



**Mémoire présenté**  
**devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances**  
**pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**  
**le 21 novembre 2011**

Par : Thibault GAUTHIER

Titre: Développement d'un Générateur de Scénarii Economiques au sein d'une  
compagnie d'assurance-vie.

Confidentialité :  NON     OUI (Durée :  1 an     2 ans)

*Membre du jury de l'Institut des Actuares*

*Entreprise :*

*Membres du jury I.S.F.A.*

M. Jean Claude AUGROS  
M. Alexis BIENVENÛE  
M. Areski COUSIN  
Mme Diana DOROBANTU  
Mme Anne EYRAUD-LOISEL  
M. Nicolas LEBOISNE  
M. Stéphane LOISEL  
Mlle Esterina MASIELLO  
Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS  
M. Frédéric PLANCHET  
M. François QUITTARD-PINON  
Mme Béatrice REY-FOURNIER  
M. Pierre RIBEREAU  
M. Christian-Yann ROBERT  
M. Didier RULLIERE  
M. Pierre THEROND

*Directeur de mémoire en entreprise :*  
Thibault GUENEE

*Invité :*

**Autorisation de mise en ligne sur  
un site de diffusion de documents  
actuariels (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

*Secrétariat*

Mme Marie-Claude MOUCHON

*Bibliothèque :*

Mme Michèle SONNIER

# REMERCIEMENTS

---

Il me semble opportun de commencer ce mémoire par des remerciements très sincères, envers ceux qui m'ont beaucoup appris au cours de mon année d'alternance au Conservateur, mais aussi à ceux qui ont eu la gentillesse de faire de ce stage un moment très profitable.

Aussi, je remercie Thibault Guenee, mon maître de stage et directeur de mémoire, pour m'avoir accompagné tout au long de cette expérience professionnelle avec beaucoup de patience et de pédagogie, mais aussi pour m'avoir suivi après ce stage, à l'aube de ma vie professionnelle. Il a su me guider dans mes recherches et m'apporter une vision pragmatique et professionnelle sur cette étude.

Je remercie également Alexandre et Léo, gestionnaires actif-passif au sein du service sous-direction des investissements – ALM pour tous les conseils qu'ils ont su me prodiguer ; et Gilles Ulrich, directeur général, pour m'avoir accueilli si chaleureusement au Conservateur.

Enfin, je remercie toute l'équipe pédagogique de l'ISFA et notamment Frédéric Planchet, qui m'a souvent éclairé sur des aspects techniques au cours de mon année d'alternance, et Alexis Bienvenue qui a suivi mes avancées dans les recherches et la rédaction de ce rapport.

# RESUME

---

**Mots clés : Solvabilité II, générateur de scénarii stochastiques, modélisation d’actifs, provisions techniques, Best Estimate, capital règlementaire, structure par terme des taux d’intérêts, taux nominaux, taux réels, inflation.**

Dans le domaine assurantiel, la mise en place de la réforme Solvabilité II démocratise le développement de modèles prospectifs. En effet, du fait de l’inversion du cycle de production, seule une vision à long terme des engagements et de la performance des actifs permet d’approcher la rentabilité d’un produit.

Les modèles prospectifs consistent essentiellement à projeter les cash-flows futurs et les interactions actif-passif. Ces modèles tiennent compte du caractère incertain des flux et des interdépendances entre les risques. Compte tenu de la complexité des calculs, les études déterministes se voient progressivement remplacées par des modèles stochastiques plus sophistiqués. C’est pourquoi l’utilisation de scénarii d’actifs stochastiques, données essentielles au modèle, est aujourd’hui indispensable dans les référentiels Solvabilité II et MCEV.

Nous nous sommes intéressés ici au développement d’un Générateur de Scénarii Economiques (ESG) permettant de fournir les scénarii d’actifs nécessaires aux calculs du Best Estimate et des charges en capital règlementaires (i), mais aussi de remplacer les études ALM jusqu’alors déterministes par des modèles stochastiques reflétant les évolutions historiques des indices et taux considérés (ii).

Tout au long de ce mémoire, nous présentons le cadre prudentiel dans lequel s’inscrit ce projet, puis les différentes approches que nous avons retenues, des hypothèses aux tests de validation des scénarii, en passant par les méthodologies de calibrage et les techniques de simulation.

Enfin, ce mémoire a vocation à présenter de manière pragmatique l’intérêt, pour une compagnie d’assurance vie de taille moyenne, de développer son propre ESG, les problématiques qu’un tel projet peut soulever et les démarches que nous avons eu au Conservateur.

# ABSTRACT

---

**Keywords: Solvency II, Economic Scenarios Generator, assets simulation, technical reserves, Best Estimate, Capital required, stock exchange indicators, term structure of interest rates, nominal rates, real rates, inflation.**

In the world of insurance, the reform Solvency II democratizes the development of long-term models. Indeed, due to the reversal of the production cycle, the performance of a product can only be approached throughout a long-term vision of commitments and assets performance.

Long-term simulation consists mainly in forecasting the future cash flows and assets-liabilities correlations. The model will not only have to take into account the uncertain character of amounts and dates of the future treasury flows, but also interdependences between risks. Considering the mathematical complexity of these required methods, determinist studies are disappearing to be progressively replaced by more sophisticated stochastic models. This is the reason why the use of asset scenarios seems to be necessary in the universes of Solvency II and MCEV.

Although, this memo deals with the development of an Economic Scenarios Generator (ESG) which enables to provide the assets scenarios necessary to determine the Best Estimate and Solvency Capital Requirement (i), but also to replace deterministic ALM studies with sophisticated models reflecting the historical values of considered indicators and rates (ii).

Throughout this memo, we will first introduce the context of this study, then we will expose the different approaches that must be taken into account, from hypotheses to statistical tests on scenarios, and considering the calibration and simulation methods.

Finally, this memo proposes a pragmatic way to develop an ESG in a medium size life insurance company, and the main problems we can be confronted.

# SOMMAIRE

---

<b>INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>8</b>
<b>CHAPITRE 1</b>	
<b>LA REFORME SOLVABILITE II</b>	<b>10</b>
I- PRESENTATION DE LA REFORME	10
II- DE SOLVABILITE I A SOLVABILITE II	11
2.1 <i>Historique</i>	11
2.2 <i>La proposition de directive Omnibus 2</i>	12
2.3 <i>Critiques de Solvabilité I et enjeux de la réforme</i>	13
2.4 <i>Les 3 piliers de Solvabilité II : Principes généraux</i>	13
2.4.1 Pilier I : les règles prudentielles	13
2.4.2 Pilier II : le processus de contrôle prudentiel	14
2.4.3 Pilier III : information et discipline de marché	14
2.4.4 Synthèse des trois piliers : le « temple grec »	15
2.5 <i>Le bilan dans Solvabilité II</i>	15
III- STRUCTURE DU PILIER I : EXIGENCES QUANTITATIVES ET CALCUL DE SOLVABILITE	16
3.1 <i>Identification et segmentation des risques</i>	16
3.2 <i>Calcul du SCR</i>	17
3.2.1 Le SCR pour le risque opérationnel	19
3.2.2 Le SCR au titre du risque de marché	20
3.2.3 Le SCR pour le risque de souscription (vie)	23
3.2.4 Le SCR pour le risque de crédit	23
3.3 <i>Le calcul du MCR</i>	24
3.4 <i>Les provisions techniques</i>	24
3.4.1 Segmentation des risques	24
3.4.2 Le Best Estimate	25
3.4.3 La Risk Margin	26
IV- LES PILIERS II ET III DE LA DIRECTIVE	27
4.1 <i>Pilier II : Gouvernance des risques et ORSA</i>	27
4.2 <i>Pilier III : Discipline de marché</i>	28
4.2.1 Fréquence des rapports	28
4.2.2 Dates de soumission aux superviseurs	28
<b>CHAPITRE 2</b>	
<b>PRESENTATION GENERALE DU GENERATEUR</b>	<b>30</b>
I- POURQUOI DEVELOPPER UN ESG ?	30
1.1 <i>Développer un modèle prospectif</i>	30
1.1.1 Modéliser le comportement des assurés	31
1.1.2 Se couvrir contre les effets de la variation des taux d'intérêt	31
1.1.3 Modéliser les autres risques de placement	32
1.1.4 Valoriser la compagnie à sa juste valeur	32
1.2 <i>Pouvoir challenger le marché</i>	32
1.3 <i>Avoir la maîtrise de son modèle</i>	33
II- LES ETAPES DE LA MISE EN PLACE D'UN ESG	34

III-	UNIVERS RISQUE NEUTRE OU MONDE REEL ?	35
3.1	<i>Approche monde réel</i>	35
3.2	<i>Approche risque neutre et valorisation « market consistent »</i>	36
IV-	CHOIX DES ACTIFS ET AGREGATION	37
4.1	<i>Le choix des actifs modélisés</i>	38
4.1.1	La courbe de taux Zéro-Coupons	38
4.1.2	La courbe de taux swaps	39
4.1.3	Les taux nominaux	41
4.1.4	Les taux “forward”	42
4.1.5	Les actions	42
4.1.6	L’immobilier	43
4.1.7	L’inflation et les anticipations d’inflation	44
4.2	<i>Valorisation d’options de taux d’intérêt</i>	45
4.2.1	Les caps et les floors	45
4.2.2	Les swaptions	46
4.3	<i>Agrégation dans le cadre d’une approche « monde réel »</i>	46
4.4	<i>Agrégation dans le cadre d’une approche « risque-neutre »</i>	47
V-	INTRODUCTION AUX PROCESSUS STOCHASTIQUES	48
5.1	<i>Générateur de nombres aléatoires</i>	48
5.2	<i>Utilisation de tirages dans une loi Normale centrée réduite</i>	48
5.2.1	Inversion de la fonction de répartition	48
5.2.2	Méthode de Box Muller	49
5.3	<i>Modélisation d’un actif</i>	49
5.3.1	Processus et Lemme d’Itô	49
5.3.2	Discrétisation de processus continu	50
5.3.3	Loi log-normale et mouvements browniens géométriques	53
5.3.4	Simulations de Monte Carlo	53

## CHAPITRE 3

<b>APPROCHE RISQUE NEUTRE</b>	<b>54</b>
I- CHOIX DES MODELES	54
1.1 <i>Structure par terme des taux d’intérêts</i>	54
1.1.1 <i>Le modèle de Vasicek 2 facteurs</i>	55
1.1.2 <i>Le modèle de Heath Jarrow Morton</i>	56
1.2 <i>Rendements Action</i>	59
1.3 <i>Rendements immobiliers</i>	61
1.4 <i>L’inflation française</i>	61
II- CALIBRAGE DES MODELES	62
2.1 <i>Structure par terme des taux d’intérêts</i>	62
2.1.1 Le modèle de Vasicek 2 facteurs	62
2.1.2 Le modèle de Heath Jarrow Morton	65
2.2 <i>Rendements Action</i>	67
2.3 <i>Rendements immobiliers</i>	68
2.4 <i>L’inflation française</i>	68
III- DETERMINATION DES MATRICES DE CORRELATION	70
3.1 <i>Les données utilisées</i>	70
3.2 <i>Les coefficients de corrélation</i>	71
3.3 <i>Analyse historique des crises</i>	72
3.4 <i>Conclusion</i>	75

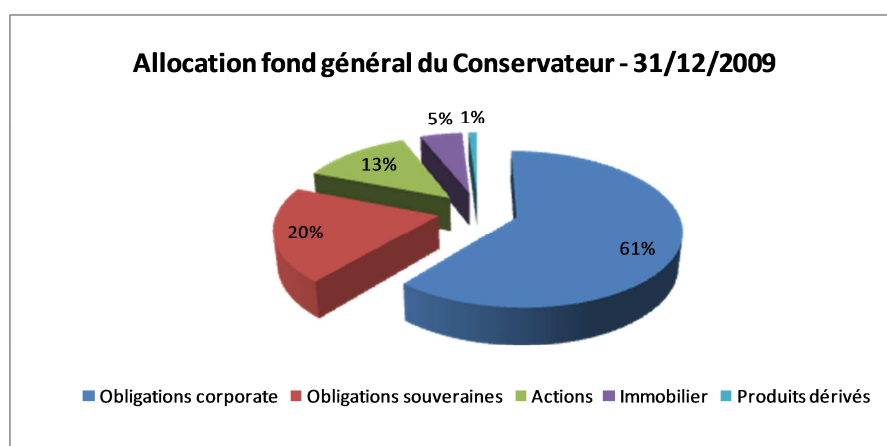
IV-	SIMULATIONS ET ANALYSE DES RESULTATS	77
4.1	<i>Paramètres et simulations</i>	77
4.2	<i>analyse des resultats</i>	78
4.2.1	Sous le modèle Vasicek 2F	78
4.2.2	Sous le modèle HJM	81
V-	UNE PISTE D'INVESTIGATION : LE LIBOR MARKET MODEL	84
5.1	<i>Présentation théorique du modèle</i>	84
5.1	<i>Calibrage du modèle</i>	86
<b>CHAPITRE 4</b>		
<b>APPROCHE MONDE REEL</b>		<b>89</b>
I-	CHOIX DES MODELES ET CALIBRAGE	90
1.1	<i>L'inflation anticipée</i>	90
1.2	<i>Structure par terme des taux réels et taux nominaux</i>	92
1.3	<i>Rendements Action – Primes de risque et Dividendes</i>	93
1.4	<i>L'immobilier</i>	93
II-	SIMULATIONS ET ANALYSE DES RESULTATS	95
2.1	<i>Les paramètres du modèle</i>	95
2.2	<i>Tests et coherence globale du modele</i>	95
<b>CONCLUSION GENERALE</b>		<b>99</b>
<b>TABLE DES FIGURES</b>		<b>101</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>		<b>103</b>
<b>ANNEXES</b>		<b>104</b>
ANNEXE 1 :	CALCUL DES CHARGES EN CAPITAL	104
	<i>Charge en Capital au titre du risque opérationnel</i>	104
	<i>Charge en Capital au titre du risque de souscription vie</i>	104
ANNEXE 2 :	CALCUL DU MCR	106
ANNEXE 3 :	INTERPOLATION CUBIQUE	107
ANNEXE 4 :	METHODE DES MOINDRES CARRES	107
ANNEXE 5 :	CONSTRUIRE UNE COURBE ZC A PARTIR D'UNE COURBE DE TAUX SWAPS	108
ANNEXE 6 :	THEOREME D'EVALUATION PAR CHANGEMENT DE NUMERAIRE	109
ANNEXE 7 :	THEOREME DE GIRSANOV	110
ANNEXE 8 :	DIFFUSION DANS LE MODELE LMM	110
ANNEXE 9 :	GLOSSAIRE	112

# INTRODUCTION GENERALE

---

## Présentation de l'entreprise

Le Groupe Le Conservateur est un groupe mutualiste de taille moyenne qui propose essentiellement, depuis 1844, des produits d'épargne, d'assurance vie et des tontines. Le groupe, composé de trois entités, gère 5 milliards d'encours. L'allocation de son portefeuille est essentiellement obligataire, donc globalement prudente.



L'ensemble des normes en matière de solvabilité dans le secteur des assurances sera réformé début 2013. La Commission Européenne a pris l'initiative de l'élaboration de cette nouvelle législation, appelée «Solvabilité II », dès 2001. L'objectif est de permettre la prise en compte de l'ensemble des risques encourus par les assureurs et l'évaluation précise de la situation de la compagnie face à ces risques.

L'EIOPA (CEIOPS jusqu'en janvier 2011) est chargé par la Commission de la consultation des différents acteurs concernés par la réforme. Ces consultations s'effectuent par le biais d'échanges entre assureurs et autorités de contrôle : les QIS (Etudes d'Impact Quantitatives).

Cette réforme Solvabilité II est ambitieuse, tant d'un point de vue technique que pratique. Elle nécessite le déploiement d'importantes ressources matérielles et humaines, et l'utilisation de techniques mathématiques, actuarielles et stochastiques très sophistiquées.

Un générateur de scénarii économiques (ESG) permet de simuler les trajectoires futures de variables économiques et financières, afin d'évaluer l'actif comme le passif d'une compagnie d'assurance. En produisant un très grand nombre de scénarii stochastiques distincts, l'ESG nous permet alors d'évaluer les distributions de probabilité des différentes trajectoires possibles. A ce titre, la génération de scénarii économiques constitue une phase cruciale dans la gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance vie.



La mise en œuvre de Solvabilité II nécessite de recourir à des modèles stochastiques pour ces actifs pour les problématiques suivantes :

- Le calcul des provisions techniques, au travers de l'évaluation des options et garanties et la mise en place de couvertures adaptées ;
- La détermination du SCR (« Solvency Capital Requirement »), via un critère de probabilité de ruine sur 1 an.

Ce générateur de scénarii économiques s'avère également être un outil essentiel d'aide à la prise de décision dans le domaine de la gestion des risques et du pilotage technique et financier d'une compagnie. Il est alors intéressant d'aller plus en avant dans le développement de l'ESG et de travailler avec les historiques de marché.

J'ai été amené lors de mon stage en 2009 et dans ce contexte prudentiel « Solvabilité II » à mettre en place intégralement un générateur de scénarii économiques, ce qui m'a permis d'aborder ce sujet d'actualité.

Nous distinguerons dès lors deux cadres distincts que nous traiterons différemment :

- Le cadre réglementaire d'une part, pour lequel nous aurons une approche risque-neutre et dans laquelle nous modéliserons indépendamment chaque classe d'actif que nous agrègerons ensuite par une matrice de corrélations ;
- Le pilotage technique et financier de la compagnie d'autre part, pour lequel nous développerons un modèle économiquement intuitif, sous la probabilité historique (monde réel).

Ce mémoire s'articulera autour de quatre parties :

Nous présenterons tout d'abord la réforme Solvabilité II, en insistant sur les éléments concernées par la modélisation d'actifs comme le calcul du Best Estimate ou des charges en capital au titre du risque de marché ;

Dans un deuxième temps, nous aborderons l'intérêt de développer un ESG pour une compagnie d'assurance vie, les architectures d'ESG que nous avons choisies, et les techniques mathématiques de modélisation d'actif ;

Enfin, nous présenterons successivement les deux approches (en univers risque-neutre puis en monde réel) que nous avons eues lors du développement de l'ESG, en insistant sur le choix des modèles, les données de marché utilisées, les méthodes de calibrage et les tests de validation des résultats. Quelques pistes d'investigation seront également proposées.

# LA REFORME SOLVABILITE II

---

L'objet social des compagnies d'assurance est de gérer les risques liés aux souscriptions, mais aussi les risques financiers induits par l'inversion du cycle de production. De ce fait, les assureurs sont contraints de constituer des provisions pour pouvoir honorer leurs engagements futurs, aujourd'hui inconnus. Nous présentons ici les grandes lignes de la réforme Solvabilité 2, qui vise à redéfinir les exigences en termes de solvabilité et de pilotage des risques.

## I- Présentation de la réforme

Nous pouvons définir la solvabilité par la capacité d'une compagnie à respecter ses engagements envers ses assurés et ses autres créanciers. Les actifs disponibles de l'organisme doivent pouvoir couvrir les engagements en toute sécurité. Le montant du capital dont l'organisme dispose au-delà de ses engagements est appelé « marge de solvabilité » ; cette marge de solvabilité permet d'absorber les chocs éventuels dus à un nombre ou montant de sinistres inattendu ou à une situation économique défavorable.

La situation dans laquelle l'assureur n'est plus en mesure de faire face à ses engagements est appelée «ruine». La marge de solvabilité permet d'éviter que la probabilité de ruine ne corresponde exactement à la probabilité de pertes et permet de sécuriser une éventuelle situation de crise. Cette notion de solvabilité est primordiale dans l'activité d'assurance, et régulièrement contrôlée par les superviseurs afin de protéger les assurés. Synthétiquement, son montant minimal réglementaire actuel est de 4% des engagements en euros, et 1% des provisions mathématiques des contrats en unités de compte.

En 2013 ces normes de termes de solvabilité vont être considérablement modifiées en Europe par la réforme « Solvabilité II ». L'approche actuelle est en effet inadaptée aux risques encourus par les assureurs. Le passage de Solvabilité I, basée sur des formules, vers Solvabilité II, plus réaliste et basée sur une estimation des risques, représente donc un grand changement dans le monde de l'assurance. Grâce à Solvabilité II tous les risques encourus seront pris en compte par l'assureur. Des garanties pour ces risques devront être détenues sous forme de capital de solvabilité. Ce capital permettra de s'assurer que la probabilité de ruine de la compagnie est inférieure à 0,5% à horizon 1 an.

Aussi, ce nouveau régime se veut aussi proche que possible de la réalité et impose des techniques de calcul très complexes, encore aujourd'hui soumises à discussion compte tenu des modifications profondes qui vont s'appliquer aussi bien dans la réglementation que dans l'organisation et le fonctionnement des compagnies d'assurance.

La version définitive du projet Solvabilité II n'est pas encore totalement établie ; les hypothèses et les techniques de calcul sont testées par les compagnies d'assurance dans le cadre des études d'impact quantitatives.

## **II- De Solvabilité I à Solvabilité II**

### **2.1 Historique**

La réglementation sur la solvabilité a subi relativement peu de modifications depuis la directive Solvabilité I. Le calcul de la solvabilité est resté inchangé, seules certaines composantes ont été ajoutées pour permettre de mieux refléter la situation réelle. Les contrôles portant sur le respect permanent des exigences de solvabilité ont été renforcés et les autorités de contrôle se sont vu conférer des droits d'intervention étendus.

La solvabilité future de la compagnie est garantie par les capitaux propres et les réserves au 31/12/N-1. Ainsi les assureurs sont tenus de détenir des fonds propres au moins équivalents à l'exigence de marge de solvabilité. Aujourd'hui, cette exigence de marge de solvabilité est évaluée en pourcentage des provisions techniques, des primes ou des sinistres, mais sans prendre en compte les risques réellement encourus.

Des premières lignes directrices sur l'investissement des primes ont d'abord été définies par l'Union européenne en soumettant à des restrictions les catégories d'actifs dans lesquels les assureurs peuvent investir. Les risques induits par la détention d'actifs ne sont pas pris en compte explicitement dans les exigences de fonds propres de Solvabilité I, ce qui explique cette réglementation des investissements.

Le projet Solvabilité II introduira un nouveau régime caractérisé par une prise en compte de tous les risques encourus par les assureurs. Des garanties pour ces risques devront être détenues sous forme de capital de solvabilité. La mise en œuvre de Solvabilité II devrait intervenir en 2013. Aujourd'hui, Solvabilité II nécessite un investissement matériel et humain de la part des assureurs qui ont, par le passé, pris en compte de manière insuffisante ou inappropriée les caractéristiques sous-jacentes de leurs risques.

La Commission européenne a la charge de ce projet. L'EIOPA fournit l'ensemble des conseils et des recommandations à partir d'une analyse des résultats des études d'impact quantitatives (QIS). Ainsi les assureurs et les réassureurs participent activement au projet Solvabilité II.

## 2.2 La proposition de directive Omnibus 2

Le 19 Janvier 2011, la Commission Européenne a proposé une directive qui vise principalement à modifier les directives 2003/71/CE - « Prospectus » et 2009/138/CE - « Solvabilité II » : Omnibus 2.

Suite au lancement de nouvelles autorités de contrôle (Autorité Bancaire Européenne, Autorité Européenne des Valeurs Mobilières, Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles), la Commission a adopté cette proposition législative qui a pour vocation de clarifier davantage les pouvoirs de ces nouvelles autorités, afin qu'elles puissent travailler efficacement. La Directive comprend aussi des amendements à la Directive Solvabilité II.

Cette directive confirme le report de l'entrée en vigueur de la réforme Solvabilité II au 31 décembre 2012 (au lieu du 31 octobre 2012) et prévoit, pour l'ensemble des organismes assureurs, des délais d'adaptation au passage à Solvabilité II.

Les dispositions transitoires maximales sont les suivantes :

- 3 ans pour répondre aux nouvelles exigences en matière de gouvernance et d'établissement d'un nouveau rapport de Solvabilité ;
- 5 ans pour établir un reporting réglementaire et mettre en place un régime d'équivalence pour les filiales n'étant pas concernées par la réforme de par leur localisation ;
- 10 ans pour répondre aux principales normes quantitatives :
  - Calcul du SCR
  - Valorisation du bilan prudentiel
  - Classification des fonds propres

Par ailleurs, Omnibus 2 prévoit un certain nombre de simplifications dans le calcul de la formule standard ; pendant une éventuelle période transitoire, les exigences en matière de solvabilité ne devraient pas dépasser le SCR et devraient être au moins égales à la somme du MCR et de 50% de la différence entre le SCR et le MCR. Ces dispositions transitoires doivent encourager les organismes assureurs à se mettre en conformité aussitôt que possible avec les exigences particulières du nouveau régime.

## 2.3 Critiques de Solvabilité I et enjeux de la réforme

La Commission Européenne estime que Solvabilité I présente un certain nombre de faiblesses :

- Le système ne prend pas en compte tous les risques supportés par l'entreprise.
- Il ne répond plus aux normes internationales comme IAS-IFRS.
- L'une des hypothèses de base de Solvabilité I est que le passé reflète le futur ce qui ne se vérifie pas nécessairement.
- Solvabilité I pénalise les entreprises qui sur-provisionnent par rapport à celles qui sous-provisionnent.

Devant ces déficiences et une volonté d'harmoniser le système entre les pays de l'Union Européenne, la Commission Européenne a orienté la réforme vers différents objectifs :

- Le renforcement du contrôle interne des compagnies d'assurance ;
- L'utilisation par les compagnies de modèles internes, partiels ou globaux, qui permettront d'évaluer leurs besoins en fonds propres et de consolider leur solvabilité ;
- La facilité de supervision effectuée par les autorités de contrôle afin de leur permettre d'évaluer au mieux la solvabilité des assureurs.

## 2.4 Les 3 piliers de Solvabilité II : Principes généraux

### 2.4.1 Pilier I : les règles prudentielles

Le pilier I définit les règles quantitatives dans trois domaines :

- Les provisions techniques avec un objectif d'harmonisation de leur valorisation ;
- L'exigence de capital calculée sur deux niveaux : le MCR (« Minimum Capital Requirement ») et le SCR (« Solvency Capital Requirement ») ;
- La définition et les règles d'éligibilité des éléments de capital.

Une approche à deux niveaux des exigences de fonds propres :

- Exigence de capital de solvabilité, le niveau de fonds propres requis pour remplir toutes les obligations à un horizon temporel donné et en fonction d'un niveau de confiance défini. Tous les risques importants quantifiables (risque de souscription, d'investissement, de crédit, opérationnel et de liquidité) doivent être pris en compte ;
- Exigence minimale de fonds propres absolue, plus faible et plus facile à calculer et au-dessous de laquelle une mesure prudentielle sera déclenchée.

## **2.4.2 Pilier II : le processus de contrôle prudentiel**

Le pilier II a pour objectif de définir les normes qualitatives de suivi des risques d'une part et d'harmoniser les processus de contrôle et de surveillance des organismes assureurs et des superviseurs d'autre part.

Il correspond à une recherche d'efficacité quant aux mécanismes d'organisation et de contrôle interne et à l'élaboration des principes applicables en matière de gestion des risques.

Une attention particulière est apportée aux questions liées à la gouvernance d'entreprise : honorabilité et compétence des dirigeants, compétence également des instances de gouvernance, et des intervenants extérieurs. De plus, les autorités de contrôle ont un droit de regard sur la gestion de la compagnie.

En ce qui concerne le contrôle interne, l'accent est placé sur l'existence de procédures écrites ainsi que sur la fiabilité du système d'audit interne.

Dans le respect de l'ORSA (« Own Risk and Solvency Assessment »), l'assureur est tenu de définir un « Risk Appetite » (niveau de tolérance des risques), des indicateurs de pilotage et d'adopter une vision prospective en matière de gouvernance des risques.

Les superviseurs vérifieront que l'organisme établit sa politique de gestion des risques de manière fiable. Tous les outils de supervision sont harmonisés, aussi bien les processus de contrôle des assurances et des mutuelles que les pouvoirs et les moyens d'actions conférés au superviseur.

## **2.4.3 Pilier III : information et discipline de marché**

Le pilier III concerne :

- L'information publique dans le cadre de la discipline de marché ;
- L'information à l'usage des superviseurs (dossier annuel) ;
- Les règles d'information des assurés.

Si la construction du pilier III est liée à l'avancement des deux premiers piliers, deux grands principes en ont déjà été posés par l'EIOPA :

- Un principe de cohérence maximum avec les exigences comptables de publication d'information ;
- Un principe d'harmonisation des états réglementaires d'information des superviseurs, avec pour cible un dossier annuel.

## 2.4.4 Synthèse des trois piliers : le « temple grec »

Le schéma ci-dessous, publié par l'EIOPA et la plupart des communiquants sur la réforme, présente de manière synthétique les axes de la réforme.

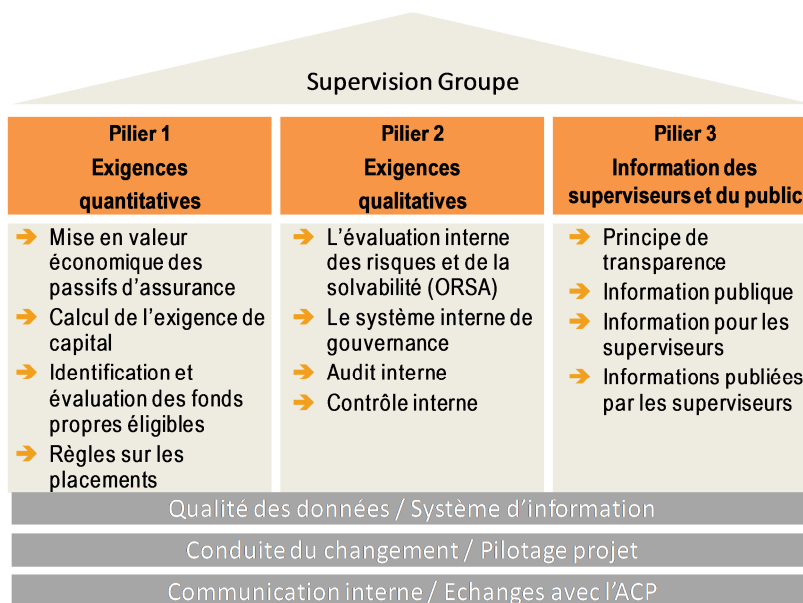


Fig.1 :Les 3 piliers de la directive

## 2.5 Le bilan dans Solvabilité II

Le bilan d'une compagnie d'assurance dans Solvabilité II subit des changements :

L'Actif et le Passif seront maintenant évalués de façon « market-consistent », et non plus en valeur comptable. Les provisions techniques et le besoin en capital sont redéfinis.

Les passifs sont valorisés en priorité selon la méthode des passifs répliquables, et à défaut, selon la méthode du Best Estimate + Marge pour risques.

Les passifs répliquables, c'est-à-dire les contrats Epargne avec support en Unités de Compte sans aucune garantie financière, sont valorisés de manière « Mark-to-Market », c'est-à-dire en répliquant le risque par les cours observables sur le marché.

Pour l'évaluation des provisions via le Best Estimate, Solvabilité II ne fait plus appel au principe de prudence, mais évalue les passifs à leur juste valeur. La marge pour risque correspond, elle, au coût des fonds propres pour porter l'intégralité des engagements de l'assureur à leur terme.

Cette approche du bilan permet d'avoir une vision plus réaliste et plus cohérente de la gestion de la compagnie ; cela impose une identification et une estimation solide des risques qui lui sont propres.

Le schéma ci-dessous récapitule les principales différences entre le bilan sous Solvabilité I et le bilan sous Solvabilité II :

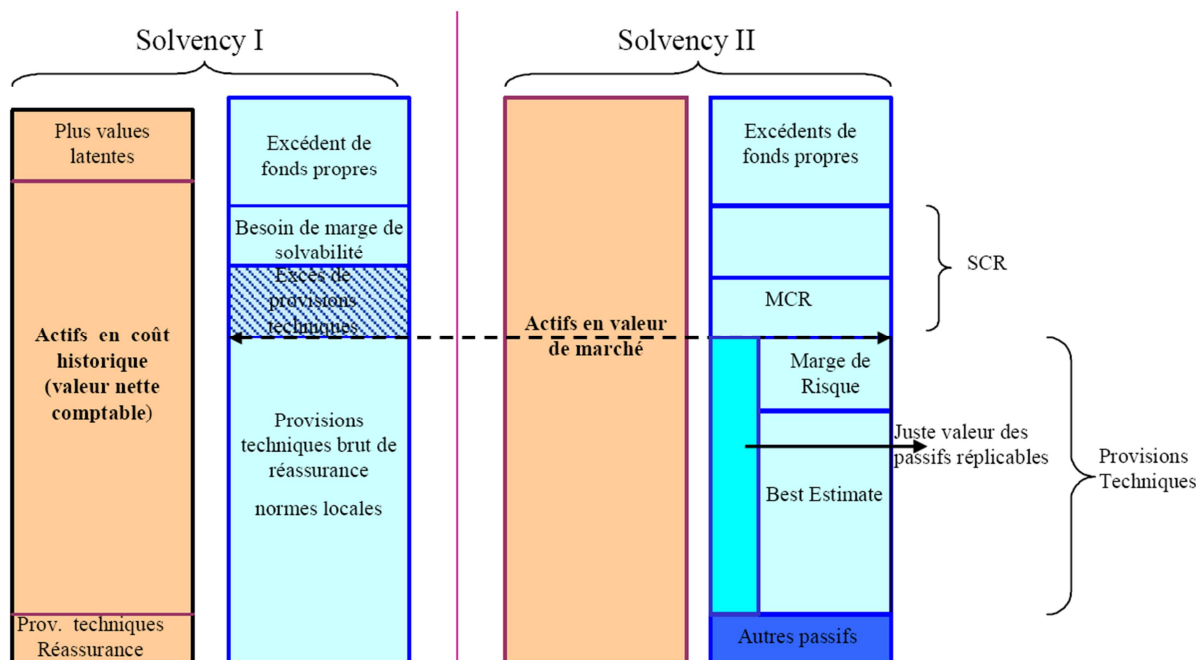


Fig.2 : Comparaison du bilan normes françaises et du bilan prudentiel

### III- Structure du pilier I : Exigences quantitatives et calcul de solvabilité

#### 3.1 Identification et segmentation des risques

L'objectif est de définir les seuils quantitatifs pour les fonds propres. Ceux-ci prendront en compte différents risques tels que :

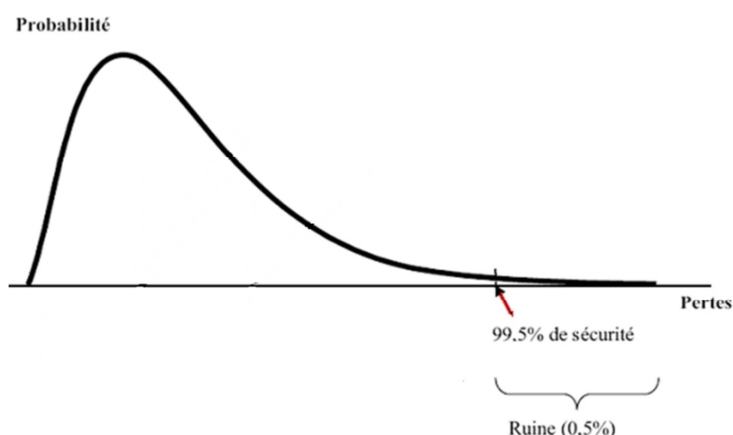
- Le risque de Souscription, lié à une tarification inadaptée aux souscriptions et rachats
- Le risque de Marché, lié aux produits financiers et aux investissements.
- Le risque de Crédit, lié au défaut d'une contrepartie, ou détérioration du rating.
- Le risque Opérationnel, lié à une mauvaise décision de gestion, ou une défaillance du contrôle interne et du traitement des opérations.



### 3.2 Calcul du SCR

Le « Solvency Capital Requirement » correspond à un niveau d’alerte où les autorités de contrôle aideront les compagnies d’assurance en prenant les mesures qu’elles jugeront nécessaires. Le SCR doit permettre d’absorber les pertes significatives non prévues afin de garantir aux assurés les paiements qui doivent être effectués.

Pour absorber les imprévus, la compagnie doit détenir un besoin en solvabilité à tout moment. Ce besoin en solvabilité doit pouvoir couvrir tous les risques et être calibré de telle sorte que la probabilité de ruine à horizon 1 an soit inférieure à 0,5%. La mesure de risque retenue est pas conséquent la Value at Risk (VaR).



**Fig.3 : Distribution de probabilité des pertes, sur un horizon 1 an et Value at Risk à 99.5%**

La Value at Risk évalue la probabilité de ruine à  $(1-a)$  spécifié. La Tail Value at Risk (TVaR) considère la probabilité de ruine mais également la sévérité des pertes lorsque le seuil est franchi. Les queues de distribution sont dès lors mieux prises en compte. Par conséquent, compte-tenu des objectifs de Solvabilité II, cette approche est souvent à privilégier, notamment dans le cadre du développement d’un modèle interne.

Pour déterminer le SCR, les compagnies d’assurance ont le choix entre deux méthodes :

- Le modèle interne ;
- La formule standard.

Les modèles internes visent une modélisation personnalisée, grâce à des processus stochastiques, de l’ensemble de l’actif comme du passif de la compagnie. Seule l’utilisation conjointe de plusieurs modèles assurera une réelle efficacité du modèle interne compte tenu de l’interdépendance des aspects financiers et des risques d’assurance.

L'attention devra particulièrement être portée sur le choix des hypothèses et des données utilisées lors du calibrage du modèle interne. Ce modèle devra être utilisé régulièrement dans le pilotage de l'entreprise en matière de gestion des risques et le calcul du SCR peut être un indicateur utile dans les prises de décisions.

En pratique, la mise en place d'un modèle interne complet au sein d'une compagnie d'assurance mobilise d'importantes ressources; et, dans un premier temps, la majorité des assureurs utiliseront la formule standard qui permet de calculer de façon « simple » les SCR au titre de chaque risque pour ensuite les agréger.

Les éléments présentés ci-après sont proposés par l'EIOPA à travers le QIS 5.

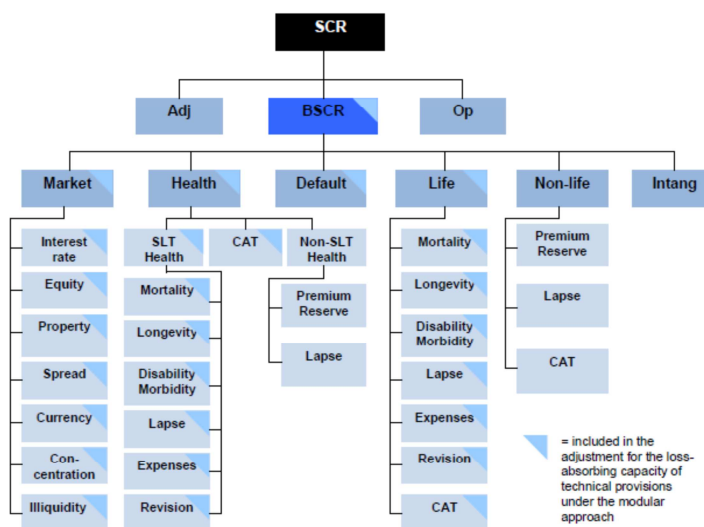


Fig.4 : Présentation des modules de SCR – QIS5 Formule Standard

Avec :

- BSCR : Capital de Solvabilité Requis de Base
- SCRop : Capital requis au titre du risque opérationnel
- SCRmkt : Capital requis au titre du risque de marché
- SCRdef : Capital requis au titre du risque de crédit
- SCRlife : Capital requis au titre du risque souscription-vie
- SCRnl : Capital requis au titre du risque souscription non-vie
- SCRhealth : Capital requis au titre du risque souscription santé
- SCRIntang : Capital requis au titre du risque des actifs incorporels

Le SCR est ensuite déterminé comme :

$$SCR = BSCR + SCRop$$

Et le BSCR est déterminé comme suit :

$$BSCR = \sqrt{\sum CorrSCRr, c * SCRr * SCRc} + SCRintang$$

La matrice de corrélation fournie par le QIS 5 s'écrit :

i \ j	Market	Default	Life	Health	Non Life
Market	1				
Default	0,25	1			
Life	0,25	0,25	1		
Health	0,25	0,25	0,25	1	
Non Life	0,25	0,5	0	0	1

**Fig.5 : Matrice de corrélation pour le calcul du BSCR – QIS 5**

**Remarque** : Lors du calcul du SCR, l'entreprise doit prendre en compte l'ensemble des techniques de gestion des risques qui lui permettent d'amoinrir son exposition. Ainsi, les mécanismes de transfert des risques comme la réassurance, permettent à la compagnie de se décharger d'un risque, mais l'expose à un nouveau : le risque de défaut, moins important mais non négligeable.

Concernant les instruments financiers d'atténuation du risque, la Commission Européenne liste un certain nombre de principes qu'ils doivent respecter pour être pris en compte dans le calcul du SCR.

Nous allons à présent décrire le mode de calcul du SCR pour le risque opérationnel, puis pour chaque sous module en insistant sur le Risque de Marché puisque la mise en place du Générateur de Scénarii s'inscrit essentiellement dans ce cadre.

### **3.2.1 Le SCR pour le risque opérationnel**

Le risque opérationnel est défini comme le risque de perte résultant de procédures inadéquates ou défaillantes, ou d'erreurs de membre du personnel, de système ou d'évènements extérieurs ; il inclut les risques juridiques mais ne considère pas les risques dus à un défaut de décision stratégique de l'entreprise.

Dans le cadre du QIS 5, le SCR<sub>Op</sub> se calcule via une formule fermée, à partir des éléments suivants :

- Le BSCR, Capital de Solvabilité Requis de Base ;
- Le montant annuel des dépenses pour les contrats en UC ;
- La charge de base due au risque opérationnel pour les contrats autres que ceux en UC ;
- Le détail des provisions techniques brutes de réassurance pour les engagements d'assurance vie et non-vie ;
- Le détail des primes acquises, brutes de réassurance, sur les 12 derniers mois et sur les 12 mois précédents, pour les engagements d'assurance vie et non-vie.

Il convient de noter que, dans cette formule, les contrats en unité de compte sont retirés de la charge de base au titre du risque opérationnel car, pour ce type de contrat, le risque est supporté par les souscripteurs. La méthode de calcul du SCR opérationnel est explicitée en annexe 1.

### 3.2.2 Le SCR au titre du risque de marché

L'incertitude quant à la valeur de marché des instruments financiers est à l'origine de l'exposition au risque de marché des organismes assureurs.

Le calcul du SCR risque de marché se décompose en plusieurs sous-modules agrégés par une matrice de corrélation. On distingue ainsi :

$MktUP_{int}$  : la charge en capital impactée d'un choc haussier de taux d'intérêt

$MktDWN_{int}$  : la charge en capital impactée d'un choc baissier de taux d'intérêt

$Mkt_{eq}$  : la charge en capital impactée d'un choc sur les actions

$Mkt_{prop}$  : la charge en capital impactée d'un choc sur les actifs immobiliers

$Mkt_{sp}$  : la charge en capital impactée d'un choc de spread

$Mkt_{conc}$  : la charge en capital impactée d'un choc de concentration

$Mkt_{fx}$  : la charge en capital impactée d'un choc sur le taux de change

$Mkt_{ill}$  : la charge en capital impactée d'un choc sur la prime d'illiquidité

Le  $SCR_{Mkt}$  se calcule comme suit :

$$SCR_{Mkt} = MAX \left( \sqrt{\sum_{r \neq c} CorrMktUP_{r,c} \cdot Mkt_{r,up} \cdot Mkt_{c,up}} ; \sqrt{\sum_{r \neq c} CorrMktDOWN_{r,c} \cdot Mkt_{r,down} \cdot Mkt_{c,down}} \right)$$

Avec :

Corr MktUP	Mkt - int	Mkt - eq	Mkt - prop	Mkt - sp	Mkt - conc	Mkt - fx	Mkt - ill
Mkt - int	1						
Mkt - eq	0	1					
Mkt - prop	0	0,75	1				
Mkt - sp	0	0,75	0,5	1			
Mkt - conc	0	0	0	0	1		
Mkt - fx	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1	
Mkt - ill	0	0	0	-0,5	0	0	1

Corr MktDWN	Mkt - int	Mkt - eq	Mkt - prop	Mkt - sp	Mkt - conc	Mkt - fx	Mkt - ill
Mkt - int	1						
Mkt - eq	0,5	1					
Mkt - prop	0,5	0,75	1				
Mkt - sp	0,5	0,75	0,5	1			
Mkt - conc	0	0	0	0	1		
Mkt - fx	0,25	0,25	0,25	0,25	0	1	
Mkt - ill	0	0	0	-0,5	0	0	1

Fig.6: Matrice de corrélations pour le module risque de marché – QIS 5

### •Principe de transparence

Le principe de transparence s'applique ici aux parts de fonds d'investissement et doit être considéré comme un principe général au calcul du SCR de marché.

Les spécifications techniques entendent, par principe de transparence, une application de la formule standard sur chaque titre détenu à travers les fonds d'investissement.

A défaut, l'analyse des risques devra maximiser le coût en capital en sélectionnant l'hypothèse la plus défavorable relative au mandat de gestion ou en appliquant le choc « actions ».

Par ailleurs, l'application du principe de transparence nécessite en général la mise en place régulière de reporting spécifiques Solvabilité II de la part des sociétés de gestion.

### •Cartographie des risques

Le tableau ci-dessous présente les risques auxquels sont soumis les différents actifs constituant le portefeuille du Conservateur :

	Module Taux	Module Action	Module Immobilier	Module Concentration	Module Spread
Actions cotées & non cotées		X		X	
OAT	X				
OAT hors OCDE	X				X
Corporate Bonds	X			X	X
Immobilier			X	X	

Fig.7 : Cartographie des risques pour le portefeuille du Conservateur

### •Le risque de taux d'intérêt

Le risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur est impactée par une modification de la structure par terme des taux d'intérêt, ou la volatilité des taux.

La charge en capital se calcule par variation de la Net Asset Value (NAV) après application d'un choc instantané. La NAV correspond à la différence entre la valeur de l'actif et la valeur du passif hors marge pour risque.

$$\Delta NAV = (\text{Actif} - \text{Passif})_{\text{avant choc}} - (\text{Actif} - \text{Passif})_{\text{après choc}}$$

Enfin, la modification de la courbe des taux sans risque (fournie par l'EIOPA) impacte à la fois la valeur de l'Actif, mais aussi celle du Best Estimate (actualisation des flux futurs au passif).

L'EIOPA fournit le détail des chocs (haussier et baissier) à appliquer à la courbe des taux sans risque. La charge en capital la plus élevée devra être retenue.

### •Le risque actions

Le risque action résulte de la volatilité et du niveau du cours des actions. Le calcul de la charge en capital au titre du risque action nécessite, dans le cadre de la formule standard, la distinction entre deux types d'indices :

- L'indice « Global » pour les actions cotées dans les pays de l'EEE et de l'OCDE
- L'indice « Autres » pour les actions cotées sur les marchés émergents, actions non cotées, et fonds alternatifs

Le choc à appliquer est de 30% à la baisse pour l'indice « Global », et de 40% à la baisse pour l'indice « Autres ».

Les impacts au titre des indices « Global » et « Autres » sont ensuite agrégés. Le coefficient de corrélation est égal à 0,75.

**Remarque** : Notons par ailleurs que le calcul de la variation de Net Asset Value correspond à évaluer simplement la variation au niveau de l'actif.

### •Le risque sur actifs immobiliers

Dans le cadre de la formule standard, le choc à appliquer au titre du risque immobilier est de 25% à la baisse. Comme pour les actions, le calcul de la variation de NAV correspond exactement au calcul de la variation de la valeur de l'actif.

### •Le risque de change

Le risque de change concerne l'ensemble des titres financiers exprimés dans une devise autre que l'Euro. Le choc à appliquer est de 25% à la hausse et à la baisse de la valeur de la devise par rapport à l'Euro.

**Remarque** : Les spécifications techniques prévoient des chocs limités pour les monnaies liées à l'Euro.

### •Le risque de concentration

Dans le cadre du QIS 5, le risque de concentration correspond au risque d'accumulation des expositions avec les mêmes contreparties.

Son mode de calcul est donné par les spécifications techniques, à l'aide de formules fermées.

Pour évaluer la charge en capital au titre de ce risque, il est essentiel de regrouper les actifs concernés selon les contreparties et d'en connaître les ratings.

### • **Le risque de spread**

Le risque de spread est la part de risque due à la volatilité des spread de crédit sur la structure par terme des taux d'intérêt. Le spread correspond à l'écart de taux actuariel entre une obligation et une obligation souveraine. Pour le calcul de la charge en capital au titre du risque de spread, les spécifications techniques différencient :

- Les obligations à taux fixe (*Bonds*) ;
- Les produits structurés et obligations à taux variable (*Struct*) ;
- Les dérivés de crédit (*Cred*).

$$Mkt_{sp} = Mkt_{sp}^{bonds} + Mkt_{sp}^{struct} + Mkt_{sp}^{cred}$$

### **3.2.3 Le SCR pour le risque de souscription (vie)**

L'évaluation des charges en capital au titre du risque de souscription s'effectue par le calcul de la variation de la Net Asset Value (NAV), c'est-à-dire du Best Estimate, suite aux chocs définis par les spécifications techniques QIS 5.

Ces chocs concernent les risques suivants :

- Le risque de mortalité ;
- Le risque d'invalidité ;
- Le risque de dépenses ;
- Le risque de rachat ;
- Le risque de catastrophe.

Le détail des chocs à appliquer dans le cadre de la formule standard est fourni en annexe.

### **3.2.4 Le SCR pour le risque de crédit**

Le risque de crédit a pour origine la défaillance imprévue ou la dégradation du rating des contreparties de l'organisme assureur. Ce module prend également en compte les dispositifs de couverture ou de transfert de risque (par exemple la réassurance) qui, s'ils permettent la réduction d'un risque, font apparaître une exposition au risque de contrepartie.

### 3.3 Le calcul du MCR

Le « Minimum Capital Requirement » représente le niveau de fonds propres en dessous duquel les intérêts des assurés se verraient sérieusement menacés. Le passage de ce seuil déclenche l'intervention des autorités de contrôle. Ce type d'intervention prudentielle peut nécessiter l'implication de juridictions nationales. Le MCR doit être calculé trimestriellement.

Pour les compagnies d'assurance vie, l'évaluation du MCR est basée sur le calcul des provisions techniques et des capitaux sous risque. Pour s'assurer que le MCR et le SCR sont liés, le MCR final devra être compris dans une fourchette allant de 25% à 45% du SCR. En cas de dépassement, il sera ramené au seuil correspondant.

Le détail du calcul du MCR par la formule standard est fourni en annexe 2.

### 3.4 Les provisions techniques

#### 3.4.1 Segmentation des risques

Les spécifications techniques QIS 5 imposent une segmentation fine des risques pour le calcul du Best Estimate. Le premier niveau consiste à distinguer les engagements relatifs à l'assurance vie (ou similaires, SLT) des engagements relatifs à l'assurance non vie (ou similaires, NSLT). Concernant les engagements d'assurance vie, la seconde segmentation fait apparaître 16 branches divisées en deux niveaux de Lines of Business (4x4 LoB).

#### Niveau 1:

- Les contrats avec participation aux bénéficiaires ;
- Les contrats en unités de compte ;
- Les autres contrats d'assurance vie ;
- Les acceptations en réassurance.

#### Niveau 2:

- Les contrats dont le risque principal est porté sur le décès ;
- Les contrats dont le risque principal est porté sur la survie ;
- Les contrats dont le risque principal est porté sur l'incapacité/invalidité ;
- Les contrats Epargne en UC ou multisupport sans garanties financières.



### 3.4.2 Le Best Estimate

Le Best Estimate correspond au montant espéré qu'une compagnie d'assurance devrait déboursier pour régler l'intégralité de ses engagements de passif.

**Article 77 de la directive 2009/138/CE (extrait) sur le BEL :**

*Le Best Estimate peut être défini comme « la meilleure estimation correspondant à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent [...] estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents ».*

Le calcul du Best Estimate doit tenir compte de toutes les entrées et sorties de capital, relatives aux engagements de l'assureur et des assurés pendant toute la durée des engagements.

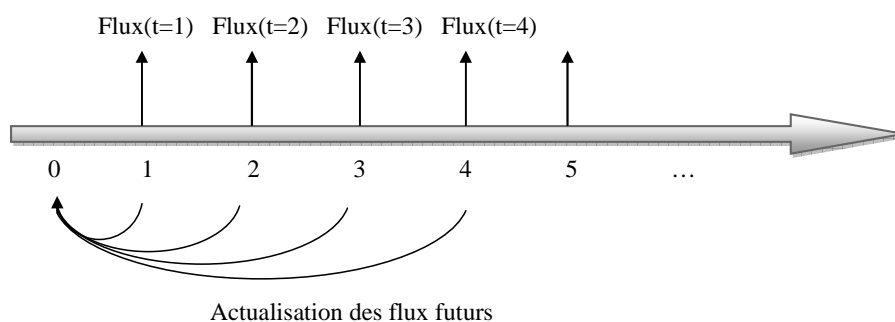
Le calcul du Best Estimate s'effectue sous les hypothèses suivantes :

- L'horizon de projection : les spécifications du QIS5 insistent sur le fait que l'horizon de simulation doit être suffisamment long pour que la différence entre les provisions calculées avec cet horizon et celles calculées jusqu'à extinction totale du portefeuille soit négligeable ;
- L'actualisation des flux futurs : les flux sont actualisés grâce à la courbe des taux sans risque, fournie par l'EIOPA. Ces taux intègrent une prime d'illiquidité ;
- La réassurance : les provisions en Best Estimate sont calculées brutes de réassurance ;
- Les primes futures : Certaines primes futures sont désormais comptabilisées dans le calcul.

Le Best Estimate, valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs doit pouvoir couvrir :

- Les prestations ;
- Les coûts liés à l'exploitation des contrats ;
- Les prélèvements sociaux.

Enfin, le calcul du Best Estimate nécessite d'abord un calcul de l'ensemble des flux de trésorerie futurs, puis une étape d'actualisation.



**Fig.8 : Le calcul du Best Estimate**

### 3.4.3 La Risk Margin

La marge de risque s'ajoute au Best Estimate des passifs « non répliquables », de manière à garantir que le montant total des provisions techniques soit égal au montant qu'une entreprise d'assurance serait prête à payer pour transférer son passif. La marge de risque correspond au coût d'immobilisation des fonds propres. Elle est calculée selon la méthode du Coût du Capital (CoC).

$$COCM = 6\% \cdot \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

Avec :

COCM : La marge pour risque déterminée par la méthode du Coût du Capital

SCR : Le SCR de l'entreprise calculé à chaque date de projection

$r_t$  : Le taux sans risque (sans prime d'illiquidité)

Cette formule nécessite de calculer le SCR de la compagnie à chaque date de projection. Compte tenu de la complexité de ce calcul, les spécifications techniques du QIS 5 prévoient plusieurs niveaux simplifications que la compagnie d'assurance pourra utiliser sous réserve de justification.

## IV- Les piliers II et III de la directive

### 4.1 Pilier II : Gouvernance des risques et ORSA

L'objectif de ce pilier est de s'assurer que la compagnie est en mesure de calculer et maîtriser ses risques, et d'organiser la façon dont l'autorité de contrôle doit exercer son devoir de surveillance.

L'autorité de tutelle aura pour mission de contrôler la qualité des données et des procédures d'estimation, et les systèmes mis en place pour évaluer et maîtriser les risques. Enfin, elle aura le pouvoir d'imposer à l'assureur une marge de solvabilité complémentaire si elle l'estime nécessaire.

De son côté l'assureur devra, lui, prouver à l'autorité de contrôle qu'il dispose de processus internes de suivi, pilotage et gouvernance des risques. Un des éléments essentiels de ce pilier, côté assureur, est l'ORSA (Evaluation interne des risques et de la solvabilité).

#### **Article 45 de la directive (extraits) sur l'ORSA :**

*Dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité. Cette évaluation porte au moins sur les éléments suivants :*

- a) le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ;*
- b) le respect permanent des exigences de capital et des exigences concernant les provisions techniques ;*
- c) la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis.*

L'ORSA permet de déceler, mesurer, contrôler, gérer et déclarer en permanence tous les risques auxquels pourrait être exposée l'entreprise à court, moyen et long terme. Elle n'est pas encadrée par les principes applicables au pilier 1 :

- La définition de la solvabilité est propre à chaque assureur (possibilité de choisir une autre mesure de risque que la VaR à 99.5% sur un horizon 1an) ;
- Tous les risques doivent être considérés, y compris les risque de réputation, stratégiques, opérationnels, ...
- Elle n'encadre pas les méthodes d'agrégation des risques ;
- Elle doit prendre en compte les facteurs externes susceptibles d'impacter la solvabilité.

Ainsi, l'ORSA va beaucoup plus loin que le pilier 1 dans l'objectif d'une meilleure adéquation par rapport au profil de risque (à fortiori dans le cas d'une application de la formule standard, mais aussi d'un modèle interne).

## 4.2 Pilier III : Discipline de marché

Ce dernier pilier traite de la communication des informations sur lesquels les deux premiers piliers sont basés. Ces informations permettront aux actionnaires, analystes et autorités de contrôle de juger si l'analyse effectuée est fidèle à la réalité.

Ces informations devront notamment couvrir les éléments suivants :

- La performance financière ;
- Les profils de risques, données et hypothèses considérées.

Dans le cadre de ce pilier, des reportings quantitatifs devront être mis en place. Le CP 58 – « Supervisory Reporting and Disclosure » - présente les mesures de niveau 2 concernant les éléments à fournir aux autorités de contrôle d'une part, et au public d'autre part.

Les rapports à mettre en place sont les suivants :

- Le RTS – « Reporting To Supervisor » – confidentiel, à destination de l'ACP ;
- Le SFCR – « Solvency & Financial Condition Report » – à destination du public

Par ailleurs, le CP58 évoque le QRT – « Quantitative Report Template » – rapport quantitatif - annexe du RTS. Le QRT n'apparaît pas dans le « Final Advice », mais a fait l'objet d'une consultation auprès des acteurs du marché en mai 2010 : « Le Field Test ».

D'une manière générale, les approches entre les états réglementaires actuels et le « Field Test » sont très différentes. Les états « Solvabilité II », plus techniques et plus riches en terme de méthodes de calcul, adoptent une vision prospective que l'on retrouve uniquement dans les états C6bis et T3 actuellement.

### 4.2.1 Fréquence des rapports

RTS	Rapport complet tous les 5 ans ; Version réduite annuelle
SFCR	Rapport annuel
QRT	Rapport trimestriel et annuel

### 4.2.2 Dates de soumission aux superviseurs

RTS	Maximum 14 semaines après la clôture
SFCR	Maximum 14 semaines après la clôture
QRT	Maximum 14 semaines après la clôture pour la version annuelle Maximum 4 semaines après chaque fin de trimestre pour la version trimestrielle

Le RTS et le SFCR contiendront un rapport qualitatif et des données quantitatives. Ils constitueront des documents autonomes mais suivront une structure semblable. La communication de ces rapports permettra d'assurer que l'assureur ou le groupe dispose de processus de gouvernance appropriés et que les informations fournies à l'autorité de contrôle (dans le cas du RTS) sont complètes, cohérentes et précises.

# PRESENTATION GENERALE DU GENERATEUR

---

Ce chapitre a pour objet de présenter l'utilité, pour une compagnie d'assurance vie, de développer un générateur de scénarii économiques, les étapes essentielles de sa mise en place, et les pré-requis mathématiques et financiers nécessaires.

## I- Pourquoi développer un ESG ?

L'objet social des compagnies d'assurance est de gérer

- Les risques assurantiels souscrits auprès des assurés ;
- Les risques financiers portés à l'actif du bilan induits par l'inversion du cycle de production.

L'évolution des normes comptables et prudentielles catalysent des évolutions techniques et stratégiques rendues indispensables par les nouvelles exigences en termes d'évaluation de la valeur et des risques. L'économie qui s'érode depuis juillet 2007 a diminué les résultats financiers des compagnies qui doivent en conséquence améliorer leurs résultats techniques et piloter leurs investissements de manière prospective. Aussi, l'utilisation d'un Générateur de Scénarii Economiques semble aujourd'hui indispensable dans les référentiels Solvabilité II et MCEV.

L'ESG permet de prendre en compte un panel de scénarios possibles pour le calcul des provisions techniques ou des charges en capital. En effet, de nombreux mécanismes en chaîne peuvent être constatés grâce à l'intégration de scénarios d'actifs stochastiques dans un modèle prospectif global.

### 1.1 Développer un modèle prospectif

Il existe de multiples raisons pour lesquelles un assureur peut penser que développer un modèle prospectif, ou un modèle interne, puisse améliorer l'évaluation des risques auxquels il est soumis et lui permettre ainsi de mieux les piloter. Parmi ces raisons, nous pouvons recenser, entre autres :

- La possibilité de représenter au mieux les anticipations économiques et les interactions entre les actifs, dans le cadre d'une approche sous la probabilité historique ;
- Une modélisation et un calcul de la VaR à 99,5% plus adaptés au profil de risque de l'assureur
- La possibilité de modéliser le comportement des assurés en fonction de la situation financière ;
- La possibilité de quantifier et d'analyser les impacts d'une variation des taux d'intérêts ou d'autres variables économiques ou financières.

### **1.1.1 Modéliser le comportement des assurés**

Le comportement des assurés est directement lié au risque de placement financier. Il dépend :

- Du niveau des marchés financiers ;
- De la situation économique ;
- De la concurrence interne ou externe ;
- De la performance financière affichée ;
- De l'efficacité de la communication financière ;
- De l'environnement institutionnel.

En fonction du niveau des marchés financiers, et par comparaison aux taux servis, la survenance de rachats peut venir affaiblir le bilan de l'assureur. Ces rachats peuvent provoquer la concrétisation de moins-values latentes, mais aussi la réalisation du risque de liquidité, l'assureur n'étant pas en mesure de faire face à ses engagements par manque de trésorerie.

### **1.1.2 Se couvrir contre les effets de la variation des taux d'intérêt**

En assurance, c'est la gestion actif-passif qui est chargée d'optimiser les emplois / ressources et piloter les marges face aux variations des conditions de marché. Pour cela, le gestionnaire actif passif doit anticiper la structure du bilan et quantifier les risques structurels dont le plus important est le risque de taux. A ce titre, le développement d'un modèle stochastique lui permettra de couvrir le portefeuille contre ces risques structurels et notamment celui de variation des taux d'intérêt.

Par exemple, la baisse des taux n'a pas d'impact immédiat sur les résultats de l'assureur, jusqu'à ce que les rendements soient insuffisants pour faire face aux engagements de taux (garantie plancher, garantie cliquet,...). La baisse des taux a donc un effet illusoire, dans le sens où elle permet à court terme à l'assureur d'afficher des plus-values-latentes.

A l'inverse, la hausse des taux a un effet immédiat sur le compte de résultats : les obligations se dévalorisent. Dans le cas d'une hausse des taux durable et mal pilotée, les taux servis par l'assureur devenant moins élevés que la référence du marché ou la concurrence, des vagues de rachats peuvent se déclencher, obligeant l'assureur à concrétiser des moins-values latentes.

L'utilisation de scénarii d'actif permet alors au gestionnaire actif-passif d'anticiper les évolutions des conditions de marché et leurs impacts sur la structure du bilan. Il pourra ainsi décider de se couvrir contre ces variations de taux. Par exemple, dans le cas d'une position à taux fixe, il pourra annuler la position en utilisant les produits dérivés comme les swaps.

### **1.1.3 Modéliser les autres risques de placement**

Pour l'assureur, une baisse du marché des actions ou de l'immobilier implique une insuffisance de rendement financier.

Si l'évolution des rendements actions est, en général, corrélée à l'évolution des taux, il arrive qu'à certaines phases du cycle économique, les marchés évoluent de façon décorrélée. Ce fut notamment le cas lors de la crise de septembre 2001 qui a vu une hausse sensible de la valeur des titres obligataires alors que le cours des actions s'effondrait. Ce comportement des marchés s'appelle le « *fly to quality* ».

Développer un ESG permet de modéliser l'ensemble des risques susceptibles d'impacter l'actif de l'assureur, et indirectement le passif.

### **1.1.4 Valoriser la compagnie à sa juste valeur**

Le développement d'un modèle prospectif permet enfin de mieux évaluer la richesse propre de l'entreprise. Les contrats d'assurance vie sont souvent compliqués et disposent de multiples garanties, afin de rester attractifs et adaptés aux besoins des assurés ; on trouvera notamment des taux minimum garanti, des versements de participation aux bénéficiaires (réglementaire et discrétionnaire), des garanties de capital, des clauses de rachats, ... Tous ces éléments sont des formes d'options qui jouent un rôle essentiel au passif de l'assureur. Elles sont très difficiles à valoriser de manière déterministe, car il n'est pas possible de les évaluer à travers un unique scénario financier.

Les modèles prospectifs permettent de prendre en compte la volatilité de tous les risques qui impactent les résultats de l'assureur et les mécanismes dynamiques qui en découlent. Cela nécessite une modélisation de l'actif, du passif, et des interactions entre l'actif et le passif.

## **1.2 Pouvoir challenger le marché**

Dans le cadre de l'application de la directive européenne, l'autorité de contrôle prudentiel ne fournit pas de jeu de scénarii d'actifs. Par conséquent, l'acquisition de tels scénarii peut s'avérer très coûteuse pour l'assureur, tant pour la communication financière que pour l'évaluation des besoins en capital. Notons par ailleurs que l'assureur n'a, le cas échéant, aucune visibilité sur les méthodes mises en œuvre pour obtenir de tels scénarii.

Le développement de son propre modèle d'actifs permet aussi à l'assureur de challenger les scénarii dont il pourrait se doter en faisant appel à une société de conseil ou spécialisée dans ce domaine (Barry Hibbert par exemple). En ce sens, il ne serait bien évidemment pas recommandé que toutes les compagnies d'assurance ou régimes de retraite utilisent les mêmes scénarii pour piloter leurs risques ; c'est probablement une des raisons pour lesquelles l'ACP ne fournit pas de scénarii d'actifs.



Enfin, l'utilisation de scénarii stochastiques peut s'avérer nécessaire dès lors que l'approche déterministe est limitée. Elle permet de modéliser des situations beaucoup plus complexes, d'appréhender le comportement des assurés, d'avoir une vision prospective de la politique commerciale ou encore de valoriser l'asymétrie des engagements pris au bilan, notamment au travers des garanties financières offertes sur les produits d'épargne.

### **1.3 Avoir la maîtrise de son modèle**

Dorénavant, le développement d'un ESG robuste, par un assureur est une démarche nécessaire vis-à-vis de la réglementation florissante depuis quelques années. Elle permet en effet d'avoir une parfaite maîtrise de ses modèles et de son alimentation : Quels modèles sont implémentés ? Quels sont les inputs ? Comment les modèles sont-ils calibrés ? Quel est le niveau de dépendance entre les actifs ? Les scénarios sont-ils risque-neutre ? « Market-consistent » ?

Solvabilité II impose une évaluation « market-consistent » de toutes les activités d'assurance et offre l'opportunité aux assureurs d'utiliser un modèle prospectif pour quantifier et piloter leurs risques ainsi que calculer leur SCR.

De fait, les ESG sont devenus un élément clé de l'évaluation « market-consistent » en assurance vie, et un moyen de piloter les risques de marché et de crédit par le biais d'un modèle prospectif global ou d'un modèle interne. Cette évaluation « market-consistent » associée à la démocratisation des modèles a propulsé les ESG au rang de sujet d'actualité méritant une attention toute particulière de la part des assureurs européens. Les scénarii étant un input essentiel au modèle, la maîtrise de l'ESG est par conséquent nécessaire à la bonne connaissance globale du modèle afin de pouvoir en comprendre les résultats.

## II- Les étapes de la mise en place d'un ESG

Plusieurs étapes jalonnent la construction d'un ESG. Ces étapes dépendent étroitement du contexte d'application de l'ESG.

La première étape consiste à définir le besoin et à identifier les sources de risque. Les variables financières et économiques qui sont alors identifiées seront modélisées par l'ESG : taux d'intérêt, courbe des taux sans risque, indices actions ou immobilier, primes de risque, inflation,...

La seconde phase, après l'identification de ces variables, est celle du choix des modèles ou de la dynamique de projection. Cette étape est cruciale lorsque les scénarii de l'ESG ont vocation à évaluer le besoin en capital nécessaire pour assurer une probabilité de ruine de 0,5% sur 1 an : Les modèles choisis doivent envisager tous les scénarii, même extrêmes (queues de distribution).

Dans un troisième temps, il faut sélectionner une structure de dépendance entre les sources de risque afin d'obtenir des projections cohérentes. Dans le cadre d'un modèle interne, l'utilisation de copules apparaît comme inévitable, mais pour l'application de la formule standard l'utilisation des matrices de corrélation reste possible. Sur ce point, la détermination des coefficients de corrélation est une étape délicate, car elle régira les dépendances entre les actifs et donc la cohérence des scénarii.

Dans une quatrième étape, les modèles retenus seront calibrés. Cette phase, particulièrement délicate, nécessite l'identification et la bonne application des contraintes imposées à l'ESG : « market-consistency », scénarii risque-neutre, représentativité des historiques, exhaustivité des données,...

Enfin, l'analyse des résultats obtenus est une étape nécessaire pour la validation par les superviseurs des scénarii et par conséquent des « bonnes pratiques » dans le cadre de l'application de la formule standard ou de la mise en œuvre d'un modèle interne.

### III- Univers Risque Neutre ou Monde Réel ?

En assurance, les modèles stochastiques utilisés peuvent être scindés en deux catégories, selon l'utilisation qui en est faite. Nous parlerons ainsi de modélisation « monde réel » ou « risque neutre ».

Dans le cadre du projet de mise en place d'un générateur de scénarii économiques au Conservateur, les deux approches ont été retenues, pour deux utilisations distinctes :

L'approche « monde réel » a été retenue pour le pilotage financier de la compagnie, la stratégie d'allocation d'actifs, et l'intégration de scénarii stochastiques aux études ALM effectuées jusqu'à présent de manière déterministe.

L'approche « risque neutre », quant à elle, a été retenue pour l'intégration de scénarii économiques dans un modèle prospectif global d'évaluation des engagements futurs, sous le progiciel Moses, en adéquation avec les principes du pilier 1 de la directive Solvabilité II.

#### 3.1 Approche monde réel

L'approche « monde réel » a pour objectif de projeter les trajectoires des actifs le plus fidèlement possible à la réalité économique, ceci en calibrant chaque modèle sur une plage d'historique représentative de l'état actuel et du futur probable des marchés.

Dans cet univers, les actifs offrent une prime de risque, excès de rendement qui rémunère le caractère risqué des actifs considérés. Par conséquent, toutes les actualisations de flux futurs doivent être faites à un taux intégrant cette prime de risque. En pratique, ces prix du risque sont très difficiles à modéliser car ils sont très différents d'un actif à l'autre ; et une sous-estimation de ces primes de risque revient à surestimer les évaluations par rapport à la réalité du marché.

Cette approche, intuitive, a été retenue au Conservateur dans le cadre de la mise en place d'un générateur de scénarii économiques ayant vocation à être intégré aux études ALM de la compagnie.

### 3.2 Approche risque neutre et valorisation « market consistent »

Pour contourner le problème d'évaluation des primes de risque pour l'actualisation des flux futurs, nous pouvons nous placer en univers « risque-neutre ».

Dans cet univers purement théorique, les primes de risque sont nulles dans la mesure où les agents sont considérés neutres face au risque. Les actualisations se font donc au taux sans risque, rendement commun à l'ensemble des actifs modélisés. Cet univers permet de valoriser les passifs d'assurance de manière « market-consistent ».

La valeur d'un actif ou d'un passif, calculée via une projection de cash-flows futurs, est dite « market-consistent » si elle est cohérente avec les prix de marché à la date de projection. Pour les actifs cotés, cette valeur est simplement égale à la valeur observable sur les marchés financiers. Pour les passifs d'assurance répliquables, cette valorisation nécessite parfois de pouvoir retrouver la valeur d'options observable à  $t=0$ . Les modèles d'actifs les plus sophistiqués permettent d'aller loin dans cette idée de « market-consistency » ; ils permettent à la fois de retrouver les prix de marché des actifs cotés, mais aussi d'instruments financiers comme les caps, les floors ou les swaptions.

En univers risque-neutre, la valeur de tout actif est égale à l'espérance sous la probabilité risque-neutre des flux futurs actualisés au taux sans risque. L'évaluation doit être cohérente avec les prix observés sur le marché ; c'est pourquoi chaque modèle sera calibré par rapport aux prix de marché. Les deux conditions pour calibrer un modèle de manière « market-consistent » sont l'absence d'opportunité d'arbitrage (i) et la liquidité des données de marché (ii). Si la première condition est supposée vraie tout au long du développement de l'ESG sous la probabilité risque-neutre, la seconde nécessite une attention toute particulière aux données utilisées pour calibrer les modèles.

Enfin, la probabilité risque-neutre permet de disposer d'un large éventail de propriétés mathématiques permettant de déterminer le prix des actifs ; En effet, dans cet univers, le rendement espéré de chaque actif vaut le taux sans risque, la chronique des prix actualisés est une martingale, et le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage s'applique. Cette approche a été retenue dans le cadre de l'évaluation des engagements futurs selon les principes du pilier 1 de la réforme Solvabilité 2.

## IV- Choix des actifs et agrégation

En règle générale, deux classes de modèles sont rencontrées.

- Les modèles « composites »

Ces modèles sont constitués de l'agrégation de plusieurs modèles adaptés à chaque classe d'actifs ; Il s'agit de l'approche que nous avons retenue au Conservateur, dans le cadre d'une valorisation des engagements et d'évaluation des besoins en capital (cadre prudentiel). En effet, chaque actif étant modélisé indépendamment, et ne souhaitant pas modéliser de déflateurs pour l'actualisation des flux futurs, une telle approche nous a semblé propice à un calibrage en univers risque-neutre.

- Les modèles « intégrés »

Ce type de modèle prend en compte une très forte interdépendance entre les classes d'actifs. Dans la mesure où nous souhaitons disposer de scénarii économiquement cohérents avec la croissance de l'économie et l'inflation à long terme, nous avons, au Conservateur, privilégié cette approche quant aux études ALM.

La principale contrainte de l'ESG dans cet univers est qu'il doit permettre la modélisation des fluctuations financières à court terme tout en étant cohérent avec les équilibres macroéconomiques reliant l'inflation, les taux réels et la croissance de l'économie à long terme. En effet, il existe une relation étroite entre ces trois éléments :

- Le taux nominal est la somme du taux réel et de l'anticipation d'inflation pour une échéance identique (Théorie proposée par l'économiste Irving Fisher dans les années 1930)
- Les taux réels espérés doivent être cohérents avec l'évolution de l'économie à long terme.

Dans la pratique, les ESG modélisent toujours les classes d'actifs liées aux portefeuilles des assureurs (obligations, actions, immobilier, monétaire). Ils doivent donc évoluer pour intégrer des facteurs macroéconomiques comme l'inflation européenne. Cette contrainte a fait l'objet d'une étude spécifique au cours de ce projet au Conservateur, et d'échanges avec Frédéric Planchet, auteur d'études sur la modélisation d'actifs.

## 4.1 Le choix des actifs modélisés

Dans le cadre de cette étude, nous modéliserons les actifs impactant le portefeuille du Conservateur qui est essentiellement composé :

- D'obligations : Obligations Souveraines et Corporates Européennes ;
- D'action : principalement sur le marché français ;
- De titres immobiliers : Ile de France, 1ère Couronne.

Nous modéliserons également les évolutions de la courbe des taux. A ce titre, il existe plusieurs types de courbes des taux, que nous pouvons classer en deux catégories :

- Les courbes de marché ;
- Les courbes implicites.

Les courbes de marché sont construites directement à partir des cotations d'instruments comme les obligations et les swaps. Parmi les courbes de marché nous trouvons la courbe de taux de rendement à maturité (construite à partir des taux de rendement des obligations) et la courbe de taux swaps (construite à partir des swaps de taux d'intérêts).

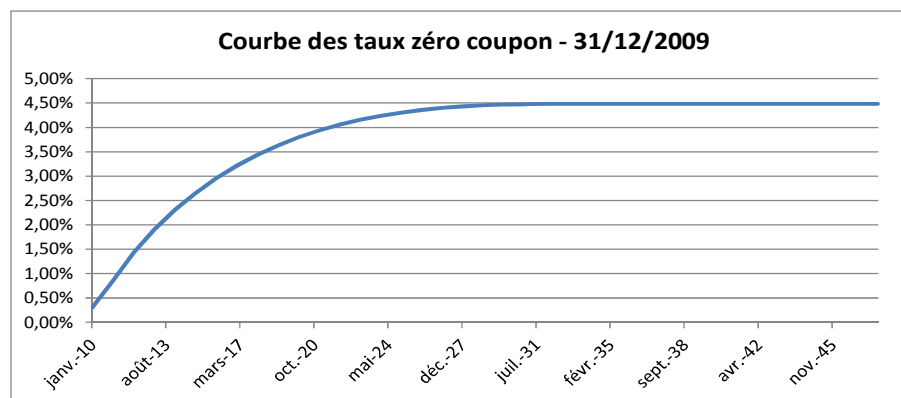
Les courbes implicites sont déduites (indirectement) des cotations de marché d'instruments comme les obligations et les swaps. Parmi les courbes implicites nous trouvons la courbe de taux zéro-coupon, la courbe de taux « forward », la courbe de taux de rendement au pair.

### 4.1.1 La courbe de taux Zéro-Coupons

Une obligation zéro coupon est une obligation ne donnant droit à aucun détachement de coupon. L'acquéreur souscrit l'obligation à un prix inférieur à sa valeur faciale, laquelle est remboursée à l'échéance du contrat.

La structure par terme des taux zéro-coupon correspond à l'ensemble des taux actuariels des titres zéro-coupon, en date 0, pour  $t$  dans l'intervalle de temps  $[0 ; T]$ , où  $T$  représente l'échéance la plus lointaine traitée sur le marché. A l'aide de cette structure par terme des taux d'intérêts, il est possible de reconstituer le prix d'une obligation souveraine de l'état français en actualisant les flux futurs versés par cette obligation.

L'Institut des Actuaire fournit régulièrement une courbe des taux zéro coupon des obligations d'état de la Zone Euro dont le rating est AAA (taux sans risque). Cette courbe fait néanmoins l'objet de lissages, et il n'est pas possible de retrouver le prix des OAT correspondantes.



**Fig.9 : Courbe des taux zéro coupon, obligations d'Etat AAA - IA 31/12/2009**

#### 4.1.2 La courbe de taux swaps

Un swap est un accord conclu entre deux parties pour s'échanger des flux de trésorerie dans le futur. Cet accord fixe les dates auxquelles ces flux seront échangés. Ils peuvent dépendre d'une ou de plusieurs variables économiques telles qu'un taux d'intérêt ou un taux de change.

La courbe de taux swaps est déterminée grâce aux swaps de taux d'intérêt. Elle est construite grâce à la méthode de proche en proche dite « méthode de bootstrap ». C'est une procédure en plusieurs étapes qui permet de reconstituer une courbe de taux d'intérêt pas à pas.

Nous nous devons d'avancer segment de maturité par segment de maturité. Pour le segment de la courbe inférieure à 1 an, nous extrayons les taux dit « taux deposits » qui correspondent au taux de maturités 1 jour à 1 an échangés sur le marché interbancaire. Les taux de maturités supérieures à un an sont obtenus via les swaps de taux d'intérêts disponibles sur le marché.

L'objectif est de déterminer pour chaque durée  $t$ , entre la date de construction de la courbe et le  $m$ -ième mois ( $m=1, 2, \dots, 480$ ), le taux instantané  $r(t)$  tel que le facteur d'actualisation  $Df(t)$  soit égal à  $\exp(-r(t) \cdot t)$ .

Pour les 12 premiers mois, les taux instantanés sont déterminés à partir « des taux deposits »  $i(t)$  aux différentes échéances  $t$ .

La valeur actuelle du deposit est :

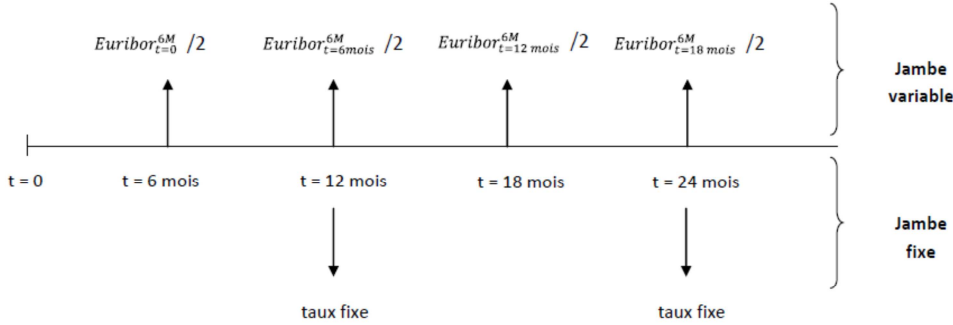
$$PV = (1 + i(t) \cdot t) \cdot Df(t) = (1 + i(t) \cdot t) \cdot e^{-r(t) \cdot t}$$

Au prix de marché  $PV = 1$ , nous pouvons déterminer le taux instantané  $r(t)$  par la formule suivante :

$$r(t) = \frac{\ln(1 + i(t) \cdot t)}{t}$$

Pour les maturités supérieures à 12 mois ( $12 < m \leq 480$ ), le taux instantané pour la date  $m$  est déterminé à partir du swap de maturité  $m$  mois sur Euribor 6 mois et des taux instantanés inférieurs à 12 mois. Un swap sur Euribor 6 mois d'échéance  $m$  mois se caractérise par une jambe fixe (le paiement des intérêts fixes est annuel) et une jambe variable (le paiement des intérêts variables est semestriel).

Graphiquement, le Swap se représente comme suit :



**Fig.10 : Représentation des cash-flows d'un swap de taux**

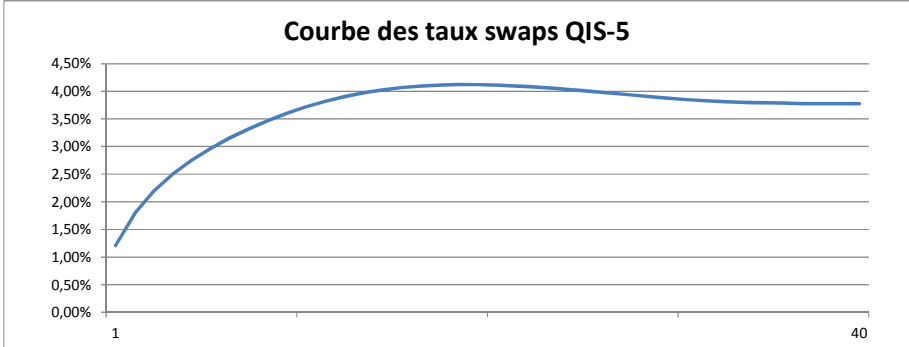
A  $t=0$ , le taux Euribor 6M correspond au taux « deposit ».

En  $t$ , le taux Euribor 6M correspond au taux « forward » 6 mois commençant en  $t$ , vu en 0. Ce taux « forward » correspond au taux 6 mois anticipé. Il est obtenu par la formule suivante :

$$Euribor6M(t) = \frac{\left( \frac{Df(t)}{Df(t + 6M)} - 1 \right)}{\frac{1}{2}}$$

$$Df(t + 6M) = e^{-Euribor6M(t)/2} \cdot Df(t)$$

Dans le cadre de cette étude, nous serons amenés à utiliser la courbe des taux swaps fournie par l'EIOPA. Nous serons aussi amenés à utiliser une courbe des taux swaps, zone euro, observée sur le marché.



**Fig.11 : Courbe des taux swaps, EIOPA 31/12/2009, données Bloomberg**

**Remarque :** Il est possible de retrouver une courbe de taux zéro-coupons à partir d'une courbe de taux swaps, et inversement. La méthodologie est présentée en annexe 5.



### 4.1.3 Les taux nominaux

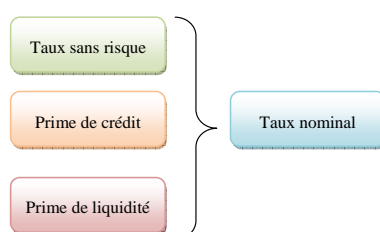
#### Décomposition du taux nominal

Un taux nominal peut se décomposer en taux sans risque et prime de risque. Ce risque est, quant à lui, divisé en :

- Un risque de défaut : prime de crédit
- Un risque d'illiquidité : prime de liquidité

Si l'on souhaite modéliser la valeur de marché d'une obligation, ces risques doivent être quantifiés. A maturité égale, le marché demande aux émetteurs privés un taux d'intérêt supérieur à celui des émetteurs souverains. La raison de ce supplément est principalement de compenser le risque de défaillance ou de retard dans les paiements de l'émetteur.

Le taux peut donc être divisé comme suit :



En général, la prime de crédit est quasiment nulle pour les obligations souveraines car un état « ne peut pas faire faillite ». Cependant, il existe bien des écarts de taux entre les états comme nous avons pu le constater récemment avec les difficultés financières des états grec et portugais au premier semestre 2010.

La prime de liquidité est censée traduire la capacité à acheter ou vendre un actif.

#### Données utilisées : l'Euribor et l'Eonia

L'Euribor (« Euro InterBank Offered Rate ») et l'Eonia sont, au même titre que le Libor, deux des deux principaux taux de référence du marché monétaire de la zone euro. L'Euribor est, pour une échéance donnée, un taux moyen offert par un échantillon d'une cinquantaine de grandes banques européennes. Il est calculé chaque jour. L'Euribor 3 mois, que nous serons amenés à utiliser dans cette étude, sert notamment de base au marché des « swaps ».

L'Eonia est le taux au jour le jour de référence sur le marché monétaire européen.

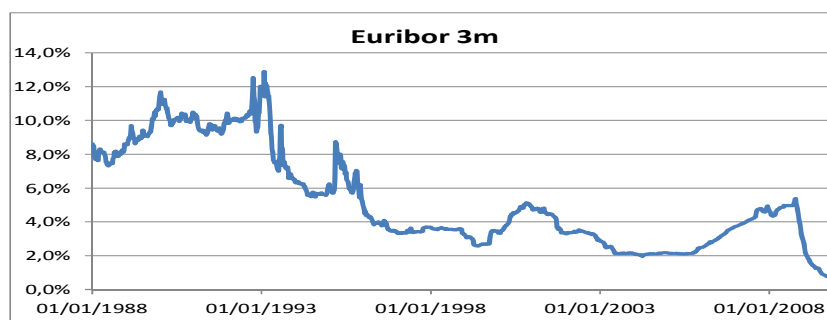


Fig.12 : Historique 1988 – 2009 du taux Euribor 3 mois, données EuroNext

**Remarque d'actualité** : Aujourd'hui, une quinzaine de banques internationales sont soupçonnées d'avoir délibérément manipulé le taux Libor entre 2006 et 2008, c'est-à-dire pendant la crise de crédit. Ce taux, qui est une référence sur les marchés de produits de couverture et un indicateur de la santé financière mondiale, aurait ainsi fait l'objet d'ententes entre ces banques qui n'auraient pas déclaré le véritable taux auquel elles empruntaient.

#### 4.1.4 Les taux "forward"

Le taux « forward » est un taux fixé aujourd'hui pour une période donnée future. Ainsi, un investisseur peut acheter ou vendre des titres en fixant dès aujourd'hui le rendement qu'il fera dans le futur, lui permettant ainsi de se couvrir contre une hausse ou une baisse des taux d'intérêt.

Notons  $f(t, s, T - s)$  le taux « forward » vu en  $t$ , commençant en  $s$  et d'échéance  $T-s$  ; et  $P(t, T)$  le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T-t$  en  $t$ . Nous avons alors la relation :

$$f(t, s, T - s) = -\frac{1}{T - s} \cdot \ln \frac{P(t, s)}{P(t, T)}$$

Sous forme discrète, cette équation s'écrit alors :

$$f(t, s, T - s) = \left[ \frac{P(t, s)}{P(t, T)} \right]^{\frac{1}{T-s}} - 1$$

Cette formule nous permettra de relier les taux zéro-coupons des taux « forward ».

Enfin, les taux spots vus en  $t$  et les taux « forward » sont étroitement liés :

$$(1 + r_3)^3 = (1 + r_1) \cdot (1 + f(0, 1, 1)) \cdot (1 + f(0, 2, 1))$$

Où  $r_3$  est le taux 3 ans et  $r_1$  est le taux 1 an.

#### 4.1.5 Les actions

Les actifs obligataires sont privilégiés par les compagnies d'assurance car ils permettent de libérer le capital investi à une date connue tout en limitant le risque de marché. Néanmoins, les assureurs sont contraints d'investir sur des actifs plus risqués, comme les actions, afin de doper leurs rendements et ainsi rester compétitifs. En effet, à long terme, les actions ont un rendement nettement plus élevé que les autres types de placement grâce à leur prime de risque ; leur rôle dans les investissements des compagnies d'assurance est donc essentiel. Par ailleurs, compte tenu du bénéfice de la diversification, la détention

d'une faible part (environ 4%) d'actions dans le portefeuille d'un assureur n'est pas coûteuse en termes de SCR.

La valeur d'une action (ou d'un indice action) est plus simple à calculer que la valeur d'un titre obligataire, car elle est en lecture directe sur le marché. Si le modèle log-normal est aujourd'hui l'archétype des modèles financiers utilisés pour la simulation du cours des actions, il néglige néanmoins les queues de distribution. Il n'est donc pas recommandé d'utiliser un tel modèle lorsque l'on souhaite évaluer une probabilité de ruine à 99,5%.

Lors de cette étude, nous serons amenés à utiliser l'indice CAC 40 nu, et l'indice CAC 40 – dividendes réinvestis.

CAC 40 Nu - 1987 - 2009	
Moyenne	Volatilité
6,60%	26%

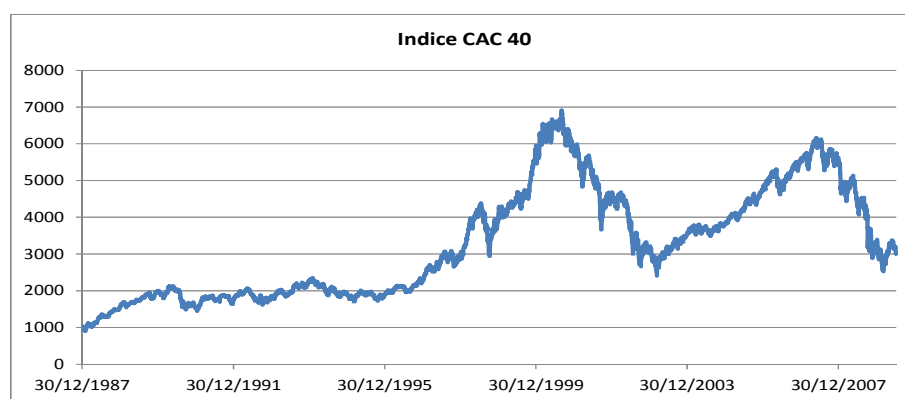


Fig.13 : Historique 1988 – 2009 de l'indice CAC 40 Nu, données EuroNext

#### 4.1.6 L'immobilier

Les assureurs investissent également sur le marché immobilier afin de se protéger contre l'inflation. Effectivement, tout en profitant de revenus réguliers grâce aux loyers perçus, l'indexation de ceux-ci sur l'inflation permet de se protéger contre les poussées inflationnistes. L'illiquidité du marché explique la part relativement faible que représente ce type d'investissements par rapport à la structure des placements.

Le rendement de l'immobilier parisien, que l'on peut décomposer en un rendement en capital et un rendement locatif, a connu ses dernières années une croissance spectaculaire. En 2011, la valeur des titres immobiliers a augmenté de près de 22%. Cet actif joue donc un rôle non négligeable dans le portefeuille d'un assureur français. Cependant, l'immobilier est un actif dont le cycle économique est long ; c'est pourquoi nous devrions être très attentifs au calibrage et ne pas surestimer les rendements.

Enfin, dans le cadre de cette étude, Le Conservateur a fait l'acquisition d'un historique d'un indice immobilier représentant le portefeuille du Conservateur, l'indice IPD, Bureaux, Paris 1<sup>ère</sup> Couronne.

Indice IPD - Paris 1ère Couronne, Bureaux			
Rendement en Capital		Rendement Locatif	
Moyenne	0,75%	Moyenne	7,85%
Volatilité	7,06%	Volatilité	0,67%

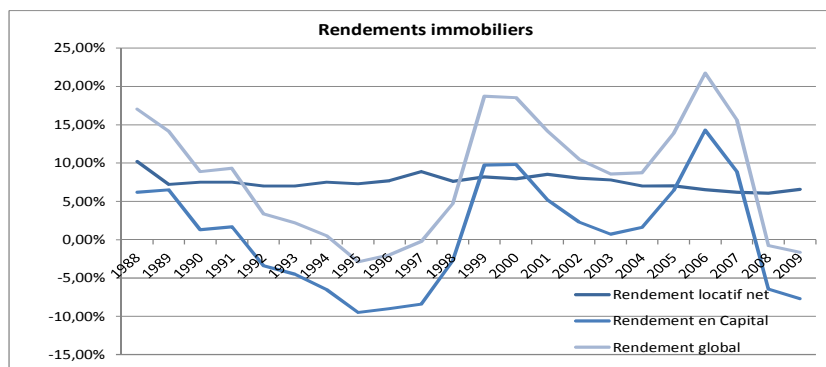


Fig.14 : Historique 1988 – 2009 de l'indice IPD Paris 1<sup>ère</sup> couronne, Bureaux, données IPD

#### 4.1.7 L'inflation et les anticipations d'inflation

Enfin, l'inflation est un dernier paramètre important de cette étude, notamment en « mode réel ». Les taux nominaux sont étroitement liés à l'inflation, et n'ont de sens économique que s'ils y sont comparés. L'inflation joue également un rôle sur le passif de l'assurance.

Dans le cadre de notre étude, nous utiliserons des données historiques de l'inflation française – hors tabac, fournies par l'INSEE ; et une courbe d'inflation « forward », déduite des taux de swaps d'inflation observée sur le marché.

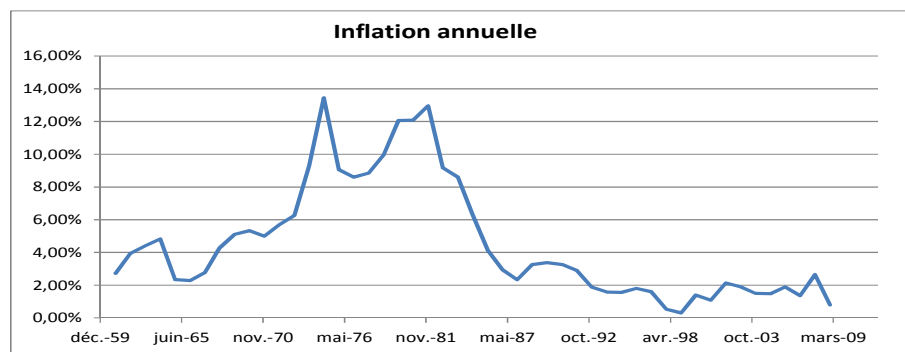


Fig.15 : Historique 1960 – 2009 du taux d'inflation annuel français (hors tabac), données INSEE

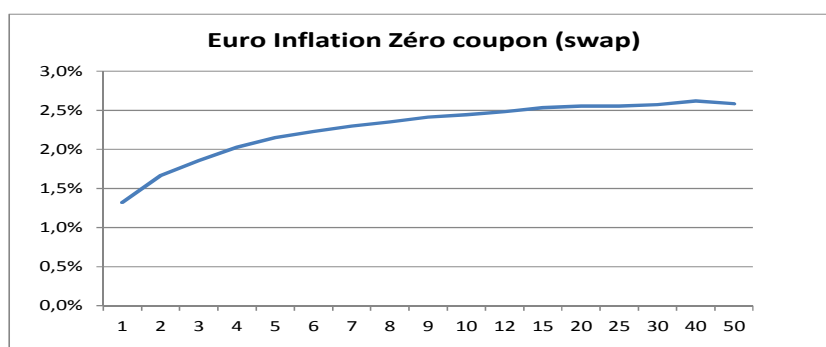


Fig.16 : Courbe ZC d'inflation anticipée (déduite des swaps d'inflation) – 31/12/2009, donnée Bloomberg

## 4.2 Valorisation d'options de taux d'intérêt

Les options de taux d'intérêt sont aujourd'hui très utilisées sur les marchés financiers à des fins de couverture. Par ailleurs, dans le cadre d'un calibrage « market-consistent » des modèles de taux, nous serons amenés à déterminer les paramètres qui nous permettront de retrouver le prix d'options classiques observables sur le marché, sous condition de liquidité du titre considéré. Nous présentons donc ici quelques options standard qui nous serviront par la suite.

### 4.2.1 Les caps et les floors

Un cap est un contrat dans lequel le vendeur promet de rétribuer son acquéreur si le taux d'intérêt sous-jacent dépasse un seuil fixé (taux d'exercice) à certaines dates futures. Ce type d'instrument a essentiellement vocation à se couvrir contre une éventuelle hausse des taux d'intérêts, par exemple si l'on a emprunté à taux variable. A chaque date prédéterminée, si le taux de référence est au-dessus du seuil, le vendeur doit verser le différentiel de taux ; ce sont les caplets.

Le floor est l'opération inverse : l'acheteur exerce son option lorsque le taux de référence passe en dessous du seuil prédéfini.

Un cap est donc un portefeuille d'options sur taux d'intérêt. Nous considérons ici un cap dont le nominal vaut  $N$ , le taux « strike » vaut  $E$ , et dont le taux de référence est le taux Euribor de maturité  $\tau$  en  $t_i$ , noté  $r(t_i)$ .

Le « payoff » du caplet en chaque date  $t_i$  s'écrit alors :

$$C(t_{i+1}) = N \tau [r(t_i) - E]_+$$

Et la valeur du Cap en  $t$  peut s'écrire ainsi :

$$Cap(t) = \sum_i C_t(t_{i+1})$$

Le modèle de Black [1976] est aujourd'hui la référence des marchés en termes d'évaluation d'options comme les caps. En comparant chaque caplet à une option européenne, nous pouvons leur appliquer la formule de Black et calculer la valeur en  $t$  d'un caplet de sous-période  $[t_i; t_{i+1}]$  :

$$C_t(t_{i+1}) = N \tau P(t, t_{i+1}) [F(t, t_i, t_{i+1})\varphi(d_{i+1}) - E \varphi(d_{i+1} - \sigma_{i+1}\sqrt{t_i - t})]$$

Avec :

$P(t, t_{i+1})$  : le prix d'un zéro-coupon en date  $t$  d'échéance  $t_{i+1}$

$F(t, t_i, t_{i+1})$  : le taux « forward » relatif au taux Euribor, vu en  $t$ , démarrant en  $t_i$  et d'échéance  $t_{i+1}$

$\sigma_{i+1}$  : la volatilité du taux « forward »  $F(t, t_i, t_{i+1})$

$$d_{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{F(t, t_i, t_{i+1})}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{i+1}^2(t_i - t)}{\sigma_{i+1}\sqrt{t_i - t}}$$

## 4.2.2 Les swaptions

Nous avons déjà rapidement défini les swaps de taux d'intérêt (voir partie PRESENTATION GENERALE DU GENERATEUR §4.1.2). Une swaption est une option sur swap ; elle donne le droit d'acheter ou de vendre un swap selon les conditions initialement prévues.

Une swaption payeuse reçoit le taux variable et paie le taux fixe ; une swaption receveuse reçoit le taux fixe et paie le variable.

Le prix d'une swaption payeuse s'écrit alors en t :

$$S(t, T, T_n) = N \left[ \sum_{k=1}^n K P(t, T_k) + P(t, T) - 1 \right]_+$$

Où

K est le « strike », c'est-à-dire le taux swap

N est le nominal

$P(t, T)$  est le prix d'un zéro-coupon de maturité T, en date t

## 4.3 Agrégation dans le cadre d'une approche « monde réel »

Dans le cadre d'une modélisation en monde réel, nous considérons une structure en cascade (Modèle d'Ahlgrim). Ce type de structure, très intuitive, permet de modéliser de manière cohérente l'ensemble des classes d'actifs tout en plaçant l'inflation comme élément déterminant du modèle.

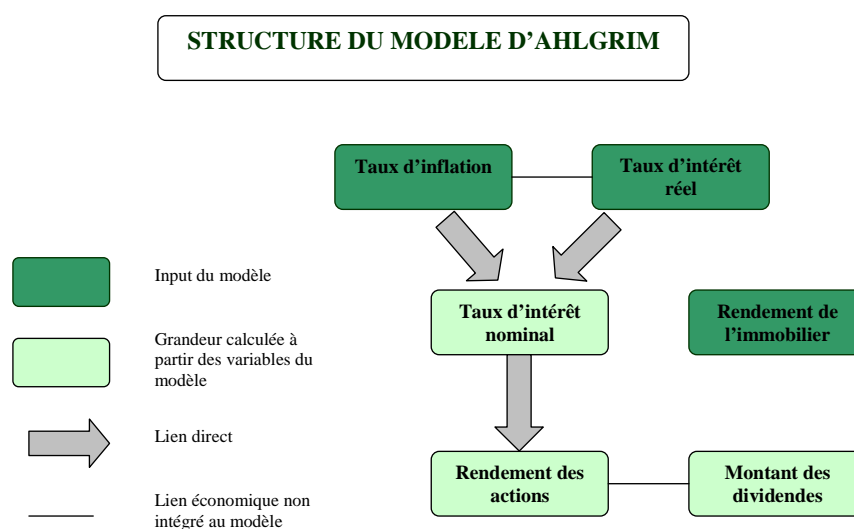


Fig.17 : Agrégation en univers "Monde Réel"

#### 4.4 Agregation dans le cadre d'une approche « risque-neutre »

Dans l'approche risque-neutre, les actifs modélisés sont agrégés par une matrice de corrélations. Pour ce faire, nous utilisons la décomposition de Choleski.

La décomposition de Choleski est utile lorsque l'on souhaite modéliser des lois multi-normales, c'est-à-dire plusieurs sources de risques.

Soit  $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  de distribution normale, de moyenne  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma$ .

Taux Court	Taux Long	Actions	Immobilier	Inflation	
100%					Taux Court
$\rho(1,2)$	100%				Taux Long
$\rho(1,3)$	$\rho(2,3)$	100%			Actions
$\rho(1,4)$	$\rho(2,4)$	$\rho(3,4)$	100%		Immobilier
$\rho(1,5)$	$\rho(2,5)$	$\rho(3,5)$	$\rho(4,5)$	100%	Inflation

Fig.18 : Matrice de corrélations (format) utilisée dans le modèle

Comme  $\Sigma$  est réelle symétrique définie positive, elle est triangularisable. On note  $T$ , matrice réelle triangulaire inférieure telle que  $\Sigma = T \cdot T'$  ; On a alors :

$$X = T \cdot T' Z + \mu$$

Avec  $Z$  vecteur de lois  $N(0,1)$  indépendantes.

Par ailleurs, on peut écrire les relations entre les coefficients de corrélation  $\rho_{i,j}$  et les coefficients de la matrice triangulaire  $T_{i,j}$  :

$$\rho_{i,j} = (T T')_{i,j} = \sum_{k=1}^n T_{i,k} T_{j,k}$$

Pour la première colonne, on obtient :

$$\rho_{1,1} = T_{1,1} T_{1,1} \text{ soit } T_{1,1} = \sqrt{\rho_{1,1}}$$

Puis :

$$\rho_{1,j} = T_{1,1} T_{j,1} \text{ soit } T_{j,1} = \rho_{1,j} / \sqrt{\rho_{1,1}}$$

Enfin, colonne par colonne, on calcule les coefficients de proche en proche :

$$\rho_{i,i} = T_{i,1} T_{i,1} + \dots + T_{i,i} T_{i,i} \text{ soit } T_{i,i} = \sqrt{\rho_{i,i} - \sum_{k<i} T_{i,k}^2}$$

$$\rho_{i,j} = T_{i,1} T_{j,1} + \dots + T_{i,i} T_{j,i} \text{ soit } T_{j,i} = \frac{\rho_{i,j} - \sum_{k<i} T_{i,k} T_{j,k}}{\sqrt{\rho_{i,i} - \sum_{k<i} T_{i,k}^2}}$$

**Remarque importante** : En pratique, afin de différencier les périodes de crises des périodes « standards », il a été décidé de retenir deux matrices de corrélations distinctes ; le passage d'un état à l'autre est modélisé grâce à une chaîne de Markov à deux états. Cette différenciation est présentée en détail par la suite.

## V- Introduction aux processus stochastiques

### 5.1 Générateur de nombres aléatoires

Toute simulation de réalisation de différentes lois de probabilité nécessite au préalable la génération de nombres aléatoires distribués selon une loi uniforme continue sur l'intervalle [0,1]. Un des générateurs de nombres quasi-aléatoires reconnu efficace est le Tore mélangé.

En effet, ce générateur dispose d'une vitesse de convergence de très bonne qualité et permet d'éviter les répétitions de nombres aléatoires générés.

La suite du Tore (classique) est définie par :

$$x_n = n\sqrt{p} - |n\sqrt{p}|$$

Où  $p$  est un nombre premier et l'opérateur  $| \cdot |$  désigne la partie entière.

Si cette suite permet d'obtenir des valeurs uniformément réparties sur [0,1], elle présente cependant l'inconvénient d'avoir une forte dépendance terme à terme. Cet algorithme n'est donc pas utilisable en l'état pour générer des nombres aléatoires.

Afin de contourner ce problème de dépendance terme à terme, nous considérons le même algorithme, mélangé par le générateur d'Excel. Ainsi, au lieu d'utiliser le nombre  $x_n$  lors du  $n$ -ième tirage de la loi uniforme, nous utiliserons le nombre  $x_m$  où  $m$  est tiré de manière aléatoire dans  $N$  :

$$x_m = x_{\varphi(n)}$$

Où  $\varphi(n) = |100 \cdot N \cdot Rnd + 1|$  et  $N$  est le nombre de tirages aléatoires que l'on souhaite simuler.

### 5.2 Utilisation de tirages dans une loi Normale centrée réduite

#### 5.2.1 Inversion de la fonction de répartition

Soit une variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$ . La fonction de répartition est supposée inversible. Si  $U$  est une variable aléatoire de loi uniforme [0,1], alors  $F^{-1}(U)$  suit la même loi que  $X$ .



## 5.2.2 Méthode de Box Muller

Nous disposons de tirages aléatoires dans une loi uniforme sur  $[0,1]$ . De ces tirages, par la méthode de Box-Müller, nous pouvons en déduire des valeurs indépendantes dans une loi normale  $N(0,1)$ . Ces bruits blancs gaussiens correspondent au facteur aléatoire dans les processus de diffusion des taux, des rendements actions ou immobiliers.

La méthode de Box-Müller consiste à générer des paires de nombres aléatoires dans une loi normale centrée réduite à partir d'une source de nombres aléatoires dans une loi uniforme.

Soient  $U, V$  deux tirages dans  $U]0,1]$ .

Alors  $X$  et  $Y$  définis ci-après sont des variables aléatoires indépendantes dans une loi  $N(0,1)$  :

$$X = \sqrt{-2 \cdot \ln(U)} \cdot \cos(2\pi \cdot V)$$

$$Y = \sqrt{-2 \cdot \ln(U)} \cdot \sin(2\pi \cdot V)$$

Dans l'ESG, nous avons décidé de laisser le choix à l'utilisateur de générer de nouveaux mouvements browniens pour les processus de diffusion des actifs, ou de reprendre un jeu de browniens préétabli. En effet, la directive impose d'effectuer des chocs sur les inputs du modèle, notamment la courbe des taux à  $t=0$ , pour évaluer la variation de la Net Asset Value (NAV) qui se calcule en faisant la différence entre l'actif et le passif pour le scénario central comme pour les scénarios choqués. A ce titre, afin d'évaluer l'impact de ces chocs, il est préférable de garder le même jeu de mouvements browniens.

## 5.3 Modélisation d'un actif

### 5.3.1 Processus et Lemme d'Itô

Un processus d'Itô est défini par un « drift »  $\mu$  représentant son espérance d'évolution, et une volatilité  $\sigma$  représentant le risque que le processus s'éloigne de son espérance  $\mu$ . La dynamique de ce processus peut s'écrire par l'équation différentielle stochastique

$$dX = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dWt$$

Avec  $Wt$  processus de Wiener (Mouvement brownien standard).

La solution de cette équation différentielle stochastique est donnée par l'équation suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu \cdot ds + \int_0^t \sigma \cdot dWs$$

### **Lemme d'Itô :**

Soit  $X_t$  un processus défini par l'équation :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dW_s$$

On cherche à caractériser l'évolution de  $f(t, X_t)$  une fonction deux fois continument différentiable.

En calcul stochastique, les oscillations autour de la trajectoire du processus créent des termes supplémentaires par rapport au calcul différentiel classique.

Nous obtenons en effet la relation :

$$df(t, X_t) = \frac{df}{dt}(t, X_t)dt + \frac{df}{dx}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2f}{dx^2}(t, X_t)d\langle X \rangle_t$$

Dans le cas d'un mouvement Brownien  $W$ , la variation quadratique  $d\langle W \rangle_t = dt$

Ainsi ; en injectant  $dX_t$  dans l'équation précédente, et par intégration :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left[ \frac{df}{ds}(s, X_s) + \mu \frac{df}{dx}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2f}{dx^2} \right] ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \frac{df}{dx} dW_s$$

Ce lemme est utilisé pour manipuler les équations différentielles et les intégrales stochastiques. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises.

### **5.3.2 Discrétisation de processus continu**

Discrétiser un processus continu consiste à approximer son équation différentielle en définissant un pas de temps, afin de pouvoir le simuler. La discrétisation permet également d'avoir un processus path-dépendant, c'est-à-dire que la valeur de la variable en  $t$  dépend de sa valeur en  $t-1$ .

Lorsque l'EDS du modèle dispose d'une solution explicite, la discrétisation exacte s'impose. En revanche, s'il n'existe pas de solution explicite, nous devons avoir recours à un développement d'Itô-Taylor, c'est à dire une discrétisation approximative. La qualité de la discrétisation peut s'estimer par le critère de la convergence forte.

Soit l'EDS la plus générale possible :

$$dX_t = \mu(X_t, t) \cdot dt + \sigma(X_t, t) \cdot dB_t$$

Sous forme intégrale, cette équation s'écrit :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) \cdot ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) \cdot dB_s$$

Discrétisation exacte :

Si la résolution de cette équation est explicite, alors  $X$  admet une discrétisation exacte. C'est le cas pour les modèles de Black & Scholes [1973] ou Vasicek [1977].

Soit une équation différentielle stochastique de type Vasicek :

$$dr_t = a \cdot (b - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dB_t$$

Posons  $X_t = (r_t - b) \cdot e^{a \cdot t}$

On a alors :

$$dr_t = -a \cdot X_t \cdot e^{-a \cdot t} dt + \sigma \cdot dB_t$$

Soit :

$$e^{a \cdot t} dr_t + a \cdot X_t \cdot dt = \sigma \cdot e^{a \cdot t} dB_t$$

Appliquons maintenant le Lemme d'Itô à  $X_t = f(t, r_t)$  :

$$dX_t = df(t, r_t) = \frac{df}{dt}(t, r_t) dt + \frac{df}{dr}(t, r_t) dr_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2 f}{dr^2}(t, r_t) dt$$

C'est-à-dire :

$$dX_t = ae^{at}(r_t - b) dt + e^{at} dr_t$$

Enfin, en réinjectant  $dr_t$  de notre équation différentielle initiale :

$$dX_t = \sigma \cdot e^{a \cdot t} dB_t$$

Par intégration,  $r_t$  s'écrit :

$$r_t = r_0 \cdot e^{-a \cdot t} + b(1 - e^{-a \cdot t}) + \sigma \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \int_0^t e^{a \cdot s} dB_s$$

On reconnaît ici une variable gaussienne de moyenne  $e^{-a \cdot t}(r_0 - b) + b$  et de variance  $\sigma^2 \cdot \frac{1 - e^{-2 \cdot a \cdot t}}{2a}$ .

En effet :  $Var(\int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u) = \int_0^t (e^{-a(t-u)})^2 du = \frac{1 - e^{-2 \cdot a \cdot t}}{2a}$

Et par conséquent, par intégration par rapport à un Brownien,

$$r_t = r_0 \cdot e^{-a \cdot \Delta} + b(1 - e^{-a \cdot \Delta}) + \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot a \cdot \Delta}}{2a}} \cdot \varepsilon$$

Où  $\varepsilon$  suit une loi  $N(0,1)$  et  $\Delta$  est le pas de la discrétisation.

### Discrétisation approximative :

On procède par approximation du processus sous-jacent, par développement d'Itô-Taylor. A l'ordre 1, il s'agit de la discrétisation d'Euler ; à l'ordre 2 il s'agit de la discrétisation de Milstein.

#### **Critère de convergence forte :**

$\tilde{X}$  converge fortement vers  $X$  lorsque l'erreur sur la valeur, en  $T$ , est asymptotiquement négligeable.

C'est à dire  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[ \left| \tilde{X}_T^\delta - X_T \right| \right] = 0$

On note  $\gamma$  l'ordre de convergence

Il existe  $K > 0$ , et  $\delta_0 > 0$  tel que  $\delta \in ]0, \delta_0[$  ,  $E \left| \tilde{X}_T^\delta - X_T \right| \leq K \cdot \delta^\gamma$

Considérons un processus n'admettant pas de discrétisation exacte, par exemple un processus de Cox Ingersoll & Ross [1985]:

$$dr_t = a \cdot (b - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t} \cdot dB_t$$

Le processus discrétisé s'écrit alors, à l'ordre 1 :

$$r_{t+\Delta} = r_t + a \cdot (b - r_t) \cdot \Delta + \sigma \cdot \sqrt{\Delta \cdot r_t} \cdot \varepsilon$$

**Remarque :** L'estimation des paramètres est souvent une étape délicate, car elle peut être à l'origine d'un biais. Si le processus n'admet pas de discrétisation exacte, il sera impossible d'estimer les paramètres par maximum de vraisemblance. Il faudra alors procéder par inférence indirecte. L'estimation par inférence indirecte consiste à choisir le paramètre  $\hat{\theta}$  qui minimise la « distance » entre l'estimation du modèle sur les observations et l'estimation de ce même modèle sur les données simulées en prenant  $\hat{\theta} = \theta$ . Il faudra donc définir une « distance », par exemple la distance quadratique.

Enfin, il est possible que l'estimation par inférence indirecte puisse aboutir à une valeur d'un paramètre incohérente. Nous serons alors amenés à fixer ce paramètre arbitrairement (de manière cohérente), et à estimer à nouveau les autres paramètres.

### 5.3.3 Loi log-normale et mouvements browniens géométriques

Il s'agit du mouvement Brownien communément utilisé en mathématiques financières. Il permet en effet de modéliser les mouvements des indices boursiers.

Soit  $S$  le cours d'un actif risqué ; la variation du cours de l'actif est donné par l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dSt}{St} = r \cdot dt + \sigma \cdot dBt$$

Le processus  $S$  suit alors une loi log-normale.

Démonstration :

Appliquons le lemme d'Itô à  $Y = \ln(S)$

$$\frac{dY}{dS} = \frac{1}{S}$$

$$\frac{d^2Y}{dS^2} = \frac{-1}{S^2}$$

D'où, d'après le lemme d'Itô,

$$dY = \frac{1}{S} \cdot (r \cdot S \cdot dt + \sigma \cdot S \cdot dBt) - \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot dt$$

En intégrant cette équation différentielle entre 0 et  $t$  et en injectant  $S$ , nous obtenons la relation :

$$\ln\left(\frac{St}{S0}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot Bt$$

Soit :

$$St = S_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot Bt\right)$$

### 5.3.4 Simulations de Monte Carlo

Disposant d'une génération de nombres aléatoires, la simulation de Monte Carlo permet de créer un échantillon d'un processus afin d'en évaluer les caractéristiques statistiques comme la moyenne, l'écart-type ou les quantiles.

Pour cela, il est nécessaire de disposer d'un nombre de simulations conséquent afin d'obtenir des résultats précis et convergents ; le temps de calcul peut alors s'avérer très long, selon les processus que l'on souhaite modéliser.

# APPROCHE RISQUE NEUTRE

---

Nous présentons ici les démarches que nous avons eues au Conservateur dans le cadre de la mise en place d'un ESG en univers risque-neutre. Pour rappel, les scénarii auront vocation à être intégré au modèle prospectif établi par la sous-direction ALM/investissements pour l'évaluation des engagements futurs et des capitaux réglementaires. La mise en place de cet ESG s'est effectuée en quatre étapes :

- Etudes et choix des modèles d'actifs ;
- Calibrage des modèles ;
- Implémentation ;
- Analyse des résultats et études statistiques.

Les calibrages sont effectués à partir des données au 31/12/2009.

## I- Choix des modèles

Le choix des modèles est une étape essentielle à la mise en place d'un ESG, à fortiori dans le cadre d'une évaluation des fonds propres nécessaires pour assurer une probabilité de ruine inférieure ou égale à 0.5% sur 1an. En effet, dans ce cadre, il est indispensable de disposer de modèles qui ne sous-estiment pas les queues de distribution.

Par ailleurs, le calibrage des modèles devra être effectué de manière « market-consistent », c'est-à-dire que l'actualisation des flux futurs au taux sans risque doit permettre de retrouver le prix des actifs à  $t=0$ . Cette approche permet « matcher » l'actif et le passif, actualisé lui aussi au taux sans risque.

### 1.1 Structure par terme des taux d'intérêts

Nous souhaitons modéliser les déformations futures de la courbe des taux. Il s'agit de l'un des enjeux majeurs de l'ESG. Si pour les actions ou l'immobilier nous pouvons directement modéliser le prix d'un indice, il est beaucoup plus difficile d'appréhender le prix d'une obligation puisque nous sommes obligés de passer par la courbe des taux. Pour ce faire, nous avons décidé de retenir deux modèles différents pour modéliser les déformations de la courbe des taux zéro coupon sans risque : Vasicek 2 facteurs [1977] et HJM [1989]. La présentation de modèles de taux est inspirée de l'ouvrage de Frédéric Planchet, Aymeric Kamega et Pierre Théron, *Scénarios économiques en assurance* [2009].

### 1.1.1 Le modèle de Vasicek 2 facteurs

Il s'agit d'un processus de retour à la moyenne ; c'est un modèle d'équilibre. Nous considérons ici deux processus de diffusion : le taux court  $r_t$ , et un taux long  $l_t$ .

Ces taux suivent une dynamique de type Vasicek [1977] :

$$dr_t = \nu_r \cdot (l_t - r_t) \cdot dt + \sigma_r \cdot dB_t$$

$$dl_t = \nu_l \cdot (\mu_l - l_t) \cdot dt + \sigma_l \cdot dB_t$$

Où

$\nu_r$  et  $\nu_l$  sont les vitesses de retour à la moyenne

$\mu_l$  est la moyenne du taux long

$\sigma_r$  et  $\sigma_l$  sont les volatilités des taux court et long

Ces processus admettent une discrétisation exacte, en appliquant le Lemme d'Itô à :

$$X_t = (r_t - l_t) \cdot e^{\nu_r \cdot t}$$

$$Y_t = (l_t - \mu) \cdot e^{\nu_l \cdot t}$$

On obtient alors :

$$dX_t = e^{\nu_r \cdot t} \cdot \sigma_r \cdot dB_{r,t}$$

$$dY_t = e^{\nu_l \cdot t} \cdot \sigma_l \cdot dB_{l,t}$$

En intégrant et en réinjectant  $r$  et  $l$ , on obtient le système discrétisé :

$$(r_{\Delta(t+1)} - l_{\Delta(t+1)}) \cdot e^{\nu_r \cdot \Delta(t+1)} - (r_{\Delta t} - l_{\Delta t}) \cdot e^{\nu_r \cdot \Delta t} = \int_{\Delta t}^{\Delta t + \Delta} \sigma_r \cdot e^{\nu_r \cdot s} \cdot dB_{r,s}$$

$$(r_{\Delta(t+1)} - \mu) \cdot e^{\nu_l \cdot \Delta(t+1)} - (l_{\Delta t} - \mu) \cdot e^{\nu_l \cdot \Delta t} = \int_{\Delta t}^{\Delta t + \Delta} \sigma_l \cdot e^{\nu_l \cdot s} \cdot dB_{l,s}$$

On en déduit alors les relations de récurrence suivantes:

$$r_{\Delta t + \Delta} = r_{\Delta t} \cdot e^{-\nu_r \cdot \Delta} + l_{\Delta t} \cdot (1 - e^{-\nu_r \cdot \Delta}) + \sigma_r \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \nu_r \cdot \Delta}}{2 \cdot \nu_r}} \cdot \varepsilon_{r,t}$$

$$l_{\Delta t + \Delta} = l_{\Delta t} \cdot e^{-\nu_l \cdot \Delta} + \mu \cdot (1 - e^{-\nu_l \cdot \Delta}) + \sigma_l \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2 \cdot \nu_l \cdot \Delta}}{2 \cdot \nu_l}} \cdot \varepsilon_{l,t}$$

Enfin, en univers risque-neutre, le prix d'un zéro-coupon de maturité T, à l'instant de projection t, est donné par :

$$P(t, T) = \exp[ A(T - t) - B_2(T - t) \cdot r_t - B_1(T - t) \cdot l_t ]$$

Avec:

$$A(u) = (B_2(u) - u) \cdot \left( \mu - \frac{\sigma_r^2}{2 \cdot \nu_r^2} \right) + B_1(u) \cdot \mu - \frac{\sigma_r^2 \cdot B_2(u)^2}{4 \cdot \nu_r} + \frac{\sigma_l^2}{2} \cdot \left[ \frac{u}{\nu_l^2} - 2 \cdot \frac{B_1(u) + B_2(u)}{\nu_l^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\nu_r - \nu_l)^2} \cdot \frac{1 - e^{-2 \cdot \nu_r \cdot u}}{2 \cdot \nu_r} - \frac{2 \cdot \nu_r}{\nu_l \cdot (\nu_r - \nu_l)^2} \cdot \frac{1 - e^{-(\nu_r + \nu_l)u}}{\nu_r + \nu_l} + \frac{\nu_r^2}{\nu_l \cdot (\nu_r - \nu_l)^2} \cdot \frac{1 - e^{-2 \cdot \nu_l \cdot u}}{2 \cdot \nu_l} \right]$$

$$B_1(u) = \frac{\nu_r}{\nu_r - \nu_l} \cdot \left[ \frac{1 - e^{-\nu_l \cdot u}}{\nu_l} - \frac{1 - e^{-\nu_r \cdot u}}{\nu_r} \right]$$

$$B_2(u) = \frac{1 - e^{-\nu_r \cdot u}}{\nu_r}$$

Un tel modèle multifactoriel permet de modéliser les différentes formes de la courbe des taux observées sur le marché. En effet, en utilisant deux facteurs, le modèle permet de représenter à la fois les mouvements de translations, d'inversion, de pentification et de dépentification de la courbe. De plus, ce modèle est simple à développer et assez rapide en temps de calcul.

### 1.1.2 Le modèle de Heath Jarrow Morton

Nous nous plaçons ici dans un cas du modèle HJM [1989] : Vasicek généralisé. Il s'agit d'un modèle de déformation de la courbe des taux, construit de manière cohérente avec le marché à t=0 : La courbe des taux initiale est considérée comme un input du modèle. Notre processus sera ainsi « market-consistent ». Ce modèle utilise la diffusion de taux « forward » instantanés que nous devons approximer par des taux de faible maturité.

Notons  $f(t, s, T - s)$  le taux « forward » vu en t, commençant en s et de maturité T-s :

$$f(t, s, T - s) = - \frac{1}{T - s} \cdot \ln \left( \frac{P(t, s)}{P(t, T)} \right)$$

Le taux « forward » instantané  $f(t, T)$  est le taux vu en t, commençant en T et de maturité quasi-nulle. Sa dynamique est donnée par l'équation différentielle stochastique :

$$df(t, T) = \mu(t, T)dt + \sigma(t, T)dBt$$

$$f(0, T) = \hat{f}(0, T)$$



$$f(0, T) = -\frac{d \ln P(0, T)}{dT}$$

$$P(t, T) = E[\exp(-\int_t^T f(t, s) ds)]$$

Où  $\hat{f}$  représente le taux « forward » observé sur le marché.

On peut déduire la courbe des taux « forward » instantanés de la courbe des taux ZC, par l'approximation :

$$f(0, T) \approx -\frac{\Delta \ln P(0, T)}{\Delta T}$$

On définit ensuite une structure de volatilité pour les taux « forward » ; en général de la forme :

$$\sigma(t, T) = \sigma \cdot e^{-a \cdot (T-t)}$$

Où  $T' = T-t$  est la maturité, vue en  $t$ . ( $T$  est la maturité vue en 0).

Le coefficient de dérive (« drift »)  $\mu$  est exprimé en fonction de  $\sigma$  :

$$\mu(t, T') = \sigma(t, T') \cdot \int_t^T \sigma(t, s) ds = \frac{\sigma^2}{a} (e^{-a \cdot T'} - e^{-2 \cdot a \cdot T'})$$

L'équation différentielle régit par le taux « forward » s'écrit alors :

$$df(t, T') = \frac{\sigma^2}{a} \cdot (e^{-a \cdot T} - e^{-2 \cdot a \cdot T}) dt + \sigma \cdot e^{-a \cdot T} d\widehat{B}_t$$

Puis, par intégration :

$$f(t, T') = f(0, T' + t) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a \cdot T'}) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a \cdot (T'+t)}) + \sigma \cdot \int_0^t e^{-a \cdot (T-s)} d\widehat{B}_s$$

On peut ensuite en déduire la valeur du taux court terme à partir du taux « forward » :

$$r(t) = f(t, T = 0) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a \cdot t})^2 + \sigma \cdot \int_0^t e^{-a \cdot (t-s)} d\widehat{B}_s$$

Dans ce processus,  $r(t)$  suit une distribution normale

- de moyenne  $f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a \cdot t})^2$  ;
- de variance  $\sigma^2 \cdot \int_0^t e^{-2a \cdot (T-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (e^{-2a \cdot (T-t)} - e^{-2a \cdot T})$ .

$f(0, T)$  suit une distribution normale

- de moyenne  $f(0, T') - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT'})^2 + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-a(t+T')})^2$  ;
- de variance  $\sigma^2 \cdot \int_0^t e^{-2a(T-s)} ds$ .

Afin d'avoir un processus path-dependant (processus dans lequel la valeur en  $t$  dépend des valeurs précédentes : effet sentier), nous discrétisons l'équation de diffusion du taux court.

On calcule tout d'abord  $r(T) - e^{-a(T-t)}r(t)$

$$r(T) - e^{-a(T-t)}r(t) = f(0, T) - e^{-a(T-t)}f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-aT} + e^{-2aT} - e^{-a(T+t)}) + \sigma \int_0^t e^{-a(T-s)} d\widehat{B}_s$$

$$\text{Or } E[\sigma \int_t^T e^{-a(T-t)} d\widehat{B}_s] = 0 \quad \text{et } \text{Var}[\sigma \int_t^T e^{-a(T-t)} d\widehat{B}_s] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(T-t)})$$

D'où :

$$\sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} d\widehat{B}_s = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(T-t)})} \cdot \varepsilon$$

Enfin, pour le taux court, en considérant  $t = \Delta n$  et  $T = \Delta(n+1)$  on obtient l'équation discrétisée :

$$r(\Delta(n+1)) = e^{-a\Delta} \cdot r(\Delta n) + f(0, \Delta(n+1)) - e^{-a\Delta} f(0, \Delta n) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-a\Delta} + e^{-2a\Delta(n+1)} - e^{-a\Delta(2n+1)}) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta})} \cdot \varepsilon$$

Où  $\Delta$  est le pas de temps et  $\varepsilon$  suit une loi  $N(0,1)$ .

Une fois le taux court simulé, on peut déterminer les prix des zéro-coupon grâce à la formule fermée ci-dessous :

$$P(t, T') = E[\exp(-\int_t^{T'} f(t, s) ds)]$$

$$P(t, T') = \frac{P(0, T' + t)}{P(0, t)} \cdot \exp\left[\left(\frac{1 - e^{-aT'}}{a}\right) \cdot (f(0, t) - r(t)) - \frac{\sigma^2 \cdot (1 - e^{-2at}) \cdot (1 - e^{-aT'})^2}{4a^3}\right]$$

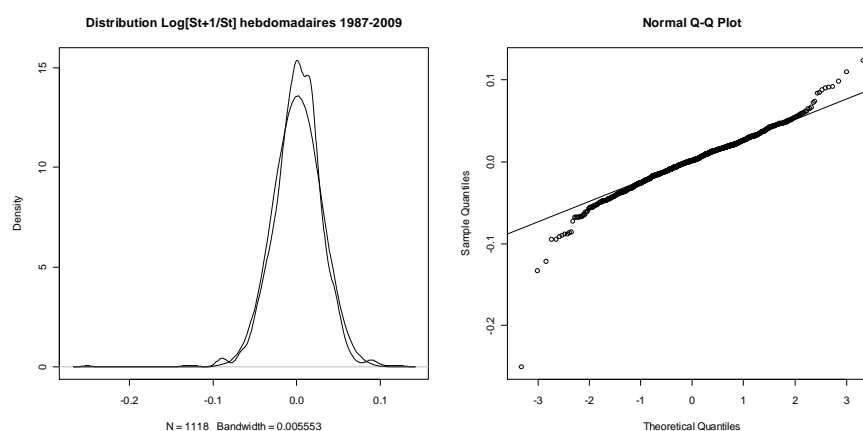
## 1.2 Rendements Action

Nous souhaitons simuler ici les performances d'un indice action. L'indice retenu pour le calibrage doit être cohérent avec le portefeuille du Conservateur ; la poche « actions » de l'actif du Conservateur étant essentiellement investie sur le marché Français, l'indice qui nous semble adéquat est l'indice CAC40.

Pour rappel, l'équation de diffusion du modèle de Black & Scholes [1973] est la suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r \cdot dt + \sigma \cdot dB_t$$

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot B_t\right]$$



**Fig.19 : Densité et Droite de Henry, modèle log-normal et répartition empirique**

Le modèle classique de Black & Scholes [1973], processus lognormal des rendements actions, représente mal les queues de distribution. Un des objectifs de la réforme Solvabilité II étant de permettre à l'assureur de disposer de fonds propres nécessaires pour assurer une probabilité de ruine inférieure ou égale à 0.5% sur 1an, les queues de distributions ne doivent pas être négligées.

Pour corriger ce défaut, et mieux modéliser les « extrêmes », nous avons choisi de travailler avec un modèle à 2 états : RSLN (Regime-Switching-Log-Normal) proposé par Mary R. Hardy [2001], professeur à l'université de Waterloo, Canada.

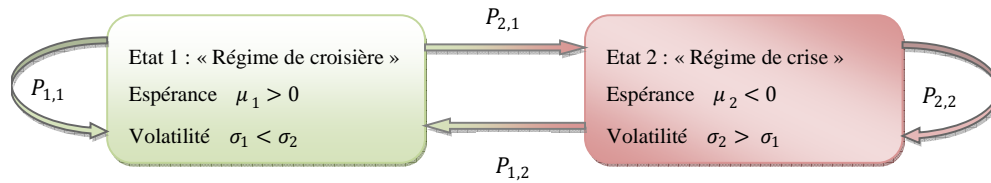
Il s'agit d'un modèle à 2 états, représentés par une chaîne de Markov.

- Un régime de « croisière » ;
- Un régime de « crise ».

Dans chaque état, les rendements suivent une loi log-normale de paramètres différents.

$$\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \Big|_{\rho(t)} = N(\mu_{\rho}, \sigma_{\rho}^2)$$

On définit les probabilités de passage :  $P_{i,j} = P(\rho_t = i | \rho_{t-1} = j)$



**Fig.20 : Chaîne de Markov utilisée pour le modèle RSLN**

Les paramètres du modèle sont les deux moyennes, les deux volatilités, et les probabilités de passage d'un état à l'autre. Nous avons donc 6 paramètres à définir, par maximum de vraisemblance.

La vraisemblance du modèle est donnée par la formule ci-dessous :

$$L(\Theta) = f(Y_1|\Theta) \cdot \dots \cdot f(Y_n|\Theta, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1})$$

$$Y_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$$

Où f est la fonction de densité de Y.

Pour déterminer la vraisemblance, nous procéderons par itérations successives. Nous définissons la fonction densité de Y pour un passage d'état i vers j :

$$f(\rho_t, \rho_{t-1}, Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1, \Theta) = P(\rho_{t-1} | Y_{t-1}, \dots, Y_1, \Theta) \cdot P(\rho_t | \rho_{t-1}, \Theta) \cdot f(Y_t | \rho_t, \Theta)$$

Où  $P(\rho_t | \rho_{t-1}, \Theta)$  est la probabilité de passage entre le régime  $\rho_{t-1}$  et  $\rho_t$ ,

Avec :

$$f(Y_t | \rho_t, \Theta) = \phi\left(\frac{Y_t - \mu_{\rho_t}}{\sigma_{\rho_t}}\right)$$

Où  $\phi$  représente la fonction de répartition d'une loi gaussienne.

Enfin, connaissant les  $f(\rho_t, \rho_{t-1}, Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1, \Theta)$ , nous pouvons en déduire les densités conditionnelles dont nous sommerons le logarithme pour obtenir la log-vraisemblance :

$$f(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1, \Theta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\rho_t = i, \rho_{t-1} = j, Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1, \Theta)$$

$$\ln[L(\Theta)] = \ln[f(Y_1|\Theta)] + \dots + \ln[f(Y_n|\Theta, Y_1, \dots, Y_{n-1})]$$

Connaissant les probabilités de passage d'un état à l'autre, nous pouvons en déduire les probabilités d'être dans un état, ou d'y rester :

$$\pi_1 = \frac{p_{2,1}}{p_{2,1} + p_{1,2}} \quad \pi_2 = \frac{p_{1,2}}{p_{2,1} + p_{1,2}} = 1 - \pi_1$$

### 1.3 Rendements immobiliers

Nous pouvons distinguer deux types de rendements immobiliers :

- Les rendements en capital ;
- Les rendements locatifs.

Dans le cadre de notre modélisation risque-neutre, nous décidons de modéliser directement le rendement global de l'immobilier par un processus log-normal (Black & Scholes, [1973]), dont l'équation de diffusion s'écrit comme suit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r \cdot dt + \sigma \cdot dB_t$$

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma \cdot B_t\right]$$

### 1.4 L'inflation française

Enfin, l'inflation française sera modélisée assez simplement, par un processus de retour à la moyenne, simple à calibrer sur un historique : Vasicek [1977].

L'équation de diffusion d'un tel processus s'écrit comme suit :

$$di_t = \nu \cdot (\mu - i_t)dt + \sigma dB_t$$

Où

- $i$  est le taux considéré ;
- $\mu$  la moyenne « long terme » du taux ;
- $\nu$  la vitesse de retour à la moyenne ;
- $B_t$  un mouvement Brownien.

Par discrétisation, nous déduisons de l'EDS la relation suivante :

$$i_{\Delta(t+1)} = i_{\Delta t} + \Delta \cdot \nu \cdot (\mu \cdot \Delta - i_{\Delta t}) + \sigma\sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon$$

Soit: 
$$i_{\Delta(t+1)} = \alpha \cdot i_{\Delta t} + \beta + \sigma\sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon$$

## II- Calibrage des modèles

### 2.1 Structure par terme des taux d'intérêts

#### 2.1.1 Le modèle de Vasicek 2 facteurs

Ce modèle est calibré de telle sorte à se rapprocher le plus possible de la courbe des taux des obligations ZC d'état européens, notés AAA. Pour cela, nous décidons de déterminer les paramètres optimaux pour minimiser l'écart quadratique entre les prix des obligations théoriques, et observés sur le marché.

Cette méthode de calibrage par les moindres carrés est explicitée en annexe 3.

Dans le cadre de l'exercice QIS 5, les taux ZC se déduisent de la courbe de taux swaps – 31/12/2009 fournie par l'EIOPA. A l'issue des simulations, nous renvoyons en sortie du modèle la structure par terme des taux swaps (taux couponnés) :

$$sw(T) = \frac{1 - P(T)}{\sum_{k=1}^T P(k)}$$

Où sw est le taux swap de maturité T et P(T) le prix du zéro coupon.

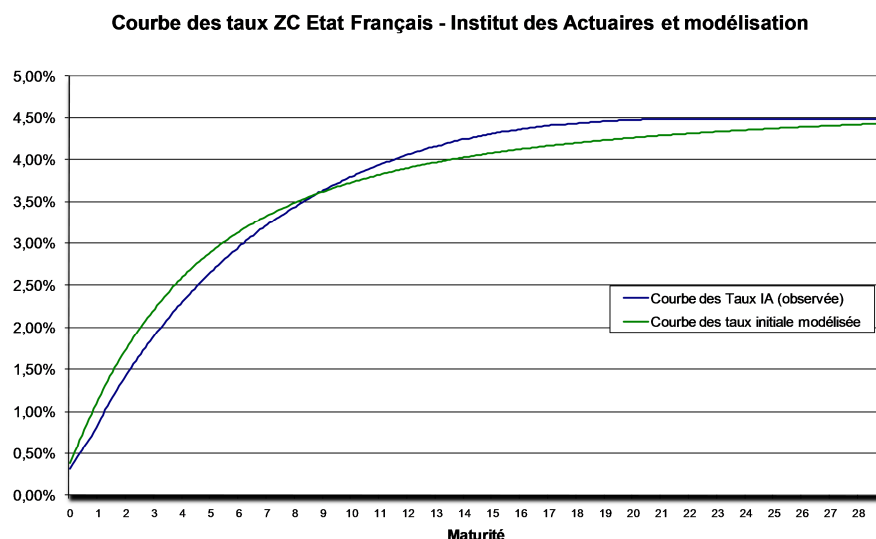
Nous présentons à présent deux exemples de calibrage du modèle :

- A partir de la courbe des taux ZC des obligations d'état, courbe fournie par l'Institut des Actuaire
- A partir de la courbe des taux swaps, fournie par l'EIOPA pour l'exercice QIS 5..

**Exemple N°1** : Courbe des taux zéro-coupon – Obligations d’Etat Français – IA 31/12/2009

Cette courbe, propre au marché français, présente l’avantage d’être très complète, puisque nous disposons de toutes les maturités jusqu’à 100ans en pas mensuel, ce qui nous permet d’effectuer notre calibrage sur un maximum de points.

	v (retour à la moyenne)	μ (moyenne)	σ (volatilité)
Résidus $\sum [R(\text{obs})-R(\text{th})]^2$			
0,001259449			
Taux court	42,00%		1,28%
Taux long	87,71%	4,71%	1,00%



**Fig.21** : Vasicek - Calibrage par minimisation de l’écart quadratique à t=0, courbe IA 31/12/2009

Remarquons que le caractère « market-consistent » est ici approximatif. En effet, il est très difficile de se fixer précisément sur la courbe des taux à t=0.

L’intérêt principal de ce modèle est qu’il est très simple à mettre en place, permet de diffuser à la fois les taux longs et les taux courts, et se calibre assez bien sur les courbes des taux ayant une forme exponentielle « classique ».

**Remarque** : Afin de donner plus de « poids » aux maturités les plus courantes dans le portefeuille de la compagnie, nous pourrions ajouter un coefficient de pondération C(T) à la somme des moindres carrés. Par exemple la proportion d’obligation de maturité T dans notre portefeuille :

$$(v, \mu, \sigma, \lambda) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sum_T C(T) \cdot [P^{th}(0, T) - P^{Obs}(0, T)]^2$$

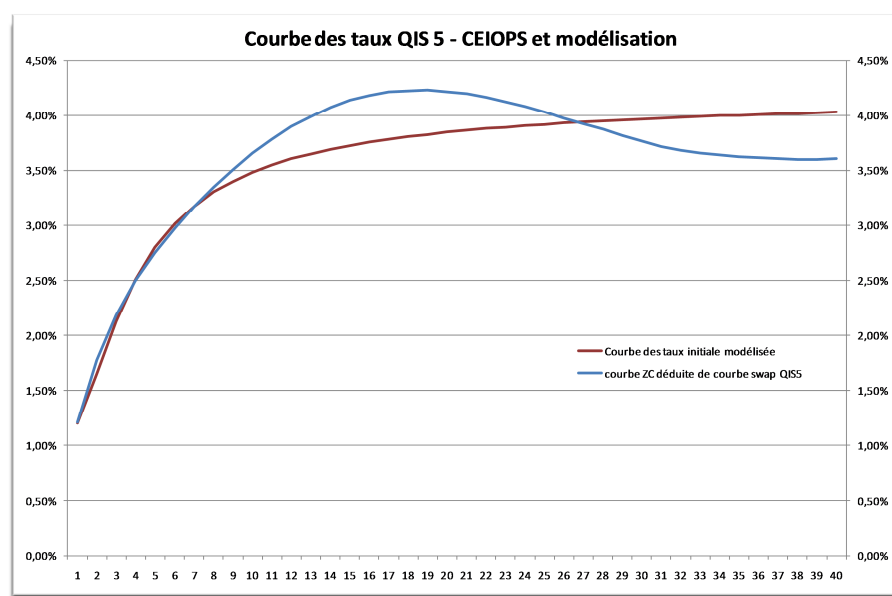
**Exemple N°2** : Courbe des taux UE EIOPA (CEIOPS) – Prime de liquidité 0%– QIS 5 - 31/12/2009

Nous disposons ici de la courbe des taux swaps fournie par l’EIOPA dans le cadre de l’exercice QIS5. De cette courbe nous pouvons déduire la courbe des taux zéro-coupons :

$$P(T) = \frac{1 - \sum_{k < T} P(k) \cdot sw(T)}{1 + sw(T)}$$

$$ZC(T) = \frac{-\ln(P(T))}{T}$$

	v (retour à la moyenne)	μ (moyenne)	σ (volatilité)
Résidu $\sum [R(ops)-R(th)]^2$	Taux court	99,00%	3,00%
0,000480862	Taux long	100%	4,26%



**Fig.22** : Vasicek - calibrage par minimisation de l’écart quadratique à t=0, courbe EIOPA 31/12/2009

Nous remarquons que, de par la forme de la courbe et les coefficients obtenus par le modèle (vitesse de retour à la moyenne très élevée), le calibrage est très approximatif. De plus, les différentes maturités fournies par l’EIOPA sont annuelles, le nombre de points dont nous disposons est limité.

Par conséquent, dans le souci de calibrer notre modèle de taux au mieux par rapport au marché à t=0, nous proposons d’utiliser un second modèle, compatible avec la courbe des taux observée au comptant : HJM [1989]. Ce modèle nous permettra également d’être cohérents avec le prix d’options sur le marché à t=0.



## 2.1.2 Le modèle de Heath Jarrow Morton

Pour calibrer le modèle, nous devons fixer les paramètres  $a$  et  $\sigma$  de la volatilité des taux « forward ». Pour cela nous nous calons sur les prix de swaptions observés sur le marché.

A partir de la courbe des taux swap de marché (31/12/2009), nous en déduisons la courbe ZC, les taux « forward » instantané, et les taux swap 1, 5 et 10 ans dans  $p$  années ( $p = 1, 5$  ou  $10$  ans) selon la (les) swaption(s) que nous utilisons.

Nous simulons ensuite de nombreux processus (1000 scénarii) de taux court par la formule discrétisée donnée par le modèle, puis les prix des zéro coupons en  $t$ , et nous recalculons le « payoff » de la swaption en  $t$  que nous actualisons pour obtenir la valeur à  $t=0$ .

Le prix des ZC, en fonction des taux swaps (observés sur le marché) s'écrivent :

$$P(T) = \frac{1 - \sum_{k < T} P(k) \cdot sw(T)}{1 + sw(T)}$$

Le taux « forward » de maturité  $j$  dans  $i$  années est donné par :

$$fwd_{swapRate}(i, j) = \frac{P(i) - P(i + j)}{\sum_{j+1}^{i+j} P(k)}$$

Le « payoff » de la swaption receveuse-payeuse, dont l'option s'exerce en  $t$  et dont la durée du swap sous-jacent vaut  $T$ , est alors donné par :

$$S(t, T) = \left| \sum_{k=1}^T \left[ \frac{K \cdot N}{(1 + ZC(t, k))^k} \right] + \frac{N}{(1 + ZC(t, k))^T} - N \right|$$

Où

$N$  est le nominal

$K$  le « Strike » c'est à dire le taux swap « forward » de maturité  $T$  dans  $t$  années

$ZC(t, k)$  les taux zéro-coupon de maturité  $k$  modélisés en  $t$

Pour déterminer la valeur de la swaption en  $t=0$ , on actualise par capitalisation du taux court modélisé :

$$DF(t) = \frac{1}{(1 + r_0) \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \dots (1 + r_t)}$$

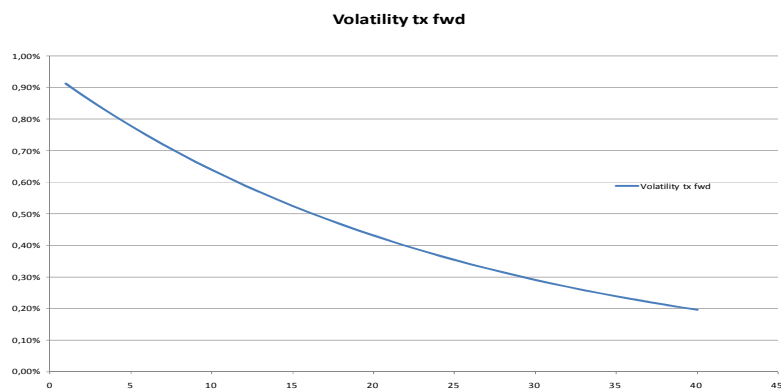
Avec ce type de modèle, il est très difficile de retrouver exactement les prix de plusieurs swaptions. Nous avons décidé de nous caler sur la swaption (10,10) tout en se rapprochant le plus possible des autres. Les résultats du calibrage sont présentés ci-dessous.

PAYOFF 10-10	11,483	11,483		
PAYOFF 5-5	6,110	5,578		
PAYOFF 5-10	10,301	10,612		
PAYOFF 1-10	5,528	5,907	$\sigma=$	0,95%
PAYOFF 1-1	0,737	0,521	$a=$	3,94%

**Fig.23 : « Payoffs » des swaptions modélisés et observés sur le marché, 31/12/2009, donnée Bloomberg**

Nous retrouvons donc sans difficulté la swaption 10,10, tout en minimisant l'écart sur les autres swaptions. Le calibrage n'est pas optimal mais permet à minima de retrouver le prix de la swaption 10,10 qui est très liquide. Ces paramètres seront retenus pour les simulations.

Comme l'illustre le graphique ci-après, la volatilité des taux « forward » est dégressive avec la maturité, ce qui est économiquement cohérent.



**Fig.24 : HJM - Volatilité des taux « forward » du modèle calibré**

En lançant 1000 simulations du taux court, et de la structure par terme des taux zéro coupon, nous pouvons calculer l'espérance du taux sans risque.

Sous les paramètres précédemment établis, la moyenne de l'espérance annualisée du taux sans risque sur un horizon de 40 ans vaut 3.6%. Cette valeur sera utilisée pour le calibrage des modèles Actions et Immobilier.

## 2.2 Rendements Action

En univers risque-neutre, l'espérance de rendement des actions est égale au taux sans risque, tandis que la volatilité doit correspondre à la volatilité implicite observée sur le marché.

Pour calibrer notre modèle RSLN, nous considérons l'espérance du taux court sans risque modélisé lors de nos simulations HJM, et la volatilité implicite du CAC40 observable sur le marché : indice VCAC.

Le calibrage s'effectue en deux étapes. Nous calibrons d'abord le modèle par maximum de vraisemblance sur un historique 1988-2009 et, à partir d'un nombre de simulations conséquent (1000, afin de pouvoir observer une convergence des résultats), nous effectuerons une homothétie et une translation des rendements actions afin de retrouver la volatilité implicite observable sur le marché à t=0 et l'espérance du taux sans risque :

$$E[a \cdot X + b] = a \cdot E[X] + b$$

$$Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$$

Ces paramètres de translation/homothétie s'appliquent alors pour chaque état.

Lors de nos simulations HJM, en considérant les paramètres ( $\sigma, a$ ) obtenus lors du calibrage, la moyenne du taux court simulé vaut 3,6%. L'indice VCAC, le 31 décembre 2009 vaut 21%.

Le résultat du calibrage est exprimé ci-après.

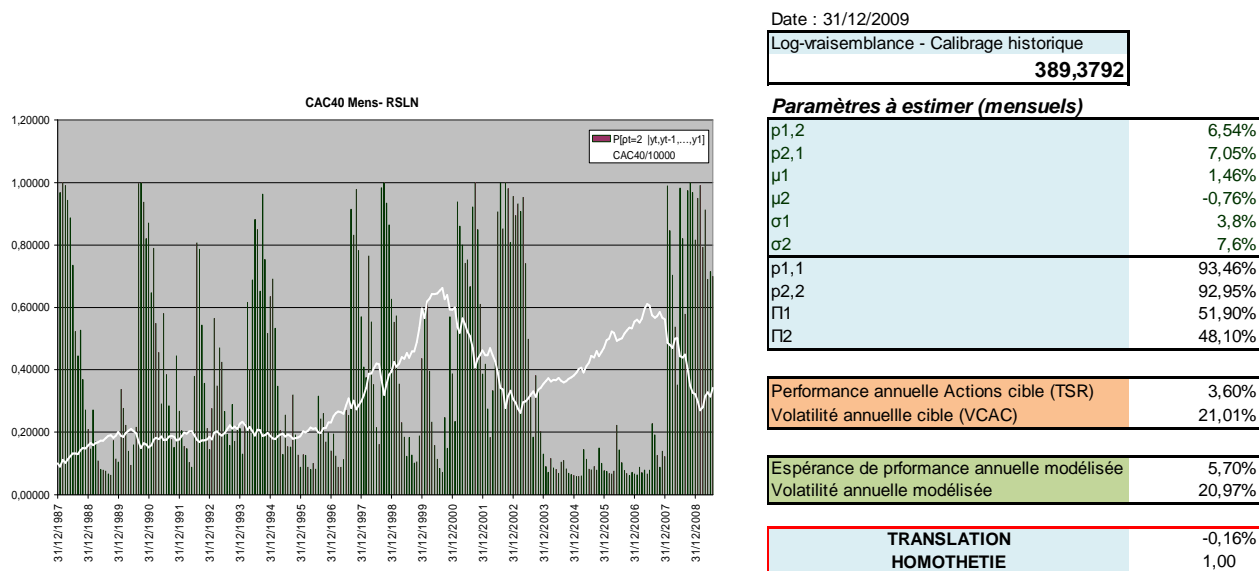


Fig.25 : RSLN - Représentation des états sur un historique (i) et paramètres obtenus\* (ii)

\*Calibré au taux sans risque obtenu avec le modèle HJM

Sur le graphique ci-dessus, nous pouvons remarquer que les chutes de l'indice action sont directement liées aux passages d'un état à l'autre. Ce modèle, très intuitif, représente assez bien la réalité du marché.

## 2.3 Rendements immobiliers

Après étude du portefeuille immobilier du Conservateur, nous avons pu cibler le type de bien et les zones géographiques des titres immobiliers de la compagnie : Paris 1<sup>ère</sup> périphérie - Bureaux.

Nous disposons d'un historique IPD [Investment Property DataBank] depuis 1987 des rendements des bureaux 1<sup>ère</sup> couronne (rendements locatifs et rendements en capital ; le rendement global pouvant se déduire des deux précédents).

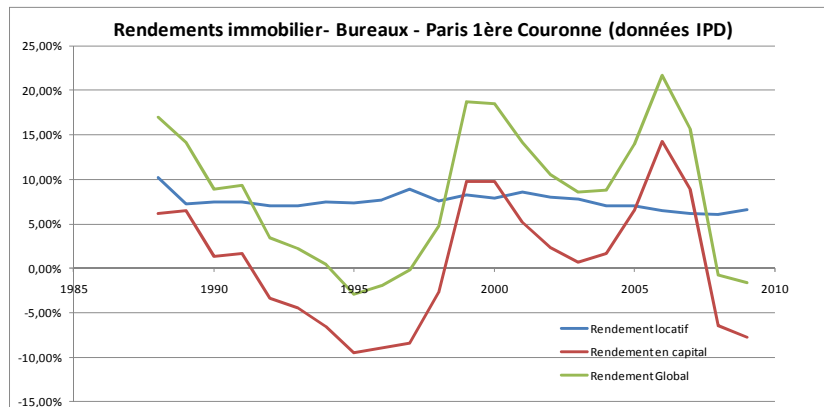


Fig.26 : Historique 1988 - 2009 d'évolution des rendements immobiliers décomposés, IPD

En univers risque-neutre, nous modéliserons le rendement global de l'immobilier par un processus log-normal, la volatilité étant calibrée sur l'historique 1987-2009, le rendement étant égal au taux sans risque.

Volatilité historique (Rendement global) : 7,72%

## 2.4 L'inflation française

Pour rappel, l'équation du processus discrétisé s'écrit comme suit :

$$i_{\Delta(t+1)} = i_{\Delta t} + \Delta \cdot v \cdot (\mu \cdot \Delta - i_{\Delta t}) + \sigma \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon$$

Soit:

$$i_{\Delta(t+1)} = \alpha \cdot i_{\Delta t} + \beta + \sigma \sqrt{\Delta} \cdot \varepsilon$$

Par la méthode des moindres carrés, et en effectuant une régression linéaire, on détermine les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , et donc la moyenne long terme et la vitesse de retour à la moyenne.

En exprimant le coefficient « d'erreur » ( $\sigma \cdot \varepsilon$ ), on détermine la volatilité  $\sigma$ .

Par identification:

$$\alpha = v \cdot \Delta \cdot \mu \quad \text{et} \quad \beta = 1 - \Delta \cdot v$$

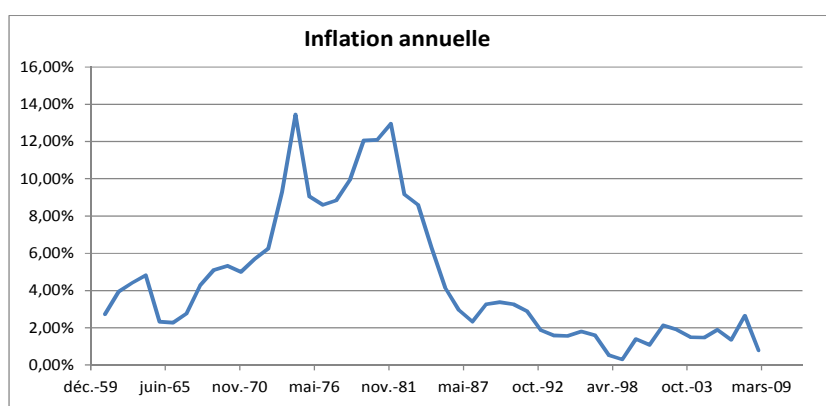
Pour le calibrage, nous disposons d'un historique assez profond de l'indice mensuel des prix à la consommation des ménages urbains hors tabac : 1960-2009

L'inflation s'écrit :

$$i(t) = \ln \frac{IPC(t)}{IPC(t-1)}$$

Le choix de la profondeur de l'historique sur lequel nous calibrons le modèle est délicat. En effet, la moyenne long terme obtenue doit être proche de 2%, objectif fixé par la BCE, et la prise en compte de certaines valeurs, comme les chocs pétroliers, se traduisent par une augmentation sensible de cette moyenne long terme.

Les paramètres sont estimés en base annuelle, et seront réajustés en cas de simulations mensuelles.



**Fig.27 : Historique 1960 – 2009 du taux d'inflation annuel français (hors tabac), INSEE**

Les résultats du calibrage, sur 3 plages d'historique, sont présentés ci- après :

Plage historique	R <sup>2</sup>	σ	μ	v
1960-2009	83,68%	1,95%	4,11%	7,69%
1971-2009	85,05%	2,12%	3,08%	6,53%
1986-2009	54,65%	0,65%	1,69%	44,17%

**Fig.28 : Vasicek – Calibrage du modèle d'inflation**

Les valeurs obtenues pour les plages d'historique 1960-2009 et 1971-2009 ne semblent pas cohérentes avec les objectifs de la BCE. En effet, l'inflation modélisée devra rester stable autour de 2%. Sur ces deux premiers intervalles, 1960-2009 et 1971-2009, non seulement la moyenne long terme est trop élevée mais la dynamique de l'inflation ensuite modélisée sera trop volatile car l'écart type de l'erreur est élevé et la vitesse de retour à la moyenne est particulièrement faible.

Pour la plage 1986-2009, si le coefficient de détermination est un peu faible (régression linéaire imparfaite), les paramètres du modèle obtenus sont néanmoins plus satisfaisants.

En pratique, nous réajusterons la moyenne à 2%.

### III- Détermination des matrices de corrélation

La détermination des coefficients de corrélation entre les actifs est essentielle pour l'ESG. Sur ce point, une étude a été menée lors du projet, afin de déterminer les coefficients représentant au mieux la corrélation entre les différentes classes d'actif. Nous présentons à présent les données utilisées, la méthodologie mathématique, l'analyse effectuée sur ces données de marché et les résultats obtenus.

#### 3.1 Les données utilisées

Tout d'abord, nous devons choisir des indices cohérents avec le portefeuille du Conservateur.

Pour les actions, nous choisirons l'indice CAC40 car la poche « action » du portefeuille du Conservateur est essentiellement constituée d'actions française. Il s'agit par ailleurs de l'indice utilisé lors du calibrage. Nous disposons d'un historique 1988-2009, en base mensuelle.

Pour l'indice de taux longs nous utiliserons l'EuroMTS de maturités supérieures à 15ans, car il représente bien le marché de la dette d'état libellée en euro, et cela est cohérent avec la modélisation « risque-neutre ».

Pour le taux court, nous utiliserons le TMP et l'EONIA capitalisés. Il s'agit du taux au jour le jour et donc la meilleure estimation du taux quasi instantané. L'EONIA a remplacé le TMP en 1999.

Nous disposons d'un historique 1988-2009 pour le TMP/EONIA et 1994-2009 pour l'EuroMTS, en bases mensuelles.

Pour l'inflation, nous utiliserons l'inflation française, déterminée à partir de l'IPC.

Pour l'immobilier, nous utiliserons le même indice que pour le calibrage du modèle : IPD Paris 1ère couronne, dont nous disposons d'un historique annuel 1987-2009.

### 3.2 Les coefficients de corrélation

Il semble évident que tous les actifs étudiés ne suivent pas une loi normale. Il ne nous a pas semblé nécessaire d'effectuer un test de Shapiro Wilk sur l'ensemble des données pour rejeter l'hypothèse de normalité des distributions. Par conséquent, nous utiliserons le Rang de Spearman pour déterminer les coefficients de corrélation.

Le coefficient de Spearman a l'avantage d'être non paramétrique, et l'inférence statistique ne repose pas sur la normalité du couple de variables. En effet, il n'est pas nécessaire d'effectuer des hypothèses sur la distribution des variables. Par ailleurs, lorsque les variables sont distribuées selon une loi normale, il est quasiment aussi puissant que le coefficient de Pearson. Il suppose néanmoins une liaison monotone entre les variables.

L'idée consiste à utiliser les rangs des valeurs observées. Le coefficient de Spearman est alors le coefficient de Pearson appliqué aux rangs :

$$\rho = \frac{\sum_i (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{(R_i - \bar{R})^2} \sqrt{(S_i - \bar{S})^2}}$$

Nous décidons donc d'estimer les matrices de corrélations des historiques présentés au préalable, en calculant le coefficient de Spearman.

De plus, nous effectuons des tests de significativité de ces coefficients afin d'évaluer la qualité de notre estimation.

Tous ces tests sont effectués grâce au logiciel R ; les résultats obtenus sont exprimés ci-dessous.

	Taux court	Taux long	Actions	Inflation	Immobilier
Taux court	100,0%				
Taux long	1,9%	100,0%			
Actions	-4,2%	2,2%	100,0%		
Inflation	59,5%	21,7%	-23,0%	100,0%	
Immobilier	0,5%	-49,1%	16,6%	-1,2%	100,0%

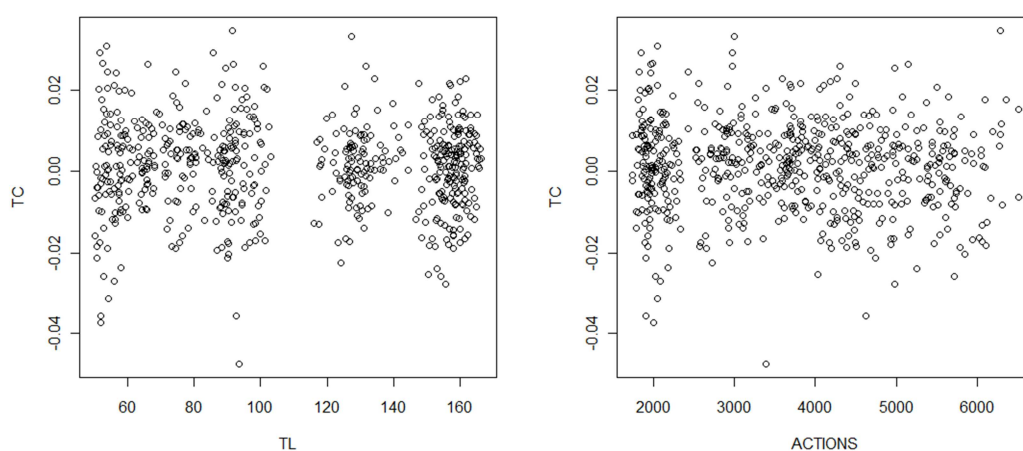
Fig.29 : Matrice de Corrélation de Spearman

### Tests de significativité des coefficients

A chaque calcul, nous effectuons un test de significativité du coefficient.

Ces tests de significativité des coefficients ne sont pas validés. Seul le test de significativité de la corrélation IPD / TMP est validé, la p-value (probabilité d'avoir tort en considérant le coefficient significativement non nul) est inférieure au seuil 5%. Nous ne pouvons donc pas conclure sur la valeur des coefficients de corrélation entre ces différentes classes d'actif.

Nous supposons que la non-significativité des coefficients est due à la non-monotonie de la dépendance entre les variables. Pour corriger ce défaut, nous décidons d'isoler les périodes de crises. Nous déterminerons alors deux matrices de corrélations.



**Fig.30 : Interactions historiques taux court/taux long et taux court/actions (nuage de points)**

### **3.3 Analyse historique des crises**

L'historique sur lequel nous avons calibré notre matrice de corrélation est assez long, et de nombreuses crises de taux, d'action ou d'immobilier ont eu lieu depuis 1987. Il n'est donc pas surprenant que les coefficients de corrélation obtenus ne soient pas significatifs.

Pour contourner ce problème, nous décidons de distinguer les périodes de « crise » des périodes de « croisière » pour les corrélations entre le taux court, le taux long et les actions, qui sont les variables les plus importantes de l'ESG.

Nous utiliserons alors deux matrices de corrélations distinctes pour notre ESG, le passage d'un état à l'autre sera identique à celui du modèle RSLN Actions \*.

---

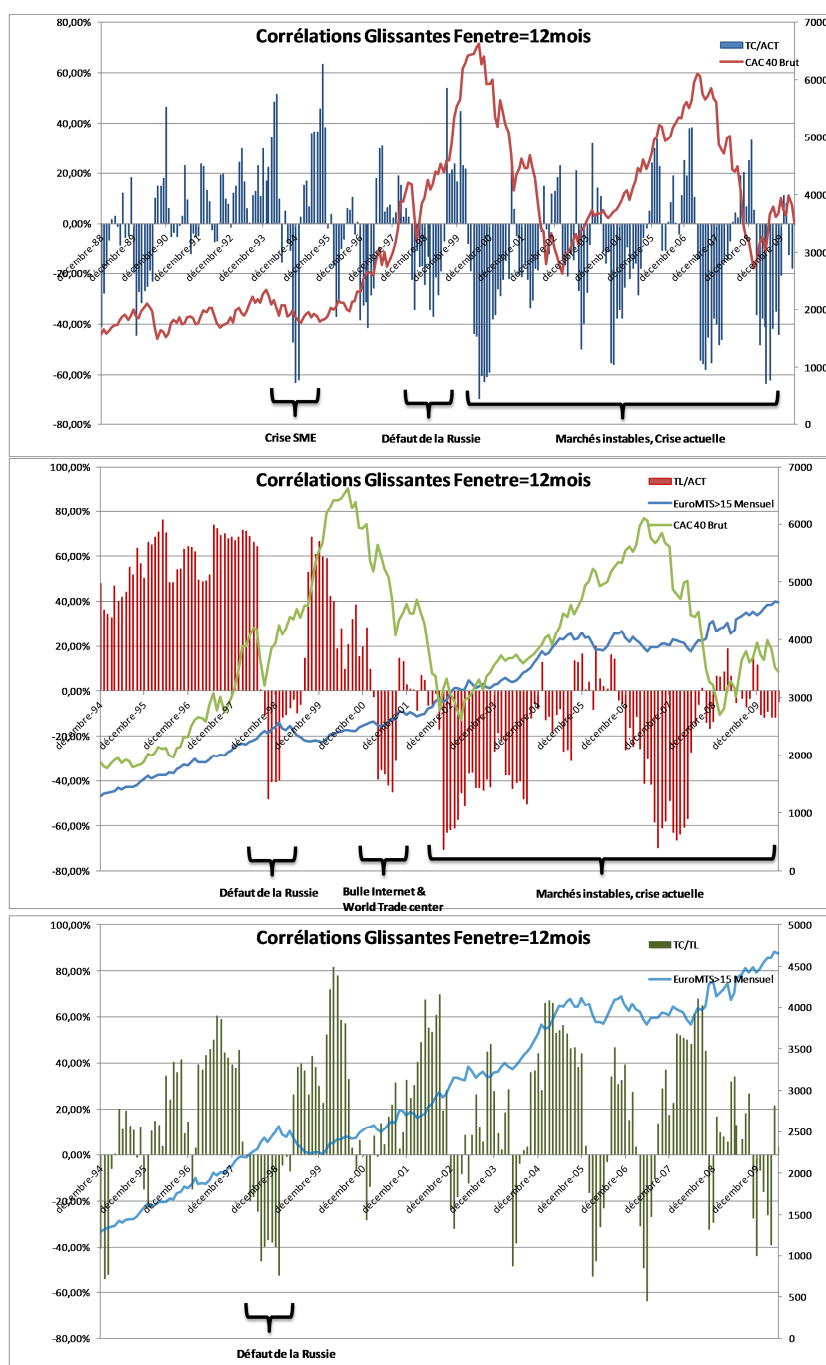
\* voir le paragraphe APPROCHE RISQUE NEUTRE -I-2



Les coefficients de corrélation liant l'immobilier aux autres classes d'actif ne sont pas non plus significatifs, mais pour une toute autre raison : nous ne disposons que de peu de points puisque nous travaillons ici avec un historique assez court, et en base annuelle.

Nous commençons donc par travailler sur les corrélations de taux et d'actions. Afin d'identifier les périodes de crises, nous étudions les corrélations glissantes des performances mensuelles sur une fenêtre de 12 mois. Les résultats obtenus sont présentés ci-dessous.

**Fig.31 : Analyse des corrélations glissantes (fenêtre de 12 mois) entre Actions, Taux longs et Taux courts**



A partir de ces quelques graphiques, nous pouvons identifier les historiques de crises de taux ou d'actions :

Années	Historique
1989	Crise des Junk Bonds ; Le spread des Junk bonds augmente de plus de 100% par rapport aux emprunts américains
1993-1994	Crise SME puis correction brutale des marchés obligataires qui avait anticipé la poursuite de la baisse des taux courts, effectuant une hausse de plus de 200pb
1998	Défaut de la Russie qui cause un flight to quality, suite à la crise asiatique fin 1997
2000	Bulle internet, crise essentiellement Actions (ne s'observe pas sur la corrélation TC/TL)
2001	Attentats du 11 Septembre
2002-2004	Instabilité des marchés, début de la guerre d'Irak en mars 2003, Attentats de Madrid du 11 mars 2004, ...
2006-2007	Début de la crise des subprimes
2008-2009	Chute de Lehmann Brothers, dernière crise connue

Suite à cette analyse, nous décidons de différencier les périodes « normales » des périodes de crise. Nous déterminons alors nos coefficients de corrélation sur les intervalles suivants :

Périodes "normales"	Périodes de "crise"
Janvier 1988 - Février 1989	Février 1989 - Décembre 1989
Janvier 1990 - Juillet 1993	Août 1993 - Janvier 1995
Février 1995 - Août 1997	Septembre 1997 - Décembre 1998
Janvier 1999 - Décembre 1999	Janvier 2000 - Décembre 2009

Sur cette base, nous recalculons les coefficients de Spearman et nous obtenons finalement les résultats suivants :

	Corrélations hors crises			Corrélations crises		
	Taux court	Taux long	Actions	Taux court	Taux long	Actions
Taux court	100,0%			100,0%		
Taux long	31,6%	100,0%		-12,9%	100,0%	
Actions	-12,8%	50,0%	100,0%	4,5%	5,0%	100,0%

Fig.32 : Matrices de corrélations de Spearman, crises isolées

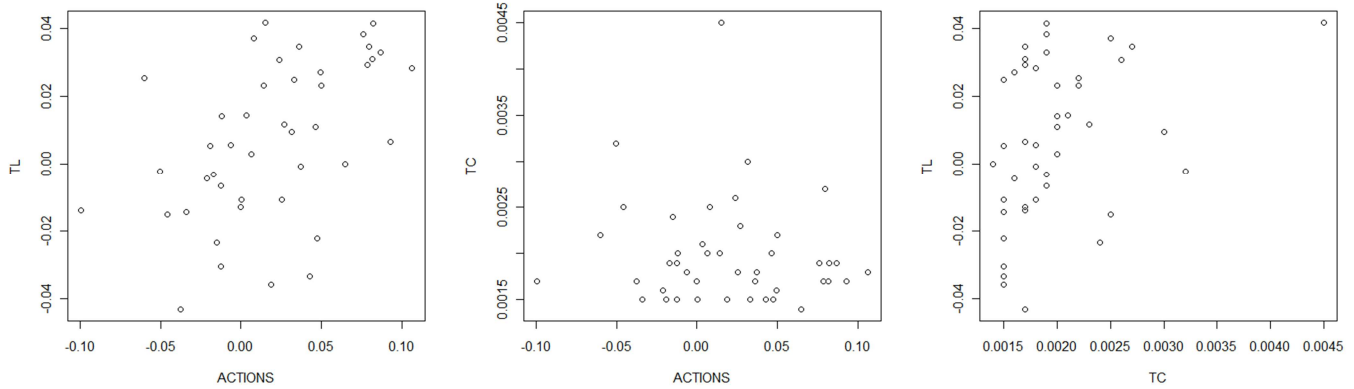
	p-values hors crises			p-values crises		
	Taux court	Taux long	Actions	Taux court	Taux long	Actions
Taux court	100,0%			100,0%		
Taux long	4,9%	100,0%		10,0%	100,0%	
Actions	20,0%	0,1%	100,0%	55,0%	53,0%	100,0%

Fig.33 : Test de significativité de ces coefficients\*

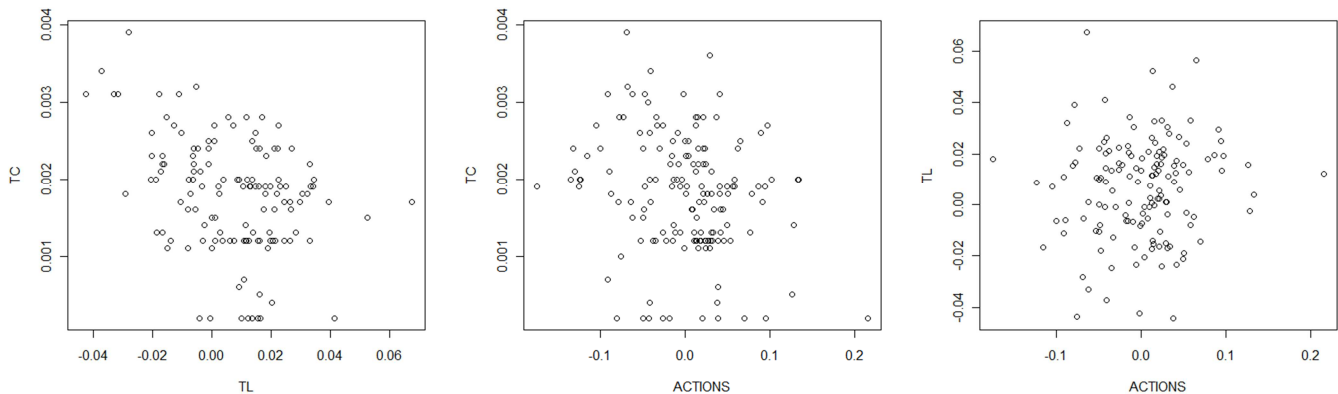
\*Matrices des p-values

### Répartition des valeurs : nuage de points

Des graphiques ci-après et de l'analyse ci-dessus nous pouvons constater une dépendance plus nette et monotone entre les variables, même si elle ne semble pas optimale. L'isolement des périodes de crise a bien permis de trier les variables de manière à pouvoir déterminer un coefficient de corrélation significativement non nul.



**Fig.34 : Interactions historiques TC/TL, TL/ACT, TC/ACT, hors crises (Nuage de points)**



**Fig.35 : Interactions historiques TC/TL, TL/ACT, TC/ACT, crises (Nuage de points)**

### 3.4 Conclusion

La p-value correspond à la probabilité de se tromper en disant « le coefficient est significativement non nul ». On valide, en règle générale, ces tests lorsque la p-value est inférieure à 5%.

Dans le cas présent, toutes les p-values obtenues pour les corrélations taux court, taux long et action sont supérieures à 5%, sauf pour Action / Taux long – hors crises. Par conséquent, nous retenons ces coefficients, y compris le coefficient Taux long / Action, même s'il n'est pas significatif.

Concernant l'immobilier, compte tenu du peu de données dont nous disposons (l'immobilier est une variable dont les cycles économiques sont longs), il ne nous est pas possible d'estimer les coefficients de corrélation. Cet actif étant présent dans le portefeuille du Conservateur à hauteur de 5%, nous le modéliserons indépendamment des autres variables en fixant le coefficient de corrélation à 0.

Enfin, l'inflation étant fortement liée aux taux court, nous conserverons le coefficient taux court / inflation à 73%, car il est économiquement cohérent. En revanche, nous fixerons à 0 les autres coefficients, reliant l'inflation aux taux long et aux rendements action.

Les matrices de corrélation retenues pour l'ESG sont donc les suivantes :

Corrélations hors crises						Corrélations crises					
	Taux court	Taux long	Actions	Inflation	Immobilier		Taux court	Taux long	Actions	Inflation	Immobilier
Taux court	100%					Taux court	100%				
Taux long	32%	100%				Taux long	-13%	100%			
Actions	-13%	50%	100%			Actions	5%	5%	100%		
Inflation	73%	0%	0%	100%		Inflation	73%	0%	0%	100%	
Immobilier	0%	0%	0%	0%	100%	Immobilier	0%	0%	0%	0%	100%

**Fig.36 : Matrices de corrélations retenues**

Pour les modélisations, le passage d'un état à l'autre pour les rendements actions impactera aussi les matrices de corrélation. Ainsi, nous aurons un modèle globalement cohérent avec les évolutions possibles du marché.

## IV- Simulations et analyse des résultats

### 4.1 Paramètres et simulations

Les éléments à paramétrer pour le modèle sont les suivants :

- Nombre de simulations
- Pas de temps ;
- Valeurs initiales des actifs ;
- Paramètres des modèles et lois de passage;
- Matrices de corrélations « Crises » et « Non crises » ;
- Courbe des taux CEIOPS (QIS5).

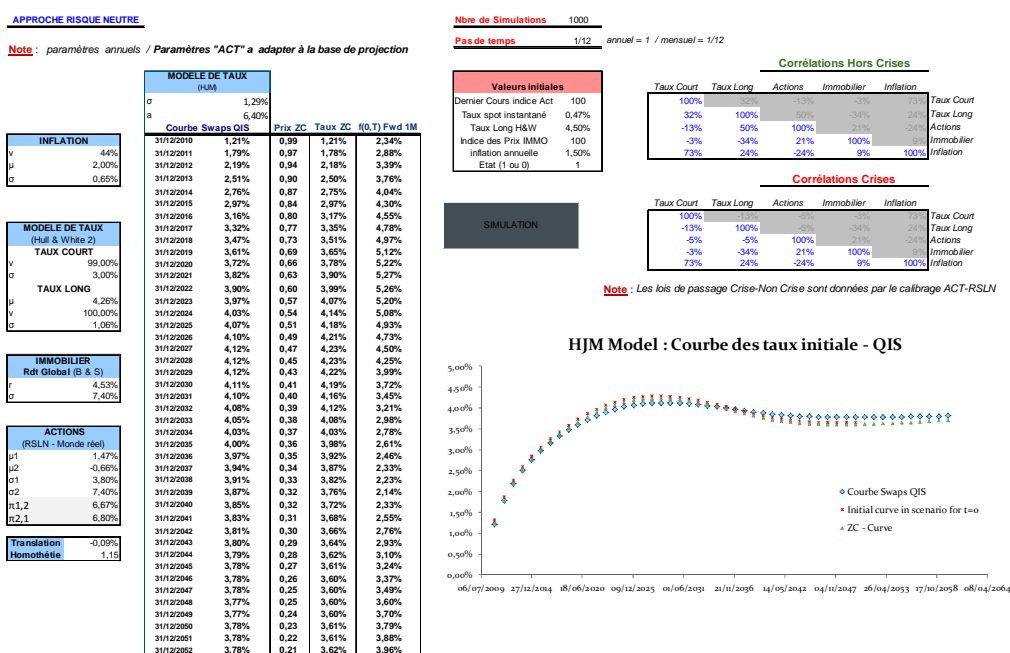


Fig.37 : Initialisation du Modèle, paramètres et données

Une fois ces éléments paramétrés, les simulations peuvent être lancées sous VBA.

En base mensuelle, il faut environ 1h à l'ESG pour générer 1000 simulations, les afficher dans une feuille Excel, et appliquer Monte Carlo pour extraire des trajectoires moyennes.

L'état (*crise* ou *non crise*) est modélisé en début de boucle. La corrélation et les paramètres actions utilisés en dépendent. Les corrélations entre les classes d'actifs sont implémentées grâce au lemme de Choleski, via une fonction de produit matriciel.

## 4.2 analyse des resultats

L'analyse des résultats, comme présentée dans le paragraphe PRESENTATION GENERALE DU GENERATEUR, est une étape primordiale à la validation des scénarii avant intégration dans un modèle prospectif global permettant l'évaluation des provisions techniques ou des charges en capital réglementaires.

Dans le cas d'une approche risque-neutre, n'ayant pas vocation à représenter la réalité des marchés financiers mais à permettre la bonne évaluation des engagements au passif, l'accent doit être mis sur les caractères « market-consistent » et « risque neutre » des scénarii, ainsi que sur l'interdépendance des actifs modélisés.

C'est en ce sens que les tests présentés ci-après ont été effectués. Par la suite, l'ensemble des classes d'actif étant impactées par le choix du modèle de taux, nous distinguerons les tests effectués dans le cadre d'une implémentation du modèle Vasicek à 2 facteurs [1977] et du modèle de Heath Jarrow Morton [1989].

### 4.2.1 Sous le modèle Vasicek 2F

Pour ce modèle nous avons effectué les tests suivants :

- Intervalles d'évolution de la courbe des taux zéro-coupon
- Espérance des projections sur 1an, 10 ans, 20 ans, ...
- Test Martingale sur les rendements action et immobilier
- Espérance des prix de zéro coupons et comparaison aux prix de marché
- Espérance d'évolution du taux court

#### Intervalles d'évolution de la courbe des taux :

Le graphique ci-après représente les courbes de taux obtenues pour 350 simulations. Nous avons ainsi un bon aperçu des intervalles d'évolution de la courbe des taux, obtenus via le modèle Vasicek 2F, ainsi que les différentes formes possibles de la courbe des taux.

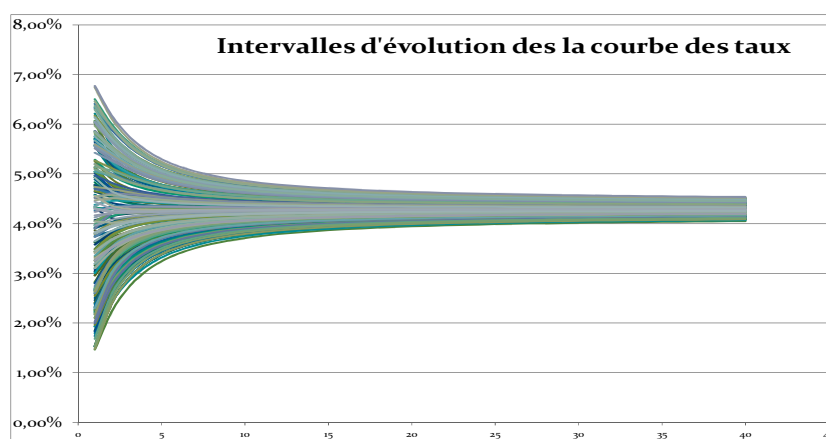


Fig. 38 : Vasicek 2F - évolutions de la courbe des taux sur 350 simulations

### Espérance des projections de la courbe des taux sans risque :

Le graphique ci-après représente l'évolution, en espérance, de la courbe des taux sans risque, obtenu à partir de 1000 simulations.

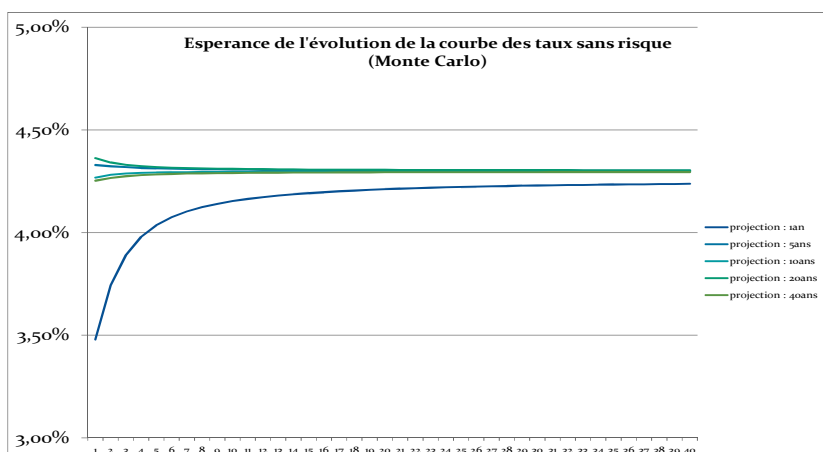


Fig.39 : Vasicek 2F, espérance d'évolution de la courbe des taux

De ces deux premiers graphiques (ci-dessus) nous pouvons remarquer que :

- Les taux longs sont beaucoup moins volatiles que les taux court (c'est cohérent avec le paramétrage du modèle)
- Les taux courts convergent assez vite vers l'espérance des taux longs (c'est également cohérent avec le paramétrage du modèle)
- Les formes possibles de la courbe des taux sont plus limitées que celles du modèle HJM (cf.4.2.2).

### Test « Martingale » :

La « market-consistency » du modèle impose que l'actualisation des rendements de chaque classe d'actif au taux sans risque, donne en espérance : 1. Ce test est très concluant (cf. graphique ci-dessous).

Les scénarii sont donc « risque-neutre » ; et toutes les stratégies d'investissement sont équivalentes, en espérance, à une capitalisation du taux sans risque.

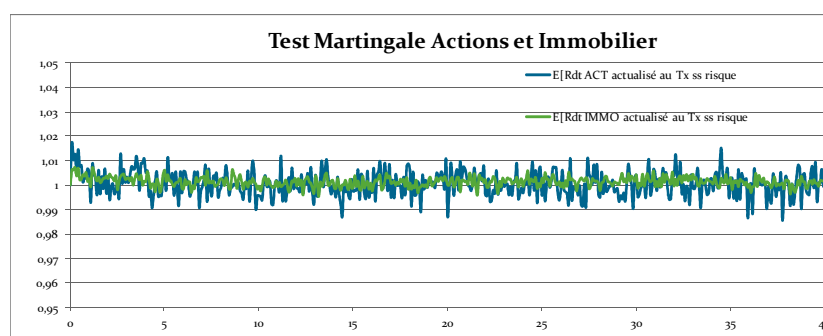


Fig.40 : Vasicek 2F, actualisation des rendements action et immobilier

### Espérance des Prix des ZC modélisés :

Nous déterminons l'espérance des Discount Factor par capitalisation du taux court, pour chaque maturité ; Comme nous pouvons nous y attendre (cf. graphe ci-dessous), les résultats de ce test ne sont pas concluants. En effet, contrairement au modèle HJM, la courbe des taux initiale n'est pas un input du modèle, mais permet seulement de le calibrer.

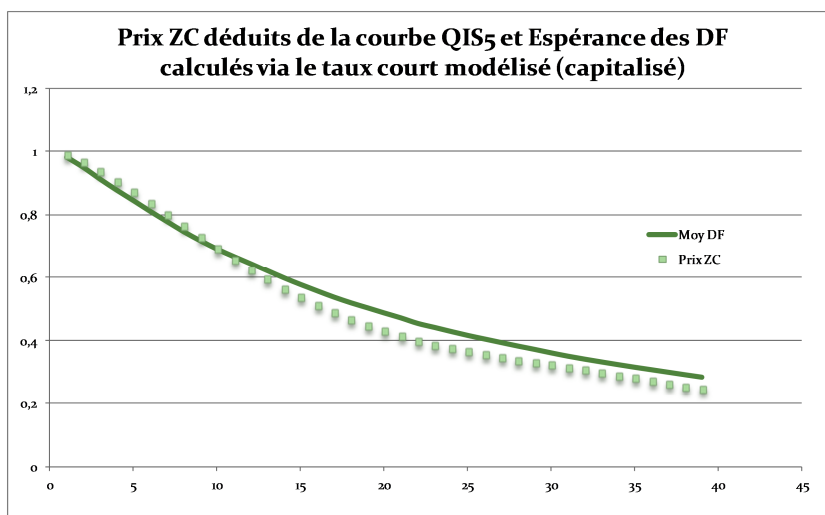


Fig.41 : Vasicek 2F, espérance du prix des zéro coupons

**Remarque intéressante :** Dans le cas présent, où la courbe des taux espérée ne correspond pas exactement à la courbe EIOPA fournie en input de l'ESG, une alternative consiste à utiliser la courbe moyenne comme référence pour le scénario déterministe équivalent. Cela permettra de valider les tests de convergence qui consistent à vérifier que la moyenne des bilans projetés (un par scénario d'actifs) correspond au scénario central.

### Le taux court (en espérance) :

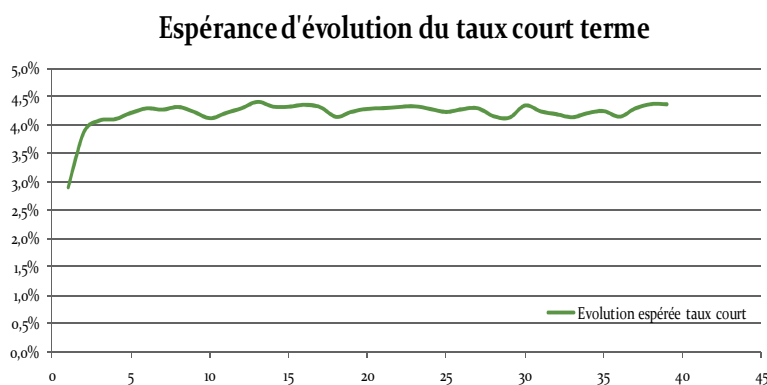
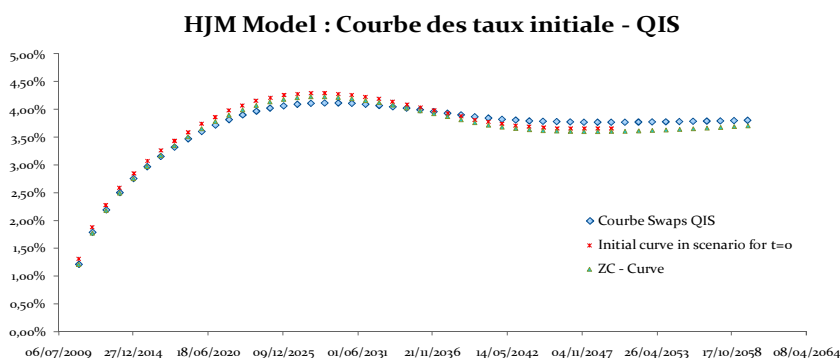


Fig.42 : Vasicek 2F, espérance d'évolution du taux court



## 4.2.2 Sous le modèle HJM

Le modèle doit être « market-consistent », et doit pouvoir renvoyer la courbe des taux initiale considérée pour le calibrage à  $t=0$ . Si le modèle d'équilibre Vasicek 2 facteurs ne permet pas toujours de « fiter » la courbe initiale (tout dépend de sa forme), le modèle HJM [1989] l'utilise comme Input :

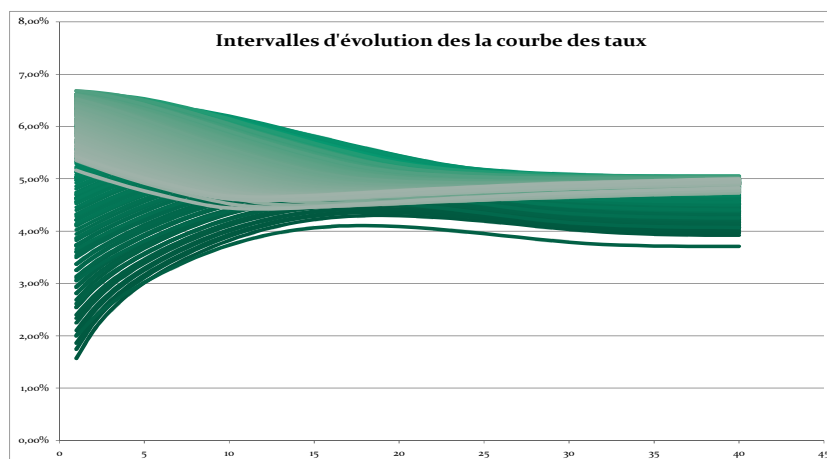


Pour ce modèle nous avons effectué les tests suivants :

- Intervalles d'évolution de la courbe des taux
- Rapprochement de l'espérance des Discount Facteurs calculés à partir du taux court modélisé avec les prix des Zero-Coupon QIS 5.
- Espérance des projections sur 1an, 10 ans, 20 ans, ...
- Test Martingale sur les rendements action et immobilier
- Espérance d'évolution des indices action et immobilier et volatilité action

### Intervalles d'évolution de la courbe des taux :

Le graphique ci-après représente les courbes de taux obtenues pour 350 simulations. Nous avons ainsi un bon aperçu des intervalles d'évolution de la courbe des taux, obtenus via le modèle HJM, ainsi que les différentes formes possibles de la courbe des taux.

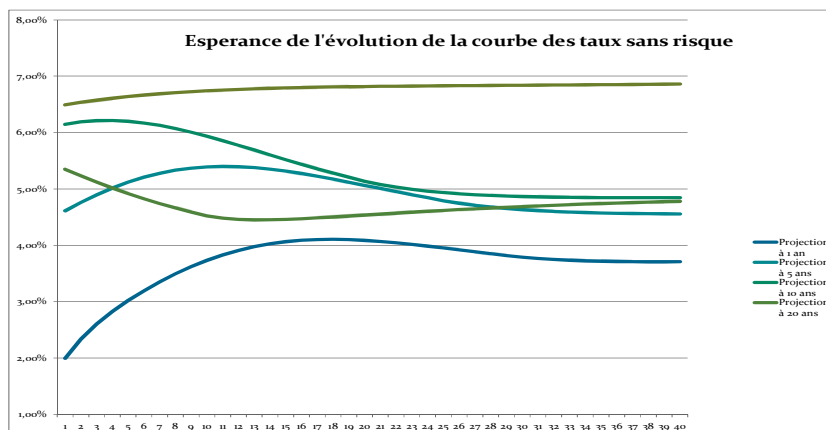


**Fig.43 : HJM, évolutions de la courbe des taux sur 350 simulations**

Du graphique précédent, nous pouvons constater que :

- Les taux longs sont moins volatiles que les taux courts
- Le modèle permet d'obtenir des formes de courbes exponentielles, bosselées ou inversées.

### Espérance des projections de la courbe des taux sans risque :

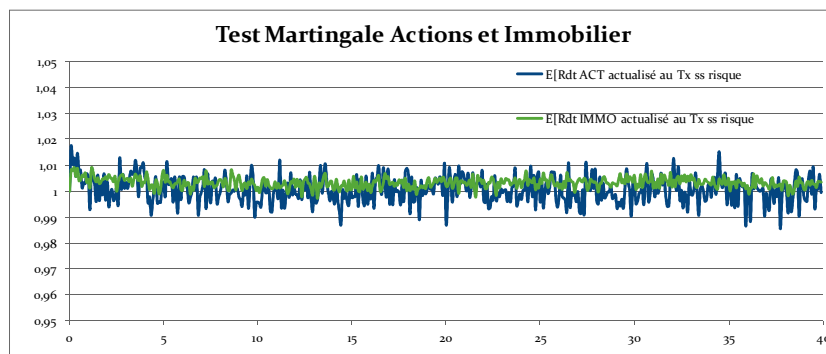


**Fig.44 : HJM, espérance d'évolution de la courbe des taux**

### Tests Martingale sur les rendements action et immobilier :

La « market-consistency » du modèle impose que l'actualisation des rendements de chaque classe d'actif au taux sans risque, donne en espérance : 1. Ce test est très concluant (cf. graphique ci-dessous).

Les scénarii sont donc « risque-neutre » ; et toutes les stratégies d'investissement sont équivalentes, en espérance, à une capitalisation du taux sans risque.

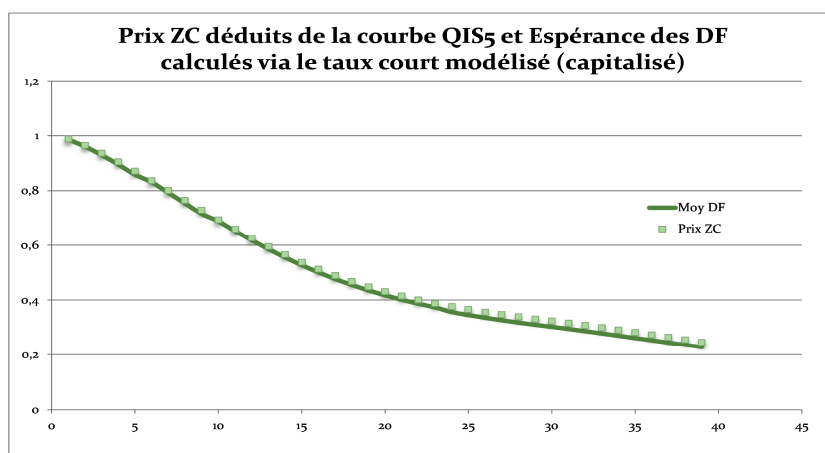


**Fig.45 : HJM, rendements actualisés Action et Immobilier**

### Espérance des Prix des ZC modélisés :

Nous déterminons l'espérance des Discount Factor par capitalisation du taux court, pour chaque maturité ; et nous devrions retrouver les prix des zéro-coupon à  $t=0$  (Inputs du modèle). Ce critère est essentiel pour que le modèle soit « market-consistent ».

Les résultats de ce test sont exprimés ci-après.



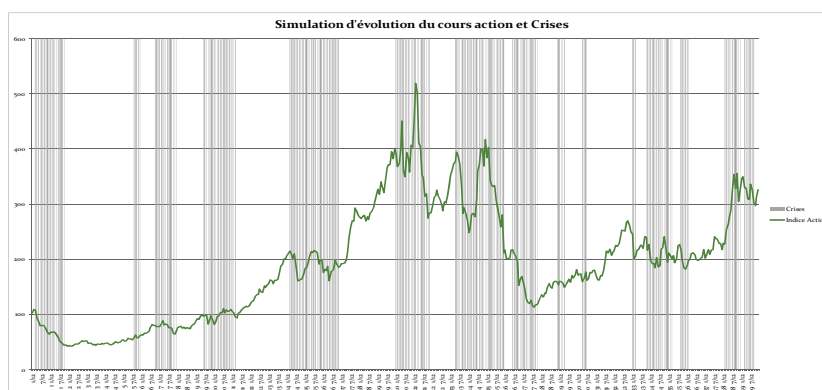
**Fig.46 : HJM, espérance des Discount Factors sur l'horizon de projection**

Le calibrage semble très correct en particulier pour des maturités inférieures à 25 ans. Nous pouvons néanmoins observer un biais sur les Discount Factors d'échéances supérieures à 25 ans (plus de 5% d'écart). Cet écart est dû au fait que le taux court modélisé n'est pas un taux « instantané », mais une approximation : le pas de temps des simulations étant mensuel, le taux de plus petite maturité est aussi mensuelle dans notre modèle.

Maturité	Prix ZC initial P(0,T)	E[DF] Capitalisation du taux court forward	Différence en % de P(0,T)
1	0,988	0,986	0%
5	0,871	0,859	1%
10	0,694	0,689	1%
15	0,538	0,527	2%
20	0,430	0,417	3%
25	0,365	0,345	5%
30	0,323	0,302	7%
35	0,282	0,261	7%

### **Impact des « crises » sur la performance action :**

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de l'indice action (1 simulation), associée aux passages d'un état à l'autre de la chaîne de Markov. Les zones grises correspondent à une situation de crise. Nous pouvons constater que les situations de crises sont en général associées à des mouvements décroissants de la valeur de l'indice. La modélisation est donc cohérente.



**Fig.47 : RSLN, impact des crises sur la performance action**

## V- Une piste d'investigation : le Libor Market Model

L'un des défauts du modèle HJM [1989] est qu'il est intégralement basé sur la modélisation des taux « forward » instantanés, information qui n'est pas observable sur le marché. Comme nous avons pu le constater, il est également difficile à calibrer sur plusieurs prix de swaptions. Nous proposons donc ici une piste d'investigation intéressante et largement utilisée pour « pricer » les prix d'options de taux d'intérêt : le Libor Market Model [1997] (LMM ou BGM), développé par Brace, Gatarek et Musiela.

Le Libor Market Model [1997] est aujourd'hui très utilisé, car il fait référence aux taux pratiqués sur les marchés financiers et est cohérent avec les conditions d'usage des formules de Black pour « pricer » les prix d'option de taux d'intérêt. Aussi, un calibrage cohérent avec les prix d'options à  $t = 0$  nous permettra de disposer d'un modèle « market-consistent ».

Ce paragraphe est largement inspiré des travaux de Raoul Pietersz [2003] et d'Igor Grubisic [2002], repris par Florent Wilhelmy dans son mémoire ISFA [2006]. Il présente le modèle LMM et une méthode de calibrage cohérente avec les objectifs de l'ESG.

### 5.1 Présentation théorique du modèle

Nous définissons le taux « forward » Libor (ou Euribor)  $L(t, T)$ ,  $t \leq T$ , vu à la date  $t$ , commençant en  $T$  et d'échéance  $T+\tau$  par la formule suivante :

$$L(t, T) = \frac{1}{\tau} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)} - 1 \right)$$

Où  $\tau$  est la maturité du taux Libor utilisé, et  $P(t, T)$  est le prix en  $t$  d'un zéro coupon de maturité  $T$ . Cette formule, intuitive, peut s'illustrer comme suit :

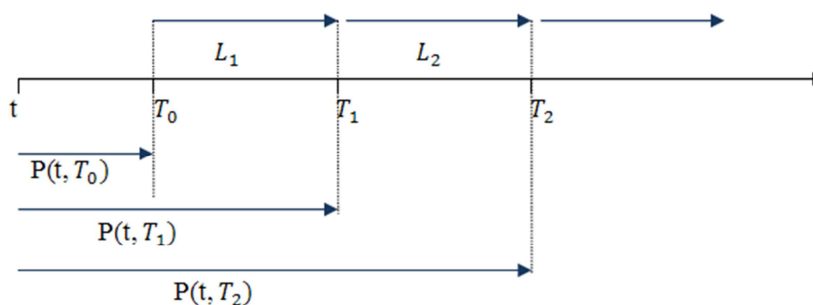


Fig.48 : illustration des taux « forward » Libor

En reprenant les notations du schéma précédent, et en définissant une sous-période  $[T_{k-1}; T_k]$ , nous pouvons ré exprimer la formule précédente :

$$L_k(t, T_{k-1}) = \frac{1}{\tau} \left( \frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right)$$

Nous souhaitons à présent expliciter la dynamique des taux « forward » Libor du modèle. Nous supposons qu'elle est la somme d'un facteur de dérive et d'un terme de diffusion stochastique (mouvement brownien):

$$\frac{dL_k(t)}{L_k(t)} = \mu_k(t)dt + \sum_{q=1..d} \sigma_{k,q}(t)dW_{k,q}(t) = \mu_k(t)dt + \sigma_k(t)dW_k(t)$$

Avec :

$\mu_k$  le « drift » de la dynamique des taux « forward »

$\sigma_{k,q}$  la composante de volatilité du taux « forward »  $L_k$  attribuable au q-ième facteur (parmi d facteurs)

$W_k$  la q-ième composante du processus de Wiener de dimension d

De cette équation différentielle nous pouvons constater que les taux « forward » suivent une dynamique stochastique dont le terme de diffusion est multidimensionnel. L'estimation des paramètres, qui sont le « drift » et la structure de volatilité, doit nous permettre de retrouver les prix de produits dérivés liquides avec la formule de Black. C'est l'objet du calibrage.

Nous nous plaçons désormais en univers « forward-neutre », sous la mesure de probabilité  $Q_{T_k}$  associée au numéraire  $P(t, T_k)$ . Sous cette mesure, le taux « forward » Libor  $L_k$  est une  $Q_{T_k}$ -martingale \*; et le « drift » est donc nul. La dynamique des taux s'écrit alors :

$$dL_k(t) = L_k(t) \sum_{q=1..d} \sigma_{k,q}(t)dW_{k,q}(t) = L_k(t) \sigma_k(t)dW_k(t)$$

Où  $\sigma_{k,q}$  sont des fonctions déterministes, bornées et continues par morceaux sur l'intervalle  $[0; T_{k+1}]$  ; et  $W_k$  sont des processus de Wiener multidimensionnels (d-composantes) sous  $Q_{T_k}$ .

Les composantes des mouvements browniens  $W_k$  ne sont pas indépendantes dès lors qu'il existe plusieurs facteurs de risque. On pose :

$$(R)_{i,j} = \rho_{i,j}$$

$$\rho_{i,j} dt = dW_k^i dW_k^j$$

---

\* voir Annexe 6 pour la démonstration – Changement de numéraire

Le nombre de colonnes de cette matrice R correspond précisément au nombre de facteurs explicatifs des déformations de la courbe des taux « forward ». Nous souhaiterions souvent réduire cette matrice de corrélations, afin de limiter les facteurs de risque modélisés. Soit B cette matrice réduite :

$$BB' = R$$

Nous pouvons définir un brownien Z sous  $Q_{T_k}$  tel que :

$$dL_k(t, T) = L_k(t, T) \sigma_k(t) B dZ_k(t)$$

Cette équation de diffusion n'est applicable que sous la mesure de probabilité  $Q_{T_k}$ . Il s'agit maintenant de modéliser les taux « forward » sous une même mesure.

Nous pouvons montrer que, la dynamique, sous la mesure  $Q_{T_M}$  associée au numéraire  $P(t, T_M)$  s'écrit \* :

$$dL_k(t) = L_k(t) \sum_{j=M+1 \dots k} \frac{\tau L_j(t) \langle \sigma_j(t), \sigma_k(t) \rangle}{1 + \tau L_j(t)} dt + L_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_M(t) \rangle \quad \text{pour } M < k$$

$$dL_k(t) = L_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_M(t) \rangle \quad \text{pour } M = k$$

$$dL_k(t) = -L_k(t) \sum_{j=M+1 \dots k} \frac{\tau L_j(t) \langle \sigma_j(t), \sigma_k(t) \rangle}{1 + \tau L_j(t)} dt + L_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_M(t) \rangle \quad \text{pour } M > k$$

## 5.1 Calibrage du modèle

Le calibrage du modèle LMM consiste à définir une structure de volatilité cohérente avec les volatilités de marché, ainsi qu'une surface de corrélation des taux. Ce calibrage devra également être cohérent avec les prix d'options de taux sur le marché. Les options traditionnellement utilisées pour le calibrage sont les caplets.

Compte tenu des résultats précédents, nous pouvons écrire la volatilité du taux « forward », commençant en  $T_{k-1}$ , de maturité  $\tau$ , en t comme suit :

$$\sigma_k(t) = \theta_k(t) \cdot e(t)$$

Où  $\theta_k(t)$  sont les fonctions de volatilité et  $e(t)$  sont les vecteurs propres de la matrice B précédemment définie.

Un des intérêts essentiels de ce modèle, est qu'il permet de valoriser une option de type Caplet, de manière parfaitement cohérente avec la formule de Black. Cette propriété nous permettra de déterminer les volatilités très simplement :

$$Caplet_i^{LMM} = Caplet_i^{Black}$$

---

\* voir Annexe 8 pour la démonstration

Et la volatilité de Black s'écrit :

$$v_i^{Black} = \sqrt{\frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_i(s)^2 ds} = \sqrt{\frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \theta_i(s)^2 ds}$$

Nous supposons cette relation vérifiée pour tout  $i$ . Les fonctions de volatilité  $\sigma_i$  sont ainsi définies égales aux volatilités de marché, et la structure de corrélations reproduit les corrélations historiques entre les taux « forward ». C'est en ce sens que nous calibrerons le modèle.

Il est alors nécessaire de définir une structure de volatilité. En pratique, la structure de volatilité est souvent supposée constante par morceaux, et la calibrer revient à minimiser l'écart quadratique entre la volatilité de Black et la volatilité du modèle.

Nous supposons également que la forme de la courbe de volatilité est constante au cours du temps.

Dans ce cas, proposé par I.Grubisic, la structure de volatilité est définie par la formule suivante :

$$\theta_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k-j} 1_{[T_{j-1}; T_j]}$$

Le problème revient alors à résoudre :

$$\beta = \operatorname{argmin} \sum_i \left[ i(v_i^{Black})^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j^2 \right]^2$$

**Remarque** : Les volatilités de Black, pour un cap, dépendent des maturités mais aussi du « strike ». En général, pour une maturité fixée, la courbe liant la volatilité implicite au prix d'exercice de l'option est convexe : c'est le « smile » de volatilité. Ce phénomène est dû au fait que la volatilité est logiquement plus élevée lorsque les options sont en dedans ou en dehors de la monnaie.

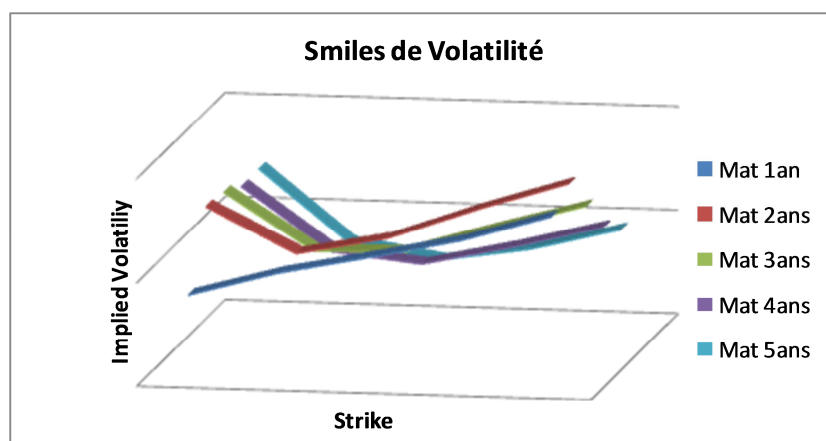


Fig.49 : Smiles de volatilité : modèle de Black

Enfin, en discrétisant le processus de taux « forward » exprimé sous la mesure commune  $Q_{TM}$ , il est possible de déterminer le prix des caps par la méthode de Monte Carlo. Pour cela, nous devons extraire un triangle de diffusion par simulation :

		<b>Dates</b>					
<b>Taux « Forward »</b>		$L_1(T_0)$					
		$L_2(T_0)$	$L_2(T_1)$				
		$L_3(T_0)$	$L_3(T_1)$	$L_3(T_2)$			
		$L_4(T_0)$	$L_4(T_1)$	$L_4(T_2)$	$L_4(T_3)$		
		$L_5(T_0)$	$L_5(T_1)$	$L_5(T_2)$	$L_5(T_3)$	$L_5(T_4)$	
		$L_6(T_0)$	$L_6(T_1)$	$L_6(T_2)$	$L_6(T_3)$	$L_6(T_4)$	$L_6(T_5)$

Avec un nombre important de simulation, on peut calculer le « payoff » espéré du caplet sur l'intervalle  $[T_{k-1}; T_k]$ , vu en date  $t$ , en déduire la valeur du cap, et la comparer au « payoff » de Black :

$$C_k(t) = N \tau P(t, T_k) E^{Q_{TM}} [L_k(T_{k-1}) - K]_+$$

Où :

$K$  est le « strike »

$\tau$  est le pas de temps

$L_k(T_{k-1})$  sont les éléments diagonaux du triangle précédent



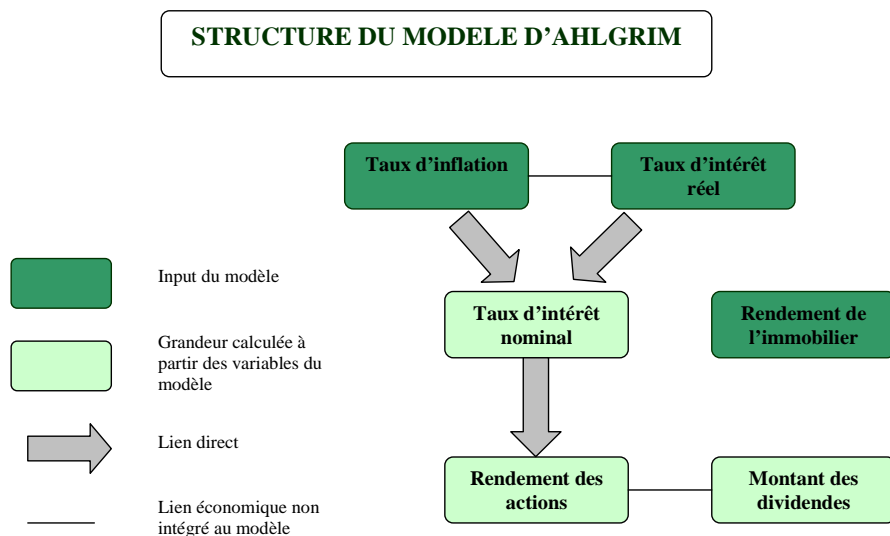
# APPROCHE MONDE REEL

L'approche retenue ici est totalement différente. Les scénarii « Monde Réel » serviront uniquement à améliorer les études ALM, à déterminer l'allocation stratégique qui optimisera le couple rendement/risque du portefeuille du Conservateur, ou à évaluer les flux financiers futurs de la compagnie.

Pour cela, nous souhaitons mettre en place un modèle intuitif, cohérent avec l'évolution de l'économie à long terme, et calibré sur des plages d'historiques représentatives de la réalité économique des marchés d'aujourd'hui et de demain.

Nous avons choisi une structure de modèle en cascade, en nous inspirant d'un modèle établi au sein de la *Casualty Actuarial Society*(CAS) et la *Society Of Actuaries* (SOA) en 2005 : Le modèle d'Ahlgrim. Frédéric Planchet, Aymeric Kamega et Pierre Théron proposent une analyse complète de ce modèle dans leur ouvrage « *Scénarios économiques en assurance ; modélisation et simulation* ».

Pour rappel, la structure du modèle est présentée ci-dessous :



L'ensemble des modèles présentés ci-après sont calibré à partir de données extraites au 31/12/2009.

## I- Choix des modèles et calibrage

### 1.1 L'inflation anticipée

L'inflation « forward » correspond aux anticipations d'inflation du marché. L'idée de base, développée par Fischer dans les années 30, est que le taux nominal d'une obligation se décompose en un taux réel et un taux lié à l'inflation anticipée alors que le taux d'une obligation indexée à l'inflation se compose d'une part du taux réel et d'autre part du taux d'inflation actuelle. Ainsi, en modélisant ces courbes d'inflation « forward », nous pouvons déduire les courbes de taux réels des courbes de taux nominaux ; et inversement. Par ailleurs, il apparaît que cette anticipation d'inflation peut s'appréhender à partir de produits dérivés d'inflation ou de l'inflation « breakeven ».

L'inflation est généralement modélisée par un processus de retour à la moyenne de type Vasicek. Cependant, dans notre modèle, les taux nominaux seront modélisés en additionnant taux réels et inflation « forward ». Par conséquent, il nous semble judicieux de directement les déformations de la courbe d'inflation implicite.

Le modèle retenu est le CIR (Cox Ingersoll et Ross) [1985], dans lequel le « taux court » (inflation 1an) suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck interdisant les valeurs négatives.

Sous P probabilité historique l'équation de diffusion s'écrit :

$$dr_t = \nu \cdot (\mu - r_t)dt + \sigma \cdot \sqrt{r_t}dB_t$$

Avec :  $2 \cdot \nu \cdot \mu > \sigma^2$

Le taux court correspondra à l'inflation 1 an, à partir de laquelle nous déduirons la structure par terme d'inflation « forward ». Nous avons ainsi trois paramètres à estimer :  $(\nu, \mu, \sigma)$

Le choix des données utilisées s'est orienté vers l'inflation européenne déduite des swaps, car ce sont les produits dérivés d'inflation les plus liquides que nous trouvons sur le marché.

Nous disposons d'un historique hebdomadaire, depuis 2003, des courbes de taux de swap d'inflation (Données Crédit Agricole et Bloomberg). Il s'agit d'une courbe de taux ZC.

Nous calibrons le modèle de façon cohérente avec la courbe actuellement observable sur le marché, afin d'être en adéquation avec le calibrage du modèle de taux réels \* : L'estimation des paramètres se fera par minimisation de l'écart quadratique (Moindres carrés) entre la courbe théorique et la courbe observée.

$$(\nu, \mu, \sigma) = \operatorname{argmin} \sum_T [R^{th}(0, T) - R^{Obs}(0, T)]^2$$

---

\* voir paragraphe APPROCHE MONDE REEL – I-2

Le zéro coupon P est défini par :

$$P(t, T) = E\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \middle| F_t\right]$$

En considérant l'équation de diffusion vérifiée par les taux  $r_t$ , la forme des prix des zéro-coupons d'échéance T (vue en t), à la date t, s'écrit alors :

$$P(t, T) = A(t, T) \cdot \exp(-B(t, T) \cdot r_t) \quad \text{et} \quad R(t, T) = \frac{\ln(P(t, T))}{T - t}$$

Avec :

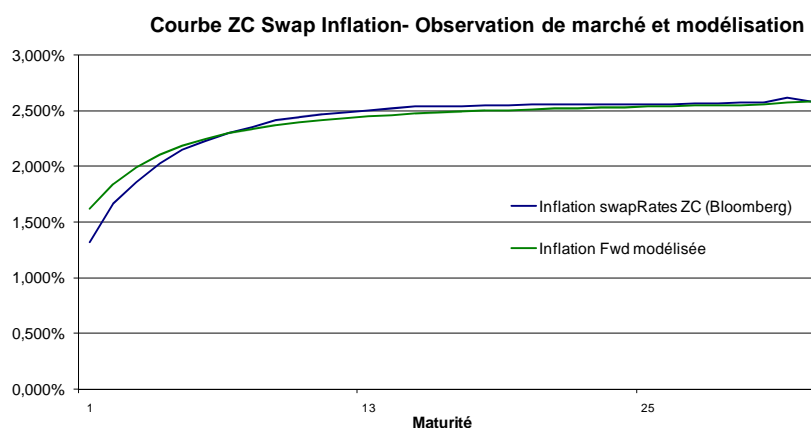
$$\gamma = \sqrt{(\nu + \lambda)^2 + 2\sigma^2}$$

$$A(t, T) = \left[ \frac{2 \cdot \gamma \cdot e^{(\nu + \lambda + \nu) \cdot T / 2}}{(\gamma + \lambda + \nu)(e^{\gamma \cdot T} - 1) + 2\gamma} \right]^{2 \cdot \mu \cdot \nu / \sigma^2}$$

$$B(t, T) = \frac{2 \cdot (e^{\gamma \cdot T} - 1)}{(\gamma + \lambda + \nu)(e^{\gamma \cdot T} - 1) + 2\gamma}$$

### Résultats du calibrage :

Paramètres				
$\nu$	$\mu$	$\sigma$	$\lambda$	$\gamma$
55,03%	2,63%	2,00%	0,00%	0,551059617



**Fig.50 : Courbes des taux zéro coupon d'inflation anticipée, donnée de marché et calibrée - Vasicek**

La courbe modélisée est très proche de la courbe observée, le calibrage est représentatif du marché au 31 décembre 2009. De plus, en comparant les paramètres de diffusion du taux court à ceux obtenus sur un historique de l'inflation 1986-2009, on remarque qu'ils sont tout à fait cohérents avec l'évolution possible de l'inflation annuelle. L'inflation sera assez stable (et positive) autour de la moyenne 2.5%, ce qui légèrement supérieur aux objectifs fixés par la BCE.

## 1.2 Structure par terme des taux réels et taux nominaux

Nous souhaitons modéliser la déformation de la courbe des taux nominaux européens Zéro Coupons « sans risque ».

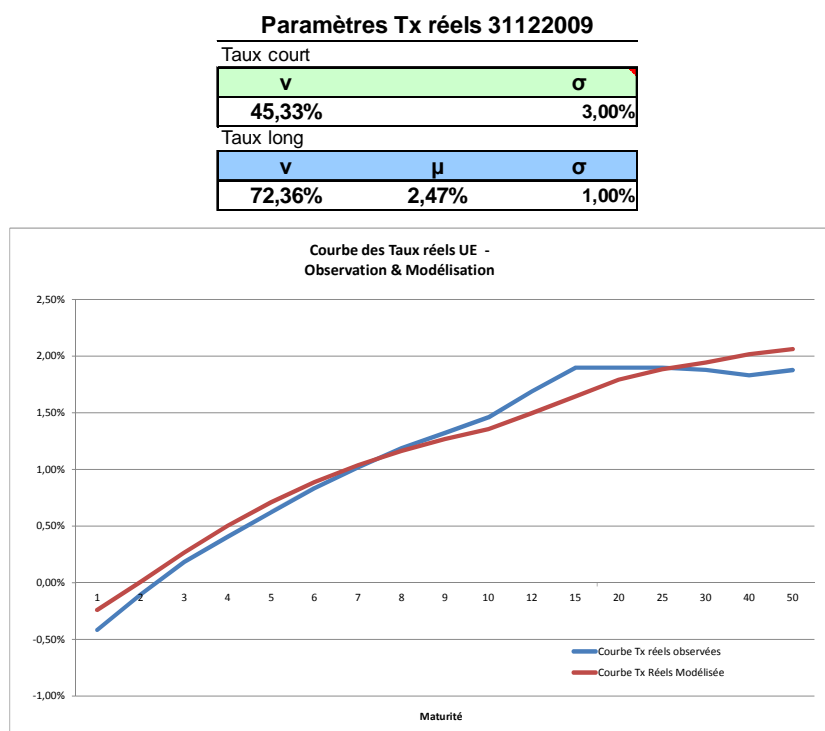
Pour cela, nous considérons l'approximation de Fisher :

$$\text{Taux Nominal}(T) = \text{Taux Réel}(T) + \text{Inflation Fwd}(T)$$

Ainsi, en modélisant la structure par terme des taux réels et l'inflation « forward », nous pouvons en déduire la courbe de taux nominaux.

Pour les taux réels, nous reprenons un modèle utilisé en monde risque-neutre : Vasicek à 2 facteurs [1977]. Le modèle et la méthodologie de calibrage sont présentés au paragraphe APPROCHE RISQUE NEUTRE.

Ne disposant pas d'historique de taux réel, et dans un souci de cohérence avec la modélisation de l'inflation « forward », nous calibrons en effet le modèle avec la courbe de marché au 31/12/2009. Cette courbe est déduite de la courbe européenne de taux ZC d'obligations gouvernementales AAA en retirant l'inflation anticipée (swaps). Les paramètres obtenus seront ensuite étudiés pour vérifier que le modèle est économiquement « solide ».



**Fig.51 : Courbes des taux réels, donnée de marché et calibrée – Vasicek**

### 1.3 Rendements Action – Primes de risque et Dividendes

Dans le cadre du modèle d’Ahlgrim, nous considérons que le rendement des actions se décompose ainsi :

$$Rdt_{ACT} = \text{Taux nominal sans risque} + \text{prime de risque}$$

Il nous reste donc à modéliser les primes de risque. Nous reconsidérons le modèle RSLN, développé par Mary Hardy [2001] ; seulement, cette fois, nous modéliserons uniquement les primes de risque par des processus log-normaux de paramètres différents selon l’état dans lequel on se trouve à chaque simulation (chaîne de Markov). Le modèle est détaillé dans le paragraphe précédent

Dans le modèle d’Ahlgrim, les dividendes sont modélisés indépendamment, par un processus de retour à la moyenne. La principale difficulté de la modélisation de dividendes réside dans la disponibilité des données : les historiques « longs » des taux de dividendes ne sont pas publics. Les montants de dividende sont également très aléatoires d’une année sur l’autre. Par conséquent, compte tenu du peu de données dont nous disposons, il nous était impossible de calibrer un tel modèle.

Nous avons donc décidé de travailler à partir un historique CAC 40 avec dividendes réinvestis. De cet historique, en déduisant le taux court « sans risque » mensualisé (Euribor 3mois) nous obtiendrons un historique 1988-2010 mensuel des primes de risques - dividendes réinvestis- du marché français.

Nous obtenons alors les paramètres suivants (au 31/12/2009):

$\mu_1$	1,2%	$\pi_1$	66,15%
$\mu_2$	-0,3%	$\pi_2$	33,85%
$\sigma_1$	3,3%	p11	93,84%
$\sigma_2$	6,9%	p22	96,85%
p12	6,2%	Log-Likelihood	
p21	3,2%		<b>394,0200</b>

Fig.52 : Résultat du calibrage RSLN sur un historique de primes de risque

### 1.4 L’immobilier

L’immobilier est un placement souvent utilisé par les assureurs pour se couvrir contre l’inflation et disposer de rendements peu volatiles. C’est pourquoi il est modélisé de manière indépendante des autres variables. Nous distinguons le rendement locatif net du rendement en capital.

Sur ce point, nous disposons d'un très bon historique (données IPD) des rendements immobilier Parisiens, 1<sup>ère</sup> couronne. Il s'agit en effet de l'indice le plus représentatif du portefeuille du conservateur.

Les rendements locatifs seront modélisés par un processus de retour à la moyenne de type Vasicek.

Les rendements en capital seront modélisés par un processus Log-Normal (Black & Scholes, 1973).

Les résultats du calibrage, au 31/12/2009, sont synthétisés dans le tableau ci-dessous.

Rendement en Capital		Rendement Locatif	
		Vitesse retour moy	37,32%
Moyenne	0,75%	Moyenne LT	7,85%
Volatilité	7,06%	Volatilité	0,67%

Les résultats obtenus nous semblent cohérents compte tenu de l'évolution des prix de l'immobilier parisien ces dernières années.

Néanmoins, nous ne pouvons pas considérer de tels paramètres pour nos simulations, notamment pour le rendement locatif. Il est en effet très difficile d'apprécier la représentativité des données utilisées pour le calibrage, car le périmètre est très précis (Paris 1<sup>ère</sup> Couronne) et l'historique est très court par rapport aux cycles économiques de l'immobilier qui sont des cycles longs. C'est pourquoi, nous fixerons arbitrairement le rendement locatif espéré de l'immobilier à 4%, afin d'avoir un rendement global inférieur au rendement espéré action :

**Paramètres retenus après arbitrage :**

Rendement en Capital		Rendement Locatif	
		Vitesse retour moy	37,32%
Moyenne	0,75%	Moyenne LT	4,00%
Volatilité	7,06%	Volatilité	0,67%

## II- Simulations et analyse des résultats

### 2.1 Les paramètres du modèle

Les éléments à paramétrer pour le modèle sont les suivants :

- Nombre de simulations
- Pas de temps ;
- Valeurs initiales des actifs ;
- Paramètres des modèles;

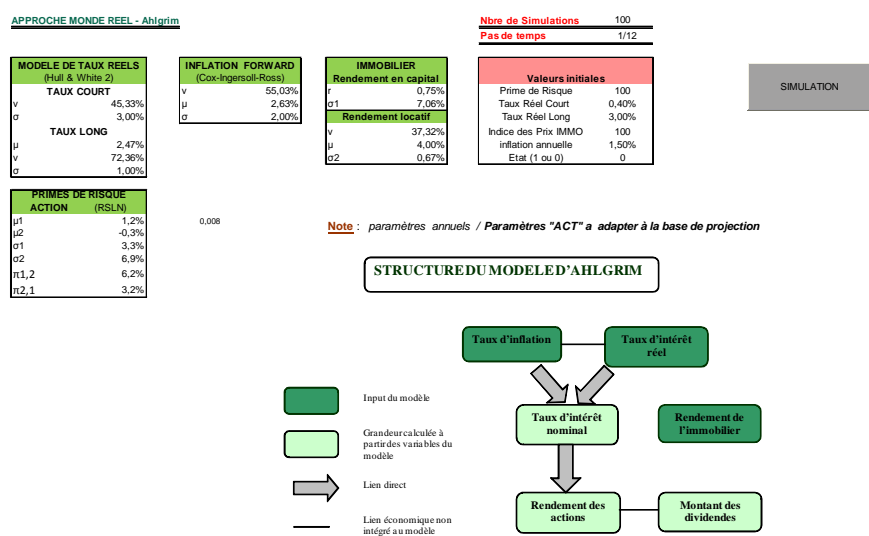


Fig.53 : Initialisation du modèle, paramètres et données

### 2.2 Tests et cohérence globale du modèle

Dans le cas du développement d'un ESG sous la probabilité historique, la mesure de la bonne qualité des scénarii obtenus est très différente de celle sous la probabilité risque-neutre. En effet, dans ce référentiel « monde réel », l'accent doit être mis sur la cohérence globale des scénarii avec les anticipations du marché, la représentativité, la plausibilité, et la transparence de l'évolution. L'ESG doit « imiter » le comportement des actifs sur tout l'horizon de projection.

A ce titre, le niveau de correspondance des résultats aux données utilisées pour le calibrage constitue un champ d'investigation particulièrement intéressant. L'utilité de la comparaison des scénarii obtenus par rapport aux observations déjà réalisées sur le marché peut varier en fonction des attentes et du contexte d'application de l'ESG. En réalité, le choix d'une « bonne » plage d'historique pour le calibrage est essentiel quant à la représentativité des scénarii des évolutions plausibles du marché. Les pages

d'historiques qui ne sont pas susceptibles de représenter cette évolution future ne doivent pas être considérées ; par exemple, les niveaux d'inflation française connus au cours des années 1970 ne peuvent pas être utilisés pour le calibrage compte tenu des objectifs de la BCE (inflation annuelle de 2%).

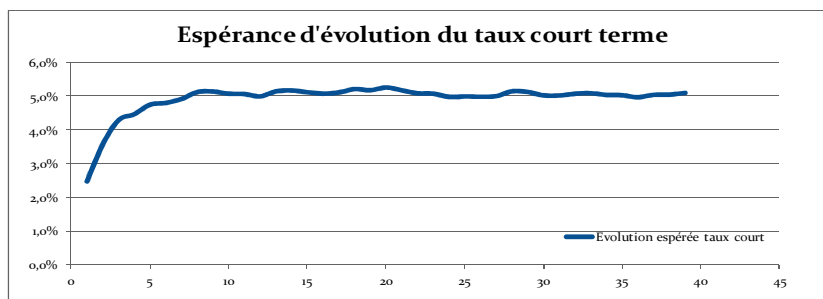
Le comportement global des actifs modélisés, les uns par rapport aux autres est aussi un élément essentiel permettant de justifier de la bonne qualité de l'ESG. Aussi, c'est en ce sens qu'une structure en cascade a été choisie : elle induit une très forte interdépendance entre les classes d'actif modélisés. Ainsi, l'inflation et les taux réels sont à la base de tout le processus de modélisation ; les primes de risques et l'immobilier, modélisés indépendamment, permettent de retrouver les variables « sources de risque » que nous souhaitons obtenir en sortie.

Les tests présentés ci-après sont les suivants :

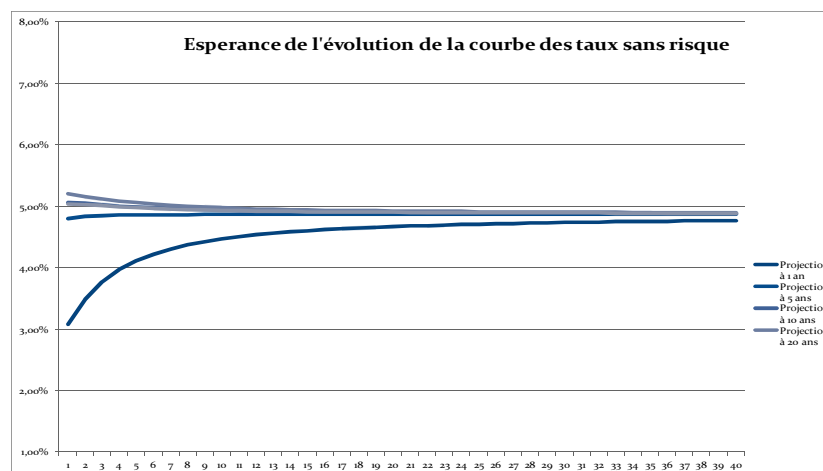
- Espérance d'évolution du taux court et de la courbe des taux nominaux
- Intervalles d'évolution de la courbe des taux nominaux et de l'inflation anticipée
- Interactions entre différentes variables
- Confrontation des résultats aux données modélisées

### Evolution espérée du taux court :

Le graphique ci-après présente l'évolution moyenne du taux court et de la courbe des taux nominaux. Ces résultats semblent cohérents avec les données de marché au 31/12/2009.



**Fig.54 : Monde Réel, évolution moyenne du taux court**

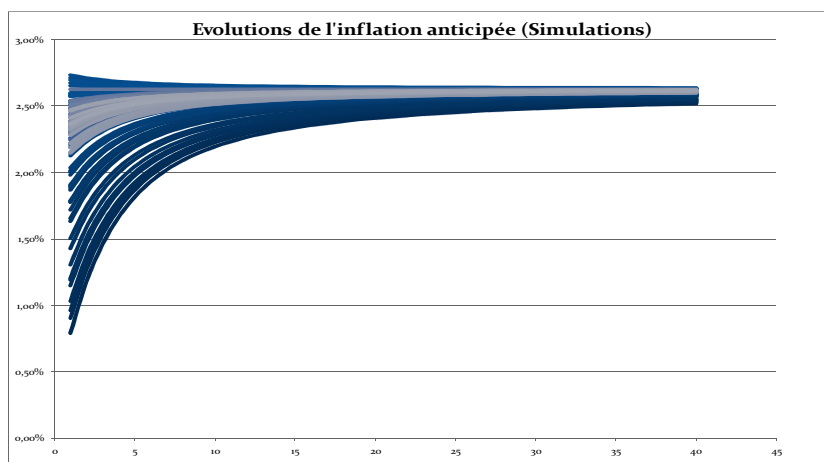


**Fig.55 : Monde Réel, évolution moyenne du la courbe des taux (Mat 1an, 5ans, 10ans, 20ans)**

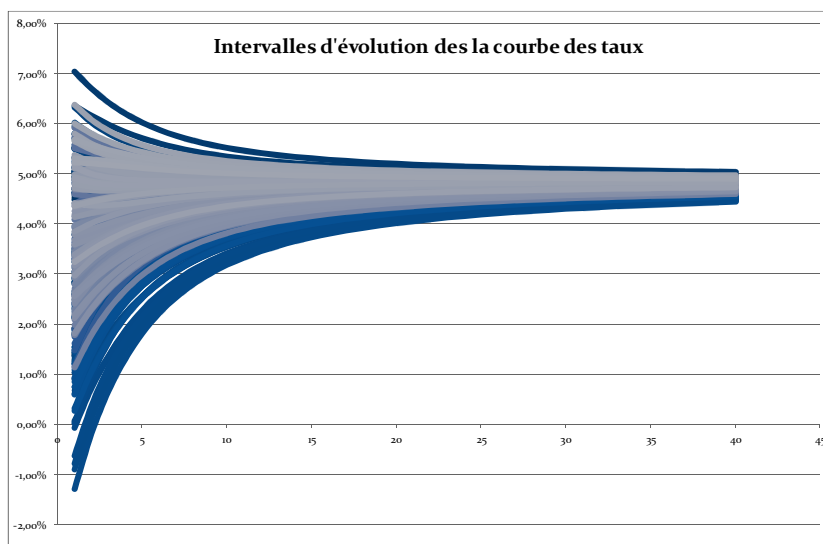


### **Fourchettes d'évolution de la courbe des taux et de l'inflation anticipée :**

Les graphiques ci-après ont vocation à illustrer les intervalles d'évolution des courbes d'inflation anticipée et de la courbe des taux nominaux.



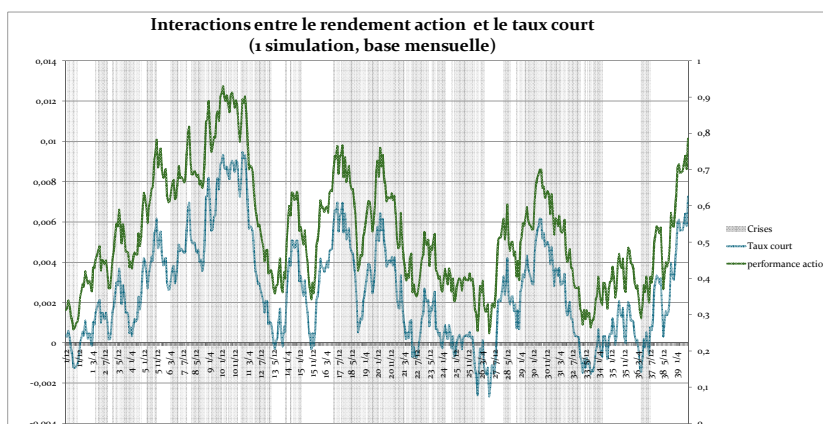
**Fig.56 : Monde Réel, intervalle d'évolution de la courbe des taux ZC d'inflation anticipée**



**Fig.57 : Monde Réel, intervalle d'évolution de la courbe des taux ZC nominaux**

### Interaction entre les variables modélisées :

La cohérence du modèle dépend des interactions entre les actifs et de l'impact des situations de crises. A ce titre, il nous a semblé opportun d'illustrer cela en représentant, sur 1 simulation, les évolutions du rendement action et du taux court associées à l'apparition des situations de crise.



**Fig.58 : Monde Réel, interactions entre taux court, actions et crises modélisées**

Sur ce graphique, nous pouvons constater que l'évolution du rendement action est très proche de l'évolution du taux court tout en étant fortement impacté par l'apparition des situations de « crise ».

### Confrontation des résultats à quelques données historiques :

Enfin, comme évoqué précédemment, les données simulées doivent représenter au mieux la réalité du marché sur la base des observations utilisées pour le calibrage/des modèles.

Le tableau ci-après a vocation à vérifier la cohérence des données par rapport aux données historiques. Si, pour la courbe des taux, les graphiques précédents permettent de valider la cohérence de ces résultats, nous avons souhaité approfondir cette analyse pour les rendements action et immobilier, car ils sont la combinaison de plusieurs variables du modèle., et il est plus difficile d'obtenir des résultats proches des historiques.

	Moyenne	Intervalle de confiance à 99%		Moyenne historique
Rdt Action (mensuel)	0,56%	-15,50%	17,50%	0,66%
Rdt Immobilier (mensuel)	0,40%	-5,20%	6,00%	0,85%

**Fig.59 : Monde Réel, intervalles de confiance et moyennes action et immobilier**

Tout d'abord, concernant l'immobilier, la moyenne ne correspond pas à la moyenne historique. Ceci est tout à fait normal du fait de notre paramétrage : nous ne souhaitons pas surestimer la performance immobilière, compte tenu de la faible profondeur d'historique dont nous disposons.

Concernant les actions, le rendement est légèrement inférieur au rendement historique, et l'intervalle de confiance du rendement action est un peu large. Ce phénomène est dû à l'addition, dans le modèle, de trois variables différentes : cela augmente la volatilité du rendement action. Cette modélisation est globalement prudente et, compte tenu de l'état actuel des marchés financiers, elle peut être retenue.

# CONCLUSION GENERALE

---

L'utilisation de modèles stochastiques sophistiqués nous a tout d'abord permis d'intégrer un aléa observable sur les marchés financiers. Il nous a également permis de répondre au principe de valorisation « market-consistent » de l'actif comme du passif ; lors de cette étude, nous avons été très attentifs à l'univers de projection et à la capacité du modèle à valoriser les contingences futures comme le déclenchement d'options implicites au passif de la compagnie.

Par ailleurs, la probabilité risque-neutre ne reflétant pas la réalité des marchés financiers, il nous a semblé utile et intéressant de développer un second modèle, plus intuitif et calibré sur des plages d'historiques représentatives de la réalité économique des dix ou vingt dernières années.

Grâce à l'analyse des différents types de modèles stochastiques utilisés en assurance ou en finance, nous avons identifié quels processus étaient les plus adaptés aux objectifs de l'étude. Puis, connaissant les contraintes auxquelles l'ESG devait se soumettre, nous avons choisi les méthodes de calibrage adéquates, et la structure de dépendance des variables de l'ESG. Le choix des données est notamment primordial. Enfin, nous avons soumis les scénarii à un lot de tests nous permettant de vérifier qu'ils répondent correctement aux besoins initiaux : Test martingale, scénario central, impact des situations de crise, ...

Ainsi, tout au long de ce mémoire, nous avons su calibrer et implémenter des modèles stochastiques globalement cohérents, tout en respectant l'ensemble des contraintes que nous avons identifiées au préalable. Cette étude nous a permis de soulever de nombreuses problématiques d'actualité liées à des aspects mathématiques complexes comme la simulation de primes de risque ou le calibrage « market-consistent » des modèles.

A ce titre, il apparaît désormais que certains modèles de taux sont très difficiles à calibrer ou à implémenter, mais permettent de retrouver à la fois la courbe des taux fournie par l'EIOPA et les prix d'options sur le marché ; c'est le cas du modèle HJM [1989]. A l'inverse, un modèle comme Vasicek à 2 facteurs [1977] est très simple à calibrer mais nous fournit des résultats beaucoup moins satisfaisants quant à la « market-consistency » des scénarii projetés.

Concernant les actions, nous avons pu constater depuis quelques années que les rendements peuvent être très volatiles ; elles ont néanmoins un rôle essentiel dans le portefeuille du Conservateur puisqu'elles permettent d'en doper la performance et par conséquent les taux servis sur les fonds en Euro. Le modèle de Black & Scholes [1973] ne permet pas d'évaluer les queues de distribution, c'est pourquoi nous avons

souhaité utiliser un autre modèle : RSLN, développé par Mary Hardy [2001]. Ce modèle permet de simuler les rendements des actions ou leurs primes de risque à travers deux lois log-normales et une chaîne de Markov. Il nous permet de simuler des périodes de crise lors desquelles le rendement moyen est négatif et la volatilité élevée.

Aujourd'hui, il reste de nombreuses pistes d'investigation à approfondir ; les générateurs de scénarii économiques ont vocation à évoluer, et à s'adapter aux besoins des assureurs en matière de quantification des risques. Ils devront désormais prendre en compte plus de risques, comme l'illiquidité ou le défaut à travers les spreads de crédit, ou encore modéliser les interdépendances entre ces risques de manière plus complète en utilisant les copules.

En effet, la corrélation linéaire est largement répandue dès lors qu'une dépendance entre les actifs doit être modélisée. Elle est performante lorsque la relation de dépendance est linéaire et les variables gaussiennes. A défaut, le coefficient de corrélation de Kendall ou Spearman peuvent être des alternatives intéressantes. Dans ce mémoire, nous avons utilisé deux matrices de corrélations de Spearman, calibrées sur un historique dans lequel nous avons isolé les périodes de crise. Nous avons ainsi deux niveaux de dépendance, à chaque date cohérents avec la situation du processus RSLN (modèle action).

Néanmoins, ces coefficients ont le défaut de ne pas modéliser la dépendance d'évènements extrêmes, pourtant essentielle lorsque qu'on souhaite calculer une probabilité de ruine à 99,5%. Les copules le permettent et peuvent s'avérer très efficaces dans ce cadre.

# TABLE DES FIGURES

---

Fig.1 :Les 3 piliers de la directive.....	15
Fig.2 : Comparaison du bilan normes françaises et du bilan prudentiel.....	16
Fig.3 : Distribution de probabilité des pertes, sur un horizon 1 an et Value at Risk à 99.5% .....	17
Fig.4 : Présentation des modules de SCR – QIS5 Formule Standard.....	18
Fig.5 : Matrice de corrélation pour le calcul du BSCR – QIS 5.....	19
Fig.6: Matrice de corrélations pour le module risque de marché – QIS 5.....	20
Fig.7 : Cartographie des risques pour le portefeuille du Conservateur .....	21
Fig.8 : Le calcul du Best Estimate .....	25
Fig.9 : Courbe des taux zéro coupon, obligations d’Etat AAA - IA 31/12/2009 .....	39
Fig.10 : Représentation des cash-flows d’un swap de taux.....	40
Fig.11 : Courbe des taux swaps, EIOPA 31/12/2009, données Bloomberg .....	40
Fig.12 : Historique 1988 – 2009 du taux Euribor 3 mois, données EuroNext .....	41
Fig.13 : Historique 1988 – 2009 de l’indice CAC 40 Nu, données EuroNext .....	43
Fig.14 : Historique 1988 – 2009 de l’indice IPD Paris 1 <sup>ère</sup> couronne, Bureaux, données IPD.....	44
Fig.15 : Historique 1960 – 2009 du taux d’inflation annuel français (hors tabac), données INSEE.....	44
Fig.16 : Courbe ZC d’inflation anticipée (déduite des swaps d’inflation) – 31/12/2009, donnée Bloomberg .....	44
Fig.17 : Agrégation en univers “Monde Réel” .....	46
Fig.18 : Matrice de corrélations (format) utilisée dans le modèle.....	47
Fig.19 : Densité et Droite de Henry, modèle log-normal et répartition empirique.....	59
Fig.20 : Chaîne de Markov utilisée pour le modèle RSLN .....	60
Fig.21 : Vasicek - Calibrage par minimisation de l’écart quadratique à t=0, courbe IA 31/12/2009.....	63
Fig.22 : Vasicek - calibrage par minimisation de l’écart quadratique à t=0, courbe EIOPA 31/12/2009 .....	64
Fig.23 : « Payoffs » des swaptions modélisés et observés sur le marché, 31/12/2009, donnée Bloomberg .....	66
Fig.24 : HJM - Volatilité des taux « forward » du modèle calibré.....	66
Fig.25 : RSLN - Représentation des états sur un historique (i) et paramètres obtenus (ii) .....	67
Fig.26 : Historique 1988 - 2009 d’évolution des rendements immobiliers décomposés, IPD .....	68
Fig.27 : Historique 1960 – 2009 du taux d’inflation annuel français (hors tabac), INSEE.....	69
Fig.28 : Vasicek – Calibrage du modèle d’inflation.....	69
Fig.29 : Matrice de Corrélation de Spearman .....	71
Fig.30 : Interactions historiques taux court/taux long et taux court/actions (nuage de points) .....	72
Fig.31 : Analyse des corrélations glissantes (fenêtre de 12 mois) entre Actions, Taux longs et Taux courts.....	73
Fig.32 : Matrices de corrélations de Spearman, crises isolées .....	74

Fig.33 : Test de significativité de ces coefficients .....	74
Fig.34 : Interactions historiques TC/TL, TL/ACT, TC/ACT, hors crises (Nuage de points).....	75
Fig.35 : Interactions historiques TC/TL, TL/ACT, TC/ACT, crises (Nuage de points) .....	75
Fig.36 : Matrices de corrélations retenues .....	76
Fig.37 : Initialisation du Modèle, paramètres et données.....	77
Fig. 38 : Vasicek 2F - évolutions de la courbe des taux sur 350 simulations.....	78
Fig.39 : Vasicek 2F, espérance d'évolution de la courbe des taux.....	79
Fig.40 : Vasicek 2F, actualisation des rendements action et immobilier .....	79
Fig.41 : Vasicek 2F, espérance du prix des zéro coupons.....	80
Fig.42 : Vasicek 2F, espérance d'évolution du taux court .....	80
Fig.43 : HJM, évolutions de la courbe des taux sur 350 simulations .....	81
Fig.44 : HJM, espérance d'évolution de la courbe des taux.....	82
Fig.45 : HJM, rendements actualisés Action et Immobilier.....	82
Fig.46 : HJM, espérance des Discount Factors sur l'horizon de projection .....	83
Fig.47 : RSLN, impact des crises sur la performance action .....	83
Fig.48 : illustration des taux « forward » Libor .....	84
Fig.49 : Smiles de volatilité : modèle de Black.....	87
Fig.50 : Courbes des taux zéro coupon d'inflation anticipée, donnée de marché et calibrée - Vasicek.....	91
Fig.51 : Courbes des taux réels, donnée de marché et calibrée – Vasicek .....	92
Fig.52 : Résultat du calibrage RSLN sur un historique de primes de risque.....	93
Fig.53 : Initialisation du modèle, paramètres et données .....	95
Fig.54 : Monde Réel, évolution moyenne du taux court.....	96
Fig.55 : Monde Réel, évolution moyenne du la courbe des taux (Mat 1an, 5ans, 10ans, 20ans).....	96
Fig.56 : Monde Réel, intervalle d'évolution de la courbe des taux ZC d'inflation anticipée.....	97
Fig.57 : Monde Réel, intervalle d'évolution de la courbe des taux ZC nominaux.....	97
Fig.58 : Monde Réel, interactions entre taux court, actions et crises modélisées .....	98
Fig.59 : Monde Réel, intervalles de confiance et moyennes action et immobilier.....	98

# BIBLIOGRAPHIE

---

## Ouvrages :

- J.Hull [1999], « *Options, futures and other derivative securities* », Prentice-Hall
- F.Planchet, A.Kamega, J.Jacquemin [2005], « *Modèles financiers en assurance* », Economica
- F.Planchet, A.Kamega, P.Théron [2009], « *Scénarios Economiques en Assurance : modélisation et simulation* », Economica
- F.Quittard-Pinon [2002], « *Mathématiques financières* », Ems management & société

## Articles, Publications et Formations :

- K.Ahlgren, S.Arcy, R.Gorvett [2004] (CAS et SOA), « *Modeling of economic series coordinated with interest rate scenarios* »
- Charles Descure et Christinao Borean, « *Gestion actif passif et solvabilité* »
- I.Grubisic [2002], « *Interest rate Theory : The BGM Model* »
- M.Hardy [2001], « *A regime-switching model of long term stock returns* »
- B.Hibbert [2009], « *Research Documents* »
- Dossiers Techniques Optimind [2009-2010], « *Solvabilité 2, les enjeux de la réforme* » et « *Modélisation prospective : Des travaux au cœur des évolutions comptables et réglementaires à venir* »
- F.Planchet, A.Faleh, D.Rulliere [2009] « *Les générateurs de scénarios économiques : quelle utilisation en assurance* »
- R.Pietersz [2003], « *The Libor market model* »
- F.Racicot, R.Theoret [2006], « *Les modèles HJM et LMM revisités* »
- Formation CARITAT, animée par Aymeric Kamega, Frédéric Planchet, Kamal Armel et Thibault Guenee [2010], « *Construire un Générateur de Scénarii Economiques* »

## Textes réglementaires :

- EIOPA – QIS 5, « *Technical Specifications* »

## Mémoires :

- H.Baouz (UPMC) [2007], « *Solvency II, développement d'un modèle interne pour l'évaluation des fonds propres économiques* »
- F.Wilhelmy ( ISFA) [2006], « *Analyse des modèles de taux d'intérêts pour le gestion actif-passif* »

# ANNEXES

---

## Annexe 1 : Calcul des charges en capital

### Charge en Capital au titre du risque opérationnel

La formule standard définit le calcul du SCR au titre du risque opérationnel comme suit :

$$SCR_{Op} = \min(0,30 \cdot BSCR; Op) + 0,25 \cdot Exp_{ul}$$

Avec :

BSCR : Capital de solvabilité requis de base

Exp<sub>ul</sub> : Montant annuel des dépenses pour les contrats en UC

Op : Charge de base due au risque opérationnel pour les contrats autres que ceux en UC

$$Op = \max(Op_{premiums}, Op_{provisions})$$

Avec :

$$Op_{premiums} = 4\% \cdot Earn_{life} + 3\% \cdot Earn_{nl} + \max[4\% \cdot (Earn_{life} - 1.1pEarn_{life}); 0] \\ + \max[3\% \cdot (Earn_{nl} - 1.1pEarn_{nl}); 0]$$

Et

$$Op_{provisions} = 0.45\% \cdot TP_{life} + 3\% \cdot TP_{nl}$$

Où

TP<sub>life</sub>, TP<sub>nl</sub> représentent les provisions techniques brutes de réassurance pour l'assurance vie et l'assurance non-vie.

Earn<sub>life</sub>, Earn<sub>nl</sub>, pEarn<sub>life</sub>, pEarn<sub>nl</sub> représentent le total des primes acquises pour ces mêmes assurances, brutes de réassurance, sur les 12 derniers mois, et sur les 12 mois précédents.

### Charge en Capital au titre du risque de souscription vie

Nous détaillons ici le mode de calcul concernant l'évaluation des charges en capital pour le module relatif aux risques de souscription vie.

Connaissant la valeur des actifs, nous pouvons calculer la variation de NAV pour ce risque. Dans le calcul du SCR, le montant des passifs correspond aux provisions techniques hors marge pour risque, c'est-à-dire : le Best Estimate.



Au sein de ce module, nous distinguons 5 sous-modules :

- Le chargement au titre du risque de mortalité :  $Life_{mort}$
- Le chargement au titre du risque d'invalidité :  $Life_{dis}$
- Le chargement au titre du risque de dépenses :  $Life_{exp}$
- Le chargement au titre du risque de rachat :  $Life_{lapse}$
- Le chargement au titre du risque de catastrophe :  $Life_{cat}$

Dans le cadre de la formule standard, les chocs à appliquer au titre de chaque risque sont les suivants :

### **Le risque de mortalité**

Le risque de mortalité concerne l'ensemble des produits d'assurance en cas de décès. La charge en capital est égale à la variation de Best Estimate suite à une augmentation constante de 15% des taux de mortalité pour chaque âge.

### **Le risque d'invalidité**

Ce risque concerne les compensations de salaire et dépenses médicales liées à une maladie, un accident, ou une invalidité. La charge en capital est égale à la variation de Best Estimate suite à une augmentation de 35% des taux d'invalidité sur 1 an, suivie d'une augmentation constante de 25% des taux d'invalidité les années suivantes, pour chaque âge ; couplée avec une diminution constante de 20% des sorties d'invalidité.

### **Le risque de dépenses**

Ce risque est associé à une variation des dépenses (non fixées au préalable) liées au contrats d'assurance. La charge en capital se calcule par variation du Best Estimate suite à une augmentation de 10% par rapport aux anticipations, et pour une inflation annuelle des dépenses supérieure de 1% par rapport à ces mêmes anticipations.

### **Le risque de rachat**

Ce risque concerne les pertes dues aux rachats, résiliations de contrats, ou changements de garanties. Trois chocs différents doivent être effectués :

- Un choc à la baisse (permanente) de 50% pour tous les contrats dont le coût de rachat est négatif
- Un choc à la hausse (permanente) de 50% pour tous les contrats dont le coût de rachat est positif
- Un choc à la hausse (rachats massifs sur 1 an) de 30% de la somme des coûts de rachat sur les police dont ce coût est positif, 70% sinon.

L'impact négatif le plus important devra être considéré.

### **Le risque de catastrophe**

Ce risque résulte d'évènements inattendus et extrêmes. Dans le cas de la branche vie, le choc à appliquer est une augmentation de 0,15% des taux de mortalité sur 1 année.

## Annexe 2 : Calcul du MCR

- MCR<sub>linear</sub> : MCR linéaire, c'est-à-dire la somme des MCR linéaires pour chaque type de risque avant toute application de plafond ou de plancher
- MCR<sub>combin</sub> : MCR combiné, calculé par la méthode combinée après application du plafond et du plancher (50 % et 20 % du SCR respectivement) au MCR linéaire
- MCR : MCR final, calculé en appliquant le plancher minimal absolu à la méthode combinée

Les assureurs doivent d'abord calculer les composantes de leur MCR linéaire selon le type de risque souscrit : MCR<sub>nl</sub>, MCR<sub>Life</sub>, ...

Ensuite le MCR linéaire global est obtenu en additionnant les composantes du MCR linéaire :

En assurance vie :

$$\text{MCR}_{\text{linear}} = \text{MCR}_{\text{Life}} + \text{MCR}_{\text{nl}}$$

Le MCR combiné est calculé en appliquant le plafond et le plancher (respectivement 50 % et 20 % du SCR) au MCR linéaire.

$$\text{MCR}_{\text{combin}} = \text{Min}[\text{Max}(\text{MCR}_{\text{linear}}; 25\% \cdot \text{SCR}); 45\% \cdot \text{SCR}]$$

Enfin, le MCR final s'écrit :  $\text{MCR} = \text{Max}(\text{MCR}_{\text{combin}} ; \text{AMCR})$

Où AMCR est le plancher absolu du MCR

Calcul de la composante linéaire du MCR relative à l'assurance vie :

$$\text{MCR}_{\text{life}} = \text{Max}(\alpha_{\text{C11}} \cdot \text{TP}_{\text{C11}} + \alpha_{\text{C12}} \cdot \text{TP}_{\text{C12}} ; \text{WP}_{\text{floor}} \cdot \text{TP}_{\text{C11}}) + \sum_{j \in \{\text{C21}, \text{C22}, \text{C3}\}} \alpha_j \cdot \text{TP}_j + \alpha_{\text{C4}} \cdot \text{CAR}$$

Avec :

$\text{TP}_j$  : Le Best Estimate lié au contrat j

$\text{WP}_{\text{floor}}$  : Le plancher correspondant aux activités comprenant une participation aux bénéfices, fixé à 1,6%

$\alpha_j$  : Paramètre fonction du type de contrat

CAR : Le montant des capitaux sous risque relatifs aux garanties décès et invalidité ; c'est-à-dire le capital et la valeur actuelle des annuités pour ces garanties, diminués du Best Estimate net de réassurance pour ces mêmes garanties, diminués des montants recouvrables de réassurance du fait de la survenance du sinistre.

j	Type de contrat	$\alpha_j$
C11	Contrat avec PB, provisions techniques et garanties	5%
C12	Contrat avec PB, provisions techniques de la PB discrétionnaire	-8,8%
C21	Contrat en UC, provisions techniques des contrats sans garanties	0,5%
C22	Contrat en UC, provisions techniques des contrats avec garanties	1,8%
C3	Contrat sans PB, provisions techniques totales	2,9%
C4	Capital sous risque pour tous les contrats	0,1%

### Annexe 3 : Interpolation cubique

L'interpolation cubique permet de connaître les points intermédiaires d'une courbe, entre deux abscisses connues.

Nous supposons connus les taux ordonnées  $r(t, T_1)$ ,  $r(t, T_2)$ ,  $r(t, T_3)$ ,  $r(t, T_4)$ , et nous supposons que le segment de courbe qui passe par ces quatre points vérifie l'équation polynomiale :

$$r(t, T) = aT^3 + bT^2 + cT + d$$

Il nous reste alors à résoudre le système suivant pour pouvoir calculer les coordonnées de chaque point sur ce segment :

$$\begin{cases} r(t, T_1) = aT_1^3 + bT_1^2 + cT_1 + d \\ r(t, T_2) = aT_2^3 + bT_2^2 + cT_2 + d \\ r(t, T_3) = aT_3^3 + bT_3^2 + cT_3 + d \\ r(t, T_4) = aT_4^3 + bT_4^2 + cT_4 + d \end{cases}$$

Cette méthode nous est très utile lorsque nous ne disposons que de peu de points d'une courbe des taux.

### Annexe 4 : Méthode des moindres carrés

Nous disposons d'un échantillon d'observations  $(X, Y)$ . Nous supposons par ailleurs que  $E[Y|X] = \alpha + \beta X$ .

Le problème consiste à estimer  $\alpha$  et  $\beta$ , ainsi que la volatilité  $\sigma$  des résidus  $\varepsilon$ .

Nous supposons donc que, pour chaque observation,  $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$  où  $\varepsilon_i$  sont des réalisations indépendantes de lois normales centrées et de variance  $\sigma^2$ .

L'estimation des moindres carrés consiste à déterminer une droite d'équation  $\hat{y} = ax + b$  telle que  $\sum_i (\hat{y}_i - y_i)^2$  soit minimale. L'étude consiste ensuite à analyser les estimateurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$ . La qualité de la régression peut être évaluée grâce au coefficient de détermination  $R^2$  qui correspond au carré du coefficient de corrélation.

## Annexe 5 : Construire une courbe ZC à partir d'une courbe de taux swaps

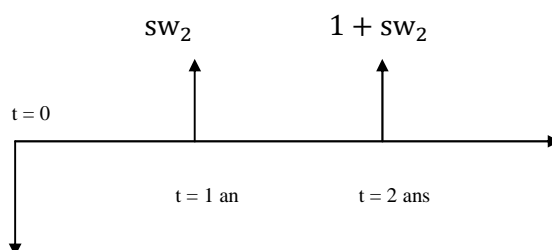
La courbe des taux zéro-coupon est indispensable à notre étude, car elle permet de valoriser les produits financiers, mais aussi d'actualiser les flux futurs au passif de l'assureur. Elle est un élément central de l'ESG.

Il existe une bijection entre la courbe des taux zéro-coupons et la courbe des taux swaps. Le paragraphe ci-dessous a pour objet de démontrer cette équivalence par itération.

Soit  $r$  le taux zéro coupon et  $sw$  le taux swap.

Pour une maturité 1 an, le taux swap et le taux zéro-coupons sont égaux :  $sw_1 = r_1$ .

Puis, à partir du taux zéro-coupon 1 an, nous créons le taux 2 ans en réalisant les flux suivants :



**Lien entre taux swaps et taux zéro coupons, cash-flows**

On peut donc en déduire la relation liant  $r_2$  aux taux connus :

$$\frac{sw_2}{1 + sw_1} + \frac{1 + sw_2}{(1 + r_2)^2} = 1$$

$$r_2 = \left[ \frac{1 + sw_2}{1 - \frac{sw_2}{1 + sw_1}} \right]^{1/2} - 1$$

Enfin, de proche en proche il est possible de déduire la courbe de taux zéro-coupons de la courbe de taux swaps ou inversement :

$$r_n = \left[ \frac{1 + sw_n}{1 - sw_n \cdot \sum_{i < n} \frac{1}{(1 + sw_i)^i}} \right]^{1/n} - 1$$

## Annexe 6 : Théorème d'évaluation par changement de numéraire

Le théorème présenté ici est couramment utilisé lorsque l'on souhaite valoriser les prix de produits dérivés. Ce théorème nous est donc utile dans le cadre du calibrage des modèles de taux sous la probabilité risque-neutre.

Soit  $Q$  la probabilité risque-neutre et  $B(t) = \exp(\int_0^t r(u)du)$ .

Soit  $X$ , nouveau numéraire tel que le prix de  $X$  exprimé en unités d'actif  $B$ ,  $X(t) / B(t)$ , soit une  $Q$ -martingale. L'existence de ce prix relatif est conditionnée à l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

Il existe alors une mesure de probabilité  $Q_x$  sur  $F$  sous laquelle le prix des actifs financiers exprimés dans ce nouveau numéraire sont des martingales. La mesure  $Q_x$  peut s'exprimer ainsi, par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ_x}{dQ} \Big|_{F_T} = \frac{X(T)}{X(0)B(T)}$$

La valeur d'équilibre  $f(S,t)$  de l'actif dérivé de cours  $S$  et de « payoff »  $H(T)$  en  $T$  s'écrit alors :

$$f(S,t) = X(t)E_{Q_x} \left[ \frac{H(T)}{X(T)} \Big|_{F_t} \right]$$

Et, si l'on pose  $X(t) = B(t)$ , on obtient la probabilité « forward neutre » :

$$\frac{dQ_x}{dQ} \Big|_{F_T} = \frac{\exp(-\int_0^t r(s)ds)}{P(0,t)}$$

On a enfin, pour toute variable aléatoire  $X_t$  :

$$E_Q \left[ \frac{dQ_t}{dQ} \cdot X_t \right] = E_{Q_t} [X_t]$$

Ces propriétés permettent de calculer la valeur de n'importe quel actif en calculant son « payoff » espéré, dans un univers « forward-neutre » dont le numéraire est un zéro-coupon, et en actualisant au taux sans risque.

Enfin, comme dans cet univers « forward-neutre », le prix relatif des actifs par rapport au numéraire est une martingale, nous pouvons en déduire que le « drift » est nul.

## Annexe 7 : Théorème de Girsanov

Soit  $W$  un mouvement brownien pour un espace filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  et  $\lambda$  un processus adapté vérifiant :

$$E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right) \right] < \infty$$

On définit le processus  $Z$  et la mesure  $Q$  par :

$$Z_t = W_t + \int_0^t \lambda(s) ds \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dP} = \exp \left( - \int_0^t \lambda(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(u) du \right)$$

Alors  $Z$  est un  $Q$ -mouvement brownien.

Ce théorème permet notamment de montrer que des processus de prix actualisés sont des martingales sous  $Q$ , probabilité risque-neutre ; et permet de ramener un calcul de valorisation d'option à un calcul d'espérance. Sous l'hypothèse de log-normalité du cours de l'actif, on retrouvera la formule de Black & Scholes\*.

## Annexe 8 : Diffusion dans le modèle LMM

Nous allons démontrer ici l'équation de diffusion de tous les taux « forward » sous une unique mesure de probabilité  $Q_{T_M}$ . Nous garderons les mêmes notations que dans le mémoire.

Le théorème de changement de numéraire nous a d'ores et déjà permis d'exprimer la diffusion du taux  $L_k$  dans l'univers  $Q_{T_k}$  « forward-neutre » :

$$dL_k(t) = L_k(t) \sum_{q=1..d} \sigma_{k,q}(t) dW_{k,q}(t) = L_k(t, T) \sigma_k(t) B dZ_k(t)$$

Les taux « forward » ne peuvent être diffusés que dans l'univers  $Q_{T_k}$  qui leur est associé.

D'après le principe de changement de numéraire, il est possible de passer de la mesure  $Q_{T_k}$  à la mesure  $Q_{T_{k-1}}$ , en utilisant la densité  $\varphi$  :

$$\varphi(t) = \frac{d Q_{T_{k-1}}}{d Q_{T_k}} = \frac{P(t, T_{k-1}) / P(0, T_{k-1})}{P(t, T_k) / P(0, T_k)} = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k-1})} (1 + \tau L_k(t))$$

Car

$$L_k(t) = \frac{1}{\tau} \left( \frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right)$$

---

\*cf. J.Hull, "Options, Futures & Other Derivatives"

On a alors :

$$\ln \varphi(t) = \ln\left(\frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k-1})}\right) + \ln(1 + \tau L_k(t))$$

En appliquant le lemme d'Itô à  $\ln \varphi(t) = f(L_k)$ , on retrouve facilement l'équation suivante :

$$d \ln \varphi(t) = \frac{\tau}{1 + \tau L_k} L_k(t) \sigma_k' B dZ_k - \frac{1}{2} \frac{\tau^2 L_k^2}{(1 + \tau L_k)^2} \sigma_k' R \sigma_k dt$$

Nous retrouvons à présent une densité exponentielle de Doléans-Dade dont nous pouvons identifier le coefficient  $k$  par unicité de l'équation différentielle stochastique.

La densité de Doléans-Dade s'écrit comme suit :

$$\varphi(t) = \exp \left[ \int_0^t k(u)' dZ_k(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \|k(u)\|^2 du \right]$$

$$d \ln \varphi(t) = k(u)' dZ_k(u) - \frac{1}{2} \|k(u)\|^2 du$$

Nous avons ainsi :

$$k(t) = \frac{\tau}{1 + \tau L_k(t)} L_k(t) B' \sigma_k$$

Puis, en appliquant le théorème de Girsanov, nous en déduisons :

$$dZ_{k-1} = dZ_k - \frac{\tau}{1 + \tau L_k(t)} L_k(t) B' \sigma_k dt$$

Avec  $Z_{k-1}$  un processus de Wiener sous la mesure  $Q_{T_{k-1}}$ .

Enfin, de proche en proche, nous pouvons exprimer  $dZ_k$  en fonction de  $dZ_M$  sous la mesure  $Q_{T_M}$  :

$$dZ_k = dZ_M - \sum_{j=k+1}^M \frac{\tau}{1 + \tau L_j(t)} L_j(t) B' \sigma_j dt \quad \text{si } M > k$$

$$dZ_k = dZ_M + \sum_{j=M+1}^k \frac{\tau}{1 + \tau L_j(t)} L_j(t) B' \sigma_j dt \quad \text{si } M < k$$

On peut alors en déduire la dynamique :

$$dL_k(t) = L_k(t) \sum_{j=M+1 \dots k} \frac{\tau}{1 + \tau L_j(t)} L_j(t) B' \sigma_j dt + L_k(t) \sigma_j' B dZ_M \quad \text{pour } M < k$$
$$dL_k(t) = L_k(t) L_k(t) \sigma_j' B dZ_M \quad \text{pour } M = k$$
$$dL_k(t) = -L_k(t) \sum_{j=M+1 \dots k} \frac{\tau}{1 + \tau L_j(t)} L_j(t) B' \sigma_j dt + L_k(t) \sigma_j' B dZ_M \quad \text{pour } M > k$$

## Annexe 9 : Glossaire

### Actualisation

L'actualisation donne la valeur aujourd'hui d'un flux futur. Elle est l'opposée de la Capitalisation qui permet de déterminer la valeur future d'un placement aujourd'hui. L'actualisation est effectuée grâce aux Discount Facteurs (DF) qui sont les prix de zéro-coupons, ou directement grâce à la courbe des taux ZC. Le taux d'actualisation doit être de même maturité que le flux à actualiser.

### Drift

Le « drift » est le terme de dérive, ou la tendance du processus stochastique.

### Forward

Un « forward » est un contrat à terme sur un marché de gré à gré. Il arrête aujourd'hui les conditions d'un contrat futur et un prix fixe pour un échange à venir. Ces contrats permettent de spéculer sur la hausse ou la baisse des taux.

### Liquidité du marché

La liquidité du marché représente la capacité à acheter ou vendre rapidement les actifs. Plus un marché est liquide, plus les transactions de titres sont rapides et peu coûteuses. La liquidité du marché garantit la juste valeur des actifs sur le marché, hypothèse essentielle pour calibrer un modèle « hedge-consistent ».

### Martingale

Les martingales sont des processus stochastiques essentiels dès lors que l'on valorise un actif sous la probabilité risque-neutre. L'espérance de la valeur en T d'une martingale, conditionnellement à la situation en T-1, est égale à la valeur en T-1. Mathématiquement, cela se traduit par :

$$E(X(t)|F(s)) = X(s) \text{ pour tout } s < t$$



## Mouvement Brownien

Un mouvement brownien est un processus stochastique  $(X_t)$  à valeurs réelles, à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues.

Mathématiquement :

- La fonction  $s \rightarrow X_s$  est continue
- Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  est indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_s$  engendrée par  $\{X_u ; u \leq s\}$
- Si  $s \leq t$ , la loi de  $X_t - X_s$  est identique à celle de  $X_{t-s} - X_0$ .

## Opportunité d'arbitrage

On dit d'un marché qu'il offre une opportunité d'arbitrage s'il est possible de réaliser un gain certain sans capital initial. Sur un marché en équilibre, il y a absence d'opportunité d'arbitrage.

## Option

Une option est un contrat donnant le droit d'acheter ou de vendre un sous-jacent à une date ultérieure et un prix d'exercice fixés. Le vendeur de l'option est tenu de livrer le sous-jacent, tandis que l'acheteur a la possibilité d'exercer son droit ou non.

## Processus de Wiener

Un processus  $W_t$ ,  $t \in T$  est un processus de Wiener, ou Brownien standard si :

- $P(W_0 = 0) = 1$
- $W(t)$  est à accroissements indépendants sur  $T$
- Pour tout  $h > 0$ , la loi de  $W(t+h) - W(t)$  ne dépend pas de  $t$
- Pour tout  $t$ ,  $P(W_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2t}} du$

## Structure par terme des taux d'intérêt

La structure par terme des taux d'intérêt est une expression désignant la courbe des taux.

## Univers risque-neutre

L'univers risque neutre est un état fictif dans lequel tous les agents sont neutres face au risque. Le prix de chaque actif est égal, en espérance (« drift »), au taux sans risque, et les processus de prix actualisés des actifs sont des martingales.

## Volatilité

La volatilité d'un actif désigne son risque. Elle correspond aux variations de la valeur du titre sur une période donnée. En général, la volatilité est croissante avec le rendement. En effet, plus un actif est risqué, plus il est rentable en espérance.

