

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff cedex, France



Mémoire d'Actuariat - Promotion
2004

**VALORISATION PAR
LES DEFLATEURS
STOCHASTIQUES**

**Mohamed SIJLAMASSI
Yoram OUKNINE**

MOTS-CLÉS : *Déflateur, Processus en Régime Switching, Garantie plancher, Absence d'Opportunité d'Arbitrage, Black & Scholes*

KEYWORDS: *Deflators, Regime Switching Process, Investment guarantees, No free Lunch, Black & Scholes*

ENCADREMENT : M. Charles DESCURE

CORRESPONDANT E.N.S.A.E. : M. Christian Robert

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff CEDEX, FRANCE



Note de synthèse

VALORISATION PAR LES DEFLATEURS STOCHASTIQUES

Mohamed SIJLAMASSI
Yoram OUKNINE

MOTS-CLÉS : *Déflateur, Processus en Régime Switching, Garantie plancher, Absence d'Opportunité d'Arbitrage, Black & Scholes*

KEYWORDS: *Deflators, Regime Switching Process, Investment guarantees, No free Lunch, Black & Scholes*

ENCADREMENT : M. Charles DESCURE

CORRESPONDANT E.N.S.A.E. : M. Christian Robert

0.1 Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'évaluer les engagements des compagnies d'assurance liés à l'offre de produits d'assurance vie comportant une garantie plancher en cas de décès. Cette dernière garantit au bénéficiaire, en cas de décès de l'assuré, un capital minimum, et ce quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au moment du décès. Le succès de ce type de produit et les fluctuations boursières des marchés nécessite donc l'élaboration de modèles d'évaluation et de gestion des risques adaptés; en effet seul l'assureur supporte le risque financier. Financièrement l'engagement de l'assureur peut être assimilé à une série d'options de vente européennes cachées détenues par l'assuré, ayant pour date d'exercice la mort de ce dernier ou la maturité du contrat.

La très répandue valorisation par la méthode de Black et Scholes d'une option n'est pas valable sur des options de longue maturité comme la garantie plancher. En effet ce modèle d'arbitrage repose sur des hypothèses assez strictes des marchés financiers et la volatilité du support action utilisée dans la formule est constante. Cela peut être admissible sur de courtes maturité mais non sur celles intégrées dans les contrats d'assurance vie.

Mary Hardy, dans son article intitulé "A Regime-Switching Model Of Long-Term Stock Returns", a appliqué la modélisation en régime switching log-normal du rendement de certains indices boursiers. Il s'agit d'une manière assez simple d'adapter au modèle une volatilité stochastique est de considérer que la volatilité prend une de K valeurs discrètes, allant de l'une à l'autre de manière aléatoire. Cette approche permet de conserver la simplicité de la modélisation en log-normal indépendant tout en permettant de représenter les mouvements extrêmes de la valeur des indices pour donner un prix d'option plus cohérent. En ce qui concerne nos applications numériques du modèle elles sont en majeure partie issues du fichier excel établi par l'auteur et disponible sur le site internet de la Society of Actuaries. Nous y avons intégré notre propre programme d'évaluation d'une option européenne en Regime Switching d'après le modèle de Bollen (qui est une formule de Black Scholes modifiée).

Outre ces méthodes de modélisation en probabilité risque neutre, il est aussi intéressant d'utiliser une modélisation de l'univers financier réel (modélisation dite actuarielle) pour représenter ce type de passif qui permette de quantifier de potentiels écarts par rapport aux approches classique par couverture précédentes. Il faut donc développer un modèle économétrique valide afin d'estimer les différents paramètres sélectionnés puis de modéliser l'engagement de l'assureur à travers des simulations Monte Carlo.

La méthode des déflateurs stochastiques produit des valorisations encore plus consistantes avec le marché car elle intègre les principales variables économiques (inflation, taux de change, prix des actions, dividende...) ainsi que leurs interactions.

Le modèle de M. Smith utilisant ces déflateurs stochastiques a été implémenté dans son application nommée Timbuk1. Notre but a été dans un premier temps de répliquer ce modèle (calibrations, simulations de ce programme) puis de comparer nos résultats avec ceux de Smith pour y appliquer la valorisation

de la garantie plancher en cas de décès.

Enfin, nous utilisons le même échantillon de données historiques pour comparer les résultats de ces 3 types de méthodes et tenter de donner des explications aux disparités.

0.2 Valorisation par la méthode en régime switching

Des études empiriques ont prouvé que les lois log-normales indépendantes (LNI) ne permettent pas de représenter certains mouvements extrêmes des cours ainsi que l'aspect stochastique de la volatilité.

Une manière assez simple d'adapter au modèle une volatilité stochastique est de considérer que la volatilité prend une de K valeurs discrètes, allant de l'une à l'autre de manière aléatoire. Cette approche permet de conserver la simplicité de la modélisation en LNI tout en permettant de représenter les mouvements extrêmes de la valeur de part du fonds. La modélisation en « regime switching » (RSLN) permet au sous-jacent de commuter entre K régimes de manière aléatoire ; chaque régime est caractérisé par des paramètres de modélisations différents et le processus décrivant la trajectoire du sous-jacent est considéré comme étant un processus de Markov (cela signifie que la probabilité de changement de régime dépend seulement du régime actuel et non de l'historique du processus).

L'idée sous-jacente de ce type de modélisation en « regime switching » est que le marché commute à chaque période entre une volatilité relative basse assez stable et un régime de volatilité plus élevée mais moins stable. Des périodes de volatilité élevée peuvent être dues par exemple à des politiques monétaires de court terme ou des incertitudes économiques.

Mary Hardy a appliqué ce modèle à seulement $K=2$ régimes après s'être assuré que le test du ratio de vraisemblance, utilisé pour déterminer lequel des modèles à « regime switching » et du LNI convient le mieux à la modélisation du processus (le test est présenté dans Klugman, Panjer et Wilmott 1998), puisse le justifier. Le test permet de comparer deux mêmes types de modélisation imbriquées mais avec un nombre de paramètres différents ($k_2 > k_1$).

La validation faite, il faut ensuite estimer les 6 paramètres de la modélisation par des méthodes de maximum de vraisemblance récursives. Une fois ces derniers déterminés il suffit ensuite d'évaluer les prix d'options de vente européenne en régime switching d'après la méthode de Bollen.

Comme la méthode de Black Scholes, cette méthode présente un inconvénient, comme tous les modèles d'options avec approche par arbitrage, elle est critiquable sur le long terme.

0.3 Valorisation par la méthode des déflateurs stochastiques

Nous allons définir dans cette partie une notion clé de notre étude : la Fair Value. C'est une notion comptable et financière réclamant l'évaluation à leur juste valeur à un instant donné des biens possédés par une entreprise. Cette

problématique de valeur est notamment soulevée par IAS qui demande la juste valeur pour tous les instruments financiers.

Des divergences apparaissent toutefois sur la pertinence d'évaluer à la valeur du marché des biens souvent non négociables et en dehors de toute opération réelle. Cette notion s'oppose à celle employée en comptabilité française et basée sur les coûts d'acquisition et la nécessité de prudence.

Notre objectif est de valoriser un échéancier de cash flows futurs générés dans le cadre d'un modèle stochastique de projections financières. Plusieurs méthodes sont disponibles. Nous appliquerons celle des déflateurs stochastiques.

Un déflateur est une fonction d'actualisation stochastique qui traduit à la fois le risque à chaque scénario et l'actualisation temporelle. La valeur d'une chronique de cash flows stochastiques, généralise celle utilisée pour des cash flows déterministes. Ainsi en simulant un nombre de scénarios suffisant, l'espérance des déflateurs est équivalente au facteur d'actualisation de la méthode traditionnelle.

Cette approche comporte plusieurs avantages : le déflateur dépend seulement du modèle et non des cash-flows évalués. Cela rend la valorisation des cash-flows stochastiques considérablement simple. Aussi, la technique des déflateurs produit des valorisations de marché consistantes, et reflète que le fait de changer une stratégie d'investissement institutionnelle ne peut pas créer ou détruire la valeur économique. Cependant, changer de stratégie pourrait changer la distribution des cash-flows futurs transférant ainsi la valeur entre les actionnaires. La méthode des déflateurs permet aux actuaires d'analyser ces transferts. Enfin, la méthode des déflateurs est utile lorsque l'on considère la structure du capital d'une compagnie. En effet, changer la structure du capital d'une compagnie ne change pas la valeur de marché de cette compagnie. La structure du capital peut cependant affecter la valeur de marché au travers d'effets secondaires tels que la taxe ainsi que l'impact du risque de crédit. La méthode des déflateurs permet aux actuaires de se concentrer sur ces coûts ce que peut influencer la valeur de marché de la compagnie.

0.4 Présentation de Timbuk1

Une des principales caractéristiques de ce modèle est la production d'un déflateur d'état consistant avec le marché.

Le déflateur simulé pour la date a est noté D_a et le prix à la date a d'un zéro coupon payant 1€ à la date b est noté P_{ab} . Ces paramètres définissent la structure par terme du modèle qui est ici en temps discret (a et b sont des entiers). B_a est un mouvement brownien.

Les déflateurs et la structure par terme des taux d'intérêt doivent satisfaire l'équation suivante :

$$D_a(P_{ab} - P_{a:b+1}) = \frac{\text{const}}{(1+f)^b} \times \exp[\sigma \cdot (C_a - C_{\min\{a,b-\tau\}}) + \lambda \cdot B_a + \min\{b - a, \tau\} \sigma \cdot B_a - \frac{1}{2}(\lambda + \sigma\tau)^2 a + \frac{\max\{0, \tau - b + a\}(\tau + 1 - b + a)}{12} [6\sigma \cdot \lambda + (4\tau + 2b - 2a - 1)\sigma^2]$$

Ainsi définie cette équation est vérifiée par 3 indexes (gauges en anglais) qui

influent sur les cashs flow. Par exemple, l'inflation, le taux de change influenceront sur la valeur du portefeuille d'assurance que nous chercherons à modéliser. Pour chaque indice, choisis ici comme étant le Cash (noté C), les actions (noté E) et l'inflation (notée I) il faut donc calibrer le modèle en calculant les paramètres $\lambda_c, \lambda_E, \lambda_I, \sigma_c, \sigma_E, \sigma_I$. f est le taux d'intérêt forward long.

Formulation en adéquation avec l'absence d'opportunité d'arbitrage non justifiée mathématiquement par l'auteur.

En utilisant le fait que $P_{aa} = 1$, on peut calculer la structure par terme et les déflateurs à partir des équations suivantes :

$$D_a = \sum_{u=a}^{\infty} D_u (P_{ab} - P_{a:b+1})$$

$$P_{ab} = \frac{\sum_{u=b}^{\infty} D_u (P_{ab} - P_{a:b+1})}{\sum_{u=a}^{\infty} D_u (P_{ab} - P_{a:b+1})}$$

Un des objectifs de notre étude était de répliquer le modèle de M. Smith : Timbuk1. Nous n'avons pas cherché à redémontrer la formule sur laquelle est basé le modèle mais plutôt étudié les caractéristiques et le comportement de cette dernière. Nous avons calibré les paramètres du modèle de telle sorte à retrouver les mêmes résultats du moins, pour chaque maturité, les écarts type et les intervalles de valeurs des déflateurs et des jauges doivent correspondre à ceux produit par Timbuk1. De plus, afin de valider notre modèle, nous avons non seulement simulé les zéros-coupon spot et vérifié qu'ils correspondent bien à ceux utilisés en entrée du modèle mais encore nous avons calibré notre modèle sur des données de marchés UK antérieures à 2001. Avec un paramétrage identique, nous retrouvons les mêmes valeurs des déflateurs et des indices que ceux de Timbuk1.

0.5 Conclusion

Pour conclure cette note, nous pouvons dire que l'approche par la méthode des déflateurs stochastiques est très intéressante dans la mesure où elle combine les pricing de Black-Scholes avec la tradition de projections stochastiques réalistes. La calibration est plus simple puisque les paramètres long terme incertains sont moins importants.

Afin de déterminer une fair value, les actuaires ont besoin d'un outil qui puisse calculer la valeur de marché de produits complexes qui ne sont pas directement traités sur le marché. La méthode des déflateurs répond à ce besoin.

De plus, les modèles conventionnels économétriques sont basés sur des lois normales ou gaussiennes. Cependant, il est manifeste que les lois de distribution des principales variables économiques sont loin d'être gaussiennes. En particulier, des mouvements soudains et assez significatifs (sauts) des marchés arrivent assez fréquemment et cela les rend incompatibles avec les distributions gaussiennes. Il est donc important pour les managers de posséder un modèle économique qui puisse refléter les distributions en queues épaisses des rendements observés sur les marchés. Le modèle de M. Smith utilise une famille de lois de

distributions à cinq paramètres afin de fournir une représentation la plus fidèle que possible du passé économique en utilisant des lois gaussiennes.

Ce modèle a considéré trois grandes classes d'actifs qu'il utilise comme numéraires, il y'en a encore beaucoup d'autres que les investisseurs peuvent choisir comme l'immobilier, les obligations de l'entreprise, etc. Dans certains cas, étendre ce modèle à d'autres actifs est assez simple ; Il suffira alors d'augmenter la taille des matrices du système. Cela pourrait en effet expliquer son choix arbitraire des dimensions des paramètres utilisés (λ, σ) . En effet, ce choix lui permet d'incorporer d'autres numéraires dans son modèle. Nous avons montré avec ce mémoire que la formule de M. Smith pour les déflateurs stochastiques présentait des caractéristiques intéressantes et consistantes avec le marché. Un projet futur possible serait de tenter de la démontrer.

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff CEDEX, FRANCE



Cover Note

STOCHASTIC DEFLATORS

Mohamed SIJLAMASSI
Yoram OUAKNINE

KEYWORDS: *Deflators, Regime Switching Process, Investment guarantees, No free Lunch, Black & Scholes*

SUPERVISOR : M. Charles DESCURE

E.N.S.A.E. SUPERVISOR : M. Christian Robert

0.1 Introduction

The aim of the study is to investigate the value of an investment guarantee on segregated funds. The Guaranteed Minimum Death Benefit guarantees the policyholder a specific monetary sum upon death during the term of the contract. Many benefits under equity-linked insurance contracts can be regarded as put options. The Black-Scholes model fails to capture more extreme price movements and stochastic variability in the volatility parameter behaviour of the stock return and doesn't allow long term dynamics to be modelled.

Mary Hardy introduced and applied a « Lognormal Regime switching model » which is one of the simplest way to introduce stochastic volatility into investment guarantee valuation. In this model, the volatility parameter takes one of K discrete values, switching between these values randomly. We used the model developed by Mary Hardy in her article "A Regime-Switching Model Of Long-Term Stock Returns" and her worksheet pricer available in the Society of Actuaries website . Finally we added a regime switching option pricer to give some results of the guarantee valuation (using the Bollen model). The application of the latter option pricing methods is often not appropriate because the cash flows to be valued do not have the form of traded option.

Stochastic asset models produce economic simulations of the future based on well accepted financial theory while also respecting the statistical features observed in the market. The

deflator approach combines the pricing insight of Black-Scholes and others with the tradition of realistic stochastic projections, which many actuaries already employ for financial management. The goal of the study is to value an investment guarantee using both the Lognormal Regime Switching model and the stochastic deflators model. The Smith

Model we replicated allows the production of an economically consistent state price deflators. In fact the model takes into account the main economic . Historical data comes from the English market and the same data are used to allow the comparison of all of the results of models.

0.2 The regime switching model of returns

Empirical studies indicate that the independent lognormal (ILN) model fails to capture more extreme price movements and stochastic variability in the volatility parameter.

A simple way to incorporate stochastic volatility is to assume that volatility takes one of K discrete values, switching between these values randomly. Regime switching allows the stock price process to switch between K regimes randomly; each regime is characterized by different model parameters, and the process describing which regime the price process is in at any time is supposed to be Markov.

The rationale behind the regime switching framework is that the market may switch from time to time between a stable low volatility state and a more unstable high-volatility regime. Period of high volatility may arise, for example,

because of short-term political or economic uncertainty .A two regime switching is used, that is, $K=2$, which simplifies the model.

We must apply a statistical test to verify if the regime switching models fits better the data than the ILN; this test is the likelihood ratio test.

After validation of the regime switching model we must calculate the 6 parameters to apply this to a valuation of an european option in regime switching as used by Bollen.

0.3 Valuation using stochastic deflator

Let's introduce a keyword of our study : the Fair Value. the fair value is a valuation, in accordance with standard methodology, that is reasonable to all parties involved in a transaction in light of all pre-existing conditions and circumstances.

Our objective is to value a series of future cash flows generated by a stochastic model. Many methods are available to do so. We will apply the stochastic deflators method.

A deflator is simply a risk adjusted discount factor which is time and economic scenario specific and which can be applied to asset and liability cash flows to calculate market, fair or tradable values. A state price security is defined as a contract that agrees to pay \$1 at a given future time if a particular state occurs. A deflator is created by taking a given state price and dividing by the probability of the state occurring at a given time. The deflator allows the model user to put a market value on a product simply by knowing what the cashflows paid out by the model in each simulation.

This method has many advantages : the deflator depends only on the model and not on the cash flows valued. this makes the cash flows valuation very easy. Moreover, the deflator technique produces results that are consistent with market valuation, changing an institutional investment strategy cannot create or destroy economic value (the price at which an asset will trade) of an institution, not directly at the least. However, changing the investment strategy may change the distribution of future cash flows, thereby transferring value between the stakeholders. The deflator technique enables actuaries to analyse these transfers more specifically. The deflator technique produces market consistent valuation in the sense that changing the capital structure (raising capital by debt or equity) of a firm cannot to first order change the market value of the firm. The capital structure can however affect the market value through second order effects.

0.4 The Smith Model

The Smith Model is a sophisticated deflator enabled stochastic asset model. It produces economic simulations of the future based on well accepted financial theory while also respecting the statistical features observed in the market. TSM can be calibrated to the market prices and yield on any date.

The creation of such an economic scenario generator was a significant achievement but TSM's main feature is the production of an economically consistent

state price deflator.

The simulation dependent state price deflator at time a is denoted by D_a . The price at time a of a zero coupon bond paying 1 at time b is denoted by P_{ab} . These parameters define the term structure of the model.

We denote by B_a a 5-dimensional Brownian motion. We define C_a to be an accumulation of historic values of B_a .

We assume that deflators and term structures satisfy the following equations (for $b \geq a \geq 0$):

$$D_a(P_{ab} - P_{a:b+1}) = \frac{const}{(1+f)^b} \times \exp[\sigma.(C_a - C_{\min\{a,b-\tau\}}) + \lambda.B_a + \min\{b - a, \tau\}\sigma.B_a - \frac{1}{2}(\lambda + \sigma\tau)^2 a + \frac{\max\{0, \tau - b + a\}(\tau + 1 - b + a)}{12} [6\sigma.\lambda + (4\tau + 2b - 2a - 1)\sigma^2]]$$

Using the fact that $P_{aa}=1$, we can recover deflators and term structures from :

$$D_a = \sum_{u=a}^{\infty} D_u(P_{au} - P_{a:u+1})$$

$$P_{ab} = \frac{\sum_{u=b}^{\infty} D_u(P_{au} - P_{a:u+1})}{\sum_{u=a}^{\infty} D_u(P_{au} - P_{a:u+1})}$$

A calibration of the the model's parameters is necessary. We didn't try to demonstrate the formula but rather to study its features and behaviour. We succeeded in replying the model. We found the same range of results for indices and deflators compared to The Smith Model.

0.5 Conclusion

The main goal of the study was to value an investment guarantee using three different methods : the black & Scholes formula, the regime switching model and finally the stochastic deflator model. The calculation of fair values in pensions and insurance is a pressing problem, both from a theoretical and implementation perspective. We found that the application of traditional option pricing formulas is often not appropriate, because the cash flows to be valued do not have the form of traded options. Moreover, these methods don't give satisfactory results over a long term period. The deflator approach combines the pricing insights of Black, Scholes and others with the tradition of realistic stochastic projections, which many actuaries already employ for financial management.

Most models are based on gaussian distributions. However, it's been proven that the main economic variables distributions aren't gaussian. It's though important that manager own an economic model able to reffect fat tail distributions observed on the market. The Smith Model uses a family of five dimensional law distribution parameters which fits the best to the past using gaussians distributions (easy to handle)

Possible model enhancements would be to demonstrate the formula on which the model is based.

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff cedex, France

Mémoire d'Actuariat - Promotion 2004

VALORISATION PAR LES DEFLATEURS STOCHASTIQUES

Mohamed SIJLAMASSI
Yoram OUKNINE

MOTS-CLÉS : *Déflateur, Garantie plancher, Absence d'Opportunité
d'Arbitrage, Black & Scholes*

Résumé

Nous étudions dans ce mémoire différentes méthodes pour valoriser une garantie plancher en cas décès en se basant sur des données de marché historiques. L'engagement de l'assureur pour ce type de produits correspond à une série d'options financières de vente détenues par l'assuré pondérées par les probabilités de mortalité. La méthode habituelle de Black-Scholes pour valoriser des options ne perçoit pas le comportement extrême du rendement du sous-jacent et ne permet pas de calculer un prix cohérent sur du long-terme ; les modèles lognormaux en régime switching sont un moyen très simple d'introduire une volatilité stochastique au sein de la valorisation d'une option. Cependant, l'application de ces méthodes est souvent inappropriée du fait que les cash flow à valoriser n'ont pas la même forme que les options traitées sur le marché. L'approche par la méthode des déflateurs combine les pricing de Black-Scholes avec la tradition de projections stochastiques réalistes que nombre d'actuaire emploient pour le management financier. L'objectif de ce mémoire est d'évaluer une garantie plancher par la méthode en régime switching puis par la méthode des déflateurs stochastiques.

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique
3, avenue Pierre Larousse - 92245 Malakoff cedex, France

Actuarial Thesis - 2004 PROMO
STOCHASTIC
DEFLATORS MODEL
Mohamed SIJLAMASSI
Yoram OUAKNINE

KEYWORDS: *Deflators, Regime Switching Process, Investment
garanties, Arbitrage, Black & Scholes*

Abstract

Stochastic asset models produce economic simulations of the future based on well accepted financial theory while also respecting the statistical features observed in the market. Using market historical data, we investigate the value of an investment guarantee on segregated funds. Many benefits under equity-linked insurance contracts can be regarded as put options. The Black-Scholes formula doesn't accurately capture the more extreme observed behaviour of the stock return and doesn't allow long term dynamics to be modelled. Lognormal Regime switching models are one of the simplest way to introduce stochastic volatility into the option valuation. However, the application of the latter option pricing methods is often not appropriate because the cash flows to be valued do not have the form of traded option. The deflator approach combines the pricing insight of Black-Scholes and others with the tradition of realistic stochastic projections, which many actuaries already employ for financial management. The goal of the study is to value an investment guarantee using both the Lognormal Regime switching model and the stochastic deflator model. The Smith Model we replied allows the production of an economically consistent state price deflator.

Remerciements

Nous tenons à remercier M. Charles Descure, directeur de l'actif/passif de Generali France Holding pour son aide technique précieuse et sa disponibilité. Nous tenons aussi à remercier M. Christian Robert, notre correspondant ENSAE pour son encadrement et ses commentaires constructifs qui nous ont permis de mener à bien notre étude.

Table des matières

I	Introduction	9
II	Garantie Plancher	11
1	Historique des produits d'assurance vie à support actions avec garantie plancher	11
2	Description des risques	12
2.1	Caractéristiques des produits	12
2.1.1	Niveau de la garantie	12
2.1.2	Durée jusqu'à l'échéance ou au décès	12
2.1.3	Prestations de décès vs garantie à l'échéance	13
2.1.4	Transferts entre fonds (arbitrages)	13
2.2	Hypothèses à l'égard du passif	13
2.2.1	Comportement des titulaires de polices	13
2.2.2	Diversification du portefeuille	14
2.3	Un nouvel enjeu pour les gestionnaires de risques des compagnies d'assurance	15
3	Les options et les contrats d'assurance vie	18
3.1	Applications numériques	20
4	Méthodes de provisionnement pour la garantie plancher	23
4.1	La réassurance ou couverture sur les marchés	23
4.2	La couverture dynamique	23
4.3	L'approche actuarielle	24
III	La modélisation en « regime switching » log-normale du rendement du sous-jacent.	26

12 Déflateur	42
12.1 Définition des Actifs d'Etat	42
12.1.1 L'exemple du modèle mono-périodique discret à deux états	42
12.1.2 Modèles multi-périodiques et passage en temps continu	45
12.2 Les Déflateurs	46
12.2.1 Les déflateurs du modèle de Black & Scholes	47
12.2.2 Equation du déflateur	47
12.2.3 Comparaison entre valorisation risque neutre et déflateur	49
V LE MODELE : TIMBUK	50
13 Le modèle	50
14 Travail réalisé	53
15 La calibration de Timbuk1	54
15.1 La définition des jauges	54
15.2 La modélisation des indicateurs dans Timbuk1	54
15.3 La calibration : travaux préliminaires	56
15.4 Les approximations lognormales	56
15.5 Calibration des jauges	58
15.5.1 la variance des variations de taux (Par yields) :	58
15.5.2 la variance des variations de prix :	58
15.5.3 la variance de la croissance réelle des dividendes (Real Dividend Growth)	58
15.5.4 les corrélations	59
15.5.5 les taux long terme	59
15.5.6 Les volatilités	60

5	Introduction	26
6	L'historique	28
7	Le modèle	28
8	Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance	29
8.1	Le calcul de la fonction de vraisemblance	29
8.2	Résultats de l'estimation des paramètres par maximisation de la vraisemblance	31
9	Le critère de sélection	32
9.1	Le test du ratio de vraisemblance	32
9.2	Résultats des tests	32
9.3	Utilisation de la modélisation en « régime switching »	33
9.3.1	La loi de distribution du nombre total de périodes du- rant lesquelles le processus a séjourné en régime 1	33
9.3.2	La fonction de distribution de S_n	33
9.4	L'évaluation de l'option de vente avec processus du rendement de fonds en « regime switching » log-normal.	34
9.5	Applications numériques	36
IV	Fair Value	38
10	Fair Value	38
10.1	L'IASB	38
10.2	Caractéristiques de la Fair Value	39
11	Valorisation risque-neutre et Absence d'opportunité d'arbi- trage (AOA)	40

VI Applications du modèle à une garantie plancher	64
16 Valorisation de cash flow par les déflateurs	64
16.1 L'algorithme	64
16.2 Validation de l'Algorithme	64
16.3 Relation Risque / Rendement	66
16.4 Théorie du Pricing d'Options	66
17 Applications numériques	67
18 Comparaison des méthodes de valorisation	68
19 Conclusion	70
20 ANNEXES	73
20.1 Annexe 1 : La méthode de Newton Raphson pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires.	73
20.2 Annexe 2 : Décomposition en valeurs singulières	76
20.3 Annexe 3 : Echantillon des prix des obligations zéros-coupons utilisé	78
20.4 Annexe 4 : Résultat de la simulation de Timbuk1(Rendement de l'indice FTSE 100)	79
20.5 Annexe 5 : Résultat de la simulation de Timbuk (Deflateur Cash)	80
20.6 Annexe 6 : Résultat de la simulation de Timbuk (Déflateur Action)	81
21 Références	82

Première partie

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'évaluation des engagements des compagnies d'assurance liés à l'offre de produits d'assurance vie comportant une garantie plancher en cas de décès. Cette dernière garantit au bénéficiaire, en cas de décès de l'assuré, un capital minimum et ce quelle que soit la valeur des unités de compte détenues au moment du décès. Financièrement elle correspond donc à une série d'options de vente européennes cachées détenues par l'assuré, ayant pour date d'exercice la mort de ce dernier ou la maturité du contrat.

Deux grandes approches sont répandues au sein des compagnies d'assurance afin d'évaluer les engagements de ce type de produits.

La première est une méthode essentiellement passive dite « méthode actuarielle » qui consiste à modéliser le passif de la compagnie avec un modèle stochastique cohérent puis utiliser sa loi de distribution pour déterminer la provision à détenir pour couvrir les pertes futures.

La deuxième approche est dite de couverture dynamique qui utilise la modélisation de Black-Scholes afin de répliquer l'option de vente. Mais cela n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. En effet, cette modélisation a pour hypothèse que :

- Le support action des contrats suit un mouvement brownien géométrique
- Il n'y a pas de coûts de transactions
- Le portefeuille de réplication doit être modifié de manière continue au cours du temps.

En pratique, bien sûr, ces hypothèses sont fausses et si cela n'a pas trop de conséquences sur les valorisations d'options court terme échangeables sur les marchés financiers, elles rendent incohérentes les valorisations d'options cachées des garanties plancher. Il est donc extrêmement important d'utiliser une modélisation de l'univers financier réel pour représenter ce passif qui permette de quantifier de potentiels écarts par rapport à l'approche classique

de couverture.

Il faut donc développer un modèle économétrique valide afin d'estimer les différents paramètres sélectionnés puis de modéliser l'engagement de l'assureur à travers des simulations Monte Carlo.

Le modèle en régime switching lognormale de Mary Hardy permet de donner un caractère stochastique à la volatilité sur du long terme et d'avoir ainsi des résultats plus satisfaisants par rapport à un modèle lognormale.

Par ailleurs, la méthode des déflateurs stochastiques produit des valorisations sous des probabilités réelles encore plus consistantes avec le marché car elle intègre les principales variables économiques (inflation, taux de change, prix des actions, dividende...) ainsi que leurs interactions.

Nous allons alors introduire une notion clé de notre étude : la Fair Value qui est par définition le montant pour lequel un actif peut être échangé entre deux parties non informées et consentantes. La méthode des déflateurs stochastiques implémentées dans l'application Timbuk1 de M. Smith (que nous avons répliqué) permet de calculer cette valeur.

L'objet de notre mémoire est non pas d'étudier en profondeur une garantie plancher en cas de décès, mais plutôt de la valoriser en utilisant plusieurs approches : d'abord par la méthode de calcul du prix des options de Black Scholes, ensuite par un modèle régime switching lognormal proposé par Mary Hardy et enfin en utilisant les déflateurs stochastiques développés dans le modèle de M. Smith.

Nous nous placerons dans le cadre d'un versement d'une prime unique pour un certain nombre d'assuré âgé entre 45 et 65 ans. Nous ne prendrons pas en compte l'engagement de l'assuré qui correspond au versement des frais de chargement probabilisés qui tendent à diminuer le rendement des fonds en unité de compte (il faut dans ce cas utiliser le prix de la formule Black Scholes avec dividendes correspondant aux frais de chargement) tout en diminuant l'engagement global de l'assureur.

Deuxième partie

Garantie Plancher

1 Historique des produits d'assurance vie à support actions avec garantie plancher

L'objectif de l'assurance vie est de fournir la sécurité financière aux assurés et à leurs familles. Traditionnellement, cette sécurité a été fournie par le paiement d'un capital versé en cas de vie ou de décès de l'assuré. Le montant assuré est fixe et garanti. L'assuré paie une ou plusieurs primes pendant la durée de vie du contrat pour avoir droit à la somme assurée. Les techniques actuarielles traditionnelles se sont concentrées sur l'évaluation et la gestion de deux risques : la mortalité et la morbidité. Les investissements faits par la compagnie d'assurance n'ont jamais été considérés par les gestionnaires du risque comme une source majeure de risque. C'était (et c'est toujours) une hypothèse raisonnable, car les prestations garanties peuvent être largement adossées ou immunisées avec des instruments financiers à taux fixes.

Mais le marché de l'assurance dans le monde change. Le public a été mieux informé des nouvelles opportunités d'investissement en dehors du secteur de l'assurance. Les assurés veulent à leur tour apprécier les avantages de l'investissement à support actions en concordance avec les principes de l'assurance vie, et les assureurs dans le monde entier ont développé de nouveaux contrats de ce type pour relever ce défi. Bien qu'il existait quelques types de contrats qui transféraient à l'assuré la majeure partie du risque financier et impliquaient peu ou pas de risque pour l'assureur, il était normal que les assureurs commencent à incorporer des garanties de placement dans ces nouveaux contrats en conformité à la philosophie traditionnelle de l'assurance vie.

Au Royaume-Uni, l'assurance vie à support action devint très populaire de la fin des années 60 jusqu'à la fin des années 70, en combinant des pres-

tations minimums garanties en cas de décès ou à maturité du contrat avec investissement sur fonds actions. Ce type de contrats s'est aussi répandu dans des pays tels que l'Australie ou l'Afrique du Sud, où l'influence des compagnies d'assurance britanniques était importante. Aux Etats-Unis, des contrats de rente variable car indexés à un support actions offrirent différentes formes de garanties. Au Canada, ce genre de produit devint très populaire vers la fin des années 90, contenant souvent des garanties de placement en cas de décès ou à maturité. L'Allemagne a récemment introduit sur le marché des contrats d'assurance mixte sur support action. Dans tous ces contrats sont contenues des garanties de placement qui dépendent des performances de certains index boursiers ou fonds de placement. Ce genre de produits est la source de certains des défis les plus importants de gestion des risques de l'assurance moderne. La nature du risque pour l'assureur tend à être de basse fréquence car il faudrait que la performance des actions soit médiocre pour que la garantie soit exercée et de haute sévérité du fait que le potentiel de perte soit assez important.

2 Description des risques

2.1 Caractéristiques des produits

2.1.1 Niveau de la garantie

Traditionnellement les sociétés d'assurance ont offert, à l'échéance ou au décès, une garantie égale à 75% du montant initial déposé. La plupart des garanties s'établissent maintenant à 100% du montant initial déposé, toujours à l'échéance du contrat ou au décès du titulaire. Le coût de cette garantie est bien entendu beaucoup plus élevé que celui de la garantie à 75%.

2.1.2 Durée jusqu'à l'échéance ou au décès

La durée jusqu'à l'échéance ou au décès est inversement liée au coût prévu de la garantie (il s'agit d'une relation non linéaire puisque le raccourcisse-

ment de la durée augmente les coûts d'une façon plus que proportionnelle). Par conséquent, certaines compagnies n'offriront pas aux titulaires de polices la possibilité d'investir dans des fonds distincts au-delà d'un certain âge. D'autres pourront faire exception dans le cas de fonds à faible risque.

2.1.3 Prestations de décès vs garantie à l'échéance

Certaines sociétés offrent une garantie au décès différente de la garantie à l'échéance. En général, la garantie à l'échéance coûte plus cher sauf aux âges plus avancés. La garantie à l'échéance peut entraîner une concentration des risques si les dates d'échéance sont regroupées ou concentrées à un même moment dans le temps.

2.1.4 Transferts entre fonds (arbitrages)

La plupart des sociétés offrent à leurs titulaires le droit de transférer leurs placements entre les divers fonds offerts. De tels transferts peuvent être effectués sans frais ou presque. Certaines compagnies autorisent un nombre déterminé de transferts par année sans imposer de frais. Le comportement des titulaires à l'égard des transferts de fonds influera sur le risque que doit assumer l'assureur. L'assureur court un risque accru si les titulaires investissent au départ dans des fonds qui comportent un couple risque/rendement plus élevé de perte initiale puis transfèrent leur argent (sans rétablir la garantie à l'échéance) dans un fonds à couple risque/rendement moins élevé qui n'est pas susceptible de donner le rendement prévu nécessaire au recouvrement de la perte initiale.

2.2 Hypothèses à l'égard du passif

2.2.1 Comportement des titulaires de polices

Pour déterminer le coût prévu et effectuer des simulations stochastiques de garanties à l'échéance ou de mortalité, le modèle doit comprendre les paramètres suivants : la persistance, la composition des fonds et les transferts

de fonds. La question de base à se poser est la suivante : « comment les titulaires se comporteront-ils ? »

Toute tentative visant à établir un modèle qui ne reposerait pas intégralement sur un raisonnement logique doit être fondée sur un modèle perfectionné du passif, analysant la portée actuelle des caractéristiques des produits. Le manque d'études sur les fonds garantis entraîne une assez forte subjectivité dans toute modélisation du comportement. Il s'agit là d'un risque qui sera difficile à évaluer avec suffisamment de précision.

2.2.2 Diversification du portefeuille

Dans quelle mesure le principe de la mise en commun, propre à l'assurance, se répercute-t-il sur la diversification des risques ?

Mortalité Un taux de décès plus élevé que prévu fera en sorte que certains risques ne seront pas provisionnés. Le taux de mortalité peut donc constituer un risque. Cependant, une mortalité excédentaire diminue le volume des garanties à l'échéance. Les prestations de décès exposent les compagnies à un risque lié au taux de mortalité. Toutefois, les assureurs sont habitués à gérer pareil risque. Un portefeuille comptant un volume suffisamment élevé de ce type de contrats donnera lieu à des résultats très prévisibles au niveau de la mortalité ainsi qu'à une diminution du risque. L'absence d'autosélection, qui est habituellement présente en assurance-vie, rend encore plus prévisible le taux de mortalité. Cependant, il est possible que la répartition présumée selon l'âge fasse l'objet d'une mauvaise estimation et la tarification des garanties des contrats en unité de compte peut s'avérer particulièrement sensible à la répartition selon l'âge.

Persistance Les déchéances varieront en fonction du scénario économique. Une persistance rationnelle est directement liée au montant « dans la monnaie ». Le taux de persistance est susceptible d'augmenter à mesure que la date d'échéance approche ou que l'état de santé du titulaire se détériore.

Cependant, des déchéances « irrationnelles » surviendront dans d'autres circonstances, par exemple, si le titulaire de police a des besoins financiers particuliers.

Composition des fonds Dans le cas de garanties basées sur un « ensemble de fonds » et selon la théorie de la diversification, les fonds multiples non corrélés diminuent le risque que la valeur totale du fonds de la police soit inférieure au montant de la garantie à l'échéance ou au décès. Même si la valeur d'un ou de plusieurs fonds est inférieure à celle de la garantie, la plus value des autres fonds viendra compenser les pertes. Il n'y aurait aucune diversification naturelle d'un dépôt unique dans un seul fonds et il serait difficile d'appliquer le principe de mise en commun propre à l'assurance. Plus le nombre de fonds offerts est élevé, plus grand sera le degré de diversification qui pourra être atteint. Les compagnies dont les programmes favorisent la diversification ou offrent des caractéristiques qui rééquilibrent les fonds détenus au nom du titulaire afficheront sans doute un coût estimatif de la garantie plancher moins élevé. Celles qui offrent un ensemble de fonds plus risqués afficheront vraisemblablement un coût estimatif de garantie plus élevé étant donné que les titulaires ne seront pas en mesure de transférer leur argent dans d'autres fonds.

Spectre des périodes d'échéance La diversité des dates d'échéance devrait réduire les sinistres prévus. Il n'y aurait aucune diversification naturelle d'un dépôt effectué dans un seul fonds. Ici aussi, il serait difficile d'appliquer le principe de mise en commun propre à l'assurance.

2.3 Un nouvel enjeu pour les gestionnaires de risques des compagnies d'assurance

L'évaluation et la gestion du risque financier sont très différentes de celles du monde de l'assurance.

La gestion du risque en assurance se fonde principalement sur la diversification ou la mutualisation. Avec plusieurs milliers de polices qui sont indépendantes, il paraît clair qu'en utilisant le théorème central limite on aura peu d'incertitude quant au nombre total de sinistres. Les techniques actuarielles traditionnelles de l'assurance utilisées pour évaluer et provisionner sont déterministes car l'incertitude y est très faible.

Ces techniques utilisent de très bonnes estimations (best values) pour les taux d'intérêt, les montants des sinistres et leur nombre. Une certaine prise en compte de l'incertitude et de variation aléatoire peut être faite implicitement par un réajustement de ces « best values ». Par exemple, on pourrait utiliser un taux d'intérêt de 100 à 200 points de base inférieur au taux « best estimate ». Utiliser ce taux pourra surévaluer le passif de la compagnie d'assurance tout en sous-évaluant les rendements de l'actif.

Les garanties de capital exigent une approche différente. Il y a en général très peu de diversification possible du risque. Lorsque les index de marché boursiers (et ou les fonds) sont à la baisse, cela affecte beaucoup de polices en même temps. On ne pourra plus appliquer le théorème central limite. Ce type de risque est qualifié de systémique et non diversifiable.

L'exemple suivant permet de mieux appréhender le problème :

- Une compagnie d'assurance émet 10 000 des polices d'assurance vie, chacune ayant une probabilité de sinistre de 0,05 durant la durée de vie du contrat. Le nombre espéré de sinistres est de 500 et l'écart type de 22. La probabilité que 600 sinistres surgissent est inférieure à 10 . Ainsi si l'assureur veut être très prudent pour ne pas sous-évaluer ses tarifs et ses provisions il devra considérer plutôt un taux de mortalité de 6% pour chaque contrat de manière à neutraliser le risque de mortalité.
- Une compagnie vend 10 000 contrats d'assurance mixte à support action. Le capital versé est relié à un sous-jacent (indice ou fonds). Si à la fin de durée de vie du contrat la valeur de l'indice est supérieure à la valeur initiale, il n'y a pas de capital supplémentaire à payer. Dans le cas contraire, l'assureur doit payer l'écart. La probabilité que la va-

leur initiale du fonds ou de l'indexe soit à terme inférieure à sa valeur initiale est de 5%.

L'espérance du nombre total de sinistres sur ce type de contrats est donc la même que sur les contrats précédents soit 500. Cependant, la nature du risque est qu'il y a 5% de chances que tous les 10 000 contrats fassent subir en même temps des pertes à l'assureur, et 95% de chances qu'aucun n'en fasse subir. Il est impossible de gérer complètement le risque en ajoutant une marge à la probabilité de baisse de l'indice ou du fonds qui est de 5%.

Cet exemple simple illustre bien que pour ce type de risque l'espérance du nombre de sinistres (ou du montant) n'est pas utile. Nous pouvons aussi remarquer qu'il n'existe pas d'ajustement simple de cette espérance qui permet de contrôler le vrai risque. Les méthodes déterministes traditionnelles des actuaires ne sont donc pas adaptées même en ajoutant des marges aux estimations. Au lieu de cela, les actuaires doivent utiliser une méthode plus directe, une approche stochastique de l'évaluation du risque.

Les risques associés à plusieurs types de contrats d'assurance liés aux valeurs boursières sont indissociables des mouvements extrêmes des cours des actions. Ce qui signifie que l'on doit beaucoup s'intéresser à la queue de distribution de ces derniers. Les techniques déterministes traditionnelles ne tiennent pas compte du risque au niveau de la queue de distribution des rendements des titres (tail risk). Nous ne pouvons considérer seulement quelques scénarios de rendement considérés comme très vraisemblables pour modéliser ce type de passif.

Une évaluation subjective de la vraisemblance de quelques scénarios n'est pas assez scientifique pour être satisfaisante, et le passé est là pour montrer que des scénarios considérés auparavant comme peu probables se sont effectivement manifestés par la suite. Une méthodologie stochastique est essentielle pour comprendre ce genre de contrats et pour mettre en œuvre des stratégies de couverture.

3 Les options et les contrats d'assurance vie

Les prestations relatives aux contrats d'assurance vie peuvent être représentées financièrement par des options de vente (puts). Par exemple, l'assuré paie une prime unique de 1000€ avec une garantie sur capital de 100% il sera donc sûr à échéance de détenir au minimum une somme de $K=1000€$ et cela même si la valeur boursière de son portefeuille est inférieure à la prime initiale investie. L'assureur se doit donc de payer $(K - S_t)^+$, t étant la date d'échéance ou de décès, ce qui signifie qu'il a vendu un put aux assurés.

Black, Scholes (1973) et Merton ont montré qu'il est possible sous certaines hypothèses de construire un portefeuille qui contient une position longue (achat) sur le sous-jacent et une position courte sur un titre obligataire pour détenir le même payoff qu'avec une option d'achat. Ce portefeuille s'appelle le portefeuille de réplication. La théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que ce portefeuille doit avoir la même valeur étant donné qu'ils ont le même payoff à maturité. Ainsi la formule de Black & Scholes donne non seulement la valeur de l'option mais aussi une stratégie de couverture du risque pour un vendeur d'option c'est-à-dire détenir un portefeuille de réplication pour couvrir le payoff de l'option.

Une des caractéristiques particulière de ce portefeuille de réplication est qu'il doit être modifié au cours du temps, ainsi les proportions en actions et obligations varient et doivent être changées à intervalles réguliers.

Il existe tout de même des complications pour appliquer cette théorie des options aux contrats d'assurance vie à support actions. Le problème fondamental est que les options vendues aux assurés sont de très long terme. La maturité des options standard traitées sur les marchés est de quelques semaines et une option de maturité supérieure à 6 mois est considérée comme longue. En revanche, les options implicites contenues dans les contrats d'assurance vie ont une maturité entre 10 et 30 ans. Ainsi, adapter des méthodes d'évaluation de la finance sur une échelle de temps plus longue aux contrats d'assurance vie à support action est un défi pour les actuaires voulant gérer les risques des compagnies.

Nous déterminons la valeur d'un put à la date t en utilisant le principe

de l'actualisation sous la probabilité risqué neutre. Notons $[t, T]$ l'intervalle de temps sur lequel porte le contrat, σ^2 la variance, S_t le processus de prix du sous-jacent risqué et $\Phi(t)$ la fonction de distribution de la loi normale standard. Le payoff est $(K - S_t)^+$. Le prix Black-Scholes est :

$$BPS_t = E_Q[(K - S_t)^+]e^{-r(T-t)} = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1)$$

où

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (T-t)(r + \sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

3.1 Applications numériques

Dans la définition traditionnelle du provisionnement, l'engagement de l'assureur est égal une série d'options financières de vente détenues par l'assuré pondérées par les probabilités de mortalité.

Le strike de chacun des puts est le capital garanti et le sous-jacent (prix et volatilité). Nous prendrons un strike et un prix du sous-jacent égal à 100 pour l'application numérique. Nous avons sélectionné le même échantillon historique des valeur du FTSE 100 que M. Smith (méthode des déflateurs) de telle sorte à pouvoir faire un comparatif des méthodes. L'écart-type du log-rendement annualisé est de ce fait de 20%, les taux sans risque des différentes maturités sont les taux zéro-coupons du marché anglais (cf annexe).

La formule exacte qui permet de calculer la garantie plancher est donnée par :

Prix de la garantie plancher = $\sum_{i=1}^T \frac{d_{x+i}}{l_x} \times Put(i+1)$ où d_x et l_x sont extraits de la table TD88.

Cette méthode présente beaucoup d'avantages : en effet, c'est la plus cohérente avec les pratiques des marchés financiers d'une part, elle n'oblige pas à effectuer des hypothèses restrictives sur la nature des effectifs (volatilité...) et il existe des produits financiers permettant une couverture du risque. Seulement, comme tous les modèles d'options avec approche par arbitrage, elle est critiquable sur le long terme. Nous allons faire varier certains paramètres du modèle tel que l'âge de l'assuré, la volatilité ou encore le taux sans risque afin d'analyser brièvement la sensibilité de la méthode à ces paramètres.

Illustration des résultats :

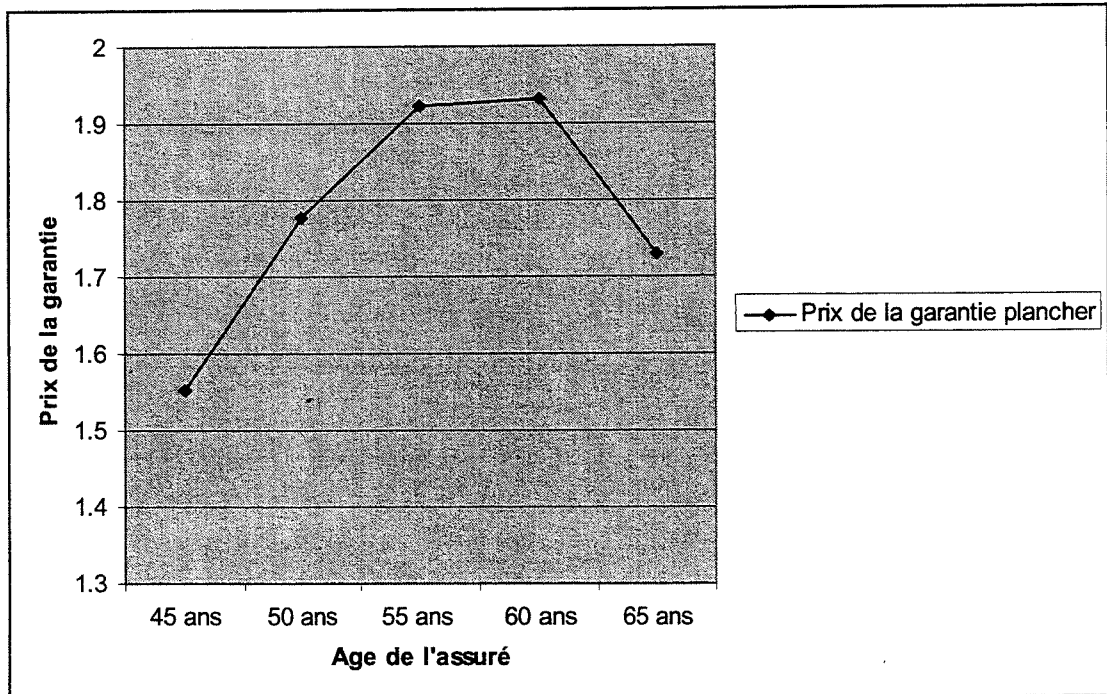
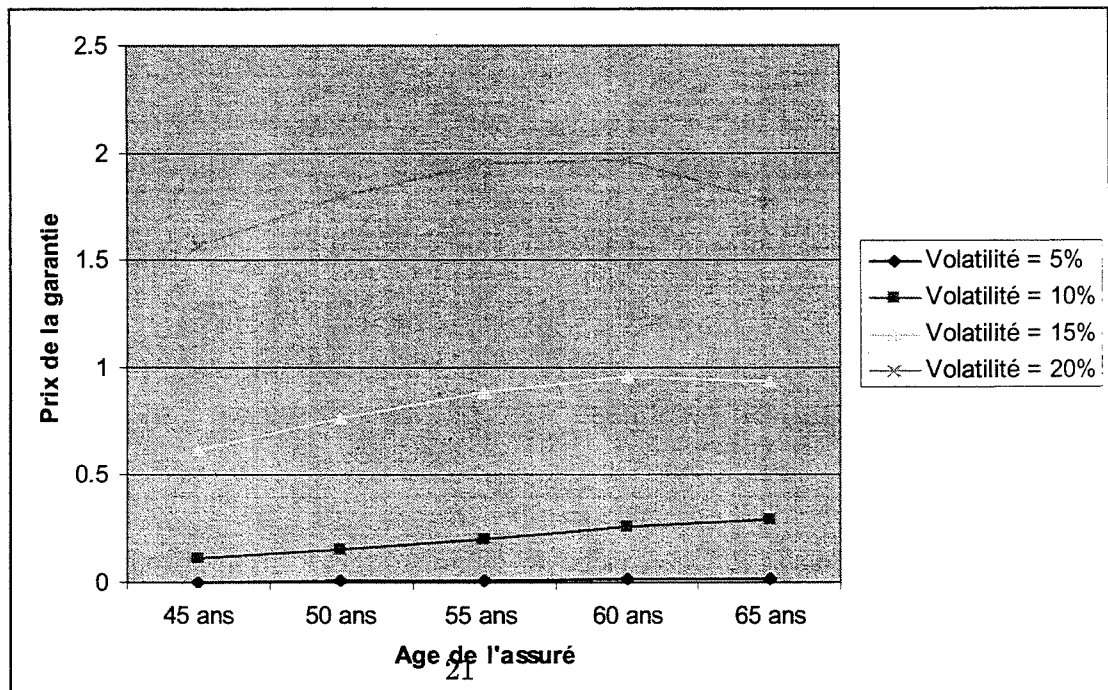
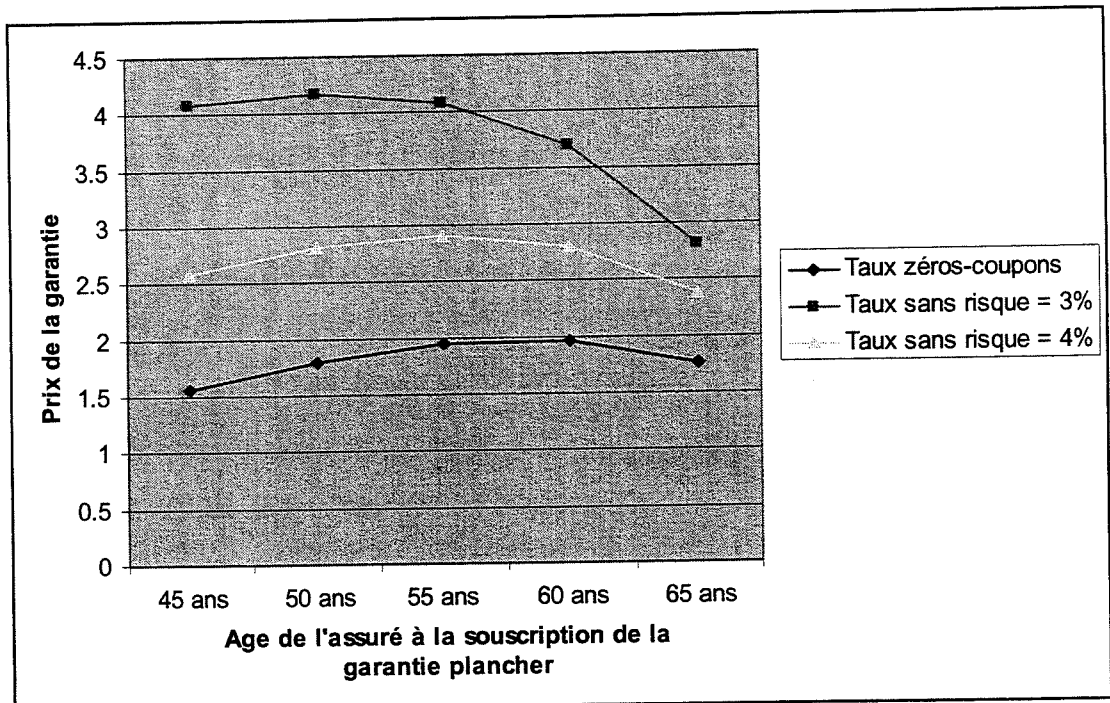


FIG. 1 – Evolution du prix de la garantie plancher pour un assuré âgé de x années pour un contrat valable jusqu'à 75 ans



Impact de la volatilité sur le prix de la garantie plancher



Impact du taux sans risque sur le prix

Interprétation des résultats :

Nous remarquons que la méthode des puts diffuse la risque sur les années ultérieures (cf 2.1.2)

Nous remarquons aussi que le prix de la garantie plancher augmente avec la volatilité et diminue avec le taux d'intérêt. La garantie plancher étant une série d'options de vente pondérées par les probabilités de mortalité, ce résultat est alors connu de la théorie des options.

4 Méthodes de provisionnement pour la garantie plancher

4.1 La réassurance ou couverture sur les marchés

Une manière assez simple de gérer les risques induits par les options implicites contenues dans ces contrats est d'acheter sur le marché de gré à gré des options équivalentes à celles vendues à une contrepartie. Cela équivaut à réassurer le risque dans sa totalité ; en effet, les réassureurs se sont impliqués sur ce marché en vendant des options aux compagnies. Comme dans le principe de la réassurance, les compagnies ont de fait transféré une proportion substantielle du profit attendu sur les contrats. Aussi, la compagnie doit prendre en compte le risque de contrepartie ; ce qui signifie que la contrepartie qui a fourni l'option ne sera peut être plus là pour payer la compagnie en cas d'exercice de l'option dont la maturité peut atteindre plusieurs décennies.

Sur certains marchés, comme celui des fonds garantis canadiens, les réassureurs et autres banques sont de moins en moins disposés à vendre ces options à des prix acceptables pour les compagnies.

4.2 La couverture dynamique

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la formule de Black & Scholes fournit une stratégie de couverture des risques pour des vendeurs d'options comme ici les compagnies.

On peut utiliser la formule de Black & Scholes pour trouver le portefeuille de réplication. Le portefeuille doit être modifié de manière continue, il est donc nécessaire de recalculer et d'ajuster ce dernier fréquemment. Bien que la formule repose sur des hypothèses trop strictes par rapport à la réalité, le portefeuille de réplication reste un outil performant de couverture.

Pourtant, bien que l'application de la théorie financière par les actuaires soit en expansion elle n'est pas forcément assez acceptée et répandue.

4.3 L'approche actuarielle

Dans le milieu des années 1970, les travaux de Black, Scholes et Merton sont relativement inconnus dans le cercle des actuaires. Au Royaume-Uni, cependant, les fonds garantis à 100% des primes investies étaient très populaires en assurance vie. La période de 1973 à 1974 où la bourse a atteint des niveaux très bas avait fait prendre conscience aux assureurs que ce genre de produit, qui était considéré comme rentable et peu risqué, pouvait être à fort potentiel de pertes. Cette théorie trop récente pour l'époque, considérée comme improuvée et trop risquée n'a pas été appliquée par les actuaires britanniques.

Les actuaires à l'époque utilisaient donc la simulation stochastique pour déterminer la loi de distribution approximative du rendement des fonds ou indices boursiers puis utiliser les quantiles afin de déterminer la somme à provisionner. La méthode de provisionnement par les quantiles avait déjà été utilisée depuis plusieurs années en assurance non vie. Pour calculer la provision par la méthode des quantiles l'assureur se donne une probabilité sur la loi de distribution de la perte (par exemple 99%). La valeur actualisée du quantile est alors détenue en actif sans risque; ainsi l'assureur pourra être sûr à 99% que la provision à échéance pourra faire face aux pertes. Le principe est identique à celui de la Value At Risk en finance quoiqu'en étant appliqué sur de plus longues périodes par les assureurs que par les banques.

Le principe fondamental de cette méthode est que le calcul du capital requis pour provisionner est détenu en actif sans risque. L'utilisation de la méthode des quantiles de la loi de distribution (Value at Risk) en tant que mesure du risque n'est pas fondamentale dans cette approche et d'autres types de mesure sont préférables.

Cette méthode de simulation stochastique des engagements de l'assureur suivie de l'utilisation des taux longs fixes pour les actualiser est qualifiée d'approche actuarielle. Elle est en soi différente de la couverture dynamique dans laquelle on investit dans un portefeuille de couverture et non seulement dans des obligations. Cependant, il ne faudrait pas en déduire d'une manière ou d'une autre que la méthode de couverture dynamique n'est pas actuarielle

ni que ces deux méthodes sont incompatibles. Une synthèse de ces dernières peut mener à une meilleure gestion des risques que chacune prise séparément.

Troisième partie

La modélisation en « regime switching » log-normale du rendement du sous-jacent.

5 Introduction

La modélisation traditionnelle du rendement des actions (ou parts de fonds) dont celle de Black & Scholes ont pour hypothèse que les rendements des titres suivent le processus d'un mouvement brownien géométrique. Cela implique que sur des intervalles de temps discrets les rendements suivent une distribution log-normale et que sur des intervalles qui ne se chevauchent pas ils sont indépendants. Cela signifie que si S_t est le cours du titre à la date t

Alors, le log rendement :

$$\log \frac{S_T}{S_t} \sim N(\mu(T - t), \sigma^2(T - t))$$

pour une certaine valeur de μ et une volatilité σ . Ce modèle de loi log-normale indépendante est assez simple et donne une assez bonne approximation sur des intervalles de temps assez courts mais une beaucoup moins bonne pour des modélisations de long terme.

Des études empiriques ont prouvé que les lois log-normales indépendantes (LNI) ne permettent pas de représenter certains mouvements extrêmes des cours ainsi que l'aspect stochastique de la volatilité.

Mary Hardy a introduit cette modélisation des rendements en régime switching log-normal pour évaluer une garantie plancher en se basant sur les indices boursiers S&P500 et TSE300. Nous allons à notre tour appliquer ce modèle au FTSE 100.

Une manière assez simple d'adapter au modèle une volatilité stochastique est de considérer que la volatilité prend une des K valeurs discrètes, allant

de l'une à l'autre de manière aléatoire. Cette approche permet de conserver la simplicité de la modélisation en LNI tout en permettant de représenter les mouvements extrêmes de la valeur de part du fonds. La modélisation en « regime switching » (RSLN) permet au sous-jacent de commuter entre K régimes de manière aléatoire ; chaque régime est caractérisé par des paramètres de modélisations différents et le processus décrivant la trajectoire du sous-jacent est considéré comme étant un processus de Markov (cela signifie que la probabilité de changement de régime dépend seulement du régime actuel et non de l'historique du processus).

L'idée sous-jacente de ce type de modélisation en « regime switching » est que le marché commute à chaque période entre une volatilité relative basse assez stable et un régime de volatilité plus élevée mais moins stable. Des périodes de volatilité élevée peuvent être dues par exemple à des politiques monétaires de court terme ou des incertitudes économiques.

La modélisation en « regime switching » a été introduite par Hamilton (1989) qui décrit un processus autorégressif en « regime switching ».

La modélisation traitée dans cette partie du mémoire sera la plus simple c'est-à-dire que le nombre de régimes adoptés sera de $K=2$ régimes.

L'objectif de cette partie sera de :

- montrer comment évaluer les paramètres de la modélisation
- de calculer ces derniers dans l'étude de deux indices boursiers : le FTSE 100
- d'évaluer l'engagement de l'assureur dans le cadre d'une garanti plancher en calculant le prix des options dont le sous-jacent suit un processus en « regime switching »
- Et enfin de comparer les résultats de ce type de modélisation avec le modèle LNI d'après la formule de Black et Scholes que nous avons très brièvement traité dans la partie précédente.

6 L'historique

Nous disposons depuis janvier 1994 jusqu'à 2001 des valeurs mensuelles du FTSE 100. L'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance des paramètres du modèle LNI se fait de la façon suivante, en notant y_t le log-rendement mensuel, nous trouvons l'estimation de la moyenne $\hat{\mu}$ et de l'écart-type $\hat{\sigma}$ annualisés (moyenne $\times 12$ et écart-type $\times \sqrt{12}$)

$$\begin{aligned}\hat{y}_t &= \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{n} \sum \hat{y}_t \\ \text{et } \hat{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum (\hat{y}_t - \hat{\mu})^2}\end{aligned}$$

7 Le modèle

Sous la modélisation en « regime switching », nous considérons que le processus représentant le rendement du fonds suit un des K types de régimes. Notons le type de régime suivi par le rendement du fonds dans l'intervalle (mensuel), et représente la valeur d'une part de fonds à la date t .

Dans ce cas, si nous notons ρ_t le régime suivi dans l'intervalle $[t, t + 1]$ mensuel, $\rho_t = 1, 2, \dots, k$ et S_t la valeur de l'indice à la date t , le processus du log-rendement $\hat{y}_t = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ et tel que $\hat{y}_t / \rho_t \sim N(\mu_{\rho}, \sigma_{\rho_t}^2)$:

$$\ln \frac{S_{t+1}}{S_t} = \rho_t \sim N(\mu_{\rho}, \sigma_{\rho_t}^2)$$

La matrice de transition représente les probabilités de changer de régime entre 2 périodes, ces dernières seront notées de la façon suivante :

$$p_{ij} = \Pr[\rho_{t+1} = j / \rho_t = i] \quad i=1,2 \quad j=1,2$$

Donc pour le modèle à $K=2$ nous devons estimer 6 paramètres :

$$\Theta = \{\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}\}$$

la modélisation peut être visualisée par le schéma ci-dessous :

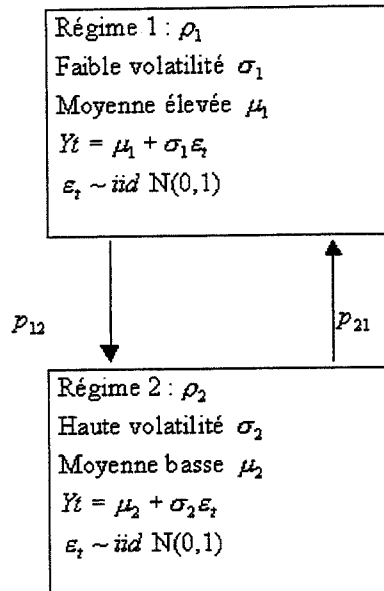


FIG. 2 – Schématisation du régime switching

8 Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance

8.1 Le calcul de la fonction de vraisemblance

Les six valeurs à estimer dans le modèle de régime switching sont $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, p_{12}, p_{21}$, et les probabilités de transition p_{11}, p_{22}

Y_t est le log-rendement au t -ième mois. La vraisemblance pour l'échantillon d'observations $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est :

$$L(\Theta) = f(y_1/\Theta) f(y_2/\Theta, y_1) f(y_3/\Theta, y_1, y_2) \dots f(y_n/\Theta, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$$

où f est la fonction de densité de y . Dans ce cas, la contribution à la log-vraisemblance à la t ième observation est la suivante :

$$\ln f(y_t/y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_1, \Theta)$$

Cette log vraisemblance se calcule de manière récursive (selon la méthode élaborée par Hamilton et Susmel 1994) :

$$l(\Theta) = \sum \text{Log} f(y_i/y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_1, \Theta)$$

$$\text{Où, } f(y_i/y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_1, \Theta) = \sum \sum f(\rho_i = a, \rho_{i-1} = b, y_{i=1}, \dots, y_1, \Theta)$$

La densité $f(\rho_t, \rho_{t-1}, y_t/y_1, y_2, \dots, y_{t-1})$ peut être alors décomposée de la manière suivante :

$$f(\rho_t, \rho_{t-1}, y_t/y_1, y_2, \dots, y_{t-1}) = p(\rho_{t-1}/y_1, \dots, y_{t-1}/\Theta) \times p(\rho_t/\rho_{t-1}, \Theta) \times f(y_t/\rho_t, \Theta)$$

Où $p(\rho_t/\rho_{t-1}, \Theta)$ est la probabilité de transition

et $f(y_t/\rho_t, \Theta) = \frac{1}{\sigma_{\rho_t}} \phi\left(\frac{y_t - \mu_{\rho_t}}{\sigma_{\rho_t}}\right)$ avec ϕ la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

En ce qui concerne la partie $p(\rho_t/y_1, \dots, y_{t-1})$ elle est égale à :

$$\frac{f(\rho_{t-1}, \rho_{t-2}=1, y_{t-1}/y_1, y_2, \dots, y_{t-2}, \Theta) + f(\rho_{t-1}, \rho_{t-2}=2, y_{t-1}/y_1, y_2, \dots, y_{t-2}, \Theta)}{f(y_{i-1}, y_1, \dots, y_{i-2}, \Theta)}$$

Les deux éléments du numérateur de ce quotient se calculent par la récursivité précédente en utilisant, pour calculer les éléments de départ ce que l'on appelle la probabilité de distribution invariante (ou stationnaire). Sous cette distribution de probabilité $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, on doit obtenir

$$p(\rho_t = 1) = p(\rho_{t-1} = 1) \text{ et } p(\rho_t = 2) = p(\rho_{t-1} = 2)$$

Cela s'écrit donc $\pi p = \pi$ soit $\pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} = \pi_1$ et $\pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} = \pi_2$
Sachant que $p_{11} + p_{12} = 1$ nous obtenons :

$$\pi_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} \text{ et } \pi_2 = \frac{p_{12}}{p_{12} + p_{21}}$$

Nous pouvons alors commencer la récursivité pour un calculer notre ensemble de paramètres Θ :

$$f(\rho_1 = 1, y_1/\Theta) = \frac{\pi_1}{\sigma_1} \phi\left(\frac{y_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

et

$$f(\rho_1 = 2, y_1/\Theta) = \frac{\pi_2}{\sigma_2} \phi\left(\frac{y_1 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$f(y_1/\Theta) = f(\rho_1 = 1, y_1/\Theta) + f(\rho_1 = 2, y_1/\Theta)$$

et nous calculons pour la recursion suivante :

$$p(\rho_1/y_1, \Theta) = \frac{f(\rho_1, y_1/\Theta)}{f(y_1/\Theta)}$$

8.2 Résultats de l'estimation des paramètres par maximisation de la vraisemblance

La résolution par la méthode du maximum de vraisemblance en récursivité de la partie 8.1 nous a permis de déterminer les valeurs des paramètres de notre modèle en régime switching suivant :

μ_1	0.010511
μ_2	0.0052
σ_1	0.03568
σ_2	0.0777
p_{12}	0.0612
p_{21}	0.081599
π_1	0.57110
π_2	0.42880
p_{11}	0.93870
p_{22}	0.91940

9 Le critère de sélection

9.1 Le test du ratio de vraisemblance

Le test du ratio de vraisemblance sera utilisé pour déterminer lequel des modèles à « regime switching » et du LNI convient le mieux à la modélisation du processus (le test est présenté dans Klugman, Panjer et Wilmott 1998). Le test permet de comparer deux mêmes types de modélisation imbriquées mais avec un nombre de paramètres différents ($k_2 > k_1$).

Notons l_1 la log-vraisemblance du modèle le plus simple et l_2 celle du modèle le plus complexe. Le test statistique est : $2 \times (l_2 - l_1)$. L'hypothèse nulle est alors :

H_0 : Pas d'amélioration significative avec le modèle 2 (RSLN).

Sous l'hypothèse nulle H_0 , le test statistique suit une distribution du Khi-2, avec un degré de liberté égal à la différence du nombre de paramètres entre les 2 modèles. Il suffit alors de calculer la p-value du test de ratio de vraisemblance et si ce dernier est suffisamment faible (selon le seuil de probabilité que l'on se donne) on rejettera l'hypothèse nulle et dans ce cas le modèle « regime switching » apporte une amélioration dans la modélisation.

9.2 Résultats des tests

L'échantillon utilisé pour calibrer le modèle est un échantillon extrait des valeurs mensuelles de l'index FTSE 100 entre 1994 et 2001.

Le test du ratio de vraisemblance nous donne une T-statistique de 40,04 à quatre degrés de liberté dont la p-value est de 0%. Le RSLN2 est donc préféré au modèle lognormal. Notre modèle est donc bien valide.

9.3 Utilisation de la modélisation en « régime switching »

9.3.1 La loi de distribution du nombre total de périodes durant lesquelles le processus a séjourné en régime 1

En modélisation « regime switching », il est très facile de déterminer la loi de distribution du nombre total de mois pendant lesquels le processus était en régime1. A partir de cela nous pourrons ainsi calculer la fonction de répartition, la fonction de densité, du processus qui est la valeur en fin de période n d'une part de fonds.

Notons R le nombre total de mois passés en regime1 ; $R \in \{0, 1, \dots, n\}$. On notera la probabilité $P(R = r) = p(r)$, R_t est le nombre total de périodes passées par le processus en régime1 sur l'intervalle $[t, n)$ et nous étudierons les probabilités conditionnelles $P[R_t = r/\rho_{t-1}]$ pour $r = 0, 1, \dots, n - t$ et $t = 1, \dots, n - 1$. Il est évident que $P[R_t = r/\rho_{t-1}]$ pour $r > n-t$ ou $r < 0$

Par exemple, $P[R_{n-1} = 0/\rho_{t-1} = 1]$ est la probabilité que la dernière période ne suit pas le régime1 sachant que le processus est en régime1 dans la période précédente. Cela signifie donc que pour $t \in [n - 2, n - 1)$ que $P[R_{n-1} = 1/\rho_{t-1} = 1] = p_{12}$ et de la même manière :

$$P[R_{n-1} = 1/\rho_{t-1} = 1] = p_{11}$$

$$P[R_{n-1} = 0/\rho_{t-1} = 2] = p_{22}$$

$$P[R_{n-1} = 1/\rho_{t-1} = 2] = p_{21}$$

9.3.2 La fonction de distribution de S_n

En utilisant la fonction de répartition de R , la fonction de distribution du rendement total du fonds à la date n peut être calculée de manière analytique. Notons cette dernière S_n en supposant que $S_0 = 1$ à la date initiale. Nous avons alors :

$$S_n/R \sim \log normale(\mu^*(R), \sigma^*(R)), \text{ où } \mu^*(R) = R\mu_1 + (n - R)\mu_2 \text{ et } \sigma^*(R) = \sqrt{R\sigma_1^2 + (1 - R)\sigma_2^2}$$

Ainsi, en notant $P[R = r] = p(r)$ la fonction de répartition de S_n est :

$$F_{S_n}(x) = P[S_n \leq x] = \sum P[S_n \leq x/R = r]p(r) = \sum \Phi\left(\frac{\log x - \mu^*(r)}{\sigma^*(r)}\right) p(r)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

En dérivant cette fonction on obtient la fonction de densité de S_n :

$$f_{S_n}(x) = \sum \frac{1}{\sigma^*(r)x} \phi\left(\frac{\log x - \mu^*(r)}{\sigma^*(r)}\right) p(r)$$

Où ϕ est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite

9.4 L'évaluation de l'option de vente avec processus du rendement de fonds en « regime switching » log-normal.

Dans la modélisation conventionnelle de Black-Scholes, où le prix de l'actif S_n a une distribution log-normale, le prix de l'option de vente européenne de prix d'exercice K et de maturité n , à la date initiale est calculée (cf. la partie sur le put européen) est :

$$P_0 = e^{-rn} E_Q[\max(K - S_n), 0] = Ke^{-rn} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Où r est le taux d'intérêt sans risque, N représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, S_t est le prix de l'actif à la date t et

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})n}{\sigma\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{n}$$

Le paramètre σ est la volatilité du rendement du titre, qui correspond au paramètre log-normal du modèle LNI. L'écriture Q sous l'espérance signifie que cette espérance se calcule sous la probabilité risque neutre.

Bollen (1998) a utilisé le modèle en régime switching pour évaluer des options américaines et européennes. Comme le marché est incomplet en régime switching, la probabilité risque-neutre Q n'est pas unique. Bollen utilise une mesure Q sous laquelle les probabilités de transition restent inchangées. Le passage de la probabilité réelle P à Q se fait en changeant le log de la moyenne du paramètre μ_1 du régime 1 en $r - \frac{\sigma_1^2}{2}$ et le paramètre μ_2 du régime 2 en $r - \frac{\sigma_2^2}{2}$ où r est le taux sans risque.

En « regime switching » log-normal on peut aussi calculer le prix d'une option de vente européenne de manière directe en utilisant la loi de la distribution de R . La loi de S_n conditionnelle à R est log-normale de paramètres dépendants de R . Alors, le prix de l'option de vente européenne sous la probabilité Q est :

$$E_R[e^{-rn} E_Q[\max(K - S_n, 0)/R]] = E_R[BSP(R)]$$

$$\text{Où, } BSP(R) = Ke^{-rn} N(-d_2(R)) - S_0 N(-d_1(R))$$

$$d_1(R) = \frac{\ln(S_0/K) + (nr + (R(\sigma_1^2/2)) + (n-R)(\frac{\sigma_2^2}{2}))}{\sqrt{R\sigma_1^2 + (n-R)\sigma_2^2}}$$

$$\text{et } d_2(R) = d_1(R) - \sqrt{R\sigma_1^2 + (n-R)\sigma_2^2}$$

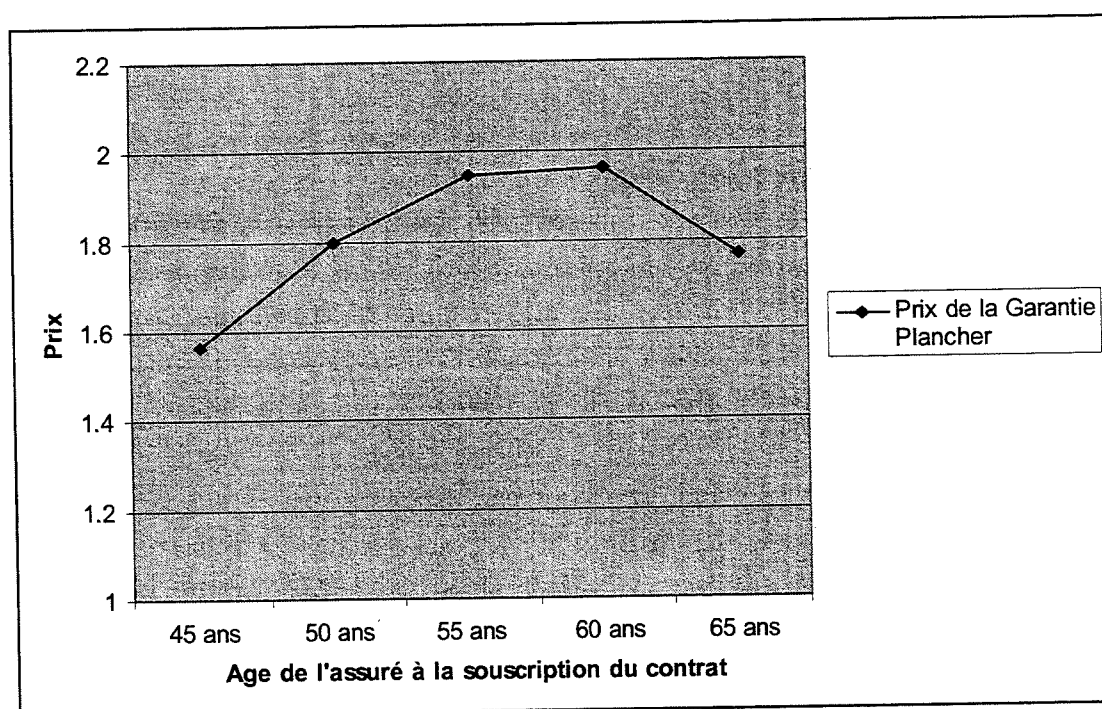
la formulation finale est donc :

$$E_R[BSP(R)] = \sum_{k=0}^n p(k).BSP(k)$$

9.5 Applications numériques

Pour déterminer les engagements de l'assuré, il y a lieu de considérer la méthode de la perte maximale probable que nous ne développerons pas dans ce mémoire, qui consiste en une analyse par quantiles des trajectoires possibles des cours futurs. Cela permet de répondre à la question portant sur le cours que la valeur de l'actif dépassera à un instant donné pour un niveau de probabilité défini.

L'application numérique au modèle en régime switching en appliquant les mêmes paramètres en entrée que l'exemple du put de Black Scholes précédent (l'écart type du log-rendement de l'indice est toujours de 20% pour permettre une comparaison cohérente entre les différentes méthodes de valorisation utilisées) nous donne les résultats suivants :



Evolution du prix de la garantie plancher pour un assuré âgé de x années pour un contrat valable jusqu'à 75 ans (volatilité fixée à 20%)

Nous venons de voir comment les modèles lognormaux en régime swit-

ching sont un moyen très simple d'introduire une volatilité stochastique dans la valorisation d'une option. Seulement, l'application de cette méthodes ou de celle de la formule de Black et Scholes, est souvent inappropriée du fait que les cash flow à valoriser n'ont pas la même forme que les options traitées sur le marché. Nous allons donc expliciter une technique de valorisation des cash-flows futurs utilisable pour produire une Fair Value :l'approche par la méthode des déflateurs stochastiques. Cette technique s'appuie principalement sur le principe d'absence d'opportunités d'arbitrage et combine les pricing de Black-Scholes avec la tradition de projections stochastiques réalistes très répandus chez les actuaires.

Quatrième partie

Fair Value

10 Fair Value

La fair value est une notion comptable et financière réclamant l'évaluation à leur juste valeur à un instant donné des biens possédés par une entreprise.

Une définition de cette notion clé de notre étude qu'est la Fair Value a été énoncée par l'International Accounting Standards Board (IASB) : « Montant pour lequel un actif (ou un passif) peut être échangé (ou réglé) entre deux parties informées et constantes »

Cette problématique de valeur est notamment soulevée par IAS qui demande la juste valeur pour tous les instruments financiers.

Des divergences apparaissent toutefois sur la pertinence d'évaluer à la valeur du marché des biens souvent non négociables et en dehors de toute opération réelle. Cette notion s'oppose à celle employée en comptabilité française et basée sur les coûts d'acquisition et la nécessité de prudence.

10.1 L'IASB

L' « International Accounting Standards Board » est un organisme indépendant, utilisant des fonds privés, et dont l'objectif est de définir une norme comptable internationale permettant de produire des états financiers compréhensibles, pertinents, fiables et comparables.

L'IASB préconise la cohérence trans-société du traitement comptable d'éléments similaires, de façon à améliorer la fiabilité et la transparence des comptes.

Deux grands types d'approches sont en concurrence pour procéder au calcul de la Fair Value :

Les approches par adossement ou par charges différées

Ces approches mettent en regard les charges liées au paiement des sinistres et les frais de fonctionnement avec les revenus liés à la réception des primes. La principale conséquence est d'étaler dans le temps, sur toute la durée de vie du contrat, les profits afférents. En particulier, les coûts d'acquisition sont souvent différés et amortis au fur et à mesure de la perception des primes à recevoir.

Ces principes se rapprochent de ceux utilisés par les standards comptables américains et australiens.

Les approches de valorisation Actif/Passif

Leur principe est de valoriser les Actifs d'une part et les Passifs de l'autre, puis de constater les profits en fonction de l'évolution des uns par rapport aux autres, pour chaque période à venir. Notons que les calculs d'Embedded Value relève de ce principe.

Cette approche est recommandée par l'IASB

10.2 Caractéristiques de la Fair Value

La valeur d'un actif ou d'un passif d'une société d'assurance, calculée sur la base des cash flows futurs de l'élément considéré, doit être cohérente avec la valorisation que les marchés financiers donnent au même jeu de cash flows futurs.

La projection de cash flow futurs est stochastique, afin de permettre la simulation d'éléments et d'interactions complexes, dans des configurations très diverses.

La projection des flux doit prendre en compte toutes les contingences futures pour un participant de marché, et notamment les options implicites.

L'espérance de chaque processus stochastique utilisé pour produire la Fair Value doit coïncider avec les hypothèses retenues pour le calcul de l'Embedded Value (espérance du cash flow actualisé).

Notre problème est de valoriser un échéancier de cash flows futurs générés dans le cadre d'un modèle stochastique de projections financières. Deux méthodes principales sont disponibles : la méthode risque neutre et celle des déflateurs.

11 Valorisation risque-neutre et Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Le principe de l'AOA est simple : Sur un marché efficient, deux instruments différents qui génèrent le même flux de revenu en toutes circonstances doivent avoir la même valeur.

Si l'AOA n'était pas vérifiée dans un marché efficient, un arbitrage, c'est à dire un profit sans risque ni mise de capital initial serait possible en achetant l'instrument financier le moins cher sur le marché tout en vendant le plus onéreux, ce qui serait contraire à l'hypothèse d'efficience du marché.

En réalité, il existe sur les marchés, souvent pendant des laps de temps très courts, des opportunités marginales dont profitent des arbitragistes spécifiquement outillés. Ces opportunités ne sont pas accessibles à la grande majorité des investisseurs qui n'ont pas suffisamment de flexibilité pour s'ajuster aux opportunités dans des conditions (de délais et de coûts) qui leur permettent véritablement d'en tirer parti. La grande majorité des investisseurs est donc bien avisée de considérer les marchés comme exempts d'opportunités d'arbitrage.

Le concept de changement de mesure sur l'univers probabilisé est difficile à appréhender et, en conséquence, a donné lieu à de vastes débats, notamment dans le milieu de l'actuariat tant sur le principe que sur l'application.

L'astuce de la valorisation risque neutre consiste à utiliser cette propriété pour choisir la probabilité qui facilite le plus les calculs. Cette probabilité correspond à l'attitude de neutralité vis-à-vis du risque, ce qui signifie grandement tous les calculs d'actualisation (et surtout le problème du choix du taux d'actualisation).

	Actif risqué 1	Actif risqué 2
Valeur de marché initiale	3.1	1.75
Valeur future		
pour l'état de la nature F	5	3
pour l'état de la nature D	2	1
Probabilité risque-neutre associée à l'état de la nature F	0.421	0.421
Probabilité risque-neutre associée à l'état de la nature D	0.579	0.579
Espérance de la valeur future	3.263	1.842
Rendement	5.26%	5.26%

5.26% correspond bien au taux de l'actif sans risque, puisque $1/(1+5.26\%)$
 $= 0.95$

12 Déflateur

Un déflateur est une fonction d'actualisation stochastique qui traduit à la fois le risque à chaque scénario et l'actualisation temporelle. La valeur d'une chronique de cash flows stochastiques, généralise celle utilisée pour des cash flows déterministes. Ainsi en simulant un nombre de scénarios suffisant, l'espérance des déflateurs est équivalente au facteur d'actualisation de la méthode traditionnelle. Pour mieux comprendre cette notion de déflateur, donnons la définition d'un actif d'état.

12.1 Définition des Actifs d'Etat

Un modèle basé sur le principe d'AOA peut être construit à partir des actifs d'Arrow-Debreu ou Actifs d'Etat. Ces actifs procurent le versement d'une unité de la devise considérée si un état précis de la nature se produit à un instant futur, rien sinon.

Par exemple, à un modèle qui propose deux états de la nature possibles après l'écoulement d'une période, l'état favorable et l'état défavorable, sont associés deux actifs d'état. L'état favorable procure un remboursement de 1 si cet état survient, et 0 sinon. L'autre actif d'état a un comportement symétrique pour l'état défavorable.

12.1.1 L'exemple du modèle mono-périodique discret à deux états

Prenons un exemple simple : deux actifs risqués dont la valeur de marché et les cash flows futurs pour deux états de la nature envisageables, F et D sont explicités ci-dessous :

	Actif risqué 1	Actif risqué 2
Valeur de marché initiale	3.1	1.75
Valeur future		
pour l'état de la nature F	5	3
pour l'état de la nature D	2	1

Chaque actif est complètement caractérisé par sa valeur initiale et ses cashs flows futurs dans les différents états de la nature possibles. Les actifs d'état sont caractérisés par :

	Actif d'état F	Actif d'état D
Valeur future		
Pour l'état de la nature F	1	0
Pour l'état de la nature D	0	1

Comme pour la démonstration de Black & Scholes, nous pouvons utiliser le principe d'Absence d'opportunité d'Arbitrage pour valoriser les actifs d'état en répliquant leur cash flows avec les actifs risqués existant sur le marché.

Il suffit pour cela de résoudre un simple système d'équation. Les valeurs de marché se déduisent alors automatiquement de la composition du portefeuille répliquant :

	Portefeuille répliquant l'actif d'état F	Portefeuille répliquant l'actif d'état D
Actif risqué 1	-1	3
Actif risqué 2	2	-5
Valeur future		
état de la nature F	1	0
état de la nature D	0	1
Valeur initiale	0.4	0.55

La valeur de marché des portefeuilles répliquants donne ainsi la valeur des actifs d'état qu'il est maintenant possible d'utiliser pour valoriser un nouvel actif risqué et l'actif sans risque, en fonction de leur cash flows futurs :

	Nouvel actif risqué	Actif sans risque
Valeur future		
état de la nature F	10	1
état de la nature D	-1	1
Valeur de marché initiale	3.45	0.95

La généralisation à un modèle monopériodique discret avec N états de la nature possibles est immédiate. La formule de valorisation d'un actif basée sur les N actifs d'états du modèle est alors donnée par :

$$P = \sum_{i=1}^N E(i) \cdot CF(i)$$

Où : P est le prix de l'actif considéré

CF(i) ses cash flows dans chacun des N états

E(i) le prix de l'actif d'état associé à l'état i

i varie de 1 à N

Pour que le modèle soit cohérent et effectivement sans opportunité d'arbitrage, il est important d'imposer quelques contraintes quant à la valeur de marché initiale des actifs d'états, les E(i) :

- tous les E(i) doivent être strictement positifs ; si tel n'est pas le cas, l'achat du ou des actifs d'état de valeur négative ou nulle en 0 constitue une OA

- un modèle mono-périodique ne présente pas d'OA si et seulement si les E(i) existent.

L'actif sans risque est celui dont le rendement futur est indépendant des différents états du monde pouvant se produire. Soit $r > 0$ le rendement de l'actif sans risque. Comme il rembourse 1 en fin de période, sa valeur en 0 est $(1+r)^{-1}$. Le remboursement est assuré quel que soit l'état de la nature et la valeur de l'actif sans risque peut donc également être exprimé par la somme des valeurs des actifs d'états. D'où la propriété suivante :

$$\sum_{i=1}^N E(i) = \frac{1}{1+r} \leq 1$$

12.1.2 Modèles multi-périodiques et passage en temps continu

Les prix des actifs sont notés $E(t,e)$, avec $t \in [1,2,\dots,H]$ et $e \in [1,2,\dots,N]$

Les probabilités associées à chaque état de la nature pour un instant t donné sont notées $p(t,e)$, avec $t \in [1,2,\dots,H]$ et $e \in [1,2,\dots,N]$

Comme pour le modèle monopériodique, les déflateurs sont définis par :
 $D(t,e) = E(t,e) / p(t,e)$

Soit $CF(t,e)$ un jeu de cash flow dont nous cherchons la valeur P . Comme précédemment, on raisonne par absence d'opportunités d'arbitrage sur un portefeuille répliquant exactement les cash flows, puis on introduit les déflateurs pour parvenir à la formule suivante :

$$P = \sum_{t=1}^H \sum_{e=1}^N p(t,e) \cdot D(t,e) \cdot CF(t,e) = \sum_{t=1}^H E[D(t) \cdot CF(t)]$$

Selon le même principe, il est également possible de valoriser un cash flow futur à un instant futur. Soient deux instants t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$, la valeur en t_1 d'un cash flow tombant en t_2 est donnée par :

$$\frac{E_{t_1}[D(t_2) \cdot CF(t_2)]}{D(t_1)}$$

Considérons maintenant l'évolution possible du prix d'un actif $P(t)$ sur une période allant de t_1 à t_2 , pendant laquelle l'actif ne verse pas de dividende ou de coupons. En utilisant la formule précédente sur l'ensemble des cash flows procurés par l'actif considéré, on déduit :

$$P(t_1) = \frac{E_{t_1}[D(t_2) \cdot CF(t_2)]}{D(t_1)}$$

Ce qui nous permet de mettre en évidence l'une des caractéristiques les plus importantes des déflateurs grâce à la formule suivante :

$$D(t_1)P(t_1) = E_{t_1}[D(t_2)P(t_2)].$$

Autrement dit, le processus $D \cdot P$ est une martingale, c'est-à-dire que son espérance à un instant futur est égale à sa valeur présente (ou plus généralement que son espérance à un instant futur t_2 conditionnée par l'information disponible à un instant t_1 est égale à sa valeur en t_1). Cette propriété nous permettra en particulier de vérifier que le modèle ne présente pas d'opportunités d'arbitrage.

12.2 Les Déflateurs

Les déflateurs sont utilisés pour donner une valeur de marché à n'importe quel type de cash-flow généré par le modèle. Cette approche comporte plusieurs avantages : le déflateur dépend seulement du modèle et non des cash-flows évalués. Cela rend la valorisation des cash-flows stochastiques considérablement simple. Aussi, la technique des déflateurs produit des valorisations de marché consistantes, et reflète que le fait de changer une stratégie d'investissement institutionnelle ne peut pas créer ou détruire la valeur économique. Cependant, changer de stratégie pourrait changer la distribution des cash-flows futurs transférant ainsi la valeur entre les actionnaires. La méthode des déflateurs permet aux actuaires d'analyser ces transferts. Enfin, la méthode des déflateurs est utile lorsque l'on considère la structure du capital d'une compagnie. En effet, changer la structure du capital d'une compagnie ne change pas la valeur de marché de cette compagnie. La structure du capital peut cependant affecter la valeur de marché au travers d'effets secondaires tels que la taxe ainsi que l'impact du risque de crédit. La méthode des déflateurs permet aux actuaires de se concentrer sur ces coûts ce que peut influencer la valeur de marché de la compagnie.

Illustrons nos propos par un exemple :

Soit p la probabilité d'occurrence d'un état de la nature F et $(1-p)$ celle d'un état D.

Posons le déflateur d'état $D(e) = E(e)/p(e)$

Avec $p(e)$ la probabilité supposée pour l'état e : $P(F) = p$ et $P(D) = 1-p$

Ainsi, en reprenant l'exemple précédent avec une probabilité d'occurrence de l'état de la nature F de $2/3$ et de l'état D de $1/3$, nous pouvons calculer à partir du prix des actifs d'état :

	Valeur de l'actif d'état	Probabilité d'occurrence	Déflateur
Valeur future			
état de la nature F	0.4	0.667	0.6
état de la nature D	0.55	0.333	1.65

On généralise facilement cet exemple à un univers avec N états de la nature possibles pour montrer que la valeur P d'un actif produisant le cash flow $CF(e)$ pour chacun des états de la nature s'exprime par :

$$P = \sum_{i=1}^N E(e).CF(e) = \sum_{i=1}^N p(e).D(e).CF(e) = E[D.CF]$$

L'une des caractéristiques fondamentale des déflateurs est qu'ils doivent être produits par un modèle d'actifs financiers sans opportunité d'arbitrage. Le modèle de Black & Scholes répond à ce critère. C'est en utilisant ce modèle que M. Smith a déterminé la forme de ce déflateur.

12.2.1 Les déflateurs du modèle de Black & Scholes

Le modèle de Black & Scholes est utilisé pour pricer des options en considérant un actif sans risque B et une action S . En considérant l'évolution sur une période $[t, T]$, la valeur B de l'actif sans risque vérifie l'équation :

$$B_T = B_t e^{r(T-t)} \text{ et la valeur } S \text{ de l'action vérifie :}$$

$$S_T = S_t e^{X_T - X_t} \text{ où } X_T - X_t \text{ suit une loi normale } N(\mu(T-t), \sigma^2(T-t)).$$

12.2.2 Equation du déflateur

En considérant le changement de mesure risque-neutre, on voit que le déflateur peut prendre la même forme que le sous-jacent S .

Nous allons donc supposer que le déflateur s'écrit $D_t = D_0 e^{a.t + b.X_t}$, où a et b sont des constantes.

Nous voulons que :

$$D_t B_t = E_t [D_T B_T] \text{ et } D_t S_t = E_t [D_T S_T]$$

$$D_0 e^{at + bX_t} = E_t [D_0 e^{aT + bX_T} B_t e^{r(T-t)}]$$

Soit, $D_0 e^{at + bX_t} B_t = D_0 e^{aT} B_t e^{r(T-t)} E_t [e^{bX_T}]$ car il faut utiliser le fait que

$$X_T/X_t \sim N[\mu(T-t), \sigma^2(T-t)].$$

De plus, du fait que si $Y \sim N(\alpha, \beta)$ alors $E[e^Y] = e^{\alpha + \frac{\beta^2}{2}}$

l'équation se réécrit : $e^{at+bX_t} = e^{aT+r(T-t)} e^{bX_t+b\mu(T-t)+\frac{b^2}{2}\sigma^2(T-t)}$.

Ce qui donne une première relation : $at = aT + r(T-t) + b\mu(T-t) + \frac{b^2}{2}(T-t)$.

Ensuite il faut utiliser la deuxième propriété du déflateur : $D_t S_t = E_t[D_T S_T]$.

En développant on obtient : $D_0 e^{at+bX_t} S_t = E_t[D_0 e^{aT+bX_T} S_T e^{(X_T-X_t)}]$ et après les mêmes simplifications que précédemment on aboutit à une deuxième équation :

$$at = aT + (b+1)\mu(T-t) + \frac{(b+1)^2}{2}\sigma^2(T-t).$$

Ces deux équations forment un système à 2 équations que nous pouvons alors résoudre et obtenir :

$$a = \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu^2 - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right) \text{ et } b = \frac{1}{\sigma^2} \left(r - \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right).$$

On peut ainsi exprimer la formule du déflateur :

$$D_t = D_0 \cdot \exp \left(\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mu^2 - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \right) t + \frac{1}{\sigma^2} \left(r - \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) X_t \right).$$

12.2.3 Comparaison entre valorisation risque neutre et déflateur

Risque neutre

Avantages Le principal avantage est la simplicité de la méthode : une fois que la probabilité risque-neutre de chaque état est déterminée, le facteur d'actualisation est le même pour tous les états de la nature et est égal au taux sans risque.

Un autre avantage majeur, conséquence de l'utilisation du taux sans risque comme taux d'actualisation : tous les actifs ont la même espérance de rendement. Ce point est particulièrement important puisqu'il permet d'éliminer toute subjectivité dans le choix du taux d'actualisation.

Inconvénients Le principal inconvénient tient à la complexité des concepts manipulés (notamment le changement de mesure sur l'univers probabilisé).

Déflateurs

Avantages Les déflateurs permettent de valoriser les cash flows tels qu'ils sont exprimés dans l'univers réel, dans un cadre où la probabilité associée à chaque état est également la probabilité réelle. Les quantités et les ordres de grandeurs sont donc plus faciles à manipuler.

Inconvénients Les déflateurs doivent être générés par un modèle d'actif sans opportunité d'arbitrage. En pratique, la construction d'un tel modèle est suffisamment compliquée pour limiter le comportement des actifs simulés par le modèle à des processus relativement simples.

Cinquième partie

LE MODELE : TIMBUK

13 Le modèle

Timbuk est un modèle de valorisation d'actifs développé par M. Smith qui repose sur la méthode des déflateurs stochastiques. Une des principales caractéristiques de ce modèle est la production d'un déflateur d'état consistant avec le marché. Le déflateur permet à l'utilisateur de donner une valeur de marché à un produit en connaissant simplement les cash-flows générés par le modèle pour chaque simulation.

L'article de Smith et Southall propose des méthodes de simulation pour les taux d'intérêt, l'inflation et le rendement des titres. Il permet aussi de produire des simulations de déflateur afin de procéder au pricing et au calcul de la « fair value ».

L'utilisation de la fair value devient intéressante lorsqu'il s'agit d'évaluer un produit financier produisant des cashs flow soumis à des risques de marché ou incluant des options cachées. En effet, dans ces cas là, la méthode déterministe basée sur l'espérance actualisée à un taux ajusté au risque des cashs flow n'est plus applicable.

Après simulation des cashs flow, il s'agit ensuite d'utiliser la simulation des déflateurs afin de convertir cette distribution de cash flow en « fair value ».

Auparavant, il faut procéder à un calibrage du modèle aux prix de marché afin que l'évaluation des cashs flow soit consistante avec celui-ci.

Le modèle repose sur quelques formules de « fair value ».

Le déflateur simulé pour la date a est noté D_a et le prix à la date a d'un zéro coupon payant 1€ à la date b est noté P_{ab} . Ces paramètres définissent la structure par terme du modèle qui est ici en temps discret (a et b sont des entiers).

B_a est un mouvement brownien à 5 dimensions (cette dimension repose sur le fait qu'il y a 5 degrés de liberté dans le modèle une pour chacune des trois courbes de taux et une pour chacun des indices de prix). Nous pouvons interpréter le choix de la dimension 5 du modèle par le fait que M. Smith cherche à étendre son modèle à 5 numéraires. En plus de l'inflation, du cash ou des actions, le modèle pourra intégrer des données relatives à l'immobilier par exemple.

Les browniens sont indépendants et régis par :

$$B_{a+1} = B_a + N(0, 1).$$

C_a est l'accumulation historique des valeurs B_a vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$C_{a+1} = C_a + B_a$$

Enfin, les déflateurs et la structure par terme des taux d'intérêt doivent satisfaire l'équation suivante :

$$D_a(P_{ab} - P_{a:b+1}) = \frac{const}{(1+f)^b} \times \exp[\sigma.(C_a - C_{\min\{a,b-\tau\}}) + \lambda.B_a + \min\{b - a, \tau\}\sigma.B_a - \frac{1}{2}(\lambda + \sigma\tau)^2 a + \frac{\max\{0, \tau - b + a\}(\tau + 1 - b + a)}{12} [6\sigma.\lambda + (4\tau + 2b - 2a - 1)\sigma^2]$$

Ainsi définie cette équation est vérifiée par 3 indexes (gauges en anglais) qui influent sur les cashs flow. Par exemple, l'inflation, le taux de change influenceront sur la valeur du portefeuille d'assurance que nous chercherons à modéliser. Pour chaque indexe, choisis ici comme étant le Cash (noté C), les actions (noté E) et l'inflation (notée I) il faut donc calibrer le modèle en calculant les paramètres $\lambda_c, \lambda_E, \lambda_I, \sigma_c, \sigma_E, \sigma_I$. f est le taux d'intérêt forward long.

Formulation en adéquation avec l'absence d'opportunité d'arbitrage non justifiée mathématiquement par l'auteur.

En utilisant le fait que $P_{aa} = 1$, on peut calculer la structure par terme et les déflateurs à partir des équations suivantes :

$$D_a = \sum_{u=a}^{\infty} D_u(P_{au} - P_{a:u+1})$$

$$P_{ab} = \frac{\sum_{u=b}^{\infty} D_u(P_{au} - P_{a:u+1})}{\sum_{u=a}^{\infty} D_u(P_{au} - P_{a:u+1})}$$

En application, nous pouvons par exemple utiliser les déflateurs simulés du cash et de l'inflation notés $D_a^{Inflation}$ et D_a^{Cash} pour simuler l'indice de l'inflation des prix par la formule suivante :

$$\frac{D_a^{Inflation}}{D_a^{Cash}}$$

Nous avons implémenté le modèle en Visual Basic en utilisant des simulations de monte carlo. La justification de l'utilisation de cette méthode tient du fait que certains produits d'assurance vie ne dépendent pas seulement de la maturité des polices mais aussi de la trajectoire du cours des actifs. Les options cachées sont donc « path dependent » et les algorithmes standard de pricing d'options ne sont donc pas adaptés contrairement aux méthodes de monte carlo.

14 Travail réalisé

Un des objectifs de notre étude était de répliquer le modèle de M. Smith : Timbuk1. Nous avons alors implémenté le modèle en Visual Basic en utilisant des simulations de monte carlo. La justification de l'utilisation de cette méthode tient du fait que certains produits d'assurance vie ne dépendent pas seulement de la maturité des polices mais aussi de la trajectoire du cours des actifs. Les options cachées sont donc « path dependent » et les algorithmes standard de pricing d'options ne sont donc pas adaptés contrairement aux méthodes de monte carlo. Nous n'avons pas cherché à redémontrer la formule sur laquelle est basé le modèle mais plutôt étudié les caractéristiques et le comportement de cette dernière. Nous avons utilisé les données du FTSE 100 utilisés par M. Smith pour calibrer les paramètres du modèle de telle sorte à retrouver les mêmes résultats du moins, pour chaque maturité, les écarts type et les intervalles de valeurs des déflateurs et des jauges doivent correspondre à ceux produit par Timbuk1. De plus, afin de valider notre modèle, nous avons non seulement simulé les zéros-coupon spot et vérifié qu'ils correspondent bien à ceux utilisés en entrée du modèle mais encore nous avons calibré notre modèle sur des données de marchés UK antérieures à 2001. Avec un paramétrage identique, nous retrouvons les mêmes valeurs des déflateurs et des indices que ceux de Timbuk1. La partie qui suit traite des méthodes utilisées pour la calibration.

15 La calibration de Timbuk1

15.1 La définition des jauges

Un jauge permet de modéliser les caractéristiques d'un indice dont les cash flows peuvent dépendre de plusieurs variables économiques comme l'inflation, le taux de change, les cours boursiers ou les dividendes qui peuvent influencer un portefeuille d'assurance que nous voulons modéliser. Les jauges permettent donc l'intégration simultanée des contraintes économiques, statistiques et pratiques auxquelles sont confrontés ceux qui développent les modèles de valorisation.

Le concept de jauge comprend un indice de déflation et une structure à terme ce qui peut s'écrire de la manière suivante :

- un déflateur $\{D_a\}$
- une structure par terme $\{P_{ab}\}$.

Le déflateur est un processus à une dimension indiquant la valeur relative du jauge. Le déflateur augmente si un jauge augmente en valeur par rapport aux autres jauges du modèle. Les ratios de déflateurs fournissent des taux de conversion entre différentes jauges ; par exemple, si D_a^{\pounds} est le déflateur de la Livre Sterling et si $D_a^{\$}$ est celui du Dollar alors la valeur d'une Livre en Dollar est donnée par le rapport $D_a^{\pounds}/D_a^{\$}$. La valeur numérique de ce taux de change variera au travers des diverses simulations et de la date a .

15.2 La modélisation des indicateurs dans Timbuk1

L'objectif de Timbuk1 est de modéliser les caractéristiques de comportement des actions, de l'inflation et des taux d'intérêts : il simule donc 3 différents jauges. L'article stipule par ailleurs que le modèle est calibré afin de modéliser 5 principales variables :

-L'indice d'inflation qui a pour formule $\frac{D_a^{Inflation}}{D_a^{Cash}}$.

-Le nominal Par Yield qui, pour une maturité de 10 ans, donne le nominal Par Yield équivalent au zéro-coupon fourni par la courbe des taux. Sa formule

s'écrit $\frac{1 - P_{a:a+u}^{Cash}}{\sum_{r=1}^u P_{a:a+r}^{Cash}}$. Dans Timbuk1 le calcul de "Cash Par Yield 10 ans"

correspond à cette formule en posant $u = 10$.

-L'Inflation Par Yield correspond à la même formule que précédemment mais en utilisant les prix zéro-coupon de l'inflation. Sa formule est : $\frac{1 - P_{a:a+u}^{Inflation}}{\sum_{r=1}^u P_{a:a+r}^{Inflation}}$.

-Le rendement de l'indice action cumulé des dividendes défini de la façon suivante : $\frac{D_a^{Equity}}{D_a^{Cash}}$.

-La croissance réelle des dividendes dont la formule est donnée par Smith : $\frac{D_a^{Equity} (1 - P_{a:a+1}^{Equity})}{D_a^{Inflation}}$.

15.3 La calibration : travaux préliminaires

Les déflateurs n'étant pas une variable économique mais plutôt issus d'une construction mathématique nous ne pouvons pas les estimer de manière statistique.

Il y a deux manières possibles de calibrer un modèle à déflateurs :

-la méthode compliquée serait d'ajouter des déflateurs à un modèle qui possède déjà des quantités observables

-une autre façon de faire est de développer un modèle algébrique avec des déflateurs explicites incluant plusieurs paramètres inconnus (c'est-à-dire des degrés de liberté qui permettront de calibrer pour intégrer dans le modèle des variables telles que la corrélation ou la volatilité).

L'approche choisie dans Timbuk1 est la deuxième.

15.4 Les approximations lognormales

Etant donné que ni les prix, ni les taux d'intérêts ne sont lognormaux de manière exacte, l'approche de l'article est de considérer une approximation lognormale : nous approximations le log des prix et des taux par une expression linéaire de l'innovation du brownien ($B_a - B_{a-1}$).

Les coefficients se déterminent en utilisant un développement de Taylor.

$$*le \text{ Par yield } : \frac{1 - P_{a:a+u}}{\sum_{\tau=1}^u P_{a:a+\tau}} \simeq \frac{P_{a-1:a} - P_{a-1:a+u}}{\sum_{\tau=1}^u P_{a-1:a+\tau}} \cdot \exp[\theta_1(u, \tau, f)\sigma \cdot (B_a - B_{a-1})]$$

$$*les \text{ déflateurs } : D_a P_{a:a+1} = D_{a-1} P_{a-1:a+u} \cdot \exp[(\lambda + \theta_2(u, \tau, f)\sigma) \cdot (B_a - B_{a-1})]$$

$$\text{Avec } \theta_1(u, \tau, f) = \left(1 - \frac{1}{(1+f)^\tau}\right)^{-1} \left(\frac{\min(u, \tau)}{(1+f)^\tau} - \left(1 + \frac{1}{f}\right) \left(1 - \frac{1}{(1+f)^{\min(u, \tau)}}\right)\right)$$

$$\text{et } \theta_2(u, \tau, f) = \left(\min(u, \tau) + \frac{1}{f} \left(1 - \frac{1}{(1+f)^{\max(\tau-u, 0)}}\right)\right)$$

Afin de faciliter la calibration, nous calibrerons sur les processus de variations de prix et de taux. Ce qu'il faut faire par la suite est d'explicitier la matrice des variances covariances des variations de prix et de taux. Cela signifie que l'on calibrera les 5 variables choisies de manière indirecte au travers des propriétés statistiques de leurs variations.

Les propriétés statistiques des processus lognormaux

Comme nous allons calibrer les processus à l'aide de leurs statistiques, nous allons tout d'abord en expliciter certaines :

- L'espérance

si X suit une loi normale d'espérance m et de variance σ alors :

$$\begin{aligned}
 E(\exp(aX + b)) &= \int \exp(ax + b) \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \exp(b) \int \exp\left(\frac{2a\sigma^2 x}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \exp(b) \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-(m+a\sigma^2))^2 + 2ma\sigma^2 + a^2\sigma^4}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \exp\left(ma + b + \frac{\sigma^2 a^2}{2}\right) \int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-(m+a\sigma^2))^2}{2\sigma^2}\right) dx \\
 &= \exp\left(ma + b + \frac{\sigma^2 a^2}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Afin de pouvoir calculer les equations de Timbuk, nous avons aussi besoin de la formule ci-dessous pour un brownien Y (de drift 0 et de variance 1) :

$$E[\exp(\sigma\theta_1 Y)] = \exp\left(\theta_1^2 \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

- La variance :

Le même type de calcul que précédemment fait nous donne pour la variance :

$$Var[\exp(\theta_1 \sigma Y)] = \exp(2\theta_1^2 \sigma^2) - \exp(\theta_1^2 \sigma^2)$$

- La covariance

Pour la covariance, nous utiliserons le fait que :

$$Cov[\exp(aX + c) \exp(bY + d)] = E[\exp(aX + c)] E[\exp(bY + d)].$$

Si X et Y ont une distribution normale de paramètres suivants : $(0, \sigma_1)$ et $(0, \sigma_2)$ et une covariance de σ_{12} , alors $aX + bY$ est aussi distribuée de manière normale avec les paramètres suivants : $\left(0, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12}}\right)$.

Finalement, nous obtenons que :

$$Cov(\exp(aX), \exp(bY)) = \exp\left(\frac{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12}}{2}\right) - \exp\left(\frac{a^2\sigma_1^2}{2} + \frac{b^2\sigma_2^2}{2}\right).$$

Il est important de remarquer que dans notre cas présent $\sigma_{12} = 1$ par construction du modèle d'actif.

15.5 Calibration des jauges

Le Timbuk est calibré sur certaines statistiques (volatilités, corrélations,...) des variations de taux et de prix.

15.5.1 la variance des variations de taux (Par yields) :

En utilisant l'approximation lognormale on obtient :

$$\text{Var} [\text{ParYield}(t) / \text{ParYield}(t-1)] = \exp(2\theta_1^2\sigma^2) - \exp(\theta_1^2\sigma^2).$$

Cette formule donne la volatilité du cash et des variations de l'indice.

15.5.2 la variance des variations de prix :

L'approximation lognormale fournit :

Le CPIIndex à la date a vaut D_a^I / D_a^C , les variations de l'inflation s'écrivent donc :

$$D_a^I / D_a^C \cdot D_{a-1}^C / D_{a-1}^I.$$

Quand à l'Equity Index à la date a il s'écrit D_a^E / D_a^C et sa variation vaut :

$$D_a^E / D_a^C \cdot D_{a-1}^C / D_{a-1}^E.$$

La variance des variations de prix vaut alors :

$$\text{Var} [\text{Price}(t) / \text{Price}(t-1)] = \exp(2(\lambda + \theta_2\sigma)^2) - \exp((\lambda + \theta_2\sigma)^2).$$

Cette expression ci-dessus est correcte pour les variations de prix, si nous posons $u = 0$ dans l'approximation du déflateur.

15.5.3 la variance de la croissance réelle des dividendes (Real Dividend Growth)

En utilisant les deux premières approximations, on obtient la formulation suivante :

$$\text{RealDividendGrowth increment} = D_a^E / D_{a-1}^E \cdot (1 - P_{a:a+1}^E) / (1 - P_{a-1:a}^E) \cdot D_{a-1}^I / D_a^I$$

$$\simeq \exp[(\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) \cdot \sigma_E - \theta_{2I} \cdot \sigma_I) \cdot (B_a - B_{a-1})]$$

Afin d'obtenir cette formule nous utilisons l'approximation du processus de prix des titres (Equity) avec $u = 1$ et l'approximation du processus de déflateur inflation avec $u = 0$.

15.5.4 les corrélations

Il faut afin de les approximer utiliser le fait que si

$$r(t)/r(t-1) = \exp(aX)$$

avec

$$X \sim N(0, \sigma_1)$$

et

$$r'(t)/r'(t-1) = \exp(bY) \text{ où } Y \sim N(0, \sigma_2),$$

cela implique que

$$\text{Corr}(r(t)/r(t-1); r'(t)/r'(t-1)) = \exp\left(\frac{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12}}{2}\right) - \exp\left(\frac{a^2\sigma_1^2}{2} + \frac{b^2\sigma_2^2}{2}\right).$$

15.5.5 les taux long terme

Les taux forward f_{ab} sont les taux futurs d'actualisation qui permettent d'exprimer tous les prix zéro-coupons actuels par la formulation suivante :

$$P_{ab} = (1 + f_{aa})^{-1} (1 + f_{a:a+1})^{-1} \dots (1 + f_{a:b-1})^{-1},$$

ou de manière équivalente à

$$f_{ab} = P_{ab}/P_{a:b+1} - 1.$$

$$\text{En réécrivant que } \prod \frac{P_{a:a+v}}{P_{a-1:a+v}} = \left(\prod \frac{P_{a:a+v}}{P_{a:a+v+1}} \right) \times \frac{P_{b:b+v+1}}{P_{0:v+1}}$$

et sachant que $(1 + f_{a:a+v}) = P_{a:v}/P_{a:v+1}$, nous obtenons :

$\sqrt[b]{\prod \frac{P_{a:a+v}}{P_{a-1:a+v}}} \approx \sqrt[b]{\prod (1 + f_{a:a+v})}$ qui converge vers le taux forward asymptotique pour b assez grand.

$$\text{Dans l'approximation } \prod \frac{P_{a:a+v}}{P_{a-1:a+v}} \approx \frac{D_0}{D_b} \exp[(\lambda + \sigma\tau)(B_b - B_0) - \frac{b}{2}(\lambda + \sigma\tau)^2]$$

nous substituons l'expression d'origine fournie par Timbuk après l'avoir reformulée de la manière suivante :

$$D_b = \sum_{u=b}^{\infty} \frac{const}{(1+f)^u} \times \exp[\sigma (C_b - C_{\min(0, u-\tau)}) + \lambda B_b + \min(u-b, \tau) \sigma B_b - \frac{1}{2} (\lambda + \sigma \tau)^2 b + \frac{\max(0, \tau-u+b) \cdot (\tau+1-u+b)}{12} (6\sigma \lambda + (4\tau + 2u - 2b - 1) \sigma^2)]$$

$$D_b = \sum_{u=b}^{b+\tau-1} \frac{const}{(1+f)^u} \times \exp[\sigma (C_b - C_{u-\tau}) + \lambda B_b + (u-b) \sigma B_b - \frac{1}{2} (\lambda + \sigma \tau)^2 b + (\tau - u + b) (\tau + 1 - u + b) (6\sigma \lambda + (4\tau + 2u - 2b - 1) \sigma^2)] + \sum_{u=b+\tau}^{\infty} \frac{const}{(1+f)^u} \times \exp[(\lambda + \sigma \tau) B_b - \frac{1}{2} (\lambda + \sigma \tau)^2 b]$$

Ce qui donne finalement :

$$D_b = \frac{const \times \exp[-\frac{1}{2} (\lambda + \sigma \tau)^2 b]}{(1+f)^b} \sum_{u=b}^{\tau-1} \frac{1}{(1+f)^i} \times \exp[\sigma (C_b - C_{b+i-\tau}) + (\lambda + \sigma i) B_b + (\tau - i) \dots (\tau - i + 1) (6\sigma \lambda + (4\tau + 2i - 1) \sigma^2)] + const \times \exp[(\lambda + \sigma \tau) \cdot B_b - \frac{1}{2} (\lambda + \sigma \tau)^2 b] \times \frac{1}{f(1+f)^{b+\tau-1}}$$

Lorsque l'on fait tendre b vers l'infini on obtient alors la limite suivante :

$$\sqrt[b]{\prod (1 + f_{a:a+v})} \simeq (1+f) \times \exp \left[\frac{(\lambda + \tau \sigma)^2 - (\lambda + \theta_2 \sigma)^2}{2} \right]$$

On peut ainsi, en comparant les ratios de déflateurs déduire les variations géométriques de long terme des prix pour les actions :

$$f_{EquityGrowth} = \frac{(1+f_C)}{(1+f_E)} \times \exp \left[\frac{(\lambda_C + \tau_C \sigma_C)^2 - (\lambda_E + \tau_E \sigma_E)^2}{2} \right]$$

En utilisant les résultats précédents nous devons résoudre $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ et $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ pour chacune de jauges : *Cash* (λ_C, σ_C), *Inflation* (λ_1, σ_1) et *Equity* (λ_E, σ_E).

Il suffira ensuite d'égaliser les équations suivantes aux quantités économiques prévalant sur le marché.

15.5.6 Les volatilités

Pour l'Inflation : $\exp [2 (\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I} \cdot \sigma_I - \theta_{2C} \cdot \sigma_C)^2] - \exp [(\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I} \sigma_I - \theta - \theta_{2C} \sigma_C)^2]$

θ_{2I} et θ_{2C} sont calculés avec $u = 0$.

- pour la croissance réelle des dividendes : $\exp [2 (\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)^2] - \exp [(\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)^2]$
- pour les Par Yield 10 ans Cash : $\exp [(2\theta_{1C}^2\sigma_C^2)] - \exp [\theta_{1C}^2\sigma_C^2]$
- pour les Par Yield 10 ans Inflation : $\exp [(2\theta_{1I}^2\sigma_I^2)] - \exp [\theta_{1I}^2\sigma_I^2]$
- pour l'Equity : $\exp [2 (\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E}.\sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C)^2] - \exp [(\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E}.\sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C)^2]$

Les covariances - la covariance entre l'inflation et la croissance réelle des dividendes :

$$\exp[0.5((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C)^2 + (\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)^2)] \\ \times [\exp((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C) . (\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)) - 1]$$

-la covariance entre l'Inflation et le Par Yield 10 ans cash :

$$\exp[0.5((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C)^2 + \theta_{1C}^2\sigma_C^2)] \\ \times [\exp((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C) . \theta_{1C}\sigma_C) - 1]$$

-la covariance entre l'Inflation et le Par Yield 10 ans inflation :

$$\exp[0.5((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C)^2 + \theta_{1I}^2\sigma_I^2)] \\ \times [\exp((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C) . \theta_{1I}\sigma_I) - 1]$$

-la covariance entre l'Inflation et l'Equity :

$$\exp[0.5((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C)^2 + (\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E}.\sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C)^2)] \\ \times \exp[((\lambda_I - \lambda_C + \theta_{2I}.\sigma_I - \theta_{2C}.\sigma_C) . (\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E}.\sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C)) - 1]$$

-la covariance entre la croissance réelle des dividendes et la Par Yield 10 ans Cash :

$$\exp[0.5((\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)^2 + \theta_{1C}^2\sigma_C^2)] \\ \times [\exp((\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I) . \theta_{1C}\sigma_C) - 1]$$

-la covariance entre la croissance réelle des dividendes et le Par Yield

Inflation 10 ans :

$$\exp[0.5((\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) .\sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)^2 + \theta_{1I}^2\sigma_I^2)]$$

$$\times \exp\left[\left((\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) \cdot \sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I)^2 + \theta_{1I}^2\sigma_I^2\right) \theta_{1I}\sigma_I - 1\right]$$

-la covariance entre la croissance réelle des dividendes et l'Equity :

$$\exp\left[0.5 \left(\left(\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) \cdot \sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I\right)^2 + \left(\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E} \cdot \sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C\right)^2\right)\right]$$

$$\times \exp\left[\left(\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) \cdot \sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I\right) \cdot \left(\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E} \cdot \sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C\right)\right]$$

1]

-la covariance entre Par Yield Inflation 10 ans et le Par Yield 10 ans

Cash :

$$\exp\left[0.5 \left(\theta_{1I}^2\sigma_I^2 + \theta_{1C}^2\sigma_C^2\right)\right] \cdot \exp\left[\left(\theta_{1I}\sigma_I \cdot \theta_{1C}\sigma_C\right) - 1\right]$$

-la covariance entre le Par Yield 10 ans Cash et l'Equity :

$$= \exp\left[\left(\left(\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E} \cdot \sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C\right)^2 + \theta_{1C}^2\sigma_C^2\right)\right]$$

$$\times \left[\exp\left(\left(\lambda_E - \lambda_I + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) \cdot \sigma_E - \theta_{2I}\sigma_I\right) \cdot \theta_{1C}\sigma_C\right) - 1\right]$$

-la covariance entre le Par Yield Inflation 10 ans et l'Equity :

$$= \exp\left[\left(\left(\lambda_E - \lambda_C + \theta_{2E} \cdot \sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C\right)^2 + \theta_{1I}^2\sigma_I^2\right)\right]$$

$$\times \left[\exp\left(\left(\lambda_E - \lambda_C + (\theta_{1E} + \theta_{2E}) \cdot \sigma_E - \theta_{2C}\sigma_C\right) \cdot \theta_{1I}\sigma_I\right) - 1\right]$$

Les taux long terme -le taux forward Cash :

$$f_{Cash}^{0-1an} = (1 + f_C) \times \exp\left[\frac{(\lambda_C + \tau_C\sigma_C)^2 - (\lambda_C + \theta_{2C}^u\sigma_C)^2}{2}\right]$$

-le taux forward Inflation :

$$f_{Inflation}^{0-1an} = (1 + f_I) \times \exp\left[\frac{(\lambda_I + \tau_I\sigma_I)^2 - (\lambda_I + \theta_{2I}^u\sigma_I)^2}{2}\right]$$

-le taux forward Equity :

$$f_{Equity}^{0-1an} = (1 + f_E) \times \exp\left[\frac{(\lambda_E + \tau_E\sigma_E)^2 - (\lambda_E + \theta_{2E}^u\sigma_E)^2}{2}\right]$$

-le taux Cash forward 10-11 ans :

$$f_{Cash}^{0-1an} = (1 + f_C) \times \exp\left[\frac{(\lambda_C + \tau_C\sigma_C)^2 - (\lambda_C + \theta_{2C}^u\sigma_C)^2}{2}\right]$$

-le taux long terme de croissance du capital :

$$f_{EquityGrowth} = \frac{(1+f_C)}{(1+f_E)} \times \exp\left[\frac{(\lambda_C + \tau_C\sigma_C)^2 - (\lambda_E + \tau_E\sigma_E)^2}{2}\right]$$

La calibration du modèle nécessite des données d'un marché X (français, US...) tel que les prix des zéros-coupons des trois numéraires (inflation, cash, actions), les volatilités, les covariances...etc

Nous avons implémenté la calibration sous Matlab, les méthodes utilisées sont présentées en annexe. Ci dessous un tableau des paramètres d'entrée du modèle, résultats de la calibration pour le marché anglais avant 2001.

Numeraires :		Cash	CPI	Equity
tau		20	20	20
finf		5,125%	1,570%	2,081%
lambda		0,366665	0,236537	0,302127
		0,000000	0,031203	0,106377
		0,000000	0,118099	-0,003413
		0,000000	0,000000	0,000840
		0,000000	0,000000	0,066525
sigma		-0,006490	0,002906	-0,009461
		0,007547	0,003599	-0,009761
		0,000000	-0,006942	0,000898
		0,000000	0,000290	-0,000291
		0,000000	0,000000	-0,004100
ZCB Prices	1	0.946552025	0.963787966	0.976371802
	2	0.89611911	0.92932045	0.953459521
	3	0.848679367	0.897366379	0.931238892
	4
	5			
	...			
	30	0.223459917	0.556719588	0.520590266

Table des paramètres / Résultats de la calibration

Sixième partie

Applications du modèle à une garantie plancher

16 Valorisation de cash flow par les déflateurs

16.1 L'algorithme

En plus de produire des rendements d'equity, des obligations etc, notre modèle stochastique produit des déflateurs. ces derniers prennent la forme d'une série temporelle. Supposons que l'on veuille estimer le prix de marché d'un cash flow X recevable à la date t . Notons $X(\text{sim})$ la valeur de X correspondant à la simulation sim . La valeur estimée de X est alors

$$\text{valeur} = \text{moyenne} \{ \text{deflateur}(\text{sim}, t) * X(\text{sim}) \}$$

Le déflateur est indépendant du cash flow que nous calculons. Si nous voulions valoriser différents cash flows, tous payables à la date t , nous aurions utilisé le même déflateur dans chacun des cas. Nous pouvons alors voir le déflateur (sim, t) comme étant le poids que le marché donne à la simulation sim dans le calcul des prix de marchés.

Pour pricer un ensemble de cash flows, il suffit de valoriser le flux à chaque date future puis sommer les valeurs présentes.

16.2 Validation de l'Algorithme

Pour valider l'algorithme, nous avons besoin de nous assurer de la consistence avec les prix de marché. Prenons le cas d'un portefeuille dont la valeur à la date t est $V(\text{sim}, t)$. Supposons que cette variable est un index du rendement du portefeuille et que la valeur initiale $V(\text{sim}, 0)$ est constante pour toutes les simulations.

Pour obtenir la consistance de nos prix avec ceux du marché, nous devons nous assurer que pour chaque portefeuille nous avons :

$$V(\text{sim},0) = \text{moyenne} \{ \text{deflateur}(\text{sim},t) * V(\text{sim},t) \}$$

Cela devrait fonctionner pour les portefeuilles d'actions et d'obligations.

Considérons l'exemple d'un portefeuille d'obligations zéro-coupons à une date future t donnée. Dès lors $V(\text{sim},t) = 1$. D'où

$$\text{prix du zéro coupon} = V(\text{sim},0) = \text{moyenne} \{ \text{déflateur}(\text{sim},t) \}$$

16.3 Relation Risque / Rendement

Nous pouvons le test du déflateur comme suit :

$$V(\text{sim},0) = \text{moyenne} \{ \text{deflateur}(\text{sim},t) * V(\text{sim},t) \} = \text{moyenne} \{ \text{deflateur}(\text{sim},t) \} * \text{moyenne} \{ V(\text{sim},t) \} + \text{covariance} \{ \text{deflateur}(\text{sim},t), V(\text{sim},t) \} \\ = \text{PV du flux moyen au taux sans risque} + \text{ajustement du risque.}$$

Si le portefeuille V gagne une prime de risque relative au taux sans risque, nous devrions avoir un ajustement négatif dans cette équation. En d'autres termes, le portefeuille devrait être négativement corrélé avec le déflateur. Le faible prix initial peut alors s'expliquer par le fait que le marché pondère faiblement les scénarii dans lesquels les sous-jacents ont les meilleures performances.

Notons qu'assigner une fonction d'utilité au marché n'a pas de sens. Nous ne pouvons parler que d'utilité de chaque investisseur. Le marché comporte plusieurs investisseurs avec différentes utilités, en agrégeant nous n'aboutissons pas à une "utilité moyenne". Le marché à un déflateur. Ce dernier reflète les préférences combinées de tous les investisseurs.

16.4 Théorie du Pricing d'Options

Prenons un produit dérivé qui paye une fonction $h(x)$ d'un sous-jacent x . Sous le modèle de Smith, x a une probabilité dont la densité est $f(x)$. Seulement, l'option est pricée selon une densité risque neutre différente $g(x)$. Soit z un prix de zéro-coupon. nous avons alors :

$$\text{Prix de l'option} = zE^g[h(x)] = z \int h(x)g(x)dx = \int h(x)[z \frac{g(x)}{h(x)}]f(x)dx = \\ E^f \left([h(x)[z \frac{g(x)}{f(x)}]] \right)$$

Nous pouvons interpréter le terme entre parenthèses comme étant le déflateur. Nous pouvons utiliser des distributions multivariées suivant le même principe.

17 Applications numériques

Une calibration préalable des paramètres de marché λ, σ, τ, f est nécessaire ainsi que celle des browniens historiques. Les premiers sont déterminés grâce à la résolution du système d'équations non linéaires suivant la méthode de Newton-Raphson. Le calcul des Browniens nécessite quant à lui l'utilisation de la méthode Singular Value Décomposition (voir annexe).

Ces résultats devront ensuite être saisis dans la feuille Inputs sous excel. Aucune calibration de la constante n'est nécessaire, cette dernière étant égale à 1. Il suffit alors renseigner le nombre de simulations, l'horizon de calcul ainsi que la graine du générateur (seed) puis de choisir les données que l'on veut déterminer, VRAI pour les afficher, FAUX sinon.

Nous allons appliquer cette méthode des déflateurs aux mêmes exemples précédents pour valoriser la garantie plancher.

La valeur d'un cash flow X_t vaut : $\frac{1}{D_0} E[D_t X_t]$

où X_t est le payoff d'un put. Nous allons utiliser les calibrations issues du marché anglais de Timbuk1 pour valoriser le prix de cette option (la volatilité de l'indice action utilisée dans Timbuk est de 20%). Nous avons besoin alors du déflateur Equity noté D_E ainsi que du déflateur Cash noté D_C pour les 30 maturités. Ces derniers nous permettent de calculer le Cumulative Dividend Equity Price Index qui correspond au rendement d'un indice boursier. Nous supposons que l'assuré a investi ses primes sur ce support. En prenant un strike de 100, il suffit alors de calculer le $\max(0, 100 - \text{indice} \times 100)$ pour chaque échéance avec n simulations. Une moyenne de ces simulations nous permettra alors de déterminer le prix de cette option à chaque date pour les 30 maturités. Il suffit alors de calculer la somme des prix de ces options pondérés par les probabilités de décès extraites de la table de mortalité TD 88 selon la même formule de valorisation que précédemment (cf 3.1).

Nous avons fait varier l'âge de souscription à la garantie plancher et nous obtenons les résultats suivant :

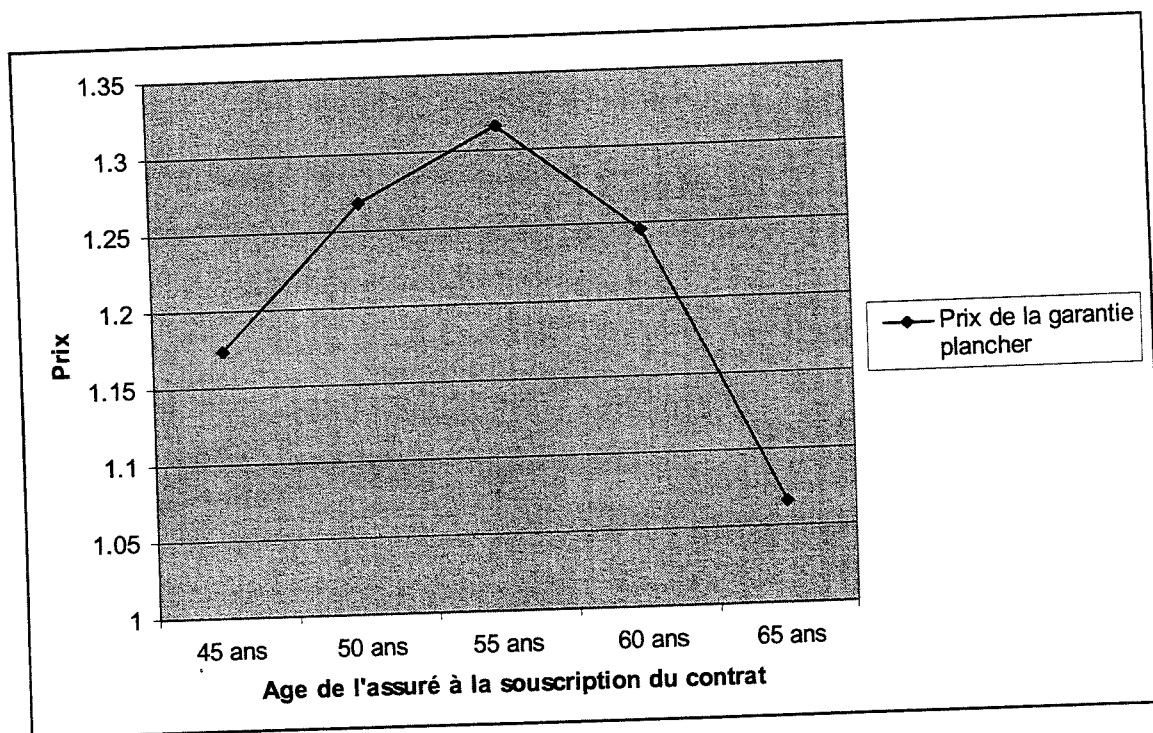


FIG. 3 – Evolution du prix de la garantie plancher pour un assuré âgé de x années pour un contrat valable jusqu'à 75 ans

18 Comparaison des méthodes de valorisation

Nous avons valorisé par trois méthodes différentes (Black Scholes, régime switching, méthode des déflateurs) une garantie plancher en cas de décès pour un assuré âgé de 45 à 65 ans souscrivant à un contrat valable jusqu'à l'âge de 75 ans.

Nous remarquons que le modèle en régime switching produit un prix supérieur à celui de Black et Scholes. Ce résultat s'explique par le fait que le modèle en régime switching permet une modélisation des mouvements extrêmes des sous-jacents. D'ailleurs, la probabilité de transition du régime 1 au régime 2 est très faible, ce qui explique ce faible écart ($p_{12} = 0.06\%$).

Nous remarquons ensuite que l'évolution du prix de la garantie plancher

en fonction de l'âge de l'assuré suit la même tendance pour les trois méthodes. Nous vérifions ainsi que l'intuition des déflateurs est bien consistante avec le modèle de Black et Scholes.

Les prix produit par timbuk1 sont inférieurs à ceux des deux autres modèles car le modèle est plus sensible aux variations des paramètres de marché. En effet, dans les modèles en probabilité risque-neutre, la volatilité du sous-jacent est un facteur majeur de la valorisation d'une option. Dans le modèle de Smith, l'indice action simulé par la méthode de Monte Carlo pour calculer notre garantie plancher est calibré de telle manière à tenir compte de ses interactions avec cinq variables économiques majeures (forte corrélation avec l'indice inflation par exemple). De plus, dans la projection stochastique sous des probabilités réelles du modèle de M. Smith, des paramètres économiques long terme tel que les taux long forward sont pris en compte contrairement aux modèles précédents. Nous remarquons que dans le modèle de Smith les valeurs des sous-jacent sont plus stables que les valeurs de marchés. Aussi, Timbuk1 minimise l'influence des données historiques et maximise celle des prix de marché. Il suppose que le prix reflète toute l'information du marché.

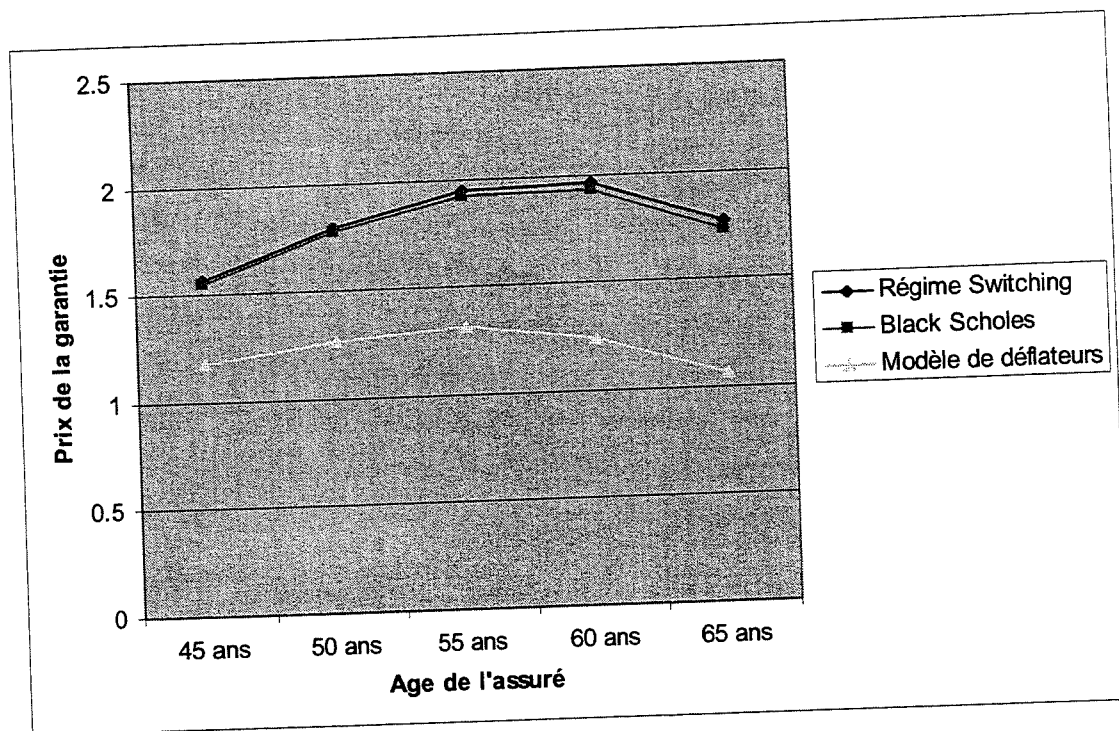


FIG. 4 – Comparaison des trois méthodes de valorisation

19 Conclusion

Nous avons étudié différentes méthodes pour valoriser une garantie plancher en cas de décès de manière consistante avec le marché. Nous avons vu que l'engagement de l'assureur pour ce type de produits correspond à une option financière de vente détenue par l'assuré.

Nous avons alors valorisé ces options par la formule de Black-Scholes. Seulement, cette méthode serait valable sur un horizon court mais ne nous donne pas un prix cohérent sur le long-terme du fait que cette méthode ne perçoit pas le comportement extrême du rendement du sous-jacent sur le long terme.

Nous avons ensuite vu que les modèles lognormaux en régime switching sont un moyen très simple d'introduire une volatilité stochastique au sein de la valorisation d'une option. Seulement, l'application de ces méthodes est

souvent inappropriée du fait que les cash flow à valoriser n'ont pas la même forme que les options traitées sur le marché.

Finalement nous avons élargi le cadre défini dans les premières parties pour déterminer une fair value à travers la méthode des déflateurs stochastiques développé par le modèle de M. Smith : Timbuk1. Cette approche est très intéressante dans la mesure où elle combine les pricing de Black-Scholes avec la tradition de projections stochastiques réalistes. La calibration est plus simple puisque les paramètres long terme incertains sont moins importants.

Afin de déterminer une fair value, les actuaires ont besoin d'un outil qui puisse calculer la valeur de marché de produits complexes qui ne sont pas directement traités sur le marché. La méthode des déflateurs répond à ce besoin.

Le modèle des déflateurs stochastiques est consistante avec les analyses qui suggèrent que plusieurs séries temporelles économiques tels que les taux d'intérêts, les taux de rendement annuels sur investissements, la croissance des dividendes ou l'inflation sont le mieux décrits par des processus stationnaires ARMA (Auto Regressive Moving Average).

De plus, les modèles conventionnels économétriques sont basés sur des lois normales ou gaussiennes. Cependant, il est manifeste que les lois de distribution des principales variables économiques sont loin d'être gaussiennes. En particulier, des mouvements soudains et assez significatifs (sauts) des marchés arrivent assez fréquemment et cela les rend incompatibles avec les distributions gaussiennes. Il est donc important pour les managers de posséder un modèle économique qui puisse refléter les distributions en queues épaisses des rendements observés sur les marchés. Le modèle de M. Smith utilise une famille de lois de distributions à cinq paramètres afin de fournir une représentation la plus fidèle que possible du passé économique en utilisant des lois gaussiennes.

Ce modèle a considéré trois grandes classes d'actifs qu'il utilise comme numéraires, il y'en a encore beaucoup d'autres que les investisseurs peuvent choisir comme l'immobilier, les obligations de l'entreprise, etc. Dans certains cas, étendre ce modèle à d'autres actifs est assez simple; Il suffira alors d'augmenter la taille des matrices du système. Cela pourrait en effet ex-

plier son choix arbitraire des dimensions des paramètres utilisés (λ, σ) . En effet, ce choix lui permet d'incorporer d'autres numéraires dans son modèle. Nous avons montré avec ce mémoire que la formule de M. Smith pour les déflateurs stochastiques présentait des caractéristiques intéressantes et consistantes avec le marché. Un projet futur possible serait de tenter de la démontrer.

20 ANNEXES

20.1 Annexe 1 : La méthode de Newton Raphson pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires.

Il n'y a pas de bonne méthode générale pour la résolution de systèmes de plus d'une équation. De plus, il est assez simple de voir pourquoi : considérons pour cela le cas à deux dimensions suivant où nous voulons résoudre simultanément :

$$f(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

Les fonctions f et g sont de fonctions quelconques dont chacune d'elle a des racines qui divisent le plan (x, y) en régions où les fonctions respectives sont soit positives soit négatives. Ces courbes de racine sont d'un grand intérêt pour la solution : les solutions que l'on cherche (s'il y en a) sont les racines communes à f et g . Malheureusement, les fonctions f et g n'ont en général aucune relation entre elles. Afin de déterminer tous les points communs qui sont les solutions de notre système non linéaire, il faudra en général déterminer les contours de racines de chacune des équations. Ces contours sont en général un nombre inconnu de courbes disjointes et le plus difficile à déterminer est si l'on a bien trouvé toutes ces courbes disjointes.

Pour les problèmes à plus de deux dimensions, nous devons trouver les points communs aux N surfaces délimitées par les racines et chacune de dimension $N-1$. Nous voyons donc bien que la détermination de racines devient très difficile sans un certain a priori des solutions. Nous aurons toujours besoin d'utiliser de l'information additionnelle, spécifique au problème posé pour répondre à des questions telles que de savoir si l'on s'attend à une solution unique ou de savoir où elle se trouve approximativement.

Dans notre travail nous appliquerons la méthode la plus simple de recherche de racines multidimensionnelles, celle de Newton Raphson. Cette méthode fournit des moyens assez efficaces de converger vers la racine si nous avons une bonne idée initiale de cette dernière. La méthode peut aussi

très bien ne pas converger du tout indiquant (sans le prouver) que la racine n'existe pas à proximité.

Un problème typique fournit N fonctions à annuler comportant les variables $x_i, i = 1, \dots, N$

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, N$$

Notons x le vecteur des valeurs des x_i et F représente le vecteur des fonctions F_i . Au voisinage de x , chacune des fonctions F_i peut s'écrire en série de Taylor :

$$F_i(x + \delta x) = F_i(x) + \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \delta x_i + o(\delta x^2)$$

La matrice des dérivées partielles apparaissant dans l'équation précédente est la matrice jacobienne J :

$$J_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

En négligeant les termes d'ordre δx^2 et les suivants et en écrivant $F(x + \delta x) = 0$, nous obtenons un système d'équations avec correction δx qui fait converger simultanément les équations vers 0, ce qui s'écrit sous forme matricielle de la façon suivante :

$$J \cdot \delta x = -F$$

Ce système d'équation matricielle peut se résoudre par ce qui s'appelle la décomposition LU. Supposons alors que nous puissions écrire une matrice A de la manière suivante : $A=LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure. Notre système s'écrira donc

$$Ax = (LU)x = L(Ux)$$

et sa résolution se fait alors en deux étapes :

- Trouver le vecteur y tel que $L \cdot y = b$
- Et ensuite résoudre $U \cdot x = y$

La décomposition LU a pour avantage de faciliter les calculs. Des corrections sont alors apportées au vecteur des solutions,

$$x_{new} = x_{old} + \delta x$$

Et le processus s'itère en convergeant vers la solution. En général il est préférable de vérifier le degré de convergence à la fois des fonctions et des variables. Une fois que l'une des deux converge vers une certaine précision, l'autre ne bouge plus.

L'algorithme fonctionne alors de la façon suivante : nous posons un vecteur de solutions initiales noté $x[1..N]$. Les itérations s'arrêtent lorsque la magnitude des écarts des fonctions F_i est inférieure à un seuil de tolérance donné ou bien la valeur absolue des corrections δx_i est inférieure à un autre seuil voulu.

20.2 Annexe 2 : Décomposition en valeurs singulières

Pour déterminer les chocs passés de tel sorte à pouvoir calculer les l'accumulation des valeurs historiques des browniens, nous avons utilisé la méthode de décomposition en valeur singulière. Ces valeurs détermineront la pente initiale de la courbe des taux

Pour générer P_{1b} , nous avons besoin de $B_0, C_1, C_0, C_{-1} \dots C_{-\tau}$.

Pour $a=0$ et $b=\tau$, d'après la formule du zéro-coupon nous avons :

$$P_{0\tau} = \sum D_0(P_{0:u} - P_{0:u+1}) = \exp[(\lambda + \sigma\tau).B_0] \cdot \sum \frac{const}{(1+f)^u}$$

ce qui nous amène à l'équation suivante :

$$(E_0) \quad (\lambda + \sigma\tau).B_0 = \text{Ln}[P_{0\tau} \cdot f \cdot (1+f)^{\tau-1} / const]$$

En prenant $a=0$ et $b = \tau, \tau-1, \dots, 0$, l'équation de Timbuk donne :

$$(E_1) \quad \text{Ln}[K_1(\tau-1) \cdot (P_{0:\tau-1} - P_{0:\tau})] - K_2(\tau-1) - [\lambda + \sigma(\tau-1)].B_0 = \sigma \cdot B_{-1}$$

...

$$(E_{\tau-1}) \quad \text{Ln}[K_1(1) \cdot (P_{0:1} - P_{0:2})] - K_2(1) - [\lambda + \sigma \cdot 1].B_0 - \sigma \cdot [B_{-1} + \dots + B_{2-\tau}] = \sigma \cdot B_{-1}$$

$$\text{avec } K_1(x) = \frac{1}{const} \times (1+f)^x \text{ et } K_2(x) = \frac{(\tau+1-x)}{12} \times (6\sigma\lambda + (4\tau + 2x - 1)\sigma^2)$$

Nous résolvons ce système de 3τ équations (3 numériques) et 5τ inconnues (les B sont de dimension 5). Pour $\tau = 20$ nous nous retrouvons alors avec un système d'équation à 60 équations et 100 inconnues à résoudre. Nous n'espérons pas alors une unique solution. Nous utilisons alors une décomposition en valeur singulière.

L'idée de base consiste à écrire une matrice M sous la forme $U'M_dV$, où M_d est une matrice diagonale, et U et V sont les matrices lignes orthonormées et U' est la transposée hermitienne de U. La décomposition en valeurs singulières écrit une matrice sous la forme d'un produit d'une matrice diagonale avec des matrices dont les lignes et colonnes sont orthonormées.

Les éléments de la diagonale de M_d sont les valeurs singulières de la matrice M. L'une des interprétations possibles des valeurs singulières est la

suivante : prenons une sphère unitaire dans un espace à n dimensions et multiplions chaque vecteur de cette sphère par une matrice M $m \times n$, nous obtiendrons un ellipsoïde dans un espace à m dimensions. Les valeurs singulières donnent les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde. Si la matrice M est singulière, la forme de l'ellipsoïde sera modifiée en conséquence. En réalité, le rapport entre la plus grande valeur singulière de la matrice et la plus petite donne le conditionnement de la matrice, qui détermine par exemple la précision des inverses de matrices numériques.

La définition standard de l'inverse d'une matrice est incorrecte si la matrice est rectangulaire. Toutefois, la décomposition en valeurs singulières permet de définir une pseudo-inverse même pour des matrices rectangulaires ou des matrices carrées singulières. La pseudo-inverse est définie à l'aide des objets U , M_d et V par $M^{-1} = V' M_d^{-1} U$. Une propriété de la pseudo-inverse est que la somme des carrés de tous les éléments de $M.M^{-1}-I$, où I est la matrice identité, est minimale. La pseudo-inverse est utile lors de la recherche des approximations de données numériques. Elle est parfois appelée inverse généralisée ou inverse de Moore-Penrose.

Nous obtenons ainsi des valeurs pour $B_0 \dots B_{-\tau+1}$ que nous accumulons pour calculer les C .

20.3 Annexe 3 : Echantillon des prix des obligations zéros-coupons utilisé

ZCB Prices	1	0.946552025	0.963787966	0.976371802
	2	0.89611911	0.92932045	0.953459521
	3	0.848679367	0.897366379	0.931238892
	4	0.804188422	0.868654666	0.909686558
	5	0.762589365	0.843908857	0.88878003
	6	0.723776189	0.823526465	0.868497651
	7	0.687486581	0.806598632	0.848818567
	8	0.653467373	0.792056588	0.829722691
	9	0.621512878	0.778994368	0.811190675
	10	0.591455245	0.766626553	0.793203879
	11	0.563150546	0.754374142	0.775744346
	12	0.536456461	0.742183869	0.758794773
	13	0.511251482	0.730118961	0.742338483
	14	0.48743672	0.71823417	0.726359406
	15	0.464931609	0.706578471	0.710842053
	16	0.443645713	0.695186173	0.69577149
	17	0.423412386	0.684046641	0.681133321
	18	0.404077202	0.673141321	0.666913667
	19	0.385516031	0.662454783	0.653099142
	20	0.367626885	0.651974122	0.639676839
	21	0.350343718	0.641688478	0.626634307
	22	0.333683137	0.631588645	0.613857702
	23	0.317667565	0.621666757	0.601341603
	24	0.30230641	0.611916035	0.589080698
	25	0.287599359	0.602330585	0.577069784
	26	0.273538922	0.592905228	0.565303763
	27	0.260112385	0.583635373	0.553777642
	28	0.247303317	0.574516909	0.542486531
	29	0.235092721	0.565546113	0.531425637
	30	0.223459917	0.556719588	0.520590266

20.4 Annexe 4 : Résultat de la simulation de Timbuk1 (Rendement de l'indice FTSE 100)

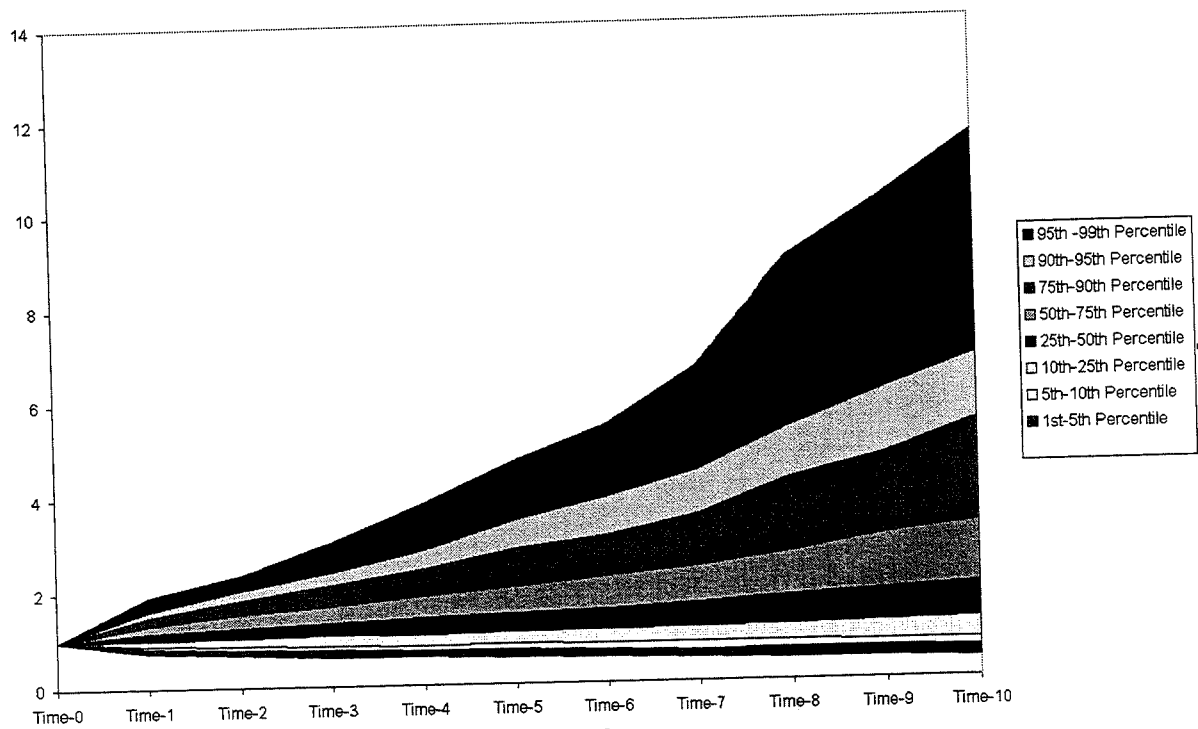


FIG. 5 – Résultat de la simulation de Timbuk pour le Rendement de l'indice FTSE 100 sur un horizon de 10 ans

20.5 Annexe 5 : Résultat de la simulation de Timbuk (Deflateur Cash)

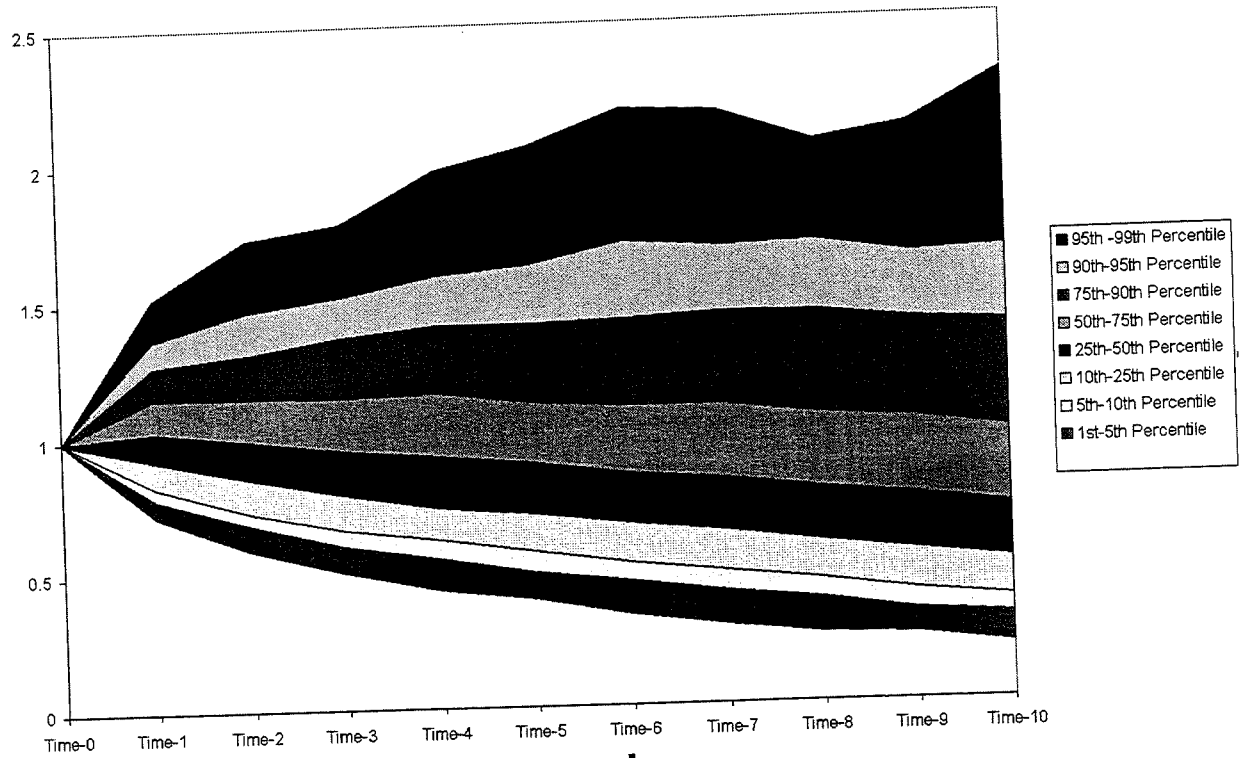


FIG. 6 – Résultat de la simulation de Timbuk pour le Deflateur Cash sur un horizon de 10 ans

20.6 Annexe 6 : Résultat de la simulation de Timbuk (Déflateur Action)

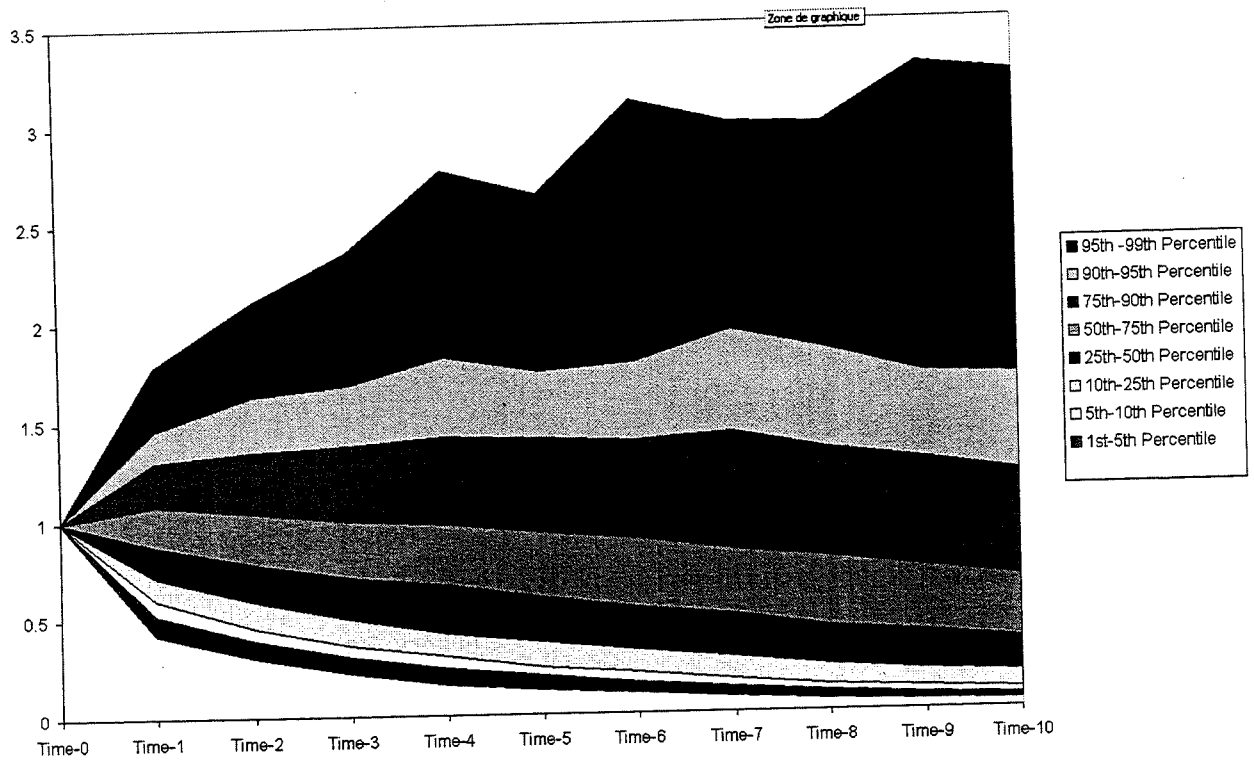


FIG. 7 – Résultat de la simulation de Timbuk pour le Déflateur Action sur un horizon de 10 ans

21 Références

- [1] Andrew Smith, 1998, *Gauge Transforms in Stochastic Investment Modelling*
- [2] Andrew Smith, 2001, *A Stochastic Asset Model for Fair Values in Pensions and Insurance*
- [3] Annette Kurz, *Pricing of Equity-linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee and Periodic Premiums.* .
- [4] Bezooeyen J Van, Mehta SJB, & Smith AD. 2000. *Investment strategy and valuation of with-profits products.*
accessible sur le site : http://www.actuaries.org.uk/library/proceedings/fin_inv/2001/sr
- [5] Black & Scholes, 1973. *The Pricing of Options & corporate Liabilities*, J.Political Econom. 81 p637-654
- [6] Bollen (1998), *Valuing Options in Regime Switching Models*, Journal of Derivatives 6 : 38-49
- [7] Boyle, P., Broadie, M. and Glasserman, P. (1998). *Monte Carlo methods for security pricing*, Journal of Economic Dynamics and Control 3 : 1267-1321
- [8] Brace A, Gatarek D, & Musiela M, 1997. *The Market Model of Interest rate dynamics*. Math. Finance 7, p 127-154
- [9] CHAPMAN, R.J., GORDON, T.J. & SPEED, C.A. (2001) *Pensions Funding & Risk*.
<http://www.actuaries.org.uk/sessional/sm0104.pdf>
- [10] Darrell Duffie : *Dynamic Asset Pricing Theory*
- [11] HAIRS C. J., BELSHAM D. J., BRYSON N. M., GEORGE C. M., HARE D. J. P., HEADDON C. P., MILLER, K. A. & THOMPSON S. (2001). *Fair Valuation of Liabilities*.
accessible sur le site : <http://www.actuaries.org.uk/sessional/sm0111.pdf>
- [12] Lamberton, lapeyre 1997 *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*.

- [13] Lapeyre, Pardoux, Sentis. Springer *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*.
- [14] Mary R. Hardy. *A Regime-Switching Model Of Long-Term Stock Returns*, North American Actuarial Journal, Volume 5, Number 2.
- [15] Mary R. Hardy. Scandinavian Actuarial Journal. 2002 : *Bayesian Risk Management for Equity-Linked Insurance*.
- [16] Mémoire IAF 2001 de Sylvain Coriat et Jean-Francois Raybaud : « *Engagements de l'assureur et garantie plancher* ».
- [17] PETAUTON Pierre *Théorie et pratique de l'assurance vie* Dunod, 1996
- [18] Smith AD, 1996. *How Actuaries Can Use Financial Economics*. BAJ Vol 2, part V No. 10 Dec 1996
- [19] Steven Shreve : *Stochastic Calculus and Finance*
- [20] Stuart Jarvis, Frances Southall, Elliot Varnell, 2001, *Modern Valuation Techniques*
accessible sur le site : <http://www.sias.org.uk/papers/mvt.pdf>
- [21] Wilkie, 1995 *More on a Stochastic Asset Model for Actuarial Use*.