Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Thibaut Kervevan

Valorisation de la commutation d'un traité de réassurance portant sur la garantie plancher

Confidentialité : ☒ NON ☐OUI (Durée : ☐ 1 an ☐2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

Entreprise :

Nom : AXA France

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Membres présents du jury de la filière

Nom : Marie Maedler

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Institut de Statistique
de l'Université de Paris
ISUP

Mémoire

Valorisation de la commutation d'un traité de réassurance portant sur la garantie plancher.

Thibaut KERVEVAN

Octobre 2016

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier l'équipe Rentabilité et Réassurance de la direction technique d'AXA France pour l'année que j'ai passée en leur compagnie. Leur attention et explications diverses ont favorisé mon adaptation au monde de l'entreprise et ont contribué à rendre ce stage agréable.

Un grand merci tout particulier à Paul-Arthur Jeantaud, mon tuteur, et Marie Maedler, responsable de l'équie, qui par leurs conseils, pédagogies et soutiens ont rendu ce mémoire possible.

Enfin, je souhaite remercier l'équipe pédagogique de l'ISUP qui ont contribué à la réussite de mes études ces trois dernières années.

Résumé

Un assureur peut, pour différentes raisons, vouloir commuter un traité de réassurance, c'est-à-dire qu'il souhaite mettre fin à la cession de son risque à un autre organisme. Mais cette commutation a un coût. En effet, cesser de céder primes et sinistres engendre généralement une perte de résultat dans les années futures pour le réassureur. Il ne peut donc pas accepter de commuter gratuitement.

Dans un contexte de contrats d'épargne dont la garantie plancher est réassurée, nous cherchons à calculer le prix d'une commutation. Cela passe par l'estimation des primes et sinistres à venir mais aussi par la prise en compte du coût du capital immobilisé.

Dans ce mémoire, nous comparerons les résultats donnés par deux méthodes : la méthode de Monte-Carlo et la méthode des *puts*.

Mots clés

Commutation, Réassurance vie, Solvabilité 2, Garantie plancher, Epargne, Monte-Carlo, Black-Scholes

Abstract

An insurer can, for different reasons, want to commute a reinsurance treaty, *i.e.* it wants to end the cession of its risk to another organism. But this commutation has a price. Indeed, stopping the transfer of the accidents and the premiums to a reinsurer can produce a loss of income for the latter. Then it cannot accept to commute for free.

In a context of saving contracts with a reinsured floor guarantee, we are looking for calculating the price of a commutation. It means we have to estimate future premiums and accidents but we also have to take into account the cost of capital.

In this thesis, we will compare the resultats given by two methods : the Monte-Carlo method and the method of the puts.

Key words

Commutation, Life reinsurance, Solvency 2, Floor guarantee, Savings, Monte-Carlo, Black-Scholes

Table des matières

Remerciements **2**

Résumé **4**

Abstract **5**

Introduction **10**

1 Les grands principes de l'épargne **11**
1.1 Types de support 11
1.1.1 Supports en euro 11
1.1.2 Supports en unités de compte 12
1.2 Garanties plancher 13
1.2.1 Le fonctionnement 13
1.2.2 Les types de tarification 15
1.2.2.1 La tarification *a priori* 15
1.2.2.2 La tarification *a posteriori* 16

2 Réassurance et commutation de traité **18**
2.1 Introduction à la réassurance 18
2.1.1 Définitions et caractéristiques 18
2.1.2 Les différents modes de réassurance 19
2.1.3 Les différents types de réassurance 20
2.1.3.1 La réassurance proportionnelle 20
2.1.3.2 La réassurance non proportionnelle 21
2.2 La commutation d'un traité de réassurance 22
2.2.1 Préparation 23
2.2.2 Valorisation 24
2.2.3 Négociation avec le réassureur 24
2.2.4 Décision 24

3 Approche générale de la commutation **25**
3.1 Détermination de l'indemnisation à verser 25
3.2 Contexte de l'étude 28
3.2.1 Présentation du traité 28
3.2.2 Présentation du portefeuille 28
3.3 Agrégration du portefeuille 30

4 Simulation des primes et sinistres **36**
4.1 Méthode de Monte-Carlo 36
4.1.1 Présentation du modèle 36
4.1.2 Résultats 40
4.2 Méthode des *puts* 44
4.2.1 Théorie de la méthode 44
4.2.2 Résultats 49

5 Calcul du coût du capital immobilisé **52**
5.1 Solvabilité 2 52
5.1.1 Généralités 52
5.1.1.1 Le bilan prudentiel 52
5.1.1.2 Les différents risques et méthodes pour le calcul du SCR 53
5.1.1.3 Principe du calcul d'un SCR pour un module de risque 55
5.1.2 Composantes du capital à immobiliser 56
5.1.2.1 La VIF à t_0 56
5.1.2.2 Le SCR à t_0 58
5.1.2.3 La MVM à t_0 62
5.1.2.4 La projection des grandeurs calculées 62
5.1.2.5 Le capital à immobiliser et le coût du capital immobilisé 64
5.2 Avec la méthode de Monte-Carlo 66
5.3 Avec la méthode des *puts* 66

6 Résultats finaux **68**

Conclusion **71**

Introduction

Quand un assureur et un réassureur entrent en contact, chacun espère une relation durable. Mais il peut arriver que l'une ou l'autre des parties souhaite mettre un terme au traité qui les lie. Quand cela arrive, un accord de commutation doit être négocié. L'organisme de réassurance Scor définit une commutation comme étant la *"reprise par la compagnie cédante des risques cédés au réassureur moyennant restitution des provisions et actifs résiduaires constitués au titre du traité"* .

L'opération de commutation est relativement peu connue et représente une zone obscure au niveau de la réglementation. Aucune méthode n'est privilégiée par l'Institut des Actuaires pour le calcul de l'indemnisation. La mise en place d'une commutation s'appuie donc sur la négociation et l'accord des deux parties. Pour cela, un prix d'indemnisation doit être calculé en prenant en compte une certaine marge en vue de cette négociation.

L'objectif de ce mémoire est l'estimation de ce prix de commutation dans un contexte de réassurance sur des produits d'épargne proposant une garantie plancher.

Dans un premier temps, nous posersons les bases de la problématique. Nous verrons les outils nécessaires à la compréhension des concepts théoriques - que ce soit par rapport à des notions d'épargne ou de réassurance - et pratiques - au niveau de la modélisation - que l'on rencontrera au cours de ce mémoire.

L'essentiel du prix de l'indemnisation se base sur les primes et sinistres futurs. Il existe plusieurs méthodes permettant de les simuler avec plus ou moins de précision. Nous verrons ces différentes méthodes afin d'en comparer les résultats.

Enfin, d'autres coûts interviennent dans la valorisation de la commutation avec notamment celui lié à l'immobilisation de capital pour répondre à la réglementation type Solvabilité II.

Chapitre 1

Les grands principes de l'épargne

Les contrats d'épargne sont des produits qui permettent à un souscripteur de capitaliser une somme issue d'un versement, qu'il soit unique ou non, qui sera investie sur un ou plusieurs supports afin de lui assurer un rendement.

À l'échéance du contrat, l'épargnant recevra soit un capital, soit une rente viagère qui lui sera, par définition, versée jusqu'à la fin de sa vie. Ce capital ou cette rente correspond aux montants investis augmentés des intérêts capitalisés.

Toutefois, le capital peut être reversé à une autre date que l'échéance. En effet, l'assuré dispose de plusieurs clauses dans son contrat lui permettant de racheter, c'est-à-dire de récupérer tout ou une partie de son capital investi, et ceci à tout moment. En outre, en cas de décès de l'assuré, le capital est reversé aux ayant-droits.

Notre étude s'intéresse uniquement au marché de l'épargne. Il convient donc de présenter les deux grandes familles de ce type de produit : les contrats en euro et les contrats en untités de compte.

1.1 Types de support

1.1.1 Supports en euro

Les supports euro sont des supports dit "sans risque" sur lesquels l'assuré peut placer son épargne afin d'être sûr de le conserver en totalité quelque soit l'évolution des marchés financiers. Même dans le cas d'un scénario catastrophe (en cas de krash boursier par exemple) l'assureur s'engage à ne pas répercuter de moins-values sur l'épargne placé sur un support euro.

En plus de proposer une revalorisation minimale de 0%, ce type de support propose souvent des garanties supplémentaires tel que le Taux Minimum Garanti qui est déterminé à la souscription du contrat pour toute la durée de vie de celui-ci ou le Taux Minimum Garanti Annuel qui fluctue tous les ans selon la formule :

$$TMGA_t = 65\% \frac{\text{Taux net servi}_{t-1} + \text{Taux net servi}_{t-2}}{2}$$

L'épargne est aussi revalorisée chaque année par la Participation aux Bénéfices qui correspond à une partie des bénéfices réalisés par l'assureur durant l'année et qui est réservée aux assurés. La réglementation impose aux assureurs de reverser un minimum de 85% des bénéfices financiers issus de l'épargne des assurés. Les assureurs de la place, dans une situation de concurrence, reversent souvent plus que ce minimum réglementaire. Ce taux de participation est stipulé dans le contrat dans la clause de participation aux bénéfices.

Il est à noter que l'assureur possède une certaine liberté dans cette redistribution puisqu'il doit respecter un reversement minimum de 85% au global. Cela lui laisse la possibilité de favoriser des clients et il n'est pas obligé de verser l'intégralité du montant immédiatement puisqu'un délai de huit ans lui est accordé. Durant cette période, l'assureur peut provisionner partiellement ou totalement ce montant dû aux assurés dans une provision appelée différemment selon les assureurs Provision pour Participation aux Bénéfices ou Provision pour Participation aux Excédents.

Ainsi ce type de contrat est adapté aux épargnants souhaitant disposer d'une formule sans risque car il offre une sécurité totale de l'investissement. Le risque est porté par l'assureur.

1.1.2 Supports en unités de compte

À la différence des placements dits "en euros", le capital n'est pas garanti, seul le nombre de parts l'est. Mais la valeur de chaque part peut fluctuer selon l'évolution des marchés financiers, ainsi le risque est porté entièrement par l'assuré. Ces supports sont donc plus risqués mais affichent un rendement espéré supérieur.

La réglementation fixe la liste des actifs pouvant ainsi servir de valeur de référence. On peut citer, parmi les plus couramment utilisés : les obligations, les actions, les parts de fonds commun de placement, les titres de créances négociables, les OPCVM (Organisme de Placements Collectifs de Valeurs Mobilières) ou les parts de la société civile immobilière.

Afin de ne pas être dépendant du comportement d'un seul support, les contrats d'épargne ne sont que très rarement mono-support, *i.e.* investis sur un seul support euro ou bien un seul support UC. L'épargne d'un contrat est dans la majorité des cas répartie sur plusieurs supports afin de minimiser les risques.

Mais même dans le cas d'un investissement multi-supports, en cas de mauvais résultats des marchés financiers, l'épargne de l'assuré peut s'effondrer. Pour remédier à cela et assurer un capital minimum y compris sur de l'UC, les assureurs proposent aujourd'hui des Garanties Plancher.

1.2 Garanties plancher

Avec le développement considérable des contrats en unités de compte et l'évolution à la baisse des marchés financiers, il est naturel de s'intéresser aux types de garanties que peuvent proposer ces contrats à leurs souscripteurs. Les turbulences des marchés financiers, illustrées notamment en 2001 et 2008, ont rappelé aux investisseurs le risque lié à ce type de placements.

1.2.1 Le fonctionnement

Au vu de la chute des marchés boursiers, les assureurs sont amenés à proposer de partager le risque de marché avec l'assuré, et du même coup rendre le contrat plus sécurisé, et donc plus attractif, aux yeux de l'investisseur. Cela s'est concrétisé par l'ajout de garanties décès optionnelles aux contrats. La plus répandue sur le marché est la "garantie plancher". Cette garantie a pour but de protéger les ayants droit du souscripteur en cas de décès de celui-ci contre une baisse des marchés financiers. Ceci se concrétise par le versement, en cas de décès de l'assuré, d'une prestation égale au maximum entre le cumul des primes investies, nettes des frais de souscription et des rachats éventuels, que l'on notera MG, et le montant de la provision mathématique à la date du décès de l'assuré. Ainsi, quelles que soient les fluctuations boursières, le bénéficiaire du contrat recevra au minimum le cumul des primes investies nettes des frais de souscription (et nettes de rachats, le cas échéant).

Plaçons-nous dans le cas du versement d'une prime unique qui, nette de frais, vaut PM_0, de manière formelle, si PM_t représente le montant de la provision mathématique à l'instant t, et si T est la date de décès de l'assuré, le bénéficiaire recevra une prestation égale à $Max(PM_T, PM_0)$ où PM_0 représente le montant initial investi net de frais de souscription.

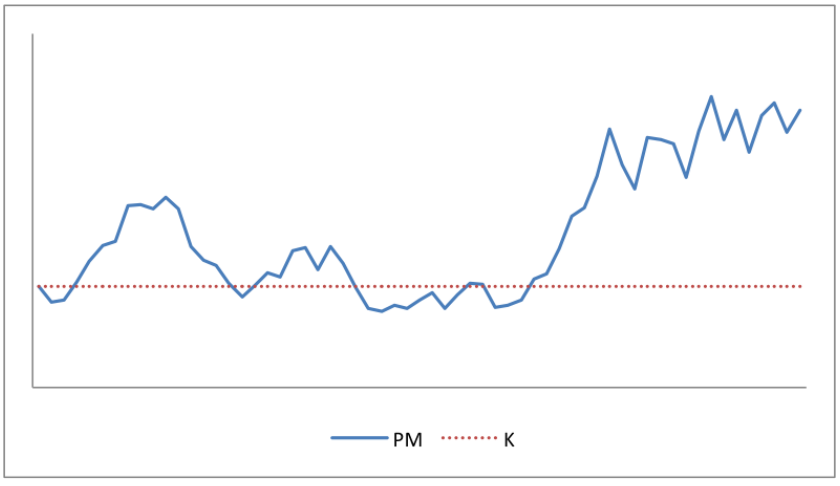

FIGURE 1.1 – Garantie plancher

D'autres garanties plus perfectionnées existent sur le marché pour ces contrats

mais le principe est identique. On peut citer la garantie décès indexée qui propose une prestation dont le montant est au minimum égal à la prime investie, capitalisée avec un taux particulier. Le bénéficiaire recevra alors en cas de décès de l'assuré une somme égale à $Max(PM_T, PM_0 e^{rT})$ où r est le taux continu annuel de la valorisation de la garantie et où T représente la durée entre la date d'investissement initial et la date de décès de l'assuré.

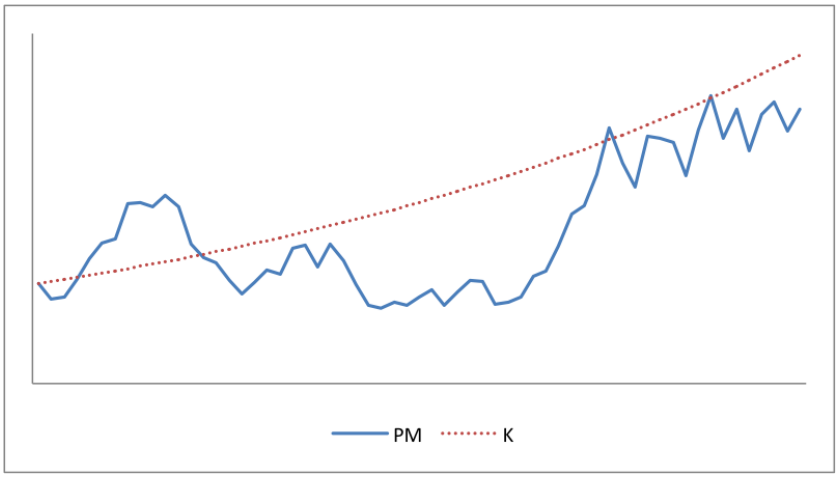

FIGURE 1.2 – Garantie indexée

La garantie décès cliquet propose quant à elle comme prestation minimum la plus haute valeur de l'unité de compte durant la période de référence. Formellement, la prestation est alors égale à $Max(PM_T, Max_{i=0...T} PM_i)$.

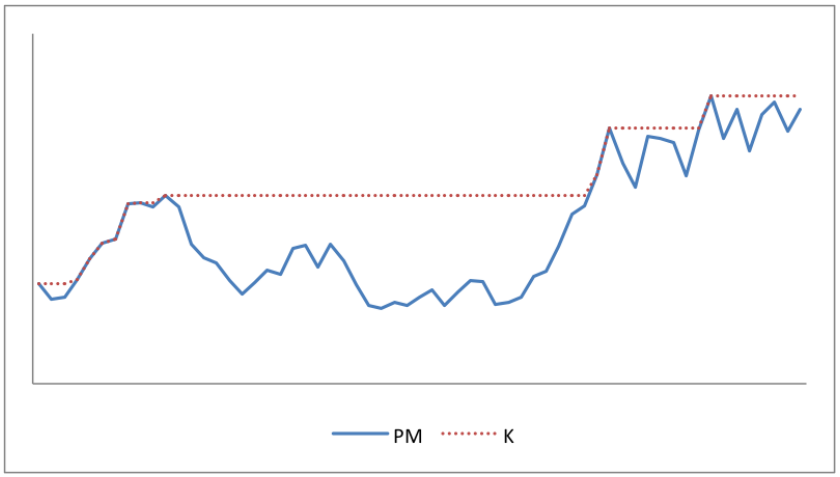

FIGURE 1.3 – Garantie cliquet

Les méthodes d'évaluation de ces différentes garanties sont proches, et dans la suite on considère que la garantie est fixée, et correpond au remboursement en cas de décès d'un montant au moins égal à l'investissement initial auquel on ajoute les versements de l'assuré au cours de la vie du contrat soustrait des différents rachats.

1.2.2 Les types de tarification

Il existe deux types de tarification de la garantie plancher. Bien qu'elles permettent toutes les deux de couvrir le risque lié à la garantie, elles n'abordent pas le sujet avec la même vision.

1.2.2.1 La tarification *a priori*

La tarification *a priori*, ou à la prime sur encours, consiste à financer la garantie plancher par un prélèvement périodique sur l'épargne du contrat selon une proportion fixée à l'avance. Le taux de frais à appliquer est déterminé à l'initialisation du contrat (ou de la génération du contrat) : c'est le taux de prélèvement qui égalise les engagements probables de l'assureur et des assurés au titre de la garantie plancher.

La grande majorité des assureurs utilisent la tarification *a priori*. Par simplicité d'abord, car les frais sont ici déterminés "une fois pour toute", mais aussi parce que l'assuré appréhende plus facilement le montant dont il doit s'acquitter.

L'inconvénient de ce type de tarification provient du fait que la prime de l'assuré qui sert à provisionner la garantie plancher est proportionnelle à la Provision Mathématique et donc inversement proportionnelle au risque. En cas de baisse des marchés, la Provision Mathématique de l'assuré diminue, il devra donc payer une prime moins importante alors que la différence entre le capital garanti et la valeur de l'épargne, aussi appelé Capital Sous Risque (CSR), augmente.

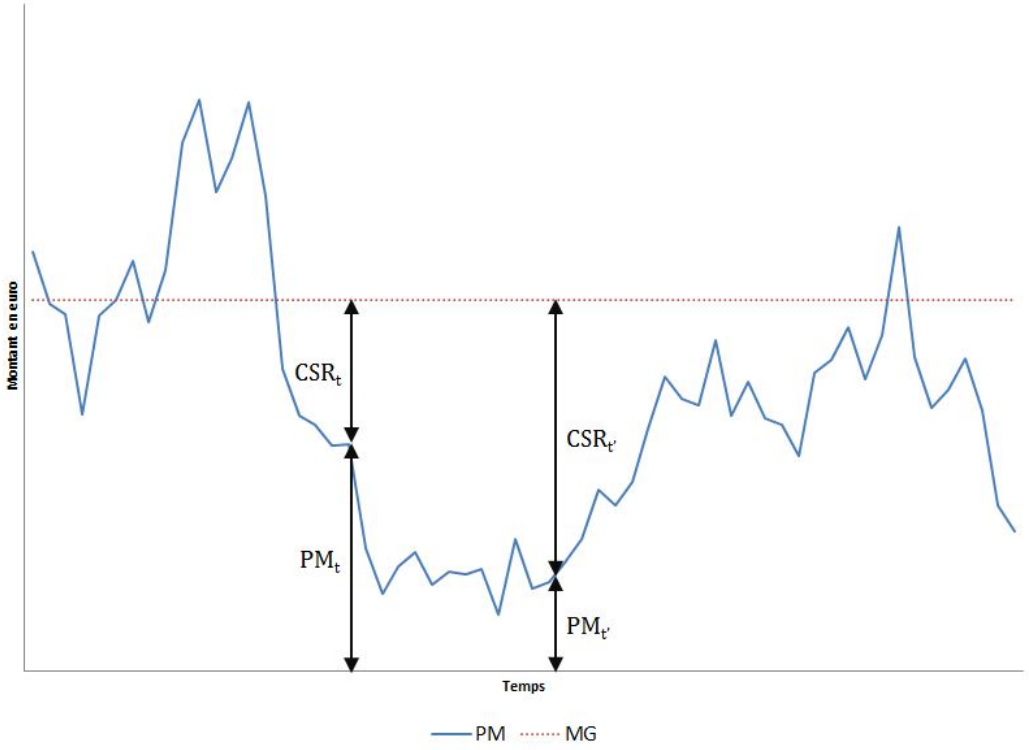

FIGURE 1.4 – Illustration de l'inversement proportionnalité de la prime et du risque encouru

1.2.2.2 La tarification *a posteriori*

La tarification *a posteriori*, aussi appelée tarification à la prime de risque, consiste à appliquer périodiquement la probabilité de survenance à la prestation complémentaire qui sera payée par l'assureur si le risque se réalise (c'est-à-dire la différence entre le capital garanti et la valeur de l'épargne, aussi appelé capital sous risque). Le montant résultat, la prime de risque, est acquitté par le souscripteur à la fin de la période de couverture (le mois ou le trimestre en général).

Notons que dans le cas d'une tarification *a posteriori*, l'assureur n'est pas contraint de provisionner la garantie plancher. En effet, si la fréquence de calcul des frais est suffisamment élevée, la prime reçue périodiquement couvre très convenablement le risque financier (sous réservse évidemment d'une bonne connaissance de la probabilité d'exercice de la garantie plancher). Les engagements de l'assureur et de l'assuré sont donc continuellement ajustés de telle sorte qu'aucun provisionnement n'est nécessaire.

Par exemple, on considère un contrat d'assurance vie en unités de compte proposant une garantie plancher en cas de décès dont les frais sont calculés *a posteriori*, mensuellement. Pour un mois donné, le montant des frais pour garantie plancher dont devra s'acquitter le souscripteur est égal au produit du Capital Sous Risque au terme du mois par la probabilité qu'avait l'assuré de décéder au cours du mois sans avoir préalablement racheté son contrat.

Le risque lié à la garantie plancher est quasi inexistant : quelle que soit la situation du contrat, florissant ou catastrophique, l'assureur est sûr de recevoir un montant de frais qui compensera exactement son engagement, nul si l'épargne dépasse le montant garanti, sinon d'autant plus important que le capital sous risque est élevé.

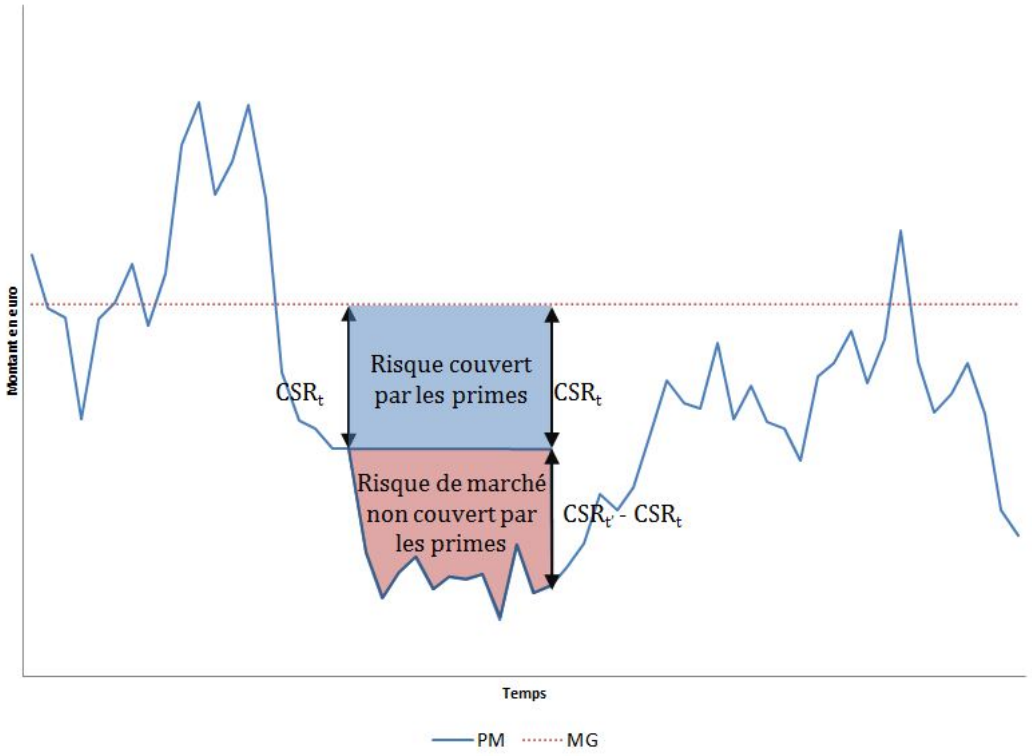

FIGURE 1.5 – Risque de l'assureur à chaque période

Le seul risque qui persiste est le cas où l'épargne de l'assuré diminue entre deux prélèvements de prime et que celui-ci décède durant cette période. Alors, la prime prélevée avant le décès ne couvrirait pas la totalité du CSR à l'instant du décès.

Pour se couvrir de ce risque et ainsi observer une volatilité moindre du résultat de l'assureur, celui-ci peut décider de faire réassurer son portefeuille.

Chapitre 2

Réassurance et commutation de traité

2.1 Introduction à la réassurance

D'un point de vue historique, la réassurance moderne apparaît en Allemage vers la fin du XIXème siècle, au moment de la révolution industrielle. Ce n'est qu'au début des années 1980 que la réassurance devient une activité professionnelle à part entière, puisqu'elle est désormais prise en charge par des compagnies spécialisées, et non plus par des assurances.

2.1.1 Définitions et caractéristiques

Selon l'APREF (Association des Professionnels de la Réassurance En France), la réassurance pourrait se définir de façon simple comme "l'assurance des assureurs". En réalité, il s'agit d'un contrat par lequel une ou plusieurs sociétés spécialisées (les réassureurs ou les cessionnaires) prennent en charge partiellement ou totalement des risques souscrits par un assureur (la cédante) auprès de ses assurés. Par cette opération, le réassureur s'engage à rembourser à l'assureur une partie des sommes versées au titre des sinistres, en cas de réalisation du risque. En contrepartie, il perçoit une portion des primes versées par les assurés. Ainsi, les sociétés d'assurance se protègent contre les risques qui dépassent leur propre capacité et qui pourraient déstabiliser leur bilan et les entraîner ainsi vers l'insolvabilité. De la même façon, les réassureurs peuvent à leur tour se décharger d'une partie de leurs risques, auprès d'un ou plusieurs réassureurs, alors appelés rétrocessionnaires.

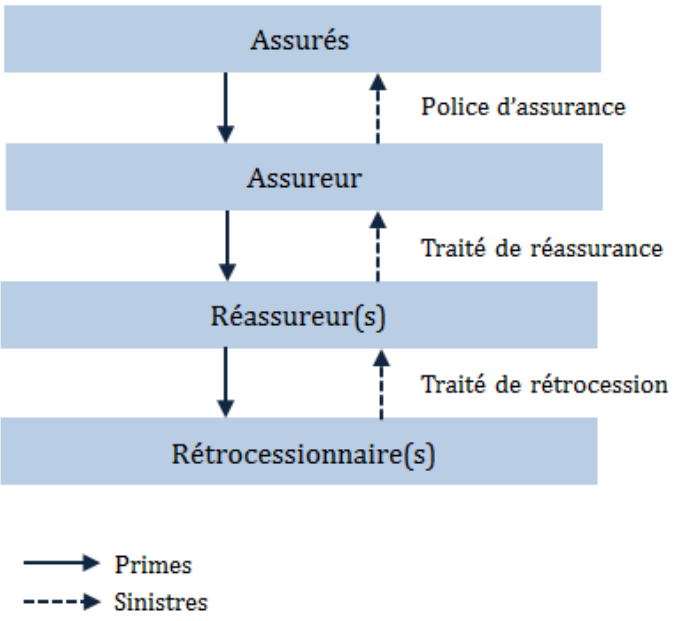

FIGURE 2.1 – Présentation schématique du principe de réassurance

1. *La réassurance dans le monde*

L'assurance mondiale représentait en 2012 un chiffre d'affaire de 3 500 milliards d'euros, selon l'APREF. Sur ce montant total, la part cédée représentait environ 180 milliards d'euros. À la différence de l'assurance, la réassurance est une activité essentiellement non-vie. En effet, cette branche représente à elle seule 72% des primes cédées aux réassureurs.

2. *Un marché nécessairement international*

Le principe de mutualisation est au coeur de l'activité d'assurance et de réassurance. Il s'avère cependant beaucoup plus large pour un réassureur, car il opère dans le monde entier. À cette diversité géographique s'ajoute une diversité technique, liée à sa capacité à traiter des risques à la fois vie et non-vie. Cette position particulière permet ainsi aux réassureurs de porter certains risques que ne peuvent porter les assureurs.

2.1.2 Les différents modes de réassurance

Il existe trois principaux modes de réassurance : la réassurance facultative, obligatoire et facultative-obligatoire.

1. *La réassurance facultative*

Il s'agit de la forme de réassurance la plus simple et la plus ancienne. Elle a la particularité de laisser le choix à l'assureur de céder, ou non, du risque au réassureur, et à ce dernier, d'accepter ou non ce transfert de risque. Elle est principalement utilisée pour couvrir de grands risques, dont les sommes assurées dépassent largement la capacité de souscription de la compagnie (ex : risques industriels) et/ou des risques exclus des traités de réassurance (ex : tremblements de terre).

2. *La réassurance obligatoire*

Elle établit des obligations réciproques, c'est-à-dire une obligation de céder tous les risques du portefeuille concerné pour l'assureur, et une obligation de les accepter pour le réassureur. Elle est couramment utilisée pour réassurer une communauté de risques (ex : ensemble d'un portefeuille de polices automobiles). Dans ce contexte, le traité de réassurance se négocie en amont (généralement pour le 1er janvier de chaque année).

3. *La réassurance facultative-obligatoire*

En réassurance facultative-obligatoire, l'assureur a la latitude de décider de l'opportunité de réassurer un risque et ce, dans des proportions acceptables. Le réassureur, quand à lui, n'a pas le choix et s'engage à accepter toutes les affaires que la cédante lui attribuera sous réserve que l'engagement ne dépasse pas un montant maximum fixé au départ.

2.1.3 Les différents types de réassurance

Les dispositifs de réassurance se classent en deux grandes catégories : la réassurance proportionnelle et non proportionnelle.

2.1.3.1 La réassurance proportionnelle

Dans ce type de réassurance, la proportion des primes cédées au réassureur est égale à la proportion de charges assumées par celui-ci. La gestion des contrats et des sinistres étant totalement effectuée par la cédante, le réassureur lui verse en contrepartie une commission de réassurance, en pourcentage des primes cédées.

1. *Traité en quote-part*

Il s'agit de la forme de réassurance la plus simple. Le réassureur prend en charge une proportion identique des risques du portefeuille de l'assureur et reçoit en contrepartie la même proportion de primes.

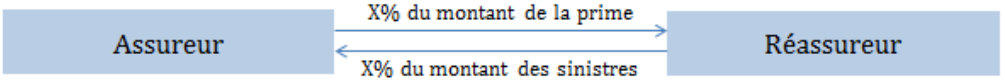

FIGURE 2.2 – Présentation schématique du principe de quote part

2. *Traité en excédent de plein*

Avec cette forme de traité, l'assureur conserve, pour chaque risque, un montant appelé "plein de rétention". Par conséquent, le réassureur n'intervient que si la somme à assurer dépasse ce montant dans la limite de la capacité définie. La somme maximale alors garantie par l'assureur à ses assurés est appelée le "plein de conservation". Ce montant est variable, puisque le niveau de rétention et de cession l'est aussi en fonction des risques.

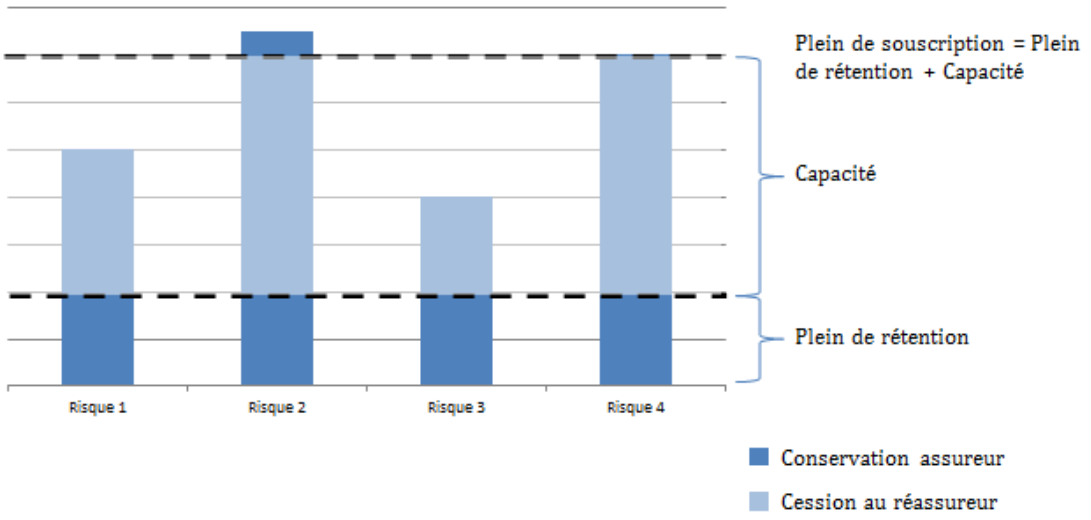

FIGURE 2.3 – Présentation schématique du principe d'excédent de plein

2.1.3.2 La réassurance non proportionnelle

Contrairement à la réassurance proportionnelle, le réassureur d'un tel dispositif perçoit une prime unique annuelle et verse à la cédante un montant qui ne dépend pas uniquement de la survenance ou non du sinistre, puisque deux autres paramètres entrent en jeu : la priorité (F) et la portée (P). Le premier définit le seuil à partir duquel le réassureur commence à payer le sinistre et le second représente l'engagement maximum par sinistre du réassureur. Puisqu'il intervient dans la limite de la portée définie par le traité, le réassureur d'un tel dispositif a un rôle restreint au risque.

La structure de réassurance peut changer de priorité ou de portée, le but étant toujours de répondre aux besoins spécifiques de chaque cédantes, sachant que :

- Une priorité (et une portée) basse(s) indique(nt) que la cédante souhaite couvrir la partie dite "travaillante" du portefeuille. En d'autres termes, elle se couvre principalement contre l'augmentation de fréquence, ce qui lui permet de maîtriser son résultat.
- Une priorité élevée indique que la cédante se protège essentiellement contre les risques rares et coûteux, afin de protéger son résultat.

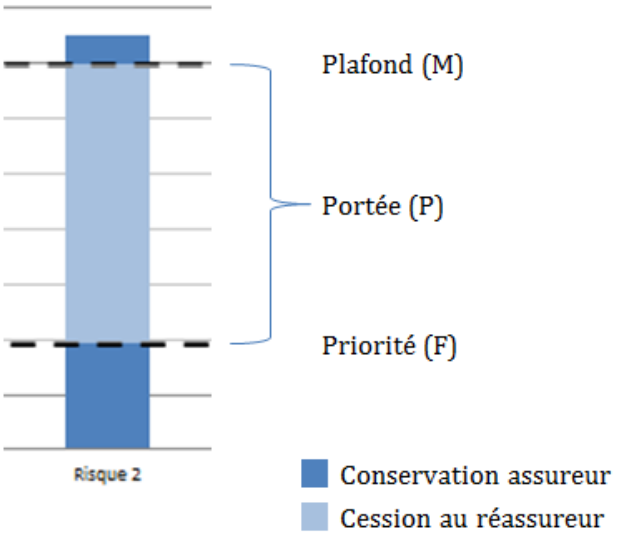

FIGURE 2.4 – Présentation schématique de la réassurance non proportionnelle

1. *Excédent de sinistres*

Les traités en excédent de sinistres, couramment notés <*Portée*>*XS*<*Priorité*>, peuvent être décomposés en deux grandes catégories, selon la nature de l'événement défini par le traité : *XS* par risque ou *XS* par événement.

Dans un traité en *XS* par risque, le réassureur s'engage à payer, dans une période déterminée, un montant inférieur ou égal à la portée, à chaque fois qu'une police est sinistrée par un montant supérieur à la priorité.

Les traités en *XS* par événement n'interviennent qu'après les éventuelles réassurances proportionnelles ou *XS* par risque. Le réassureur s'engage alors à payer un événement faisant intervenir plusieurs polices sinistrées du fait d'une même cause, limité dans l'espace et dans le temps.

2. *Excédent de perte*

L'excédent de pertes, ou *Stop-Loss*, intervient lorsque l'assureur cherche à se prémunir contre les mauvais résultats (c'est-à-dire, les ratios S/P [1] élevé), non plus en s'attaquant aux montants des sinistres, mais aux résultats eux-mêmes. Le réassureur s'engage alors à protéger, à hauteur d'un certain montant, les résultats dépassant le ratio S/P cible au-delà duquel l'assureur est obligatoirement en perte.

2.2 La commutation d'un traité de réassurance

La commutation d'un traité de réassurance n'est pas une opération simple et rapide. Un assureur qui souhaite cesser de céder un risque doit mener de longues

1. S/P : Ratio de sinistres à primes calculé par l'assureur afin de vérifier la rentabilité d'une police d'assurance. Celle-ci est considérée comme rentable lorsque le ratio est inférieur à 100%.

études. En particulier s'il ne sait pas *a priori* quel traité commuter.

Les opérations de commutation sont des études à mener au cas par cas car toutes différentes. Néanmoins le point de départ essentiel réside dans le choix du portefeuille que l'assureur ne souhaite plus réassurer. En effet, il doit avoir une parfaite connaissance de celui-ci afin d'être en mesure de correctement mener les négociations.

Le projet se divise en plusieurs phases :
- la préparation ;
- la valorisation ;
- la négociation avec le réassureur ;
- la décision.

2.2.1 Préparation

La première étape est l'étude détaillée du portefeuille et du traité de réassurance afin de connaître parfaitement les particularités du produit. Cela peut permettre de trouver d'anciens traités qui seraient intéressants à commuter. La commutation d'un traité n'est pas possible sans la parfaite connaissance de toutes les caractéristiques de celui-ci ainsi que du portefeuille réassuré.

De nombreuses raisons peuvent justifier le souhait de commuter :
- fardeau administratif :
  - beaucoup de petits traités réassurant des portefeuilles stables ;
- mauvaises performance :
  - les indicateurs de performance indiquent de mauvais résultats ;
  - les coûts sont significativement plus élevés en administrant plusieurs traités ;
- différents points de vue sur le portefeuille :
  - la cédante a plus d'expérience que le réassureur (asymétrie de l'information) ;
  - différent opinion sur le développement futur du portefeuille ;
- modifications de la régulation
- changements dans l'appetit au risque ou la stratégie :
  - un changement de stratégie pourrait mener à de différents modèles ;
  - un changement de l'appétit au risque impacte le risque accepté par la cédante ou le réassureur ;

Chaque entité concernée doit, après avoir identifié un traité potentiel à commuter, approuver le projet à propos de plusieurs points :
- l'entité dispose d'assez de fonds pour financer l'opération ;
- l'entité est à même d'assumer de voir son volume d'affaires changer ;
- la transaction concorde avec la stratégie et l'appétit au risque de l'entité.

Certains impacts de la transaction sont durs à évaluer sans une valorisation détaillée mais une approximation doit être faite au cours de la première étape de l'étude.

2.2.2 Valorisation

L'approche de la valorisation dépend de la disponibilité des outils actuariels standards et de données appropriées.

Dans le cas où toutes les données nécessaires sont disponibles et que l'on dispose de modèles actuariels appropriés, une approche *Best Estimate* peut être envisagée de la même façon que si l'on calculait une Embedded Value sous Solvabilité 2.

En Solvabilité 2, les provisions *Best Estimate* correspondent à l'actualisation de tous les flux probables futurs (cotisations, prestations, frais, fiscalité, ...) actualisés avec une courbe des taux sans risque.

Il est important de prédéfinir un intervalle de prix afin d'être prêt pour les négociations. La valorisation devra prendre en compte le point de vue des deux partis : celui de la cédante et celui du réassureur.

2.2.3 Négociation avec le réassureur

Avant d'entamer les négociations, il existe quelques règles rudimentaires :
- La cédante doit bien préparer les raisons la poussant à vouloir commuter afin de convaincre le réassureur de ce qu'il a à gagner par cette opération ;
- Les objectifs du projet doivent être bien définis avant la transaction pour être correctement suivis durant le processus de négociation ;
- Rester transparent auprès du réassureur et lui fournir les données dont il a besoin ;
- Les négociations doivent être menées de manière juste et transparente afin de garder de bonnes relations avec le réassureur qui peut rester un partenaire important sur d'autres traités.

2.2.4 Décision

Après l'évaluation de tous les aspects de la transaction, la décision doit être prise avec l'accord de toutes les entités concernées voire à un niveau au dessus dans la hiérarchie. Cela permet notamment d'émettre une seconde opinion sur l'aboutissement du projet.

Chapitre 3

Approche générale de la commutation

3.1 Détermination de l'indemnisation à verser

Nous allons ici déterminer quels sont les éléments à prendre en compte pour calculer le prix d'une commutation.

En signant un traité, le réassureur et la cédante se sont engagés à se verser mutuellement des primes et des sinistres pour une durée indéterminée. Mais l'existence d'un traité n'implique pas que l'échange de *cash flows* entre les deux acteurs, elle implique aussi des coûts de gestion supplémentaires ainsi qu'une variation au niveau du capital immobilisé des deux parties. Cela a pour conséquence que la cédante et le réassureur n'ont pas la même vision sur le prix de commutation.

En commutant, l'assureur compte gagner de l'argent en augmentant son résultat. Le réassureur de son côté observe une diminution de son résultat puisqu'il perd une affaire mais il espère rattraper cette perte par l'indemnisation que la cédante lui versera. C'est la différence de résultat entre le cas où il y a commutation et le cas où il y a maintien du traité qui permet de déterminer une fourchette d'indemnisation à l'intérieur de laquelle pourra être négocié un prix.

Ce résultat correspond à la somme actualisée de tous les résultats annuels sur la durée de vie du portefeuille. Pour que cette durée ne soit pas infinie, le portefeuille doit être en "*run off*", *i.e.* le portefeuille ne doit plus accepter de nouvelle affaire, le nombre de contrats ne peut alors que diminuer jusqu'à son extinction.

On notera pour la suite R_A et R_R les résultats de l'assureur et du réassureur sur la garantie plancher du portefeuille étudié en cas de maintien du traité.

De même, on notera R_A^C et R_R^C les résultats sur la garantie plancher des deux parties en cas de commutation.

Observons les différents *cash flow* qui interviennent dans ce type de contrat en

cas de maintien du traité de réassurance :

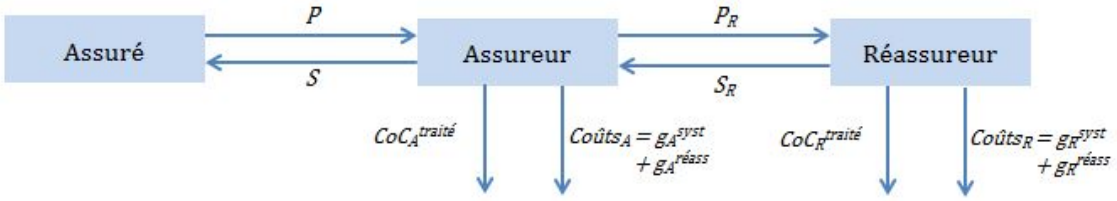

FIGURE 3.1 – Flux entre les acteurs liés au contrat en cas de maintien du traité

L'assureur perçoit des primes P versées par l'assuré dans le cadre de la garantie plancher mais reverse des sinistres S. La gestion de ces contrats a un coût. Ce coût, en présence de réassurance peut être distingué en deux éléments : les coûts g_A^{syst} dits systématiques qui sont liés à l'activité d'assurance et les coûts $g_A^{réass}$ qui sont liés au recours à la réassurance. Enfin, offrir une garantie plancher à ses assurés comporte un risque et implique donc d'immobiliser du capital pour faire face à n'importe quel événement qui pourrait survenir et qui ferait diminuer le résultat. Immobiliser ce capital comporte aussi un coût que l'on notera dans le cas où il y a recours à la réassurance $CoC_A^{traité}$ (*Cost of Capital*).

Le réassureur à son tour perçoit des primes de réassurance P_R de l'assureur et reverse à celui-ci un certain montant de sinistres S_R. De la même manière que la cédante, le réassureur doit faire face à des coûts de gestion notés g_R^{syst} et $g_R^{réass}$ ainsi qu'à des coûts du capital immobilisé noté $CoC_R^{traité}$.

De tous ces éléments, on déduit le résultat de l'assureur et du réassureur en cas de maintien du traité :

$$R_A = (P - S) - (P_R - S_R) - (g_A^{syst} + g_A^{réass}) - CoC_A^{traité}$$
$$R_R = (P_R - S_R) - (g_R^{syst} + g_R^{réass}) - CoC_R^{traité}$$

Voyons maintenant les échanges de *cash flows* en cas de commutation :

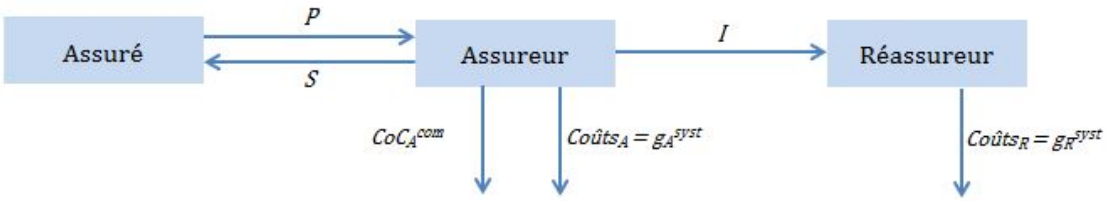

FIGURE 3.2 – Flux entre les acteurs liés au contrat en cas de commutation

Il n'y a plus d'échange de primes et de sinistres de réassurance entre la cédante et le réassureur mais on prend tout de même en compte le versement de l'indemnisation.

Puisque le traité n'est plus en vigueur, on n'observe plus de coûts de gestion liés à l'existence du traité de réassurance.

Enfn, le capital immobilisé par l'assureur se retrouve changé par rapport à précédemment puisque celui-ci a récupéré la responsabilité de la totalité du risque lié à la garantie plancher. Le capital immobilisé par le réassureur concernant la garantie plancher se retrouve nul dans le cas de la commutation.

De ce deuxième schéma, on déduit le résultat de l'assureur et du réassureur en cas de commutation :

$$\begin{aligned} R_A^C &= (P - S) - g_A^{syst} - CoC_A^{com} - I \\ R_R^C &= I - g_R^{syst} \end{aligned}$$

Les notations prises pour les primes, les sinistres, les chargements et le coût du capital immobilisé renvoient à la somme actualisée sur un certain horizon de chacune de ces variables. L'horizon considéré correspondant à l'espérance de vie du portefeuille.

En commutant, l'assureur espère faire un gain. Ainsi, il versera au maximum la différence $R_A^C - R_A$.

Le réassureur de son côté n'acceptera la commutation qu'à condition de recevoir au minimum sa perte de résultats futurs, *i.e.* $R_R^C - R_R$.

On obtient ainsi I_A l'indemnisation maximum que l'assureur est prêt à verser et I_R l'indemnisation minimum qu'est prêt à accepter le réassureur :

$$\begin{aligned} I_A &= Sup\{I \mid R_A^C - R_A \geqslant 0\} \\ &= Sup\{I \mid (P_R - S_R) + g_A^{réass} + (CoC_A^{traité} - CoC_A^{com}) - I \geqslant 0\} \\ &= (P_R - S_R) + g_A^{réass} + (CoC_A^{traité} - CoC_A^{com}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_R &= Inf\{I \mid R_R^C - R_R \geqslant 0\} \\ &= Inf\{I \mid I - (P_R - S_R) + g_R^{réass} + CoC_R^{traité} \geqslant 0\} \\ &= (P_R - S_R) - g_R^{réass} - CoC_R^{traité} \end{aligned}$$

On constate que ces formules se décomposent en deux parties. D'une part les primes, sinistres et coûts et d'autre part le coût du capital immobilisé. Ces deux parties seront étudiées indépendamment par la suite.

3.2 Contexte de l'étude

3.2.1 Présentation du traité

Le traité étudié dans cette étude est un traité en Quote Part avec 100% de cession des sinistres.

Ce traité s'applique à un certains nombre de produits d'épargne qui proposent tous une garantie plancher dont la tarification est *a posteriori*. Cette garantie plancher est effective jusqu'aux 80 ans de l'assuré. En cas de CSR strictement positif, une prime mensuelle est prélevée sur la PM de l'assuré.

Ce traité a la particularité de ne pas céder 100% des sinistres. En effet, ici, le réassureur a calculé sa propre table de tarification de la garantie plancher. Le calcul des primes de réassurance se calculent sur la base du CSR de la même manière que les primes que l'assuré verse à l'assureur.

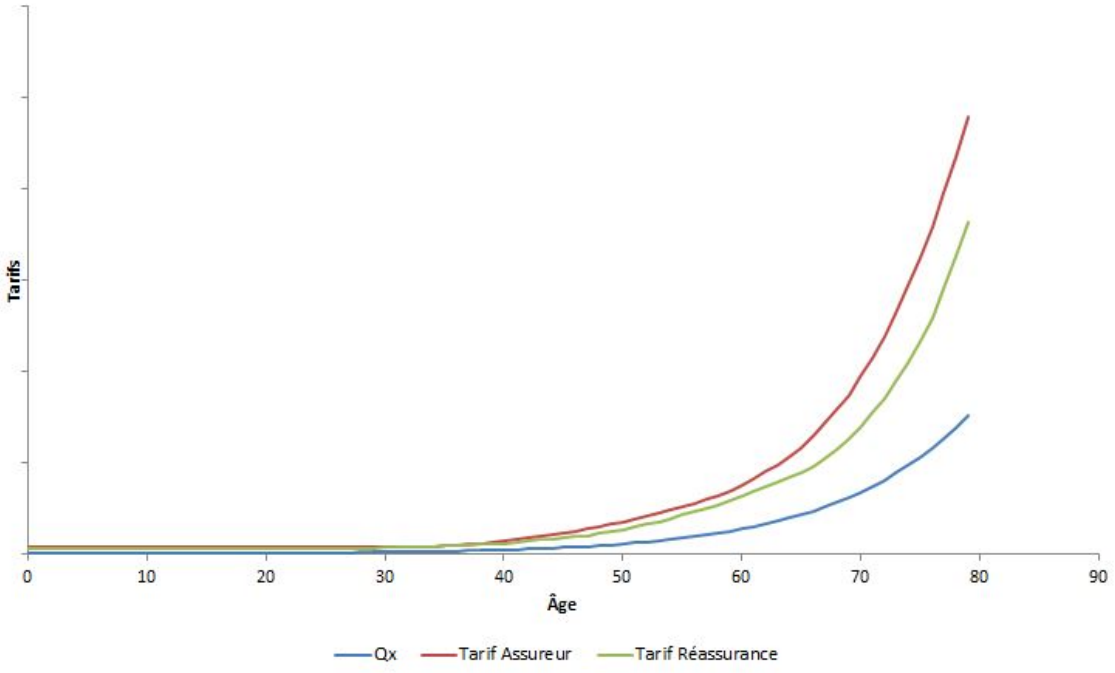

FIGURE 3.3 – Comparaison des tarifs et du taux de décès

On se rend compte ici que la tarification de ce type de garantie est calculée de manière très prudente.

3.2.2 Présentation du portefeuille

L'étude porte sur un portefeuille d'environ 9000 contrats d'épargne. Les données de celui-ci datent du 31 décembre 2015.

Il est indispensable pour commencer de s'intéresser à la vitesse à laquelle le portefeuille s'éteint naturellement, c'est-à-dire la vitesse à laquelle les polices d'assurance sortent du portefeuille réassuré. Cela peut provenir de plusieurs causes : le décès, le rachat total du contrat ou bien le passage de l'assuré à 80 ans, impliquant qu'il ne bénéficie plus de la garantie plancher.

La vitesse que prend le portefeuille pour s'éteindre peut être un critère décisionnel à la commutation. En effet, si une étude de la durée de vie du portefeuille indique que celui-ci sera éteint au bout de quelques années, on peut estimer qu'il est inutile de se lancer dans une commutation du traité. Celle-ci nécessiterait la mise en place d'études et de négociations entre cédant et réassureur qui, à terme, ne concernerait qu'un portefeuille en fin de vie. Il peut alors être nettement plus intéressant de laisser les polices s'éteindre naturellement.

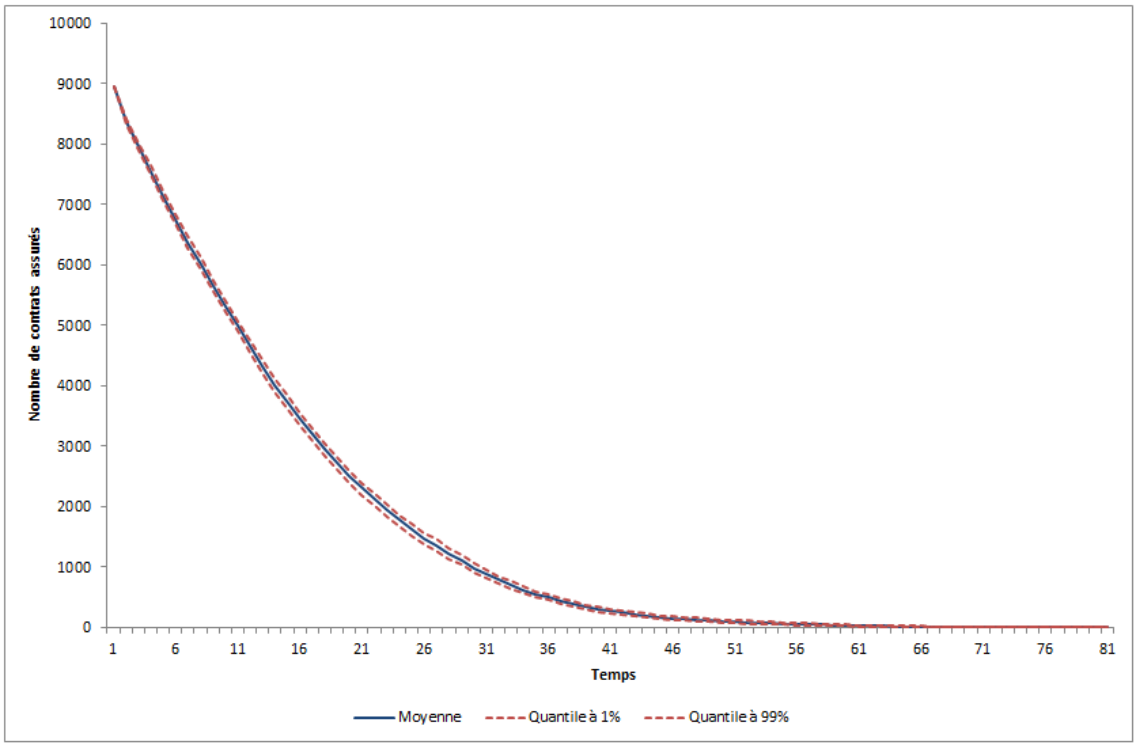

FIGURE 3.4 – Evolution du taux de polices encore présentes dans le temps

Dans notre cas, on note qu'au bout de 60 ans, la moyenne du nombre de polices encore dans le portefeuille est quasi-nulle. On note aussi que les courbes représentant la moyenne et les quantiles sont extrèmement proches. La probabilité d'avoir un nombre important de contrats dans soixante ans est par conséquent quasi inexistante. Nous simulerons donc notre portefeuille sur un horizon de soixante ans.

Par la suite, nous allons, selon la méthode de Monte Carlo, simuler chaque contrat chaque mois sur soixante ans selon un jeu de scénarios financiers. En étudiant le portefeuille tel quel, nous arrivons à un modèle qui devrait appeler une macro plus de 25

milliards de fois [1]. À noter que par la suite, nous aborderons Solvabilité II qui impose de refaire ces même simulations en appliquant différents chos. Dans les conditions actuelles, il nous faudrait des semaines pour obtenir des réusltats.

Il nous faut chercher un moyen de réduire le temps de calcul, pour cela, nous allons *clusteriser* notre portefeuille afin d'avoir un ensemble de *Model Points* [2] qui nous permettra de modéliser le portefeuille plus rapidement.

3.3 Agrégration du portefeuille

La réglementation recommande une approche contrat par contrat. Les autorités de contrôles sont néanmoins conscientes des problèmes opérationnels causés par les temps de calcul. La solution est de conserver un calcul des provisions contrat par contrat mais de l'effectuer sur un portefeuille agrégé, c'est-à-dire plus petit que le portefeuille de contrats initial. Le portefeuille agrégé contient des contrats représentatifs de chacun de ces groupes, aussi appelés *Model Points*.

L'utilisation de techniques d'agrégation, et de MP est autorisée par la réglementation à condition que cela ne fausse pas significativement la valorisation des provisions [3]. L'application de la méthode d'agrégation permet de passer d'un portefeuille contenant X contrats à un nombre réduit Y de MP. On choisit 50 MP. Il s'agit d'une étape clé du processus de valorisation du portefeuille de contrats d'assurance vie individuels de type épargne.

Cette agrégation sous forme de *Model Points* permettra par la suite l'évaluation du CSR (Capital Sous Risque) et du *Solvency Capital Requirement* (Capital de solvabilité requis dans le cadre de la norme Solvabilité II) via le modèle de projection de *cash flows*. Les modèles de projection de *cash flows* doivent prendre en compte les interactions complexes existant entre l'actif et le passif de la compagnie d'assurance.

Dans le cadre d'un contrat de type épagrne proposant une garantie plancher, l'assuré effectue un premier versement à la souscription qui est placé sur différents supports d'investissement. Cette somme évolue au cours du temps, elle constitue l'épargne du contrat. Dans le cas où l'épargne est inférieure au montant garanti en fin de période, l'assuré doit reverser une prime égale à un certain pourcentage du CSR. Si l'épargne reste supérieure au montant garanti, alors l'assuré n'a pas besoin de payer de prime.

La création de capital sous risque dépend donc de la position du montant d'épargne par rapport au montant garanti. Par conséquent, deux contrats admettant le même ratio $\frac{PM}{MG}$ et étant soumis aux même taux de revalorisation verront leur CSR se créer

1. 9000 contrats x 12 mois x 60 ans x 4000 scénarios = 25 920 000 000
2. Agrégation de contrats qui regroupe au mieux l'information contenue dans ceux-ci
3. EIOPA. Technical specification for QIS V. *European comission, 2010.*

ou se réduire à zéro au même moment.

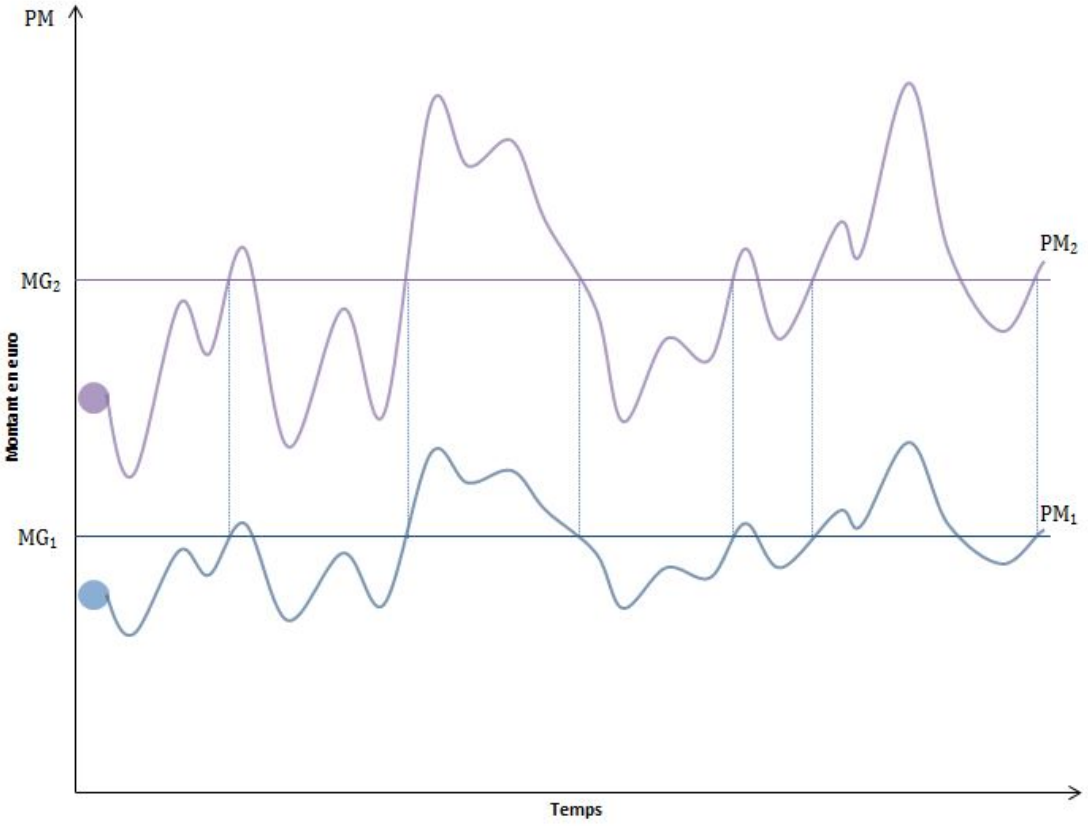

FIGURE 3.5 – Evolution de deux contrats soumis au même scénario financier et admettant le même ratio PM/MG

Dans l'exemple ci-dessus, nous avons pris deux contrats où à t_0 on observe $PM_2 = 2PM_1$ et $MG_2 = 2MG_1$. On constate que lorsque les provisions mathématiques sont revalorisées par rapport aux mêmes rendements financiers, elles sont égales aux montants garantis aux mêmes moments.

Nous allons donc classifier notre portefeuille par rapport à la variable $\frac{PM}{MG}$. Nous considèrerons que les contrats ayant un rapport $\frac{PM}{MG}$ proche se comporteront de la même manière en terme de CSR.

La distribution des contrats selon la variable choisie s'étend jusqu'à des ratios relativement hauts. Nous considérerons que tous les contrats ayant un ratio supérieur à 250% se comporteront de la même manière dans le sens où il est très peu probable que leur épargne diminue suffisament pour passer sous le montant garanti.

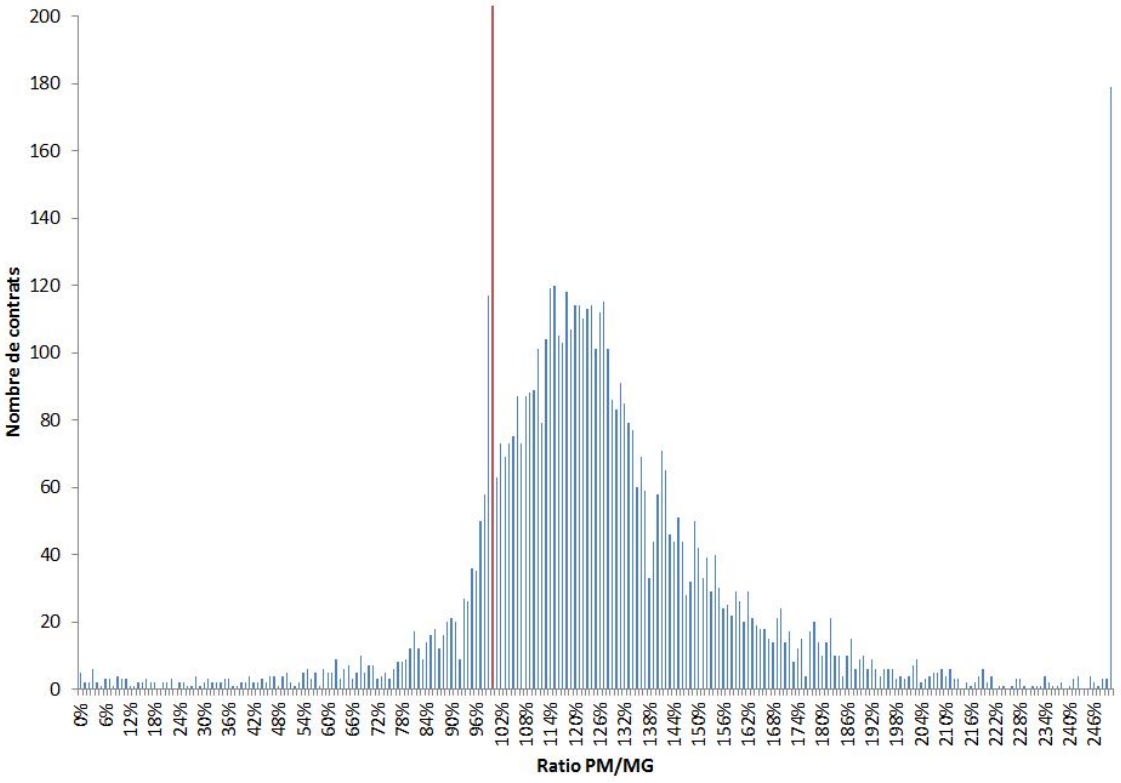

FIGURE 3.6 – Distribution du portefeuille selon le ratio PM/MG

Les contrats se trouvant à droite de la ligne rouge, *i.e.* les contrats admettant un ratio $\frac{PM}{MG} > 1$, ont perçu des plus-values depuis la souscription du contrat. On remarque qu'ils représentent la majorité du portefeuille.

On divise ici le portefeuille de 9000 contrats en 50 groupes de contrats rassemblés par bloc de 5%.

Il faut à présent créer des *Model Points*, c'est-à-dire agréger les contrats de chaque groupe en un contrat représentatif.

On considère K contrats $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_K$ ayant un rapport $\frac{PM}{MG} = \alpha$ identique où chaque assuré i du contrat $\mathcal{C}_i$ a pour âge x_i. Alors on observe :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{K} CSR^{\mathcal{C}_i} &= \sum_{i=1}^{K} Max(0; MG_i - PM_i) \\ &= \sum_{i=1}^{K} MG_i \; Max\left(0; 1 - \frac{PM_i}{MG_i}\right) \\ &= Max(0; 1-\alpha) \sum_{i=1}^{K} MG_i\end{aligned}$$

La sinistralité de ces K contrats sur un an est alors égale à :

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_K} &= \sum_{i=1}^{K} q_{x_i}\ CSR_i \\ &= \sum_{i=1}^{K} q_{x_i}\ MG_i\ Max\left(0; 1 - \frac{PM_i}{MG_i}\right) \\ &= Max(0; 1-\alpha) \sum_{i=1}^{K} q_{x_i} MG_i \end{aligned}$$

Imaginons maintenant un contrat $\mathcal{MP}$ dont l'assuré aurait une probabilité de décès q_t, une provision mathématique égale à $\sum_{i=1}^{K} PM_i$ et un montant garanti de $\sum_{i=1}^{K} MG_i$, alors la sinistralité moyenne de ce contrat sur un an vaut :

$$\begin{aligned} S^{\mathcal{MP}} &= q_t\ Max\left(0; \sum_{i=1}^{K} MG_i - \sum_{i=1}^{K} PM_i\right) \\ &= q_t \sum_{i=1}^{K} MG_i\ Max(0; 1-\alpha) \end{aligned}$$

Dans le cas où on observe un CSR strictement positif, *i.e.* $Max(0; 1-\alpha) > 0$, on a égalité entre la sinistralité des contrats $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_K$ et du contrat $\mathcal{MP}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} Max(0; 1-\alpha) \sum_{i=1}^{K} q_{x_i} MG_i &= Max(0; 1-\alpha)\ q_t \sum_{i=1}^{K} MG_i \\ \sum_{i=1}^{K} q_{x_i} MG_i &= q_t \sum_{i=1}^{K} MG_i \\ q_t &= \frac{\sum_{i=1}^{K} q_{x_i} MG_i}{\sum_{i=1}^{K} MG_i} \end{aligned}$$

On construit ainsi une table de mortalité pour le contrat $\mathcal{MP}$ en calculant la moyenne des probabilités de mortalités des différents contrats pondérée par leurs montants garantis.

Dans le cas où $\alpha \geqslant 1$, cela signifie que le CSR est nul à t_0. Mais α est amené à évoluer en même temps que la PM fluctuera avec les revalorisations. Ainsi si à un certain instant t, on observe $\alpha_t < 1$, on se retrouve dans le premier cas démontré précédemment. On créera donc une table de mortalité de la même façon.

Les tables de tarification utilisées dans cette étude sont basées sur une table de mortalité à laquelle il a été rajouté une marge. On retrouve donc le même raisonnement que précédemment, *i.e.* on calcule une table de tarification adaptée à chaque

Model Point tel qu'à chaque instant le tarif soit égal à la moyenne du tarif de chaque individu du groupe pondérée par le montant garanti de chacun.

Reprenons nos K contrats et voyons comment évolue la provision mathématique en fonction des taux de revalorisation et de la répartition euro/UC. Nous noterons ici p_i la part euro du contrat $\mathcal{C}_i$, $\tau_{euro}(t)$ le taux net servi sur le support euro à l'instant t et $\tau_{UC}(t)$ le rendement des supports UC à l'instant t.

$$\sum_i PM_i(t+1) = \tau_{euro}(t)\sum_i p_i PM_i(t) + \tau_{UC}(t)\sum_i (1-p_i)PM_i(t)$$

Considérons le contrat $\mathcal{MP}$ ayant une épargne égale à $\sum_{i=1}^K PM_i$ et une part euro égale à p.

$$\sum_i PM(t+1) = p\tau_{euro}(t)PM(t) + (1-p)\tau_{UC}(t)PM(t)$$

Dans le cas où $\tau_{euro} \neq \tau_{UC}$, on retrouve une égalité entre ces deux visions si et seulement si :

$$\begin{aligned}
p\ \tau_{euro}\sum_i PM_i + (1-p)\ \tau_{UC}\sum_i PM_i &= \tau_{euro}\sum_i p_i PM_i + \tau_{UC}\sum_i (1-p_i)PM_i \\
p\ \tau_{euro}\sum_i PM_i - p\ \tau_{UC}\sum_i PM_i &= \tau_{euro}\sum_i p_i PM_i - \tau_{UC}\sum_i p_i PM_i \\
p\ \sum_i PM_i(\tau_{euro} - \tau_{UC}) &= \sum_i p_i PM_i(\tau_{euro} - \tau_{UC}) \\
p &= \frac{\sum_i p_i PM_i}{\sum_i PM_i}
\end{aligned}$$

Le cas $\tau_{euro} = \tau_{UC}$ signifie que le même taux de revalorisation est appliqué à la part euro et à la part UC, il n'est donc pas important de connaître cette part p. Dans les faits, il serait extrêmement peu probable qu'à un instant t, on observe $\tau_{euro} = \tau_{UC}$ et même impossible d'observer cette égalité sur toute la chronique.

Dans tous les cas, on attribuera donc comme part investie sur le support euro à notre *Model Point* la part comme calculée dans le premier cas.

Enfin des chargements sont appliqués sur la provision mathématique pour financer la gestion des contrats. On note g_i le taux de chargement appliqué au contrat $\mathcal{C}_i$. Le total des chargements prélevés aux contrats $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_K$ est égal à $\sum_{i=1}^K g_i PM_i$.

En notant g le taux de chargement appliqué au contrat $\mathcal{MP}$ dont la PM est égale à $\sum_{i=1}^K PM_i$, on obtient un montant de chargement prélevé de $g\sum_{i=1}^K PM_i$. On en déduit que g est égale à la moyenne des chargements pondérée par la PM :

$$g = \frac{\sum_{i=1}^K g_i PM_i}{\sum_{i=1}^K PM_i}$$

On a ainsi créé nos *Model Points* par rapport à une unique variable. Des méthodes de classification plus classiques telles que le $K - means$ ou la Classification Ascendante Hiérarchique auraient pu être utilisées, permettant de prendre en compte plusieurs variables. Ces méthodes n'ont pas été retenues car même en sélectionnant les variables, le résultat n'était pas satisfaisant. En effet, ces méthodes minimisaient grandement le CSR à t_0.

Chapitre 4

Simulation des primes et sinistres

L'objectif de ce chapitre est de calculer la première partie de l'indemnisation à verser au réassureur pour la commutation du traité étudié. Nous devons donc obtenir deux résultats au terme de cette méthode, l'un concernant la vision de l'assureur et l'autre concernant la vision du réassureur.

Nous verrons ici différents moyens d'arriver au résultat en abordant deux méthodes. Tout d'abord la méthode dite de Monte-Carlo qui consiste à simuler nos *Model Points* selon un grand nombre de scénarios financiers. Ensuite la méthode des *puts* qui, via le modèle de Black-Scholes, permet d'obtenir un résultat à partir d'une formule fermée.

4.1 Méthode de Monte-Carlo

4.1.1 Présentation du modèle

Le terme "méthode de Monte-Carlo" désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

La méthode de simulation de Monte-Carlo permet notamment d'introduire une approche statistique du risque dans une décision financière. Elle consiste à isoler un certain nombre de variables-clés du projet comme la mortalité ou les rendements, et à leur affecter une distribution de probabilité. Pour chacun de ces facteurs, un grand nombre de tirages aléatoires est effectué dans les distributions de probabilité déterminées précédemment, afin de trouver la probabilité d'occurence de chacun des résultats.

On cherche ici à estimer les primes et sinistres futurs qui sont proportionnels au Capital Sous Risque. Le CSR est fonction de la provision mathématique et du montant garanti. PM et MG sont affectés par de nombreuses variables aléatoires telles que la mortalité, les rachats ou encore les rendements des supports sur lesquels l'épargne a été investie.

Voyons par exemple comment la mortalité va affecter notre modèle. Considérons un assuré d'âge x ayant une probabilité de décès dans l'année de q_x. En cas de décès de cet assuré, un montant égal à $Max(PM; MG)$ serait versé à ses bénéficiaires, faisant passer sa PM et son MG à 0.

Concrètement, on aurait pu ici procéder à la méthode de Monte-Carlo en simulant un grand nombre N de lois de Bernouli qui caractèriseraient le décès, ou non, de l'assuré. On effecturait ensuite la moyenne des N simulations pour déterminer la PM et le MG à chaque instant.

En moyenne on observera donc $PM_{t+1} = PM_t\ (1-q_x)$ et $MG_{t+1} = MG_t\ (1-q_x)$. La mortalité affectant PM et MG de la même manière, il n'est pas nécessaire de l'appliquer via la méthode de Monte-Carlo, *i.e.* on appliquera directement sur PM et MG la probabilité de décès.

Les revalorisation de l'épargne en revanche, n'affectent pas le montant garanti, influençant fortement la création, ou non, de CSR.

$$\begin{aligned} PM_{t+1} &= PM_t\ \tau_t \\ CSR_{t+1} &= Max(0; MG_{t+1} - PM_t\tau_t) \end{aligned}$$

où τ_t est le taux de revalorisation à l'année t et où MG_{t+1} est constant dans le cas où on n'observe ni rachat, ni versement.

Ce taux de revalorisation sera dans notre modèle la variable aléatoire sur laquelle on va effectuer un grand nombre de tirages avant d'effectuer la moyenne des résultats.

Le groupe AXA fournit des chroniques de rendements en risque neutre pour les différents supports d'investissement. Ces chroniques sont au nombre de 4000 par support et donnent le rendement semestriel sur 60 ans.

La méthode utilisée pour générer ces chiffres ne sera pas développée dans ce mémoire.

Dans ce modèle, on va donc faire évoluer la PM et le MG mensuellement sur 60 ans. Chaque mois, la PM est affectée par :

- les primes liées à la garantie plancher ;
- les revalorisation ;
- les rachats partiels ;
- les versements libres ;
- les rachats totaux ;
- la part de personnes passant l'âge limite de validité de la garantie plancher ;
- la mortalité.

Le montant garanti, quant à lui, est affecté par la collecte nette (rachats partiels et versements) et la résiliation (rachats totaux, décès, passages des 80 ans).

Les primes liées à la garantie plancher sont fonction du CSR. C'est le montant que l'assureur va prélever sur l'épargne de l'assuré lorsque la provision mathématique est inférieure au montant garanti. Ces primes sont mensuelles et se calculent telles que :

$$P(t) = \tau^{assureur}(t)\ CSR(t)$$

où $\tau^{assureur}(t)$ est le tarif à l'instant t appliqué par l'assureur dans le cadre de la garantie plancher.

Les revalorisations se calculent indépendamment pour la part d'épargne investie sur l'euro et celle investie sur l'UC.

Sur la part euro, le taux de revalorisation retenu est égal au taux le plus élevé entre le TMGA et celui donné par les chroniques de taux correspondant au rendement obtenu par la compagnie sur le fond euro. Si ce rendement est supérieur au TMGA, la différence de ces deux taux correspond à la participation aux bénéfices reversée aux assurés. En effet, les produits sur lesquels se base notre étude prévoit de reverser 100% de la participation.

Sur la part UC, le taux de revalorisation est calculé à partir des différents supports d'investissement tels que l'Eurostoxx, S&P 500, Nikkei, FTSE, ou encore l'immobilier.

Le taux de rachat partiel et le taux de versement sont calculés comme des taux fixes se basant sur l'historique des dernières années.

Le taux de rachat total s'appuie sur deux composantes : le rachat structurel et le rachat conjoncturel. Le rachat structurel correspond à une base fixe se basant sur l'historique. Le rachat conjoncturel varie selon l'environnement, *i.e.* la conjoncture économique peut faire varier la satisfaction de l'assuré et le pousser à racheter.

L'ACPR[1] fournit des courbes de rachat conjoncturel basé sur les observations du QIS5 (Quantitative Impact Studies n°5). Ces courbes sont fonction du taux de satisfaction du client et sont au nombre de deux, chacune correspondant à l'extrémité d'une fourchette à l'intérieur de laquelle doit se trouver la courbe utilisée. Dans le cadre de notre étude, on prendra simplement la moyenne de ces deux courbes.

1. Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution

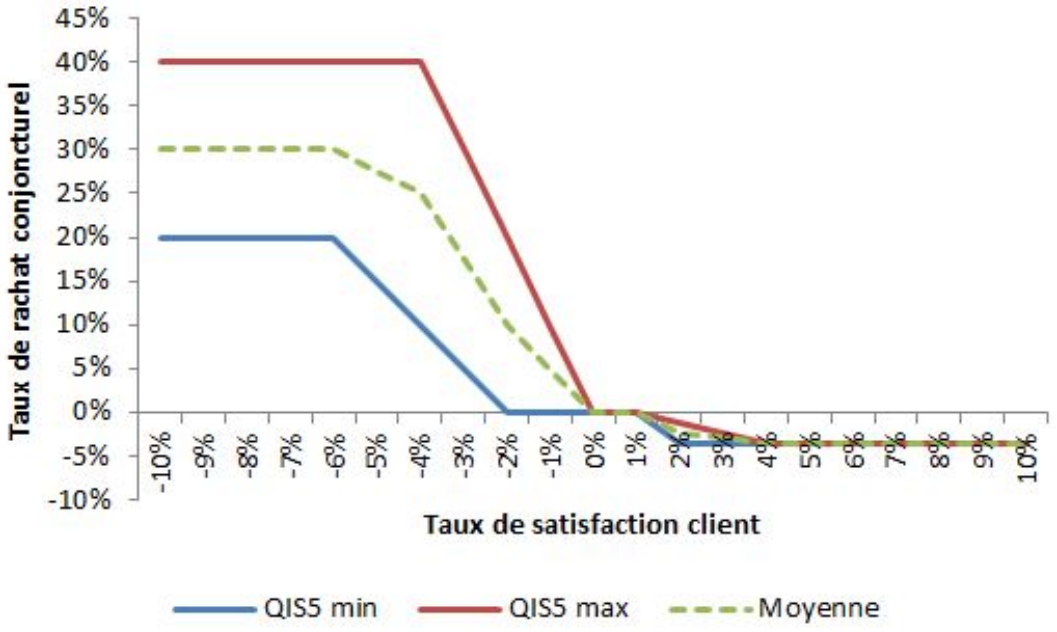

FIGURE 4.1 – Courbes des rachats conjoncturels

D'après les courbes ci-dessus, le rachat conjoncturel peut être de -5% en cas de forte satisfaction client. Pour ne pas avoir un taux de rachat négatif, ce -5% sera remplacé par l'opposé du taux de rachat structurel. De cette manière on observe au minimum $Rachat_{Structurel} + Rachat_{Conjoncturel} = 0\%$.

En outre, on définiera le taux de satisfaction client comme étant fonction du rendement des supports UC. Plus l'épargne de l'assuré est revalorisée, plus il est satisfait et moins il ne souhaitera racheter. On fera l'hypothèse que un pourcent de satisfaction client correspond à dix pourcents de rendement UC.

La table de mortalité est construite pour chaque *Model Point* comme étant la moyenne des probabilité de mortalité des individus pondérée par les montants garantis.

La mortalité affecte à la fois la provision mathématique et le montant garanti. Imaginons un modèle simplifié où seule la mortalité affecte la PM et le MG. Reprenons K contrats $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_K$ où l'assuré i du contrat $\mathcal{C}_i$ a un âge x_i et une épargne $PM_i(t)$ et un montant garanti $MG_i(t)$ à l'instant t. Alors à l'instant $t+1$, on observe :

$$\sum_{i=1}^{K} PM_i(t+1) = \sum_{i=1}^{K} PM_i(t)(1 - q_{x_i})$$

$$\sum_{i=1}^{K} MG_i(t+1) = \sum_{i=1}^{K} MG_i(t)(1 - q_{x_i})$$

Pour le contrat agrégé $\mathcal{MP}$ admettant une épargne $\sum_{i=1}^{K} PM_i$, un montant garanti $\sum_{i=1}^{K} MG_i$ et une probabilité de decès q_t, on observe :

$$\sum_{i=1}^{K} PM_i(t+1) = (1-q_t)\sum_{i=1}^{K} PM_i(t)$$

$$\sum_{i=1}^{K} MG_i(t+1) = (1-q_t)\sum_{i=1}^{K} MG_i(t)$$

On a donc deux visions sur q_t car on obtient deux égalités :

$$q_t = \frac{\sum_{i=1}^{K} q_{x_i} PM_i}{\sum_{i=1}^{K} PM_i}$$

$$q_t = \frac{\sum_{i=1}^{K} q_{x_i} MG_i}{\sum_{i=1}^{K} MG_i}$$

On doit donc créer deux tables de mortalité pour chaque *Model Point*, l'une que l'on appliquera à la provision mathématique et l'autre que l'on appliquera au montant garanti.

La fin de validité de la garantie plancher en raison de l'âge de l'assuré affecte à la fois la provision mathématique et le montant garanti. Dans la même logique que ce qui a été vu précédemment, deux tables ont été recalculées pour gérer ce passage à 80 ans. La première table est à appliquer à la PM et correspond pour chaque année et pour chaque *Model Points* au taux de PM perdu à cause des assurés qui dépassent l'âge de 80 ans. La seconde table est à appliquer au MG et correspond au taux de MG perdu.

4.1.2 Résultats

Après simulation, on obtient les primes et sinistres cédés au réassureur ainsi que les coûts de gestion liés à l'existence du traité calculés comme un pourcentage des sinistres. Cela nous permettra d'obtenir les premiers éléments du calcul du montant d'indemnisation. Voyons ci-dessous l'évolution des primes et sinistres cédés au réassureur sur tout l'horizon de projection.

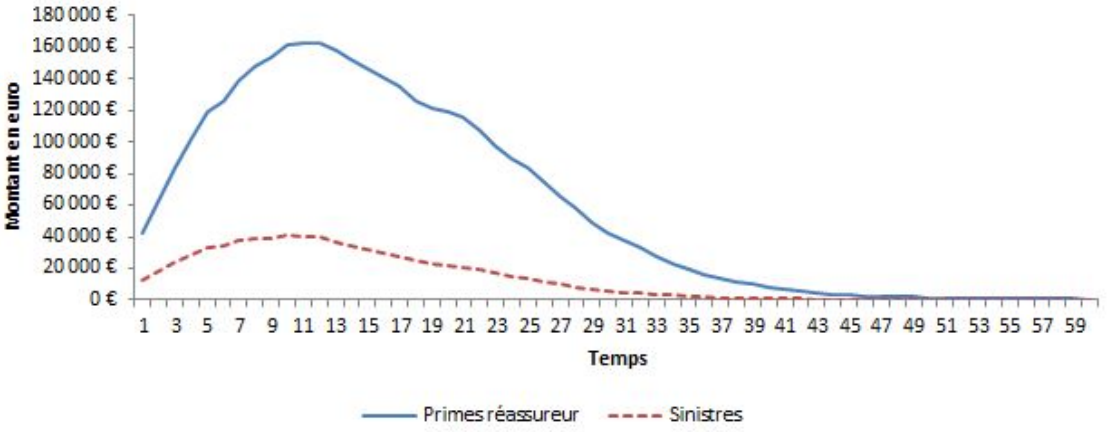

FIGURE 4.2 – Projection des primes et sinistres cédés au réassureur

L'historique des primes et sinistres cédés au réassureur montraient ces dernières années une tendance à la baisse. On peut donc s'intérroger sur la forme en cloche de nos courbes alors qu'on aurait instinctivement imaginé qu'elles seraient décroissantes. Deux phénomènes s'opposent : celui à court terme où le CSR augmente et celui à plus long terme où le CSR diminue.

Pour expliquer ce phénomène, il nous faut distinguer les différents cas qui peuvent s'offrir à nous selon le ratio $\frac{PM}{MG}$.

Voyons tout d'abord le cas où la provision mathématique est largement supérieure au montant garanti.

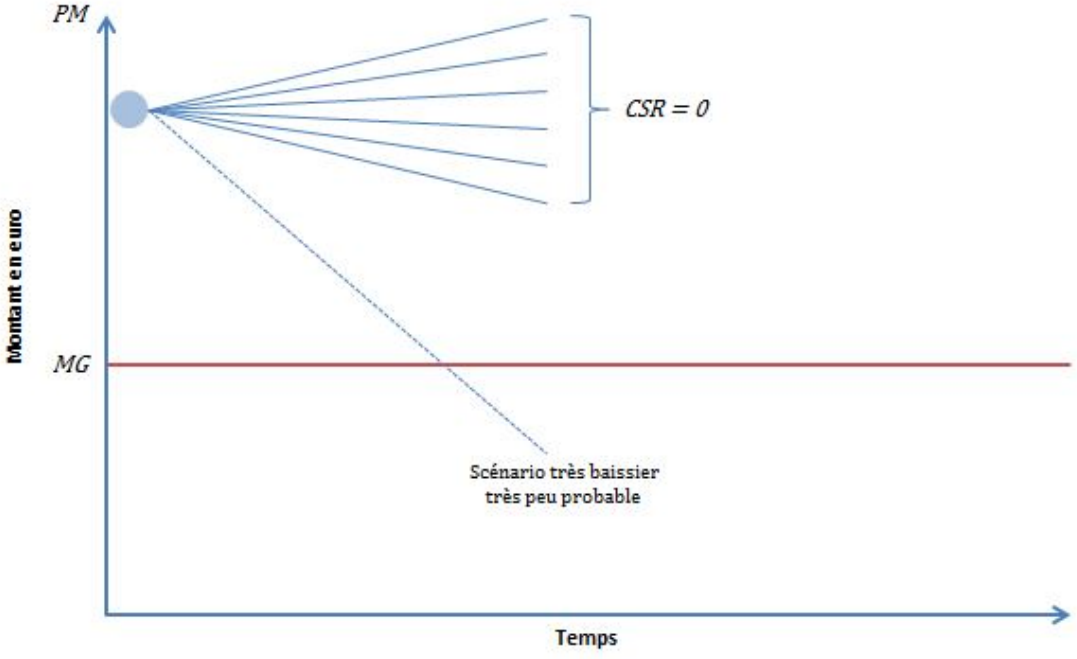

FIGURE 4.3 – Cas 1 : $\frac{PM}{MG} >> 1$

La PM va évoluer différemment selon les différents scénarios de rendement des actifs. Mais ici on considère la PM tellement élevée par rapport au montant garanti qu'il est très peu probable qu'un scénario financier soit sufisamment baissier pour passer sous la barre de $PM = MG$. Ainsi, ce type de contrat n'aura aucune influence sur l'évolution du CSR au global.

Dans un deuxième temps, voyons le cas où la PM est largement inférieure au montant garanti. Dans ce cas, on observera quasiment toujours du CSR.

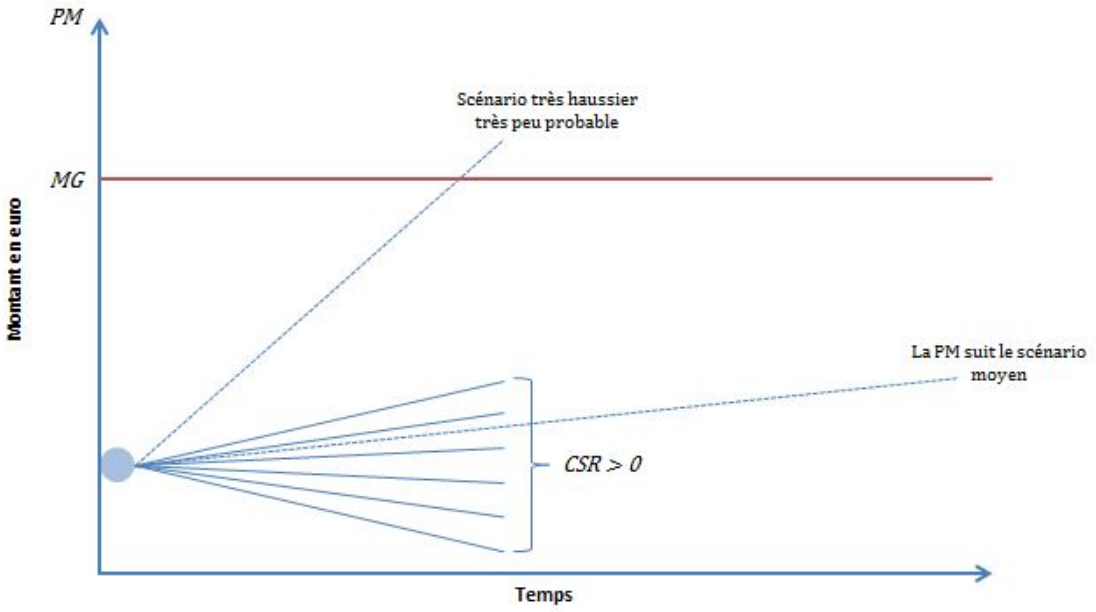

FIGURE 4.4 – Cas 2 : $\frac{PM}{MG} << 1$

Ici, on observe l'effet inverse au cas précédent. Il est très peu probable qu'un scénario soit suffisamment haussier pour que la PM passe au dessus du montant garanti. On a ainsi dans la grande majorité des scénarios $Max(0; MG - PM) = MG - PM$.

Calculer le SCR moyen est donc équivalent à calculer le SCR avec le scénario central (ou moyenne des scénarios) pour ce type de contrat. En moyenne, on observe que les scénarios utilisés sont légèrement à la hausse. Cela a pour conséquence que ces contrats auront tendance à faire diminuer le CSR total.

Enfin il y a le cas entre-deux où la PM est légèrement supérieure au montant garanti. Ce cas est important puisqu'il concerne la plus grosse masse du portefeuille en terme de nombre de contrats et de PM.

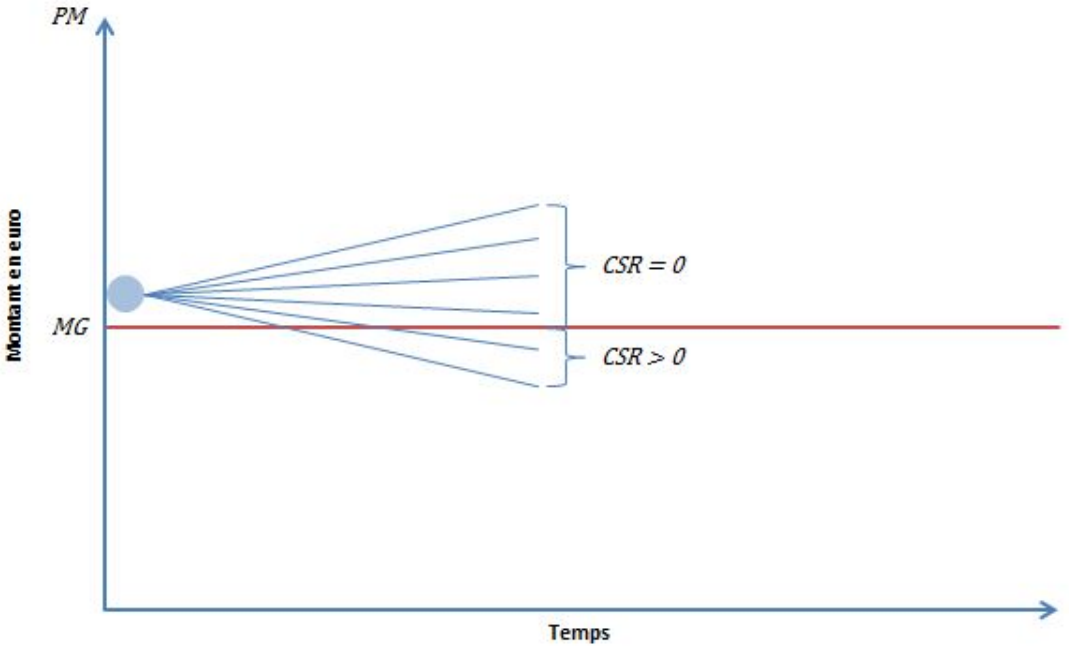

FIGURE 4.5 – Cas 3 : $\frac{PM}{MG} \approx 1$

Ici, on observe deux situations. Soit le scénario est haussier ou très légèrement baissier et ainsi la provision mathématique ne diminuera pas suffisamment pour créer du CSR. Soit l'épargne subit un scénario baissier qui va permettre la création de CSR. Ces deux phénomènes (entre scénario haussier ou baissier) ne se compensent pas. On observe donc au global une augmentation de CSR. Ces contrats sont alors ceux qui donnent l'allure à la courbe.

Sur une vision à plus long terme, on observe que le CSR finit par diminuer.

On a déjà dit que les scénarios ont tendance à être en moyenne légèrement haussier. C'est la volatilité de ces scénarios qui, comme expliqué plus haut, crée du CSR à court terme. À plus long terme, malgré la volatilité, la hausse en moyenne de la PM permet de faire diminuer le CSR.

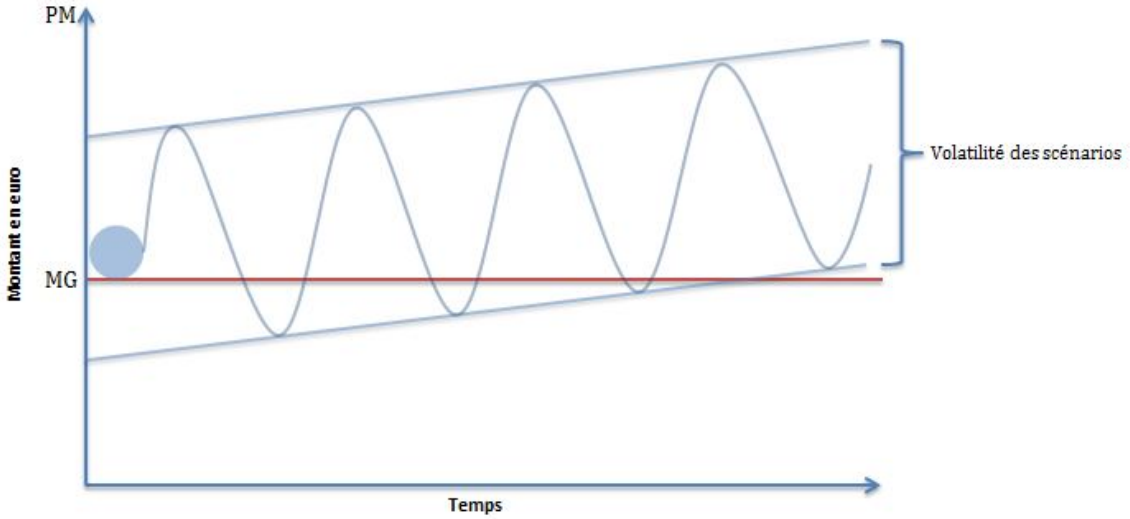

FIGURE 4.6 – Evolution de la PM à long terme

Cette parenthèse nous a permis de nous assurer que la forme de nos courbes était justifiée.

Finalement, cette première méthode nous permet d'obtenir nos premiers résultats :

	Méthode de Monte-Carlo
P_R	3 586 334 €
S_R	773 993 €
$P_R - S_R + g_A^{traité}$	2 823 950 €
$P_R - S_R - g_R^{traité}$	2 785 251 €

TABLE 4.1 – Résultats issus de la méthode de Monte-Carlo

On a ainsi calculé, via la méthode de Monte-Carlo, la première partie des montants qui nous permettront de déterminer une fourchette à l'intérieur de laquelle pourra être négociée la prix d'indemnisation. Voyons maintenant une autre méthode, la méthode des *puts*.

4.2 Méthode des *puts*

4.2.1 Théorie de la méthode

La méthode des *puts* s'appuie sur la théorie des options. Une option est un engagement entre un acheteur et un vendeur d'option. Le détenteur de l'option a le droit d'acheter ou de vendre un actif financier à un prix convenu d'avance jusqu'à une certaine date appelée l'échéance. Le prix convenu dans le contrat s'appelle le *strike* ou prix d'exercice et le prix de l'option le *premium*.

Vendre un *put*, c'est donc vendre un actif à un acheteur. À une certaine maturité T prédéfinie, l'acheteur a le choix (d'où le terme d'option) de garder ou de revendre au vendeur initial son actif au prix prédéterminé : le *strike*. Ainsi le vendeur fait le pari que le prix de l'actif sera supérieur au *strike* la l'échéance quand l'acheteur fait le pari qu'il sera en dessous et cherche donc à se protéger.

La vente d'un *put* est comparable à proposer une garantie plancher à un assuré. Celui-ci craint que son épargne diminue, il décide donc d'acheter un *put* en souscrivant à la garantie plancher. Ce *put* a pour sous-jacent l'épargne de l'assuré et pour *strike* le montant qui lui est garanti. Si à l'instant du décès, l'épargne est inférieure au montant garanti, l'assuré exerce son option et l'assureur doit lui verser le montant garanti qui correspond à l'épargne plus le *payoff* (qui correspond ici au CSR). Si la provision mathématique est supérieure au montant garanti, alors l'assuré garde son actif, c'est-à-dire la totalité de son épargne.

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'un *put* à partir de cinq données :

- S_0 la valeur actuelle de l'option sous-jacente ;
- T Le temps qu'il reste à l'option avant son échéance ;
- K le prix d'exercie fixé par l'option ;
- r le taux d'intérêt sans risque ;
- σ la volatilité du prix de l'action.

Le prix théorique d'une option de vente est caractérisé par son *payoff* $(K - S_T)^+ = Max(0; K - S_T)$. Il est donné par l'espérance sous probabilité risque neutre du *payoff* terminal actualisé.

$$\begin{aligned} Put &= \mathbb{E}[Payoff\ e^{-rT}] \\ &= \mathbb{E}[e^{-rT}(K - S_T)\mathbb{1}_{K>S_T}] \\ &= Ke^{-rT}\mathbb{E}[\mathbb{1}_{K>S_T}] - e^{-rT}\mathbb{E}[S_T\mathbb{1}_{K>S_T}] \\ &= Ke^{-rT}\mathbb{P}(K > S_T) - e^{-rT}\mathbb{E}[S_T\mathbb{1}_{K>S_T}] \end{aligned}$$

Ces deux derniers termes peuvent être calculés de manière explicite en utilisant l'expression du prix du sous-jacent. Nous commencerons donc par établir cette expression. On se place sous probabilité risque neutre, ce qui revient à dire que la dérive vaut r.

On a alors $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t$.

On considère le nouveau processus $(Z_t)_{0\leq t\leq T}$ tel que $Z_t = ln(S_t)$. La formule d'Itô appliqué à Z donne :

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{\partial ln}{\partial x}(S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 ln}{\partial^2 x}(S_t)d < S, S >_t \\ &= (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t \end{aligned}$$

En intégrant la dernière ligne, on arrive à $Z_t = Z_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$, puis en utilisant le fait que $S_t = e^{Z_t}$ on obtient la formule voulue :

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$$

Nous avons implicitement utilisé ici le fait que le processus S est strictement positif. On peut prouver ce résultat en montrant que le processus trouvé est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique $dS_t = rS_t d_t + \sigma S_t dW_t$. Pour cela, on peut appliquer la formule d'Itô au processus $\left(S_t e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}\right)_t$ et montrer qu'il est constant.

Notons que la variable aléatoire W_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0,t)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K > S_T) &= \mathbb{P}\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T} < K\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T < ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}W_T < \frac{ln(\frac{K}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \mathbb{P}(G < -d_2) \\ &= \mathcal{N}(-d_2) \end{aligned}$$

où :
- G suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$;
- $d_2 = \dfrac{ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$;
- $\mathcal{N}(.)$ est la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite.

Intéressons-nous maintenant au calcul du premier terme. En suivant les mêmes étapes précédentes, on peut facilement voir que :

$$\mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{K>S_T}] = S_0 \mathbb{E}\left[e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}G}\mathbb{1}_{G<-d_2}\right]$$

Donc :

$$\begin{aligned}
e^{-rT}\mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{K>S_T}] &= S_0 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x<-d_2} e^{-\frac{x^2}{2}+\sigma\sqrt{T}x-\frac{\sigma^2}{2}T} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{-d_2-\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_0 \int_{-\infty}^{-d_1} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= S_0 \mathcal{N}(-d_1)
\end{aligned}$$

où $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$.

On obtient donc le prix du *put* de maturité T, de *strike* K et de sous-jacent S :

$$Put(T, K, S) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2) - S_0\mathcal{N}(-d_1)$$

Mais ici, la maturité est déterminée lors de la vente de l'option. Dans le contexte de garantie plancher, l'échéance de l'option correspond à la date de décès de l'assuré. On ne peut donc pas déterminer une maturité précise à la souscription du contrat.

On peut en revanche calculer le prix des *puts* en faisant varier la maturité entre 1 et un certain horizon puis pondérer chaque prix par une certaine probabilité.

En effet, chaque année, le *put* s'exerce si l'assuré décède en étant toujours dans le portefeuille. Si l'individu a entre temps racheté, a passé l'âge limite de la garantie ou bien est tout simplement déjà décédé, le *put* ne peut plus être exercé.

Chaque année, *i.e.* pour chaque maturité, la sinistralité pour un assuré est donc égale au produit du prix du *put* à cette maturité donnée, multiplié par la probabilité de décéder dans l'année et la probabilité d'être encore présent cette année là.

La sinistralité totale est égale à la somme actualisée de la sinistralité de chaque individu du portefeuille en prenant toutes les maturités jusqu'à un certain horizon.

$$S = \sum_{T=1}^{horizon} \frac{Put(T; MG; PM)\ \mathbb{P}(présence)_T\ q_{x+T}}{(1+i_T)^T}$$

où :

- $Put(T; MG; PM)$ est le prix du *put* calculé grâce au modèle de Black-Scholes ;
- $\mathbb{P}(présence)_T$ est la probabilité d'être présent dans le portefeuille à la date T, *i.e.* de n'être ni décédé, ni avoir racheté son contrat ou avoir passé l'âge limite de la garantie ;
- q_{x+T} la probabilité de décéder à l'âge $x + T$;
- i_T est le taux d'actualisation à la date T.

Lorsque pour une maturité donnée, la sinistralité estimée vaut un certain montant, la prime prélevée pour prévenir ce sinistre est égal à ce montant auquel on rajoute une marge. Cette marge est donnée par la table de tarification. En effet, le tarif est calculé à partir d'une table de mortalité à laquelle a été rajouté une marge.

On peut donc calculer les primes prélevées par l'assureur et celles versées au réassureur de la même façon que les sinistres mais en remplaçant la probabilité de décéder à un certain âge par le tarif appliqué à cet âge là. On calcule donc la somme actualisée de toutes les primes prélevées par l'assureur de telle façon :

$$P = \sum_{T=1}^{horizon} \frac{Put(T; MG; PM)\ \mathbb{P}(présence)_T\ \tau_{x+T}^{assureur}}{(1+i_T)^T}$$

où $\tau_{x+T}^{assureur}$ est le tarif demandé par l'assureur pour un assuré d'âge $x+T$.

Enfin, la somme actualisée des primes que le réassureur perçoit de l'assureur pour réassurer la garantie plancher est égale à :

$$P_R = \sum_{T=1}^{horizon} \frac{Put(T; MG; PM)\ \mathbb{P}(présence)_T\ \tau_{x+T}^{réassureur}}{(1+i_T)^T}$$

où $\tau_{x+T}^{réassureur}$ est le tarif demandé par le réassureur à l'assureur pour un assuré d'âge $x+T$.

Bien que le modèle de Black-Scholes ait révolutionné le milieu financier à sa découverte, il est depuis largement décrié dans le milieu. En effet, ce modèle impose des hypothèses qui sont très difficilement vérifiables dans la réalité et totalement déconnectées de la réalité des marchés financiers.

La principale critique vise la loi Gaussienne (ou loi normale) sur laquelle se base le modèle et qui sous estime très fortement les événements impobables comme les crises ou les krachs alors qu'ils sont finalement beaucoup moins rares que cette loi ne le prévoit.

Black-Scholes suppose aussi que le taux d'intérêt et la volatilité sont constants dans le temps. Hypothèse qui ne se vérifie pas dans la réalité des marchés.

Malgré toutes ces critiques, le modèle de Black-Scholes demeure la référence auprès des professionnels du fait de son caractère simple et pratique et correspond à une méthode de provisionnement de la garantie plancher recommandée par la FFSA.

Pour faire l'analogie entre les deux méthodes présentées, calculer le prix d'un put de *strike* MG, de sous-jacent PM et de maturité T revient à estimer le CSR à horizon T en ne prenant en compte que les revalorisations via les marchés financiers.

Dans la pratique, comme vu dans la formule du prix d'un *put*, quelque soit la maturité considérée, le prix de l'option se base sur la provision mathématique à $t = 0$. On ne prend ici pas en compte les rachats partiels ainsi que les versements qui peuvent être fait au cours de l'existence du contrat. Par conséquent, on garde aussi un montant garanti identique pour chaque maturité.

La chronique des écart-types est calculée à partir des 4000 scénarios utilisés dans la méthode de Monte-Carlo en prenant en compte la part investie sur des supports en unités de compte ainsi que la part investie sur des fonds en euro.

La chronique des taux d'intérêt sans risque est calculée comme un taux *forward* 1 an. Il se base donc sur le scénario central du zéro-coupon.

4.2.2 Résultats

De la même façon que précédemment, cette méthode permet d'obtenir les primes et sinistres cédés au réassureur ainsi que les coûts liés à la gestion du traité.

Après simulation, on obtient la projection des primes et sinistres via la méthode des *puts*.

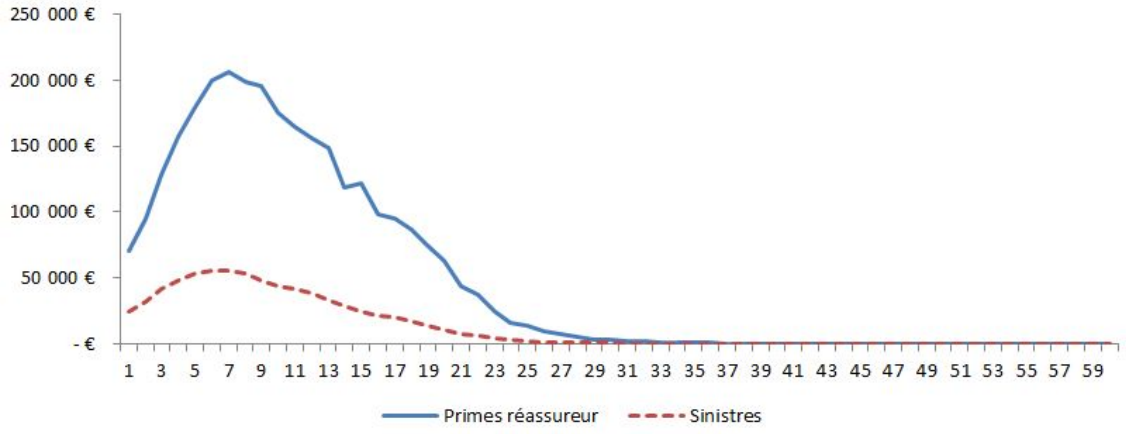

FIGURE 4.7 – Simulation des primes et sinistres cédés au réassureur via la méthode des puts

On retrouve une forme en cloche très comparable à celle que l'on avait par la méthode de Monte-Carlo. À la différence que précédemment où l'on avait une courbe relativement lisse, on constate ici un effet de dent de scie entre les maturités 14 et 17. Cela est dû à une légère fluctuation du taux forward :

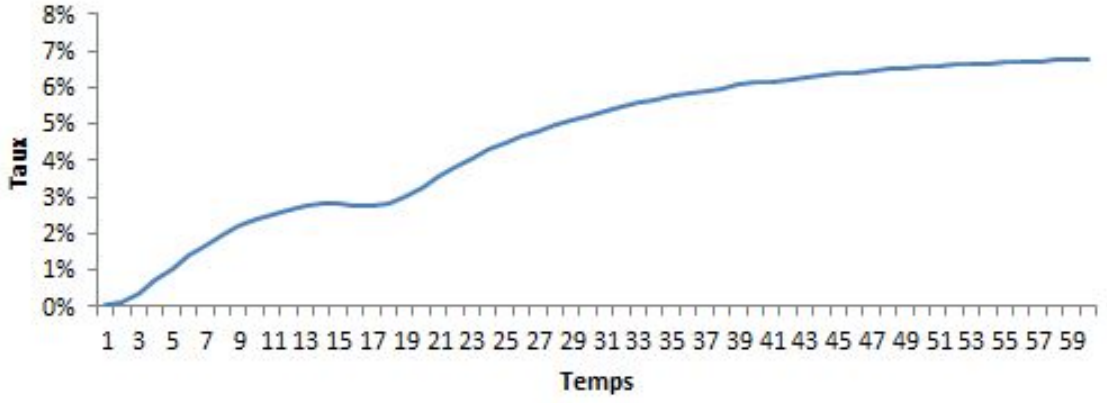

FIGURE 4.8 – Evolution du taux forward 1 an

Comparons les montants $P_R - S_R$ des deux méthodes. Comme dit précédemment, la méthode des *puts* ne prend pas en compte les rachats partiels et les versements donc nous comparerons les résultats à ceux de la méthode de Monte-Carlo sans rachats partiels ni versements.

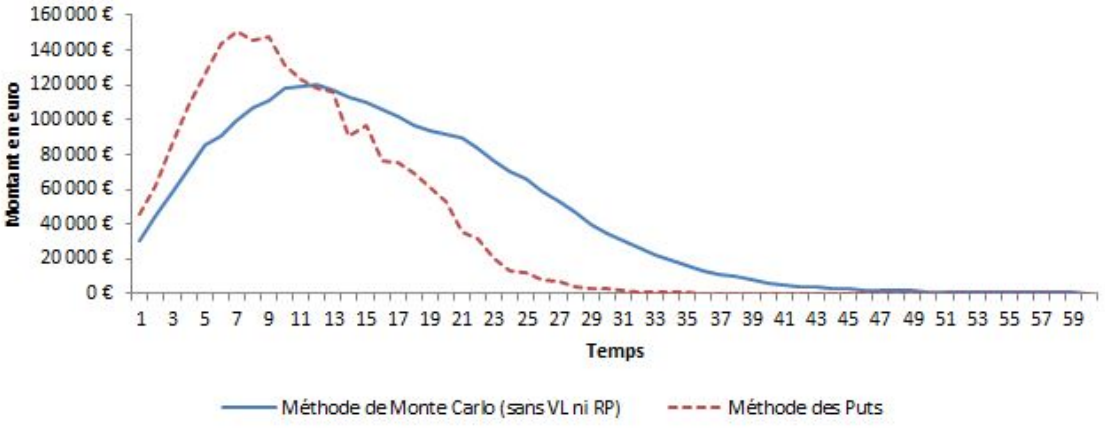

FIGURE 4.9 – Comparaison de $P_R - S_R$ via les deux méthodes

On observe que les deux courbes suivent la même forme. Même si la méthode de Monte-Carlo est légèrement plus aplatie, on obtient un résultat total proche pour les deux méthodes :

	Méthode des *puts*	Méthode de Monte-Carlo (sans RP ni VL)
P_R	2 904 371 €	3 455 256 €
S_R	728 999 €	749 393 €
$P_R - S_R + g_A^{traité}$	2 186 306 €	2 717 103 €
$P_R - S_R - g_R^{traité}$	2 098 851 €	2 610 764 €

TABLE 4.2 – Comparaison des résultats via les deux méthodes

On note une différence d'environ 25% entre les résultats de la méthode des *puts* et ceux de la méthode Monte-Carlo sans prise en compte des rachats partiels et des versements.

Finalement, après avoir simulé les primes et sinistres sur soixante ans selon la méthode de Monte-Carlo et la méthode des *puts*, on obtient la première partie des montants d'indemnisation que l'on recherche :

	Méthode des *puts*	Méthode de Monte-Carlo
P_R	2 904 371 €	3 586 334 €
S_R	728 999 €	773 993 €
$P_R - S_R + g_A^{traité}$	2 186 306 €	2 823 950 €
$P_R - S_R - g_R^{traité}$	2 098 851 €	2 713 502 €

TABLE 4.3 – Résultats retenus pour la suite de l'étude

On gardera donc les résultats ci-dessus pour la suite de notre étude, *i.e.* les résultats dont la méthode de Monte-Carlo comporte la prise en compte des rachats partiels ainsi que des versements. En effet, cela permet d'obtenir un résultat plus proche de la réalité.

Après avoir vu la projection des primes et sinistres, nous allons maintenant voir la seconde partie de notre étude qui consiste à calculer le coût du capital immobilisé.

Chapitre 5

Calcul du coût du capital immobilisé

5.1 Solvabilité 2

5.1.1 Généralités

5.1.1.1 Le bilan prudentiel

FIGURE 5.1 – Bilan prudentiel sous Solvabilité 2

La norme solvabilité 2 définit un nouveau mode de calcul du bilan proche de celui de l'*European Embedded Value* (EEV) ou *Market Consistent Embedded Value* (MCEV) qui sont les indicateurs mesurant la valeur économique intrinsèque de la compagnie en tenant compte des profits futurs.

Ce bilan est en valeur de marché et est calculé de la manière suivante :
- L'actif est calculé en valeur de marché. Sa valorisation est donc simple car il suffit de se référer à la valeur de marché sur les marchés financiers des

éléments qui le composent.
- Le passif se décompose en trois éléments :
  - L'ANAV (*Adjusted Net Asset Value*) qui correspond aux fonds propres de l'assureur. Elle regroupe les éléments du passif présents dans les fonds propres dont le capital à immobiliser pour couvrir le capital de solvabilité requis.
  - La VIF (*Value Of Inforce*) qui correspond aux résultats distribuables futurs actualisés. Dans notre contexte de commutation de garantie plancher, on ne prend en compte que les primes, sinistres et coûts de gestion liés à l'existence du traité.
  - Les BEL(*Best Estimate Liabilities*) qui correspondent à l'actualisation des prestations futures.

Les fonds propres immobilisés dépendent de la valeur du capital de solvabilité requis qui est appelé *Solvency Capital Requirement* (SCR). C'est l'équivalent de la MSR (Marge de Solvabilité Requise) sous Solvabilité 1 sauf que cette grandeur n'est pas simplement forfaitaire mais prend en compte les risques auxquels est exposée la compagnie.

Elle est définie comme le montant des pertes économiques que l'assureur est susceptible d'encourir sur une année basé sur des risques pouvant se produire une fois tous les 200 ans. Ces pertes sont économiques en opposition aux pertes comptables *i.e.* en incluant les pertes non réalisées et les pertes de profits futurs inclus dans la valeur de la compagnie.

Une autre vision définit le SCR comme le montant de fonds propres requis pour avoir une probabilité de ruine inférieure à 0,5% (soit un rating de niveau A) ou bien la *Value at Risk* au $99{,}5^{ème}$ centile à horizon 1 an.

5.1.1.2 Les différents risques et méthodes pour le calcul du SCR

Pour calculer le capital de solvabilité requis, les compagnies d'assurance et de réassurance ont deux possibilités :
- La formule standard
- Le modèle interne

La formule standard est une approche qui consiste à évaluer un capital économique élémentaire au niveau de chaque module de risque en appliquant un choc défini par le législateur (l'*European Insurance and Occupational Pensions Authority* EIOPA). Ces modules de risque sont décrits dans le schéma ci-dessous et ceux qui concernent notre périmètre sont encadrés en rouge. Les capitaux élémentaires sont ensuite agrégés via des matrices de corrélation (également définies par le législateur) pour prendre en compte les interactions entre les différents risques et un effet de diversification. Par exemple, un choc de mortalité et de longévité ne peuvent arriver

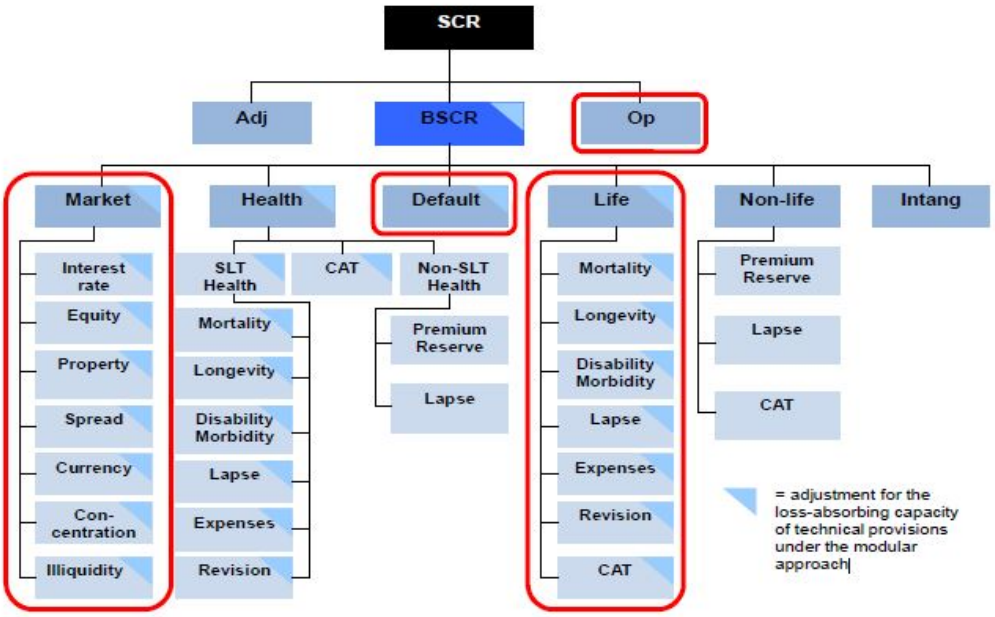

FIGURE 5.2 – Modules de risque sous Solvabilité 2

en même temps.

Le modèle interne autorise les assureurs à calculer le capital de solvabilité requis de la manière dont ils le souhaitent, à condition que le modèle soit validé par le régulateur (l'ACPR). En effet, l'utilisation d'un modèle interne a pour objectif de mieux représenter les risques pris par la compagnie puisque la formule standard est censée par définition s'appliquer à toute entité.

Concètement, pour le SCR technique également dit de souscription et qui correspond au module *Life* dans le schéma, le choc de la formule standard est trop élevé par rapport à l'estimation du risque réellement encouru par l'assureur. Pour mieux refléter la réalité, un choc est calibré sur le portefeuille détenu par la compagnie.

Pour le SCR de marché qui correspond au module *Market* dans le schéma, une autre méthode qui diffère de l'approche modulaire de la formule standard est utilisée et se nomme la méthode des portefeuilles répliquants.

Ces approches permettent de calculer un SCR au global au niveau de la compagnie à une maille beaucoup plus agrégée par rapport à celle de notre étude qui concerne un produit.

Le détail de la calibration des chocs du modèle interne pour le SCR technique, la méthode des portefeuilles répliquants et les méthodes de calcul du SCR de défaut et opérationnel ne rentrent pas dans le cadre de ce mémoire.

Des hypothèses seront prises et des limites seront posées afin de calculer une

estimation du capital de solvabilité requis à la maille produit. Le SCR technique et de marché seront étudiés plus en détail. Le SCR de défaut et opérationnel seront repris de la maille globale et ajustés via des hypothèses simples.

Dans un premier temps, le principe de calcul d'un SCR par module dans la formule standard sera expliqué puisque celui-ci est tout de même utilisé dans le modèle interne de la compagnie pour le SCR technique à la maille globale mais également à la maille produit (seuls les niveaux de chocs diffèrent entre la formule standard et le modèle interne).

5.1.1.3 Principe du calcul d'un SCR pour un module de risque

$$SCR_{module} = Max(0; \Delta NAV)$$

La variation de NAV correspond à la différence entre la NAV en central et la NAV choquée en projetant avec des hypothèses stressées. Le niveau de choc est défini par le législateur et dans le cas du modèle interne pour le SCR technique, ce niveau de choc est calibré sur le portefeuille de la compagnie pour refléter le risque réel encouru.

La NAV est la *Net Asset Value* et correspond par définition à la valeur de l'actif sous Solvabilité 2 donc en valeur de marché moins les BEL. Au regard du bilan prudentiel de Solvabilité 2, cela correspond à la somme de l'ANAV et de la VIF.

La commutation que nous étudions se fait à la maille d'un produit donc seul le capital immobilisé engendré par l'exploitation de ce produit nous intéresse. La variation d'ANAV ne peut être engendrée que par un choc sur les actifs qui lui sont adossés. Or nous nous intéressons uniquement aux chocs sur les actifs clients qui sont donc liés à l'existence du contrat.

L'hypothèse faite est que l'ANAV ne peut pas servir à aider à la souscription du New Business puisque le portefeuille est en *run-off* et que les gains adossés à l'ANAV sont directement reversés aux actionnaires. La variation de NAV devient donc une variation de VIF.

On obtient finalement la formule suivante :

$$SCR_{module} = Max(0; \Delta VIF)$$

Le SCR peut s'interpréter comme la perte éventuelle sur la VAN des résultats futurs entre le cas central et choqué. Le SCR peut être ainsi nul si le choc génère des gains en plus. Ceci peut être le cas pour le risque de longévité lorsqu'il n'y a pas de sorties en rente pour un produit d'épargne. En effet, les assurés décèdent à des âges plus élevés, ainsi moins de sinistres sont observés et plus de primes peuvent être prélevées.

5.1.2 Composantes du capital à immobiliser

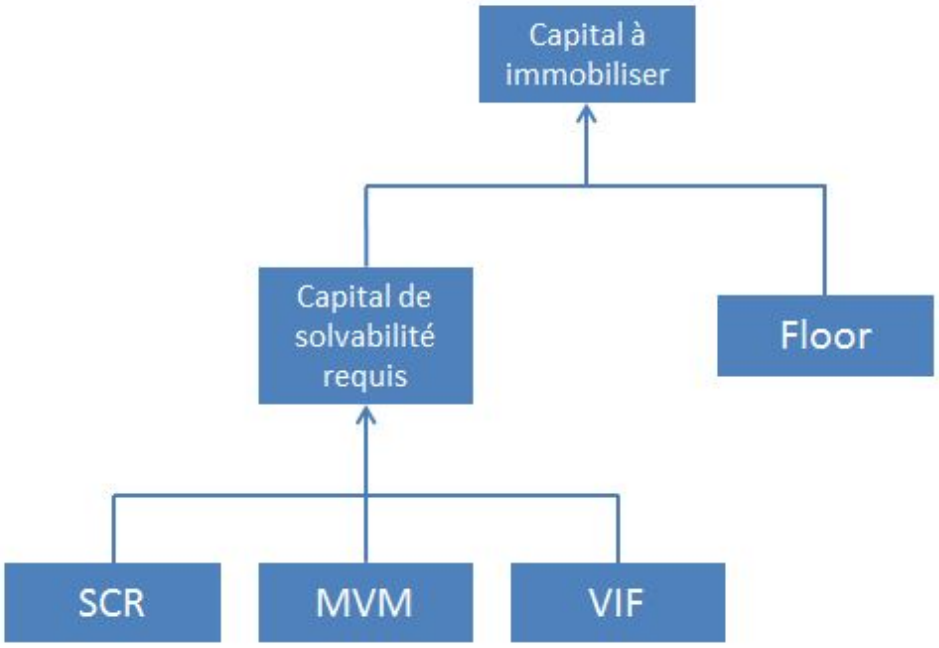

FIGURE 5.3 – Composantes du capital à immobiliser

Le schéma ci-dessus récapitule les composantes qui rentrent en compte dans le calcul du capital à immobiliser et qui permet d'en déduire le résultat sur le capital à immobiliser. La première étape est de calculer ces grandeurs à t_0 puis dans un second temps de les projeter. Pour calculer ces grandeurs, on se place en environnement risque neutre et on calcule les grandeurs brutes d'impôts.

5.1.2.1 La VIF à t_0

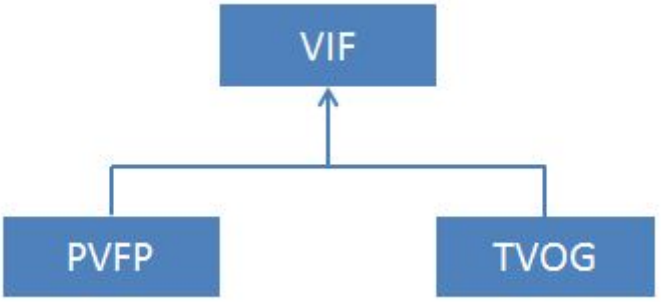

FIGURE 5.4 – Composantes de la VIF

$$VIF = PVFP + TVOG$$

La PVFP représente la valeur actualisée nette des résultats statutaires futurs probables bruts d'impôts et calculés en environnement risque-neutre.

Ainsi en considérant une chronique de taux d'actualisation $(i_t)_{t>0}$ et une chronique de résultats statutaires bruts d'impôts R indéxées par t :

$$PVFP = \sum_{t=1}^{horizon} \frac{R_t}{(1+i_t)^t}$$

La TVOG est l'acronyme de la traduction anglaise de Valeur temps des options et des garanties et représente le coût des options et des garanties cachées du contrat. Ces options et ces garanties peuvent comprendre pour rappel :

- Les TMG et TMGA accordés sur le fonds en euro
- Les garanties plancher en cas de décès proposées sur les contrats multi-supports
- L'option de rachat :
  - Présentant un risque pour la compagnie dans le cas où l'assuré, insatisfait du taux servi sur le fond en euro, rachète son contrat à une date où l'actif est en moins-value.
  - Une loi de comportement fonction des résultats financiers et des taux servis issus des différents scénarios permet d'ajuster la loi de rachat dite conjoncturelle. On parle de loi de rachat dynamique. Cette loi est liée à la satisfaction des assurés à propos de la rémunération qui leur est accordée.

Dans notre contexte d'étude, la TVOG ne prendra en compte que la garantie plancher.

Pour calculer la TVOG, l'idée est de faire plusieurs simulations avec des trajectoires favorables et défavorables différentes du cas déterministe (ou central). Ceci permet de faire apparaître la TVOG par simulation de Monte Carlo en faisant intervenir la dispersion des scénarios et la prise en compte des intéractions entre actif et passif.

La TVOG est donc la différence entre la moyenne des résultats selon les 4000 scénarios et la PVFP :

$$TVOG = \sum_{i=1}^{4000} \frac{VAN(R)_i}{4000} - PVFP$$

Avec $VAN(R)_i$ étant la valeur actuelle nette des résultats statutaires bruts d'impôts dans le scénario i.

Dans notre cas, on calculera simplement $VIF = \sum_{i=1}^{4000} \frac{VAN(R)_i}{4000}$.

5.1.2.2 Le SCR à t_0

1. Méthodologie de calcul
1.1. SCR technique

Les risques concernent essentiellement l'incertitude associée à la mesure des engagements pris par l'assureur.

Le modèle calcule les primes, sinistres et coûts futurs pour une projection donnée de 60 années à chaque pas de temps. L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir un SCR par module :

- On projette une première fois selon 4000 scénarios risque neutre pour obtenir la $VIF_{central}$ qui nous servira de base pour le calcul du SCR.
- On effectue une nouvelle fois 4000 projections avec les mêmes scénarios risque neutre mais en choquant les hypothèses pour obtenir la $VIF_{choqué}$.
- Si le choc engendre une baisse de la VIF, cette différence constitue le SCR. En cas de gain, le SCR est nul.

Le modèle interne de la compagnie respecte ce même principe de calcul. Seul le niveau des chocs diffère. Le tableau ci-dessous récapitule le niveau des chocs en formule standard et en modèle interne :

Niveau des chocs		
Choc	**Formule standard**	**Modèle interne**
CAT	Choc additif de 0,15% la première année	Choc additif moindre la première année
Mortalité	Choc multiplicatif de 15% sur toute la projection	Idem
Longévité	Choc multiplicatif de -20% sur toute la projection	Variable suivant l'âge
Rachats	Choc multiplicatif de 50% sur toute la projection	Choc multiplicatif moindre sur toute la projection
Rachats massifs	Choc additif de 40% la première année	Choc additif moindre la première année
Coûts	Choc multiplicatif de 10% sur les coûts et choc additif de 1% sur l'inflation sur toute la projection	Choc multiplicatif de 10% sur les coûts sur toute la projection (le choc sur l'inflation est pris en compte dans le SCR marché)

FIGURE 5.5 – Chocs du module Vie en formule standard et modèle interne

Le principe de calcul à la maille globale peut être appliqué à la maille produit puisqu'on capte les pertes engendrées par le dit contrat ou produit. Les chocs sur les hypothèses traduisent les variations de comportement du contrat ce que l'on cherche à mesurer.

Les variations des chocs en modèle interne sont calibrées sur le portefeuille de la compagnie et représentent une estimation plus fine des risques auxquels sont exposés l'assureur. Les niveaux sont ainsi plus bas par rapport à la formule standard et représentent un intérêt puisqu'un choc moindre engendre un gain de capital de

solvabilité requis.

La méthodologie détaillée pour le calcul des chocs pour le modèle interne ne rentre pas dans le cadre de ce mémoire.

1.2. SCR marché

Ce risque est associé à l'incertitude liée au rendement et à la valeur des actifs financiers.

À la maille globale, la méthode des portefeuille répliquants est utilisée et consiste à répliquer le passif par un portefeuille d'actifs. Ainsi en appliquant des chocs financiers sur les actifs, on en déduit l'impact sur le passif.

Cependant, elle n'est pas utilisable à la maille produit à cause d'un problème d'adossement des actifs du fonds en euro au passif du produit. En effet, dans la réalité, un fonds en euro n'est pas adossé à un produit en particulier mais à plusieurs produits ainsi la richesse du fonds est mutualisée. La question est de savoir dans la modélisation quel actif mettre en face du passif car cet actif génère une production financière qui va rentrer en compte dans le taux de revalorisation de la PM.

Une hypothèse simplificatrice est de répartir l'actif uniformément mais il y aurait une asymétrie entre les caractéristiques des produits, les taux servis et la production financière de l'actif. D'autant plus que dans la réalité, le taux servi est discrétionnaire et dépend du contrat ou client que l'on va privilégier à des fins commerciales et stratégiques.

Ce problème n'est pas observable sur un produit investi seulement sur des supports en UC puisque réglementairement, les actifs doivent être cantonnés. L'actif se comporte de la même manière que le passif.

La méthode des portefeuilles répliquants est une méthode qui pourrait faire l'objet d'un mémoire entier.

Le détail de cette méthodologie ne sera ainsi pas abordé. Dans ce mémoire, pour calculer le SCR marché, on utilise la méthodologie de la formule standard donc en calculant une différence de VIF entre le cas central et le cas choqué.

Dans le cas choqué, les hypothèses financières (*i.e.* les rendements bourisers, des différents zéro-coupons, de l'immobilier, les déflateurs, les rendements du fond en euro) sont différentes du central. Ce scénario est calibré, par l'équipe qui calcule le SCR marché via la méthode des portefeuilles répliquants, de telle manière à obtenir via la méthodologie formule standard le même SCR.

En pratique, il correspond à un choc de baisse des taux qui a donc un impact sur la valeur des zéro-coupons combiné à un choc de baisse de la valeur des actions

et de l'immobilier à t_0. Ces niveaux de chocs sont différents des chocs de la formule standard et ne seront pas mentionnés par souci de confidentialité.

Pour un produit dont les versements sont intégralement investis en supports UC, la PM va être ainsi impactée de la baisse de la valeur des actions et de l'immobilier à t_0. La régression du support UC en hypothèse du modèle détermine le montant qui impacte l'actif et donc la PM puisque l'actif et le passif sont parfaitement en regard.

Ainsi pour récapituler, on utilise la méthodologie de la formule standard, *i.e.* une différence de VIF calculée avec les 4000 scénarios et calculée avec des hypothèses financières choquées calibrées pour retrouver le SCR obtenu avec la méthode des portefeuilles répliquants. La provision mathématique sera impactée par les différents chocs des scénarios à t_0 (baisse de la valeur des actions et de l'immobilier et baisse des taux).

1.3. SCR de défaut

Il s'attache à prendre en compte le risque de défaut des contreparties des réassureurs et des émetteurs d'obligation.

Le modèle utilise des grandes classes d'actifs et non pas les actifs ligne à ligne. Ainsi aucune information sur les émetteurs des obligations n'est disponible. On ne peut ainsi utiliser ni la formule standard ni le modèle interne pour évaluer ce SCR.

Une approche simplifiée a été adoptée et consiste à proratiser les SCR de défaut au niveau de la branche, *i.e.* l'activité euro ou UC de la compagnie par rapport à la PM. La justification est de considérer que par effet d'assiette, le risque de défaut des contreparties évolue proportionnellement.

En pratique, les données du SCR par branche à la maille globale ont été récupérées avec les PM correspondantes. Le modèle calcule les PM investies soit sur le fond en euro soit sur les supports UC du produit ce qui nous permet d'obtenir une estimation du SCR de défaut.

1.4. SCR opérationnel

Il prend en considération les risques associés aux procédures de gestion interne de l'assureur et aux conséquences d'un dysfonctionnement à ce niveau.

Ces calculs sont faits à la maille globale. L'outil de calcul du SCR opérationnel ne peut être utilisé sur un produit d'autant plus que des scénarios de risques opérationnels spécifiques à un produit n'existent pas.

Ainsi de la même manière que pour le SCR de défaut, une approche simplifiée a été adoptée et consiste à proratiser les SCR opérationnels au niveau de la branche,

i.e. l'activité euro ou UC de la compagnie par rapport à la PM. La justification est de considérer que par effet d'assiette, le risque opérationnel évolue proportionnellement.

2. Agrégation

Les SCR sont calculés par sous-risque puis agrégés par risque. Enfin, les SCR par risque sont agrégés pour obtenir le SCR global. Par exemple, le risque de souscription ou technique est décomposé en chocs de rachat, rachat massif, longévité, mortalité, CAT et coûts. Le SCR technique est ensuite agrégé avec le SCR marché, de défaut et opérationnel pour obtenir le SCR global.

En formule standard, l'agrégation est effectuée via des matrices de corrélation définies par l'EIOPA. Ces coefficients prennent en compte la dépendance entre les différents risques. Par exemple le choc longévité ne peut pas avoir lieu en même temps qu'un choc mortalité.

Ci dessous, on retrouve la matrice d'agrégation pour le SCR technique :

SCR technique						
	CAT	Mortalité	Longévité	Rachats	Rachats massifs	Coûts
CAT	100%	0%	0%	0%	0%	0%
Mortalité	0%	100%	-50%	25%	25%	25%
Longévité	0%	-50%	100%	0%	0%	0%
Rachats	0%	25%	0%	100%	0%	25%
Rachats massifs	0%	25%	0%	0%	100%	50%
Coûts	25%	25%	0%	25%	50%	100%

FIGURE 5.6 – Matrice d'agrégation du SCR technique

En pratique, on utilise la formule suivante avec $Corr_{i,j}$ les coefficients de la matrice de corrélation ci-dessus :

$$SCR_{technique} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j}\ SCR_{module\ i}\ SCR_{module\ j}}$$

On opère de la même manière pour le SCR marché, crédit et opérationnel. Ces quatre SCR sont ensuite agrégés via une autre matrice de corrélation pour obtenir le SCR global.

5.1.2.3 La MVM à t_0

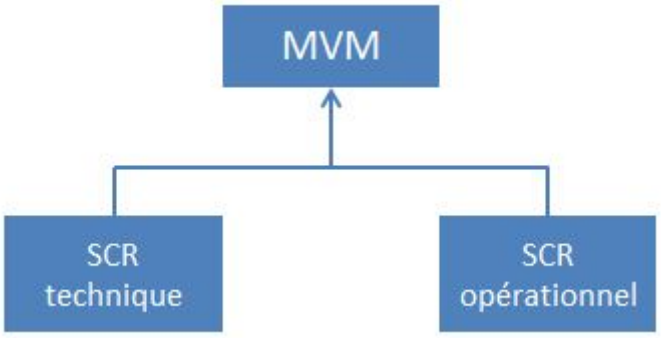

FIGURE 5.7 – Composantes de la MVM

La MVM est l'acronyme de *Market Value Margin* et d'un point de vue macro-économique représente le plus petit montant nécessaire additionnel aux BEL pour assurer la reprise d'un portefeuille par une autre compagnie.

Elle est définie comme un pourcentage de la VAN des SCR non recouvrables, *i.e.* non réplicables par un portefeuille de couverture. En pratique, cela correspond aux SCR technique et opérationnel.

À chaque année de la projection, la MVM est obtenue de la manière suivante :

$$MVM(t) = 6\% \sum_{k>t} SCR\ marginal_{technique\ et\ oprationnel}(k) \frac{déflateur(k)}{déflateur(t)}$$

Les SCR calculés sont calculés dans une vision marginale avec des *transmission factors*. Ces coefficients sont différents suivant la grandeur calculée. Ainsi on a un vecteur de coefficients pour le calcul du SCR et un autre pour les SCR pour le calcul de la MVM.

Ainsi pour le calcul de la MVM, il est nécessaire de pouvoir projeter les SCR dans le temps. La méthodologie est décrite dans le paragraphe suivant.

5.1.2.4 La projection des grandeurs calculées

1. **La projection dans la projection**

Pour rappel, les grandeurs calculées sont les suivantes :

- La VIF ;
- Le SCR décomposé par risque :
  - Pour le SCR technique et le SCR marché, le SCR par module de risque est obtenu par différence entre la VIF ci-dessus en central et la VIF en choquant les hypothèses.

  - Pour le SCR de défaut et opérationnel, on proratise le SCR à la maille globale par rapport à la PM.
- Les SCR sont agrégés via les *transmission factors* pour prendre en compte le bénéfice de diversification.
- La MVM est calculée en sommant les SCR actualisés technique et opérationnel mais réagrégés via des *transmission factors* propres à la MVM.

Pour projeter ces grandeurs, *i.e.* calculer ces grandeurs à $t > 0$, on procède de la manière suivante (le schéma ci-dessus représente la méthodologie pour $t = 2$) :

- Le portefeuille est vieilli jusqu'à la date de projection t en utilisant des scénarios dits *Management Case*. Ces scénarios reflètent les scénarios financiers les plus probables à aujourd'hui, *i.e.* ce sont les projections des observations réelles d'indices financiers. Les rendements des actifs intègrent en sus du taux sans risque une prime de risque.
- À partir de la date de projection, on reprojette sur l'horizon d'atude via les scénarios risque neutre recalibrés sur les scénarios *Management Case* en supposant que les prix des zéro-coupons du scénario MC donnent la courbe des taux *forward* RN dans le futur.

On voit ainsi que pour chaque pas de temps de la projection MC, on reprojette sur 60 années via un scénario RN recalibré d'où la notion de projection dans la projection. Ce principe permet d'avoir une chronique de résultats qui constituent la VIF.

Pour projeter le SCR, il faudrait donc recalculer chaque VIF selon chaque choc et recalibrer 4000 scénarios à chaque pas de temps t puis pour chaque date de la projection MC, reprojeter sur 60 - t années chacun de ces 4000 scénarios afin d'obtenir la VIF pour cette date. Ceci constitue le principe de simulations dans la simulation mais n'est pas réalisable d'un point de vue opérationnel. On projettera donc les grandeurs étudiées à l'aide de *drivers*.

On supposera que les *transmission factors* sont constants dans le temps pour pouvoir réagréger les SCR.

Après avoir projeté les SCR, il est facile de recalculer la MVM à chaque date en ayant l'hypothèse de constance des *transmission factors*.

2. La projection via un *driver*

Comme vu précédemment, la mise en pratique de la méthodologie de simulation dans la simulation est onéreuse en temps de calcul, l'idée d'utiliser un *driver* est de calculer les grandeurs à t_0 puis de les faire évoluer suivant une autre grandeur à laquelle elles sont sensibles :

$$Grandeur(t > 0) = Grandeur(t - 1)\ \frac{Driver(t)}{Driver(t - 1)}$$

5.1.2.5 Le capital à immobiliser et le coût du capital immobilisé

1. Formule du capital à immobiliser

Tout d'abord, il est nécessaire de calculer les grandeurs précédentes (VIF, SCR et MVM) nettes d'impôts.

Le détail du calcul des impôts ne rentre pas dans le cadre du mémoire.

Le SCR correspond à une variation de VIF. On ne calcule pas l'impôt pour la VIF choquée car la VIF est moins importante. On retire directement le montant d'impôts calculé sur la VIF brute en central augmentée de la MVM pour obtenir le SCR net.

Le taux d'impôts utilisé pour la VIF et la MVM est égal à 34,43% tandis que le montant d'impôts déduit du SCR est égal à la différence entre celui de la VIF et de la MVM dans la limite de 34,43% du SCR brut. Ainsi on obtient les formules suivantes :

- $VIF_{net} = (1 - 34,43\%)VIF_{brut}$
- $MVM_{net} = (1 - 34,43\%)MVM_{brut}$
- $SCR_{net} = SCR_{brut} - Min(34,43\%SCR_{brut}; 34,43\%(VIF_{brut} - MVM_{brut}))$

Le capital immobilisé au final est une fonction de ces trois grandeurs nettes d'impôts et correspond à :

$$Max(\alpha SCR_{net}; \beta SCR_{net} - \gamma VIF_{net} + \delta MVM_{net})$$

Ainsi on voit qu'on peut couvrir le SCR par les résultats futurs qui sont représentés par la VIF diminuée de la MVM qui représente une sorte de marge de sécurité, ceci dans la limite d'un *floor*. Si la VIF est trop importante et couvre entièrement le SCR et la MVM, aucun capital ne serait immobilisé sans ce *floor*, néanmoins *a priori* ni le régulateur (l'ACPR) ni les marchés n'accepteraient une absence totale de fonds propres au prétexte que les résultats futurs probabilistes sont suffisants pour pouvoir absorber les chocs.

Les valeurs de ces constantes sont très importantes, en particulier celle du *floor* puisque si celui-ci est atteint, il détermine entièrement la chronique de capital à immobiliser et donc le prix d'indemnisation.

2. Formule du coût du capital immobilisé

Immobiliser du capital représente un coût puisque cela signifie ne pas pouvoir l'investir. L'organisme (assureur ou réassureur) veut être rémunéré pour l'immobilisation de ce capital. Le coût du capital immobilisé (ou CoC) est tout simplement égale au produit du capital requis et d'un certain taux.

Ce montant doit donc être calculé en déterminant le coût que représente la mobilisation des fonds propres éligibles nécessaires pour porter les engagements d'assurance et de réassurance jusqu'à leur extinction.

Le taux pour le coût de mobilisation de ces fonds propres éligibles qui a été retenu dans le QIS5 est de 6%.

Le taux du coût du capital a été fixé à 6% afin de refléter le coût de détention d'un montant de fonds propres éligibles pour une entreprise d'assurance ou de réassurance. Il est identique pour toutes les entreprises.

On obtient ainsi :

$$CoC = -6\% \sum_{t=1}^{horizon} \frac{Capital\ immobilisé_t}{(1+i_t)^t}$$

3. Coût du capital immobilisé par le réassureur

Toute la méthodologie présentée précédemment se base sur des éléments du modèle interne de la compagnie d'assurance. Ce modèle interne est adapté uniquement à l'assureur qui le conçoit.

Pour calculer le SCR du réassureur, nous devrions donc utiliser la formule standard. Mais nous ne disposons pas des informations internes à la compagnie qui permettent de calculer chacun des SCR_{module}.

On fera donc l'hypothèse que le réassureur se comporte de la même façon que l'assureur et qu'il est ainsi possible d'utiliser la même méthode de calcul du coût du capital immobilisé.

Le coût du capital du réassureur sera calculé de la même manière que celui de l'assureur excépté pour le SCR de défaut. En effet, le risque de défaut des émetteurs d'obligation est porté par l'assureur. Le réassureur ne subit pas de risque à ce niveau-là. Par confidentialité de l'information de la part du réassureur, il est impossible de savoir si celui-ci fait appel à un rétro-cessionnaire, *i.e.* si le réassureur fait réassurer à nouveau la garantie plancher de ce portefeuille. On supposera donc que le réassureur ne subit aucun risque de défaut.

Utiliser un modèle interne plutôt que la formule standard minimise le SCR et donc le coût du capital immobilisé. Cela aura tendance à surestimer le montant d'indemnisation minimum accepté par le réassureur I_R mais permettra tout de même d'obtenir une fourchette à l'intérieur de laquelle un prix pourra être négocié et qui assure à l'assureur de ne pas perdre d'argent.

5.2 Avec la méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est la méthode la plus utilisée pour déterminer le SCR.

En effet, il s'agit d'utiliser la même méthode que dans la partie 4.1 de ce mémoire pour calculer la VIF.

En appliquant la méthode décrite ci-avant, on obtient les coûts du capital immobilisé pour chacun de l'assureur et du réassureur en cas de commutation et en cas de maintien du traité :

	Commutation	Maintien traité
Assureur	- 5 172 803 €	- 4 794 677 €
Réassureur	- €	- 846 906 €

TABLE 5.1 – Coût du capital immobilisé en méthode de Monte Carlo

Le premier constat est que le coût du capital immobilisé par le réassureur est largement inférieur à celui immobilisé par l'assureur. Cela est la conséquence du risque de défaut nul pour le réassureur.

On pourrait s'étonner du fait que les montants de coût du capital immobilisé par l'assureur en cas de commutation ou non sont relativement proches alors qu'on imaginerait que faire appel à un réassureur diminuerait grandement ce coût.

Cela se justifie par le fait que dans le cas où le portefeuille n'est pas réassuré, la VIF est plus importante, ainsi le capital immobilisé est diminué. En effet, le fait que le portefeuille ait de gros résultats lui permet de mieux pouvoir faire face aux événements exceptionnels et donc lui permet de diminuer le capital qu'il doit immobiliser.

5.3 Avec la méthode des *puts*

On calcule le coût du capital immobilisé avec la même méthodologie que précédemment mais en utilisant la méthode des *puts*.

Ainsi on effectue des chocs sur nos paramètres de mortalité, rachats et coûts pour obtenir le SCR technique.

Comme précédemment, on utilise aussi des scénarios financiers choqués pour déterminer le SCR de marché.

Enfin, on utilise la même méthode simplifiée du calcul des SCR de défaut et opéationnels consistant à prendre une certaine proportion des provisions mathéma-

tiques investies sur les supports euro et UC.

	Commutation	Maintien traité
Assureur	- 5 148 461 €	- 5 048 594 €
Réassureur	- €	- 854 986 €

TABLE 5.2 – Coût du capital immobilisé en méthode des Puts

Nous constatons ici que les commentaires émis pour la méthode précédente sont encore applicables ici. En particulier les montants sont encore plus proches pour l'assureur en cas de maintien du traité ou de commutation.

Chapitre 6

Résultats finaux

On a vu dans la troisième partie les formules permettant de calculer les bornes qui définissent la fourchette de négociation du prix de la comutation. Pour rappel :

$$I_R = (P_R - S_R) - g_R^{traité} - CoC_R^{traité}$$
$$I_A = (P_R - S_R) + g_A^{traité} + (CoC_A^{traité} - CoC_A^{com})$$

Grâce aux résultats calculés dans les parties 4 et 5, on conclut sur les montants I_R et I_A selon la méthode de Monte-Carlo et la méthode des puts :

	I_R	I_A
Méthode de Monte-Carlo	1 931 533 €	2 415 761 €
Méthode des Puts	1 294 871 €	2 086 440 €

TABLE 6.1 – Résultats finaux pour les deux méthodes

Les deux méthodes admettent une petite fourchette à l'intérieur de laquelle il est possible de commuter à la fois pour la méthode de Monte-Carlo et la méthode des *puts*.

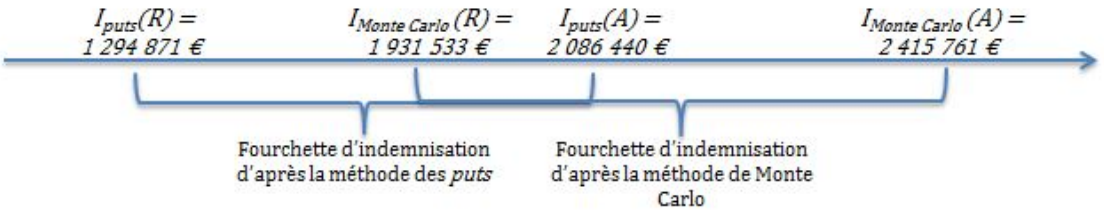

FIGURE 6.1 – Fourchette de négociation selon les deux méthodes

À l'intérieur de l'entrecroisement des deux fourchettes, on peut considérer qu'une première proposition de deux millions d'euros serait un bon montant d'approche puisque c'est un prix qui convient à la fois à l'assureur et au réassureur.

Le but de l'assureur est de négocier le prix au plus proche de I_R voire en-dessous. D'après la méthode des *puts*, l'assureur peut négocier jusqu'à des montants bien plus

faibles que ceux donnés par la méthode de Monte-Carlo. Mais il doit être conscient que cette première méthode, bien que plus rapide à exécuter, est moins précise que la seconde puisqu'elle ne prend pas en compte les rachats partiels et les versements.

On peut donc considérer la méthode de Monte-Carlo comme plus précise mais elle est bien plus chronophage. En effet, cette méthode nous a obligé à agréger notre portefeuille en *model points* alors que pour la méthode des *puts*, consistant en une formule fermée, les résultats sont immédiats même pour un très grand nombre de contrats.

Néanmoins, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été faites, pouvant biaiser les résultats finaux. Il existe donc plusieurs points sur lesquels notre étude aurait pu aller plus loin pour plus de précision.

En effet, les rachats conjoncturels par exemple sont difficiles à modéliser. Nous avons ici utilisé simplement une courbe donnée par le QIS5 mais une étude apropriée aurait permis d'obtenir une projection des taux de rachat conjoncturel futurs bien plus adaptée à notre portefeuille.

De plus, une répartition des actifs contrat par contrat nous aurait donné un résultat plus proche de la réalité. Mais cela nous aurait empêché d'agréger notre portefeuille en un nombre restreint de *model points*. Une étude complémentaire bien plus longue aurait donc été nécessaire à l'agrégation du portefeuille.

Enfin, nous avons été contraint d'utiliser la même méthode pour calculer le coût du capital immobilisé de l'assureur et du réassureur. Or cette méthode se base sur des éléments du modèle interne de l'assureur. Cela a pour conséquence de surestimer le capital immobilisé par le réassureur. Ainsi, alors que l'assureur cherchera à négocier un prix d'indemnisation au plus proche du minimum que pourrait accepter le réassureur, il se pourrait qu'il puisse en réalité négocier bien plus à la baisse. Un modèle de calcul du coût du capital immobilisé propre au réassureur aurait mené à un résultat plus proche de la réalité. Néanmoins, la fourchette de négociation doit assurer l'assureur de ne pas être perdant dans l'opération.

Conclusion

L'étude que nous avons menée nous a permis de répondre à la question de la détermination d'un montant qui conviendrait à la fois à l'assureur et au réassureur pour procéder à une opération de commutation d'un traité de réassurance portant sur une garantie plancher.

Bien que ce soit une opération peu connue pour laquelle aucune méthode n'est privilégiée par les autorités, nous avons vu que différentes voies pouvaient mener au résultat.

Pour cela, nous avons déterminé les différents éléments qui interviennent dans ce montant d'indemnisation et avons vu deux méthodes — la méthode de Monte-Carlo et la méthodes des *puts* — qui permettent de calculer chacun de ces éléments.

Néanmoins, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été faites, pouvant biaiser les résultats finaux. Il existe donc plusieurs points sur lesquels notre étude aurait pu aller plus loin pour plus de précision, que ce soit au niveau de la modélisation des rachats conjoncturels, la répartition des actifs des contrats ou bien encore la méthode de calcul du capital immobilisé par le réassureur.

Malgré cela, la détermination d'un intervalle de prix qui conviendrait à la fois à l'assureur et au réassureur ne représente qu'une partie du travail menant à l'opération de commuter. En effet, le montant final d'indemnisation ne sera déterminé qu'après négociation entre les deux parties.

Bibliographie

[1] Keroulas, P. (2010). Les approches possibles à adopter dans l'étude d'opportunité de commutation d'un traité de réassurance. *Mémoire d'actuariat*

[2] Burr, I. (2015). Impact d'un dispositif de réassurance non-proportionnelle sur le risque de réserve. *Mémoire d'actuariat*

[3] Boulliung, F. (2014-2015). Les grands principes de la réassurance. *Cours de l'Université de Strasbourg*

[4] Ben Ayed, K. (2006). Provisionnement de la garantie plancher. *Mémoire d'actuariat*

[5] Dao, D. (2015). Projection du SCR à la maille produit et impacts sur la rentabilité d'un contrat épargne. *Mémoire d'actuariat*

[6] Commission du 10 octobre 2014 Règlement délégué (UE) 2015/35 complétant la directive 2009/138/CE

[7] Tankov, P. (2013-2014). Mathématiques financières - Cours Master 2 ISIFAR