

**Mémoire présenté devant le CNAM
pour l'obtention du diplôme d'Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

le 05 octobre 2022

Par : Ramata CISSOKO

Titre : Allocation du capital en tarification de traités de réassurance Non-Vie

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

signatures

Entreprise :

Edith BOCQUAIRE

Rhésus LEBAMBA

Nom : SCOR

Membres présents du jury du CNAM

Olivier DESMETTRE

David FAURE

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Philipp ARBENZ

Signature :

Invité :

Nom : Nicolas GUERRY

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Bibliothèque :

Signature du candidat

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement le CNAM et Monsieur Michel Fromenteau pour m'avoir donné l'opportunité de suivre des études d'actuariat et pour l'encadrement prodigué. Je remercie chaleureusement Monsieur Olivier Desmettre, mon maître de mémoire au CNAM qui m'a permis de mener ce projet à son terme. Je tiens sincèrement à lui témoigner toute ma gratitude.

Mes remerciements s'adresse ensuite à SCOR pour m'avoir permise de réaliser ce mémoire.

Je tiens à remercier, tout particulièrement, Philipp Arbenz, mon maître de mémoire chez SCOR, qui a su se rendre très disponible et me faire profiter de son expérience malgré un emploi du temps chargé.

Je remercie également Pauline Goubault et Géraud Hubinois pour leurs nombreuses relectures et leurs conseils avisés.

Mes remerciements s'adressent aussi à Nicolas Guerry pour les pistes de réflexions qu'il m'a donné.

Je tiens aussi à remercier Laurent Bruno et Cédric Sauser pour leurs précieux conseils. Enfin, je remercie mon époux et toute ma famille pour leur soutien.

Résumé — Lors de la première souscription ou du renouvellement d'un traité de réassurance, les assureurs approchent les réassureurs pour tarifier un programme de réassurance spécifique qu'ils souhaitent souscrire. Après analyse de la rentabilité du traité, chaque réassureur propose en fonction de la nature de ce dernier, une prime de réassurance ainsi que les conditions auxquelles il souhaite y participer. Dans leur analyse de rentabilité, les réassureurs prennent notamment en compte la contribution théorique de chaque traité qu'ils souscrivent dans le capital total qu'ils doivent immobiliser pour soutenir leurs activités et garantir leur solvabilité. L'immobilisation du capital a un coût pour les réassureurs qui doivent rémunérer les actionnaires apporteurs de fonds propres. L'allocation du capital en tarification permet de transférer aux cédantes une partie du coût du capital. Plus le montant de capital alloué est important plus le coût associé sera important. Il existe de nombreuses approches d'allocation du capital en tarification. Il est nécessaire de définir la méthode qui permet une allocation optimale entre les affaires afin de pouvoir tarifier au plus juste. Le capital entrant en considération dans les calculs d'indicateurs de performance ajustée au risque, allouer trop ou pas assez de capital à une affaire influence les décisions de souscription. Le réassureur peut ainsi passer à côté d'une bonne affaire ou à contrario souscrire une affaire peu performante au regard du risque couvert. Ce mémoire présente la méthode d'allocation du capital adoptée par SCOR GLOBAL P& C suite à la fusion avec CONVERIUM et dans une logique de cohérence avec son modèle interne pour le calcul du SCR. Après un rappel des principes généraux de la tarification de traités de réassurance, l'incidence du capital alloué sur les tarifs et la performance des traités est détaillé. Ce document permet de comprendre les concepts généraux d'allocation du capital de SCOR Non-Vie. Des informations sur les risques modélisés et les méthodes de tarification sont fournies.

Mots clés : Allocation du capital, Valeur actuelle présente, mesures de risque, mesures de dépendance, bénéfices de diversification.

Abstract — At the first subscription or renewal of a reinsurance contract, the insurers approach reinsurers to rate a specific reinsurance program that they wish to subscribe. After analyzing the profitability of the treaty, each reinsurer proposes, depending on the nature of the treaty, a technical price and / or the share and the conditions in which it wishes to participate. In their profitability analysis, reinsurers take into account the theoretical contribution of each treaty they subscribe to in the total capital they have to immobilize to support their activities and guarantee their solvency. Holding a certain amount of capital has a cost for the reinsurers who must remunerate their shareholders. The allocation of capital in pricing is a good way to transfer to the ceding companies a part of the cost of capital. The higher the amount of capital allocated, the higher the associated cost. There are many approaches to allocating capital in pricing. It is necessary to define the method which allows an optimal allocation between businesses in order to come up with a fair price. Given that the allocated capital is involved in the calculation of risk-adjusted performance indicators, allocating too much or not enough capital to a business influences, in a bad way, underwriting decisions. The reinsurer can thus miss out on a good deal or, conversely, subscribe to a business that is not very efficient in regards of the risk covered.

Keywords : Capital allocation, Net Present Value (NPV), Risk Measures, Dependency Measures, Diversification Benefits.

Table des matières

Introduction	1
1 Introduction à la tarification de traités de réassurance Non-Vie	3
1.1 Tarification d'un traité proportionnel	4
1.2 Tarification d'un traité non proportionnel	8
1.3 Les indicateurs de performance	24
2 Le capital et son allocation	27
2.1 Le capital : Aperçu	27
2.2 Estimation du capital global de l'entreprise	33
2.3 Allocation du capital	47
3 Le modèle SCOR d'agrégation des risques	51
3.1 Les caractéristiques du modèle	52
3.2 Les données du modèle	53
3.3 La modélisation de la dépendance	57
4 Le modèle SCOR d'allocation du capital en tarification des traités Non-vie	65
4.1 Le modèle appliqué avant 2015	66
4.2 le modèle révisé	69
5 Impacts du changement de méthode et tests de sensibilités	87
5.1 Impacts du changement de méthode d'allocation	87
5.2 Tests de sensibilité	95
Conclusion	105

Bibliographie	107
A Méthodes de revalorisation des données et de projection à l'ultime de la charge sinistre	109
A.1 Revalorisation des primes	109
A.2 Revalorisation des sinistres	109
A.3 méthode de projection des charges à l'ultime	110
B Les méthodes d'allocation du capital	115
B.1 Les méthodes d'allocation proportionnelles	115
B.2 Les méthodes d'allocation marginales	115
B.3 Les méthodes d'allocation inspirées de la théorie des jeux coopératifs	116
C Equivalence entre les fonctions de diversification et la TVaR pondérée : Représentation graphique	119
Table des sigles et acronymes	121

Introduction

La réassurance est une opération par laquelle un assureur s'assure lui-même auprès d'un tiers (le Réassureur) pour tout ou partie des risques qu'il a souscrit, moyennant le paiement d'une prime de réassurance.

Contrairement aux autres secteurs commerciaux, les primes de réassurance ne sont pas fondées sur les coûts de productions mais résultent d'une estimation des montants à détenir en moyenne pour régler les sinistres futurs. Il s'agit de l'inversion du cycle de production économique qui est spécifique au domaine de l'assurance. En d'autres termes, au moment de la souscription des contrats, le (ré) assureur ne sait pas à l'avance et avec certitude combien de sinistres vont survenir et quels seront leurs montants.

L'inversion du cycle de production, couplée à la durée parfois longue des engagements souscrits implique que les sociétés de (ré) assurance sont légalement tenues de constituer des provisions techniques destinées à régler les sinistres futurs. Les actifs en face de ces provisions techniques inscrites au passif du bilan de l'entreprise d'assurance, sont placés sur les marchés financiers, dans l'attente de la réalisation des éventuelles prestations.

Imaginons que les coûts des sinistres réellement survenus excèdent les provisions constituées. L'entreprise encourra le risque de se retrouver en situation de ruine. Cela conduirait à un ou plusieurs des cas de figure suivants : retrait d'agrément, transfert de portefeuille, mise en run-off ou recapitalisation massive. Par conséquent, les compagnies de (ré) assurance détiennent plus d'argent que ce qu'elles s'attendent à payer afin de garantir leur solvabilité et d'honorer leurs engagements. Cet argent, appelé capital, fait l'objet d'une réglementation de plus en plus stricte et d'exigences légales explicites, la dernière disposition en date au sein de la communauté Européenne étant la directive Solvabilité II. Par ailleurs, les investisseurs et les agences de notation mettent également, de plus en plus, l'accent sur la gestion du risque de l'entreprise. Une compagnie de (ré) assurance peut souhaiter détenir plus de capital que le niveau réglementaire requis. Par exemple, elle peut cibler un niveau de capital nécessaire pour maintenir une note A de l'agence de notation *Standard & Poor* (S&P).

L'allocation du capital consiste à répartir entre les différentes composantes de l'entreprise (lignes de métiers, entités légales, contrats...) son capital global en prenant en compte les dépendances entre les risques. Cet exercice est nécessaire pour de nombreuses raisons. Tout d'abord, l'immobilisation du capital engendre des coûts qu'il faut redistribuer entre les différentes lignes de métiers. En outre, le coût du capital est pris en compte dans l'estimation des retours sur investissements des différentes affaires et permet donc de comparer la performance des lignes d'activités. En comparant les retours sur investissements des activités entre elles, on peut distinguer *les lines of business* (LoB) les plus profitables et prendre plus facilement les décisions d'expansion, de réduction, voire de suppression de lignes de métier. Enfin, le capital alloué représente une information importante dans les rapports financiers.

Ce mémoire porte sur l'allocation du capital en tarification de traités de réassurance Non-Vie. Après un rappel des principes généraux de la réassurance et de la tarification des contrats de réassurance Non-Vie, nous présentons succinctement les concepts généraux du capital et de son allocation. Nous présentons, ensuite, la méthode d'agrégation des risques et d'allocation du capital de SCOR Global P&C. Après l'acquisition de CONVERIUM, dans un souci d'harmonisation des méthodes d'allocation du capital au sein de l'ensemble de ses hubs, le groupe SCOR a révisé en 2015 sa méthode d'allocation du capital. L'ancienne méthode et la méthode révisée seront exposées ainsi que les différents impacts de ce changement de méthode en termes de tarification et de décision de souscription. Enfin, la dernière partie de ce papier est consacrée à l'analyse de la sensibilité de la méthode retenue aux types de risques couverts, aux termes et conditions du traité, et aux paramètres de modélisation du tarif de réassurance.

Introduction à la tarification de traités de réassurance Non-Vie

Sommaire

1.1	Tarification d'un traité proportionnel	4
1.1.1	Exemple de tarification d'un traité proportionnel	7
1.2	Tarification d'un traité non proportionnel	8
1.2.1	la prime pure	8
1.2.2	Les chargements de gestion : les frais	22
1.2.3	Les cash flows et l'escompte	22
1.2.4	Les chargements de sécurité : Le coût du capital et son intégration en tarification	23
1.3	Les indicateurs de performance	24

Un traité de réassurance est un contrat liant l'assureur et le réassureur dans un cadre dit réassurance obligatoire qui impose à l'assureur de céder tous les risques du portefeuille concerné et au réassureur de les accepter.

Nous distinguons deux types de traités : Les traités proportionnels et les traités non-proportionnels. Dans le cadre d'un traité proportionnel, les sinistres sont partagés dans la même proportion entre le réassureur et l'assureur. Ce type de réassurance est basé sur le transfert de risque et permet à l'assureur de se couvrir contre une dérive de la sinistralité de portefeuilles entiers.

Dans le cadre d'un traité non-proportionnel, le réassureur s'engage, moyennant rétribution, à prendre à sa charge les montants de sinistres au-delà d'un certain seuil appelé priorité et jusqu'à concurrence d'une certaine limite appelée portée. La priorité est une sorte de franchise qui représente le montant à partir duquel le réassureur intervient. La portée quant à elle matérialise le montant maximum que le réassureur peut être amené à payer pour un sinistre. Ces deux éléments déterminent l'engagement du réassureur.

Tarifier ou coter un traité de réassurance consiste à déterminer le prix à payer par l'assureur appelé cédante pour bénéficier des garanties prévues contractuellement. L'une des différences entre la réassurance et l'assurance primaire est que les contrats de réassurance sont généralement spécifiques aux cédantes.

4 Chapitre 1. Introduction à la tarification de traités de réassurance Non-Vie

Ainsi, chaque contrat de réassurance est tarifé individuellement pour mieux prendre en compte les risques et répondre aux besoins particuliers des cédantes. Cela implique d'effectuer une analyse quantitative permettant d'estimer, d'une part, le risque sous-jacent au traité, d'autre part, sa rentabilité future. La tarification est importante à la fois pour le réassureur et la cédante. Le réassureur doit veiller à fixer son prix en adéquation avec le risque encouru. Quant à la cédante, elle souhaite obtenir une structure de réassurance efficace et optimale à un prix équitable.

Le prix facturé à la cédante appelé prime de réassurance doit intégrer quatre principales composantes telle qu'illustrées dans le graphique ci-dessous : le coût probable des sinistres futurs, les différents frais, les chargements de sécurité ainsi que la marge de rentabilité du réassureur.

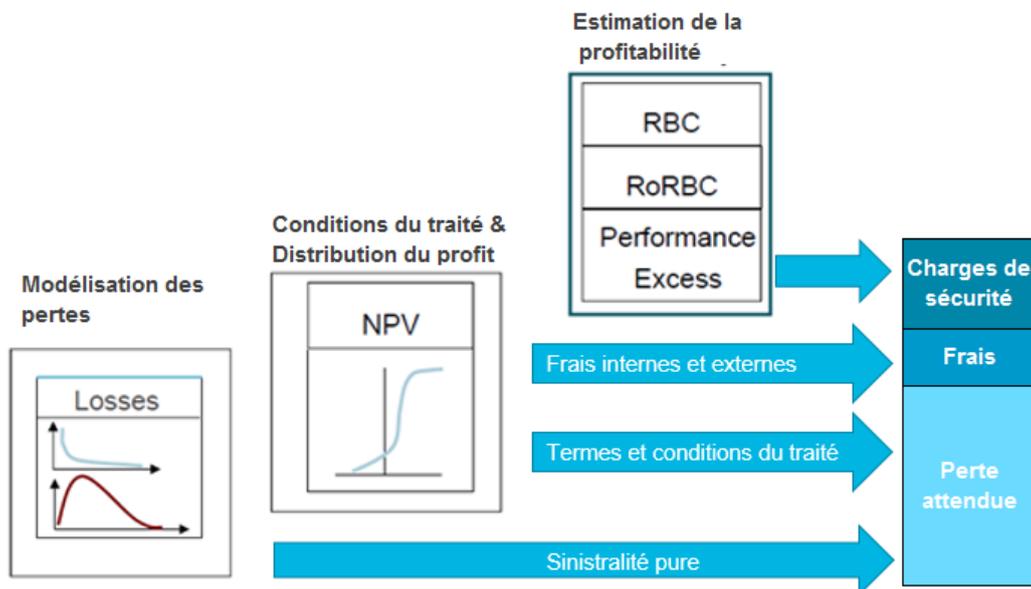


FIGURE 1.1 – Etapes de la tarification d'un traité de réassurance.

Nous allons introduire en fonction des types de réassurance mentionnées précédemment, les méthodes standards de tarification des traités Non Vie hors catastrophes naturelles généralement appliquées dans l'industrie.

1.1 Tarification d'un traité proportionnel

La tarification d'un traité proportionnel est généralement réalisée d'après une méthode dite de tarification par expérience.

La tarification sur expérience est basée sur l'analyse de l'historique de la sinistralité et de l'exposition (primes, nombre de contrats) d'une cédante, et repose sur l'idée que le comportement passé d'un portefeuille reflète son profil de risques futurs.

Le nombre d'années d'expérience souhaitable pour la cotation dépend de la branche. Sur les branches à développement long, il est usuel de prendre 10 ans d'expérience alors que pour les branches à développement court, 5 années d'expérience suffisent. La tarification sur expérience est applicable dans les situations où les statistiques liées à des classes de risques homogènes sont disponibles.

La tarification d'un traité proportionnel suivant une méthode sur expérience se fait en plusieurs étapes :

1. Disposer de données spécifiques nécessaires à la tarification

Les données nécessaires à la tarification d'un traité proportionnel sont :

- l'historique des primes émises (triangulées si possible)
- l'historique des sinistres au premier euro (FGU ou From Ground Up), agrégés par année de rattachement et par année de développement.
- Les sinistres individuels exceptionnels au-delà d'un certain seuil, par année de rattachement et par année de développement.

Dans le cadre des traités proportionnels, la sinistralité de fréquence dite « attritionnelle » est modélisée séparément de sinistralité exceptionnelle. En effet, le développement de la sinistralité de pointe est susceptible de distordre la cadence de développement des sinistres attritionnels. Il est donc nécessaire de définir un seuil à partir duquel les sinistres sont considérés comme exceptionnels puis, de les retirer du triangle des sinistres agrégés.

Dans le cadre d'un traité en excédent de pleins, les données utilisées doivent être celles cédées à l'excédent de plein.

2. Revaloriser les données (Mise en *as if*)

Revaloriser les données historiques consiste à leur appliquer une indexation afin de les ramener aux conditions économiques de l'année de cotation. L'indice de revalorisation des primes doit refléter les changements (éventuels) de politique tarifaire de la cédante. L'indice de revalorisation des sinistres doit refléter l'inflation du coût des sinistres, les changements de législation ou de comportement du profil de risque du portefeuille.

3. Calculer la sinistralité attritionnelle ultime à charge du traité

Le calcul de la charge du traité est fondamentalement différent suivant sa nature. En effet, pour rappel, le réassureur participe :

- à l'ensemble des sinistres en quote-part quelque soient leurs montants
- dans le cadre d'un traité en excédent de plein, à l'ensemble des sinistres survenus sur les risques dont la somme assurée est supérieure au plein de rétention de la cédante, dans la limite du plein de souscription.

Il est fréquent, surtout pour les branches à développement long, que le paiement des sinistres soit étalé dans le temps. Ainsi, il est nécessaire de constituer des provisions pour pouvoir honorer les engagements liés à ces sinistres.

Ces provisions appelées IBNR se divisent classiquement en deux catégories :

- les IBNYR (*Incurring But Not Yet Reported*) : ce sont les provisions pour les sinistres survenus pendant l'exercice clôturé mais qui n'ont pas encore été déclarés au réassureur.
- les IBNER (*Incurring But Not Enough Reserved*) : ce sont les provisions pour les sinistres survenus, déclarés au réassureur mais qui n'ont pas été assez provisionnés.

Le triangle charge est donc incomplet du fait des IBNR. Cela est d'autant plus vrai pour les années récentes. Il est donc nécessaire de liquider le triangle c'est-à-dire estimer les déroulements de chaque exercice pour compléter la partie inconnue. La dernière position connue est projetée d'année en année pour déterminer le montant qui sera finalement payé pour le sinistre. Ce montant final est appelé charge ultime.

4. Déterminer le ratio sinistres/primes attendu

Le ratio de sinistralité ultime mesure le coût des sinistres ultimes par rapport au montant des primes encaissées également projetées à l'ultime. Le S/P ultime attendu est calculé pour chaque exercice

$$\frac{S_i}{P_i} = \frac{\text{Charge ultime}_i}{\text{EPI ultime}_i} \quad (1.1)$$

Le S/P ultime retenu est obtenu par :

$$\frac{S}{P} = \frac{\sum_i \text{Charge ultime}_i}{\sum_i \text{EPI ultime}_i} \quad (1.2)$$

5. Rajouter un chargement pour la sinistralité de pointe

La charge relative à la sinistralité de pointe est modélisée à partir d'un modèle fréquence-sévérité qui modélise des sinistres individuels et non plus agrégés. La fréquence est généralement modélisée par une distribution de Poisson ou de Panjer, alors que pour la sévérité une loi de Pareto ou de Pareto généralisée est souvent retenue. Le principe de la modélisation de la sinistralité de pointe est le même que celui de la tarification d'un traité non proportionnel en excédent de sinistre qui est détaillée plus bas.

6. Estimer le ratio combiné en tenant compte de la commission ainsi que des autres frais tels que le courtage

Une fois le ratio de sinistre total obtenu, la rentabilité de l'affaire est déterminée en estimant le ratio combiné qui exprime en pourcentage de la prime acquise par le réassureur, les sinistres payés ou à payer augmentés des autres dépenses engagées au titre de l'affaire (commission, courtage...). Le ratio combiné est donné par la formule suivante :

$$\text{Ratio combiné} = \frac{\text{Pertes attendues} + \text{Frais externes}}{\text{Prime attendue}} \quad (1.3)$$

Ce ratio est à l'équilibre à 100%. S'il est supérieur à 100%, le réassureur est techniquement en perte avant prise en compte des éventuels profits réalisés par ses investissements.

1.1.1 Exemple de tarification d'un traité proportionnel

Considérons une cédante fictive A qui souhaite couvrir en réassurance son portefeuille de risque au travers d'un traité en proportionnel. Les termes et conditions du traité sont les suivantes :

- Traité en quote-Part
- Cession : 50%
- Commission fixe : 23%
- Courtage : 2.5%
- Prime estimée pour l'année de tarification : 75.8M d'euros.

La prime pure de ce traité est donc de $50\% \times 75.8\text{M d'euros} = 37.9\text{M d'euros}$ à 100%.

Données

Sur l'horizon d'analyse 2000-2015 on dispose des données suivantes :

- Le triangle des primes émises de la cédante
- Le triangle agrégé des sinistres par exercice
- Les sinistres individuels de pointes.

A partir de ces données nous allons modéliser la sinistralité de cette cédante. Tout d'abord, la sinistralité dite attritionnelle est défalquée de la sinistralité de pointe. En effet, la cédante A dénombre certains sinistres considérés comme exceptionnels car leur montant est sensiblement important par rapport à sa sinistralité de fréquence.

Revalorisation des données Avant d'être projetées à l'ultime, les primes sont au préalable revalorisées afin de les mettre sur la base économique d'aujourd'hui. Nous retenons ici une méthode de revalorisation rétrospective. Les sinistres sont également revalorisés à partir d'une méthode rétrospective.

Projection à l'ultime Les primes émises par la cédante ainsi que les sinistres déclarés sont projetées à l'ultime suivant une approche chain-Ladder. Le tableau suivant montre les facteurs de développement du triangle ainsi que sa complétion sur la partie inconnue jusqu'à l'ultime :

Année de souscription	Charge agrégée et indexée (en 1000€)										Charge Ultime
	Dev 12m	Dev 24m	Dev 36m	Dev 48m	Dev 60m	Dev 72m	Dev 84m	Dev 96m	Dev 108m	Dev 120m	
2006	61 127	53 546	53 418	53 123	53 205	53 246	53 265	53 544	53 630	53 084	53 084
2007	63 026	56 174	54 925	54 141	53 516	54 023	54 016	53 288	52 980	52 440	52 440
2008	61 933	59 535	60 080	59 607	59 850	60 526	60 739	62 218	62 089	61 457	61 457
2009	69 216	66 782	65 833	66 262	65 681	66 038	65 670	66 073	65 936	65 265	65 265
2010	66 514	63 573	61 290	61 576	60 641	60 242	60 205	60 574	60 448	59 833	59 833
2011	72 167	70 161	68 379	67 947	66 603	66 872	66 831	67 241	67 101	66 418	66 418
2012	85 509	85 886	83 421	84 156	83 423	83 759	83 708	84 221	84 047	83 191	83 191
2013	77 264	73 804	71 333	71 248	70 628	70 912	70 869	71 303	71 156	70 432	70 432
2014	69 994	67 159	65 791	65 713	65 140	65 403	65 363	65 764	65 627	64 959	64 959
2015	62 598	59 589	58 376	58 306	57 798	58 031	57 996	58 351	58 230	57 638	57 638
LDf	0.952	0.980	0.999	0.991	1.004	0.999	1.006	0.998	0.990	1.000	
LDf Cumulés	0.921	0.967	0.987	0.989	0.997	0.993	0.994	0.988	0.990	1.000	

Nous constatons qu'il y a de nombreux bonis de liquidation qui se matérialisent par des facteurs inférieurs à 1. Cela signifie que les montants de sinistres diminuent dans le temps.

Ratios S/P ultimes

Année de souscription	Valeurs originales			Coefficients de		Valeurs AS IF		Facteurs de		Valeurs AS IF ultimes		
	Primes	Sinistres	S/P	Primes	Sinistres	Primes	Sinistres	Primes	Sinistres	Primes	Sinistres	S/P
2006	71 231	53 174	74,7%	0,96	1,00	68 344	53 084	1,00	1,000	68 344	53 084	77,7%
2007	70 489	52 379	74,3%	0,99	1,01	69 523	52 980	1,00	0,990	69 523	52 440	75,4%
2008	74 183	60 510	81,6%	1,02	1,03	75 946	62 218	1,00	0,988	75 946	61 457	80,9%
2009	75 696	63 645	84,1%	1,02	1,03	77 174	65 670	1,00	0,994	77 174	65 265	84,6%
2010	74 699	58 176	77,9%	1,06	1,04	79 118	60 242	1,00	0,993	79 118	59 833	75,6%
2011	70 962	64 063	90,3%	1,10	1,04	78 309	66 603	1,00	0,997	78 309	66 418	84,8%
2012	82 623	80 600	97,6%	1,08	1,04	88 918	84 156	1,00	0,989	88 918	83 191	93,6%
2013	80 480	68 737	85,4%	1,06	1,04	85 408	71 333	1,00	0,987	85 408	70 432	82,5%
2014	76 318	65 526	85,9%	1,05	1,02	80 045	67 159	1,00	0,967	80 045	64 959	81,2%
2015	74 450	61 984	83,3%	1,02	1,01	75 876	62 598	1,00	0,921	75 876	57 638	76,0%
2016	75 769									S/P ultime attendu		81,8%
										Ecart-type		5,62%

Le ratio combiné de ce traité avant escompte est donc égale à $81,8\% + 23\% + 2,5\%$ soit $107,3\%$. Ce ratio étant supérieur à 100% , le traité n'est a priori pas rentable.

1.2 Tarification d'un traité non proportionnel

Tarifier un traité non proportionnel revient à estimer le prix technique correspondant à la garantie offerte par ce traité. Le prix technique d'un traité de réassurance non-proportionnel est donné par :

$$\text{Prime technique} = \text{Prime pure} + \text{Chargements de gestion} + \text{Chargements de sécurité} + \text{Taxes} \quad (1.4)$$

1.2.1 la prime pure

La prime pure ou le coût probable des sinistres futurs, correspond à la valeur actuelle probable des engagements futurs liés aux sinistres. La prime pure doit permettre au réassureur de couvrir toutes les pertes qu'il pourrait subir en raison de ses obligations contractuelles. Définir une prime qui est proportionnelle au risque implique donc d'estimer le montant de la perte moyenne attendue pendant la durée du contrat. La prime pure ne contient ni marge de sécurité ni marge de profit. Deux principales approches sont utilisées pour estimer la prime pure des traités de réassurance Non-Vie non proportionnels :

- La tarification sur expérience
- La tarification sur exposition

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cadre d'un modèle collectif de risque pour la tarification d'un traité en excédent de sinistres dont la priorité est notée D et la portée est notée L . La variable aléatoire S représente le montant des sinistres. Les réalisations de X sont notées X_k , $k = 1, \dots, N$ où N représente le nombre de sinistres.

1.2.1.1 La tarification sur expérience d'un traité non proportionnel

La tarification sur expérience d'un traité non proportionnel se déroule comme suit :

1. Disposer des données nécessaires

- L'historique des primes et, si possible, du nombre de polices souscrites.
- L'historique des sinistres individuels FGU dont le montant a atteint un certain seuil qui correspond en général à 50% de la priorité du programme de réassurance. Pour les branches à développement long, le développement des sinistres individuels est requis. L'historique des sinistres se présente alors sous forme de triangle.

2. Revaloriser les données

La revalorisation des données dans le cadre d'une tarification sur expérience d'un traité non-proportionnel suit le même principe que la revalorisation des données dans le cadre de la tarification d'un traité proportionnel.

3. Estimation de la charge ultime

Après revalorisation des sinistres, lorsque la tranche est traversée par un nombre suffisant de sinistres pour que la loi des grands nombres s'applique, elle est dite entièrement travaillante. En revanche, elle est dite partiellement travaillante lorsqu'aucun ou très peu de sinistres la traversent. Enfin, une tranche sera qualifiée de statistiquement « non travaillante » lorsqu'elle n'a jamais été virtuellement (après revalorisation des sinistres) touchée sur les années d'expérience observées. La figure suivante illustre ces différents cas de figure :

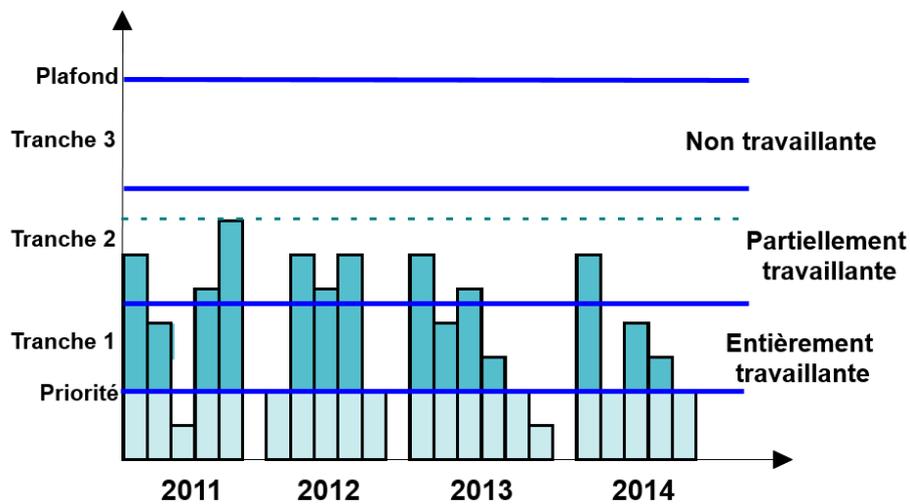


FIGURE 1.2 – Répartition des sinistres en tranches dans le cadre d'un traité non proportionnel.

Selon que la tranche soit entièrement, partiellement ou pas du tout travaillante, l'une des deux approches suivantes s'applique :

3.1. Approche non-paramétrique : *Le Burning Cost*

La méthode du burning cost permet uniquement de tarifer les tranches partiellement ou entièrement travaillantes.

Calcul de la charge à la tranche

Si $X_{i,j,k}$ représente le développement j du k -ième sinistre rattaché à l'année i , la charge $S_{i,j,k}$ correspondante à ce sinistre, sur la tranche $L \leq X \leq D$, est donnée par la formule suivante :

$$S_{i,j,k} = \text{Min}(L, \text{Max}(0, X_{i,j,k} - D)) \quad (1.5)$$

Pour chaque exercice de survenance i des sinistres et chaque année de développement j , le montant $X_{i,j}$ à charge du réassureur au titre de la tranche couverte au traité est obtenu en sommant les charges de tous les sinistres survenus :

$$S_{i,j} = \sum_k \text{Min}(L, \text{Max}(0, X_{i,j,k} - D)) \quad (1.6)$$

Projection à l'ultime de la charge à la tranche

Cette étape est spécifique à la tarification des traités non-proportionnels *long tail*. Le développement des sinistres étant rapide dans les branches *short tail*, il est d'usage de supposer que les montants de la dernière date d'arrêté sont ultimes.

Le burning cost

Le burning cost d'un traité non proportionnel s'interprète comme étant la charge de sinistre XS rapportée au volume de primes.

Soient :

- $i=1, \dots, n$, les exercices (années d'historique) disponibles
- N_i , le nombre de sinistres à charge du traité par exercice i
- S_i , le montant total à charge du réassureur pour l'exercice i .
- P_i , le volume de primes de l'exercice i
- P , le volume de primes de l'ensemble de l'horizon retenu avec $P = \sum_{i=1}^n P_i$

Le *burning cost* BC_i d'un exercice i donné est défini par : $BC_i = \frac{S_i}{P_i}$

Le *burning cost* sur l'ensemble de la période d'historique disponible est donné par :

$$BC = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Charge ultime}_i}{\sum_{i=1}^n \text{Primes}_{As} \text{ If}_i} = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{P_i}{P} \right) \times BC_i \right] \quad (1.7)$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$BC = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{P_i}{P} \right) \cdot \left(\frac{S_i}{P_i} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{P_i}{P} \right) \cdot \left(\frac{N_i}{P_i} \right) \cdot \left(\frac{S_i}{N_i} \right) \right] \quad (1.8)$$

Avec :

- $\frac{P_i}{P}$: le poids de chaque exercice de rattachement
- $\frac{N_i}{P_i}$: la fréquence des sinistres par exercice de rattachement
- $\frac{S_i}{N_i}$: le coût moyen (sévérité moyenne) des sinistres

Le choix de l'horizon de calcul du *burning cost*

Le choix de l'horizon de calcul du *burning cost* est laissé à l'appréciation du tarificateur. Dans la pratique, l'horizon retenu est d'environ 10 ans pour les branches à développement long, et de 5 ans pour les branches à développement court. Cependant, il est nécessaire de s'assurer que sur l'horizon sélectionné, le seuil de communication revalorisé est toujours inférieur à la priorité de la tranche tarifée. En effet, il peut y avoir dans l'historique de la sinistralité de la cédante des sinistres non reportés au réassureur mais dont le montant *As If* excéderait la priorité.

Prendre dans l'horizon un exercice pour lequel le seuil de communication *As If* est supérieur à la priorité ne serait pas pertinent car il manquerait des sinistres (survenus mais pas communiqués au réassureur).

Une fois le taux *burning cost* défini, le prix du traité en excédent de sinistre (Prime pure) se déduit simplement par :

$$\text{Prime pure} = \text{taux}_{\text{burningcost}} \times \text{EPI}_{\text{est}} \quad (1.9)$$

Où EPI_{est} représente l'assiette de primes perçues par la cédante, estimée pour l'année de cotation.

Les limites de la méthode

La méthode du *Burning Cost* présentée ci dessus comporte de nombreuses limites :

- Elle ne permet pas de tarifier les tranches n'ayant jamais été touchées par le passé (tranches non travaillantes).
- Elle peut fournir des résultats peu fiables pour les expositions de faible fréquence mais de forte sévérité
- Elle ne tient pas compte de l'évolution détaillée du portefeuille et notamment des politiques de souscription, du profil de portefeuille et des méthodes de provisionnement
- Elle n'est pas adaptée pour la cotation de tranches alternatives. En effet, en cas d'évolution de la priorité et de la portée, il est possible de se retrouver sur tranche peu ou pas travaillante.

3.2. Approche paramétrique : modèle probabiliste fréquence-sévérité

L'approche fréquence-sévérité consiste à modéliser la charge annuelle des sinistres en modélisant, au-delà d'un certain seuil et à partir des données d'expérience, la loi des variables aléatoires suivantes :

- La variable N , représentant le nombre de sinistres à charge du traité
- La variable X dont les réalisations $X_i (i = 1, \dots, N)$ représente le coût des sinistres individuels dès le premier euro.

Le coût total des sinistres pour une année s'exprime :

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Nous supposons que les coûts S_i sont i.i.d. et que les variables S_i et N sont indépendantes.

Les sinistres doivent être préalablement revalorisés suivant l'une des méthodes présentées précédemment afin de les remettre sur les conditions économiques de l'année de tarification. Les fréquences doivent également être mises en *As If* car si l'exposition (nombre de polices souscrites, primes) évolue, le nombre de sinistres évoluera également en toute logique. La fréquence *As if* est donnée par :

$$\text{fréq}_{As\ If_i} = w_i \times \text{fréq}_i$$

Où :

- fréq_i représente le nombre de sinistres de l'année i supérieurs au seuil de modélisation. w_i est un coefficient de revalorisation exprimé soit en fonction du nombre de polices (NP) soit en fonction de l'assiette de primes par les formules respectives
- $w_i = \frac{NP_{est}}{NP_i}$, $w_i = \frac{EPI_{est}}{EPI_{As\ If_i}}$

Sur la tranche L XS D , pour chaque sinistre X_i , la charge au traité se définit par :

$$Z_i = \text{Min}(L, \text{Max}(0, X_i - D)) \tag{1.10}$$

La charge annuelle pour le réassureur correspond à :

$$Y = \sum_{i=1}^N \text{Min}(L, \text{Max}(0, X_i - D)) = \sum_{i=1}^N Z_i \tag{1.11}$$

La prime pure sur la tranche est donnée par :

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[Z]$$

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}[Z] + \mathbb{V}[N]\mathbb{E}^2[Z]$$

Définir les lois de X_i et N permet d'obtenir la distribution de la charge.

Choix du seuil de modélisation

Le seuil de modélisation noté X_0 représente le montant à partir duquel les sinistres sont considérés pour l'ajustement de la loi de la sévérité. Les sinistres dont le coût est inférieur à S_0 ne sont pas pris en compte.

Par ailleurs, le seuil de modélisation doit être inférieur à la priorité de la tranche la plus basse du programme tarifé. Le seuil de modélisation doit également être sélectionné en fonction du maximum des seuils de communication revalorisés (*As If*). Il doit être inférieur à ce dernier comme pour la méthode du *burning cost*. En définitive, le seuil X_0 doit être choisi tel que :

$$\text{Max}(\text{seuil de comAs If}) < X_0 < \text{Priorité}$$

4. Détermination d'une distribution de fréquence sévérité

Ajustement de la loi de la fréquence

Afin de définir une loi permettant de décrire la fréquence des sinistres au-delà du seuil de modélisation, nous commençons par calculer un indice de dispersion du nombre de sinistres par années. L'indice de dispersion noté DI est donné par la formule suivante :

$$\text{DI} = \frac{\mathbb{V}[N]}{\mathbb{E}[N]} \quad (1.12)$$

En fonction de la valeur de DI, les cas suivants se distinguent :

- $\text{DI} < 1$ pour un échantillon sous-dispersé.
- $\text{DI} = 1$ pour un échantillon équilibré.
- $\text{DI} > 1$ pour un échantillon sur-dispersé.

En pratique, les lois les plus utilisées pour ajuster la fréquence des sinistres en réassurance sont la loi de poisson, la loi binomiale et la loi binomiale négative dont les paramètres peuvent être estimés à partir de la méthode des moments. L'adéquation de la loi aux données peut être vérifiée en comparant les quantiles théoriques aux quantiles observés

Ajustement de la loi de la sévérité

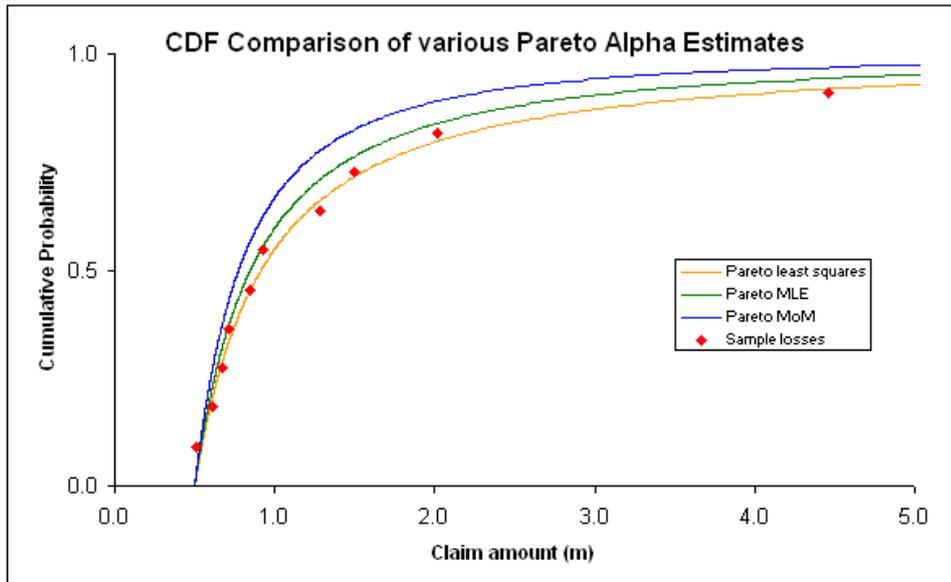
Dans la modélisation de la sévérité des pertes, il est important d'ajuster une distribution de probabilité aux données observées. L'ajustement permet de résoudre le problème de l'impossibilité d'observer les événements peu probables (sinistres catastrophiques). Rappelons que les sinistres considérés sont ceux supérieurs au seuil de modélisation. La distribution est tronquée à gauche. En réassurance non-proportionnelle, nous sommes surtout intéressés par les risques de pointe. Les lois utilisées sont donc des lois ayant une distribution leptokurtique ou distribution à queue épaisse. Ainsi, les lois pour estimer la sévérité en réassurance sont les lois de valeurs extrêmes usuelles telles que la loi de Pareto, la loi de Weibull et la loi Log-normale.

Afin de définir la loi qui ajuste le mieux la distribution de la sévérité, des tests statistiques permettant d'évaluer la qualité de l'estimation (« **goodness of fit** ») sont réalisés. Ils sont utilisés pour déterminer si une distribution observée diffère de la distribution théorique spécifiée dans l'hypothèse à tester. Les tests usuels sont :

- Le test du Khi-deux
- Le test de Kolmogorov-Smirnov
- Le test d'Anderson Darling

En plus de ces tests, une comparaison entre les fonctions de répartition théoriques et empiriques est également effectuée au moyen d'un graphique. En effet, si l'ajustement global de la distribution de perte doit être bon, en réassurance, il est surtout important de bien ajuster la queue de distribution.

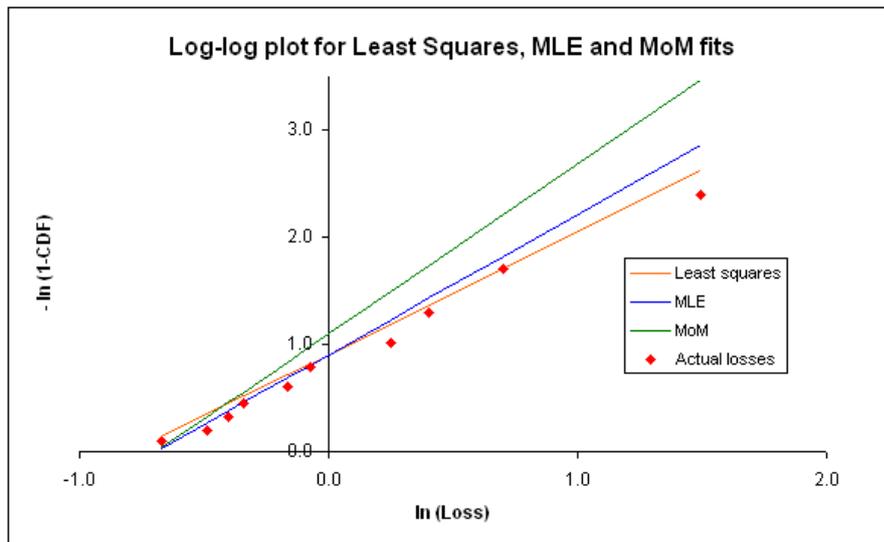
L'adéquation de la loi aux données peut enfin être vérifiée en traçant les fonctions de répartition théoriques et observées :



Il existe deux outils graphiques qui peuvent également être utilisés pour vérifier l'adéquation de la loi aux données. Il s'agit de la représentation log-log et du Q-Q plot.

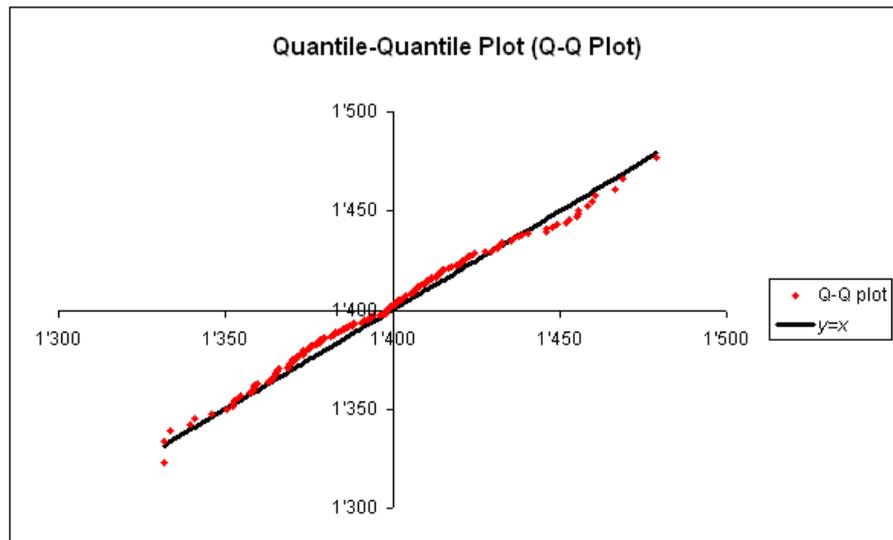
La représentation Log-log

La représentation log-log est un graphe du logarithme de la fonction de distribution cumulative de la distribution ajustée par rapport au log des montants de sinistres observés.



La représentation du diagramme Quantile-Quantile ou QQ-PLOT

Le diagramme Quantile-Quantile est un outil graphique permettant de juger la pertinence d'un ajustement de loi à une distribution donnée. Les quantiles de la distribution théorique sont représentés avec ceux de la distribution des données observées. Si les points tracés suivent de près la ligne $y = x$, la distribution choisie est un bon ajustement.



Une fois la fréquence et la sévérité modélisée, la distribution de pertes est obtenue par simulation de Monte Carlo.

Exemple de tarification sur expérience d'un traité non-proportionnel

Considérons à présent une cédante fictive B désirant couvrir son portefeuille de risques automobile par le biais d'un traité de réassurance non-Proportionnel. Tout comme la responsabilité civile générale, l'automobile est une branche longue.

Les termes et conditions du traité sont les suivantes :

- Tranche 1 : 1M XS 1.5M
- Reconstitutions illimitées et gratuites
- Clause de stabilisation seuil atteint 10
- Assiette de prime estimée pour l'année de cotation : 116.6M

Nous disposons des informations suivantes par exercice de survenance :

- L'historique des primes
- Le nombre de polices par année de souscription
- Le triangle des sinistres individuels

16 Chapitre 1. Introduction à la tarification de traités de réassurance Non-Vie

Revalorisation des données

Les données sinistres ont été revalorisées suivant une méthode prospective avec un indice fixe à 3.5%. L'indice de référence pour la clause de stabilisation est également considéré fixe à 2%. Les primes moyennes sont calculées en rapportant les primes par le nombre de police par année de souscription. Les primes sont ensuite revalorisées en multipliant le nombre de police par la prime moyenne de l'année de cotation.

Calcul de la charge individuelle par tranche

Considérons l'année de souscription 2009 enregistrant trois sinistres. La charge individuelle de ces trois sinistres est calculée telle que présentée dans le tableau suivant :

		Développement sinistre individuel (Payés+Reserves en 1000€) survenu en 2009 indexé						
Année	Sinistre	0	1	2	3	4	5	6
2009	1		1 113	1 110	1 110	1 110	1 110	1 110
2009	2		0	1 370	1 391	1 408	1 429	1 360
2009	3		0	23	23	1 596	1 596	1 596

		Développement sinistre individuel (Payés+Reserves en 1000€) survenu en 2009 indexé à charge de l'XS						
Année	Sinistre	0	1	2	3	4	5	6
2009	1	0	0	0	0	0	0	0
2009	2	0	0	0	0	0	0	96
2009	3	0	0	0	96	96	96	96
2009	Total	0	0	0	96	96	96	192

$$\text{Min}(\max(X_i - 1,5M€ \cdot \text{coeff stab}; 0); 1M€ \cdot \text{coeff stab})$$

Charge agrégée par année de souscription et projection à l'ultime

La charge agrégée est obtenue en additionnant les charges individuelles par année de souscription. Cette charge agrégée est ensuite projetée à l'ultime suivant une méthode Chain-ladder :

Année de souscription	Charge agrégée et indexée (en 1000€)										Charge Ultime
	Dev 12m	Dev 24m	Dev 36m	Dev 48m	Dev 60m	Dev 72m	Dev 84m	Dev 96m	Dev 108m	Dev 120m	
2006	0	244	1 901	1 999	1 709	1 897	2 043	2 232	1 000	1 000	1 050
2007	0	1 000	1 000	1 237	1 212	1 519	1 547	1 177	1 177	1 177	1 236
2008	0	247	172	175	173	137	203	203	203	203	213
2009	0	0	0	96	96	96	192	192	192	192	202
2010	0	326	346	415	206	418	439	439	439	439	461
2011	0	194	309	309	493	532	559	559	559	559	587
2012	627	1 000	1 086	1 394	1 520	1 642	1 726	1 726	1 726	1 726	1 812
2013	544	1 058	575	660	720	778	817	817	817	817	858
2014	642	908	1 203	1 382	1 507	1 628	1 711	1 711	1 711	1 711	1 796
2015	382	676	895	1 028	1 121	1 211	1 273	1 273	1 273	1 273	1 336

	Facteur de queue										
LDF empiriques	1,77	1,33	1,15	0,92	1,20	1,09	0,95	0,64	1,00		
LDF sélectionnés	1,771	1,325	1,148	1,091	1,080	1,051	1,000	1,000	1,000		1,050
LDF cumulés	3,502	1,978	1,493	1,300	1,192	1,103	1,050	1,050	1,050		1,050

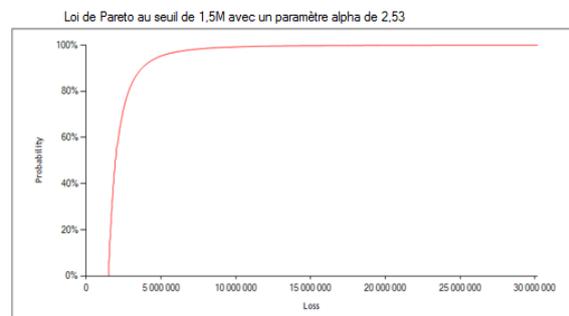
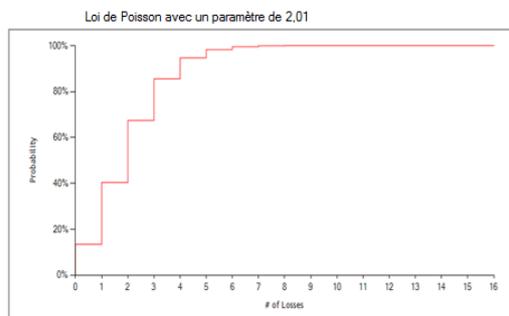
Calcul du *Burning Cost*

Année de souscription	Primes originales	Primes as if	Charge agrégée as if	LDF cumulés	Charge agrégé ultime	taux Burning Cost	Fréquence as-if
2006	74 421	95 399	1 000	1,05	1 050	1,10%	0,70
2007	65 492	83 773	1 177	1,05	1 236	1,48%	1,40
2008	75 845	95 163	203	1,05	213	0,22%	0,70
2009	87 050	106 894	192	1,05	202	0,19%	1,40
2010	86 702	102 132	419	1,10	461	0,45%	1,40
2011	93 936	106 254	493	1,19	587	0,55%	2,10
2012	96 441	103 647	1 394	1,30	1 812	1,75%	2,45
2013	96 649	98 481	576	1,49	858	0,87%	1,23
2014	102 923	105 970	907	1,98	1 796	1,70%	4,08
2015	107 973	109 908	382	3,50	1 336	1,22%	3,57

2016	116 589			Taux BC retenu	0,92%
------	---------	--	--	----------------	-------

Une fois le *Burning cost* calculé, les lois de distribution de la fréquence et de la sévérité sont ajustés suivant la méthode du maximum de vraisemblance. La fréquence est ajustée par une loi de Poisson et la sévérité par une loi de Pareto.

	Loi	Paramètres du modèle	
Fréquence	Poisson	2,01	
Sévérité	Pareto	Seuil	Alpha
		1 500 000	2,5



1.2.1.2 La tarification sur exposition

La tarification sur exposition est une approche basée sur le profil de risque du portefeuille de la cédante. cette méthode est essentiellement utilisée lorsqu'il y a peu ou pas d'information disponibles sur la statistique historique ou encore lorsque le profil de risque de la cédante a considérablement évolué au fil du temps.

Il existe deux principales approches de tarification sur exposition :

- L'approche paramétrique
- L'approche basée sur les scénarios

18 Chapitre 1. Introduction à la tarification de traités de réassurance Non-Vie

L'approche basée sur les scénarios correspond à l'approche standard utilisée pour la tarification des périls (catastrophes) naturels. Elle n'est donc pas présentée ici.

L'approche paramétrique

Les étapes d'une tarification sur exposition suivant une approche paramétrique sont les suivantes :

1. Disposer des données nécessaires à la tarification sur exposition

Il s'agit du profil de risque du portefeuille actuel de la cédante, de la liste détaillée de toutes les polices individuelles, y compris leurs limites, du Sinistre Maximum Probable (SMP), de la somme assurée et de la prime du portefeuille actuel. Très souvent, les risques avec des limites similaires sont agrégés par bande. Pour chaque bande les informations suivantes sont détaillées :

- La somme assurée minimum et maximum qui définissent les limites de la bande
- Le nombre de polices ou de risques regroupés dans la bande
- La somme assurée moyenne ou la somme totale assurée.
- La prime totale souscrite par la cédante par bande.
- Si différentes sous-classes sont couvertes, alors idéalement, le profil de risque par classe est nécessaire car les profils utilisés doivent être homogènes.
- Une estimation du ratio de sinistralité (S/P) par profil, par bande ou par groupe
- Une courbe d'exposition

Le tableau ci-dessous donne un exemple de profil de risques par bandes :

Limite Min	Limite Max	Nombre de risques	Limite moyenne	Prime
0	1 000 000	23 090	435 017	14 419 468
1 000 000	2 000 000	2 729	1 310 285	4 708 351
2 000 000	3 000 000	480	2 405 943	1 406 244
3 000 000	4 000 000	225	3 440 918	924 845
4 000 000	6 000 000	225	4 813 875	1 261 018
6 000 000	8 000 000	77	6 892 831	589 074
8 000 000	10 000 000	59	8 973 090	548 967
10 000 000	12 000 000	39	11 008 821	403 394
12 000 000	14 000 000	27	13 094 465	378 594
14 000 000	16 000 000	12	15 064 653	247 298
16 000 000	18 000 000	20	16 875 136	461 382
18 000 000	20 000 000	13	19 065 731	258 551

2. Choisir une courbe d'exposition applicable pour le type d'affaires à tarifier

Les courbes d'exposition sont construites d'après analyse de la sévérité des sinistres par rapport au Sinistre Maximum Probable (SMP) ou par rapport aux Sommes Assurées (SA). Elles permettent de répartir la prime de risque entre la cédante et le réassureur.

Notons :

- $x = \frac{X}{SA}$, les montants des sinistres normalisés afin de les rendre comparables.
- $d = \frac{D}{SA}$, la priorité qui est également normalisée
- F , la fonction de répartition de x et f , sa densité.

F et f sont toutes deux définies sur $[0,1]$. Une courbe d'exposition est définie par :

$$G(d) = \frac{E[\min(d, x)]}{E[\min(1, x)]} = \frac{\int_0^d (1 - F(x)) dx}{\int_0^1 (1 - F(x)) dx} = \frac{\int_0^d (1 - F(x)) dx}{E(x)} \quad (1.13)$$

Quelle que soit la distribution de sévérité, $G(d)$ est une fonction croissante et concave sur l'intervalle $[0,1]$ avec $G(0)=0$ et $G(1)=1$.

$$\frac{\partial G(d)}{\partial d} = \frac{1-F(d)}{f(d)} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 G(d)}{\partial d^2} = \frac{-f(d)}{f(d)} \leq 0$$

La concavité de la courbe d'exposition traduit la sévérité de la distribution de sinistres. Nous distinguons deux familles de courbes d'exposition. Pour les branches d'activité *Property* les courbes rebate et pour les branches *casualty*, les courbes ILF.

Les courbes *rebate*

Les courbes *rebate* sont des courbes décrivant la répartition du taux de destruction c'est-à-dire, la distribution des pertes probables en fonction de la somme assurée totale. Ces courbes permettent de déterminer la proportion des primes perçues par la cédante nécessaire pour couvrir les risques afférents au traité. Les courbes rebate les plus connues sont les courbes Suisse Re.

Exemple : Considérons la couverture incendie d'un bâtiment unique avec une somme assurée de 500 000 euros. La tranche couverte est une tranche 200 000 XS 100 000. Elle s'étend ainsi de 100 000 euros jusqu'à 300 000 euros, ce qui représente en proportion de la somme assurée respectivement 20% et 60%.

La prime pure nécessaire pour ce traité est donc celle requise pour une couverture entre 0 à 60% de la somme assurée, moins celle correspondant à une couverture entre 0 à 20%.

Considérons que le risque couvert se comporte comme une courbe d'exposition Suisse Ré telle que présentée ci-dessous :

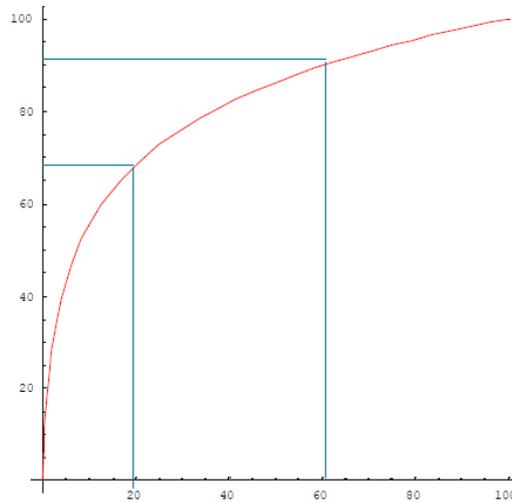


FIGURE 1.3 – Exemple de courbe Rebate

La prime pure de ce traité correspondrait alors à 23% de la prime perçue par la cédante (91% pour la couverture 0% à 60%-68% pour la couverture 0% à 20%).

Les courbes *Increased Limit Factors* (ILF)

Pour les couvertures de dommages, la somme assurée représente la valeur d'un risque physique et indique généralement le montant maximal des pertes dans le pire des cas. Pour les entreprises en responsabilité civile, il n'existe pas d'expression naturelle de l'exposition. A la place, une limite de police est convenue entre le titulaire de la police et l'assureur. La couverture offre une garantie contre les sinistres jusqu'à cette limite. En conséquence, la notion de courbes rebate définissant le degré de dommages en fonction de la valeur physique totale ne peut être appliquée aux activités de responsabilité. Plus la limite de la police est élevée, plus la prime facturée par la compagnie d'assurance est importante.

Afin de tarifier sur exposition les branches de responsabilité civile, les courbes utilisées sont des courbes dites ILF. Il s'agit de courbes qui fournissent la ventilation de la prime nécessaire pour couvrir les sinistres inférieurs à un certain seuil. Pour une certaine classe de risques, une prime forfaitaire pour une limite standard x_0 est définie. La fonction $IFL(x)$ définit de combien la prime standard doit être augmentée pour toute limite de police x telle que $IFL(x_0) = 1$.

La prime P pour une police de limite x est donnée par :

$$P = P_0 \cdot IFL(x) \quad (1.14)$$

Quelles que soient les limites x_i et x_j , la relation entre les primes respectives correspondantes est donnée par :

$$P_j = P_i \cdot \frac{IFL(x_j)}{IFL(x_i)} \quad (1.15)$$

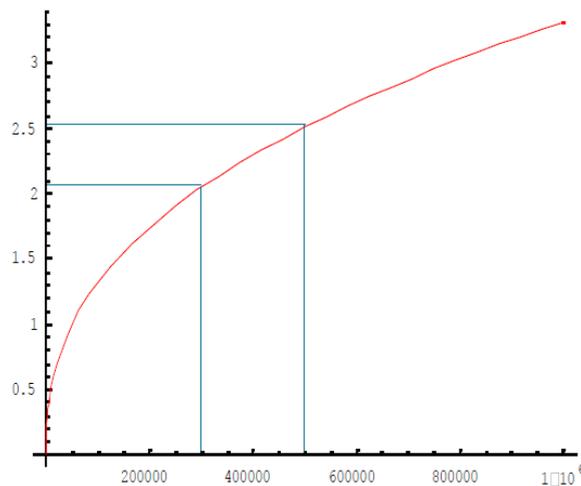
Hypothèses : La fréquence des sinistres est indépendante de la sévérité. Les ILF sont indépendants de la fréquence et ne dépendent que de la sévérité.

Pour une tranche L XS D, nous souhaitons calculer la perte attendue notée EL pour un risque unique dont la limite de police est k et la prime P.

$$EL = \begin{cases} \frac{ILF(D+L) - ILF(D)}{ILF(k)} \cdot P, & \text{si } k \geq D + L; \\ \frac{ILF(\text{Min}(D+L, k)) - ILF(\text{Min}(D, k))}{ILF(k)} \cdot P, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.16)$$

La perte attendue d'un portefeuille comprenant plusieurs risques est obtenue par l'addition des pertes attendues de l'ensemble des risques individuels.

Exemple : Considérons la couverture en non-proportionnel d'un engagement sous-jacent dont le plafond est fixé à 500 000 euros. La tranche couverte à pour priorité 0 euros (soit aucune franchise) et pour plafond (priorité + portée) 300 000 euros. Nous allons déterminer la prime pure de ce traité à partir de la courbe d'exposition ILF suivante :



D'après cette courbe, nous obtenons $P_1 = \frac{ILF(300\ 000)}{ILF(500\ 000)} \cdot P_2 = \frac{2,1}{2,5} = 0,84$

Ainsi, la prime pure du traité correspond à 84% des primes d'assurance sous-jacentes.

Ajustement du profil de risque afin de le faire correspondre à l'exposition future

Les principales motivations de ces ajustements sont la prise en compte de l'inflation, et les changements dans le volume du portefeuille ou dans sa composition. Détermination de la distribution de fréquence-sévérité Poisson/empirique.

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur l'estimation de la perte attendue par le réassureur. Le prix final doit être défini de manière à couvrir ce montant, mais aussi à les frais du réassureur et le risque supporté par les actionnaires.

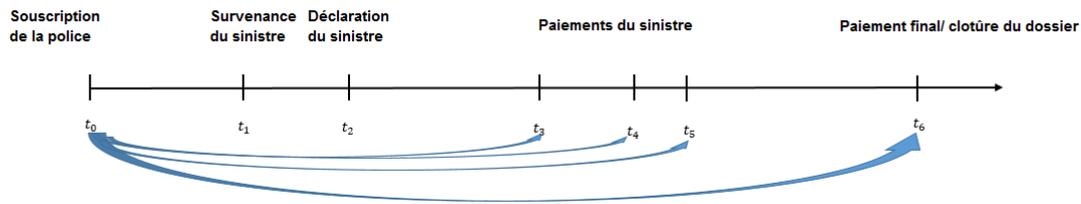
1.2.2 Les chargements de gestion : les frais

Les frais d'un réassureur diffèrent de ceux d'un assureur. Les frais du réassureur peuvent être regroupés sous 3 catégories :

1. Les frais variant avec la prime
 - Les commissions. Les commissions correspondent à un pourcentage des primes reversé par le réassureur dans le cadre d'une facultative ou d'un traité proportionnel à la cédante au titre de participation aux frais d'acquisition et de gestion des affaires qui lui sont cédées.
 - Les frais de courtage Le courtage est destiné à rémunérer l'intermédiaire apporteur des affaires au réassureur. Le courtage s'exprime en pourcentage de la prime de réassurance et est défini contractuellement. Le courtage est généralement de 10% pour les traités non proportionnels, dans ce cas, le réassureur conservera 90% de la prime pour payer ses frais, les sinistres et générer son bénéfice. Les 10% restant seront versés au courtier et les frais de courtage seront intégrés dans la prime commerciale. Ainsi, nous avons les égalités suivantes :
$$\text{Prime avec courtage} = \frac{\text{Prime sans courtage}}{1-10\%}$$
 - Les taxes : Il s'agit des taxes éventuelles exigibles sur la prime du contrat.
2. Les frais fixes Il s'agit des frais généraux tels que les salaires, les loyers mobiliers et immobiliers. Même si ces dépenses peuvent varier quelque peu avec la taille du compte, il est clair qu'elles n'augmenteraient pas simplement en prenant une plus part plus importante d'un traité donné.
3. Les frais variables Les frais variables dépendent du type de contrat de réassurance. Une tranche XS peut nécessiter un travail de suivi de sinistres individuels plus important, une quote-part peut exiger l'examen d'un bordereau de sinistralité mais moins d'examen du dossier de réclamation.

1.2.3 Les cash flows et l'escompte

Le paiement des sinistres étant souvent différé dans le temps surtout pour les branches à développement long, les réserves pour sinistres à payer font l'objet de placements. Les produits financiers issus de ces placements permettent de réduire le risque et le montant de capital à détenir est estimé en fonction de la perte attendue escomptée.



Le facteur d'escompte est calculé à partir de la cadence de paiement des sinistres.

Cette cadence est déterminée de la même manière que celle du développement des sinistres totaux lorsque la tarification est faite sur expérience avec suffisamment de données.

Dans le cadre d'une tarification sur exposition, il n'est pas possible de définir une cadence de paiement. Il faut alors utiliser des cadences de marché correspondant à la branche tarifiée où à des cadences provenant du provisionnement des sinistres. Soient :

- un sinistre S payé en totalité sur N périodes,
- P_i la proportion de sinistre payée à la période $i = 1 \dots N$
- Y_i le rendement à la date i issu de la courbe des taux correspondant à la monnaie du contrat

Le facteur d'escompte noté DF est donné par la formule suivante :

$$DF = \sum_{i=1}^N P_i \cdot (1 + Y_i)^{-t} \quad (1.17)$$

Où t représente la maturité sachant qu'on suppose que les sinistres sont payés en milieu de période. Le facteur d'escompte est égal à 1 pour les branches courtes et est inférieur à 1 pour les branches longues. La perte attendue escomptée (*Discounted Expected Loss*) est ainsi donnée par :

$$DEL = EL \times DF \quad (1.18)$$

1.2.4 Les chargements de sécurité : Le coût du capital et son intégration en tarification

Chaque affaire souscrite doit générer une part de bénéfice destinée à rémunérer les actionnaires. Ce bénéfice doit être supérieur au taux sans risque car il existe une incertitude sur le résultat final des traités. Les réassureurs fixent à l'avance leurs objectifs de rentabilité. Un chargement adéquat à l'obtention du bénéfice souhaité est appliqué affaire par affaire en fonction du capital nécessaire à leur souscription. Ce chargement correspond au coût du capital.

24 Chapitre 1. Introduction à la tarification de traités de réassurance Non-Vie

Considérons le traité en excédent de sinistre présenté en exemple précédemment. Le tableau ci-dessous indique le passage de la prime pure à la prime technique et en particulier l'intégration du coût du capital dans la prime.

Perte attendue	1 067 797	+
Escompte	160 170	-
Frais internes	219 073	+
Capital alloué	1 457 216	
Rendement attendu du capital	10%	
Coût du capital	145 722	+
Frais externes	10%	+
Prime technique	1 413 802	

Coût du capital = Rendement attendu du capital \times Capital alloué

$$\text{Prime technique} = \frac{\text{Perte attendue} - \text{escompte} + \text{Frais internes} + \text{Coût du capital}}{1 - \% \text{Frais Externes}} \quad (1.19)$$

Le rendement du capital étant une décision de groupe, il est identique pour tous les contrats. Plus le capital alloué est important, plus le coût du capital est important et donc plus la prime technique augmente.

1.3 Les indicateurs de performance

Il existe plusieurs méthodes pour évaluer la performance d'une affaire ou d'une ligne d'activité. Mesurer la performance des affaires ou des lignes d'activités permet ensuite de les comparer entre elles. Parmi les mesures de performances traditionnelles, l'une des plus utilisées en pratique est le ROE (*Return On Equity*). Le ROE est calculé à horizon 1 an et est donné par :

$$ROE = \frac{\text{Résultats nets}}{\text{Capitaux disponibles}} \quad (1.20)$$

Ce type de mesures ne prenant en compte aucune notion de risque, ils peuvent donner des indications trompeuses lorsqu'il s'agit de comparer des activités ayant des niveaux de risque ou d'incertitude sur le rendement différents. Afin de palier à ce problème, Banker Trust a introduit dans les années 70, les mesures de performance ajustées au risque (couramment appelés *Risk Adjusted Performance Measurement* ou RAPM) qui représentent un bien meilleur indicateur de performance.

Dans les mesures de type RAPM, il y a trois méthodes d'ajustements possibles. Il est possible soit d'ajuster les rendements du risque, soit d'ajuster le capital du risque soit d'ajuster les deux.

Ainsi, selon le mode d'ajustement, les trois mesures suivantes se distinguent :

Le **RORAC** (*Return On Risk Adjusted Capital*) : est obtenu en rapportant les résultats non ajustés au capital ajusté du risque. Il s'exprime :

$$RORAC(X) = \frac{\text{Résultats nets}}{\text{capital ajusté du risque}} \quad (1.21)$$

Le RORAC permet de comparer des investissements ayant des niveaux de risques ou des profils de risques différents.

Une des propriétés souhaitables pour une méthode d'allocation du capital est également la compatibilité avec le RORAC. Une méthode d'allocation qui satisfait cette propriété garantie que si le RORAC d'un sous portefeuille i est supérieur au RORAC du portefeuille total, augmenter le poids de ce sous portefeuille améliore la performance globale du portefeuille. Cette méthode peut alors être utilisée efficacement pour mesurer la performance.

Le **RAROC** (*Risk Adjusted Return On Capital*) correspond quant à lui au rapport entre les résultats ajustés et le capital non ajusté

$$RAROC(X) = \frac{\text{Résultats nets ajustés}}{\text{capital économique}} \quad (1.22)$$

Le **RARORAC** (*Risk Adjusted Return On Risk Adjusted Capital*), enfin, tient compte des deux ajustements.

$$RARORAC(X) = \frac{\text{Résultats nets ajustés}}{\text{capital ajusté du risque}} \quad (1.23)$$

Le capital et son allocation

Sommaire

2.1	Le capital : Aperçu	27
2.1.1	Les différentes perspectives du besoin en capital d'une société de (ré)assurance	28
2.1.2	Le capital dans le contexte Solvabilité II	29
2.2	Estimation du capital global de l'entreprise	33
2.2.1	Le profil de risque de l'entreprise	33
2.2.2	L'évaluation quantitative des risques : Les mesures de risque	35
2.2.3	L'agrégation des risques	38
2.2.4	Agrégation linéaire vs agrégation par les copules	45
2.3	Allocation du capital	47
2.3.1	Les méthodes d'allocation du capital	47

2.1 Le capital : Aperçu

Qu'est-ce que le capital? Pourquoi une entreprise doit-elle détenir un certain niveau de capital? A combien s'élève ce montant et quel taux de retour sur investissement la société peut-elle espérer sur ce capital?

Nous distinguons deux principaux volets du capital d'une société de (ré)assurance qui sont le capital économique et le capital alloué aux risques.

Le Capital économique : Le capital économique représente le capital à disposition du réassureur pour garantir le paiement de ses sinistres. Il est constitué du capital action, des dettes à long terme et des gains sur investissement non réalisés.

Considérons un portefeuille diversifié composé de $N = (1, \dots, n)$ sous-portefeuilles sur une période de temps fixe. Notons $X_i \in N$, une variable aléatoire représentant la distribution de pertes et profits de l' i ème sous portefeuille. Les risques pouvant être liés les uns aux autres, il existe entre les X_i , une structure de dépendance indéfinie à ce stade. La variable X représentant la perte agrégée du portefeuille est donnée par :

$$X \triangleq \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.1)$$

Le capital économique pour l'ensemble du portefeuille est défini à partir d'une mesure de risque ρ et d'un seuil de confiance α donnés par la formule suivante :

$$EC_\alpha(X) = \rho_\alpha(X) - E(X) \quad (2.2)$$

Le capital économique représente donc le surplus de risque au-delà de la valeur espérée des pertes.

Le capital alloué aux risques : Le capital alloué aux risques (Risk Allocated Capital ou RAC) est quant à lui, le capital minimal nécessaire pour couvrir les risques et assurer la survie de l'entreprise en cas de scénario défavorable. Dans la formule du capital économique, $\rho_\alpha(X)$ correspond au montant de capital requis pour couvrir l'ensemble du portefeuille c.à.d. le RAC.

2.1.1 Les différentes perspectives du besoin en capital d'une société de (ré)assurance

Chaque intervenant du marché a sa propre perception du risque et du besoin en capital d'une société de (ré)assurance :

- Pour le **régulateur**, et les **souscripteurs de contrats**, le risque représente la faillite de l'entreprise et donc son incapacité à honorer ses engagements. De leur point de vue, le capital est nécessaire pour absorber les évolutions imprévues dans les valeurs des actifs et passifs afin de garantir la solvabilité d'une entreprise.
- Pour les **agences de notation**, le capital permet non seulement de déterminer la solvabilité mais aussi la solidité financière d'une entreprise.
- Quant aux **actionnaires**, ils perçoivent le capital comme un investissement dont ils attendent un rendement plus important que le taux sans risque. Le capital étant un gage de solvabilité, le risque pour les investisseurs est que les résultats soient mauvais. Ils ont un seuil de tolérance au risque et ne sont pas prêts à risquer plus qu'un certain montant.

Le graphique suivant illustre le capital requis suivant différents objectifs :

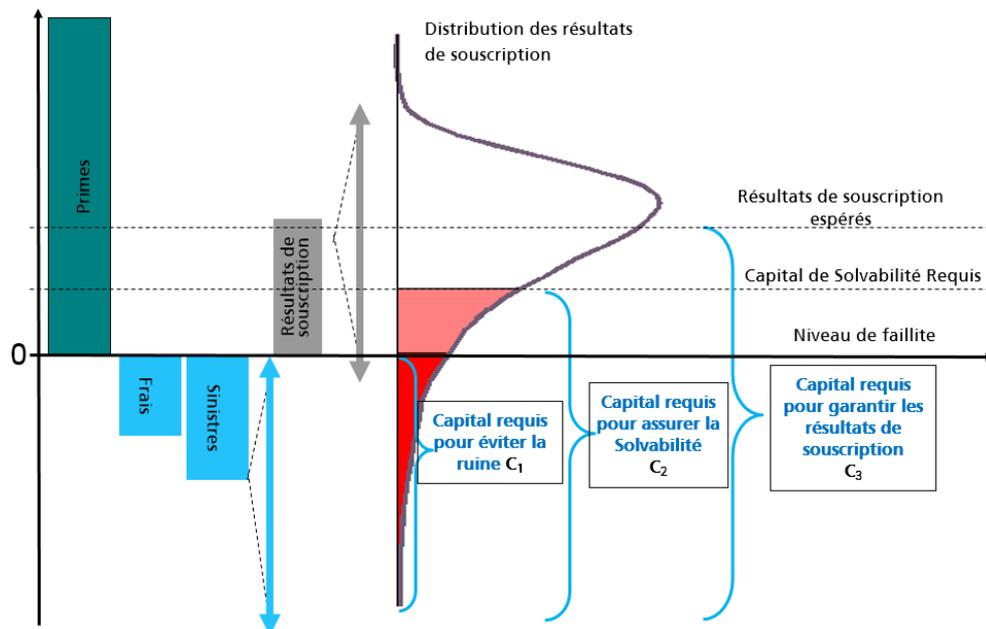


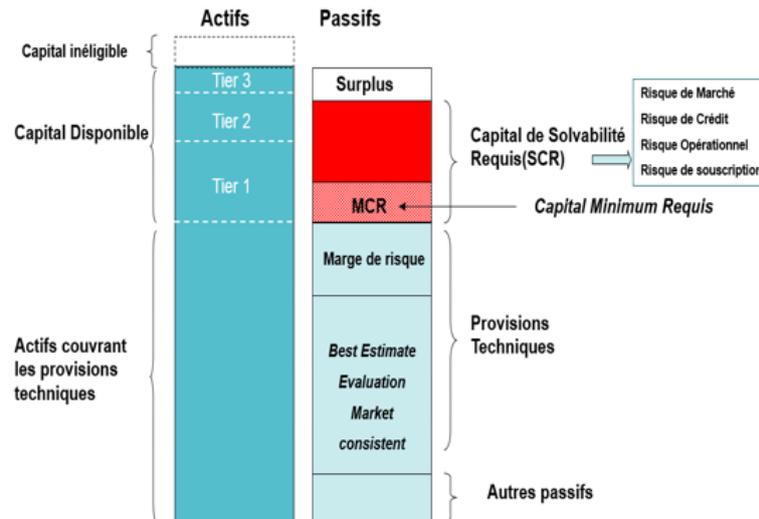
FIGURE 2.1 – Le capital requis suivant différents objectifs.

2.1.2 Le capital dans le contexte Solvabilité II

Solvabilité II est le régime de solvabilité en vigueur dans la Communauté Européenne depuis le 1er janvier 2016. Inspirée de la réforme bancaire Bâle II et du système de Solvabilité suisse le *Swiss solvency Test* (SST), ce nouveau référentiel a pour but d'harmoniser et de renforcer la réglementation prudentielle du secteur de l'assurance dans l'espace économique Européen. Elaborée pour protéger les assurés et inciter les sociétés d'assurance et de réassurance à améliorer leur connaissance et leur gestion des risques, cette réforme repose sur les trois piliers suivants :

- *Pilier 1* : Exigences quantitatives requises pour les provisions techniques et les fonds propres des sociétés d'assurance et de réassurance.
- *Pilier 2* : Exigences qualitatives et surveillance prudentielle. Ces exigences portent sur la gestion des risques en interne par la mise en place d'un système de gouvernance adéquat, ainsi que les règles de supervision des autorités de contrôle.
- *Pilier 3* : Exigences en matière d'information prudentielle et de publication. Il s'agit des conditions de communications publiques sur les activités financières, de gestion des risques et de solvabilité entraînant une discipline de marché

Le pilier 1 relatif aux exigences quantitatives auxquelles sont soumises les sociétés d'assurance et de réassurance est celui qui nous intéresse le plus dans ce mémoire. Les exigences du pilier 1 sont axées sur une vision market consistant du bilan économique où les actifs financiers évalués en valeur de marché (*mark to market*) ou dans certains cas avec une approche modèle basée sur les données du marché (*mark to model*) couvrent de manière adéquate les passifs évalués en juste valeur (*fair value*).



2.1.2.1 Les provisions techniques

Les provisions techniques, évaluées de façon cohérente avec le marché, correspondent à la valeur de transfert qu'un tiers exigerait pour reprendre les engagements de l'assureur. Les provisions techniques sont obtenues par la meilleure estimation (*Best Estimate*) des flux futurs, augmentée d'une marge pour risque (*Risque Margin*), sauf si l'engagement de l'organisme est entièrement répliquable (*hedgeable*) par des instruments financiers.

Le Best Estimate

Le *Best Estimate* correspond à la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs y compris la valeur temps des options et garanties. Le *Best Estimate* est déterminé à l'aide de la courbe des taux sans risque pertinents, sur la base d'informations actuelles crédibles et d'hypothèses réalistes. Dans le cas où il est impossible de mettre en place une stratégie financière permettant de répliquer exactement les flux futurs, il faut considérer une marge pour risque.

La marge pour risque

La marge pour risque représente le montant en supplément du *best estimate* qu'exigerait un reprenneur des engagements de l'assureur, pour couvrir le coût du capital qu'il devra immobiliser au titre des passifs repris jusqu'à leur extinction.

La marge pour risque est définie suivant l'approche coût du capital (CoC) selon la directive cadre telle que :

$$RM = CoC \times \sum_{t>0} \frac{SCR_t}{(1+r_t)^t} \quad (2.3)$$

- Le CoC est constant et fixé à 6% dans les spécifications techniques définies par l'EIOPA.
- SCR_t représente le capital de solvabilité en date t, lié aux risques suivants : risque de souscription, risque opérationnel, risque de contrepartie et risque de marché
- r_t représente le taux sans risque de maturité t issu de la courbe des taux sans risque fournit par l'autorité de contrôle.

2.1.2.2 Les exigences de fonds propres

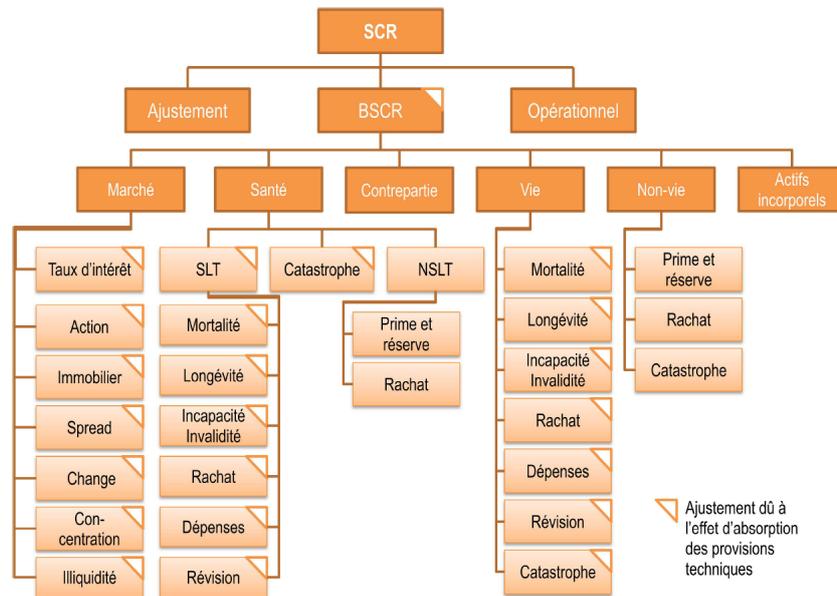
Solvabilité II définit deux niveaux de capitaux qui déterminent le besoin en capital des sociétés d'assurance et de réassurance : le SCR et le MCR

Le SCR

Le SCR (Solvency Capital Requirement) correspond au niveau de capital nécessaire pour absorber les pertes importantes et imprévues de manière à éviter le risque de faillite dans 99,5% des cas à horizon 1 an. En d'autres termes le SCR est le niveau de capital requis de manière à limiter la probabilité de ruine à 1 an à 0,5%, soit une occurrence tous les 200 ans. Le SCR est basé sur le profil de risque de l'entreprise. Dès lors qu'une entreprise ne couvre plus son SCR, elle encoure un plan de redressement de l'organisme de contrôle. Le SCR peut être estimé de différentes manières :

- A partir d'une formule standard calibrée uniformément sur le marché européen.
- A partir d'un modèle interne développé par la compagnie d'assurance ou de réassurance et validé par le superviseur.
- A partir d'un mixte des deux qui consiste à remplacer les paramètres de la formule standard par des paramètres propres à l'organisme d'assurance. Ces paramètres sont couramment appelés USP (*Undertaking Specific Parameter*) ou GSP (*Group Specific Parameter*).

Suivant la formule standard, le SCR est calculé à partir d'une approche modulaire autour des facteurs de risques dont les principaux sont le risque de souscription (Santé, Vie et Non-Vie), le risque de marché, le risque de contrepartie, le risque des actifs incorporels et le risque opérationnel.



Pour chaque module de risque, un capital de solvabilité est calculé. Les SCR de ces modules de risques sont ensuite agrégés pour obtenir le SCR de base dit BSCR (Basic Solvency Capital Requirement). La méthode d'agrégation appliquée est une méthode d'agrégation bottom-up (agrégation du bas vers le haut) qui utilise des corrélations entre les facteurs de risque permettant ainsi à l'entreprise de prendre en compte la faible probabilité de réalisation simultanée d'événements défavorable affectant tous ses risques. Le BSCR s'exprime comme suit :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{ij} Corr_{ij} \times SCR_i \times SCR_j} + SCR_{intangible} \quad (2.4)$$

Avec :

- SCR_i le SCR du module i
- $SCR_{intangible}$, le SCR lié au risque d'intangibilité des actifs incorporels
- $Corr_{ij}$, le coefficient de corrélation entre les modules i et j .

Des matrices de corrélation entre les différents modules de risque sont fournies dans le règlement délégué 2015/35 de la commission européenne. Le BSCR est ensuite augmenté du SCR au titre du risque opérationnel puis, des réductions sont considérées par l'intermédiaires d'ajustements qui tiennent notamment compte de la fiscalité. Le SCR est ainsi obtenu par la formule suivante :

$$SCR = BSCR + SCR_{opérationnel} - Ajustements \quad (2.5)$$

Le MCR

Le MCR (*Minimum Capital Requirement*) représente le montant minimum de capital en deçà duquel le régulateur intervient. Une entreprise ne détenant pas le niveau minimum de fonds propres peut se voir retirer son agrément et donc devoir transférer son portefeuille.

Le MCR est calculé trimestriellement et son calcul s'effectue en trois étapes :

Le MCR linéaire est calculé à partir d'une formule linéaire simple qui est fonction des primes et des provisions techniques. Le MCR combiné est ensuite obtenu en retraitant éventuellement le MCR linéaire de façon à ce qu'il soit compris entre 25% et 45% du SCR. Ce corridor impose un calcul trimestriel du SCR. Le MCR final est donné par l'application d'un plancher absolu qui dépend de l'activité (entre 2.2M et 5.4M).

2.2 Estimation du capital global de l'entreprise

L'estimation du capital doit être au coeur des stratégies de l'entreprise. C'est une condition préalable à l'optimisation de la rentabilité du portefeuille car elle permet de mesurer la véritable performance de l'entreprise.

La détermination du capital économique se fait en plusieurs étapes :

- La définition du profil de risque de l'entreprise
- La quantification des risques avec la définition d'une mesure de risque, d'un horizon temporel et d'un seuil pour effectuer les calculs
- L'agrégation des risques à partir d'un modèle prenant en compte les dépendances entre les risques et les bénéfices qui découlent de la diversification du portefeuille de l'entreprise

2.2.1 Le profil de risque de l'entreprise

Afin d'estimer le montant de capital nécessaire pour assurer sa solvabilité, une entreprise doit tout d'abord identifier les risques auxquels elle est sujette. Un facteur de risque représente toute variable aléatoire susceptible d'affecter le changement de valeur économique d'une entreprise.

Le régulateur indique quatre principales sources de risque à inclure nécessairement dans les modèles internes :

- **Le risque de souscription** : Le risque de souscription est le risque d'assurance spécifique qui résulte des contrats de réassurance. Il est lié aux incertitudes relatives aux résultats des souscriptions du réassureur. Le risque de souscription est lui-même constitué de trois risques qui sont : le risque de prime, le risque de réserve et le risque de catastrophe
- **Le risque de marché** : Le risque de marché correspond au risque que les variations des marchés financiers et des variables macroéconomiques induisent une fluctuation de la juste valeur ou des flux de trésorerie d'un instrument financier. De même que le risque de souscription, le risque de marché comprend trois types de risques à savoir le risque de change, le risque de taux d'intérêt et le risque d'évaluation.

- **Le risque de crédit ou risque de défaut** : C'est le risque dû, d'une part, à l'incertitude sur la capacité d'une contrepartie à honorer ses obligations financières, et d'autre part à la réduction de la valeur d'instruments financiers émis par des tiers. Du fait de la pluralité des types de contreparties (souverain, individus, entreprises. . .) et des types d'obligations (produits dérivés, prêts automobiles. . .), le risque de crédit peut prendre de nombreuses formes.
- **Le risque opérationnel** : Le risque opérationnel représente le risque de pertes liées à l'erreur humaine, à la fraude, ou à une déficience du système opérationnel d'une entreprise.

Ces quatre catégories de risques sont loin de constituer une liste exhaustive des facteurs de risques. Les entreprises doivent définir au mieux les facteurs de risques inhérents à leurs activités et définir leur position face au risque.

La position de l'entreprise face au risque

Il existe plusieurs termes pour définir la position d'une entreprise vis à vis du risque :

- **La capacité de risque** : représente le risque maximum que l'entreprise peut supporter. Elle est exprimée en montant agrégé de capital.
- **La tolérance au risque** : représente le montant maximum de risque qu'elle est prête à prendre. Le conseil d'administration définit et approuve la tolérance au risque de SCOR, par LoB, par classe d'actifs et par scénario extrême afin de s'assurer que le profil de risque du groupe reste aligné sur son appétit au risque. SCOR utilise diverses mesures de risque pour vérifier que les expositions du Groupe restent dans les limites requises par ses parties prenantes (par exemple, les clients, actionnaires, régulateurs, etc). Ces mesures peuvent prendre plusieurs formes en fonction des contraintes techniques ou du niveau d'information disponibles et sont basés sur les résultats du modèle interne ou sur des avis d'experts.
- **L'appétit pour le risque** : se réfère à la quantité et au type de risque qu'une organisation est en mesure de soutenir à la poursuite de ses objectifs stratégiques, compte tenu de sa structure du capital et de son accès aux marchés financiers, ainsi que son financement en actions. La détermination de l'appétit pour le risque incombe au conseil de direction, l'appétit pour le risque étant intimement lié à la stratégie globale de l'entreprise.
- **Les préférences de risque** Les préférences en matière de risque définissent qualitativement le type de risque auxquels la société est prête à s'exposer. SCOR vise à couvrir un large éventail de risques de réassurance ainsi que de zones géographiques. Cependant, le groupe ne souhaite pas être exposé aux risques opérationnel, juridiques, réglementaires, fiscaux et de réputation (mais pour autant, SCOR n'est pas immunisé contre ces risques). Le choix des préférences de risque détermine les risques à inclure dans les guides de souscription de SCOR.
- **Le risque cible** : désigne le niveau de risque optimal ciblé par l'entreprise et qui reflète ses objectifs stratégiques en matière de rentabilité.

Certains de ces termes sont utilisés de façon interchangeable, bien qu'ils représentent des concepts liés mais différents.

Une fois les facteurs de risques identifiés et la position de l'entreprise face au risque définie, il convient alors de quantifier ces risques. Pour ce faire, on a recours aux mesures de risque.

2.2.2 L'évaluation quantitative des risques : Les mesures de risque

Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de Probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle mesure de risque l'application $\rho : X \rightarrow \rho(X) \in \mathbb{R}^+$. Autrement dit, une mesure de risque est une fonction faisant correspondre à un risque X , un nombre positif noté $\rho(X)$.

Les mesures de risque permettent de déterminer le montant requis à détenir pour rendre acceptable une position risquée pendant une période donnée. Elles servent également à comparer différents risques entre eux et à les classer selon leur niveau de dangerosité.

Dans ce document, la variable aléatoire X qui porte le risque correspond à la distribution de pertes et profits. Par convention, lorsque $X > 0$ on parle de pertes et lorsque $X \leq 0$, il s'agit de gains.

2.2.2.1 Propriétés souhaitables pour une mesure de risque :

- i. **La cohérence au sens d'ARTZNER et AL** : Une mesure de risque est dite cohérente au sens d'ARTZNER et AL, si elle satisfait aux quatre propriétés suivantes :
 - (a) **Monotonicité** : $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$, quels que soient les risques X et Y . La monotonicité signifie que si un portefeuille Y a un rendement toujours supérieur au rendement d'un portefeuille X alors, le portefeuille Y ne peut être plus risqué que le portefeuille X . En termes d'allocation du capital, cela traduit le fait qu'un portefeuille X qui est systématiquement plus risqué qu'un portefeuille Y requiert plus de capital.
 - (b) **Invariance par translation** : pour toute constance C , $\rho(X + C) = \rho(X) - C$. La propriété d'invariance par translation signifie que si le risque X augmente d'une constante donnée, la mesure de risque correspondante diminue de la même proportion. Autrement dit, ajouter du cash à un portefeuille risqué réduit le besoin en capital.
 - (c) **Homogénéité positive** : $\forall k \in \mathbb{R}_+, \rho(kX) = k\rho(X)$. L'homogénéité positive implique qu'augmenter linéairement la proportion investie sur un portefeuille X d'un facteur positif revient à augmenter le risque par le même facteur.
 - (d) **Sous-additivité** : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ quels que soient les risques X et Y . La sous additivité indique que le risque d'un portefeuille ne peut être supérieur à la somme des risques de ses composantes. En d'autres termes, la diversification n'augmente pas le risque. Elle peut même le diminuer.
- ii. **Invariance en loi** : $\rho(X) = \rho(F_X)$, où F_X représente la fonction de distribution de X . $\forall X$ et Y deux risques avec les fonctions de distributions respectives F_X et F_Y , l'invariance en loi peut se traduire par : $F_X = F_Y \rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$ et on écrit $X \sim Y$. Cette propriété signifie qu'une mesure de risque $\rho(X)$ ne dépend pas du risque

lui-même mais de sa distribution sous-jacente. La propriété d'invariance en loi est essentielle pour pouvoir appliquer en pratique une mesure de risque à des données empiriques.

- iii. **Convexité** : $\forall (X, Y) \in P, 0 \leq \lambda \leq 1, \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.

La propriété de convexité donne un sens précis à l'idée que la diversification ne devrait pas augmenter le risque. Considérons un portefeuille constitué en investissant une proportion λ sur un risque X et de la proportion complémentaire $(1 - \lambda)$ sur un risque Y . Le portefeuille diversifié obtenu par la combinaison des risques X et Y est alors $\lambda X + (1 - \lambda)Y$.

La propriété de convexité indique que la mesure du risque de ce portefeuille ainsi diversifié est inférieure à la combinaison des mesures des risques X et Y . Une mesure de risque est dite convexe lorsqu'elle satisfait aux propriétés d'invariance par translation, de monotonie et de convexité.

2.2.2.2 Quelques exemples de mesures de risque

L'écart-type et la variance

L'écart-type est une mesure de dispersion fréquemment utilisée en statistique. Il mesure la dispersion autour de la moyenne. L'écart-type correspond à la racine carrée de la variance qui se définit elle-même comme la moyenne des écarts à la moyenne de la variable aléatoire X .

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2} \quad (2.6)$$

L'écart-type est par définition toujours positif. Plus l'écart-type est petit plus les données sont homogènes. Une variable aléatoire avec un écart-type élevé indique une forte volatilité et donc un risque élevé. L'écart-type est sous-additive et homogène positive mais pas conservatrice et ne tient pas bien compte des événements extrêmes.

La Value-at-Risk (VaR)

La VaR est la mesure de risque la plus populaire dans le secteur financier. Elle se définit comme la perte maximale que peut subir une position, un portefeuille ou une compagnie dans son ensemble, sur une période donnée avec une certaine probabilité appelée seuil de confiance. Plus formellement, la VaR au seuil de confiance $\alpha \in (0, 1)$ est le quantile d'ordre α de la distribution de pertes. Elle s'exprime par :

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha \quad (2.7)$$

Où F_X est la fonction de répartition de la variable aléatoire X telle que $F_X(x) = P(X \leq x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

Remarque :

- Si g est une fonction strictement croissante et continue à gauche alors : $F(g(X))^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(\alpha)) \Leftrightarrow VaR_\alpha(g(x)) = g(VaR_\alpha(X))$
- Si g est une fonction strictement décroissante et continue à droite et si F_X est bijective alors : $F(g(X))^{-1}(\alpha) = g(F_X^{-1}(1 - \alpha)) \Leftrightarrow VaR_\alpha(g(x)) = g(VaR_{(1 - \alpha)}(X))$

La VaR satisfait aux propriétés de monotonie, d'homogénéité positive et d'invariance par translation. Elle n'est cependant pas sous-additive et par conséquent, la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente au sens d'Artzner et Al et peut conduire à préférer une situation de risques concentrés à une situation de risques diversifiés. En outre, la VaR correspond à un quantile donné et ne prend pas en compte les risques au-delà de ce quantile alors qu'en réassurance, il est fondamental de mesurer le risque sur l'ensemble de la queue de distribution des pertes. Néanmoins, la VaR est facile à estimer et à back-tester.

La Tail Value-at-Risk (TVaR)

La Tail Value-at-Risk de niveau α représente le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR_α . La Tail-Value at risk est définie comme suit :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(t) dt = \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_\alpha^1 VaR(X, t) dt \quad (2.8)$$

La TVaR est par construction plus conservatrice que la VaR car pour un seuil α la relation $TVaR_\alpha(X) > VaR_\alpha(X)$ est toujours vérifiée. De plus, alors que la VaR indique un seul point de la queue de la distribution, la TVaR donne des informations sur l'ensemble de la distribution de X et donc sur la queue de distribution.

L'excess Tail value at risk (XTVaR)

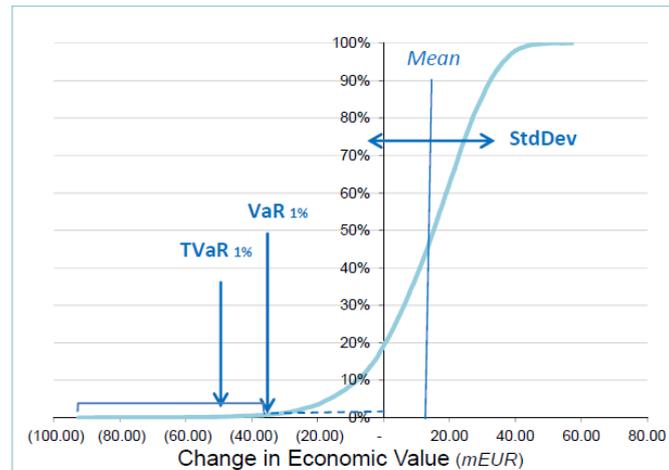
L'XTVaR est définie par la relation suivante :

$$XTVaR_\alpha(X) = E[-X - VaR_\alpha(X) / X < -VaR_\alpha(X)] \quad (2.9)$$

L'XTVaR correspond simplement à la différence entre la TVaR et la VaR.

$$XTVaR_\alpha(X) = TVaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(X) \quad (2.10)$$

Le graphique suivant montre la perte suivant différentes mesures de risques :



2.2.3 L'agrégation des risques

L'agrégation des risques consiste à cumuler les risques quantifiés pour obtenir le capital global de l'entreprise. Cela nécessite un modèle d'agrégation des mesures de risques individuels. Les modèles d'agrégations suivent deux principales approches : l'agrégation *bottom-up* et l'agrégation *top-down*.

L'agrégation *bottom-up* signifie littéralement agrégation des risques du bas vers le haut. Elle consiste à définir les capitaux requis aux niveaux les plus fins de l'entreprise (par exemple contrats individuels), puis à agréger ces capitaux pour obtenir les capitaux requis à des niveaux plus élevés en prenant en compte les dépendances entre les risques ainsi que les bénéfices de diversification.

L'agrégation *top-down* à contrario, ne cherche pas à identifier les risques individuels mais a comme point de départ les données consolidées. La distribution jointe du risque total est déterminée à partir des données empiriques. Cette approche ne nécessite pas de connaître les risques individuels.

L'agrégation des risques se fait à différents niveaux : au sein d'une même branche d'activité, entre branches d'activités et entre zone géographique. Dans les modèles internes, il existe généralement des modèles différents pour la Vie, la Non-Vie et les actifs-passifs. Nous nous intéressons dans ce document à l'agrégation des risques Non-Vie qui couvre tous les risques liés au passif Non-Vie d'une entreprise. Au sein de la branche Non-Vie, les entreprises de réassurance proposent en général un large éventail de produits (Responsabilité civile automobile, professionnelle, générale...) dans plusieurs sites géographiques. Cette diversification de leur portefeuille implique que la probabilité que tous les risques surviennent en même temps est réduite.

Ainsi, le capital global dont l'entreprise doit disposer est inférieur à la somme des capitaux correspondant à chacun de ses risques. Il s'agit du bénéfice de diversification et le modèle d'agrégation des risques doit le prendre en compte.

2.2.3.1 La prise en compte du bénéfice de diversification

Définition : La diversification se matérialise pour les entreprises offrant un large éventail de produits dans différents pays. La diversification intervient à trois niveaux :

- la diversification intra-risque se référant à la diversification au sein d'un type de risque particulier
- la diversification des Inter-risques se référant à la diversification entre les différents types de risques
- la diversification intra-branches qui se réfère à la diversification potentiellement générée entre les différentes lignes d'activités et / ou les entités géographiques.

Suivant le proverbe ne pas mettre tous ses œufs dans le même panier la diversification permet de réduire le risque de perte d'un portefeuille ainsi que sa volatilité.

L'idée sous-jacente au bénéfice de diversification est que les gains réalisés sur certains portefeuilles permettent de compenser les pertes subies par d'autres.

Ainsi, comme l'indique la propriété de sub-additivité, un portefeuille de n risques X_i agrégés est moins risqué que la somme des n risques individuels :

$$\rho\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \rho(X_i) \quad (2.11)$$

Cette observation est également vérifiée pour le capital économique noté EC et on a :

$$EC \leq \sum_{i=1}^n EC_i \quad (2.12)$$

Le bénéfice de diversification noté D pour un portefeuille X agrégeant les risques X_1, \dots, X_n est donné par :

$$D = 1 - EC / \left(\sum_{i=1}^n EC_i\right) \quad (2.13)$$

Le bénéfice de diversification représente ainsi le montant de capital qu'il est possible d'épargner en diversifiant ses risques. Si la mesure de risque utilisée pour le calcul du capital économique est cohérente au sens d'Atzner et Al., alors, le bénéfice de diversification est toujours positif. Embrechts et al. (2005) montrent que dans le cas de la VaR, le bénéfice de diversification n'est pas toujours positif.

Afin de prendre en compte le bénéfice de diversification dans l'allocation du capital en tarification d'un traité de réassurance non-vie, il faut déterminer comment ce traité diversifie le reste du portefeuille. Pour cela, il faut mesurer la dépendance entre les risques. Plus il y a de dépendance entre les risques plus la probabilité qu'ils subissent simultanément une perte est importante. La dépendance entre les risques réduit donc le bénéfice de diversification. La modélisation de la dépendance entre les risques est donc cruciale et a un impact notable sur les bénéfices de diversifications et par la suite sur la détermination du montant de capital alloué.

2.2.3.2 Les mesures de dépendance

Propriétés souhaitables pour les mesures de dépendance

Les propriétés désirables pour une mesure de dépendance δ entre les variables X, Y sont les suivantes :

- i. **Symétrie** : $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$, la loi jointe du vecteur (X, Y) est invariante par permutation des composantes.
- ii. **Normalisation** : $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$
- iii. **Comonotonie** : $\delta(X, Y) = 1$ si et seulement si X, Y sont comonotones
- iv. **Antimonotonie** : $\delta(X, Y) = -1$ si et seulement si X, Y sont antimonotones
- v. **Invariance** : Pour toute fonction T strictement monotone on a :

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) & \text{pour } T \text{ croissante} \\ -\delta(X, Y) & \text{pour } T \text{ décroissante} \end{cases}$$

Il existe trois principaux types de mesure de la dépendance : les mesures de dépendances linéaires, les mesures de dépendance de rang et les mesures de dépendance extrêmes.

Les mesures de dépendance linéaires

La mesure de la dépendance linéaire entre deux variables X, Y est donnée par le coefficient de corrélation de Pearson défini comme suit : $Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{(\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)})}$

avec $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X, Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Où $Cov(X, Y)$ et $V(X), V(Y)$ représentent la covariance entre X et Y et les variances de X et Y respectivement.

L'absence de corrélation s'exprime par $Corr(X, Y) = 0$. Dans le cadre d'une dépendance linéaire parfaite, $Y = aX + b$, ($a \neq 0, b \in \mathbb{R}$), le coefficient de corrélation est égal à ± 1 suivant le signe de a . Quelles que soient les constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ et $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, on a la relation suivante :

$$Corr(\alpha X + \gamma, \beta Y + \delta) = \alpha\beta Corr(X, Y)$$

Ainsi, la corrélation est invariante sous une transformation linéaire strictement croissante.

Limites du coefficient de corrélation

Le coefficient de corrélation de Pearson n'est défini que si $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ et $\sqrt{\mathbb{V}(Y)}$ sont finis et non nuls. Il s'agit d'un corollaire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui stipule que la corrélation ne peut pas dépasser 1 en valeur absolue. Ceci n'est pas idéal pour une mesure de dépendance et peut-être source de problèmes lorsque l'on travaille avec des distributions à queue épaisse.

L'indépendance entre deux variables aléatoires implique qu'ils ne sont pas corrélés mais la réciproque est, en général, fautive. En outre, $\text{corr}(X, Y) \approx 0$ ne signifie qu'il existe une faible dépendance entre les variables X et Y . La corrélation n'est pas invariante pour les transformations non linéaires strictement croissantes F_X et F_Y on a : $\text{corr}(X, Y) \neq \text{corr}(F_X(X), F_Y(Y))$

Les mesures de corrélation de rang de Kendall et de Spearman

Les mesures de corrélation des rangs calculent la relation entre les ensembles de données en comparant le rang de chaque valeur. Pour calculer le rang, les données sont classées en ordre croissant et reçoivent un numéro (rang) correspondant à leur position dans la séquence. Le tau de Kendall et le rho de Spearman sont les mesures de dépendances de rang les plus connues. Ce sont des mesures scalaires issues de la fonction de concordance. Afin de mieux cerner ces mesures de dépendance, il convient alors d'introduire les notions de concordance et de discordance.

Notions de concordance et de discordance

Définition : Soient (x_1, y_1) , (x_2, y_2) deux observations d'un vecteur aléatoire continu. Les paires d'observations (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont dites :

- Concordantes si : $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ ou $x_1 > x_2$ et $y_1 > y_2$ en d'autres termes si $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$
- Discordantes si : $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$ ou $x_1 > x_2$ et $y_1 < y_2$, de manière équivalente $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$
- Ni concordantes ni discordantes si : $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$

La différence entre les probabilités de concordance et de discordance entre deux vecteurs aléatoires (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) définit la fonction de concordance Q :

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (2.14)$$

Le tau de Kendall

Définition : Pour un vecteur de variables aléatoires continues (X, Y) avec une fonction de distribution jointe, le tau de Kendall noté τ est donné par :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (2.15)$$

Où (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) sont des variables aléatoires i.i.d de fonction de distribution jointe H . Le τ de Kendall mesure ainsi la différence entre les probabilités de concordance et de discordance de deux couples de variables aléatoires indépendants.

Propriétés : Le τ de Kendall possède les propriétés suivantes :

- $\tau \in [-1; 1]$
- $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$ autrement dit, le τ de Kendall est symétrique
- $\tau(f(X), g(Y)) = \tau(X, Y) \forall f, g$ deux fonctions $\in \mathbb{R}^+$, le τ de Kendall est donc invariant par transformations linéaires strictement croissantes
- $\tau = 1$ si X et Y sont comonotones
- $\tau = -1$ si X et Y sont antimonotones
- si X et Y sont indépendants alors $\tau = 0$ mais cependant la réciproque est fausse.

Le rhô de Spearman

Définition : Le coefficient de corrélation de Spearman correspond à la version non-paramétrique du coefficient de corrélation de Pearson. Ce coefficient noté ρ ou r_s a été développé par Charles Spearman (1904) et se définit de manière suivante : Soit (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) et (X_3, Y_3) trois vecteurs aléatoires de fonction de distribution jointe H.

$$\rho_s = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \quad (2.16)$$

Propriétés : Le coefficient de corrélation de Spearman prend ses valeurs entre -1 et +1 et s'interprète comme le coefficient de corrélation de Pearson

Les coefficients de dépendance de queue

Les coefficients de dépendance de queue sont des mesures de dépendance extrêmes qui quantifient la dépendance en queue de distribution. Ce sont des mesures de dépendance locales contrairement aux mesures de dépendance de rang présentées ci-avant. Nous distinguons deux types de coefficients de dépendance de queue :

- **Le coefficient de dépendance de queue inférieure** (*coefficient of lower tail dependency*) noté λ_L , qui mesure la dépendance entre des risques ayant une probabilité de survenance élevée.
- **Le coefficient de dépendance de queue supérieure** (*coefficient of upper tail dependency*) noté λ_U , qui mesure la dépendance entre des risques ayant une probabilité de survenance faible.

Définition : Soient X, Y deux variables aléatoires avec les fonctions de répartition respectives F_X et F_Y . Le coefficient of lower tail dependency de X et Y est donné par :

$$\begin{aligned} \lambda_L(X, Y) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha) | X \leq F_X^{-1}(\alpha)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{P(Y \leq F_Y^{-1}(\alpha), X \leq F_X^{-1}(\alpha))}{P(X \leq F_X^{-1}(\alpha))} \text{ à condition qu'il existe une limite } \lambda_L \in [0, 1]. \end{aligned}$$

De manière analogue, le « coefficient of upper tail dependency » λ_U est donné par :

$\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} P(Y > F_Y^{-1}(\alpha) | X > F_X^{-1}(\alpha))$, à condition que cette limite existe. λ_L et λ_U mesurent la probabilité limite que Y atteigne une valeur extrême conditionnellement au fait que X atteigne une valeur extrême.

Propriétés : X et Y sont dits asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si $\lambda_U \in [0, 1]$ et asymptotiquement indépendantes si $\lambda_U = 0$. De même, si $\lambda_L \in [0, 1]$, les v.a X et Y sont asymptotiquement dépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution. X et Y sont asymptotiquement indépendantes au niveau inférieur de la queue de la distribution si $\lambda_L = 0$. À noter que si l'indépendance des variables X et Y implique $\lambda_L = \lambda_U = 0$, la réciproque est en général fautive.

2.2.3.3 Modélisation de la dépendance par les copules

Une copule est un outil permettant de distinguer la structure de dépendance d'une distribution conjointe de variables aléatoires de leurs distributions marginales. Les copules ont été introduites par SKLAR (1959).

Définition : Une copule multivariée est une fonction de répartition $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ dont les marginales sont de loi uniforme standard. En dimension d , toute copule satisfait aux propriétés suivantes :

- $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_d) = 0$, la copule est égale à 0 si l'un des arguments est nul.
- $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ pour toute $i \in 1, \dots, d$ et $u_i \in [0, 1]$
- C est d -croissante c'est-à-dire $\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} \times C(x_{1i_1}, \dots, x_{di_d}) \geq 0$

Théorème de SKLAR : Soit $X^T = (X_1, \dots, X_d)$, un vecteur aléatoire ayant pour fonction de distribution jointe F . Alors, il existe une copule C telle que : $F(X_1, \dots, X_d) = C(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$. Où F_i représente i ème fonction de distribution marginale univariée avec $i = 1, \dots, d$.

Corollaire : Si les fonctions de distributions marginales sont continues alors la copule C est unique et est définie comme suit : $C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(X_1), \dots, F_d^{-1}(X_d))$. Où $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$ représentent les fonctions quantiles des marginales univariées F_1, \dots, F_d .

Le théorème de SKLAR est fondamental dans la théorie des copules. Toute distribution multivariée est déterminée uniquement par une copule et ses marginales. La fonction de répartition multivariée se décompose ainsi en deux parties, les marginales d'une part et la copule qui les relie d'autre part.

Propriétés des copules

- i. Toute marginale i -dimensionnelle d'une copule d -dimensionnelle est elle-même une i -copule.
- ii. Invariance par transformations strictement croissantes : Soit C une copule décrivant la dépendance du vecteur de variables aléatoires (X_1, \dots, X_d) . Si T_1, \dots, T_d sont des fonctions continues strictement croissantes, alors C décrit également la dépendance de $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$.

- iii. Toute copule est délimitée dans le sens suivant : $W(u) = \text{Max}(u_1 + \dots + u_d - (d - 1), 0) \leq C(u) \leq \text{Min}(u_1, \dots, u_d) = M(u)$ avec $u = (u_1, \dots, u_d)$ Où M et W sont appelées limites supérieures et inférieures de Fréchet-Hoeffding respectivement. La limite supérieure M représente elle-même une copule dite comonotone. Elle représente la copule de X_1, \dots, X_d si $F_1(X_1) = \dots = F_d(X_d)$ avec une probabilité égale à 1. Il existe alors une relation strictement croissante entre X_i et X_j pour tout $i \neq j$. En revanche, la limite inférieure W correspond à une copule uniquement en dimension $d=2$. Elle traduit alors une parfaite dépendance négative. W est dite copule contremonotone ou antimonotone.
- iv. Lorsque les variables sont indépendantes, la copule qui décrit leur structure de dépendance est dite indépendante et s'exprime comme suit : $\Phi(u) = \prod_{i=1}^d u_i, u \in [0, 1]^d$

Familles de copules

Il existe plusieurs familles de copules classées en fonction des propriétés qu'elles vérifient. Nous présentons ici les familles de copules les plus courantes.

Les copules elliptiques

Les copules elliptiques sont des copules dérivées de distributions elliptiques. Les distributions elliptiques sont notées par $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \Phi)$. Les copules elliptiques sont souvent utilisées dans les applications financières. Dans la famille des copules elliptiques deux exemples usuels sont la copule gaussienne et la copule de Student.

La copule gaussienne

Une copule est dite gaussienne lorsqu'elle s'exprime comme suit :

$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_M(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$ où Φ_M représente la fonction de répartition jointe d'un vecteur gaussien standard de dimension d et de matrice de corrélation M. Les marginales sont donc de loi normale centrée réduite et Φ^{-1} représente l'inverse de fonction de répartition.

La copule de Student ou t-copule

Une copule de student est une copule générée par une distribution multivariée de student. La t copule s'écrit : $C(u_1, \dots, u_d) = T_v(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_d))$ Où T_v représente la fonction de distribution jointe d'un vecteur aléatoire dont les marginales suivent une loi de student centrée réduite.

Les copules archimédiennes

Une copule est dite archimédienne lorsqu'elle s'exprime sous la forme :

$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi^{-1}[\Phi(u_1) + \dots + \Phi(u_d)] \forall 0 \leq u_1, \dots, u_d \leq 1$ et pour toute fonction continue Φ (souvent appelée générateur) $[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

- $\Phi(1) = 0$
- Φ est strictement convexe et décroissante.

Cela signifie que pour tout $t \in [0, 1]$, $\Phi'(t) < 0$ et $\Phi''(t) \geq 0$.

- Φ est monotone sur $[0, \infty)$

La copule de Clayton

La copule de Clayton est une copule asymétrique présentant une plus forte dépendance dans la queue de distribution

$$C(u) = \sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \text{ avec } \theta > 0 \quad (2.17)$$

La copule HRT (*Heavy Right Tail*)

La copule HRT correspond à la copule de survie de la copule de Clayton. En dimension 2, elle s'exprime comme suit :

$$C(u, v) = u + v - 1 + [(1 - u)^{\frac{-1}{a}} + (1 - v)^{\frac{-1}{a}} - 1]^{-a}; a > 0 \quad (2.18)$$

2.2.4 Agrégation linéaire vs agrégation par les copules

2.2.4.1 Agrégation linéaire

Cette approche consiste à agréger les risques à partir d'une mesure de dépendance linéaire. Considérons une société de réassurance ayant n secteurs d'activités, chacun faisant face à un risque de perdre X_1, \dots, X_n . La perte totale de la compagnie est alors égale à $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Notons : EC_1, \dots, EC_n les montants de capitaux correspondants respectivement aux risques X_1, \dots, X_n Λ la matrice de corrélations entre les risques X_i .

Pour rappel, $\Lambda_{i,j} = Cov(X_i, X_j) / \sqrt{\sigma^2(X_i)\sigma^2(X_j)}$. Le capital agrégé pour l'ensemble de l'entreprise est obtenu par la formule suivante :

$$EC = \sqrt{\sum_{ij} \Lambda_{i,j} EC_i EC_j} \quad (2.19)$$

L'hypothèse sous-jacente à cet agrégation est que (X_1, \dots, X_n) suit une distribution normale multivariée. Dans le cas particulier où les risques sont Co-monotones c'est-à-dire lorsque les événements extrêmes se produisent simultanément, le capital économique de l'entreprise correspond simplement à la somme des capitaux des risques individuels : $EC = \sum_{i=1}^n EC_i$

Bien qu'étant pratique et simple à comprendre, l'agrégation linéaire basée sur la corrélation linéaire ne permet pas de saisir la structure de dépendance entre les pertes provenant de divers secteurs d'activité. Les modèles d'agrégations basés sur les copules constituent une alternative permettant de capturer la structure de dépendance tout en la séparant des caractéristiques spécifiques des distributions marginales telles que l'épaisseur de la queue de distribution.

2.2.4.2 Agrégation basée sur les copules

Alors que l'agrégation linéaire ne requiert que la connaissance des mesures des risques individuels qui composent une entreprise, l'agrégation des risques basée sur les copules nécessite la connaissance des distributions de pertes liées aux différents secteurs d'activité. Ces distributions marginales sont ensuite agrégées à l'aide de copules afin d'obtenir une distribution jointe multivariée.

L'estimation des distributions jointes peut être décomposée en deux étapes :

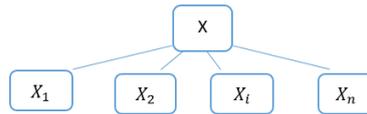
- Estimation des distributions marginales
- Définition de la structure de dépendance

En pratique, pour chaque risque X_1, \dots, X_n de fonction de répartition F_1, \dots, F_n nous allons simuler une variable aléatoire uniforme U_1, \dots, U_n .

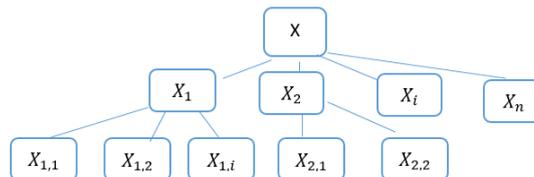
$$h = C(F_1(U_1), \dots, F_n(U_n))F_1^{-1}(h), \dots, F_n^{-1}(h)$$

Pour un ensemble de risques donné, il est possible de définir différentes structures de dépendance en spécifiant des copules différentes. Par exemple, si on cherche à capturer le fait qu'en situation de stress les pertes sur des risques différents ont tendance à subvenir simultanément, on choisira des copules présentant une dépendance en queue de distribution. L'agrégation basée sur les copules peut se faire par exemple au travers de structures de dépendance arborescentes. On distingue deux types de structures arborescentes :

Structure de dépendance horizontale : La décomposition des risques est faite à un seul niveau. Les risques agrégés se situent à la racine et les risques individuels constituent les feuilles ou nœuds extérieurs de l'arbre.



Structure de dépendance hiérarchique : La granularité ou la segmentation des risques dans ce type de structure est plus fine. A la racine de l'arbre se situe les risques agrégés du portefeuille qui se décomposent en sous risques situés dans les intérieurs de l'arbre qui eux-mêmes se subdivisent en d'autres sous risques



Lorsque nous disposons des distributions marginales de l'ensemble des risques, l'agrégation est faite suivant une approche bottom-up, en déterminant à chaque nœud de l'arbre la distribution jointe correspondante à l'aide d'une copule prédéfinie. Nous procédons de la même manière de nœud à nœud jusqu'à l'obtention de la distribution jointe de l'ensemble des risques agrégés. Une structure de dépendance hiérarchique conduit à une diversification plus importante qu'une structure de dépendance horizontale. La forme de l'arbre doit donc correspondre au profil de risque de l'entreprise et ne doit pas être sélectionnée de manière arbitraire. Une mauvaise spécification de la structure de dépendance peut conduire à sous-estimation ou à une surestimation importante du bénéfice de diversification.

Une fois la distribution jointe (X) de l'ensemble des pertes obtenue pour l'entreprise, le capital total est calculé en y appliquant la mesure de risque retenue suivant la formule $EC = \rho(X) - E(X)$

L'agrégation basée sur les copules permet de définir précisément la dépendance entre les distributions de pertes ce qui est crucial dans l'estimation des niveaux de risques. Cependant, cette méthode fait face aux limites suivantes :

- La plupart des méthodes d'agrégation basée sur les copules sont complexes et ne disposent pas de formules analytiques.
- La spécification des copules est abstraite et difficile à interpréter.
- L'agrégation de risques différents à l'échelle d'une entreprise requiert parfois l'utilisation de plusieurs copules dont l'estimation des paramètres peut s'avérer complexe et pas toujours robuste.

2.3 Allocation du capital

L'allocation du capital consiste à répartir le capital total K de l'entreprise, défini de manière exogène entre les différents sous portefeuilles. Autrement dit, à déterminer des nombres positifs K_1, K_2, \dots, K_n tels que $\sum_{i=1}^n K_i = K$, pour un portefeuille constitué de n risques. Allouer le capital entre les différents sous portefeuilles implique de définir :

- une mesure de risque permettant d'évaluer la dangerosité des risques et de comparer les lignes d'activités
- une méthode d'allocation du capital
- un modèle de dépendance entre les différents risques.

2.3.1 Les méthodes d'allocation du capital

Définition : Un modèle d'allocation du capital est un modèle qui permet d'allouer de façon efficiente les fonds propres entre différents secteurs d'activités ou lignes de métiers en prenant en compte les bénéfices de diversification ainsi que les dépendances entre les risques.

2.3.1.1 Propriétés souhaitables pour une méthode d'allocation du capital

- i. **Pas de sous allocation (No undercut)** : L'allocation du capital à toute ligne d'activité doit être au moins aussi grande que sa contribution marginale au capital globale mais ne peut être supérieure au capital estimé sur cette ligne d'activité sur base autonome. $\forall M \subseteq N, \sum_{i \in M} K_i \leq \rho(\sum_{i \in M} X_i)$
- ii. **Symétrie** : Si le risque porté par deux activités (tel qu'estimé par une mesure de risque) est identique, alors, le capital à allouer à chacune de ces activités doit être le même. Le principe de la symétrie permet de s'assurer que l'allocation du capital à un portefeuille dépend exclusivement de sa contribution au risque de la société.
- iii. **Allocation sans risque** : Le capital alloué à une activité sans risque doit être nul.
- iv. **L'allocation complète** : $\sum_{i \in N} K_i \leq \rho(\sum_{i \in N} X_i)$. Le capital doit être entièrement réparti entre les lignes de métier.

Une méthode d'allocation qui satisfait aux trois premières propriétés ci-dessus est dite cohérente. Si de plus la méthode d'allocation satisfait $K_i \geq 0, \forall i \in N$ alors l'allocation est dite non négative. La notion de cohérence est nécessaire pour garantir une allocation équitable et crédible.

2.3.1.2 La méthode d'allocation d'Euler

La méthode d'allocation d'Euler également connue sous le nom d'allocation par gradient est basée sur la notion d'allocation équitable entre les lignes de métiers, en partant du fait que chaque affaire doit bénéficier de l'effet de diversification.

Une description complète de cette approche peut être trouvée dans les travaux de Schmock et Straumann (1999) et dans ceux de Tasche (2004). Nous allons dans ce paragraphe en donner une définition sommaire. Comme son nom l'indique, la méthode d'allocation d'Euler est basée sur le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes. Aussi, il nous a semblé indiqué de l'introduire au préalable.

Définition : Une fonction différentiable $f : R^n \rightarrow R$ est dite homogène positive de degré $\tau \in R$ si $f(hw) = h^\tau f(w), w \in R^n \setminus 0, h > 0$

Théorème d'Euler : Soit $f : R^n \rightarrow R$ une fonction continûment différentiable. La fonction f est dite homogène positive de degré τ si et seulement si elle satisfait l'équation suivante :

$$\tau f_\rho(w) = \sum_{i=1}^n w_i \frac{(\partial f_\rho(w))}{(\partial w_i)}, w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in R^n \quad (2.20)$$

En se basant sur ce théorème, pour ρ une mesure de risque homogène de degré 1 et f_ρ une fonction continûment différentiable telle que $f_\rho = \rho(X)$, les contributions au risque $\rho(X_i|X)$ sont déterminées de manière unique telle que :

$$\rho_{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \rho}{\partial h}(X + hX_i)|_{h=0} = \frac{(\partial f_\rho)}{(\partial w_i)}(1, \dots, 1) \quad (2.21)$$

Les contributions au risque ainsi définies sont dites contributions d'Euler. L'allocation du capital suivant la méthode d'Euler consiste ainsi à affecter le capital aux sous-portefeuilles en calculant leur contribution d'Euler.

Remarque : La méthode d'allocation d'Euler satisfait la propriété d'allocation complète et on a $\rho(X) = \sum_{i=1}^n w_i \rho(X_i|X)$. L'intégralité du capital du portefeuille (ni plus ni moins) est allouée aux sous portefeuilles individuels. En général, il n'y a pas d'expressions analytiques pour $\rho(X)$ et $\rho_{Euler}(X_i|X)$. Les distributions de pertes X_i doivent être générées au moyen de simulations de Monte Carlo par exemple.

Le modèle SCOR d'agrégation des risques

Sommaire

3.1	Les caractéristiques du modèle	52
3.2	Les données du modèle	53
3.3	La modélisation de la dépendance	57
3.3.1	La décomposition hiérarchique du portefeuille	57
3.3.2	La structure de dépendance	58
3.3.3	Le choix de la copule	60
3.3.4	La calibration des paramètres de la copule	60

Dans le cadre des dispositions prudentielles dites solvabilité II, le groupe SCOR a opté pour un modèle interne total qui a été approuvé par l'ACPR en 2015. Ce modèle interne est basé sur le modèle développé pour le Swiss Solvency Test (SST). Il se décompose en cinq sous modèles :

- Un générateur de scénarios économique (ESG) qui a pour objet de modéliser les variables économiques exogènes susceptibles d'impacter aussi bien les actifs que les passifs.
- Un modèle pour l'investissement des actifs qui modélise la variation de valeur du portefeuille de placement du groupe SCOR.
- Un modèle pour la branche Vie qui agrège les risques afférents au passifs Vie
- Un modèle pour la branche Non-Vie agrégeant les risques liés aux passifs Non-Vie
- Un modèle consolidé qui en plus de la modélisation du risque de crédit sert à agréger les scénarios de l'ensemble des modules précédents afin d'obtenir des scénarios globaux.

SCOR global P&C représente la division Non-Vie du groupe SCOR. Nous allons nous concentrer ici uniquement sur le modèle d'agrégation des risques Non-Vie correspondant à celui de SCOR global P&C. Pour plus de précisions sur les autres modules du modèle interne, nous invitons le lecteur à se référer au SSTBOOK 2008.

3.1 Les caractéristiques du modèle

Nous allons dans ce paragraphe décrire les différents éléments qui sont considérés dans la construction du modèle.

Les risques agrégés

Le modèle Non-Vie sert à agréger les risques de souscription Non-Vie et à évaluer le montant du capital pour l'ensemble du portefeuille P&C vu comme une entité « solo » (*Standalone*). Les autres risques tels que le risque de crédit, le risque de marché le risque de souscription Vie ou le risque opérationnel sont modélisés à un autre niveau dans le modèle interne.

Pour rappel, le risque de souscription Non-Vie est constitué du risque de primes, du risque de réserves et du risque de catastrophes.

L'horizon de calcul

Le modèle interne SCOR suit une logique principalement bilancielle consistant à modéliser directement la distribution des postes du bilan. Au sein du modèle, le bilan économique est projeté d'un an à partir d'une date de référence donnée. En pratique, deux modélisations sont effectués par SCOR :

- Une première modélisation dont la date de référence correspond au 1er janvier de l'année en cours et qui sert notamment pour les calculs de solvabilité,
- Une seconde modélisation, qui elle débute au 1er janvier de l'année à venir et est utilisée pour le plan stratégique, l'optimisation du portefeuille et l'allocation du capital.

Le capital économique doit être évalué au début de l'année de référence notée t_0 . La date future marquant la fin de cette année est la date d'horizon et est notée t_1 . Pour refléter la valeur temporelle de l'argent, les valeurs futures sont actualisées à la date d'évaluation. Le facteur d'escompte appliqué entre la date t_0 et la date t_1 est noté v . Il est obtenu à partir des taux sans risque à la date t_0 . EC_0 représente le capital économique à la date 0 et EC_1 représente le capital économique à la date 1. Le changement de valeur économique est alors défini comme :

$$G = v \cdot EC_1 - EC_0 \quad (3.1)$$

EC_0 et v sont supposés connus à la date t_0 tandis que EC_1 est inconnu. Afin de prendre en compte l'incertitude sur EC_1 , le capital économique futur est modélisé comme une variable aléatoire. G qui représente le changement de valeur économique est ainsi stochastique.

La mesure de risque

Conformément à Solvabilité II, SCOR applique à G la VaR à 0.5% ce qui définit le capital requis avec un niveau de sécurité de 99.5%.

La variable aléatoire de base

L'évolution de la valeur économique de G telle que définie dans l'équation 4.1 est fonction des facteurs de risques F_i de l'entreprise tels que :

$$G = G(RF_1, \dots, RF_n) \quad (3.2)$$

Les facteurs de risque Non-Vie sont constitués des primes, des sinistres et des frais.

Ainsi, le risque est mesuré à travers le résultat technique qui est obtenu par la formule suivante :

$$\text{Résultat technique} = \text{Primes} - \text{Sinistres} - \text{Frais externes} \quad (3.3)$$

Les frais externes correspondent par exemple au courtage et aux commissions de réassurance (dans le cas de la réassurance proportionnelle). Il est important de noter que les frais internes (frais de gestion et d'administration) ne sont pas considérés ici.

3.2 Les données du modèle

Le modèle d'agrégation des risques Non-vie est basé sur des données, paramètres et sous-modules qui lui sont fournis en entrée comme illustré par la figure suivante :

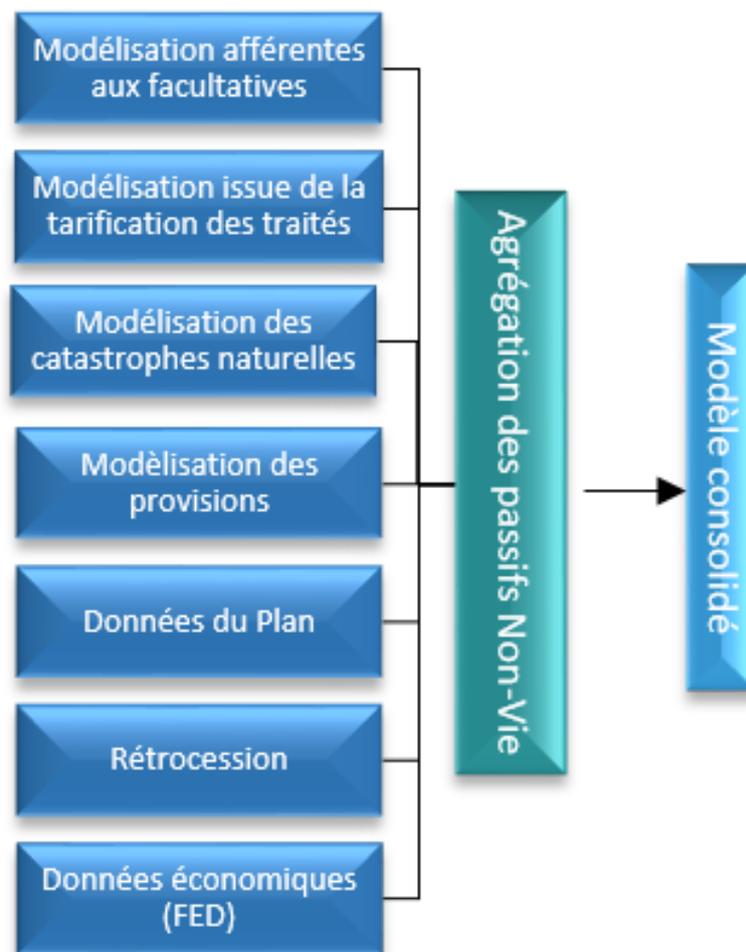


FIGURE 3.1 – Modules agrégation Non-Vie.

i. Données issues de la tarification des traités

Au moment de la souscription des contrats, le risque inhérent à ces derniers est modélisé dans l'outil de tarification. La distribution des pertes pour chaque contrat est modélisée suivant une approche sur expérience ou une approche sur exposition en fonction des données dont on dispose. Cette distribution peut être empirique ou ajustée par une loi dont on détermine les paramètres. Les pertes sont simulées par simulation de Monte Carlo en fonction des paramètres de la loi ajustant leur distribution. Ensuite, les termes et les conditions du traité sont appliqués à ces pertes simulées pour calculer la distribution de NPV et donc le résultat du traité. Pour chaque contrat tarifié, on dispose donc d'une distribution distincte de sinistres, de primes et de frais. La distribution des résultats escomptés définie à partir des distributions précédentes est également disponible. Ces données servent de base à la modélisation du risque de primes des traités hors catastrophes naturelles. Les traités Non-Vie analysés en tarification représentent environ 95% de la prime commerciale. Les 5% restants correspondent à de petits traités.

ii. Données issues de la modélisation des facultatives

L'approche retenue pour les « facultatives consiste à modéliser une distribution de perte agrégée pour tous les contrats facultatifs d'une « entité légale » du groupe SCOR et d'un segment d'activité donné. Cette approche nécessite un calibrage spécifique. Il ne s'appuie donc pas sur les travaux de tarification réalisés lors de la souscription. Afin de calibrer le risque de primes inhérents aux contrats facultatifs, les données utilisées sont telles que : des informations dérivées des dispositions contractuelles (primes commerciales, pertes maximum possibles), des informations sur la sinistralité observée (ratio de pertes historiques et sinistres graves), des informations économiques (indices d'inflation notamment) et actuarielles (indices de cycle de primes, cadences de développement). Pour chaque segment d'activité et pour chaque entité légale, les données suivantes sont produites :

- une distribution de pertes pour les sinistres dits attritionnels ;
- une distribution de perte de type « fréquence-sévérité » pour les sinistres dits de pointe
- des paramètres déterministes concernant les primes et frais futurs.

iii. Données issues de la modélisation des catastrophes naturelles

Les départements qui modélisent les catastrophes naturelles fournissent en entrée du modèle d'agrégation Non-Vie les distributions de primes ultimes, de sinistres et de frais des contrats, par zone de péril.

iv. Données issues de la modélisation des réserves Les équipes en charge du provisionnement du groupe fournissent, en entrée du modèle d'agrégation, le calibrage du risque de provisionnement à l'ultime, par ligne d'activité et par entité légale. Il s'agit concrètement de :

- La distribution des provisions
- La volatilité des réserves
- La répartition des réserves totales par type (IBNR, dossier-dossier), par année de souscription et par devises

- Les cadences de développement des primes, des sinistres payés et totaux par segment.

Afin de produire ces données, les équipes de provisionnement utilisent des méthodes principalement déterministes pour l'évaluation des Best Estimates (Chain-Ladder, Bornhuetter-Ferguson . . .) et des approches stochastiques pour l'estimation de la volatilité des réserves (Modèle de Mack, Bootstrap). Des jugements d'experts (par exemple, des ratios de $\frac{S}{P}$ fournis par les départements de tarification ou de souscription, benchmark de marché . . .) sont également exploités. Pour obtenir la distribution complète des provisions, une hypothèse de loi paramétrique en plus du Best Estimate et de l'écart-type est nécessaire. Le modèle interne offre la possibilité d'utiliser différentes lois de probabilité pour simuler les distributions de réserves, notamment les distributions lognormale, Gamma, Pareto, Frechet et Czeledin. La loi retenue par SCOR est la loi lognormale dont le choix est conforté par le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov.

v. **Données du plan** Les données du plan correspondent à des prévisions d'évolution du portefeuille pour les 12 prochains mois. Elles consistent en :

- Les primes futures attendues pour l'année de souscription
- L'évolution des affaires nouvelles suite à une variation des parts souscrites.
- L'évolution des affaires nouvelles due à une variation du volume de nouvelles affaires.
- Le ratio sinistres/primes prévisionnel
- Les frais prévisionnels
- Le bilan des réserves prévues en fin d'année

vi. **Données de rétrocession**

Les équipes en charge de la rétrocession, de la gestion de portefeuille et des analyses financières fournissent en entrée du modèle d'agrégation :

- La structure (termes et conditions) les acceptations de rétrocession externes
- Les primes payées dans le cadre de couvertures de rétrocession internes
- Les informations sur les primes non acquises et sur les sinistres

vii. **Données économiques**

Les données économiques utilisées dans le modèle sont :

- Les courbes de taux sans risques définies par Bloomberg à partir d'instruments de marchés liquides.
- Les taux de change des principales devises retenues par le modèle (EUR, USD, GBP, JPY, AUD, CHF). Ces devises couvrent une grande majorité des transactions et obligations de SCOR. Les autres devises sont transposées sur l'une des principales devises. Les flux sont convertis en utilisant un taux de change.

3.3 La modélisation de la dépendance

La dépendance est un facteur clé de la diversification. Une modélisation inappropriée de la dépendance conduirait à sous-estimer ou pire à surestimer le bénéfice de diversification et donc à une mauvaise évaluation du capital requis.

3.3.1 La décomposition hiérarchique du portefeuille

Le portefeuille Non-Vie est constitué de multiples risques. Il est impossible de modéliser la dépendance entre chaque risque individuel et l'ensemble du portefeuille. Des hypothèses simplificatrices sont donc nécessaires pour modéliser la dépendance au sein du portefeuille. En effet, pour calibrer la dépendance entre n risques il faut calibrer n^2 paramètres. Afin de réduire le nombre de paramètres à estimer, le portefeuille Non-Vie SCOR a été segmenté suivant une classification hiérarchique en une structure appelée arbre de dépendance. Tout d'abord, l'activité de SCOR global P&C est répartie en deux grands groupes qui sont les traités et les spécialités. Pour chaque groupe, les risques sont regroupés en sous portefeuilles aussi homogènes que possible.

Les granularités considérées sont les suivantes :

- Entités légales (SCOR Switzerland AG, SCOR Réassurance, ...)
- Lignes de métiers (Automobile, Incendie ...)
- Forme de réassurance (traités, facultatives)
- Type de couverture (proportionnel, non-proportionnel)
- Maturité de l'affaire (Run-off, nouvelles affaires, primes non-acquises)
- Autres

L'arbre de dépendance comprend plusieurs nœuds, chaque nœud correspondant à un niveau d'agrégation. L'étape de classification est cruciale car les segments définis ont un impact très important sur la dépendance et donc sur les bénéfices de diversification.

La définition des différents segments et leur composition est décidée principalement par le département de tarification en collaboration avec l'équipe de modélisation des risques. Le regroupement est fait de manière à avoir une dépendance plus forte aux niveaux les plus bas par rapport à celle des niveaux plus élevés dans l'arbre.

En partant du haut, nous avons d'abord une distinction entre LoBs, par exemple l'automobile ou l'incendie. Ainsi, le nœud supérieur dans l'arborescence d'agrégation décrit la dépendance entre les différentes LoBs. Nous avons ensuite la distinction entre les différentes entités juridiques de SCOR global P&C. Puis, nous avons la différenciation entre les maturités des affaires qui sont constituées de deux principales échéances, à savoir l'année de souscription actuelle (couvrant le risque de prime) et les réserves (couvrant le risque de réserves). Au niveau plus bas, les contrats de réassurance sont décomposés par forme de réassurance et par type de couverture. Enfin, au sommet de l'arbre de dépendance, l'agrégation des différents traités (ou certificats en cas de Facultatives) est effectuée.

Le graphique ci-dessous donne une représentation simplifiée de l'arbre de dépendance dans le cadre des traités de dommages et de responsabilités :

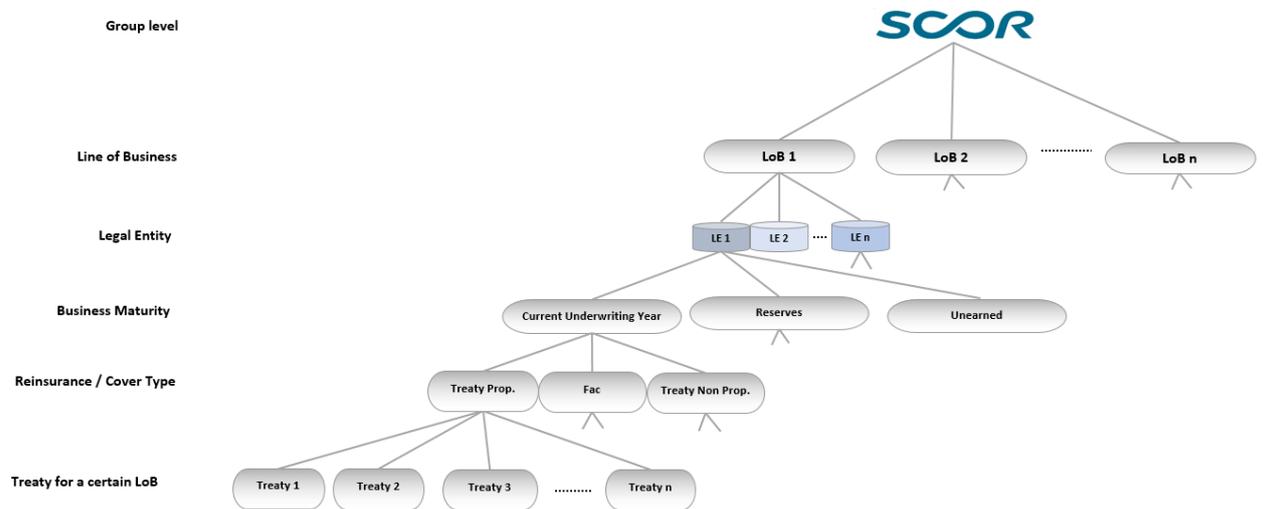


FIGURE 3.2 – Arbre de dépendance hiérarchique.

Une structure similaire caractérise l'agrégation des risques pour les spécialités (par exemple décennale, crédit-caution), avec un ordre légèrement différent des étapes d'agrégation.

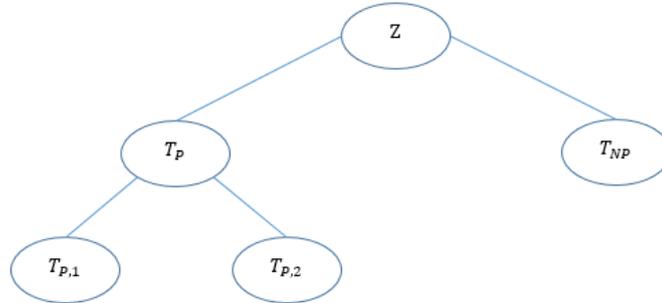
3.3.2 La structure de dépendance

La dépendance est modélisée au travers de l'arbre de dépendance hiérarchique décrite précédemment. Chaque branche de l'arbre correspond à un segment de modélisation unique. Les dépendances entre les risques sont décrites à partir de copules. Ainsi, une dépendance non linéaire est modélisée à chaque nœud de l'arbre de dépendance hiérarchique. Grâce à la structure de dépendance hiérarchique, il est nécessaire de spécifier uniquement les copules des distributions jointes à chaque niveau d'agrégation et non plus de spécifier les copules de chaque risque. Par ailleurs, une hypothèse d'indépendance conditionnelle est émise :

- D'une part entre les distributions de pertes agrégées d'un nœud à un autre
- D'autre part entre les distributions de pertes agrégées au sein d'un même nœud parent

Remarque : La dépendance est mesurée non pas à partir des distributions de résultats techniques mais à partir des distributions de sinistres car ces dernières représentent le facteur majeur de risque de ruine de l'entreprise.

Exemple : Considérons le portefeuille simplifié suivant :



Ce portefeuille est constitué de deux traités proportionnels et d'un traité non proportionnel dont les distributions de profits sont les variables aléatoires notées respectivement $T_{P,1}$, $T_{P,2}$ et T_{NP} . On cherche à déterminer la distribution jointe de ces trois traités.

Les fonctions de répartition de ces trois variables aléatoires sont données par :

- $F_{P,1}(t) = P[T_{P,1} \leq t]$
- $F_{P,2}(t) = P[T_{P,2} \leq t]$
- $F_{NP}(t) = P[T_{NP} \leq t]$

La structure de dépendance entre ces trois variables est définie en deux étapes :

- Modéliser la structure de dépendance du vecteur bivarié $(T_{P,1}, T_{P,2})$ à partir de la copule $C_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ telle que $P[T_{P,1} \leq t_1, T_{P,2} \leq t_2] = C_1[F_{P,1}(t_1), F_{P,2}(t_2)]$, avec $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$.

Nous obtenons ainsi la distribution de $(T_{P,1}, T_{P,2})$ qui représente la distribution des traités proportionnels $T_P = T_{P,1} + T_{P,2}$.

$F_P(t) = P[T_{P,1} + T_{P,2} \leq t] = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}\{t_{P,1} + t_{P,2} \leq t\} dC_1[F_{P,1}(t_{P,1}), F_{P,2}(t_{P,2})]$ pour $t \in \mathbb{R}$

- Modéliser dans une seconde étape la copule $C_2 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ du vecteur bivarié (T_P, T_{NP}) . $P[T_P \leq t_P, T_{NP} \leq t_{NP}] = C_2[F_P(t_P), F_{NP}(t_{NP})]$

Cela caractérise la distribution agrégée des traités proportionnels et non proportionnels

$Z = T_P + T_{NP} = T_{P,1} + T_{P,2} + T_{NP}$ tel que :

$$F_Z(t) = P[T_P + T_{NP} \leq t] = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}\{t_P + t_{NP} \leq t\} C_2[F_P(t_P), F_{NP}(t_{NP})]$$

Cette approche permet de combiner des copules de différentes familles et avec des paramètres différents.

3.3.3 Le choix de la copule

Deux types de copules se distinguent dans le modèle de dépendance :

- Des copules empiriques déduites des distributions marginales en entrée du modèle. Ces copules sont utilisées, par exemple, pour les segments dont les sinistres sont décrits par une distribution multivariée et qui constituent les fils d'un même nœud
- Des copules paramétriques dont le choix et la calibration des paramètres sont décrits dans ce qui suit.

Supposons que l'ensemble des distributions de pertes suivent une loi log normale. La loi log normale est couramment utilisée en assurance pour modéliser les distributions de sinistres. Les paramètres de la loi sont définis de manière à avoir un coefficient de variation égale à 1. La distribution jointe est estimée en utilisant différentes copules pour modéliser la structure de dépendance. Les copules analysées sont les suivantes :

- La copule de Student et la copule de Gauss qui appartiennent à la famille des copules elliptiques,
- la copule de Gumbel et la copule de Clayton qui sont quant à elles archimédiennes
- et enfin, la copule de survie de la copule de Gumbel et la copule HRT qui correspond à la copule de survie de la copule de Clayton.

Les copules retenues sont calibrés à partir du tau de Kendall. Afin de pouvoir effectuer des comparaisons cohérentes, la même valeur du tau de Kendall a été considérée pour l'ensemble des copules retenues. Cette valeur a été variée pour prendre en compte des dépendances plus ou moins fortes.

Le bénéfice de diversification a été estimé à partir de simulations de Monte Carlo du profit espéré du portefeuille Non-Vie, de la Value at Risk ainsi que de son Expected Shortfall aux seuils respectifs de 99.5% et de 99%. Les résultats de cette étude présentée en détail dans le papier de Michel Dacorogna, SCOR Paper 2010, *The Influencies of Risk measures and Tail dependancies on capital allocation* montrent que la copule HRT est la plus conservatrice en termes de bénéfice de diversification. La copule HRT garantie ainsi un choix prudentiel. Cette copule est par ailleurs asymétrique. Elle traduit moins de corrélation en queue de distribution gauche et davantage de corrélation sur la queue de distribution droite. Cela correspond mieux au profil de SCOR qui observe des dépendances croissantes dans ses distribution de pertes. Elle a l'avantage d'avoir, de même que la copule de Clayton, un seul paramètre à estimer. Et enfin, étant définie quelle que soit la dimension, cette copule peut être utiliser pour agréger plus de deux facteurs de risques simultanément. C'est donc la copule HRT qui a été retenue pour la modélisation de la dépendance au sein du portefeuille Non-Vie.

3.3.4 La calibration des paramètres de la copule

En réassurance, lorsqu'il s'agit de modéliser la dépendance entre les évènements extrêmes (qui sont rares par définition), on ne dispose généralement pas de suffisamment de données pour estimer les paramètres de dépendance par des méthodes statistiques standards.

Dès lors qu'il y a suffisamment de données, les paramètres de dépendance sont calibrés statistiquement dans le modèle Non-Vie. En l'absence de données on a recours à un processus appelé PROBEX (Prior Observation and Experts) basé sur un modèle bayésien, qui permet de calibrer la dépendance, de manière rationnelle en combinant plusieurs sources d'informations (Voir Davide CANESTRARO, Philipp ARBENZ, 2010).

Le Processus PROBEX

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire bivarié dont on suppose connues les distributions marginales $F(x)$ et $G(y)$. La distribution cumulative jointe peut être représentée à partir de l'expression $H(x, y) = (F(x), G(y))$ ou C est la copule unique qui relie les deux distributions.

Nous cherchons à estimer le paramètre Θ_0 de la copule C supposée connue et étant la copule HRT. Nous commençons par sélectionner une mesure de dépendance communément utilisée et qui peut être liée au paramètre de la copule. Calculer une estimation $\hat{\gamma}_0$ de la mesure de dépendance γ_0 conduit à une estimation de Θ_0 .

Trois sources d'information peuvent être combinées :

- Une densité à priori notée $\pi(\gamma)$, provenant par exemple des années précédentes ou des organismes de réglementation.
- N observations indépendantes des réalisations jointes de (X, Y) . ϑ représente l'ensemble des observations
- Les opinions de K experts donnant chacun une estimation ϕ_k de la mesure de dépendance. L'ensemble des estimations données par les experts est noté $\Psi\{\phi_k, k = 1, \dots, K\}$

La densité $\pi(\gamma)$ est remplacée par la densité à postérieure $\pi(\gamma|\vartheta, \varepsilon)$ de γ conditionnellement à ϑ et ε

D'après le théorème de Bayes, nous avons la relation suivante : $\pi(\gamma|\vartheta, \varepsilon)h(\vartheta, \varepsilon) = h(\vartheta, \varepsilon|\gamma)\pi(\gamma)$

Les hypothèses suivantes sont formulées :

- Les opinions d'experts et les observations sont indépendantes
- Les observations sont indépendantes entre elles
- Les experts forment leur opinion indépendamment les uns des autres

Sous ces hypothèses, la distribution à posteriori de la mesure de dépendance s'écrit :

$$\pi(\gamma|\vartheta, \varepsilon) \propto \pi(\gamma) \prod_{n=1}^N C(X_n, Y_n | g(\gamma)) \prod_{k=1}^K e_k(\phi_k | \gamma)$$

A partir de cette distribution à postérieure on peut :

- Estimer γ_0 à partir de l'expression $\hat{\gamma}_0 = E[\gamma|\vartheta, \varepsilon]$
- Mesurer l'incertitude de l'estimation à partir de $Var(\gamma|\vartheta, \varepsilon)$

En pratique, les experts répondent à des questions telles que : Sachant que Y dépasse le seuil d'un événement centenaire, quelle est la probabilité que X dépasse également ce seuil ? Cela revient à déterminer la probabilité dite QEP (quantile Exceedence Probability)

$$QEP_\alpha(X, Y) = P[X > VaR_\alpha(X) | Y > VaR_\alpha(Y)] \quad (3.4)$$

$$QEP_\alpha(X, Y) = \frac{(1 - C(\alpha, 1) - C(1, \alpha) + C(\alpha, \alpha))}{(1 - \alpha)} \quad (3.5)$$

3.3.4.1 L'agrégation des résultats techniques

La méthode d'agrégation des risques retenue dans le modèle Non-Vie est une méthode d'agrégation bottom-up. Les distributions de NPV sont agrégées de nœud à nœud du niveau le plus bas à la racine de l'arbre de dépendance. Soit n , un nœud donné de l'arbre de dépendance hiérarchique. Notons S_n , l'ensemble des segments de modélisation descendants de n . Le résultat technique X , agrégé au niveau du nœud est donné par : $X_n = \sum_{s \in S} X_s$ N échantillons aléatoires des distributions de résultats techniques de chaque segment s sont simulés à partir d'une simulation de Monte Carlo

$$x_s = \begin{pmatrix} x_s(1) \\ x_s(2) \\ \dots \\ x_s(N) \end{pmatrix}$$

Ces échantillons sont disposés dans une matrice, chaque colonne de la matrice correspondant à la distribution marginale d'un segment de modélisation. Afin de déterminer des échantillons de distributions jointes des marginales, les échantillons de chaque fils du nœud sont réordonnés conformément à la structure de dépendance hiérarchique définie précédemment. Le résultat de l'agrégation correspond à une permutation π_s des lignes $(1, \dots, N)$ de chaque segment de modélisation telle que : $x(\pi_s(i), s) = x_s \pi_s(i)$, $i = 1, \dots, N$ et $s \in S$

A titre illustratif, considérons le portefeuille simplifié présenté ci-avant, constitué de 2 traités proportionnels et d'un traité non-proportionnel. Nous avons vu que la dépendance dans ce portefeuille est décrite à l'aide de deux copules C_1 et C_2 avec :

$$(T_{P,1}, T_{P,2}) \sim C_1(F_{P,1}, F_{P,2})$$

$$(T_P, T_{NP}) \sim C_2(F_P, F_{NP}).$$

L'algorithme permettant d'agréger les résultats de ces portefeuilles commence par simuler indépendamment N échantillons aléatoires tels que :

- $T_{P,1}(i) \sim F_{P,1}$
- $T_{P,2}(i) \sim F_{P,2}$
- $U(i) = (U^1(i), U^2(i)) \sim C_1$

Avec $i = 1, \dots, N$

Des échantillons aléatoires de la distribution jointe de $(T_{P,1}, T_{P,2})$ sont obtenus en additionnant les échantillons de $T_{P,1}(i)$ et $T_{P,2}(j)$ en fonction des rangs observés dans l'échantillon de la copule.

Posons par exemple $N=3$ et simulons pour $i = 1, \dots, 3$ des échantillons i.i.d de :

- $T_{P,1}(i) \sim F_{P,1}$
- $T_{P,2}(i) \sim F_{P,2}$, indépendants des $T_{P,1}(i)$
- $U(i) \sim C_1$, indépendant des $T_{P,1}(i)$ et des $T_{P,2}(i)$

$T_{P,1}(i) \sim F_{P,1}$		$T_{P,2}(i) \sim F_{P,2}$		$U(i) \sim C_1$	
échantillon	rang	échantillon	rang	échantillon	rang
8.4	1	27.36	2	(0.4,0.7) \blacktriangledown	(2,3)
35.4	3	14.64	1	(0.1,0.3) \blacktriangledown	(1,1)
18.6	2	52.44	3	(0.7,0.4) \blacktriangledown	(3,2)

3 échantillons de T_P sont obtenus en sommant les échantillons réordonnés ou permutés de $T_{P,1}$ et de $T_{P,2}$ suivant le rang de la copule :

$$\begin{aligned}
 (18.6, 52.44) &\longrightarrow 18.6 + 52.44 = 71.04 \\
 (8.4, 14.64) &\longrightarrow 8.4 + 14.64 = 23.04 \\
 (35.4, 27.36) &\longrightarrow 35.4 + 27.36 = 62.76
 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une distribution agrégée pour les deux traités proportionnels.

$$T_P = \begin{pmatrix} 71.04 \\ 23.04 \\ 62.76 \end{pmatrix}$$

Considérons à présent les échantillons iid de :

- $T_P(i) \sim F_P$
- $T_{NP}(i) \sim F_{NP}$
- $U(i) \sim C_2$, indépendant des T_{NP} et des T_P .

La distribution agrégée globale est obtenue en sommant les échantillons réordonnés de $T_P(i)$ et $T_{NP}(i)$.

$T_P(i) \sim F_P$		$T_{NP}(i) \sim F_{NP}$		$U(i) \sim C_2$	
échantillon	rang	échantillon	rang	échantillon	rang
71.04	3	21.7	2	(0.5,0.9) \blacktriangledown	(2,3)
23.04	1	44.1	3	(0.2,0.7) \blacktriangledown	(1,2)
62.76	2	9.8	1	(0.6,0.4) \blacktriangledown	(3,1)

$$\begin{aligned}
 (62.76, 44.1) &\longrightarrow 62.76 + 44.01 = 106.86 \\
 (23.04, 21.7) &\longrightarrow 23.04 + 21.7 = 44.74 \\
 (71.04, 9.8) &\longrightarrow 71.04 + 9.8 = 80.84
 \end{aligned}$$

$$z = \begin{pmatrix} 106.86 \\ 44.74 \\ 80.84 \end{pmatrix}$$

Pour résumer, l'agrégation suit les étapes suivantes :

i. **Pré-agrégation des données de tarification et simulation de distributions discrètes** La pré-agrégation des contrats consiste à agréger suivant la structure de dépendance, les distributions marginales issues de leur tarification. Ainsi, les traités proportionnels seront agrégés entre eux d'un côté et les traités non proportionnels seront agrégés entre eux de l'autre.

ii. **Ajustements (Scalling) avec les données du plan**

Au moment du calibrage du modèle interne, l'ensemble des affaires de l'année en cours ne sont pas encore souscrites. Par ailleurs, l'ensemble des affaires souscrites ne sont pas tarifées dans l'outil de tarification. Nous ne disposons donc pas, pour ces traités, de distribution de NPV issue de la tarification. Nous procédons alors à des ajustements avec les données du plan de souscription pour prendre en compte d'une part, les affaires souscrites mais pas tarifées et d'autre part, pour prendre en compte les évolutions prévues dans le business plan pour l'année à venir. Ces évolutions peuvent être de deux sortes :

- Les évolutions en termes de nombres de risques souscrits (souscriptions de nouveaux risques ou résiliations de contrats)
- Les évolutions en termes d'engagements (augmentation ou diminution de part ou de capacité sur les contrats renouvelés).

iii. **Simulation de distributions jointes.** Les distributions jointes sont obtenues par simulation de Monte-Carlo.

iv. **Application de la rétrocession à chaque scénario brut.** La rétrocession étant une décision groupe, les bénéfices et les coûts de rétrocession ne sont pas alloués en tarification. Ils sont néanmoins pris en compte pour l'estimation du capital diversifié du groupe au niveau du modèle consolidé.

v. **Transformation de la vision ultime en vision à 1 an.** Les distributions marginales utilisées en entrée du modèle d'agrégation des risques Non-vie sont sur base ultime. En effet, d'un point de vue tarification et provisionnement, la vision ultime est plus naturelle. L'actuaire qui tarifie un traité n'évalue pas le risque sur un an mais le risque ultime (jusqu'à l'extinction de la garantie).

Par ailleurs, calibrer les dépendances sur vision ultime fait également plus de sens. Or, à des fins de solvabilité, les entreprises sont tenues de livrer une vision du risque dans les 12 prochains pour la détermination de leur SCR ainsi qu'une vision du risque dans toutes les années futures dont le coût représente la marge de risque. Les données du modèles sont donc transformées afin d'obtenir la vision du risque de l'entreprise à un an.

Le mécanisme de passage de la perte à l'ultime à la perte à un an s'appuie d'une part sur les cadences de charge de sinistres comme indicateur de l'information disponible sur le risque au cours d'une année civile donnée et sur la fréquence d'importants renforcements des provisions d'autre part. La méthodologie est l'aboutissement de recherches internes à SCOR dont les résultats sont présentés dans un article publié "Solvency capital estimation, reserving cycle and ultimate risk", A. Ferriero, Insurance : Mathematics and Economics, vol. 68 (2016), 162-168.

Le modèle SCOR d'allocation du capital en tarification des traités

Non-vie

Sommaire

4.1	Le modèle appliqué avant 2015	66
4.1.1	Approche d'allocation pour un traité proportionnel	66
4.1.2	Approche d'allocation pour un traité non proportionnel	67
4.1.3	Exemples d'application	68
4.1.4	Avantages et limites de cette méthode	69
4.2	le modèle révisé	69
4.2.1	Allocation du risque diversifié	71
4.2.2	L'équivalence entre les fonctions de diversification et la TVaR pondérée et simplification du modèle	76
4.2.3	La diversification avec la Vie	79
4.2.4	Ajustements à prendre en compte	80
4.2.5	Exemples d'application	83
4.2.6	Particularité de la méthode révisée d'allocation dans le cas d'un traité non-proportionnel	85

Avant l'acquisition de CONVERIUM, le groupe SCOR disposait d'une méthode d'allocation du capital basée sur l'écart-type. Depuis, dans un souci d'harmonisation, il a fallu adopter une méthode d'allocation du capital qui prendrait en compte l'ensemble des risques du nouveau portefeuille et qui serait commune à l'ensemble des entités. Cette méthode a été adoptée en 2015. Après avoir brièvement présenté l'ancienne méthode, cette partie sera consacrée à la présentation de la méthode retenue. Mais avant cela, il est important de noter que chez SCOR, le capital alloué en tarification correspond au capital immobilisé au titre du risque de crédit, du risque opérationnel et du risque de souscription. Le capital correspondant au risque de marché n'est pas alloué en tarification. Le capital associé aux risques induits par les investissements d'actifs n'est pas alloué même si ces investissements sont réalisés à partir des primes perçues. En contrepartie, les rendements excédentaires des investissements ne sont non plus alloués aux traités. Par ailleurs, la rétrocession étant une décision de groupe, le capital est alloué brut de rétrocession.

4.1 Le modèle appliqué avant 2015

L'approche d'allocation du capital présentée ici est celle qui était appliquée jusqu'en 2015, en tarification des traités Non-Vie, dans les Hub de Paris et de Singapour. Suivant cette méthode, le capital est alloué en fonction de la nature du contrat (proportionnelle ou non proportionnelle) ainsi que du segment de ligne de métier auquel il appartient. En proportionnel, n'importe quel sinistre impacte la réassurance alors qu'en non proportionnel seuls les sinistres très importants doivent être considérés. C'est la raison pour laquelle il a été décidé d'appliquer une formule d'allocation du capital différente suivant la nature du contrat.

La variable aléatoire de base

La variable aléatoire utilisée pour mesurer le risque et déterminer le montant de capital suivant cette méthode est la perte. La distribution de pertes est modélisée suivant l'une des approches présentées précédemment. Son espérance correspond à la perte attendue qui est utilisée en pratique dans les formules de calcul du capital.

La mesure de risque retenue

La mesure de risque retenue pour cette méthode est le rapport de l'écart-type à la perte attendue. Cela correspond au coefficient de variation également appelé écart-type relatif. Etant sans unité, le coefficient de variation va permettre de comparer des distributions de pertes ayant des moyennes très différentes. Cependant, plus la moyenne sera petite plus le coefficient de variation sera important. A noter que cette mesure de risque est appliquée uniquement aux traités non-proportionnels. Pour les traités proportionnels, le capital est alloué indépendamment du risque tel que nous verrons par la suite.

4.1.1 Approche d'allocation pour un traité proportionnel

Pour les traités proportionnels, le montant de capital alloué, noté TRAC (Time and Risk Adjusted Capital), est obtenu par la formule suivante :

$$TRAC = f \times DEL \tag{4.1}$$

Avec :

- DEL (Discounted Expected Loss), le sinistre attendu escompté avec la courbe des taux d'intérêts associée à la devise du traité.
- f , un paramètre défini en fonction de la LoB à laquelle appartient le traité suivant une clé de répartition mis en place sur avis d'experts.

Ainsi, plus la perte attendue escomptée sera importante plus le capital alloué sera important. Aucune mesure de risque n'est considérée ici.

Le tableau ci-dessous présente le facteur f retenu pour une liste non exhaustive de LoB donnée :

LOB	Facteur f
Automobile	0,40
Incendie et éléments naturels	0,65
Responsabilité civile générale	0,98
Crédit/Caution	0,57
Bris de machine	1,17
Décennale	0,91
Marine et transports	1,29
Catastrophes naturelles	1,73
Autres dommages aux biens	0,77

4.1.2 Approche d'allocation pour un traité non proportionnel

Pour les traités non-Proportionnels, l'allocation du capital en tarification est faite selon la formule suivante :

$$TRAC = DEL \times \text{Max}(\text{Min}(M; \frac{\sigma}{EL} \times A); m) \quad (4.2)$$

Où :

- DEL (*Discounted Expected Loss*) : représente la perte attendue escomptée
- EL (*Expected Loss*) : représente la perte ultime attendue
- σ : écart-type ou volatilité des pertes.
- M : Ratio maximum de capital alloué applicable
- m : Ratio minimum de capital alloué applicable
- A : Ratio moyen de capital alloué
- $\frac{\sigma}{EL}$ représente le coefficient de variation.

A, M et m sont des paramètres prédéfinis en fonction de la LoB à laquelle appartient le traité. En effet, comme évoqué ci-avant, plus la perte attendue EL est petite plus le rapport $\frac{\sigma}{EL}$ est important et inversement, d'où l'importance d'encadrer le ratio de capital alloué par un minimum et un maximum.

Le tableau ci-dessous présente les paramètres A, M et m pour une liste non exhaustive de LoB donnée :

LOB	A	M	m
Automobile	1,42	2,55	1,09
Incendie et éléments naturels	0,49	1,77	0,64
Responsabilité civile générale	2,04	4,27	1,46
Crédit/Caution	0,44	1,30	0,52
Bris de machine	0,53	1,67	0,67
Décennale	1,61	2,70	1,17
Marine et transports	0,64	2,02	0,49
Catastrophes naturelles	0,51	12,86	1,03
Autres dommages aux biens	0,49	1,77	0,64

4.1.3 Exemples d'application

4.1.3.1 Cas d'un traité proportionnel

Reprenons l'exemple de la cédante fictive A dont le programme quote-part a été analysé au chapitre 1. Le capital alloué à ce programme suivant cette méthode est donné dans le tableau suivant :

Prime de base	37 884 376
Perte attendue (EL)	31 014 830
Ratio sinistres/primes	81,9%
Perte attendue escomptée (DEL)	30 849 550
Ecart-type des pertes	2 499 236
Capital alloué (TRAC)	12 339 820
Coût du capital	1 165 512

Le capital de 12.3M représente environ 40% de la perte attendue escomptée. Ces 40% correspondent au facteur f et dépendent uniquement de la branche et de la nature proportionnelle du traité. Ils ne prennent aucun facteur de risque en compte.

4.1.3.2 Cas d'un traité non-proportionnel

Considérons à présent la Cédante B dont la cotation du programme non-proportionnel est également présentée au chapitre 1.

En appliquant la méthode d'allocation basée sur le coefficient de variation et la perte attendue escomptée, nous obtenons les résultats suivants :

Perte attendue (EL)	1 065 956
Taux d'escompte	5%
Perte attendue escomptée (DEL)	1 012 658
Ecart-type des pertes	915 269
Capital alloué (TRAC)	1 236 223
Coût du capital	116 763
Frais internes	218 588
Frais externes	10%
Prime technique	1 497 788

Le capital alloué ici est fonction de l'écart-type des pertes, du facteur d'escompte mais également de la branche à laquelle appartient le traité. Pour rappel, plus l'écart-type est élevé, plus le capital alloué sera important. Le coût du capital représente la même proportion du capital alloué en proportionnel et en non-proportionnel. Cette proportion correspond aux objectifs de rentabilité de l'entreprise.

4.1.4 Avantages et limites de cette méthode

- Cette méthode est facile à comprendre et à mettre en œuvre.
- Cette méthode n'est pas fonction du risque pour les traités proportionnels et ne prend en compte que partiellement le risque en non-proportionnel.
- La diversification n'est pas bien prise en compte.
- La méthode n'est pas adéquate pour les distributions à queue épaisse.

4.2 le modèle révisé

Nous allons, dans cette partie, présenter le modèle retenu pour allouer le capital en tarification dans l'ensemble de SCOR global P&C. Ce modèle repose sur le principe que le montant de capital alloué doit croître avec :

- Le niveau de risque inhérent au traité,
- La dépendance des résultats du traité avec le reste du portefeuille,
- La durée nécessaire pour le développement à l'ultime de l'affaire.

Cette méthode s'applique indifféremment de la nature du traité.

La variable aléatoire de base

La variable aléatoire de base qui sert à mesurer le risque, suivant cette méthode, est le résultat technique. Le résultat technique comme défini précédemment représente la valeur actualisée des *cash flows* futurs, escomptés à partir de la courbe des taux d'intérêts correspondant à la monnaie et à la durée du contrat. Il s'agit de la même variable utilisée pour l'agrégation des risques Non-Vie, à la différence près qu'ici, les frais internes sont inclus.

$$\text{NPV} = \text{Primes} - \text{Sinistres} - \text{Frais internes} - \text{Frais externes} \quad (4.3)$$

Le choix du résultat technique plutôt que la distribution de pertes est plus en adéquation avec le modèle d'agrégation des risques non vie. Par ailleurs, pour certains contrats de réassurance, les primes facturées à la cédante ainsi que les frais payés sont très sensibles aux pertes. Ainsi, des pertes plus importantes entraîneront des primes plus élevées et/ou des frais moins importants. Des exemples typiques sont les clauses de reconstitutions, les profits commissions dégressifs etc. Cette sensibilité des primes et des frais aux pertes conduit à une réduction de la volatilité du résultat du contrat qui ne serait pas prise en compte si nous considérons la distribution des pertes. En outre, la sensibilité des primes aux pertes est souvent non-linéaire.

La mesure de risque

Dans le cadre de ce modèle, le choix de la mesure de risque s'est porté sur la TVaR au seuil de 1%. Ce choix s'explique par les propriétés particulières de la TVaR qui sont :

- Une mesure cohérente au sens d'Artzner et Al. Cette propriété est importante dans le sens où une allocation n'est cohérente que si la mesure de risque sous-jacente est elle-même cohérente.
- Une mesure basée sur la queue de la distribution du résultat, les événements extrêmes étant ce qui nous intéressent particulièrement ici.
- Une estimation du risque plus conservatrice que la VaR En fonction de la forme de la distribution, au seuil de 1%, la TVaR correspond approximativement à un événement tous les 150-250 ans.
- Un résultat facile à expliquer.

En appliquant la TVaR à 1% à la distribution de NVP d'un contrat ou d'un portefeuille on obtient son risque non diversifié. Le risque non diversifié correspond au risque de ce contrat ou du portefeuille sur base solo (standalone), avant application du bénéfice de diversification.

Le choix de la méthode d'allocation

La méthode adoptée ici pour mesurer la contribution d'un traité au risque de l'entreprise est la méthode d'allocation d'Euler. Le choix de cette méthode se justifie de plusieurs manières :

- Tasche [2000] soutient par le biais de mesure de la performance que les contrats qui contribuent de manière positive au résultat du portefeuille doivent être récompensés alors que ceux qui contribuent de manière négative doivent être pénalisés.
- Cette méthode couplée avec la TVaR est une méthode d'allocation cohérente.
- De plus, d'après Denault, c'est la seule méthode d'allocation qui est compatible avec le RORAC.
- Par ailleurs, de nombreuses méthodes d'allocation du capital couramment utilisées en pratique, convergent vers la méthode d'allocation d'Euler.

4.2.1 Allocation du risque diversifié

Le risque diversifié d'un traité ou d'un portefeuille désigne sa contribution à la TVaR du portefeuille Non-Vie P&C. En pratique, le capital est alloué en tarification en deux étapes :

- La première consiste à définir le capital diversifié de chaque segment tel que la somme des capitaux alloués aux différents segments égalise le capital du portefeuille non-vie : Allocation top-down
- Ensuite, dans une seconde étape, on définit le capital diversifié de chaque traité tel que la somme des capitaux alloués aux traités égalise le capital du segment auquel ils appartiennent : Allocation bottom-up.

Notations

Soit Z la variable aléatoire représentant la distribution de NPV du portefeuille Non-Vie de SCOR. Comme décrit dans la structure de dépendance, le portefeuille Non-Vie est segmenté est en N sous-portefeuilles ou segments disjoints. On note :

- S_i la variable aléatoire désignant la distribution de NPV du segment i . Les segments S_i satisfont $\bigcup_i S_i = 1, \dots, N$.
- $T_{i,j}$ la variable aléatoire désignant la distribution de NPV du traité j , $j \in 1, \dots, M_i$. Chaque traité est affecté à un et un seul segment.
- $T_{i,j} S_i Z$
- F_Z : la fonction de répartition de Z
- F_{S_i} : la fonction de répartition de S_i
- $F_{T_{i,j}}$: la fonction de répartition de $T_{i,j}$
- $K(S_i, Z)$: le capital diversifié du segment S_i
- $K(T_{i,j}, Z)$: le capital diversifié du traité $T_{i,j}$

4.2.1.1 Le capital diversifié d'un segment : Allocation *bottom-up*

Le capital diversifié d'un segment défini à partir de la méthode d'allocation d'Euler combinée à la TVaR s'écrit :

$$K(S_i, Z) = TVaR(S_i|Z) = \frac{\partial TVaR(Z+hS_i)}{\partial h} \Big|_{h=0} = E(S_i|Z \leq VaR_\alpha(Z)) = -E[S_i|Z \leq F_z^{-1}(\alpha)]$$

Et on a :

$$TVaR_\alpha(Z) = E[Z|Z \leq VaR_\alpha(Z)] = E\left[\sum_{i=1}^N S_i | Z \leq VaR_\alpha(Z)\right] \quad (4.4)$$

Cela revient à définir une fonction de répartition ajustée $F_{S_i}^*$ de la distribution de NPV pour chaque segment qui prenne en compte le bénéfice de diversification. Cette fonction de répartition ajustée est obtenue par distorsion des distributions de probabilités initiales à l'aide de fonctions spécifiques appelées fonctions de diversification et notées $H_{S_i, Z}$.

$$\begin{aligned} H &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ F_{S_i} &\rightarrow F_{S_i}^* \\ F_{S_i}^* &= H_{S_i, Z} \circ F_{S_i} \end{aligned}$$

Le risque diversifié du segment S_i correspond alors à la TVaR au niveau $\alpha = 1\%$ de la nouvelle fonction de répartition $F_{S_i}^*$. Et on a :

$$KS_{i, Z} = -E[S_i/Z \leq F_{z(1\%)}^{-1}] = -E[S_i/S_i \leq F_{S_i(1\%)}^{*-1}]$$

Il reste alors à définir les fonctions de diversification $H_{S_i, Z}$. La méthode utilisée est une approche top down dans la mesure où les fonctions $H_{S_i, Z}$ sont déterminées à partir de la distribution de NPV agrégée du portefeuille non vie.

Nous avons vu que les dépendances au sein du portefeuille sont décrites par des copules HRT qui sont définies à chaque nœud de l'arbre de dépendance hiérarchique.

Considérons $C_{S_i, Z} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$, la copule entre S_i et Z . La fonction de distribution jointe de (S_i, Z) s'écrit

$$F_{S_i, Z} = C(F_{S_i}(b_i), F_Z(z)).$$

Soient u, v deux variables uniformes. On a :

$$u, v \rightarrow C_{S_i, Z}(u, v) = P(S_i \leq F_{S_i}^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(v))$$

En différentiant cette expression par rapport à u et v respectivement on obtient :

$$\frac{\partial C_{S_i, Z}}{\partial u}(u, v) = P(Z \leq F_Z^{-1}(v) | S_i = F_{S_i}^{-1}(u)) \frac{\partial C_{S_i, Z}}{\partial v}(u, v) = P(S_i \leq F_{S_i}^{-1}(u) | Z = F_Z^{-1}(v))$$

La fonction de diversification $H(S_i, Z) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} H(S_i, Z) &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ u \rightarrow H_{S_i, Z}(u) &= P(S_i \leq F_{S_i}^{-1}(u) | Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)) = \frac{P(S_i \leq F_{S_i}^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(\alpha))}{P(F_Z^{-1}(\alpha))} = \frac{C_{S_i, Z}(u, \alpha)}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{1}{100} = 1\%$$

4.2.1.2 Le capital diversifié d'un traité : Allocation top-down

Le capital diversifié d'un traité $K(T_{i,j}, Z)$ correspond à sa contribution au résultat global du portefeuille. $K(T_{i,j}, Z)$ est fonction du risque individuel du traité et de sa dépendance avec le reste du portefeuille. Le risque d'un traité est donné par la fonction de distribution (simulée) de la valeur actuelle nette de son résultat.

La contribution d'un traité au risque global de l'entreprise est donnée par :

$$K(T_{i,j}, Z) = E[T_{i,j} | Z \leq VaR_\alpha(Z)] = -E[T_{i,j} | Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)] \quad (4.5)$$

De même que pour la détermination du capital diversifié, cela revient à définir des fonctions de diversifications $H(T_{i,j}, Z)$ permettant de distordre la fonction de répartition de la distribution de NPV du traité $T_{i,j}$. De même que précédemment, on dérive $H_{T_{i,j},Z}$ de la copule entre le traité $T_{i,j}$ et le portefeuille Z .

Nous avons : $H_{T_{i,j},Z} = \frac{(C_{T_{i,j},Z}(u,\alpha))}{\alpha}$

Cependant, pour un portefeuille avec des milliers de traités, la détermination de $C_{T_{i,j},Z}$ est loin d'être triviale. Par conséquent, nous définissons un niveau intermédiaire avec les segments S_i à partir de la relation : $C_{T_{i,j},Z} = C_{T_{i,j},S_i} \times C(S_i, Z)$.

Nous formulons l'hypothèse suivante :

$$P(T_{i,j} \leq t | S_i = s_i, Z \leq z) = P(T_{i,j} \leq t | S_i = s_i).$$

La dépendance du traité avec le reste du portefeuille dépend du segment de sous-portefeuille auquel il appartient. Par ailleurs, la somme des capitaux alloués à l'ensemble des traités constituant un segment doit équilibrer le capital de ce segment.

$$TVaR_{1\%}(Z) = E[Z | Z \leq VaR_{1\%}(Z)] = E[\sum_{i=1}^N S_i | Z \leq VaR_{\alpha}(Z) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} E[T_{i,j} | Z \leq VaR_{\alpha}(Z)]]$$

$$K(T_{i,j}, Z) = -E[T_{i,j}/Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)] = -\int_{-\infty}^{+\infty} t f_{T_{i,j}/Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)}(t) dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{T_{i,j}/Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)}(t)$$

Avec $f_{T_{i,j}/Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)}$ la densité de probabilité de la variable aléatoire $T_{i,j}/Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)$ et $F_{T_{i,j}/Z \leq F_Z^{-1}(\alpha)}$ sa fonction de répartition.

$$K(T_{i,j}, Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} t dP(T_{i,j} \leq t | Z \leq F_Z^{-1}(\alpha))$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} t dP(T_{i,j} \leq F_{T_{i,j}}^{-1}(t) | Z \leq F_Z^{-1}(\alpha))$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} t dH_{T_{i,j},Z}(t)$$

Pour tout $u \in [0, 1]$:

$$H_{T_{i,j},Z}(u) = P(T_{i,j} \leq F_{T_{i,j}}^{-1}(u) | Z \leq F_Z^{-1}(\alpha) = \alpha^{-1} P(T_{i,j} \leq F_{T_{i,j}}^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(\alpha))$$

$$H_{T_{i,j},Z}(u) \Leftrightarrow \alpha^{-1} \int_0^1 P(T_{i,j} \leq F_{T_{i,j}}^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha) | S_i = F_{S_i}^{-1}(v)) dv$$

$T_{i,j}$ et Z sont indépendants conditionnellement à S_i . En d'autres termes : compte tenu du résultat de la LoB S_i , les informations supplémentaires sur les résultats de Z ne modifient pas la distribution des profits des traités $T_{i,j}$ dans S_i .

$$H_{T_{i,j},Z}(u) = \alpha^{-1} \int_0^1 P(T_{i,j} \leq F_{T_{i,j}}^{-1}(u) | S_i = F_{S_i}^{-1}(v)) P(Z \leq F_Z^{-1}(\alpha) | S_i = F_{S_i}^{-1}(v)) dv$$

$$= \alpha^{-1} \int_0^1 \frac{\partial C_{T_{i,j},S_i}}{\partial v}(u, v) \frac{\partial C_{S_i,Z}}{\partial v}(v, \alpha) dv$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial C_{T_{i,j},S_i}(u,v)}{\partial v} dH_{S_i,Z}(v) dv$$

Où $C_{T_{i,j},S_i}$ représente la copule HRT de paramètre $\Theta_{T_{i,j}}$.

$H_{T_{i,j},Z}(u)$ peut être approximée par l'expression suivante :

$$H_{T_{i,j},Z}(u) \approx \sum_{l=1}^L \frac{(C_{T_{i,j},S_i}(u,v_{l+1}) - C_{T_{i,j},S_i}(u,v_l))}{(v_{l+1} - v_l)} (H_{S_i}(v_{l+1}) - H_{S_i}(v_l))$$

où $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_L = 1$ est une décomposition de l'intervalle $[0,1]$.

Ainsi, la contribution au risque du traité devient : $K(T_{i,j}, Z) = \int_0^1 F_{T_{i,j}}^{-1}(u) dH_{T_{i,j}}(u).$ *

Les modèles de dépendance ainsi que les fonctions de diversification entre les traités et les segments sont définies lors de l'agrégation des risques, à partir des données du renouvellement précédent et des évolutions prévues dans le business plan pour l'année à venir. Par ailleurs, le résultat technique agrégé ne prend pas en compte les frais internes alors que le résultat technique utilisée pour l'allocation du capital en tarification les inclus. Pour toutes ces raisons, les paramètres de dépendance définis à partir du résultat technique hors frais internes et ajusté au plan, ne sont pas directement applicables en tarification. Certains ajustements sont nécessaires au préalable.

Notons :

- $T_{i,j}^t$ un traité tarifé à la date t.
- S_i^t : une LoB à la date t
- $S_i^t = S_i^{t-1} + \Delta_\delta T_{i,j}^t$ où Δ_δ représente la variation du traité $T_{i,j}^t$ dans le portefeuille par rapport à l'année précédente. Cette variation peut être en part ou en volume.

En théorie la dépendance entre $T_{i,j}^t$ et S_i^t s'exprime à partir de la copule $T_{i,j}^t, S_i^t$

$$\begin{aligned} C_{T_{i,j}^t, S_i^t}(u, u) &= \int_0^u \partial_{T_{i,j}^t} C_{T_{i,j}^t, S_i^{t-1}}(x, F_{S_i^{t-1}}(F_{S_i^t}^{-1}(u) - F_{T_{i,j}^t}^{-1}(x))) dx \\ &= \int_0^u P[S_i^{t-1} \leq (F_{S_i^t}^{-1}(u) - F_{T_{i,j}^t}^{-1}(x)) | T_{i,j}^t = F_{T_{i,j}^t}^{-1}(x)] dx \end{aligned}$$

Cependant, la dépendance entre un traité à la date t et la LoB à laquelle il appartient à la date $t - 1$, décrite par $C_{T_{i,j}^t, S_i^{t-1}}(u, v)$, est inconnue.

L'ensemble des traités à la date t n'ayant pas encore été agrégés, $F_{S_i^t}$ ainsi que son inverse $F_{S_i^t}^{-1}$ sont inconnues.

La solution adoptée est la suivante :

Pour chaque segment S_i , quelle que soit la date, il existe une portion infinitésimale de traité $T_{i,j}^0$ pour laquelle on peut approcher $C_{T_{i,j}^0, S_i} = C_{T_{i,j}^0, S_i^{t-1} + \Delta_\delta T_{i,0}^t} \cong C_{T_{i,j}^0, S_i^{t-1}}$

Cette approximation repose sur l'hypothèse que si un traité est suffisamment petit, l'ajouter ou le retirer à un segment aura peu d'impact sur le résultat global de ce segment.

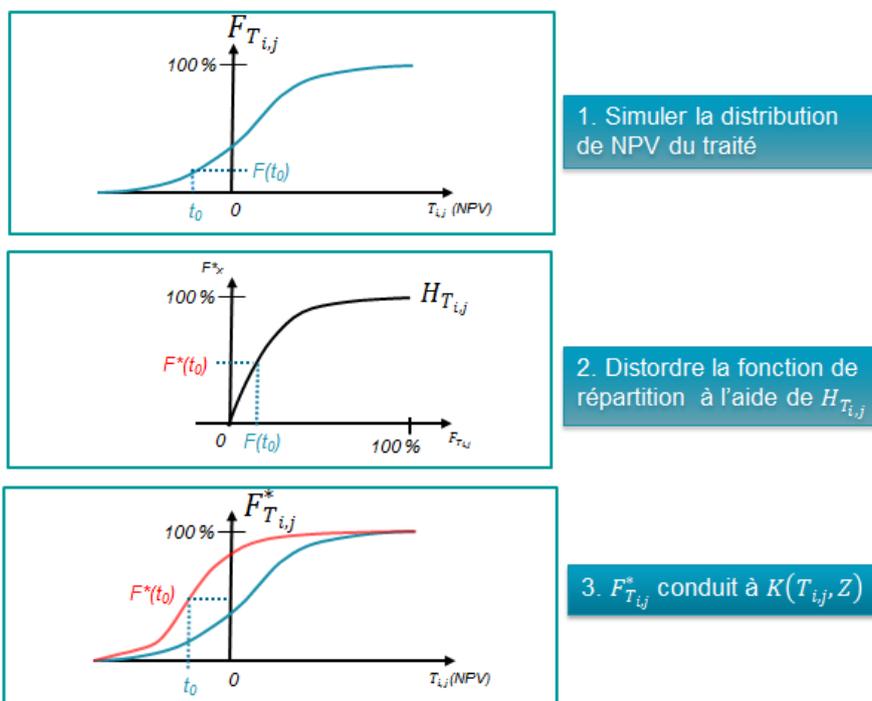
En $t - 1$, pour chaque segment S_i , un paramètre initial Θ_0 est défini pour la copule HRT qui reflète la dépendance entre le traité infiniment petit et ce segment. $C_{T_{i,j}^0, S_i} = C_{T_{i,j}^0, S_i}^0$

Pour chaque traité, $C_{T_{i,j}^0, S_i}$ est ramené à $C_{T_{i,j}, S_i}$.

La modification du paramètre de dépendance $\Theta_{T_{i,j}}$ (entre le traité et le segment auquel il appartient) induit par la duplication dans le segment est appelée correction de volume. La copule HRT avec un paramètre $\Theta_{T_{i,j}}^c$ corrigé de l'effet volume est donnée par l'expression suivante :

$$C^{\Theta_{T_{i,j}}^c}(u, v) = P[S_i + T_{i,j} < F_{S_i + T_{i,j}}^{-1}(u), T_{i,j} \leq F_{T_{i,j}}^{-1}(v)] \approx C^{\Theta_{T_{i,j}}}(F_{S_i}(F_{S_i}^{-1}(u) - F_{T_{i,j}}^{-1}(v)), v)$$

L'effet volume est fonction de la taille du traité par rapport à la taille du segment auquel il appartient. Ainsi, l'effet volume est insignifiant dans les segments importants et élevé dans les petits segments. Les graphiques suivants résument la détermination du capital diversifié d'un traité :



4.2.2 L'équivalence entre les fonctions de diversification et la TVaR pondérée et simplification du modèle

Le calcul du risque diversifié d'un traité tel que présenté précédemment est mathématiquement très complexe et consommateur de temps. L'un des objectifs de ce mémoire a été de réfléchir à une manière d'approcher ce calcul par une expression simplifiée. J'ai ainsi participé à un groupe de travail en vue d'aboutir à une solution plus simple, plus transparente et plus rapide à mettre en oeuvre.

4.2.2.1 Equivalence entre fonctions de diversification et TVaR pondérée

Nos travaux apportent la preuve que l'intégral des quantiles pondérés d'une distribution (la fonction de diversification d'une distribution) est équivalente à l'intégral des TVaR pondérées de cette distribution.

Nous allons donc démontrer l'équivalence suivante :

$$\int_0^1 F^{-1}(p)dH(p) = \int_0^1 TVaR(\alpha)dQ(\alpha)$$

Où $F^{-1}(\cdot)$ est l'inverse généralisée de la fonction de répartition $F(x) = P[X \leq x]$ d'une variable aléatoire X .

La TVaR(α) au seuil α est donnée par :

$$TVaR(\alpha) = 1/\alpha \int_0^\alpha F^{-1}(p)dp.$$

Nous pouvons réécrire $\int TVaRdQ$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_0^1 TVaR(\alpha)dQ(\alpha) &= \int_0^1 \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} F^{-1}(p)dpdQ(\alpha) = \int_0^1 \int_0^1 1_{y \leq \alpha} \frac{1}{\alpha} F^{-1}(p)dpdQ(\alpha) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 1_{y \leq \alpha} \frac{1}{\alpha} F^{-1}(p)dQ(\alpha)dp \\ &= \int_0^1 F^{-1}(p) \int_0^1 1_{y \leq \alpha} 1/\alpha dQ(\alpha)dp \\ &= \int_0^1 F^{-1}(p) \int_y^1 \frac{1}{\alpha} dQ(\alpha)dp \end{aligned}$$

Supposons que H soit différentiable. Une relation entre H et Q peut être dérivée telle que :

$$\int_0^1 F^{-1}(p)dH(p) = \int_0^1 TVaR(\alpha)dQ(\alpha).$$

Par différentiabilité, la relation suivante peut donc être déduite :

$$\int_0^1 F^{-1}(p)dH(p) = \int_0^1 F^{-1}(p)H'(p)dp = \int_0^1 TVaR(\alpha)dQ(\alpha) = \int_0^1 F^{-1}(p) \int_y^1 \frac{1}{\alpha} dQ(\alpha)dp.$$

De la théorie des mesures nous pouvons déduire : $H'(p) = \int_p^1 \frac{1}{\alpha} dQ(\alpha)$

En considérant le différentiel (dans le sens de la théorie des mesures), nous avons : $dH'(p) = -1/p dQ(p)$.

Ainsi : $dQ(p) = -p dH'(p)$

Et il s'en suit : $\int_0^1 F^{-1}(p) dH(p) = - \int_0^1 TVaR(\alpha) dH'(\alpha)$

Pour $Q(\cdot)$, nous avons : $Q(x) = \int_0^x dQ(p) = \int_0^x -p dH'(p) = -pH'(p)|_0^x + \int_0^x dH'(p) = -xH'(x) + H(x)$.

4.2.2.2 Simplification du modèle

Nous décrivons dans ce qui suit la méthode retenue pour simplifier le modèle. La distribution conditionnelle $\mathbb{P}[T \leq t | Z \leq VaR(1\%)(Z)]$ peut encore s'écrire :

$$F^*(T) = \mathbb{P}[T \leq t | Z \leq VaR(1\%)(Z)] = H(\mathbb{P}[T \leq t]) = H(F(t)) \quad (4.6)$$

Où H représente la fonction de diversification du traité.

La contribution du traité T au risque du portefeuille s'écrit : $K = \int_{-\infty}^{+\infty} t dH(F(t))$

Nous avons vu en * que K peut encore s'écrire $K = \int_0^1 F^{-1}(p) dH(p) = \int_0^1 VaR_p(X) dH(p)$ qui représente une somme pondérée de quantiles. K peut être approximé par une somme pondérée d'*expected shortfalls* telle que

$$K = \sum_i \omega_i ES_{\alpha_i}(T)$$

Avec :

- ω_i le poids attribué au quantile i
- $\Theta < \alpha_1 < \dots < \alpha_n \leq 1$ et $\sum \omega_i = 1$
- $ES_{\alpha}(T) = TVaR_{\alpha}(T) = E[T | T \leq F_T^{-1}(\alpha)]$

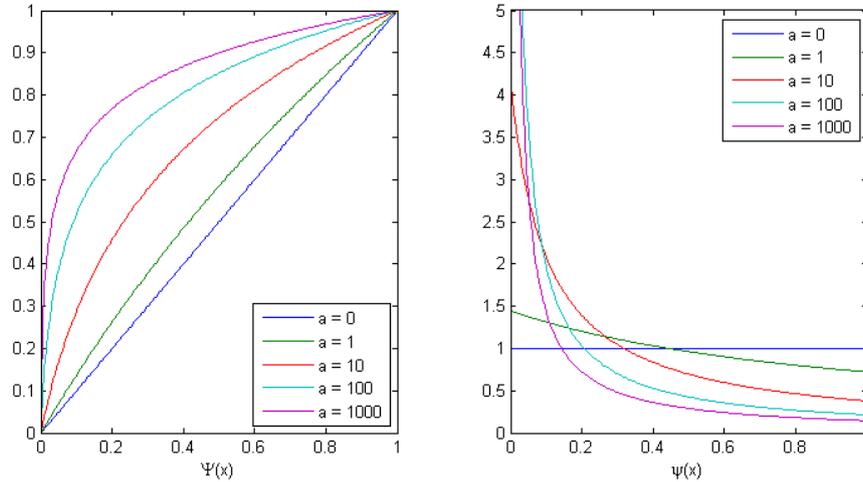
Les poids ω_i sont définis à partir d'une fonction $\varphi_i : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ telle que :

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } a_i = 0, \\ \frac{1}{\ln(1+a_i)} \frac{a_i}{1+a_i t} & \text{si } a_i > 0, \end{cases}$$

Où les paramètres $a_i \in [0, \infty)$ sont spécifiques aux segments définis dans l'arbre de modélisation. La fonction φ_i satisfait les conditions suivantes :

- φ_i est positive,
- φ_k est décroissante
- $\int_0^1 \varphi_i(t) dt = 1$.

Plus la queue de distribution de NPV est épaisse, plus le capital alloué est important. Plus a est élevé, plus le poids attribué aux quantiles faibles est important.



Les paramètres a_k sont calibrés tels que le ratio $\frac{Capital}{Prime}$ de chaque segment avant ajustements avec les données du plan soit égal au ratio $\frac{Capital}{Prime}$ des segments correspondant après ajustements. Rappelons que ces ajustements sont faits pour tenir compte des traités non tarifés et des croissances en part et ou en volume prévues dans le plan stratégique de développement.

Plus formellement, supposons qu'il existe un segment S'_k dans le modèle d'agrégation des risques Non-Vie qui correspondent approximativement au segment S_k avant ajustement. Le modèle d'agrégation des risques Non-Vie fournit les valeurs suivantes :

- La prime attendue de S'_k , que nous notons $P_{S'_k}$
- Le capital alloué à S'_k , que nous notons avec $K_{S'_k}$

Soit P_i la prime attendue du traité T_i et K_i le capital alloué à ce traité. Les paramètres a_k sont calibrés pour chaque segment tels que :

$$\frac{\sum_{i \in S_k} K_i}{\sum_{i \in S_k} P_i} = \frac{K_{S'_k}}{P_{S'_k}} \quad (4.7)$$

Nous avons ainsi besoin de résoudre numériquement M équations (M étant le nombre de segments), une équation pour chaque segment. Comme mentionné plus haut, ϕ_i peut s'interpréter comme une fonction qui affecte des poids à différents quantiles de la distribution de NPV. Nous avons effectué des tests avec différents quantiles et avons finalement retenu les huit quantiles suivants pour lesquels nous avons trouvé de très bons résultats d'approximation du capital alloué quelque soit le segment : 0, 5%/1%/2%/5%/10%/20%/50%/100%.

Le graphique suivant illustre l'écart entre le capital obtenu, pour la LoB construction, en utilisant la somme pondérée de TVaR à différents quantiles et le capital obtenu à partir de fonctions de diversifications définies de manière stochastiques :

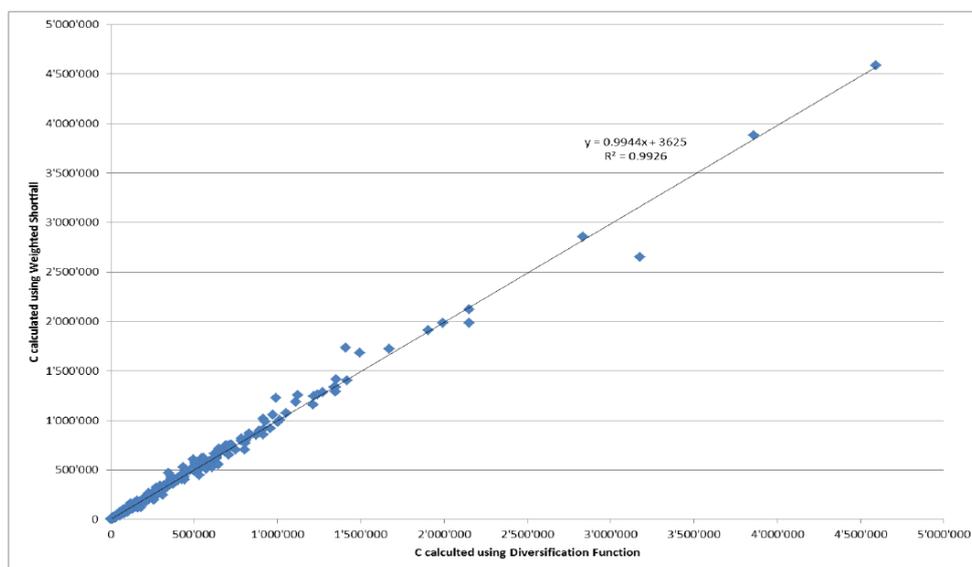


FIGURE 4.1 – Ecart capital obtenu avec la somme pondérée de TVaR et capital déterminé avec les fonctions de diversifications pour la LoB construction .

Nous pouvons constater que l'approximation est assez bonne avec un R^2 à 99.2%.

Le calcul de l'écart entre le capital obtenu avec la somme pondérée de TVaR et capital déterminé avec les fonctions de diversifications a été réalisé pour l'ensemble des LoB et l'approximation la moins bonne a obtenu un R^2 supérieur à 98%. (voir annexe pour d'autres exemples graphiques).

4.2.3 La diversification avec la Vie

L'ensemble des calculs et des ajustements appliqués jusqu'à présent l'ont été en considérant le portefeuille Non-Vie comme une entité autonome. Or, SCOR est un groupe et le portefeuille Non-Vie bénéficie de la diversification avec la Vie. Une dépendance entre les catégories de risques Vie et Non-Vie peut apparaître si un évènement extrême affecte à la fois les traités Vie et Non-Vie. De tels évènements étant très rares, les données historiques ne permettent pas de refléter leurs survenances de manière adéquate. Une approche impliquant l'usage de copules et de scénarii a donc été appliquée pour modélisant la dépendance entre la Vie et la Non-Vie.

- i. Une liste d'évènements susceptible d'impacter de façon significative à la fois la Vie et la Non-Vie est dressée
- ii. Des scénarios couvrant ces évènements et leurs possibles impacts sont déterminés à partir d'une collaboration entre actuaires et souscripteurs

- iii. Les impacts de ces scénarii sont estimés sur la Vie et la Non-Vie
- iv. Les distributions marginales des résultats de la vie et de la Non-Vie avant prise en compte de ces événements extrêmes sont supposées connues et indépendantes
- v. Une simulation de Monte Carlo est appliquée afin de combiner ces distributions marginales avec les scénarios extrêmes afin d'obtenir une distribution empirique du risque combiné
- vi. Une copule de Clayton entre les risques Vie et Non-Vie est calibrée au résultat, reflétant ainsi la structure de dépendance empirique
- vii. Cette copule est afin utilisée pour combiner les distributions marginales des résultats Vie et Non-Vie (les scénarios extrêmes sont pris en compte dans ces distributions).

Le rapport du capital après prise en compte des dépendances et de la diversification avec la branche Vie par le capital avant considération de la Vie donne le bénéfice de diversification. Le bénéfice de diversification avec la Vie noté f a ainsi été estimé à 0.705. Afin de se laisser une marge de sécurité, il a décidé de le considérer à 0.75. Cela signifie que du fait de la diversification avec la branche vie, l'entreprise n'a besoin pour couvrir les risques non vie que de 75% du capital qu'il aurait fallu détenir si la branche Non-Vie constituait une entité autonome.

4.2.4 Ajustements à prendre en compte

Le capital diversifié d'un traité correspond au capital à détenir pour couvrir le risque inhérent à la souscription de ce traité si et seulement si :

- ce traité réalise le rendement requis par l'entreprise
- l'entreprise doit détenir le capital pour ce traité pour une durée d'exactlyement une année
- ce traité ne comporte pas de risque de change

Ces conditions n'étant généralement pas remplies, il faut procéder à certains ajustements afin de déterminer le montant de capital réel à détenir au titre d'un traité.

4.2.4.1 Ajustement par rapport au résultat attendu

De manière à garder le capital inchangé en cas de variation de la prime d'une constante, le capital diversifié est ajusté du profit attendu. Ainsi, le terme capital diversifié + Profit attendu correspond à l' x TVaR de la distorsion de distribution de NPV.

4.2.4.2 Capital minimum

Par convention, un capital minimum forfaitaire égal à 10% de l'assiette de prime est considéré pour chaque traité.

4.2.4.3 Le retour attendu sur investissement

Basé sur ces objectifs, SCOR définit un niveau de retour sur investissement supérieur au taux sans risque noté l . Ce retour sur investissement requis correspond à $S + l$, S représentant le spread avec le taux sans risque.

Ce retour sur investissement noté h doit être net d'impôts. Soit t , le taux d'imposition, les intérêts sur le capital sont alors donnés par :

$$\text{Retour attendu sur le portefeuille} = \left(\frac{S + l}{1 - t} - l \right) \times \text{Capital} = \left(\frac{S + t.l}{1 - t} \right) \times \text{Capital} \quad (4.8)$$

4.2.4.4 Correction pour le risque de change

Lorsqu'on tarifie un traité individuel, on utilise la courbe des taux de la devise dans laquelle ce traité est libellé pour l'actualisation. Ceci implique les devises risquées doivent avoir un taux d'intérêts supérieur au taux d'intérêt sans risque. Un ajustement est donc appliqué pour prendre en compte ce risque. Le retour sur investissement demandé pour des traités libellés dans de telles monnaies devrait être plus important.

Notons r_{Change} , le risque de change.

$$\text{Nous avons } r_{\text{Change}} = \text{Max}(\text{Taux d'intérêt d'un traité} - l, 0)$$

Le retour sur investissement h devient alors :

$$h = \left(\frac{S + r_{\text{Change}} + t.l}{1 - t} \right) \quad (4.9)$$

4.2.4.5 La durée nécessaire pour le développement à l'ultime de l'affaire : Le facteur temps

Lorsqu'on souscrit un traité, un capital doit être immobilisé jusqu'à l'extinction des engagements liés à ce traité. Ce capital diminue annuellement étant donné que l'incertitude sur le résultat final diminue avec le temps en fonction des facteurs de développement.

Le prix du traité étant déterminé au moment de sa souscription, un facteur temps est utilisé pour déterminer la durée pendant laquelle le capital immobilisé au titre du contrat doit rapporter le rendement annuel requis.

Le facteur temps représente la durée nécessaire pour être certain du résultat final d'un contrat. Il ne s'agit pas du temps nécessaire pour payer tous les sinistres mais du temps qu'il faut pour être sûr du montant des sinistres à payer dans le cadre d'un contrat.

Le facteur temps noté τ est obtenu par la formule suivante :

$$\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \max\left[\frac{(L_{i+1} - L_i)^b(1 - p_b) + (1 - L_i)p_b}{(1 + y_i)^i(1 - L_i)^{(1 - \beta)}}, \frac{(L_{i+1} - L_i)}{(1 + y_i)^i}\right] \quad (4.10)$$

Où

- L_i représente la cadence annuelle de développement des sinistres et y_i , la courbe des taux d'intérêts
- β est un paramètre déterminé dans le modèle interne afin de prendre compte la continuité de l'activité
- y_i représente la courbe des taux d'intérêts Le paramètre b traduit l'augmentation de la dépendance entre la durée du traité et l'évolution au fil du temps du best estimate des pertes ultimes. Il est calibré en utilisant comme référence les méthodes de Merz-Wüthrich et de bootstrap, qui sont des méthodes actuarielles standards pour estimer la variation à un an du risque de réserve.

b est défini en fonction de trois segments comme suit :

$$b = \begin{cases} 0.61 & \text{pour les branches courtes, } mtp < 2 \\ 0.70 & \text{pour les branches intermédiaires, } 2 \leq mtp < 4 \\ 0.76 & \text{pour les branches longues, } mtp \geq 4 \end{cases}$$

Où mtp représente la durée moyenne de paiement des sinistres, définie à partir de la cadence annuelle de paiement des sinistres.

La valeur de b est celle qui minimise les erreurs relatives absolues moyennes entre la somme de tous les risques futurs d'un an calculés respectivement avec la méthode AF et avec le bootstrap / M.-W. Méthodes.

Le paramètre p_b

$$p_b = \max(0.15; (1 - \lambda)\left[1 - \frac{(VaR_{10\%}(X) - \mathbb{E}(X))}{(xTVaR_{1\%}(X))}\right])$$

Avec

X : La variable aléatoire représentant la distribution de NPV du traité. $\mathbb{E}(X)$ = Valeur actuelle nette du résultat du traité $\lambda = \frac{\Theta^{b-1}}{(1-\alpha)}$ qui correspond à la famille la plus simple de fonctions telle que λ soit un nombre compris entre 0 et 1, croissante en b , égal à 1 pour $b = 1$ et égal à 0 lorsque $\alpha = 1$.

Selon plusieurs études classiques, les cycles de réassurance ont une durée moyenne de dix ans qui se reflète dans le choix du paramètre α qui décrit la fréquence des pertes importantes. Nous supposons donc que $\alpha = \frac{1}{10}$. Etant appliqué comme un facteur multiplicatif, le time facteur est très important et très sensible à la cadence de développement des sinistres.

4.2.4.6 La formule de calcul du TRAC

Le risque diversifié ajusté de l'ensemble des paramètres présentés ci-dessus conduit au capital effectivement alloué en tarification des traités de réassurance Non-Vie. Ce capital dit Time and Risk Adjusted Capital s'écrit :

$$TRAC = \text{Max}(10\%.P; f.\tau/(1 + h.\tau).(C + NPV).\frac{s + r_{change} + l.t}{s + l.t}) \quad (4.11)$$

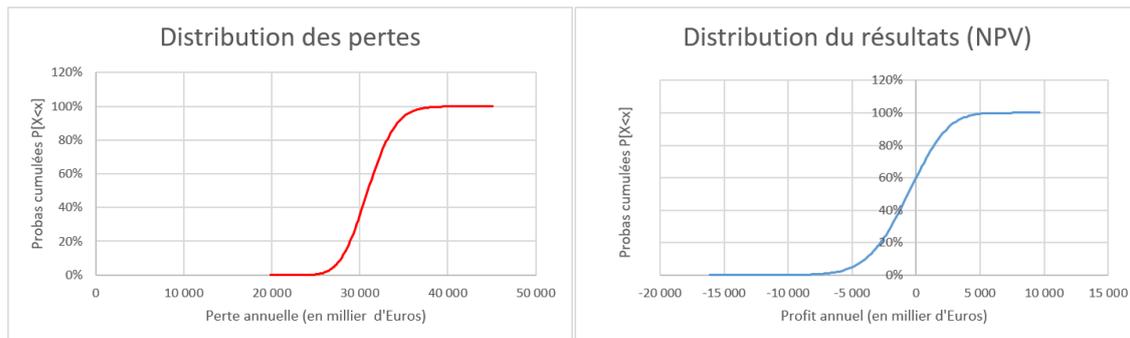
Le TRAC est fonction :

- Du retour sur investissement attendu par le groupe SCOR
- De la LoB à laquelle le traité appartient
- De la distribution de NPV du traité,
- De la cadence de développement des sinistres à l'ultime
- De la courbe des taux de la devise dans laquelle le traité est libellé

4.2.5 Exemples d'application

4.2.5.1 Cas d'un traité proportionnel

Nous maintenons toujours le cas de la cédante fictive A et nous allouons le capital à partir de la méthode basée sur les fonctions de diversifications. Les distributions de pertes et de résultats sont représentées ci-dessous :



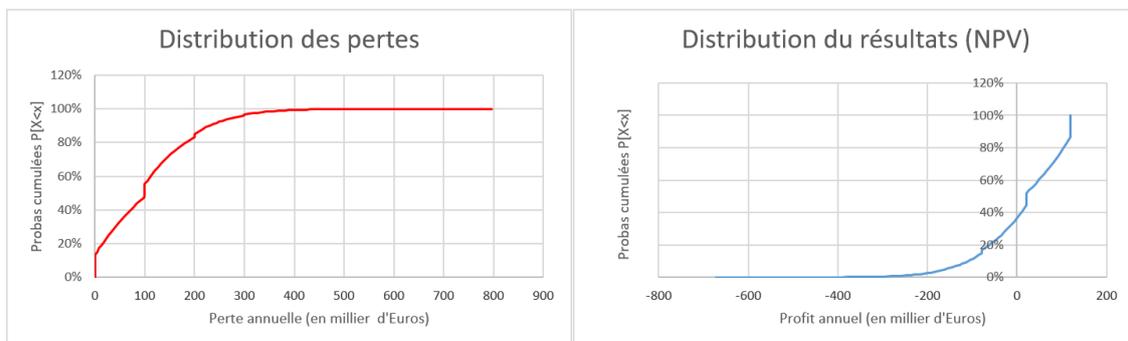
Les résultats obtenus sont les suivants :

Prime de base	37 884 376
Perte attendue (EL)	31 014 830
Ratio sinistres/primes	81,9%
Perte attendue escomptée (DEL)	30 849 550
Ecart-type des pertes	2 499 236
Capital alloué (TRAC)	3 788 438
Coût du capital	357 823

Le capital alloué au titre de la même affaire est passé de 12.3M avec l'ancienne méthode à un peu moins de 3.8M avec la méthode révisée d'allocation. Rappelons que la méthode révisée d'allocation est la même quelque soit la nature du traité. Cependant, les traités proportionnels étant analysés à partir de modèles de distributions agrégées tandis que les traités non-proportionnels sont sur base de modèles fréquence-sévérité, ceci générera un impact en termes de résultats sur les distributions de NPV et donc le capital alloué.

4.2.5.2 Cas d'un traité non-proportionnel

Dans le cas du traité non-proportionnel de la Cédante B, en appliquant la méthode d'allocation basée sur les fonctions de diversification, nous obtenons les résultats suivants :

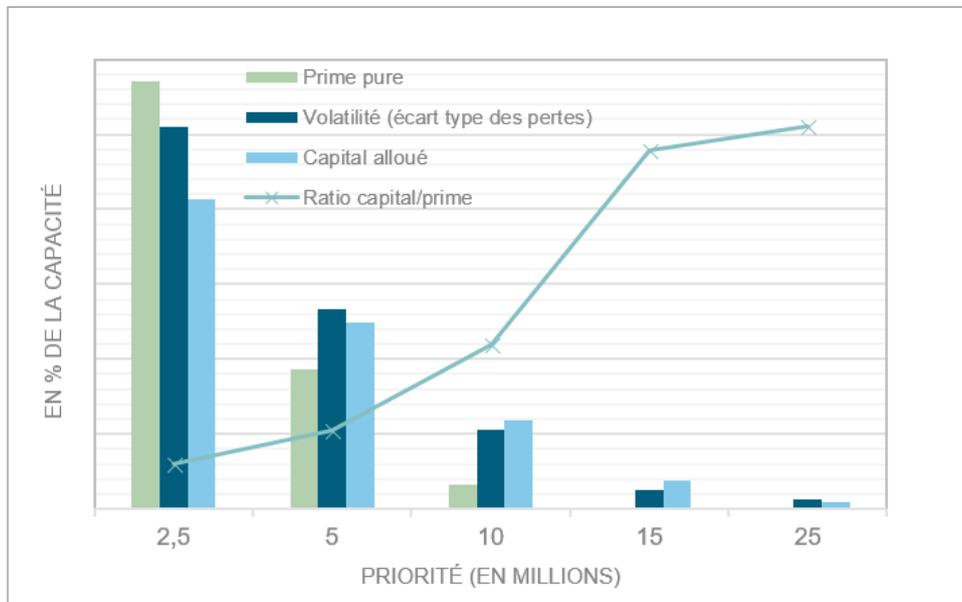


Perte attendue (EL)	1 065 956
Taux d'escompte	5%
Perte attendue escomptée (DEL)	1 012 658
Ecart-type des pertes	915 269
Capital alloué (TRAC)	1 449 939
Coût du capital	136 949
Frais internes	218 588
Frais externes	10%
Prime technique	1 520 217

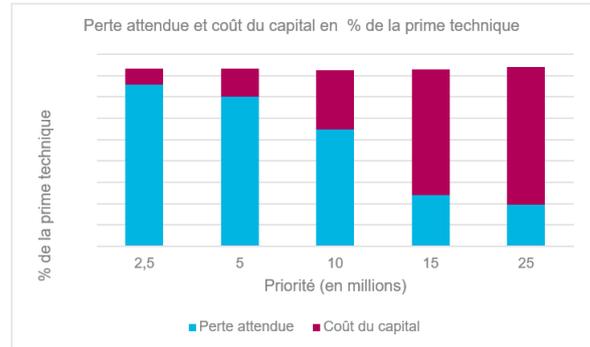
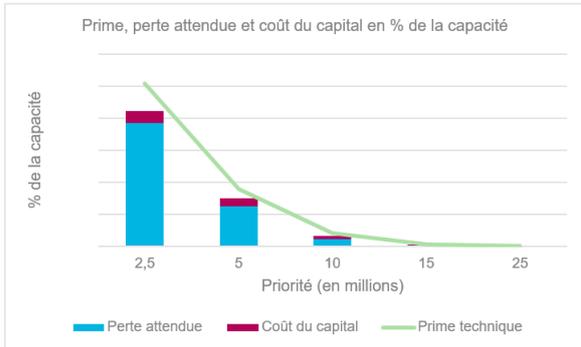
Le capital alloué est à présent de 1,4M contre 1,2M dans la modélisation précédente. Si l'impact de l'écart-type n'est pas évidente dans ce modèle il faut garder à l'esprit que la volatilité des pertes influence la forme de la distribution de résultats et donc l'allocation du capital. Plus la volatilité est forte plus le capital alloué est important.

4.2.6 Particularité de la méthode révisée d'allocation dans le cas d'un traité non-proportionnel

Le graphique suivant indique le capital alloué à différentes tranches d'un même programme en proportion de la capacité :



Le capital exprimé en pourcentage de la capacité est plus significatif que le ratio $\frac{\text{capital}}{\text{prime}}$, en particulier pour les tranches hautes à faible fréquence attendue. La prime pure (perte attendue) diminue à mesure que nous progressons dans les tranches, la volatilité et le capital alloué au risque diminuent également, mais à un rythme plus lent. Comme nous l'avons vu précédemment dans le passage de la prime à la prime technique, c'est le coût du capital qui est facturé à cédante et non le montant de capital alloué. Les deux figures ci-dessous montre pour le même compte considéré ci-avant, le poids du coût du capital dans la prime technique en fonction de la tranche.



La prime, la perte attendue ainsi que le coût du capital diminuent avec les tranches hautes. Proportionnellement, lorsque nous comparons le coût du capital à la composante perte, le coût du capital en % de la prime technique augmente.

Impacts du changement de méthode et tests de sensibilités

Sommaire

5.1	Impacts du changement de méthode d'allocation	87
5.1.1	Données	89
5.1.2	Impact global	90
5.1.3	Analyse par type de couverture	91
5.1.4	Le facteur temps	92
5.1.5	Analyse suivant la taille des traités	93
5.1.6	Analyse suivant les tranches	93
5.1.7	Impacts sur la performance et les décisions de souscription	94
5.2	Tests de sensibilité	95
5.2.1	Sensibilité par rapport à la LoB (Dépendance par rapport au reste du portefeuille)	95
5.2.2	Sensibilité par rapport à la volatilité	97

5.1 Impacts du changement de méthode d'allocation

Nous allons dans cette partie, analyser les différents impacts du changement de méthode d'allocation du capital en tarification. Pour cela, un outil Excel a été construit afin de calculer le capital alloué suivant les deux méthodes d'allocation présentées ci-avant. La nouvelle méthode d'allocation du capital retenue est celle avec la TVaR pondérée. Pour notre étude, 1216 contrats ont été choisis dans les unités de souscriptions qui utilisaient jusqu'aux renouvellements 2015, la méthode d'allocation du capital basée sur le coefficient de variation. Pour chacun de ses contrats, une extraction à partir de l'outil de tarification de SCOR a été faite pour :

- L'assiette de primes du traité
- Les termes et conditions du traité (taux de cession, commissions, priorité, portée etc.)
- La prime pure
- La distribution de NPV
- Les frais internes et externes
- Les cadences de développement et de paiement des sinistres

- La devise du traité et la courbe des taux associée

Les contrats retenus sont repartis entre quatre lignes de business (*LoB*) qui sont :

- La décennale
- La responsabilité civile automobile
- La responsabilité civile générale
- La garantie dommages

L'assurance décennale est une garantie qui vise à couvrir pendant dix ans après réception des travaux, les coûts de réparations des dommages affectant la solidité de l'ouvrage ou le rendant impropre à destination. En France, la décennale est une assurance obligatoire.

La responsabilité civile automobile : la garantie responsabilité civile (RC) automobile est également une assurance obligatoire en France. Elle a pour principe de couvrir l'assuré contre les dommages causés à un tiers. L'assureur prend à sa charge, en cas d'accident responsable de l'assuré, l'indemnisation de la ou des victimes de l'accident. Les dommages peuvent être matériels, immatériels ou corporels.

La responsabilité civile générale : la RC générale ou diverse garantie la personne physique ou morale contre les conséquences pécuniaires des dommages corporels, matériels et immatériels causés aux tiers de son propre fait ou du fait des personnes qui sont à sa charge. Cette garantie existe sous plusieurs formules : La RC entreprise (RC exploitation, RC chef d'entreprise, RC professionnelle), la RC vie privée, la RC du chef de famille etc.

La garantie dommages (*Property*) couvre généralement l'incendie, le bris de machine, et le vol pour les particuliers mais également les risques commerciaux ou industriels. L'incendie représente la garantie principale de cette branche, suivie des risques industriels qui représentent environ un tiers et des risques commerciaux qui représentent environ un cinquième des primes. Cette classe comprend également les risques de catastrophe naturelle (tempête, grêle...). Pour la suite de ce document, nous allons considérer uniquement la garantie hors catastrophes naturelles.

Les *LoB* décennale, RC automobile et RC générales sont des branches à développement long par opposition à la *LoB* dommages qui est une branche à développement court. Par ailleurs, la responsabilité civile décennale est classée parmi les spécialités tandis que les trois autres branches font parties des traités. Le choix de ces garanties a pour objet d'analyser l'impact du changement de méthode d'allocation du capital en fonction du type de branche.

Les impacts mesurés seront d'une part les impacts du changement de méthode sur le montant de capital alloué et d'autre part sur la performance des traités. Après une brève présentation des statistiques descriptives de l'échantillon retenu, nous commencerons par une analyse globale des impacts du changement de méthode d'allocation puis nous irons plus dans le détail afin d'identifier les programmes les plus affectés par ce changement.

5.1.1 Données

Les données utilisées correspondent aux données transmises par les cédantes lors du renouvellement 2016 et qui ont servi à la tarification des traités de réassurance pour les branches considérées. Par mesure de confidentialité, un facteur identique a été appliqué à l'ensemble des chiffres présentés.

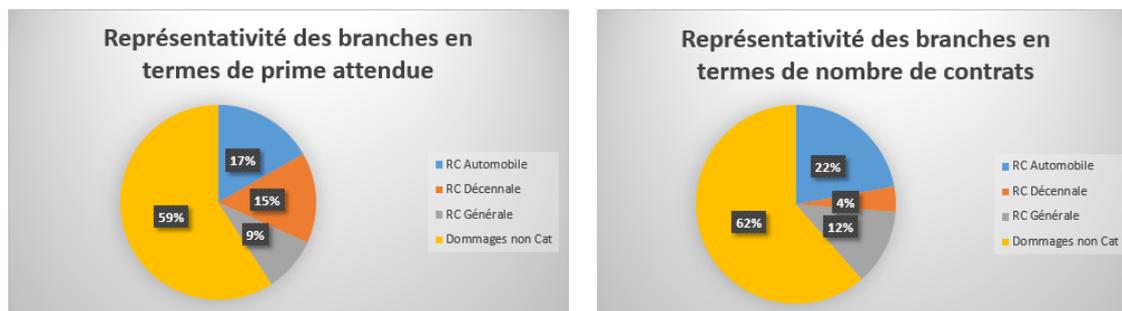


FIGURE 5.1 – Représentativité des branches dans le portefeuille étudié

78% des 1216 contrats correspondent à des contrats non-proportionnels qui génèrent environ 43% de prime attendue. Les 22% de contrats restant sont des contrats proportionnels avec 57% de prime attendue. Le graphique suivant présente la répartition des traités par types de couverture pour chaque LoB :

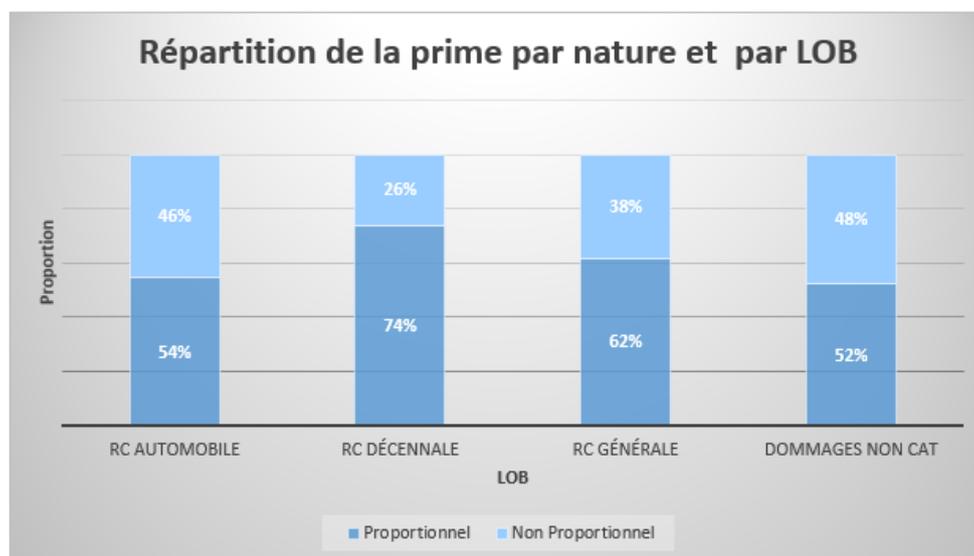


FIGURE 5.2 – Répartition de la prime par nature et par LoB

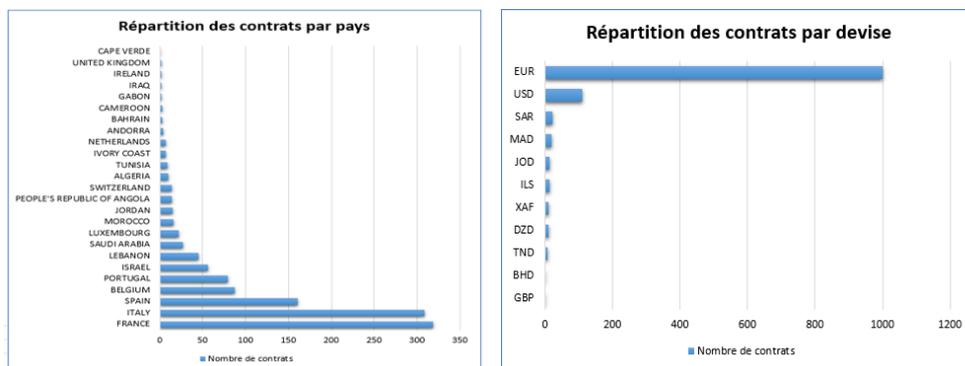


FIGURE 5.3 – Répartition des contrats par pays et par devise

Les contrats analysés concernent des cédantes de 25 pays parmi lesquels, la France, l'Italie, l'Espagne, la Belgique et le Portugal concentrent près de 80% de la prime. L'Euro représente donc naturellement la devise prépondérante dans laquelle près de 82% des contrats retenus sont libellés.

5.1.2 Impact global

Pour la suite de ce document nous notons :

- Capital DF : le capital calculé suivant la méthode des fonctions de diversification
- Capital CV : le capital calculé suivant la méthode du coefficient de variation

Le tableau ci-dessous présente les différents impacts (en millions d'Euros) :

Primes attendues	403 347
Sinistralité attendue	290 828
Ratio sinistres/ Primes	72,10%
Résultat espéré	19 117
Capital DF	417 846
Capital CV	356 951
ROE avec Capital DF	3,76%
ROE avec Capital CV	4,37%
PE avec capital DF	-19 791
PE avec capital CV	-14 734
Δ Capital DF/ Capital CV	17,06%
Δ ROE Capital DF/ ROE Capital CV	-13,92%
Δ PE Capital DF / PE Capital CV	-5 057

Au global, nous allouons 17% plus de capital avec la méthode d'allocation basée sur les fonctions de diversification qu'avec la méthode basée sur le coefficient de variation. Cette augmentation du capital entraîne une dégradation du RORAC de près de 14% et de la PE de près de 5M.

5.1.3 Analyse par type de couverture

Le tableau suivant montre les montants de capitaux alloués par type de couverture :

(Montants en milliers)

Nature	Prime attendue	Capital DF	Capital CV	Capital DF/ Prime	Capital CV/ Prime	Δ Capital DF/Capital CV
Proportionnel	228 680	67 564	114 863	30%	50%	-41%
Non Proportionnel	174 666	350 281	242 088	201%	139%	45%
Total	403 347	417 846	356 951	104%	88%	17%

Les couvertures non proportionnelles sont beaucoup plus consommatrices de capital que les couvertures proportionnelles quelque soit la méthode utilisée pour allouer le capital. En effet, la réassurance proportionnelle ayant pour vocation de couvrir les cédantes contre la dérive de portefeuilles entiers, la sinistralité sous-jacente comporte moins de volatilité que celle de la réassurance non-proportionnelle qui couvre contre le risque de sévérité des sinistres.

La méthode d'allocation du capital basée sur les fonctions de diversification alloue par rapport à la méthode d'allocation basée sur le coefficient de variation :

- Moins de capital en proportionnel (-41%)
- Plus de capital en non proportionnel (+45%)

Rappelons que la méthode d'allocation du capital basée sur le coefficient de variation ne prenait en compte aucune mesure de risque pour les traités proportionnels. La volatilité de la sinistralité n'était donc pas prise en compte pour ces traités et la détermination du facteur "f" utilisé dans le calcul n'était pas suffisamment transparente et datait de plusieurs années.

Les LoB qui enregistrent les hausses de capital alloué les plus importantes sont naturellement celles pour lesquelles la proportion de couverture non-proportionnelle est la plus importante, ce type de couverture étant plus consommatrice de capital comme évoqué précédemment. Sur les quatre LoB analysées, la LoB automobile est la plus impactée par le changement de méthode d'allocation du capital avec une augmentation du ratio capital/Prime de plus de 50%. Sur les pays représentant la majorité de la prime, cette LoB se caractérise par des structures majoritairement non proportionnelles. Le tableau suivant montre les impacts par LoB et par type de couverture :

(Montants en milliers)

Nature	LOB	Prime attendue	Capital DF	Capital CV	Capital DF/ Prime	Capital CV/ Prime	Facteur temps	Δ Capital DF/Capital CV
Proportionnel	RC Automobile	36 772	7 743	10 024	21%	27%	1,18	-23%
	RC Décennale	44 877	8 586	27 228	19%	61%	2,59	-68%
	RC Générale	22 578	6 471	13 642	29%	60%	1,35	-53%
	Domages non Cat	124 453	44 764	63 969	36%	51%	1,16	-30%
Total Proportionnel		228 680	67 564	114 863	30%	50%	1,27	-41%
Non Proportionnel	RC Automobile	30 757	80 084	47 187	260%	153%	1,34	70%
	RC Décennale	15 790	50 150	23 793	318%	151%	4,01	111%
	RC Générale	13 981	28 393	27 777	203%	199%	1,65	2%
	Domages non Cat	114 138	191 654	143 331	168%	126%	1,16	34%
Total Non Proportionnel		174 666	350 281	242 088	201%	139%	1,38	45%
Total général		403 347	417 846	356 951	104%	88%	1,36	17%

Si au global, la LoB automobile semble la plus touchée, en observant la décomposition par nature, nous constatons que la branche décennale est la branche pour laquelle l'augmentation du capital suite au changement de méthode est la plus importante concernant les couvertures non-proportionnelles. Cette ligne est également celle qui enregistre la baisse la plus importante de capital pour les couvertures proportionnelles.

L'impact du changement de méthode est quasi nul sur la branche RC Générale en Non-proportionnel alors qu'il correspond à une baisse de près de moitié du capital alloué en proportionnel pour la même branche. Ainsi, le capital alloué globalement à la branche RC Générale baisse avec l'application de la méthode utilisant les fonctions de diversification. Cela s'explique par des paramètres (f en proportionnel, A , M et m en non-proportionnel) conservateurs utilisés sur cette branche avec la méthode basée sur le coefficient de variation. Avec ces paramètres, le risque était surestimé en proportionnel et évalué à un niveau déjà élevé par rapport aux autres branches en non proportionnel.

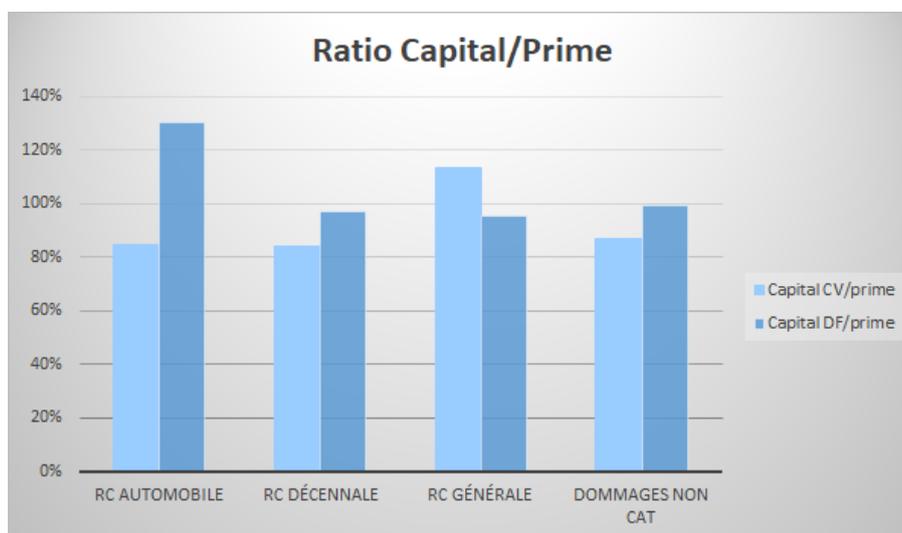


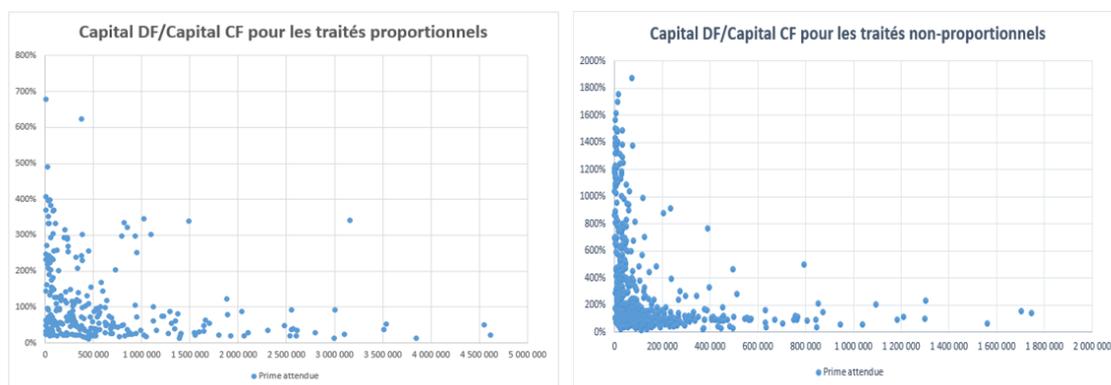
FIGURE 5.4 – Ratio capital/prime

5.1.4 Le facteur temps

Pour rappel, le facteur temps représente la durée pendant laquelle il existe une incertitude sur la connaissance du résultat ultime. Plus le développement de la branche est long, plus longtemps on doit immobiliser et rémunérer du capital. Le développement de la branche décennale est plus long que le développement de toutes les autres branches. A contrario, les résultats ultimes sont rapidement connus pour la branche dommages hors catastrophes naturelles. Cela se reflète dans le facteur temps tel que le montre le tableau précédemment avec les valeurs les plus élevées pour la décennale et les valeurs les plus faibles pour la branche dommages.

5.1.5 Analyse suivant la taille des traités

La variable servant d'indicateur de taille retenue ici est la prime pure attendue. Nous avons vu précédemment que la nouvelle méthode d'allocation du capital alloue plus ou moins de capital selon le type de couverture. Nous avons donc effectué une analyse séparée pour le proportionnel et le non-proportionnel. Les graphiques suivants montrent le ratio $\frac{CapitalDF}{CapitalCV}$, en fonction du niveau de prime attendue pour l'ensemble des contrats retenus pour l'analyse par type de couverture :



La distribution des points montre clairement les impacts du passage de la méthode d'allocation basée sur les coefficients de variation à la méthode basée sur les fonctions de diversification. L'impact du changement de méthode semble plus important sur les contrats avec un faible aliment attendu. L'ensemble des contrats pour lesquels le capital alloué a plus que doublé en passant de la méthode d'allocation basée sur le coefficient de variation à la méthode basée sur les fonctions de diversification correspondent à des contrats avec une prime espérée de moins de 500K.

5.1.6 Analyse suivant les tranches

Nous avons analysé l'impact de la nouvelle méthode d'allocation du capital par rapport à l'ancienne en fonction de priorité mais également en fonction de la capacité. L'analyse suivant la priorité, telle que le montre le graphique suivant, met en évidence le fait que la nouvelle méthode d'allocation du capital attribue plus de capital sur les tranches hautes que sur les tranches basses. Les tranches basses couvrent généralement la sinistralité de fréquence. Elles sont souvent entièrement ou partiellement travaillantes. Les tranches hautes sont quant à elles dédiées à la couverture de la sinistralité de pointe. Elles sont souvent tarifées à partir de peu de données et comportent plus de volatilité et d'incertitude. De ce fait, les tranches hautes contribuent naturellement plus à la probabilité de perte extrême de l'entreprise.

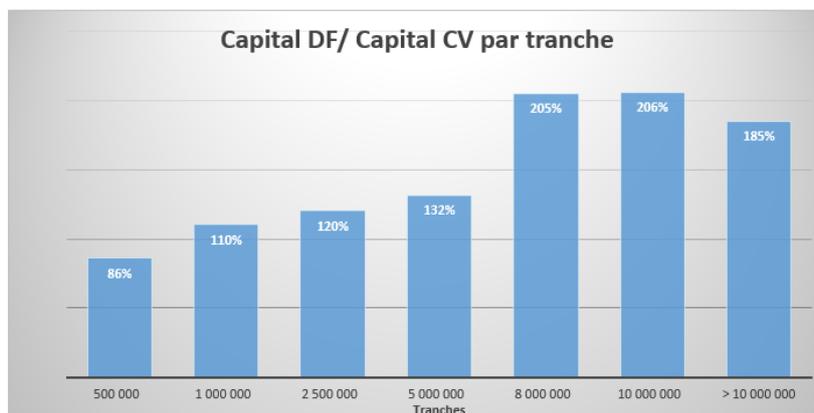


FIGURE 5.5 – Ecarts en fonction de la tranche

L'analyse suivant la capacité montre également que la nouvelle méthode affecte davantage de capital aux programmes à capacité élevée. Ceci représente un impact prévisible car plus la capacité est importante plus l'engagement est important et plus la contribution au risque de pertes de l'entreprise est élevée.

5.1.7 Impacts sur la performance et les décisions de souscription

Les décisions de souscriptions au sein de SCOR Global P&C sont orientées par les mesures de performance ainsi que par le ratio combiné. Le ratio combiné est indépendant de la méthode d'allocation du capital. Deux principales mesures servent à mesurer la performance des traités souscrits. Il s'agit du RORAC et de l'excès de performance (*performance excess*) qui représente le montant au-delà ou en deçà du rendement minimum requis par SCOR.

Le tableau suivant montre par LoB et par nature l'évolution de ces différents indicateurs suivant que le capital soit alloué par méthode basée sur le coefficient de variation ou par une méthode basée sur les fonctions de diversification :

(Montants en milliers)										
Nature	LOB	Prime attendue	Résultat attendu	Ratio Combiné	ROE Capital DF	ROE Capital CV	PE Capital DF	PE Capital CV	PE Capital DF	PE Capital CV
Proportionnel	RC Automobile	36 772	-412	97%	-4,0%	-3,0%	-964	-1 154	-2,6%	-3,1%
	RC Décennale	44 877	1 345	102%	12,4%	4,0%	336	-1 212	0,7%	-2,7%
	RC Générale	22 578	916	94%	11,2%	5,4%	177	-418	0,8%	-1,9%
	Dommages non Cat	124 453	-43	97%	0,1%	0,1%	-3 751	-5 346	-3,0%	-4,3%
Total Proportionnel		228 680	1 807	97%	2,3%	1,4%	-4 202	-8 130	-1,8%	-3,6%
Non Proportionnel	RC Automobile	30 757	-2 936	109%	-2,7%	-4,7%	-8 941	-6 209	-29,1%	-20,2%
	RC Décennale	15 790	3 710	79%	6,0%	12,4%	-1 272	917	-8,1%	5,8%
	RC Générale	13 981	1 079	89%	3,2%	3,2%	-1 517	-1 466	-10,8%	-10,5%
	Dommages non Cat	114 138	13 147	76%	5,5%	7,3%	-1 384	-4 945	-1,2%	-4,3%
Total Non Proportionnel		174 666	14 998	83%	3,5%	5,0%	-13 113	-11 702	-7,5%	-6,7%
Total général		403 347	16 805	91%	3,3%	3,9%	-17 315	-19 832	-4,3%	-4,9%

Une analyse par nature de contrat montre que le RORAC des traités proportionnels s'améliore de près de 60% avec la méthode d'allocation du capital basée sur les fonctions de diversifications alors que le RORAC des traités non-proportionnels se dégrade 30%.

Ce résultat est cohérent et prévisible, le RORAC étant donné par les résultats nets rapportés au capital ajusté du risque, et comme mentionné plus haut, la méthode basée sur les fonctions de diversification alloue moins de capital aux traités proportionnels qu'aux traités non-proportionnels. Or, plus le capital alloué est élevé, plus la prime technique actuarielle est importante. La conséquence de cette nouvelle allocation est d'orienter la souscription vers une négociation à la hausse des primes de réassurance sur les traités non-proportionnels. Compte tenu de la conjoncture de nombreux marchés sont en situation de soft market c.à.d de forte concurrence où la part totale demandée par l'ensemble des réassureurs qui souhaitent couvrir un programme excède 100%. Il n'est donc pas toujours aisé de négocier les prix à la hausse surtout lorsque la justification de la hausse provient d'un changement de méthode de tarification. Les souscripteurs peuvent alors faire face à :

- une réduction de sa participation à certains programmes
- une perte de compétitivité entraînant une perte de l'apérition
- la sortie de certains programmes

Dès lors, il est primordial de fixer les objectifs de rentabilités, la première année de changement de méthode d'allocation, à des niveaux permettant aux souscripteurs d'intégrer les hausses tarifaires de manière progressive. Cela implique d'accepter d'afficher des pertes.

5.2 Tests de sensibilité

Le capital alloué suivant la méthode basée sur les fonctions de diversification est impacté par l'ensemble des éléments susceptibles d'influer sur la distribution de NPV. Ces éléments sont essentiellement, la loi utilisée pour modéliser les pertes, la durée des sinistres, l'allocation des frais internes, la courbe des taux d'intérêts. En plus de ces éléments, la LoB et la taille ont également un impact notable sur le capital alloué. Cette partie est consacrée à la mesure de la sensibilité de la nouvelle méthode d'allocation du capital à certains paramètres de tarification.

5.2.1 Sensibilité par rapport à la LoB (Dépendance par rapport au reste du portefeuille)

Toutes les lignes ne diversifient pas le portefeuille de la même manière. C'est la raison pour laquelle les fonctions de diversifications ont été considérées par branche d'activité. Dans cette section, nous allons voir la sensibilité de l'allocation du capital à la branche à laquelle appartient le traité. Pour cela, nous avons considéré cinquante traités de la branche décennale, tirés aléatoirement, que nous avons tarifés en changeant la branche toutes choses égales par ailleurs. Les traités ont été considérés comme appartenant respectivement à la branche automobile, à la branche responsabilité civile générale et à la branche dommages hors catastrophes naturelles.

Le tableau suivant montre les résultats obtenus :

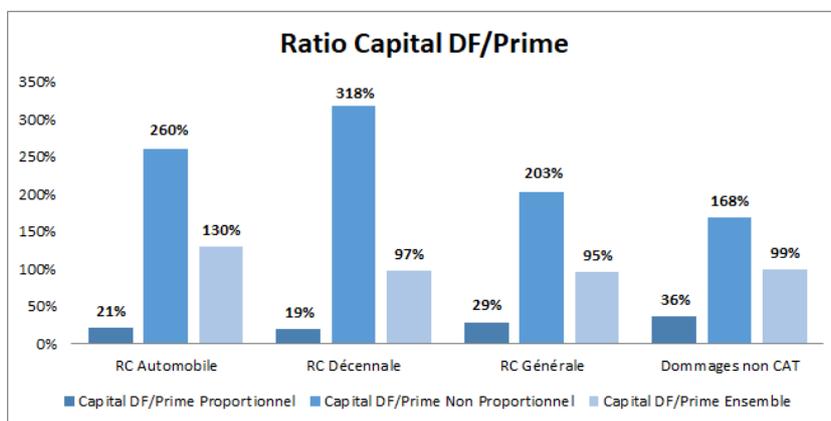
LOB	Capital alloué	Capital/Prime	NPV	Coût du capital	Facteur temps	RORAC	PE
RC Décennale	58 736	97%	5 055	6 254	3,71	6,9%	-1,5%
RC Automobile	134 860	219%	5 055	14 359	3,71	3,0%	-12,4%
RC Générale	88 408	147%	5 055	9 413	3,71	4,7%	-5,6%
Dommages	40 115	66%	5 055	4 366	3,71	10,3%	1,0%

Des quatre branches considérées, l'automobile est celle qui diversifie le moins le portefeuille Non-Vie et la branche dommages est celle qui diversifie le plus le portefeuille. En effet l'automobile est une branche longue avec une capacité illimitée dans beaucoup des pays considérés et les sinistres de cette branche peuvent être très importants. Quant à la branche dommages, elle est à développement court ; les sinistres sont connus rapidement. De plus, grâce à la diversification géographique, l'exposition des pays considérés dans cette analyse à un événement naturel hors catastrophes naturelles mais qui occasionnerait une sinistralité d'ampleur catastrophique pour l'entreprise est limitée. Comparés à la branche décennale, les traités analysés auraient nécessité d'immobiliser :

- 129% plus de capital s'il s'agissait de traités Automobiles
- 50% plus de capital s'il s'agissait de traités RC Générales
- 32% moins de capital s'il s'agissait de traités Dommages

Nous avons vu que le facteur temps dépendait de la nature de la branche (branche longue ou branche courte) et de la cadence de développement des sinistres. Ayant considéré ici la même cadence et faisant uniquement varier la LoB, nous pouvons constater que l'impact de la LoB sur le facteur temps est relativement faible. Le différentiel de capital alloué par LoB provient donc essentiellement de la fonction de diversification spécifique à chaque LoB.

Afin d'analyser l'impact, sur la performance, nous avons calculé le RORAC de chaque branche pour l'ensemble des traités considérés. Nous rappelons que toutes choses égales par ailleurs, le RORAC est décroissant avec le capital alloué. Le RORAC de la branche Dommages pour laquelle on alloue le moins de capital est donc naturellement le plus élevé. Ces analyses ayant été effectuées au global, sans tenir compte du type de couverture, nous les avons répliquées en distinguant les traités Non-Proportionnels des traités Proportionnels. Les résultats obtenus sont présentés par le graphique et les tableaux ci-dessous :



Traités Proportionnels							
LOB	Capital alloué	Capital/Prime	NPV	Coût du capital	Facteur temp	RORAC	PE cible
RC Décennale	8 586	19%	1 345	914	2,59	12,4%	0,7%
RC Automobile	17 909	40%	1 302	1 907	2,65	5,9%	-1,1%
RC Générale	14 266	32%	1 312	1 519	2,61	7,4%	-0,4%
Domages	6 857	15%	1 304	730	2,48	15,0%	1,0%

Traités Non-proportionnels							
LOB	Capital alloué	Capital/Prime	NPV	Coût du capital	Facteur temp	RORAC	PE cible
RC Décennale	50 150	318%	3 710	5 340	4,01	6,0%	-8,1%
RC Automobile	119 132	754%	3 636	12 685	4,02	2,6%	-44,7%
RC Générale	73 666	467%	3 716	7 844	4,01	4,1%	-20,4%
Domages	31 960	202%	3 712	3 495	3,98	9,3%	1,1%

Quelque soit le type de couverture, c'est la branche automobile qui nécessite d'immobiliser le plus de capital. Parmi les quatre branches considérées, l'automobile est donc la LoB qui contribue le plus à la XTVar à 1% du portefeuille Non-Vie de SCOR. Ces résultats sont en ligne avec ce que nous avons constaté précédemment concernant les impacts de changement de méthode d'allocation du capital.

5.2.2 Sensibilité par rapport à la volatilité

Nous considérons ici l'écart-type comme mesure de la volatilité des distributions de pertes. Cette volatilité a un impact direct sur la volatilité de la distribution de NPV qui sert de base pour le calcul du capital alloué. Afin d'illustrer la sensibilité de l'allocation du capital par rapport à la volatilité, nous avons tarifé : D'une part, un traité en quote-part dont la distribution de Ratios $\frac{S}{P}$ suit une loi log normale et d'autre part, un traité en excédent de sinistre RC Automobile en illimitée XS de 2M dont la charge est modélisée à partir d'un modèle fréquence-sévérité.

Traité en quote-part

Les paramètres de loi log normale sont la moyenne et l'écart-type. Nous avons conservé une moyenne de 70%, puis nous avons fait varier l'écart-type entre 10% et 30% avec un pas de 5%.

Les graphiques ci-dessous illustrent le déplacement des distributions de pertes et de NPV en fonction de la volatilité :

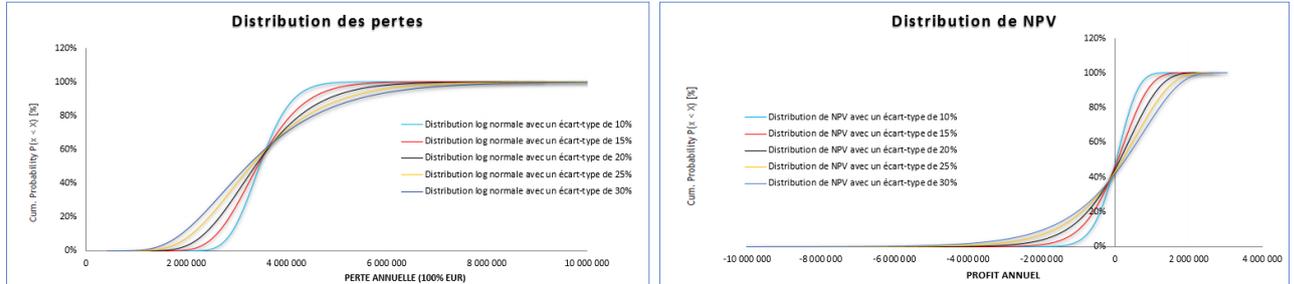


FIGURE 5.6 – Distribution des pertes et résultats en fonction de la volatilité

Nous obtenons avec ces distributions des résultats présentés dans le tableau ci-dessous :

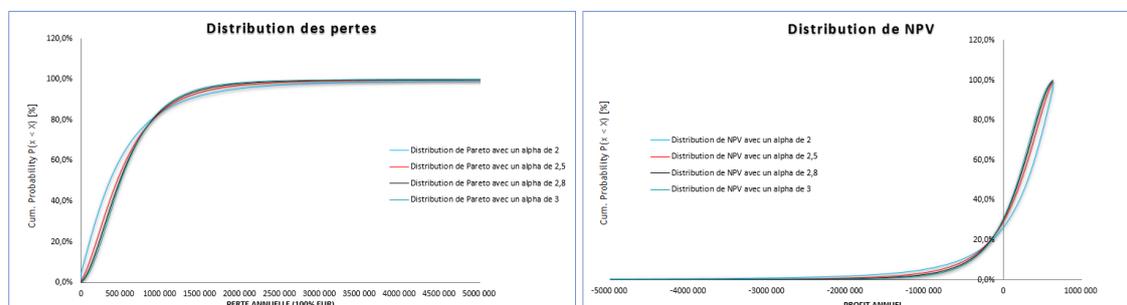
Paramètre loi log normale		(Montants en milliers)								
Moyenne	Ecart-type	Volatilité des pertes	Capital alloué	Capital/Prime	NPV	Coût du capital	Capital/Facteur temp	Facteur temp	RORAC	PE cible
70%	10%	50	51	10%	-1	5	46	1,12	-0,8%	-1,0%
70%	15%	75	82	16%	-1	9	73	1,13	-0,4%	-1,5%
70%	20%	100	116	23%	-1	12	103	1,13	-0,3%	-2,0%
70%	25%	125	153	31%	-1	16	135	1,13	-0,1%	-2,6%
70%	30%	150	192	38%	-1	20	169	1,13	-0,1%	-3,3%

Le capital alloué est naturellement croissant avec la volatilité. En effet, lorsque la volatilité est élevée, l'incertitude sur le résultat est plus importante avec une forte possibilité de gains mais également de pertes. Cette forte possibilité de pertes résulte donc à l'immobilisation d'un capital plus important. Plus précisément, dans le modèle SCOR, une augmentation de la volatilité pour une même perte attendue entraîne une augmentation plus que proportionnel du capital alloué. Ainsi, dans l'exemple présenté, une volatilité $\times 2$ ou $\times 3$ induit un capital $\times 2,3$ et $\times 3,8$ respectivement.

Traité en excédent de sinistre

La sévérité est modélisée à partir d'une loi de Pareto dont nous avons fait varier le paramètre alpha. Quant à la fréquence, elle suit une loi de poisson dont le paramètre est ajusté par rapport au paramètre alpha, de manière à conserver le même taux pur. Théoriquement, pour un paramètre $\alpha \leq 2$, la variance de la loi de Pareto est infinie. Ici, la variance calculée pour un paramètre de 2 correspond simplement à la variance de la distribution obtenue à l'issue de la simulation de Monte Carlo. La volatilité est décroissante avec le paramètre alpha. Plus le paramètre alpha est faible, plus la volatilité est importante.

Les distributions de pertes et de résultats obtenues sont représentées sur les graphiques ci-dessous :



Les résultats obtenues sont les suivants :

Sévérité		Fréquence	(Montants en milliers)								
Paramètre de la loi de Pareto		Paramètre de la loi de Poisson	Volatilité des pertes	NPV	Capital alloué	Coût du capital	Capital/Facteur temp	Capital/Prime	Facteur temp	RORAC	PE cible
Seuil	Apha										
2 000 000	2,0	3,04	1 270	98	1 859	198	1 505	262%	1,23	4,3%	-10,9%
2 000 000	2,5	4,56	681	99	1 043	111	852	147%	1,22	7,6%	-1,3%
2 000 000	2,8	5,47	546	98	811	86	666	114%	1,22	9,7%	1,3%
2 000 000	3,0	6,08	490	99	702	75	577	99%	1,22	11,2%	2,6%

Le capital alloué est dans ce cas également croissant avec la volatilité. Ce qui comme expliqué plus haut est tout à fait naturel. Seulement ici, l'augmentation du capital est sensiblement proportionnel à l'augmentation de la volatilité. Cette augmentation proportionnelle du capital avec la volatilité provient du type de distribution utilisé pour les modèles non-proportionnels qui est une distribution fréquence-sévérité (pour rappel, Poisson-Pareto ici) tandis-que pour les modèles proportionnels une distribution agrégée est utilisée avec fréquemment la loi lognormal.

5.2.2.1 Sensibilité par rapport à la taille

L'idée ici est de mesurer sur une même structure de réassurance, la contribution au risque global de l'entreprise d'une petite cédante qui souscrit peu de polices par rapport à celle d'une grande cédante avec une assiette de prime et un nombre de polices souscrits importants. Pour ce faire, nous avons considéré une tranche illimitée xs de 10 millions cotée suivant le benchmark marché. La seule différence provient de l'assiette de prime qui a été fixée à 10 millions pour la petite cédante et à 100 millions pour la grande. Pour la mesure de la performance, nous supposons que ces deux traités sont placés au même tarif qui est de 1,30%.

Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

	Assiette de primes	Taux de Prime pure	Résultat attendu	Capital alloué	Coût du capital	taux de prime technique	Prime technique	Ratio combiné	RORAC
Petite cédante	10 000 000	0,70%	15 933	1 843 192	174 092	3,06%	305 733	64,13%	1,15%
Grande cédante	100 000 000	0,70%	319 574	4 966 895	469 130	1,47%	1 466 173	64,13%	5,32%

Proportionnellement à la prime attendue, la petite cédante requiert davantage de capital que la grande cédante. Ceci s'explique d'une part par une volatilité relative à la charge sinistre plus importante pour la petite Cédante que pour la grande et d'autre part par le fait que le poids des frais internes qui entrent dans l'estimation du résultat est plus important pour les petites cédantes que pour les grandes. En effet, comme présenté précédemment plus la volatilité est élevée plus le capital alloué est important. Par ailleurs, les frais internes comportent une part fixe incompressible qui dépend de la ligne de *business* et qui est identique quelque soit la taille de la cédante. Cette part fixe impacte sensiblement la distribution de résultats des petites cédantes et induit un ratio capital/prime plus important.

5.2.2.2 Sensibilité par rapport à la durée des sinistres

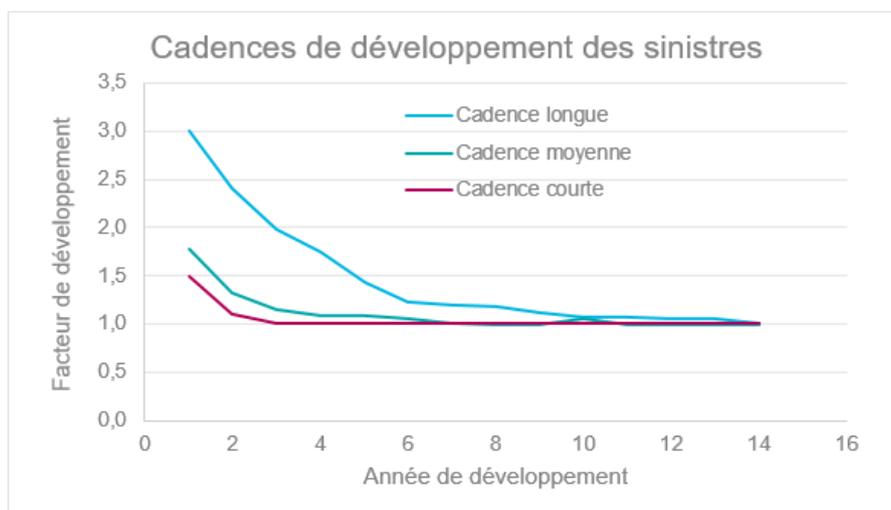
Nous avons vu que dans la méthode d'allocation basée sur les fonctions de diversification plus la durée d'incertitude sur le résultat final d'un traité est longue, plus le besoin en capital de ce traité est important. La durée des sinistres est calculée à partir de la cadence de développement de la charge totale des sinistres. Plus les sinistres mettent du temps à se développer plus la durée est élevée.

Lors de la tarification d'un traité proportionnel ou d'un traité non-proportionnel d'une branche longue, la cadence de développement de la charge est définie à partir d'une méthode Chain-Ladder. Lorsque nous disposons de données suffisantes, la cadence empirique de la cédante est utilisée sinon, nous considérons des cadences de marché par branche et par tranche tarifée. Cette cadence a un impact direct non seulement sur la charge ultime et la distribution des pertes mais également sur la distribution des NPV et donc du montant de capital alloué.

Par ailleurs, la durée est prise en compte au niveau du facteur temps qui est un facteur multiplicatif du capital alloué. Le capital alloué est de ce fait très sensible à la durée.

Afin d'analyser la sensibilité de l'allocation du capital à la durée des sinistres, nous avons considéré pour une même distribution de pertes donnée pour la tranche 1 million XS 1.5 millions, différentes cadences de développement des sinistres.

Le graphique ci-dessous montre les cadences retenues :



Sur la base de ces cadences nous obtenons ainsi les résultats suivants :

	Taux de Prime pure	Résultat attendu	Facteur temps	Capital alloué	Ratio capital/prime	Coût du capital	taux de prime technique	Prime technique	Ratio combiné	RORAC
Cadence courte	0,91%	128 454	1,14	1 070 472	70,63%	101 108	1,27%	1 485 275	91,91%	9,39%
Cadence moyenne	0,91%	128 454	1,61	1 448 295	95,56%	136 793	1,31%	1 524 926	91,91%	7,07%
Cadence longue	0,91%	128 454	2,94	2 391 495	157,79%	225 880	1,39%	1 623 911	91,91%	4,49%

Plus la durée est longue plus le facteur temps est élevé et plus le capital alloué est important. Dans l'exemple présenté, entre une durée longue et une durée courte, le capital alloué est doublé ce qui induit une augmentation de la prime technique toutes choses égales par ailleurs de près de 10%. Cependant, le RORAC est divisé par 2. En pratique, ceci peut avoir un impact sur les décisions de souscription.

5.2.2.3 Sensibilité par rapport à la structure du programme

Nous savons que plus la tranche est haute plus la volatilité est importante et plus on alloue de capital. Nous savons également que plus la capacité est élevée plus l'allocation du capital est importante. Nous avons voulu mesurer ici la sensibilité de l'allocation du capital à la structure du programme de réassurance. Cette analyse a été effectuée pour les traités non-proportionnels. La structure désigne les niveaux des tranches d'excédent de sinistres. Nous avons considéré pour un programme automobile, une tranche illimitée XS 2M découpée en une, deux ou trois tranches. La prime pure globale est alors identique quelque soit la structure considérée.

Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

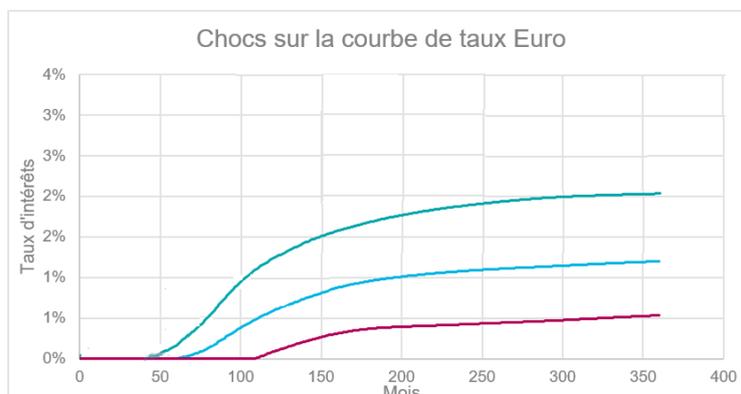
(en milliers)

	Tranche	Taux pur	Facteur temps	Perte attendue	Capital alloué	Coût du capital	Taux technique
T1	ill XS 2	12,16%	1,22	6 079	10 495	1 117	14,5%
T1	3 XS 2	9,08%	1,19	4 539	3 028	322	9,7%
T2	ill XS 5	3,08%	1,24	1 539	8 895	945	5,1%
	ill XS 2	12,16%	1,22	6 078	11 924	1 268	14,8%
T1	6 XS 2	10,64%	1,19	5 322	4 247	452	11,5%
T2	ill XS 8	1,52%	1,25	759	7 643	814	3,3%
	ill XS 2	12,16%	1,23	6 080	11 890	1 266	14,8%
T1	8 XS 2	11,07%	1,19	5 533	4 789	510	12,1%
T2	ill XS 10	1,08%	1,26	542	7 024	748	2,7%
	ill XS 2	12,15%	1,23	6 075	11 813	1 258	14,8%
T1	3 XS 2	9,08%	1,19	4 542	3 039	324	9,7%
T2	5 XS 5	1,99%	1,19	996	2 411	257	2,6%
T3	ill XS 10	1,08%	1,26	538	6 950	740	2,6%
	ill XS 2	12,15%	1,22	6 077	12 400	1 320	14,9%
T1	3 XS 2	9,08%	1,19	4 541	3 034	323	9,7%
T2	3 XS 5	1,55%	1,19	776	1 670	178	2,0%
T3	ill XS 8	1,52%	1,25	758	7 742	824	3,2%
	ill XS 2	12,15%	1,23	6 075	12 446	1 325	14,9%
T1	6 XS 2	10,63%	1,19	5 317	4 252	453	11,5%
T2	2 XS 8	0,43%	1,20	216	852	91	0,7%
T3	ill XS 10	1,09%	1,26	545	7 101	756	2,7%
	ill XS 2	12,15%	1,23	6 078	12 205	1 300	14,9%

Les écarts constatés sur le taux pur sont dus à la simulation de Monte Carlo. Nous observons que la prime pure (perte attendue) diminue à mesure que nous montons dans les tranches. La volatilité et le capital alloué au risque diminuent également, mais à un rythme plus lent. Plus il y a de tranches, plus le capital alloué augmente. Un programme à 2 tranches entraîne une augmentation d'environ 13% du capital alloué par rapport à un programme à une seule tranche. Cette augmentation est de près de 18% lorsque le programme passe à 3 tranches. Néanmoins, l'augmentation du taux technique n'est que de 2% et de 3% pour un passage d'un programme à 1 tranche à un programme à 2 ou 3 tranches respectivement.

5.2.2.4 Sensibilité par rapport à la courbe des taux d'intérêts

Une devise est affectée à chaque traité. A chaque devise correspond une courbe des taux d'intérêts. Cette courbe de taux d'intérêt est utilisée pour escompter les cash-flows. Elle a donc un impact sur la forme de la distribution de NPV qui elle même détermine le montant de capital alloué. Afin de mesurer la sensibilité par rapport aux taux d'intérêts, nous avons considéré la courbe des taux euros comme courbe de référence puis nous y avons appliqué des chocs qui la modifieraient suivant deux scénarios différents. L'un des scénarios étant un choc à la hausse et l'autre, un choc à la baisse.



Sur la base de ces 3 courbes, nous avons tarifé les mêmes traités toutes choses égales par ailleurs et nous avons obtenu les résultats suivants :

Courbe de taux	Capital alloué	Capital/Prime attendue	NPV	Coût du capital	Coût du capital/Prime attendue	Facteur temp	ROE
Courbe Euro	65 563	86%	10 769	6 979	9,13%	3,52	13,0%
Courbe Euro avec choc à la hausse	63 488	83%	8 615	6 841	8,95%	3,46	15,5%
Courbe Euro avec choc à la baisse	67 705	89%	13 461	7 189	9,40%	3,58	10,5%

Lorsque les taux d'intérêts sont élevés, les produits financiers attendus, en investissant les primes avant de payer les sinistres, sont plus importants. Les affaires sont plus profitables et nécessitent donc d'immobiliser moins de capital. En revanche, lorsque les taux d'intérêts sont bas, la société dégage moins de revenus financiers et doit immobiliser plus de capital pour soutenir ses affaires. Nous observons donc naturellement qu'avec un choc à la hausse des taux d'intérêts, le capital alloué est moins important qu'avec la courbe originale ; et inversement, le capital alloué est plus important avec un choc à la baisse des taux d'intérêts.

Conclusion et perspectives

Ce mémoire a été réalisé dans un contexte où suite au rachat de CONVERIUM, le groupe SCOR disposait de deux méthodologies d'allocation du capital pour un seul outil de tarification Non-Vie. La comparaison des résultats de tarifications (par exemple le RORAC) était de ce fait difficile à réaliser. Par ailleurs, le capital alloué doit être cohérent avec le modèle interne qui est commun à toutes les entités du groupe. Nous avons travaillé sur la mise place d'un modèle révisé basé essentiellement sur l'un des deux modèles existants qui a été adopté à travers tout le groupe.

Ce modèle utilise le principe d'Euler pour allouer le capital. Le risque est mesuré à partir de l'XTVaR à 99% de la distribution de la valeur actuelle nette des résultats. Les dépendances au sein du portefeuille sont modélisées au moyen de copules dans une structure de dépendance hiérarchique que nous appelons l'arbre de dépendance du portefeuille. L'impact de la diversification s'exprime par la transformation d'une fonction de risque initiale en fonctions de risque transformées («fonctions de diversification») spécifiant la contribution d'un sous-portefeuille au risque de l'ensemble du portefeuille. Après une mise à jour de ces fonctions de diversification pour mieux refléter le portefeuille actuel de SCOR, ces dernières ont été approximées par une moyenne pondérée d'expected shortfall. Les poids appliqués aux différents quantiles retenus sont définis par portefeuille. Ceci permet de modéliser la contribution marginale d'un traité au risque global de l'entreprise sans avoir à faire tourner constamment le modèle interne au moment du renouvellement des traités.

Nous avons ensuite mesuré l'impact du passage de l'ancien modèle d'allocation du capital au modèle révisé sur le prix technique et sur les indicateurs de performances des traités individuels. ces études d'impacts ont servi de base à la souscription dans la mise en place de leur plan de souscription pour le renouvellement suivant. Enfin, nous avons effectué des tests de sensibilités sur certains paramètres de tarifications en fonction de la nature du traité et du risque couvert afin de nous assurer que le modèle fonctionnait correctement par rapport aux attentes. Nous avons ainsi pu constater que le capital alloué avec ce nouveau modèle est naturellement croissant avec la volatilité, ainsi que l'appartenance du traité soit à une LoB qui diversifie peu le portefeuille global soit à une branche longue avec délai important pour connaître la perte nette définitive. Cette méthode d'allocation du capital rassemble l'ensemble des propriétés désirables en particulier la compatibilité avec le RORAC qui stipule que lorsque la performance d'un traité est meilleure que celle du portefeuille global, souscrire ce traité contribuerait à augmenter la performance globale du portefeuille. Ainsi, l'allocation du capital basée sur la contribution à XTVaR permet de piloter efficacement l'optimisation du portefeuille.

Cependant, comme tout modèle, celui-ci a ses limites. Les erreurs de modélisations de la distribution de résultats des contrats en plus de conduire à la sousestimation ou à l'inverse à la surestimation du capital alloué à ces contrats sont également repercutés sur l'estimation du capital global de l'entreprise. L'estimation de l'erreur de modélisation et sa prise en compte

fait partie des axes de développement en cours du modèle. Une autre limite concerne le facteur temps qui est un coefficient multiplicatif du capital alloué défini à partir des cadences de développement des sinistres qui sont elles mêmes déterminées suivant l'une des méthodes suivantes :

- Cadences empiriques des traités individuels
- Cadences standards déduits à partir de la tarification de portefeuilles
- Cadences standards définis à partir des données de provisionnement.

Selon que l'une ou l'autre de ces méthodes soit retenue, cela peut avoir un impact significatif sur le capital alloué. Une solution pourrait être de retenir des cadences standards par branche pour l'ensemble des cédantes.

Bibliographie

- [1] SCOR. *Pricing Documentations*. Pricing Wiki, 2010.
- [2] P. EMBRECHTS. *Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques, Tools*. Princeton University Press, 2005.
- [3] P. ARTZNER, F. DELBAEN, J.-M. EBER, D. HEATH, *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, Vol.9. no.3, 1999.
- [4] M. DENAULT, *Coherent allocation of risk capital*, 2001.
- [5] D.TASCHE, *Allocating Portfolio Economic Capital to Sub-portfolios*. In : “Economic Capital : A Practitioner Guide”, A.Dev (ed.), Risk Books, 2004.
- [6] G. VENTER, *Capital Allocation Survey with commentary*, North American Actuarial Journal, vol.8, 2004.
- [7] J-L. BESSON, M. DACOROGNA, P. DE MARTIN, M. KASTENHOLZ et M. MOLLER, *Allocation du capital : cap sur la rentabilité du portefeuille*, SCOR, 2008.
- [8] M.DACOROGNA, et D. CANESTRARO, *The Influence of Risk Measures and Tail Dependencies on Capital Allocation*, [SCOR Paper] 2010.
- [9] J. CORRIGAN, J. DE DECKER, T. HOSHINO, T. VAN DELFT, H. VERHEUGEN, *Aggregation of risk and allocation of capital*, [Milliman], 2009.
- [10] SCOR, *SCOR Internal Models : Summary Note*, 30 March 2011.
- [11] SCOR, *Global Capital Allocation. From SCORs Risk Based Capital to Capital Allocation in Pricing : Principles, Process, Methodology*, May 2010
- [12] Ph. ARBENZ D. CANESTRARO, *PrObEx, A new method for the calibration of copula parameters from prior information, observations and expert opinions*, ETH Zurich SCOR, 2010.
- [13] A. FERRIERO *Solvency capital estimation, reserving cycle and ultimate risk*, Insurance Mathematics and Economics, vol. 68 (2016), 162-168.
- [14] Ph. ARBENZ, *Framework document for the aggregation of non-life insurance risks : Methods and concepts*, [SCOR Paper], 2011
- [16] Ph. ARBENZ, *Capital allocation new proposal*, SCOR, 2013
- [17] A. ROSERO, *Capital allocation fast computation*, 2014
- [18] Ph. ARBENZ, *Multivariate Modelling in Non-Life Insurance*, PHD thesis, 2012
- [19] S. DECUPÈRE, *Agrégation des risques et allocation du capital sous Solvabilité II*, Mémoire d’actuariat, 2011
- [20] D.CADOUX, J.M.LOIZEAU, *Dépendances au sein d’un portefeuille d’assurance non vie : cas pratique d’application de la théorie des copules à la détermination du besoin en fonds propres*, mémoire IA-CEA, 2004.

Méthodes de revalorisation des données et de projection à l'ultime de la charge sinistre

A.1 Revalorisation des primes

En général, les assiettes de primes sont revalorisées selon l'une des deux approches suivantes :

Approche basée sur les unités d'exposition ou nombre de polices de la cédante

La Prime *As If* notée $EPI_{as\ if}$, correspond à la Prime Moyenne de l'année de cotation n pondérée par les unités d'exposition de l'année considérée :

$$EPI_{as\ if} = \text{Unités d'exposition}_i \times \frac{EPI_n}{\text{Unités d'exposition}_n}$$

La revalorisation des primes doit être faite de préférence pour chaque cédante individuellement, chacune d'entre elles ayant une politique tarifaire spécifique (segmentations différentes, avantage de fidélité, compétitivité. . .). Ainsi, cette méthode est privilégiée lorsque l'on dispose d'une information suffisante.

Approche basée sur l'indice de Marché

La prime *As If* est la prime historique indexée par l'évolution de l'indice de marché spécifique à la branche tarifée.

$$EPI_{as\ if} = EPI_{historique_i} \times \frac{\text{Indice marché}_n}{\text{Indice marché}_i}$$

A.2 Revalorisation des sinistres

L'indexation des sinistres peut être faite suivant une méthode prospective ou rétrospective.

Indexation suivant la méthode prospective

Cette méthode consiste à projeter les sinistres dans le futur en fonction de leur année de développement à partir de la formule suivante :

- $X_{i,j}^* = X_{i,j} \times \frac{\text{Indice sinistre}_{n+j}}{\text{Indice sinistre}_{i+j}}$ pour un traité proportionnel, avec $X_{i,j}$ le développement j de charge agrégée de l'année i et n, l'année de cotation.
- $S_{i,j,k}^* = S_{i,j,k} \times \frac{\text{Indicesinistre}_{n+j}}{\text{Indice sinistre}_{i+j}}$ pour un traité non proportionnel $S_{i,j,k}$ le développement j du k-ième sinistre rattaché à l'année i.

Indexation suivant la méthode rétrospective

D'après cette méthode, les sinistres sont revalorisés en fonction de l'année de rattachement. Cette méthode admet implicitement que l'inflation future des sinistres sera analogue à celle survenue entre l'année de survenance et la dernière année de développement connue.

- Dans le cas d'un traité proportionnel, la formule est la suivante :
 $X_{i,j}^* = X_{i,j} \times \frac{\text{Indice sinistre}_n}{\text{Indice sinistre}_i}$ avec $X_{i,j}$ le développement j de charge agrégée de l'année i et n, l'année de cotation.
- Dans le cas d'un traité non proportionnel, nous avons : $S_{i,j,k}^* = S_{i,j,k} \times \frac{\text{Indice sinistre}_n}{\text{Indice sinistre}_i}$ avec $S_{i,j,k}$ le développement j du k-ième sinistre rattaché à l'année i.

Les tableaux ci-dessous illustrent ces deux méthodes de revalorisation dans le cadre de la tarification d'une branche à développement long :

Revalorisation rétrospective					Revalorisation prospective				
Exercice de rattachement	Année de développement				Exercice de rattachement	Année de développement			
	0	1	2	3		0	1	2	3
2011	$\frac{I_{2015}}{I_{2011}}$	$\frac{I_{2015}}{I_{2011}}$	$\frac{I_{2015}}{I_{2011}}$	$\frac{I_{2015}}{I_{2011}}$	2011	$\frac{I_{2015}}{I_{2011}}$	$\frac{I_{2016}}{I_{2012}}$	$\frac{I_{2017}}{I_{2013}}$	$\frac{I_{2018}}{I_{2014}}$
2012	$\frac{I_{2015}}{I_{2012}}$	$\frac{I_{2015}}{I_{2012}}$	$\frac{I_{2015}}{I_{2012}}$		2012	$\frac{I_{2015}}{I_{2012}}$	$\frac{I_{2016}}{I_{2013}}$	$\frac{I_{2017}}{I_{2014}}$	
2013	$\frac{I_{2015}}{I_{2013}}$	$\frac{I_{2015}}{I_{2013}}$			2013	$\frac{I_{2015}}{I_{2013}}$	$\frac{I_{2016}}{I_{2014}}$		
2014	$\frac{I_{2015}}{I_{2014}}$				2014	$\frac{I_{2015}}{I_{2014}}$			

A.3 méthode de projection des charges à l'ultime

Il existe plusieurs méthodes de projection des charges à l'ultime. Ces méthodes sont regroupées sous deux grandes catégories : les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques.

A.3.1 Les méthodes déterministes

Les méthodes déterministes permettent de déterminer le niveau de provisions nécessaires mais ne fournissent aucune information sur la distribution sous-jacente des réserves. Parmi elles, on compte la méthode Chain-Ladder, la méthode de Bornhuetter-Fergusson etc... La méthode de Chain-Ladder est la seule méthode détaillée ici.

La méthode de Chain-Ladder

Cette méthode est une des plus anciennes et est la plus utilisée dans le monde de l'assurance et de la réassurance. Elle est intuitive et très simple à comprendre. Il s'agit d'utiliser les données du passé pour étudier le comportement des sinistres et de calculer une tendance dans leurs développements. Cette tendance est ensuite appliquée aux dernières données comptabilisées afin d'estimer leurs valeurs futures.

Hypothèses :

- Le modèle est stationnaire
- Les taux moyens d'augmentation du cumul des sinistres sont stables dans le temps
- La liquidation future sera similaire à la liquidation passée

Notations :

- $i=1, \dots, I$ indique les années de rattachement ou de survenance des sinistres
- $j=1, \dots, J$ indique les années de développement des sinistres
- $C_{i,j}$ désigne le montant de sinistres cumulés correspondant à l'année de survenance i après j années de développement.

Nous supposons que le montant $C_{i,j+1}$ est proportionnel au montant $C_{i,j}$ et nous posons :

$$C_{i,j+1} = f_j \cdot C_{i,j}$$

Où f représente le coefficient de déroulement ou de passage d'une année de développement à une autre. De l'expression ci-dessus on déduit $f_j = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$

En supposant que les facteurs de développement sont égaux pour chaque année de survenance, on obtient :

$$f_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}$$

A l'aide des facteurs de développement, on peut estimer la charge de la partie non observée du triangle de développement. Ainsi, la charge ultime de chaque année de survenance est donnée par :

$$C_{i,J} = f_{J-1} \cdots f_{J+1-i} C_{i,J+1-i}$$

Le coefficient multiplicatif de la dernière année de rattachement est le produit de $J-1$ estimations. Les provisions afférentes à l'année de survenance i découlent du calcul suivant :

$$R_i = C_{i,J} - C_{i,J+1-i} = (f_{J-1} \cdots f_{J+1-i} - 1) C_{i,J+1-i}$$

La provision totale à constituer est alors : $R_i = \sum_{i=1}^I R_i$

Prenons l'exemple du triangle de charge présenté ci-après :

		Année de développement					
		Dev 12m	Dev 24m	Dev 36m	Dev 48m	Dev 60m	Dev 72m
Année de survenance	2010	14 622	15 016	15 617	16 085	16 407	16 571
	2011	8 821	10 266	10 574	10 785	10 893	
	2012	8 576	10 059	10 260	10 363		
	2013	9 166	10 672	10 885			
	2014	13 472	16 346				
	2015	10 761					

Le facteur de passage de la première année de développement à la deuxième année est obtenu comme suit :

$$f_1 = \frac{14622+8821+8576+9166+13472}{15016+10266+10059+10672+16346} = 1.141$$

Les facteurs de passage suivants sont calculés de la même manière et nous avons :

$$f_2 = 1,029 ; f_3 = 1,021 ; f_4 = 1,016 \text{ et } f_5 = 1,010$$

$$\text{Charge ultime}_{2015} = 10761 \prod_{i=1}^5 f_i = 13239$$

		Année de développement						Charge ultime
		Dev 12m	Dev 24m	Dev 36m	Dev 48m	Dev 60m	Dev 72m	
Année de survenance	2010	14 622	15 016	15 617	16 085	16 407	16 571	16 571
	2011	8 821	10 266	10 574	10 785	10 893	11 002	11 002
	2012	8 576	10 059	10 260	10 363	10 528	10 634	10 634
	2013	9 166	10 672	10 885	11 119	11 297	11 410	11 410
	2014	13 472	16 346	16 816	17 177	17 452	17 626	17 626
	2015	10 761	12 277	12 630	12 902	13 108	13 239	13 239

LDF	1,141	1,029	1,021	1,016	1,010
LDF cumulés	1,230	1,078	1,048	1,026	1,010

Pour les années récentes, la méthode de Chain-Ladder est peu utilisée pour estimer les réserves car elle fournit des résultats trop incertains.

A.3.2 Les méthodes stochastiques

Les méthodes stochastiques contrairement aux méthodes déterministes permettent d'évaluer l'incertitude associée à la prédiction du montant des réserves. Dans les modèles stochastiques, les hypothèses utilisées peuvent être explicitées et au moins partiellement validées. Il est également possible d'estimer des intervalles de confiance pour les paramètres d'intérêt liés à la provision. Et enfin, la sinistralité des exercices futurs peut être simulée à l'aide de méthode Monte-Carlo. On dénombre parmi ces méthodes, la méthode de Mack et le bootstrap.

La méthode de Mack

Le modèle de Mack est une adaptation stochastique du modèle de Chain Ladder. Le modèle de Mack donne les mêmes résultats que Chain Ladder mais il permet en plus d'évaluer l'erreur de prédiction présente dans l'estimation des provisions.

Hypothèses

Le modèle de Mack repose sur trois hypothèses rappelés ci-dessous :

- Indépendance des années de survenance, autrement dit $(C_{i,j})_{j=1,\dots,J}$ et $(C_{i',j})_{j=1,\dots,J}$ sont indépendants pour tout $i' \neq i$
- Pour $1 \leq j \leq J-1$, il existe un réel f_j tel que pour tout i : $E(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$
- Pour $1 \leq j \leq J-1$, il existe un réel σ_j^2 tel que pour tout i : $V(C_{i,j+1} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma_j^2 C_{i,j}$

Les facteurs de développement f_j sont estimés par : $\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{I-j} C_{i,j}}$

Les paramètres de volatilité σ_j sont estimés par : $\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{J-j-1} \sum_{i=1}^{J-j} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$

La charge ultime associée à l'année de survenance i s'obtient par :

$$C_{i,J} = f_{J-1} \cdots f_{J+1-i} C_{i,J+1-i}$$

Les réserves pour l'année de survenance i sont données par : $R_i = C_{i,J} - C_{i,J+1-i}$

L'erreur de prédiction notée MSEP (Mean Square Error of Prediction) est mesurée par l'écart quadratique moyen conditionnel entre la variable et son prédicteur.

$$\begin{aligned} MSEP &= E[(R - \hat{R})^2] = E[(R - E[R] | \text{ar}) + E[R] - E[R]]^2 \\ &= MSE + Var(R) \end{aligned}$$

Le MSEP peut être décomposé en une erreur de process et en une erreur de prédiction.

Les méthodes d'allocation du capital

B.1 Les méthodes d'allocation proportionnelles

Les méthodes d'allocation proportionnelles du capital consistent à définir une mesure de risque ρ puis à allouer le capital à chaque sous portefeuille $i = 1, \dots, n$ suivant la formule : $K_i = \alpha \rho(X_i)$. Le terme α est défini tel que l'axiome l'allocation complète soit satisfait. On a :

$$K_i = \frac{K}{\sum_j \rho(X_j)} \rho(X_i), i = 1, \dots, n$$

Parmi les méthodes d'allocation proportionnelles on distingue :

- La méthode de la décote (Haircut allocation en anglais) : $\rho(X_i) = F_{X_i}^{-1}(p)$
- La méthode des quantiles : $\rho(X_i) = F_{X_i}^{-1}(F_{X^c}(K))$
- La méthode de la covariance $\rho(X_i) = Cov[X_i, X]$
- La méthode du CTE $\rho(X_i) = E(X_i | X > F_X^{-1}(p))$

Si la mesure de risque choisie est invariante en loi, alors les dépendances entre les risques X_i n'ont pas d'influence sur les méthodes d'allocation proportionnelles.

B.2 Les méthodes d'allocation marginales

L'allocation marginale encore appelée allocation incrémentale consiste à mesurer le capital économique total de l'entreprise avec ou sans prise en compte d'un sous portefeuille i donné puis à allouer à ce sous portefeuille un montant de capital économique correspondant à la différence entre les deux résultats obtenus. Les méthodes d'allocation marginales les plus connues sont celles de Myers-Read et d'Euler que nous détaillons ci-après.

B.2.1 La méthode d'allocation de Myers-Read

La méthode d'allocation du capital de Myers-Read (2001) est basée sur la tarification d'options. Leur modèle suppose qu'un contrat d'assurance ne peut pas garantir à 100% l'indemnisation des sinistres du fait de l'existence d'un certain niveau de risque de défaut de l'assureur. Ils imaginent alors la possibilité pour une société d'assurance d'acheter une option

lui permettant de transférer son passif à un tiers en cas de défaut. Le coût de cette option de vente serait alors lié au volume de risques que l'entreprise aurait dans son portefeuille (coût par unité de risque). Myers et Read proposent donc d'allouer la totalité du capital de l'entreprise à ses différents secteurs d'activité, chaque ligne recevant un montant de capital égal au coût de l'option de défaut par unité de risque. La méthode d'allocation du capital entre les lignes de métier de Myers-Read est ainsi basée sur la formule suivante : $K_i = \frac{\partial X_i}{\partial K X_i}$

Où :

- K représente le capital total de l'entreprise,
- K_i le capital du sous portefeuille i
- et X_i la distribution de pertes du sous portefeuille i .

Cette formule suppose que le capital total est déterminé tel que lorsque la perte attendue augmente, l'augmentation du capital nécessaire pour couvrir cette perte devrait être équivalente à la proportion $\frac{\partial X_i}{\partial K}$.

Ruhm et Mango (2003) ont défini un algorithme permettant de mettre en œuvre facilement la méthode d'allocation de Myers-Read. Une alternative à leur méthode a été proposée de manière indépendante par Kreps (2003). Dans ces algorithmes que nous ne détaillons pas ici, la charge totale du portefeuille est calculée à partir d'une mesure de risque spécifiée. Puis, cette charge est répartie entre les différentes composantes du portefeuille sur la base de probabilités conditionnelles.

B.3 Les méthodes d'allocation inspirées de la théorie des jeux coopératifs

De nombreux auteurs ont abordé le problème d'allocation du capital en se basant sur la théorie des jeux coopératifs. La théorie des jeux est l'analyse des comportements ou des adoptées par des agents économiques appelés joueurs pour atteindre leurs objectifs personnels. On parle de jeux coopératifs ou coalitionnels, lorsque les joueurs peuvent former des coalitions et adopter des stratégies non plus individuelles mais de groupe dans le but de maximiser leur profit conjoint. Les méthodes les plus populaires parmi les propositions de méthodes dérivées de la théorie des jeux coopératifs sont les méthodes dites de Shapley et d'Aumann-Shapley.

Le problème d'allocation vu par la théorie des jeux coopératifs

Plaçons-nous dans le cadre d'un portefeuille dont le capital total doit être réparti équitablement entre ses $N = (1, \dots, n)$ secteurs d'activités ou lignes de métiers (représentant ici les joueurs). X_i est une variable aléatoire matérialisant la perte éventuelle d'une ligne d'activité i dont le capital correspond en principe à $\rho(X_i)$. Or, chaque ligne d'activité voudrait se voir affecter le montant de capital le plus faible possible. Nous supposons que pour arriver à cette fin, les lignes d'activité ont la possibilité de s'associer et de former des sous-portefeuilles représentant des coalitions (ce sont des sous-ensembles $S \subseteq N$). Le capital économique pour chaque coalition S , est donné par la fonction caractéristique $v(S) = \rho(\sum_{i \in S} X_i)$. Nous cherchons à déterminer le capital $K_i, i \in N$ à allouer à chaque ligne d'activité à l'issue du jeu.

B.3. Les méthodes d'allocation inspirées de la théorie des jeux coopératifs 117

La fonction caractéristique v vérifie la propriété de sous-additivité c'est-à-dire que le capital total correspondant à une union de coalitions doit être inférieur à la somme des capitaux de l'ensemble de ces sous-coalitions disjointes. Formellement, ceci se traduit par :

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) \forall S, T \subseteq N \text{ et } S \cap T = \emptyset$$

Par ailleurs, l'ensemble des n valeurs (K_1, \dots, K_n) doit vérifier les conditions suivantes :

$K_i \leq v(i), \forall i \in N$: Cette condition est basée sur la rationalité individuelle des joueurs et sur l'intérêt de l'existence de la coalition. En d'autres termes, aucune ligne d'activité n'acceptera une allocation lui attribuant plus de capital que si elle agissait seule.

$\sum_{i \in N} K_i = v(N)$: Cette condition signifie simplement que le capital de l'entreprise doit être entièrement réparti entre les lignes d'activités.

B.3.1 La méthode d'allocation de Shapley

De même que la méthode d'allocation d'Euler trouve son fondement dans le théorème d'Euler, la méthode d'allocation de Shapley est basée sur la valeur de Shapley introduite par Lloyd Shapley [1953] et fournit une solution unique au problème posé précédemment.

La valeur de Shapley notée ici $K_i^S h$ est donnée par l'expression suivante :

$$K_i^S h = \frac{1}{n!} \sum_{S \in C_i} (s-1)!(n-s)! (\rho(\sum_{j \in S} X_j) - \rho(\sum_{j \in S/i} X_j)), i \in N$$

Où :

- n représente le nombre total de joueurs et C_i est l'ensemble des coalitions contenant i
- $\rho(\sum_{j \in S} X_j) - \rho(\sum_{j \in S/i} X_j)$ représente la contribution marginale du joueur i à la coalition S obtenue, dans le cas qui nous intéresse, par la différence entre le capital de cette coalition en présence et en absence de la ligne d'activité i .

Equivalence entre les fonctions de diversification et la TVaR pondérée : Représentation graphique

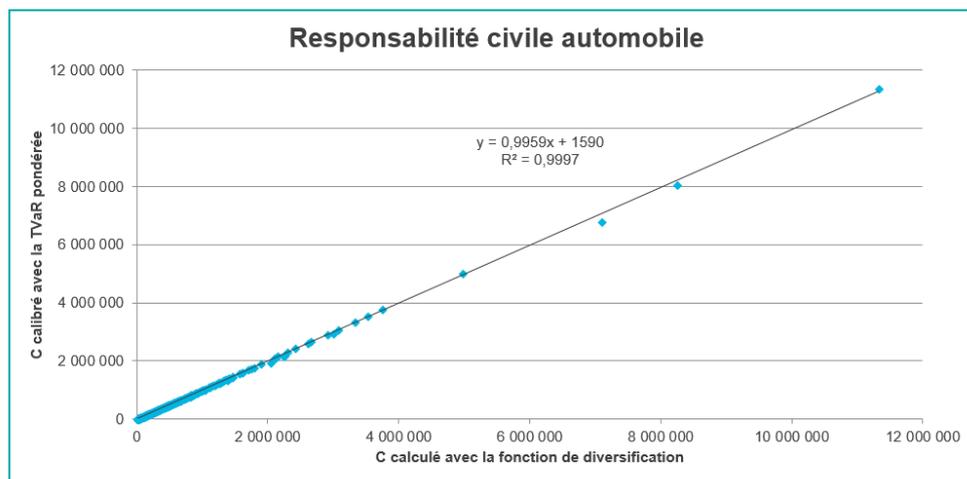


FIGURE C.1 – Capital TvaR pondérée VS Capital fonction de diversification pour la RC Automobile

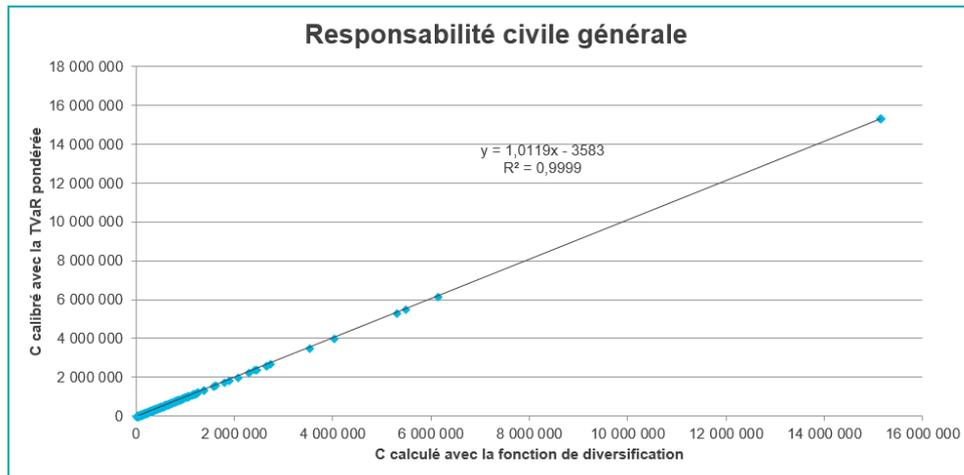


FIGURE C.2 – Capital TvaR pondérée VS Capital fonction de diversification pour la RC Générale

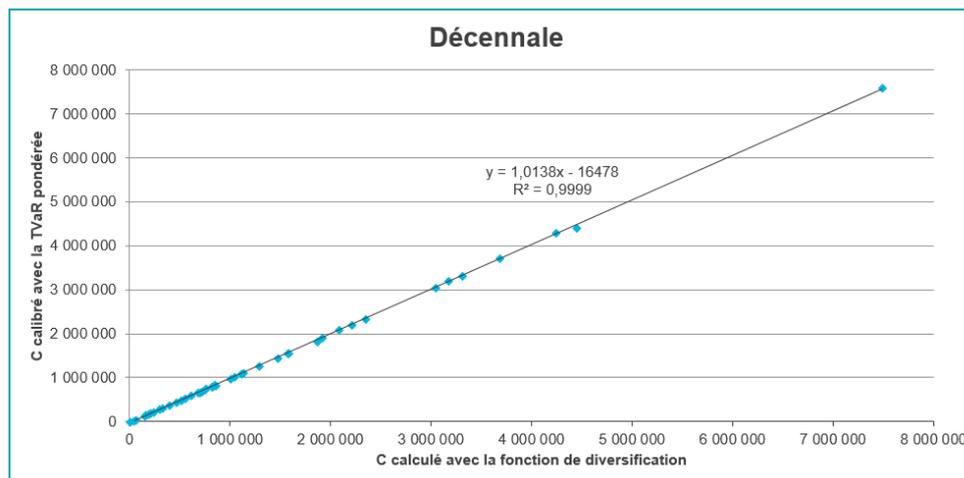


FIGURE C.3 – Capital TvaR pondérée VS Capital fonction de diversification pour la Décennale

Table des sigles et acronymes

DEL	<i>Discounted Expected Loss</i>
EPI	<i>Expected Premium Income</i>
FGU	<i>From Ground Up</i>
LOB	<i>Line of Business</i>
MCR	<i>Minimum Capital Requirement</i>
NPV	<i>Net Present Value</i>
RAC	<i>Risk Allocated Capital</i>
ROE	<i>Return On Equity</i>
RORAC	<i>Return On Risk Adjusted Capital</i>
SCR	<i>Solvency Capital Requirement</i>
TRAC	Time an Risk Allocated Capital
XS	Excédent de sinistre