Mémoire présenté devant l'Institut du Risk Management pour la validation du cursus à la Formation d'Actuaire de l'Institut du Risk Management et l'admission à l'Institut des actuaires le 2018

Par : Léo HENRY-BIABAUD

Titre :Générateur de scénarios économiques, effets des choix de calibrage et de modèle de taux sur le ratio de solvabilité 2, définition des zones les plus sensibles du best estimate à l'aide du vega

Confidentialité : [x]NON []OUI (Durée : []1an []2 ans)
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise : Groupe Le Conservateur

Nom: Gilles ULRICH

Signature et Cachet :

LES ASSOCIATIONS MUTUELLES LE CONSERVATEUR
Société à forme de mutuelle régie par le code des Assurances
59, rue de la Chaussée d'Antin
CS 41685
75779 Paris Cdx

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Gilles ULRICH

Signature :

Invité :

Nom : Jean-Baptiste Garnier

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature(s) du candidat(s)

Générateur de scénarios économiques, effets des choix de calibrage et de modèle de taux sur le ratio de solvabilité 2, définition des zones les plus sensibles du *best estimate* à l'aide du vega

Mémoire d'actuariat

Les Assurances Mutuelles Le Conservateur

Version 1

24 juillet 2018

Direction Pilotage ALM et Technique

Résumé

mots-clefs : solvabilité 2, calibrage des GSE, best estimate, SCR, LMM, DDLMM, Hull & White, volatilité de Bachelier, volatilité de Black, skew, modèle CEV, shift, modèle de Nelson Siegel Swensson, , modèle de Diebold & Li, correlations inter forwards, modèle de Jarrow Yildirim, caplet inflation, suites de Sobol, Nelder Mead, vega.

Le GSE qui a été construit dans le cadre de ce mémoire et mis en œuvre au Conservateur joue un rôle central dans l'élaboration mais également dans le suivi des unités de compte construites sur la base de produits structurés. La vente de ce type de structure nécessite de la part de l'assureur une compréhension fine de l'ensemble des paramètres qui contribuent à la valorisation de celui-ci. L'analyse des sensibilités, la confrontation des valorisations calculées en interne avec celles des salles de marché nous ont permis de nous aguerrir sur le calibrage du GSE.

Ce mémoire s'intéresse particulièrement au choix du modèle de taux nominaux et à son calibrage dans la norme solvabilité 2. Les objectifs principaux sont d'évaluer la sensibilité du ratio de solvabilité 2 au mode de calibrage et de proposer une méthode pour objectiver les pondérations utilisées dans le processus de calibrage, en fonction notamment de la sensibilité du *best estimate* aux prix de swaptions.

Dans un premier temps nous présentons trois modèles de taux dont la complexité est croissante. Le premier modèle étudié est le modèle de Hull & White à 1 facteur. Nous poursuivons avec le modèle LMM à un facteur (tous les *forwards* sont corrélés à 1) qui possède six paramètres pour répliquer la surface de volatilité ATM. Puis nous finissons avec le DDLMM à 3 facteurs qui possède six paramètres pour calibrer la corrélation *inter forwards* et neuf paramètres pour répliquer la surface de volatilité ATM et OTM. Le mémoire détaille de manière précise le calibrage des corrélations et des volatilités qui sont deux processus distincts.

En ce qui concerne le calibrage des corrélations nous présenterons une approche basée sur l'utilisation d'un historique et d'une méthode de lissage de la courbe des taux. Afin de couvrir l'ensemble des déformations observées sur la courbe dans le passé, deux modèles ont été testés pour le lissage. Nous avons préféré un modèle plus paramétré comme Nelson Siegel Swensson (NSS) plutôt que le modèle de Diebold & Li. Le calibrage des paramètres du modèle NSS s'est révélé être assez délicat, et nous avons dû procéder par méthodologie *grid search* afin d'éviter les problématiques de piégeage créées par les paramètres.

Nous portons par la suite une attention toute particulière au shift paramétrique qui est utilisé dans le DDLMM. Nous montrons l'analogie qu'il y a entre un DDLMM et le modèle CEV, et le rôle qu'il joue dans la réplication du *skew* de volatilité.

Une partie importante du mémoire est consacrée à la réalisation de sensibilités sur les paramètres de calibrage qui sont censés être les plus matériels sur le ratio de solvabilité 2.

Un premier jeu de sensibilités est réalisé sur le choix de la volatilité de référence pour le calcul du SCR. Nous concluons que l'utilisation des volatilités de Black n'est pas adaptée aux déformations qui sont appliquées à la courbe des taux swap pour construire la courbe de taux EIOPA. Nous proposons l'utilisation des volatilités de Bachelier ou volatilités Normales dont la corrélation historique avec le niveau des taux nominaux est plus faible. Des sensibilités sont réalisées dans différents contextes de marché afin de mesurer les impacts liés au choix de l'une ou de l'autre et d'étayer notre proposition.

Une seconde série de sensibilités mesure l'incidence du shift utilisé dans le DDLMM sur le ratio de solvabilité. Les cas présentés montrent que le shift est un paramètre très sensible lorsqu'on évalue le ratio de solvabilité. Le calibrage de ce paramètre doit donc se faire soigneusement. Pour légitimer son niveau, nous proposons de l'objectiver avec les niveaux des volatilités OTM du marché.

Nous montrons que plus un modèle est paramétré plus sa capacité à répliquer les prix de marché est accrue. En fait, l'utilisation d'un modèle de taux peu paramétré nous oblige à sélectionner les zones de la surface de swaption où le *best estimate* est sensible. Afin de nous aider à faire le choix des instruments à utiliser pour le calibrage, nous avons mis en place le calcul du vega de marché d'un portefeuille d'épargne. La technique de calcul s'inspire des méthodes utilisées en salle de marché pour évaluer le vega d'options exotiques. Un ensemble de tests est réalisé sur ce dernier pour évaluer sa robustesse lorsque des déformations sont appliquées à la nappe de volatilité ATM.

L'utilisation du vega permettra de créer des stratégies de couverture plus précises, et de maîtriser la volatilité du *best estimate* et des fonds propres.

Abstract

This paper focuses on the development of an internal risk-neutral ESG, and especially on the choice of a nominal interest rate model and on its adjustments. The main purpose is to evaluate the impact of the calibration method on the solvency 2 ratio and to build a methodology that objectivize financial tools (*swaption*) for which the Best Estimate is the more responsive during the adjustment process.

Three interest rate models, sorted by increasing complexity, are described. First, the Hull and White model that includes two parameters and is well-known and commonly used. Then, we will deal with the LMM model that possesses one factor (all forwards are correlated to one) and six parameters to replicate the surface of ATM volatility. Eventually, the last model we will tackle, the DDLMM, has six parameters to calibrate the inter forwards correlation, and nine to replicate the surface of ATM and OTM volatilities. The paper successively details the calibration of the correlations and of the volatilities, which are two distinct processes.

Concerning the calibration of the correlation matrix, an approach established on the use of historical zero-coupon interest rates and on an interest rate curve smoothing method will be presented. In order to cover all of the fluctuations observed on the curve in the past, two models have been tested for the smoothing process. The more parametrized model, Nelson Siegel Swensson's (NSS), has been preferred to the Diebold and Li's one. The calibration of NSS parameters was difficult and the grid search method appeared useful to avoid trapping issues generated by the parameters.

The paper then highlights the parametric shift used in the DDLMM, the analogy between the DDLMM and the CEV model, and the role it plays in the replication of volatility skew.

A substantial part of the paper is dedicated to the realization of sensitivity analyses on the calibration parameters which are supposed to be the more significant on the solvency 2 ratio.

A first level of sensitivity analyses is made on the choice of the reference volatility for the calculation of the SCR. The conclusion is that the use of Black's volatilities on the market is not suitable for the deformations applied to the swap rate curve when building the EIOPA curve. The use of Bachelier's volatilities (also known as normal volatilities), which show a smaller historical correlation with nominal rates, is preferred. Sensitivity tests are made on the solvency 2 ratio, for each available methodology, and in several financial contexts.

A second level of sensitivity analyses is made on the impact of the shift used on the Solvency 2 ratio. It shows that the parameters calibration must be done very carefully. In order to legitimate its level, objectivizing it with the rate of market OTM volatilities appears to be a great solution.

The paper shows that the more parametrized a model is, the more its capacity of market price replication increases. Indeed, the use of a poorly parametrized model, forces to make choices, arbitrations in the areas where the best estimate is the more sensitive. In order to help choosing instruments to be used in the calibration process on the long run, the calculation of a market portfolio vega's has been realized. The

calculation is inspired by the trading rooms methodology to evaluate exotic option's vega. A series of tests is realized to evaluate its strength when deformations are applied to the ATM volatility spread.

The use of the vega should permit the building of more precise covering strategies, which in the long run should give to the insurers the possibility to master the volatility of the best estimate.

1 INTRODUCTION

Le générateur de scénarios économiques (GSE) est l'un des principaux éléments du pilier 1 dans Solvabilité 2 chez les assureurs vie. Trois approches sont possibles pour ces derniers : acheter des tables, acheter un GSE à un fournisseur et développer un GSE en interne, option apportant le plus de flexibilité aux assureurs. Ce mémoire s'intéresse à la construction d'un GSE interne, et plus particulièrement au choix du modèle de taux nominaux et à son calibrage. Nous étudierons notamment l'impact du modèle de taux sur le *Best Estimate* et le SCR, et développerons une méthodologie d'objectivation des poids utilisées durant le calibrage.

La réglementation actuelle donne très peu de directive sur le choix des modèles à utiliser dans le cadre d'un GSE. Par contre, elle nous impose d'adapter la forme de la courbe des taux avec *l'ultimate forward* rate et le *volatility adjustment* sans nous préciser les modalités de calibrage. L'objectif du mémoire sera aussi de montrer les différentes méthodologies de calibrage qui peuvent être utilisées, notamment en ce qui concerne le choix d'une mesure de volatilité appropriée et les conséquences de ces choix sur le ratio de solvabilité de l'entreprise. Dans le cadre de l'exercice, nous ne nous limiterons pas à l'étude du « *Best Estimate* » mais à l'ensemble de la chaîne qui permet d'aboutir au calcul du SCR, des fonds propres et enfin du ratio de solvabilité.

La structure complexe du passif, notamment sa sensibilité à la volatilité peut aussi être objectivée lors du calibrage. Dans ce cadre, nous essayerons de calculer le vega[1] d'un portefeuille de passif afin d'affiner le choix des instruments à terme utilisés pour le calibrage.

Enfin, nous espérons que ces travaux répondront en partie aux demandes détaillées par l'ACPR sur les générateurs de scénarios économiques lors de la conférence du 8 juin 2018 (cf. annexes).

[1] Le vega représente la sensibilité du prix du *best estimate* par rapport à une variation de la volatilité implicite du sous-jacent auquel elle fait référence.

Sommaire :

PRESUME **2**

1 INTRODUCTION **5**

2 STRUCTURE DU GSE RISQUE NEUTRE **9**

3 INPUT DU MODELE DE TAUX **12**

3.1 COURBE DE TAUX DEFINITION 12
3.2 COURBE SWAP (COURBE INTERBANCAIRE) 12
3.3 LES FORMES DE COURBES DES TAUX 12

4 GENERATION DES FACTEURS D'ACTUALISATION OU DES TAUX ZERO COUPON **14**

4.1 GENERATION DES FORWARD 1M 16
4.2 COURBE EIOPA ET TAUX FORWARD 16

5 PRESENTATION DES MODELES DE TAUX **18**

5.1 HULL & WHITE 18
5.2 MODELE DE TAUX LMM A 1 FACTEUR 20
5.2.1 Présentation du modèle 20
5.2.2 Calibration du modèle 27
5.2.3 Détermination de la forme de volatilité 28
5.3 DEFLATEUR 28
5.3.1 Déflateur sous la probabilité risque neutre 29
5.3.2 Déflateur sous la probabilité spot Libor 29
5.3.3 LMM et taux négatifs 30
5.4 MODELE DE TAUX LMM + SHIFT A N FACTEURS 30
5.4.1 Présentation du modèle 30
5.4.2 Calibration des corrélations inter forwards 31
5.4.3 Calibration de la volatilité/prise en compte du smile/skew de volatilité 40
5.5 MODELE DE TAUX LMM + SHIFT A N FACTEURS + VOLATILITE STOCHASTIQUE. 48

6 MODELES ACTION ET IMMOBILIER **49**

6.1 MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE 49
6.2 TESTS DE COMPATIBILITE ENTRE B&S ET MONTE CARLO 51

7 MODELE DE TAUX REELS **53**

7.1 UTILISATION DE HULL & WHITE POUR SIMULER LES TAUX REELS 54
7.2 L'INDICE INFLATION 55
7.3 RISQUE NEUTRALITE DE L'INFLATION ET DES TAUX REELS 56
7.4 CALIBRATION DE LA VOLATILITE DE HULL & WHITE 56

8 SOURCE D'ALÉA **59**

8.1 RAND C++ 59

8.2 MERSENNE TWISTER 59
8.3 SUITES DE SOBOL 60
8.4 SUITES DE SOBOL & PONTS BROWNIENS 61
8.5 RESULTATS 62

9 ALGORITHME D'OPTIMISATION 66

10 CORRELATIONS ET LOI NORMALE MULTIVARIEE 67

10.1 CALCUL DES CORRELATIONS 68

11 OUTILS DE TEST DES SCENARIOS 69

11.1 TESTS MARTINGALES 69
11.2 TESTS DE REPLICATION DES PRODUITS DERIVES 73

12 SENSIBILITES DU RATIO DE SOLVABILITE 2 AU MODE DE CALIBRAGE DU MODELE DE TAUX 75

12.1 PRESENTATION DES HYPOTHESES MAJEURES UTILISEES DANS LE CADRE DU CALCUL DU RATIO DE SOLVABILITE 2 75
12.1.1 Provisions mathématiques 75
12.1.2 Actif 76
12.1.3 Bilan S1 et S2 76
12.1.4 SCR et ratio 77
12.2 RAPPEL DE LA REGLEMENTATION SUR LE CALIBRAGE DES GSE 78
12.3 SENSIBILITE AU CHOIX DE LA VOLATILITE DE REFERENCE 79
12.3.1 Environnement économique stable 82
12.3.2 Environnement économique stressé 83
12.4 CHOIX DE LA COURBE DE REFERENCE 84
12.5 CONSERVATION DU PRIX DE MARCHE VERSUS CONSERVATION DE LA VOLATILITE NORMALE DE MARCHE 85
12.6 EFFET DU SHIFT SUR LE RATIO 86
12.7 SENSIBILITES DU RATIO DE SOLVABILITE 2 AU MODELE DE TAUX 91

13 DETERMINATION DU VEGA D'UN PORTEFEUILLE EPARGNE 94

13.1 LES DIFFERENTES APPROCHES 94
13.2 SENSIBILITE DU BE A UNE PERTURBATION (TROISIEME APPROCHE) 94
13.3 RESULTATS NUMERIQUES ET TESTS 97
13.3.1 Résultats numériques 97
13.3.2 Tests d'adéquation du vega 98
13.3.3 Prise en compte du vega dans le calibrage 101
13.3.4 Sensibilités du vega 103

14 CONCLUSION 104

15 BIBLIOGRAPHIE 105

16 ANNEXES 106

16.1 CONFERENCE ACPR 8 JUIN 2018 106
16.2 RESULTATS DES CALIBRAGES 107
16.2.1 Calibrages du test 1 (choix de la volatilité Normale) 107
16.2.2 Calibrages du test 2 (choix de la volatilité Black) 109

16.2.3 Calibrages du test 3 (choix de la volatilité Normale, VA=100bp) 111
16.2.4 Calibrages du test 4 (choix de la volatilité Black, VA=100bp)..... 112

Lexique:

LMM : *Libor Market Model* (modèle de taux d'intérêts)

DDLMM: Displaced Diffusion Libor Market Model (modèle de taux d'intérêt)

HW : *Hull and White* (modèle de taux d'intérêt)

VA : *Volatility Adjustment (correction pour volatilité)*

UFR: *Ultimate Forward Rate*

SCR: Solvency *Capital Requirement*

ESG, GSE : Générateur de Scénarios Économiques

BE: *Best Estimate*

ORSA: *Own Risk and Solvency Assessment*

ZC: Zéro Coupon

NSS: Nelson Siegel Swensson

ATM: *At The Money*

OTM: *Out of The Money*

BS: Black and Scholes

MT: Mersenne Twister

S2: Solvency 2

VAN : Valeur Actuelle Nette

MC : Simulations de Monte Carlo

Confidentiel

2 STRUCTURE DU GSE RISQUE NEUTRE

Nous allons tout d'abord définir le rôle du générateur au sein d'une compagnie d'assurance vie. Dans le cadre Solvabilité 2 et notamment dans le pilier 1, le générateur a une place centrale puisque dans le contexte de la formule standard, il définira l'évolution des variables économiques utilisées pour valoriser l'ensemble des éléments du bilan en présence d'options et de garanties. La valorisation du passif ou encore *best estimate* est le pendant des provisions techniques en norme solvabilité 1.

La valorisation du *best estimate* est le résultat de la combinaison du générateur et du modèle de projection actif-passif, qui sert à établir l'échéancier des flux d'actif et de passif. Ces flux sont fonction d'un contexte contenu notamment au sein des tables stochastiques produites par le GSE.

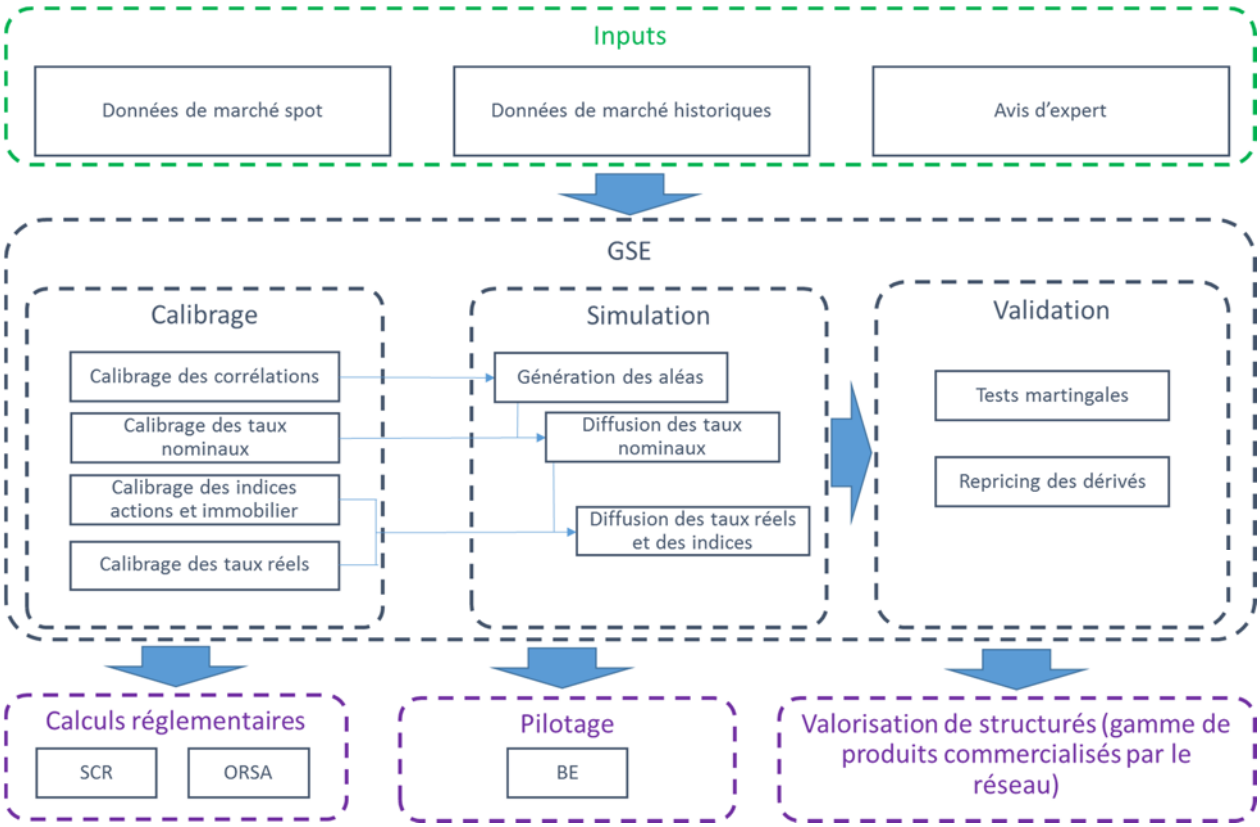
Les modèles actif-passif doivent d'une part, tenir compte des spécificités des portefeuilles d'épargne sur le plan biométrique et comportemental et d'autre part, respecter les contraintes contractuelles et réglementaires. Le besoin de capital ou SCR s'obtient en réalisant un nombre conséquent de sensibilités sur les différents postes du bilan, afin d'évaluer au mieux l'ensemble des risques à la charge de l'assureur. Dans un second temps, des matrices de corrélation portant sur les différents risques permettent d'estimer l'exigence de fonds propres.

Le Conservateur utilise également son GSE dans l'élaboration mais également dans le suivi des unités de compte construites sur la base de produits structurés. La vente de produits complexes nécessite de la part de l'assureur une compréhension fine de l'ensemble des paramètres qui contribuent à la valorisation de celui-ci. L'analyse des sensibilités, la confrontation des valorisations calculées en interne avec celles des salles de marché et des doubles valorisateurs[2] nous ont permis de nous aguerrir sur le calibrage du GSE. En effet, un écart de prix de quelques pourcent peut très vite s'observer si la volatilité n'a pas été calibrée en accord avec les niveaux des *strikes* à la monnaie (ATM) ou en dehors de la monnaie (OTM) de la structure que l'on cherche à valoriser. Cette pratique nous a appris qu'un calibrage sur les *strikes* ATM était souvent très insuffisant pour parvenir à répliquer correctement les prix de structures comportant différents niveaux de strike.

Des évolutions ont été apportées au GSE Conservateur ces dernières années pour répondre au besoin de valorisation et de compréhension des unités de compte structurées. Le *libor market model* avec déplacement ou DDLMM est la dernière version que nous utilisons actuellement pour l'évaluation des unités de compte structurées. Le passage du modèle Hull and White (HW) au DDLMM a amélioré assez fortement notre capacité de réplication des prix de marché. Ce mémoire va essayer de répondre aux questions suivantes : est-il nécessaire d'utiliser des modèles très paramétrés comme le DDLMM pour évaluer le *best estimate ?* Un modèle peu paramétré comme le HW suffit-il ?

[2] La réglementation assurance impose une double valorisation de ce type de support en unité de compte

Le schéma ci-après présente la structure générale du GSE qui a été construit :



Le premier encadré (vert) présente les trois types d'input utilisés par le GSE :

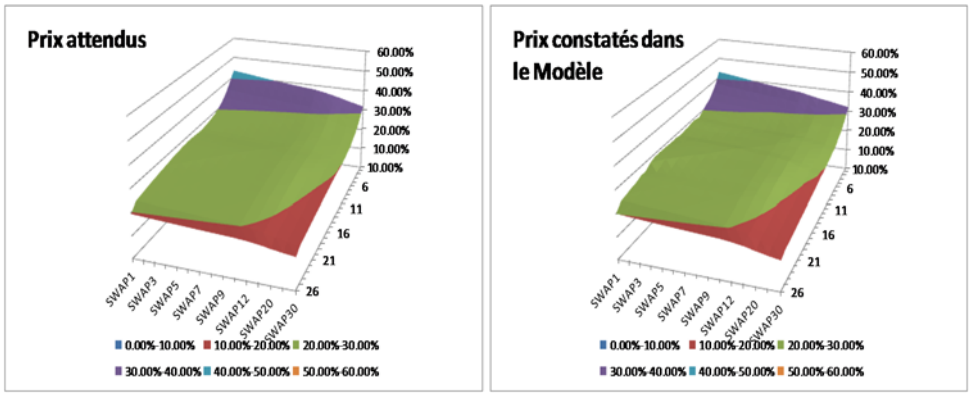
- Des données de marché spot afin d'être risque neutre (la notion de risque neutralité sera développée plus après),
- Des données de marché historiques (certains paramètres peuvent être calibrés sur historique). Exemple : afin de conserver des évolutions cohérentes avec l'historique, les classes d'actifs seront diffusées dans le temps avec une matrice de corrélation basée sur un historique d'environ 10 ans,
- Des paramètres à dire d'expert.

Le deuxième encadré représente le cœur du GSE, décomposé en trois modules :

- Calibrage : modules permettant d'objectiver la valeur des paramètres du GSE,
- Simulation : modules produisant la table de scénarios économiques à partir des résultats du module de calibrage,
- Validation : module vérifiant certaines propriétés mathématiques et financières des tables de scénarios économiques.

Confidentiel

Remarque : le repricing de dérivés consiste à comparer les prix de marché de dérivés à ceux recalculés à partir de la table de scénarios économiques.



Exemple : comparaison de la nappe de volatilité des swaptions

Au sein du module de simulation, chaque classe d'actifs est diffusée avec un modèle spécifique :

1. Un brownien géométrique pour les processus action et immobilier avec une structure par termes de la volatilité,
2. Les modèles LMM 1 facteur, HW 1 facteur, ou LMM *shifté* à n facteurs pour la courbe des taux nominaux,
3. Le modèle de Hull & White 1 facteur pour la courbe des taux réels.

Remarque : De nombreux autres choix de modèles peuvent être effectués. Ceux précités représentent cependant le spectre des modèles communément employés par les praticiens.

Principaux paramètres à définir :

Actifs	Paramètres Risque neutre
Taux nominaux	• Volatilités implicites des swaptions (*black* ou normales) • Courbe des taux *forwards* euro • *Volatility Adjustment* et *Credit Risk Adjustment* • UFR • Corrélation inter *forwards* (si le modèle le permet)
Taux Réels	• Volatilités historiques des taux réels • Prix de Cap inflation • Taux zéro coupon inflation et zéro coupon nominaux (pour la construction de la courbe des taux réels en t=0)
Immobilier	• Volatilités historiques (utilisation d'un indice immobilier représentatif du portefeuille détenu)
Inflation	• Déduite des taux nominaux et des taux réels
Corrélations	• Calcul sur un historique
Actions	• Volatilités implicites des call et des put • Puis convergence vers une volatilité historique

Confidentiel

3 INPUT DU MODELE DE TAUX

3.1 COURBE DE TAUX DEFINITION

La structure par terme des taux d'intérêt (ou courbe des taux ou encore gamme des taux) est la fonction qui, à une date donnée et pour chaque maturité en abscisse, indique le niveau du taux d'intérêt associé en ordonnée.

3.2 COURBE SWAP (COURBE INTERBANCAIRE)

Les taux monétaires (EURIBOR) ainsi que les taux de swaps annuels qui sont les instruments liquides et observables constituent l'input principal qui sera utilisé pour déterminer les taux d'actualisation ainsi que les taux *forwards*.

Le taux de swap :

Un swap standard est caractérisé par :

- L'échange d'une patte (ou jambe) fixe dont les paiements dépendent d'un taux fixe et d'une patte variable dont les paiements dépendent d'un taux variable.
- Un montant principal constant tout au long de la vie du swap.
- Enfin, la maturité du taux variable est identique à la durée entre deux paiements de la patte variable.
- La valeur d'un swap standard de montant nominal N est égale à la somme :
    - d'une obligation à taux fixe de maturité identique à celle du swap et de même montant nominal que le swap ;
    - moins le montant nominal du swap.
- A une date t donnée, le taux fixe est déterminé de telle façon que la valeur du swap soit égale à 0.
- Ce taux fixe est appelé taux de swap. C'est ainsi que sont cotés les swaps.

La courbe swap est construite à partir d'un panier d'instruments comprenant :

- Les taux du marché monétaire, typiquement les taux Euribor en zone Euro. Ils sont généralement utilisés pour les maturités allant de 1 jour à 9 mois. Ce sont des taux linéaires exprimés en base Exact/360.
- Les contrats futurs sur taux d'intérêt, typiquement les futures sur Euribor 3 mois en zone Euro. Ils servent à reconstituer la courbe des taux sur le segment allant de 6 mois à 2 ou 3 ans.
- Les swaps standards typiquement les swaps standards Euribor 3 mois ou 6 mois en zone Euro. Ils servent à reconstituer la courbe pour les maturités supérieures à 2 ou 3 ans.

3.3 LES FORMES DE COURBES DES TAUX

La courbe des taux prend, en général, une des cinq formes suivantes en fonction des évènements de marché :

- quasi-plate,
- croissante,
- décroissante,

- décroissante sur le court terme, puis croissante,
- croissante sur le court terme, puis décroissante.

La forme croissante est la plus couramment constatée.

4 GENERATION DES FACTEURS D'ACTUALISATION OU DES TAUX ZERO COUPON

Définition du taux zéro-coupon

Il est implicitement défini par la relation suivante :

$$P(0,t) = \frac{1}{[1+R(0,t)]^t}$$

Où :

- $P(0,t)$: prix de marché à la date 0 d'une obligation zéro-coupon délivrant 1 euro à la date t. On appelle aussi $P(0,t)$, le facteur d'actualisation en 0 pour la maturité t.

- R(0,t) est le taux de rendement en 0 de l'obligation zéro-coupon délivrant 1 euro en t. R(0,t) est aussi le taux zéro-coupon en 0 de maturité t.

Nota Bene : les concepts de taux de rendement à maturité et de taux zéro-coupon sont identiques pour des obligations zéro-coupon (appelées *strips*).

Cette étape consiste à construire une courbe qui permettra de déterminer pour chaque date future le facteur d'actualisation. Pour construire cette courbe, nous utiliserons l'instrument monétaire pour la période inférieure à 1Y et les taux de swap sur la partie longue.

1. La transformation des taux monétaires en taux d'actualisation est directe

Les taux Euribor sont des taux monétaires en base Exact/360, à convertir en taux zéro coupon en base Exact / 365.

On en déduit l'expression du facteur d'actualisation :

$$P(t_0,t_n) = \frac{1}{1+r_n \times \frac{t_n - t_0}{360}}$$

r_n étant le taux monétaire qui court entre t=0 et t=n, pour ces taux la norme pour compter les jours est « exact/360 ».

2. La transformation des taux de swaps en taux d'actualisation

Les taux de swaps sont des taux de rendement au pair. Cela provient directement de la formule d'évaluation d'un swap.

Soit $PV_{fixe}(t)$ et $PV_{var}(t)$ la valeurs et t des jambres fixes et variables d'un swap de maturité M, de tenor du taux variable X mois, le strike de la jambe fixe K.

Alors :

$$P(0,t) = \frac{1}{\left(1+R(0,t)\right)^t}$$

$$PV_{fixe}(0) = K \sum_{t=1}^{M} \times P(0,t)$$

$$PV_{var}(0) = \sum_{k=1}^{M \times \frac{12}{X}} \frac{X}{12} \times L(0, t_{k-1}, t_k) \times P(0, t_k), avec\ t_k = k \times \frac{X}{12}$$

Remarque : généralement, la jambe fixe paie annuellement.

En simplifiant, le taux de swap K de maturité n vu en zéro est calculé comme suit (en supposant le tenor du taux swap égal à un an) :

$$\frac{K}{1 + R(0,1)} + \frac{K}{(1 + R(0,2))^2} + \ldots + \frac{1 + K}{(1 + R(0,n))^n} = 1$$

D'où

$$K = \frac{\left(1 - \frac{1}{(1 + R(0,n))^n}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + R(0,i)^i}}$$

L'idée consiste donc à déterminer de proche en proche les taux zéro-coupons :

- Connaissant le taux zéro-coupon à 1 an, on en déduit le taux zéro-coupon à 2 ans à partir du taux de swap 2 ans.
- Puis, le taux zéro-coupon à 3 ans à partir du taux de swap 3 ans ...

Exemple :

soit $P(0,n)$ le facteur recherché
alors:

$$1 = \mathrm{K} \times \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1} P(0,i) + (1 + \mathrm{K}) \times P(0,n)$$

et

$$P(0,n) = \frac{1 - \mathrm{K} \times \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1} P(0,i)}{(1 + \mathrm{K})}$$

Où $P(0,i)$ est connu quelque soit $\mathrm{i} < n$.
et K est le coupon fixe d'un swap de maturité n

On se retrouve ainsi avec une série de taux zéro-coupon pour les maturités correspondant aux maturités des instruments du panier. Il faut ensuite raccorder ces points pour obtenir une courbe continue. Les méthodes d'interpolation (linéaire, cubique et paramétrique) peuvent être utilisées.

4.1 GENERATION DES FORWARD 1M

Définition du taux *forward* :

Le taux *forward* (ou taux *forward* zéro-coupon) F(t,x,y-x), déterminé en t, démarrant en x et d'échéance y, est défini par :

$$F(t,x,y-x) = \left[\frac{(1+R(t,y))^{y-t}}{(1+R(t,x))^{x-t}}\right]^{\frac{1}{y-x}} - 1$$

Avec :

R(t,x): taux de rendement en t de l'obligation zéro coupon délivrant 1 euro en x.

Il existe une variante du taux *forward* pour prendre en compte les coupons intermédiaires :

Soit fwd le taux *forward* vu de t=0 d'un instrument payant n flux entre les dates t_{dep} et t_{fin} alors :

$$fwd(0,t_{dep},t_{fin}) = \frac{P(0,t_{dep}) - P(0,t_{fin})}{\sum_{i=dep+1}^{fin} P(0,t_i)}$$

Définition du taux forward instantané :

Il s'agit d'un taux *forward* particulier défini comme suit :

$$f(t,x) = \lim_{y-x\to 0} F(t,x,y-x)$$

Il s'agit concrètement du taux *forward* déterminé en t, démarrant en x et finissant un instant (infiniment petit) plus tard.

Nota Bene: f(t,t) = r(t), r(t) étant connu comme le taux court, c'est-à-dire le taux en t finissant un instant plus tard.

Différence entre une courbe de taux *forwards* classique et la courbe des taux *forwards* instantanés :

Pour la courbe des taux *forwards* instantanés, le paramètre qui varie est le paramètre x. A chaque valeur de x dans le futur correspond donc la valeur du taux *forward* instantané à cette date. La courbe tracée n'est donc pas une courbe par maturité des taux, celle-ci étant toujours infinitésimale.

Au contraire, pour une courbe des taux *forwards* classique, le paramètre qui bouge est le paramètre z=y-x, x étant fixé. Dans ce cas précis, on retrouve une véritable courbe des taux par maturité.

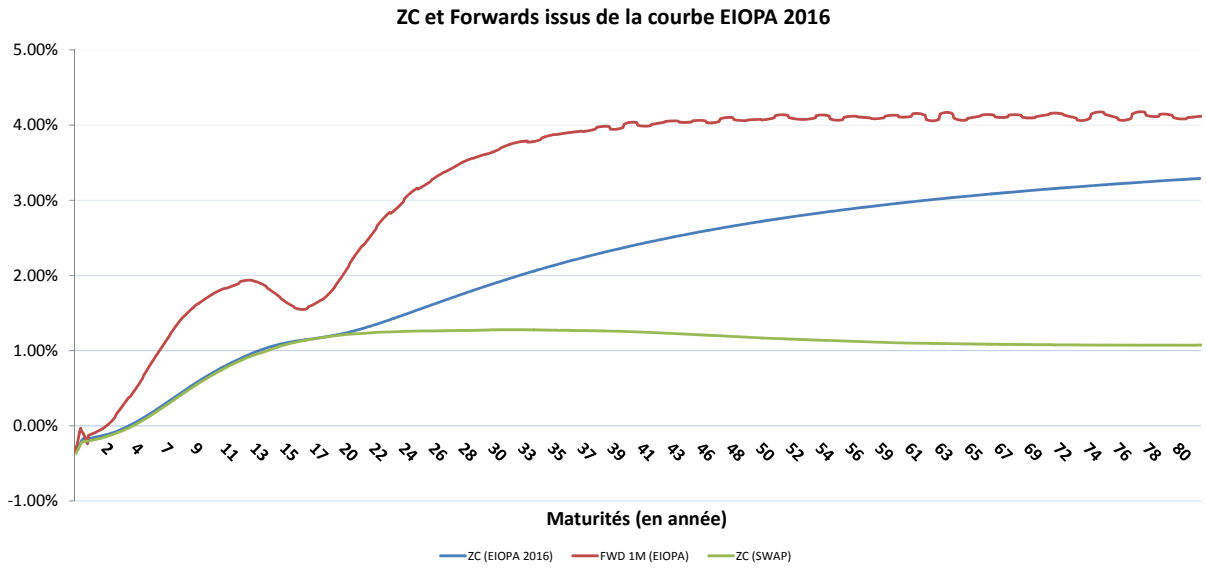
4.2 COURBE EIOPA ET TAUX FORWARD

Les spécifications S2 proposent une courbe modifiée pour valoriser les passifs et les actifs. La courbe zéro coupon S2 intègre une prime d'illiquidité et converge vers un taux long (UFR). De telles

transformations ne sont pas neutres, les implications sur les taux *forwards* sont visibles sur le graphique ci-dessous :

Le graphique ci-dessous représente les trois courbes :

- En bleu, la courbe des taux zéro-coupon fournie par l'EIOPA,
- En vert, la courbe des taux zéro-coupon issue de la courbe des taux SWAP du marché,
- En rouge, la courbe des taux *forward* 1M issue de la courbe des taux zéro-coupon EIOPA.



5 PRESENTATION DES MODELES DE TAUX

Afin d'étudier la sensibilité du ratio Solvabilité 2 au modèle de taux nominaux, on présente trois modèles de taux dont la complexité mathématique est croissante.

5.1 HULL & WHITE

Le modèle de Vacisek natif ne permet pas de répliquer correctement la courbe initiale (dans notre cas, la courbe EIOPA des taux nominaux). Pour pallier cela, un autre modèle a été proposé par Hull & White[3], qui permet de répliquer la courbe initiale car la calibration de celle-ci est inhérente au modèle.

Pour toutes les dates $0 \leq t \leq T$, on note $P_n(t,T)$ le prix en t d'un zéro-coupon.

Le modèle HW est issu du modèle de Heath Jarrow Morton, dont la diffusion risque neutre des prix de zéro-coupon est spécifiée ci-après :

$$\frac{dP_n(s,T)}{P_n(s,T)} = r_s ds + \Gamma(s,T) dW_s$$

$$\text{avec } \Gamma(s,T) \text{ , la volatilité du prix d'un zéro} - \text{coupon}$$

En posant : $f(t,x) = \ln(x)$ et en appliquant la formule d'Itô

$$d\log P_n(s,T) = \frac{dP_n(s,T)}{P_n(s,T)} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{P_n(s,T)^2}\right)(\Gamma(s,T)P_n(s,T))^2 ds$$

Soit :

$$d\log P_n(s,T) = r_s ds + \Gamma(s,T) dW_s - \frac{1}{2}\Gamma(s,T)^2 ds$$

En intégrant entre 0 et t on obtient :

$$LogP_n(t,T) - LogP_n(0,T) = \int_0^t r_s ds + \Gamma(s,T) dW_s - \frac{1}{2}\Gamma(s,T)^2 ds$$

$$(1) \quad \frac{P_n(t,T)}{P_n(0,T)} = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s,T) dW_s \quad - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma(s,T)^2 ds\right)$$

$$on\ a\ aussi:$$

$$(2) \quad \frac{P_n(t,t)}{P_n(0,t)} = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s,t) dW_s \quad - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma(s,t)^2 ds\right)$$

[3] Voir Hull, J. C., and White, A., Pricing Interest rate derivative securities, 1990

En divisant le terme (1) par le terme (2) on obtient la relation suivante (cela nous permet d'éliminer le taux court de l'équation) :

$$P_n(t,T) = \frac{P_n(0,T)}{P_n(0,t)} \exp\left(\int_0^t \Gamma(s,T) - \Gamma(s,t) dW_s \quad - \frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(s,T)^2 - \Gamma(s,t)^2 ds \right)$$

En remplaçant $\Gamma(s,T)$ par $\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$ on retrouve le modèle de Hull & White :

Le modèle de Hull-White consiste à spécifier la forme de volatilité des prix de zéro coupon.

- σ est un facteur de volatilité de prix d'obligation,
- a est le coefficient de retour à la moyenne, il représente l'amortissement d'un choc de taux en fonction de la maturité du zéro coupon (il est de l'ordre de quelque pour-cent et peut être nul, voire négatif).

$$P_n(t,T) = \frac{P_n(0,T)}{P_n(0,t)} \exp\left(\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^3}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)\left(\left(1 - e^{-2at}\right)\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) + 2\left(1 - e^{-at}\right)^2\right)\right)$$

Cf. Martellini, L., Priaulet, P., Produits de Taux d'Intérêt : Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture.

On voit apparaître le terme $\int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$, qui est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. On peut établir le lien de récurrence suivant, en posant :

$$OrnU(t_n) = \int_0^{t_n} e^{-a(t_n - s)} dW_s = e^{-a(t_n - t_{n-1})} OrnU(t_{n-1}) + \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t_n - t_{n-1})}}{2a}}\, \varepsilon_n$$

On obtient cette expression en considérant que l'intégrale d'une fonction multipliée par un brownien suit une loi normale centrée de variance égale à l'intégrale du carré de la fonction.

Pour retrouver à une date donnée l'ensemble des prix des zéro coupons, on peut réécrire la formulation ci-dessous comme suit :

$$P_n(t_n, t_n + M) = \frac{P_n(0, t_n + M)}{P_n(0, t_n)} \exp\left(\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) OrnU(t_n) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^3}\left(1 - e^{-a(M)}\right)\left(\left(1 - e^{-2at_n}\right)\left(1 - e^{-a(M)}\right) + 2\left(1 - e^{-at_n}\right)^2\right)\right)$$

Où M correspond à la durée de l'obligation.

Dans l'univers risque neutre, le déflateur correspond à l'expression suivante :

$$D_n(0,t) = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$$

$$D_n(t_{n-1},t_n) = \exp\left(-\int_{t_{n-1}}^{t_n} r_s ds\right) \approx P_r(t_{n-1},t_n)$$

Dans le cadre de la modélisation des taux nominaux, nous considérons la courbe des taux réels au même titre qu'une courbe de taux nominaux. De ce fait, la discrétisation et la modélisation sont directes.

5.2 MODELE DE TAUX LMM A 1 FACTEUR

5.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de HW (cf section 5.1) présente deux inconvénients : il est fondé sur les taux *forwards* instantanés qui ne sont pas observables directement sur le marché et son calibrage est délicat. Ces remarques ont conduit BRACE, GATAREK et MUSIELA[4] à proposer une alternative, connue sous le nom de modèle marché LIBOR (ou modèle BGM). Ce modèle est exprimé en termes de taux *forward* observables sur le marché.

Dans un premier temps le modèle aura un seul facteur, ce qui signifie que les mouvements modélisés seront essentiellement des translations de courbe.

Principe du modèle :

Pour toutes dates $0 \leq t \leq T$, on note $P_n(t,T)$ le prix (exprimé en euros) à la date t d'un zéro-coupon délivrant un euro en date T.

Notons $(T_k)_{k\in[\![0,M]\!]}$ une famille croissante de dates ($T_{-1} := 0$), de laquelle sont déduit des couples (maturité, date d'expiration) (T_{k-1}, T_k) d'une famille de M taux forward. Pour tout $k \in [\![0,M]\!]$, $\tau_k := T_k - T_{k-1}$ est la fraction d'année correspondante à l'intervalle$[T_{k-1}, T_k]$. L'unité utilisée pour les dates $(T_k)_{k\in[\![0,M]\!]}$ sera le temps exprimé en années à partir de la date actuelle (à savoir0).

Pour tout $k \in [\![1,M]\!]$, pour tout $t \in [0, T_{k-1}]$, $F_k(t) := F(t; T_{k-1}, T_k)$ est le taux *forward* pour la période $[T_{k-1}, T_k]$ (ce taux est « vivant », c'est-à-dire bien défini, pour $t \in [0, T_{k-1}]$).

Remarque : les taux *forwards* précédents sont exprimés en composition simple. Ils s'écrivent simplement en fonction des prix zéro-coupons. En effet, pour tout $k \in [\![1,M]\!]$,

$$F_k(t) = \frac{1}{\tau_k}\frac{1}{P_n(t,T_k)}\left(P_n(t,T_{k-1}) - P_n(t,T_k)\right)$$

- [4] Brace, A., Musiela, M., Gatarek, D, The market model of interest rate dynamics. Mathematical Finance, 1997

Ainsi, $F_k(t)$ s'écrit comme le prix d'un actif échangeable sur le marché (portefeuille de deux zéro-coupons sur un nominal $\frac{1}{\tau_k}$) divisé par le prix du zéro-coupon de maturité T_k.

A fortiori, sous la probabilité *forward* neutre de maturité T_k (mesure martingale équivalente associée au numéraire $P_n(.,T_k)$), $F_k(t)$ est donc une martingale, donc sa dynamique ne comporte pas de terme de dérive. L'hypothèse du modèle LMM est de postuler une dynamique log-normale des taux forward sous leur probabilité *forward* neutre respective.

Sous la probabilité *forward* neutre de maturité T_k (que l'on notera Q^k), $\left(F_k\ (t)\right)_{t\ \in\ [0,T_{k-1}]}$ est une martingale et sa dynamique s'écrit :

$$dF_k(t) = \sigma_k\ (t)F_k\ (t)dZ_k(t)$$

Où Z_k est un mouvement brownien uni - dimensionnel sous Q^k, σ_k une fonction déterministe du temps définie sur l'intervalle $[0, T_{k-1}]$.

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dz_k(t)$$
$$soit : \frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sigma_k(t)dz_k(t)$$
$$d\ln F_k(t) = \frac{dF_k(t)}{F_k(t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{dF_k(t)}{F_k(t)}\right)^2 \quad Avec\ Ito\ < dz_k(t) : dz_k(t) > = dt$$
$$d\ln F_k(t) = \sigma_k(t)dz_k(t) - \frac{1}{2}\sigma_k(t)^2 dt$$
$$\ln F_k(T) - \ln F_k(0) = -\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_k(t)^2 dt + \int_0^T \sigma_k(t)\ \ dz_k(t)$$
$$soit : \ln F_k(T) = \ln F_k(0) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_k(t)^2 dt + \int_0^T \sigma_k(t)\ \ dz_k(t)$$

Où z est un processus de Wiener.

Nous souhaitons cependant écrire les dynamiques des différents taux *forward* F_k, $k\ \in\ [\![1, M]\!]$, sous une même mesure de probabilité afin de les diffuser conjointement.

Une mesure de probabilité adaptée est la mesure **spot Libor** (notée Q^d) associée à un certain numéraire (noté B^d dans [Brigo, Mercurio]). Alors, pour $k\ \in\ [\![1, M]\!]$ quelconque, la dynamique de F_k sous la probabilité Q^d est donné par, pour tout $t\ \in [0, T_{k-1}]$,

$$dF_k(t) = \sigma_k\ (t)F_k\ (t)\sum_{j=\beta(t)}^{k} \frac{\tau_j\ \ F_j(t)\sigma_j\ (t)\rho_{j,k}}{1 + \tau_j\ \ F_j(t)}\ dt\ +\ \sigma_k\ (t)F_k\ (t)dZ_k^d(t)$$

Où Z^d est un mouvement brownien M - dimensionnel sous Q^d, dont les composantes (mouvements browniens uni - dimensionnels) sont corrélées via une matrice de corrélation ρ définie positive de taille $M\ \times M$. La fonction β, définie sur l'intervalle $[0, T_M]$, désigne la première maturité qui suit *t*.

Dans le générateur de scénarios économiques, les différents taux *forward* sont parfaitement corrélés, c'est-à-dire pour tout couple $(k,l) \in [\![1,M]\!]^2$, $\rho_{k,l} = 1$. On a donc, pour tout $k \in [\![1,M]\!]$, $Z_k^d = Z_1^d$, i.e. le mouvement brownien intervenant dans l'équation précédente est identique pour l'ensemble des taux *forward*.

En utilisant la formule d'Itô, la dynamique de $\ln F_k\ (t)$ sous la probabilité **spot Libor** est donnée par

$$d\ ln\big(F_k(t)\big) = \sigma_k\ (t) \sum_{j=m(t)}^{k} \frac{\tau_j\ \ F_j(t)\sigma_j\ \ (t)\rho_{j,k}}{1+\ \tau_j\ \ F_j(t)}\ dt\ -\ \frac{\sigma_k^2(t)}{2}\ dt\ +\ \ \sigma_k\ (t)F_k\ (t)dZ_k^d(t)$$

Après discrétisation, la formulation ci-dessous (Euler scheme, Brigo Mercurio) nous permet de déterminer tous les Fk au cours du temps.

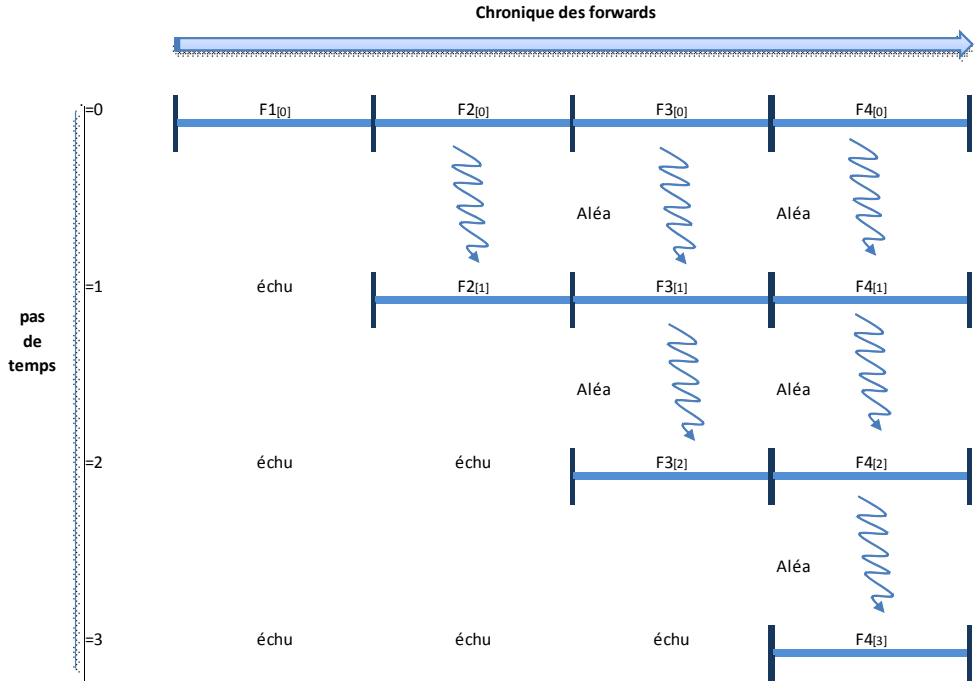
$$\ln F_k^{\Delta t}(t+\Delta t) = \ln F_k^{\Delta t}(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=m(t)}^{k} \frac{\tau_j F_j^{\Delta t}(t)\sigma_j(t)\rho_{j,k}}{1+\tau_j F_j^{\Delta t}(t)}\Delta t - \frac{\sigma_k(t)^2}{2}\Delta t + \sigma_k(t)(Z_k(t+\Delta t) - Z_k(t))$$

$$Z_k(t+\Delta t) - Z_k(t) = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

où ε est une loi normale centrée réduite

Pour des raisons pratiques, l'implémentation du modèle se fera avec $\Delta t = \tau$

Le graphique ci-dessous permet de comprendre la dynamique du modèle :



Remarque :

- Afin de limiter les imprécisions liées à la discrétisation, certains ouvrages recommandent l'utilisation du « predictor corrector » pour améliorer la qualité de la diffusion. L'utilisation de cette option ralentit considérablement les calculs car elle consiste à affiner l'évaluation du *drift* en remplaçant le terme $F_j^{\Delta t}(t)$ par une moyenne.

  Voici le détail du processus :

  - Lors de la première itération on calcule tous les $F_k^{\Delta t}(t+\Delta t)$ avec les $F_j^{\Delta t}(t)$.
  - Lors de la deuxième itération, on recalcule le *drift* et les$F_k^{\Delta t}(t+\Delta t)$ en remplaçant les $F_j^{\Delta t}(t)$ par la formulation suivante :

$$F_j^{\Delta t}(t) = \frac{F_j^{\Delta t}(t) + F_k^{\Delta t}(t+\Delta t)}{2}$$

  A chaque pas de temps on projette les *forwards* calculés au pas précèdent avec un nouvel aléa.

- Compte tenu de la formule et du niveau de volatilité, il se peut que la valeur des *forward* explose. Pour palier cela, on peut décider de dégrader le modèle en limitant la valeur des taux. Ainsi, la formulation du *forward* peut se réécrire de la façon suivante :

$$F_k^{\Delta t}(t+\Delta t) = MIN\left(e^{LnF_k^{\Delta t}(t+\Delta t)}; CAP\right)$$

Ou

$$F_k^{\Delta t}(t+\Delta t) = MAX\left(e^{LnF_k^{\Delta t}(t+\Delta t)}; FLOOR\right)$$

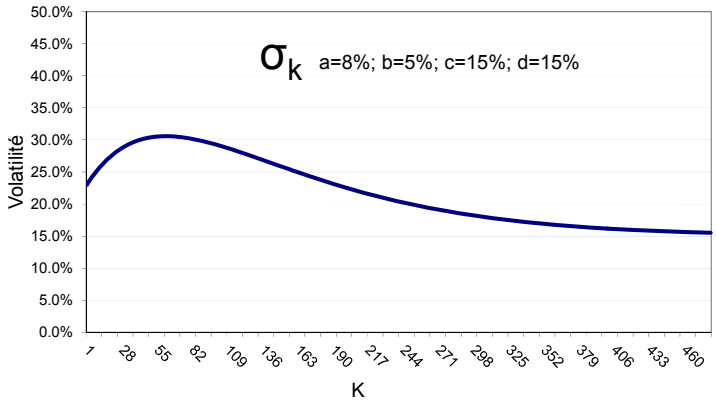
La valeur du CAP doit être la plus importante possible afin de ne pas trop détériorer les tests de martingale.

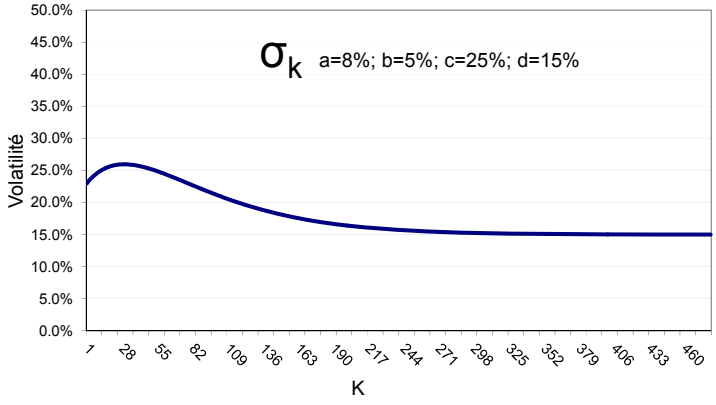
Le modèle LMM donne une complète liberté à l'utilisateur en ce qui concerne le choix des structures de volatilité. Afin d'améliorer la calibration du modèle à la nappe de volatilité des swaptions, la forme de volatilité du taux *forward*, que nous utiliserons, correspond à la formulation 7 proposée par Damiano Brigo et Fabio Mercurio[5].

$$\sigma_k(t) = \Phi_t \times \left([b(T_{k-1} - t) + a]\, e^{-c(T_{k-1}-t)} + d \right)$$

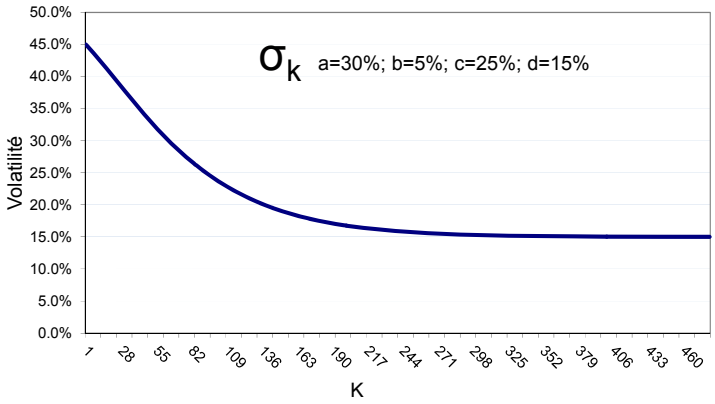
Avec $\Phi_t = \left(\phi_1 + (1-\phi_1)e_2^{-\phi_2 \times t}\right)^+$

Cet élément peut avoir un grand nombre de formes différentes, cf ci-dessous la valeur de la volatilité des forward de maturité résiduelle 1 mois pour différentes valeurs de paramètres :





- [5] Voir Brigo, D., Mercurio, F., Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer Finance, 2006



L'élément de gauche, le vecteur Φ_t, permet de rendre la volatilité dépendante du temps (la partie de droite étant dépendante du temps avant maturité du forward). Ce paramètre joue sur le niveau de la volatilité. Il permet d'améliorer considérablement la qualité du calibrage dans le contexte où la volatilité court terme est supérieure à la volatilité long terme.

La calibration à la nappe de swaption se fait en utilisant l'approximation de Rebonato (1998), dite de « *freezing* ». Cette approximation permet de déterminer la volatilité implicite de Black des swaptions tout en connaissant les volatilités des *forward* libor. Tout l'intérêt de cette approximation réside dans le fait qu'il ne sera pas nécessaire de lancer des centaines de simulations Monte Carlo pour calibrer les paramètres : ils pourront être déterminés à l'aide d'une formule fermée.

Notons $S_{\alpha,\beta}(t)$, le taux d'un swap commençant en date T_α (le premier flux de la patte fixe a lieu en $T_{\alpha+1}$) et T_β la date de terme du swap.

L'hypothèse de « *freezing* » de Rebonato s'écrit :

$$(\sigma_{\alpha\beta}^{LFM})^2 \approx \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{\omega_i(0)\omega_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \int_0^{T\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt$$

Avec

$$\omega_i(t) = \frac{B(t,T_i)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} B(t,T_j)}$$

où

$B(t, T_i)$ est le prix d'une obligation vu de t et de maturité T

Et

$$taux_swap = S_{\alpha,\beta}(t) \cong \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \omega_i(0)\, F_i(t)$$

La volatilité de $S_{\alpha,\beta}(t)$ est obtenue en calculant la variation quadratique de l'élément ci-dessous :

$$d\,S_{\alpha,\beta}(t) \cong \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \omega_i(0)\,d\,F_i(t)$$

En considérant la volatilité constante par morceau, la variance du taux de swap peut se réécrire sous la forme ci-dessous :

$$T_\alpha\left(\sigma_{\alpha,\beta}^{LFM}\right)^2 = \int_0^\alpha \sigma_{S_{\alpha,\beta}}^2(s)ds \approx \sum_{k,l=\alpha+1}^{\beta}\left(\frac{\omega_k(0)\omega_l(0)F_k(0)F_l(0)}{S_{\alpha,\beta}^2(0)}\rho_{k,l}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\sigma_k(i)\sigma_l(i)(T_{i+1}-T_i)\right)$$

La formule d'approximation ci-dessus est donnée pour le cas où l'intervalle de temps entre chaque forward est d'une année (pas de temps). Dans le cadre de nos simulations qui sont à un pas mensuel, nous voulons retrouver cette approximation tout en conservant les paiements annuels du swap.

Pour cela, nous pouvons réécrire les formules en considérant qu'il y a 12 *forwards* par année en s'inspirant de la formulation proposée par John Hull[6], ainsi on obtient :

$$taux_swap = S_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m=1}^{12}\frac{\frac{1}{12}B(t,T_{k+m})}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}B\left(t,T_j\right)} * F_{k,m}$$

Avec α et β en année, m en mois

Ainsi

$$T_\alpha\left(\sigma_{\alpha,\beta}^{LFM}\right)^2 \approx \sum_{k,l=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m,n=1}^{12}\left(\frac{\omega_{k,m}(0)\omega_{l,n}(0)F_{k,m}(0)F_{l,n}(0)}{S_{\alpha,\beta}^2(0)}\rho_{k,m,l,n}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\sum_{p=0}^{11}\frac{\sigma_{k,m}(12i+p)\sigma_{l,m}(12i+p)}{12}\right)$$

Avec

$$\omega_{k,m}(0) = \frac{1}{12}\frac{B\left(0,T_k+\frac{m}{12}\right)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta}B(0,T_i)}$$

Ce calcul provient d'une analogie avec l'approche suivie par Rebonato : on calcule la variation quadratique du logarithme du taux swap entre T_α et T_β, avec l'hypothèse que la variance des termes $\omega_i(t)$ est négligeable devant celle de $F_i(t)$ (i étant annuel dans la formule de Rebonato, mensuel dans la formule ci-dessus).

Dans notre première approche nous considérerons que nous n'avons qu'une seule source d'aléa, soit un seul facteur, ce qui implique que :

$$\rho_{k,m\ l,n} = 1$$

- [6] Hull, J., Options, futures, et autres actifs dérivés, 5e Edition

5.2.2 Calibration du modèle

Le modèle de taux doit être calibré :
- En taux.
- En volatilité.

Le calage en taux est «inhérent au modèle LMM». La problématique concernera donc essentiellement le calage de la volatilité de taux. Celle-ci peut être calée soit avec des instruments de type CAP & FLOOR, soit avec des instruments de type SWAPTION (le plus utilisé).

Définition d'une Swaption :

Une swaption ou option sur swap européenne est un contrat qui permet à son porteur de rentrer à une date fixée (date de la maturité de l'option) dans un swap aux caractéristiques pré-définies. La swaption receveuse donne à l'acheteur le droit de recevoir la patte fixe du swap. Inversement, la swaption payeuse donne à l'acheteur le droit de payer la patte fixe du swap.

Les swapions sont cotées en volatilité : la volatilité implicite du modèle de Black ou la volatilité implicite du modèle de bachelier.

Prix d'une payeuse avec Monte Carlo :

$$Prix(0) = \frac{1}{simulations} \sum_{j=1}^{simulations} \left\{ B(0, t_{ex}).\left(\sum_{i=1}^{N} K.P_j(t_{ex}, t_{ex}+i) + P_j(t_{ex}, t_{ex}+N) - 1 \right)^{+} \right\}$$

$avec$
t_{ex} : $date\ d'exercice\ de\ la\ swaption$
N: $durée\ du\ swap\ en\ année$
K: $Strike$
S_0: $taux\ de\ swap\ forward$

Le résultat ci-dessus devra être mis en relation avec la formule de Black ou de Bachelier qui permettent de valoriser une swaption payeuse :

- Formule de Black :

$$\text{Payeuse}_{\text{black}}(0) = \sum_{\text{i=1}}^{\text{N}} \text{P}(0, \text{t}_{\text{ex}} + \text{i}) \times (S_0 N(-d_1) - \text{KN}(-\text{d}_2))$$

$Avec$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \frac{\sigma^2 t_{ex}}{2}}{\sigma\sqrt{t_{ex}}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t_{ex}}$$

Confidentiel

- Formule de Bachelier :

$$Payeuse_{Bachelier}(0) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{P}(0, \mathrm{t_{ex}} + \mathrm{i}) \times \left[(S_0 - K) \times N(d_1) + \sigma\sqrt{\mathrm{t_{ex}}} n(d1)\right]$$

$Avec$:

$$d_1 = \frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{t_{ex}}}$$

$N(x)$: $la\ fonction\ de\ répartition\ de\ la\ loi\ normale\ centrée\ réduite$

$n(x)$: $la\ fonction\ de\ densité\ de\ la\ loi\ normale\ centrée\ réduite$

La volatilité implicite du modèle sera déterminée par l'égalisation des deux prix :

$$\mathrm{Payeuse_{black}}(0) = \mathrm{Payeuse_{MC}}(0)$$

5.2.3 Détermination de la forme de volatilité

Les paramètres à calibrer sont donc a, b, c, d, ϕ_1 etϕ_2. Ils sont déterminés en minimisant la fonction cible suivante :

$$f_{LMM}(\phi, a, b, c, d, phi_1, phi_2) = \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_{LMM}(a, b, c, d, \phi_1, \phi_2, M_j, T_i) - \sigma_{mkt}(M_j, T_i)\right)^2$$

Avec N le nombre de ténors, M le nombre de maturités, T_i les ténors, M_i les maturités considérées et σ_{mkt}les volatilités de swaptions observées sur le marché.

Avec :

$$\sigma_{\mathrm{i}}(\mathrm{t}) = \Phi_t\left(\left[b(T_{i-1} - t) + a\right] e^{-c(T_{i-1}-t)} + d\right)$$

$$\Phi_t = \left(\phi_1 + (1 - \phi_1)e_2^{-\phi_2 \times t}\right)^+$$

Ici la fonction à minimiser est la fonction erreur(x) ;

Avec $x \in \Re^6$,

Notre vecteur de paramètres sera donc : $x = (a, b, c, d, \phi_1, \phi_2)$.

5.3 DEFLATEUR

Soit N un numéraire, c'est-à-dire un actif financier échangeable sur le marché, ne versant pas de dividende, et dont la valeur à toute date est strictement positive (cf. [Brigo et Mercurio]). Soit Q^N la mesure de probabilité martingale associée au numéraire N, c'est-à-dire une mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique et sous laquelle le prix de tout actif échangeable sur le marché, divisé par le numéraire, est une martingale sous Q^N.

Le déflateur à la date t sous la mesure Q^N, noté $D(t)$, est défini par $D(t) = \frac{1}{N(t)}$. La définition du déflateur dépend donc de la probabilité sous laquelle l'on choisit de diffuser un facteur de risque donné. Ainsi, étant donné $S(t)$ le processus de prix d'un actif échangeable sur le marché, $D(t)S(t)$ est une martingale sous Q^N.

5.3.1 Déflateur sous la probabilité risque neutre

La probabilité risque neutre nominale est par définition la mesure martingale associée au numéraire cash nominal (cf. [Brigo et Mercurio]). Le cash est l'actif valant 1 à la date initiale et évoluant au taux court nominal n. Le déflateur sous la probabilité risque neutre est donc, d'après la définition précédente,

$$D(t) = e^{-\int_0^t n(s)\,ds}$$

5.3.2 Déflateur sous la probabilité spot Libor

Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{N}^*$, $(\mathrm{T_i})_{\mathrm{i} \in [\![0,\mathrm{M}]\!]}$ une suite strictement croissante de dates. Ces dates correspondront à une famille de taux forward, à savoir les taux forward correspondant aux M intervalles de temps $[\mathrm{T_{i-1}}, \mathrm{T_i}]$, $\mathrm{i} \in [\![1, \mathrm{M}]\!]$. On notera par convention $\mathrm{T_{-1}} := 0$.

La mesure spot Libor associée à la famille de dates $(T_i)_{i \in [\![0,M]\!]}$ est la mesure martingale associée au numéraire, noté B^d, défini de la façon suivante :

- $B^d(0) = 1$ (en unités de monnaie);
- entre les dates 0 et T_0, le portefeuille est investi intégralement dans le zéro-coupon nominal de maturité T_0 ;
- entre les dates T_0 et T_1, le portefeuille est rebalancé et investi intégralement dans le zéro-coupon nominal de maturité T_1 ;
- le même procédé (en date T_i, réinvestissement de la quantité de monnaie obtenue en date T_i à partir des zéro-coupons nominaux achetés en date T_{i-1}en un portefeuille de zéro-coupons de maturité T_{i+1}, $i \in [\![0, M-1]\!]$ quelconque) est appliqué à chacune des dates définissant la mesure spot-Libor.

$B^d(t)$ est défini pour $t \in [0, T_M]$, i.e. entre la date initiale et la dernière date T_M. Pour tout $i \in [\![0, M]\!]$, la valeur du numéraire B^d en T_i vérifie

$$B^d(T_i) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{i} P_n(T_{j-1}, T_j)}$$

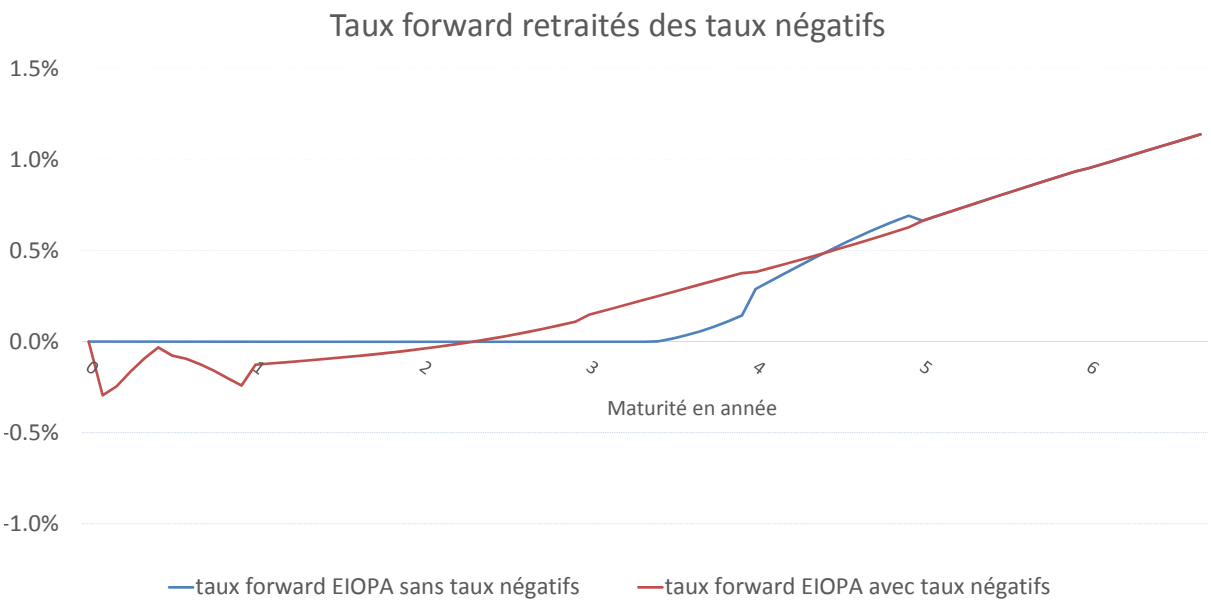
Ainsi, la valeur du déflateur sous la probabilité spot Libor à la date T_i est égale à

$$D(T_i) = \prod_{j=0}^{i} P_n(T_{j-1}, T_j)$$

5.3.3 LMM et taux négatifs

Depuis que les taux négatifs sont devenus une réalité, le LMM pose des problèmes de calibration notables :

- Le modèle LMM étant log normal, les taux négatifs de la courbe des taux de swap doivent impérativement être remis en territoire positif.



- Compte tenu des niveaux de volatilité constatés, la proportion de taux très élevés devient trop importante.

- L'utilisation de ce modèle en norme solvabilité pourra donc avoir des conséquences non négligeables sur le ratio de solvabilité 2.

5.4 MODELE DE TAUX LMM + SHIFT A N FACTEURS

5.4.1 Présentation du modèle

Le modèle LMM avec un shift est une évolution du modèle LMM standard décrit au paragraphe précédent. Alors que dans ce dernier modèle, les taux étaient log-normaux et donc à support strictement positif, dans le modèle LMM *shifté*, ce sont les taux forward *shifté* qui sont log-normaux, les taux forward ayant alors pour support $]shift, +\infty[$. L'intégration d'un shift permettra la modélisation de taux négatifs et limitera l'apparition des taux explosifs grâce à l'utilisation d'une volatilité locale.

La dynamique du forward sans l'utilisation d'un shift est décrite via la formulation ci-dessous :

$$dF_k(t) = \sigma_k(\mathrm{t}) F_k(t) dz_k(t)$$

La dynamique du forward avec l'utilisation d'un shift est décrite via la formulation ci-dessous :

$$dF_k(t) = \sigma_k^I(t)(F_k(t) + \alpha_k^I)dz_k(t)$$

Cette formulation est celle du modèle SLMUP[7]. Le modèle implémenté sera une version simplifiée du modèle où la variable aléatoire Ine pourra prendre qu'une seule valeur :

$$dF_k(t) = \sigma_k\ (t)(F_k(t) + \alpha_k\ )dz_k(t)$$

Le vecteur α représente le *shift* qui sera appliqué à chaque forward.

Avec le *shift,* les simulations seront réalisées avec le processus ci-dessous :

Notons :

$$\bar{F}_k^{\Delta t}(t) = F_k^{\Delta t}(t) + \alpha_k$$

$$F_k^{\Delta t}\ est\ issu\ de\ la\ courbe\ spot\ (SWAP)$$

$$ln\bar{F}_k^{\Delta t}(t + \Delta t) = ln\bar{F}_k^{\Delta t}(t) + \sigma_k(t)\sum_{j=m(t)}^{k}\frac{\tau_j\bar{F}_j^{\Delta t}(t)\sigma_j(t)\rho_{j,k}}{1+\tau_j\left(\bar{F}_j^{\Delta t}(t)-\alpha_j\right)}\Delta t - \frac{\sigma_k(t)^2}{2}\Delta t + \sigma_k(t)(Z_k(t+\Delta t) - Z_k(t))$$

$$Z_k(t + \Delta t) - Z_k(t) = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Par ailleurs l'utilisation d'un modèle à plusieurs facteurs permet une modélisation plus fine des mouvements de la courbe des taux, permettant notamment de modéliser des changements de pentification.

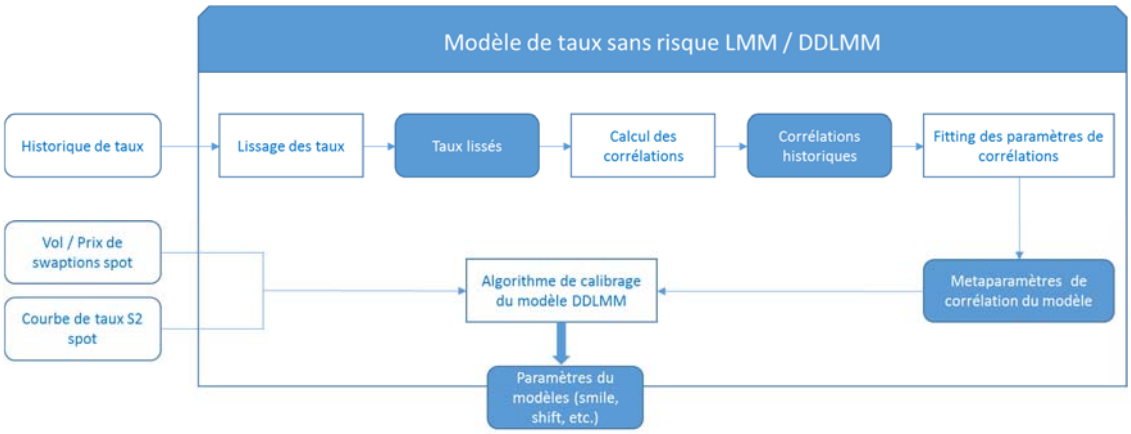
5.4.2 Calibration des corrélations inter forwards

5.4.2.1 Présentation de l'algorithme

Le modèle LMM *shifté* à n-facteurs (ou DDLMM) nécessite de modéliser les corrélations existantes entre les différents *forwards* diffusés (cf. les paramètres $\rho_{j,k}$ dans l'équation plus haut). L'estimation de la corrélation est basée sur un historique de taux ZC (les prix de spread option étant difficilement observables sur le marché), la méthodologie décrite ci-dessous est inspirée de celle du Brigo cf page 291.

La méthodologie générale suit le schéma ci-dessous :

[7] Voir Brigo, D., Mercurio, F., Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer Finance, 2006



Dans un premier temps, l'historique de taux ZC continus est lissé à l'aide de formes paramétriques (Diebold & Li, ou Nelson-Siegel-Svensson par exemple), puis la matrice de corrélation des log-ratio de taux *forwards* (à maturité fixée) est calculée. Une forme paramétrique est alors calibrée sur cette matrice de corrélation historique.

5.4.2.1.1 Lissage des données historiques : le modèle de Diebold & Li

Le modèle de Diebold & Li est un modèle où la courbe des taux *forwards* est paramétrique. Nous allons appliquer la paramétrisation de Diebold & Li aux taux ZC (Diebold & Li appliquaient cette paramétrisation aux taux *forwards* continus). Le taux ZC en composition continue de maturité τ en date t, noté $y_t(\tau)$ s'écrit sous la forme :

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right) \text{ (équation D-L)}$$

Pour calculer les corrélations inter *forwards*, on va supposer que la courbe des taux ZC continus suit le modèle de Diebold & Li et on calculera les corrélations entre les *forwards* « paramétriques ».

Les $(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}, \lambda_t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+^*$ sont les solutions de la minimisation de l'erreur entre $y_t(\tau)$ et les taux continus observés à la date t. Afin de simplifier le calibrage, nous supposerons dans la suite que le paramètre λ_t est constant (indépendant de t) et connu. Ainsi, si la taille de l'historique est égale à T, il faudra résoudre (en utilisant la méthode des moindres carrés ordinaires) T équations à 3 inconnues $((\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t}) \in \mathbb{R}^3)$.

Soit Y, la matrice contenant l'historique des courbes de taux ZC continus :

$$Y: \begin{bmatrix} Z_0(1) & \cdots & Z_0(30) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_T(1) & \cdots & Z_T(30) \end{bmatrix}$$

$Z_T(30)$ Représente le taux continu zéro coupon observé en T et de maturité 30Y.

Soit X, la matrice représentant les paramètres constants de l'équation de Diebold. Nous fixons ici la valeur du paramètre lambda à 0.069*12 comme le préconisent les auteurs.

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right)$$

Confidentiel

$$X:\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\lambda*1}}{\lambda*1} & \frac{1-e^{-\lambda*1}}{\lambda*1}-e^{-\lambda*1} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda*2}}{\lambda*2} & \frac{1-e^{-\lambda*2}}{\lambda*2}-e^{-\lambda*2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda*29}}{\lambda*29} & \frac{1-e^{-\lambda*29}}{\lambda*29}-e^{-\lambda*29} \\ 1 & \frac{1-e^{-\lambda*30}}{\lambda*30} & \frac{1-e^{-\lambda*30}}{\lambda*30}-e^{-\lambda*30} \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{2,1} & X_{3,1} \\ X_{1,2} & X_{2,2} & X_{3,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1,29} & X_{2,29} & X_{3,29} \\ X_{1,30} & X_{2,30} & X_{3,30} \end{bmatrix}$$

$$^{t}X=\begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & \dots & X_{1,29} & X_{1,30} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & \dots & X_{2,29} & X_{2,30} \\ X_{3,1} & X_{3,2} & \dots & \dots & X_{3,29} & X_{3,30} \end{bmatrix}$$

La matrice Z contient les valeurs des coefficients $(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})$ déterminés sur les T observations.

$$Z:\begin{bmatrix} \beta_{1;0} & \beta_{2;0} & \beta_{3;0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1;T} & \beta_{2;T} & \beta_{3;T} \end{bmatrix}$$

L'équation à résoudre est $Y = Z * {}^{t}X$, en multipliant de chaque côté l'équation par X, ceci conduit à :

$$Y*X=Z*{}^{t}X*X$$

Puis en supposant la matrice carrée inversible :

$$Y*X({}^{t}X*X)^{-1}=Z$$

Exemple : $Z_0(1) \sim X_{1,1}*\beta_{1;0} + X_{2,1}*\beta_{2;0} + X_{3,1}*\beta_{3;0}$

Les solutions sont déterminées en utilisant le logiciel R ou la fonction *droitereg* d'Excel.

5.4.2.1.2 Lissage des données historiques : le modèle de Nelson-Siegel-Svensson

Le modèle NSS (Nelson-Siegel-Svensson) est une extension du modèle de Diebold & Li, où un quatrième paramètre β et un paramètre λ_2 sont ajoutés. Le modèle (que nous appliquons encore une fois aux taux ZC continus) devient alors :

$$y_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} - e^{-\lambda_{1,t}\tau}\right) + \beta_{4t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2,t}\tau}}{\lambda_{2,t}\tau} - e^{-\lambda_{2,t}\tau}\right) \quad (2)$$

Avec :

$$(\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t}) \in \mathbb{R}^4$$

$$(\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}) \in \mathbb{R}_+^{*^2}$$

Remarque : comme dans le modèle de Diebold & Li[8], il est possible de simplifier le modèle en supposant $\lambda_{1,t}$ et $\lambda_{2,t}$ constants. En supposant les $\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}$ constants dans le temps et connus, il est possible de calibrer les historiques de $(\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t})$ par MCO (la méthodologie est alors analogue à celle développée plus haut pour le Diebold & Li).

5.4.2.1.3 Calcul des forwards

On rappelle que le taux forward $F_k(t), t \in [0, T_k]$ est défini par :

$$F_k(t) = \frac{1}{\tau_k}\left(\frac{P_n(t,T_k)}{P_n(t,T_{k+1})} - 1\right)$$

où $P_n(t,T_k)$ est le prix à la date t d'un zéro-coupon de date de maturité T_k et $\tau_k = T_{k+1} - T_k$.

Une fois calibré, le modèle de Diebold & Li permet donc d'obtenir directement le prix des zéros coupons :

$$\begin{aligned} P_n(t,t+\tau) &= \exp\big(-\tau y_t(\tau)\big) \\ &= \exp\left(-\tau\left(\beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_t\tau}}{\lambda_t\tau} - e^{-\lambda_t\tau}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Ou de la manière analogue pour le modèle de NSS :

$$\begin{aligned} P_n(t,t+\tau) = \exp\Bigg(-\tau\Bigg(&\beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{1,t}\tau}}{\lambda_{1,t}\tau} - e^{-\lambda_{1,t}\tau}\right) \\ &+ \beta_{4t}\left(\frac{1-e^{-\lambda_{2,t}\tau}}{\lambda_{2,t}\tau} - e^{-\lambda_{2,t}\tau}\right)\Bigg)\Bigg) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les prix ZC historiques lissés, et les *forwards* associés.

5.4.2.1.4 Calcul des log-ratios

Les *forwards* étant calculés, on calcule les log-ratios de forward *shiftés* puis les corrélations entre ces log-ratios :

- [8] Voir Diebold, F., Li, C., Forecasting the term structure of government bond yields, Journal of Econometrics, 2005

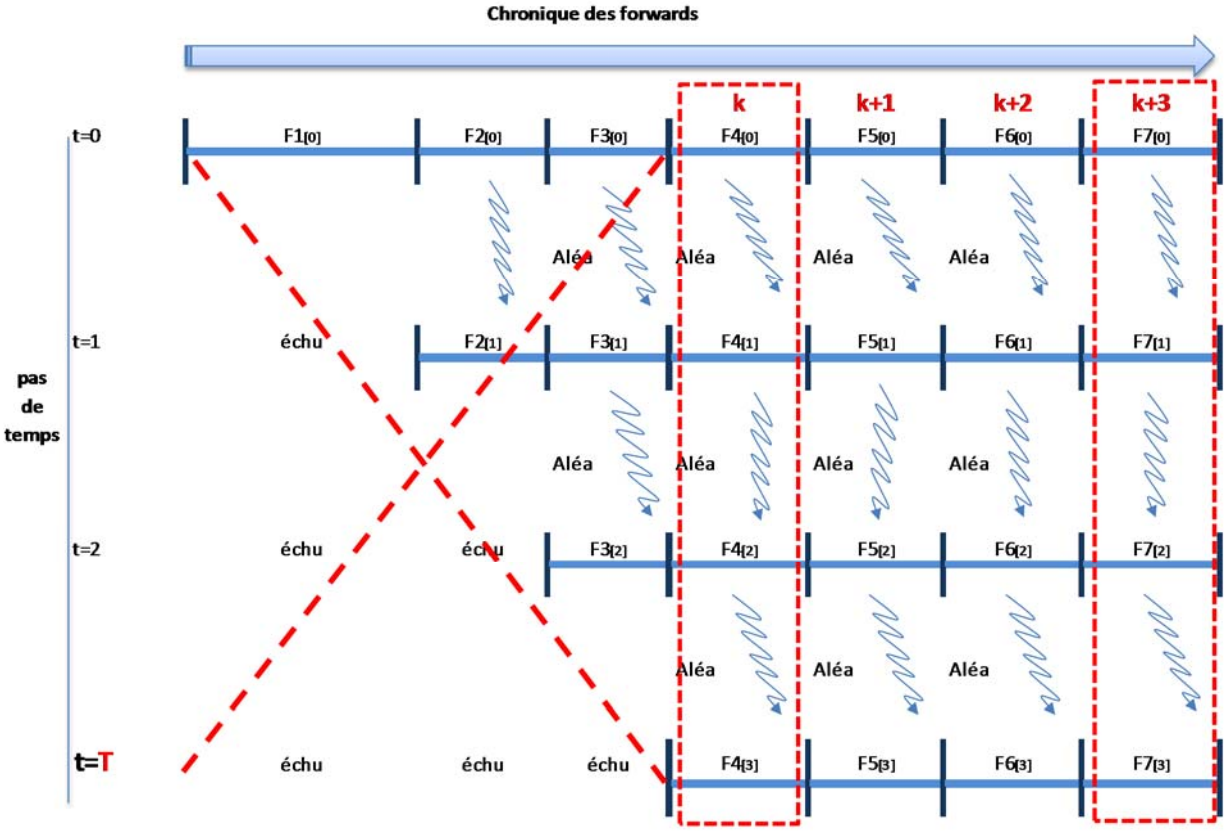
$$\log_ratio_k(t) = \log_ratio[t,k] = \ln\left[\frac{abs(F_k(t+1)+\delta)}{abs(F_k(t)+\delta)}\right]$$

La valeur du paramètre δ est fixée à dire d'expert, de manière à s'assurer que les forward historiques soient positifs sans altérer les corrélations entre log ratio de forward *shiftés*. En 2017, la valeur de δ a été fixée à 0,5%.

Dans les projections du GSE, la corrélation inter-*forwards* est supposée constante au cours du temps, et définie par date d'expiration. Ainsi il est nécessaire que les *forwards* utilisés pour le calcul de la corrélation inter *forwards* soient en vie à toutes les dates de constatation des taux.

Remarque : on calcule donc, par exemple, la corrélation entre le forward $\mathrm{F_k(t)}$ (taux dans l'intervalle $[T_k, T_{k+1}]$, ayant à la date t une durée de vie $T_k - t$) et le forward $\mathrm{F_{k+1}(t)}$ (taux dans l'intervalle $[T_{k+1}, T_{k+2}]$, ayant à la date t une durée de vie $T_{k+1} - t$). C'est donc toujours l'évolution du même forward qui est étudié au cours du temps (par opposition aux estimations des volatilités où on compare des forward de durée de vie égale). Si, l'intervalle d'étude est de 10 ans, les forward considérés pour l'estimation des corrélations seront ceux-ci ayant une durée de vie supérieure à 10 ans en t=0.

Le graphique ci-dessous présente à titre d'exemple les *forwards* qui seront utilisés pour le calcul des corrélations, la date t=T correspond à la date d'évaluation de la corrélation.



5.4.2.1.5 Estimation des corrélations historiques

Le calcul de la matrice est ensuite défini de la manière suivante :

$$\rho_{j,k} = \text{correlation}[\log_ratio[,k]; \log_ratio[,j]]$$

5.4.2.1.6 Matrice de corrélation paramétrique

La paramétrisation d'une matrice NxN de grande taille requiert un grand nombre de paramètres rendant la calibration très difficile. Pour des questions de simplicité, nous avons retenu une structure particulière de corrélation pouvant être décrite avec un nombre réduit de paramètres :

$$dX_k(t) = c_1(\mathrm{T_{k-1}}) * \mathrm{d}W_1(\mathrm{t}) + c_2(\mathrm{T_{k-1}}) * \mathrm{d}W_2(\mathrm{t}) + c_3(\mathrm{T_{k-1}}) * \mathrm{d}W_3(\mathrm{t})$$

$$c_{\mathrm{i}}(u) = \frac{a_{\mathrm{i}}(u)}{a(u)}$$

$$a_1(u) = b_1 e^{-\lambda_1 * u}$$

$$a_2(u) = b_2 e^{-\lambda_2 * u}$$

$$a_3(u) = b_3 e^{-\lambda_3 * u}$$

$$a(u) = \sqrt{a_1(u)^2 + a_2(u)^2 + a_3(u)^2}$$

Nous calibrons ensuite les paramètres grâce à la matrice de corrélation historique calculée précédemment.

L'erreur ε_1 à minimiser sur les corrélations est définie par :

$$\varepsilon_1(b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} \left(correl\ parametrique\ \ (b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, i, j) - correl_{historique}(i, j) \right)^2$$

M permet de spécifier la zone de corrélation à « fitter » (M = 200 mois pour notre calibrage).

Les paramètres à calibrer sont donc $b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ils sont déterminés en minimisant ε_1 à l'aide de l'algorithme de Nelder Mead.

Avec $x \in \Re^6$,

Notre vecteur de paramètres sera donc : $x = (b_1, b_2, b_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

5.4.2.1.7 Conclusion

Ainsi, les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

- ✓ Estimation des paramètres $\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t}$ en minimisant pour chaque date, l'écart entre la courbe ZC historique et la courbe ZC paramètrique

- ✓ Calcul des *forwards* « paramétriques »
- ✓ Estimation des corrélations historiques (entre les log-ratios des valeurs absolues de taux *forwards shiftés*).
- ✓ Calibrage d'une forme paramétrique de la matrice de corrélation, sur la matrice calculée à l'étape précédente

5.4.2.2 Calibration des lambda du NSS

Le calibrage des paramètres λ_1 et λ_2 du modèle NSS est relativement délicat, comme l'indiquent Gilli, Grosse et Schumann[9]. Afin d'éviter les problématiques de piégeage créées par les paramètres λ, nous procédons par méthodologie *grid search* :

- ✓ Nous maillons l'espace des λ_1 et λ_2 possibles,
- ✓ Pour chaque point de la maille, et chaque date t d'historique, nous calibrons les paramètres $\beta_{1,t}, \beta_{2,t}, \beta_{3,t}, \beta_{4,t}$ et en déduisons les taux paramétriques associés,
- ✓ Nous en calculons la somme des écarts quadratiques entre taux historiques et paramétriques,
- ✓ Enfin, pour le λ_1 et λ_2, nous retenons le couple présentant les valeurs des écarts les plus faibles.

15 paramétrages différents ont été testés afin de s'assurer de la robustesse de l'algorithme, en faisant varier :

- La maturité maximale sur laquelle calibrer les lambda et l'erreur de fitting : 10, 15, 20, 25 et 30 ans
- La date de début d'historique : 01/01/1999, 01/01/2002, et 01/01/2005

Grid search n° :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Mat max	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30	10	15	20	25	30
lambda 1 min	0.5%	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
lambda 1 max	99.5%	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
lambda 1 step	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
lambda 2 min	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
lambda 2 max	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995	0.995
lambda 2 step	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
date min	01/01/1999	01/01/1999	01/01/1999	01/01/1999	01/01/1999	01/01/2002	01/01/2002	01/01/2002	01/01/2002	01/01/2002	01/01/2005	01/01/2005	01/01/2005	01/01/2005	01/01/2005
date max	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016	23/12/2016
1er meilleur lambda 1 :	38.0%	73.5%	13.0%	8.5%	9.0%	37.0%	73.0%	13.5%	8.5%	9.0%	37.5%	68.5%	8.5%	7.0%	8.5%
1er meilleur lambda 2 :	87.0%	42.0%	35.0%	37.0%	38.5%	85.5%	7.5%	32.5%	36.0%	38.0%	79.5%	7.5%	36.5%	38.5%	39.0%
2eme meilleur lambda 1 :	38.0%	74.0%	12.5%	8.0%	9.0%	36.5%	72.5%	14.0%	8.5%	9.0%	37.5%	68.0%	8.5%	7.0%	8.5%
2eme meilleur lambda 2 :	86.5%	42.0%	35.5%	37.5%	38.0%	85.5%	7.5%	32.0%	36.5%	37.5%	79.0%	7.5%	36.0%	39.0%	38.5%
3eme meilleur lambda 1 :	38.0%	73.5%	13.0%	8.5%	9.0%	36.5%	73.5%	14.5%	8.0%	9.0%	37.5%	69.0%	8.0%	7.0%	8.5%
3eme meilleur lambda 2 :	87.5%	41.5%	34.5%	37.5%	39.0%	86.0%	7.5%	31.5%	37.0%	38.5%	80.0%	7.5%	37.0%	38.0%	39.5%

Nous constatons que pour les maturités maximales faibles (égales à 10 ou 15 ans), les λ_1 et λ_2 sont relativement proches. Pour les maturités maximales égales à 20, 25 et 30 ans, nous observons une bonne stabilité des meilleurs couples (λ_1, λ_2) généralement proches de $(8.5\%, 38.5\%)$. D'autre part, ces valeurs

- [9] Voir Gilli, M., Große, S., Schumann, E., Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model, COMISEF WORKING PAPERS SERIES, 2010

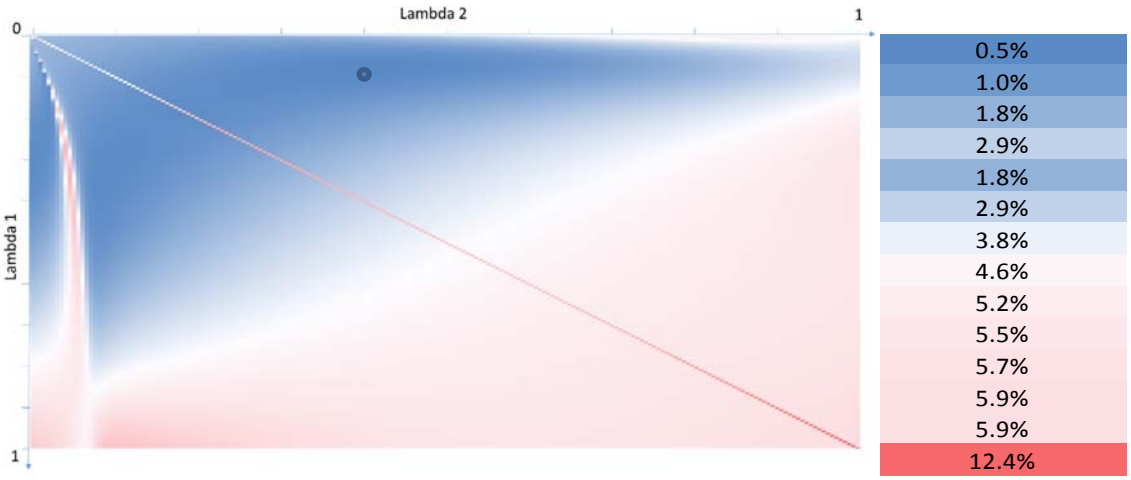
semblent insensibles au changement de la date de début d'historique. En outre, la robustesse des résultats est prouvée par la proximité des 3 meilleurs couples (λ_1, λ_2) pour chaque itération.

Compte tenu des valeurs du tableau, nous retenons les valeurs suivantes pour les paramètres λ :

- $\lambda_1 = 9\%$.
- $\lambda_2 = 38.5\%$.

Remarque : Le décrochage du lambda lorsque la maturité max atteint 20 ans est à rapprocher de l'interprétation du lambda proposée par Diebold, Li, et Gilli : la valeur des lambda représente l'inverse de la maturité pour laquelle la courbure de la courbe de taux est maximum. Ainsi, la courbure court terme se situe pour les maturités de l'ordre de 11 ans (1 / 9%) et la courbe long terme pour les maturités de l'ordre de 2.5 ans (1 / 39%). L'utilisation du modèle NSS permet donc de modéliser conjointement les deux points de courbure de la courbe de taux ZC.

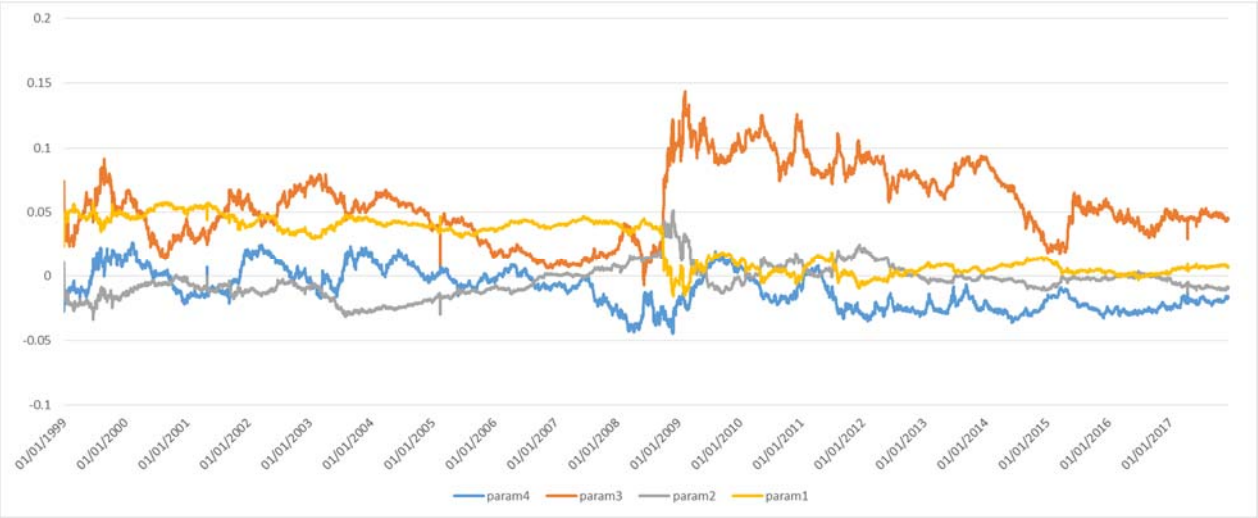
Le graphique suivant montre l'écart quadratique entre les taux historiques et paramétriques, pour des valeurs de λ_1 et λ_2 allant de 0 à 1, pour un historique journalier de taux de maturité 1 an à 30 ans, du 01/01/1999 au 23/12/2017.



Nous constatons que la diagonale $\lambda_1 = \lambda_2$ produit des erreurs. Par construction, cette diagonale correspond à l'erreur prise par le modèle de Deibold & Li. Il apparaît donc clairement que le modèle de Diebold & Li produit des écarts de fitting plus élevés que le modèle NSS.

D'autre part, nous observons que les zones associées aux erreurs les plus faibles sont celles pour lesquelles un des lambda est faible et l'autre élevé, ce qui confirme l'intuition de Gilli et Dieblod.

Les graphiques ci-dessous représentent l'évolution temporelle des $(\beta_{1t}, \beta_{2t}, \beta_{3t})$ lorsque t varie de manière quotidienne de Janvier 1999 à décembre 2017 (données quotidiennes de prix zéro-coupon Euro déduits des taux swap Euro).

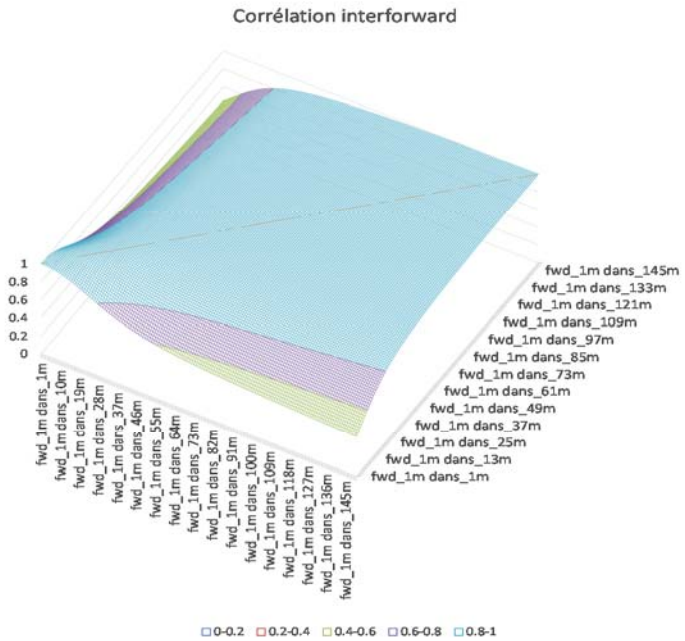


5.4.2.3 Corrélation obtenues

Fin 2017, les paramètres obtenus de la matrice de corrélation paramétrique sont les suivants :

b1	3.12
b2	3.72
b3	2.19
lambda1	0.14
lambda2	0.62
lambda3	0.01

La surface des corrélations interforward paramétrique estimée avec les parametres ci dessus est la suivante :



Confidentiel

5.4.3 Calibration de la volatilité/prise en compte du smile/skew de volatilité

Contrairement au LMM qui utilisait uniquement les niveaux de volatilité ATM (nous verrons plus bas qu'il ne peut pas modéliser le *smile* de volatilité Black), le LMM *shifté* sera calibré grâce à l'intermédiaire des prix de swaption ATM et OTM. Nous montrerons que le modèle avec *shift* se rapproche des modèles de type *Constant Elasticity of Variance* (CEV). Contrairement à ce qui est souvent proposé, le paramètre de shift peut être calibré en même temps que les paramètres qui définissent les volatilités des taux *forward.* Nous verrons également l'adéquation qu'il y a entre un niveau de *skew* constaté sur le marché et la valeur du shift. Dans le cadre du DDLMM on pourra donc objectiver une forme particulière de *skew* avec le *shift*.

5.4.3.1 Analogies avec le modèle CEV

5.4.3.1.1 Présentation du modèle CEV

Sous le modèle CEV (et notamment dans la version proposée par Andersen et Andreasen[10]), le taux *forward* $F_k(t)$ suit l'équation :

$$dF_k(t) = [\mathrm{F_k}(t)]^{\gamma}\sigma_k^{CEV}(t)dz_k(t)$$

Avec :

$$0 \leq \gamma \leq 1$$

Nous pouvons réécrire ce modèle ainsi :

$$\frac{dF_k(t)}{\mathrm{F_k}(t)} = \sigma_k^{CEV}\big(t, \mathrm{F_k}(t)\big) \times dz_k(t); \text{avec } \sigma_k^{CEV}\big(t, \mathrm{F_k}(t)\big) = [\mathrm{F_k}(t)]^{\gamma-1}\sigma_k^{CEV}(t)$$

Nous constatons que pour certaines valeurs du paramètre γ, le modèle CEV est un équivalent à d'autres modèles de taux connus :

- $\gamma = 0$: dynamique normale,
- $\gamma = \frac{1}{2}$: dynamique de type CIR,
- $\gamma = 1$: dynamique log normale.

D'autre part, pour des valeurs de γ compris entre 0 et ½ ($0 < \gamma < \frac{1}{2}$), le processus n'admet pas une unique solution, à moins que ne soit spécifiée une condition au bord pour $F_k(t) = 0$: nous fixons donc $F_k(t) = 0$ comme frontière absorbante.

Remarque : la probabilité que $F_k(t)$ tombe à 0 (et y reste puisque 0 est absorbant) est non nulle quelle que soit la valeur de $0 < \gamma < 1$.

- [10] Voir Andersen, L.,Andreasen, J., Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model, 1998

5.4.3.1.2 Analogies entre les modèles CEV et DDLMM

Il est possible de réécrire le modèle DDLMM sous la forme d'un modèle CEV. Rappelons la dynamique du modèle DDLMM :

$$dF_k(t) = \sigma_k^{DDLMM}(t)(F_k(t) + \alpha_k)dz_k(t)$$

Soit β_k tel que :

$$\alpha_k = \frac{F_k(0)(1-\beta_k)}{\beta_k}$$

$$dF_k(t) = \sigma_k^{DDLMM}(t)\left(F_k(t) + \frac{F_k(0)(1-\beta_k)}{\beta_k}\right)dz_k(t)$$

$$dF_k(t) = \frac{\sigma_k^{DDLMM}(t)}{\beta_k}\left(F_k(t)\beta_k + F_k(0)(1-\beta_k)\right)dz_k(t)$$

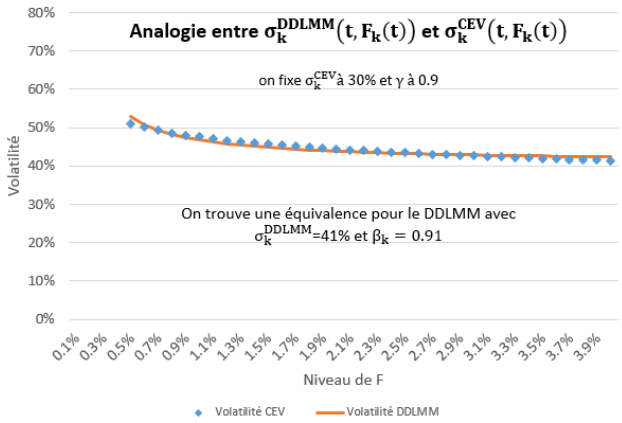
$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \frac{\sigma_k^{DDLMM}(t)}{\beta_k}\left(\beta_k + \frac{F_k(0)(1-\beta_k)}{F_{k(t)}}\right)dz_k(t)$$

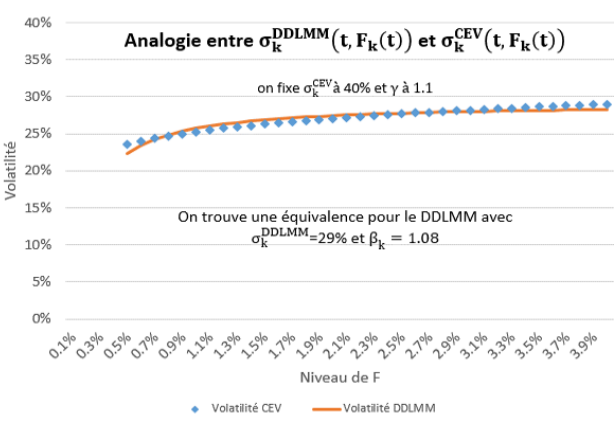
Ainsi :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sigma_k^{DDLMM}\left(t, F_k(t)\right) \times dz_k(t); avec : \sigma_k^{DDLMM}\left(t, F_k(t)\right) = \frac{\sigma_k^{DDLMM}(t)}{\beta_k}\left(\beta_k + \frac{F_k(0)(1-\beta_k)}{F_{k(t)}}\right)$$

L'analogie entre $\sigma_k^{DDLMM}\left(t, F_k(t)\right)$ et $\sigma_k^{CEV}\left(t, F_k(t)\right)$ a été démontrée dans les travaux de D. Marris[11]. Il est en effet assez aisé de trouver des paramètres DDLMM équivalents à un jeu de paramètres CEV donné pour retrouver les mêmes *smile* de volatilité :

- [11] Voir Marris, D. (1999). Financial Option Pricing and Skewed Volatility. M.Phil Thesis. Statistical Laboratory, University of Cambridge.





5.4.3.2 Estimation des prix de swaption

Les formulations utilisées pour déterminer les prix de swaption sont décrites par D. Brigo et F. Mercurio. Nous présenterons ici uniquement les formules qui ont été implémentées dans le modèle :

$$PS(0;\ \alpha, \beta, K) = \sum_{h=\alpha+1}^{\beta} \tau_h P(0, T_h) BL\left[K + \eta_{\alpha,\beta}, S_{\alpha,\beta} + \eta_{\alpha,\beta}, \Gamma_{\alpha,\beta}\right]$$

$$avec$$

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \sqrt{\int_0^{T_\alpha} [\gamma_{\alpha,\beta}(s)]^2 ds} = \sqrt{\sum_{k,h=\alpha+1}^{\beta} \rho_{k,h} \int_0^{T_\alpha} \gamma_k(s)\gamma_h(s) ds}$$

$$\gamma_k = \frac{\tau_k P(0, T_k)\sigma_k(t)(F_k(0) + \alpha_k)}{\sum_{h=\alpha+1}^{\beta} \tau_h P(0, T_h)(F_h(0) + \alpha_h)}$$

$$\eta_{\alpha,\beta} = \frac{\sum_{h=\alpha+1}^{\beta} \tau_h P(0, T_h)\alpha_h}{\sum_{h=\alpha+1}^{\beta} \tau_h P(0, T_h)}$$

Si α_k est constant pour tout k alors :

$$\eta_{\alpha,\beta} = \alpha$$

Confidentiel

Les formulations ci-dessous sont valables pour des pas annuels.

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \sqrt{\int_0^{T_\alpha} \left[\gamma_{\alpha,\beta}(s)\right]^2 ds}$$

$$= \sqrt{\sum_{k,h=\alpha+1}^{\beta} \rho_{k,h} \int_0^{T_\alpha} \gamma_k(s)\gamma_h(s) ds} = \sqrt{\sum_{k,h=\alpha+1}^{\beta} \rho_{k,h} \int_0^{T_\alpha} \frac{\tau_k P(0,T_k)\sigma_k(s)(F_k(0)+\alpha_k)}{\sum_{l=\alpha+1}^{\beta} \tau_l P(0,T_l)(F_l(0)+\alpha_l)} \times \frac{\tau_h P(0,T_h)\sigma_h(s)(F_h(0)+\alpha_h)}{\sum_{l=\alpha+1}^{\beta} \tau_l P(0,T_l)(F_l(0)+\alpha_l)} ds}$$

En pas mensuel, la formule a dû être aménagée, la formulation ci-dessous permet de relier le taux de swap au *forward* mensuel :

$$taux_swap = S_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \sum_{m=1}^{12} \frac{\frac{1}{12} B(t, T_{k-1+m})}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} B(t, T_j)} * F_{k,m}$$

Avec α et β en année, m en mois

$$\omega_{k,m} = \frac{\frac{1}{12} B(t, T_{k+m})}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} B(t, T_j)}$$

$S_{\alpha,\beta}(t)$ étant associé à la mesure $Q^{\alpha,\beta}$,le lemme d' Ito nous permet d'écrire la formulation :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \sum_{m=1}^{12} \frac{\partial S_{\alpha,\beta}(t)}{\partial F_{k,m}} \sigma_{k,m}(t)(F_{k,m}(t)+\alpha_{k,m}) dZ_{k,m}^{\alpha,\beta}(t)$$

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \sum_{m=1}^{12} \gamma_{k,m} dZ_{k,m}^{\alpha,\beta}(t)$$

avec $\gamma_{k,m} = \frac{\partial S_{\alpha,\beta}(t)}{\partial F_{k,m}} \sigma_{k,m}(t)(F_{k,m}(t)+\alpha_{k,m})$

$Z_{k,m}^{\alpha,\beta}$ est un brownien multidimensionnel avec $Z_{j,m}^{\alpha,\beta} * Z_{i,n}^{\alpha,\beta} = \rho_{(j,m),(i,n)} dt$

En négligeant la dépendance des $\omega_{k,m}$ par rapport aux $F_{k,m}$, on a :

$$\gamma_{k,m} \sim \frac{\frac{1}{12} B(t, T_{k+m})}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} B(t, T_j)} \sigma_{k,m}(t)\left(F_{k,m}(t)+\alpha_{k,m}\right)$$

$$\gamma_{k,m} = \frac{\frac{1}{12} B(t, T_{k+m}) \sigma_{k,m}(t)\left(F_{k,m}(t)+\alpha_{k,m}\right)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \sum_{a=1}^{12} \frac{1}{12} B\left(t, T_{j+a}\right)\left(F_{j,a}(t)+\alpha_{j,a}\right)} \frac{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} \sum_{a=1}^{12} \frac{1}{12} B\left(t, T_{j+a}\right)\alpha_{j,a}}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta} B\left(t, T_j\right)}$$

$$\gamma_{k,m} = \frac{B(t,T_{k+m})\sigma_{k,m}(t)\big(F_{k,m}(t)+\alpha_{k,m}\big)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\sum_{a=1}^{12}B\big(t,T_{j+a}\big)(F_{j,a}(t)+\alpha_{j,a})}\left[S_{\alpha,\beta}(t)+\frac{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\sum_{a=1}^{12}\frac{1}{12}\alpha_{j,a}}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}B\big(t,T_j\big)}\right]$$

Posons avec la méthode du « *freeze* » :

$$\gamma_{k,m}^{1} = \frac{B(0,T_{k+m})\sigma_{k,m}(t)\big(F_{k,m}(0)+\alpha_{k,m}\big)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\sum_{a=1}^{12}B\big(0,T_{j+a}\big)(F_{j,a}(0)+\alpha_{j,a})}$$

$$\eta_{\alpha,\beta}^{1}\frac{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\sum_{a=1}^{12}\frac{1}{12}B\big(t,T_{j+a}\big)\alpha_{j,a}}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}B\big(0,T_j\big)}$$

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m=1}^{12}\gamma_{k,m}^{1}(t)\big[S_{\alpha,\beta}(t)+\eta_{\alpha,\beta}^{1}\big]dZ_{k,m}^{\alpha,\beta}(t)$$

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \big[S_{\alpha,\beta}(t)+\eta_{\alpha,\beta}^{1}\big]\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m=1}^{12}\gamma_{k,m}^{1}(t)dZ_{k,m}^{\alpha,\beta}(t)$$

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \gamma_{\alpha,\beta}^{1}(t)\big[S_{\alpha,\beta}(t)+\eta_{\alpha,\beta}^{1}\big])dW_{1}^{\alpha,\beta}(t)$$

Avec

$$\gamma_{\alpha,\beta}^{1}(t) = \sqrt{\sum_{k,h=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m,n=1}^{12}\gamma_{k,m}^{1}(s)\gamma_{h,n}^{1}(s)\rho_{k,m,h,n}}$$

Et

$$dW_{1}^{\alpha,\beta}(t) = \frac{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m=1}^{12}\gamma_{k,m}^{1}(t)dZ_{k,m}^{\alpha,\beta}(t)}{\gamma_{\alpha,\beta}^{1}(t)}$$

On utilise la formule proposée par D. Brigo et F. Mercurio pour passer au prix de Black

$$PS(0;\ \alpha,\beta,K) = \sum_{h=\alpha+1}^{\beta}\tau_h P(0,T_h)BL\big[K+\eta_{\alpha,\beta}^{1}\ ,S_{\alpha,\beta}+\eta_{\alpha,\beta}^{1},\Gamma_{\alpha,\beta}^{1}\big]$$

$$\Gamma_{\alpha,\beta}^{1} = \int_{0}^{T_\alpha}\big[\gamma_{\alpha,\beta}^{1}(t)\big]^{2}ds = \sqrt{\sum_{k,h=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m,n=1}^{12}\rho_{k,m,h,n}\int_{0}^{T_\alpha}\gamma_{k,m}^{1}(s)\gamma_{h,n}^{1}(s)ds}$$

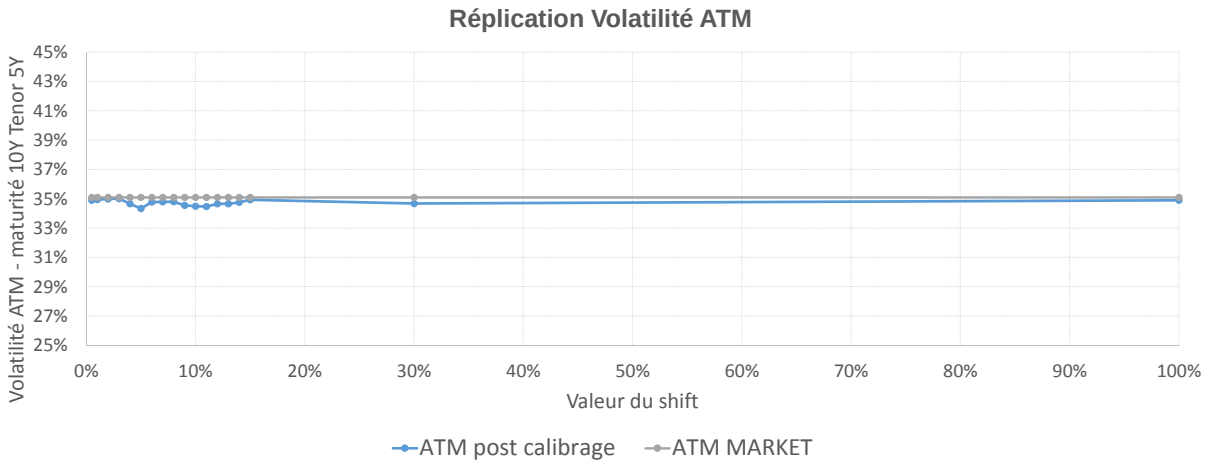
avec :

$$\gamma_{k,m}^{1} = \frac{B(0,T_{k+m})\sigma_{k,m}(t)\big(F_{k,m}(0)+\alpha_{k,m}\big)}{\sum_{j=\alpha+1}^{\beta}\sum_{a=1}^{12}B\big(0,T_{j+a}\big)(F_{j,a}(0)+\alpha_{j,a})}$$

5.4.3.3 Effet du shift sur le skew

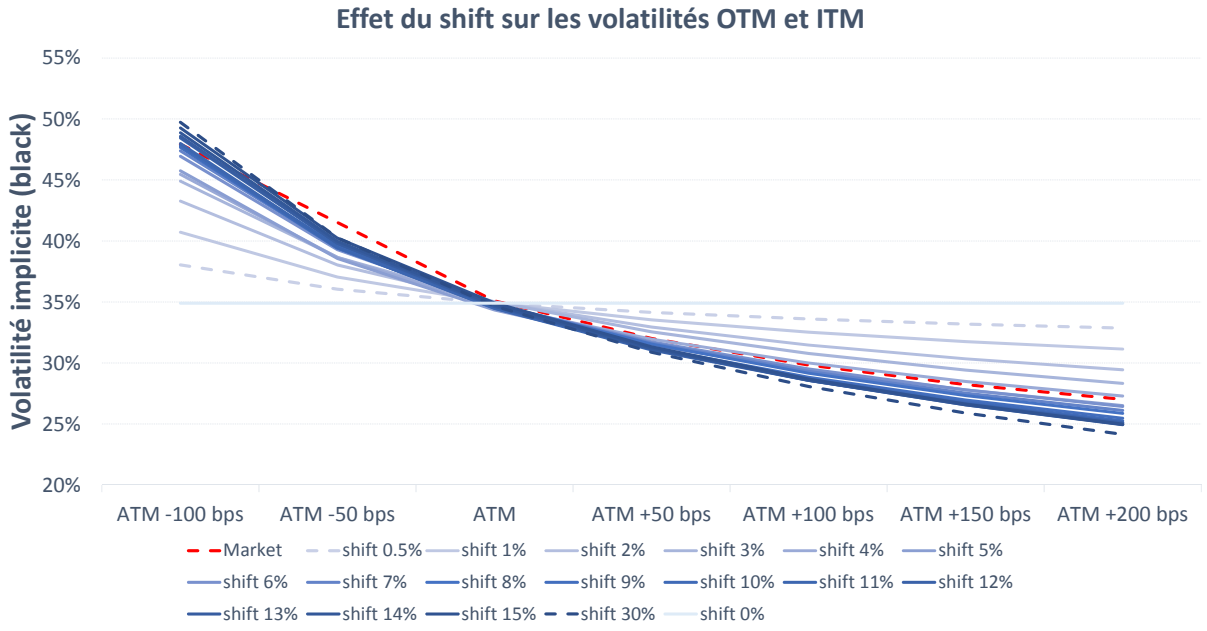
Afin d'illustrer l'analogie du DDLMM avec le modèle CEV, une des caractéristiques fondamentales du modèle, nous avons simulé un ensemble de calibrages en fixant le *shift* à différents niveaux et en laissant libres les autres paramètres du modèle pour chercher à répliquer la nappe des swaptions ATM. Les graphiques ci-après illustrent le processus décrit ci avant :

- On réplique des niveaux ATM sans contraindre le calibrage sur les niveaux ITM et OTM pour différents niveaux de shift. Le graphique ci-après présente les résultats obtenus pour la swaption ATM de maturité 10Y et de *Tenor* 5Y.



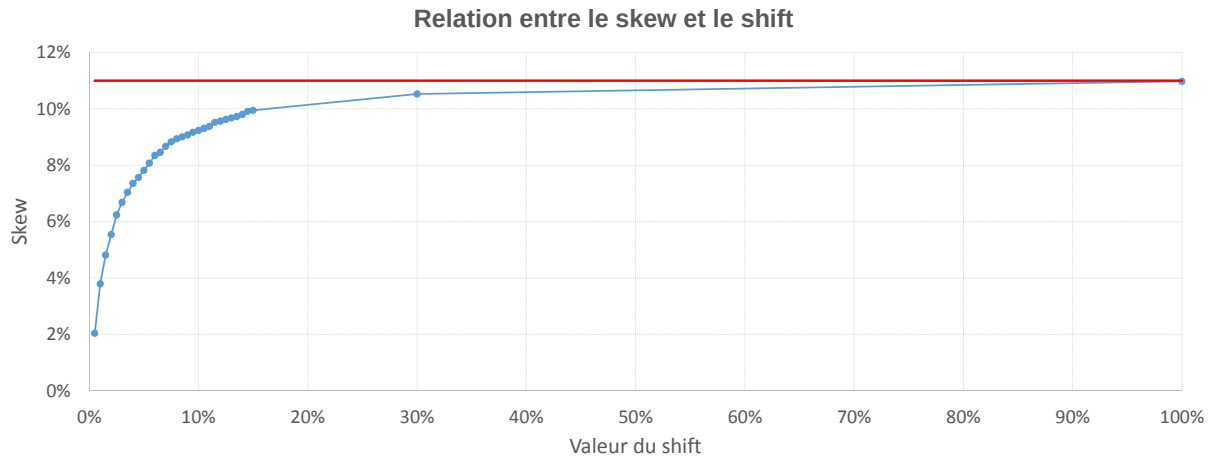
On observe une bonne réplication des volatilités de Black ATM pour les différentes valeurs du *shift* allant de 0% à100%

- Le graphique rend compte des effets du shift sur les volatilités implicites OTM



Confidentiel

L'analyse du *skew* (différence entre la volatilité de black ATM et la volatilité de Black ATM+200bp par exemple) nous permet également d'observer sur le graphique ci-après que ce dernier converge vers une valeur de 11% quand celui-ci tend vers une valeur très grande. On peut considérer ce constat comme une des limites du DDLMM. En effet, dans les cas où des *skew* supérieurs à 12% seraient observés sur les marchés, la réplication de ceux-ci risquerait de s'avérer impossible.



shift	0.5%	1.0%	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%	3.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	6.5%	7.0%	7.5%	8.0%	8.5%
skew (différence entre l'ATM et l'ATM +200 bps)	2.0%	3.8%	4.8%	5.5%	6.2%	6.7%	7.0%	7.4%	7.6%	7.8%	8.1%	8.3%	8.5%	8.7%	8.8%	8.9%	9.0%

shift	9.0%	9.5%	10.0%	10.5%	11.0%	11.5%	12.0%	12.5%	13.0%	13.5%	14.0%	14.5%	15.0%	30.0%	100.0%
skew (différence entre l'ATM et l'ATM +200 bps)	9.1%	9.2%	9.2%	9.3%	9.4%	9.5%	9.6%	9.6%	9.7%	9.7%	9.8%	9.9%	9.9%	10.5%	11.0%

Les analyses réalisées nous permettent de conclure sur le rôle du *shift* : il permet de contrôler le *skew,* mais en contrepartie son champ de réplication contient un certain nombre de limites.

5.4.3.4 Détermination des paramètres

Cadre Solvabilité 2 : le GSE est calibré sur des prix de swaptions ATM et OTM. Les prix de ces swaptions sont calculés à partir des volatilités de marché (ATM et OTM), de la courbe de taux de marché (courbe des taux swap) et des courbes de taux « S2 » (i.e. avec ajustement lié à la réglementation S2 : CRA, VA, UFR). La réglementation précise que les modèles de taux doivent être calibrés sur les volatilités de marché et sur la courbe de taux utilisée pour déflater les flux financiers du modèle ALM (i.e. sur la courbe de taux S2).

Remarque : nous avons vu que le modèle LMM *shifté* était calibré en minimisant la somme des écarts quadratiques pondérés des prix des swaptions. Le choix de minimiser des écarts de prix plutôt que de volatilités n'est pas contradictoire avec la réglementation puisque les volatilités ne sont qu'une traduction des prix de marché dans un modèle donné. Les volatilités extraites sont associées aux prix de marché des swaptions et à la courbe de taux de swap. Le changement de courbe de taux (de celle de marché à celle S2) tout en conservant les volatilités nécessite de modifier les prix des swaptions (ces trois quantités étant liées). Deux approches sont possibles : la conservation des volatilités Black ou Bachelier. Comme l'ont soulevé Dimitroff et al. (Lognormal vs Normal Volatilities and Sensitivities in Practice, 2016), les volatilités Bachelier sont moins sensibles à un changement de la courbe de taux et sont définies même

en cas de taux swap négatifs. La suite du mémoire permettra de mesurer les impacts liés au choix de la volatilité retenue comme élément invariant.

On suppose que le *displacement* a la forme paramétrique suivante :

$$displacement_k = abs(a_{shift}) * \max(b_{shift} + (1 - b_{shift}) * e^{-c_{shift}*k}, 0)$$

On suppose que les Φ_t ont la forme paramétrique suivante :

$$\Phi_t = \max(0, p_1 + (1 - p_1) * e^{-p_2*(T-1)})$$

On conserve la même forme que précédemment pour la volatilité :

$$\sigma_i(t) = \Phi_t * \left([b(T_{i-1} - t) + a] * e^{-c(T_{i-1}-t)} + d\right)$$

Les instruments de marché utilisés pour la calibration sont, par exemple, les swaptions suivantes :

Tenor	Maturité	Strike
2 ans	2 ans, 5 ans, 10 ans	ATM, ATM + 50 bps, ATM + 100 bps, ATM + 200 bps
5 ans	2 ans, 5 ans, 10 ans	ATM, ATM + 50 bps, ATM + 100 bps, ATM + 200 bps
10 ans	2 ans, 5 ans, 10 ans	ATM, ATM + 50 bps, ATM + 100 bps, ATM + 200 bps

N.B. : le choix des instruments utilisés pour la calibration a pour but de répliquer au mieux les prix de marché.

Pour chaque tenor, il y a donc 12 (= 3 maturités * 4 *strikes*) prix de swaptions à « fitter ».

L'erreur ε_1 à minimiser sur les prix des swaptions est définie par :

$$\varepsilon_1(a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{l=1}^{S} \left(swaption_{LMM-shift}(a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, p_1, p_2, M_j, T_i, S_l) - swaption_{market}(M_j, T_i)\right)^2$$

avec N le nombre de ténors, M le nombre de maturités, T_i les ténors, M_i les maturités considérées, S_l les *strikes*, $w_{i,j,l}$est le poids associée à la swaption ; et $swaption_{market}$ les prix de swaptions observées sur le marché

Les paramètres à calibrer sont donc $a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, p_1, p_2$. Ils sont déterminés en minimisant la fonction cible suivante :

$f_{LMM-shift}(a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, p_1, p_2) = \varepsilon_1$Avec $x \in \Re^9$,

Notre vecteur de paramètres sera donc : $x = (a, b, c, d, a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, p_1, p_2)$.

5.5 MODELE DE TAUX LMM + SHIFT A N FACTEURS + VOLATILITE STOCHASTIQUE.

Ce modèle n'est pas traité dans ce mémoire, il est utilisé si la modélisation du *skew* qui est faite dans le DDLMM ne permet pas de répliquer correctement les niveaux de *skew* observés sur le marché. On se retrouve alors avec deux jeux de paramètres pour répliquer les volatilités OTM : un jeu de paramètre pour le *shift* et un jeu de paramètre pour la volatilité stochastique. Ce modèle est plus complexe que le DDLMM.

Confidentiel

6 MODELES ACTION ET IMMOBILIER

6.1 MOUVEMENT BROWNIEN GEOMETRIQUE

Le modèle utilisé pour le driver action (resp. pour le driver immobilier) est un modèle de Black Scholes avec une structure de volatilité par terme déterministe. L'indice modélisé est un indice « total return », la structure temporelle du dividende n'est pas intégrée dans le générateur de scénarios économiques.

Un modèle de mouvement brownien géométrique permet d'intégrer :

- un taux court stochastique,
- une structure par terme de la volatilité,
- le caractère martingale de l'indice.

→ Il s'agit d'un modèle très simple à calibrer et à implémenter.

→ Ce modèle est aisément adaptable en monde réel, en intégrant une prime de risque au rendement sans risque.

Notons $S(t)$ la valeur de l'indice action/immobilier à une date t quelconque. La dynamique suivie par ce processus sous la probabilité **spot Libor** est supposée s'écrire de la façon suivante :

$$d\,(S(t)D(t)) = S(t)D(t)\left(-q(t)dt + \sigma(t)\,dW^{Q^d}(t)\right)$$

Où $D(t)$ est le déflateur sous la probabilité **spot Libor** en date t, $q(t)$ le taux de dividende en date t, $\sigma(t)$ est la volatilité de l'action (supposée être une fonction déterministe du temps), W^{Q^d} est un mouvement brownien sous la probabilité **spot Libor**. Comme indiqué précédemment, le taux de dividende est supposé nul à toute date, i.e. $q(t) := 0$ pour tout $t \geq 0$ (l'indice diffusé est total return).

L'expression de $S(t)$ obtenue en résolvant cette équation différentielle est

$$S(t) = \frac{S(0)}{D(t)}\exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma^2(s)}{2}\,ds + \int_0^t \sigma(s)\,dW^{Q^d}(s)\right)$$

En supposant le taux sans risque et la volatilité constants par morceau (entre deux dates entières correspondant à deux années successives), la relation de récurrence suivante est vérifiée (pour toute date t) :

$$S(t+1) = S(t)\frac{D(t+1)}{D(t)}\exp\left(-\frac{\sigma^2(t)}{2} + \sigma(t)\left(W^{Q^d}(t+1) - W^{Q^d}(t)\right)\right)$$

Confidentiel

Remarque :

- Le déflateur D est issu du modèle LMM,
- La corrélation entre le taux court et le brownien géométrique devra être homogène.

La forme de volatilité qui est utilisée est dépendante du temps, cela nous permettra de calibrer le modèle pour retrouver un jeu de prix (panier d'options avec des termes différents) :

$$\sigma_t = (a + b \times t)e^{-c \times t} + d$$

Les paramètres a,b,c,d devront être définis pour minimiser les écarts entre les volatilités implicites de Black observées sur le marché et celles du modèle. La volatilité implicite d'un brownien géométrique est définie par la relation ci-dessous :

$$\sigma_{imply_black\,T} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2\, dt}$$

a, b, c, d seront déterminés par minimisation de l'écart quadratique. Selon la nature des volatilités du marché, il se peut très bien que seuls deux paramètres suffisent pour calibrer correctement la volatilité observée.

On souhaite minimiser l'écart quadratique entre les volatilités implicites observées sur le marché et les volatilités calculées en utilisant la formulation ci-dessus :

$$\text{erreur} = \sum_{k=1}^{nbdeprix} poids_k * (vol_k^{marché} - vol_k^{modéle})^2$$

Ici la fonction à minimiser est la fonction erreur ($erreur(a,b,c,d)$).

Notre vecteur de paramètres sera donc : $x = (a,b,c,d)$.

Remarque : des cotations de dérivés immobilier n'étant pas disponibles, la volatilité σ_t immobilier est d'une part supposée constante, et d'autre part estimée à partir d'un historique.

Les actifs immobiliers sont en grande majorité constitués d'immobilier français de bureau détenu en propre. L'estimation prudente de la volatilité associée à ce type d'investissement consiste à calculer la borne supérieure de l'intervalle de confiance à 95% de la variance empirique des log-rendement d'un indice immobilier. L'indice retenu est l'indice IPD France Total Return Office.

La volatilité empirique calculée sur l'historique complet (historique annuel débutant en 1998) est de 5,8%, et la borne supérieure de l'intervalle de confiance associé est égale à 8,5%. La volatilité retenue est donc égale à 8,5%.

Remarque : l'utilisation de l'indice IPD France Total Return, ou l'utilisation de log-rendements déflatés aboutissent à des volatilités plus faibles.

6.2 TESTS DE COMPATIBILITE ENTRE B&S ET MONTE CARLO

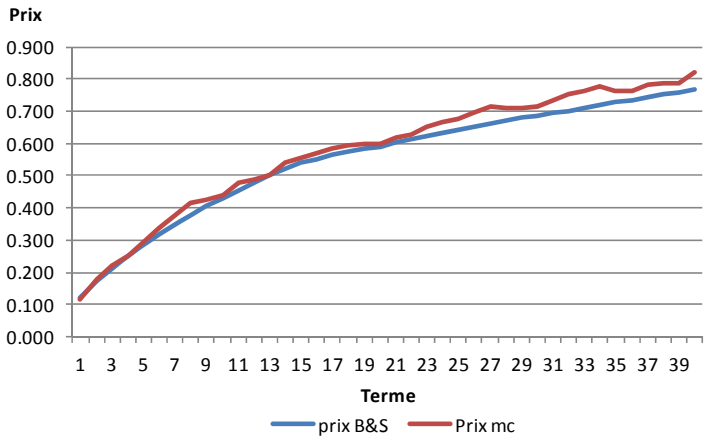
Le test ci-dessous permet de comparer le prix calculé par la formule de Black, et celui calculé par le modèle (Monte Carlo), pour un terme et un *strike* donnés. On constate une très bonne convergence du MC sur les 25 premières années et une détérioration par la suite.

Le calcul du prix d'un call action à la monnaie (Prix MC) est réalisé avec la formulation ci-dessous (pour toutes les maturités, le *strike* est égal à la valeur de l'indice en t=0) :

$$Call_action_T = \frac{1}{nb_simulation} \sum_{i=1}^{nb_simulation} MAX(Action_{i,T} - Action_{i,0}; 0) \times DF_{i,T}$$

TERME	taux continu	d1	d2	prix B&S	Prix mc	Ecart en %
1	1.812%	0.20	-0.075	0.119	0.116	-2%
2	1.724%	0.28	-0.110	0.171	0.177	3%
3	1.796%	0.35	-0.129	0.213	0.221	4%
4	1.960%	0.42	-0.136	0.250	0.252	1%
5	2.152%	0.48	-0.135	0.285	0.294	3%
6	2.339%	0.55	-0.130	0.318	0.340	7%
7	2.496%	0.60	-0.124	0.349	0.377	8%
8	2.622%	0.66	-0.118	0.378	0.414	10%
9	2.728%	0.71	-0.112	0.405	0.426	5%
10	2.819%	0.76	-0.106	0.430	0.441	2%
11	2.909%	0.81	-0.098	0.455	0.478	5%
12	2.984%	0.85	-0.091	0.478	0.489	2%
13	3.045%	0.89	-0.084	0.500	0.503	1%
14	3.090%	0.93	-0.079	0.521	0.541	4%
15	3.120%	0.97	-0.075	0.540	0.557	3%
16	3.038%	0.99	-0.087	0.553	0.570	3%
17	2.941%	1.01	-0.102	0.564	0.583	3%
18	2.837%	1.02	-0.119	0.574	0.594	3%
19	2.726%	1.03	-0.138	0.583	0.601	3%
20	2.607%	1.03	-0.159	0.590	0.599	2%

S_0=1 et strike=1



Remarque : l'impact de la volatilité des taux nominaux lors du calibrage des paramètres de volatilités action a été négligé. Leur prise en compte nécessiterait soit un calibrage via méthode de Monte Carlo ce qui n'est pas pragmatique, soit l'emploi d'un modèle hybride.

Pour s'assurer que la volatilité des scénarios est bien homogène à la volatilité entrée en input, on recalcule la volatilité des log-rendements.

La première étape du calcul consiste à calculer les variances locales des log-rendements déflaté des prix de l'actif pour chaque période de un an et sur chaque scénario (i allant de 1 à N) :

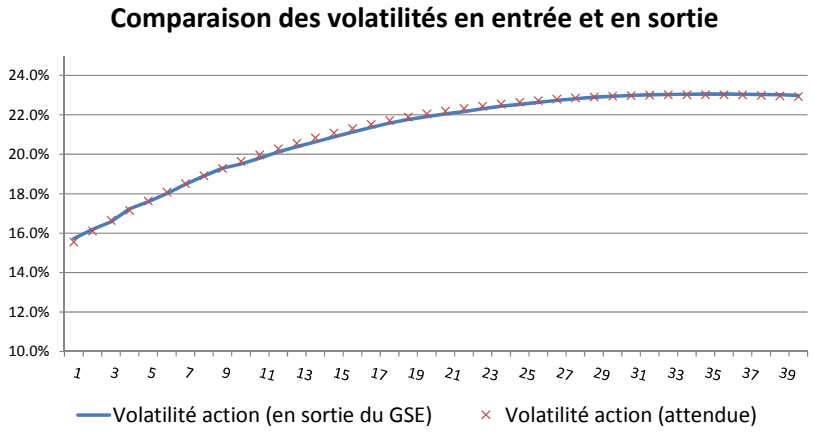
$$Log\ r_{s,i}(t) = log\left(\frac{S_i(t+1)D_i(t+1)}{S_i(t)D_i(t)}\right)$$

$$VAR(Log\ r_s(t)) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Log\ r_{s,i}(t) - \overline{Log\ r_s(t)}\right)^2$$

La variance est calculée sur les quarante années de projection, les volatilités implicites empiriques sont déterminées à partir des variances locales précédemment calculées :

$$Volatilité\ implicite\ empirique(T) = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} VAR(Log\ r_s(t))}{T}}$$

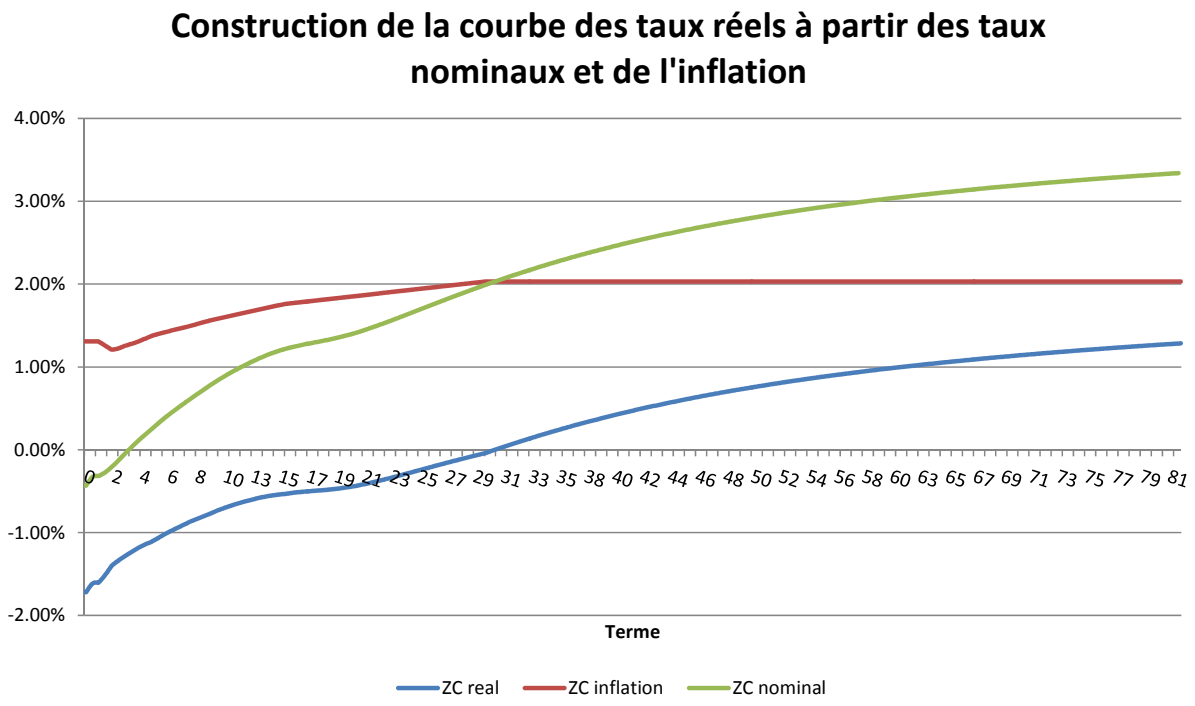
La réalisation de ce test est présentée dans le graphique ci-dessous :



Confidentiel

7 MODELE DE TAUX REELS

Le modèle de taux réels aura pour vocation de diffuser la courbe des taux réels. La courbe des taux réels est construite à partir des taux nominaux et des taux zéro coupon inflation, qui sont directement observables sur le marché. Le graphique ci-dessous représente les trois différentes courbes à la date du 30/12/2017 :



Le taux de swap inflation zéro coupon (ZCIIS) est un standard dans la valorisation des produits dérivés sur inflation. Le sous-jacent correspond à l'indice des prix de la consommation (CPI).

On l'appelle Zéro coupon car il n'y a qu'un seul et unique flux qui est échangé au terme du swap, il n'y a pas de coupon intermédiaire.

Ce produit permet d'échanger l'inflation anticipée à une date donnée (en l'occurrence T_0) contre l'inflation qui se réalisera vraiment).

Détails des flux du swap inflation :

$$P_r(0,T_M) = P_n(0,T_M)(1+K_M)^M$$

Au terme T_M= M années

La compagnie B paye à la Compagnie A un montant fixe : $\mathrm{N}[(1+K)^M - 1]$

La compagnie A paye à la Compagnie B un montant variable : $\mathrm{N}\left[\frac{I(T_M)}{I(T_0)} - 1\right]$

Confidentiel

Avec :

- K est le taux échangé contre l'inflation, il correspond au taux de la courbe au moment où le swap est mis en place, en T_0la valeur du swap vaut zéro,
- N est le nominal du swap,
- M est le nombre d'années,
- T_0 est la date de début du swap,
- T_M est la date de terme du swap,
- $I(T_0)$ est le niveau de l'inflation au moment de la mise en place du swap,
- $I(T_M)$ est le niveau de l'inflation constaté au terme du swap.

La courbe des taux réels obéit à la formulation suivante :

$$P_r(0,T_M) = P_n(0,T_M)(1+K_M)^M$$

Avec :

$P_r(0,T_M)$ qui correspond au prix de l'obligation zéro coupon en t=0 de maturité T_M dans l'économie réelle.

$P_n(0,T_M)$ qui correspond au prix de l'obligation zéro coupon en t=0 de maturité T_M dans l'économie nominale.

Les modèles qui pourront être utilisés pour diffuser la courbe des taux réels seront les modèles de Vasicek ou Hull & White car ils permettent d'avoir des taux négatifs, ce qui n'est pas le cas du LMM. Un seul facteur sera à l'origine des déformations de la courbe inflation.

Remarque : le modèle DDLMM n'a pas été retenu pour des raisons de calibrage : ce modèle est très paramétré et nécessite un grand nombre de cotations de dérivés, non disponibles pour les taux réels, pour être calibré.

7.1 UTILISATION DE HULL & WHITE POUR SIMULER LES TAUX REELS

Pour diffuser les taux réels on utilise le modèle HW, la démonstration de l'équation de diffusion est rigoureusement la même que celle utilisée pour les taux nominaux.

L'équation et les paramètres utilisés sont définis ci-après :

- σ est un facteur de volatilité de prix d'obligation dans l'économie réelle,
- a est le coefficient de retour à la moyenne, il représente l'amortissement d'un choc de taux en fonction de la maturité du zéro coupon.

$$P_r(t,T) = \frac{P_r(0,T)}{P_r(0,t)}\exp\left(\frac{\sigma}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)\left(\left(1-e^{-2at}\right)\left(1-e^{-a(T-t)}\right)+2\left(1-e^{-at}\right)^2\right)\right)$$

Pour retrouver à une date donnée l'ensemble des prix des zéro coupon, on peut réécrire la formulation ci-dessous comme cela :

$$P_r(t_n, t_n + M) = \frac{P_r(0, t_n + M)}{P_r(0, t_n)} \exp\left(\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right) OrnU(t_n) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{a^3}\left(1 - e^{-a(M)}\right)\left(\left(1 - e^{-2at_n}\right)\left(1 - e^{-a(M)}\right) + 2\left(1 - e^{-at_n}\right)^2\right)\right)$$

où M correspond à la durée de l'obligation.

Dans l'univers risque neutre, le déflateur monde réel correspond à l'expression suivante :

$$D_r(0, t) = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$$
$$D_r(t_{n-1}, t_n) = \exp\left(-\int_{t_{n-1}}^{t_n} r_s ds\right) \approx P_r(t_{n-1}, t_n)$$

Dans le cadre de la modélisation des taux réels, nous considérons la courbe des taux réels au même titre qu'une courbe de taux nominaux. De ce fait, la discrétisation et la modélisation sont directes.

7.2 L'INDICE INFLATION

L'indice des prix à la consommation (noté $I(t)$ à la date t) est défini comme le prix (en euros) à la date t d'un panier de biens et services de référence.

Le modèle retenu est un modèle de Jarrow Yildirim où la volatilité de l'inflation est supposée nulle. En notant r et n les processus des taux courts de l'économie réelle et nominale respectivement, la valeur à la date t du CPI est

$$I(t) = \exp\left(\int_0^t (n(s) - r(s))\, ds\right)$$

Cette formule correspond à celle figurant dans [Brigo, Mercurio].

Supposons que les processus n et r soient constants par morceaux. On obtient la relation de récurrence (en supposant que les processus r et n sont constants sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$),

$$I(t + \Delta t) = I(t) \exp\big((n(t) - r(t))\, \Delta t\big)$$

En utilisant une composition simple pour les taux réels et nominaux, on retrouve la formule de la page 40 de la documentation, à savoir :

$$I(t + \Delta t) = I(t)\left(\frac{1 + n(t)\, \Delta t}{1 + r(t)\, \Delta t}\right)$$

Cependant, les processus des taux courts nominaux et réels ne sont pas directement diffusés dans les modèles de taux utilisés (LMM/DDLMM pour les taux nominaux, HW pour les taux réels). La formule de récurrence réellement utilisée dans le GSE pour la diffusion de l'indice inflation est

$$I(t+\Delta t) = I(t)\ \frac{P_r(t,t+\Delta t)}{P_n(t,t+\Delta t)}$$

La calibration de la volatilité inflation pourra se faire de façon empirique, en calculant le *payoff* du cap inflation du modèle à l'aide des simulations de Monte Carlo ou à l'aide de données historiques.

La formulation utilisée pour valoriser un cap inflation est définie ci-dessous :

$$Cap\quad_{inflation_T} = \frac{1}{nb_{simulation}} \sum_{i=1}^{nb_{simulation}} MAX\left(\frac{indice_{inflation_{i,T}}}{indice_{inflation_0}} - (1+k_T)^T; 0\right) \times DF_{i,T}$$

7.3 RISQUE NEUTRALITE DE L'INFLATION ET DES TAUX REELS

L'absence de volatilité de l'indice inflation dans le modèle de Jarrow – Yildirim permet d'assurer la validité des tests de martingalité sur l'indice inflation et sur les taux réels.

Le panier de biens et services utilisé pour la définition de l'indice CPI I (à toute date t, $I(t)$ est le prix en unités de monnaie de ce panier) est un actif échangeable sur le marché. Soit T une date quelconque. Considérons un portefeuille constitué d'un zéro-coupon réel entre les dates 0 et T. A toute date t telle que $0 \leq t \leq T$, la valeur de ce portefeuille, exprimée en paniers de biens et services, est égal à $P_r\ (t,T)$. En unités de monnaie, la valeur de ce portefeuille à une date t est donc égale à $I(t)P_r\ (t,T)$. Sous la probabilité risque neutre, le processus $\left(I(t)P_r\ (t,T)\right)_{t\in[\![0,T]\!]}$ est donc une martingale.

Pour toutes dates $0 \leq t \leq T$, on doit *a fortiori* avoir

$$E^Q\ \left(D(t)\ I(t)\ P_r\ (t,T)\right) = I(0)\ P_r\ (0,T)$$

$$E^Q\ \left(D(t)\ I(t)\right) = I(0)\ P_r\ (0,t)$$

où Q désigne la probabilité risque – neutre.

Sous l'hypothèse de volatilité inflation nulle, l'indice inflation s'écrit $I(t) = I(0)\ e^{\int_0^t (n(u)-r(u))du}$. A fortiori, $E^Q\ \left(D(t)\ I(t)\ P_r\ (t,T)\right) = I(0)\ E^Q\ \left(e^{-\int_0^t r(u)du}\ P_r\ (t,T)\right)$, qui est bien égal à $I(0)\ P_r\ (0,T)$ puisque $P_r\ (t,T)$, $t \in [0,T]$, est le prix d'un actif échangeable sur le marché (donc sa valeur actualisée au taux réel est une martingale sous la probabilité risque neutre). La deuxième égalité est un cas particulier de la première, obtenue en prenant $T := t$.

7.4 CALIBRATION DE LA VOLATILITE DE HULL & WHITE

Le calibrage du modèle inflation nécessite que le modèle de taux nominaux ait été préalablement calibré. La méthode de calibrage qui est proposée repose sur la réplication de dérivés inflation de type CAP ou FLOOR. La formulation utilisée pour valoriser un cap inflation avec la méthode de Monte Carlo est définie ci-dessous :

$$Cap_inflation_T = \frac{1}{nb_{simulation}} \sum_{i=1}^{nb_{simulation}} MAX\left(\frac{indice_{inflation_{i,T}}}{indice_{inflation_0}} - (1+k_T)^T; 0\right) \times DF_{i,T}$$

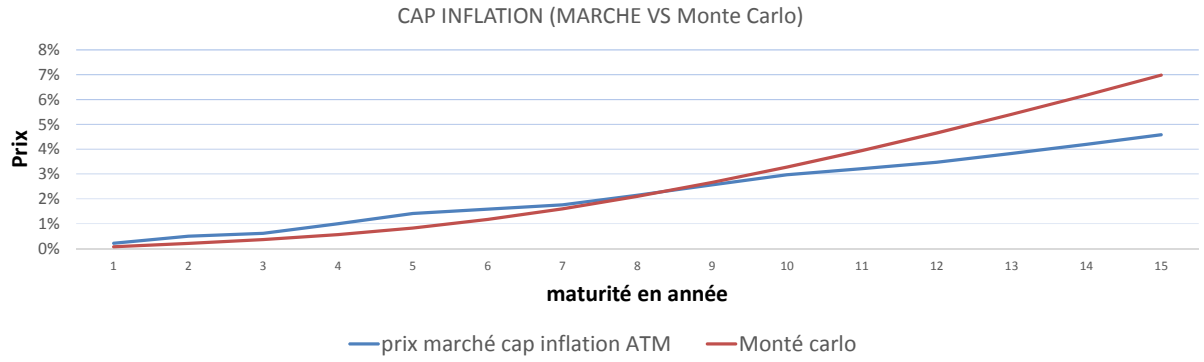
On arrive à obtenir des cotations d'options sur inflation, en l'occurrence, de *CAP* inflation zéro coupon. Les informations s'obtiennent en contactant des opérateurs de marché spécialisés sur ces produits**.** Même si l'on connaît le caractère relativement illiquide de ce genre de produits, il peut néanmoins nous donner un ordre de grandeur sur la valorisation de ces produits.

Avec le modèle utilisé, nous n'avons pas de formule fermée pour répliquer directement les prix de cap inflation. La calibration de la volatilité inflation se fera en calculant le *payoff* du cap inflation du modèle à l'aide des simulations. Pour accomplir cela, nous sommes amenés à réaliser quelques simulations en Monte Carlo pour calculer des prix et déterminer les valeurs des deux paramètres du modèle HW qui servent à répliquer les taux réels (le modèle de taux nominaux étant déjà calibré). Ce calibrage que l'on peut qualifier d'empirique permet d'aboutir à des résultats concluants et de palier l'estimation de volatilité historique qui n'est pas toujours en phase avec une approche *market consistent*.

Le tableau ci-dessous nous donne un récapitulatif des calculs (méthode Monte Carlo) des *CAP* inflation à la monnaie calculés par le modèle ainsi que la valorisation de marché de ses instruments constatée en 2017.

Avec les paramètres du modèle HW suivants :

parametres du modele HW	
the mean reverting speed (a)	6.00%
the volatility of short rate (σ)	0.40%



On constate une bonne homogénéité entre ce que calcule les contributeurs et ce que calcule le modèle sur les dix premières années. Cette méthode, même si elle est moins élégante, a l'avantage d'être assez robuste.

Une autre méthode basée sur l'évaluation de la volatilité historique des taux réels peut être utilisée si l'information concernant les prix de dérivés inflation n'est pas disponible. La méthode proposée consistera à calculer la volatilité du prix d'un zéro coupon réel de maturité dix ans. La formulation suivante permet d'évaluer le prix d'un ZC réel.

$$P_r(0,T_M) = P_n(0,T_M)(1+K_M)^M$$

Pour du 10Y, on a :

$$P_r(0,T_{10}) = P_n(0,T_{10})(1+K_{10})^{10}$$

L'application de la formule nous permettra de reconstruire l'évolution du prix recherché sur une plage historique de données. Si le calcul est basé sur des variations journalières, la volatilité annuelle s'obtient grâce à la formulation suivante :

$$\sigma_{annuelle} = \sigma_{journaliere}\sqrt{nombre\ de\ jour\ dans\ une\ année}$$

La transformation en volatilité de HW se fait en appliquant les principes de diffusion utilisés :

$$\frac{dP_r(s,T)}{P_r(s,T)} = r_s ds + \Gamma(s,T)dW_s$$

Avec la forme de volatilité ci-dessous :

$$\Gamma(s,T) = \frac{\sigma_{HW}}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

On obtient la relation suivante entre la volatilité de Hull & white et la volatilité historique :

$$\sigma_{HW} = \frac{\Gamma_{histo}(s,T)a}{1 - e^{-a(T-t)}}$$

8 SOURCE D'ALÉA

Une des problématiques majeure consiste à choisir la bonne source d'aléas pour optimiser la vitesse de convergence. C'est là que les méthodes de Monte Carlo et de quasi Monte Carlo se distinguent. Dans un Monte Carlo classique, on génère w réalisations d'une gaussienne centrée réduite. Dans un quasi Monte Carlo, on procède d'une manière un peu plus subtile : les réalisations du mouvement brownien ne sont pas générées de façon aléatoire, mais de façon quasi-aléatoire. On ne va pas utiliser des variables aléatoires, mais des variables déterministes qui sont plus uniformément distribuées. En fait, on s'arrange pour que les nombres aléatoires choisis soient bien uniformes, et ceci améliore nettement la convergence du Monte Carlo. Il existe plusieurs types de suites de nombres quasi-aléatoires. Nous avons choisi les suites de Sobol.

Nous avons étudié deux sources d'aléas distincts :

1. source d'aléa venant de la fonction random du c++ (générateur congruentiel),
2. source d'aléa venant de la fonction Mersenne Twister (pseudo aléatoire),
3. enfin un générateur de séquence de Sobol à discrépance faible (quasi aléatoire).

Les trois générateurs ont été implémentés sous C++ (le code de génération des suites de Sobol, du générateur Mersenne-Twister ont été obtenus sur internet).

Les nombres aléatoires uniformes ainsi générés sont ensuite transformés en réalisations de loi normale par l'algorithme d'inversion de la loi normale de Gauss Moro.

8.1 RAND C++

Nous avons utilisé une version modifiée : Donald E. Knuth's subtractive random number generator algorithm. Il s'agit de la fonction de « visual studio c++»

8.2 MERSENNE TWISTER

L'algorithme et l'implémentation de la loi uniforme [0,1] correspondent à ceux proposés par Makoto Matsumoto et Takuji Nishimura[12].

Comme dans le cas de rand c++, la loi normale s'obtient avec Gauss Moro.

[12] M. MATSUMOTO, T. NISHIMURA. A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator

8.3 SUITES DE SOBOL

Nous n'avons pas implémenté l'algorithme permettant de calculer les suites de Sobol. Nous avons utilisé un code source distribué gratuitement par deux mathématiciens Stephen Joe et Y.Kuo[13], qui ont fait des recherches avancées sur le sujet.

Les suites de Sobol sont définies à partir de polynômes primitifs sur $Z_2 = \{0,1\}$. On rappelle à cet effet la définition d'un polynôme primitif :

Définition

Un polynôme $p(t)$ de degré s de la forme $t^s + u_1 t^{s-1} + \ldots + u_{s-1} t + u_s$ est primitif sur le corps $\boldsymbol{Z}_2$ s'il est irréductible sur $\boldsymbol{Z}_2$ et si le plus petit entier i pour lequel il divise $t^i - 1$ (ou $t^i + 1$) est égal à $2^s - 1$.

La notion d'irréductibilité consiste à vérifier si le polynôme $p(t)$ n'est divisible par aucun autre polynôme de degré inférieur. Le plus petit entier positif i tel que $p(t)$ divise $t^i - 1$ est aussi appelé l'ordre du polynôme. Un polynôme primitif de degré s doit posséder les monômes 1 et t^s, ainsi qu'un nombre impair de termes.

Définition

Une suite de Sobol' $S = \left\{x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}\right\}$ en dimension 1 est définie comme suit

$$x^i = \frac{1}{2^m}\left(\bigoplus_{k=1}^{m} p_k l_k\right),$$

où $(p_1, \ldots, p_m)$ est la représentation binaire de i, $m = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ 1 + \lfloor \log_2 i \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$ et où le symbole $\oplus$ désigne simplement l'addition dans $\boldsymbol{Z}_2$ [8].

Les l_k avec $k > s$ sont obtenus en utilisant la relation de récurrence suivante

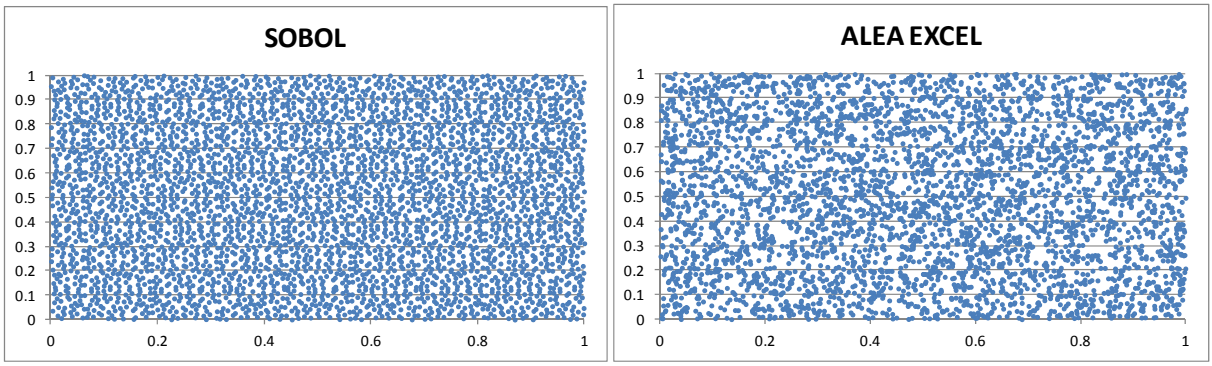
$$l_k = 2u_1 l_{k-1} \oplus 2^2 u_2 l_{k-2} \oplus \cdots \oplus 2^{s-1} u_{s-1} l_{i-s+1} \oplus (2^s l_{i-s} \oplus l_{i-s})$$

où les u_k sont les coefficients d'un polynôme $t^s + u_1 t^{s-1} + \ldots + u_{s-1} t + u_s$ primitif de degré s sur $\boldsymbol{Z}_2$ et les nombres $l_1, \ldots, l_s$ doivent être des entiers impairs tels que $1 \le l_k \le 2^k$ pour $k = 1, \ldots, s$.

(8) L'addition modulo 2 se réalise par un « ou exclusif ».

- [13] Voir Y. Kuo, Notes on generating Sobol sequences Stephen Joe and Frances Y. Kuo, August 2008

L'implémentation du code en C++ nous donne les résultats comparatifs ci-dessous :



Les suites à faible discrépance de Sobol doivent permettre une meilleure occupation de l'espace et une vitesse de convergence plus rapide.

8.4 SUITES DE SOBOL & PONTS BROWNIENS

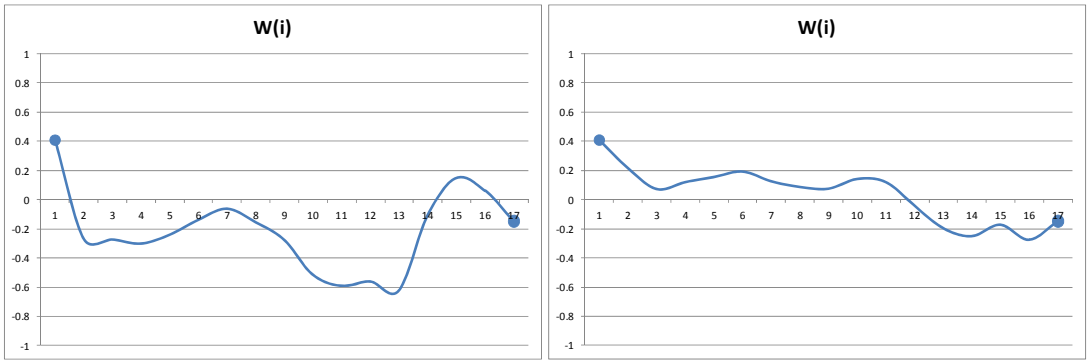
Certains utilisateurs déconseillent d'utiliser un trop grand nombre de dimensions, cela dégraderait la qualité des suites de Sobol. Effectivement, nous avons 480 pas de temps et 4 variables à diffuser, ce qui correspond à 1920 dimensions. Le couplage de Sobol avec l'utilisation de ponts browniens permet de remédier en partie à cette problématique. La solution consiste à diminuer le nombre de dimensions en "interpolant" les trajectoires des mouvements browniens : c'est la technique du Pont Brownien pour lequel on va générer le point de départ et le point d'arrivée du chemin à l'aide des suites de Sobol, et "interpoler" les autres valeurs avec la formulation ci-dessous :

$$Pour\ t_0 < t_i < t_k$$

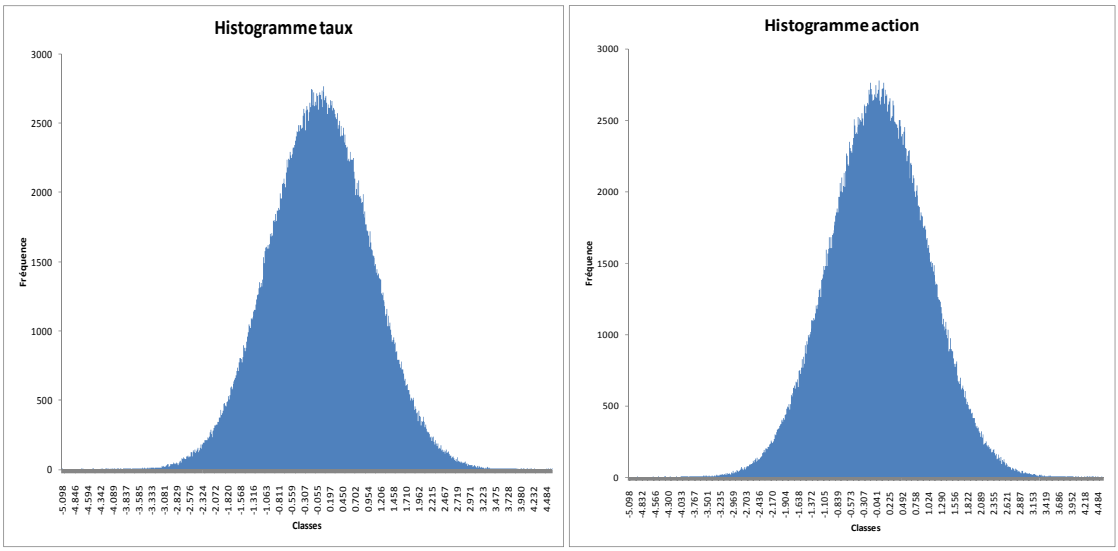
$$W_{t_{i+1}} = \left(\frac{t_k - t_{i+1}}{t_k - t_i}\right) W_{t_i} + \left(\frac{t_{i+1} - t_i}{t_k - t_i}\right) W_{t_k} + \sqrt{\frac{(t_{i+1} - t_i)(t_k - t_{i+1})}{t_k - t_i}}\,\varepsilon$$

$Avec$:
$\varepsilon\ est\ une\ loi\ normale\ centrée\ réduite$
$W_0 = 0$
$W_{t_k} = W_{t_0} + \sqrt{t_0 - t_k}\, g_{sobol}$
$g_{sobol}\ est\ une\ loi\ normale\ centrée\ réduite$

L'exemple ci-dessous nous montre la construction de deux ponts browniens qui ont le même point de départ et le même point d'arrivée. Comme on peut le constater, seuls les points intermédiaires changent :



Les histogrammes ci-dessous représentent les lois suivies par deux mouvements utilisant le couplage Sobol + ponts brownien :



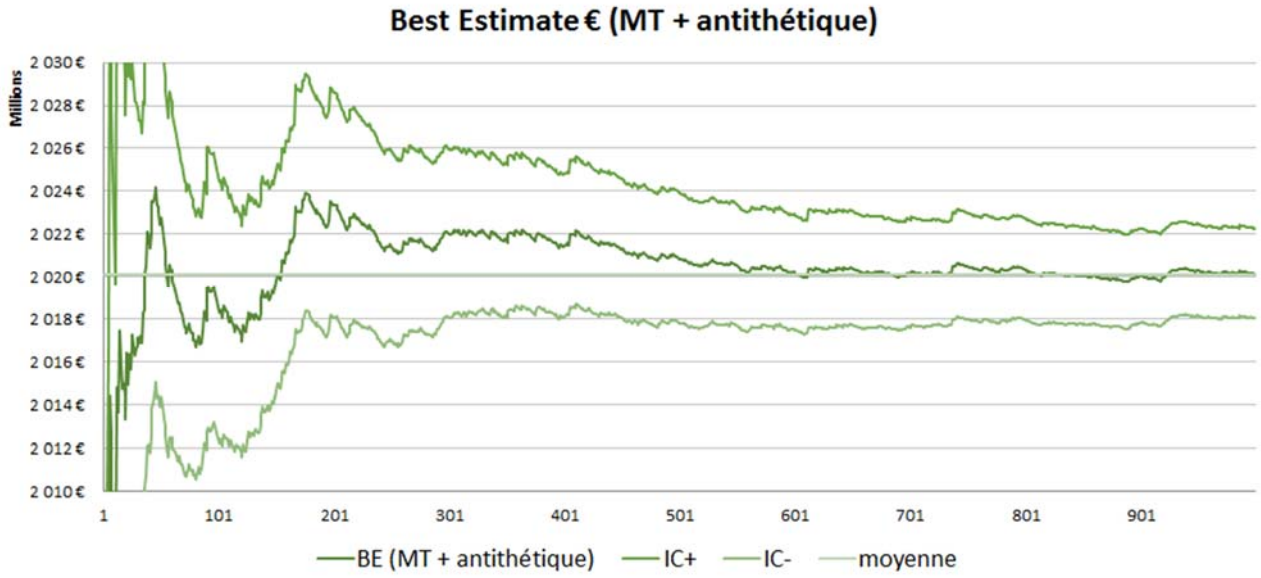
D'autres tests seront réalisés sur ces jeux de données.

8.5 RESULTATS

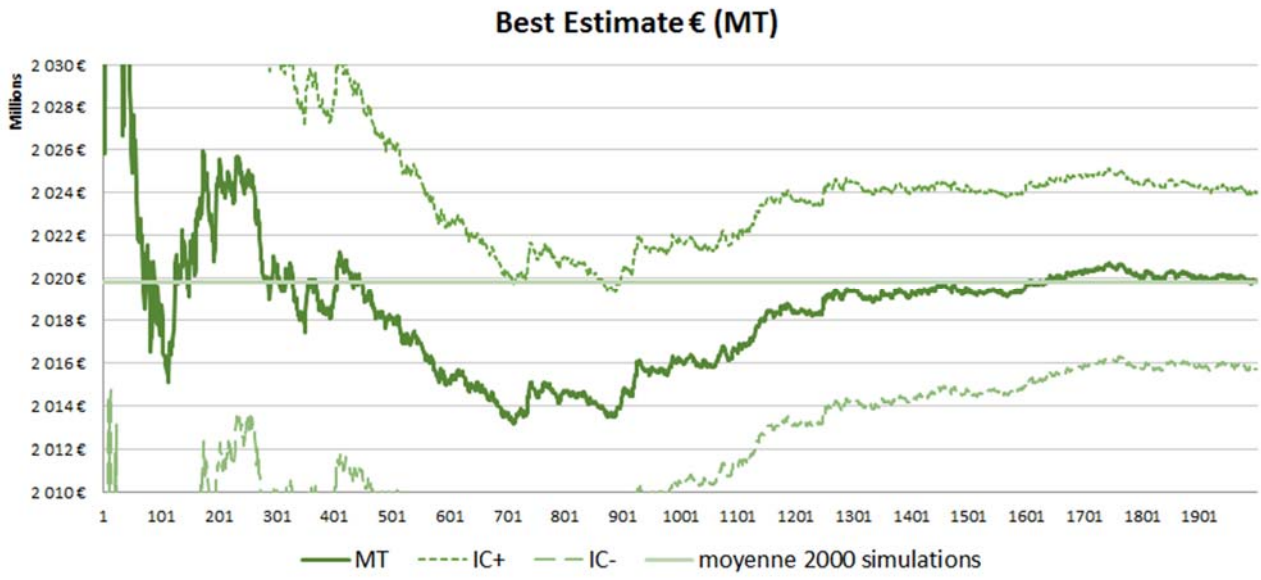
Afin d'étudier l'impact du choix de la source d'aléas, nous avons effectué des tests sur un *Best Estimate* dont les caractéristiques de l'actif et du passif sont décrites en partie 6.

Les graphiques ci-après nous permettent d'analyser les résultats obtenus en fonction de la source d'aléas choisie :

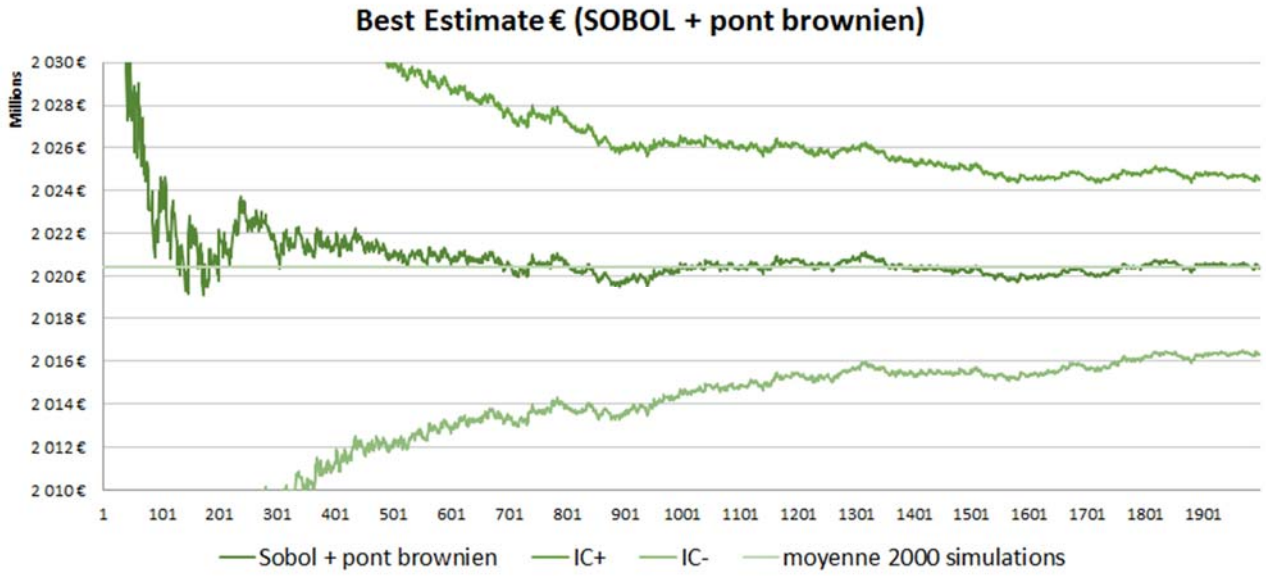
- Le Mersenne Twister (générateur de nombres pseudo-aléatoires) couplé à une technique de réduction de variance :



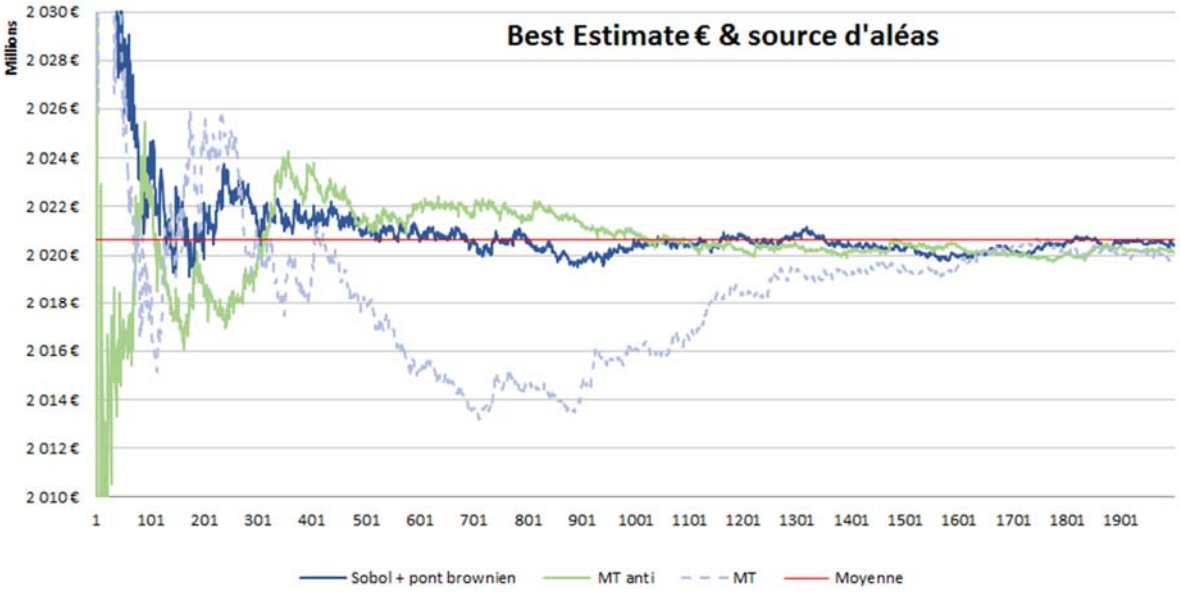
- le Mersenne Twister (générateur de nombres pseudo-aléatoires) :



- Les suites de Sobol (à discrépance faible et appelées quasi aléatoires) avec ponts browniens utilisés pour réduire le nombre de dimensions utilisées :

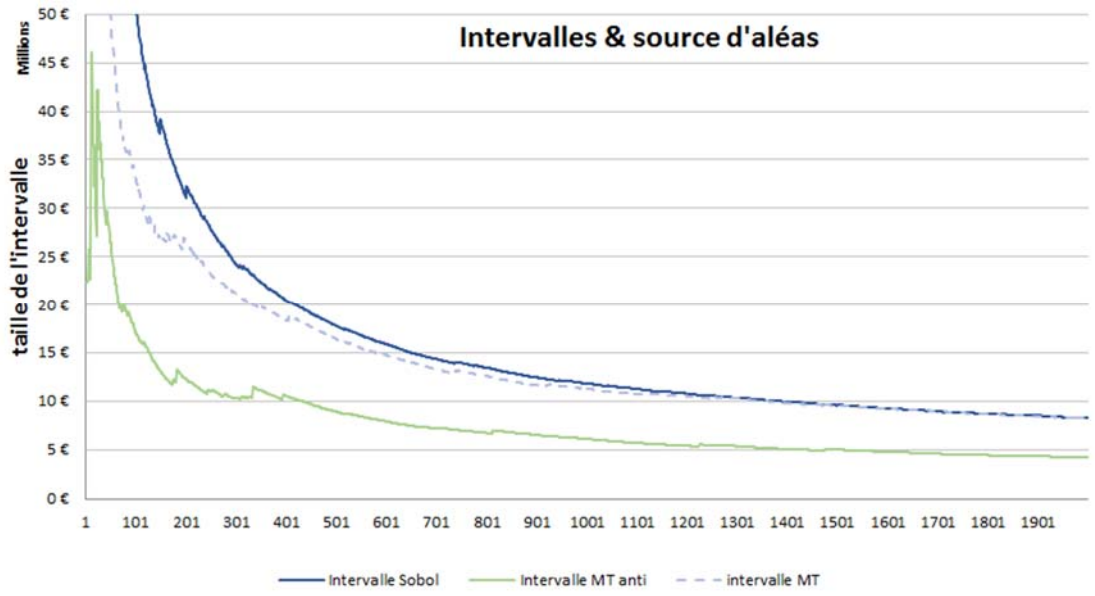


Les trois méthodologies sont représentées sur le graphique ci-dessous :



Sur le plan visuel, on peut classer en première position les suites de Sobol (quasi Monte Carlo), en deuxième, Mersenne Twister (pseudo aléatoire) couplé à une technique de réduction de variance et en troisième position Mersenne Twister. L'analyse des intervalles de confiance présentée sur le graphique ci-après ne permet pas de valider de façon claire la domination des suites de Sobol.

Confidentiel



Même si le taux de convergence des suites de Sobol semble meilleur, nous utiliserons ceci dans un cadre expérimental. Pour les calculs de SCR et de *Best Estimate,* nous privilégierons Mersenne Twister (avec variables antithétiques) dont l'utilisation est très répandue et dont les qualités ne sont plus à démontrer.

9 ALGORITHME D'OPTIMISATION

Lors du processus de calibrage, les algorithmes d'optimisation sont utilisés pour déterminer le jeu de paramètres qui permet de minimiser l'écart entre les prix de marché et les prix du modèle.

L'algorithme utilisé est l'algorithme de Nelder Mead, aussi appelé *downhill simplex method*. Cette méthode ne doit pas être confondue avec l'algorithme du simplexe, qui est un algorithme d'optimisation de problème linéaire. L'algorithme de Nelder Mead est une méthode heuristique (i.e. dont la convergence n'est pas a priori assurée par des résultats théoriques sur la convergence de la méthode) d'optimisation d'une fonction réelle continue à plusieurs variables.

Le principe de l'algorithme de Nelder Mead peut être décrit succinctement. Soit N le nombre de variables de la fonction à minimiser. A partir d'un simplexe de $N+1$ points de $\mathbb{R}^N$, l'algorithme fait subir à ce simplexe une suite de transformations simples au cours des itérations. Au fur et à mesure, le volume du simplexe tend à se réduire et ses sommets se rapprochent tous du point où la fonction admet un minimum. L'algorithme est conçu de telle sorte à éviter le piégeage vers un minimum local (et non global) de la fonction d'intérêt. Ses avantages principaux sont la large classe des fonctions auxquelles il peut s'appliquer (les fonctions continues, non nécessairement dérivables), sa simplicité de mise en œuvre, le caractère systématique de la décroissance de la valeur courante de la fonction à minimiser au cours des itérations. Ses inconvénients majeurs sont la dégradation de la qualité de la convergence lorsque N augmente, ainsi que les problèmes de convergence observés de manière empirique lorsque le minimum global de la fonction à minimiser est proche du bord du domaine de définition de la fonction. Comme indiqué au chapitre 17 « L'estimation des volatilités et des corrélations » de [Hull], un algorithme général d'optimisation comme celui utilisé par le solveur Microsoft Excel est susceptible de converger vers un extremum local plutôt que global. L'algorithme de Nelder Mead permet de remédier à ce problème.

10 CORRELATIONS ET LOI NORMALE MULTIVARIEE

Les différents indices qui sont diffusés ont de fortes chances d'être tous, plus ou moins, corrélés entre eux. Afin de conserver ces propriétés constatées sur la base d'un historique, le générateur sera en mesure de fournir des chroniques d'aléas corrélés. La matrice de corrélation des mouvements browniens sera constante dans le temps, ce qui est une hypothèse relativement forte.

Afin de pourvoir tirer n tirages de loi normale corrélés, il faut d'abord tirer au hasard n valeurs indépendantes x_i à partir de distributions normales univariées. Les ε_i désirés sont alors égaux à :

$$\varepsilon_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} x_k$$

Pour que la variance des ε_i et leur covariance avec les ε_j soient correctes, il faut que :

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik}^2 \quad = 1$$

Et que pour tout j<i :

$$\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} \quad \alpha_{ij} = \rho_{ij}$$

Le premier ε_1 est fixé égal à x_1. Les équations précédentes peuvent alors être résolues de façon que ε_2 puisse être calculé à partir de x_1 et x_2, que ε_3 puisse être calculé à partir de x_1, x_2 et x_3 et ainsi de suite. Cette procédure est connue sous le nom de décomposition de Cholesky.

La transformée de Cholesky de la matrice de corrélation historique nous donne les α_{ij} ci-dessous :

correl historiques

	Taux	EUROSTOXX	IMMO	Taux réel
Taux	100%	31.9%	36.2%	75.5%
EUROSTOXX	31.9%	100%	3.7%	16.0%
IMMO	36.2%	3.7%	100%	22.4%
Taux réel	75.5%	16.0%	22.4%	100%

cholesky

	Taux	EUROSTOXX	PROPERTY	Taux réel
Taux	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%
EUROSTOXX	31.86%	94.79%	0.00%	0.00%
IMMO	36.19%	-8.22%	92.86%	0.00%
Taux réel	75.51%	-8.51%	-6.08%	64.72%

Confidentiel

10.1 CALCUL DES CORRELATIONS

Les corrélations implicites ne sont pas des données observables sur le marché; pour cette raison, leurs évaluations devront se faire via l'observation de fenêtres temporelles ou historiques glissants.

L'estimation des corrélations est un sujet délicat, leur estimation est pratiquée avec la méthodologie relativement simpliste décrite ci-dessous :

L'estimation se fait grâce à l'observation des indices suivants :

- Ticker SX5E Index : indice action eurostoxx (observations journalières),
- Ticker EUSA1 Curncy : taux de swap 1Y (observations journalières),
- Ticker EUSA5 Curncy : taux de swap 5Y (observations journalières),
- Ticker EUSA10 Curncy : taux de swap 10Y (observations journalières),
- Ticker FRSWI10 Curncy : taux zéro coupon inflation 10Y (observations journalières),
- Indices Insee des prix des logements anciens - Île-de-France (observations trimestrielles).

Pour chaque indice, on définit un mode de calcul du rendement :

	mode de calcul du rendement
action	Log-rendement
Taux	Log-ratio (déplacé)
Taux réels	différence
immo	Log-rendement

11 OUTILS DE TEST DES SCENARIOS

11.1 TESTS MARTINGALES

Ce sont les tests qui permettent de valider le caractère risque neutre des indices projetés dans la table de scénarios économiques. Le calcul de prix de marché d'actifs par moyenne de valeurs actualisées de flux futurs projetés exige que les indices modélisés actualisés soient martingales.

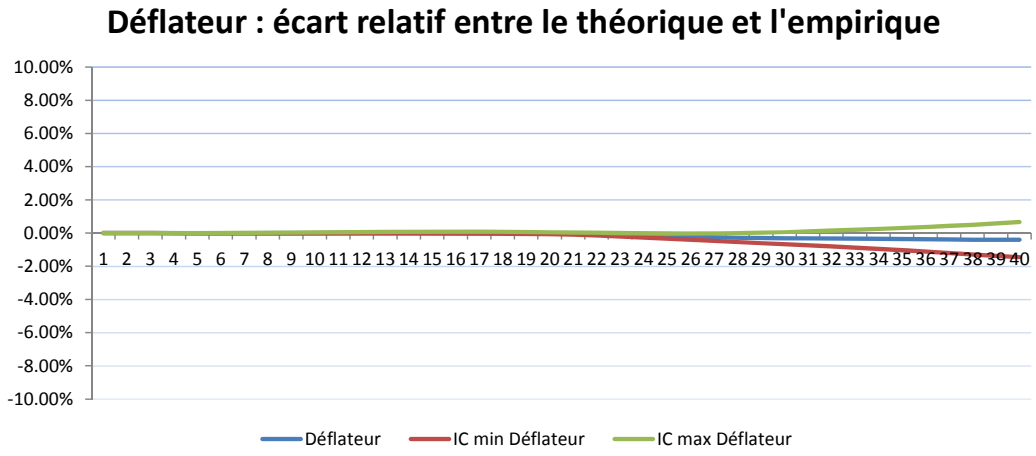
Un écart entre les valeurs théoriques (valeur des indices en 0) et les valeurs empiriques (moyenne des indices futurs actualisés) est en général observé. Le caractère risque neutre d'une table peut être validé selon le niveau d'erreur observé (par exemple : 5% sur le test action à 30 ans).

Sur chacun des tests, un intervalle de confiance à 95% a été intégré afin d'évaluer la précision du test.

- Test sur les déflateurs :

$$\boldsymbol{E}\,[D_t|F_0] = P_n(0,t)$$

Où $\mathrm{P_n}(0,\mathrm{t})$ est la valeur en 0 d'une obligation zéro-coupon nominale de maturité t, et $\mathrm{E_0}[.]$ est l'espérance conditionnée par l'information disponible en 0.



- Test sur l'inflation :

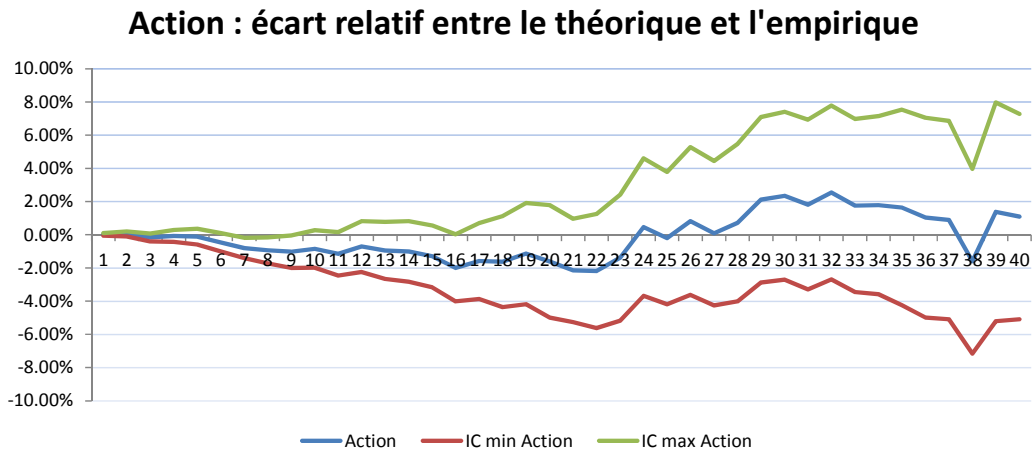
$$\boldsymbol{E}[I_t D_t|F_0] = P_r(0,t)$$

Où $\mathrm{P_r}(0,\mathrm{t})$ est la valeur en 0 d'une obligation zéro-coupon réelle de maturité t, et $\mathrm{I_t}$ est l'inflation en t.

- Test sur l'indice action :

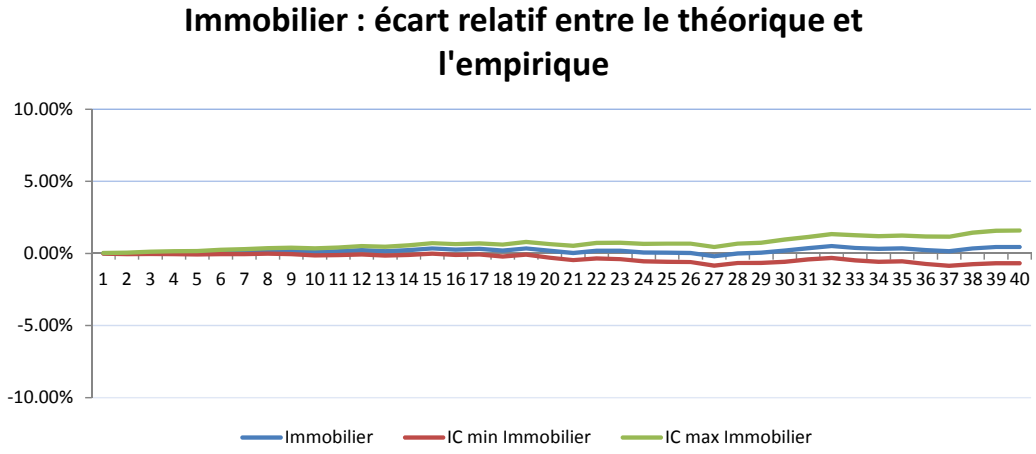
$$\boldsymbol{E}[S_t D_t|F_0] = S_0$$

où $\mathrm{S_t}$ est la valeur de l'indice action en t.



Le même test est réalisé sur l'indice immobilier.

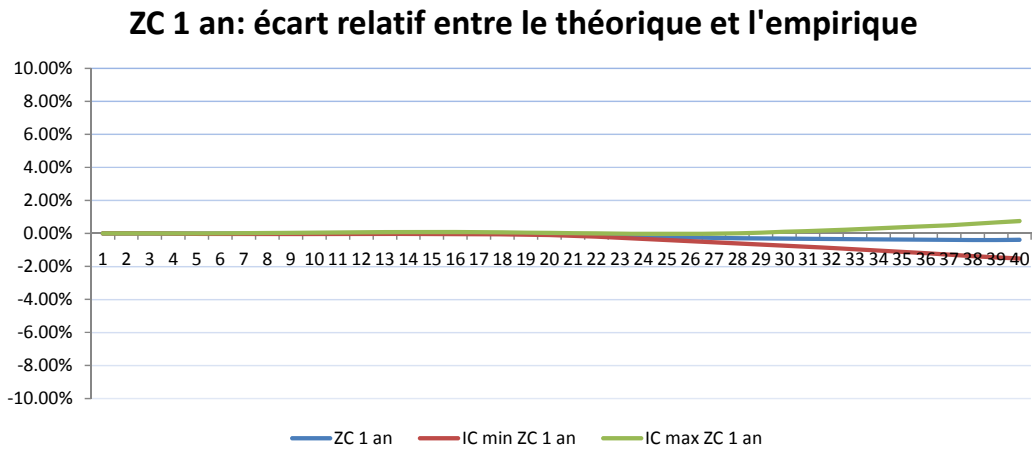
$$\boldsymbol{E}[Immo_t D_t | F_0] = Immo_0$$

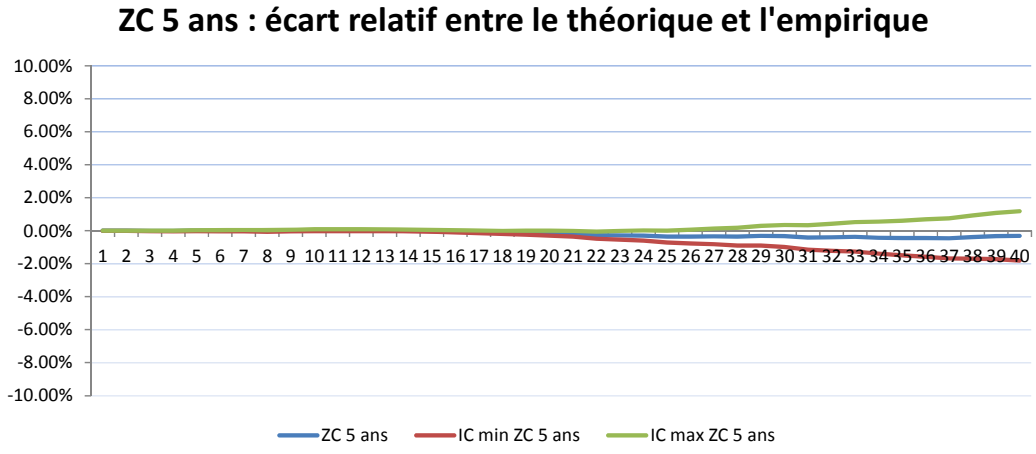


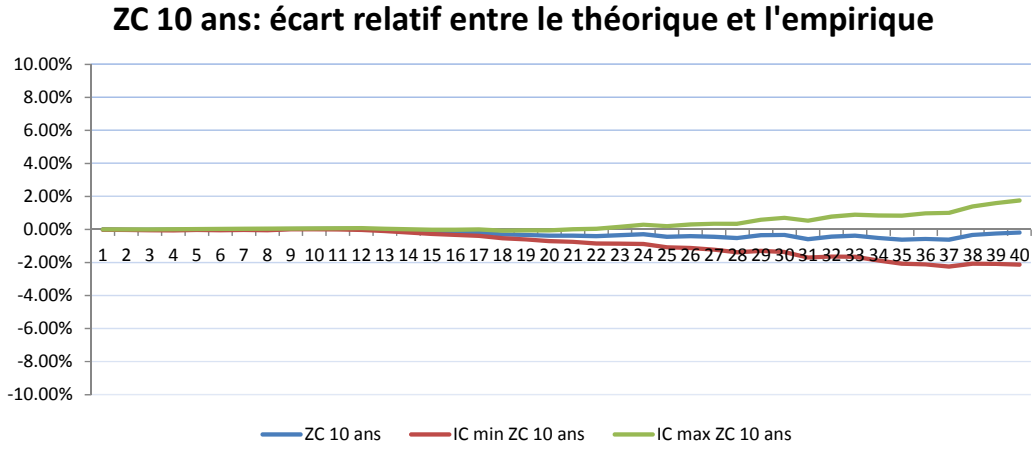
- Test sur les taux d'intérêts nominaux :

$$\boldsymbol{E}[P_n(t,T) D_t | F_0] = P_n(0, t+T)$$

Où $P_n(t,T)$ est la valeur en *t* d'une obligation zéro-coupon réelle de maturité *T*.





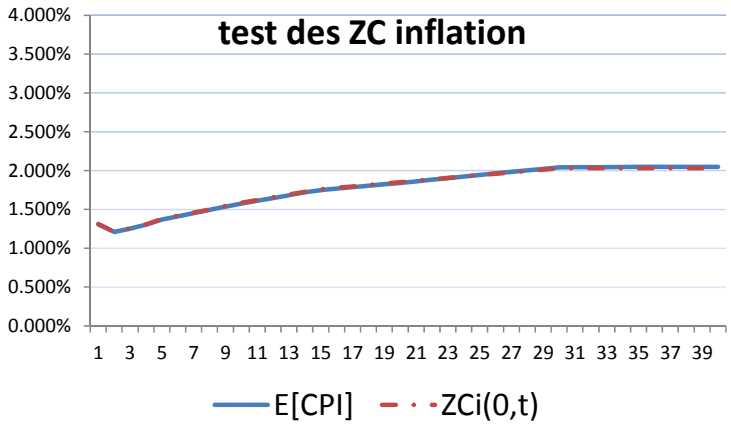


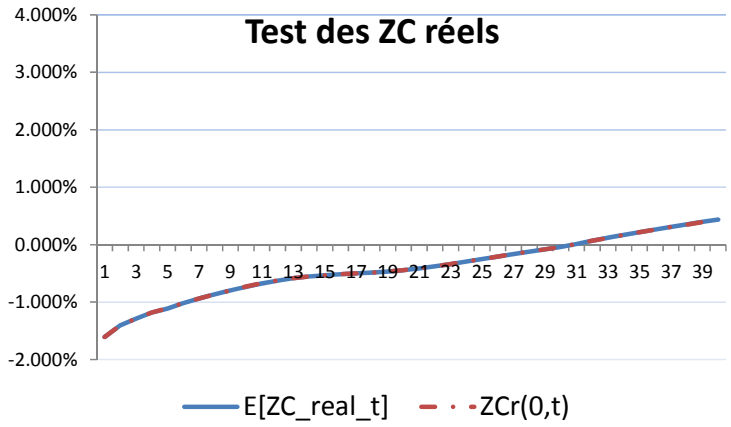
- Tests sur les taux d'intérêts réels :

$$\boldsymbol{E}\left[P_r(t,T)D_{r,t}\right] = P_r(0,t+T)$$

$$\boldsymbol{E}[I(t).P_r(t,T)D_t|F_0] = I(0).P_r(0,t+T)$$

Confidentiel



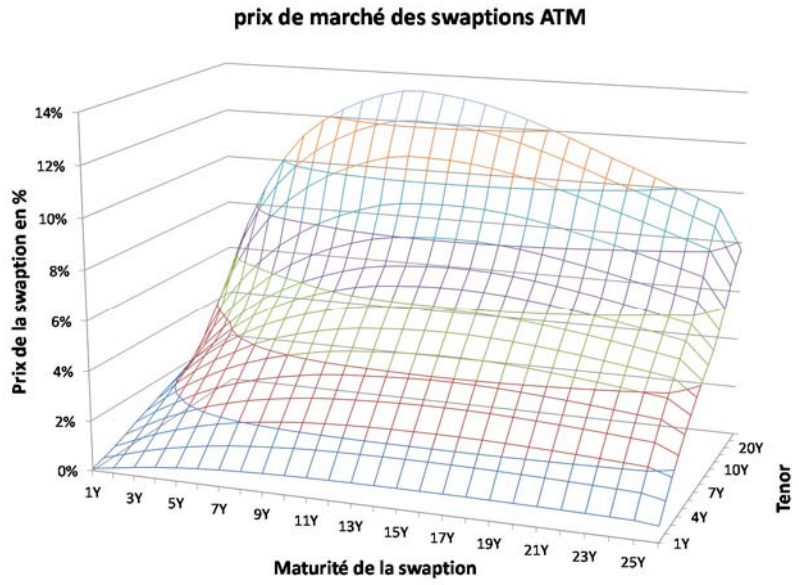


En réalité, $P_r(t,T)$ désigne la valeur d'un portefeuille en unités de « panier de biens et services » en t qui délivre une unité de « panier de biens et services » en T. $D_{r,t}$ correspond au déflateur risque neutre dans l'économie réelle.

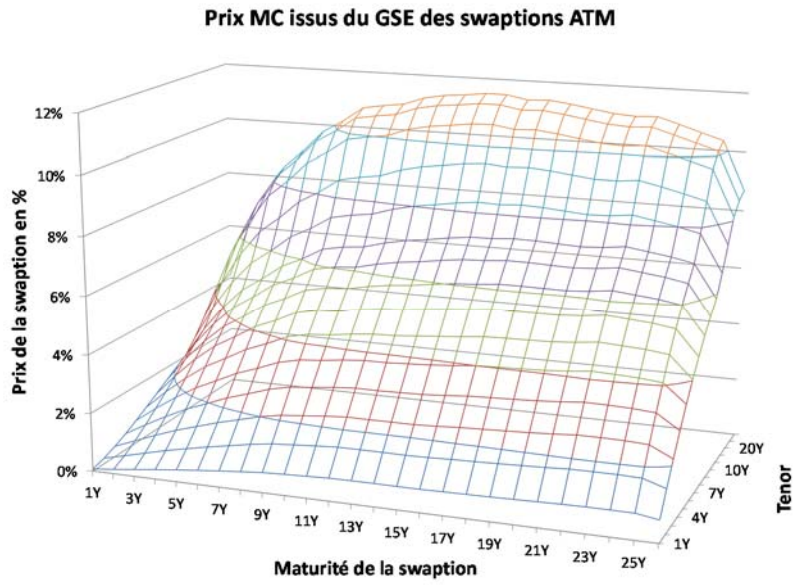
11.2 TESTS DE REPLICATION DES PRODUITS DERIVES

Afin de compléter les tests martingale, des tests de réplication sont réalisés sur les swaption ATM et OTM.

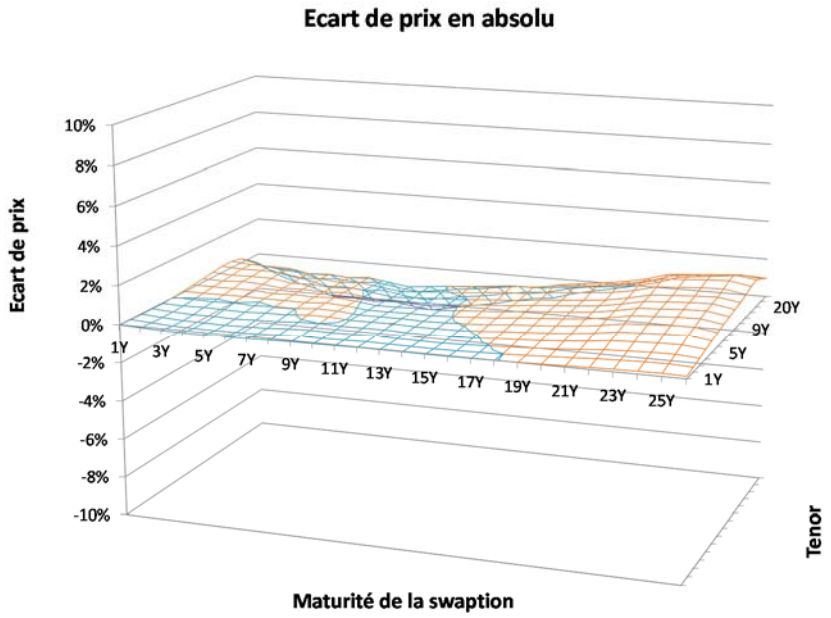
Les graphiques ci-après présentent les prix de marché des swaptions calculés dans le cadre S2, dans ce contexte les prix sont construits avec la courbe EIOPA et les volatilités normales observées sur le marché :



Les prix de swaption répliqués par le GSE :



Enfin, les écarts absolus entre les prix de marché et les prix MC du GSE :



12 SENSIBILITES DU RATIO DE SOLVABILITE 2 AU MODE DE CALIBRAGE DU MODELE DE TAUX

12.1 PRESENTATION DES HYPOTHESES MAJEURES UTILISEES DANS LE CADRE DU CALCUL DU RATIO DE SOLVABILITE 2

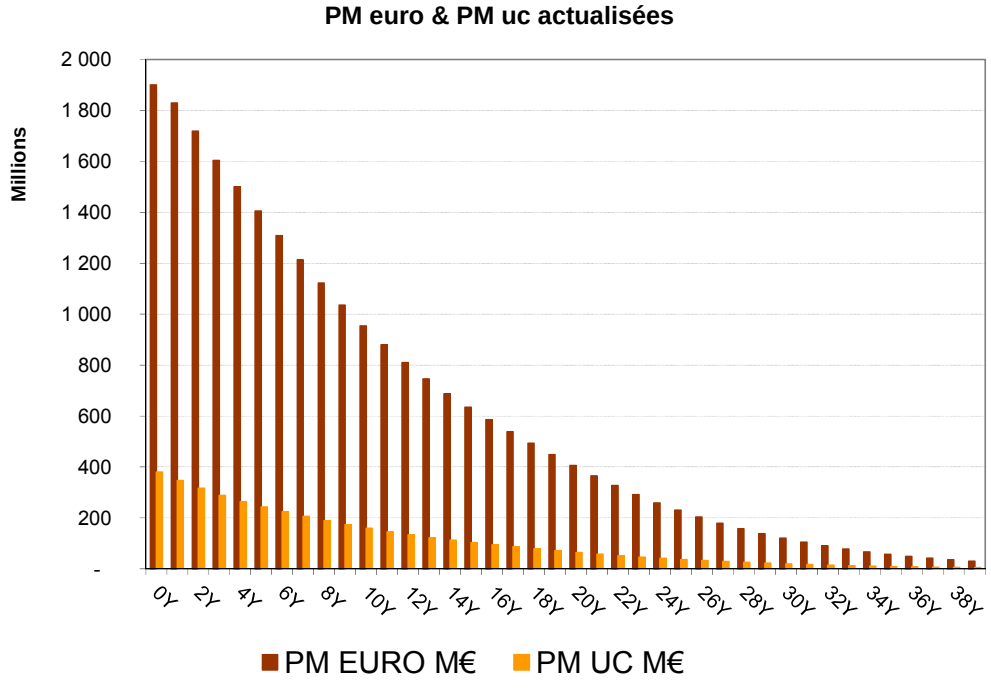
L'ensemble des calculs est réalisé avec une plateforme de calcul adaptée. En effet, le calcul de la dizaine de ratios de solvabilité nécessite à chaque fois de recalculer les chocs de la formule standard, et ceci a alourdi considérablement les temps de calcul nécessaires à la présentation de cette étude.

12.1.1 Provisions mathématiques

Dans le cadre de l'étude, on considère un portefeuille fictif en *run off* constitué de trois fonds, les caractéristiques biométriques et techniques sont détaillées ci-après.

Type de PM	PM en m€	%
UC action	95	4%
UC obligataire	285	13%
Fonds €	1 900	83%
Total	**2 280**	**100%**

La PM tient compte de la mortalité et des rachats structurels et conjoncturels, le graphique ci-après présente l'écoulement du stock :



L'âge moyen des assurés est de 59 ans et l'ancienneté moyenne de 10 ans. Le taux brut garanti est de 0%.

Les frais suivants sont considérés :

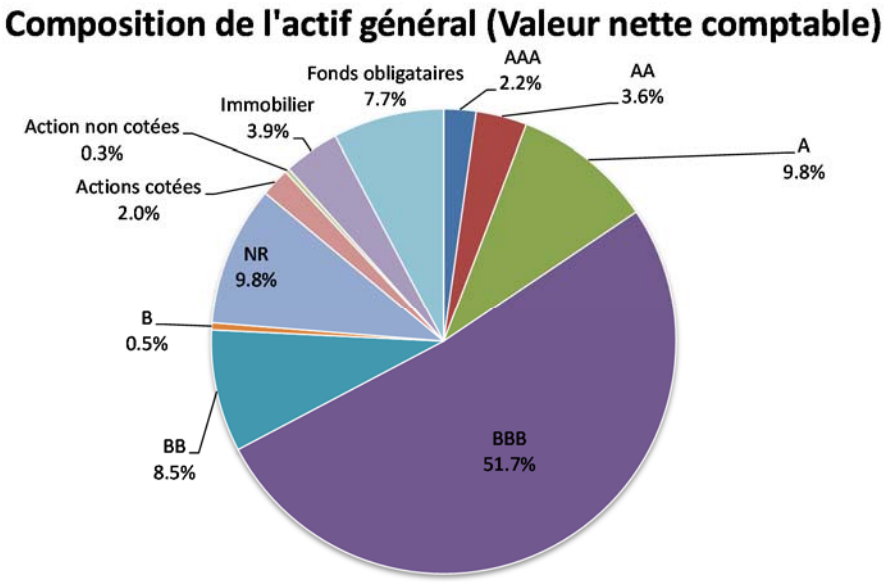
- Les frais d'administration,
- Les frais de prestation,
- Les frais de gestion financière,
- Les commissions récurrentes.

Enfin, les clauses de PB règlementaire et contractuelle sont respectées lors des quarante années de projection.

Les rachats dynamiques dépendent d'une différence entre le taux servi et de taux concurrence (mix entre taux 10Y, inflation et Euribor). Selon le signe des différences constatées, ils pourront être supérieurs ou inférieurs aux rachats structurels.

12.1.2 Actif

Dans notre étude, la part des obligations dans le portefeuille d'actifs représente plus de 90% des actifs sous gestion. Le graphique ci-après donne le détail de la composition du portefeuille par classe d'actifs.



La prédominance des obligations de qualité BBB et inférieures nous permettent déjà d'envisager des risques de taux et de crédit majeurs. Sur l'ensemble du portefeuille les plus-values sont de 105 M€.

12.1.3 Bilan S1 et S2

Dans le cadre de l'étude, nous avons opté pour un bilan simplifié. La taille du bilan est de 2450 M€ en valeur nette comptable, les plus-values latentes sont de 105 M€. Le ratio de couverture solvabilité 1 s'élève à 150% sans considérer les plus-values et à 280% avec. Le tableau ci-après explique le passage à la norme solvabilité 2, les *best estimate* sont caractéristiques des temps actuels avec un *best estimate*

Confidentiel

UC inférieur à la PM UC et un *best estimate* euro supérieur à la PM euro. Le passage des fonds propres de 100 à 140 M€ et l'apparition d'impôts différés au passif s'expliquent par les différences d'évaluation.

			PASSAGE en norme S2	
	Bilan (FRENCH GAAP)	Bilan norme S2	gains/pertes	IDP/IDA
ACTIF	**2 450**	**2 555**	75	30
PASSIF	**2 450**	**2 555**	-35	-22
FP	100	140		
Réserve capi.	20	0	20	0
UC	380	364	11	5
EURO	1 900	2 020	-85	-35
PB Epargne (inclus dans BE => S2 = 0)	50	0	36	14
Marge de risque EURO	0	15	-11	-4
Marge de risque UC	0	9	-6	-3
Impôts différés	0	8		
TOTAL	2 450	2 556	40	8

12.1.4 SCR et ratio

L'évaluation du SCR est réalisée avec la formule standard, conformément au règlement délégué entré en vigueur le 01/01/2016. Pour chacune de nos simulations l'ensemble des stress présentés ci-après seront calculés afin d'évaluer le besoin de fonds propres.

Stress applicables	Sensibilités (yc absorption par les passifs)
Taux : hausse	**0.0**
Taux : baisse	**13.3**
Taux (retenu)	**13.3**
Action : global	**5.6**
Action : autre	**1.9**
Action : infrastructure	**0.0**
Immobilier	**3.0**
Spread	**27.4**
Concentration	**20.0**
SCR MARKET	**47.9**
SCR DEFAUT	**2.0**
Mortalité	**1.7**

Confidentiel

Longévité	**0.0**
Rachat : masse	**12.9**
Frais	**7.8**
Catastrophe	**0.1**
SCR LIFE	**18.4**
BSCR (avec corrélations formule standard)	**56.0**
SCR OPERATIONNEL	**12.8**
SCRshock	**68.9**
Capacité d'absorption des DT	**-8.0**
SCR	**60.9**

Le ratio de solvabilité 2 s'obtient en divisant les fonds propres en norme S2 par le SCR.

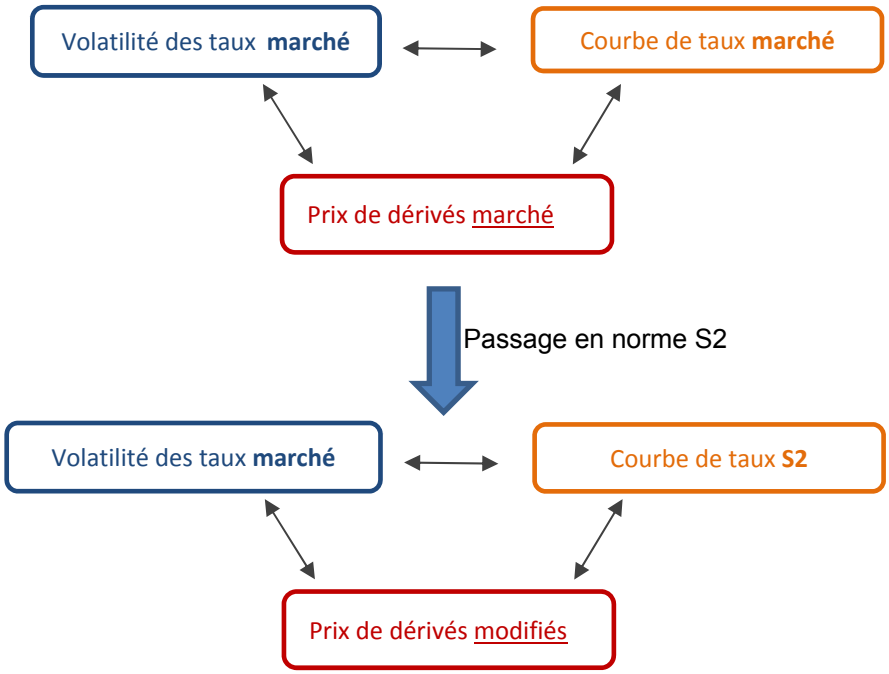
12.2 RAPPEL DE LA REGLEMENTATION SUR LE CALIBRAGE DES GSE

Avant d'aborder les problématiques liées à la calibration, nous faisons un rappel de ce qui est attendu par le régulateur. Les textes réglementaires (notamment les spécifications techniques des phases préparatoires) indiquent que les modèles doivent être calibrés sur :

- La courbe de taux sans risque qui permet de déflater les *cash flow,*
- **Une mesure de la volatilité appropriée.**

> TP.2.121. The following principles should be taken into account in determining the appropriate calibration of a market consistent asset model:
>
> a) The asset model should be calibrated to reflect the nature and term of the liabilities, in particular of those liabilities giving rise to significant guarantee and option costs.
>
> b) The asset model should be calibrated to the current risk-free term structure used to discount the cash flows.
>
> c) The asset model should be calibrated to a properly calibrated volatility measure.

Le passage en norme S2 implique donc de changer la courbe (courbe EIOPA) et de garder la volatilité constante. Les triptyques ci-après permettent d'illustrer les conséquences que cela aura sur la volatilité des taux, les prix de produits dérivés et la courbe de taux. Ces trois éléments sont liés les uns aux autres : si on connait deux éléments on peut en déduire le troisième.



Il faudra donc composer avec le triptyque ci-dessus pour calibrer les GSE sous la norme solvabilité 2.

Les méthodes de calibration étant relativement hétérogènes sur la place, nous avons voulu via l'intermédiaire de sensibilités mesurer les impacts sur le ratio de solvabilité 2 que peut impliquer le choix d'hypothèses différentes lors du calibrage.

12.3 SENSIBILITE AU CHOIX DE LA VOLATILITE DE REFERENCE

Sur les marchés on peut avoir accès aux volatilités de Black et aux volatilités de Bachelier, elles ont chacune leurs caractéristiques qui sont détaillées ci-après :

- Volatilités Black (associées à la formule de Black) dont l'utilisation est spécifiée de la manière suivante :

$$dF_t = \sigma_t^{Black} F_t \times dW_t$$

L'utilisation de la formule de Black nécessite des taux positifs pour fonctionner et les taux diffusés suivent une loi log-normale. Le niveau de la volatilité de Black dépend aussi fortement du niveau des taux. De façon assez générale et toutes choses égales par ailleurs, on peut dire que la volatilité de Black augmente quand les taux baissent et qu'elle baisse quand les taux montent.

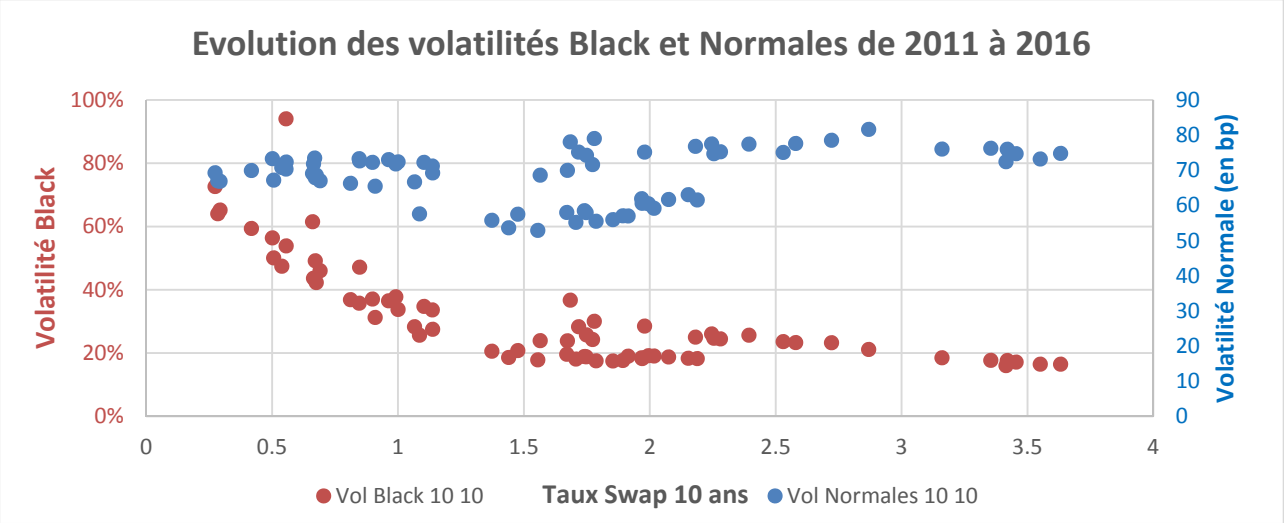
- Volatilités Normales (associées à la formule de Bachelier) dont l'utilisation est spécifiée de la manière suivante :

$$dF_t = \sigma_t^{Normales} \times dW_t$$

Confidentiel

Le modèle fonctionne quels que soient les niveaux de taux, les taux diffusés suivent une loi Normale.

La volatilité de Bachelier est devenue un standard de marché suite à l'apparition de taux négatifs, le graphique ci-après qui retrace l'historique de la volatilité implicite de la swaption 10Y dans 10Y en fonction du choix du modèle nous permet de constater que les volatilités de Bachelier sont plus stables que les volatilités Black :



Sur la période 2011 à 2016 les volatilités Normales sont restées dans un corridor de 25bp (points bleus) alors que les volatilités de Black (points rouges) ont évolué dans un corridor d'environ 75%.

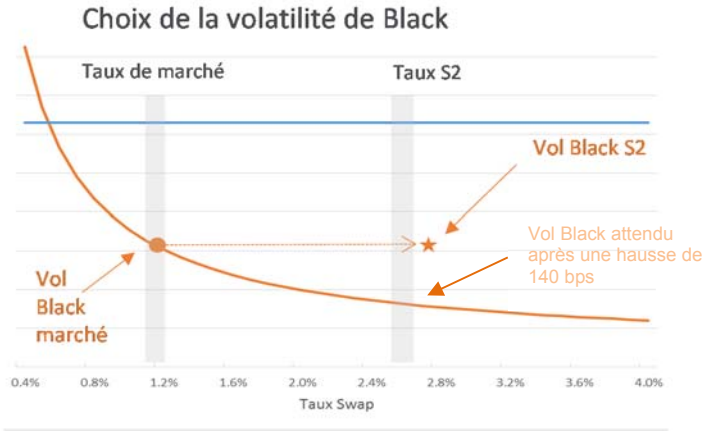
Compte tenu des déformations (UFR, VA, CRA) que l'on va appliquer à la courbe des taux swaps pour obtenir la courbe règlementaire EIOPA, le choix d'une volatilité dont la dépendance au niveau des taux est faible doit être privilégiée. Afin d'étayer cela, nous avons construit deux exemples :

- Nous faisons fait le choix de la volatilité de Black comme volatilité de référence.

Avec ce choix, le niveau de la volatilité de Black constaté sur le marché doit être conservé dans l'environnement Solvabilité 2. Dans notre exemple illustratif (graphique ci-après) on considère que les taux S2 sont 140 bps plus hauts que la courbe des taux de swap de marché. Sur le graphique, on représente l'évolution attendue de la volatilité Normale (en bleue) et de la volatilité de Black (en orange). L'étoile orange correspond au niveau de la volatilité qui sera utilisée dans la diffusion du GSE, on s'aperçoit qu'elle est bien supérieure à la volatilité attendue, et cela vient du fait qu'après une hausse de 140 bp la volatilité de Black aurait dû baisser alors qu' elle a été artificiellement maintenue à son niveau de marché par répondre aux exigences règlementaires.

Le choix de la volatilité de Black comme volatilité de référence pour la norme S2 aura pour conséquence de surestimer la volatilité utilisée dans les GSE si la courbe EIOPA est plus élevée que la courbe SWAP et à la sous-estimer si elle est plus basse.

Confidentiel

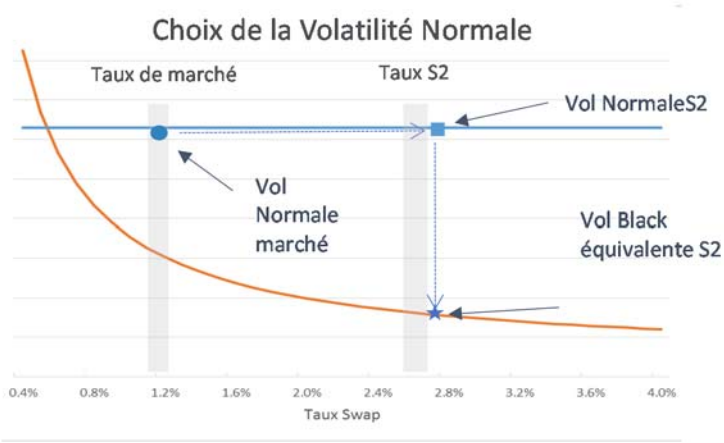


- Nous faisons le choix de la volatilité Normale (Bachelier) comme volatilité de référence.

Avec ce choix, le niveau de la volatilité Normale constaté sur le marché doit être conservé dans l'environnement Solvabilité 2. Dans ce contexte la volatilité de Black S2 équivalente s'obtient à l'aide du triptyque qui se fait en deux temps :

1. Calcul des prix de dérivées S2 avec la courbe EIOPA et les volatilités Normales de marché,
2. Calcul des volatilités de Black équivalente S2 avec la courbe EIOPA et les prix des dérivés S2 calculés préalablement.

On constate sur le graphique ci-après que la volatilité de Black S2 est en phase avec la volatilité de Black attendue suite à une élévation de la courbe de taux.



Le choix de la volatilité Normale comme référence est donc bien plus adapté que le choix de la volatilité de Black. Comme la volatilité Normale ne dépend pas ou très peu du niveau des taux, cela permet une meilleure intégration des transformations qui sont demandées pour obtenir la courbe EIOPA.

Nous allons maintenant estimer les impacts que peuvent avoir ces choix au niveau du ratio de Solvabilité 2 de la compagnie d'assurance qui a été décrite dans les parties précédentes. Le récapitulatif ci-après permet de donner les caractéristiques essentielles de ce test qui vise à mesurer les effets de chaque hypothèse sur le ratio de solvabilité.

Confidentiel

Récapitulatif des hypothèses utilisées :

- Volatilité de référence : type de volatilité qui a été choisi pour le calibrage,
- Courbe utilisée pour le calibrage : taux de swap du marché ou courbe réglementaire, certains acteurs peuvent décider de calibrer leur modèle sur des données 100% marché puis de générer leurs tables stochastiques avec les paramètres préalablement déterminés et la courbe EIOPA,
- Instruments financiers à objectiver : Ils sont dépendants de la courbe et de la volatilité de référence :
  $Prix\ derivés = f(courbe\ utilisée\ pour\ le\ calibrage, volatilité\ de\ marché\ de\ référence)$,
- Utilisation des prix ATM : détermine si les prix ATM (*strike* égal aux *forward*) seront objectivés,
- Utilisation des prix OTM : détermine si les prix OTM (*strike* différent du *forward*) seront objectivés,
- Calibrage du shift (fixé ou objectif) : certains acteurs considèrent que le shift peut être déterminé par un « avis d'expert », il sera fixé. Dans d'autres cas ce dernier pourra être calibré afin d'objectiver des prix OTM, et pourra notamment être paramétrique,
- Modèle de taux : différents modèles de taux peuvent être utilisés, le modèle choisi doit être défini à chaque test,
- Correction pour volatilité (*Volatility Adjustment*) : correspond à la valeur du paramètre utilisé dans la construction de la courbe réglementaire.

Remarque : la courbe de taux EIOPA étant supérieure à la courbe de taux swap au 31/12/2017, et compte tenu des analyses ci-dessus, nous pouvons nous attendre à une diminution du BE lors du passage du référentiel de volatilité Black à celui de volatilités Normales.

Enfin, dans tous les cas, la courbe utilisée pour la diffusion correspond à la courbe EIOPA.

12.3.1 Environnement économique stable

On se place dans un contexte économique favorable avec une VA faible (inférieure à 15 bps), dans le cas du test cas, on considère une VA de 4bps c'est à dire le niveau constaté en décembre 2017.

Les résultats du test sont présentés dans le tableau ci-après :

N° du test	Volatilité de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Utilisation des prix ATM	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
1	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLM	4bp	58.4	139.5	238.5%
2	Black	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLM	4bp	56.1	129	229.8%

En relatif, l'utilisation de la volatilité Normale augmente le ratio S2 de 4% par rapport à l'utilisation de la volatilité de Black et de 10% en absolu. L'amélioration est liée à l'augmentation des fonds propres grâce au phénomène décrit ci avant. Le graphique ci-après permet d'étayer ce point, il compare la volatilité de Black théorique d'un modèle calibré avec la volatilité de Black théorique (équivalente) d'un modèle calibré avec la volatilité Normale :

Différence entre la Volatilité de Black d'un modèle calibré avec la Vol de Black et la Volatilité de Black d'un modèle calibré avec la Vol de Normale															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			7.7%	-4.2%	-7.9%	-9.2%	-9.4%	-8.9%	-8.0%	-7.0%	-4.8%	-1.4%	4.5%	10.0%	13.9%
2			-2.7%	-6.3%	-8.0%	-8.5%	-8.4%	-7.8%	-7.1%	-6.1%	-4.0%	-0.8%	5.2%	10.5%	14.2%
3	5.1%	-1.5%	-5.0%	-7.0%	-7.8%	-8.0%	-7.6%	-7.0%	-6.2%	-5.3%	-3.3%	-0.2%	5.9%	10.9%	14.4%
4	-1.3%	-4.3%	-6.2%	-7.2%	-7.6%	-7.4%	-6.9%	-6.2%	-5.4%	-4.5%	-2.6%	0.6%	6.7%	11.4%	14.6%
5	-3.5%	-5.4%	-6.4%	-6.9%	-6.8%	-6.5%	-6.0%	-5.4%	-4.6%	-3.8%	-2.0%	1.4%	7.2%	11.6%	14.7%
6	-4.4%	-5.5%	-6.1%	-6.2%	-6.1%	-5.7%	-5.2%	-4.5%	-3.7%	-2.9%	-1.1%	2.4%	8.1%	12.2%	15.1%
7	-4.7%	-5.3%	-5.5%	-5.5%	-5.2%	-4.8%	-4.2%	-3.6%	-2.8%	-2.0%	-0.1%	3.5%	8.9%	12.7%	15.4%
8	-3.8%	-4.2%	-4.4%	-4.4%	-4.2%	-3.8%	-3.3%	-2.6%	-1.9%	-1.0%	1.2%	4.8%	9.9%	13.4%	15.9%
9	-3.8%	-4.1%	-4.1%	-3.9%	-3.5%	-3.1%	-2.5%	-1.8%	-0.9%	0.1%	2.5%	6.0%	10.8%	14.1%	16.4%
10	-3.6%	-3.6%	-3.5%	-3.2%	-2.8%	-2.3%	-1.6%	-0.8%	0.1%	1.2%	3.5%	6.9%	11.3%	14.5%	16.7%
11	-2.5%	-2.5%	-2.4%	-2.2%	-1.9%	-1.4%	-0.7%	0.2%	1.2%	2.4%	4.7%	7.8%	12.0%	15.0%	17.1%
12	-1.7%	-1.7%	-1.7%	-1.5%	-1.1%	-0.4%	0.4%	1.4%	2.5%	3.7%	5.9%	8.9%	12.8%	15.6%	17.5%
13	-1.3%	-1.3%	-1.2%	-1.0%	-0.4%	0.4%	1.3%	2.4%	3.5%	4.7%	6.8%	9.7%	13.4%	16.0%	17.7%
14	-0.6%	-0.6%	-0.5%	0.0%	0.7%	1.6%	2.6%	3.7%	4.8%	5.9%	7.9%	10.5%	14.0%	16.4%	18.0%
15	-0.4%	-0.2%	0.2%	0.9%	1.7%	2.7%	3.8%	4.8%	5.9%	6.9%	8.8%	11.4%	14.6%	16.9%	18.1%
16	0.3%	0.6%	1.3%	2.1%	3.1%	4.1%	5.1%	6.1%	7.1%	8.1%	9.9%	12.2%	15.2%	17.3%	18.5%
17	1.5%	2.1%	2.8%	3.7%	4.6%	5.5%	6.4%	7.3%	8.2%	9.0%	10.6%	12.8%	15.6%	17.6%	18.5%
18	2.7%	3.4%	4.2%	5.0%	5.8%	6.5%	7.4%	8.1%	8.9%	9.7%	11.2%	13.3%	16.1%	18.0%	18.6%
19	4.2%	4.9%	5.6%	6.3%	7.0%	7.7%	8.5%	9.2%	10.0%	10.7%	12.1%	14.0%	16.6%	18.3%	18.8%
20	5.5%	6.0%	6.6%	7.2%	7.8%	8.5%	9.2%	9.9%	10.6%	11.3%	12.7%	14.6%	17.3%	18.8%	18.8%
21	6.7%	7.1%	7.6%	8.1%	8.7%	9.3%	10.0%	10.6%	11.3%	12.0%	13.3%	15.2%	17.7%	18.9%	18.7%
22	8.0%	8.3%	8.6%	9.1%	9.6%	10.2%	10.8%	11.4%	12.0%	12.6%	13.8%	15.5%	17.9%	18.7%	18.4%
23	8.8%	9.1%	9.5%	10.0%	10.5%	11.0%	11.6%	12.2%	12.8%	13.4%	14.5%	16.2%	18.3%	18.8%	18.2%
24	9.6%	9.9%	10.3%	10.8%	11.3%	11.8%	12.3%	12.9%	13.5%	14.0%	15.2%	16.8%	18.6%	18.7%	18.0%
25	10.1%	10.5%	10.9%	11.3%	11.8%	12.3%	12.8%	13.4%	14.0%	14.6%	15.7%	17.3%	18.8%	18.7%	18.0%
30	13.7%	14.1%	14.5%	14.9%	15.4%	16.0%	16.5%	17.1%	17.7%	18.3%	19.3%	20.0%	20.0%	19.1%	17.8%

On constate que lorsque le calibrage est réalisé avec la volatilité Black, les volatilités théoriques sont bien supérieures. La zone orange représente la zone impactée par l'UFR lors du passage à la norme EIOPA, la convergence vers un taux d'environ 4% n'est pas sans conséquence dans un contexte de taux bas. On voit bien que le calibrage sous volatilité Normale ne maintient pas la volatilité à des niveaux artificiellement hauts alors que le calibrage sous volatilité Black le fait par construction, les écarts peuvent aller jusqu'à 20% sur les options long terme. On sait qu'un niveau de volatilité important contribue à la hausse du BE, ce point sera décrit dans les parties suivantes. Qu'advient-il de ce test dans un cadre de marché stressé ?

Les résultats de la calibration sont présentés en annexe.

12.3.2 Environnement économique stressé

On fixe arbitrairement à 100bp le niveau de la VA dans ce nouvel univers de calcul, il s'accompagne d'une hausse notable des *spreads* et d'une baisse du marché action toutes choses égales par ailleurs, la volatilité Normale des taux et le niveau des taux sans risque ne sont pas impactés. Suite à cela, le montant des moins-values latentes est passé à -81 M€ contre 105 M€ de plus-values dans le scenario central. Dans les tests 3 et 4, on choisit respectivement de répliquer la volatilité Normale et la volatilité de Black avec une courbe des taux qui intègre une VA de 100bps. Le tableau ci-après présente les écarts entre la volatilité de Black d'un modèle calibré avec la volatilité de Black et la volatilité de Black équivalente d'un modèle calibré avec la volatilité Normale :

Différence entre la Volatilité de black d'un modèle calibré avec la Vol de Black et la Volatilité de black d'un modèle calibré avec la Vol de Normale (VA =100bp)															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			41.6%	33.9%	28.6%	24.8%	22.0%	19.9%	18.4%	17.3%	16.1%	16.2%	17.8%	19.1%	20.5%
2	45.7%	36.5%	30.3%	25.8%	22.5%	20.0%	18.1%	16.8%	15.8%	15.2%	14.7%	15.5%	17.2%	18.7%	20.1%
3	32.7%	27.5%	23.6%	20.7%	18.4%	16.7%	15.4%	14.6%	14.0%	13.7%	13.8%	15.0%	16.8%	18.4%	19.9%
4	25.5%	22.0%	19.3%	17.1%	15.5%	14.3%	13.5%	13.0%	12.8%	12.7%	13.3%	14.7%	16.5%	18.2%	19.7%
5	20.8%	18.3%	16.2%	14.6%	13.5%	12.7%	12.2%	12.0%	12.0%	12.2%	13.1%	14.6%	16.4%	18.1%	19.7%
6	17.5%	15.5%	13.9%	12.8%	12.1%	11.6%	11.4%	11.4%	11.6%	12.1%	13.2%	14.5%	16.4%	18.2%	19.8%
7	14.9%	13.4%	12.3%	11.6%	11.2%	10.9%	10.9%	11.2%	11.7%	12.3%	13.4%	14.6%	16.5%	18.3%	19.9%
8	13.1%	12.0%	11.3%	10.9%	10.6%	10.7%	10.9%	11.4%	12.1%	12.7%	13.6%	14.7%	16.6%	18.5%	20.1%
9	11.9%	11.2%	10.8%	10.5%	10.5%	10.8%	11.3%	12.0%	12.6%	13.1%	13.9%	15.0%	16.9%	18.8%	20.4%
10	11.4%	10.9%	10.6%	10.6%	10.8%	11.4%	12.1%	12.7%	13.2%	13.6%	14.3%	15.3%	17.3%	19.1%	20.7%
11	11.0%	10.7%	10.7%	11.0%	11.6%	12.3%	12.9%	13.4%	13.8%	14.0%	14.6%	15.7%	17.6%	19.5%	21.1%
12	10.9%	11.0%	11.4%	12.0%	12.8%	13.4%	13.8%	14.1%	14.3%	14.5%	15.1%	16.1%	18.0%	19.9%	21.5%
13	11.5%	12.0%	12.8%	13.5%	14.1%	14.4%	14.5%	14.6%	14.7%	14.9%	15.5%	16.5%	18.4%	20.3%	21.9%
14	13.0%	13.8%	14.6%	15.0%	15.2%	15.1%	15.0%	15.0%	15.1%	15.3%	15.8%	16.9%	18.8%	20.7%	22.3%
15	15.3%	15.8%	16.0%	15.9%	15.5%	15.3%	15.2%	15.2%	15.3%	15.5%	16.1%	17.2%	19.1%	21.0%	22.6%
16	16.8%	16.7%	16.3%	15.7%	15.2%	15.0%	15.0%	15.1%	15.2%	15.5%	16.1%	17.3%	19.3%	21.2%	22.8%
17	17.0%	16.3%	15.4%	14.9%	14.6%	14.6%	14.6%	14.8%	15.1%	15.4%	16.1%	17.3%	19.4%	21.3%	22.9%
18	16.0%	14.9%	14.4%	14.1%	14.1%	14.2%	14.3%	14.6%	14.9%	15.3%	16.1%	17.4%	19.5%	21.4%	23.1%
19	14.2%	13.8%	13.6%	13.6%	13.7%	13.9%	14.2%	14.5%	14.9%	15.3%	16.2%	17.5%	19.7%	21.6%	23.3%
20	13.6%	13.4%	13.4%	13.5%	13.7%	14.0%	14.3%	14.7%	15.1%	15.5%	16.4%	17.8%	20.0%	22.0%	23.6%
21	13.5%	13.4%	13.5%	13.7%	13.9%	14.2%	14.6%	15.0%	15.4%	15.9%	16.8%	18.2%	20.4%	22.4%	24.1%
22	13.5%	13.6%	13.7%	13.9%	14.2%	14.6%	15.0%	15.4%	15.8%	16.3%	17.2%	18.6%	20.9%	22.8%	24.5%
23	13.7%	13.8%	14.0%	14.3%	14.6%	15.0%	15.4%	15.8%	16.3%	16.7%	17.7%	19.1%	21.4%	23.4%	25.1%
24	14.0%	14.2%	14.4%	14.7%	15.1%	15.4%	15.8%	16.3%	16.8%	17.2%	18.2%	19.7%	21.9%	23.9%	25.6%
25	14.4%	14.6%	14.9%	15.2%	15.5%	15.9%	16.4%	16.8%	17.3%	17.8%	18.8%	20.2%	22.5%	24.5%	26.2%

On s'aperçoit que la volatilité Black théorique d'un modèle calibré avec la volatilité de Black est en moyenne 15% plus élevée (en absolu) qu'un modèle calibré avec la volatilité de Normale. En norme S2 les répercussions les plus importantes sont ressenties sur le niveau de fonds propres, le tableau ci-après détaille les différents effets perçus :

N° du test	Volatilité de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Utilisation des prix ATM	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
3	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLMM	100bp	79.6	123.1	154.5%
4	Black	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLMM	100bp	82.7	95.6	115.6%

La différence entre les deux méthodes est conséquente, surtout dans un contexte de stress où chaque pourcentage de ratio compte.

Cela met de nouveau en évidence la sensibilité du BE à la volatilité, dans le cas présent, un calcul approximatif permet d'évaluer la sensibilité du BE à 1.8M€ pour 1% de volatilité Black à la hausse.

12.4 CHOIX DE LA COURBE DE REFERENCE

Dans cette section, nous présentons une méthode de calibrage qui n'est pas tout à fait en phase avec la réglementation. Les paramètres des modèles sont déterminés sans prendre en considération les impacts liés à la transformation de la courbe des taux sans risque. On va donc calibrer le modèle avec des données issues à 100% des marchés financiers (volatilités Normales de marché et courbe des taux de swaps). Puis, dans un deuxième temps, les tables stochastiques seront construites avec les paramètres préalablement calibrés et la courbe des taux EIOPA, autrement dit, on introduit un déphasage dans le triptyque défini ci-avant.

Le tableau ci-après présente les écarts de volatilité de Black entre les deux méthodes, globalement les volatilités du modèle calibré avec la courbe des taux de swap sont plus élevées d'environ 1%.

Différence entre la Volatilité de black d'un modèle calibré avec la Vol de Normale et la courbe swap et la Volatilité de black d'un modèle calibré avec la Vol de Normale et le courbe EIOPA

Maturité \ Tenor	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y	15Y	20Y	25Y	30Y
1	0.00%	0.00%	34.39%	13.46%	6.21%	2.92%	1.16%	0.23%	-0.24%	-0.42%	-0.32%	0.30%	1.58%	2.50%	2.96%
2	48.55%	18.80%	9.49%	4.70%	2.15%	0.67%	-0.16%	-0.59%	-0.76%	-0.76%	-0.49%	0.22%	1.53%	2.41%	2.85%
3	13.16%	7.37%	3.73%	1.60%	0.29%	-0.48%	-0.89%	-1.06%	-1.06%	-0.96%	-0.58%	0.19%	1.51%	2.36%	2.78%
4	6.11%	3.12%	1.28%	0.07%	-0.67%	-1.08%	-1.26%	-1.28%	-1.19%	-1.03%	-0.59%	0.24%	1.55%	2.35%	2.74%
5	2.69%	1.12%	0.01%	-0.72%	-1.14%	-1.35%	-1.39%	-1.33%	-1.19%	-0.99%	-0.51%	0.35%	1.62%	2.37%	2.73%
6	1.10%	0.05%	-0.67%	-1.11%	-1.35%	-1.43%	-1.40%	-1.28%	-1.11%	-0.89%	-0.38%	0.51%	1.72%	2.41%	2.74%
7	0.17%	-0.52%	-0.98%	-1.25%	-1.38%	-1.38%	-1.30%	-1.15%	-0.96%	-0.74%	-0.19%	0.70%	1.83%	2.47%	2.76%
8	-0.31%	-0.77%	-1.08%	-1.25%	-1.30%	-1.26%	-1.15%	-0.98%	-0.78%	-0.53%	0.04%	0.91%	1.96%	2.53%	2.79%
9	-0.53%	-0.86%	-1.07%	-1.16%	-1.16%	-1.09%	-0.96%	-0.78%	-0.55%	-0.28%	0.30%	1.12%	2.08%	2.60%	2.83%
10	-0.61%	-0.84%	-0.98%	-1.02%	-1.00%	-0.90%	-0.75%	-0.54%	-0.29%	-0.01%	0.57%	1.33%	2.20%	2.67%	2.87%
11	-0.58%	-0.74%	-0.83%	-0.85%	-0.79%	-0.67%	-0.49%	-0.26%	0.00%	0.28%	0.82%	1.52%	2.31%	2.72%	2.90%
12	-0.47%	-0.60%	-0.65%	-0.64%	-0.56%	-0.41%	-0.21%	0.03%	0.29%	0.56%	1.06%	1.69%	2.40%	2.77%	2.93%
13	-0.33%	-0.42%	-0.45%	-0.41%	-0.30%	-0.13%	0.09%	0.32%	0.57%	0.81%	1.26%	1.84%	2.48%	2.81%	2.95%
14	-0.14%	-0.20%	-0.20%	-0.14%	-0.01%	0.17%	0.37%	0.59%	0.81%	1.03%	1.44%	1.95%	2.53%	2.83%	2.95%
15	0.09%	0.05%	0.07%	0.15%	0.28%	0.44%	0.62%	0.82%	1.01%	1.20%	1.57%	2.03%	2.56%	2.84%	2.94%
16	0.36%	0.33%	0.35%	0.42%	0.53%	0.67%	0.82%	0.99%	1.16%	1.34%	1.66%	2.09%	2.57%	2.82%	2.92%
17	0.62%	0.58%	0.59%	0.64%	0.72%	0.84%	0.98%	1.12%	1.28%	1.43%	1.73%	2.12%	2.57%	2.80%	2.89%
18	0.81%	0.77%	0.76%	0.80%	0.87%	0.97%	1.09%	1.23%	1.36%	1.50%	1.78%	2.14%	2.55%	2.77%	2.85%
19	0.96%	0.90%	0.89%	0.92%	0.99%	1.08%	1.19%	1.31%	1.43%	1.56%	1.81%	2.15%	2.54%	2.74%	2.81%
20	1.04%	1.00%	0.99%	1.02%	1.08%	1.16%	1.26%	1.37%	1.49%	1.61%	1.84%	2.15%	2.52%	2.71%	2.78%
21	1.12%	1.09%	1.08%	1.11%	1.16%	1.24%	1.33%	1.43%	1.54%	1.65%	1.87%	2.16%	2.51%	2.68%	2.75%
22	1.20%	1.17%	1.16%	1.19%	1.24%	1.31%	1.39%	1.49%	1.59%	1.69%	1.89%	2.17%	2.49%	2.66%	2.72%
23	1.26%	1.24%	1.23%	1.25%	1.30%	1.36%	1.44%	1.53%	1.63%	1.72%	1.92%	2.17%	2.48%	2.64%	2.69%
24	1.33%	1.30%	1.29%	1.31%	1.35%	1.41%	1.49%	1.57%	1.66%	1.75%	1.93%	2.18%	2.47%	2.62%	2.67%
25	1.38%	1.35%	1.35%	1.36%	1.40%	1.46%	1.52%	1.60%	1.69%	1.77%	1.94%	2.18%	2.45%	2.60%	2.64%
30	1.55%	1.52%	1.51%	1.51%	1.54%	1.58%	1.63%	1.69%	1.75%	1.82%	1.96%	2.15%	2.37%	2.48%	2.51%

Dans un contexte où la VA est de 4bp, les impacts ne sont pas significatifs. En cas de VA importante on se retrouverait approximativement dans la situation stressée décrite si avant.

N° du test	Volatilité/prix de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Utilisation des prix ATM	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
1	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLM	4bp	58.5	139.4	238.5 %
6	Normale	SWAP	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLM	4bp	58.7	138.5	235.6 %

Si on choisit la volatilité Normale comme volatilité de référence, il n'y a pas d'intérêt particulier à calibrer le modèle sur des données 100% marché et à diffuser dans un second temps avec la courbe EIOPA. En outre, avec cette méthode, le ratio S2 sera négativement impacté en cas de hausse de la VA.

12.5 CONSERVATION DU PRIX DE MARCHE VERSUS CONSERVATION DE LA VOLATILITE NORMALE DE MARCHE

Si on décide de conserver les prix constatés sur le marché, l'application du triptyque ne nous permettra plus de conserver les volatilités du marché. Dans un contexte de VA très faible, les conséquences de ce choix sont mineures, même si on ne respecte pas la réglementation.

N° du test	Volatilité/prix de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Utilisation des prix ATM	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
1	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLM	4bp	58.5	139.4	238.5 %
5	Prix	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver	DDLM	4bp	58.3	139.6	239.5 %

Les graphiques ci-après mesurent les écarts (en absolu) entre la volatilité Normales issue de la conservation des prix de marché et la volatilité Normale observée sur le marché (volatilité de référence en norme S2).

Ecarts (en absolu) entre la volatilité Normales issue de la conservation des prix de marché et la volatilité Normale observée sur le marché															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
2	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
3	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%
4	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%
5	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%
6	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%
7	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.03%
8	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.02%	0.03%
9	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.04%
10	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.04%
11	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.03%	0.05%
12	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.02%	0.03%	0.05%
13	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.04%	0.06%
14	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%	0.05%	0.07%
15	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.03%	0.05%	0.07%
16	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.04%	0.06%	0.08%
17	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.03%	0.05%	0.07%	0.09%
18	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.05%	0.07%	0.09%
19	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.04%	0.06%	0.08%	0.10%
20	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.07%	0.09%	0.11%

Avec une VA de 4bp, les volatilités retenues sont légèrement inférieures à celles du marché. Ce qui permet une très légère amélioration du ratio (239.5% vs 238.5%).

Dans un contexte de marché stressé avec une VA importante, en l'occurrence 100bp, le choix de conserver les prix plutôt que les volatilités Normales s'avérera défavorable puisque les volatilités Normales consécutives à ce choix seront en moyenne supérieures de 10bp à celles du marché. Le graphique ci-après permet de nous rendre compte des écarts constatés :

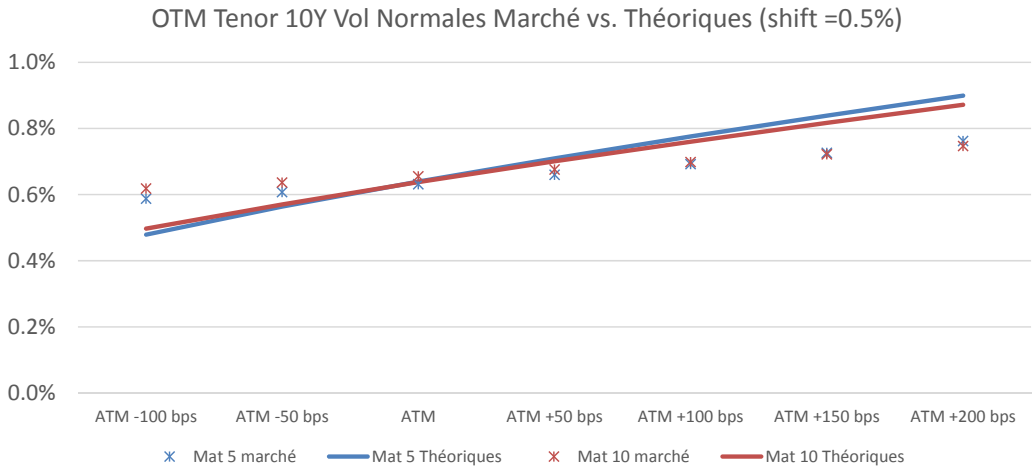
Ecarts (en absolu) entre la volatilité Normale issue de la conservation des prix de marché et la volatilité Normale observée sur le marché															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.04%	0.05%	0.06%	0.08%
2	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.05%	0.06%	0.08%	0.09%
3	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.06%	0.07%	0.09%	0.10%
4	0.03%	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.08%	0.10%	0.12%
5	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.06%	0.07%	0.08%	0.10%	0.13%
6	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.06%	0.07%	0.07%	0.07%	0.08%	0.09%	0.11%	0.13%
7	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.08%	0.08%	0.10%	0.12%	0.14%
8	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.07%	0.07%	0.07%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.09%	0.11%	0.13%	0.15%
9	0.06%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.09%	0.09%	0.10%	0.12%	0.14%	0.16%
10	0.07%	0.07%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.10%	0.11%	0.13%	0.15%	0.17%
11	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.14%	0.16%	0.18%
12	0.08%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.12%	0.14%	0.17%	0.19%
13	0.09%	0.09%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.11%	0.12%	0.13%	0.15%	0.18%	0.20%
14	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.12%	0.12%	0.13%	0.14%	0.16%	0.19%	0.21%
15	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.12%	0.12%	0.12%	0.13%	0.14%	0.15%	0.17%	0.20%	0.22%
16	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.11%	0.12%	0.12%	0.13%	0.13%	0.14%	0.15%	0.16%	0.18%	0.21%	0.23%
17	0.10%	0.11%	0.11%	0.12%	0.12%	0.13%	0.13%	0.14%	0.14%	0.15%	0.16%	0.17%	0.19%	0.22%	0.24%
18	0.11%	0.12%	0.12%	0.13%	0.13%	0.14%	0.14%	0.15%	0.16%	0.16%	0.17%	0.18%	0.20%	0.23%	0.25%
19	0.12%	0.12%	0.13%	0.14%	0.14%	0.15%	0.15%	0.16%	0.17%	0.17%	0.18%	0.19%	0.21%	0.24%	0.26%
20	0.13%	0.13%	0.14%	0.15%	0.15%	0.16%	0.17%	0.17%	0.18%	0.19%	0.19%	0.21%	0.23%	0.25%	0.27%

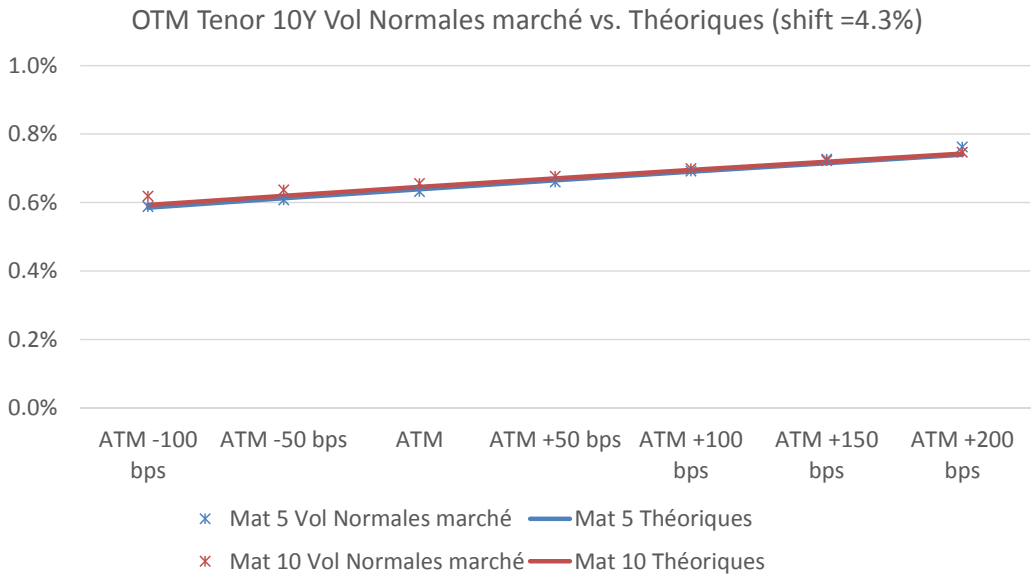
12.6 EFFET DU SHIFT SUR LE RATIO

Nous présentons les effets du shift dans le cadre du modèle DDLMM. Nous allons étudier deux sensibilités et les comparer au calibrage retenu (shift = 4.3% dans le test n°1). Pour les tests 8 et 9 le processus de calibrage est le suivant :

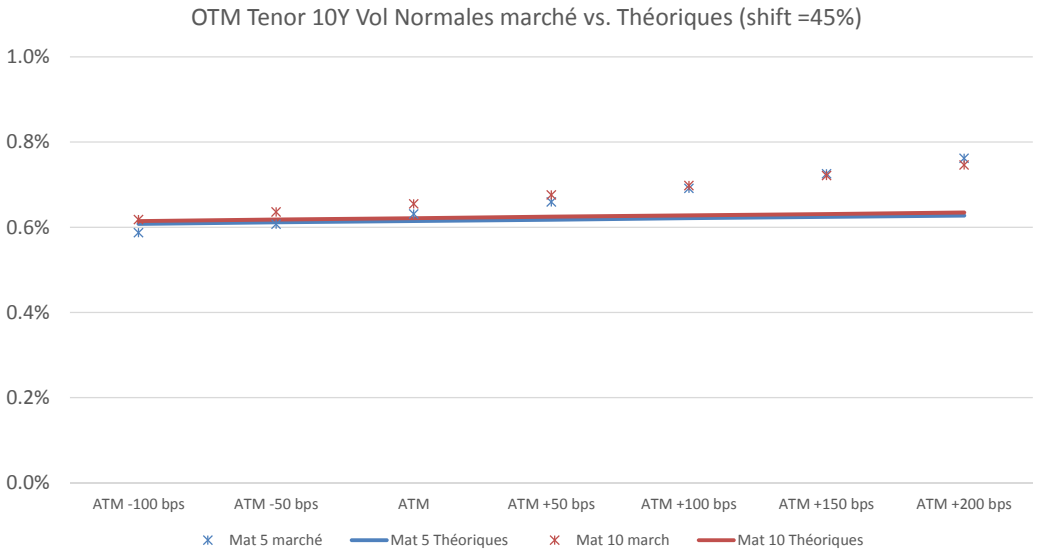
- On fixe le shift à une valeur donnée (0.5% pour le test 8 et 45% pour le test 9),
- Puis on calibre le modèle sur les niveaux ATM, les niveaux OTM ne sont plus objectivés lors du calibrage.

Avant d'analyser les résultats, nous allons étudier les impacts qui sont constatés sur les tables stochastiques. Les trois graphiques représentent le comportement, du modèle par rapport à la réplication des volatilités Normales OTM en fonction de la valeur du shift, conformément au processus les prix ATM sont correctement répliqués dans les trois cas :



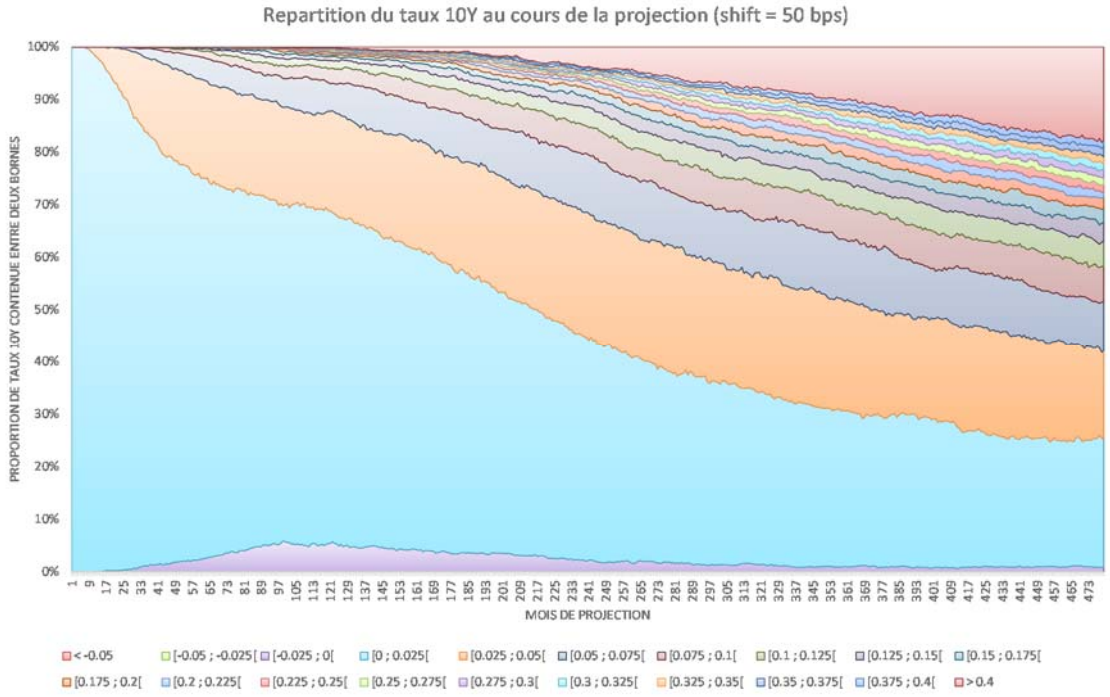


Confidentiel

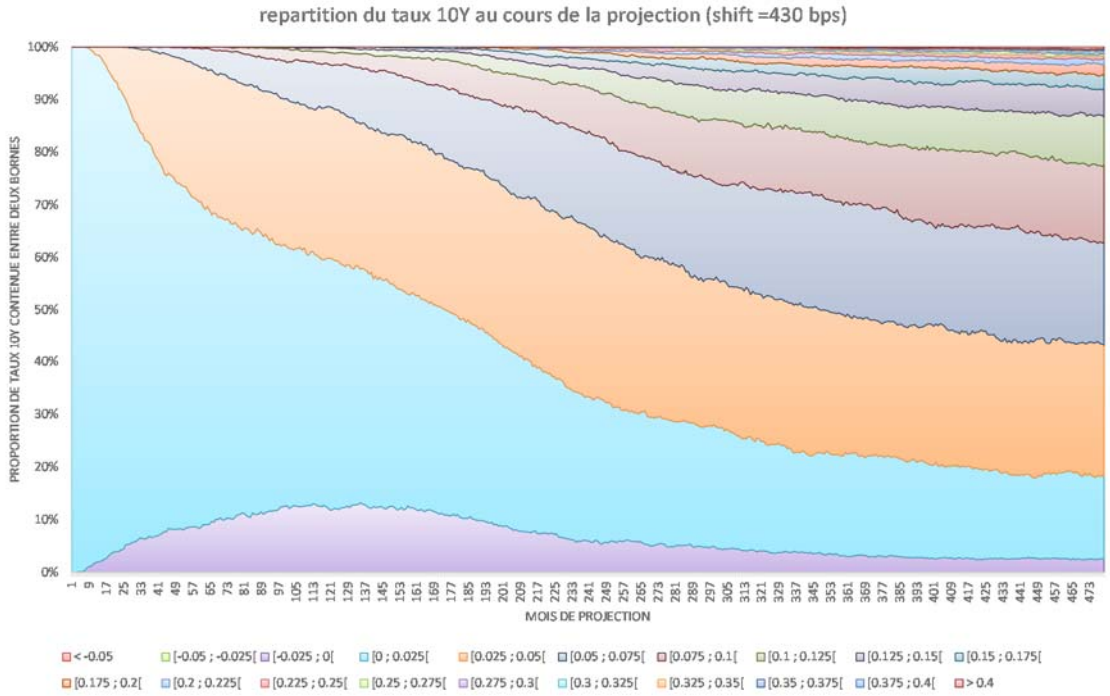


Il est intéressant d'observer la rotation autour de l'ATM : plus le shift est important et plus les volatilités Normales théoriques sont planes ; et inversement, plus le *shift* est faible et plus la courbe de volatilités est dépendante du *strike*. Autrement dit, avec un shift à 45% la volatilité Normale théorique constatée sur un *strike* ATM -100bp est 10bp plus haute qu'avec un shift à 0.5%. Le lien entre prix et volatilité étant direct nous pouvons nous attendre à des taux négatifs plus bas et en proportion plus importante lorsque le *shift* augmente. Les graphiques ci-après permettent de vérifier ce point :

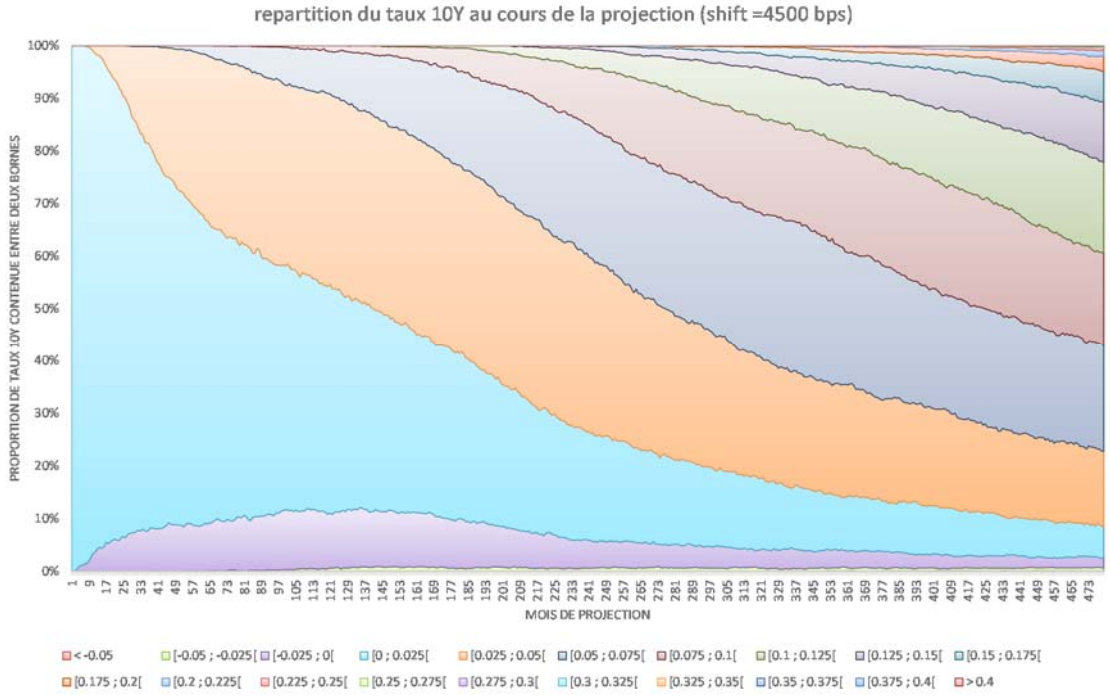
Test n°8



Test n°1



Test n°9



L'analyse des graphiques nous permet de voir que le pourcentage de taux explosifs est bien moins important avec un shift élevé. Avec un shift faible on peut avoir jusqu'à 20% de taux supérieurs à 40%

Confidentiel

En ce qui concerne les *Best Estimate*, nous avons réalisé un tableau qui présente les BE avant et après le retraitement des écarts de convergence. Le tableau présente les éléments qui permettent d'évaluer l'écart de convergence constaté dans une simulation stochastique :

- Actif t=0 : Valeur de marché de tout l'actif du bilan y compris coupons courus,
- VAN des flux : Valeur actualisée à t=0 de tous les flux sortants et entrants du modèle,
- Ecart de convergence : donnée qui permet de mesurer le niveau de fuite constaté dans le modèle de projection de flux.

$$Ecart\ de\ convergence\ en\ \% = \frac{VAN}{Actif_{t=0}} - 1$$

- BE corrigé au prorata : le BE et les fonds propres sont adaptés de façon proportionnelle afin que la VAN et l'actif en t=0 soient égaux,
- BE en norme S2 : l'écart de convergence est à la charge des fonds propres, si la VAN est supérieure à l'actif, on abaisse les fonds propres de la différence, si la VAN est inférieure à l'actif, on rehausse le BE de la différence.

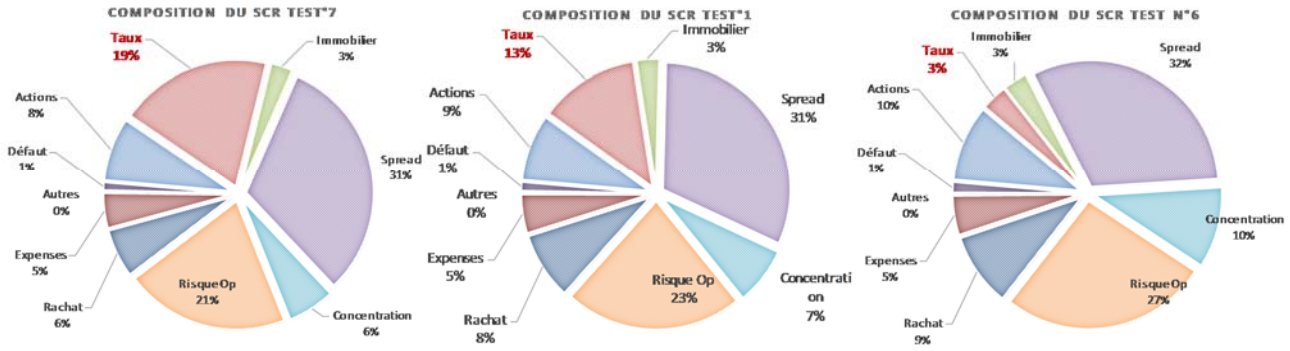
N° du test	Shift	Actif t=0 (M€)	VAN des flux (M€)	Ecart de convergence en %	BE avant (M€)	BE corrigé au prorata (plus réaliste pour l'analyse)	BE en norme S2 (écart de convergence à la charge des fonds propres)	Ecart (BE S2-BE prorata)
8	0.50%	2 175	2 181	0.28%	2 026	2 021	2 026	5.7
1	4.30%	2 175	2 176	0.03%	2 020	2 020	2 020	0.5
9	45%	2 175	2 175	-0.01%	2 024	2 024	2 024	-0.1

On remarquera que la présence excessive de taux explosifs dans le test 8 détériore la convergence, elle est multipliée par presque dix si on la compare au test n°1. A cause de cela, le BE en norme S2 du test°8 est le plus important des trois tests. Si on s'intéresse au BE corrigé au prorata, les BE des tests n°1 et 8 sont relativement similaires même si théoriquement on aurait dû avoir un BE inférieur dans le cas du test n°8, cela s'explique par le fait qu'une proportion de taux explosifs importante est corrélée positivement au montant de rachat conjoncturel. Autrement dit, on aurait une baisse de la valeur de l'option de garantie en capital compensée par une hausse de la valorisation de l'option de rachat.

En fait les deux tests vraiment comparables sont les tests n°1 et 9 car leurs proportions de taux explosifs sont faibles et leurs de taux de convergence proches. Dans ce cas précis on peut entrevoir la sensibilité au *smile* (volatilité Normale ATM-100bps par exemple) du BE, et l'estimer en réalisant le calcul simple suivant :

$$vega_{ATM-100bps} = \frac{dBE}{dvol\ Normale\ ATM - 100bps} = \frac{4M€}{4bps} = 1M€\ pour\ 1bp\ de\ volatilité\ normale\ à\ la\ hausse$$

En ce qui concerne les ratios de solvabilité, les résultats s'expliquent essentiellement par les niveaux de SCR, car les niveaux de fonds propres restent assez proches. Les camemberts ci-après permettent de mieux comprendre les effets du *shift* sur la composition du SCR et notamment sur le risque de taux, entre un shift à 0.5% et un shift à 45%, la part dans la composition du SCR passe de 3% à 19% soit six fois plus avec un shift à 45%. Ce phénomène s'explique par le fait que la proportion des taux négatifs est quasiment deux fois plus importante avec un *shift* à 45% qu'avec un shift à 0.5% dans le scénario de baisse des taux.



Le tableau ci-après présente la comparaison des ratios de solvabilité en fonction des trois cas, sans surprise, le test n°9 a le risque de taux le plus fort et le ratio de couverture le plus faible :

N° du test	Volatilité de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Utilisation des prix ATM	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
1	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLMM	4bp	58.5	139.4	238.5%
8	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	non	Fixé à 0.5%	DDLMM	4bp	51.4	135.9	264.4%
9	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	non	Fixé à 45%	DDLMM	4bp	64.2	137.3	213.6%

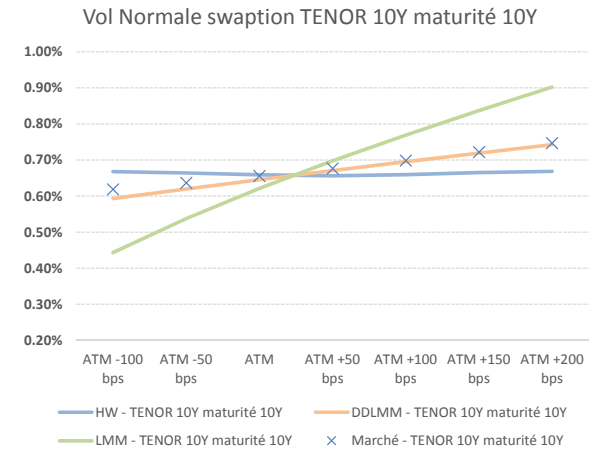
Les sensibilités permettent de se rendre compte de la sensibilité du ratio S2 au *shift* appliqué dans les modèles LMM. On voit qu'en absolu la différence de ratio peut attendre plus de 50% en fonction des niveaux du *shift*. Objectiver le *shift* avec les niveaux de volatilité OTM du marché permet de donner une justification *market consistent* à ce paramètre très sensible et de légitimer son niveau.

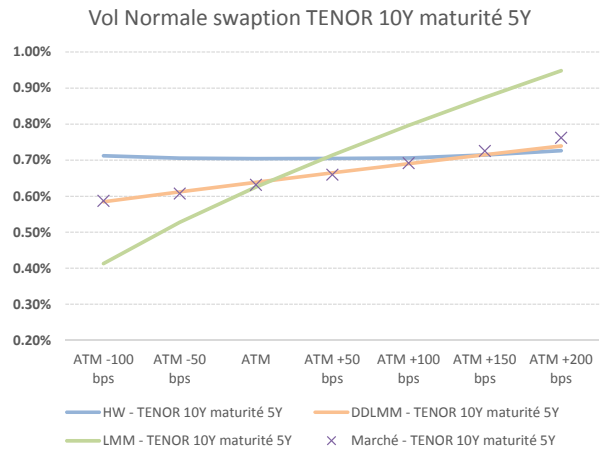
12.7 SENSIBILITES DU RATIO DE SOLVABILITE 2 AU MODELE DE TAUX

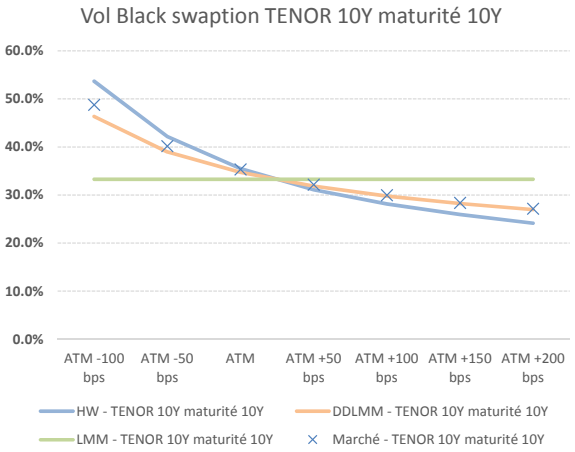
Dans cette section, nous allons étudier la sensibilité du ratio au choix du modèle de taux. Dans le cadre du test, les modèles n'ont pas tous la même capacité de réplication : le modèle DDLMM a 9 paramètres pour répliquer les volatilités de marché, le LMM a 6 paramètres et le HW a 2 paramètres. Afin de pouvoir comparer les modèles, nous avons mis comme objectif minimal la réplication de la volatilité du ténor 10Y.

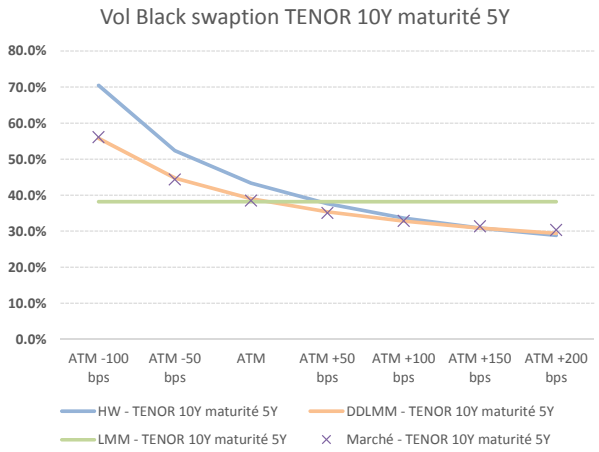
Les quatre graphiques ci-après permettent de rendre compte du calibrage et de mettre en exergue les différentes qualités de réplication sur les volatilités Normales et les volatilités de Black. Il est assez intéressant de remarquer que :

- le modèle LMM n'a pas de *smile* de volatilité de Black mais du *smile* de Volatilité Normale,
- le modèle HW a du *smile* de volatilité de Black mais pas de *smile* de Volatilité Normale,
- le modèle DDLMM a du *smile* de volatilité de Black et du *smile* de Volatilité Normale.







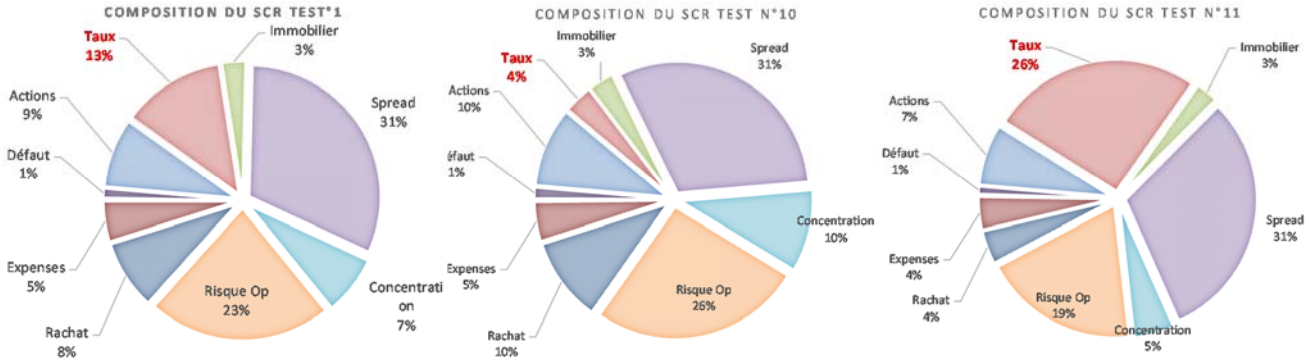


Sans trop de surprise, c'est le modèle le plus paramétré qui permet de répliquer le mieux l'ensemble des prix ATM et OTM qui sont constatés sur le marché. Sur une des zones sensible du calibrage, l'ATM -100 bps, le modèle HW présente le niveau de vol implicite le plus important et le modèle LMM le plus faible quant au modèle DDLMM, il se situe entre les deux.

Le tableau ci-après présente les résultats des simulations :

N° du test	Volatilité de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Utilisation des prix ATM	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
1	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLMM	4bp	58.5	139.4	238.5%
10	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	non	Non applicable	LMM	4bp	50.9	138.8	272%
11	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	non	Non applicable	HW	4bp	71.3	135	189.3%

Nous notons qu'en matière de fonds propres, l'utilisation des différents modèles génère relativement peu de différence. Néanmoins, la surestimation de la volatilité implicite OTM ATM-100bps observée avec le modèle HW coûte environ 4.5 M€. Les principales différences sont issues de la composante risque de taux du SCR. Les camemberts ci-après rendent compte des résultats : entre un HW et un DDLMM la proportion de risque de taux va du simple au double et est multipliée par plus de quatre entre un HW et un DDLMM.



Utiliser un modèle moins paramétré comme le HW présente des avantages incontestables en terme de simplicité et de robustesse. Néanmoins, quand il faut choisir les quelques instruments de marché qui doivent être objectivés lors de la calibration, cela peut se révéler encore plus complexe que de choisir un modèle de taux plus paramétré, car en théorie un tel choix doit pouvoir s'appuyer sur des études et des sensibilités qui devront prouver que les instruments choisis correspondent à ceux pour lesquels l'épargne modélisée est la plus sensible. Un modèle plus paramétré évitera de faire ses longues études, puisque en pratique sa capacité à répliquer les prix ATM et OTM simultanément d'un échantillon d'instruments sera bien plus grande. Afin d'étayer cela, nous allons estimer le vega de marché d'un portefeuille d'épargne. La partie suivante définira les méthodes de calcul et présentera nos premiers résultats.

Confidentiel

13 DETERMINATION DU VEGA D'UN PORTEFEUILLE EPARGNE

13.1 LES DIFFERENTES APPROCHES

Nous avons vu que le calibrage d'un modèle de taux nécessite une surface de volatilité ou de prix de swaptions éventuellement pondérée. La pondération peut avoir un impact non négligeable sur les résultats obtenus notamment sur le BE ou sur le ratio de solvabilité, il est donc important de les estimer de manière objective, en calculant la sensibilité du passif aux différents dérivés utilisés durant le calibrage. Il s'agit donc de calculer le *Vega* du portefeuille : $vega = \frac{\partial BE}{\partial \sigma_{swaption}}$

Remarque : dans la suite, nous supposerons que le modèle de taux employé est un modèle DDLMM calibré sur volatilité Normale.

Plusieurs approches sont envisageables pour calculer le vega du BE :

- Pour chaque swaption de la surface de volatilité, choquer la volatilité implicite associée (augmentation de 1bp de la volatilité normale associée par exemple), recalibrer le modèle et analyser la variation de Best Estimate,
- Calibrer un portefeuille répliquant du BE, composé principalement d'instruments non dérivés et des instruments dérivés utilisés dans le calibrage du modèle de taux,
- A partir d'un calibrage du modèle DDLMM, réaliser des perturbations sur la nappe des volatilités des taux forward et mettre en regard les impacts constatés sur la surface de swaptions et sur le BE.

Si la première approche est la plus simple techniquement à mettre en place, elle n'est pas nécessairement la plus précise puisque le calibrage du modèle de taux requiert l'emploi d'un algorithme de minimisation. Ainsi des piégeages de l'algorithme peuvent apparaitre et venir fausser les résultats.

La deuxième approche est intéressante pour les sociétés calculant leur capital économique à l'aide d'un portefeuille répliquant. Ce dernier étant délicat à construire en pratique, il est déconseillé d'employer cette technique uniquement pour le calcul du vega.

La troisième et dernière approche consiste à effectuer des perturbations sur la volatilité des taux *forward* afin de déterminer les swaptions pour lesquels le BE est le plus sensible.

13.2 SENSIBILITE DU BE A UNE PERTURBATION (TROISIEME APPROCHE)

La méthode retenue s'inspire des travaux réalisés par V. Piterbarg[14] sur l'évaluation du vega de produits structurés, elle consiste à déterminer les sensibilités du Best Estimate en perturbant à des endroits précis la volatilité des taux forward que l'on rappelle ci-après :

- [14] Piterbarg, V., A Practitioner's Guide To Pricing And Hedging Callable Libor Exotics In Forward Libor Models

$$\sigma_i(t) = \Phi_t\left([b(T_{i-1} - t) + a]\, e^{-c(T_{i-1}-t)} + d\right)$$
$$\text{avec } \Phi_t = phi_1 + (1 - phi_1) * e^{-phi_2 * t}$$

Les volatilités des taux forward perturbées seront définies par la formulation suivante :

$$\bar{\sigma}_i(t) = \sigma_i(t) + \varepsilon 1_{i=k;t=t_stress}$$

Où k correspond à la maturité du f*orward* et t_stress la date à laquelle on veut effectuer la perturbation, La variable t_stress est bornée par l'horizon de projection utilisé dans le cadre du calcul du *Best Estimate*.

En réalisant cela pour l'ensemble des maturités des *forward* et des périodes considérées dans la diffusion, on obtient un ensemble de sensibilités par rapport à la volatilité des taux *forward*. Les sensibilités obtenues sont propres au modèle de taux et ne correspondent pas à des sensibilités de produit de couverture standards. Afin d'obtenir un vega compatible avec les swaptions de marché, nous définissons l'ensemble des swaptions dites de référence avec lesquelles on veut faire coïncider le vega du *Best Estimate*. La matrice ci-après présente les volatilités Normale (notées $\theta_{\alpha\beta}$) des 300 swaptions avec lesquelles nous voulons faire coïncider notre vega.

Volatilité des swaption Normal ATM (vision EIOPA)															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	0.21%	0.28%	0.33%	0.38%	0.42%	0.43%	0.45%	0.45%	0.46%	0.46%	0.47%	0.48%	0.48%	0.49%	0.49%
2	0.36%	0.41%	0.45%	0.48%	0.50%	0.51%	0.52%	0.52%	0.53%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.54%	0.53%
3	0.49%	0.52%	0.54%	0.55%	0.54%	0.57%	0.57%	0.58%	0.57%	0.58%	0.58%	0.57%	0.57%	0.56%	0.55%
4	0.56%	0.58%	0.59%	0.59%	0.59%	0.60%	0.60%	0.61%	0.61%	0.61%	0.60%	0.59%	0.58%	0.57%	0.56%
5	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%	0.62%	0.63%	0.62%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.60%	0.59%	0.58%	0.57%
6	0.64%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.60%	0.59%	0.57%	0.56%
7	0.66%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.63%	0.61%	0.59%	0.57%	0.56%
8	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.61%	0.59%	0.57%	0.55%
9	0.67%	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.64%	0.61%	0.58%	0.56%	0.55%
10	0.67%	0.68%	0.68%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.64%	0.61%	0.58%	0.56%	0.55%
11	0.67%	0.68%	0.68%	0.67%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.63%	0.60%	0.57%	0.55%	0.54%
12	0.66%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.62%	0.59%	0.56%	0.54%	0.53%
13	0.66%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.62%	0.59%	0.55%	0.53%	0.51%
14	0.65%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.61%	0.58%	0.54%	0.52%	0.50%
15	0.64%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.60%	0.57%	0.54%	0.51%	0.49%
16	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.62%	0.61%	0.59%	0.56%	0.53%	0.50%	0.48%
17	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.58%	0.55%	0.52%	0.49%	0.47%
18	0.62%	0.62%	0.62%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.57%	0.54%	0.51%	0.48%	0.46%
19	0.61%	0.62%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%	0.56%	0.53%	0.50%	0.47%	0.45%
20	0.60%	0.61%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.59%	0.58%	0.58%	0.57%	0.55%	0.52%	0.49%	0.46%	0.44%

Le vega modèle du *Best Estimate* par rapport à une perturbation est défini de la manière suivante :

$$Vega\ modèle = \frac{\partial BE}{\partial \varepsilon_{k,t_stress}}$$

Le passage par les dérivées partielles nous permet de définir pour une perturbation donnée de la volatilité des taux *forward :*

$$Vega\ modèle = \frac{\partial BE}{\partial \varepsilon_{k,t_{stress}}} = \sum_{\alpha=1}^{20}\sum_{\beta=1}^{30} \frac{\partial BE}{\partial \theta_{\alpha\beta}} \frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{k,t_{stress}}}$$

$$k = 1, \dots, K$$

$t_{stress} = 0, \dots, horizon\ de\ projection$ (20 ans)

La quantité $\frac{\partial BE}{\partial \theta_{\alpha\beta}}$ correspond au vega de marché que nous recherchons.

La quantité $\frac{\partial BE}{\partial \varepsilon_{k,t_stress}}$ s'obtient en réalisant des simulations de Monte Carlo suite à l'ajout d'une perturbation.

La quantité $\frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{k,t_stress}}$ s'obtient avec les approximations de Rebonato.

La réalisation de 300 perturbations devrait nous permettre de pouvoir résoudre le système linéaire et de calculer les quantités recherchées.

Avec les vecteurs :

$$vega_marché \quad = \left(vega_marché_{\alpha\beta}\right)$$

$$vega_marché_{\alpha\beta} = \frac{\partial BE}{\partial \theta_{\alpha\beta}}$$

Et le vecteur des BE perturbés

$$P = \frac{\partial BE}{\partial \varepsilon_{k,t_{stress}}}$$

Et la matrice :

$$H = \left\{H_{\alpha\beta,kt_stress}\right\}$$

$$H_{\alpha\beta,kt_stress} = \frac{\partial \theta_{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon_{k,t_stress}}$$

On peut résoudre le système :

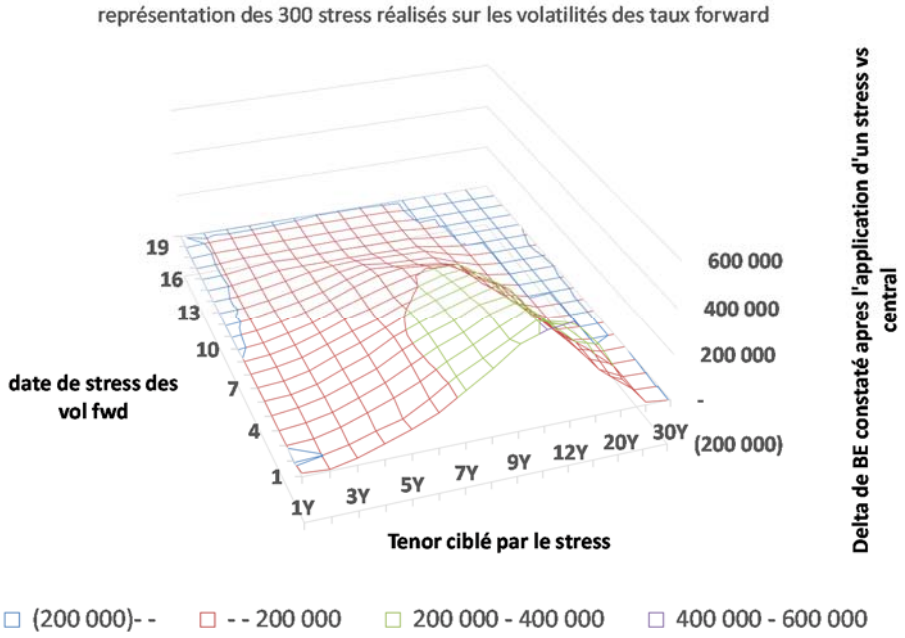
$$P = H \times vega_marché$$

Et en déduire le vega de marché par rapport aux volatilités des swaptions de référence.

13.3 RESULTATS NUMERIQUES ET TESTS

13.3.1 Résultats numériques

La première étape consiste à calculer la sensibilité du *Best Estimate* à une perturbation appliquée à la volatilité des taux *forwards.* Pour cela on réalise 300 sensibilités afin d'avoir une sensibilité du modèle par tenor et par maturité, on obtient ainsi un vega modèle propre à notre modèle de diffusion des taux d'intérêt. La surface ci-après donne un aperçu de la réalisation des 300 perturbations et des endroits où le vega modèle est le plus élevé :



Le vega de marché s'obtient dans un second temps en résolvant le système linéaire préalablement défini. Pour chaque couple maturité/ténor, les chiffres du tableau ci-après correspondent à une hausse du *Best Estimate* en euros pour 1 bp de hausse de la volatilité Normale de marché ATM :

Maturité \ Tenor	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y	15Y	20Y	25Y	30Y
1	3 043	- 3 008	1 908	2 519	- 1 938	1 733	2 692	- 3 240	4 248	1 627	2 821	- 3 386	10 549	1 152	26
2	66	- 4 371	2 957	7 130	- 5 957	- 6 440	4 883	- 2 095	- 528	2 522	9 037	- 6 291	10 146	- 399	- 26
3	- 1 507	- 2 694	2 361	9 139	1 120	- 19	4 202	- 7 443	5 788	15 657	- 34 314	42 766	- 12 110	723	- 115
4	- 2 209	- 1 677	1 626	7 240	- 6 910	10 914	5 788	- 14 368	15 718	9 388	4 544	- 7 323	- 2 651	- 768	163
5	2 251	- 18 998	3 794	22 573	- 11 944	20 104	4 620	- 12 617	16 590	30 465	11 635	- 65 977	25 454	699	- 71
6	5 596	- 15 934	3 275	28 651	- 17 129	14 133	16 040	293	2 726	34 339	- 29 032	3 419	3 169	- 125	139
7	- 1 656	- 2 763	14 496	23 751	- 1 878	- 12 115	17 481	3 217	6 471	44 930	- 7 715	- 7 572	- 703	77	- 85
8	- 16 695	9 764	3 172	16 789	25 977	- 22 900	5 137	- 3 867	16 674	15 087	16 187	1 608	- 2 838	244	- 268
9	- 25 516	61	21 551	- 3 062	41 244	5 897	6 019	- 7 917	1 388	44 300	- 39 808	17 999	- 4 265	- 411	456
10	- 26 848	- 8 837	27 396	- 8 700	23 464	30 510	14 711	- 4 013	- 24 620	41 851	4 091	- 15 050	- 243	- 152	169
11	- 26 104	- 19 097	39 213	- 8 722	- 12 010	31 906	33 869	- 4 252	94	35 804	9 412	- 13 353	0	- 195	215
12	- 18 117	- 37 454	31 826	16 313	- 9 713	15 884	52 553	- 17 343	14 937	21 903	- 5 877	- 5 569	- 0	111	- 122
13	- 14 128	- 30 066	27 747	8 221	836	- 1 079	44 012	- 5 513	- 1 396	27 484	- 8 567	- 1 187	- 0	318	- 348
14	- 11 504	- 36 906	33 784	13 341	- 22 477	- 2 633	20 246	7 758	5 035	20 386	20 936	10 028	0	- 311	343
15	- 9 289	- 34 181	34 643	24 419	- 19 976	8 534	11 994	- 1 590	668	24 442	- 8 149	249	0	- 200	220
16	- 7 632	- 33 183	28 017	15 894	1 862	1 793	10 175	145	2 266	35	10 950	-	-	-	-
17	- 3 816	- 17 693	8 568	6 004	2 291	756	6 645	3 031	4 084	20 433	- 10 918	-	-	-	-
18	- 4 375	8 958	802	- 3 935	- 649	208	- 203	839	1 298	- 1 147	-	-	-	-	-
19	- 3 866	- 3 313	1 980	946	- 689	376	136	432	3 078	13 568	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Total	- 162 307	- 251 391	245 600	178 513	- 14 475	97 561	260 999	- 68 545	74 520	403 073	- 54 768	- 49 636	26 509	762	696

vega directionnel	687 112

Même si le vega directionnel est d'environ 700 K€ pour 1bp de volatilité à la hausse, des vega négatifs sont néanmoins visibles sur la matrice. Cela semble très étonnant au premier abord, mais traduit en réalité la complexité qui est contenue dans le modèle pour modéliser les contraintes règlementaires, et les différentes actions qui peuvent être menées pour limiter les rachats conjoncturels ou stocker des richesses dans la PPB qui seront utilisées dans le futur. On peut assimiler cela à des options cédées par les assurés.

Dans le chapitre suivant nous nous attachons à évaluer la robustesse du vega que nous avons calculé en le soumettant à des déformations de la nappe de volatilité de marché. Nous essayerons ensuite de « netter » les vega négatifs par des vega positifs pour voir si cela à des conséquences sur les capacités de prédiction du vega. Un exemple de regroupement par tranche de tenor est donné ci-après.

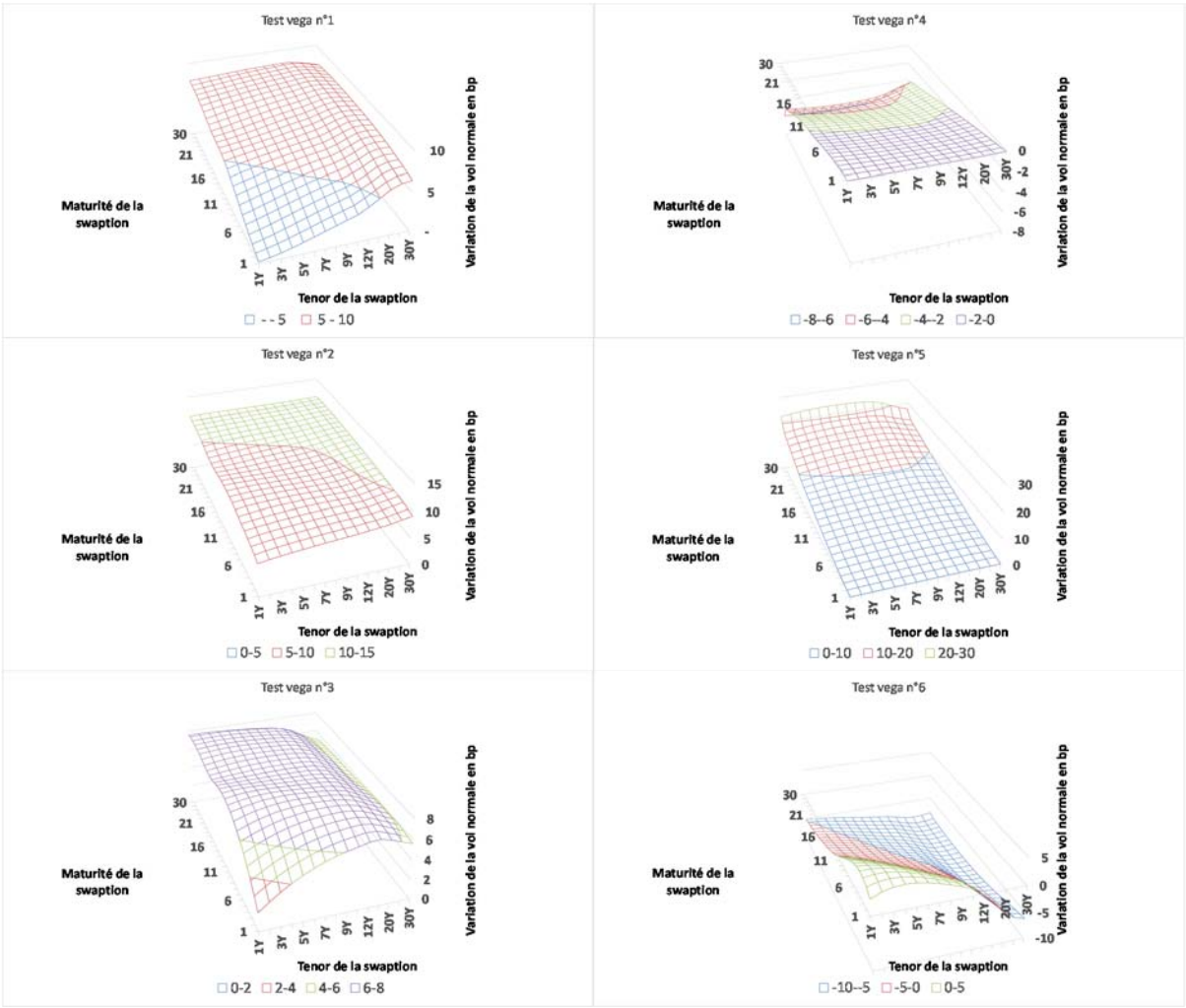
Maturité \ Tenor	1Y-4Y	5Y-8Y	9Y-12Y	>12Y
1	4 462	- 754	8 695	8 340
2	5 782	- 9 608	11 032	3 430
3	2 577	- 2 140	- 12 870	31 265
4	1 728	- 4 576	29 650	- 10 578
5	9 621	162	58 690	- 39 895
6	15 039	13 336	8 034	6 603
7	4 836	6 704	43 686	- 8 282
8	13 031	4 347	47 948	- 1 253
9	- 6 966	45 244	5 880	13 780
10	- 16 989	64 672	21 323	- 15 276
11	- 14 710	49 513	45 310	- 13 333
12	- 7 432	41 381	30 963	- 5 580
13	- 8 226	38 256	17 521	- 1 217
14	- 1 285	2 894	46 357	10 060
15	15 593	- 1 038	16 960	268
16	3 095	13 974	13 251	-
17	- 6 937	12 723	13 598	-
18	1 450	195	151	-
19	- 4 252	255	16 646	-
20	-	-	-	-
Total	10 415	275 540	422 826	- 21 669

Il est intéressant de noter qu'en termes de maturité optionnelle, le *Best Estimate* est toujours sensible à des options dont les maturités sont largement supérieures à 10Y. Dans notre cas, une calibration qui se limiterait à la réplication de la swaption 10Y dans 10Y pourrait amener à une surestimation ou sous-estimation du *Best Estimate*.

13.3.2 Tests d'adéquation du vega

Pour vérifier la robustesse du vega, nous avons effectué des déformations sur les principaux axes de la matrice des volatilités des swaptions. L'idée des tests est d'appliquer des déformations sur la matrice des swaptions sans se limiter à de simples translations de la nappe de volatilité. Les graphiques ci-après présentent les différents tests réalisés :

- Test 1 : hausse progressive de 0 à 5 bps sur les petits tenors et les maturités courtes, hausse directionnelle de 7 bps pour le reste,
- Test 2 : hausse directionnelle de 10 à 15 bps de la nappe des volatilités des swaptions,
- Test 3 : hausse avec formation d'une bosse,
- Test 4 : baisse progressive de la volatilité sur tous les tenors à partir de la maturité 10Y,
- Test 5 : hausse progressive de la volatilité sur tous les tenors à partir de la maturité 1Y,
- Test 6 : hausse de la volatilité sur les petits tenors puis réduction progressive de la volatilité après la diagonale tenor 20Y/maturité 20Y.



Les tests consistent à essayer de prévoir les impacts d'une déformation sur la valorisation du *Best Estimate*. Pour cela, nous multiplions le vega par les variations constatées sur la nappe de volatilité. Nous précisons que tous les autres paramètres restent égaux par ailleurs. Le résultat obtenu est ensuite comparé avec la simulation de Monte Carlo qui intègre le changement de volatilité.

Le tableau ci-après présente les résultats des tests réalisés :

En Keuros

Tests	BE central (MC)	BE post test (MC)	delta (MC)	Vega × Variations	delta expliqué avec le vega en %
Test n°1	2 016 351	2 020 601	4 251	4 274	99.4%
Test n°2	2 016 351	2 022 632	6 281	6 422	97.8%
Test n°3	2 016 351	2 021 559	5 208	5 275	98.7%
Test n°4	2 016 351	2 015 214	- 1 137	- 1 203	94.2%
Test n°5	2 016 351	2 020 372	4 021	3 981	99.0%
Test n°6	2 016 351	2 014 246	- 2 105	- 2 171	96.9%

Nous constatons que le taux d'explication moyen se situe à plus de 97%, traduisant une bonne capacité de prédiction.

Pour vérifier la pertinence de l'existence des vega négatifs, on réalise des *netting* entre les différents tenors sur les vega obtenus avec la résolution linéaire tout en conservant le même vega directionnel.

Les opérations de *netting* ci-après sont réalisées :

- 2Y←1Y+2Y+3Y+4Y,
- 6Y←5Y+6Y,
- 8Y←7Y+8Y,
- 10Y←10Y+12Y+15Y.

On obtient une nouvelle matrice de vega dont nous allons mesurer le pouvoir prédictif :

Maturité \ Tenor	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y	15Y	20Y	25Y	30Y
1	-	4 462	-	-	-	- 206	-	- 548	4 248	1 061	-	-	10 549	1 152	26
2	-	5 782	-	-	-	- 12 397	-	2 788	- 528	5 269	-	-	10 146	- 399	- 26
3	-	2 577	-	-	-	1 102	-	- 3 241	5 788	24 109	-	-	- 12 110	723	- 115
4	-	1 728	-	-	-	4 004	-	- 8 580	15 718	6 609	-	-	- 2 651	- 768	163
5	-	9 621	-	-	-	8 159	-	- 7 997	16 590	- 23 877	-	-	25 454	699	- 71
6	-	15 039	-	-	-	- 2 996	-	16 333	2 726	8 726	-	-	3 169	- 125	139
7	-	4 836	-	-	-	- 13 994	-	20 698	6 471	29 644	-	-	- 703	77	- 85
8	-	13 031	-	-	-	3 078	-	1 270	16 674	32 882	-	-	- 2 838	244	- 268
9	-	- 6 966	-	-	-	47 141	-	- 1 897	1 388	22 492	-	-	- 4 265	- 411	456
10	-	- 16 989	-	-	-	53 974	-	10 698	- 24 620	30 893	-	-	- 243	- 152	169
11	-	- 14 710	-	-	-	19 896	-	29 617	94	31 863	-	-	0	- 195	215
12	-	- 7 432	-	-	-	6 171	-	35 210	14 937	10 458	-	-	- 0	111	- 122
13	-	- 8 226	-	-	-	- 243	-	38 499	- 1 396	17 730	-	-	- 0	318	- 348
14	-	- 1 285	-	-	-	- 25 109	-	28 003	5 035	51 350	-	-	0	- 311	343
15	-	15 593	-	-	-	- 11 442	-	10 404	668	16 541	-	-	0	- 200	220
16	-	3 095	-	-	-	3 655	-	10 320	2 266	10 985	-	-	-	-	-
17	-	- 6 937	-	-	-	3 048	-	9 676	4 084	9 514	-	-	-	-	-
18	-	1 450	-	-	-	- 441	-	636	1 298	- 1 147	-	-	-	-	-
19	-	- 4 252	-	-	-	- 313	-	568	3 078	13 568	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
total	-	10 415	-	-	-	83 086	-	192 454	74 520	298 669	-	-	26 509	762	696

vega directionnel	687 112

Le tableau ci-après nous permet de constater que dans 4 cas sur 6 la capacité de prédiction diminue :

Tests	BE central (MC)	BE post test (MC)	delta (MC)	Vega × Variations	delta expliqué avec le vega en %	delta expliqué avec le vega initial en %	écarts
Test n°1	2 016 351	2 020 601	4 251	4 190	98.6%	99.4%	0.87%
Test n°2	2 016 351	2 022 632	6 281	6 368	98.6%	97.8%	-0.87%
Test n°3	2 016 351	2 021 559	5 208	5 108	98.1%	98.7%	0.63%
Test n°4	2 016 351	2 015 214	- 1 137	- 1 147	99.2%	94.2%	-4.97%
Test n°5	2 016 351	2 020 372	4 021	3 789	94.2%	99.0%	4.79%
Test n°6	2 016 351	2 014 246	- 2 105	- 2 195	95.7%	96.9%	1.17%

De façon plus extrême, on nette tous les vega sur le tenor 10Y

Maturité \ Tenor	1Y	2Y	3Y	4Y	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y	12Y	15Y	20Y	25Y	30Y
1										20 743					
2										10 635					
3										18 833					
4										16 225					
5										28 578					
6										43 011					
7										46 944					
8										64 073					
9										57 937					
10										53 729					
11										66 779					
12										59 332					
13										46 334					
14										58 027					
15										31 783					
16										30 320					
17										19 385					
18										1 796					
19										12 649					
20										-					
total	-	-	-	-	-	-	-	-	-	687 112	-	-	-	-	-

vega directionnel	687 112

Confidentiel

Tests	BE central (MC)	BE post test (MC)	delta (MC)	Vega × Variations	delta expliqué avec le vega en %	delta expliqué avec le vega initial en %	écarts
Test n°1	2 016 351	2 020 601	4 251	4 369	97.2%	99.4%	2.23%
Test n°2	2 016 351	2 022 632	6 281	6 415	97.9%	97.8%	-0.11%
Test n°3	2 016 351	2 021 559	5 208	5 163	99.1%	98.7%	-0.43%
Test n°4	2 016 351	2 015 214	- 1 137	- 1 159	98.1%	94.2%	-3.89%
Test n°5	2 016 351	2 020 372	4 021	3 829	95.2%	99.0%	3.80%
Test n°6	2 016 351	2 014 246	- 2 105	- 2 580	77.4%	96.9%	19.44%

Le test n°6, avec un écart de 20%, confirme que la structure du vega est complexe, et que la simplification conduite dégrade trop fortement le pouvoir prédictif de ce dernier. Par rapport à ce point, l'utilisation d'un modèle très paramétré comme le DDLMM permet d'assurer une zone de réplication des prix de marché plus large.

13.3.3 Prise en compte du vega dans le calibrage

An chapitre précédent nous avons évalué le vega de marché du *best estimate,* nous connaissons à présent les volatilités des swaption pour lesquelles le *best estimate* est le plus sensible. Pour améliorer notre calibrage, nous suggérons d'utiliser cette source d'information afin d'objectiver au mieux la réplication des volatilités Normales de ces swaptions.

Initialement les poids utilisés étaient définis selon un avis d'expert, une analyse des sensibilités n'était pas faite au préalable. L'objectif du calibrage était de couvrir au mieux la nappe de volatilité des swaptions. Le tableau ci-après présente les poids utilisés pour le calibrage avant la prise en compte du vega :

Poids des swaptions ATM dans le calibrage

Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1						1		1		10					
2						1		1		10		1			
3						1		1		10		1			
4						1		1		10		1			
5															
6	1	1	1	1		1		1		10		1			
7															
8	1	1	1	1		1		1		10		1			
9															
10	1	1	1	1		1		1		10		1			
11															
12															
13															
14															
15		1	1	1		1		1		10		1			
16															
17															
18															
19															
20															

Afin de tenir compte du vega lors du calibrage, on considère pour cela un poids de 1 si la valeur absolue du vega est supérieure à 20 000€. Les nouvelles swaptions à objectiver sont définies dans le tableau ci-dessous :

Poids des swaptions ATM dans le calibrage

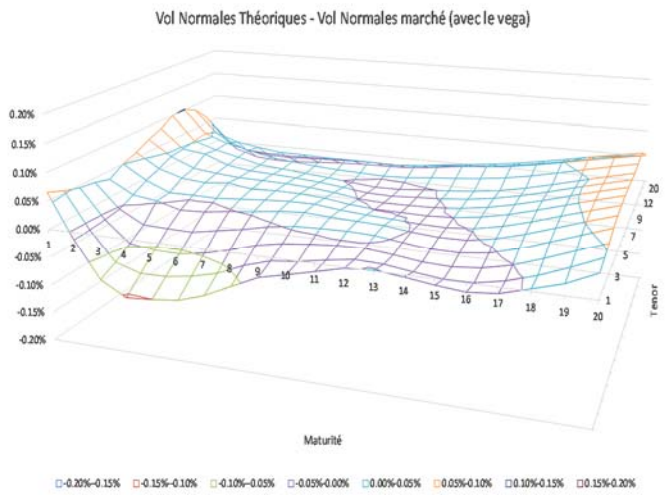
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	1	-	1	-	-	-	1	-	1	1	-	-
6	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-
7	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9	1	-	1	-	1	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-
10	1	-	1	-	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-
11	1	-	1	-	-	1	1	-	-	1	-	-	-	-	-
12	-	1	1	-	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-
13	-	1	1	-	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-
14	-	1	1	-	1	-	1	-	-	1	1	-	-	-	-
15	-	1	1	1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
16	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
18	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

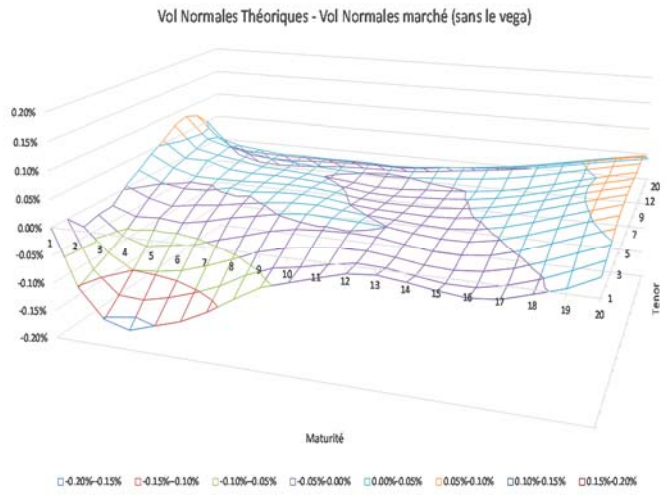
Les poids appliqués sur les swaption OTM sont conservés sur les tenor 5Y et 10Y :

Poids des swaptions OTM dans le calibrage

	strike :	-1.0%	-0.5%	0.0%	0.5%	1.0%	1.5%	2.0%
		ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1								
2								
3								
4								
5		5	1	1	1	1	1	5
6								
7								
8								
9								
10		5	1	1	1	1	1	5

Les effets de cette nouvelle méthode de calibrage sont présentés dans les tableaux suivants, ils évaluent les écarts entre la volatilité Normale théorique et la volatilité de marché sur le niveau ATM:





L'ensemble des éléments conduisant au ratio de solvabilité sont recalculés :

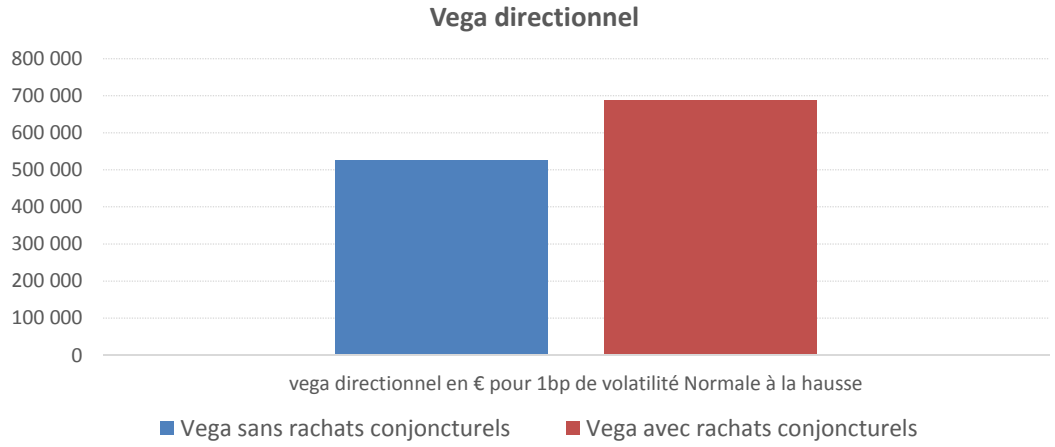
N° du test	Volatilité de référence	Courbe utilisée pour le calibrage	Instruments financiers à objectiver	Swaption ATM objectivées avec le vega	Utilisation des prix OTM	Calibrage du shift (fixé ou objectif)	Modèle de taux	Correction pour volatilité (Volatility Adjustment)	SCR (M€)	Fonds propres S2 (M€)	Ratio S2
1	Normale	EIOPA	Prix de swaption	non	oui	Objectiver OTM	DDLMM	4bp	58.5	139.4	**238.5%**
12	Normale	EIOPA	Prix de swaption	oui	oui	Objectiver OTM	DDLMM	4bp	59.6	139.5	**234.1%**

Confidentiel

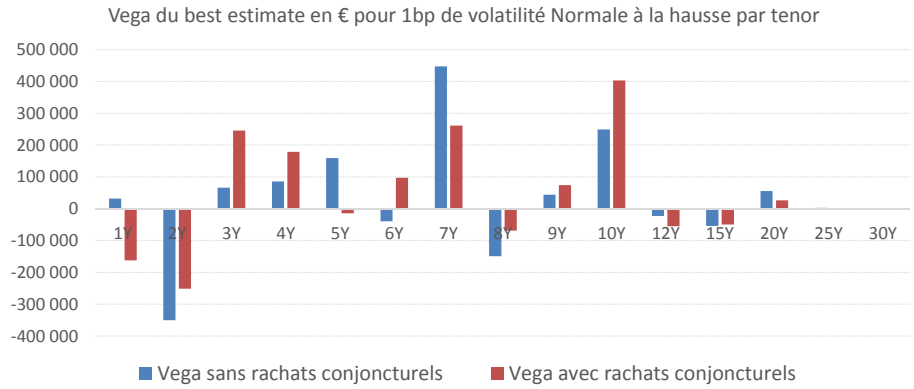
La prise en compte du vega lors du calibrage dégrade légèrement le ratio de solvabilité. Lorsque les poids sont déterminés de façon arbitraire, il n'est pas rare d'avoir des calibrages inadéquats et de sous-estimer la valeur de certaines options de taux.

13.3.4 Sensibilités du vega

Parmi les nombreuses possibilités, Il peut s'avérer intéressant, par exemple, de vouloir mesurer la sensibilité du vega aux rachats conjoncturels. Pour réaliser cela, on désactive cette option dans le modèle actif-passif et on relance l'ensemble du processus de calcul. Les graphiques ci-après permettent l'analyse des impacts :



On peut observer que la modélisation des rachats conjoncturels représente 25% du vega directionnel. Si on analyse le vega par tenor, on peut noter que sur le tenor 10Y, il est presque divisé par deux si on enlève les rachats dynamiques. Ce qui est cohérent avec le fait que le taux 10Y fait partie des éléments dont dépendent les rachats conjoncturels.



L'utilisation du vega à des fins de calibrage nous semble très pertinente. Nous estimons aussi que son utilisation devrait nous permettre d'affiner notre compréhension des options qui sont vendues ou achetées aux assurés.

14 CONCLUSION

Les sensibilités que nous avons réalisées ont été instructives, nous ne nous attendions pas à avoir des effets aussi marqués sur le ratio de solvabilité 2 de notre compagnie d'assurance fictive. Les travaux qui ont été réalisés ont pu mettre en évidence un certain nombre de points.

Tout d'abord le choix de la volatilité de référence pour le calcul du SCR doit nous permettre de prendre en compte les déformations qui seront apportées à la courbe initiale. A cause de la dépendance forte qui existe entre la volatilité de Black et le niveau des taux, les études ont montré qu'en situation de marché stressée couplée à l'intégration d'un niveau élevé du *volatility adjustment*, les écarts de ratio de couverture pouvaient dépasser les 30% en valeur absolue par rapport à l'utilisation de volatilité de Bachelier dont la dépendance au niveau des taux est plus faible. En fait, nos études ont montré que le choix de la volatilité de Black comme volatilité de référence maintenait la volatilité à des niveaux trop élevés de façon artificielle.

Un autre point concerne la calibration du *shift* dans les modèle de type DDLMM. Les études ont montré le lien qu'il y avait entre ce dernier et le *smile* de volatilité. A l'issue de nos études, nous préconisons de calibrer simultanément les paramètres de volatilité et ceux consacrés au *shift* sur des instruments ATM et OTM. D'autant que l'utilisation d'un shift paramétrique permet d'affiner encore un peu plus la capacité de réplication des prix des différents instruments. Nous nous sommes intéressés par la suite à l'incidence du *shift* sur le ratio de solvabilité en le fixant de façon arbitraire. Entre un *shift* à 0.5% et un *shift* à 45% l'écart de ratio en valeur absolue est proche de 50%. Le *shift* est donc un paramètre très sensible. L'objectiver avec les niveaux de volatilité OTM du marché permet de donner une justification *market consistent* et de légitimer son niveau.

L'évaluation du vega de marché d'un portefeuille d'épargne s'est révélée être une tâche particulièrement ardue notamment à cause des temps de calcul importants et du traitement des données. L'estimation du vega a mis en relief le large éventail d'options qui sont détenues dans le passif d'un assureur. Les tests sur la capacité de prédiction du vega se sont révélés concluants et l'analyse de la structure de vega a montré que le *best estimate* était sensible à de nombreux points de la surface de volatilité ATM du marché. Les sensibilités sur le shift ont également permis d'établir que les *best estimate* étaient sensibles aux *smile* sur les niveaux ATM-100bp et plus.

Ce dernier élément nous permet de rebondir sur la nécessité ou pas d'utiliser des modèles de taux plus ou moins paramétrés. Cette analyse s'est portée sur la comparaison de trois modèles standards, le HW, le LMM et le DDLMM. Le LMM offrait sans doute le meilleur ratio de couverture mais le contexte de taux négatifs que l'on constate actuellement le disqualifie d'office. L'utilisation du HW est très conservatrice, puisqu'il détériore le ratio de presque 50% en absolu par rapport à l'utilisation du DDLMM. La détérioration du ratio constatée avec l'utilisation du HW est essentiellement due à l'augmentation du SCR, le maintien des volatilités Normales OTM déjà trop élevées en situation centrale alourdit davantage le poids des garanties de taux dans un contexte de taux encore plus bas. En réalité, l'utilisation d'un modèle de taux peu paramétré nous oblige à faire des choix, des arbitrages sur des zones où le *best estimate* est sensible, ceci aura comme conséquence de le surévaluer ou de le sous-évaluer artificiellement. L'utilisation d'un modèle avec plus de paramètres augmente considérablement la capacité du modèle à objectiver un plus grand nombre de zones lors du calibrage.

Le calcul du vega, et toutes les sensibilités qui pourront en découler, ouvrent la voie à des stratégies de couverture. L'analyse du comportement du vega en fonction du niveau des taux pourra être menée. La mise en place de ces stratégies pourront permettre aux assureurs de maîtriser la volatilité du *best estimate* et en principe de leurs fonds propres.

15 BIBLIOGRAPHIE

- Andersen, L.,Andreasen, J., Volatility Skews and Extensions of the Libor Market Model, 1998
- Brace, A., Musiela, M., Gatarek, D, The market model of interest rate dynamics. Mathematical Finance, 1997
- Brigo, D., Mercurio, F., Interest Rate Models - Theory and Practice, Springer Finance, 2006
- Diebold, F., Li, C., Forecasting the term structure of government bond yields, Journal of Econometrics, 2005
- Dimitroff, G., Fries, C., Lichtner, M., Rodi, N., Lognormal vs Normal Volatilities and Sensitivities in Practice, 2016
- El Karoui, N., Couverture des risques dans les marchés financiers, Ecole Polytechnique, 2003
- Gilli, M., Große, S., Schumann, E., Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model, COMISEF WORKING PAPERS SERIES, 2010
- Glasserman,P., Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer Finance, 2003
- Hagan, P.,et al., Managing Smile Risk, Wilmott magazine, 2002
- Hamilton, J. D. Time series analysis. Princeton university press Princeton, 1994.
- Hull, J. C., and White, A., Pricing Interest rate derivative securities, 1990
- Hull, J. C., and White, A., Forward rate volatilities, swap rate volatilities, and the implementation of the libor market model., 1999
- Hull, J., Options, futures, et autres actifs dérivés, 5^{e} Edition
- Kienitz, J., Interest Rate Derivatives explained, Financial Engineering Explained series, 2014
- Knuth, D.E., The Art of Computer Programming, 9ème edition, 2002
- Lee, R.,Wang, D., Displaced Lognormal Volatility Skews: Analysis and Applications to Stochastic Volatility Simulations, 2009
- Lesniewski, A.,LIBOR market model and its uses, Ellington Management Group
- Martellini, L., Priaulet, P., Produits de Taux d'Intérêt : Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture
- Marris, D. (1999). Financial Option Pricing and Skewed Volatility. M.Phil Thesis. Statistical Laboratory, University of Cambridge.
- Matsumoto, M., Nishimura, T., Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator, 1998
- Meister, M., Smile modelling in the Libor market model, Diploma Thesis of the University of KarlsruheMillet, A., Méthodes de Monte-Carlo, Master M2Mo, Université Paris 7, 2012
- Nelson, C., Siegel, A. F., Parsimonious modeling of yield curves, Journal of business, 1987
- Pieterza, R., Pelsser, A., – Risk- Managing Bermudan Swaptions in a Libor Model, the journal of derivatives, 2004
- Piterbarg, V., A Practitioner's Guide To Pricing And Hedging Callable Libor Exotics In Forward Libor Models
- Planchet, F., Thérond, P.-E., Kamega, A., Scénarios économiques en assurance - modélisation et simulation, Economica, 2009
- Rebonato, R., On the simultaneous calibration of multifactor lognormal interest rate models to black volatilities and to the correlation matrix, Journal of computational finance, 1999
- Rebonato, R., Volatility and Correlation: the perfect hedger and the fox, Wiley, 2004
- Shreve, S., Stochastic Calculus and Finance, Springer Finance, 2004Stephen Joe and Frances Y. Kuo, Notes on generating Sobol sequences Stephen Joe and Frances Y. Kuo, August 2008
- Svensson, L. E. O., Estimating the term structure of interest rates for monetary policy analysis, Scandinavian journal of economics, 1996
- Vasicek, O. A., Fong, H. G., Term structure modeling using exponential splines, Journal of finance, 1982
- Vasicek, O. A, An equilibrium characterization of term structure, Journal of financial economics, 1977
- M. MATSUMOTO, T. NISHIMURA. A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator

16 ANNEXES

16.1 CONFERENCE ACPR 8 JUIN 2018

Générateurs de scénarios économiques

- Les hypothèses et les choix de modèles doivent être justifiés au regard des caractéristiques des engagements au passif
- Les hypothèses clés du GSE doivent faire l'objet d'études de sensibilité (BE/SCR)
- La validation des principales hypothèses doit être réalisée selon une fréquence régulière

Des travaux sur les « générateurs de scénarios économiques » sont en cours et feront l'objet d'une communication spécifique ultérieurement

8 juin 2018 19 ACPR BANQUE DE FRANCE

Générateurs de scénarios économiques
Focus sur la modélisation des taux d'intérêt

Catégorie d'utilisateur d'ESG	Type d'accès à l'ESG	Modélisation des taux négatifs	Calibrage du modèle de taux : Poids accordé aux données de marché disponibles	Calibrage du modèle de taux : choix des informations (données de marché) pour le calibrage	
				Modèle de taux « complexe »	Modèle de taux « simple »
Avancé	Complet	L'existence de taux négatifs est aujourd'hui une réalité établie. Aussi, il est attendu que les modèles de taux utilisés par les organismes soient en mesure de les refléter.	Justifier de la prudence des hypothèses retenues en réalisant des sensibilités au moins annuellement.	Tenir compte de l'ensemble des données de marché fiables disponibles (options à la monnaie et hors de la monnaie).	Utiliser un modèle de taux plus perfectionné permettant de refléter une plus grande variété de données de marché. OU
Intermédiaire	Complet		Justifier de la prudence des hypothèses de pondération retenues en réalisant annuellement des sensibilités.	Tenir compte à la fois de données à la monnaie et hors de la monnaie en utilisant par exemple les données par défaut fournies par le prestataire.	Inclure une marge de prudence estimée en ayant régulièrement recours à un modèle plus perfectionné calibré sur l'ensemble de l'information de marché disponible. À cette fin, l'organisme peut par exemple avoir recours à un prestataire s'il n'a pas lui-même accès à un tel modèle.
	Pas d'accès à l'ESG. Création des scénarios économiques externalisée auprès du prestataire		Justifier de la prudence des hypothèses de pondération retenues par le prestataire en lui demandant annuellement d'autres scénarios afin de réaliser des sensibilités.	Demander au prestataire d'inclure dans le calibrage du modèle l'ensemble des données de marché disponibles : à la fois à la monnaie et hors de la monnaie.	

8 juin 2018 20 ACPR BANQUE DE FRANCE

Confidentiel

16.2 RESULTATS DES CALIBRAGES

16.2.1 Calibrages du test 1 (choix de la volatilité Normale)

Résultat du calibrage sur les swaptions ATM (affichage des volatilités Normales et des différences avec la volatilité de marché) :

	ATM			Vol Normales Théoriques											
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			0.30%	0.35%	0.40%	0.44%	0.47%	0.50%	0.52%	0.53%	0.55%	0.56%	0.53%	0.50%	0.47%
2	0.26%	0.32%	0.37%	0.42%	0.46%	0.49%	0.52%	0.54%	0.56%	0.57%	0.58%	0.58%	0.55%	0.51%	0.48%
3	0.34%	0.39%	0.44%	0.48%	0.51%	0.54%	0.56%	0.58%	0.59%	0.60%	0.60%	0.59%	0.56%	0.52%	0.49%
4	0.40%	0.45%	0.49%	0.53%	0.56%	0.58%	0.60%	0.61%	0.62%	0.62%	0.62%	0.60%	0.57%	0.53%	0.49%
5	0.46%	0.50%	0.54%	0.57%	0.59%	0.61%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.63%	0.61%	0.57%	0.53%	0.49%
6	0.51%	0.54%	0.58%	0.60%	0.62%	0.64%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.61%	0.57%	0.53%	0.50%
7	0.55%	0.58%	0.61%	0.63%	0.65%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.62%	0.58%	0.53%	0.50%
8	0.58%	0.61%	0.64%	0.65%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.64%	0.62%	0.58%	0.53%	0.50%
9	0.62%	0.64%	0.65%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.62%	0.57%	0.53%	0.49%
10	0.63%	0.65%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.63%	0.61%	0.57%	0.53%	0.49%
11	0.64%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.63%	0.61%	0.57%	0.52%	0.49%
12	0.65%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.61%	0.56%	0.52%	0.48%
13	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.60%	0.56%	0.52%	0.48%
14	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.60%	0.55%	0.51%	0.48%
15	0.62%	0.62%	0.62%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.60%	0.55%	0.51%	0.47%
16	0.61%	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.60%	0.55%	0.51%	0.47%
17	0.60%	0.61%	0.62%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.60%	0.55%	0.51%	0.47%
18	0.61%	0.62%	0.63%	0.64%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.62%	0.60%	0.55%	0.50%	0.47%
19	0.62%	0.63%	0.64%	0.65%	0.65%	0.66%	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.62%	0.60%	0.55%	0.50%	0.47%
20	0.64%	0.65%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.62%	0.59%	0.55%	0.50%	0.47%
21	0.65%	0.66%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.62%	0.59%	0.54%	0.50%	0.46%
22	0.65%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.62%	0.59%	0.54%	0.49%	0.46%
23	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.64%	0.62%	0.58%	0.53%	0.49%	0.46%
24	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.63%	0.61%	0.58%	0.53%	0.49%	0.45%
25	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.64%	0.63%	0.61%	0.57%	0.52%	0.48%	0.45%
30	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.61%	0.61%	0.60%	0.57%	0.54%	0.49%	0.45%	0.42%

	delta ATM			Vol Normales Théoriques - Vol Normales marché											
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	0.00%	0.00%	-0.03%	-0.02%	-0.02%	0.00%	0.02%	0.04%	0.06%	0.07%	0.08%	0.07%	0.05%	0.01%	-0.02%
2	-0.10%	-0.09%	-0.07%	-0.06%	-0.04%	-0.01%	0.00%	0.02%	0.02%	0.03%	0.04%	0.03%	0.00%	-0.03%	-0.06%
3	-0.15%	-0.13%	-0.10%	-0.07%	-0.03%	-0.03%	-0.01%	0.00%	0.02%	0.02%	0.03%	0.02%	-0.01%	-0.04%	-0.07%
4	-0.16%	-0.13%	-0.10%	-0.06%	-0.04%	-0.02%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	-0.02%	-0.05%	-0.07%
5	-0.15%	-0.12%	-0.09%	-0.06%	-0.03%	-0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.07%
6	-0.14%	-0.10%	-0.07%	-0.04%	-0.02%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.07%
7	-0.11%	-0.09%	-0.06%	-0.03%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	-0.01%	-0.04%	-0.06%
8	-0.08%	-0.06%	-0.04%	-0.02%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.06%
9	-0.06%	-0.04%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.06%
10	-0.04%	-0.03%	-0.02%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.06%
11	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.05%
12	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	-0.02%	-0.04%
13	-0.01%	-0.02%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.00%	-0.02%	-0.04%
14	-0.01%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	-0.01%	-0.03%
15	-0.02%	-0.03%	-0.02%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.03%	0.02%	0.00%	-0.02%
16	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%	-0.01%
17	-0.02%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%
18	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.04%	0.02%	0.01%
19	0.01%	0.02%	0.03%	0.04%	0.05%	0.05%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.06%	0.05%	0.03%	0.02%
20	0.03%	0.04%	0.05%	0.06%	0.06%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.07%	0.06%	0.04%	0.02%
21	0.05%	0.06%	0.06%	0.07%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.08%	0.07%	0.05%	0.03%
22	0.06%	0.07%	0.07%	0.08%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.08%	0.08%	0.08%	0.07%	0.05%	0.03%
23	0.08%	0.08%	0.08%	0.09%	0.09%	0.10%	0.10%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.09%	0.08%	0.06%	0.04%
24	0.09%	0.09%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.09%	0.09%	0.09%	0.08%	0.06%	0.04%
25	0.10%	0.09%	0.10%	0.10%	0.10%	0.11%	0.11%	0.10%	0.10%	0.10%	0.10%	0.09%	0.08%	0.06%	0.05%
30	0.11%	0.10%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.11%	0.10%	0.09%	0.07%	0.05%

Résultat du calibrage sur les swaptions OTM (affichage des volatilités Normales et des différences avec la volatilité de marché) :

Vol Normales Théoriques OTM Tenor 5Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	0.38%	0.38%	0.40%	0.42%	0.44%	0.46%	0.27%
2	0.42%	0.44%	0.46%	0.48%	0.50%	0.52%	0.54%
3	0.46%	0.49%	0.51%	0.53%	0.56%	0.58%	0.60%
4	0.50%	0.53%	0.56%	0.58%	0.60%	0.63%	0.65%
5	0.54%	0.57%	0.59%	0.62%	0.64%	0.67%	0.69%
6	0.57%	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%
7	0.59%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%
8	0.61%	0.64%	0.66%	0.69%	0.71%	0.74%	0.76%
9	0.62%	0.64%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%	0.77%
10	0.62%	0.64%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%	0.77%

Vol Normales Théoriques OTM Tenor 10Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	0.48%	0.51%	0.53%	0.56%	0.58%	0.60%	0.63%
2	0.52%	0.54%	0.57%	0.59%	0.62%	0.64%	0.67%
3	0.55%	0.57%	0.60%	0.63%	0.65%	0.67%	0.70%
4	0.57%	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%
5	0.58%	0.61%	0.64%	0.66%	0.69%	0.71%	0.74%
6	0.59%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%
7	0.60%	0.63%	0.65%	0.68%	0.70%	0.73%	0.75%
8	0.60%	0.63%	0.65%	0.68%	0.70%	0.73%	0.75%
9	0.60%	0.62%	0.65%	0.68%	0.70%	0.72%	0.75%
10	0.59%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.74%

delta OTM Tenor 5Y (Vol Normales Théoriques - Vol Normales marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	-0.02%	-0.01%	-0.02%	-0.07%	-0.13%	-0.20%	-0.47%
2	-0.02%	-0.02%	-0.04%	-0.07%	-0.11%	-0.15%	-0.20%
3	-0.03%	-0.02%	-0.03%	-0.06%	-0.09%	-0.12%	-0.16%
4	-0.04%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.08%	-0.10%	-0.13%
5	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.04%	-0.05%	-0.07%	-0.08%
6	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.04%	-0.06%
7	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.02%	-0.03%
8	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%
9	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%
10	-0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%

delta OTM Tenor 10Y (Vol Normales Théoriques - Vol Normales marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	0.05%	0.08%	0.07%	0.04%	0.00%	-0.05%	-0.10%
2	0.01%	0.03%	0.03%	0.02%	-0.01%	-0.04%	-0.07%
3	0.00%	0.02%	0.02%	0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.06%
4	0.00%	0.01%	0.02%	0.01%	0.00%	-0.02%	-0.04%
5	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%
6	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%
7	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%
8	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%
9	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%
10	-0.03%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%

16.2.2 Calibrages du test 2 (choix de la volatilité Black)

Résultat du calibrage sur les swaptions ATM (affichage des volatilités Black et des différences avec la volatilité de marché) :

	ATM			Vol de Black Théorique										
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			136.0%	89.7%	70.0%	60.2%	54.0%	49.7%	46.6%	44.5%	41.8%	40.6%	40.3%	39.3%	38.9%
2	131.2%	84.0%	67.5%	57.4%	51.8%	47.9%	45.0%	42.8%	41.3%	40.3%	39.0%	39.0%	38.9%	38.2%	38.1%
3	65.0%	56.6%	50.2%	46.5%	43.8%	41.7%	40.1%	39.0%	38.2%	37.7%	37.3%	37.9%	37.9%	37.5%	37.6%
4	50.4%	45.5%	42.9%	40.9%	39.3%	38.0%	37.2%	36.6%	36.3%	36.1%	36.4%	37.2%	37.1%	36.9%	37.2%
5	41.4%	39.9%	38.5%	37.3%	36.3%	35.7%	35.3%	35.1%	35.0%	35.2%	35.9%	36.6%	36.5%	36.5%	36.9%
6	38.3%	36.9%	35.9%	35.0%	34.6%	34.3%	34.2%	34.2%	34.4%	34.8%	35.7%	36.2%	36.1%	36.2%	36.8%
7	35.4%	34.6%	33.8%	33.5%	33.4%	33.4%	33.5%	33.8%	34.2%	34.7%	35.5%	35.9%	35.8%	36.1%	36.6%
8	33.4%	32.8%	32.6%	32.6%	32.7%	32.9%	33.3%	33.8%	34.4%	34.9%	35.5%	35.6%	35.6%	36.0%	36.6%
9	31.8%	31.9%	32.0%	32.2%	32.5%	33.0%	33.5%	34.2%	34.7%	35.1%	35.5%	35.4%	35.5%	35.9%	36.6%
10	31.6%	31.8%	32.0%	32.3%	32.8%	33.5%	34.2%	34.8%	35.2%	35.5%	35.5%	35.4%	35.4%	36.0%	36.7%
11	31.6%	31.8%	32.2%	32.8%	33.6%	34.3%	35.0%	35.4%	35.6%	35.7%	35.5%	35.3%	35.4%	36.0%	36.8%
12	31.6%	32.1%	32.9%	33.7%	34.6%	35.3%	35.7%	35.9%	35.8%	35.7%	35.5%	35.2%	35.4%	36.1%	36.9%
13	32.3%	33.2%	34.2%	35.1%	35.8%	36.1%	36.2%	36.1%	35.9%	35.7%	35.4%	35.2%	35.5%	36.2%	37.1%
14	33.8%	34.9%	35.8%	36.4%	36.7%	36.7%	36.4%	36.1%	35.8%	35.5%	35.2%	35.1%	35.5%	36.3%	37.2%
15	35.6%	36.6%	37.1%	37.1%	37.0%	36.5%	36.1%	35.7%	35.4%	35.2%	34.9%	34.9%	35.4%	36.3%	37.3%
16	37.2%	37.5%	37.3%	37.0%	36.4%	35.9%	35.4%	35.1%	34.9%	34.7%	34.6%	34.7%	35.3%	36.2%	37.3%
17	37.4%	37.0%	36.5%	35.9%	35.3%	34.9%	34.5%	34.3%	34.2%	34.1%	34.1%	34.3%	35.2%	36.2%	37.2%
18	36.2%	35.8%	35.1%	34.5%	34.1%	33.8%	33.7%	33.6%	33.5%	33.5%	33.7%	34.1%	35.0%	36.1%	37.2%
19	35.1%	34.3%	33.7%	33.4%	33.2%	33.0%	33.0%	33.0%	33.0%	33.1%	33.3%	33.8%	34.9%	36.1%	37.2%
20	33.2%	32.8%	32.6%	32.5%	32.4%	32.4%	32.4%	32.5%	32.6%	32.8%	33.1%	33.7%	34.9%	36.1%	37.3%
21	32.1%	32.0%	31.9%	31.9%	31.9%	32.0%	32.1%	32.3%	32.4%	32.6%	33.0%	33.7%	34.9%	36.2%	37.4%
22	31.6%	31.5%	31.5%	31.6%	31.7%	31.8%	32.0%	32.2%	32.4%	32.6%	33.0%	33.8%	35.1%	36.4%	37.7%
23	31.1%	31.2%	31.3%	31.4%	31.6%	31.8%	32.0%	32.2%	32.4%	32.7%	33.2%	33.9%	35.3%	36.6%	37.9%
24	31.0%	31.1%	31.2%	31.4%	31.6%	31.8%	32.1%	32.3%	32.6%	32.8%	33.3%	34.2%	35.6%	37.0%	38.3%
25	30.8%	31.0%	31.3%	31.5%	31.7%	32.0%	32.2%	32.5%	32.7%	33.0%	33.6%	34.5%	35.9%	37.3%	38.7%
30	31.9%	32.2%	32.5%	32.8%	33.2%	33.5%	33.8%	34.2%	34.5%	34.8%	35.5%	36.6%	38.2%	39.9%	41.4%

	delta ATM			Vol Black Théoriques - Vol Black marché											
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	0.0%	0.0%	25.2%	5.5%	-3.0%	-2.2%	-1.6%	-0.2%	0.9%	2.7%	4.2%	6.2%	8.8%	7.8%	7.9%
2	11.9%	-3.5%	-6.6%	-8.8%	-7.7%	-6.1%	-4.8%	-3.3%	-2.5%	-1.3%	0.8%	3.6%	5.4%	4.7%	5.5%
3	-15.8%	-14.1%	-13.5%	-11.3%	-7.8%	-7.3%	-5.6%	-4.3%	-2.3%	-1.8%	0.3%	3.2%	4.2%	3.8%	4.7%
4	-17.0%	-15.9%	-13.0%	-10.3%	-8.1%	-6.5%	-5.1%	-3.9%	-2.9%	-1.8%	0.5%	3.2%	3.8%	3.5%	4.4%
5	-17.7%	-14.7%	-11.9%	-9.4%	-7.2%	-5.8%	-4.0%	-3.5%	-2.6%	-1.6%	0.8%	3.2%	3.6%	3.8%	4.2%
6	-14.2%	-11.8%	-9.6%	-7.5%	-5.6%	-4.4%	-3.5%	-2.5%	-1.6%	-0.7%	1.5%	3.6%	3.4%	4.2%	4.6%
7	-11.1%	-9.5%	-7.7%	-5.9%	-4.3%	-3.3%	-2.4%	-1.5%	-0.6%	0.2%	2.1%	3.6%	3.4%	4.5%	4.9%
8	-8.4%	-7.3%	-5.8%	-4.3%	-3.1%	-2.2%	-1.4%	-0.5%	0.3%	1.0%	2.4%	3.6%	3.4%	4.6%	5.1%
9	-6.4%	-5.5%	-4.3%	-3.1%	-2.0%	-1.2%	-0.4%	0.5%	1.2%	1.6%	2.7%	3.6%	3.3%	4.6%	5.2%
10	-4.5%	-4.0%	-3.1%	-1.9%	-1.0%	-0.1%	0.6%	1.3%	1.8%	1.9%	2.7%	3.2%	3.5%	4.5%	5.3%
11	-2.8%	-2.9%	-1.9%	-0.8%	0.3%	1.1%	1.7%	2.0%	2.2%	2.2%	2.6%	2.6%	3.7%	4.6%	5.5%
12	-2.0%	-1.6%	-0.8%	0.6%	1.7%	2.2%	2.5%	2.4%	2.4%	2.2%	2.4%	2.4%	3.9%	4.8%	5.8%
13	-0.2%	-0.1%	0.9%	2.0%	2.8%	3.0%	2.8%	2.6%	2.2%	1.9%	1.9%	2.0%	3.9%	5.0%	6.0%
14	1.1%	1.6%	2.4%	3.1%	3.3%	3.0%	2.7%	2.1%	1.6%	1.2%	0.6%	1.6%	3.7%	5.0%	6.1%
15	3.2%	3.3%	3.5%	3.5%	3.0%	2.5%	1.9%	1.2%	0.8%	0.2%	-0.2%	1.6%	3.5%	5.0%	6.2%
16	4.3%	3.7%	3.3%	2.6%	2.0%	1.2%	0.5%	0.0%	-0.5%	-1.8%	-1.1%	1.4%	3.3%	5.0%	6.2%
17	4.0%	2.9%	1.8%	1.2%	0.3%	-0.5%	-0.9%	-1.5%	-2.9%	-3.0%	-2.1%	1.0%	3.1%	4.9%	6.3%
18	2.6%	0.7%	0.0%	-0.9%	-1.6%	-2.1%	-2.6%	-4.2%	-4.2%	-4.1%	-2.0%	0.5%	2.9%	4.8%	6.3%
19	-0.5%	-1.1%	-2.2%	-2.9%	-3.3%	-3.9%	-5.6%	-5.6%	-5.4%	-5.1%	-2.1%	0.0%	2.9%	4.9%	6.4%
20	-1.0%	-2.8%	-3.9%	-4.2%	-4.8%	-7.0%	-6.8%	-6.5%	-6.1%	-4.5%	-2.2%	-0.4%	2.9%	5.0%	6.6%
21	-4.2%	-5.4%	-5.7%	-6.3%	-8.9%	-8.5%	-8.0%	-7.5%	-5.5%	-4.3%	-2.6%	-0.5%	2.9%	5.0%	6.8%
22	-6.1%	-6.4%	-7.5%	-10.9%	-10.1%	-9.4%	-8.7%	-6.2%	-4.9%	-4.2%	-2.8%	-0.4%	3.1%	5.2%	7.1%
23	-6.1%	-8.3%	-13.6%	-12.0%	-10.9%	-10.0%	-6.9%	-5.3%	-4.6%	-4.1%	-3.0%	-0.2%	3.4%	5.6%	7.6%
24	-9.9%	-19.1%	-15.4%	-13.2%	-11.7%	-7.8%	-5.9%	-4.9%	-4.5%	-4.3%	-2.7%	0.1%	3.7%	5.9%	8.1%
25	-8.3%	-19.1%	-15.3%	-13.1%	-8.0%	-5.9%	-4.9%	-4.4%	-4.3%	-4.1%	-2.2%	0.7%	4.3%	6.5%	8.8%
30	-0.3%	-2.7%	-4.0%	-5.1%	-5.8%	-4.8%	-3.9%	-2.9%	-2.0%	-1.3%	0.4%	3.0%	6.8%	9.6%	12.2%

Résultat du calibrage sur les swaptions OTM (affichage des volatilités Black et des différences avec la volatilité de marché) :

Vol Black Théoriques OTM Tenor 5Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1		248.18%	70.02%	52.69%	44.83%	40.18%	37.05%
2		77.40%	51.81%	42.85%	37.99%	34.86%	32.65%
3	199.32%	56.57%	43.81%	37.93%	34.41%	32.03%	30.29%
4	73.67%	47.52%	39.32%	34.98%	32.21%	30.27%	28.82%
5	55.93%	42.13%	36.29%	32.90%	30.64%	29.01%	27.76%
6	48.78%	39.21%	34.55%	31.70%	29.74%	28.29%	27.17%
7	44.66%	37.29%	33.38%	30.89%	29.14%	27.83%	26.80%
8	42.31%	36.16%	32.71%	30.44%	28.83%	27.60%	26.63%
9	41.26%	35.70%	32.49%	30.35%	28.80%	27.62%	26.68%
10	41.57%	36.05%	32.84%	30.70%	29.15%	27.96%	27.02%

Vol Black Théoriques OTM Tenor 10Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	132.25%	56.41%	44.45%	38.74%	35.27%	32.90%	31.16%
2	71.59%	48.18%	40.25%	35.96%	33.21%	31.26%	29.79%
3	57.59%	43.66%	37.69%	34.21%	31.89%	30.20%	28.91%
4	51.10%	41.00%	36.12%	33.12%	31.07%	29.55%	28.38%
5	47.63%	39.44%	35.18%	32.49%	30.61%	29.21%	28.11%
6	46.01%	38.74%	34.82%	32.29%	30.49%	29.15%	28.09%
7	45.26%	38.49%	34.74%	32.30%	30.56%	29.24%	28.21%
8	45.07%	38.55%	34.89%	32.49%	30.77%	29.47%	28.44%
9	45.08%	38.74%	35.14%	32.76%	31.05%	29.74%	28.72%
10	45.29%	39.05%	35.47%	33.10%	31.39%	30.08%	29.05%

delta OTM Tenor 5Y (Vol Black Théoriques - Vol Black marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1		84.73%	-3.00%	-8.30%	-12.52%	-15.78%	-18.34%
2		-7.40%	-7.73%	-8.83%	-10.28%	-11.69%	-12.95%
3	40.26%	-9.34%	-7.78%	-7.89%	-8.59%	-9.46%	-10.33%
4	-16.84%	-10.24%	-8.12%	-7.54%	-7.61%	-7.96%	-8.42%
5	-14.37%	-9.23%	-7.21%	-6.33%	-5.99%	-5.93%	-6.03%
6	-10.77%	-7.22%	-5.61%	-4.83%	-4.49%	-4.40%	-4.45%
7	-8.41%	-5.66%	-4.29%	-3.56%	-3.20%	-3.06%	-3.05%
8	-6.68%	-4.36%	-3.11%	-2.40%	-2.00%	-1.80%	-1.73%
9	-5.07%	-3.11%	-1.96%	-1.27%	-0.85%	-0.60%	-0.47%
10	-3.67%	-2.01%	-0.97%	-0.27%	0.19%	0.50%	0.69%

delta OTM Tenor 10Y (Vol Black Théoriques - Vol Black marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	26.27%	4.08%	2.73%	0.29%	-2.27%	-4.53%	-6.45%
2	-4.36%	-2.08%	-1.26%	-1.67%	-2.60%	-3.67%	-4.73%
3	-5.67%	-2.81%	-1.81%	-1.81%	-2.29%	-2.97%	-3.71%
4	-5.09%	-2.76%	-1.78%	-1.54%	-1.69%	-2.05%	-2.48%
5	-4.30%	-2.54%	-1.64%	-1.22%	-1.10%	-1.15%	-1.29%
6	-2.72%	-1.42%	-0.68%	-0.32%	-0.20%	-0.22%	-0.33%
7	-1.40%	-0.41%	0.20%	0.53%	0.66%	0.67%	0.59%
8	-0.31%	0.47%	1.01%	1.32%	1.47%	1.51%	1.46%
9	0.31%	1.07%	1.61%	1.96%	2.15%	2.23%	2.24%
10	0.27%	1.25%	1.92%	2.35%	2.63%	2.79%	2.87%

Confidentiel

16.2.3 Calibrages du test 3 (choix de la volatilité Normale, VA=100bp)

Résultat du calibrage sur les swaptions ATM (affichage des volatilités Normales et des différences avec la volatilité de marché) :

	ATM			Vol Normales Théoriques										
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			0.32%	0.37%	0.41%	0.45%	0.48%	0.50%	0.52%	0.54%	0.55%	0.55%	0.53%	0.50%	0.47%
2	0.27%	0.33%	0.39%	0.43%	0.47%	0.50%	0.53%	0.55%	0.56%	0.57%	0.58%	0.57%	0.54%	0.51%	0.48%
3	0.35%	0.40%	0.45%	0.49%	0.52%	0.55%	0.57%	0.58%	0.60%	0.60%	0.60%	0.59%	0.56%	0.52%	0.48%
4	0.42%	0.46%	0.50%	0.54%	0.56%	0.59%	0.60%	0.61%	0.62%	0.62%	0.62%	0.60%	0.56%	0.52%	0.49%
5	0.47%	0.51%	0.55%	0.58%	0.60%	0.62%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.61%	0.57%	0.53%	0.49%
6	0.52%	0.55%	0.59%	0.61%	0.63%	0.64%	0.65%	0.65%	0.65%	0.65%	0.63%	0.61%	0.57%	0.53%	0.49%
7	0.56%	0.59%	0.62%	0.64%	0.65%	0.66%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.61%	0.57%	0.53%	0.49%
8	0.59%	0.62%	0.64%	0.65%	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.64%	0.61%	0.57%	0.53%	0.49%
9	0.62%	0.64%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.65%	0.63%	0.61%	0.57%	0.52%	0.49%
10	0.63%	0.65%	0.67%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.66%	0.65%	0.64%	0.63%	0.61%	0.56%	0.52%	0.48%
11	0.65%	0.66%	0.67%	0.67%	0.67%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.63%	0.60%	0.55%	0.51%	0.48%
12	0.65%	0.66%	0.66%	0.66%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.59%	0.55%	0.50%	0.47%
13	0.65%	0.65%	0.65%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.63%	0.61%	0.59%	0.54%	0.50%	0.46%
14	0.64%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.58%	0.53%	0.49%	0.46%
15	0.61%	0.61%	0.62%	0.62%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.60%	0.57%	0.53%	0.49%	0.45%
16	0.60%	0.61%	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.57%	0.52%	0.48%	0.45%
17	0.60%	0.61%	0.62%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.57%	0.52%	0.48%	0.44%
18	0.61%	0.62%	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.57%	0.52%	0.47%	0.44%
19	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.59%	0.56%	0.51%	0.47%	0.44%
20	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.59%	0.55%	0.51%	0.46%	0.43%
21	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.58%	0.55%	0.50%	0.46%	0.43%
22	0.63%	0.64%	0.64%	0.64%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.59%	0.57%	0.54%	0.49%	0.45%	0.42%
23	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.61%	0.60%	0.59%	0.58%	0.56%	0.53%	0.48%	0.44%	0.41%
24	0.63%	0.63%	0.63%	0.62%	0.62%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.58%	0.56%	0.52%	0.48%	0.44%	0.41%
25	0.62%	0.62%	0.62%	0.62%	0.61%	0.60%	0.60%	0.59%	0.58%	0.57%	0.55%	0.52%	0.47%	0.43%	0.40%
30	0.58%	0.58%	0.58%	0.57%	0.57%	0.56%	0.55%	0.54%	0.54%	0.53%	0.51%	0.48%	0.43%	0.40%	0.37%

	delta ATM			Vol Normales Théoriques - Vol Normales marché											
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.02%	0.03%	0.05%	0.06%	0.08%	0.08%	0.07%	0.05%	0.01%	-0.02%
2	-0.09%	-0.07%	-0.06%	-0.04%	-0.02%	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%	0.04%	0.03%	0.00%	-0.03%	-0.06%
3	-0.14%	-0.11%	-0.09%	-0.06%	-0.02%	-0.02%	0.00%	0.01%	0.03%	0.02%	0.03%	0.02%	-0.02%	-0.05%	-0.07%
4	-0.15%	-0.12%	-0.08%	-0.05%	-0.03%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	-0.02%	-0.05%	-0.07%
5	-0.14%	-0.11%	-0.08%	-0.05%	-0.02%	-0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	-0.02%	-0.05%	-0.08%
6	-0.12%	-0.09%	-0.06%	-0.04%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.07%
7	-0.10%	-0.08%	-0.05%	-0.02%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	-0.02%	-0.04%	-0.07%
8	-0.08%	-0.05%	-0.03%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.04%	-0.07%
9	-0.05%	-0.04%	-0.02%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.04%	-0.06%
10	-0.04%	-0.03%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	-0.02%	-0.04%	-0.06%
11	-0.02%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	-0.02%	-0.04%	-0.06%
12	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.02%	-0.04%	-0.06%
13	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.03%	-0.05%
14	-0.01%	-0.03%	-0.03%	-0.02%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.03%	-0.05%
15	-0.03%	-0.04%	-0.03%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.03%	-0.04%
16	-0.03%	-0.04%	-0.03%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	-0.02%	-0.04%
17	-0.03%	-0.02%	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	0.01%	0.01%	0.02%	0.00%	-0.01%	-0.03%
18	-0.01%	0.00%	0.01%	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.02%	0.02%	0.02%	0.01%	-0.01%	-0.02%
19	0.02%	0.02%	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.00%	-0.01%
20	0.03%	0.03%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.00%	-0.01%
21	0.04%	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.03%	0.03%	0.02%	0.01%	-0.01%
22	0.04%	0.04%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.02%	0.01%	-0.01%
23	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.03%	0.01%	0.00%
24	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%
25	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%
30	0.05%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.04%	0.03%	0.01%	0.00%

Résultat du calibrage sur les swaptions OTM (affichage des volatilités Normales et des différences avec la volatilité de marché) :

Vol Normales Théoriques OTM Tenor 5Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	0.37%	0.39%	0.41%	0.43%	0.45%	0.47%	0.33%
2	0.43%	0.45%	0.47%	0.49%	0.51%	0.53%	0.55%
3	0.48%	0.50%	0.52%	0.54%	0.57%	0.59%	0.61%
4	0.52%	0.54%	0.56%	0.59%	0.61%	0.63%	0.65%
5	0.55%	0.58%	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.69%
6	0.58%	0.60%	0.63%	0.65%	0.68%	0.70%	0.72%
7	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%
8	0.61%	0.64%	0.67%	0.69%	0.71%	0.74%	0.76%
9	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%	0.77%
10	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.75%	0.77%

Vol Normales Théoriques OTM Tenor 10Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	0.49%	0.51%	0.54%	0.56%	0.58%	0.60%	0.62%
2	0.52%	0.55%	0.57%	0.60%	0.62%	0.64%	0.66%
3	0.55%	0.58%	0.60%	0.63%	0.65%	0.67%	0.70%
4	0.57%	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%
5	0.59%	0.61%	0.64%	0.66%	0.69%	0.71%	0.73%
6	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.74%
7	0.60%	0.63%	0.65%	0.68%	0.70%	0.72%	0.75%
8	0.60%	0.63%	0.65%	0.67%	0.70%	0.72%	0.74%
9	0.60%	0.62%	0.65%	0.67%	0.69%	0.72%	0.74%
10	0.59%	0.62%	0.64%	0.67%	0.69%	0.71%	0.73%

delta OTM Tenor 5Y (Vol Normales Théoriques - Vol Normales marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	-0.03%	0.00%	-0.01%	-0.06%	-0.12%	-0.19%	-0.40%
2	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.06%	-0.10%	-0.15%	-0.19%
3	-0.02%	-0.01%	-0.02%	-0.05%	-0.08%	-0.12%	-0.16%
4	-0.03%	-0.02%	-0.03%	-0.05%	-0.07%	-0.10%	-0.13%
5	-0.02%	-0.02%	-0.02%	-0.03%	-0.05%	-0.06%	-0.08%
6	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.03%	-0.04%	-0.06%
7	-0.01%	-0.01%	0.00%	-0.01%	-0.01%	-0.02%	-0.04%
8	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.01%
9	0.00%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.00%
10	-0.01%	0.00%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%	0.01%

delta OTM Tenor 10Y (Vol Normales Théoriques - Vol Normales marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	0.06%	0.08%	0.08%	0.05%	0.00%	-0.05%	-0.10%
2	0.02%	0.03%	0.03%	0.02%	-0.01%	-0.04%	-0.08%
3	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	-0.01%	-0.03%	-0.06%
4	0.01%	0.02%	0.02%	0.01%	0.00%	-0.02%	-0.04%
5	0.00%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.03%
6	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%
7	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%
8	-0.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.01%	-0.02%
9	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%
10	-0.02%	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%

16.2.4 Calibrages du test 4 (choix de la volatilité Black, VA=100bp)

Résultat du calibrage sur les swaptions ATM (affichage des volatilités Black et des différences avec la volatilité de marché) :

	ATM		Vol Black Théoriques												
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1			67.7%	61.0%	56.4%	52.9%	50.1%	47.8%	45.9%	44.3%	42.1%	40.7%	39.6%	38.1%	37.3%
2	67.8%	60.6%	55.8%	52.3%	49.5%	47.2%	45.3%	43.7%	42.5%	41.4%	40.0%	39.5%	38.4%	37.2%	36.6%
3	55.3%	51.7%	49.0%	46.8%	44.9%	43.3%	41.9%	40.8%	39.9%	39.2%	38.5%	38.6%	37.5%	36.5%	36.0%
4	48.7%	46.5%	44.7%	43.0%	41.5%	40.3%	39.4%	38.7%	38.0%	37.6%	37.5%	37.8%	36.6%	35.9%	35.6%
5	44.5%	42.9%	41.3%	40.1%	39.0%	38.2%	37.5%	37.0%	36.7%	36.6%	37.0%	37.1%	36.0%	35.4%	35.2%
6	41.3%	39.8%	38.7%	37.8%	37.1%	36.5%	36.1%	35.8%	35.9%	36.1%	36.6%	36.4%	35.4%	35.0%	35.0%
7	38.4%	37.4%	36.6%	36.0%	35.6%	35.3%	35.1%	35.2%	35.5%	35.9%	36.3%	35.8%	35.0%	34.7%	34.8%
8	36.4%	35.7%	35.2%	34.9%	34.6%	34.5%	34.7%	35.1%	35.6%	35.9%	36.0%	35.4%	34.7%	34.5%	34.6%
9	34.8%	34.5%	34.2%	34.0%	34.0%	34.3%	34.8%	35.4%	35.8%	36.0%	35.7%	35.0%	34.4%	34.4%	34.6%
10	34.1%	33.8%	33.6%	33.7%	34.1%	34.7%	35.4%	35.9%	36.0%	35.9%	35.4%	34.8%	34.3%	34.3%	34.5%
11	33.4%	33.3%	33.4%	34.0%	34.8%	35.5%	36.0%	36.2%	36.1%	35.8%	35.2%	34.6%	34.2%	34.3%	34.6%
12	33.0%	33.3%	34.0%	35.0%	35.9%	36.4%	36.6%	36.3%	36.0%	35.6%	35.0%	34.4%	34.1%	34.3%	34.6%
13	33.5%	34.4%	35.6%	36.6%	37.1%	37.2%	36.8%	36.3%	35.8%	35.5%	34.8%	34.3%	34.1%	34.3%	34.7%
14	35.2%	36.7%	37.7%	38.1%	38.0%	37.3%	36.7%	36.1%	35.6%	35.2%	34.6%	34.2%	34.1%	34.4%	34.8%
15	38.1%	38.9%	39.1%	38.7%	37.7%	36.8%	36.1%	35.5%	35.1%	34.7%	34.2%	33.9%	33.9%	34.3%	34.8%
16	39.7%	39.5%	38.7%	37.5%	36.4%	35.6%	35.0%	34.6%	34.2%	34.0%	33.7%	33.5%	33.7%	34.1%	34.7%
17	39.2%	38.2%	36.7%	35.6%	34.8%	34.2%	33.8%	33.5%	33.3%	33.2%	33.0%	33.0%	33.4%	33.9%	34.5%
18	37.0%	35.4%	34.4%	33.7%	33.2%	32.9%	32.7%	32.5%	32.4%	32.4%	32.4%	32.5%	33.1%	33.7%	34.4%
19	33.7%	33.0%	32.6%	32.3%	32.0%	31.9%	31.8%	31.8%	31.8%	31.8%	31.9%	32.2%	32.9%	33.6%	34.3%
20	32.2%	31.9%	31.6%	31.5%	31.4%	31.4%	31.4%	31.4%	31.5%	31.5%	31.7%	32.1%	32.9%	33.7%	34.4%
21	31.4%	31.2%	31.1%	31.1%	31.1%	31.1%	31.2%	31.2%	31.3%	31.4%	31.7%	32.1%	33.0%	33.8%	34.6%
22	30.9%	30.8%	30.8%	30.8%	30.9%	31.0%	31.1%	31.2%	31.3%	31.5%	31.8%	32.3%	33.1%	34.0%	34.9%
23	30.6%	30.6%	30.7%	30.7%	30.8%	31.0%	31.1%	31.2%	31.4%	31.6%	31.9%	32.4%	33.4%	34.3%	35.2%
24	30.5%	30.5%	30.6%	30.8%	30.9%	31.0%	31.2%	31.4%	31.5%	31.7%	32.1%	32.7%	33.7%	34.6%	35.6%
25	30.5%	30.6%	30.7%	30.9%	31.0%	31.2%	31.4%	31.6%	31.8%	32.0%	32.4%	33.0%	34.0%	35.0%	36.0%
30	31.5%	31.7%	32.0%	32.2%	32.5%	32.8%	33.0%	33.3%	33.5%	33.8%	34.3%	35.1%	36.3%	37.5%	38.6%

	delta ATM			Vol Black Théoriques - Vol Black Marché											
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	95.72%	0.00%	-43.09%	-23.16%	-16.60%	-9.48%	-5.50%	-2.14%	0.19%	2.63%	4.41%	6.28%	8.04%	6.55%	6.23%
2	-51.55%	-26.97%	-18.31%	-13.97%	-10.00%	-6.74%	-4.46%	-2.43%	-1.31%	-0.09%	1.76%	4.13%	4.98%	3.68%	3.98%
3	-25.47%	-18.90%	-14.65%	-11.00%	-6.72%	-5.79%	-3.76%	-2.52%	-0.60%	-0.30%	1.43%	3.82%	3.75%	2.77%	3.19%
4	-18.69%	-14.84%	-11.28%	-8.22%	-5.89%	-4.23%	-2.90%	-1.93%	-1.18%	-0.27%	1.70%	3.87%	3.32%	2.45%	2.76%
5	-14.60%	-11.74%	-9.04%	-6.63%	-4.51%	-3.28%	-1.72%	-1.55%	-0.90%	-0.21%	1.98%	3.67%	3.03%	2.72%	2.53%
6	-11.19%	-8.87%	-6.79%	-4.78%	-3.10%	-2.19%	-1.59%	-0.87%	-0.21%	0.61%	2.54%	3.76%	2.70%	2.98%	2.78%
7	-8.03%	-6.61%	-4.94%	-3.38%	-2.06%	-1.44%	-0.79%	-0.14%	0.67%	1.38%	2.88%	3.59%	2.60%	3.15%	3.01%
8	-5.44%	-4.46%	-3.25%	-2.09%	-1.22%	-0.64%	-0.03%	0.79%	1.54%	2.06%	2.90%	3.41%	2.48%	3.13%	3.10%
9	-3.46%	-2.90%	-2.09%	-1.30%	-0.43%	0.16%	0.93%	1.68%	2.22%	2.47%	2.87%	3.16%	2.28%	3.00%	3.13%
10	-2.12%	-1.97%	-1.47%	-0.55%	0.27%	1.13%	1.82%	2.35%	2.59%	2.37%	2.56%	2.64%	2.35%	2.80%	3.09%
11	-0.95%	-1.36%	-0.65%	0.39%	1.53%	2.28%	2.72%	2.89%	2.60%	2.34%	2.25%	1.88%	2.49%	2.87%	3.23%
12	-0.63%	-0.38%	0.35%	1.86%	2.94%	3.35%	3.39%	2.89%	2.57%	2.10%	1.96%	1.59%	2.61%	3.02%	3.46%
13	0.95%	1.12%	2.31%	3.53%	4.15%	4.04%	3.33%	2.74%	2.17%	1.60%	1.39%	1.19%	2.55%	3.10%	3.62%
14	2.48%	3.42%	4.24%	4.76%	4.66%	3.63%	2.91%	2.07%	1.40%	0.88%	0.03%	0.64%	2.32%	3.10%	3.70%
15	5.68%	5.62%	5.52%	5.04%	3.74%	2.77%	1.86%	1.00%	0.43%	-0.25%	-0.88%	0.60%	1.97%	3.04%	3.73%
16	6.73%	5.73%	4.77%	3.10%	2.06%	0.97%	0.14%	-0.47%	-1.14%	-2.48%	-2.01%	0.21%	1.64%	2.85%	3.66%
17	5.80%	4.08%	1.88%	0.85%	-0.22%	-1.14%	-1.63%	-2.31%	-3.73%	-3.94%	-3.17%	-0.38%	1.30%	2.65%	3.57%
18	3.39%	0.31%	-0.70%	-1.69%	-2.52%	-3.03%	-3.62%	-5.18%	-5.27%	-5.28%	-3.29%	-1.03%	1.01%	2.48%	3.52%
19	-1.84%	-2.34%	-3.37%	-4.06%	-4.37%	-5.04%	-6.76%	-6.72%	-6.59%	-6.41%	-3.53%	-1.65%	0.83%	2.40%	3.55%
20	-2.06%	-3.78%	-4.89%	-5.13%	-5.80%	-7.98%	-7.81%	-7.59%	-7.31%	-5.71%	-3.59%	-1.98%	0.94%	2.57%	3.80%
21	-4.99%	-6.22%	-6.51%	-7.16%	-9.74%	-9.41%	-8.98%	-8.56%	-6.59%	-5.52%	-3.91%	-2.10%	0.95%	2.63%	3.98%
22	-6.74%	-7.10%	-8.25%	-11.64%	-10.87%	-10.26%	-9.64%	-7.23%	-5.99%	-5.33%	-4.11%	-1.97%	1.16%	2.87%	4.33%
23	-6.59%	-8.86%	-14.16%	-12.66%	-11.60%	-10.77%	-7.77%	-6.29%	-5.57%	-5.23%	-4.24%	-1.69%	1.48%	3.22%	4.80%
24	-10.41%	-19.66%	-15.98%	-13.86%	-12.45%	-8.54%	-6.73%	-5.87%	-5.51%	-5.35%	-3.99%	-1.38%	1.82%	3.61%	5.32%
25	-8.72%	-19.59%	-15.89%	-13.74%	-8.73%	-6.66%	-5.73%	-5.34%	-5.24%	-5.19%	-3.38%	-0.79%	2.38%	4.20%	6.03%
30	-0.75%	-3.10%	-4.57%	-5.67%	-6.42%	-5.57%	-4.68%	-3.82%	-3.03%	-2.34%	-0.79%	1.51%	4.86%	7.27%	9.37%

Résultat du calibrage sur les swaptions OTM (affichage des volatilités Black et des différences avec la volatilité de marché) :

Vol Black Théoriques OTM Tenor 5Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1		68.70%	56.41%	48.83%	43.56%	39.63%	36.55%
2		58.32%	49.54%	43.73%	39.52%	36.29%	33.71%
3	62.86%	51.70%	44.87%	40.13%	36.60%	33.84%	31.60%
4	55.82%	47.16%	41.54%	37.51%	34.45%	32.01%	30.02%
5	50.84%	43.77%	38.99%	35.47%	32.75%	30.56%	28.76%
6	47.28%	41.26%	37.06%	33.92%	31.45%	29.45%	27.78%
7	44.68%	39.39%	35.61%	32.74%	30.46%	28.60%	27.04%
8	42.89%	38.08%	34.59%	31.91%	29.76%	28.00%	26.52%
9	41.89%	37.35%	34.03%	31.45%	29.39%	27.68%	26.25%
10	41.91%	37.39%	34.08%	31.52%	29.46%	27.75%	26.32%

Vol Black Théoriques OTM Tenor 10Y

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	61.10%	50.80%	44.34%	39.80%	36.38%	33.69%	31.51%
2	54.95%	46.80%	41.42%	37.52%	34.52%	32.13%	30.16%
3	50.68%	43.87%	39.21%	35.75%	33.05%	30.88%	29.08%
4	47.78%	41.82%	37.63%	34.48%	31.99%	29.97%	28.29%
5	45.95%	40.50%	36.61%	33.66%	31.31%	29.39%	27.79%
6	45.01%	39.83%	36.10%	33.25%	30.98%	29.11%	27.55%
7	44.64%	39.58%	35.92%	33.12%	30.88%	29.04%	27.50%
8	44.60%	39.58%	35.95%	33.15%	30.93%	29.09%	27.55%
9	44.60%	39.61%	35.99%	33.21%	30.99%	29.16%	27.62%
10	44.41%	39.49%	35.92%	33.17%	30.97%	29.15%	27.62%

delta OTM Tenor 5Y (Vol Black Théoriques - Vol Black Marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1			-16.60%	-12.15%	-13.79%	-16.34%	-18.84%
2		-26.47%	-10.00%	-7.95%	-8.76%	-10.27%	-11.89%
3	-96.20%	-14.21%	-6.72%	-5.68%	-6.40%	-7.65%	-9.02%
4	-34.68%	-10.60%	-5.89%	-5.00%	-5.37%	-6.22%	-7.22%
5	-19.46%	-7.59%	-4.51%	-3.75%	-3.87%	-4.37%	-5.03%
6	-12.27%	-5.17%	-3.10%	-2.62%	-2.78%	-3.24%	-3.84%
7	-8.38%	-3.56%	-2.06%	-1.72%	-1.88%	-2.29%	-2.81%
8	-6.11%	-2.44%	-1.22%	-0.93%	-1.06%	-1.40%	-1.85%
9	-4.43%	-1.46%	-0.43%	-0.16%	-0.26%	-0.53%	-0.90%
10	-3.33%	-0.67%	0.27%	0.54%	0.50%	0.29%	-0.01%

delta OTM Tenor 10Y (Vol Black Théoriques - Vol Black Marché)

	ATM -100 bps	ATM -50 bps	ATM	ATM +50 bps	ATM +100 bps	ATM +150 bps	ATM +200 bps
1	-44.88%	-1.53%	2.63%	1.35%	-1.15%	-3.73%	-6.10%
2	-21.00%	-3.46%	-0.09%	-0.12%	-1.29%	-2.80%	-4.36%
3	-12.58%	-2.60%	-0.30%	-0.27%	-1.12%	-2.29%	-3.54%
4	-8.40%	-1.94%	-0.27%	-0.19%	-0.77%	-1.63%	-2.58%
5	-5.98%	-1.48%	-0.21%	-0.06%	-0.41%	-0.96%	-1.62%
6	-3.72%	-0.33%	0.61%	0.64%	0.29%	-0.25%	-0.87%
7	-2.01%	0.68%	1.38%	1.35%	0.98%	0.47%	-0.13%
8	-0.78%	1.49%	2.06%	1.98%	1.63%	1.13%	0.58%
9	-0.17%	1.94%	2.47%	2.41%	2.09%	1.65%	1.15%
10	-0.61%	1.69%	2.37%	2.42%	2.21%	1.86%	1.44%

Confidentiel