme.



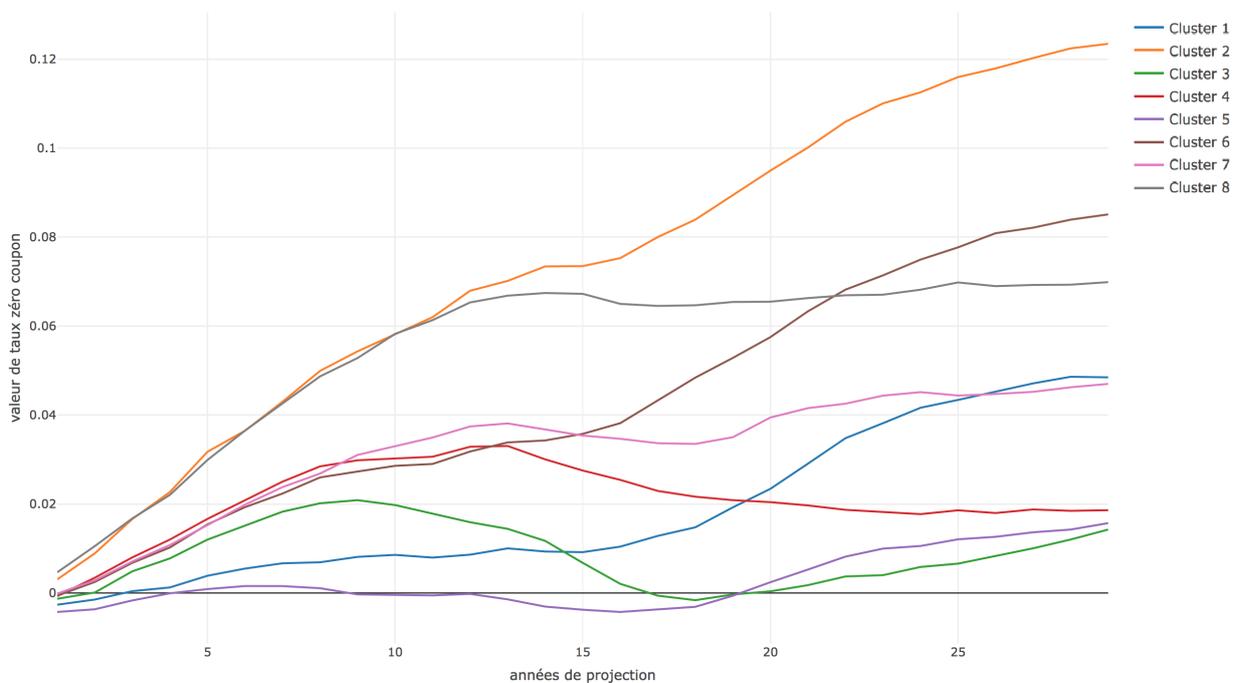
Représentation graphique des séries de chaque *cluster*

On observe que les trajectoires de taux au sein de chaque *cluster* sont assez bien différenciées. Le *cluster* numéro 1 contient des trajectoires de taux faibles et constantes sur les 15 premières années

1. Source : Alexis Sarda-Espinosa, Comparing Time-Series Clustering Algorithms in R Using the dtwclust Package

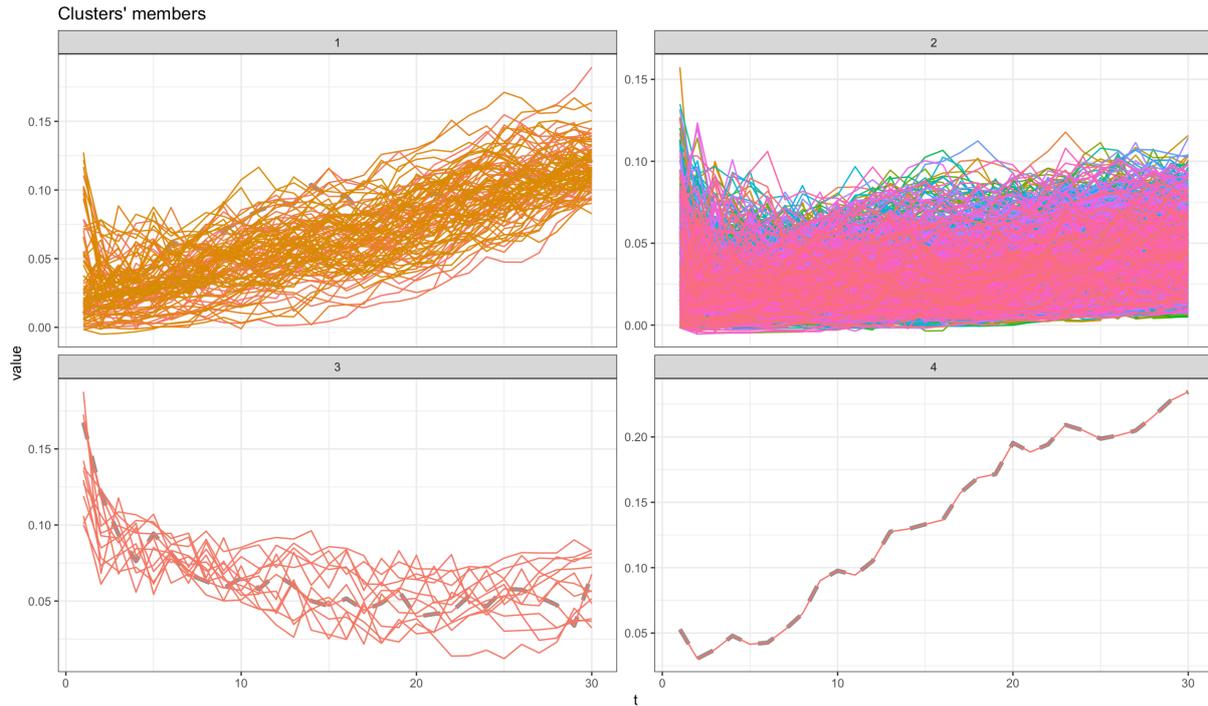
de projection puis faiblement croissantes. Le *cluster* numéro 2, regroupe les trajectoires de taux fortement croissantes et pouvant atteindre des taux de l'ordre de 15% en fin de projection. Le *cluster* numéro 3, regroupe les trajectoires croissantes sur les 6 premières années de projection jusqu'à atteindre un niveau de taux d'environ 3%, puis décroissantes entre les 7^{ème} et 15^{ème} années et enfin légèrement croissantes jusqu'à la fin de la projection. Le *cluster* 4, regroupe des trajectoires plutôt croissantes jusqu'à la 11^{ème} année de projection pour atteindre environ 4% puis décroissante jusqu'à la fin de la projection. Pour le *cluster* 5, les trajectoires sont croissantes les 8 premières années, puis redescendent jusqu'à la 17^{ème} année et enfin croissent à nouveau en toute fin de projection. Les trajectoires du *cluster* 6 sont croissantes, à l'image du *cluster* 2 mais avec des niveaux de taux plus faibles atteignant environ 10% en fin de projection. Le *cluster* 7 possède des trajectoires faiblement croissantes, avec une moyenne autour de 4%. Enfin, le dernier *cluster* regroupe des trajectoires de taux fortement croissantes jusqu'à la 11^{ème} année puis se stabilisent autour de 7% jusqu'à la fin de la projection.

Pour visualiser de manière plus claire le comportement des *clusters*, on peut représenter pour chaque *cluster* la série moyenne c'est-à-dire celle correspondant à la moyenne de toutes les séries sur les 30 années de projection. On observe sur la figure ci-dessous que le comportement des séries de taux au sein des différents *clusters* est bien différencié :



Représentation graphique des séries moyennes de chaque *cluster*

L'intérêt d'une telle visualisation est de pouvoir exposer au management des compagnies d'assurances une vision globale des différents scénarios économiques mis en entrée de leur modèle ALM. Désormais, notre objectif est de pouvoir expliciter le comportement du modèle ALM pour ces groupements de trajectoires économiques. Les trajectoires de taux zéro-coupon n'ayant pas donné des résultats facilement interprétables, nous nous sommes penchés sur une autre grandeur qui est le taux concurrent. Le taux concurrent a l'avantage d'être construit à partir des valeurs des rendements actions et taux zéro-coupons, ce qui permet de rassembler en une seule grandeur deux composantes essentielles des scénarios économiques utilisés en entrée du modèle. De la même manière, nous utilisons l'algorithme de *Dynamic Time Warping* pour réaliser des *clusters* de taux concurrents dont les résultats sont présentés sur la figure ci-dessous :

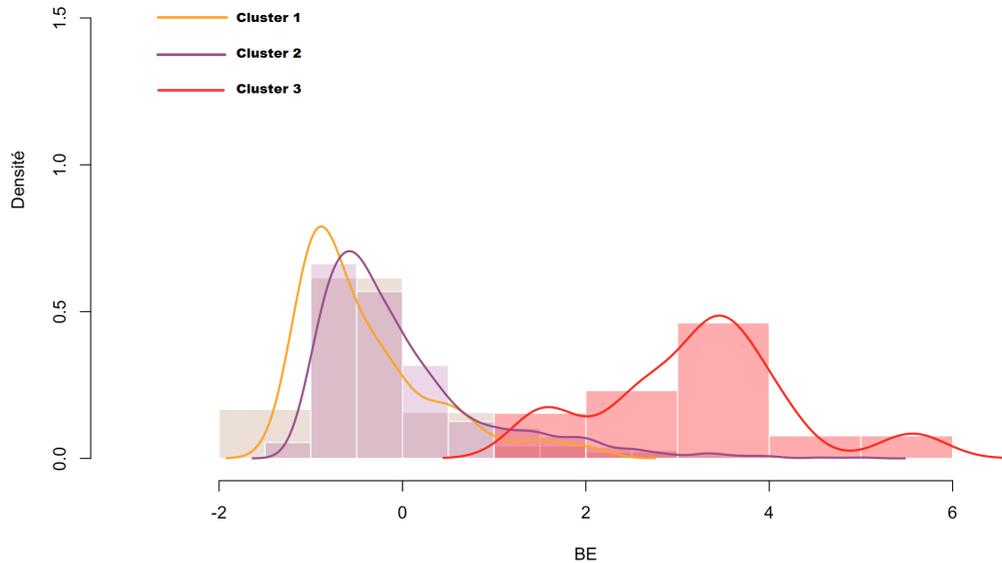


Représentation graphique des séries dans chaque *cluster*

On observe que les trajectoires sont bien différenciées entre les *clusters*. Le *cluster 1* contient les trajectoires de taux concurrent fortement croissants, pour atteindre jusqu'à 15% en fin de projection. Le *cluster 2* regroupe des trajectoires avec des variations proches de la moyenne 5%. Le *cluster 3* contient des trajectoires avec des grandes valeurs de taux concurrent sur les premières années de projection, pouvant dépasser 15% puis décroissantes sur le reste des années de projections.

La figure suivante montre l'histogramme de répartition du *best estimate* sur les trois premiers *clusters*. La fréquence est rapportée au nombre de scénarios par *clusters*.

Clusters de taux concurrents



Histogramme de distribution du BE pour chacun des *clusters* de taux concurrent

On remarque que les groupements de scénarios conduisent à des valeurs de *best estimate* assez différenciés notamment en ce qui concerne le *cluster 3* (en bas à gauche de la figure précédente). La distribution en rouge, correspond au *cluster 3* tandis que les distributions en marron et violet correspondent respectivement aux *clusters 1* et *2*. On remarque que la distribution des $BE_{i,0}$ du *cluster 3* (en rouge) est en moyenne nettement supérieure à celle des autres *clusters*.

Afin de comprendre les mécanismes qui conduisent aux valeurs de BE élevés dans le *cluster 3*, nous avons étudié l'évolution de grandeurs intermédiaires à savoir : la réserve de PPE, les plus-values sur actions, le montant des rachats dynamiques et les résultats financiers. Cette analyse nous a permis de reconstruire le fil des événements expliquant les fortes valeurs de *Best estimate* du *cluster 3*. Les rendements importants de la première année ont engendré des plus-values latentes. Ces plus-values latentes ont été liquidées pour servir le taux concurrent, qui est élevé du fait des forts rendements actions de la première année. Pour rebalancer le portefeuille, la compagnie a certainement dû racheter des actions sur lesquelles il n'y a, par définition, pas de plus-values latentes. Or, le taux concurrent reste élevé malgré les faibles rendements actions des années suivantes, puisque par construction il y a une inertie du fait du lissage du taux concurrent sur 5 ans. Pour suivre ce rythme, la compagnie liquide sa PPE très rapidement, mais cela ne suffit pas à empêcher le déclenchement des rachats dynamiques.

L'étude de ces scénarios conduisant à des fortes valeurs de *best estimate* nous a permis d'identifier les mécanismes ALM à l'origine de ce comportement. Nous avons mis en évidence, que les choix de modélisation du taux concurrent étaient à l'origine de ces valeurs élevées de *best estimate*. En effet, le choix de modélisation retenue par la compagnie fictive est de lisser le taux concurrent sur 5 ans. Économiquement, ce lissage se justifie car il permet de prendre en compte l'effet « mémoire » taux servi par le concurrent ainsi que la stabilité de la politique de taux servi. Cependant, ce lissage a pour conséquence de tirer vers le haut le taux concurrent à partir du moment où au moins l'une des 5 années précédentes a un taux concurrent élevé. Or, les scénarios du *cluster* conduisant au *best estimate* élevés ont la caractéristique commune d'avoir des forts rendements actions en première année de projection et par conséquent un taux concurrent élevé en première année. Le lissage maintient le

taux concurrent élevé sur les premières années de projection, ce qui conduit le modèle ALM à réaliser des plus-values latentes et reprendre de la PPE pour pouvoir servir le taux concurrent des premières années alors même que les rendements actions de ces années ne sont pas très élevés. Ce mécanisme conduit au déclenchement de rachats dynamiques qui expliquent l'augmentation du montant du *best estimate* à provisionner. Enfin, le fait que les règles de distribution du taux cible ne contiennent pas de limite dans la réalisation des plus-values latentes contribue au mécanisme expliqué précédemment.

Notre approche a permis de cibler les points de modélisation qui sont à l'origine de comportements singuliers dans le modèle ALM de notre compagnie fictive. Par la suite, c'est à l'assureur de prendre des décisions quant à la modélisation du taux concurrent et aux règles de distribution du taux cible de son modèle ALM. Une correction possible serait d'établir une règle qui consiste à plafonner le montant des plus-values actions distribué pour servir le taux cible, au moins en début de projection. En effet, on préférera déclencher quelques rachats dynamiques à la deuxième année de projection plutôt que de liquider toutes les plus-values actions en première année ce qui déclenchera des rachats massifs en quatrième année. De plus, les rachats dynamiques se déclenchent parce que le taux concurrent reste très élevé même après une chute des actions en raison du choix de lisser le taux concurrent sur 5 ans dans les hypothèses de modélisation du modèle ALM. L'assureur peut décider de lisser le taux concurrent sur un plus faible nombre d'années, par exemple sur 3 ans. Cette étude a permis de mettre en avant que cette hypothèse était clé dans notre modélisation, ce qui amène à en discuter la pertinence. Nous avons étudié les conséquences de ces corrections comme la modification du lissage du taux concurrent ou le plafonnement des plus-values latentes réalisées.

La démarche d'analyse présentée a l'avantage de pouvoir être mise en oeuvre par les assureurs sur n'importe quel modèle ALM. Évidemment, les conclusions ne seront certainement pas les mêmes selon les assureurs car elles dépendent du modèle étudié. Cependant, elle permet aux assureurs d'avoir une approche objective sur les conséquences des hypothèses qui ont été choisies dans leur modèle ALM.

Executive Summary

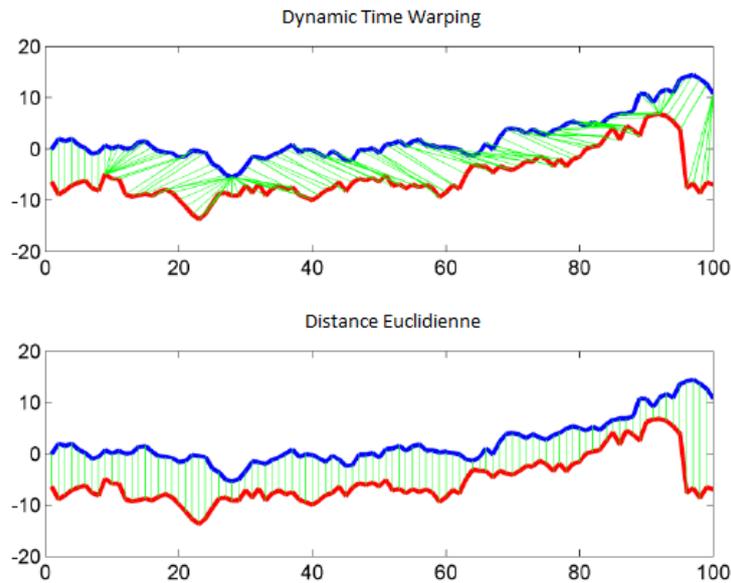
This thesis is about the application of data science tools for outputs analysis of an asset liability management (ALM) model in life insurance. Insurance companies built ALM models to optimize the management of their balance sheet. The role of these models is to study the impact of a rise (or a fall) in rates or equities on the balance sheet. Also predict the behavior of their clients, some of them will repurchase their contract or die. The behavior of their economic rival is also important. In an unstable economic environment, insurance companies notice a great volatility in their ALM results during the last decade. Can this be explained by a model bias or a real change in profitability? It's often difficult to understand the origin of these results, this is why we analyze the inputs and outputs of an ALM model in order to have a deeper understanding of the hypothesis chosen and the mechanism. One must keep in mind that the purpose of our study is not to find the hypothesis but to explain the impact of these hypothesis on the best estimate in output.

The ALM model we used was built for another actuarial thesis [6]. The model has 1000 scenarios in input, projected onto 30 years. The output is an average of the best estimate of each scenario. The best estimate is defined as the amount of money the insurance company has to own in order to honor its commitments. The observed variability of results comes from the variability of the economic scenarios. In fact, the rules defined in the ALM model are deterministic.

Thus, we will focus our study on the rates, equity and real estate rates scenarios in input. We proposed a methodology in order to summarize the information of the economic scenarios in input. Thus, we used several methods as principal components analysis, classification methods like the "k-means" in order to regroup the economic scenarios with similarities. Then we used a classification method called "Dynamic Time Warping" to spot similarities between lagged time series. This last method gives the best results by grouping the scenarios with similarities in the same clusters.

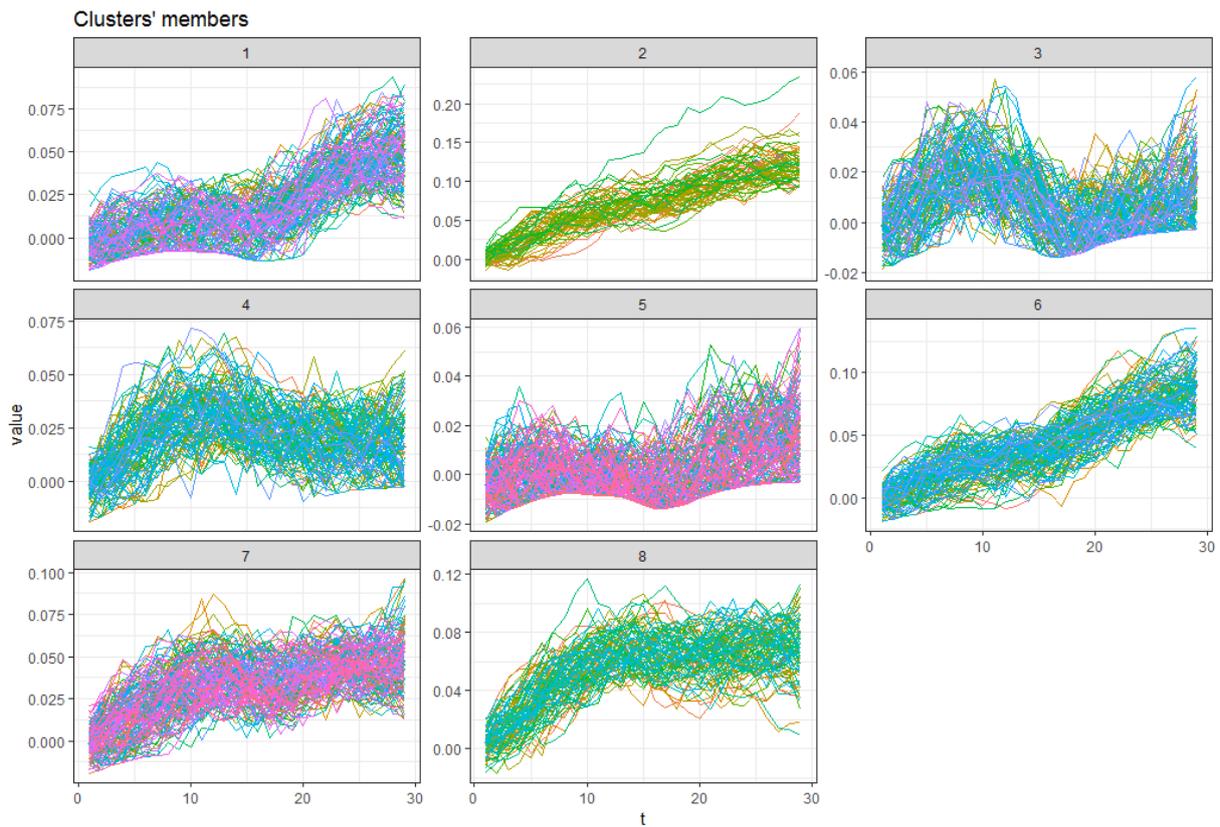
Dynamic Time Warping (DTW) is an algorithm to compare lagged time series. Contrary to the euclidean distance that compute the distance between time series at the same moment m , Dynamic Time Warping takes into account the lag between time series that appear to be similar. The easiest

The most intuitive way to understand the idea of DTW is to make a graphic representation. The figure below shows how the distance between two time series is calculated by DTW and Euclidean distance. With the DTW method, only the first and last points of the series are compared exactly on the same date, so that the other points can be compared to those at different moments.



Comparaison de la méthode DTW et distance Euclidienne².

We used the Dynamic Time Warping algorithm on 1-year zero-coupon rate trajectories. The results below show the different groupings or clusters of scenarios generated by the algorithm.



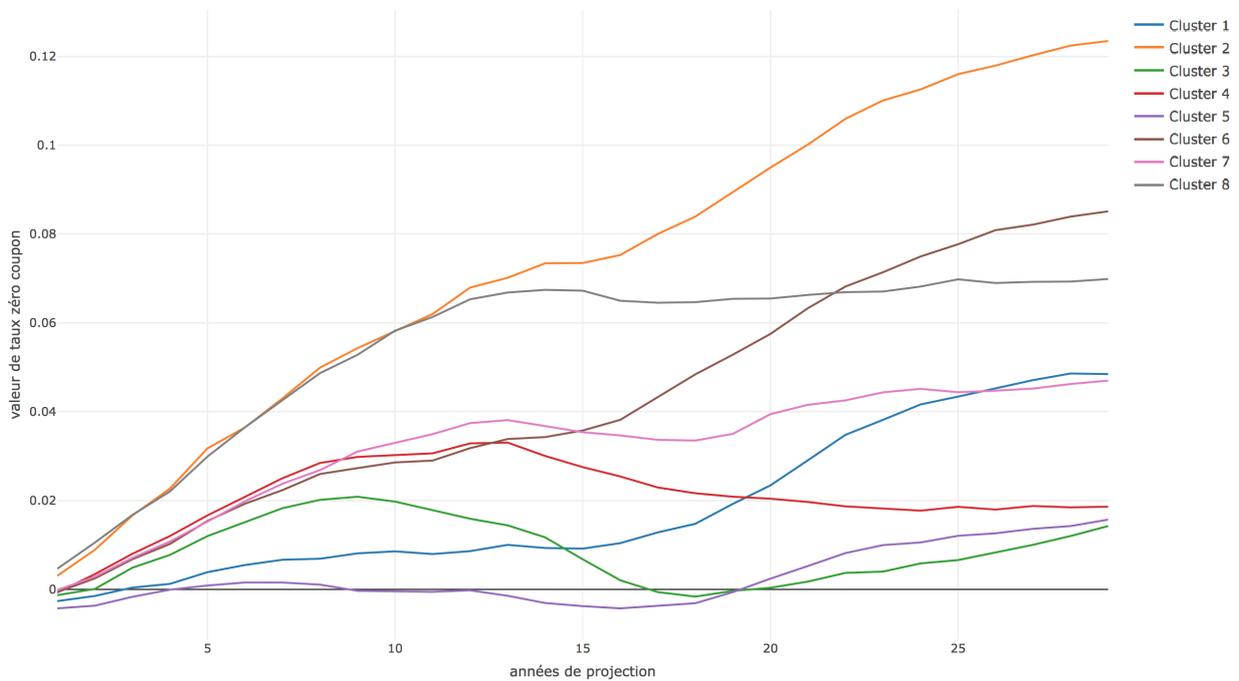
Représentation graphique des séries de chaque *cluster*

We observe that the rate trajectories within each cluster are fairly well differentiated. Cluster number 1 contains low and constant rate trajectories over the first 15 years of projection and then slightly increasing. Cluster number 2 groups together highly increasing interest rate trajectories that

2. Source : Alexis Sarda-Espinosa, Comparing Time-Series Clustering Algorithms in R Using the dtwclust Package

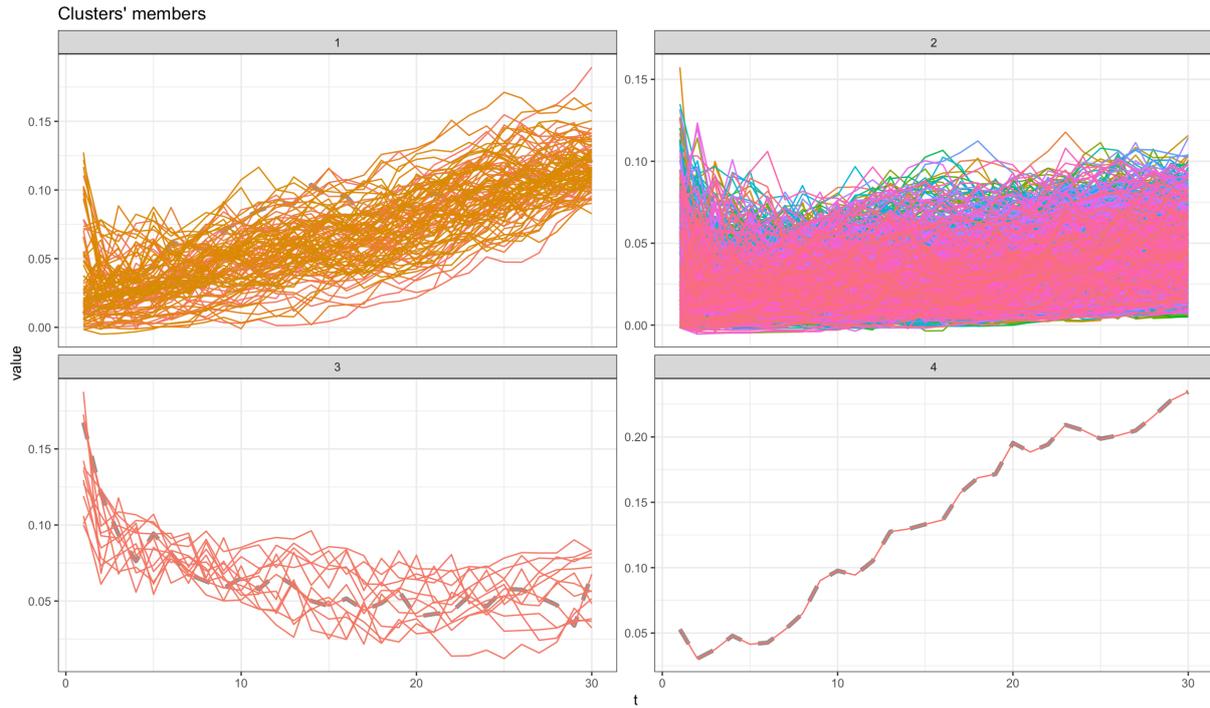
can reach rates of around 15% at the end of the projection. Cluster number 3 groups the increasing trajectories over the first 6 years of projection until reaching a level of rates of approximately 3%, then decreasing between the seventh and the fifteenth year and finally slightly increasing until the end of projection. Cluster 4 groups together rather large trajectories up to the eleventh year of projection, reaching approximately 4% and then decreasing until the end of the projection. For cluster 5, the trajectories are increasing for the first 8 years, then go down again until the seventeenth year and finally re-grow at the very end of the projection. The trajectories of cluster 6 are increasing, like cluster 2 but with lower rate levels reaching about 10% at the end of the projection. Cluster 7 has slightly increasing trajectories, averaging around 4%. Finally, the last cluster groups up strongly increasing rate trajectories up to the eleventh year and then stabilize around 7% until the end of the projection.

To visualize more clearly the behavior of clusters, we can represent for each cluster the average series that is to say that corresponding to the average of all the series over the 30 years of projection. We observe in the figure below that the behavior of the series of rates within the different clusters is well differentiated :



Représentation graphique des séries moyenne de chaque *cluster*

The interest of such a visualization is to be able to expose to the management of the insurance companies a global vision of the different economic scenarios put in input of their model ALM. From now on, our objective is to be able to explain the behavior of the ALM model for these groupings of economic trajectories. Since the zero-coupon rate trajectories did not give easily interpretable results, we looked at another variable, which is the competing rate. The competing rate has the advantage of being constructed from the values of equity returns and zero-coupon rates, which makes it possible to gather in one variable two essential components of the economic scenarios. In the same way, we use the Dynamic Time Warping algorithm to realize competing rate clusters whose results are shown in the figure below :

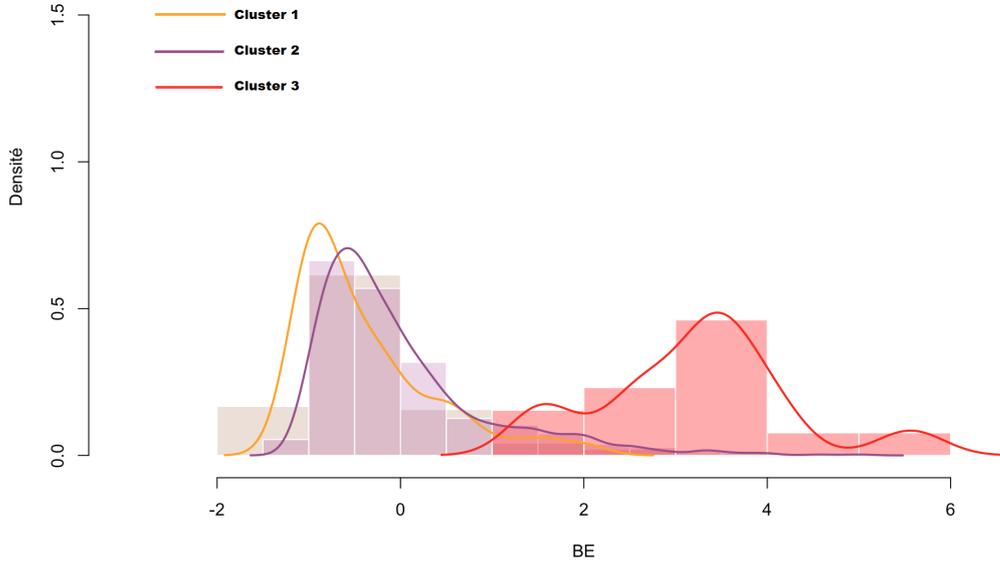


Représentation graphique des séries dans chaque *cluster*

We observe that the trajectories are well differentiated between clusters. The cluster 1 contains the strongly increasing concurrent rate trajectories, reaching up to 15% at the end of the projection. The cluster 2 groups trajectories with variations close to the average 5%. The cluster 3 contains trajectories with large competing rate values over the first years of projection, which can exceed 15% and then decrease over the rest of the projection years.

The following figure shows the distribution histogram of best estimate on the first three clusters. The frequency is related to the number of scenarios by clusters.

Clusters de taux concurrents



Histogramme de distribution du BE pour chacun des *clusters* de taux concurrent

We notice that the groupings of scenarios lead to fairly differentiated values of best estimate, especially as regards cluster 3 (bottom left of the previous figure). The distribution in red corresponds to cluster 3 whereas the distributions in brown and purple correspond to clusters 1 and 2, respectively. Note that the distribution of $BE_{i,0}$ of cluster 3 (in red) is on average much higher than that of the other clusters.⁴

In order to understand the mechanisms that lead to high BE values in cluster 3, we studied the evolution of intermediate quantities namely : the PPE reserve, capital gains on shares, the amount of dynamic buybacks and financial results. This analysis allowed us to reconstruct the sequence of events explaining the high values of Best estimate of the cluster 3. The important returns of the first year have generated latent capital gains. These unrealized capital gains were liquidated to serve the competing rate, which is high due to the strong equity returns of the first year. To rebalance the portfolio, the company has certainly had to buy back shares on which there is, by definition, no unrealized gains. However, the competing rate remains high despite the low equity returns of the following years, since by construction there is inertia due to the smoothing of the competing rate over 5 years. To keep up with this pace, the company is liquidating its PPE very quickly, but that is not enough to prevent the triggering of dynamic buyouts.

The study of these scenarios leading to high values of best estimate allowed us to identify the ALM mechanisms at the origin of this behavior. We have highlighted that the rival rate modeling choices were at the origin of these high values of best estimate. Indeed, the choice of modeling chosen by the fictional company is to smooth the competing rate over 5 years. Economically, this smoothing is justified because it allows to take into account the effect « memory » rate served by the competitor as well as the stability of the rate policy served. However, this smoothing has the effect of pulling up the competing rate from the moment when at least one of the previous 5 years has a high competitive rate. However, the scenarios of the cluster leading to the best estimate have the common characteristic of having strong equity returns in the first year of projection and consequently a high competing rate in the first year. Smoothing maintains the high competitive rate over the first years of projection, which causes the ALM model to unrealized capital gains and used PPE to be able to serve the competing rate of the first years even as the equity returns of those years are not very high.

This mechanism leads to the triggering of dynamic buyouts that explain the increase in the amount of the best estimate to be provisioned. Finally, the fact that the target rate distribution rules do not contain any limit in the realization of unrealized gains contributes to the mechanism explained above.

Our approach has made it possible to target the modeling points that are at the origin of singular behaviors in the ALM model of our fictional company. Subsequently, it is up to the insurer to make decisions regarding the modeling of the competing rate and the target rate distribution rules of its ALM model. One possible correction would be to establish a rule of cap on the amount of capital gains distributed to serve the target rate, at least at the beginning of the projection. Indeed, we prefer to trigger some dynamic buyouts in the second year of projection rather than liquidate all capital gains shares in the first year which will trigger massive buyouts in the fourth year. In addition, dynamic buyouts are triggered because the competing rate remains very high even after a fall in equities due to the choice to smooth the competing 5-year rate in the modeling assumptions of the ALM model. The insurer may decide to smooth the competing rate over a shorter number of years, for example over 3 years. This study made it possible to highlight that this hypothesis was key in our modeling, which leads to discuss its relevance. We have studied the consequences of these corrections such as the modification of the smoothing of the competing rate or the cap of unrealized gains realized.

The analysis approach presented has the advantage of being implemented by insurers on any ALM model. Obviously, the conclusions will certainly not be the same according to insurers because they depend on the model studied. However, it allows insurers to have an objective approach to the consequences of the assumptions that have been chosen in their ALM model. Finally, our study provided a critical point of view on an asset-liability management model.

Table des matières

1	Contexte réglementaire et introduction à l'assurance vie	4
1.1	La directive Solvabilité II	4
1.2	L'assurance vie	5
1.2.1	Contrats mono-support et contrats multi-supports	5
1.3	Caractéristiques des contrats en euros	6
1.4	Quelques éléments de comptabilité en assurance vie	7
1.5	Les risques liés à l'activité d'épargne	8
1.5.1	Le risque de rachat	8
1.5.2	Les risques de marché	8
2	Modélisation des scénarios économiques	10
2.1	Générateur de scénarios économiques	10
2.2	Modélisation des rendements actions et immobiliers	10
2.3	Modélisation des taux	12
3	Présentation du modèle ALM	14
3.1	Modélisation du passif	15
3.2	Hypothèses liées à la modélisation du passif	15
3.3	Modélisation des différents éléments apparaissant au passif	15
3.3.1	Modélisation des décès	16
3.3.2	Modélisation de la loi de rachat	16
3.3.3	Modélisation des provisions mathématiques de début d'année	18
3.3.4	Modélisation des taxes et frais	19
3.4	Modélisation de l'actif	19
3.4.1	Modélisation de la valeur de marché des obligations	19
3.4.2	Modélisation du rendement monétaire et des produits financiers	20
3.4.3	Réallocation	20
3.4.4	Modélisation du taux concurrent	21
3.4.5	Objectif du management : revalorisation contractuelle et revalorisation cible	22
3.4.6	Algorithme de politique de taux servi	23
4	Résumé de l'information des scénarios économiques	27
4.1	Méthode de l'analyse en composantes principales	27
4.2	Méthode des <i>k-Means</i> sur les trajectoires	33
4.3	Méthode <i>Dynamic Time Warping</i> (DTW)	35
4.4	Application de la méthode DTW aux scénarios de taux à 1 an	39
4.4.1	Classification hiérarchique	39
4.4.2	Classification par partitions	42
4.4.3	Études de la distribution des <i>best estimate</i>	46
5	Modélisation du <i>Best Estimate</i> et interprétations des mécanismes	49
5.1	Études des mécanismes du modèle ALM	55
5.1.1	Étude de la première année de projection	55
5.1.2	Étude de la deuxième de projection	56
5.1.3	Étude des autres années de projection	57
5.1.4	Reprise de la méthode de <i>clustering</i> appliquée au taux concurrent	58
5.2	Influence des paramètres sur les résultats du modèle ALM	63
5.2.1	Influence du niveau de PPE initial	63
5.2.2	Influence du TMG des <i>models points</i>	64
6	Application à un cas concret	68
6.1	Méthodologie	68
6.2	Pistes d'améliorations	69

7 Conclusion	72
Annexes	74
References	95

Introduction

Les indicateurs financiers introduits par la directive Solvabilité II, tels que le *best estimate* (BE), le *Solvency Capital Requirement* ou le ratio de solvabilité sont suivis par les *Chief Risk Officers* (CRO), les *Chief Financial Officers* (CFO), les marchés financiers et les régulateurs pour apprécier la solvabilité des compagnies d'assurance. Or, ces indicateurs sont produits par le biais de modèles prospectifs de plus en plus complexes. Dans un contexte économique changeant, les organismes d'assurance ont observé une forte volatilité des résultats sur la dernière décennie. S'agit-il d'un biais de modèle ou d'une modification réelle de la rentabilité de l'organisme? Il est souvent difficile de comprendre l'origine de l'évolution de ces résultats, donc de les prévoir et *in fine* de les prendre en compte dans le processus décisionnel.

Les contrats d'assurance vie contiennent des garanties financières (taux minimum garanti, clause de participation aux bénéfices contractuelle, etc.) et des options (rachat, versement, etc.). Ainsi, les flux de trésorerie émanant de ces contrats peuvent-ils dépendre des rendements financiers et de la politique de revalorisation adoptée par l'organisme d'assurance. Afin d'obtenir la meilleure estimation de ces flux de trésorerie sur l'horizon de couverture, une méthode par simulation est le plus souvent requise. Par conséquent l'interprétation des mécanismes mis en oeuvre peut s'avérer difficile.

Une meilleure compréhension des interactions entre l'actif et le passif, ainsi que de l'impact des scénarios économiques permettrait de mieux interpréter les résultats produits par le modèle ALM (*Assets and Liability Management*). En effet, les générateurs de scénarios économiques produisent des scénarios extrêmes que les organismes n'ont jamais rencontrés dans la réalité. Quels sont les impacts sur les indicateurs de ces situations extrêmes? Les règles de distribution de la participation aux bénéfices définies jusqu'à présent sont-elles adaptées à ces situations? De plus, comprendre l'impact du déclenchement des rachats dynamiques, le type de scénarios économiques conduisant à leur déclenchement permettrait une meilleure compréhension de ces mécanismes. Une restitution claire des impacts pourrait permettre de mieux anticiper ces situations et de mieux définir les actions correctrices.

Du fait de la grande quantité de données en jeu, les outils de la *data science* peuvent apporter une réponse à ces problématiques. Dans ce mémoire, nous allons présenter une approche méthodologique permettant d'explicitier l'impact des hypothèses d'un modèle ALM sur les indicateurs financiers, en s'aidant de techniques de *data science*. Notre étude a pour objectif de permettre à l'assureur de mieux apprécier la cohérence des hypothèses liées à son modèle ALM et ainsi de limiter le risque de modèle.

Après avoir rappelé le contexte réglementaire, ainsi que les normes comptables en assurance vie, nous présenterons les hypothèses de construction du modèle ALM sur lesquelles nous avons effectué notre étude.

Ensuite, nous présenterons les différentes méthodes de *data science* mises en oeuvre ainsi que leurs applications dans la compréhension des mécanismes du modèle ALM.

1 Contexte réglementaire et introduction à l'assurance vie

1.1 La directive Solvabilité II

La directive Solvabilité II, en vigueur depuis le 1er janvier 2016, a imposé de nouvelles normes dans l'évaluation du bilan économique des compagnies d'assurance et de réassurance. Rappelons brièvement les trois piliers qui composent Solvabilité II.

Pilier I - Quantitatif :

Le premier pilier définit les normes quantitatives de calcul des provisions techniques. De nouvelles notions telles que le MCR (*Minimum Capital Requirement*) et SCR (*Solvency Capital Requirement*) ont été introduites par Solvabilité II. Le MCR représente le montant minimum de fonds propres nécessaires à la compagnie d'assurance pour avoir le droit d'exercer. En cas de non respect de cette contrainte l'autorité de contrôle peut retirer son droit d'exercer à la compagnie. Le SCR, quant à lui, représente le montant nécessaire pour faire face à une ruine économique à horizon un an avec une probabilité de 99,5%.

Une autre notion importante est celle de *best estimate*. Le *best estimate* est défini comme l'ensemble des flux futurs relatifs aux engagements de l'assureur envers les assurés, actualisés au taux sans risque.

Enfin, la *marge pour risque* est définie de telle manière à ce que la somme de celle-ci et du *best estimate* représente le montant nécessaire dont les entreprises d'assurances et de réassurance auraient besoin pour honorer les engagement de la compagnie dans le cas où celle-ci serait rachetée.

Le schéma du bilan type Solvabilité II (ou bilan économique) est rappelé ci-dessous :

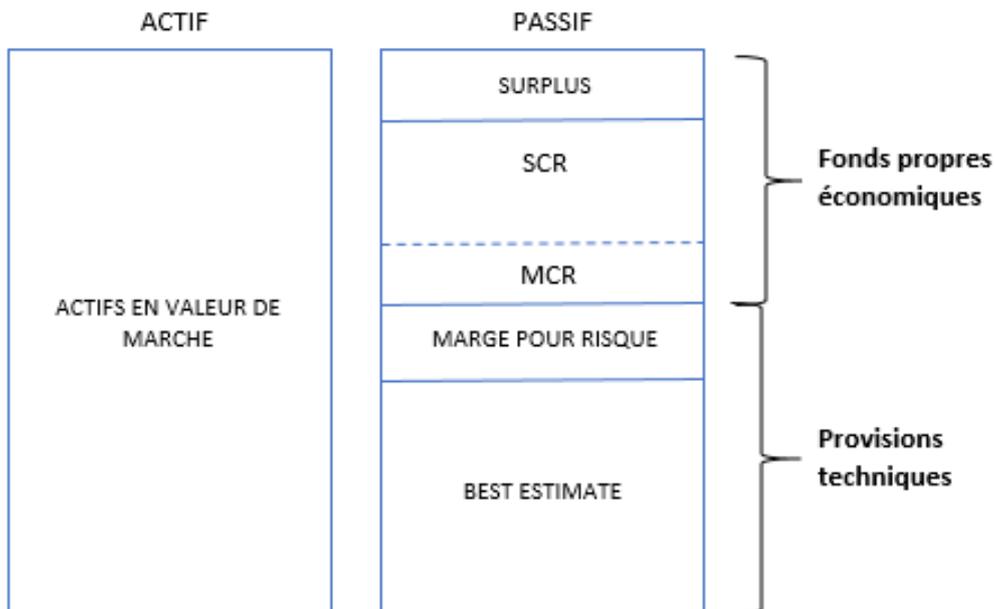


FIGURE 1 – Bilan économique sous Solvabilité II

Pilier II - Qualitatif :

Le deuxième pilier fixe les normes qualitatives et de suivi des risques à respecter. Il s'agit notamment d'appliquer le dispositif ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) qui se définit comme un ensemble de pratiques visant à respecter une démarche d'évaluation du besoin de solvabilité et de sensibiliser au risque inhérent à l'activité d'assurance. De plus, l'ORSA impose aux compagnies d'assurances de produire des rapports réglementaires à la fois sur les volets quantitatifs et qualitatifs de leurs activités.

Pilier III - Communication :

Le troisième pilier impose aux compagnies une transparence et une communication détaillées sur leur activité à la fois à destination du grand public et du régulateur.

1.2 L'assurance vie

Dans cette partie, nous allons rappeler les grands principes de l'assurance vie et introduire les caractéristiques des contrats utilisés dans la modélisation ALM.

L'assurance vie regroupe l'ensemble des contrats couvrant les risques liés à la durée de vie humaine. Ces contrats se divisent en deux grandes branches :

- **Contrats d'assurance en cas de vie** : Contrats par lesquels l'assureur s'engage à verser à l'assuré, en échange du versement d'une prime, un capital ou une rente si l'assuré est encore en vie au terme du contrat.
- **Contrats d'assurance en cas de décès** : Contrats par lesquels l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente à un bénéficiaire désigné, en cas de décès de l'assuré avant le terme du contrat.

Les contrats en cas de vie sont souvent assortis d'une contre-assurance en cas de décès, c'est-à-dire du remboursement d'une partie des primes à l'endroit du bénéficiaire du contrat en cas de décès de l'assuré. Enfin, notons que l'assurance vie reste l'un des placements préférés des français, le montant des cotisations collectées par les sociétés d'assurance au cours des sept premiers mois de l'année 2018 étant de 84,8 milliards d'euros³. L'encours des contrats d'assurance-vie (provisions mathématiques et provisions pour participation aux bénéfices) s'élève à 1 676 milliards d'euros à fin décembre 2017, en progression de 3% sur un an.

1.2.1 Contrats mono-support et contrats multi-supports

En assurance vie, les deux principaux types de contrats sont les contrats mono-support et les contrats multi-supports. Les contrats mono-support peuvent être entièrement en euros ou entièrement en unités de compte, tandis que les contrats multi-supports contiennent les deux. On introduit ci-dessous les notions de fonds en euros et en unités de compte :

- **Contrats d'assurance vie en euros** : Dans ce type de contrats, l'encours de l'assuré est placé sur le fonds euros. L'assureur garantit à l'assuré son capital investi, le risque financier est ainsi porté par l'assureur. Les intérêts générés par le placement sont définis de manière contractuelle (TMG et participations aux bénéfices).
- **Contrats d'assurance vie en unités de compte** : Ce type de contrats permet à l'assuré d'investir dans plusieurs fonds. Le capital investi par l'assuré sur le fonds lui permet d'acquérir un certain nombre de parts selon le cours du fonds à la date de versement. Le contrat consiste à garantir ce nombre de parts dont la valeur va fluctuer selon le cours des marchés financiers.

3. Source : Fédération française de l'assurance - <https://www.ffa-assurance.fr/chiffre-cle>

Il s'agit d'un placement plus risqué que le contrat euros car le risque financier est porté par l'assuré. Cependant les rendements sont potentiellement plus élevés.

Le choix entre les deux types de supports est laissé à l'appréciation de l'assuré. Cependant, les contrats en euros restent les plus souscrits en France, ceux-ci représentent 80% du chiffre d'affaire de l'assurance vie⁴.

1.3 Caractéristiques des contrats en euros

Dans notre étude, nous nous limiterons à l'utilisation des contrats en euros. Nous présentons dans cette partie, les principales caractéristiques de ces contrats.

Le taux minimum garanti (TMG) :

Le taux minimum garanti est un taux défini contractuellement par lequel la compagnie d'assurance valorise l'encours des assurés. Ce taux est particulièrement déterminant car il permet aux assurés de différencier les offres des différents assureurs. Bien que les assureurs soient incités à proposer un TMG attractif, le choix d'un taux élevé représente un risque non négligeable. En effet, si le taux de rendement moyen des actifs est inférieur au taux minimum garanti, l'assureur devra abandonner une partie de ses produits financiers, voire enregistrer des pertes, pour pouvoir servir le TMG défini contractuellement.

L'objectif étant de minimiser ce risque, le régulateur a fixé un seuil de TMG maximal pouvant être proposé par les assureurs. L'article A132-3 du Code des Assurances définit ce seuil de la manière suivante :

$$TMG_{max} = \min(150\% \times 75\% \times TME; \max(120\% \times 75\% \times TME; 110\% \times MTS)) \quad (1)$$

Où :

- TME représente le taux moyen des emprunts d'état.
- MTS représente le taux moyen servi aux assurés lors des deux derniers exercices précédant la date d'effet de la garantie.

La participation aux bénéfices (PB) :

La participation aux bénéfices est la part du résultat financier et technique réalisé par l'assureur et dû aux assurés. Dans un souci d'équité, le Code des Assurances impose aux assureurs de reverser au minimum 90% des résultats techniques et 85% des résultats financiers aux assurés. Le taux de participation aux bénéfices reversé aux assurés est également un élément important permettant aux assureurs de se différencier de leurs concurrents.

L'option de rachat :

Le rachat est l'opération à travers laquelle l'assuré récupère la totalité ou une partie de son épargne, on parle de **rachat total** dans le premier cas ou de **rachat partiel** pour le second. Le rachat est un droit que l'assuré peut exercer tout au long du contrat. Cependant, l'assureur applique une pénalité sous forme de frais, exprimée en pourcentage de la provision mathématique rachetée dans la limite autorisée par le Code des Assurances. En effet, cette pénalité n'est applicable que

4. Source : Fédération française de l'assurance (Rapport 2016) - <https://www.ffa-assurance.fr/rapport-annuel-2016/pdf/tableau-de-bord.pdf>

pour les rachats ayant lieu au cours des 10 premières années du contrat et ne doit pas dépasser 5% de la provision mathématique correspondante.

1.4 Quelques éléments de comptabilité en assurance vie

Dans cette partie, nous allons rappeler la définition des principaux éléments comptables intervenant dans l'activité d'une compagnie d'assurance vie et qui sont déterminants dans les prises de décision en gestion actif-passif.

La provision mathématique :

La provision mathématique (PM) est la différence entre la valeur actuelle probable des engagements respectivement pris par l'assureur et l'assuré. Dans le cas d'assurance vie, la PM correspond à l'encours de l'assuré revalorisé à la date de calcul.

La provision pour participation aux excédents (PPE) :

La provision pour participation aux excédents correspond à la partie des bénéfices réalisés par la compagnie d'assurance qu'elle décide de ne pas redistribuer immédiatement. L'assureur peut être incité à agir de la sorte afin de lisser les taux servis et ainsi de gérer de manière prudente ses ressources. Toutefois, la compagnie d'assurance dispose d'un délai de huit ans pour verser la totalité de la participation aux bénéfices correspondante à ses assurés.

Les actifs « R.343-9 » et « R.343-10 » :

Le code des assurances précise les actifs dans lesquels les compagnies d'assurances vie peuvent investir pour faire face à leurs engagements. Ils sont divisés en deux catégories que nous résumons à travers le tableau suivant :

Actifs « R.343-9 »	Actifs « R.343-10 »
Obligations	Valeurs mobilières (actions)
Obligations à coupons indexés	Immobilier et SCI
	Fonds commun de placement
	Prêts

La catégorie à laquelle les actifs appartiennent est importante dans le sens où la retranscription comptable va différer d'une catégorie à l'autre. En particulier, des provisions spécifiques seront constituées pour chacune des catégories.

La réserve de capitalisation :

La réserve de capitalisation est la réserve dotée (respectivement reprise) suite à la réalisation de plus-values (respectivement moins-values) en cas de vente d'un actif R.343-9. Son objectif est de lisser les résultats financiers des actifs obligataires en cas de variation des taux. Par exemple, dans le cas d'une baisse des taux l'assureur n'est pas incité à vendre ses anciennes obligations afin de réaliser des bénéfices.

En outre, la réserve de capitalisation fait partie des fonds propres et est par conséquent éligible pour constituer une partie de la marge de solvabilité de l'assureur¹.

La provision pour dépréciation durable (PDD) :

La provision pour dépréciation durable est la provision que constitue l'assureur lorsqu'un actif R.343-10 est en moins-value latente durable. A cet effet, la PDD est constituée lorsque la valeur de l'actif baisse de plus de 20% pendant au moins six mois dans le cas de marchés peu volatils et de 30% dans le cas de marchés volatils.

Remarque : La PDD est constituée actif par actif, il ne faut pas la confondre avec la PRE qui est constituée pour l'ensemble des actifs.

La provision pour risque d'exigibilité (PRE) :

La provision pour risque d'exigibilité à l'image de la PDD est constituée lorsqu'une moins-value latente est constatée sur l'ensemble des actifs R.343-10. De ce fait, la PRE permet à l'assureur de faire face à ses engagements dans la situation de moins value des actifs correspondants.

1.5 Les risques liés à l'activité d'épargne

Nous avons, dans les sections précédentes, rappelé quelques éléments de comptabilité en assurance vie. Nous allons dans cette dernière partie, rappeler les principaux risques auxquels est exposé un assureur vie.

1.5.1 Le risque de rachat

L'encours de l'assuré peut être racheté à n'importe quelle date selon les règles spécifiques au contrat. L'opération qui permet la réalisation de ce recouvrement s'appelle le rachat, plus précisément nous distinguons deux types de rachats en assurance-vie :

- **Les rachats structurels** sont les rachats qui dépendent des caractéristiques du contrat d'assurance. En effet, ce type de rachat dépend de l'ancienneté du contrat et notamment des avantages fiscaux sous-jacents. Par exemple, nous observons un pic de rachat après la huitième année puisque la fiscalité sur les rachats est plus favorable. La loi des rachats structurels est souvent estimée à partir de l'historique des assureurs.
- **Les rachats conjoncturels** sont les rachats déclenchés par la conjoncture économique ainsi que par la performance de l'assureur. Ils sont généralement estimés à partir du *spread* entre le taux servi par l'assureur et le taux concurrent.

1.5.2 Les risques de marché

1. La marge de solvabilité de l'assureur étant représentée par le SCR et le MCR

Le risque de taux :

Le risque de taux correspond au risque lié aux changements affectant la courbe des taux d'intérêt. Cette courbe est fondamentale dans la valorisation des obligations ainsi que pour l'actualisation des flux. Étudions les conséquences d'une hausse ou d'une baisse des taux pour l'assureur.

- **Une hausse des taux :** En cas de remontée de taux, le portefeuille d'obligations de l'assureur est dévalué. Si l'assureur détient des obligations de maturité élevée et qu'il n'est pas en mesure de réinvestir rapidement dans de nouvelles obligations alors il devra faire face au déclenchement de rachats conjoncturels.
- **Une baisse des taux :** En cas de baisse des taux, la valeur de marché des obligations augmente et par conséquent la valeur de marché de l'actif de l'assureur aussi. Cependant, cela entraîne également une baisse du rendement des nouvelles obligations. Étant donné que la revalorisation garantie est fixée de manière contractuelle, l'assureur disposera de moins de ressources financières pour honorer ses engagements. De plus, l'augmentation des engagements du passif est généralement supérieure à celle de l'actif.

Le risque action et immobilier :

Le risque action (respectivement le risque immobilier) est le risque lié aux fluctuations du niveau ou de la volatilité du marché des actions (respectivement des actifs immobiliers). L'exposition à chacun des deux risques dépend de la composition du portefeuille de l'assureur.

2 Modélisation des scénarios économiques

Dans cette partie, nous allons présenter la méthode de construction des scénarios économiques utilisés en entrée du modèle ALM.

Tout d'abord attardons-nous sur l'intérêt d'utiliser une approche stochastique dans la construction du modèle ALM. En effet, le caractère optionnel des contrats lié à la participation aux bénéfices et aux rachats conjoncturels rend impossible la valorisation des coûts des options et garanties par un scénario déterministe. En revanche, considérer un ensemble de scénarios générés par des modèles stochastiques nous permet d'effectuer une valorisation des options du contrat et donc d'obtenir une meilleure approximation du *best estimate*.

Notre outil ALM prend en entrée 1000 scénarios économiques, projetés sur 30 ans. Ainsi, la valeur de *best estimate* est calculée comme la moyenne sur les 1000 scénarios de la somme des *cash-flows* actualisés de *best estimate* sur les 30 années de projection :

$$BE_{total} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} BE_i \quad (2)$$

avec BE_i la valeur actualisée des *cash-flows* du scénario i .

2.1 Générateur de scénarios économiques

Le générateur de scénarios économiques nous permet de modéliser :

- La courbe des taux
- L'indice action
- L'indice immobilier
- Le rendement monétaire

Les scénarios générés vérifient les deux conditions suivantes :

- On se place en monde « **risque neutre** », c'est-à-dire que tout les actifs ont une espérance de rendement égal au taux sans risque.
- Les scénarios sont « **market-consistent** », c'est-à-dire qu'ils doivent refléter l'état actuel des marchés financiers.

Dans la suite, nous allons présenter la modélisation des scénarios économiques pour chaque classe d'actifs.

2.2 Modélisation des rendements actions et immobiliers

Modélisation des rendements actions :

La modélisation du cours des actions est réalisée à l'aide du modèle de Black & Scholes. Nous rappelons les hypothèses d'application du modèle :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini
2. Le marché est liquide
3. On peut emprunter et vendre à découvert
4. On néglige les coûts de transaction

5. On peut emprunter et prêter au même taux constant

La dynamique du prix de l'action est modélisée par :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad (3)$$

L'actif a une tendance donnée par μ et une volatilité donnée par σ , constantes dans le temps.

Par application de la formule d'Ito, on montre que l'équation (1) admet une unique solution de la forme :

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} \quad (4)$$

Ainsi, nous pouvons en déduire le rendement de l'actif entre les dates t et $t+1$:

$$S_{t+1} - S_t \approx S_t(\mu dt + \sigma(B_{t+1} - B_t)) \quad (5)$$

D'où :

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \approx \mu((t+1) - t) + \sigma(B_{t+1} - B_t) \quad (6)$$

or comme B_t est un mouvement brownien, par définition : $B_{t+1} - B_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ainsi, on peut réécrire l'équation (4) par :

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \approx \mu + \sigma X_t \quad (7)$$

avec $X_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Rappelons que sous la probabilité risque neutre, tous les actifs ont la même espérance de rendement à savoir le taux sans risque. Dans le modèle ALM, le taux sans risque est modélisé par le taux zéro-coupon à un an.

Enfin, nous avons utilisé la méthode de la volatilité implicite pour déterminer la volatilité de l'actif. Cette méthode consiste à déduire la volatilité à partir des prix de certaines options observées sur le marché et de la formule de Black & Scholes.

Pour rappel, la formule de Black & Scholes pour un *call* s'écrit de la manière suivante :

$$C_0(S_0, K, r, T, \sigma) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2) \quad (8)$$

Où :

$$- d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$- d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Modélisation des rendements immobiliers :

La modélisation des rendements immobiliers est très similaire à celle des actions. Nous utilisons également le modèle de Black & Scholes. La seule différence est que la volatilité implicite est ici calculée à partir de la volatilité des actions. En effet, dans la formule standard de Solvabilité II, le besoin en capital économique (SCR) est d'environ 50% de la valeur de l'actif pour les actions non cotées et de 25% pour l'immobilier. Ainsi, on considérera que la volatilité des rendements immobiliers est égale à la moitié de la valeur de la volatilité des rendements actions.

2.3 Modélisation des taux

1) Modélisation des taux courts :

Pour modéliser des taux courts, nous avons décidé d'utiliser le modèle de Hull & White à un facteur. Ce choix s'explique par le fait que nous privilégions la simplicité du modèle et d'autre part parce que les taux peuvent prendre des valeurs négatives. Ce deuxième point est important pour notre étude vu le niveau des taux observés sur le marché récemment.

Nous supposons, par conséquent, que le taux court instantané r est solution de l'EDS¹ suivante :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t \quad (9)$$

avec a une constante positive, $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction déterministe et W_t un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} . Un des points forts de ce modèle est qu'il reproduit exactement la courbe des taux zéro-coupon du marché :

$$\theta_t = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial t} + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2aT}) \quad (10)$$

avec $f^M(0, t)$ le taux *forward* instantané associé au prix de l'obligation zéro-coupon $P^M(0, t)$ observé sur le marché.

Dans une démarche de valorisation, le calibrage du modèle se fait en univers risque neutre, en récupérant le prix des zéro-coupons fourni par l'EIOPA² comme *input* du modèle.

Une fois le calibrage effectué, nous pourrions par la suite simuler les taux courts en utilisant l'approximation suivante (démonstration Annexe 1) :

$$\forall s < t, r_t \approx r_s e^{-a(t-s)} + f^M(0, t) - e^{-a(t-s)} f^M(0, s) + \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2a(t-s)})}{2a}} \epsilon_t$$

où $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

2) Détermination du prix des zéro-coupons :

Une fois les taux courts simulés, nous pouvons déduire le prix des zéro-coupons à travers la formule suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t}$$

Avec :

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left[B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \right]$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

3) Dédution de la structure par termes des taux :

1. Équation différentielle stochastique

2. L'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles

Finalement, nous déduisons la structure par termes des taux grâce au prix des zéro-coupons en utilisant la formule suivante :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

3 Présentation du modèle ALM

Dans cette partie, nous allons présenter la construction du modèle ALM, ainsi que l'ensemble des hypothèses choisies. Le schéma ci-dessous introduit dans l'ordre chronologique les principales étapes du modèles :

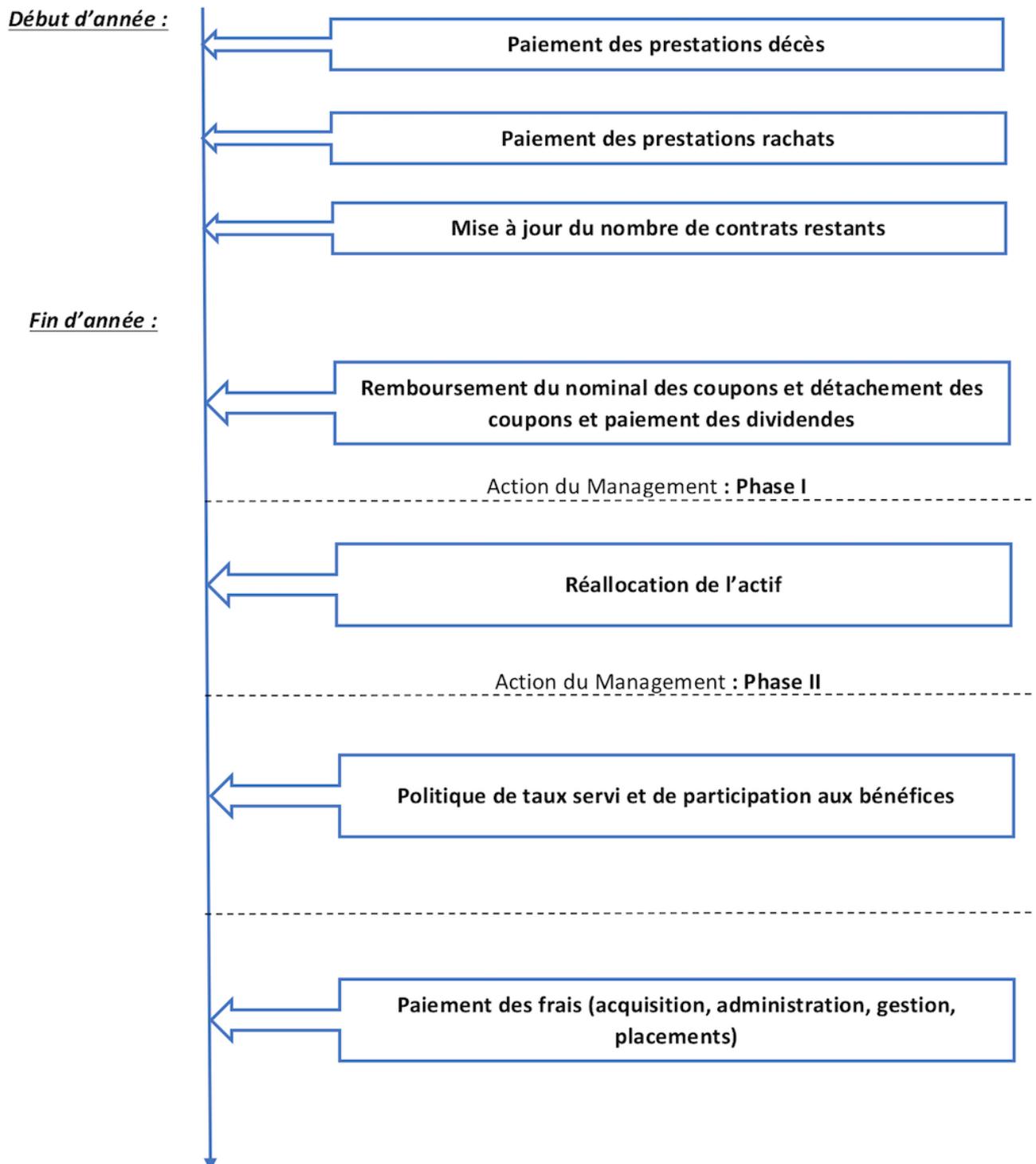


FIGURE 2 – Schéma simplifié des différentes étapes du modèle ALM

3.1 Modélisation du passif

Cette partie concerne la modélisation du passif de la compagnie d'assurance. De ce fait, nous allons commencer par énoncer les hypothèses simplificatrices qui nous ont servi dans la conception de notre outil ALM. Par la suite, nous allons aborder la méthode de calcul des principaux éléments du passif. Finalement, nous allons définir la manière de modéliser les différents *cash-flows* intervenant au niveau du passif.

3.2 Hypothèses liées à la modélisation du passif

Nous citons les hypothèses générales et simplificatrices pour lesquelles nous avons opté dans la modélisation du passif :

- La mortalité est une fonction déterministe de l'âge de l'assuré
- Les rachats et les décès se produisent en fin d'année
- Les polices d'assurances sont agrégées en groupes homogènes, selon des *model points* construits à partir d'un ensemble de critères discriminants
- Nous modélisons uniquement la *PM* et la *PPE*. Ainsi, nous faisons abstraction du reste des provisions telles que la *PDD* et la *PRE*
- L'entreprise fictive est en *Run-Off* et son activité prend fin au bout de 30 ans, c'est-à-dire que la totalité des assurés rachètent leur contrat

3.3 Modélisation des différents éléments apparaissant au passif

Nous traitons maintenant la modélisation des différents éléments apparaissant au passif.

Les fonds propres :

Selon une approche comptable, les fonds propres sont définis comme la somme du capital social, de la réserve et du résultat de l'année. La réserve représente les bénéfices des exercices précédents non distribués aux actionnaires. D'autre part, nous supposons que notre compagnie d'assurance fictive ne distribue jamais ses bénéfices, ainsi les fonds propres à la fin de chaque année N sont calculés de la manière suivante :

$$FP_N = FP_{N-1} + R_N$$

Où :

- FP_N et FP_{N-1} représentent respectivement les fonds propres de l'année N et $N - 1$
- R_N le résultat comptable de l'année N

La provision mathématique :

Nous résumons la relation liant la provision mathématique de clôture à celle d'ouverture à travers la relation suivante :

$$PM_{cloture} = PM_{ouverture} + \text{Revalorisation} - \text{Prélèvements sociaux} - \text{Commission sur encours} - \text{Rachats} - \text{Décès}$$

Nous supposons que la totalité des assurés rachètent leur contrat, la provision mathématique au 30^{ème} exercice devient nulle.

La provision pour participation aux excédents :

La PPE est particulièrement importante pour le management. En effet, elle a un impact significatif sur le taux de revalorisation de l'épargne. Comme la PPE d'un exercice doit être redistribuée sous 8 ans, nous imposons de reverser au minimum 15% de la PPE aux assurés chaque année. Cette méthode ne garantit pas que toute l'allocation de PPE d'une année sera effectivement reversée au bout de 8 ans, mais par souci de simplification nous utiliserons cette hypothèse. D'autre part, si la PPE est non nulle à la fin de la projection, elle est reversée entièrement à l'ensemble des assurés restants.

3.3.1 Modélisation des décès

Les décès interviennent en début d'année après revalorisation des provisions mathématiques à l'année N-1. Les décès sont supposés déterministes en fonction de l'âge de l'assuré. Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse que la prestation décès d'un assuré est égale à sa provision mathématique de clôture à l'année N-1 et qu'elle est immédiatement payée par la société d'assurance en début d'année. La table de mortalité utilisée dans le modèle ALM est la table "TF 00-02".

Pour chaque *model point*, nous calculons la provision mathématique qui doit être libérée pour les bénéficiaires des assurés décédés :

$$Prestation_{décès}(t) = \sum_{i=1}^{nb_{model\ points}} tx_{décès}(i)PM_i(t-1) \quad (11)$$

Avec i le numéro du *model point* et $PM_i(t-1)$ le montant de la provision mathématique du *model point* i en fin d'année $t-1$ (après revalorisation par l'assureur).

3.3.2 Modélisation de la loi de rachat

L'outil ALM comprend à la fois une modélisation structurelle et conjoncturelle des rachats. Nous supposons qu'un rachat est total et qu'il intervient en début d'année, après que le management a revalorisé l'encours de l'assuré. Par simplification, nous ne modélisons pas les rachats partiels ni les arbitrages.

Pour les *rachats structurels*, nous faisons l'hypothèse qu'ils suivent une loi fonction de l'ancienneté du contrat. On l'estime à 3% de la provision mathématique pour toutes les anciennetés hormis pour 5 et 9 ans. Ces deux pics de rachats respectivement de 4% et 6% sont expliqués par la fiscalité avantageuse de l'assurance vie. En effet, en cas de rachat du contrat avant 4 ans, les produits sont imposés à 35%, entre 4 et 8 ans l'imposition est de 15% et au delà de 8 ans 7,5% seulement.⁵ La représentation graphique de la loi des rachats structurels est la suivante :

5. Source : <https://www.ffa-assurance.fr/content/le-regime-fiscal-de-assurance-vie?parent=74lastChecked=131>

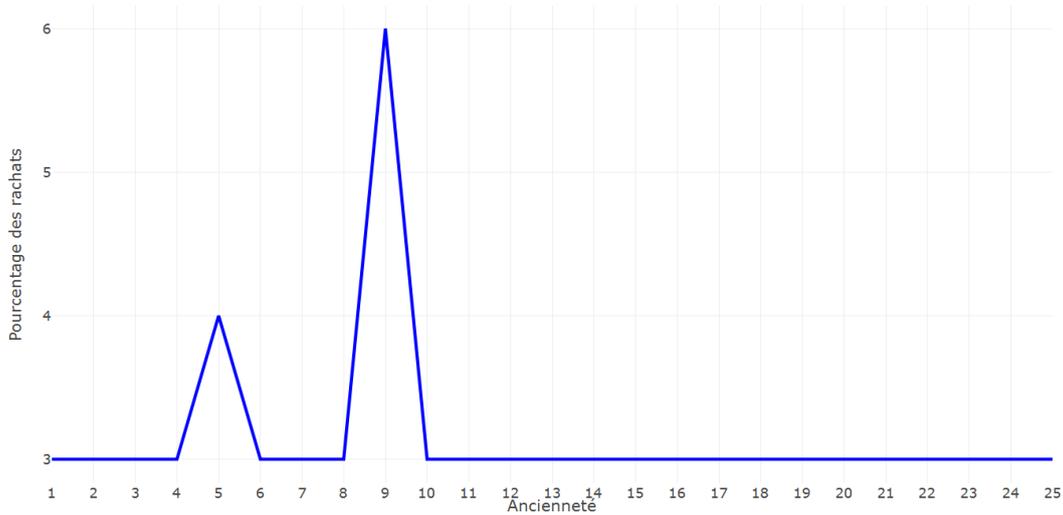


FIGURE 3 – Rachats structurels selon l'ancienneté du contrat

D'autre part, les *rachats dynamiques* (ou rachats conjoncturels) sont les rachats induits par la conjoncture économique et traduisent la réactivité des assurés face aux opportunités d'investissement extérieures. La modélisation des rachats conjoncturels est plus complexe que celle des rachats structurels. Pour cela, nous choisissons d'appliquer la méthode recommandée par l'ACPR. Cette méthode suggère d'utiliser une loi fonction du *spread* entre le taux servi par le concurrent et le taux servi par l'assureur :

$$RC = \begin{cases} RC_{max} & si \ T_S - T_C \leq \alpha \\ RC_{max} \frac{T_S - T_C - \beta}{\alpha - \beta} & si \ \alpha \leq T_S - T_C \leq \beta \\ 0 & si \ \beta \leq T_C - T_S \leq \gamma \\ RC_{min} \frac{T_S - T_C - \gamma}{\delta - \gamma} & si \ \gamma \leq T_S - T_C \leq \delta \\ RC_{min} & si \ T_S - T_C \geq \delta \end{cases} \quad (12)$$

Avec T_S le taux servi par l'assureur et T_C le taux concurrent. Notons que le pourcentage de rachats conjoncturels calculé à l'année N dépend du taux servi et concurrent de l'année N-1.

Cette loi contient 6 paramètres à définir : α , β , γ , δ , RC_{min} et RC_{max} . L'ACPR propose deux lois de rachats conjoncturels, la première correspond à un plancher minimum de rachat, la seconde à un plancher maximum. Il est recommandé de choisir les paramètres de la loi entre le « plancher minimum » et le « plancher maximum » fixé par l'ACPR. Dans le modèle ALM, nous avons retenu les paramètres moyens entre les deux plafonds :

	plafond min	plafond max	valeur choisie
α	-6%	-4%	-5%
β	-2%	0%	-1%
γ	1%	1%	1%
δ	2%	4%	3%
RC_{min}	-6%	-4%	-5%
RC_{max}	20%	40%	30%

TABLE 1 – Paramètres de la loi des rachats conjoncturels proposés par l'ACPR

Finalement, la loi des rachats conjoncturels a l'allure suivante :

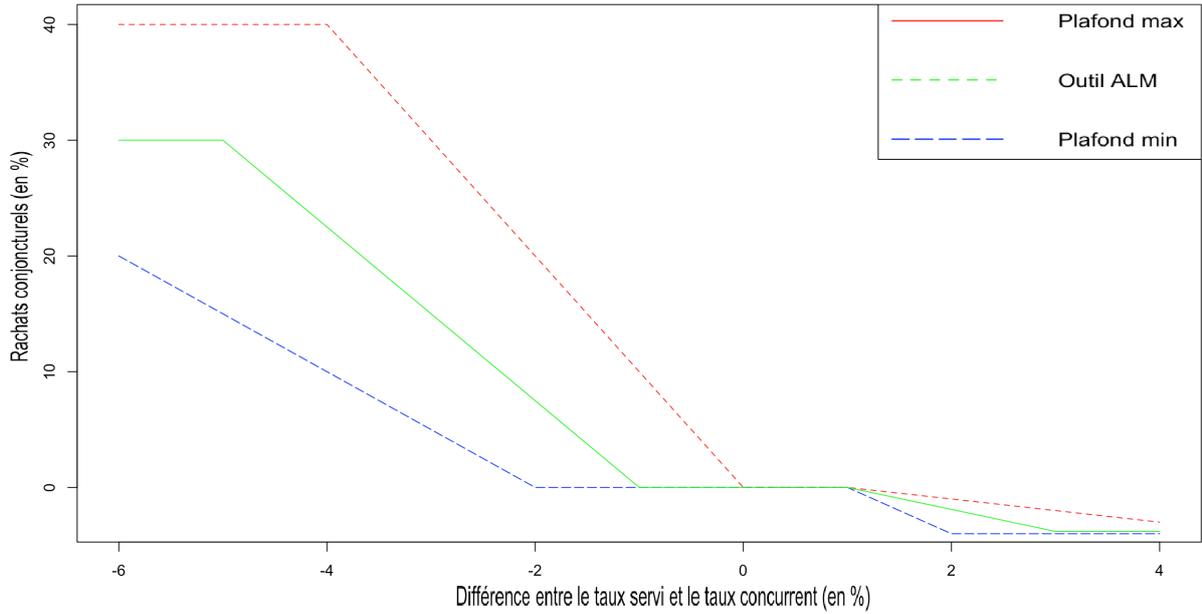


FIGURE 4 – Loi des rachats conjoncturels en fonction du spread de taux

Le taux de rachat total s'exprime comme la somme du taux des rachats structurels et conjoncturels :

$$R_T = \min(1, \max(0, R_S + R_C)) \quad (13)$$

La manière dont est construit le taux de rachat total implique que si le taux concurrent est nettement supérieur au taux servi alors le taux de rachats total sera supérieur au taux de rachats structurels. Si les deux taux sont proches, il y a une zone comprise entre les paramètres β et γ où les rachats dynamiques ne se déclenchent pas. Inversement, si l'assureur verse un taux nettement supérieur au taux concurrent alors le taux de rachats dynamiques sera négatif ce qui vient diminuer le taux des rachats structurel. On gardera à l'esprit qu'un taux de rachats dynamique négatif est une situation rendue possible par la modélisation choisie.

De la même manière que pour les décès, nous calculons pour chaque *model point* la part de la provision mathématique rachetée par les assurés :

$$Prestation_{rachat}(t) = \sum_{i=1}^{nb_{model\ points}} tx_{rachat}(i) \times PM_i(t-1) - Pénalités_{rachat}(t) \quad (14)$$

Une pénalité de rachat directement affectée au résultat de l'assureur est appliquée.

$$Pénalités_{rachat}(t) = \sum_{i=1}^{nb_{model\ points}} tx_{rachat}(i) \times PM_i(t-1) \times tx_{Pénalités_{rachat}}(t) \quad (15)$$

3.3.3 Modélisation des provisions mathématiques de début d'année

La société d'assurance détermine alors la provision mathématique de début d'année qui sert de base sur laquelle nous nous appuyerons pour déterminer le taux servi :

$$PM_{début}(t) = PM(t-1) - Prestation_{décès}(t) - Prestation_{rachats}(t) \quad (16)$$

3.3.4 Modélisation des taxes et frais

Les frais de notre compagnie d'assurance sont définis et calculés de la manière suivante :

- Taux de frais de placement : taux calculé en pourcentage de la valeur comptable de l'actif en début de période.
- Taux de frais de gestion : taux calculé en pourcentage des prestations de sinistres.
- Taux de frais d'administration : taux calculé en pourcentage des provisions mathématiques moyennées sur l'année.
- Taux de frais d'acquisition : taux calculé en pourcentage des primes versées brutes de charge-ments.
- Taux de prélèvements sociaux : taux calculé à partir du taux servi

3.4 Modélisation de l'actif

Dans cette partie, nous aborderons la modélisation des actifs financiers présents dans le modèle ALM.

3.4.1 Modélisation de la valeur de marché des obligations

La valeur de marché des obligations est calculée en actualisant les flux futurs par le taux zéro-coupon. On entend par flux futurs, les détachements de coupons des obligations et le remboursement du nominal. La valeur de marché d'une obligation à la date t est :

$$VM(t) = \sum_{i=1}^{T-t} \frac{tx_{coupons} \times N}{(1 + R(t, t+i))^i} + \frac{N}{(1 + R(t, T))^{T-t}} \quad (17)$$

Où :

- N est le nominal de l'obligation
- T est la maturité de l'obligation
- $tx_{coupons}$ est le taux de coupon de l'obligation
- $R(t, t+i)$ est le taux zéro-coupon à la date t et de maturité $t+i$.

Pour rappel, la valeur nette comptable des obligations s'exprime de manière générale comme la valeur actualisée des flux futurs au taux actuariel à l'achat :

$$VNC = \sum_{i=1}^T \frac{tx_{coupons} \times N}{(1+a)^i} + \frac{N}{(1+a)^T} \quad (18)$$

avec a le taux actuariel.

Cependant, nous supposerons que les obligations présentes dans le portefeuille ont été achetées au pair. Par conséquent, la valeur nette comptable de l'obligation est égale à la valeur nominale à la date d'achat. Il n'est donc pas nécessaire d'appliquer la formule de la VNC rappelée ci-dessus.

3.4.2 Modélisation du rendement monétaire et des produits financiers

Le rendement monétaire est indexé sur le taux sans risque, c'est à dire le taux zéro coupon à un an projeté.

A la fin de chaque année, les produits financiers courant sont calculés de la manière suivante :

Produits financiers = Coupons des obligations + Intérêt sur monétaire + 10% des plus-values sur actions - Frais de placement

On fait l'hypothèse que l'assureur réalise 10% des plus-values sur actions. De plus, nous ne séparons pas les actifs en représentation des capitaux propres de ceux en représentation des provisions mathématiques. Cependant, il est nécessaire de déterminer la part revenant aux actionnaires et celle revenant de droit aux assurés après avoir distribué la participation aux bénéficiaires. Afin de résoudre ce problème, nous avons réparti les produits financiers proportionnellement à la part qu'ont les actionnaires et les assurés dans le passif. De manière générale, on admet que la provision mathématique et la provision pour participation aux excédents sont propriétés de l'assuré alors que les fonds propres et la réserve de capitalisation appartiennent à l'assureur.

$$Part_{assurés}(t) = \frac{PM(t-1) + PPE(t-1)}{Passif(t-1)} \quad (19)$$

$$Part_{assureur}(t) = \frac{FondsPropres(t-1) + RKPI(t-1)}{Passif(t-1)} = 1 - Part_{assurés}(t) \quad (20)$$

où $RKPI(t-1)$ est le montant de la réserve de capitalisation en fin d'année t-1.

On répartit ainsi les produits financiers de la manière suivante :

$$Produits\ financiers_{assurés} = Produits\ financiers(t) \times Part_{assurés}(t)$$

$$Produits\ financiers_{assureur} = Produits\ financiers(t) \times Part_{assureur}(t)$$

3.4.3 Réallocation

Dans cette partie, nous étudierons la première étape de management qui consiste à réallouer le portefeuille d'actif.

La structure de l'actif a été inévitablement modifiée par la revalorisation des provisions mathématiques et par le versement des prestations en début d'année. De plus, la valeur de marché et la valeur comptable des actions ont été modifiées par la réalisation potentielle de plus-values. Enfin, le monétaire est modifié du fait de l'ensemble des entrées et des sorties de *cash* qui ont eu lieu en fin d'année N-1 et en début d'année N (prestations rachats/décès, ventes d'actions, etc.). Remarquons que la valeur du monétaire à cette étape peut être positive ou négative s'il y a eu des sorties de *cash* importantes.

Dans la modélisation ALM, nous faisons l'hypothèse que le management cherche à retrouver l'allocation cible de départ en valeur de marché. Par souci de simplification, on supposera que l'assureur conserve la même allocation-cible de portefeuille tout au long de la projection.

Dans le cas où le management serait contraint de vendre des obligations pour obtenir l'allocation cible, nous supposons que nous vendons en priorité les obligations dont la date de maturité est la plus proche.

Nous supposons enfin que le management peut acheter de nouvelles obligations afin de satisfaire l'allocation cible obligataire. Dans ce cas, seront achetées uniquement des obligations d'Etat AAA de maturité 10 ans et cotant au pair. Notre modèle attribue un taux de coupon aux nouvelles obligations de telle manière à ce que la valeur comptable égale la valeur de marché.

Une fois la réallocation entre les actifs effectuée, l'assureur calcule les profits/pertes associés à ces transferts en fonction de l'état des marchés financiers. A ce propos, les plus ou moins values réalisées sur la vente d'obligations sont affectées à la réserve de capitalisation. Enfin, les plus ou moins values réalisées sur les actions s'ajoutent aux produits financiers et sont réparties entre l'assureur et l'assuré.

3.4.4 Modélisation du taux concurrent

Le taux concurrent modélise le taux servi par les concurrents. Il permet aux assurés de se positionner en le comparant avec le taux servi par leur assureur. Si le taux concurrent est supérieur au taux servi, cela peut déclencher des rachats conjoncturels selon la loi présentée dans la partie 5.3.2. Comme ce taux n'est pas clairement défini dans la réalité, il est donc nécessaire de faire des hypothèses pour le modéliser.

Dans le modèle ALM, le taux concurrent est modélisé à partir de trois concurrents avec des comportements différents :

- Un concurrent dit "agressif"
- Un concurrent nouvel entrant sur le marché
- La banque et son livret A

Le concurrent *agressif* représente un assureur dont l'allocation d'actif est composée d'une part actions plus grande que celle de notre assureur. Ainsi, dans un environnement de taux faible mais de fort rendements actions, ce concurrent sera capable de proposer un taux plus élevé que notre assureur. La composition du portefeuille de ce concurrent est la suivante : 30% actions, 70% obligations. De plus, ce taux concurrent est lissé sur 5 ans, la formule permettant de l'obtenir est la suivante :

$$Taux_{concurrentagressif}(t) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 (0,3 \times rendement_{actions}(t-i) + 0,7 \times taux_{ZC}(t-i, m)) \quad (21)$$

Le $taux_{ZC}$ représente ici le rendement des actifs obligataires, on prendra le taux zéro coupon à 8 an (i.e. $m = 8$).

Le concurrent *nouvel entrant sur le marché* possède dans son portefeuille des obligations "neuves" c'est-à-dire achetées sur le marché au taux projeté pour la période. Si lorsque le nouvel entrant achète ses obligations, celles de notre assureur sont en moins values latentes alors le nouvel entrant aura un meilleur rendement. On supposera que le nouvel entrant achète des obligations de maturité 10 ans, ainsi le taux concurrent du nouvel entrant est modélisé par :

$$Taux_{nouvelentrant}(t) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 taux_{ZC}(t-i, m) \quad (22)$$

De la même manière, le taux est lissé sur 5 ans.

Le *livret A* est modélisé par le taux zéro-coupon à 1 an :

$$Taux_{livretA}(t) = taux_{ZC}(t, 1) \quad (23)$$

Finalement, le taux concurrent est calculé comme le maximum des trois taux concurrents précédemment définis :

$$Taux_{concurrent}(t) = \max(Taux_{concurrent}agressif(t); Taux_{nouvelentrant}(t); Taux_{livretA}(t)) \quad (24)$$

Il est rationnel de considérer le maximum car l'assuré choisira sur le marché le taux le plus avantageux par rapport au taux servi par son assureur.

Remarquons que la modélisation des taux concurrents dépend uniquement des rendements financiers d'actions et de taux. Or en réalité, il y a d'autres caractéristiques comme le niveau de PPE initial du concurrent qui vont influencer sur le taux servi par le concurrent. En effet, un concurrent avec de fortes réserves de PPE pourra ajuster son taux et le maintenir élevé même en période de récession économique. De même, on peut imaginer que le concurrent ne servira pas l'intégralité des rendements et en allouera une partie à la PPE. Mais par souci de simplification, on négligera cet effet.

3.4.5 Objectif du management : revalorisation contractuelle et revalorisation cible

Dans le modèle ALM, on distingue deux types de revalorisation.

La revalorisation contractuelle :

Il s'agit de la revalorisation permettant d'honorer les engagements contractuels de l'assureur à l'endroit de l'assuré. Chaque *model point* possède des engagements contractuels propres, ainsi on calcule pour chaque *model point* la revalorisation contractuelle :

$$RevaloContractuelle_i = \max(PM_i \times TMG_i; PB_{contractuelle} \times ProduitsFin_{assure} \times \frac{PM_i}{PM}) \quad (25)$$

Avec :

- PM_i : la provision mathématique associée au *model point* i
- PM : la provision mathématique globale
- TMG_i : le taux minimum garanti du *model point* i
- $ProduitsFin_{assure}$: les produits financiers de l'assuré

On appelle *revalorisation garantie* la part de la revalorisation contractuelle liée au TMG.

La revalorisation cible :

Une fois la revalorisation contractuelle réalisée, le management désire atteindre la revalorisation cible afin de ne pas subir des rachats de clients préférant le taux servi par les concurrents. La revalorisation cible est définie par :

$$RevaloCible_i = PM_i \times \max(TC; Tgaranti_i) \quad (26)$$

Avec :

- TC le taux concurrent
- $Tgaranti_i$ le taux garanti contractuellement pour le *model point* i

Si le taux concurrent est supérieur au taux garanti, le management fixe comme objectif de servir un montant supplémentaire : $TC - (Tgaranti_i \times PM_i)$. Dans le cas où le taux concurrent serait inférieur au taux servi, on ne sert pas de montant supplémentaire.

Rappelons que la revalorisation cible est définie comme un objectif à atteindre par le management mais en aucun cas comme une obligation. Ainsi, le management doit définir des règles de distribution couvrant les différents cas possibles dans la distribution de la revalorisation cible.

3.4.6 Algorithme de politique de taux servi

L'algorithme de politique de taux servi se décompose en deux étapes.

Versement de la revalorisation contractuelle :

Premièrement, il faut vérifier que les produits financiers dégagés par le placement des encours des assurés suffisent à servir la revalorisation contractuelle. Si ce n'est pas le cas, les plus-values latentes sur action sont réalisées pour servir la revalorisation contractuelle. On n'applique pas de limite supérieure sur le pourcentage de plus-values latentes sur action réalisées. Si cela ne suffit pas, alors l'assureur abandonne sa part des produits financiers. Et si cela ne suffit toujours pas alors l'assureur enregistre des pertes. Le schéma ci-dessous résume l'ensemble de ces règles :

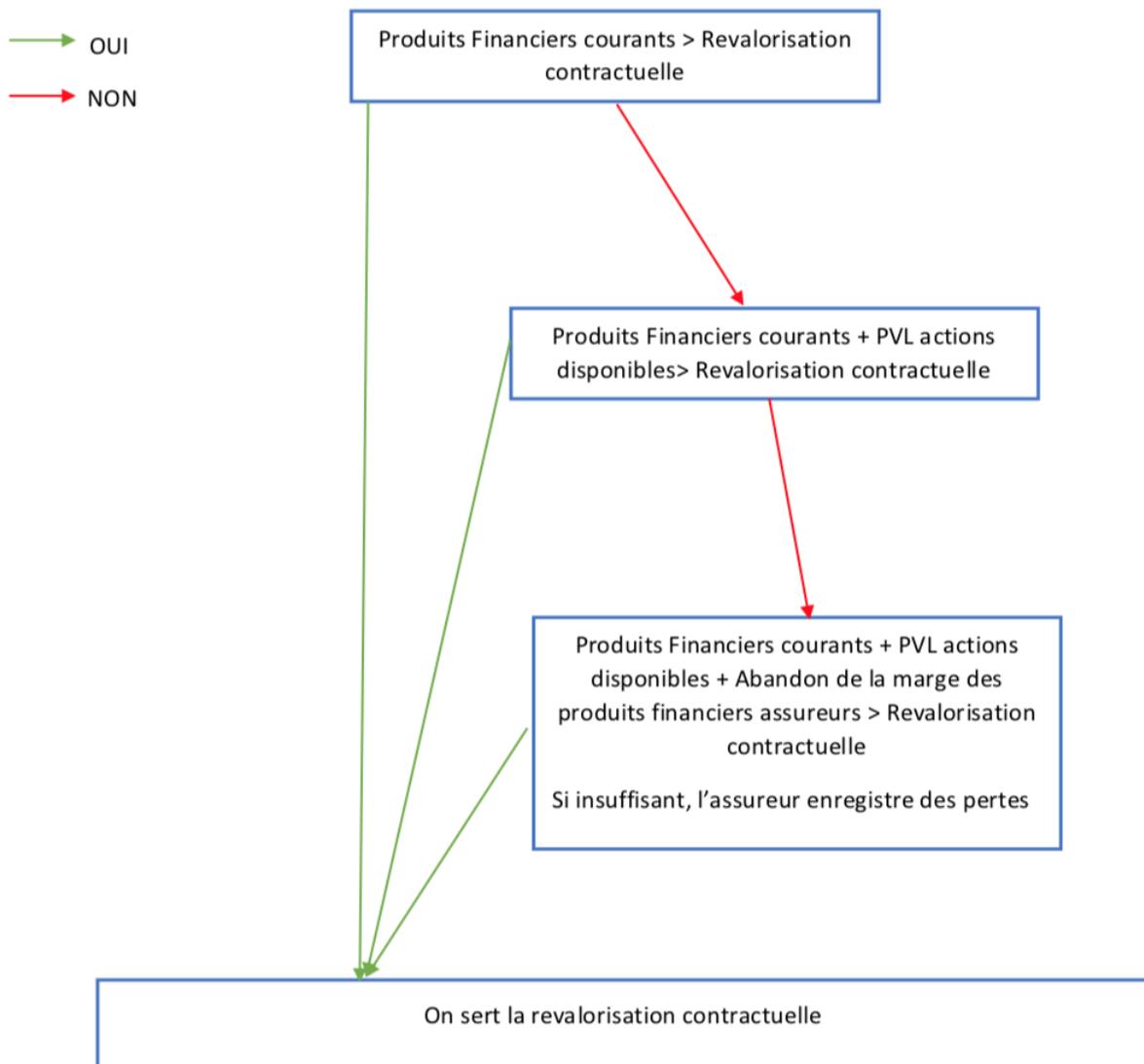


FIGURE 5 – Règles de distribution de la revalorisation contractuelle

Versement de la revalorisation cible :

Une fois que la revalorisation contractuelle a été réalisée, l'objectif du management est de servir le taux cible. Dans un premier temps, l'assureur reprend 15% de la PPE pour honorer ses engagements de redistribuer aux assurés la PPE sous 8 ans. Les règles de distribution sont les suivantes :

- Si les 15% de PPE sont suffisants, l'assureur sert la participation au bénéfice cible
- Si ce n'est pas suffisant, nous pouvons dans l'ordre suivant :
 - Utiliser les produits financiers courants, part assurés non utilisé (dans la limite de 85%).
 - Reprise sur PPE dans la limite de 85% de la PPE initiale.
 - Réutiliser les 15% produits financiers courants restant.
 - Réaliser des plus-values latentes supplémentaires sur action.

Si malgré cela, le taux concurrent n'est pas atteint alors il y a déclenchement de rachats conjoncturels l'année suivante, dont l'intensité dépend de l'écart entre le taux servi et le taux concurrent selon la loi des rachats conjoncturels présentés précédemment. Le schéma ci-dessous reprend les règles de distribution du taux cible :

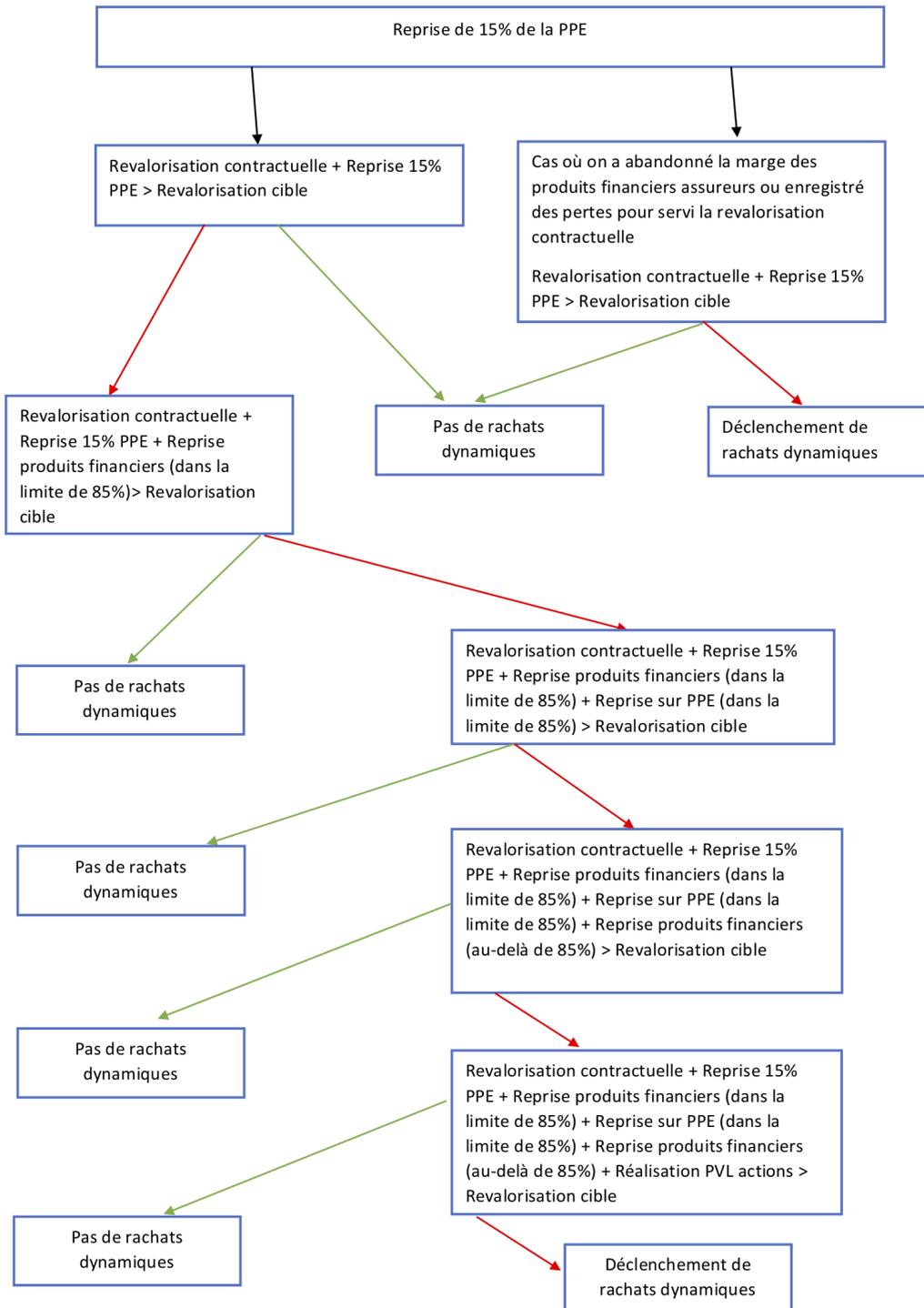


FIGURE 6 – Règles de distribution de la revalorisation cible

Participations aux bénéfices minimum :

Le Code des Assurances impose à l'assureur de reverser à l'assuré une participation aux bénéfices minimum (articles L.331-3, A.331-3 et A.331-4).

Il est nécessaire de s'assurer que 85% des produits financiers nets de frais de gestion sont effectivement distribués aux assurés soit par le biais de la revalorisation globale (revalorisation des provisions mathématiques) soit par une attribution différée par le biais d'une dotation à la PPE.

Nous avons ainsi présenté les différentes hypothèses dans la construction du modèle ALM. Afin d'extraire les données nécessaires à la suite de notre étude, nous avons fait tourner le modèle ALM décrit ci-dessus pour 1000 scénarios de taux, de rendements action et immobilier. Ensuite, nous avons récupéré l'ensemble des données nécessaires à l'étude à savoir : la valeur actuelle probable des engagements par scénario et par *model point*, l'évolution du niveau de PPE, des plus-values latentes sur action, le montant des rachats structurels et conjoncturels à chaque date. Dans la suite nous présentons la méthode ainsi que les conclusions de notre étude.

4 Résumé de l'information des scénarios économiques

L'objectif de cette partie est de mettre en évidence un lien entre les scénarios économiques en entrée du modèle ALM et les valeurs de *best estimate* (BE) obtenues pour chaque scénario. En effet, la variabilité des valeurs de *best estimate* provient exclusivement des scénarios économiques car tous les autres mécanismes de notre modèle ALM sont déterministes.

Le *best estimate* est défini comme l'engagement de l'assureur envers l'assuré. Pour clarifier, nous introduisons la notation suivante :

Notation : On note $BE_{i,j}$, la valeur de *best estimate* du scénario i pour le *model point* j .

On s'intéressera dans cette partie au $BE_{i,0}$, c'est à dire au *best estimate* par scénario pour le *model point* 0 dont les caractéristiques sont les suivantes :

Critères	Valeurs
TMG	0%
Ancienneté du contrat	1 an
Taux d'affectation de PB	85%
Âge moyen	40 ans

TABLE 2 – Caractéristiques du *model point* 0

Toute la difficulté réside dans la capacité à résumer le nombre important de variables caractérisant les scénarios économiques. En effet, nous disposons des scénarios de taux, de rendements actions et immobiliers projetés sur 30 ans. Le nombre de variables économiques est de $30 \times 3 = 90$ variables par scénario. Établir un lien compréhensible entre 90 variables de chaque scénario et la valeur de $BE_{i,0}$ est une tâche complexe.

Il est donc nécessaire de résumer l'information des scénarios économiques, en réduisant la dimension des données tout en conservant l'information contenue dans celles-ci. Ainsi, l'objectif de cette partie est de présenter la démarche mise en œuvre pour résumer l'information des scénarios économiques.

4.1 Méthode de l'analyse en composantes principales

L'analyse en composantes principales est une méthode permettant de réduire la dimension du problème. En appliquant une transformation orthogonale sur les variables *a priori* colinéaires, on crée de nouvelles variables linéairement indépendantes appelés composantes principales.

Dans un premier temps, nous appliquons l'analyse en composantes principales sur l'ensemble des 90 variables explicatives des scénarios économiques. Cependant, la variance expliquée par les premiers axes principaux est très faible, seulement 39% en cumulé sur les 5 premiers axes principaux. Une solution est de réduire le nombre de variables explicatives avant de réaliser l'analyse en composantes principales.

Pour cela, nous avons créé 6 variables explicatives permettant de capter de l'information sur la moyenne ainsi que sur la volatilité des trajectoires de taux, rendement actions et immobiliers. Les projections sont effectuées sur 30 ans, nous avons récupéré la moyenne et l'écart type avant 10 ans, entre 10 et 20 ans, entre 20 et 30 ans, pour chaque trajectoire. Ainsi chaque scénario est caractérisé par 18 variables (i.e. 6 pour chaque grandeur économique), ce qui semble *a priori* plus facile à interpréter que les 90 variables précédemment utilisées dans l'analyse en composantes principales. Cependant, on observe que seulement 64% de la variance est expliquée par les 5 premiers axes

principaux. La variance expliquée est encore faible ce qui rend l'analyse en composantes principales difficilement interprétable(Annexe 2).

Nous réduisons encore le nombre de variables explicatives, en prenant cette fois uniquement la moyenne et l'écart type sur les 30 ans de projection. La variance expliquée cumulée sur les trois premiers axes principaux est de 89%. Le fait que la variance expliquée soit élevée n'est pas surprenant car on s'intéresse aux trois premiers axes principaux en considérant six variables.

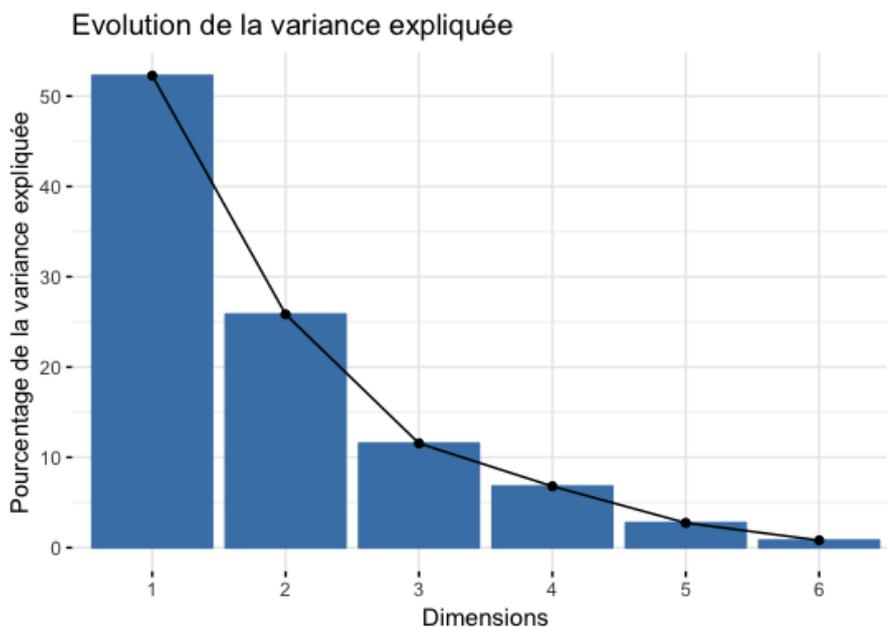


FIGURE 7 – Évolution de la variance expliquée en fonction de la dimension

On observe une décroissance exponentielle dans l'évolution de la variance expliquée, ainsi cette dernière devient négligeable lorsque le nombre de dimensions devient grand, ce qui justifie le fait que notre étude se porte uniquement sur les premiers axes principaux.

Ensuite, la projection des variables sur les premiers axes principaux nous permet de donner un sens aux premières composantes :

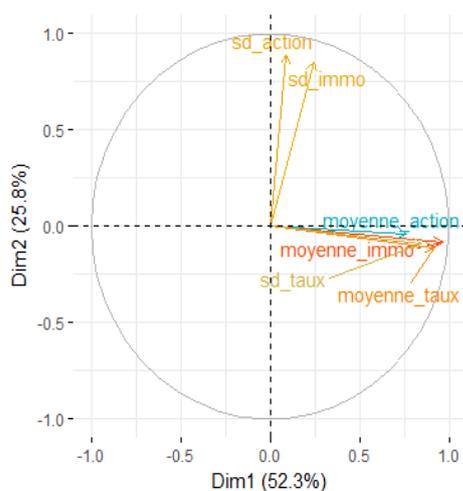


FIGURE 8 – Projection des variables sur les 2 premiers axes principaux

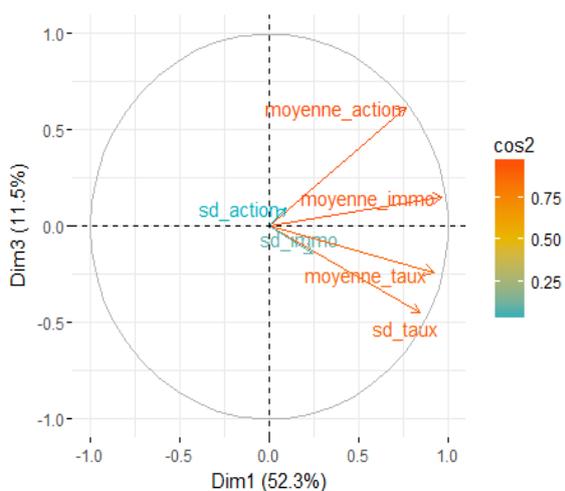


FIGURE 9 – Projection des variables sur les axes principaux 1 et 3

On observe sur la Figure 8, que plus les coordonnées d'un scénario se situent à droite du premier axe, plus les moyennes actions, taux et immobilier sont élevées. Remarquons cependant que la variable moyenne immobilier est peu expliquée par le premier axe principal car la valeur du cosinus carré de l'angle entre la variable et le plan formé par les deux premiers axes principaux est faible. De même, plus les scénarios sont situés dans la partie supérieure du plan, plus la volatilité de leurs rendements action et immobilier est élevée.

Enfin, la figure 9 représente la projection des variables dans le plan formé par le premier et le troisième axe principal. On observe que le troisième axe permet de séparer les variables moyenne action et moyenne taux. En effet, les scénarios dont les coordonnées sont positives sur les axes 2 et 3 ont une moyenne action élevée, tandis que ceux avec des coordonnées positives sur l'axe 2 mais négatif sur l'axe 3 ont une moyenne taux élevée.

On choisit de projeter les 1000 scénarios économiques sur le plan formé par les deux premiers axes principaux et de les regrouper en *clusters*. La méthode de *clustering* adoptée est la classification hiérarchique, celle-ci consiste à séparer en groupes distincts les scénarios en fonction de leurs coordonnées dans l'espace formés par les axes principaux. L'algorithme sous-jacent est celui utilisé dans la méthode des *k-means*.

La méthode des *k-means* repose sur la minimisation de la distance Euclidienne entre chaque observation et le centre de gravité des *clusters*, aussi appelés centroïdes. L'algorithme se déroule comme suit :

- Étape 1 - Initialisation : On place de manière aléatoire k centroïdes où k correspond au nombre de *clusters* choisis (étape (b) de la Figure 10)
- Étape 2 - Détermination des *clusters* : On assigne à chaque observation le numéro du *cluster* le plus proche au sens de la distance Euclidienne. Ainsi le *cluster* numéro i à l'instant t se définit comme suit :

$$S_i^{(t)} = \{x_j : \|x_j - m_i^{(t)}\| \leq \|x_j - m_p^{(t)}\| \forall p = 1, \dots, k\}. \quad (27)$$

Avec $m_i^{(t)}$ le centre du cluster i à l'instant t . Il s'agit de l'étape (c) de la figure 10.

- Étape 3 - Récurrence : Enfin on met à jour la position du nouveau centroïde en prenant le barycentre des points appartenant à chaque *cluster* (étape (d)). Le nouveau centroïde du *cluster* numéro i est défini par :

$$m_i^{(t+1)} = \frac{1}{|S_i^{(t)}|} \sum_{x_j \in S_i^{(t)}} x_j \quad (28)$$

On réitère l'étape 2 jusqu'à ce que l'algorithme converge (étape (e) et (f)). L'algorithme se termine lorsque les coordonnées des centroïdes ne varient plus. Le schéma ci-dessous illustre les différentes étapes de l'algorithme :

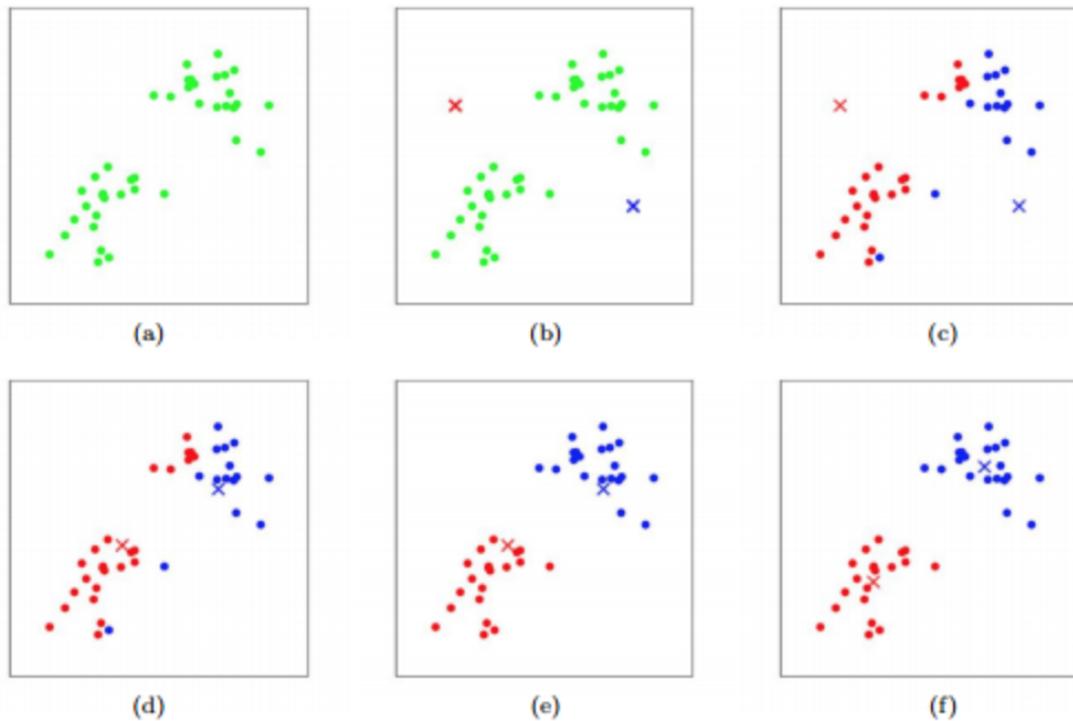


FIGURE 10 – Illustration des différentes étapes de l’algorithme des *k-means*⁶.

Appliquons cette méthode de classification sur les scénarios projetés sur le plan formé par les deux premiers axes principaux :

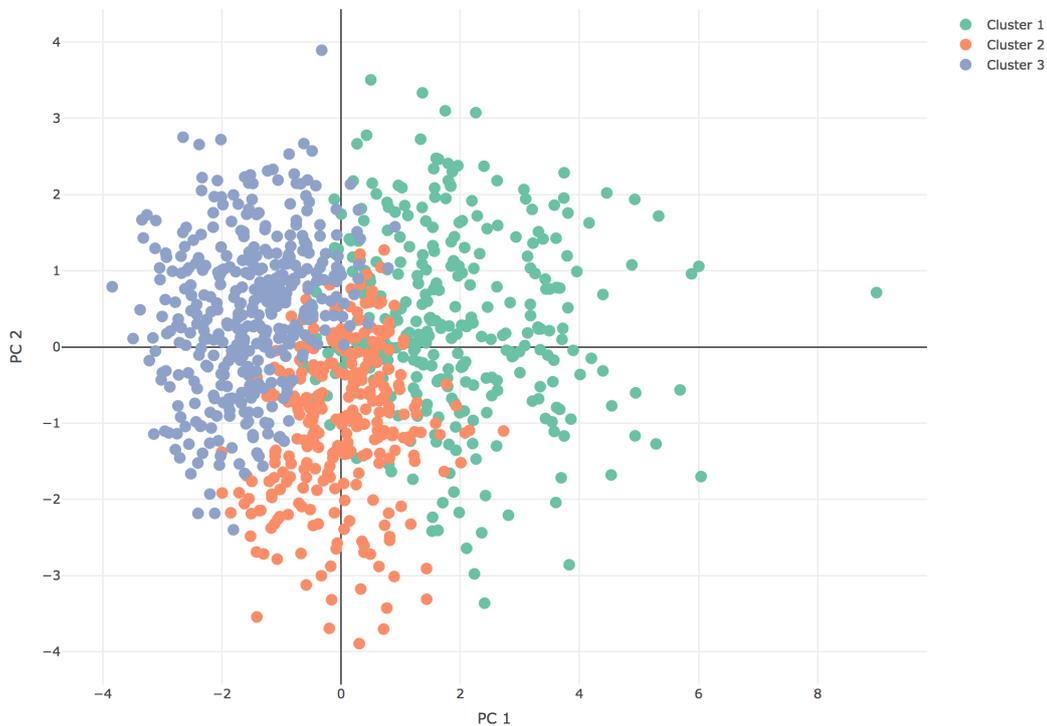


FIGURE 11 – Projection des 1000 scénarios sur les deux premiers axes principaux de l’analyse en composante principale

On observe trois groupements de scénarios dans le plan formé par les deux premiers axes principaux. Le groupement en vert est situé plutôt à droite du plan. D’après la projection des variables

6. Source :<http://stanford.edu/~cpiech/cs221/handouts/kmeans.html>

sur les composantes principales (Figure 8) il s'agit des scénarios avec une moyenne taux, immobilier et action élevée. Le groupe des scénarios en bleu se situe à gauche, dans la même logique il s'agit des scénarios à moyenne taux, immobilier et action faibles. Enfin, le groupement rouge en bas et centré autour du deuxième axe principal, regroupe les scénarios avec un moyenne taux, action et immobilier dans la moyenne par rapport aux autres scénarios et une volatilité des rendements actions et immobiliers faibles. Enfin, la volatilité pour les clusters 1 et 3 n'est pas caractérisée de manière précise car le nuage de point s'étend de part et d'autre de l'axe horizontal.

Nous pouvons extraire un scénario représentatif de chacun des groupements et étudier leurs trajectoires respectives. L'étude des trajectoires confirme nos analyses sur le comportement des trois *clusters*. On observe que la moyenne des trajectoires de taux et de rendement immobiliers est nettement au-dessus de la moyenne pour le scénario représentatif du *cluster* vert. On observe un comportement opposé pour le scénario du *cluster* bleu. Pour le *cluster* rouge, on observe que les trajectoires de rendements immobiliers et actions sont autour de la moyenne, cependant il est plus difficile de visualiser la volatilité à partir du graphique.

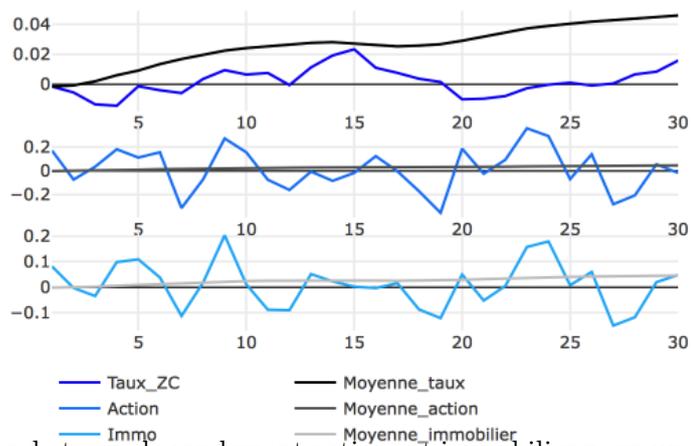


FIGURE 12 – Trajectoires de taux, de rendement actions et immobilier pour un scénario représentatif du *cluster* bleu

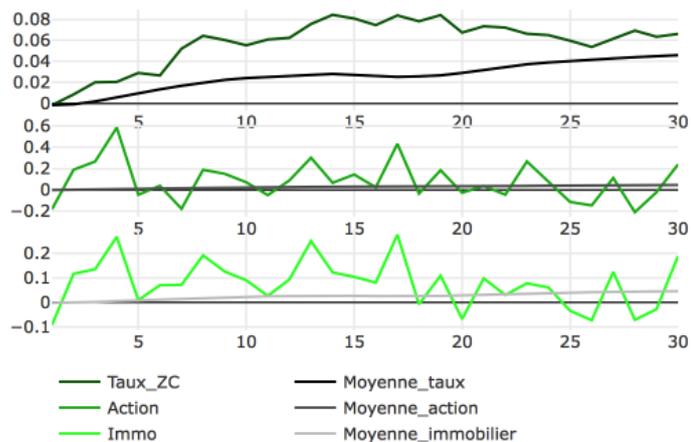


FIGURE 13 – Trajectoires de taux, de rendement actions et immobilier pour un scénario représentatif du *cluster* vert

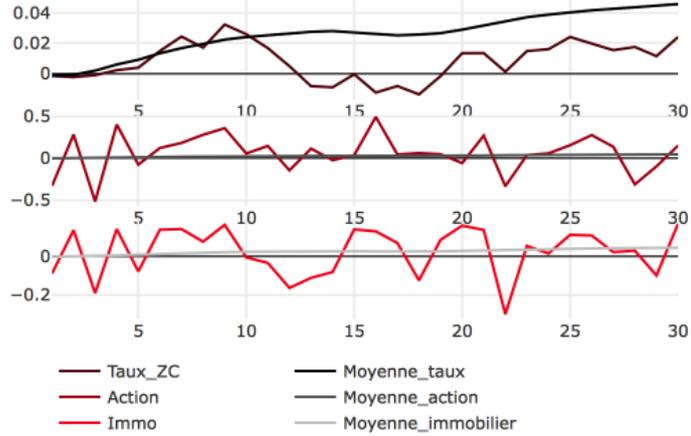


FIGURE 14 – Trajectoires de taux, de rendement actions et immobilier pour un scénario représentatif du *cluster* rouge

Finalement, la méthode de l'analyse en composantes principales nous permet de positionner les scénarios en fonction de la moyenne de leurs rendements action et immobilier, de la valeur des taux ainsi que de la volatilité. Cependant, l'inconvénient de cette méthode est que nous avons dû réduire significativement le nombre de variables explicatives pour obtenir une variance expliquée suffisante sur les premiers axes principaux. Or, résumer un scénario économique uniquement par sa moyenne et sa variance entraîne une perte importante d'information, notamment sur les variations de celles-ci au cours des 30 années de projection, ce qui ne permet pas de séparer correctement les BE comme le montre la figure ci-dessous :

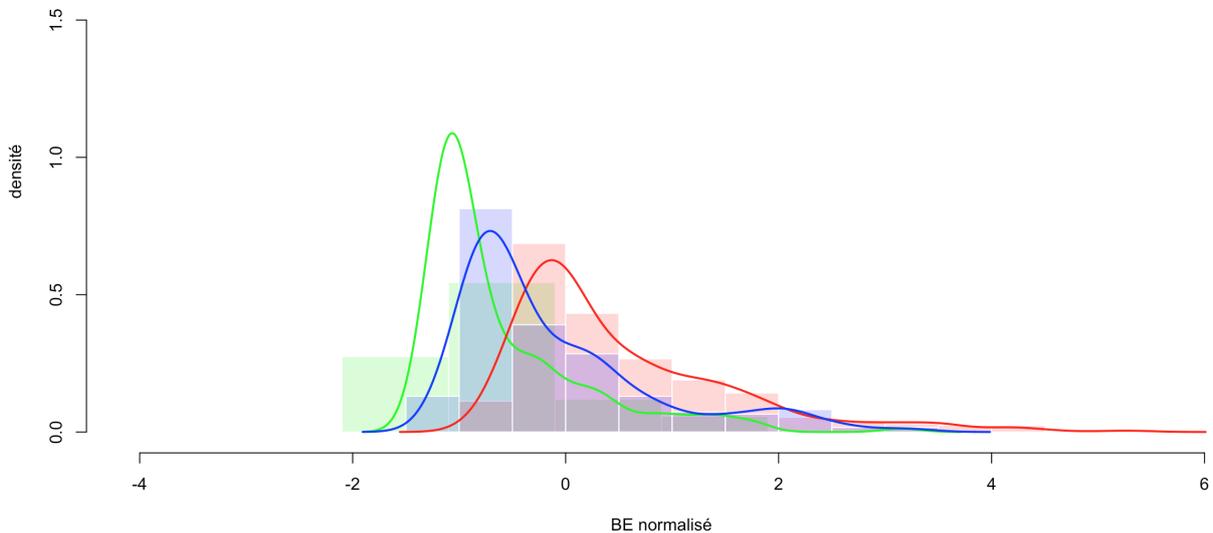


FIGURE 15 – Histogramme des *best estimate* pour l'analyse en composantes principales

En effet, on observe bien trois pics distincts, ce qui suppose que les *best estimate* moyens de chaque *cluster* sont distincts. Un test d'égalité des moyennes permet de s'en convaincre. On utilise un test de Student dont on rappelle la statistique de test :

$$Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu_0}{S_n^*} \quad (29)$$

Où : $S_n^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2}$

L'hypothèse nulle du test est la suivante : $H_0 : \mu_0 = \mu_1$. Ainsi, lorsque la p-value est inférieur à 5%, on rejette l'hypothèse nulle sinon on l'accepte. Les p-values des tests sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

Cluster	1	2	3
1	1e+00	5.2e-10	2.8e-41
2	5.2e-10	1e+00	3.1e-14
3	2.8e-41	3.1e-14	1e+00

TABLE 3 – Tableau récapitulatif des p-value du test des Student pour chaque couple de *clusters*

Ainsi, on rejette le test de Student à 5% pour l'ensemble des couples de *clusters* distincts 1,2 et 3. On en conclut que les moyennes des *best estimate* des différents *clusters* sont bien distinctes. Cependant, la variance importante dans la distribution ne permet pas de séparer correctement les *best estimate* au niveau du scénario et donc rend la prédiction de sa valeur imprécise. Ce résultat aurait pu être prévu *a priori* car on utilise des variables synthétiques qui ne captent pas l'évolution temporelle, celle-ci pouvant avoir un effet très important.

4.2 Méthode des *k-Means* sur les trajectoires

Dans cette partie, nous allons aborder la méthode des *k-means*. L'avantage de cette méthode est qu'elle va nous permettre de conserver en entrée les 90 variables explicatives des scénarios économiques et d'en résumer l'information en groupant les scénarios au sein de différents groupes ou *clusters*.

Dans un premier temps fixons arbitrairement le nombre de *clusters* égal à $k = 4$. On obtient une classification des trajectoires de taux, d'action et des rendements immobiliers. La figure ci-dessous résume les centroïdes des trajectoires résultant de la classification en quatre *clusters*.

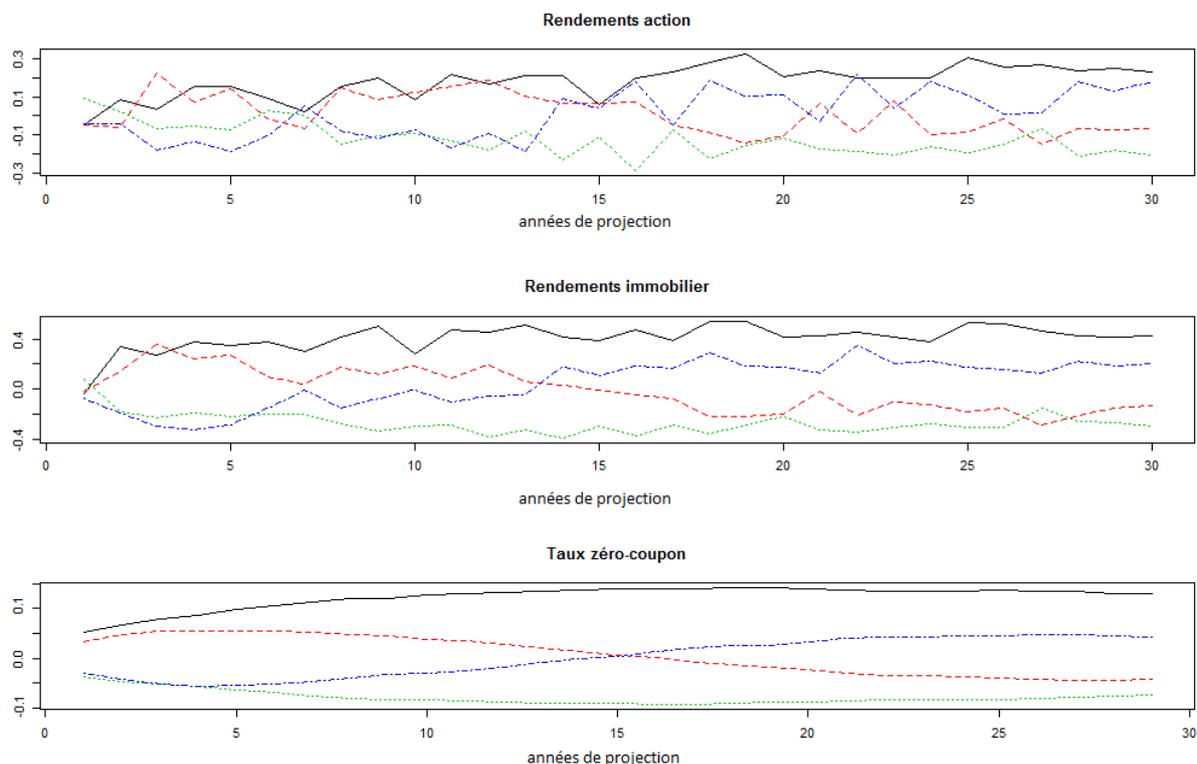


FIGURE 16 – *Clustering* des trajectoires économiques par la méthode des *k-means*

Intéressons-nous aux trajectoires de taux observables sur le troisième graphique. On distingue un premier *cluster* de trajectoires de taux croissantes (en noir sur la figure), un autre *cluster* regroupant les trajectoires plutôt décroissantes (en vert) et enfin deux autres groupements l'un croissant au début puis décroissant en fin de projection (en rouge) et enfin le dernier *cluster* de trajectoires croissantes au début et décroissantes à la fin (en bleu). Finalement, on observe que des trajectoires avec des moyennes de taux qui semblent proches (comme les trajectoires verte et bleu) sont nettement séparées dans deux *clusters* différents, là où la méthode de l'analyse principale ne permet pas de différencier les trajectoires croissantes en début de projection puis décroissantes des trajectoires décroissantes puis croissantes.

On observe que les trajectoires de rendements action et immobilier sont moins distinctement séparées que les trajectoires de taux. Cependant, on peut observer tout de même que le *cluster* de trajectoires en noir est d'un niveau supérieur sur presque l'ensemble des années de projections. De la même manière, le *cluster* de trajectoires en vert est en moyenne inférieur aux autres. Enfin, les trajectoires rouge et bleu sont assez volatiles mais on distingue que la trajectoire rouge est en moyenne élevée en début de projection puis décroît et inversement pour les trajectoires du centroïde en bleu. De plus, remarquons que les tendances par *cluster* sont similaires entre les trois graphiques, ce qui confirme la corrélation entre les taux zéro-coupon, les rendements action et immobilier.

L'avantage de cette méthode est que ici on prend en compte l'information économique tout au long des 30 ans de projection, contrairement à l'analyse en composantes principales qui ne permettrait d'avoir qu'une vision moyennée. De plus, en augmentant le nombre de *clusters*, on peut capter des groupements de trajectoires aux variations plus complexes. Il s'agit d'effectuer un arbitrage entre le nombre de *clusters* et l'interprétabilité qui décroît au fur et à mesure que le nombre de *clusters* augmente. Cependant, il nous paraît plus intéressant de pallier les inconvénients de la méthode (décrits ci-après) plutôt que d'essayer d'augmenter le nombre de clusters et de perdre en interprétabilité. Il ne nous semble donc pas nécessaire d'augmenter le nombre de *cluster* au delà de 4.

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle utilise la distance euclidienne pour mesurer la similitude entre les séries temporelles. Cette mesure de distance s'effectue points à points, la notion temporelle n'est pas prise en compte. En effet, deux séries aux variations très similaires mais légèrement décalées dans le temps auront une distance euclidienne non négligeable. De cette fait, cette méthode de *clustering* n'est pas bien adaptée à l'étude des séries temporelles. De plus elle ne permet pas de séparer correctement les BE, comme le montre la figure ci-dessous :

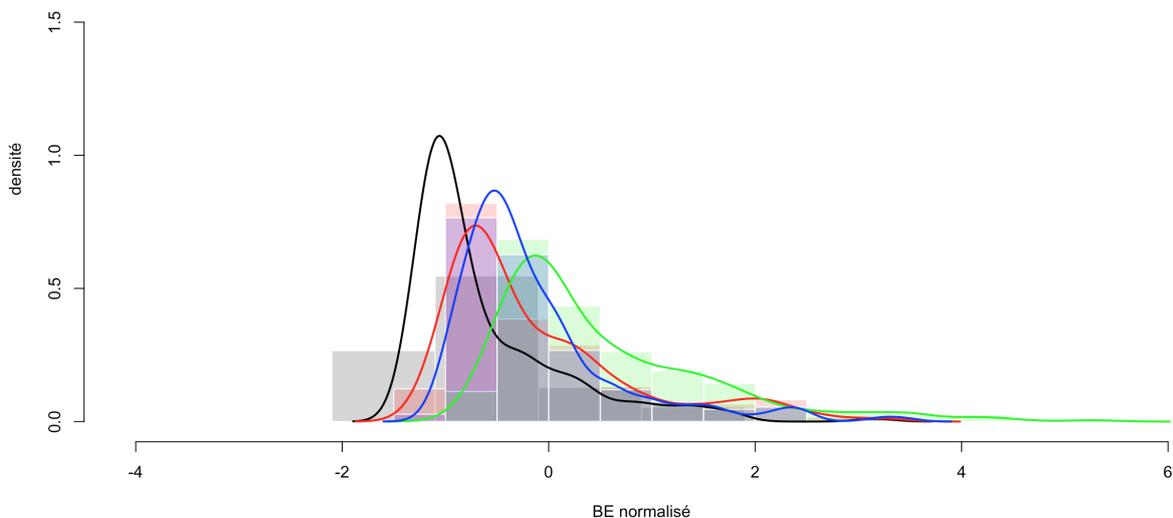


FIGURE 17 – Histogramme des *best estimate* pour la méthode des k-means

De la même manière que précédemment, nous avons réalisé un test d'égalité des moyennes sur

les distributions du *best estimate* pour chaque *cluster*.

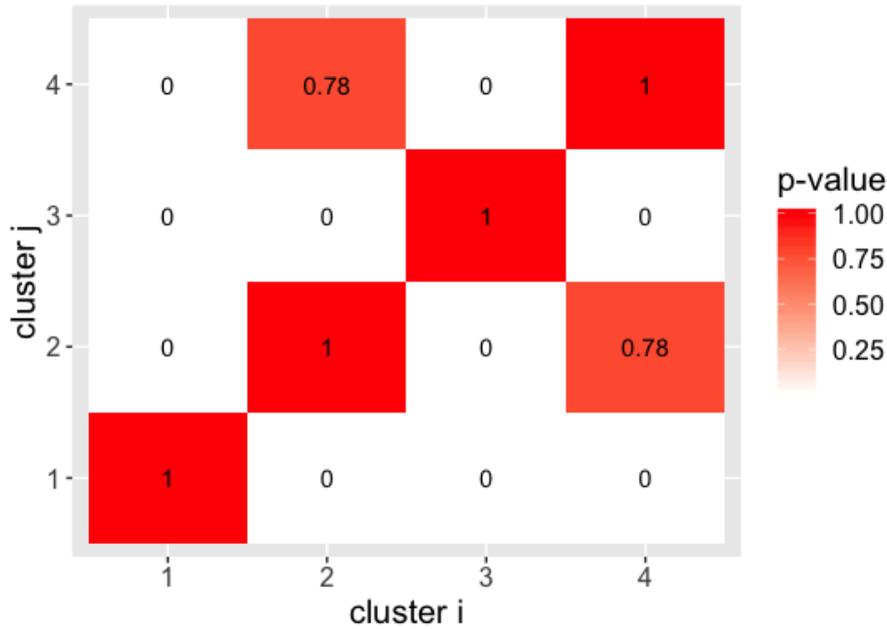


FIGURE 18 – Matrice des p-values du test de Student pour les différentes distributions des *clusters* 1 à 4

On remarque que le test de Student est rejeté à 5% pour l'ensemble des couples de *cluster* sauf pour les *clusters* 2 et 4 (respectivement en rouge et bleu sur la figure 17) pour lesquels les moyennes ne sont pas distinctes. Ainsi, de la même manière que pour la classification réalisée à la suite de l'analyse en composante principale, on observe que la variance au sein de chaque *cluster* ne permet pas de séparer nettement les *best estimate*. On notera cependant que les moyennes des distributions sont moins distinctement séparées par rapport à la figure 15. Nous introduisons dans la suite une méthode utilisant une autre distance que la distance Euclidienne.

4.3 Méthode *Dynamic Time Warping* (DTW)

Le *Dynamic Time Warping* (DTW) est un algorithme qui permet de comparer des séries temporelles en calculant une distance qui prend en compte l'évolution dans le temps des séries. Contrairement à la distance Euclidienne qui mesure à un instant t donnée la distance entre deux séries, le *Dynamic Time Warping* prend en compte le décalage temporel qui peut exister entre deux séries pourtant similaires. La manière la plus intuitive de comprendre l'idée du DTW est de faire une représentation graphique. La figure 19 montre comment la distance entre deux séries temporelles est calculée par la méthode DTW et par la distance Euclidienne. Avec la méthode DTW, seuls les premiers et les derniers points de la série sont comparés exactement à la même date, pour les autres points on se permet de les comparer à des dates différentes si celles-ci permettent de trouver des similarités.

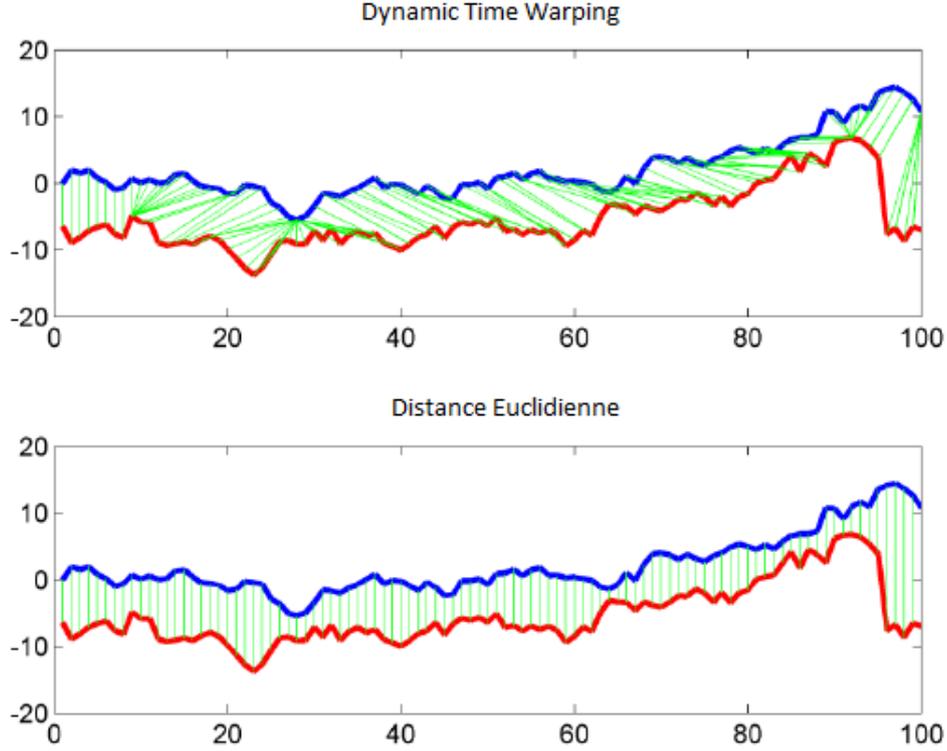


FIGURE 19 – Comparaison de la méthode DTW et distance Euclidienne ⁷.

Abordons de manière plus formelle l’algorithme DTW : la première étape consiste à créer une matrice de coût de taille $n \times n$ avec n la taille de la série temporelle. Une telle matrice doit être créée pour chaque paire de séries temporelles à comparer, ce qui signifie que la mémoire requise pour faire fonctionner l’algorithme peut devenir très grande si le nombre de séries à comparer est important. En effet, prenons deux séries temporelles x et y , pour chaque élément (i, j) de la matrice de coût, on doit calculer la distance selon la norme l_p entre x_j et y_j :

$$lcm(i, j) = \left(\sum_v |x_i^v - y_j^v|^p \right)^{1/p} \quad (30)$$

On parlera de distance DTW_p , où p correspond à la norme l_p utilisée pour construire la matrice de coût. Remarquons que la méthode utilisée reste valable si la série est multivariée puisque l’on somme sur v , à condition que les séries aient la même longueur.

Dans la deuxième étape, l’algorithme cherche le chemin qui minimise la distance entre x et y en sommant les valeurs de la matrice de coût en partant de $lcm(1,1)$ jusqu’à $lcm(n,n)$. A chaque étape, l’algorithme choisit la direction dans laquelle l’augmentation de coût est le plus faible. Si on définit par $\phi = \{(1, 1), \dots, (n, n)\}$ l’ensemble des points du chemin optimal alors la distance optimale est définie par :

$$DTW_p(x, y) = \left(\sum \frac{m_\phi lcm(k)^p}{M_\phi} \right)^{1/p}, \forall k \in \phi \quad (31)$$

avec m_ϕ un coefficient de pondération et M_ϕ la constante de normalisation associée [9]. Notons que dans la suite, nous utiliserons la norme L2 pour calculer les distances, c’est-à-dire que l’on cherchera à minimiser la distance quadratique moyenne le long du chemin dans la matrice de coût.

7. Source : Alexis Sarda-Espinosa, Comparing Time-Series Clustering Algorithms in R Using the dtwclust Package

Le schéma ci-dessous représente le chemin optimal pour deux séries particulières. A chaque pas de temps, l'algorithme choisit la distance minimale dans la matrice de coût. Si la valeur minimale est sur la diagonale, alors on comparera les deux séries au même pas de temps (comme le fait la distance Euclidienne sur la deuxième partie de la figure 19). Dans le cas où la distance minimale, n'est pas sur la diagonale de la matrice de coût, on comparera les deux séries mais avec un décalage temporel (comme observé sur le premier schéma de la figure 19).

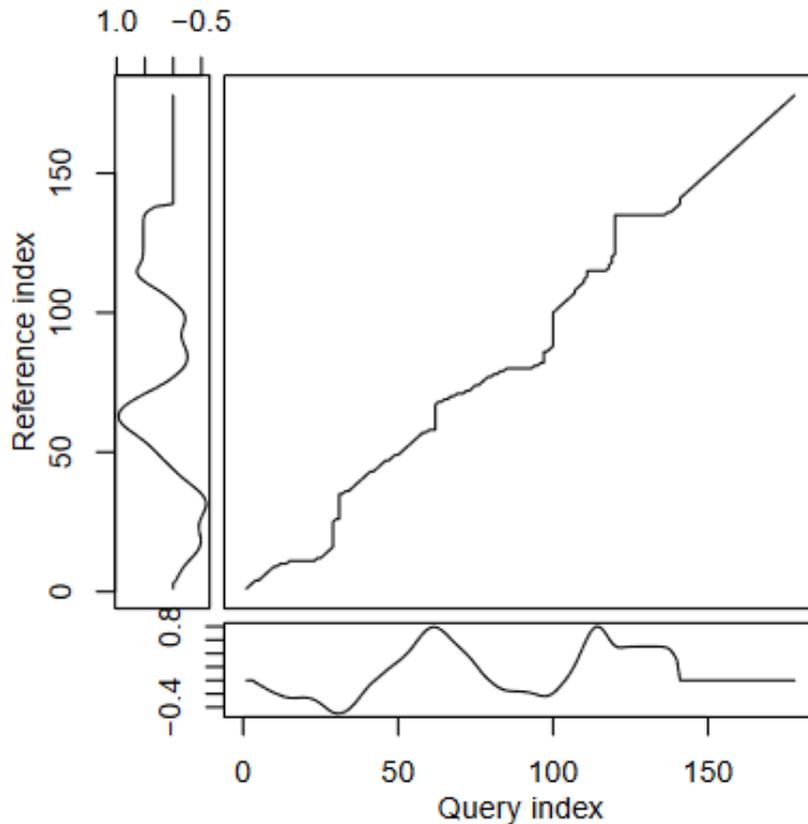


FIGURE 20 – Représentation du chemin optimal dans la matrice de coût pour deux séries particulières⁸.

Une notion importante dans le *clustering* de séries temporelles est celle du prototype. On attend que toutes les séries au sein d'un même *cluster* soient similaires entre elles, à ce titre il est intéressant de construire une série temporelle qui résume l'information du *cluster*, c'est-à-dire une série contenant les caractéristiques les plus significatives des séries présentes dans le *cluster*. Cette série est appelée prototype. Il est nécessaire de choisir la méthode pour construire ce prototype. Nous allons présenter brièvement les principales méthodes disponibles pour construire le prototype.

- Partition des médoïdes (PAM) : Un médoïde est un élément représentatif d'un *cluster*. L'approche PAM consiste à sélectionner au sein d'un *cluster* la série dont la distance moyenne aux autres séries du *cluster* est la plus faible. Ainsi, on extrait une trajectoire représentative des trajectoires du *cluster*.
- Moyenne dynamique des barycentres (DBA) : Cette méthode itérative utilise la distance DTW, elle nécessite une série de référence (un centroïde) qui est choisi aléatoirement parmi les séries du *cluster*. Ensuite, à chaque itération, on calcule la distance au sens DTW, entre chaque série du *cluster* et la série de référence. En prenant la distance moyenne, cela permet de créer une

⁸. Source image : Alexis Sarda-Espinosa, Comparing Time-Series Clustering Algorithms in R Using the dtwclust Package

nouvelle série de référence. Cette opération est répétée jusqu'à ce que l'algorithme converge ou que le nombre maximal d'itérations soit atteint. La méthode DBA est beaucoup plus coûteuse en termes de calcul que la méthode PAM.

Enfin, il faut également spécifier la méthode de classification choisie. Les deux principales approches sont les suivantes :

- Classification hiérarchique : La classification hiérarchique consiste à créer une classification sous forme d'arbre, les séries sont ordonnées de manière hiérarchique. La méthode utilisée pour construire l'arbre est la méthode dite de Ward. On introduit la fonction de coût Δ définie par :

$$\Delta(A, B) = \sum_{i \in A \cap B} \|\vec{x}_i - \vec{G}_{A \cap B}^2\| - \sum_{i \in A} \|\vec{x}_i - \vec{G}_A^2\| - \sum_{i \in B} \|\vec{x}_i - \vec{G}_B^2\| \quad (32)$$

$$= \frac{n_A n_B}{n_A + n_B} \|\vec{G}_1 - \vec{G}_2\| \quad (33)$$

Où \vec{G}_j désigne le centre du *cluster* j et n_j le nombre d'éléments dans chaque *cluster*. Δ représente le coût en terme de distance de la fusion des *clusters* A et B. L'algorithme de classification hiérarchique se déroule comme suit :

- 1) A l'initialisation, tout les points sont considérés comme le centre de gravité de leur propre *cluster*.
- 2) Ensuite, on augmente le nombre de points par *cluster* de manière à ce que l'augmentation du coût Δ soit minimale. Rappelons que la fonction de coût dépend du nombre d'éléments n_i et n_j au sein des deux *clusters* à fusionner. Ainsi pour deux paires de *clusters* équidistant, la méthode de Ward préférera fusionner les *clusters* avec le plus petit nombre d'éléments, c'est-à-dire celle qui minimise le coût Δ .
- 3) L'algorithme s'arrête lorsque tous les *clusters* ont fusionné et qu'il n'en reste plus qu'un.

Cela permet de construire des arbres de classification ou dendogrammes, comme nous verrons dans la suite. C'est à l'utilisateur de définir le seuil à partir duquel il convient de couper le dendogramme et ainsi de déterminer le nombre de *cluster* optimal. De plus, rappelons que cette méthode de clustering est déterministe, c'est-à-dire qu'elle produit une unique classification si les données en entrée sont inchangées.

- Classification par partition : La classification par partition est une approche différente : le nombre de *clusters* est à préciser en amont et l'algorithme va associer à chaque série un numéro de *cluster*. Le choix du nombre de *clusters* peut être un facteur limitant, cependant il existe des méthodes pour déterminer le nombre de *clusters* optimal. La classification par partitions cherche à minimiser la distance à l'intérieur de chaque *cluster* tout en maximisant la distance entre les différents *clusters*. L'algorithme est défini comme suit :

- 1) On tire aléatoirement un nombre k de séries égales au nombre de *clusters* choisis. Ces séries seront les centroïdes à l'initialisation.
- 2) On calcule la distance entre chaque séries et les centroïdes définis à l'étape 1). On assigne à chaque série le *cluster* dont le centroïde est le plus proche. Puis on met à jour la position du nouveau centroïde en prenant le barycentre de chaque *cluster*.
- 3) On itère la deuxième étape jusqu'à ce que l'algorithme converge ou que le nombre maximal d'itérations soit atteint.

On remarque que l'algorithme est exactement celui utilisé dans la méthode des *k-means*. La différence majeure est que la distance utilisée n'est pas forcément la distance Euclidienne. Elle dépend notamment du prototype choisi. Si on choisit un prototype de type PAM, c'est équivalent à faire un *k-means*. Enfin, remarquons que comme l'initialisation est aléatoire, il sera intéressant d'étudier la stabilité de l'algorithme pour différentes initialisations.

4.4 Application de la méthode DTW aux scénarios de taux à 1 an

Dans cette partie, nous allons mettre en application la méthode de *clustering* avec la distance DTW sur les scénarios de taux. On rappelle que le modèle ALM prend en entrée 1000 scénarios économiques de taux, projetés chacun sur 30 ans. La première étape consiste à choisir parmi les méthodes présentées dans la partie 3.3, un type de classification (hiérarchique ou par partitions). Comme il est difficile de dire quelle méthode est la plus pertinente *a priori*, nous allons essayer les deux.

4.4.1 Classification hiérarchique

La classification hiérarchique appliquée aux données sur les scénarios de taux, nous permet de construire le dendrogramme associé :

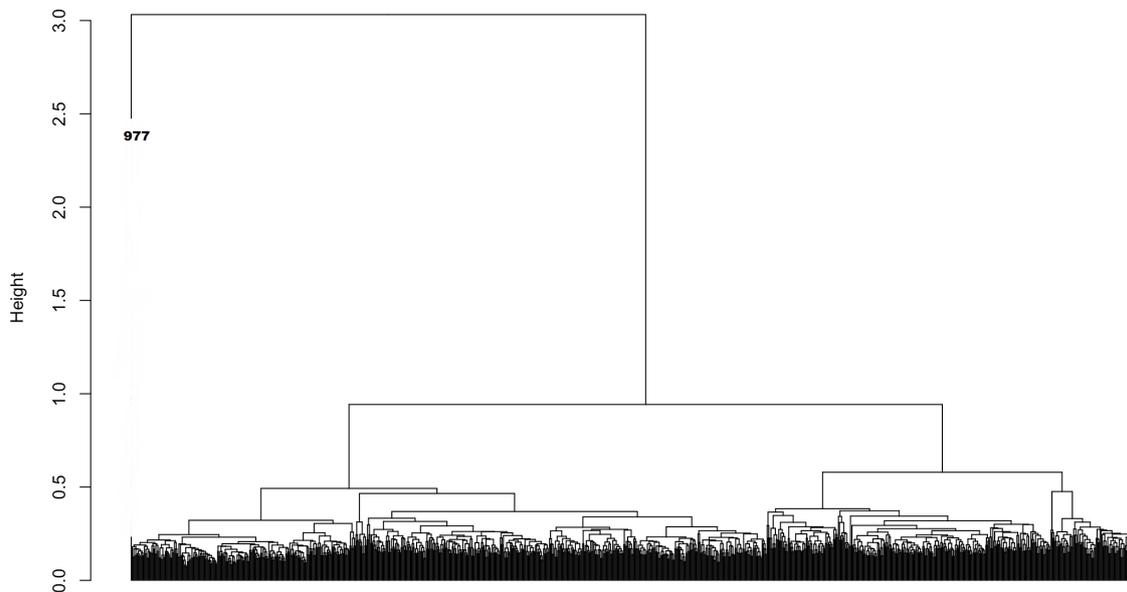


FIGURE 21 – Dendrogramme - Classification hiérarchique

On remarque que le scénario numéro 977 est placé dans un *cluster* à lui seul. Nous pouvons essayer d'expliquer pourquoi ce scénario est singulier en le comparant aux autres trajectoires de scénarios de taux 1 an.

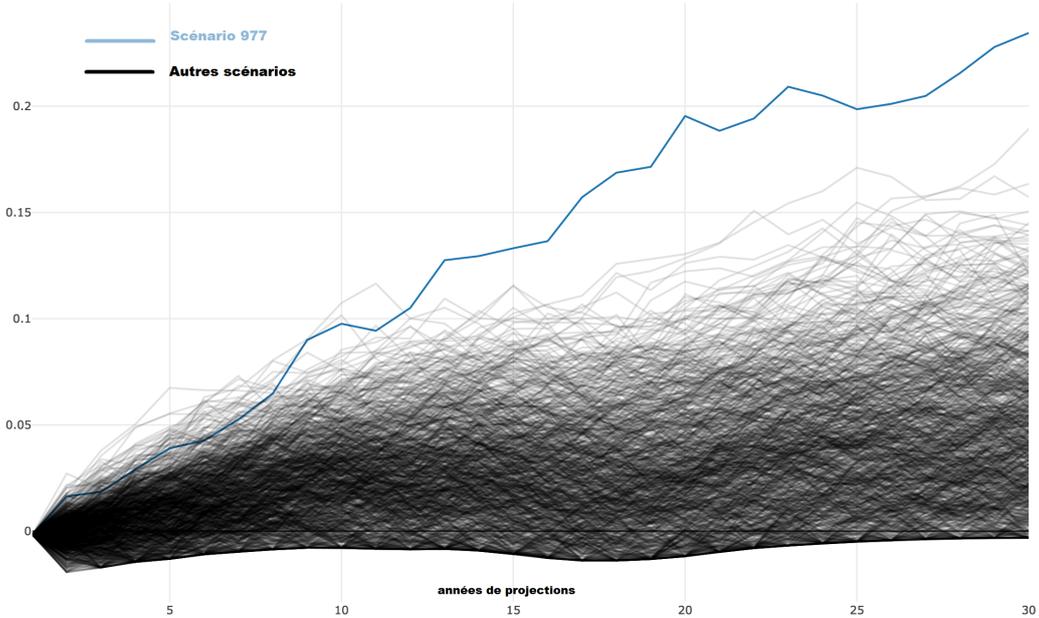


FIGURE 22 – Trajectoires des scénarios de taux (en noir) et du scénario 977 (en bleu)

On observe que le scénario 977 a une trajectoire croissante et nettement supérieure aux autres trajectoires à partir du milieu de projection, autour de la 15^{ème} année.

Avant de poursuivre l'analyse du dendrogramme de la figure 21, nous devons introduire quelques notions théoriques et notamment la notion d'inertie inter et intra-classe.

Tout d'abord introduisons la distance Euclidienne entre deux points A et B : on définit la distance Euclidienne entre deux points $A(x_i, y_i)$ et $B(x_j, y_j)$ par :

$$d_2(A, B) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (34)$$

Soit un nuage de points $\delta = N_i, i = 1, \dots, n$. On désigne par G, le centre de gravité de δ . L'inertie du nuage est défini par :

$$I(\Gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_2(N_i, G)^2 \quad (35)$$

L'inertie totale mesure la dispersion du nuage autour du centre de gravité G. Si le nuage de points Γ est composé de k classes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, alors on défini l'inertie intraclasse comme la dispersion des points par rapport à leur centre de gravité respectif G_1, \dots, G_n par :

$$I_{intra} = \sum_{i=1}^n I(\Gamma_i) \quad (36)$$

Enfin, on introduit la notion d'inertie interclasse qui caractérise la dispersion des classes par rapport au centre d'inertie G du nuage :

$$I_{inter} = \sum_{i=1}^n p_i d_2(G_i, G)^2 \quad (37)$$

où p_i désigne le poids de la classe Γ_i (calculé comme le rapport entre le nombre de scénarios dans la classe Γ_i rapporté au nombre total de scénarios, i.e. 1000)

On a également la relation suivante, liant l'inertie totale à l'inertie inter et interclasse :

$$I_{totale} = I_{inter} + I_{intra} \quad (38)$$

On étudie sur la figure suivante le gain d'inertie interclasse en fonction du nombre de *cluster*. On remarque qu'au delà d'un certain nombre de *clusters* les sauts d'inertie sont relativement faibles, ce qui signifie qu'augmenter le nombre de classes ne permet plus d'augmenter significativement l'inertie interclasse. On remarquera que la méthode de Ward décrite dans la partie précédente revient en fin de compte à maximiser l'inertie interclasse.

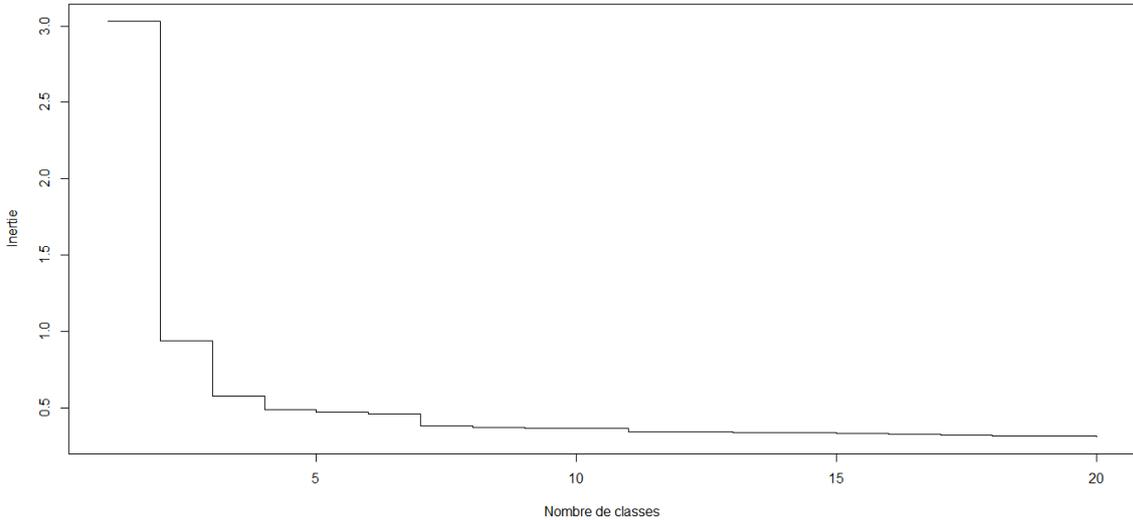


FIGURE 23 – Gain d'inertie interclasse en fonction du nombre de *clusters*

Pour déterminer le nombre de *clusters* optimal, on applique la règle dite "du coude" : cette règle consiste à déterminer un seuil à partir duquel la diminution de l'amplitude des sauts d'inertie est la plus significative. Cette règle est pour le moins subjective mais elle est couramment utilisée dans la détermination du nombre de *clusters* optimal.

On remarque que la meilleure coupure possible se situe entre les poids 0,5 et 1, ce qui donnerait 3 *clusters* distincts dont un ne contenant que le scénario 977. On observe bien sur le dendrogramme de la figure 21 que l'arbre se divise nettement en deux branches au niveau de l'inertie égale à 1. Au-delà, les autres divisions n'impliquent pas une nette séparation en groupes homogènes.

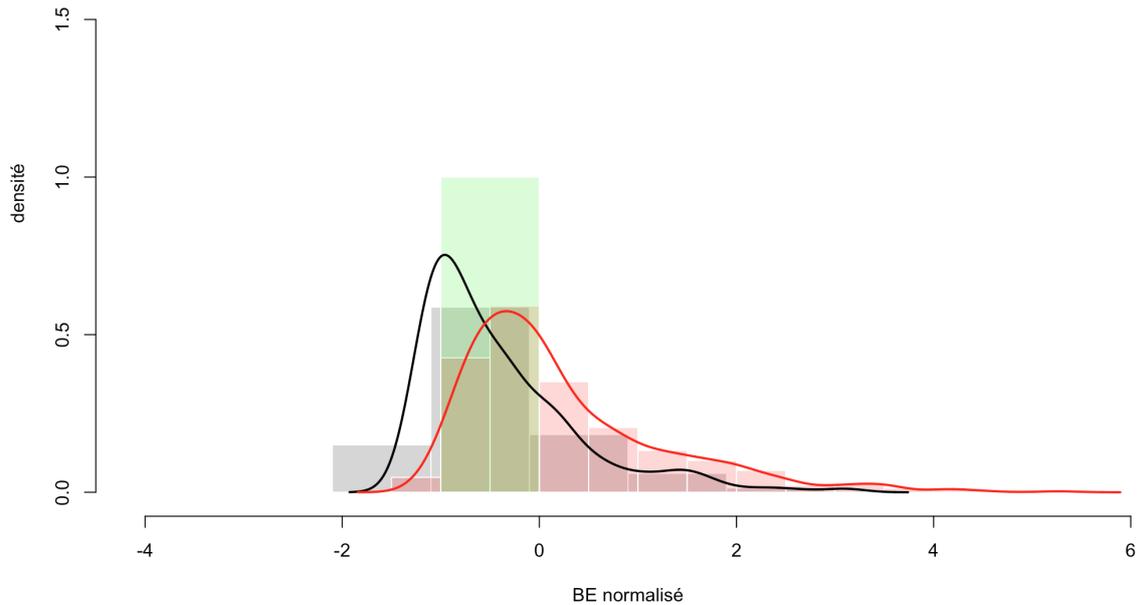


FIGURE 24 – Histogramme des best estimate pour la méthode DTW hiérarchique

A priori, cette méthode paraît peu satisfaisante car on voit que son pouvoir séparateur est assez limité, la variance de la distribution est importante et le scénario 977 (en vert) est isolé. Remarquons par ailleurs qu'un scénario de taux singulier comme le 977, n'a pas une valeur de *best estimate* singulière car on observe que la valeur est proche de la moyenne des *best estimate* normalisés. Nous préférons nous orienter vers la méthode de classification par partitions.

4.4.2 Classification par partitions

Détermination du nombre de *clusters* optimal : La première étape consiste à choisir le nombre de *clusters* que l'on veut créer. Pour cela, nous calculons la distance moyenne entre les séries de chaque *cluster* et leurs centroïdes respectifs. On calcule cette distance pour un nombre de *clusters* variant entre 3 et 20. En effet, le nombre de 3 *clusters* semble un minimum pour différencier de manière significative les scénarios et nous nous limitons à 20 *clusters* car le nombre de scénarios étant de 1000, une moyenne de 50 scénarios par *cluster* semble un minimum pour pouvoir faire des analyses par la suite. De plus, notre objectif étant d'interpréter les mécanismes du modèle ALM, multiplier le nombre de *cluster* nuirait à l'interprétabilité. On utilise la règle du "coude" pour estimer le nombre de *clusters* optimal, on observe sur la figure ci-dessous que le nombre de *clusters* à partir duquel la décroissance de la distance moyenne aux centroïdes est lente se situe aux alentours de 8 à 10 *clusters*. On présentera l'étude pour 8 *clusters* dans la suite, le lecteur intéressé se reportera à l'Annexe 3 pour l'étude avec 9 et 10 *clusters*.

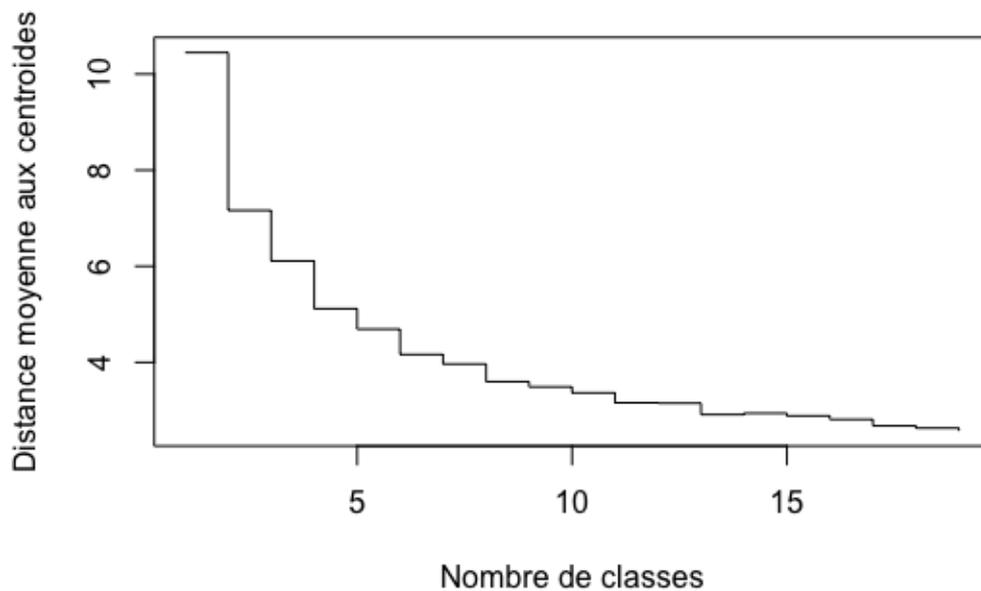


FIGURE 25 – Évolution de la distance moyenne aux centroïdes en fonction du nombre de *clusters*

Le prototype choisi est de type "DBA", en effet on utilise la distance DTW qui reflète mieux les similitudes entre les séries temporelles. La figure ci-dessous représente graphiquement les scénarios dans les différents *clusters* :

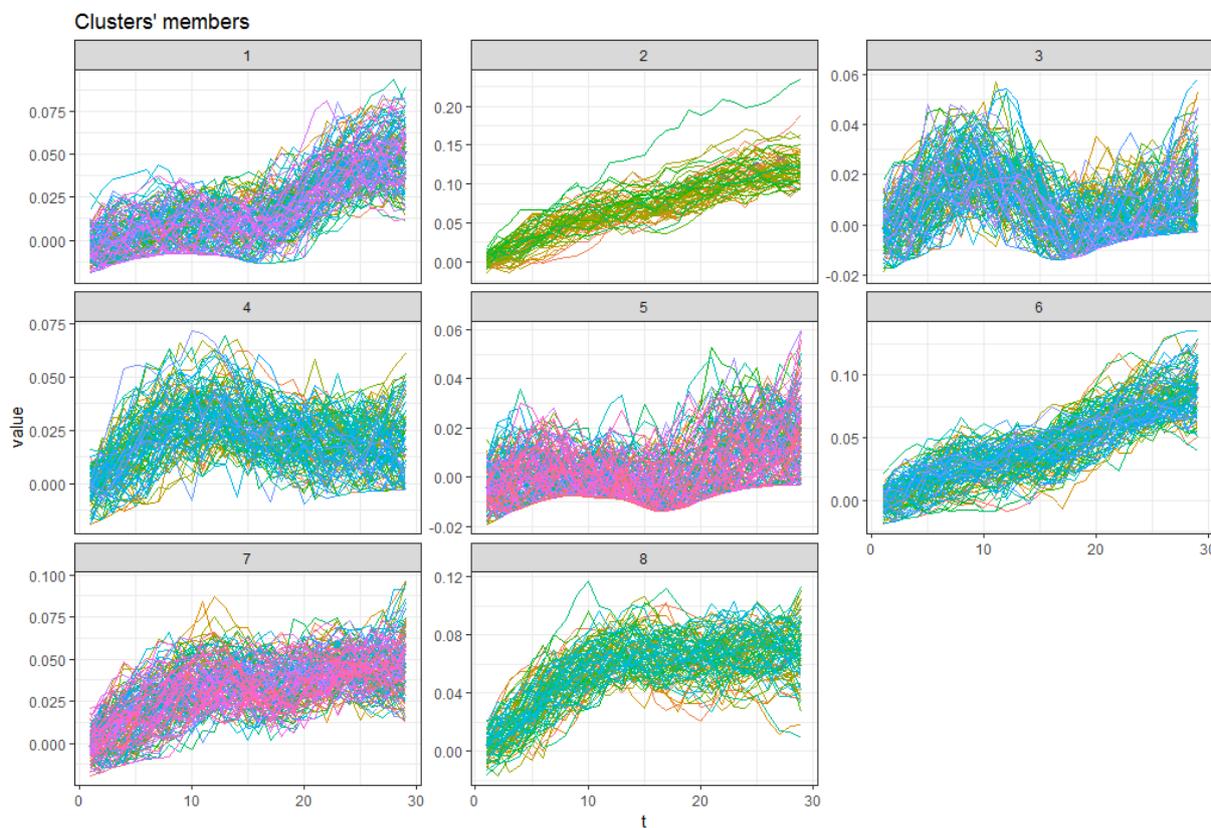


FIGURE 26 – Représentation graphique des séries de chaque *cluster*

On observe que les trajectoires de taux au sein de chaque *cluster* sont assez bien différenciées. Le *cluster* numéro 1 contient des trajectoires de taux faibles et constantes sur les 15 premières années de projection puis faiblement croissantes. Le *cluster* numéro 2 regroupe les trajectoires de taux fortement croissantes et pouvant atteindre des taux de l'ordre de 15% en fin de projection. Le *cluster* numéro 3, regroupe les trajectoires croissantes sur les 6 premières années de projection jusqu'à atteindre un niveau de taux d'environ 3%, puis décroissantes entre la 7^{ème} et la 15^{ème} année et enfin légèrement croissantes jusqu'à la fin de la projection. Le *cluster* 4, regroupe des trajectoires plutôt croissantes jusqu'à la 11^{ème} année de projection pour atteindre environ 4% puis décroissantes jusqu'à la fin de la projection. Pour le *cluster* 5, les trajectoires sont croissantes les 8 premières années, puis redescendent jusqu'à la 17^{ème} année et enfin recroissent en toute fin de projection. Les trajectoires du *cluster* 6 sont croissantes, à l'image du *cluster* 2 mais avec des niveaux de taux plus faibles atteignant environ 10% en fin de projection. Le *cluster* 7 possède des trajectoires faiblement croissantes, avec une moyenne autour de 4%. Enfin, le dernier *cluster* regroupe des trajectoires de taux fortement croissantes jusqu'à la 11^{ème} année puis se stabilisent autour de 7% jusqu'à la fin de la projection.

Pour visualiser de manière plus claire le comportement des *clusters*, on peut représenter pour chaque *cluster* la série moyenne c'est-à-dire celle correspondant à la moyenne de toutes les séries sur les 30 années de projection. On observe sur la figure ci-dessous que le comportement des séries de taux au sein des différents *clusters* est bien différencié :

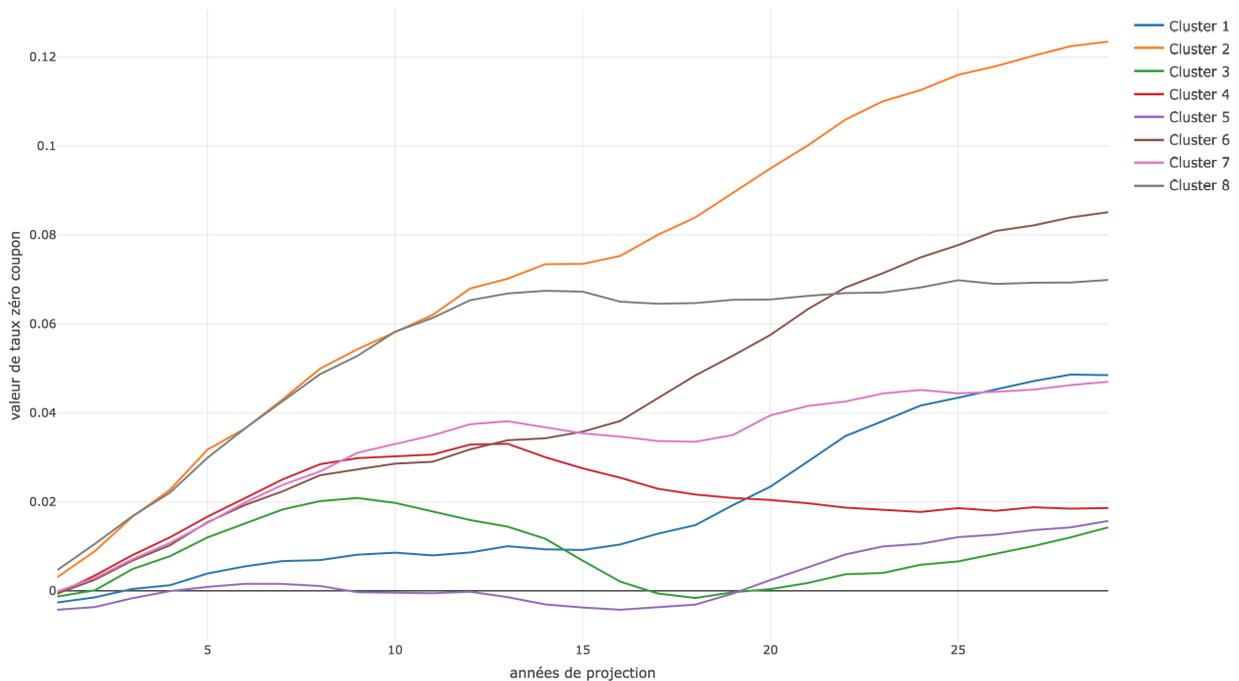


FIGURE 27 – Représentation graphique des séries moyennes de chaque *cluster*

On retrouve le comportement du *cluster* 2 (en orange) des trajectoires de taux fortement croissantes. Les trajectoires du *cluster* 8 (en gris) sont fortement croissantes sur les 12 premières années de projection puis demeurent assez constantes autour de 6%. Les trajectoires des *clusters* numéro 4, 7 et 6 sont très similaires sur les 12 premières années de projection mais ensuite le *cluster* 6 (en marron) possède des trajectoires croissantes qui dépassent 8% en fin de projection, le *cluster* 7 (en rose) a des trajectoires plutôt constantes autour de 4% et enfin les trajectoires du *cluster* 4 (en rouge) diminuent sur le reste des années de projection. Les trajectoires des *cluster* 1 (en bleu) sont faiblement croissantes jusqu'à la 15^{ème} année de projection puis faiblement croissantes entre la 15^{ème} et la 25^{ème} années et enfin constantes autour de 5% jusqu'à la fin de projection. Les trajectoires du *cluster* 5 (en violet) sont proches de 0% jusqu'à la 13^{ème} année, puis négatives entre la 13^{ème} et la

19^{ème} année et enfin croissantes en fin de projection pour atteindre 1,5%. Enfin, les trajectoires du *cluster* 3 (en vert) sont croissantes jusqu'à la 8^{ème} année puis décroissent fortement jusqu'à la 19^{ème} année pour remonter faiblement en fin de projection jusqu'à 1,4%.

Pour conclure, on voit que nos *clusters* de trajectoires de taux permettent de bien visualiser le comportement des scénarios, ce qui correspond bien à l'objectif de notre étude à savoir visualiser puis interpréter. Une limite de cette méthode est qu'il existe au sein de chaque *cluster* des scénarios avec des niveaux de taux assez différents bien qu'ils aient un comportement similaire.

Étude de la stabilité de la classification : Comme vu dans la partie théorique, les centroïdes sont tirés de manière aléatoire à l'initialisation et nous devons vérifier que cela ne remet pas en cause la stabilité de nos *clusters*. Nous allons vérifier la stabilité des *clusters* par deux approches. La première approche consiste à relancer l'algorithme et vérifier si les séries sont effectivement classées dans les mêmes *clusters* (l'ordre des *clusters* peut varier lorsque l'on relance l'algorithme). Les résultats sont regroupés dans la « matrice de confusion » suivante :

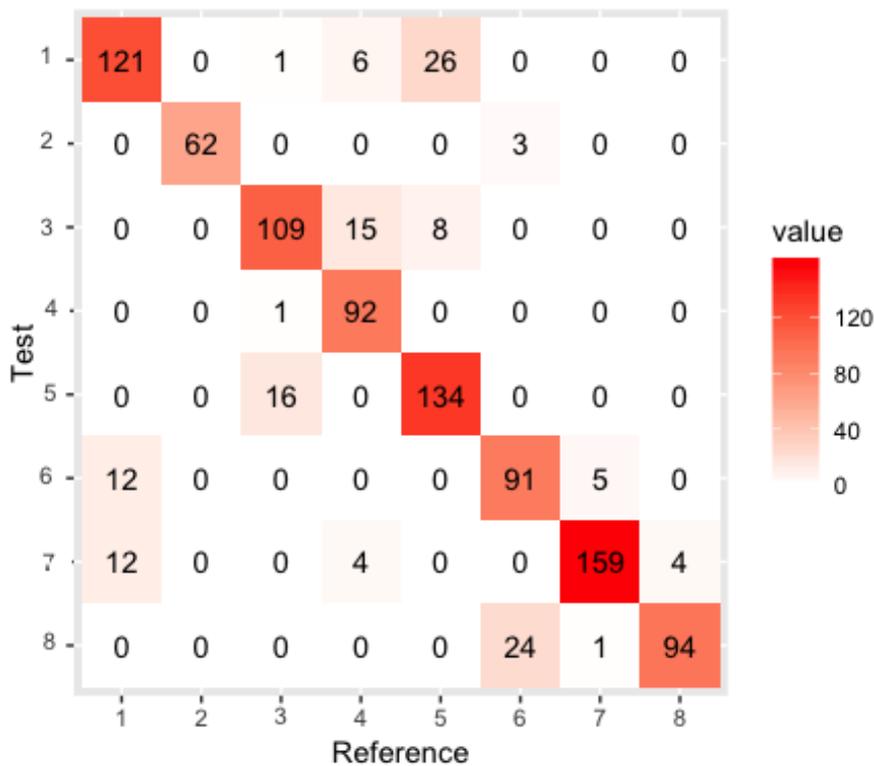


FIGURE 28 – Matrice de confusion - Stabilité des *clusters*

On observe sur la diagonale que la majorité des scénarios sont classés dans le même *cluster* même si on relance l'algorithme avec des paramètres d'initialisation différents. De plus, il est intéressant de constater que les scénarios qui sont classés dans un *cluster* différent au second lancement, le sont généralement dans un *cluster* dont les trajectoires sont assez proches. Prenons par exemple le premier *cluster*, on remarque que 12 scénarios sont classés dans les *clusters* 6 et 7 au deuxième lancement. Or quand on observe la figure 27, on voit que les trajectoires des *clusters* 1 et 6 sont relativement similaires en terme d'allure. De plus, les trajectoires 6 et 7 ont des niveaux très proches sur la première moitié de projection. De même, on observe une allure similaire entre les trajectoires des *clusters* 3 et 5. Finalement, on voit que la variabilité des *clusters* résulte des similitudes locales dans les trajectoires et de la variabilité au sein d'un même *cluster*, ce qui fait que des scénarios « extrêmes » de deux *clusters* peuvent être classés tour à tour dans l'un ou dans l'autre.

La seconde approche permet de confirmer l'étude précédente. Nous avons relancé 150 fois l'algo-

rithme, avec des paramètres d'initialisation différents. Sur la figure ci-dessous, nous avons représenté en trait plein, la trajectoire moyenne pour chaque *cluster* au premier lancement de l'algorithme. Le dégradé de couleur permet de visualiser l'amplitude de la variation de ces trajectoires moyennes lors des 150 lancements de l'algorithme :

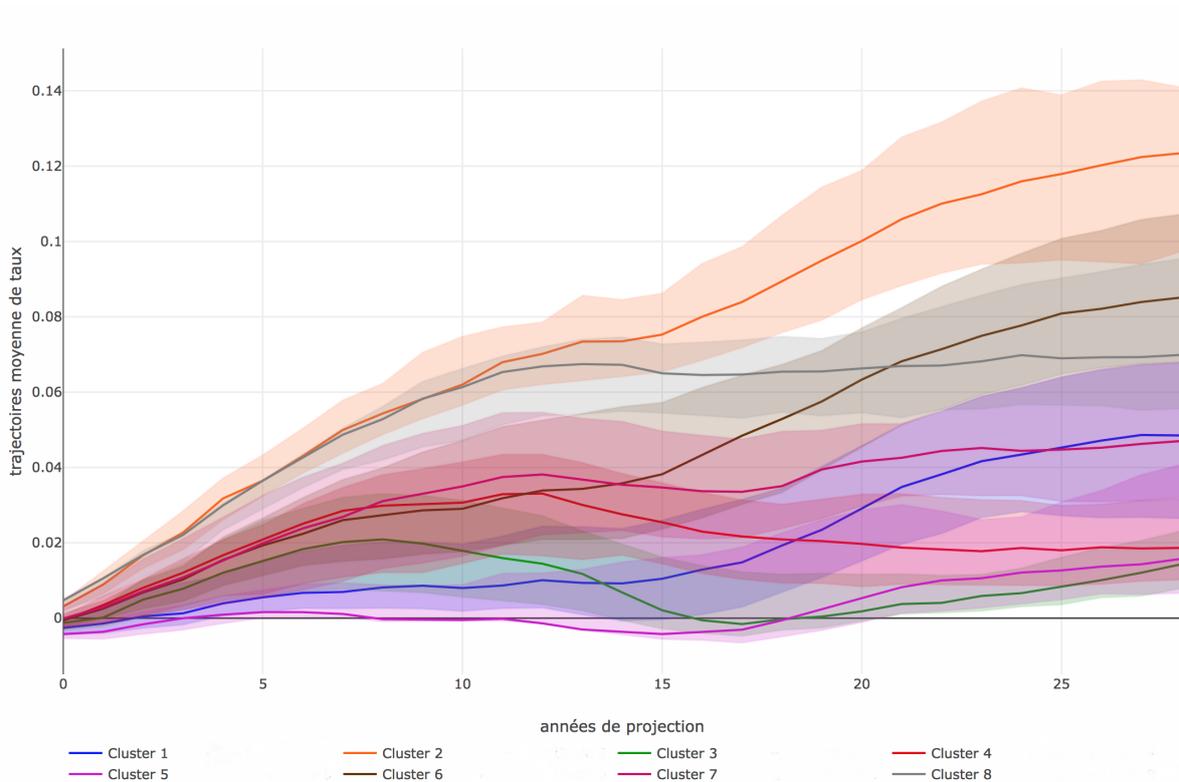


FIGURE 29 – Étude de la stabilité des trajectoires moyennes des taux au sein de chaque *cluster*

On observe que les différentes trajectoires sont assez différenciées mais qu'il existe des zones où les trajectoires moyennes se superposent, en particulier pour les *clusters* de taux faiblement croissants (3, 1 et 5). Cela peut expliquer que certains scénarios soient classés différemment en fonction des paramètres d'initialisation de l'algorithme mais en moyenne les *clusters* sont relativement stables.

De la même manière, il est possible d'utiliser la distance *DTW* pour faire de la classification multivariée (cf Annexe 5).

4.4.3 Études de la distribution des *best estimate*

Nous allons voir si les *clusters* de taux créés permettent de séparer les différentes valeurs de $BE_{i,0}$. Notons que les valeurs ont été normalisées dans la suite de l'étude afin de simplifier la visualisation.

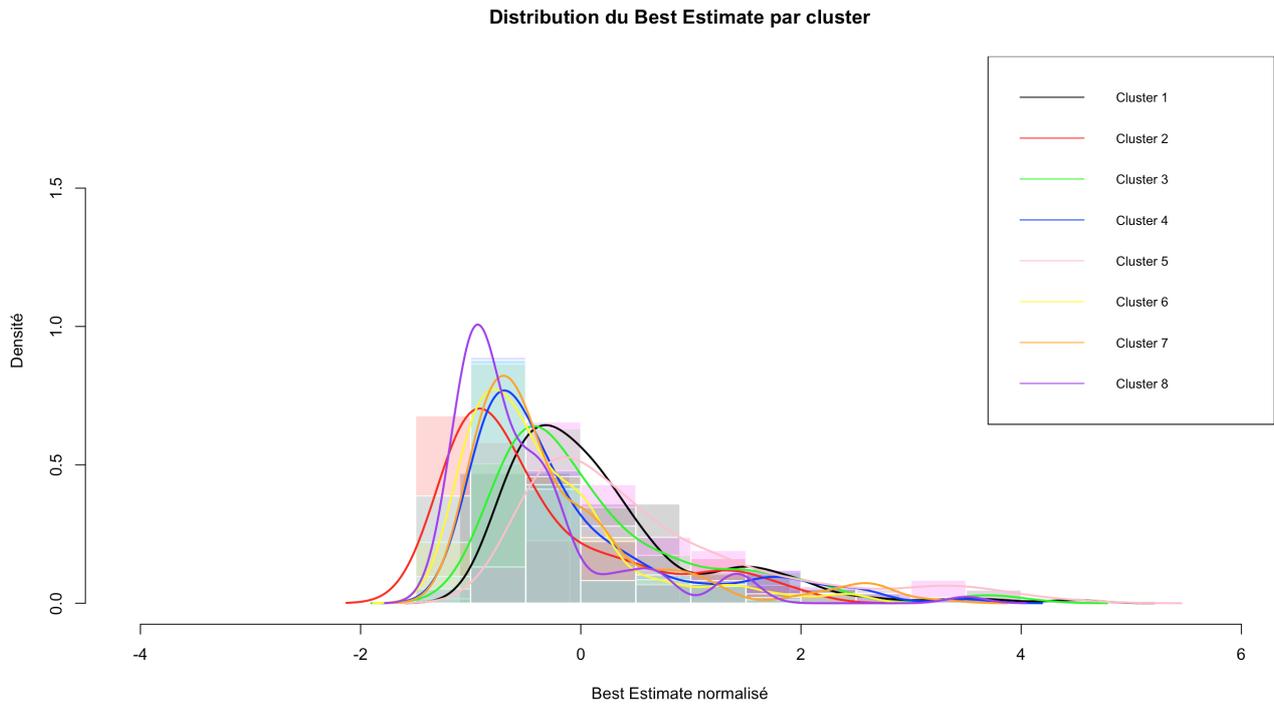


FIGURE 30 – Histogramme de distribution du BE pour chacun des *clusters* de taux

On remarque que les *clusters* de taux ne permettent pas de séparer nettement les différentes valeurs de BE. Un test d'égalité des moyennes permet de s'en convaincre. Nous comparons les distributions prises deux à deux, les résultats sont récapitulés dans la matrice ci-dessous.

On rappelle que l'on accepte l'hypothèse nulle à 5% pour les couples de *clusters* pour lesquels la p-value est supérieur à 0,05. Ainsi, on peut considérer que la moyenne de la distribution des *Best estimate* des clusters 1,3 et 4 sont confondues. Ainsi que la moyenne des distributions des clusters 2,6,7 et 8.

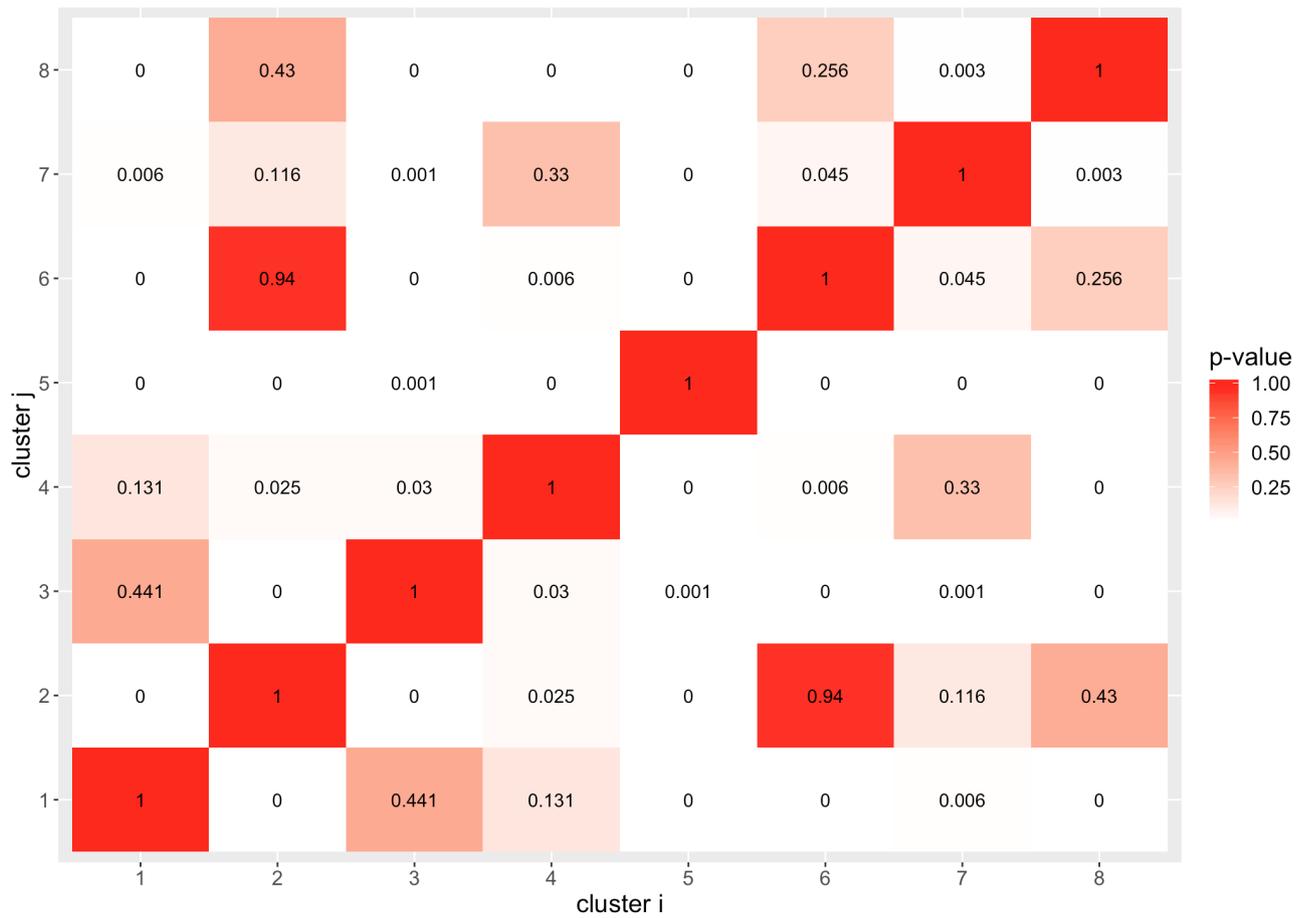


FIGURE 31 – Matrice des p-values du test de Student pour les différentes distributions des clusters 1 à 8

De la même manière, les *clusters* actions et multivariés taux-actions ne permettent pas une séparation plus claire (Annexe 4 et Annexe 5).

On en conclut que malgré les similitudes apparentes entre les scénarios économiques en entrée du modèle ALM, il n'est pas simple de relier ces comportements avec les valeurs de $BE_{i,0}$ observées en sortie. En conclusion, même une méthode de *clustering* qui permet une interprétation claire des *clusters* et qui est appropriée à l'étude de séries temporelles ne suffit pas pour analyser correctement le *best estimate*, il faut donc s'appuyer sur des méthodes complémentaires.

5 Modélisation du *Best Estimate* et interprétations des mécanismes

L'objectif de cette partie est de proposer une démarche permettant de modéliser le *best estimate* et de l'interpréter à l'aide des mécanismes du modèle ALM. La répartition du portefeuille choisie pour la modélisation est la suivante : 80% d'obligations, 15% d'actions, 5% de monétaire. Dans le modèle, l'immobilier est modélisé comme les actions, il n'y a donc pas de perte de généralité à ne considérer que les actions dans le portefeuille. Dans un premier temps, nous pouvons essayer de modéliser le $BE_{i,0}$ en fonction des valeurs des rendements taux et actions sur les scénarios économiques de chaque *cluster* à l'aide d'un modèle simple, comme une régression linéaire, car nous gardons comme objectif principal de pouvoir interpréter le fonctionnement du modèle ALM. En effet, un modèle trop complexe (type réseau de neurones) ne serait pas facilement interprétable, bien qu'il puisse donner des résultats très précis, au moins sur un horizon de projection court [5].

Avant de faire la modélisation, étudions les corrélations entre les différentes variables économiques et le $BE_{i,0}$ sur l'ensemble des 1000 scénarios. Ci-dessous la matrice de corrélation entre les variables actions et le *best estimate* :

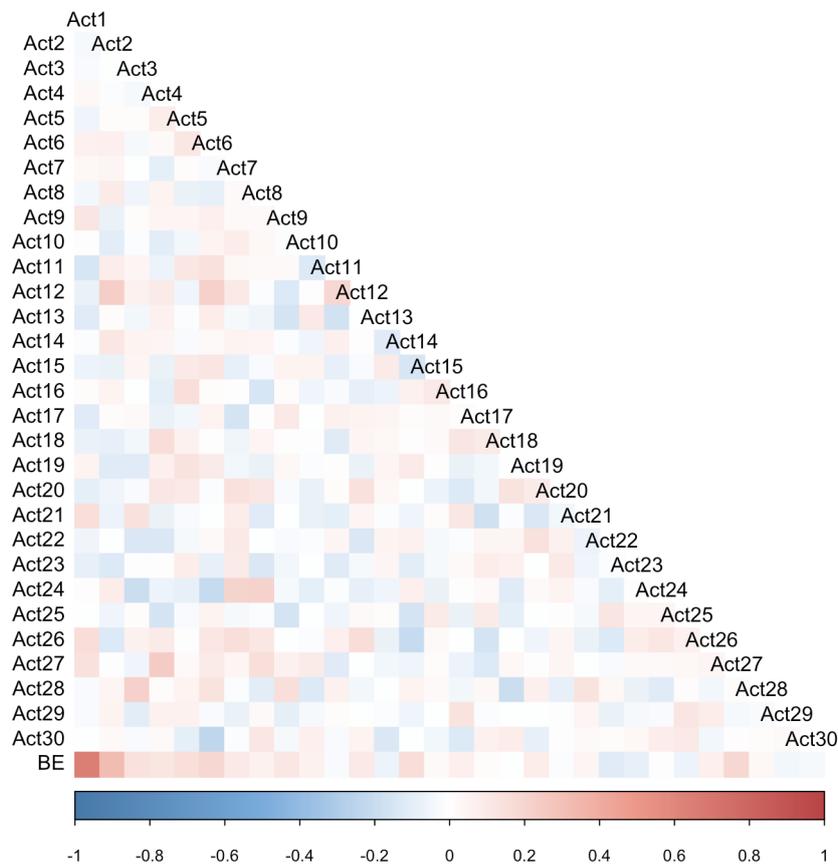


FIGURE 32 – Matrice de corrélation entre les variables actions sur 30 ans et le BE

On remarque une forte corrélation positive entre le $BE_{i,0}$ et la première valeur action (le coefficient de corrélation vaut 0,65).

Remarquons que dans la suite de l'étude, nous travaillerons sur les valeurs de $BE_{i,0}$ normalisées, cela n'a aucun impact sur les résultats de la régression, seules les valeurs des estimateurs sont réduites pendant le R^2 , le R^2 ajusté, le RMSE ainsi que les *p-values* sont invariants.

Ainsi, l'évolution du $BE_{i,0}$ en fonction de la première valeur de rendement action confirme la corrélation :

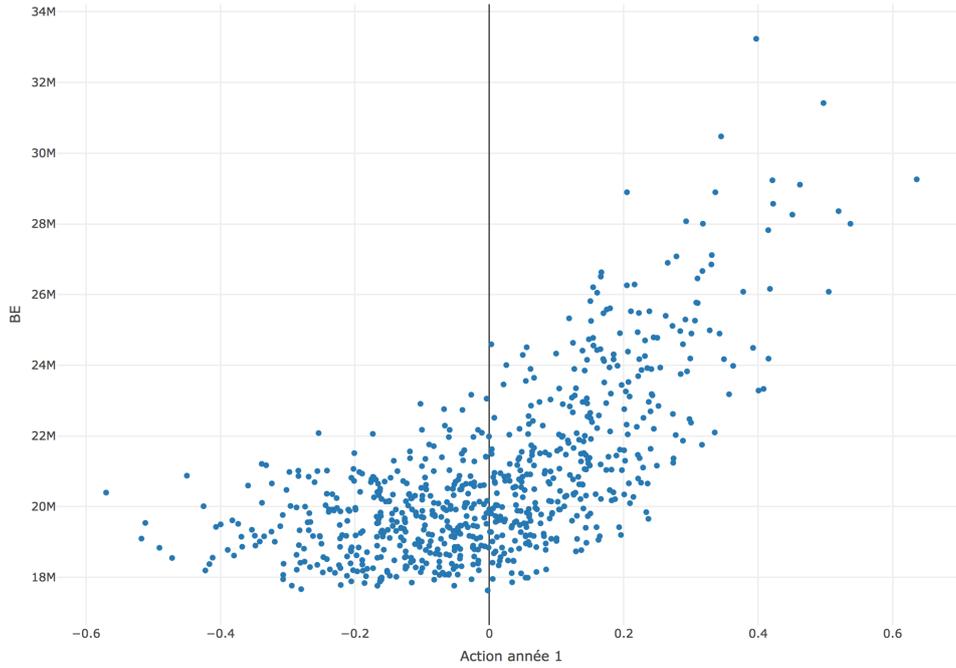


FIGURE 33 – Evolution du $BE_{i,0}$ en fonction de la première valeur action

On observe que l'évolution n'est pas linéaire mais semble plutôt exponentielle. Pour modéliser au mieux cette variable, on peut appliquer une transformation polynomiale ou "spline".

Un spline est une fonction définie par morceaux par des polynômes. Il est nécessaire de définir deux caractéristiques du spline : le degré du polynôme et le nombre de nœuds. Le nombre de nœud correspond au nombre de discontinuités. Pour déterminer le degré du polynôme et le nombre de nœuds, la démarche consiste à fixer le degré du polynôme et à calculer l'erreur quadratique moyenne en faisant varier le nombre de nœuds. Pour le polynôme de degré deux, on voit que le nombre de nœuds qui minimise l'erreur quadratique moyenne est de trois :

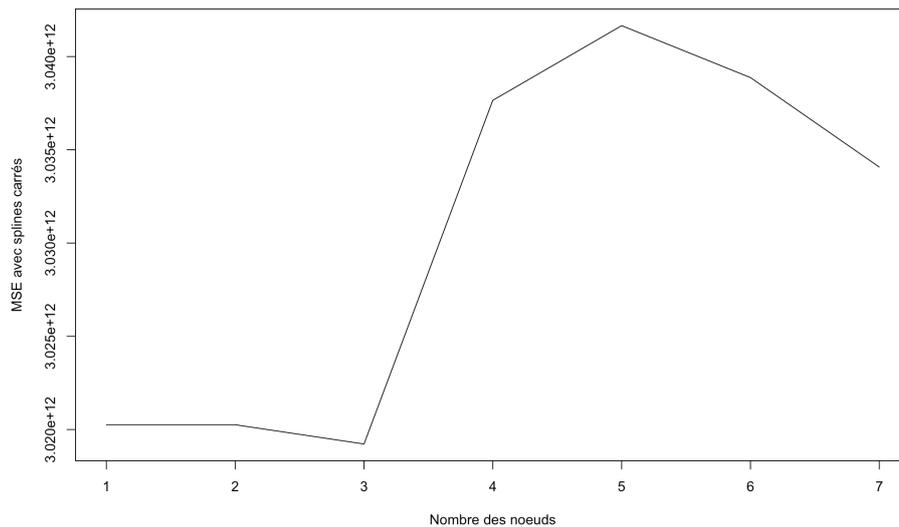


FIGURE 34 – Évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre de nœuds pour un spline de degré deux

On réitère la même démarche avec des polynômes de degrés supérieurs (Annexe 6). En comparant les différentes courbes, on conclut que l'erreur quadratique moyenne est minimale pour un spline de degré deux et possédant trois nœuds. Quand on représente celui-ci, on remarque qu'il est plus adapté pour modéliser les données qu'une régression linéaire sans spline :

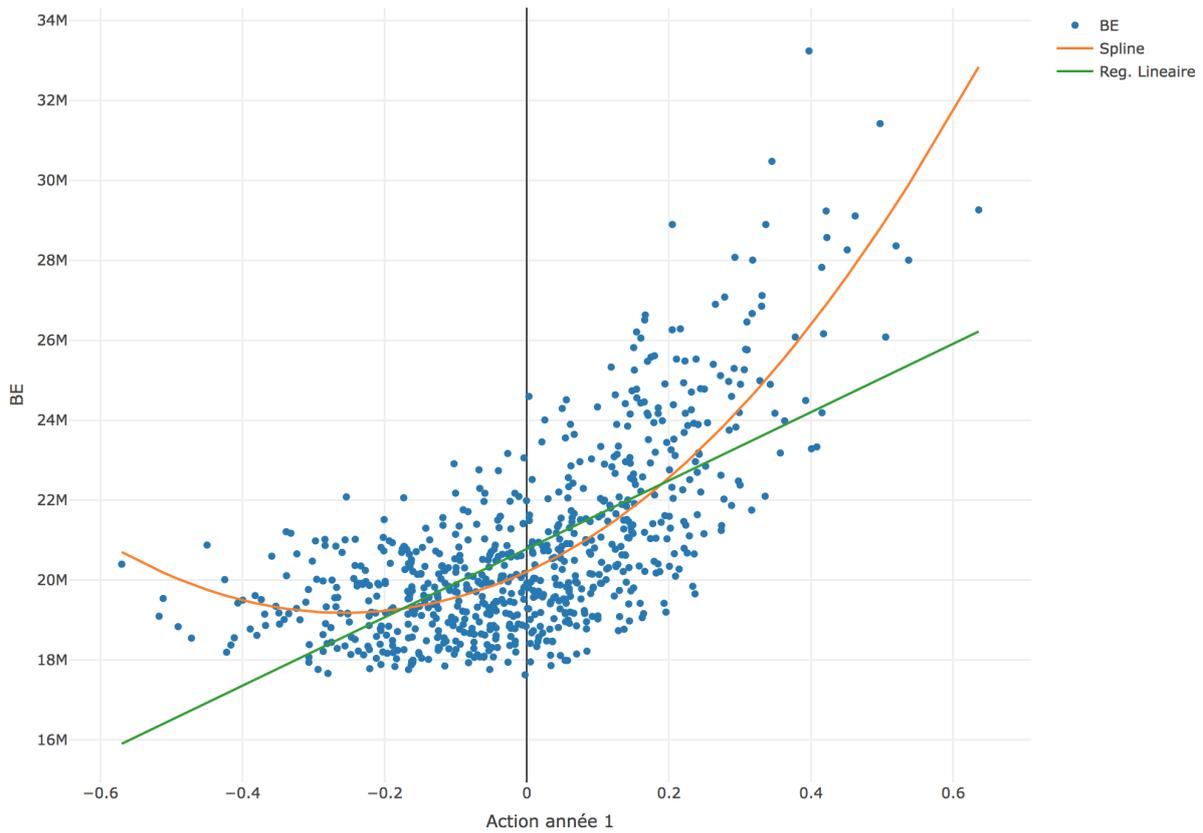


FIGURE 35 – Comparaison de l’ajustement linéaire et du spline

Cependant, la limite de la modélisation par splines est qu’elle est bien adaptée pour modéliser nos scénarios en particulier mais son adaptabilité à de nouveaux scénarios ou à des scénarios choqués dégradera sans doute la qualité de la modélisation.

Notons que l’utilisation de spline n’est pas nécessaire pour modéliser les autres variables car la forme des nuages de points n’incite pas à ce type de transformation. Nous prenons les variables de taux à la première année de projection et la variable action à la huitième année à titre d’exemple (le lecteur intéressé se reportera à Annexe 7 pour les autres années de projections).

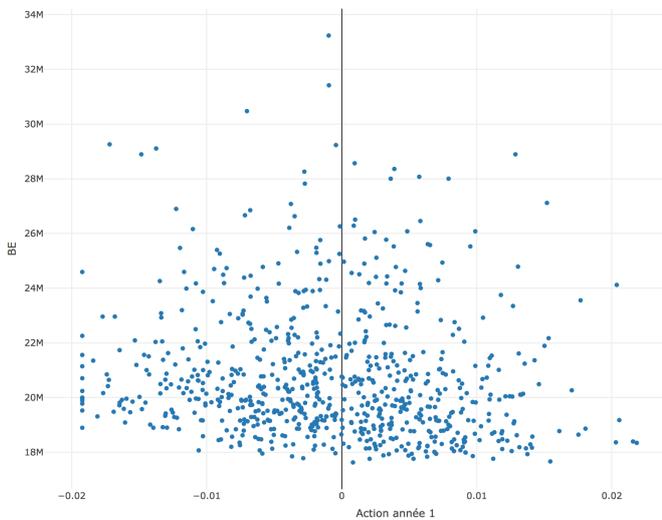


FIGURE 36 – Évolution du $BE_{i,0}$ en fonction de la première valeur taux

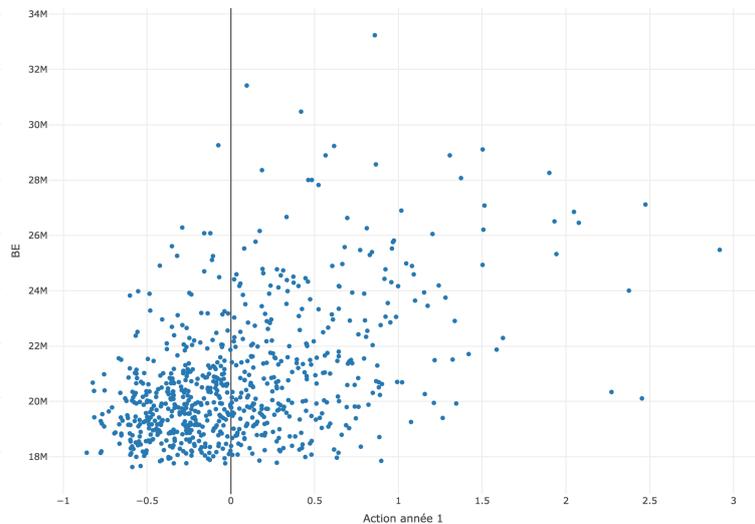


FIGURE 37 – Évolution du $BE_{i,0}$ en fonction de la huitième valeur action

Par la suite, nous régressons au sein de chaque *cluster* le BE en fonction des 30 années de valeurs actions et des 29 années de taux (on exclut la première année car elle est parfaitement identique pour tous les scénarios d'après la méthode de construction de la courbe des taux). On utilise le spline d'ordre 2 à 3 noeuds, pour modéliser la première valeur action. On applique également une méthode de réduction du nombre de variables afin de sélectionner les variables les plus significatives de la régression.

Méthode de réduction du nombre de variables (ou *stepwise*) :

L'objectif de la méthode "stepwise" est de sélectionner les variables de la régression qui minimisent le critère AIC. Pour rappel, le critère d'information d'Akaike (AIC) est défini de la manière suivante :

$$AIC = 2k - 2 \log(\hat{L}) \quad (39)$$

avec k le nombre de paramètres du modèle et \hat{L} la valeur maximale de la fonction de vraisemblance L définie par :

$$L(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (40)$$

avec $f(x_i; \theta)$ la fonction de densité et θ un paramètre de la loi.

La méthode *stepwise* sur R utilise par défaut l'approche dite *backward*. Cette approche consiste, à partir de l'ensemble des variables, à retirer une par une les variables qui ne dégradent pas significativement le modèle, c'est à dire celles qui créent une augmentation peu significative de la valeur de l'AIC lorsqu'elles sont supprimées. L'algorithme converge lorsque qu'aucune autre variable ne peut être retirée sans augmenter significativement l'AIC.

La méthode *stepwise* comporte cependant des limites. La principale limite est que l'on supprime potentiellement des variables ayant un pouvoir explicatif important mais qui sont corrélées avec les autres variables explicatives [10]. De plus, la méthode *stepwise* a tendance à sous-estimer la valeur des écarts types et à sur-estimer la valeur des coefficients de la régression [11]. Enfin le modèle sélectionné peut être trop simplifié car on supprime un certain nombre de variables potentiellement importantes dans la compréhension des données. Cependant, malgré ces limites, la méthode *stepwise* est largement utilisée pour des problématiques de réduction du nombre de variables en régression.

Il est nécessaire d'effectuer certains tests usuels comme la vérification de l'indépendance et de la normalité des résidus. On rappelle brièvement les hypothèses de ces deux tests :

- Test d'indépendance des résidus (Durbin-Watson) : L'hypothèse nulle est H_0 : *les résidus sont indépendants*. Ainsi, on rejette l'hypothèse nulle lorsque la *p-value* est faible, ici on prendra un seuil à 1%.
- Test de normalité des résidus : L'hypothèse nulle est H_0 : *les résidus suivent une loi normale*. De même, on rejette l'hypothèse nulle lorsque la *p-value* est inférieure à 5%.

On se reportera à l'annexe, pour les résultats complets de ces tests. Les principaux résultats sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

<i>Cluster</i>	<i>adjusted R-squared</i>	Test de Durbin (<i>p-value</i>)	Test de normalité (<i>p-value</i>)
1	0.93	Accepte (0.1762)	Rejette (0.0476)
2	0.96	Accepte (0.7359)	Accepte (0.8229)
3	0.94	Accepte (0.5763)	Accepte (0.6133)
4	0.94	Accepte (0.2926)	Accepte (0.1240)
5	0.96	Accepte (0.8066)	Accepte (0.5902)
6	0.92	Accepte (0.7522)	Accepte (0.5337)
7	0.94	Accepte (0.4503)	Accepte (0.1357)
8	0.95	Accepte (0.4514)	Accepte (0.5910)

TABLE 4 – Tableau récapitulatif des résultats de la régression et des différents tests réalisés pour chaque *cluster*

On remarque que les modèles linéaires sur chacun des *clusters* donnent de très bons résultats en terme de R^2 et que les tests d'indépendance des résidus et de normalité sont vérifiés. Remarquons que seul le premier *cluster* ne passe pas le test de normalité. Cependant, le fait que le test de normalité ne soit pas vérifié n'empêche pas notre estimateur de vérifier les propriétés BLUE (*Best Linear Unbiased Estimator*). Cela peut poser problème si notre objectif était de faire des simulations ou de calculer des quantiles mais ce n'est le cas ici.

Nous avons calculé une valeur de R_{moyen}^2 sur l'ensemble des 8 modèles en repartant de la définition du R^2 et en sommant sur chacun des modèles :

$$R_{moyen}^2 = 1 - \frac{\sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^{n_j} (y_{j,i} - \hat{y}_{j,i})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \quad (41)$$

avec $y_{j,i}$ la valeur à prédire du scénario i dans le *cluster* j , $\hat{y}_{j,i}$ la valeur prédite correspondante et \bar{y} la valeur moyenne du BE sur l'ensemble des *clusters*, et n_j le nombre de scénarios dans le *cluster* j .

La valeur calculée est $R_{moyen}^2 = 0.96$. De la même manière, on calcule l'erreur quadratique moyenne (RMSE) en moyennant sur l'ensemble des 1000 scénarios :

$$RMSE_{moyen} = \sqrt{\frac{1}{1000} \sum_{j=1}^8 \left(\sum_{i=1}^{n_j} (y_{j,i} - \hat{y}_{j,i})^2 \right)} \quad (42)$$

Sur les données normalisées, on obtient une valeur de $RMSE_{moyen} = 0,17$, si on rapporte cette valeur à l'amplitude de la distribution (écart entre la valeur maximale et minimale), on obtient une erreur de 2,7%.

Notons enfin que ces résultats sont meilleurs que si l'on faisait une seule régression sur l'ensemble des 1000 scénarios car le R_{ajust}^2 vaut 0,90 (cf. résultats en Annexe 8)). Cela justifie l'utilité des *clusters* dans la modélisation en plus de leur apport comme outil de visualisation des GSE.

L'inconvénient est que ce type de modèle ne permet de mettre en avant qu'une relation de corrélation et non de causalité entre les variables des scénarios économiques et les valeurs de *best estimate*. Nous pouvons cependant émettre des hypothèses sur les mécanismes associés en analysant les coefficients de la régression linéaire. Analysons par exemple, les coefficients de la régression sur le premier cluster de taux. Tout d'abord, les trois premiers coefficients correspondent aux trois portions du *spline* construites précédemment. On remarque que le premier et le troisième coefficients sont très significatifs. De plus, les coefficients des premières années de rendements actions sont significatifs et leurs signe est positif. Cela suggère que plus les valeurs de rendements actions dans les premières années de projection sont élevées plus la valeur du *best estimate* tend à augmenter. Plus généralement, si le *best estimate* est élevé quand les actions sont élevées les premières années, cela signifie que l'effet provient des plus-values latentes, de leur réalisation ou non et potentiellement des rachats

dynamiques. Quant aux coefficients des taux zéro-coupon, nous observons que ceux-ci prennent des signes positifs et négatifs selon l'année de projections sans pour autant être en mesure d'en tirer des conclusions sur les mécanismes influant le *best estimate*.

TABLE 5 – Résultats de la régression linéaire du Cluster 1

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	-0.923*** (-1.248, -0.599)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	-0.032 (-0.299, 0.235)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	2.348*** (1.881, 2.816)
Taux_2	9.151** (3.349, 14.953)
Taux_3	-5.556 (-11.765, 0.653)
Taux_4	7.755* (0.697, 14.814)
Taux_5	-9.551** (-16.441, -2.661)
Taux_6	-4.578 (-9.771, 0.616)
Taux_9	-7.829** (-13.572, -2.087)
Taux_10	-5.118 (-11.347, 1.111)
Taux_12	-10.727*** (-16.486, -4.967)
Taux_13	8.343** (2.752, 13.933)
Taux_15	-10.392*** (-16.168, -4.617)
Taux_16	5.050 (-0.646, 10.747)
Taux_18	-7.633** (-13.023, -2.244)
Taux_19	9.078** (2.386, 15.770)
Taux_20	-8.819*** (-13.706, -3.932)
Taux_25	-7.308** (-12.119, -2.498)
Taux_26	6.894** (2.252, 11.535)
Actions_2	0.555*** (0.286, 0.825)
Actions_3	0.283** (0.089, 0.477)
Actions_8	0.402*** (0.172, 0.631)
Actions_9	-0.318* (-0.612, -0.024)
Actions_10	0.605*** (0.357, 0.853)
Actions_12	-0.260** (-0.438, -0.082)
Actions_14	0.160 (-0.025, 0.345)
Actions_16	-0.230* (-0.432, -0.028)
Actions_17	0.382*** (0.191, 0.573)
Actions_20	-0.290*** (-0.469, -0.112)
Actions_21	0.201 (-0.043, 0.445)
Actions_22	-0.227** (-0.413, -0.041)
Actions_23	0.467*** (0.277, 0.657)
Actions_24	-0.173** (-0.310, -0.036)
Actions_27	0.094 (-0.032, 0.220)
Actions_29	-0.073 (-0.152, 0.005)
Constant	0.839*** (0.553, 1.124)
Observations	145
R ²	0.947
Adjusted R ²	0.930

Note :

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Finalement, les coefficients de la régression indiquent que certaines années d'action ou de taux sont déterminantes dans le calcul du BE (cf résultats des régressions Annexe 7)) mais on ne peut pas aisément interpréter les mécanismes sous-jacents.

Ainsi, il est indispensable de faire une étude à une échelle plus fine, en particulier sur les premières années de projection car ce sont elles qui présentent la plus grande variabilité (cf. Figure 44).

5.1 Études des mécanismes du modèle ALM

Dans cette partie nous allons étudier les mécanismes sous-jacents du modèle ALM qui permettront d'expliquer la valeur de *best estimate* obtenue.

5.1.1 Étude de la première année de projection

Intéressons nous aux valeurs du *cash flow* de *best estimate* à la première année de projection. Rappelons que le *best estimate* est la valeur actuelle probable de la somme des prestations (rachats et décès), des prestations sociales et des frais. A la première année, il n'y a pas de rachat dynamique car le taux servi de l'année 0 ainsi que le taux concurrent ont été fixés à 2%. Comme il y a égalité entre le taux servi et le taux concurrent, d'après la loi des rachats dynamiques il n'y a pas de déclenchement de rachats. Ainsi les rachats sont uniquement des rachats structurels et leur valeur est constante quel que soit le scénario.

De même, les prestations décès sont identiques sur les 1000 scénarios. Ainsi, on comprend que les *cash flow* de *best estimate* de la première année vont surtout dépendre de la revalorisation des provisions mathématiques. Cette revalorisation étant très corrélée avec la valeur des rendements actions de la première année. L'évolution du *cash flow* de *best estimate* à la première année en fonction du rendement action de la première année, nous permet de le confirmer :

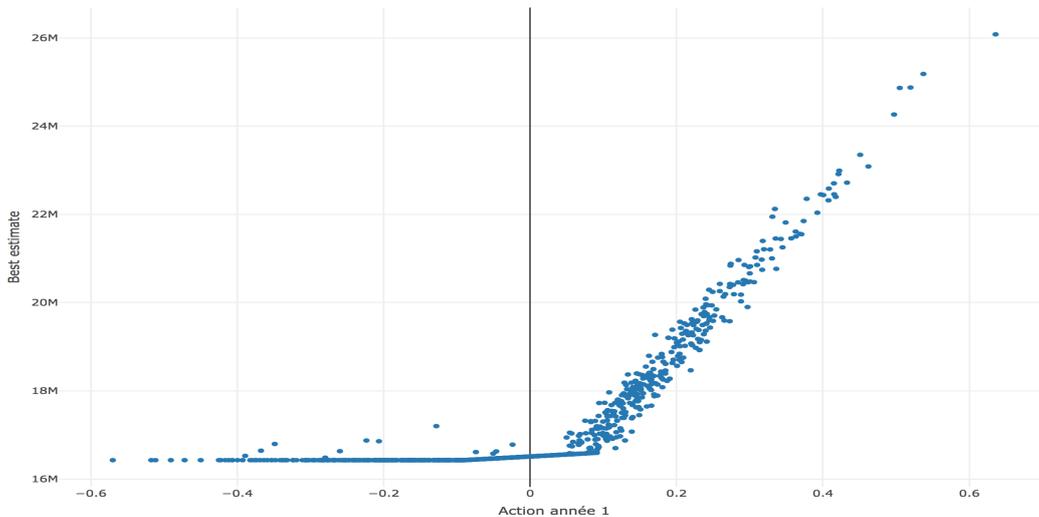


FIGURE 38 – Évolution du *best estimate* en fonction des rendements action de la première année de projection

La première portion de la courbe qui est quasiment constante peut être interprétée comme la zone dans laquelle les rendements actions sont inférieurs au TMG. Cette zone est quasiment constante car le taux servi est alors égal au TMG, donc le *best estimate* est constant aux variations du taux forward près.

Enfin, la variance observée est due aux variations des taux forwards, qui changent la valeur du taux concurrent et donc du taux cible.

5.1.2 Étude de la deuxième de projection

On voudrait pouvoir généraliser l'étude effectuée sur la première année de projection aux autres années. Cependant, contrairement à la première année de projection où la variabilité était surtout liée à la revalorisation des provisions mathématiques, il faut considérer pour les années suivantes la variabilité liée aux rachats dynamiques. Pour cela, nous décidons d'étudier les *cash flow* de *best estimate* en fonction du taux concurrent de l'année N-1 et de comparer cette évolution à l'allure des rachats.

Dans un premier temps, étudions le comportement du best estimate à la deuxième année de projection en fonction du taux concurrent de l'année précédente :

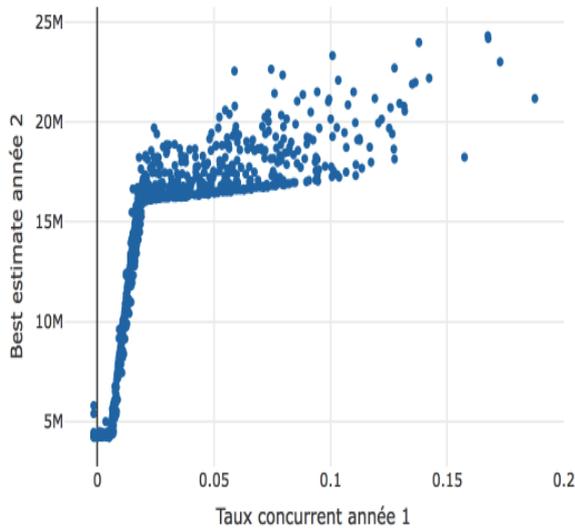


FIGURE 39 – Evolution du best estimate à la deuxième année en fonction du taux concurrent

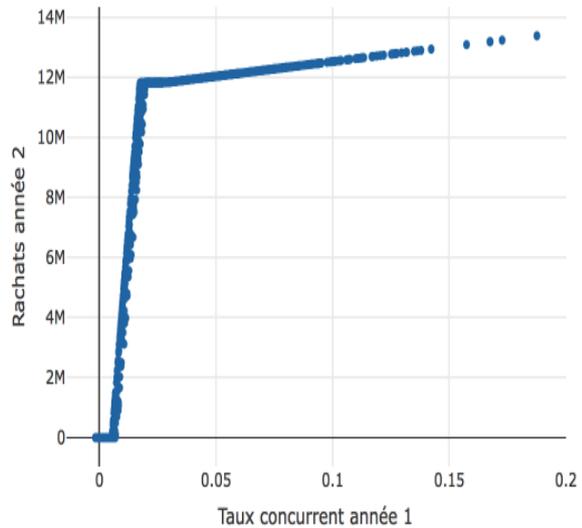


FIGURE 40 – Evolution des rachats dynamiques à la deuxième année en fonction du taux concurrent

Sur la figure ci-dessus, on observe que l'allure de l'évolution du *best estimate* en fonction du taux concurrent est proche de celle des rachats en fonction du même taux concurrent. On en conclut dans un premier temps que le *best estimate* de la deuxième année est largement expliqué par les rachats. Ensuite, l'allure de la courbe est conditionnée par la loi des rachats dynamiques du modèle ALM. En effet, on observe qu'en dessous d'un certain seuil de taux concurrent (environ 1%), il n'y a pas de rachats dynamiques et que passé un certain seuil (environ 3%), les taux de rachat se stabilisent. Cependant, le montant des rachats continue à croître au delà de 3%. En effet, le taux concurrent et le rendement action de la première année sont colinéaires par construction du taux concurrent. Or le rendement action de la première année est un facteur de croissance des provisions mathématiques au début de l'année 2. Ainsi, on applique le même taux à une provision mathématique plus forte ce qui explique la croissance des rachats.

Finalement, on constate que le taux concurrent est une variable très explicative dans le calcul des deux premières années de BE. Cela nous conduit à revenir sur le *clustering* de taux précédemment réalisé et d'essayer de faire la même démarche mais avec le taux concurrent. Rappelons, que le taux concurrent est construit à partir des valeurs des scénarios de taux et de rendements actions. Ainsi, nous pouvons construire les scénarios de taux concurrent en utilisant uniquement l'information contenue dans les scénarios économique en entrée du modèle ALM.

5.1.3 Étude des autres années de projection

Comme on a vu dans la partie précédente que le taux concurrent permettait d'expliquer les *cash flow* de *best estimate* des deux premières années de projection, nous allons essayer de voir s'il est possible d'étendre l'étude aux autres années de projection. Tout d'abord, nous remarquons que les années trois et quatre peuvent être modélisées en fonction du taux concurrent de l'année N-1 par une fonction linéaire par morceau dont les R^2 sont encore élevés (cf. résultats en Annexe 9). De plus, en termes d'interprétation, l'année 3 est très similaire à la deuxième année et on observe en quatrième année des montants de rachats dynamiques très élevés.

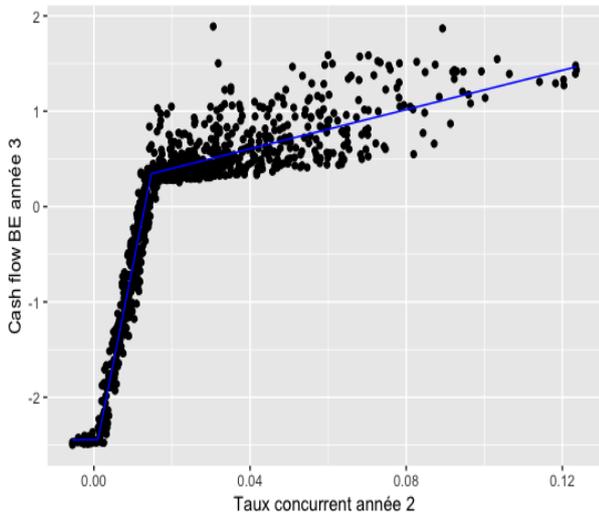


FIGURE 41 – Évolution des rachats à la troisième année en fonction du taux concurrent

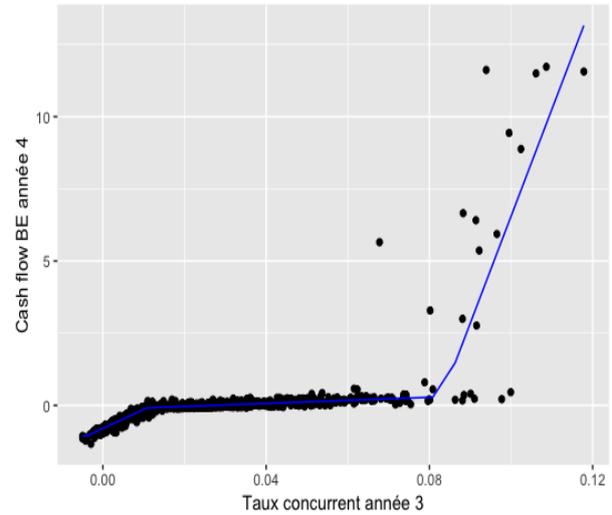


FIGURE 42 – Évolution des rachats à la quatrième année en fonction du taux concurrent N-1

Cependant, si on a vu dans les parties précédentes que le *best estimate* des premières années était très bien expliqué par le taux concurrent en année N-1, on remarque que plus on avance dans les années de projection plus il est difficile d'interpréter les mécanismes sous-jacents du modèle ALM. Etudions par exemple la dixième année de projection en fonction du taux concurrent de la neuvième année :

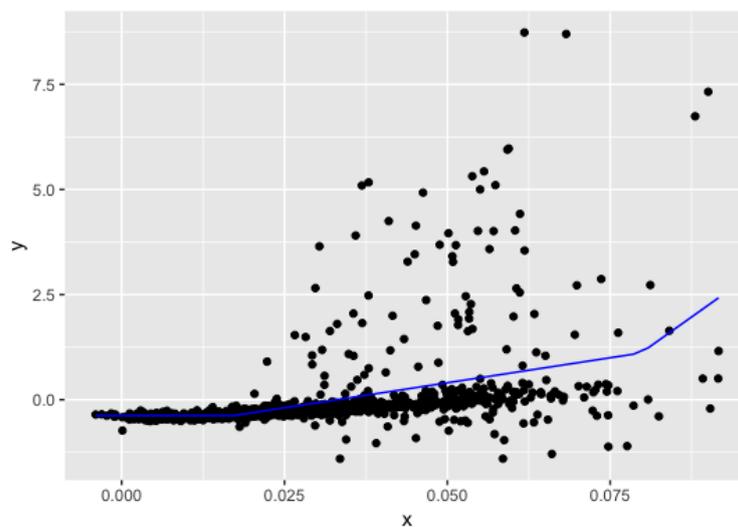


FIGURE 43 – Évolution des rachats à la dixième année en fonction du taux concurrent N-1

On remarque qu'il est plus difficile de modéliser le cash flow de best estimate de la dixième année en fonction du taux concurrent de l'année N-1, le R^2 est très faible (0,19). Notons que si nous ajoutons l'ensemble des taux concurrents entre l'année 1 et l'année N-1, cela n'améliore pas particulièrement la qualité de la régression ($R^2 = 0,23$). De plus, en termes d'interprétation, il est difficile de comprendre les mécanismes qui se déclenchent dans le modèle ALM. En effet, il y a une accumulation de mécanismes au fur à mesure de la projection (réallocation du bilan, distribution de PVL) que l'on ne capte plus dans l'analyse des *cash flow* de BE au-delà d'une certaine date. Cependant, cela n'est pas déterminant car comme le montre le graphique ci-dessous, les années avec les plus fort *cash flow* de best estimate se situent avant la dixième année. Nous avons décomposé les *cash flow* de *best estimate*, en fonction des montants de décès, rachats structurels et conjoncturels, les frais et les prélèvements sociaux. Rappelons que la somme de tous ces éléments forment le *cash flow* de *best estimate* pour une année donnée :

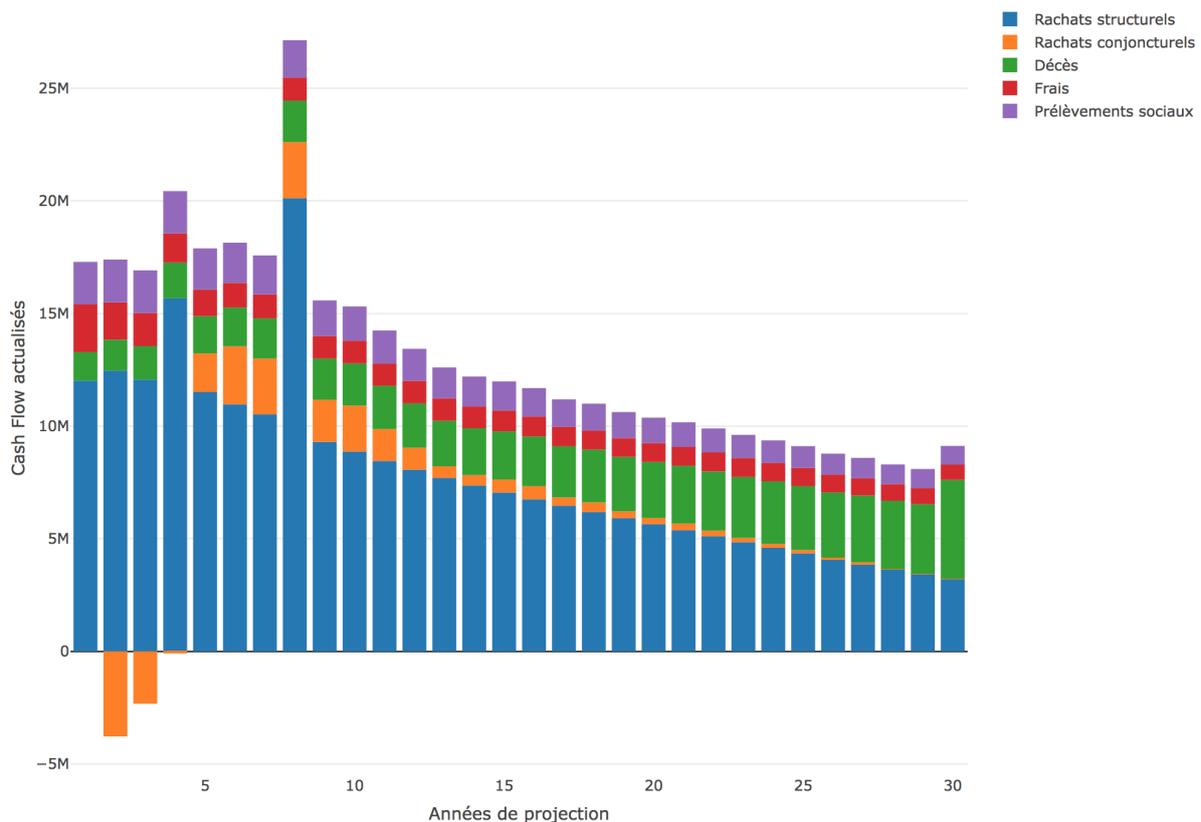


FIGURE 44 – Évolution des *cash flow* de *best estimate* en fonction de l'année de projection

On remarque les pics de rachats structurels à l'année 4 et 8 dû à la loi des rachats structurels (le décalage d'une année avec la loi des rachats structurels s'explique car nos contrats ont par hypothèse 1 an d'ancienneté à la date 0). Nous remarquons qu'en année 2, 3 et 4 le montant des rachats dynamiques est négatif, cela signifie que le taux servi est plus élevé que le taux concurrent (cf. loi des rachats dynamiques)

5.1.4 Reprise de la méthode de *clustering* appliquée au taux concurrent

Nous suivons exactement la même démarche que celle utilisée dans la partie 4.4 mais cette fois appliquée sur les séries de taux concurrent. Étudions les résultats par la méthode de la classification hiérarchique :

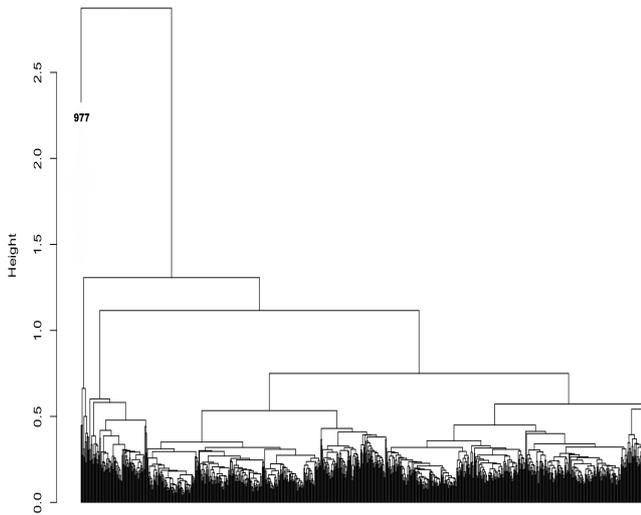


FIGURE 45 – Dendrogramme de classification tu taux concurrent

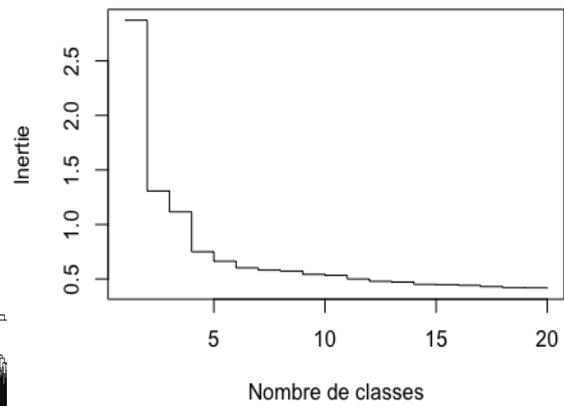


FIGURE 46 – Evolution de l'inertie en fonction du nombre de *clusters*

Nous remarquons que la décroissance de l'inertie en fonction du nombre de *clusters* est moins brutale en comparaison avec la classification hiérarchique réalisée précédemment sur les taux (voir figure 23). De même le dendrogramme présente plus de nœuds de poids importants que sur la figure 21. La règle du coude, nous permet de déterminer le nombre de *cluster* optimal, on choisira ici 4 *clusters* dont voici les principales trajectoires :

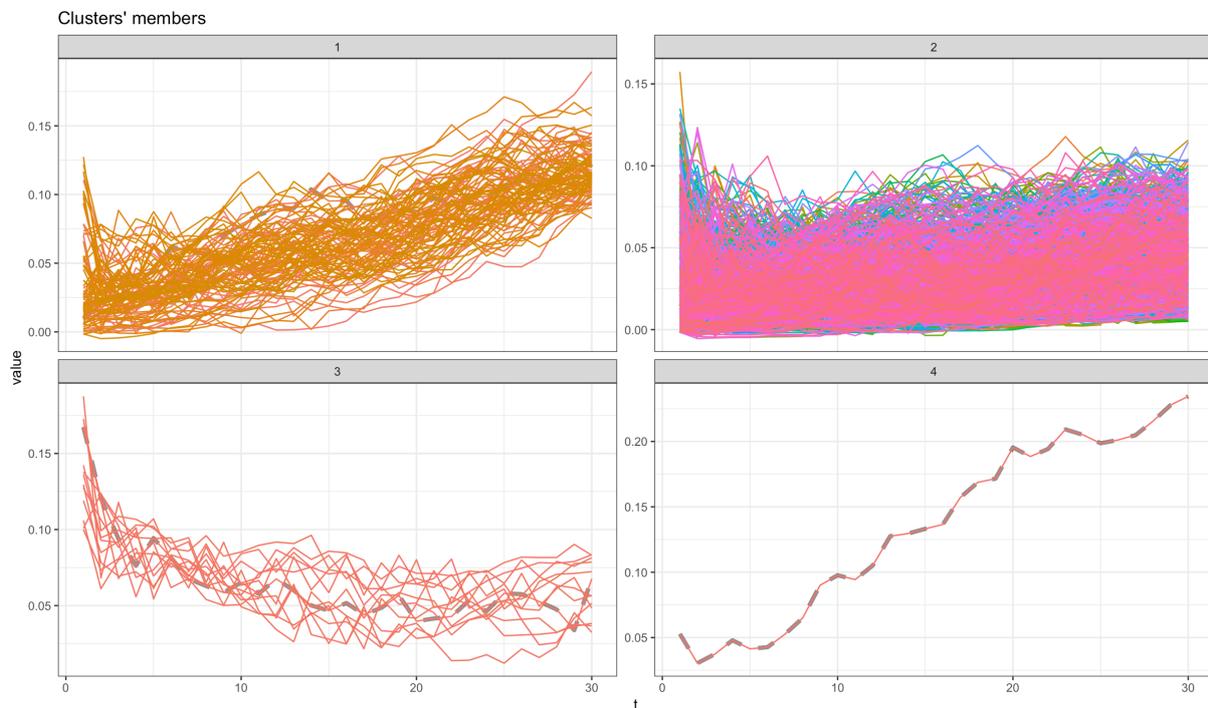


FIGURE 47 – Représentation graphique des séries dans chaque *cluster*

On observe que les trajectoires sont bien différenciées entre les *clusters*. Le *cluster* 1 contient les trajectoires de taux concurrent fortement croissantes, pour atteindre jusqu'à 15% en fin de pro-

jection. Le *cluster 2* regroupe des trajectoires avec des variations proches de la moyenne 5%. Le *cluster 3* contient des trajectoires avec des grandes valeurs de taux concurrent sur les premières années de projection, pouvant dépasser 15% puis décroissantes sur le reste des années de projection. On remarque que le nombre de trajectoires par *cluster* est assez différent : le *cluster 1* contient 96 scénarios, le *cluster 2* regroupe 890 scénarios, tandis que le *cluster 3* regroupe 13 scénarios.

On remarque que le *cluster 4* contient uniquement un scénario, il s'agit du scénario 977 qu'on observe bien isolé sur le dendrogramme de la figure 45. La figure 22 nous permet de constater que le scénario 977 a une trajectoire de taux qui est très forte en fin de projection (au-dessus de 20%). Cette trajectoire singulière pourrait se rapprocher de celles du *cluster 1*, mais la classification hiérarchique l'isole. La méthode de *clustering* a permis d'isoler ce scénario singulier, ce qui permet notamment de tester les hypothèses de modélisation dans des conditions extrêmes. En d'autres termes, cela permet à l'assureur de mieux apprécier la cohérence des hypothèses liées à son modèle ALM et ainsi limiter le risque de modèle. Dans l'étude ci-dessous des distributions du BE, nous omettrons ce scénario.

La figure suivante montre l'histogramme de répartition du *best estimate* sur les trois premiers *clusters*. La fréquence est rapportée au nombre de scénarios par *clusters* (le lecteur intéressé se reportera à l'annexe 11, pour le tracé de l'histogramme avec la fréquence non rapportée).

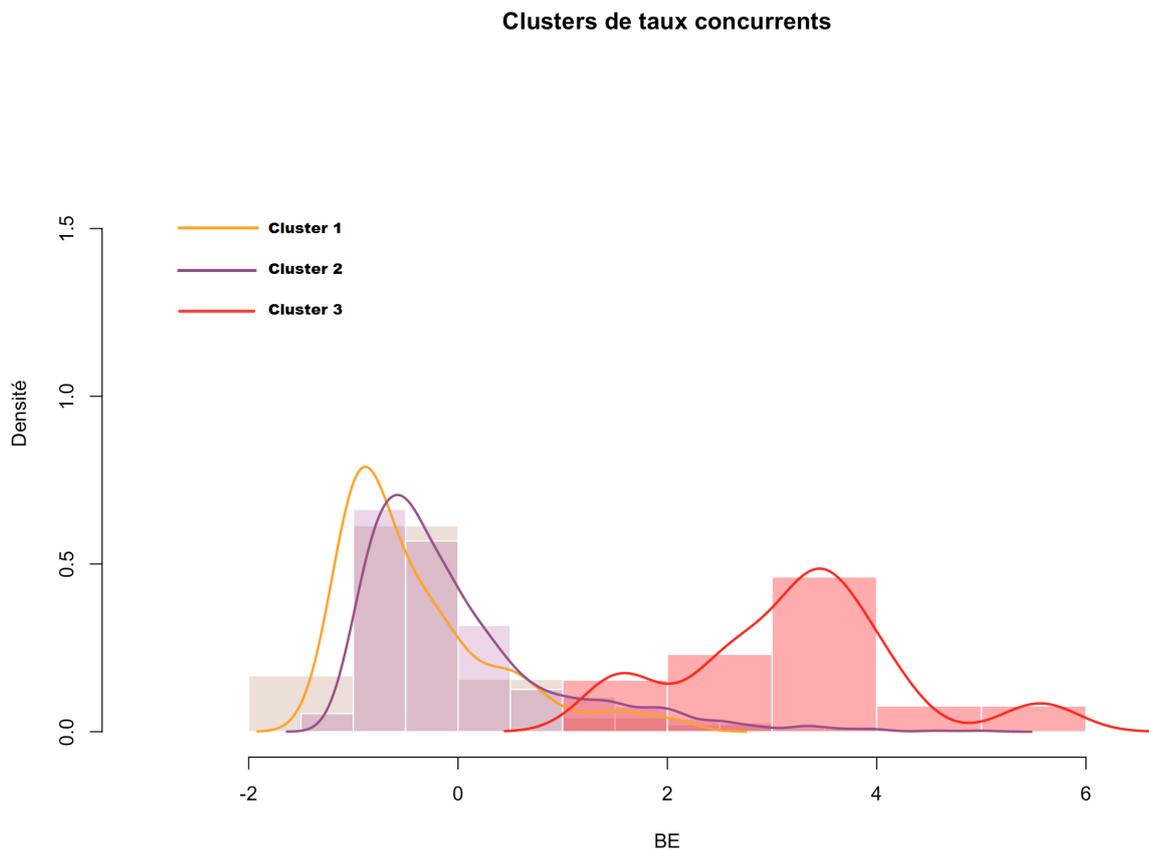


FIGURE 48 – Histogramme de distribution du BE pour chacun des *clusters* de taux concurrent

La distribution en rouge, correspond au *cluster 3* de la figure 47 tandis que les distributions en marron et violet correspondent respectivement aux *clusters 1* et 2. On remarque que la distribution des $BE_{i,0}$ du *cluster 3* (en rouge) est en moyenne nettement supérieure à celle des autres *clusters*. Ainsi, on voit que le taux concurrent sépare mieux les valeurs de BE entre elles que l'application précédemment utilisée sur les taux zéro coupons (cf. Figure 30).

Afin de comprendre les mécanismes qui conduisent aux valeurs de BE élevés dans le *cluster 3*,

études l'évolution de grandeurs intermédiaires à savoir : la réserve de PPE, les plus-values sur actions, le montant des rachats dynamiques et les résultats financiers.

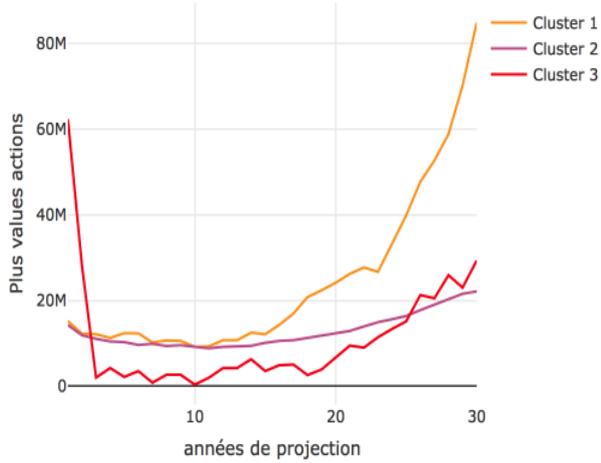


FIGURE 49 – Évolution des plus-values actions moyennes pour chaque *cluster* de taux concurrent

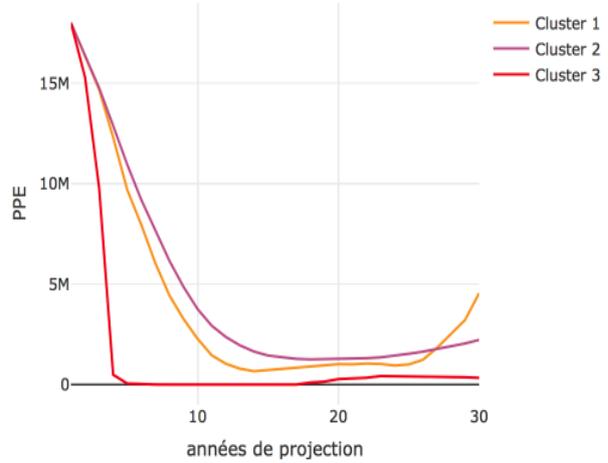


FIGURE 50 – Évolution de la PPE moyenne pour chaque *cluster* de taux concurrent

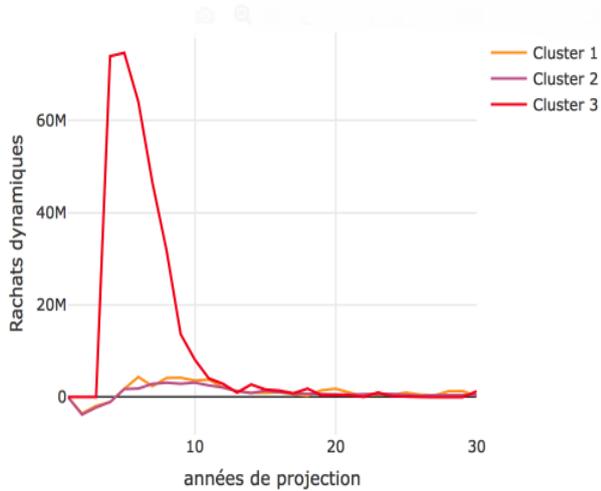


FIGURE 51 – Évolution du montant des rachats dynamiques moyens pour chaque *cluster* de taux concurrent

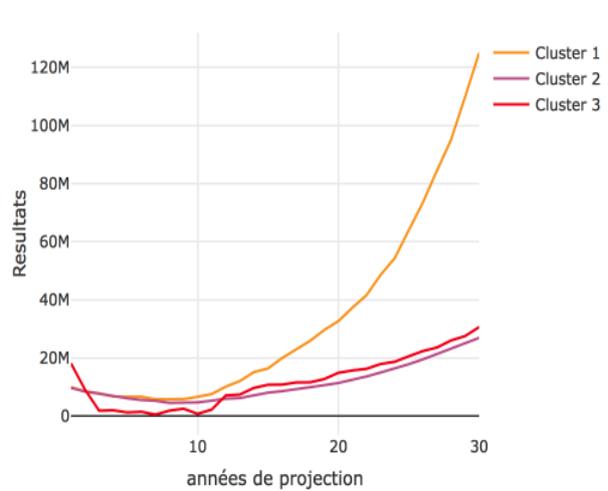


FIGURE 52 – Évolution des résultats moyens pour chaque *cluster* de taux concurrent

Intéressons nous aux indicateurs du *cluster* 3 (en rouge). On observe qu'en moyenne les plus-values sur actions sont très élevées (60 millions d'euros) au tout début de la projection. Cela suggère que les rendements actions sont très élevés en début de projection pour les trajectoires du *cluster* 3. Pour rappel, on avait observé sur la figure 47 que les taux concurrents des trajectoires *cluster* 3 étaient élevés en début de projection. Finalement, cela est une conséquence des rendements actions élevés car par construction le taux concurrent dépend des rendements actions. Ensuite, on observe à partir de la deuxième année de projection, un effondrement conjoint des plus-values actions (Figure 49) ainsi que de la réserve de PPE (Figure 50) moyenne pour les trajectoires du *cluster* 3. Comment peut-on interpréter ce mécanisme ?

On suppose que les plus-values actions ont été liquidées afin de servir la participation aux bénéfices contractuelle ou bien le taux cible. En effet, les règles de distribution de la participation aux bénéfices (Figures 5 et 6) montrent que les plus-values actions peuvent être utilisées à la fois pour servir la PB contractuelle et la PB cible. Cependant, l'effondrement de la PPE disponible (Figure 50) ne peut être expliquée que par une reprise de PPE pour servir la PB cible. En effet, dans les règles de distribution on ne peut reprendre plus de 15% de PPE pour servir la PB contractuelle et l'effondrement du niveau de PPE disponible suggère que l'on a réalisé une reprise au delà de 15%. On peut aller plus loin en observant les montants des rachats dynamiques (Figure 51). On observe un pic important de rachats conjoncturels à partir de la quatrième année de projection, pour un montant autour de 70 millions d'euros.

Par conséquent, nous pouvons reconstruire le fil des événements expliquant les fortes valeurs de *Best estimate* du *cluster 3*. Les rendements importants de la première année ont engendré des plus-values latentes. Ces plus-values latentes ont été liquidées pour servir le taux concurrent, qui est élevé du fait des forts rendements actions de la première année. Pour rebalancer le portefeuille, la compagnie a certainement dû racheter des actions sur lesquelles il n'y a, par définition, pas de plus-values latentes. Or, le taux concurrent reste élevé malgré les faibles rendements actions des années suivantes, puisque par construction il y a une inertie du fait du lissage du taux concurrent sur 5 an. Pour suivre ce rythme, la compagnie liquide sa PPE très rapidement, mais cela ne suffit pas à empêcher le déclenchement des rachats dynamiques.

Nous pouvons analyser de manière similaire les indicateurs des *cluster 1* et *2*. Pour le *cluster 1*, on observe que les plus-values actions sont assez stables autour de 15 millions sur la première moitié de la projection puis croissent de manière exponentielle en fin de projection. Cette observation est cohérente avec l'évolution des rendements actions des trajectoires du *cluster 1* qui sont élevés en fin de projection. Cette croissance en fin de projection peut être reliée aux trajectoires de taux concurrents du *cluster 1*, on avait observé que le taux concurrent était croissant et atteignait des niveaux élevés en fin de projection, cela s'explique finalement par le niveau élevé des rendements actions et par construction du taux concurrent. En ce qui concerne les plus-values actions moyennes du *cluster 2*, celles-ci sont assez stables autour de 15 millions et légèrement croissantes en fin de projection. L'évolution de la PPE disponible pour les *clusters 1* et *2*, décroît significativement mais moins brutalement que pour le *cluster 3*. Cela suggère que l'on a réalisé de la reprise de PPE pour servir la PB cible. Cependant, les montants de rachats conjoncturels sont faibles comparés à ceux du *clusters 3*, ce qui suggère tout de même que la reprise de PPE n'a pas permis de servir complètement le taux cible.

De plus, on notera que le montant des rachats dynamiques est négatif sur les premières années de projection en moyenne pour les trajectoires des *clusters 1* et *2*, cela s'explique par le fait que le taux servi est plus grand que le taux concurrent, c'est-à-dire que l'on se trouve dans la partie droite de la loi des rachats dynamiques. Enfin, les résultats financiers du *cluster 3* sont décroissants en début de projection et rattrapent ceux du *cluster 2* en fin de projection.

Le *cluster 3* contient 13 scénarios ce qui représente 0,13% de la base des scénarios économiques mais ces derniers contribuent pour 1,8% de la valeur du *best estimate* total, ce qui proportionnellement au nombre de scénario représente une sur-pondération importante.

De plus, on peut estimer la proportion de la variance expliquée par ces 13 scénarios en calculant le rapport entre la variance de l'échantillon en retirant les 13 scénarios et la variance de l'échantillon total. On voit que les 13 scénarios du *cluster 3* expliquent 14% de la variance totale de l'échantillon de *best estimate*. On en conclut que les scénarios isolés par notre méthode ont un impact significatif sur la valeur estimée de *best estimate* par le modèle ALM. Cela permet de pouvoir communiquer aux instances dirigeantes, quels sont les scénarios économiques qui contribuent le plus à augmenter le *best estimate* de la compagnie.

5.2 Influence des paramètres sur les résultats du modèle ALM

5.2.1 Influence du niveau de PPE initial

Afin d'étudier l'influence du niveau de PPE initial sur la séparation du $BE_{i,0}$ nous avons fait varier celui-ci pour différents niveaux :

- PPE ++ : 180.000.000 euros
- PPE + : 90.000.000 euros
- PPE de référence : 18.000.000 euros
- PPE - : 9.000.000 euros

De la même manière que pour la figure 48, nous traçons la distribution des $BE_{i,0}$ normalisés pour chacun des *clusters* de taux concurrent. La fréquence est calculée par rapport au nombre de scénarios de chaque cluster. Cependant, cette fois nous faisons varier le niveau de PPE initial :

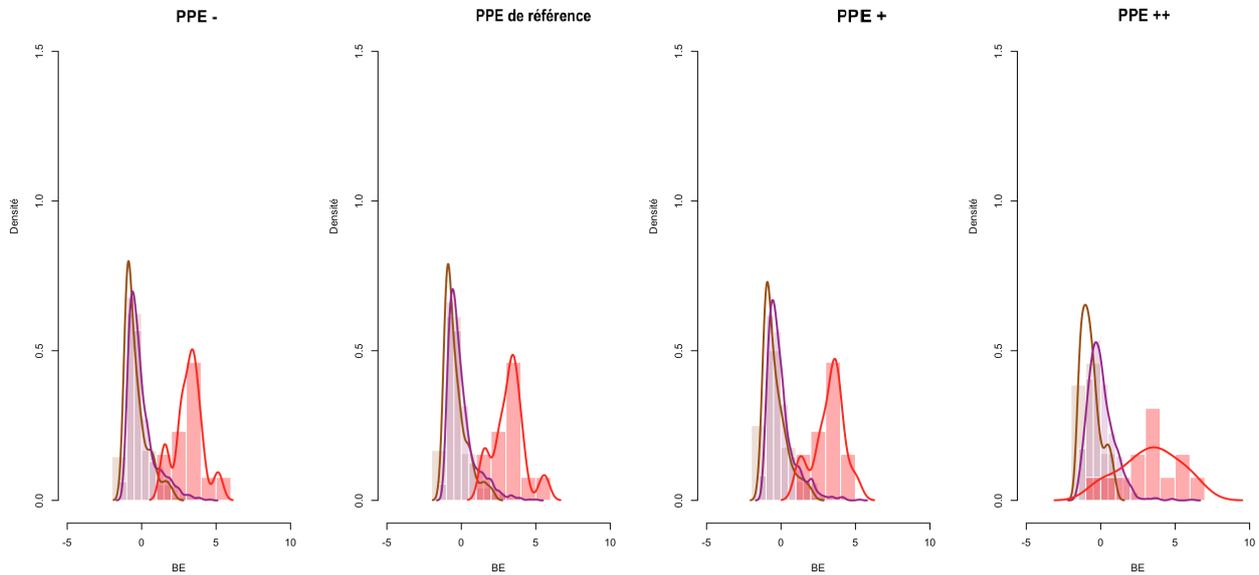


FIGURE 53 – Histogramme de distribution du BE pour différents niveaux de PPE initiale

Le montant de PPE de référence est celui utilisé pour réaliser l'étude des parties précédentes. En comparant les histogrammes ci-dessus, on remarque que la distribution des $BE_{i,0}$ en fonction des *clusters* est très similaire pour les niveaux de PPE suivants : PPE -, PPE de référence et PPE +. Cela confirme la robustesse de notre méthode de classification.

Cependant, on remarque que pour un niveau de PPE initial très élevé (180 millions d'euros, soit 10 fois le montant de la PPE de référence), la distribution des $BE_{i,0}$ du *cluster 3* (en rouge) se confondent en partie avec ceux des *clusters 1* et *2*. Cela se comprend car si on augmente significativement le niveau de PPE initial, l'assureur sera en capacité de servir la PB cible même dans des scénarios avec des taux concurrents très élevés, ce qui est le cas pour les scénarios du *cluster 3*. Analysons de plus près ces scénarios dans la partie gauche de la distribution des $BE_{i,0}$ du *cluster 3* et intéressons nous plus particulièrement à l'évolution des rachats conjoncturels en fonction du niveau de PPE :

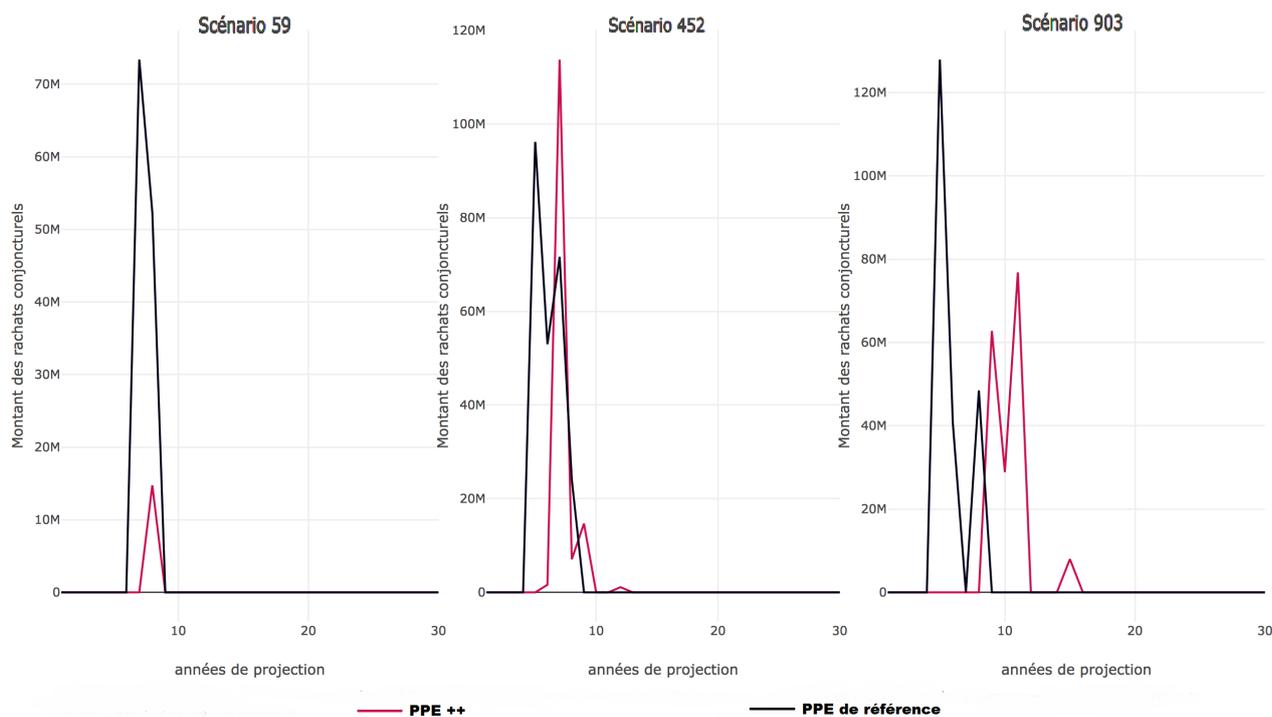


FIGURE 54 – Évolution des rachats dynamiques pour trois scénarios particuliers, et pour deux niveaux de PPE initiale

Pour ces 3 scénarios, on a représenté en noir l'évolution des rachats conjoncturels pour le niveau de PPE de référence et en rouge l'évolution pour le niveau de PPE le plus élevé (PPE ++). La première constatation est que pour ces 3 scénarios les rachats conjoncturels commencent plus tard avec le niveau de PPE le plus élevé qu'avec la PPE de référence.

On remarque que pour le scénario 59, les rachats dynamiques se déclenchent un an plus tard et leur montant est beaucoup plus faible qu'avec la PPE de référence (14 millions contre 73 millions). Le scénario 452 présente un fort pic de rachats en année 7 pour le niveau PPE le plus élevé, cependant le fait que ces rachats se déclenchent 2 ans plus tard et surtout qu'il y ait un seul pic significatif contrairement aux rachats observés en années 4, 5 et 6 avec la PPE de référence, explique que la valeur du BE ait diminué. Enfin, le scénario 903 présente des rachats d'un montant plus faible et se déclenchant à partir de la 9ème année. Remarquons que plus les rachats se déclenchent tard, plus le facteur d'actualisation réduit leur poids dans le calcul du $BE_{i,0}$. Par exemple, pour le scénario 59, les facteurs d'actualisation des années 3 et 4 sont les suivantes : 0,97 et 0,94. Ainsi cela contribue au fait que les scénarios aient vu leur $BE_{i,0}$ diminuer lorsque l'on a augmenté le niveau de PPE initial.

Pour conclure, on a vu que la méthode de classification des taux concurrent était stable en termes de séparation du $BE_{i,0}$ pour différents niveaux de PPE initiale, sauf dans le cas où l'on distord de manière très significative les hypothèses en $t=0$.

5.2.2 Influence du TMG des *models points*

Intéressons nous à l'influence de la valeur du TMG des *models points* sur la valeur du $BE_{i,j}$. Pour effectuer cette étude, nous avons uniquement lancé le modèle ALM sur un *model point* en faisant varier le TMG, cela permet d'éliminer les effets de compensation qui pourraient fausser notre étude si l'on considérait un portefeuille avec des *models points* de TMG différents. Dans un premier temps, étudions l'histogramme de répartition des $BE_{i,j}$ en faisant varier le TMG entre 0% et 2%.

Evolution de la distribution du BE en fonction du TMG

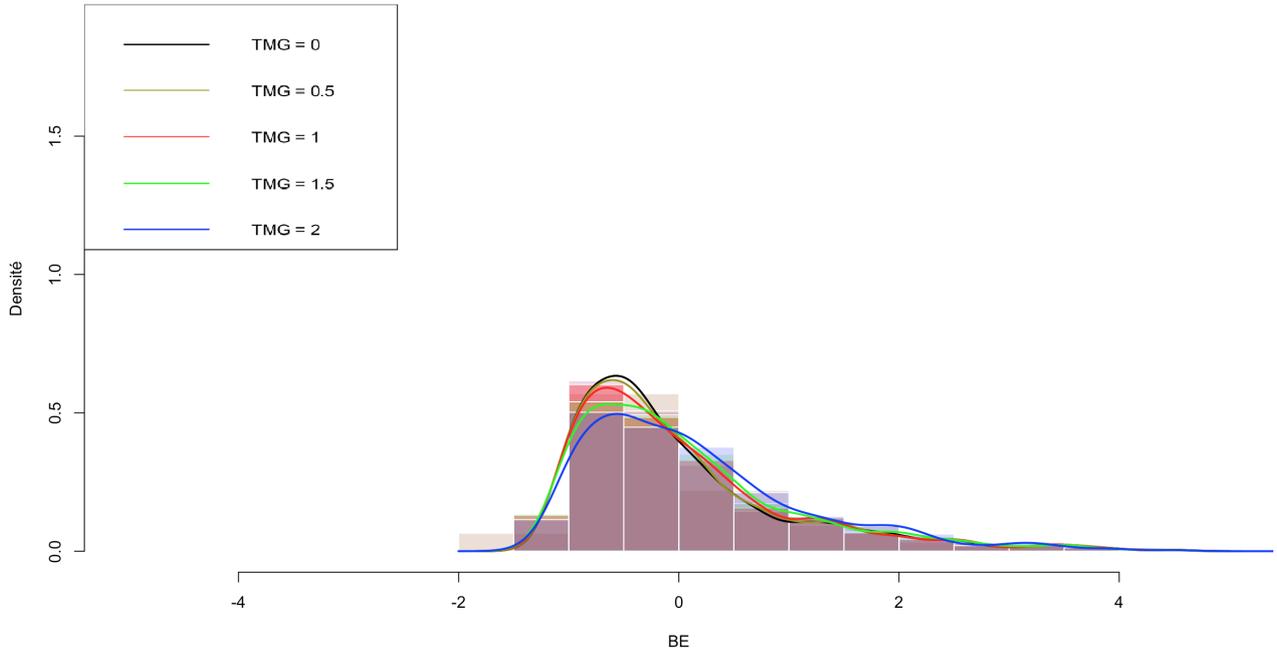


FIGURE 55 – Histogramme de distribution du BE pour différentes valeurs de TMG

On remarque que la distribution des $BE_{i,j}$ reste relativement stable pour les TMG entre 0 et 1,5%. On remarque que lorsque le TMG est égal à 2%, la queue de distribution est plus épaisse pour les grandes valeurs de BE. Nous avons normalisé les valeurs de BE en prenant les valeurs de TMG nul comme référence. Etudions la moyennes des distributions en fonction du TMG :

TMG	0%	0.5%	1%	1.5%	2%
Moyenne de <i>Best Estimate</i> normalisés	0	0.010	0.028	0.069	0.161

TABLE 6 – Evolution des moyennes de la distribution de *Best Estimate* normalisés en fonction du TMG

On remarque que la moyenne des *Best Estimate* augmente avec le TMG. *A priori*, le fait que la moyenne des *Best Estimate* augmente avec le TMG est compréhensible car plus le TMG est élevé, plus l'assureur se doit de provisionner un montant élevé pour pouvoir servir ce taux garanti. Cependant, un test d'égalité des moyennes, permet d'étudier si l'on peut effectivement considérer que les moyennes des distributions sont bien distinctes. On applique un test de Student comme dans la partie 4.4.3 :

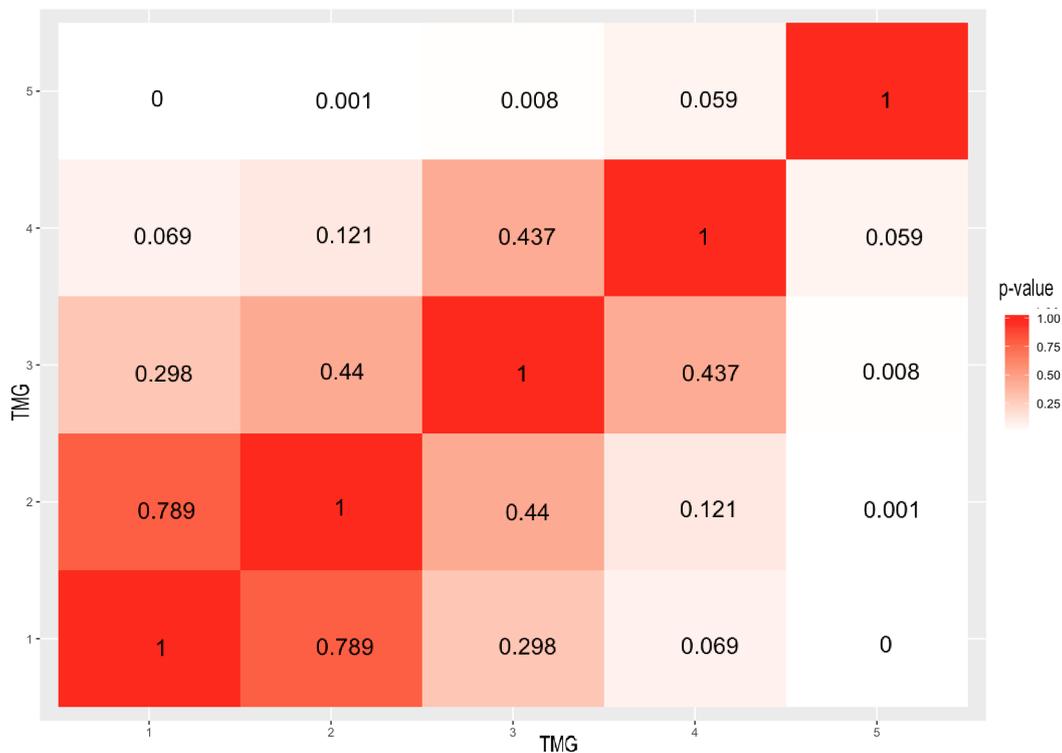


FIGURE 56 – Matrice des p-values du test de Student pour les différentes distributions en faisant varier le TMG

Nous remarquons que l'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle au seuil 5% sauf pour la comparaison entre le TMG valant 1,5% et 2%. Ainsi, on ne peut pas affirmer que la moyenne des distributions du *Best estimate* pour des TMG variant entre 0 et 1,5 sont distinctes. Seule la moyenne de la distribution du *Best estimate* pour un TMG de 2% peut être considérée comme distincte d'après le test de Student.

Notons cependant que le test de Student repose sur le fait que la distribution étudiée vérifie l'hypothèse de normalité. Cependant, la robustesse du test de Student à l'hypothèse de normalité nous permet de considérer que l'analyse reste pertinente même sans vérifier cette hypothèse [12].

La question que nous nous posons maintenant est de savoir si le TMG doit être intégré comme une variable supplémentaire dans l'analyse du $BE_{i,j}$. Pour cela, nous avons appliqué le modèle de régression linéaire dont les résultats ont été présentés dans la partie 6.1, pour prédire les $BE_{i,j}$ pour différentes valeurs de TMG. Rappelons que le modèle a été entraîné avec un seul *model point* de $TMG = 0$. La figure ci-dessous représente les valeurs de BE prédites par le modèle en fonction des vraies valeurs et ce pour différentes valeurs de TMG.

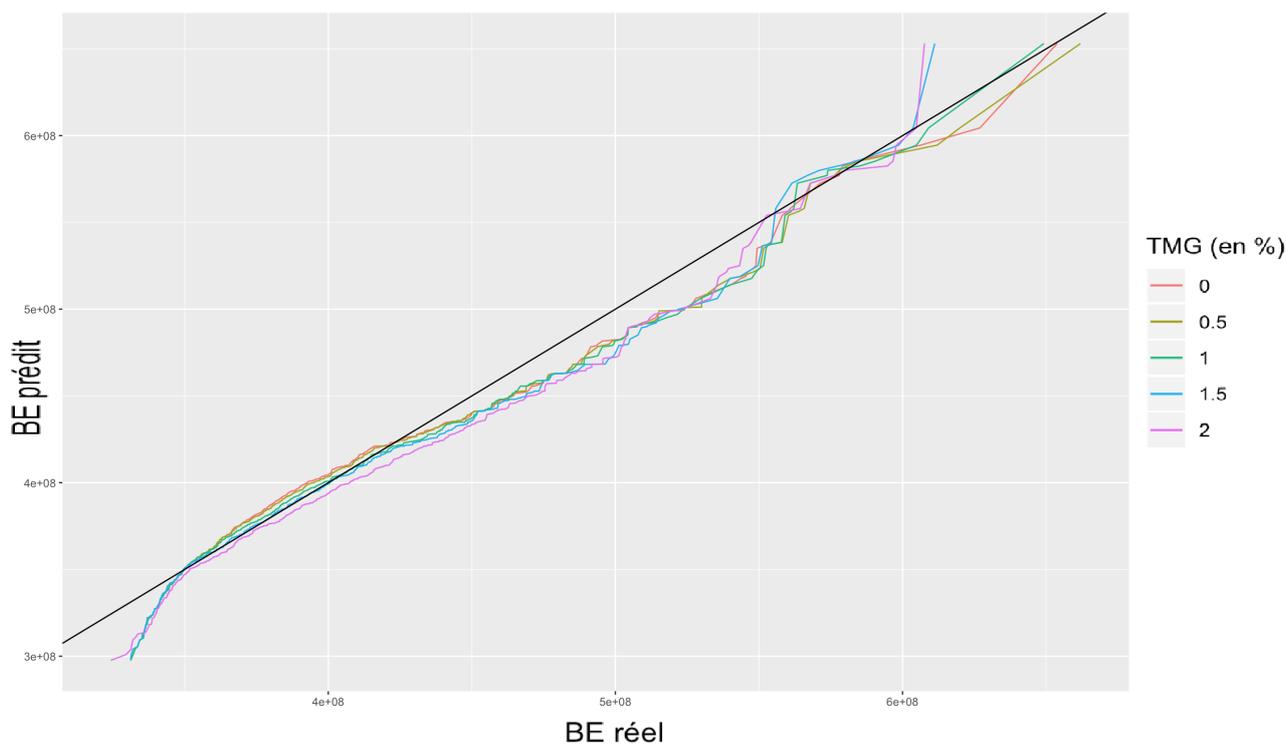


FIGURE 57 – Comparaison des valeurs réelles et prédites du modèle en faisant varier le TMG

On remarque que le modèle entraîné sur la base avec le *model point* de $TMG = 0$, présente une qualité de prédiction très similaire sur les bases ayant un TMG différent. On remarque seulement que pour les très grandes valeurs de BE, le modèle sur-évalue la prédiction lorsque le TMG est élevé (2% et 1.5%) alors qu'il sous-évalue les TMG faibles (0% et 0.5%).

Enfin on remarquera que la répartition du $BE_{i,j}$ est relativement stable lorsque l'on fait varier le TMG :

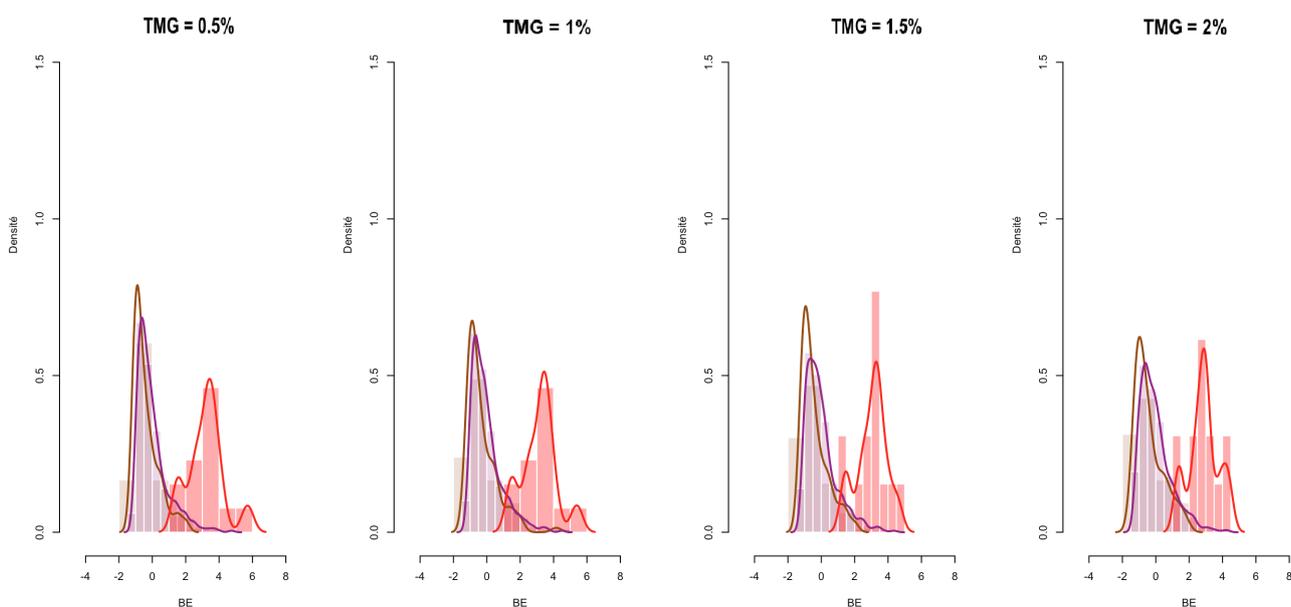


FIGURE 58 – Histogramme de distribution du BE pour différents niveaux TMG

On en conclut que notre méthode de *clustering* des taux concurrents en n'incluant pas le TMG reste plutôt robuste à une variation du TMG. Par conséquent, il ne semble pas nécessaire d'intégrer le TMG comme variable dans l'étude.

6 Application à un cas concret

6.1 Méthodologie

Une compagnie d'assurance utilise un modèle de gestion actif-passif. Ce modèle a été défini à partir d'hypothèses comme celles sur la loi des rachats dynamiques ou sur les règles de distribution de la participation aux bénéficiaires, comme nous l'avons vu dans la première partie. Quelle est la valeur ajoutée de notre démarche pour l'assureur ?

Tout d'abord, il ne s'agit pas de retrouver les hypothèses du modèle ALM car on suppose que l'assureur a construit son modèle et qu'il les connaît donc. L'objectif de notre étude est d'explicitier quels sont les impacts concrets du choix de ses hypothèses sur le calcul du *best estimate* dans le modèle ALM.

L'étude réalisée nous permet de mettre en évidence plusieurs limites de ce modèle ALM, qui a été développé en interne dans le cadre d'un mémoire précédent[6]. Tout d'abord, nous avons vu que la VAN de *best estimate* par scénario était très corrélée à la première valeur de rendement action. Cela signifie d'une certaine manière que quelle que soit la trajectoire de taux et d'actions sur les 29 autres années de projection, c'est la première valeur action qui porte l'information sur la VAN de *best estimate*. Cela pose problème car finalement quel est l'intérêt d'utiliser des projections de scénarios sur 30 ans si c'est la première année de projection qui explique en grande partie le *best estimate* ? La réaction de notre modèle aux scénarios du *cluster 3* de la figure 47 n'est pas conforme à la réalité : un assureur ne liquidera pas toute sa réserve de richesse (que ce soit la PPE ou les PVL), même si c'est pour servir le taux concurrent. On met en évidence ici un risque de modèle, dont l'origine provient des hypothèses choisies par l'assureur dans son modèle ALM.

La première hypothèse à remettre en cause est la règle de distribution de la participation aux bénéficiaires. En effet, on l'observe bien sur la figure 49, lorsque le rendement action de la première année est élevé (*a fortiori* le taux concurrent), la plus value action est entièrement liquidée la première année pour servir le taux concurrent. C'est ce mécanisme qui conduit l'assureur à ne plus avoir assez de plus-values actions pour servir le taux concurrent en année 3, et donc déclencher des rachats dynamiques l'année suivante.

Une proposition pour améliorer le modèle serait d'établir une règle qui consiste à plafonner le montant des plus-values actions distribué pour servir le taux cible, au moins en début de projection. En effet, on préférera déclencher quelques rachats dynamiques à la deuxième année de projection plutôt que de liquider toutes les plus-values actions en première année ce qui déclenchera des rachats massifs en quatrième année. De plus, les rachats dynamiques se déclenchent parce que le taux concurrent reste très élevé même après une chute des actions à cause du choix de lisser le taux concurrent sur 5 ans dans les hypothèses de modélisation du modèle ALM. Cette étude a permis de mettre en avant que cette hypothèse était clé dans notre modélisation, ce qui amène à en discuter la pertinence.

De plus, l'analyse réalisée avec les *clusters* de taux concurrent dans la partie 6.2.4 permet à l'assureur de détecter les scénarios économiques à l'origine des grandes valeurs de *best estimate*. Cela lui permet le cas échéant de décider de mettre en place des *management actions* spécifiques pour traiter ce genre de scénarios.

6.2 Pistes d'améliorations

Dans cette partie, nous proposons plusieurs corrections qui peuvent être prises par le *management* après avoir pris connaissance de l'étude que nous avons réalisée. Rappelons que notre étude a permis de mettre en évidence que la modélisation du taux concurrent choisie conduisait à des valeurs de *best estimate* très élevées pour un certain nombre de scénarios. Ces scénarios ont la particularité d'avoir des rendements actions très élevés en première année de projection et par conséquent un taux concurrent élevé. Le lissage du taux concurrent sur 5 ans maintient une valeur élevée de taux concurrent sur les première années à cause de la première année de projection.

La correction la plus évidente est de modifier le lissage du taux concurrent. Un lissage sur un nombre d'année plus faible, par exemple 3 ans permettrait de limiter l'impact d'une année de hausse ou d'une baisse singulière du taux concurrent. Nous avons lissé le taux concurrent sur 3 ans et reconstruit les *clusters* de taux concurrent de la même manière que dans notre étude, les résultats sont présentés ci-dessous.

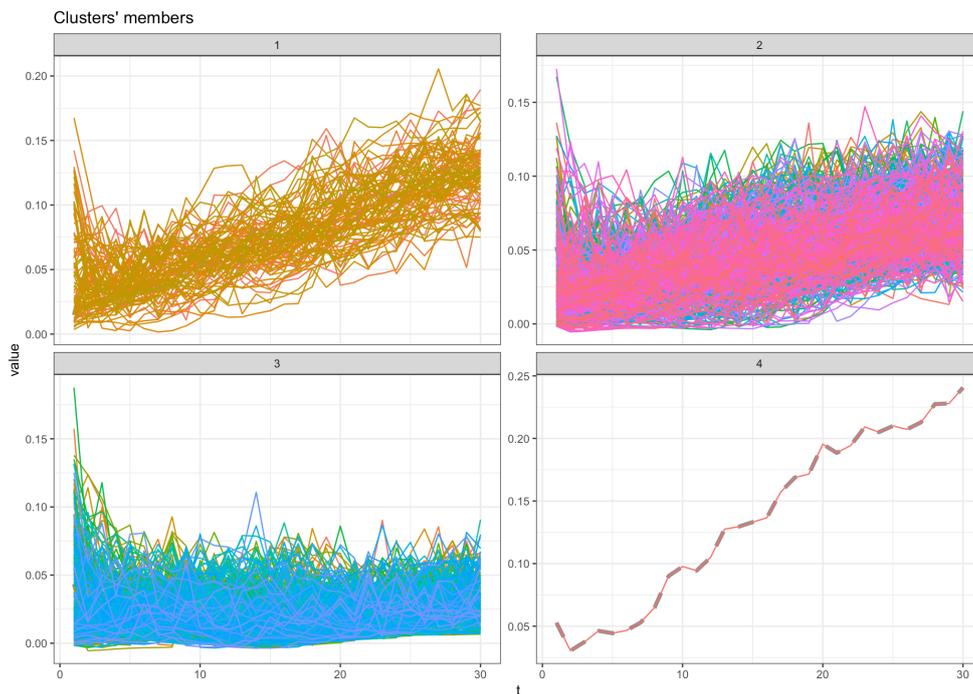


FIGURE 59 – Histogramme de distribution du BE pour différents niveaux TMG

En comparant les résultat avec ceux de la figure 47, on remarque que les *clusters* 1 et 2 sont assez similaires à la fois en terme de trajectoire et de niveaux de taux concurrents. Cependant, le *cluster* 3, qui contenait les trajectoires conduisant aux valeurs élevées de *best estimate* contient désormais des trajectoires assez similaires à celle du *cluster* 2. On note également qu'il y a plus de trajectoires dans le *cluster* 3 ci-dessus que sur la figure 47. En effet, on observe les mêmes allures de trajectoires en début de projection, la différence avec le *cluster* 2 réside dans la fin de projection qui ne sont pas croissantes comme pour celle du *cluster* 2. De la même manière, traçons la distribution du *best estimate* par *cluster* de taux concurrent :

Clusters de taux concurrents

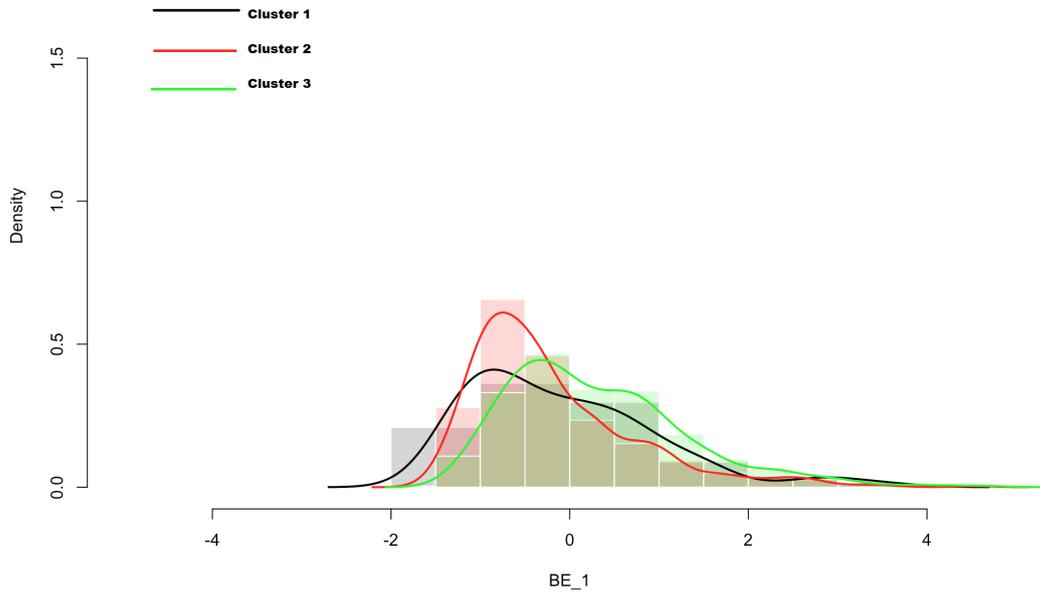


FIGURE 60 – Histogramme de distribution du BE pour différents niveaux TMG

On observe sur la figure ci-dessus que la distribution du *best estimate* par *cluster* de taux concurrent ne permet plus d'isoler un groupement de scénarios conduisant à des fortes valeurs de *best estimate*. Ainsi, la modification du lissage du taux concurrent a permis de réduire le poids en terme de variance des scénarios du *cluster 3* sur le *Best Estimate*.

Une autre piste d'amélioration serait de plafonner la réalisation des plus-values latentes dans la distribution de la participation aux bénéfices cible. En effet, *a priori* le fait de plafonner le pourcentage de plus-values latentes potentiellement consommées permettrait d'éviter le phénomène que nous avons observé dans notre étude à savoir la liquidation de toutes les plus-values latentes dans les premières années de projections pour servir la PB cible. Pour cela, nous avons plafonné à 70% le pourcentage des plus-values latentes réalisées pour servir la PB cible.

Clusters de taux concurrents

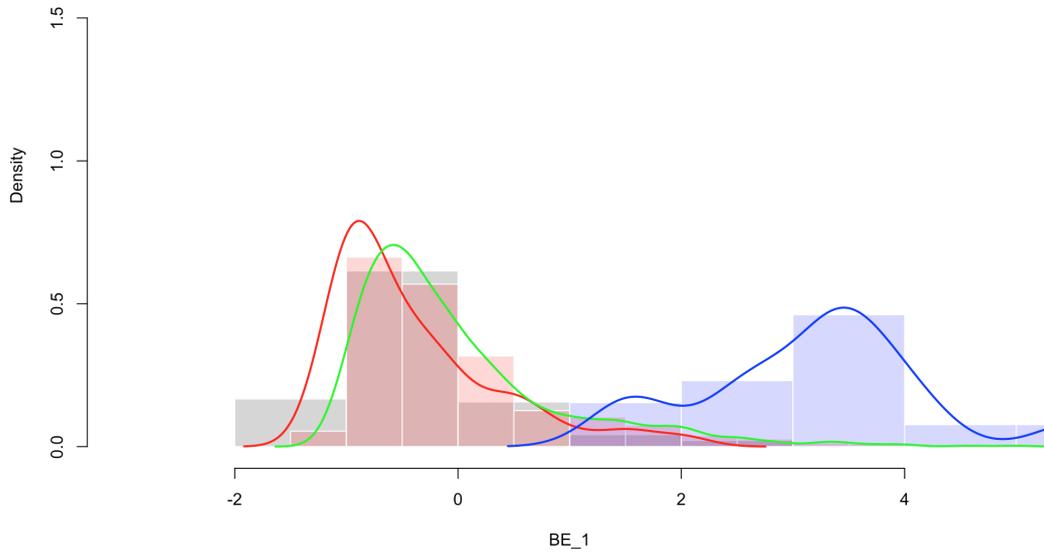


FIGURE 61 – Histogramme de distribution du BE pour différents niveaux TMG

On observe, que les distributions de BE du *cluster* 3 (en bleu) conduisent de la même manière que précédemment à des valeurs élevées. On remarque que le fait de plafonner la réalisation des plus-values latentes ne permet pas de compenser les rachats massifs dans les premières années de projection de ces scénarios. Notons que les résultats de l'étude ci-dessus sont propres au modèle ALM étudié et qu'un autre modèle conduira sans doute à d'autres interprétations. Néanmoins, notre démarche présente une forte adaptabilité.

En effet réaliser cette étude sur un autre modèle ALM ne nécessite pas d'en connaître l'ensemble des hypothèses. La connaissance des scénarios de rendements actions et taux, de la règle de calcul du taux concurrent ainsi que des valeurs des *best estimate* par scénario nous suffisent à réaliser une grande partie de l'étude. Les données sur l'évolution des plus-values actions, de la PPE disponible et du montant des rachats dynamiques des figures 49 à 52, nous ont permis de confirmer les mécanismes à l'origine des résultats donnés par les *clusters* de taux concurrent, mais ces derniers fournissent à eux seuls de l'information sur le comportement du modèle ALM.

7 Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'explicitier quels sont les impacts concrets du choix des hypothèses sur le calcul du *best estimate* dans un modèle de gestion-actif passif en vue d'en communiquer les conclusions aux instances dirigeantes. Les techniques d'analyse de données utilisées sont : l'analyse en composantes principales, les méthodes de classification, en particulier l'algorithme des *k-means* et le *dynamic time warping*. Pour chacune de ces méthodes, nous avons proposé une démarche d'interprétation des résultats dont l'objectif est de lier le comportement des scénarios économiques en entrée du modèle avec les valeurs de *best estimate* par scénario économique afin de proposer aux compagnies un regard critique quant aux hypothèses choisies dans leur modèle ALM .

Dans notre étude du modèle ALM, nous nous sommes intéressés à l'évolution du taux concurrent au cours des 30 années de projection. Le taux concurrent s'est révélé être une grandeur clé car par construction celui-ci contient l'information des scénarios de taux et de rendements actions. Par la suite, nous avons utilisé la méthode de *dynamic time warping* pour créer des groupements de trajectoires de taux concurrents, aussi appelés *clusters*. Le premier intérêt des *clusters* est de fournir une vision synthétique des différentes trajectoires de taux concurrent utilisées dans le modèle ALM. Le second intérêt a été d'étudier la distribution du *best estimate* par *cluster* de taux concurrents. Nous avons ainsi mis en évidence, qu'un petit nombre de trajectoires de taux concurrent (13 scénarios sur 1000) conduisait à des valeurs de *best estimate* particulièrement élevés. Ces 13 scénarios expliquent à eux seuls 14% de la variance totale de la distribution du *best estimate* par scénarios.

L'étude de ces scénarios conduisant à des fortes valeurs de *best estimate* nous a permis d'identifier les mécanismes ALM à l'origine de ce comportement. Nous avons mis en évidence, que les choix de modélisation du taux concurrent étaient à l'origine de ces valeurs élevées de *best estimate*. En effet, la modélisation retenue est de lisser le taux concurrent sur 5 ans. Économiquement, ce lissage se justifie car il permet de prendre en compte l'effet « mémoire » taux servi par le concurrent ainsi que la stabilité de la politique de taux servi. Cependant, ce lissage a pour conséquence de tirer vers le haut le taux concurrent à partir du moment où au moins une des 5 années précédentes a un taux concurrent élevé. Or, les scénarios du *cluster* conduisant aux *best estimate* élevés ont la caractéristique commune d'avoir des forts rendements actions en première année de projection et par conséquent un taux concurrent élevé en première année. Le lissage maintient le taux concurrent élevé sur les premières années de projection, ce qui entraîne le modèle ALM à réaliser des plus-values latentes et reprendre de la PPE pour pouvoir servir le taux concurrent des premières années alors même que les rendements actions de ces années ne sont pas très élevés. Ce mécanisme conduit au déclenchement de rachats dynamiques qui expliquent l'augmentation du montant du *best estimate* à provisionner. Enfin, le fait que les règles de distribution du taux cible ne contiennent pas de limite dans la réalisation des plus-values latentes contribue au mécanisme expliqué précédemment.

Notre approche a permis de cibler les points de modélisation qui sont à l'origine de comportements singuliers dans le modèle ALM de notre compagnie fictive. Par la suite, c'est à l'assureur de prendre des décisions quant à la modélisation du taux concurrent et aux règles de distribution du taux cible de son modèle ALM. Une correction possible serait d'établir une règle qui consiste à plafonner le montant des plus-values actions distribué pour servir le taux cible, au moins en début de projection. En effet, on préférera déclencher quelques rachats dynamiques à la deuxième année de projection plutôt que de liquider toutes les plus-values actions en première année ce qui déclencherait des rachats massifs en quatrième année. De plus, les rachats dynamiques se déclenchent parce que le taux concurrent reste très élevé même après une chute des actions en raison du choix de lisser le taux concurrent sur 5 ans dans les hypothèses de modélisation du modèle ALM. L'assureur peut décider de lisser le taux concurrent sur un plus faible nombre d'années, par exemple sur 3 ans. Cette étude a permis de mettre en avant que cette hypothèse était clé dans notre modélisation, ce qui amène à en discuter la pertinence. Nous avons étudié les conséquences de ces corrections comme la modification du lissage du taux concurrent ou le plafonnement des plus-values latentes réalisées.

La démarche d'analyse présentée a l'avantage de pouvoir être mise en oeuvre par les assureurs sur n'importe quel modèle ALM. Évidemment, les conclusions ne seront certainement pas les mêmes selon les assureurs car elles dépendent du modèle étudié. Cependant, elle permet aux assureurs d'avoir une approche objective sur les conséquences des hypothèses qui ont été choisies dans leur modèle ALM.

Une amélioration possible de l'étude serait d'appliquer une démarche similaire pour étudier le SCR d'un exercice à l'autre. En effet, cela permettrait aux assureurs de discuter de la pertinence des hypothèses retenues dans leur modèle pour leur calcul de SCR. Il conviendra néanmoins de s'assurer qu'il est possible de transposer de manière pertinente les notions de SCR à la maille model point et scénario par scénario comme nous l'avons fait pour le best estimate.

Annexes

Annexe 1 : Démonstrations liées au modèle de Hull & White

Le modèle de Hull & White modélise le taux court sous la probabilité risque neutre de la façon suivante :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t$$

Démonstration de la distribution du taux court :

Nous cherchons à démontrer le résultat énonçant que le taux court est une variable aléatoire gaussienne d'espérance et de variance :

$$\mathbb{E}[r_t] = e^{-at}r_0 + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta_u du$$

$$\mathbb{V}[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Démonstration. Soit $X_t := e^{at}r_t$, en utilisant le lemme d'Itô :

$$dX_t = e^{at}dr_t + ae^{at}r_t dt$$

En injectant dr_t dans la formule précédente, nous obtenons :

$$dX_t = e^{at}\theta_t dt + e^{at}\sigma dW_t$$

Ainsi, en intégrant entre 0 et t :

$$X_t = X_0 + \int_0^t e^{au}\theta_u du + \int_0^t e^{au}\sigma dW_u$$

Ceci nous permet d'écrire le taux court de la façon suivante :

$$r_t = e^{-at}r_0 + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta_u du + \int_0^t e^{-a(t-u)}\sigma dW_u$$

Annexe 2 : Analyse en composantes principales des scénarios économique

Les résultats de l'analyse en composante principale avec 18 variables explicatives :

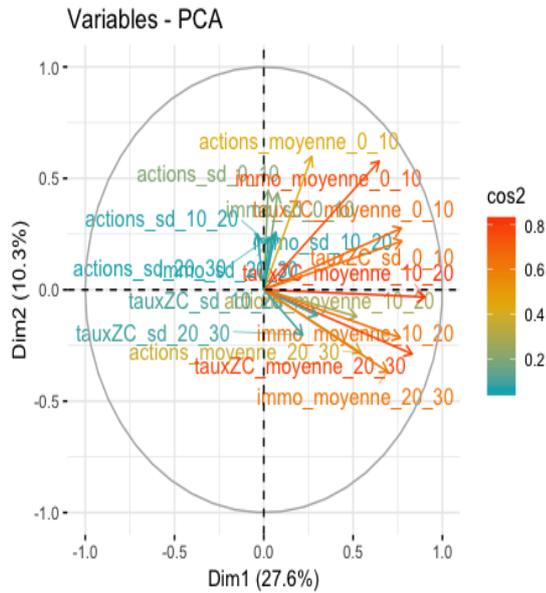


FIGURE 62 – Projection des variables sur les deux premiers axes principaux

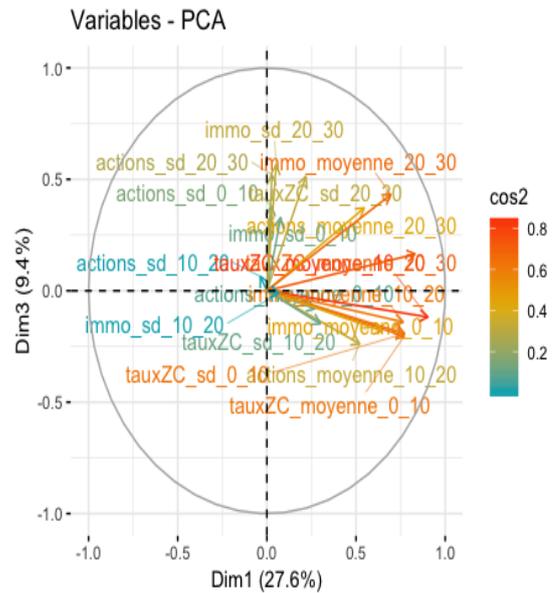


FIGURE 63 – Projection des variables sur les axes principaux 1 et 3

Annexe 3 : Classification des taux zéro-coupon avec 9 et 10 clusters

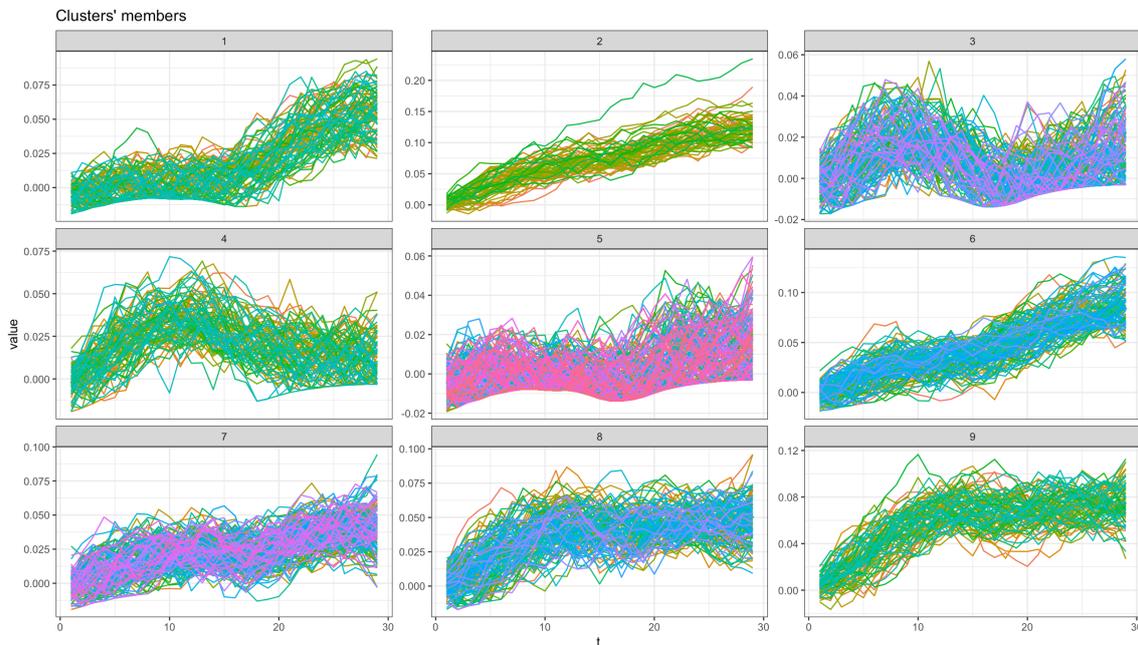


FIGURE 64 – Représentation graphique des séries de chaque cluster (k=9)

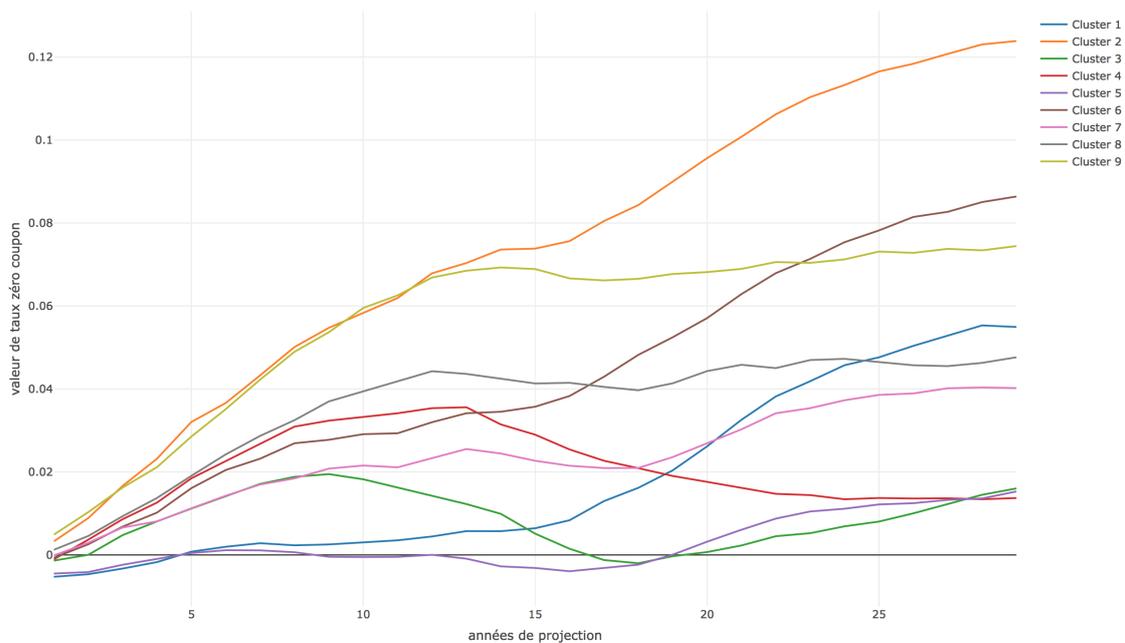


FIGURE 65 – Représentation graphique des séries moyenne de chaque *cluster* (k=9)

On retrouve des trajectoires similaires à la classification avec 8 *clusters*. Le changement principal porte sur l'ajout d'un groupement de trajectoires correspondant au cluster 7 en rose. On observe que ce groupement de scénarios a une trajectoire très similaire à ce lui du cluster 8 (en gris) mais avec des niveaux de taux légèrement plus faibles. Ajouter un tel cluster de scénarios, ajoute de la complexité à l'interprétation sans pour autant apporter une information sur des scénarios dont le comportement seraient singulier, pour cela nous décidons d'écarter le choix de 9 clusters.

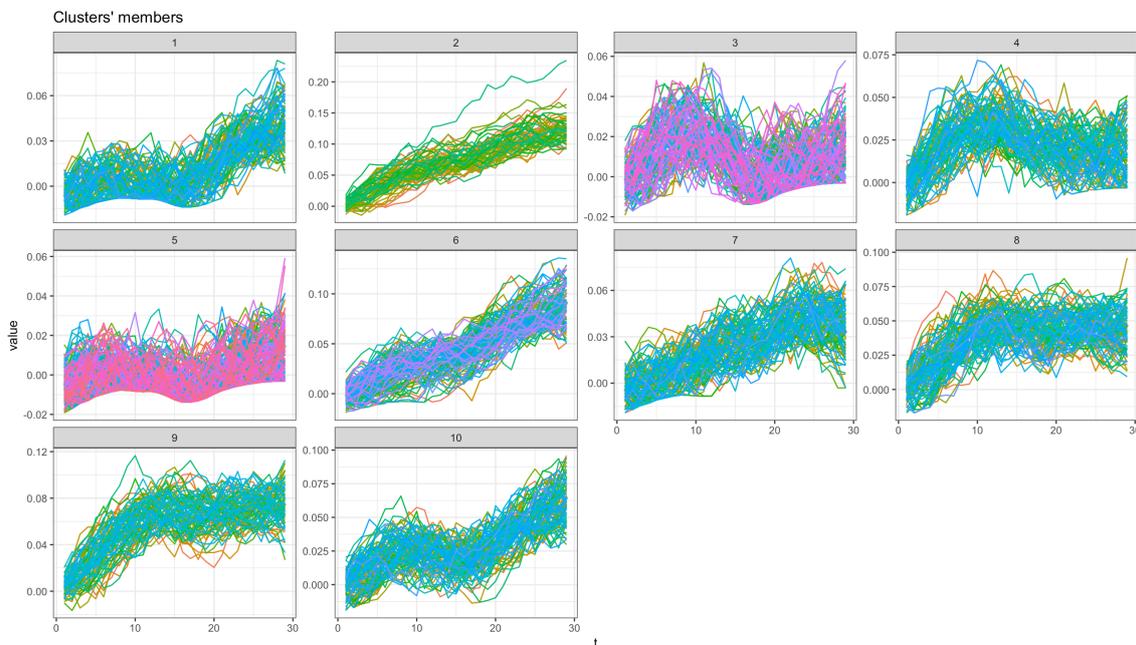


FIGURE 66 – Représentation graphique des séries de chaque *cluster* (k=10)

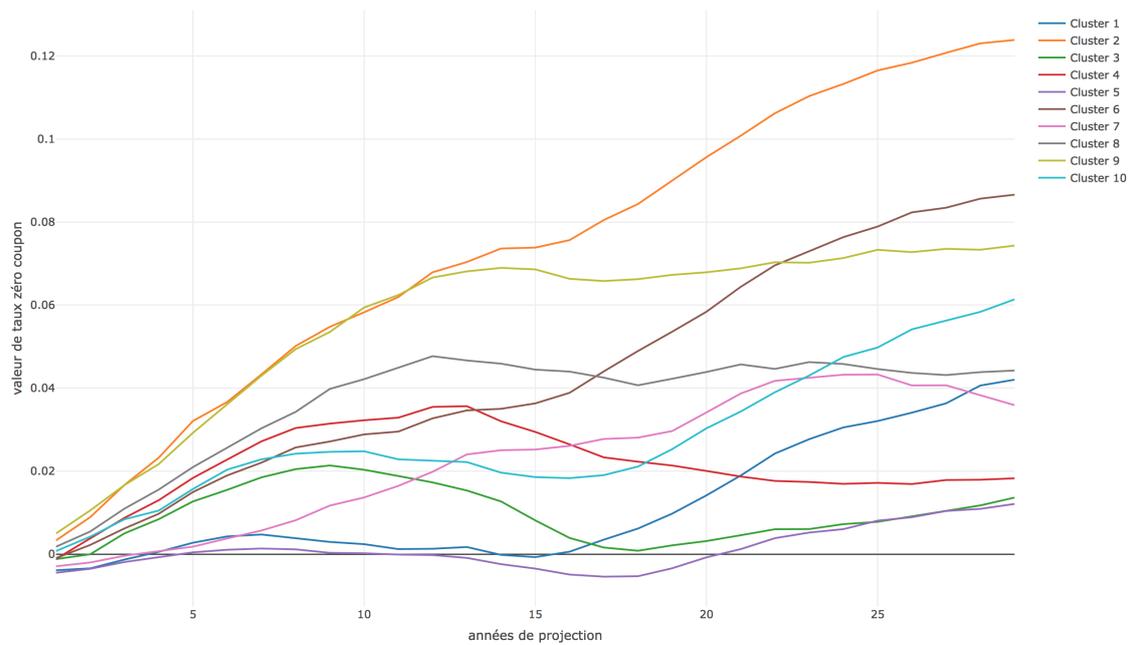


FIGURE 67 – Représentation graphique des séries moyennes de chaque *cluster* ($k=10$)

De la même manière, retrouve des trajectoires similaires à la classification avec 9 *clusters*. Cependant, la lisibilité des trajectoires est plus complexe, notamment entre les clusters 7,8 et 10. Pour conserver une certaine interprétabilité, nous décidons d'écarter la classification avec 10 *clusters*.

Annexe 4 : Étude des *clusters* de rendements actions cumulés

Notons que nous étudions ici les rendements actions cumulés.

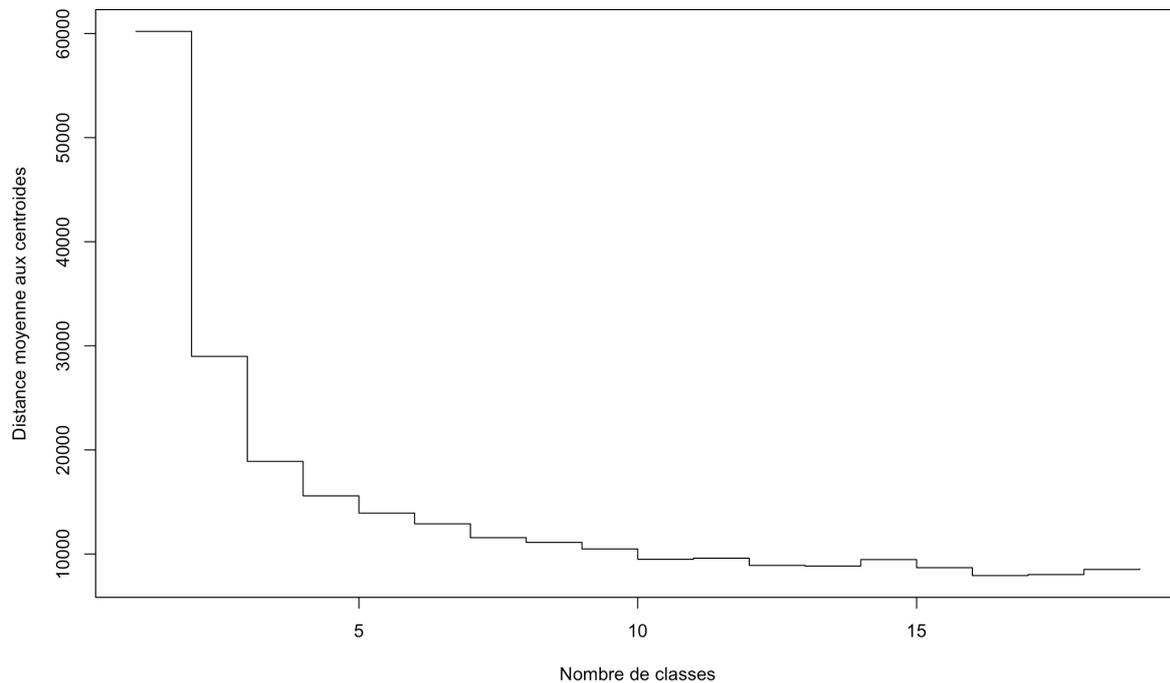


FIGURE 68 – Évolution de la distance moyenne aux centroïdes en fonction du nombre de *clusters*

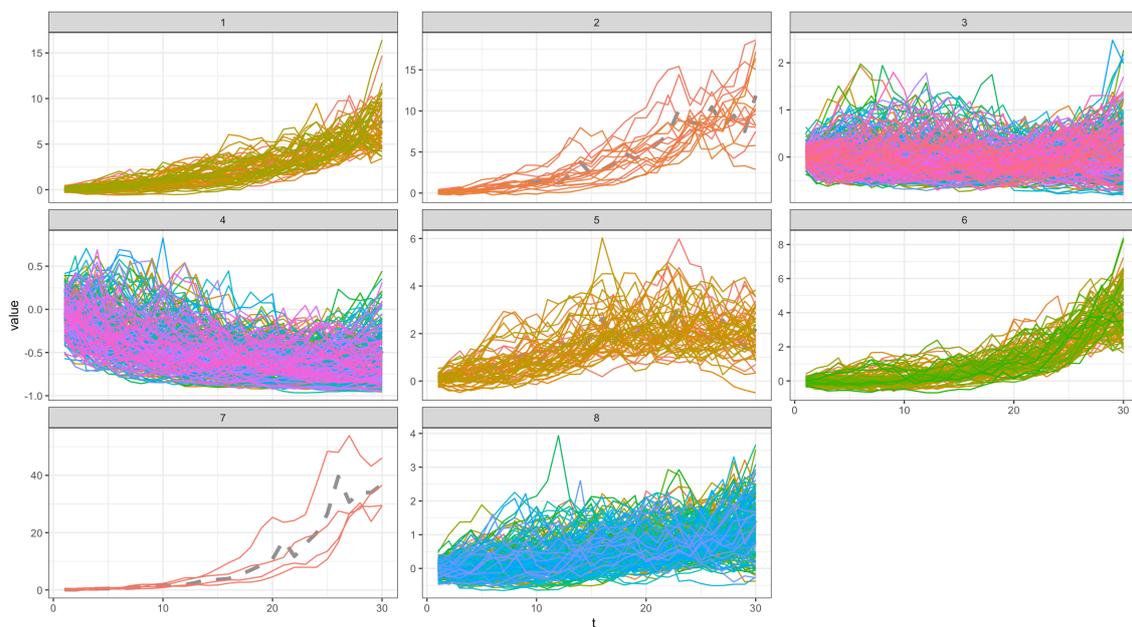


FIGURE 69 – Représentation graphique des séries de chaque *cluster* ($k=8$)

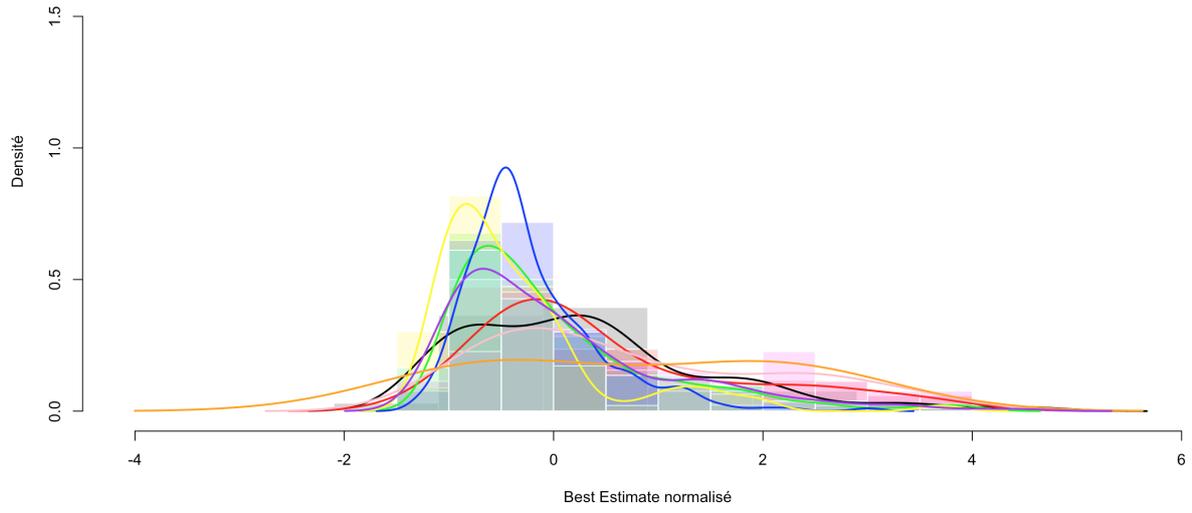


FIGURE 70 – Histogramme de distribution du BE pour chacun des *clusters* de rendements action cumulées

Annexe 5 : Étude des *clusters* multivariés taux-action

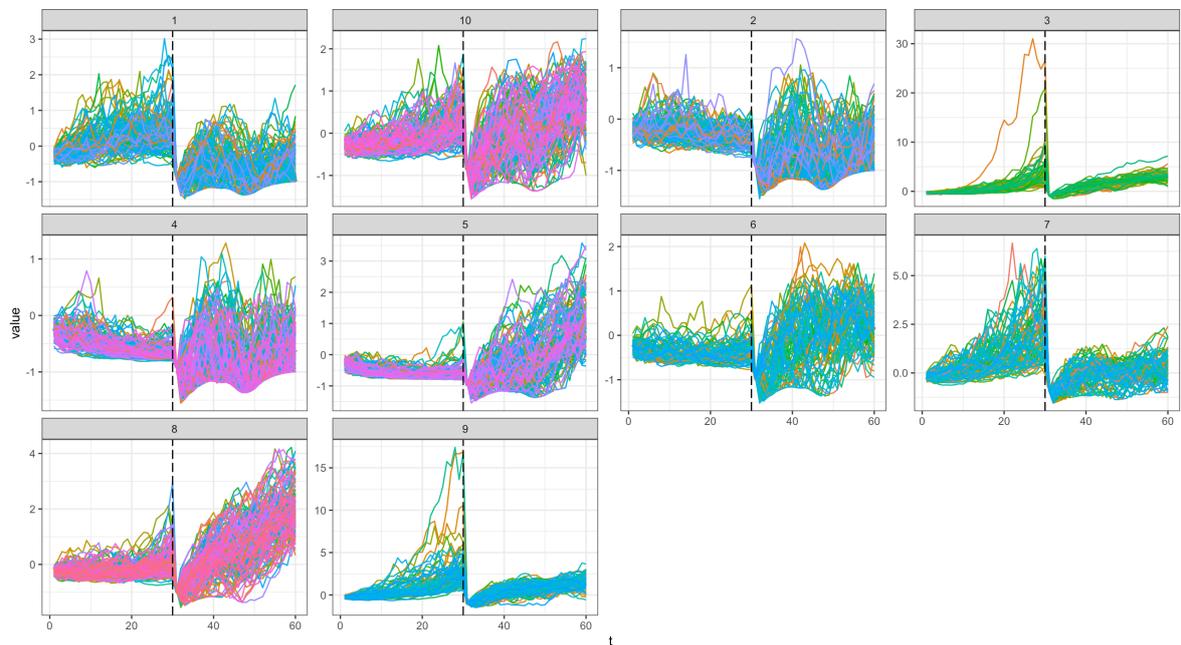


FIGURE 71 – Représentation graphique des séries de chaque *cluster* multivarié ($k=10$)

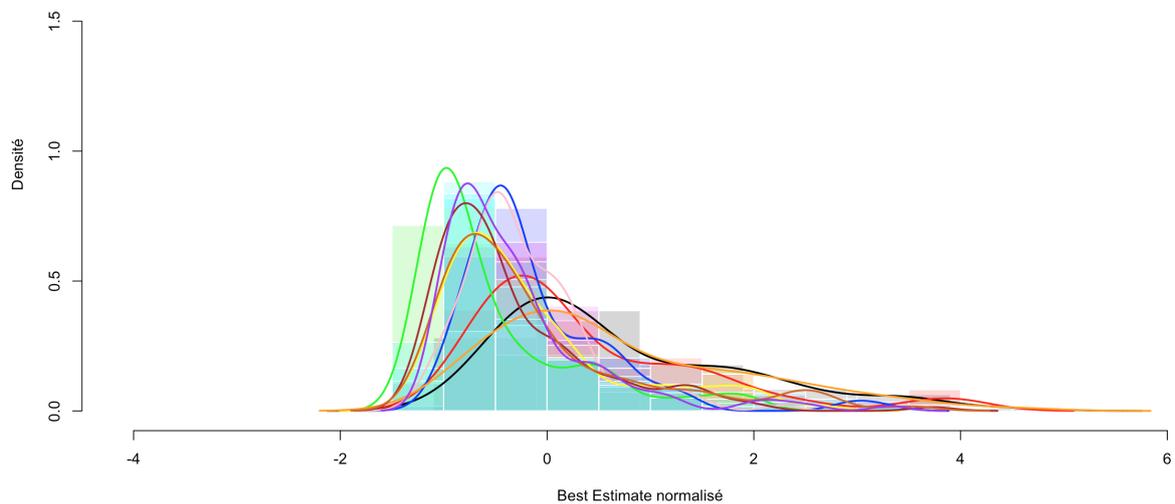


FIGURE 72 – Histogramme de distribution du BE pour chacun des *clusters* multivariés

Annexe 6 : Étude des splines carrés et cubiques

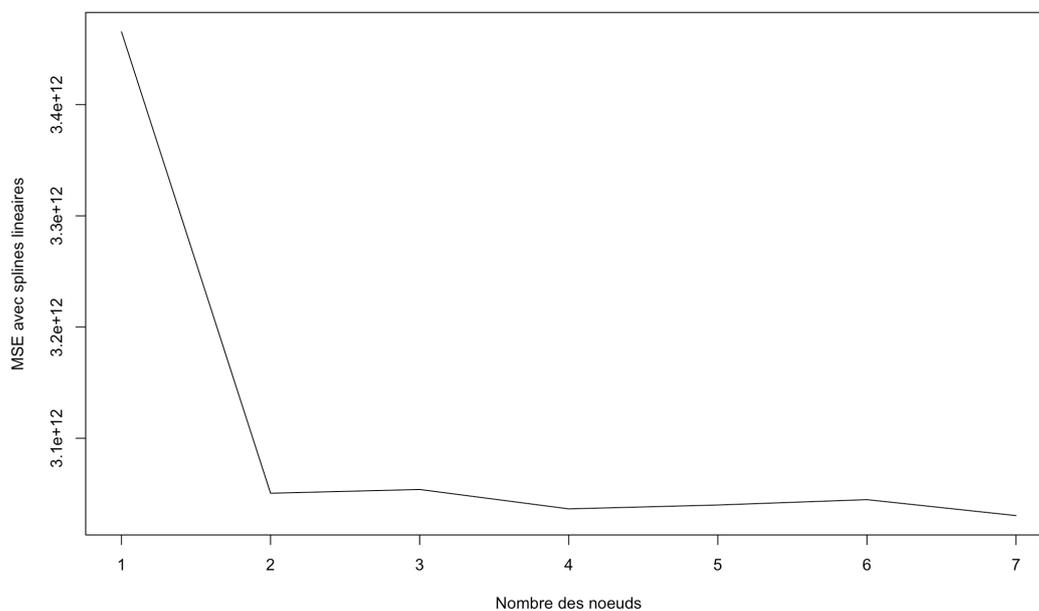


FIGURE 73 – Évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre de nœud pour un spline de degré 1

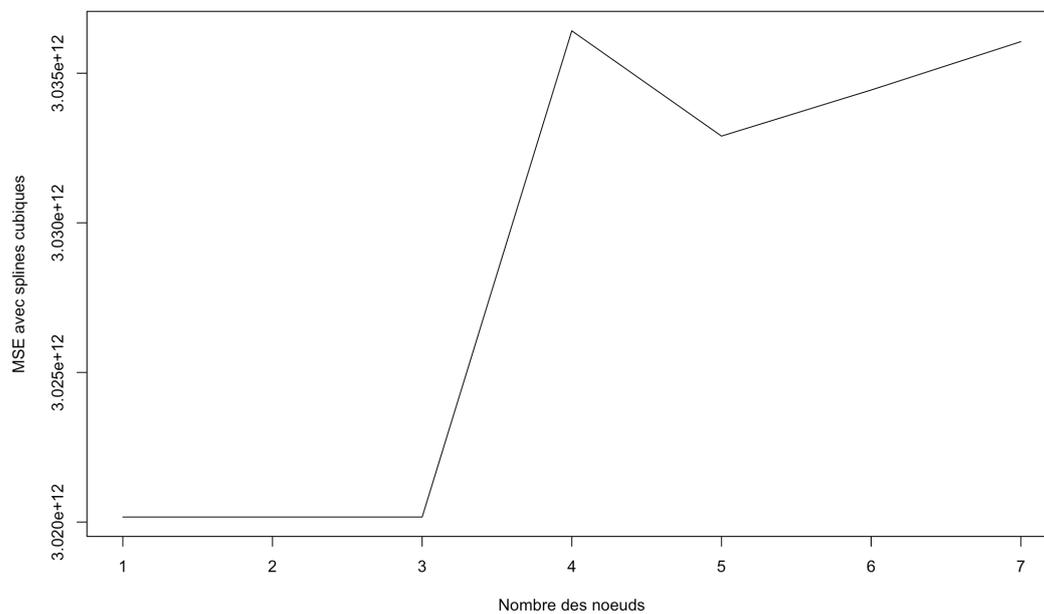


FIGURE 74 – Évolution de l'erreur quadratique moyenne en fonction du nombre de nœud pour un spline de degré 3

Annexe 7 : Evolution du *Best Estimate* en fonction des rendements actions et taux zéro-coupon des premières années de projection[0cm]

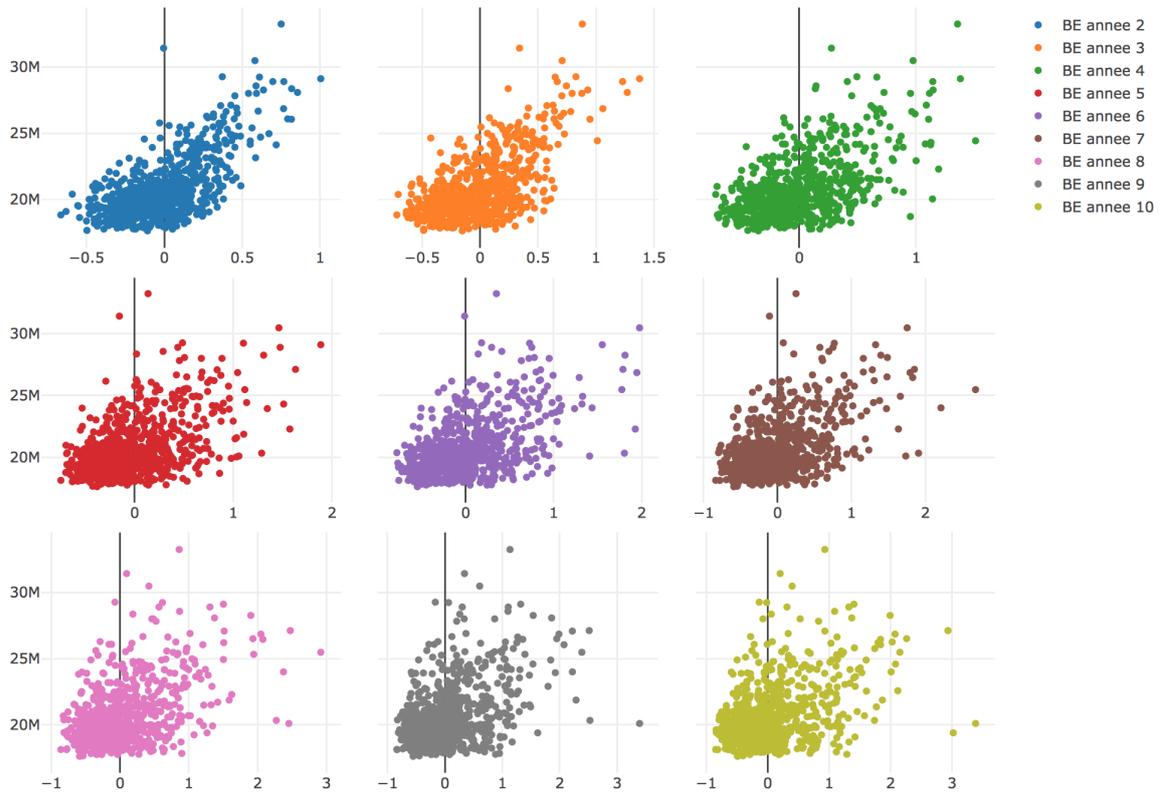


FIGURE 75 – Evolution du *Best Estimate* en fonction des rendements actions cumulés des 10 premières années de projection

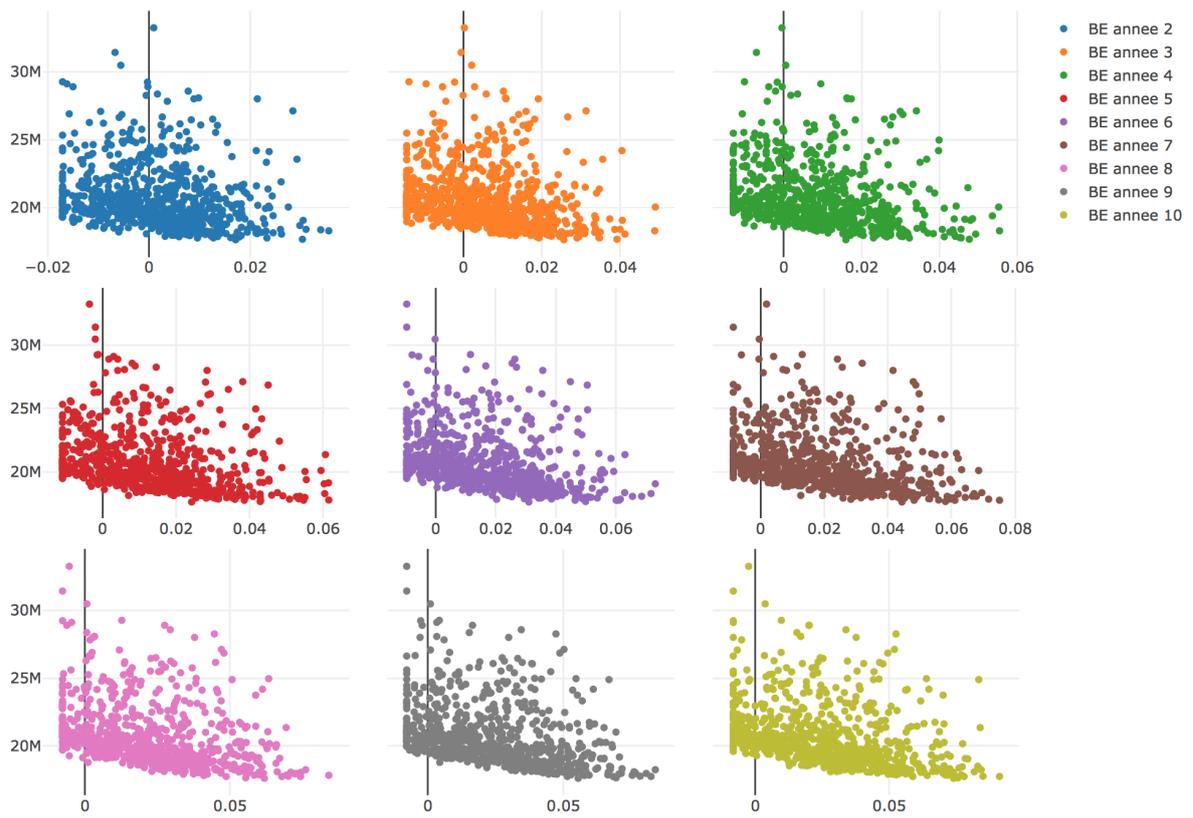


FIGURE 76 – Evolution du *Best Estimate* en fonction des taux zéro-coupon des 10 premières années de projection

Annexe 8 : Sorties complètes des régressions linéaires

TABLE 7 – Regression Cluster 2

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	3.386 (−0.204, 6.977)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	2.207 (0.299, 4.114)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	7.031* (2.157, 11.906)
Taux_2	−33.137 (−67.928, 1.653)
Taux_3	22.737 (−9.789, 55.264)
Taux_4	−24.560 (−60.584, 11.465)
Taux_5	−9.372 (−31.256, 12.513)
Taux_6	74.018 (−5.025, 153.061)
Taux_7	−60.281 (−128.160, 7.598)
Taux_8	33.399 (−8.281, 75.080)
Taux_9	−36.374 (−78.005, 5.257)
Taux_10	14.457 (−28.255, 57.168)
Taux_11	−20.360 (−53.238, 12.518)
Taux_12	−38.616 (−95.090, 17.858)
Taux_13	43.169 (1.272, 85.065)
Taux_14	25.983 (−31.616, 83.582)
Taux_15	−40.691 (−100.796, 19.414)
Taux_17	49.712 (3.483, 95.941)
Taux_18	−7.245 (−28.551, 14.061)
Taux_19	−25.066 (−51.868, 1.737)
Taux_20	32.428 (−0.710, 65.566)
Taux_21	46.939 (0.842, 93.036)
Taux_22	21.296 (−4.783, 47.376)
Taux_23	−87.338 (−158.585, −16.091)
Taux_24	52.590 (−0.057, 105.238)
Taux_25	−63.208 (−155.702, 29.286)
Taux_26	56.004 (−4.576, 116.585)
Taux_27	−8.107 (−19.355, 3.142)
Taux_28	−7.955 (−37.728, 21.818)
Taux_29	80.586 (5.594, 155.579)
Taux_30	−92.374 (−183.402, −1.345)
Actions_2	−4.886 (−10.910, 1.138)
Actions_3	2.477 (−1.333, 6.288)
Actions_4	−2.531 (−5.152, 0.090)
Actions_5	4.820 (0.929, 8.712)
Actions_6	−1.720 (−3.704, 0.265)
Actions_7	−0.365 (−1.453, 0.723)
Actions_8	1.659 (−1.257, 4.575)
Actions_9	−1.605 (−3.301, 0.092)
Actions_10	−0.556 (−1.503, 0.391)
Actions_11	2.071 (0.150, 3.991)
Actions_12	−3.772 (−7.417, −0.127)
Actions_13	4.248 (0.215, 8.282)
Actions_14	−0.762 (−1.627, 0.104)
Actions_15	−0.838 (−2.247, 0.571)
Actions_16	1.349 (−0.691, 3.388)
Actions_17	−1.246 (−2.593, 0.102)
Actions_18	0.571 (−0.088, 1.231)
Actions_20	−1.190 (−2.669, 0.289)
Actions_21	1.292 (−0.004, 2.589)
Actions_22	−0.585 (−1.247, 0.078)
Actions_23	0.584 (−0.025, 1.193)
Actions_24	0.350 (−0.254, 0.955)
Actions_25	−0.113 (−0.474, 0.247)
Actions_26	−0.870 (−1.755, 0.014)
Actions_27	0.728 (−0.045, 1.501)
Actions_28	0.372 (−0.067, 0.812)
Actions_29	−0.637 (−1.324, 0.050)
Constant	−4.321 (−8.234, −0.408)
Observations	62
R ²	0.998
Adjusted R ²	0.960

Note :

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

TABLE 8 – Regression Cluster 3

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	-1.378*** (-1.676, -1.079)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	0.367** (0.093, 0.641)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	2.464*** (1.988, 2.940)
Taux_2	8.961** (2.549, 15.373)
Taux_3	8.860** (2.499, 15.222)
Taux_4	-9.602** (-15.907, -3.296)
Taux_6	-13.889*** (-19.633, -8.145)
Taux_7	7.922** (1.741, 14.103)
Taux_8	-6.730** (-12.084, -1.376)
Taux_10	3.669 (-1.003, 8.342)
Taux_11	-3.639 (-8.469, 1.190)
Taux_13	-12.513*** (-18.033, -6.993)
Taux_14	12.176*** (5.158, 19.193)
Taux_15	-7.188** (-12.485, -1.890)
Taux_19	-5.297* (-10.333, -0.261)
Taux_20	-8.120** (-13.464, -2.777)
Taux_24	-6.740** (-11.048, -2.431)
Taux_28	5.828** (1.301, 10.355)
Taux_30	-3.397* (-6.688, -0.107)
Actions_2	0.819*** (0.588, 1.051)
Actions_4	0.236** (0.059, 0.412)
Actions_7	0.237*** (0.106, 0.367)
Actions_12	-0.151 (-0.312, 0.010)
Actions_13	0.172 (-0.020, 0.363)
Actions_15	0.234** (0.070, 0.398)
Actions_16	-0.192** (-0.348, -0.036)
Actions_18	0.301*** (0.186, 0.417)
Actions_21	-0.134* (-0.252, -0.015)
Actions_23	0.101 (-0.003, 0.206)
Actions_25	-0.152** (-0.277, -0.027)
Actions_27	0.281*** (0.143, 0.418)
Actions_28	-0.139** (-0.247, -0.032)
Constant	0.965*** (0.708, 1.223)
Observations	127
R ²	0.958
Adjusted R ²	0.944

Note :

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

TABLE 9 – Regression Cluster 4

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	−0.895*** (−1.150, −0.640)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	0.056 (−0.168, 0.279)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	2.253*** (1.852, 2.654)
Taux_4	−4.722* (−8.655, −0.790)
Taux_8	−9.990*** (−14.981, −4.999)
Taux_9	−5.755 (−12.109, 0.598)
Taux_10	9.860** (3.296, 16.423)
Taux_12	−9.473*** (−14.192, −4.754)
Taux_16	4.544* (0.480, 8.607)
Taux_18	−5.938* (−11.303, −0.573)
Taux_19	7.751* (0.906, 14.597)
Taux_20	−15.644*** (−22.529, −8.759)
Taux_21	7.161* (1.063, 13.260)
Taux_22	−5.417* (−10.106, −0.728)
Taux_26	−6.540*** (−10.176, −2.904)
Actions_2	0.694*** (0.461, 0.927)
Actions_5	0.372** (0.119, 0.626)
Actions_6	−0.400** (−0.677, −0.122)
Actions_7	0.246 (0.0002, 0.492)
Actions_8	0.308** (0.103, 0.512)
Actions_24	−0.181*** (−0.275, −0.087)
Actions_25	0.205*** (0.111, 0.300)
Actions_27	0.195*** (0.082, 0.307)
Actions_28	−0.107* (−0.199, −0.015)
Constant	0.763*** (0.530, 0.996)
Observations	117
R ²	0.957
Adjusted R ²	0.946

Note :

*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

TABLE 10 – Regression Cluster 5

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	-1.211*** (-1.556, -0.865)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	-0.139 (-0.431, 0.154)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	2.816*** (2.421, 3.210)
Taux_2	14.530*** (8.926, 20.133)
Taux_3	-6.393** (-11.013, -1.774)
Taux_6	-7.222*** (-11.308, -3.137)
Taux_8	-5.179 (-10.694, 0.336)
Taux_9	8.077* (1.203, 14.951)
Taux_10	-14.301*** (-20.666, -7.935)
Taux_12	-7.109** (-12.267, -1.951)
Taux_14	5.201* (0.354, 10.048)
Taux_16	-8.221** (-13.698, -2.745)
Taux_17	-5.657 (-12.161, 0.847)
Taux_18	-6.260* (-11.703, -0.816)
Taux_21	5.805** (1.096, 10.515)
Taux_23	-5.053* (-9.424, -0.682)
Taux_25	6.111* (0.959, 11.264)
Taux_26	-4.629 (-9.617, 0.359)
Taux_29	-9.925*** (-14.729, -5.120)
Taux_30	4.374* (0.395, 8.354)
Actions_2	0.419*** (0.177, 0.661)
Actions_3	0.338** (0.082, 0.595)
Actions_4	0.357*** (0.157, 0.556)
Actions_5	-0.547*** (-0.788, -0.307)
Actions_6	0.439*** (0.216, 0.662)
Actions_7	0.189 (-0.037, 0.414)
Actions_8	-0.181 (-0.372, 0.010)
Actions_9	0.267*** (0.110, 0.423)
Actions_12	0.278*** (0.137, 0.418)
Actions_13	-0.210 (-0.431, 0.010)
Actions_15	0.221** (0.072, 0.369)
Actions_19	-0.293*** (-0.444, -0.141)
Actions_20	0.232** (0.061, 0.403)
Actions_24	0.350*** (0.181, 0.520)
Actions_25	-0.380*** (-0.527, -0.233)
Actions_29	0.120*** (0.052, 0.188)
Constant	1.081*** (0.797, 1.365)
Observations	168
R ²	0.970
Adjusted R ²	0.962

Note :

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

TABLE 11 – Regression Cluster 6

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	−0.487** (−0.823, −0.151)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	−0.297** (−0.530, −0.064)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	1.469*** (1.123, 1.815)
Taux_5	−5.196** (−8.769, −1.624)
Taux_7	−7.008*** (−10.759, −3.257)
Taux_10	−6.237* (−11.506, −0.969)
Taux_11	8.179** (1.538, 14.820)
Taux_12	−7.679** (−12.830, −2.529)
Taux_14	−8.998*** (−13.916, −4.080)
Taux_15	9.225** (3.101, 15.349)
Taux_17	−3.289 (−6.794, 0.216)
Taux_22	−4.383* (−8.328, −0.439)
Taux_23	3.090 (−0.898, 7.078)
Taux_28	2.901** (0.591, 5.210)
Actions_2	0.630*** (0.399, 0.861)
Actions_6	0.405*** (0.286, 0.525)
Actions_12	0.162*** (0.061, 0.263)
Actions_16	−0.175** (−0.297, −0.053)
Actions_18	0.308*** (0.184, 0.432)
Actions_20	−0.190** (−0.333, −0.047)
Actions_21	−0.111 (−0.239, 0.017)
Actions_22	0.150** (0.036, 0.263)
Actions_25	0.121** (0.035, 0.206)
Actions_26	−0.085** (−0.140, −0.030)
Constant	−0.014 (−0.392, 0.363)
Observations	118
R ²	0.941
Adjusted R ²	0.925

Note :

*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

TABLE 12 – Regression Cluster 7

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	−0.920*** (−1.189, −0.651)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	−0.140 (−0.356, 0.077)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	2.476*** (2.086, 2.866)
Taux_2	5.091* (0.588, 9.594)
Taux_4	−6.144*** (−9.028, −3.261)
Taux_7	−10.611*** (−14.862, −6.361)
Taux_8	−4.888* (−9.066, −0.709)
Taux_13	5.261** (1.441, 9.080)
Taux_14	−6.488** (−10.789, −2.187)
Taux_16	−2.702 (−5.992, 0.587)
Taux_18	3.361 (−0.929, 7.651)
Taux_19	−4.927* (−9.206, −0.648)
Taux_21	−2.640 (−5.973, 0.694)
Taux_26	9.656*** (5.780, 13.532)
Taux_27	−6.665*** (−10.241, −3.089)
Actions_2	0.496*** (0.251, 0.740)
Actions_3	0.380*** (0.157, 0.602)
Actions_4	0.234** (0.044, 0.424)
Actions_8	0.125** (0.027, 0.224)
Actions_12	0.093 (−0.014, 0.199)
Actions_15	0.239*** (0.092, 0.386)
Actions_16	−0.200*** (−0.313, −0.087)
Actions_18	0.139* (0.019, 0.260)
Actions_19	−0.246*** (−0.387, −0.105)
Actions_20	0.197*** (0.097, 0.297)
Actions_24	−0.053 (−0.120, 0.014)
Actions_25	0.178*** (0.079, 0.276)
Actions_26	−0.093* (−0.178, −0.007)
Actions_27	0.081* (0.006, 0.156)
Actions_29	−0.091*** (−0.134, −0.049)
Constant	0.571*** (0.291, 0.851)
Observations	165
R ²	0.954
Adjusted R ²	0.944

Note :

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

TABLE 13 – Regression Cluster 8

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	-0.739*** (-1.033, -0.446)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	-0.454*** (-0.682, -0.225)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	1.948*** (1.559, 2.337)
Taux_2	16.858*** (10.551, 23.165)
Taux_3	-12.074*** (-16.918, -7.229)
Taux_5	-4.715 (-9.667, 0.237)
Taux_6	4.992 (-0.369, 10.352)
Taux_7	-9.845*** (-14.414, -5.276)
Taux_9	4.913** (1.236, 8.591)
Taux_11	4.796 (0.013, 9.579)
Taux_12	-6.607** (-11.569, -1.646)
Taux_16	-4.482** (-7.805, -1.158)
Taux_18	5.593*** (2.198, 8.988)
Taux_22	-6.373*** (-9.462, -3.283)
Taux_24	-6.913** (-11.552, -2.275)
Taux_25	4.368 (-0.014, 8.751)
Actions_2	0.713*** (0.501, 0.925)
Actions_4	0.326*** (0.157, 0.495)
Actions_6	0.275** (0.069, 0.482)
Actions_7	-0.306** (-0.515, -0.097)
Actions_8	0.333** (0.083, 0.583)
Actions_9	-0.261* (-0.495, -0.028)
Actions_10	0.242* (0.028, 0.457)
Actions_11	-0.258** (-0.435, -0.081)
Actions_12	0.162* (0.016, 0.308)
Actions_15	0.147** (0.050, 0.243)
Actions_17	-0.241** (-0.393, -0.090)
Actions_18	0.143* (0.025, 0.261)
Actions_22	-0.070** (-0.116, -0.023)
Actions_25	0.043* (0.001, 0.086)
Actions_27	-0.047** (-0.085, -0.009)
Actions_29	0.044** (0.015, 0.072)
Constant	0.458** (0.173, 0.742)
Observations	98
R ²	0.967
Adjusted R ²	0.951

Note :

*p<0.1 ; **p<0.05 ; ***p<0.01

Annexe 8 : Résultat de la régression sur l'ensemble des données

TABLE 14 – Regression sur l'ensemble des données

	<i>Dependent variable :</i>
	BE
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)1	-1.550*** (-1.776, -1.324)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)2	-0.436*** (-0.610, -0.262)
Spline(Actions_1, df = 3, degree = 2)3	3.302*** (2.978, 3.626)
Taux_2	6.788*** (3.905, 9.672)
Taux_3	-4.013*** (-6.568, -1.458)
Taux_5	-4.566*** (-6.634, -2.498)
Taux_7	-5.350*** (-7.838, -2.863)
Taux_8	-2.609* (-5.099, -0.120)
Taux_10	-3.281*** (-5.260, -1.302)
Taux_12	-1.727 (-3.538, 0.083)
Taux_15	-2.382** (-4.223, -0.542)
Taux_17	-3.659*** (-5.373, -1.945)
Taux_22	-2.560*** (-3.924, -1.196)
Taux_26	1.365 (-0.148, 2.877)
Taux_29	-2.536*** (-3.678, -1.395)
Actions_2	0.761*** (0.652, 0.869)
Actions_4	0.328*** (0.228, 0.428)
Actions_5	-0.147** (-0.264, -0.031)
Actions_6	0.140** (0.024, 0.257)
Actions_7	0.155*** (0.066, 0.245)
Actions_10	0.118*** (0.064, 0.172)
Actions_15	0.237*** (0.170, 0.305)
Actions_16	-0.126*** (-0.195, -0.058)
Actions_18	0.044 (-0.002, 0.090)
Actions_21	-0.073** (-0.126, -0.021)
Actions_22	0.073*** (0.030, 0.116)
Constant	1.348*** (1.164, 1.531)
Observations	1,000
R ²	0.908
Adjusted R ²	0.906

Note :

*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

Annexe 10 : Résultats de la régression linéaire par morceaux sur les années de projection 3 et 4

Estimated Break-Point(s) :			
	Est.	St.Err	
psi1.TC_2	0.001		0
psi2.TC_2	0.015		0
Meaningful coefficients of the linear terms:			
	Estimate	Std.Error	t value
(Intercept)	-2,44466	0.03291	-74.274
Actions1	0.21728	0.04543	4.782
U1.TC_2	203.970066	3.29097	61.979
U2.TC_2	-193.67542	3.31652	-58.397

Multiple R-squared	0.953		
Adjusted R-squared	0.9528		

FIGURE 77 – Résultats de la régression du cash flow de Best estimate pour la troisième année de projection

Estimated Break-Point(s) :			
	Est.	St.Err	
psi1.TC_2	-0.004	0.004	
psi2.TC_2	0.011	0.001	
psi3.TC_3	0.083	0.001	
Meaningful coefficients of the linear terms:			
	Estimate	Std.Error	t value
(Intercept)	-1.0534	0.2220	-4.744
Actions1	0.3694	0.1089	3.391
U1.TC_2	65.7436	8.9975	7.307
U2.TC_2	-60.4621	9.1027	-6.642
U3.TC_3	365.2999	14.0150	26.065

Multiple R-squared	0.7554		
Adjusted R-squared	0.7536		

FIGURE 78 – Résultats de la régression du cash flow de Best estimate pour la quatrième année de projection

Annexe 11 :Études du *best estimate* par *cluster* de taux concurrent, fréquence non rapportée au nombre de scénarios par cluster

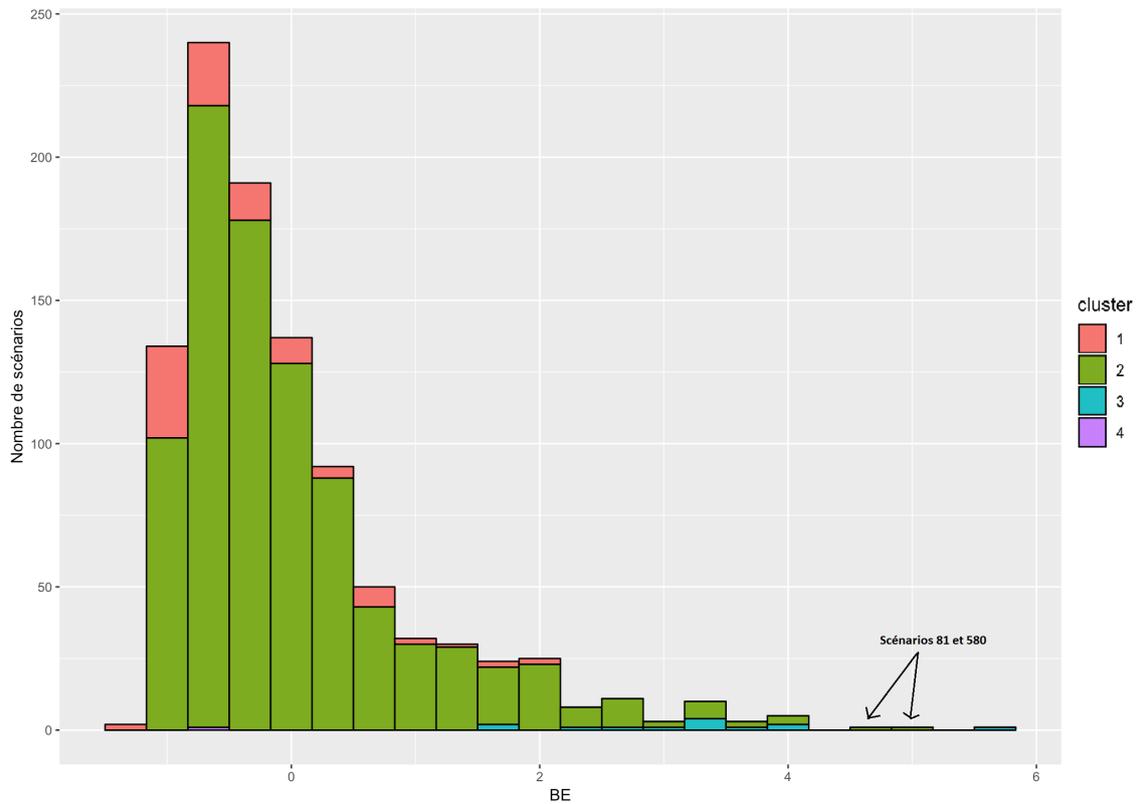


FIGURE 79 – histogramme du *best estimate* par *cluster* de taux concurrent, fréquence absolue

On remarque que certains scénarios appartiennent au *cluster* 2 (en vert) alors que leur BE est dans la partie droite de la queue de distribution. Nous avons isolé les deux scénarios du *cluster* 2, qui ont une valeur de BE normalisée supérieur à 4 sur la figure ci-dessus :

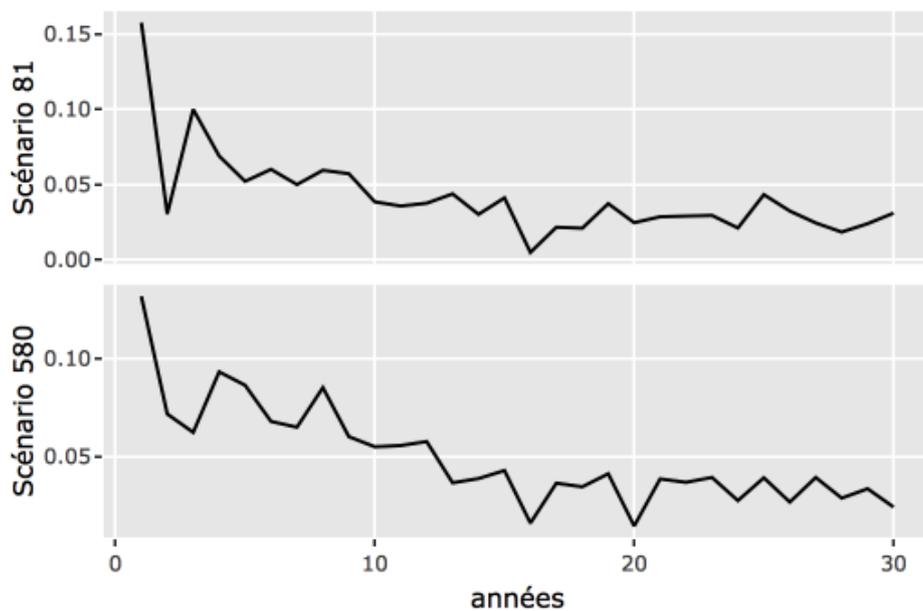


FIGURE 80 – Trajectoire de taux concurrents de deux scénarios extraits du *cluster* 2

On remarque que ces deux scénarios, ont des niveaux élevés de taux concurrents à la première année de projection (au delà de 10%). Finalement, ces deux scénarios ont des comportements similaires aux scénarios du *cluster 3* de la figure 47. L'algorithme DTW place ces scénarios dans le *cluster 2* car en terme de distance ceux-ci sont plus proches du centroïde du *cluster 2* sur les 30 ans de projection mais les premières années de projection montrent bien un comportement plus proches des scénarios du *cluster 3*.

Références

- [1] Alexis Sarda-Espinosa. *Comparing Time-Series Clustering Algorithms in R Using the dtwclust Package*, 2018
- [2] Arthur Charpentier. *Statistique de l'assurance. 3rd cycle*, Université de Rennes 1 et Université de Montréal, 2010
- [3] Romuald Elie. *Calcul Stochastique pour la finance*, Université Paris-Est
- [4] Cosma Shalizi *Distances between Clustering Hierarchical Clustering*, Carnegie Mellon University, 2009
- [5] Arnaud Buzzi. *Approximation du bilan économique sous Solvabilité II via des méthodes d'apprentissage automatique et application à l'ORSA*, mémoire présenté en 2017 devant l'Institut des Actuaire
- [6] Sylvain Detroulleau, Sandrine Mouret. *Modèle ALM : Apport de la Logique Floue dans la modélisation des comportements*, mémoire présenté en 2013 devant l'Institut des Actuaire
- [7] Deelstra G., Janssen J. *Interaction Between Asset Liability Management and Risk Theory, Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 1998, vol. 14, 295-307
- [8] Fédération Française de l'Assurance *Rapport : Les assurances de personnes, données clés*, 2017
- [9] Giorgino T (2009). *Computing and Visualizing Dynamic Time Warping Alignments in R : The dtw Package*. *Journal of Statistical Software*
- [10] Akinwande Michael Olusegun, Hussaini Garba Dikko, Shehu Usman Gulumbe. *Identifying the Limitation of Stepwise Selection for Variable Selection in Regression Analysis*. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*. Vol.4, No. 5, 2015, pp. 414-419
- [11] Altman, D. G. and P. K. Andersen. *Bootstrap investigation of the stability of a Cox regression model*. *Statistics in Medicine* 8 : 771–783.
- [12] Posten H.O. *Robustness of the Two-Sample T-Test*. In : Rasch D., Tiku M.L. (eds) *Robustness of Statistical Methods and Nonparametric Statistics. Theory and Decision Library (Series B : Mathematical and Statistical Methods)*, vol 1. Springer, Dordrecht