



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le _____

Par : Florent WILHELMY

Titre: Analyse des modèles de taux d'intérêts pour la gestion actif-passif

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuaire

M. PERRET Patrick

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

M. François QUITTARD-PINON

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

Entreprise :

Caisse des dépôts et consignations

Rue de Lille Paris 7ème

Directeur de mémoire en entreprise :

M. LAMAUD Rémi

Invité :

***Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé :

Ce travail consiste en une étude comparative de plusieurs modèles stochastiques de taux d'intérêts, appartenant à différentes classes de modèles (historiques, d'équilibres, d'absence d'opportunités d'arbitrage et de marché) ; afin de déterminer le modèle le plus adapté à la politique de couverture du risque global de taux et de gestion actif-passif bancaire.

Après une analyse théorique détaillée, un calibrage précis sur des prix de marché d'options de taux et une implémentation pratique de chacune des dynamiques postulées, nous évaluons des produits dérivés simples de taux d'intérêts comme les « swaps », les « caps » et les « floors ». Nous comparons les prix numériques obtenus à une date donnée avec ceux théoriques calculés analytiquement ou dans le contexte du modèle de Black. Nous attachons une attention particulière aux structures de volatilités et aux matrices de corrélations employées.

Dans une première partie, nous rappelons les missions de la gestion actif-passif, les principales courbes de taux existantes ; et reconstruisons précisément la courbe de taux zéro-coupon.

Suite à une analyse en composantes principales des variations historiques des taux zéro-coupon, et aux premières valorisations d'instruments de couverture, la troisième partie présente, l'étude, le calibrage, et la mise en œuvre informatique, dans les univers risque-neutre et forward-neutre, de deux modèles essentiels : l'arbre de Hull et White à un facteur et le modèle de marché des taux « forward » de BGM. Nous évoquons enfin les avantages et les limites relatifs de chacun.

La dernière partie conclue ce mémoire par une analyse comparative des résultats et des caractéristiques mises en relief pour chacun des modèles traités, afin de choisir la méthodologie à suivre concernant la génération de trajectoires de taux d'intérêts nécessaires à la gestion d'un service actif-passif.

Mots clés :

Dynamique stochastique, couverture, risque global de taux, calibrage, option, cap, floor, swap, arbre trinomial, simulations de Monte-Carlo, structure de volatilité, matrice de corrélations, taux zéro-coupon, taux forward, STTI (Structure par Terme des Taux d'Intérêts), probabilité risque-neutre, probabilité forward-neutre, gestion actif-passif.

Abstract:

This work is a comparative study of several stochastic interest-rate models, belonging to different classes of models (historical, equilibrium, absence of arbitrage opportunities and market models) to choose the most appropriate in order to hedge global rate risk and manage balance sheet in banking ALM.

After a detailed theoretical analysis, a precise calibration on market rate options prices and a practical implementation of each postulated dynamic, we evaluate derivatives of simple interest rates as swaps, caps and floors. We compare numerical prices obtained at a given time with theoretical prices calculated analytically or in the Black model context. We attach special attention to volatilities structure and correlation matrix used.

In the first part, we recall the missions of the asset-liability management, the main existing rates curves and rebuild the spot rate curve.

Following a principal component analysis of historical changes of spot rates and initial valuations of hedging instruments, the third part presents the study, the calibration, and IT implementation of two basic models: the tree of one factor Hull and White model and the Libor market model. We finally discuss the advantages and limits relating to each.

The last section concludes with a comparative analysis of results and main characteristics for each illustrated model, so as to adopt the methodology for the generation of interest rates trajectories. These one are necessary on a day to day basis work of an asset and liability management team.

Key words:

Stochastic process, hedging, overall rate risk, calibration, option, cap, floor, swap, trinomial tree, simulations of Monte-Carlo, volatility structure, correlation matrix, spot rates, forward rates, STTI (term structure interest rates), risk-neutral probability, forward-neutral probability, asset-liability management.

Remerciements :

Je remercie vivement Michèle Drain et Remi Lamaud, mon maître de stage, de m'avoir accueilli au sein de l'équipe de gestion actif-passif de la Direction Financière et Stratégique de la Caisse des Dépôts et Consignation ; et de m'avoir permis de travailler sur un sujet aussi intéressant.

Je remercie très chaleureusement Rémi de m'avoir très bien encadré tout au long de mon passage dans son service et après... Merci de m'avoir donné des conseils et explications toujours très précis et avisés et fait profiter de tes talents financiers, scientifiques et informatiques.

Je remercie également tous mes collègues de l'équipe ALM : Raja El Babsiri, Patrick Raynal et Emile Mboladinga. Ils ont insufflé une ambiance de travail très positive et encourageante.

Merci à eux de m'avoir fait découvrir ce métier de gestionnaire actif-passif et ses multiples missions essentielles.

J'en profite également pour adresser mes remerciements à Aurélien Bonnet et Simon Hutin, « isfaiens » comme moi et alternants à la Caisse des Dépôts, pour leur aide précieuse.

Plus généralement, je tiens à remercier tout le département financier, auquel j'ai été rattaché de juin 2005 à décembre 2005, pour leur accueil très chaleureux.

Merci enfin à mon tuteur de mémoire, François Quittard-Pinon, pour son aide et le temps qu'il m'a accordé.

Sommaire :

Résumé :	2
Abstract:	3
Remerciements :	4
Sommaire :	5
INTRODUCTION GENERALE :	7
Partie I. Généralités sur les courbes et modèles de taux.....	9
Chapitre1. Définitions et caractéristiques des taux – Risque de taux.....	9
Section 1.1 Définitions et rappels.....	9
Section 1.2 Qu'est ce que le risque de taux en ALM ?	10
Chapitre2. Les courbes de taux.....	12
Section 2.1 La courbe des taux de « swaps »	12
Section 2.2 La courbe des taux zéro-coupon.....	16
Section 2.3 La courbe des taux « forward »	19
Chapitre3. Préparation de la base de données et modélisation d'une courbe de taux zéro-coupon	22
Section 3.1 La base de données	22
Section 3.2 Construction de la courbe des taux zéro-coupon à partir des taux de « swaps »	24
a. Homogénéisation et interpolation	25
b. Conversion des taux courts monétaires.....	26
c. Calcul des taux zéro-coupon sur le long terme	26
d. Application pratique.....	28
Section 3.3 Ecriture des taux zéro-coupon sous forme paramétrique : « Vasicek modifié »	29
Chapitre4. La modélisation de la dynamique des taux d'intérêts : introduction des différentes classes de modèles.....	32
Section 4.1 Deux approches distinctes	32
Section 4.2 Compatibilité avec la courbe des taux zéro-coupon ? Un ou plusieurs facteurs de risque ?	33
Section 4.3 Conclusion.....	36
Partie II. Analyse historique sur les mouvements de courbes et premières valorisations d'instruments simples de couverture.....	38
Chapitre1. Covariance et corrélation	38
Chapitre2. Facteurs explicatifs de la sensibilité des taux zéro-coupon	40
Section 2.1 L'ACP sur les taux d'intérêt zéro-coupon.....	40
Chapitre3. Diffusion de la variation des taux zéro-coupon	44
Section 3.1 Cube de diffusion.....	44
Section 3.2 Densités et lissages	48
Chapitre4. Valorisations d'instruments de couverture : Swaps, Caps et Floors....	49
Section 4.1 Evaluation d'un swap Taux fixe - Taux variable	49
a. Définition d'un swap de taux standard.....	49
b. Méthodes d'évaluation de swaps de taux standards.....	49
c. Comparaisons et conclusion.....	53
Section 4.2 Evaluations d'options sur taux d'intérêt.....	54
a. Définitions de deux options : le « cap » et le « floor »	54
b. Evaluations théoriques de produits dérivés de taux	55
c. Evaluations de « caps » et de « floors » avec le cube de diffusion	60

Section 4.3 Conclusion sur l'ACP dans la valorisation de produits dérivés de taux.....	61
Partie III. Présentations et implémentations de modèles de taux stochastiques dans les univers risque-neutre et forward-neutre	62
Chapitre1. Modèle AOA à un facteur : Hull & White	63
Section 1.1 Présentation théorique et extensions.....	63
a. Introduction	63
b. Analyse du processus stochastique sous-jacent	64
c. Extensions	69
Section 1.2 Implémentation du modèle de H&W.....	72
a. Méthode d'implémentation du modèle à un facteur à l'aide d'arbres recombinaunts	72
b. Applications : constructions d'arbres de H&W	80
Section 1.3 Evaluations de produits dérivés de taux et calibrage du modèle H&W à un facteur 84	
a. « Pricings » analytiques et numériques de caps et de floors	84
b. Calibrage du modèle.....	90
Section 1.4 Limites du modèle de H&W et perspectives	91
Chapitre2. Le modèle de marché BGM/LIBOR MARKET MODEL (LMM).....	93
Section 2.1 Présentation théorique du modèle et applications	94
a. Définitions, rappels et notations.....	94
b. La dynamique des taux « forward » du modèle de marché BGM.....	95
c. Structure de volatilité et matrice de corrélation des taux « forward »	100
Section 2.2 Implémentation et « pricings »	111
a. Technique des simulations de Monte-Carlo et discrétisation d'Euler.....	111
b. Evaluations des produits dérivés de taux	112
Section 2.3 De nombreux avantages « pratiques »	121
Partie IV. Analyse comparative et perspectives de mise en œuvre	123
Chapitre1. Comparatif des résultats issus des différentes modélisations.....	123
Chapitre2. Quelles mises en œuvre et projets d'améliorations?	124
CONCLUSION GENERALE :	127
BIBLIOGRAPHIE	129
ANNEXES	130
Annexe 1 : Les bases de calculs	130
Annexe 2 : Types de courbes de taux zéro-coupon.....	130
Annexe 3 : Le modèle de Nelson et Siegel	131
Annexe 4 : La base de données	132
Annexe 5 : La base complète zéro-coupon « splinée »	134
Annexe 6 : Le modèle de « Vasicek modifié »	134
Annexe 7 : ACP et facteurs explicatifs	136
Annexe 8 : Le modèle de Hull and White à un facteur	138
Annexe 9 : Le modèle de BGM	146
Annexe 10 : Rappels mathématiques, statistiques et financiers.....	152

INTRODUCTION GENERALE :

Le but de cette introduction est de rappeler, de façon précise, la mission que l'on m'a confiée pour mon stage de 7 mois au sein du service ALM¹, situé au siège de la Caisse des Dépôts et Consignations à Paris. Sous la direction du responsable de l'équipe de gestion de bilan, Monsieur Rémi Lamaud, mon travail a consisté à faire une étude comparative de différents modèles de taux pour une utilisation de « pricing » ainsi que leur emploi possible dans la politique de couverture du risque de taux en ALM bancaire.

Notre objectif est de traiter au moins un modèle par classe : modèle d'équilibre, modèle historique, modèles d'absence d'opportunités d'arbitrages² et modèles de marchés.

Après une analyse théorique de chaque modèle traité, une base de données de référence regroupant des prix cotés de « caps », « floors », « swaptions » et de taux fixes de swaps, servira à leurs implémentations et calibrages pratiques.

Nous valoriserons des produits dérivés simples à l'aide de chacun des modèles, mis en place principalement sous VBA³, et nous comparerons les résultats obtenus.

La partie portant sur l'estimation des paramètres de certains modèles et celle sur le calibrage de la volatilité seront les plus délicates et nécessiteront une attention particulière.

La première partie de ce mémoire sera consacrée à la présentation des différentes courbes de taux, de la base de donnée utilisée et de la reconstruction de la courbe des taux zéro-coupon, outil indispensable au « pricing » des produits dérivés de taux. Nous présenterons deux méthodes de reconstruction de cette courbe : à l'aide des taux « swaps » et avec le modèle d'équilibre de « Vasicek modifié ». Nous terminerons par une présentation générale des différentes classes de modèles de taux courts existants ; suivie d'une introduction à la notion de facteurs de risque.

Dans un deuxième temps, nous ferons une analyse historique sur les mouvements de courbes de taux d'intérêts. A l'aide d'une analyse en composantes principales sur les variations passées des taux zéro-coupon, nous diffuserons dans le futur la courbe de taux d'aujourd'hui. La valorisation de plusieurs instruments de couvertures tels que les « swaps taux fixe/taux variable », les « caps » ou encore les « floors » conclura cette partie.

Nous aborderons ensuite, en détail, deux modèles de taux stochastiques dans l'univers risque-neutre : le modèle d'absence d'opportunités d'arbitrage de Hull&White (1990) et le modèle de marché de Brace, Garatek et Muselia (1997)⁴. Nous ferons une présentation théorique détaillée de ces modèles, suivie d'une implémentation informatique, et nous terminerons également par une évaluation des instruments de couverture vus dans la partie précédente.

¹ A.L.M. : Asset liability management, terme anglais pour désigner la gestion actif-passif.

² Notés « modèles A.O.A. » dans la suite du mémoire.

³ VBA signifie Visual Basic for Applications.

⁴ Noté « modèle BGM » dans la suite du mémoire.

La dernière partie du mémoire consistera en un comparatif des résultats obtenus par les différentes modélisations, suivi d'une synthèse de leurs avantages et inconvénients pratiques ; afin d'avoir une idée plus précise d'une éventuelle méthodologie à suivre ; la plus adaptée au besoin A.L.M en ce qui concerne la simulation des courbes de taux d'intérêts dans une optique de gestion de risque.

Avant d'étudier les courbes de taux, définissons de façon très générale la gestion actif-passif, ainsi que les missions générales effectuées par les gestionnaires A.L.M.

▪ ***Définition officielle de la gestion Actif-Passif⁵:***

Méthode globale et coordonnée permettant à une entreprise et notamment à une banque, de gérer la composition et l'adéquation de l'ensemble de ses actifs et passifs et de son hors-bilan.

▪ ***Missions du gestionnaire actif-passif :***

Le gestionnaire actif-passif a trois objectifs principaux :

- protéger les marges face aux variations des conditions de marché
- optimiser les emplois, ressources et le résultat
- optimiser l'adéquation des fonds propres et les contraintes réglementaires

Pour réaliser ces objectifs, le service ALM doit mettre en œuvre plusieurs fonctions :

- **mesurer** et suivre les risques structurels : **risque de taux**, risque de change, risque de crédit et de contrepartie, investissements et participations
- anticiper la structure du bilan, les conditions de marché, les ratios prudentiels : c'est la **gestion prévisionnelle**
- Piloter la liquidité
- Allouer les fonds propres

Revenons sur le premier objectif cité ; il s'apparente à la notion de couverture. C'est une protection à mettre en place contre le risque de taux généré par une ou plusieurs positions prises. Par exemple, si nous prenons une position à taux fixe (emprunt à taux fixe), deux méthodes simples s'offrent au gestionnaire :

- annuler la position en signant un contrat inverse (prêt de mêmes caractéristiques)
- utiliser un produit dérivé de taux comme le « swap » de taux (échange du taux fixe contre du taux variable)

Ces méthodes font partie de la **micro-couverture**, qui consiste à couvrir et annuler chaque position une par une. La **macro-couverture** consistera plutôt à couvrir une exposition globale du bilan par des achats d'actifs (sans adossement des flux). Par exemple, un passif indexé sur l'inflation engendre du risque « inflation » ; celui ci peut être couvert partiellement par des achats d'obligations d'Etat indexées sur l'inflation (OAT⁶).

⁵ Définition extraite du J.O. du 28 février 1993.

⁶ Site Internet de l'Agence France Trésor : www.aft.gouv.fr

Partie I. Généralités sur les courbes et modèles de taux

Chapitre 1. Définitions et caractéristiques des taux – Risque de taux

Section 1.1 Définitions et rappels

Nous allons définir à présent les taux de marché que nous allons utiliser à travers tout le mémoire ; et particulièrement ceux concernant l'étude et le « pricing » des produits dérivés de taux.

Rappelons la définition d'un *taux interbancaire*⁷:

Taux interbancaire (T.I.O. ou I.B.O.R en anglais : Interbank Offered Rate⁸) : taux d'intérêt que les banques offrent pour leurs prêts à des banques de premier rang, sur une place donnée, dans une monnaie et pour une échéance définie.

- Les taux **IBOR** sont des taux interbancaires calculés à Francfort pour l'euro (EURIBOR), à Londres pour le dollars US, la livre sterling, le franc suisse etc., ou sur d'autres places domestiques (CIBOR et STIBOR pour les couronnes danoises et suédoises par exemple).

- L'**EURIBOR** (Euro Inter-bank Offered Rate ou taux interbancaire offert en euro). C'est un taux du marché monétaire européen en vigueur depuis janvier 1999. Il est avec l'**EONIA**⁹ l'un des deux principaux taux de référence du marché monétaire de la zone euro. L'EURIBOR est, pour une échéance donnée (par exemple 6 mois noté EUR6M), un taux moyen offert par un échantillon d'une cinquantaine de grandes banques établies en Europe, choisies selon des critères de qualités et de volumes traités sur le marché monétaire. Calculés chaque jour ouvré, ces taux ont des échéances allant de 1 semaine à 12 mois et sont établis avec un décompte des jours exact et sur une base annuelle de 360 jours. Les échéances publiées sont 1 semaine, 2 semaines, 3 semaines, 1 mois, 2 mois jusqu'à 12 mois.

L'**EURIBOR 3 mois** sert de base au marché des « swaps » et correspond au taux moyen offert par les banques pour rémunérer des placements à 3 mois. Il sert de référence à de nombreux produits indexés sur des taux révisables (par exemple : les « swaps » de couverture contre le risque de taux ou les prêts à taux variable).

- Le taux **LIBOR** (London Inter-bank Offered Rate) est donc l'analogue du taux EURIBOR. Fixé au jour le jour à Londres par la British Bankers Association, il est le plus important taux interbancaire de référence pour les taux d'intérêt à court terme et pour les contrats de swaps. Il existe pour différentes devises (USD, EUR, CHF, etc....) et échéances (1 mois, 3 mois,...).

⁷ Cf. J.O. avril 1987.

⁸ En anglais, la lettre placée en préfixe permet de connaître la place d'origine. Par exemple : LIBOR pour Londres, PIBOR pour Paris.

⁹ EONIA (Euro OverNight Index Average) est le taux de référence quotidien des dépôts interbancaires effectués au jour le jour dans la zone euro. Il s'agit de la moyenne, pondérée par les montants, des taux effectivement traités sur le marché monétaire interbancaire de l'euro pendant la journée, pour les dépôts/prêts jusqu'au lendemain ouvré. Il est utilisé depuis peu dans la formule de fixation du taux du Livret A, revue début 2008.

Section 1.2 Qu'est ce que le risque de taux en ALM ?

▪ *Définition du risque de taux :*

Le risque de taux est un risque lié à une évolution défavorable des taux d'intérêts.

Ainsi, un emprunt à taux variable peut voir son coût s'accroître avec la hausse des taux. Ce risque s'exprime en termes de sensibilité ou d'exposition au risque des fluctuations des taux d'intérêt.

La moindre variation du taux d'intérêt a des incidences directes sur la valeur du résultat et du patrimoine des grands investisseurs. Ce risque est alors mesuré en répondant à la question suivante : « Quelle serait l'incidence sur le résultat et sur le patrimoine d'une variation brutale de x % des taux d'intérêt ? ». Nous pouvons parler de l'impact en valeur d'un choc de taux sur la valeur de marché des actifs et passifs du bilan. C'est pourquoi la *valorisation* présente et future *du bilan* d'une entreprise est essentielle au calcul du risque global de taux.

Nous pouvons donc dégager deux catégories de risques :

- ✓ un *risque de revenu* (ou ressource) qui découle de la variation de taux
- ✓ un *risque de placement* qui se traduit par la baisse de la valeur de l'actif (par exemple : une obligation à taux fixe voit sa valeur chuter avec la hausse des taux nominaux). Ce sont les moins values latentes.

Une des principales missions du gestionnaire actif-passif sera de mesurer et de contrer ces risques.

▪ *Mesure du risque de taux*

Nous pouvons distinguer deux approches pour évaluer l'exposition au risque de taux de l'établissement bancaire :

❖ *Impasses de taux ou « gaps » de taux*

La méthode de mesure du risque de taux par les revenus consiste en la construction d'un échéancier de tous les emplois, ressources et hors-bilan. On peut alors, soit faire figurer chaque montant venant à échéance dans la colonne de son échéance, soit faire figurer chaque montant sur toutes les colonnes (encours). A partir de cet échéancier, le gestionnaire pourra déterminer pour chaque échéance une « impasse de taux » appelée « *gap de taux* ». Une simple visualisation permettra d'identifier les positions de taux. Ces « gaps » vont permettre de *mesurer les déséquilibres du bilan* dans le temps entre les volumes indexés à taux fixe au passif et à l'actif. Ces déséquilibres créent une incertitude sur les résultats futurs au sens où l'écart est indexé à taux variable.

Deux cas simples se présentent et voici les premières stratégies de l'établissement financier :

Ressources à taux fixe > Emplois à taux fixe	Ressources à taux fixe < Emplois à taux fixe
<ul style="list-style-type: none"> Augmentation des emplois à taux fixe en contractant un swap¹⁰ receveur de taux fixe pour le nominal de l'écart. Perte à la baisse des taux 	<ul style="list-style-type: none"> Augmentation des ressources à taux fixe en contractant un swap payeur de taux fixe pour le nominal de l'écart Perte à la hausse des taux

Voici les différentes positions de taux :

Position courte à taux fixe

<i>Actif</i>	<i>Passif</i>
Actifs à taux fixes	Passifs à taux fixes
GAP	
Actifs à taux variables	Passifs à taux variables

Position fermée

<i>Actif</i>	<i>Passif</i>
Actifs à taux fixes	Passifs à taux fixes
Actifs à taux variables	Passifs à taux variables

Position longue à taux fixe

<i>Actif</i>	<i>Passif</i>
Actifs à taux fixes	Passifs à taux fixes
GAP	Passifs à taux variables
Actifs à taux variables	

❖ *Valorisation du bilan*

Cette seconde approche consiste en la valorisation en « *valeur de marché* » de tous les postes du bilan exposés aux variations des taux d'intérêts (avec la méthode d'actualisation des « Cash Flows » futurs¹¹). Il suffit de valoriser les postes du bilan avec la courbe des taux spot et de refaire cette valorisation avec un choc parallèle de 1 % sur celle-ci (ici, le choc s'applique sur toutes les maturités des taux de la courbe de taux initiale, et se répercute donc sur tous les facteurs d'actualisation). La différence de valeur actuelle est la « *sensibilité en valeur* » face une variation de 1 % des taux. Nous mesurons donc bien le risque de taux, i.e. la sensibilité de chacun des postes du bilan à un *choc défavorable et instantané* sur la courbe des taux de 100 points de base.

¹⁰ Cf. définition d'un « swap » en Partie I/chapitre 2.

¹¹ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

Chapitre2. Les courbes de taux

La courbe de taux dépend de la nature des taux d'intérêt qui la forment. Elle permet de donner une vision globale de la fonction suivie par les taux d'intérêt pour différentes échéances et se définit comme la courbe suivie par la fonction qui à T associe $r(t, T)$, où $r(t, T)$ est le taux d'intérêt pour la maturité T à une date donnée t.

L'information que l'on peut dégager de celle-ci est différente, que l'on considère par exemple les taux **zéro-coupon** ou les taux **forward**. Nous allons présenter trois courbes de taux et expliquer leurs utilisations. Les **taux de swaps** sont des données de marché alors que les taux zéro-coupon et les taux « forward » sont construits implicitement à partir des données de marché. C'est pourquoi nous distinguons les **courbes de marché** des **courbes implicites**.

Section 2.1 La courbe des taux de « swaps »

Dans un premier temps, il convient de définir la notion de **swap**. Il existe de multiples structures de swaps : les swaps de devises, les swaps de taux, les « basis swaps », les swaps d'indice et enfin les swaps de matière première.

Nous allons nous intéresser aux **swaps de taux** d'intérêts, leurs mécanismes de fonctionnement, et les différentes catégories existantes. Nous concluons ce paragraphe par une présentation rapide du marché actuel des swaps. Dans cette section, nous allons reprendre les définitions et concepts du livre de Chazot C. et Claude P.: « *Les Swaps: Concepts et Applications* ».

Un swap est un « échange de dettes ». Le swap de taux consiste à échanger deux dettes de nature différente libellées dans la même devise.

▪ **Définitions et objectifs du swap de taux :**

« Un swap de taux est une opération dans laquelle deux contreparties contractent simultanément un prêt et un emprunt dans une même devise, pour un même nominal mais sur des références de taux différentes ».

Nous pouvons imaginer une Banque ayant accordé un prêt pour une durée de 3 ans à un client. Celle-ci veut se refinancer ; mais un emprunt classique de 3 ans ne sera pas l'idéal.

En effet, si entre établissements bancaires il est courant d'obtenir des autorisations allant jusqu'à un an, il faut savoir qu'au-delà d'une telle durée il est plus difficile d'en obtenir un. De plus, pour la Banque qui accorde une autorisation, la qualité de l'emprunteur doit être clairement établie par les agences de notations.

Il semble donc intéressant de transformer sa dette à long terme en dette à court terme. L'une des utilisations du swap de taux est donc de permettre à des établissements ne disposant pas d'un "standing" suffisant, l'accès à des marchés qui autrement leur seraient interdits.

Le swap de taux consiste donc à échanger à dates fixes un flux d'intérêts basé sur un *taux fixe* contre un flux d'intérêts basé sur un *taux variable*. C'est pourquoi l'on parle également de « *swap d'intérêts* ». Ces flux sont libellés dans la même devise et calculés d'après un capital appelé « montant notionnel » (le capital n'étant jamais échangé).

Nous distinguons donc deux types de taux : les taux fixes¹² (pour les obligations par exemple) et les taux variables (ou flottants)¹³. Cette distinction nous amène à dissocier deux types de swaps :

- ✓ Les swaps taux fixe – taux flottant :
Ce contrat prévoit qu'une partie paie un taux fixe (intérêts) à l'autre partie qui verse en retour un taux variable. Par convention, le vendeur du swap paie le taux variable et reçoit le taux fixe (spéculation à la baisse des taux).
- ✓ Les swaps taux flottant – taux flottant dit « *basis swap* » :
Une contrepartie emprunte (prête) à taux variable et prête (emprunte) à taux variable sur une référence différente.

▪ ***Terminologie et caractéristiques principales du swap standard :***

On utilise les termes de swap « **payeur** » ou de swap « **receveur** ».

- ✓ être **payeur du swap** de taux signifie payer le taux fixe et recevoir le taux flottant, c'est à dire emprunter à un taux fixe et prêter à un taux variable.
- ✓ être **receveur du swap** de taux signifie recevoir le taux fixe et payer le taux flottant, c'est à dire prêter à un taux fixe et emprunter à un taux variable.

Voici un exemple simple d'utilisation des swaps de taux d'intérêt :

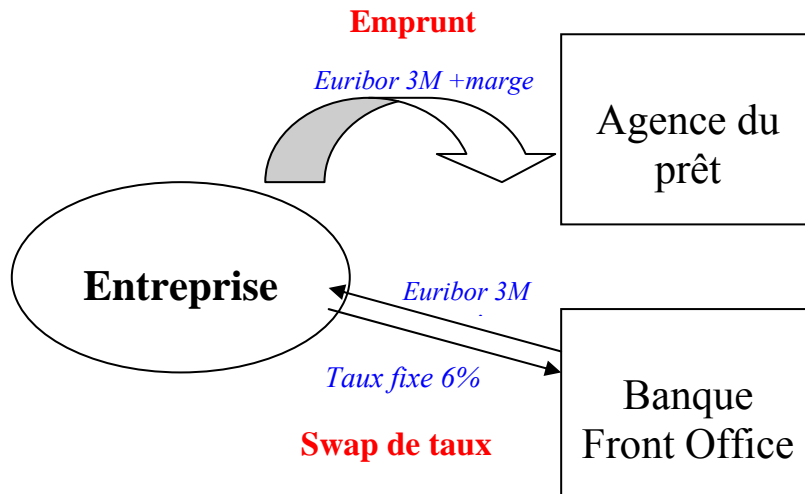
Une entreprise a souscrit un prêt sur 6 ans à taux variable indexé sur l'Euribor 3 mois. L'année suivante, anticipant une hausse de taux, elle veut se couvrir contre les fluctuations du marché. Cette entreprise a donc conclu un Swap de taux à 5 ans avec un organisme bancaire, lui permettant d'échanger ses intérêts à taux variable contre des intérêts à taux fixe 6 %.

Ainsi, l'entreprise paye l'Euribor 3 mois ajouté à une marge commerciale dans le cadre du prêt et règle un taux fixe 5 ans à 6% à l'organisme financier ; celui-ci lui versant l'Euribor 3 mois.

Le coût final de l'entreprise est : le taux fixe à 6% + marge commerciale du prêt

¹² Un taux fixe est un taux qui reste constant pour toute la durée d'une opération.

¹³ Un taux variable est un taux dont la valeur peut évoluer durant la vie d'une opération. Le taux est valable pour une période déterminée. A l'issue de celle-ci, il prend la valeur constatée sur le marché de référence selon les termes du contrat.



Le *swap standard*¹⁴ ou « swap vanille » est la structure la plus simple des swaps sur le marché. Ce contrat est à taux fixe contre taux variable ; et mono devise.

Les principales caractéristiques de ce type de contrat sont :

- ❖ La *devise* et le *montant* de l'opération (appelé « nominal » ou « montant notionnel »). Le nominal est constant sur toute la durée du swap et l'on calcule les intérêts à taux fixe (*jambe fixe*) et à taux variable (*jambe variable*) sur celui-ci.
- ❖ La *durée* du contrat est fixée (souvent supérieure à un an).
- ❖ Le « taux de swap » ou « taux fixe » ou « taux de l'opération » (c'est le taux constant de l'opération).
- ❖ Le *taux variable* de référence (c'est un taux de marché tel que le Libor 3 mois ou l'Euribor 6 mois).
- ❖ La *périodicité de paiement des intérêts* à taux fixe (généralement tous les ans pour les eurodevises) et la périodicité de paiement des intérêts à taux variable (6 mois, 3 mois voire un mois).
- ❖ Les bases de calcul¹⁵ des intérêts à taux fixe et à taux variable.

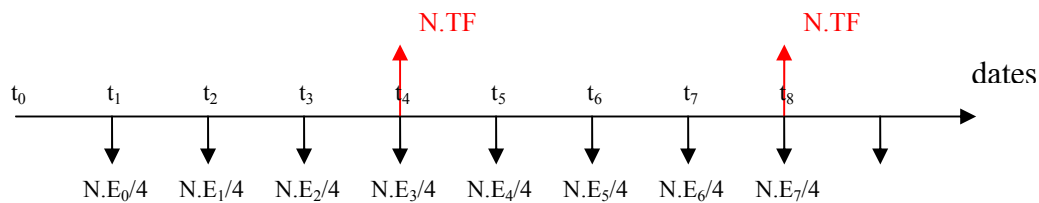
Le jour de la mise en place de l'opération, on constatera le taux de référence qui sera utilisé pour calculer le 1^{er} versement d'intérêts (à taux variable donc) qui sera versé à la première échéance "variable". A noter que les échéances (fixes et variables) n'ont pas en principe la même périodicité.

Le paiement des intérêts dépend, pour la jambe variable, de la périodicité du taux de marché retenu, et pour la jambe fixe, il est fixé dans le contrat.

¹⁴ On appelle swap standard un swap dont le nominal est constant pendant sa durée de vie, et dont la maturité de l'indice de taux variable est identique à la périodicité du paiement des flux de la jambe variable.

¹⁵ Cf. Annexe 1 : Les bases de calculs.

Nous nous intéresserons par la suite principalement au swap standard n années contre Euribor 3 mois démarrant à la date t_0 et d'échéance en t_{4n} (n étant la durée du swap en années) de nominal N .



Tous les 3 mois, le prêteur du swap paie au prorata de la période l'Euribor 3 mois E_{i-1} constaté 3 mois plus tôt (**taux prédéterminés**), et reçoit un taux fixe TF tous les ans.

Le taux swap en t est la valeur du taux fixe qui permet d'égaliser la jambe fixe (somme des flux actualisés d'intérêts à taux fixe) et la jambe variable du swap (somme des flux actualisés d'intérêts à taux variable).

▪ **La courbe des taux de swap :**

Les taux de swap cotés sur le marché sont issus de swaps standards entre banques (« courbe interbancaire »). Cette courbe est classiquement construite à partir des taux Euribor de maturité allant de 1 jour à 9 mois et des taux fixes de swaps de maturités allant de 1 an à 30 ans.

Traçons la courbe des taux swaps à la date du 25 mai 2005 :

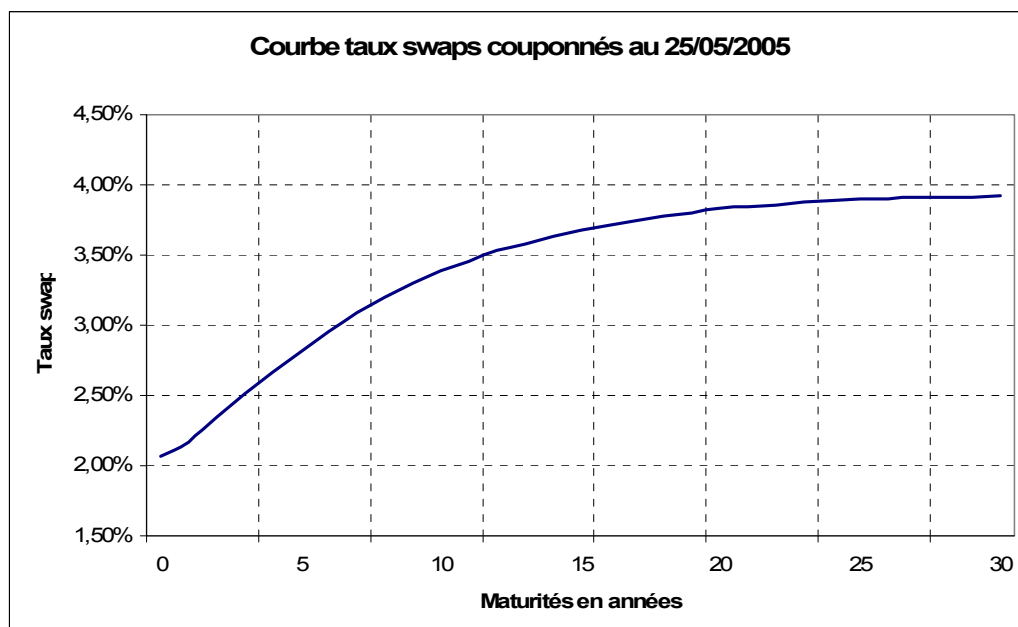


Figure 1 : courbe des taux « swaps » couponnés au 25 mai 2005

Cela représente, à la date du 25 mai 2005, les cotations du marché interbancaire.

- **Le Marché des swaps¹⁶**

Le marché des swaps est le deuxième plus grand marché de taux d'intérêt de la zone européenne, où se traitent des maturités pouvant aller jusqu'à 50 ans. Les swaps sont des produits financiers qui n'ont été étudiés que très récemment. Dans les années 80, aucune norme n'existait, en raison des volumes traités très faibles. Ainsi, très peu d'ouvrages financiers traitaient le sujet. Puis, au cours des années 90, le volume du marché des swaps a fortement augmenté (11.225 milliards de dollars au premier semestre 1997 contre 560 milliards de dollars durant le premier semestre 1990). A la fin de l'année 2005, les dérivés de taux d'intérêt (incluant les swaps de taux, les swaps de change et les options de swaps) représentaient un montant notionnel proche de 200 000 milliards de dollars. Une augmentation de 16 % par rapport à l'année 2004.

Section 2.2 La courbe des taux zéro-coupon

- **Taux zéro-coupon / taux de rendement actuariel**

Afin de calculer la valeur de la plupart des instruments financiers, il est nécessaire de connaître la somme des montants actualisés aujourd'hui des flux générés par ceux-ci. Ces actualisations se font à l'aide des **taux zéro-coupon**.

« Un produit financier dit « zéro-coupon » est un instrument qui ne comporte aucun détachement de coupon et ne donne lieu qu'à un flux initial I (prix d'achat) et un flux final de remboursement N (nominal). Le taux de rendement actuariel de cet instrument est son **taux zéro-coupon** ».

De façon plus formelle, un **zéro-coupon** d'échéance T (ou « **obligation zéro-coupon** ») est un contrat qui garantit à son détenteur le paiement d'une seule unité monétaire (1 euro par exemple) à la date T , sans coupons intermédiaires. Son **prix à la date t** (ou « valeur du contrat ») est **noté $B(t, T)$** ¹⁷. On a $B(T, T) = 1$.

Nous l'appellerons également **facteur d'actualisation** ou « **discount factor** » (DF).

A partir des prix de zéro-coupon, nous pourrions déduire le prix de nombreux taux d'intérêt en temps discret et en temps continu (en particulier les taux « in fine », précomptés et actuariels). Nous travaillerons avec les taux actuariels définis de la manière suivante.

En temps discret, le **taux actuariel** à la date t (ou « **taux zéro-coupon** »), d'échéance T , **noté $r(t, T)$** ¹⁸ est défini par :

$$B(t, T) = \frac{1}{(1 + r(t, T))^{T-t}} \quad (I.1)$$

Remarque : nous noterons par la suite, pour simplifier, « **taux ZC** » ou « **obligation ZC** ».

¹⁶ C.f. ISDA: International Swaps and Derivatives Association. www.isda.org.

¹⁷ Noté également $P(t, T)$ dans la littérature. Nous utiliserons cette seconde notation par la suite.

¹⁸ Noté également $r(t, T-t)$ dans la littérature.

Ainsi la **courbe des taux zéro-coupon** est la représentation graphique des taux actuariels $r(t, T)$ en fonction de T pour un t donné (ou en fonction de $T-t$ ¹⁹). La courbe de taux peut s'obtenir quelle que soit la courbe de prix pour l'obligation ZC. Elle s'appelle également « Structure par terme des taux d'intérêts » (STTI)²⁰.

L'écriture en temps continu d'une obligation ZC devient :

$$\boxed{B(t, T) = e^{-r(t, T)(T-t)}} \quad (1.2)$$

Le taux implicite à ce prix d'obligation est $r(t, T) = -\frac{\ln(B(t, T))}{T-t}$, appelé également « **rendement à échéance** ». Nous le noterons aussi $Y(t, T)$ ou $Y(t, T-t)$ ²¹. Ainsi, pour t fixé et T variable, $Y(t, T)$ décrit la courbe de taux, également appelée « courbe des rendements à l'échéance ».

Enfin, nous définissons le **taux instantané** ou **taux sans risque** $r(t)$, non observable, par la formule suivante :

$$\boxed{r(t) = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T)}$$

- **Courbe des taux zéro-coupon**

La courbe des taux zéro-coupon est homogène et impose l'utilisation d'instruments financiers de même classe.

Si l'on considère une obligation à taux fixe de prix O_t en t , d'échéance T , versant des flux F_s (aux dates futures s dans l'intervalle de temps $]t; T]$) constitués de coupons et d'un montant principal à la date de l'échéance. En l'absence d'opportunité d'arbitrage²², il est équivalent de détenir l'ensemble des obligations zéro-coupon délivrant un seul flux F_s aux dates futures s .

Chacune de ces obligations zéro-coupon a un prix obtenu par l'actualisation du seul flux futur versé. La courbe des taux zéro-coupon permet d'actualiser chacun des flux d'un produit avec le DF adéquat, mais n'est pas disponible sur les marchés pour toutes les maturités. Nous serons donc amenés, par la suite, à reconstruire cette courbe à partir de la **courbe interbancaire des taux swaps**.

¹⁹ $T-t$ correspond à une durée (en années) entre la date t actuelle et la maturité $T > t$. Souvent appelée « Time to maturity » en anglais.

²⁰ Cf. Annexe 10.3: Glossaire financier.

²¹ Noté Y pour « Yield to maturity ».

²² Cf. Annexe 10.3: Glossaire financier.

Voici la courbe « reconstruite » de taux ZC en date du 25 mai 2005 :

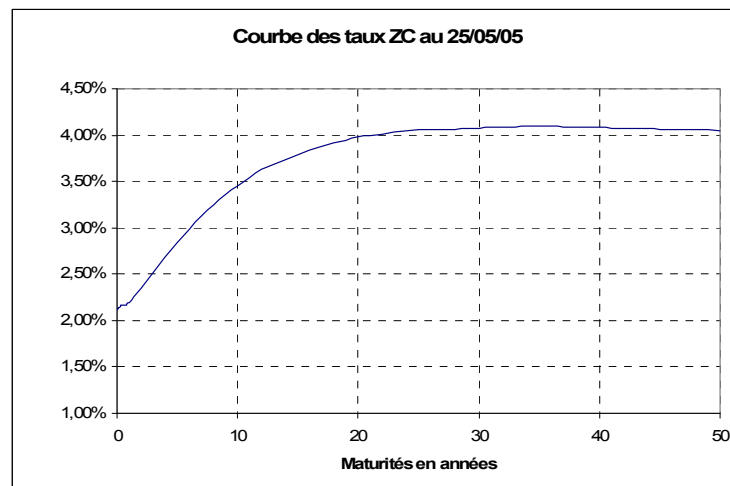


Figure 2 : courbe de taux zéro-coupon reconstruite au 25 mai 2005

De cette courbe, nous pouvons en déduire la *courbe des taux forward* et évaluer tous les produits de taux à flux déterministes. Cette courbe est également le point de départ pour modéliser l'évolution des taux zéro-coupon dans le futur.

- ✓ Il existe trois grands types de courbes de taux zéro-coupon : la courbe *Trésor*, la courbe *interbancaire*, et les courbes dites « *corporate* »²³. Le choix de la courbe diffère selon le produit financier à valoriser et la notation de la contrepartie. L'actualisation des flux futurs se fait sur l'une d'entre elles.
- ✓ De nombreuses formes de courbes de taux ZC peuvent être modélisées. Le modèle de *Nelson-Siegel*²⁴, paramétrique, le permet par exemple. Voici un aperçu des formes de courbes possibles générées par ce modèle et des autres formes que l'on peut rencontrer sur le marché (avec une bosse ou un creux sur les maturités courtes) ; pour lesquelles il faudra utiliser une autre technique de modélisation.

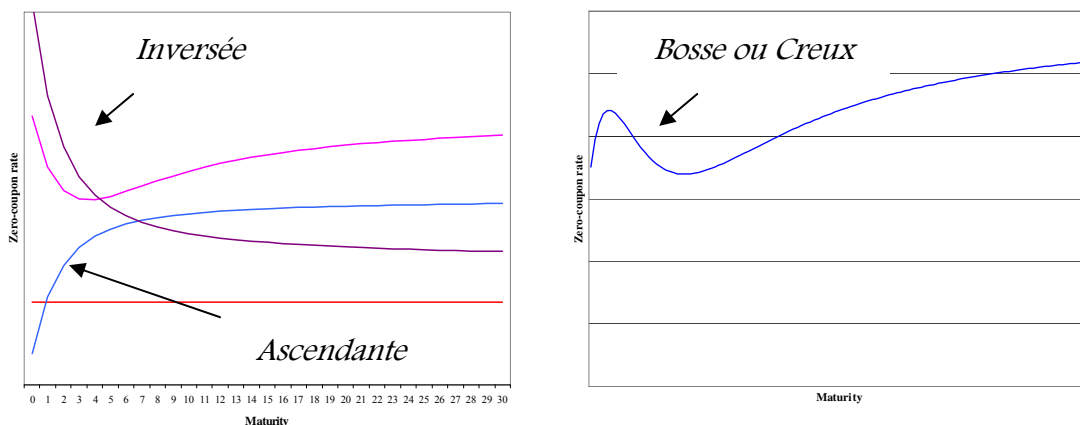


Figure 3 : différentes formes de courbes de taux zéro-coupon

²³ Cf. Annexe 2 : Les types de courbes de taux zéro-coupon.

²⁴ Cf. Annexe 3 : Le modèle de Nelson et Siegel.

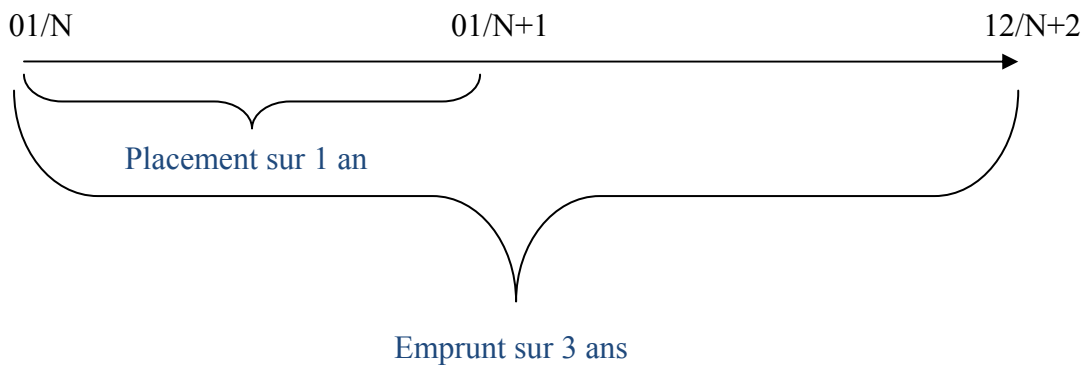
Section 2.3 La courbe des taux « forward »

- *Définition du taux « forward » :*

Le taux « forward » est un taux fixé aujourd'hui pour une période de placement donnée à partir d'une date de départ future.

Un investisseur peut acheter et vendre des titres de différentes maturités, fixant dès aujourd'hui un taux de rendement sur investissement qu'il réalisera dans le futur. Prenons l'exemple d'un contrat à terme²⁵ qui engage un établissement financier à prêter un montant M à une entreprise pendant deux ans au taux de i dans un an. Pour se couvrir contre une éventuelle hausse des taux, entre la date de son engagement et la date d'ouverture du prêt, l'établissement met en place un contrat :

- ❖ Emprunt de M sur 3 ans.
- ❖ Placement de M sur la période d'attente de 1 an.



Le taux i auquel pourra prêter l'établissement sur deux ans est une composante du taux de l'emprunt à 3 ans sur le marché monétaire et du taux de placement à 1 an sur ce même marché.

Nous avons : $(1+r_3)^3 = (1+r_1)(1+i)^2$; avec r_3 le taux d'emprunt à trois ans, r_1 le taux de placement sur 1 an et i le taux « forward » cherché du contrat.

Ainsi, pour une période supérieure à 1 an, le taux « forward » se calcule de la manière suivante :

$$i = \left[\frac{(1+r_e)^{n_e}}{(1+r_p)^{n_p}} \right]^{\frac{1}{n}} - 1$$

Avec, r_e et n_e (resp. r_p et n_p) le taux et la durée en années de l'emprunt effectué (resp. placement effectué). i et n étant le taux implicite « forward » et la durée du prêt octroyé par l'établissement financier.

²⁵Cf. Annexe 10.3: Glossaire financier.

Voyons à présent une relation plus générale et reliée aux taux zéro-coupon :

Le **taux « forward »** noté $f(t, s, T - s)$ ²⁶, vu de la date t , commençant en date s et d'échéance T s'exprime par la formule suivante :

$$f(t, s, T - s) = \left(\frac{B(t, s)}{B(t, T)} \right)^{\frac{1}{T-s}} - 1 \quad (I.3)$$

D'après la formule de la valeur d'une obligation zéro-coupon $B(t, s)$, le taux « forward » est donc obtenu à l'aide des taux zéro-coupon $r(t, T)$ et $r(t, s)$.

Nous reviendrons sur la définition du taux « forward » dans les annexes²⁷ (notamment sur son expression en temps continu et sur la définition du **taux « forward » instantané**, notions utiles dans certaines démonstrations théoriques de la suite du mémoire).

Remarque :

Nous utilisons une formule de calcul différente pour une période inférieure à un an (monétaire). Si nous reprenons les notations de l'exemple du début de la section, le taux « forward » est calculé ainsi :

$$i = \left[\frac{\left(1 + r_e \times \frac{n_e}{360} \right)}{\left(1 + r_p \times \frac{n_p}{360} \right)} - 1 \right] \times \frac{360}{n}$$

▪ **Courbe des taux « forward »**

A partir de la courbe des taux zéro-coupon reconstruite pour toutes les maturités, nous pouvons donc tracer la courbe des taux « forward » démarrant en date s et de maturités 1 jour à 50 ans. Voici la courbe des taux « forward » dans un an, vu à la date du 25 mai 2005, dérivant des taux fixes de « swaps » indexés sur l'Euribor :

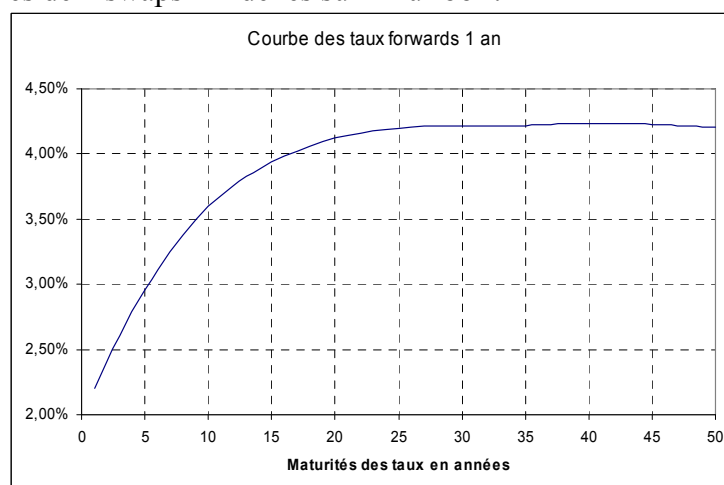


Figure 4 : courbe des taux « forward » 1 an

²⁶ Noté également $f(t, s, T)$.

²⁷ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

Le *taux « forward »*, également appelé *taux à terme*, va donc permettre de connaître le taux que l'on pourra se garantir pour une opération démarrant dans le futur.

Dans la suite du mémoire, nous aurons besoin de calculer ces taux « forward » pour calculer le prix de différents produits simples de taux d'intérêts (« swaps », « caps », « floors »). Il est donc nécessaire de savoir construire la courbe des taux zéro-coupon. De façon générale, les taux « forward » sont utilisés pour estimer les flux futurs qui seront générés par l'instrument financier à valoriser (un prêt à taux variable Euribor 3 mois par exemple).

Chapitre3. Préparation de la base de données et modélisation d'une courbe de taux zéro-coupon

Il y a plusieurs problématiques qui se dégagent dans la construction d'une courbe de taux zéro-coupon :

- Quels taux de référence choisir pour construire la courbe des taux voulue ?
- Dans l'optique de construire la courbe à partir des taux « swap » du marché interbancaire, il est fondamental de connaître les taux zéro-coupon pour toutes les maturités, et donc de connaître les taux swaps pour les maturités correspondantes. Or, les bases de taux swap du marché ne présentent pas toutes les valeurs pour toutes les maturités. Nous sommes donc amenés à compléter les bases et trouver les taux manquants pour certaines maturités à l'aide de méthodes d'interpolations. Quelle méthode choisir ?
- Afin de construire la courbe des taux zéro-coupon, nous devons utiliser des instruments financiers de même classe (ne pas mélanger les marchés obligataires et interbancaires par exemple).
- Il faut travailler dans les mêmes conventions de base et de calcul. Les taux monétaires sont en base Exact/360²⁸ tandis que les produits obligataires sont en base Exact/Exact. Nous convertirons par la suite tous les taux en base actuarielle Exact/Exact. On parle d'homogénéisation de bases de taux.

Par la suite, nous chercherons à évaluer des produits indexés sur l'Euribor ; c'est pourquoi, nous allons construire la « courbe des taux » à l'aide des taux fixes swaps de référence décrits dans la section à venir.

Section 3.1 La base de données

▪ Données brutes

Nous avons utilisé des données fournies par Bloomberg²⁹ et récupérées au jour le jour par le service ALM de la Caisse des Dépôts et Consignations. Nous avons rapatrié les données Bloomberg dans une feuille Excel regroupant :

❖ Pour le court terme :

Pour les taux de maturité inférieure à 1 an, nous récupérerons et utiliserons les **taux proportionnels de dépôt monétaire de l'euro**. Ce seront les taux au jour le jour du 4 janvier 1999 au 25 mai 2005 pour les maturités de 1 jour à 12 mois.

²⁸ Cf. Annexe 1 : Les bases de calculs.

²⁹ « Bloomberg » est une agence de presse spécialisée dans l'information financière. Fournisseur mondial de nouvelles et de données financières, il est largement connu pour son terminal d'accès à celles-ci. Analystes financiers et traders en sont les principaux utilisateurs.

Liste des maturités : 1 jour, 1 semaine, 2 semaines, 3 semaines, 1 mois, 2 mois, 3 mois, 4 mois, 5 mois, 6 mois, 7 mois, 8 mois, 9 mois, 10 mois, 11 mois, 12 mois.

❖ Pour le long terme :

Pour les maturités supérieures à 1 an, nous utiliserons les **taux fixes contre lesquels sont échangés les swaps sur Euribor**. Le taux fixe du swap est vu comme un taux actuariel obligataire sur le marché EURIBOR, car un swap s'apparente à une obligation à taux fixe financée par une obligation à coupon variable.

Ces taux fixes, exprimés en base annuelle, portent sur une période annuelle et sur des produits comportant donc des flux annuels. On récupère les taux sur la même période historique que pour le court terme et pour des maturités de 2 ans à 50 ans (année par année)³⁰. Toutes ces données sont disponibles en temps réel à partir du Terminal Bloomberg.

▪ **Nettoyage de la base de données brute**

Avant toute chose, un regard approfondi sur la base de données brute est important. Cela permet en effet de repérer les données pouvant fausser notre analyse.

Ainsi, une analyse graphique exploratoire révéla un problème sur les taux fixes de swaps sur Euribor (maturités supérieures à 1 an). Certains (à maturités différentes) sont constants d'un jour sur l'autre sur une période d'environ 1 an de novembre 2000 à août 2001. Un programme VBA va nous permettre de remplacer ces taux invariants éventuels par des #N/A, c'est-à-dire les transformer en données manquantes. Nous appellerons cette base, dans toute la suite du mémoire, la « **base swaps nettoyée** ».

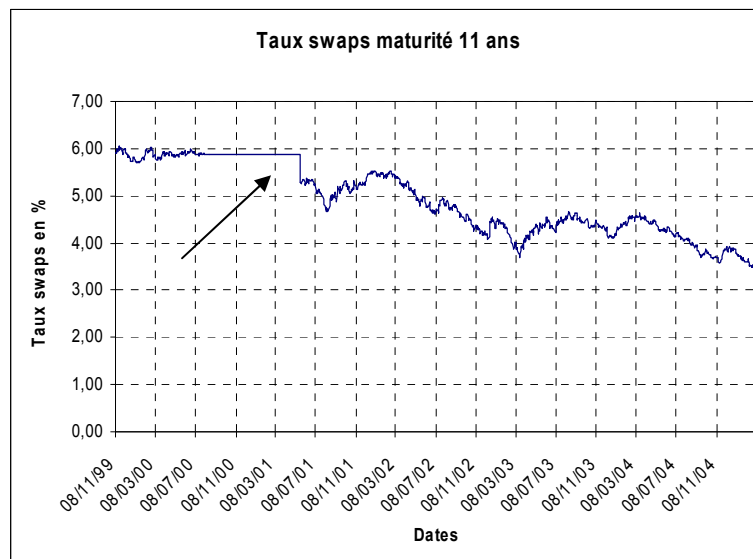


Figure 5 : trajectoire du taux « swap » de maturité 11 ans

³⁰ Cf. Annexe 4 : La base de données.

▪ *Interpolation des taux fixes swaps/EURIBOR*

Comme nous l'avons vu précédemment, il manque certaines valeurs de taux swap pour différentes maturités. Il faut donc remplacer ces « vides » par des taux swaps interpolés. Cela passe par la suppression des #N/A pour obtenir une base de données « propre » et ainsi pouvoir interpoler les taux swaps manquants pour toutes les maturités.

Il existe plusieurs méthodes d'interpolation. La plus simple est la méthode d'interpolation linéaire. Cependant, nous avons réalisé deux fonctions VBA qui réalisent la méthode *d'interpolation cubique*³¹.

Voici une partie des résultats après interpolation cubique des taux swaps à la date du 10 mars 1999 où de nombreuses maturités étaient manquantes :

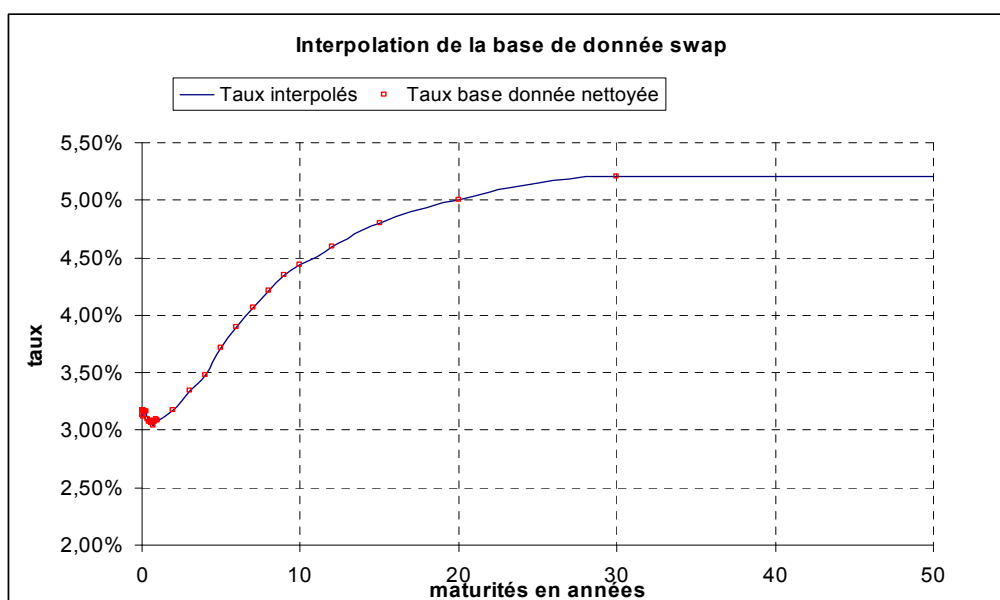


Figure 6 : Interpolation cubique des taux « swaps » au 10 mars 1999

Section 3.2 Construction de la courbe des taux zéro-coupon à partir des taux de « swaps »

La connaissance de la courbe des taux zéro-coupon est indispensable pour les professionnels de marché pour différentes raisons :

- Evaluer les produits de taux délivrant des flux futurs à finalité de couverture
- Détecter les produits sur et sous évalués sur le marché pour tenter d'en tirer profit
- Calculer d'autres courbes implicites comme, par exemple, la courbe des taux forward
- Mettre en place des modèles stochastiques de déformation de celle-ci dans le temps afin, entre autres, d'évaluer les options cachées des produits financiers.

³¹ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

La reconstitution de cette courbe est nécessaire car il n'existe pas suffisamment d'obligations zéro-coupon cotées sur le marché.

Résumons à présent les différentes étapes de construction de cette courbe³² :

Nous avons implémenté plusieurs fonctions VBA permettant la construction de la courbe de taux zéro-coupon interpolée.

a. Homogénéisation et interpolation

Nous voulons une courbe *homogène* i.e. placement in fine et même base de calcul.

Il est donc préférable de transformer tous ces taux en base actuarielle Exact/Exact. En effet, d'une part, les taux monétaires récupérés sur le court terme sont en base Exact/360 et les taux de swaps sur le long terme sont en base Exact/Exact ; d'autre part, les placements à long terme donnent des coupons annuels tandis que ceux à court terme sont *in fine*. **Il faut donc « zéro-couponner » les taux swaps long pour homogénéiser la courbe.**

Afin de calculer les taux zéro-coupon sur le long terme pour toutes les maturités, nous interpolons les taux de swaps fixes de façon à obtenir tous les taux de maturités 1 à 50 ans. La phase de conversion *en base actuarielle* se retrouve dans la conversion des taux de dépôt monétaire (i.e. les taux court en base Exact/Exact).

Le graphique ci-dessous présente l'homogénéisation des taux courts (cf. b. conversion des taux courts monétaires) pour une courbe de taux à une date donnée :

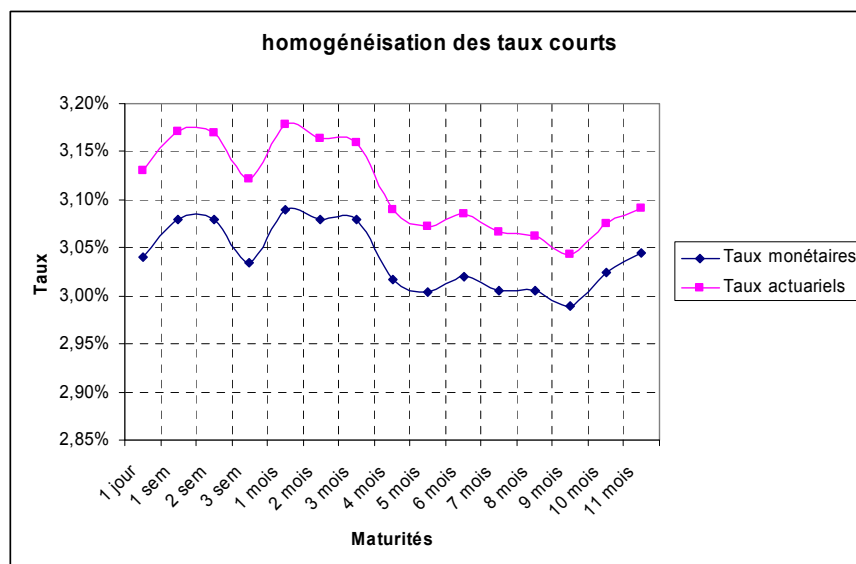


Figure 7 : homogénéisation des taux courts

³² Cf. CHAZOT C., CLAUDE P. (1999) *Les Swaps: Concepts et Applications*. Economica.

b. Conversion des taux courts monétaires

Le calcul du taux zéro-coupon revient à une simple conversion des taux monétaires en base actuarielle à des fins d'homogénéisation car un prêt monétaire est remboursé à l'échéance en même temps que les intérêts et s'apparente donc déjà à un zéro-coupon.

Si l'on note TM le taux de dépôt monétaire et TA le taux transformé en base actuarielle (taux zéro-coupon actuariel), alors la valeur du taux zéro-coupon est :

$$TA = \left(1 + \frac{TM \times nbjoursplacement}{360} \right)^{1/f} - 1$$

f correspond à la *fraction d'année du placement en base Exact/Exact*, soit pour un taux de dépôt monétaire de maturité 3 mois, $f = 0,25$.

c. Calcul des taux zéro-coupon sur le long terme

Les swaps considérés ici ont, comme beaucoup d'instruments financiers, des coupons intermédiaires. Nous voulons déterminer la valeur actuelle nette de ces coupons, dont l'actualisation s'effectue à l'aide des DF issus des taux zéro-coupon.

Pour ceci, on suppose d'abord posséder N instruments actuariels, détachant des coupons annuels C_i pendant i années. Ici ces N instruments correspondent à N swaps de taux pour N maturités différentes³³.

Notons C_i le taux du swap de maturité i années et r_i les taux zéro-coupon associés.

Nous voulons ainsi calculer les N taux zéro-coupon r_n et les N facteurs d'actualisation DF_n (pour n allant de 1 à N).

Pour calculer ces taux zéro-coupon sur le long terme, on procède par itération : ainsi au rang n , nous avons besoin des taux de tous les rangs précédents.

- Le swap de maturité 1 an, n'entraînant pas de versement de flux fixe intermédiaire, coïncide avec le taux zéro-coupon 1 an.

Ainsi, on a $r_1 = C_1$

- A partir du taux zéro-coupon 1 an, on crée le taux zéro-coupon 2 ans.

On réalise deux opérations : le prêt d'un montant unitaire sur 2 ans et l'emprunt d'un montant $\frac{C_2}{1+C_1}$ au taux r_1 sur un an.

³³ Les maturités long terme sont : 1 an, 2 ans, 3 ans, ..., 50 ans ; soit $N=50$.

Le bilan des flux de ces opérations est donc résumé par le tableau suivant :

Date	Emprunt	Prêt	Total
0	$\frac{C_2}{1+C_1}$	-1	$\frac{C_2}{1+C_1}-1$
1	$-C_2$	C_2	0
2	0	$1+C_2$	$1+C_2$

Cette opération crée un instrument synthétique ne détachant pas de coupon intermédiaire.

Nous avons alors la formule suivante pour r_2 : $r_2 = \left[\frac{1+C_2}{1-\frac{C_2}{1+r_1}} \right]^{\frac{1}{2}} - 1$

Ainsi, pour calculer le taux zéro coupon 3 ans r_3 , on utilise les taux zéro-coupon 1 an et 2 ans et, par récurrence, on applique la stratégie suivante :

- Prêt d'un montant unitaire distribuant des coupons C_n annuellement et remboursant 1 au bout de n années ;
- Emprunt en zéro-coupon de $\frac{C_n}{(1+r_{n-1})^{n-1}}$ sur $n-1$ années (cet emprunt zéro-coupon permet de compenser le flux C_n reçu l'année $n-1$) ;
- ...
- Emprunt en zéro-coupon de $\frac{C_n}{(1+r_i)^i}$ sur i années (cet emprunt zéro-coupon permet de compenser le flux C_n reçu l'année i) ;
- ...
- Emprunt en zéro-coupon de $\frac{C_n}{(1+r_1)}$ sur 1 an (cet emprunt zéro-coupon permet de compenser le flux C_n reçu l'année 1).

Récursivement, le taux zéro-coupon r_n s'écrit en fonction des $n-1$ taux précédents :

$$r_n = \left[\frac{1+C_n}{1-C_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1+r_i)^i}} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (I.4)$$

En notant $DF_i = \frac{1}{(1+r_i)^i}$ les facteurs d'actualisation, on obtient :

$$DF_n = \frac{1 - C_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} DF_i}{1 + C_n} \quad (1.5)$$

Ce qui conduit à :

$$DF_n = \frac{1 - \frac{C_n}{C_{n-1}} \cdot (1 - DF_{n-1})}{1 + C_n}$$

Cette dernière formule permet d'arriver à DF_n en remontant le raisonnement.

Lors de notre implémentation informatique, nous calculerons les facteurs d'actualisation pour en déduire les taux zéro-coupon. Nous appliqueront la dernière formule de DF_n .

d. Application pratique

En pratique, à partir de la « base swap nettoyée » (i.e. la base de données comportant les taux de dépôt monétaire pour le court terme et les taux fixes de swaps pour le long terme, de 1999 à aujourd'hui), nous calculons les taux zéro-coupon pour toutes les dates et surtout pour toutes les maturités (après interpolation des taux de swaps pour les maturités manquantes). Nous calculons également les facteurs d'actualisation DF_i correspondants.

Une fonction implémentée sous VBA renvoie une matrice donnant les taux zéro-coupon pour toutes les maturités (colonnes) et toutes les dates (lignes) afin de pouvoir tracer les différentes courbes de taux zéro-coupon souhaitées.

Nous appellerons cette matrice, « *la base complète ZC splinée* ».

Nous pouvons également spécifier le calendrier choisi, c'est-à-dire calculer les taux zéro-coupon :

- ❖ au jour le jour : « daily »
- ❖ tous les vendredis : « weekly »
- ❖ tous les mois : « monthly »

Ainsi la matrice obtenue a une taille de N lignes et M colonnes. N représente le nombre de jours, semaines ou mois respectivement pour les calendriers « daily », « weekly » et « monthly », depuis début 1999. Il y a autant de courbes de taux que de dates de visualisation des taux zéro-coupon interpolés.

Voici la courbe des taux zéro-coupon du 25 mai 2005 reconstruite à partir des taux swaps interpolés :

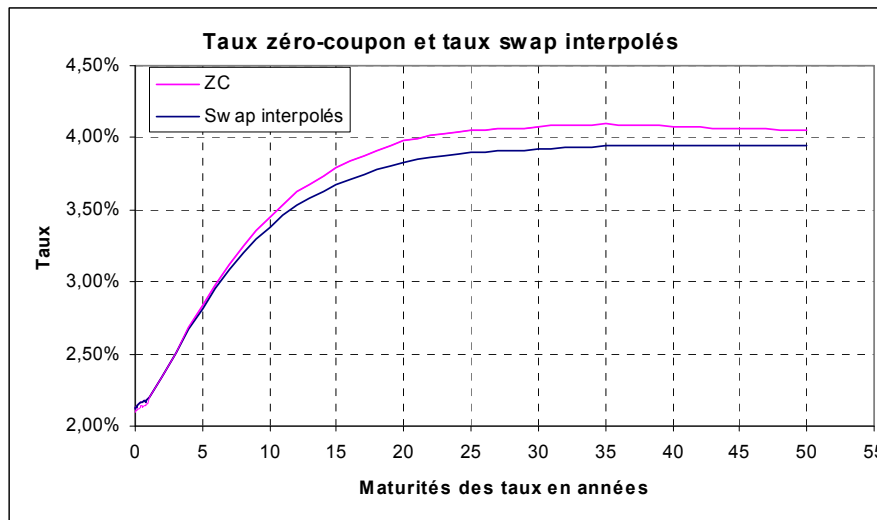


Figure 8 : courbes de taux au 25 mai 2005

Remarque : À partir des facteurs d'actualisation, nous pouvons retrouver les taux swaps par la

formule suivante : $SW_n = \frac{1 - DF_n}{\sum_{i=1}^{n-1} DF_i}$ où $SW_n = C_n$ est le taux du swap de maturité n.

Section 3.3 Écriture des taux zéro-coupon sous forme paramétrique : « Vasicek modifié »

- *Etude théorique*³⁴

Nous allons dans cette section évoquer les méthodes dites « indirectes » de reconstruction de la courbe zéro-coupon et en utiliser une pratiquement.

Ces méthodes obligent l'ajustement des données de marché à une forme pré-spécifiée de la courbe des taux. Cela fait intervenir un risque de modèle.

On considère n instruments financiers (par exemple des obligations d'Etat, ou des swaps standard).

Si l'on note F_s^j pour $s \geq t$, les flux de ces instruments et P_t^j les prix de marché en t (j allant de 1 à n) ; et G la fonctionnelle des taux zéro-coupon dépendant du vecteur de paramètres β telle que³⁵ :

$$r(t, s - t) = G(s - t; \beta)$$

³⁴ Cf. MARTELLINI L., PRIAULET P. (2000) *Produits de Taux d'Intérêt Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*. Economica.

³⁵ Cf. Chapitre 2/section 2.2

La fonctionnelle G , de par sa définition, permet généralement d'interpréter financièrement les paramètres.

Ces derniers sont estimés par la **méthode des moindres carrés**³⁶ (à l'aide des prix de marché) ; et sont les solutions de : $\beta^* = \min_{\beta} \sum_{j=1}^n (P_t^j - \hat{P}_t^j)^2$ avec \hat{P}_t^j les prix théoriques issus du modèle.

Par opposition à la méthode précédente, ces démarches s'appuient donc sur l'écriture des taux zéro-coupon sous forme paramétrique.

L'objectif est alors d'écrire la fonctionnelle des taux zéro-coupon $r(0, s)$ comme une fonction $G(0, s; \beta)$, β étant le vecteur des paramètres à estimer et s la maturité des taux.

Le meilleur estimateur pour β peut être obtenu en résolvant le programme d'optimisation non linéaire suivant :

$$\min_{\beta} \sum_{j=1}^n \left(\frac{P_0^j - \hat{P}_0^j}{w_j} \right)^2$$

Où $\hat{P}_0^j = \sum_s F_s^{(j)} \exp[-sG(0, s; \beta)]$ prix théoriques³⁷; w_j poids associé à l'instrument j .

Diverses méthodes sont envisageables pour le développement de cet algorithme. La méthode de « **Vasicek modifié** » mérite une attention particulière.

D'autres formes de fonctionnelles ont été proposées, cependant, dans la recherche d'un arbitrage entre la complexité introduite par un certain nombre de paramètres et la diversité des formes de courbe de taux attendues. Elles s'inspirent de la conclusion retenue dans le modèle Vasicek (1977)³⁸ où le taux court suit le processus suivant :

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dW$$

Dans ce modèle, la fonctionnelle des taux zéro-coupon a été étendue par El Karoui, Chérif *et al.* (1994) sous la forme suivante :

$$R(0, \theta) = G(0, \theta, \beta) \text{ Où } \beta = (L_0, S_0, \gamma_0, a)^T \text{ paramètres et } \theta \text{ maturités}$$

Et G telle que :

$$\boxed{G(0, \theta; \beta) = L_0 - S_0 \left[\frac{1 - \exp(-a\theta)}{a\theta} \right] + \gamma_0 \left[\frac{(1 - \exp(-a\theta))^2}{4a\theta} \right]} \quad (I.6)$$

$\gamma_0 \in \mathfrak{R}$ est un paramètre dit « de courbure » et a est un paramètre dit « d'échelle ».

³⁶ Cf. Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques.

³⁷ Le prix théorique du $j^{\text{ième}}$ instrument financier en date 0 est égal à la somme de ses flux futurs actualisés.

³⁸ Nous détaillerons la démarche théorique de ce modèle dans la suite du mémoire.

Notons cependant que la fonctionnelle $R(0, \theta)$ de Vasicek (1977) ne permet pas de rendre compte de toutes les formes de courbes présentes sur le marché et plus particulièrement les courbes décroissantes sur le court terme et croissantes sur les autres segments (cf. Section 2.2 « La courbe de taux zéro-coupon »).

▪ **Recherche des paramètres de Vasicek**

L'objectif est de trouver les paramètres de Vasicek (modèle modifié) qui permettent d'obtenir la courbe des taux la plus proche possible des données dont nous disposons.

Soit $(c_{i,j})_{(i,j) \in [1;n] \times [1;m]}$ la matrice des taux swaps fixes récupérée sous Bloomberg et présentée dans les sections précédentes avec en ligne la date à laquelle sont relevés les taux et en colonne les maturités.

Le modèle de Vasicek (modifié) que l'on utilise est le suivant :

$$G(l, s, \gamma, a, \theta) = l - s \cdot \frac{1 - e^{-a \cdot \theta}}{a \cdot \theta} + \gamma \cdot \frac{(1 - e^{-a \cdot \theta})^2}{4 \cdot a \cdot \theta}$$

- a paramètre d'échelle
- l est le facteur de niveau
- s la pente
- γ la courbure

Ainsi, pour chaque date, nous cherchons à résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$\forall i \in [1;n],$$

$$\underset{(l,s,\gamma,a)}{\text{Min}} \left(\sum_{j=1}^m (c_{i,j} - G(l, s, \gamma, a, j))^2 \right)$$

A partir de nos n lignes de taux swaps (pour n dates), on trouve les n courbes de taux suivant le modèle de Vasicek modifié, d'équations :

$$y(t) = G(l_i, s_i, \gamma_i, a_i, t)$$

Où $(l_i, s_i, \gamma_i, a_i)$ sont les solutions du programme d'optimisation pour la $i^{\text{ème}}$ ligne et t les différentes maturités.

Avec la base de données swaps, nous obtenons les courbes de taux suivantes pour le court terme et pour le long terme³⁹:

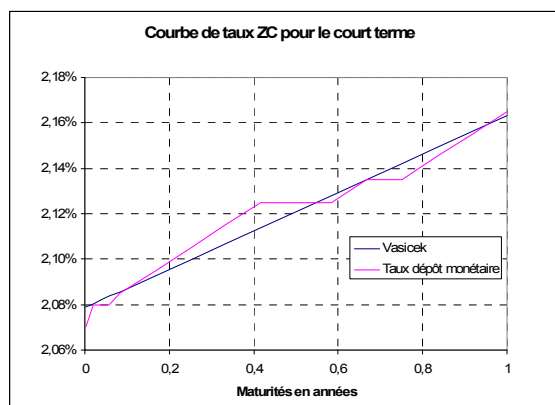


Figure 9 : courbe de taux ZC court terme

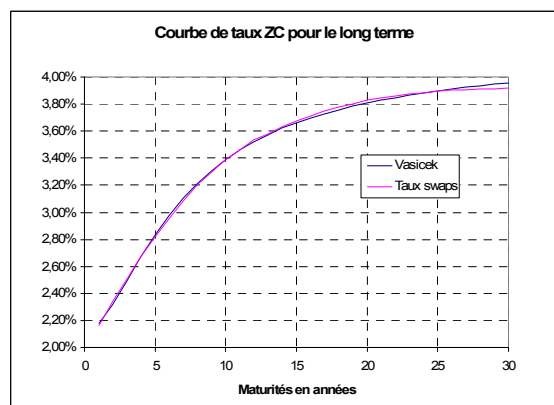


Figure 10 : courbe de taux ZC long terme

Dans ce modèle, la courbe de taux peut être croissante, décroissante ou avec une légère bosse sur les maturités courtes.

Après avoir défini les différents types de taux et de courbes de taux, ainsi que les méthodes de construction de ces dernières, voyons quels sont les principaux modèles utilisés pour modéliser la dynamique des taux d'intérêts.

Chapitre 4. La modélisation de la dynamique des taux d'intérêts : introduction des différentes classes de modèles.

Pour conclure cette partie introductive, nous allons décrire brièvement les différentes classes de modèles de taux d'intérêts, nécessaires à la fois à l'évaluation de produits dérivés de taux à une date t , mais indispensables aussi à la construction des trajectoires possibles de taux d'intérêts à travers le temps ; précisément à des fins de projection de bilan et de calculs de marges d'intérêts futures. De nombreux modèles furent développés pour tenter de modéliser au mieux les différentes courbes de taux. Nous aborderons rapidement la notion de facteurs de risque pour un modèle de taux.

Enfin, nous verrons quelles sont les conditions que doivent réunir un « bon » modèle de taux pour une institution financière ; et notamment pour le service ALM de la Caisse des Dépôts.

Section 4.1 Deux approches distinctes

Il existe deux grandes approches concernant la modélisation de la dynamique des taux d'intérêts.

- **Modèles d'équilibre général**

L'approche *d'évaluation par l'équilibre* consiste à expliquer le prix des actifs sur les marchés financiers par le biais d'un programme d'optimisation des agents peuplant l'économie. Ces modèles, très ambitieux, demandent de faire des hypothèses fortes sur l'économie conjoncturelle, et ont pour but d'évaluer les actifs non redondants. Lorsque l'on applique ce

³⁹ Se référer à l'annexe 6 pour plus de détails sur le calibrage des paramètres.

principe à l'ensemble de l'économie, l'équilibre est dit général. Le comportement des individus, en termes de consommation, production et d'épargne doit être modélisé.

Les modèles d'évaluations d'options dits « *standards* » comme le *modèle de Black*⁴⁰ (1976), qui ne sont pas des modèles de taux, sont couramment utilisés pour évaluer le prix des actifs dérivés de taux comme les « caps » ou les « floors ». La limite de ces modèles provient du fait qu'ils ne donnent aucune indication sur l'évolution des taux au cours du temps. Or, pour un gestionnaire actif-passif, dans sa stratégie de couverture, la trajectoire du taux est indispensable à la projection des encours, des marges et des gaps de taux.

Ainsi le modèle d'équilibre général va permettre de s'affranchir de ces limites ; et va s'appuyer sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en tirer le comportement du taux court. Mais, à cause des difficultés de calage de celui-ci, il reste néanmoins déficient et peu utilisé.

- ***Modèles d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage***

Une seconde approche consiste en une *évaluation par l'arbitrage*. De façon moins ambitieuse, on cherche à trouver le prix d'un actif connaissant le prix d'un actif redondant et afin de garantir l'absence d'opportunités d'arbitrage. Il n'y a pas d'hypothèses contraignantes à faire sur la fonction d'utilité des individus. On suppose qu'ils préfèrent toujours « gagner plus ». Cette méthode est plus facilement applicable, donc plus utilisée. Ces modèles semblent plus à même de restituer la déformation de la STTI.

Voyons à présent différents exemples de modèles de taux scindés en deux catégories : ceux qui sont en cohérence avec la structure par terme initiale des taux ZC, et ceux qui ne le sont pas.

Section 4.2 Compatibilité avec la courbe des taux zéro-coupon ? Un ou plusieurs facteurs de risque ?

- ***Modèles d'équilibre partiel***

Ces modèles ne sont pas compatibles avec la courbe spot des taux zéro-coupon.

Le *modèle initial de Vasicek*⁴¹ (1977) dont nous donnons la dynamique dans le paragraphe précédent fait partie de la classe des modèles d'équilibre partiel. L'expression « Equilibre partiel » signifie que seules les relations entre variables financières comptent. Il y a déconnexion entre les marchés financiers et l'économie réelle. Vasicek propose en 1977 un modèle à une variable d'état markovienne⁴² (ou un facteur markovien) : le taux court. Ce fut une avancée importante.

Ces modèles considèrent la courbe de taux en globalité comme une fonction d'une seule variable d'état représentée par le taux court. Le processus du taux court est alors décrit par un processus de $it\hat{0}$ ⁴³ dont le drift et le paramètre de volatilité sont des fonctions de r mais ne

⁴⁰ BLACK. F. (1976) The pricing of Commodity Contracts, *Journal of Financial Economics*.

⁴¹ VASICEK O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics*.

⁴² Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

⁴³ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

dépendent pas du temps. *Un modèle est dit d'équilibre à un facteur de risque si le taux court r ne dépend que d'une seule source d'incertitude.*

Cette hypothèse impose que tous les taux *évoluent dans la même direction* tandis que leurs variations auront probablement *des amplitudes différentes*.

Les modèles de Cox-Ingersoll-Ross (1985)⁴⁴ et Merton (1973) font également partie de ces modèles d'équilibre partiel à un facteur de risque. Ils ne feront pas l'objet d'une étude dans ce mémoire.

Penchons nous sur les limites des modèles à un facteur :

- ❖ Ils sont trop peu flexibles : ils ne rendent pas compte de toutes les formes possibles de courbes de taux ainsi que leurs déformations visibles sur le marché.
- ❖ La probabilité non nulle d'apparition de taux négatifs (Vasicek, Merton) : cela entraîne des erreurs d'évaluations
- ❖ Le calage délicat sur les prix observés de marché. Les écarts de prix entre observés et calculés sont non négligeables même sur des prix d'obligations ; ces écarts s'amplifient nettement sur les dérivés de taux.
- ❖ Les variations de taux zéro-coupon sont parfaitement corrélées, quelle que soit la maturité (coefficient de corrélation toujours égal à un). Nous verrons par la suite que c'est en contradiction avec la réelle corrélation de marché entre les variations de taux. Elle diminue très fortement lorsque les maturités entre taux s'éloignent ; et est proche de un sur les maturités courtes.

Si l'établissement bancaire désire évaluer et couvrir des produits de taux court, un modèle à un facteur peut suffire. En revanche, sur du plus long terme, il faudra avoir recours à des modèles à plusieurs facteurs de risque, qui vont tenir compte des corrélations observées entre les variations de taux de maturités différentes.

Il existe donc des modèles d'équilibre à deux ou plusieurs facteurs (Brennan et Schwartz⁴⁵ par exemple). Une analyse en composantes principales (cf. partie II) sur les variations de taux ZC permet de justifier l'existence de ces *modèles multi-factoriels*.

Il subsiste néanmoins d'importantes limites avec ces modèles :

- ❖ De nombreux paramètres à estimer : le calage sur les prix observés est difficile. (minimisations des écarts entre prix observés et recalculés délicates)
- ❖ Peu de formules analytiques
- ❖ De nombreuses méthodes numériques difficiles à implémenter

Pour éviter ces difficultés, il est apparu une nouvelle classe de modèles dont les initiateurs sont *Ho et Lee* (1986)⁴⁶ pour le temps discret et *HJM* (1992)⁴⁷ en temps continu.

⁴⁴ COX J.C., INGERSOLL J.E., ROSS S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates, *Econometrica*.

⁴⁵ BRENNAN, SCHWARTZ (1982) An Equilibrium Model of Bond pricing and a test of Market Efficiency.

⁴⁶ HO, LEE (1986) Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims.

Ces modèles sont compatibles avec la courbe des taux ZC du marché et sont basés sur la théorie de l'absence d'opportunité d'arbitrage.

- **Modèles compatibles avec la courbe des taux zéro-coupon**

Un modèle AOA est en effet compatible avec la structure par terme des taux d'intérêts.

La démarche des modèles précédents qui consistait à-1-générer une courbe de taux théorique à partir de variables d'état exogènes-2-caler le modèle sur des prix de marché d'obligations afin d'en déduire les paramètres à estimer-3-évaluer les produits de taux à partir de ces valeurs, s'en trouve inversée.

En effet le modèle AOA va se servir de la courbe de taux zéro-coupon afin de choisir ses paramètres. Nous y reviendrons en détail dans la partie III avec l'implémentation pratique du **modèle de Hull and White** (1990)⁴⁸.

Ho et Lee, en 1986, furent donc les premiers à construire un modèle de ce type, en temps discret, où les prix des zéro-coupon ne sont perturbés que par une seule source d'incertitude et évoluent au travers d'un arbre de taux binomial.

Enfin, précisons que Heath, Jarrow et Morton en 1992 ont généralisés ces modèles discrets (dérivés de celui de Ho et Lee) en affectant plusieurs sources d'incertitudes sur les prix des ZC et en introduisant les volatilités stochastiques des taux et le temps continu. Ce modèle permet d'avoir des solutions analytiques pour beaucoup de produits financiers.

Dans le cadre général du modèle de HJM, nous pouvons distinguer les modèles à système markovien et les modèles de marché.

- ❖ Modèles à système markovien:

Ces modèles considèrent une forme particulière de la volatilité en contraignant la fonction associée. La dimension n du processus de Wiener i.e. le nombre de source d'incertitude représente un paramètre variable. De façon générale, ces modèles offrent des taux ZC linéaires par rapport aux variables d'état.

Ainsi les modèles de Ho et Lee et de H&W sont des **modèles linéaires gaussiens** où le taux court joue le rôle de variable d'état. Pour les deux modèles, la dimension n vaut 1. Les fonctions de volatilités choisies des taux « forward » instantanés pour exprimer les taux ZC et le taux court sont :

- ❖ $\gamma(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)}$ pour le modèle de H&W
- ❖ $\gamma(t, T) = \sigma$ pour le modèle de Ho&Lee

Le modèle de « **Vasicek généralisé** » est une extension de H&W(1990) pour $n > 1$; nous en reparlerons par la suite.

⁴⁷ HEATH D., JARROW R., MORTON A. (1992) Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates: A new Methodology, *Econometrica*.

⁴⁸ HULL J., WHITE A. (1990) Pricing Interest Rate Derivatives Securities ». Nous noterons par la suite "H&W".

Enfin, pour être complet, il est important de préciser que les modèles linéaires gaussiens ont l'avantage de donner des formules fermées pour évaluer les produits dérivés. En termes de calibrage du modèle, cela reste très appréciable.

❖ Les modèles log-normaux :

Les modèles *log-normaux*, quant à eux, également calés sur la courbe des taux ZC, pallient au principal inconvénient des modèles linéaires gaussiens : la possibilité d'avoir des taux courts négatifs. Le taux court est ici distribué de façon log-normale⁴⁹.

*Black, Derman et Toy*⁵⁰ (1990) proposent un modèle en temps discret, très utilisé en ALM aujourd'hui. Il fut complété ensuite, *en temps continu*, par le modèle log-normal de *Black et Karasinski*⁵¹ (1991), dont nous verrons la dynamique stochastique en détail par la suite.

De plus, ces modèles veulent améliorer le processus du taux court à l'aide des fonctions du temps. Les paramètres à estimer vont alors dépendre du temps (retour à la moyenne et volatilité dans le modèle Vasicek « étendu » par exemple). Ils sont également compatibles avec les structures de volatilités, ce qui nécessite quand même de faire une hypothèse sur l'évolution futur de la volatilité. La paramétrisation en devient assez lourde néanmoins.

❖ Modèles de marchés : BGM

Bien qu'étant très générique et flexible, le modèle de HJM présente néanmoins deux limites importantes. En effet, ce modèle est exprimé en termes de taux « forward » instantanés, non directement observables sur le marché ; il reste très difficile à calibrer. C'est pourquoi, des *modèles de marché*, comme celui de *BGM*⁵², se sont fortement développés. Ils utilisent comme variables d'état des taux « forward » de marché employés par les praticiens ; et leurs hypothèses sont très compatibles avec celles du modèle de Black.

Nous verrons par la suite, de manière très détaillée, les dynamiques de ces modèles, ainsi qu'une implémentation pratique à des fins de « pricing ».

Section 4.3 Conclusion

En résumé, les caractéristiques indispensables d'un modèle de taux pourraient être :

- ❖ Flexibilité : s'adapter aux diverses situations de marché
- ❖ Bonne spécification : les données à l'entrée doivent être facilement observables ou estimables.
- ❖ Bon calage : les prix calculés doivent être assez proches des prix de marché lorsque les paramètres sont finement estimés.

⁴⁹ Cf. Annexe 10.1: Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

⁵⁰ BLACK F., DERMAN E., TOY W. (1990) A One-factor Model of Interest Rates and Its Applications to Treasury Bond Options, *Financial Analysts Journal*.

⁵¹ BLACK F., KARASINSKI P. (1991) Bond and Option Pricing when Short Rates Are Lognormal, *Financial Analysts Journal*.

⁵² BRACE A., GATAREK D., MUSELIA M. (1997) The Market Model of Interest Rate Dynamics, *Mathematical Finance* 7.

- ❖ Réaliste : ne pas faire apparaître de taux négatifs par exemple.
- ❖ Robustesse.
- ❖ Cohérence théorique.
- ❖ Programmable facilement.

Nous avons à présent suffisamment détaillé le cadre de notre travail et rappelé les définitions essentielles pour la suite. Après avoir explicité la « base de données swaps » utilisée, et notamment reconstruit la courbe des zéro-coupon avec celle-ci, il est possible d'étudier les différents modèles de taux que nous avons l'intention d'implémenter sous Excel et VBA.

Commençons par une analyse historique des taux fixes de swaps. En effet, d'après les sections précédentes, l'étude des corrélations et par conséquent des facteurs de risque explicatifs des déformations de la courbe des taux ZC à travers le temps est indispensable avant de choisir le modèle de taux le plus approprié.

Partie II. Analyse historique sur les mouvements de courbes et premières valorisations d'instruments simples de couverture

Cette partie consiste en l'analyse historique des taux zéro-coupon à des fins de projections et de valorisations futurs d'instruments. Une des méthodes utilisées pour tenir compte des fortes corrélations entre les taux d'intérêts est appelée : Analyse en Composantes Principales (ACP). Litterman et Scheinkman (1991)⁵³ ont été les premiers à utiliser cette technique sur la courbe des taux zéro-coupon. Les deux premiers chapitres introduiront la méthode et ses résultats dans une application pratique sur des taux ZC corrélés. Le troisième chapitre décrira et appliquera une projection dans le futur des taux en définissant le cube de diffusion.

Enfin, le dernier chapitre consistera en une valorisation de produits dérivés simples (« swaps », « caps », « floors ») à l'aide des résultats de l'analyse historique.

Nous allons développer cette analyse sur la base de données décrite dans la première partie et sur la courbe de taux zéro coupon reconstruite à partir de celle-ci.

Enfin, précisons que cette étude est largement inspirée d'une étude pratique faite par Philippe Priaulet et Lionel Martellini (2000)⁵⁴ sur les méthodes statistiques d'analyse de la dynamique des taux, et plus particulièrement un « exemple d'ACP sur les taux zéro-coupon ». Pour plus de détails, il faudra se référer à cet ouvrage.

Chapitre 1. Covariance et corrélation

▪ Evolution des taux

Dans un premier temps, observons les corrélations entre les variations quotidiennes des taux zéro-coupon.

A l'aide de la base complète de taux zéro-coupon, nous calculons la matrice dite des « différences premières » ou des « variations de taux ZC », soit une matrice $N \times m$ donnant les taux $dr(t, T_m)$ en variations quotidiennes (semestrielles, mensuelles, selon le calendrier choisi). Chaque colonne correspond donc à une maturité et chaque ligne à une variation du taux ZC pour une date t .

⁵³ LITTERMAN. R, SHEINKMAN. J (1991) Common factors affecting Bond Returns.

⁵⁴ MARTELLINI L., PRIAULET P. (2000) *Produits de Taux d'Intérêt. Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture* ».Economica.

Ensuite, nous explicitons la matrice de corrélation⁵⁵ sur ces variations. Voici les corrélations entre les variations quotidiennes de taux pour des maturités allant de 1 mois à 10 ans :

	1 mois	3 mois	6 mois	9 mois	1 an	2 ans	3 ans	5 ans	7 ans	10 ans
1 mois	1,000	0,295	0,365	0,289	0,311	0,182	0,148	0,110	0,107	0,079
3 mois	0,295	1,000	0,548	0,444	0,459	0,167	0,133	0,100	0,109	0,086
6 mois	0,365	0,548	1,000	0,634	0,647	0,270	0,230	0,215	0,205	0,175
9 mois	0,289	0,444	0,634	1,000	0,651	0,377	0,328	0,281	0,270	0,222
1 an	0,311	0,459	0,647	0,651	1,000	0,422	0,381	0,341	0,325	0,285
2 ans	0,182	0,167	0,270	0,377	0,422	1,000	0,897	0,857	0,807	0,742
3 ans	0,148	0,133	0,230	0,328	0,381	0,897	1,000	0,842	0,806	0,745
5 ans	0,110	0,100	0,215	0,281	0,341	0,857	0,842	1,000	0,908	0,892
7 ans	0,107	0,109	0,205	0,270	0,325	0,807	0,806	0,908	1,000	0,933
10 ans	0,079	0,086	0,175	0,222	0,285	0,742	0,745	0,892	0,933	1,000

Tableau 1 : matrice de corrélation des variations quotidiennes de taux

De manière assez significative, plus l'écart de maturité entre les taux est grand, plus la corrélation est faible. Ainsi, par exemple, les évolutions des taux 3 mois et 10 ans sont peu corrélées entre elles. La matrice ci-dessus montre donc clairement que la corrélation entre les variations de taux est imparfaite ; et donc différente de un. Un modèle de taux à un facteur, impliquant une matrice de corrélation unitaire entre les variations de taux, apparaît ici déficient. Il va falloir déterminer un nombre fini de facteurs de risque à l'origine de la déformation de la courbe des taux zéro-coupon, et pour cela utiliser *l'Analyse en Composantes Principales*⁵⁶.

▪ ACP et Matrices de corrélation

De façon générale, l'ACP d'une série temporelle consiste en l'étude de la matrice de corrélation des variations successives des réalisations des variables. Grâce à un nombre réduit de variables implicites non observées, il est possible d'expliquer fortement le comportement d'un nombre quelconque plus important de variables observées et corrélées entre elles.

L'annexe 7 décrit plus en détails la démarche à suivre pour effectuer une analyse en composantes principales sur une base de variations journalières de taux ZC et ainsi déterminer les facteurs de risque à l'origine des mouvements sur la courbe ZC.

Les variables ici observées seront les taux zéro-coupon reconstitués dans la partie I.

A partir des 65 taux zéro-coupon reconstitués quotidiennement (*N observations de janvier 1999 à mai 2005*) pour les *M=65 maturités* allant de 1 jour à 50 ans⁵⁷, nous allons donc construire l'analyse en composantes principales.

La méthode permet d'écrire les variations de taux d'intérêt zéro-coupon, en général fortement corrélées pour les 65 maturités, en terme de nouvelles variables non corrélées dites « *facteurs explicatifs* ».

⁵⁵ Cf. Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques.

⁵⁶ Cf. Annexe 7: ACP et facteurs explicatifs.

⁵⁷ On rappelle les maturités : 1j, 1 semaine, 2 semaines, 3 semaines, 1 mois, 2 mois, 3 mois, 4 mois, 5 mois, 6 mois, 7 mois, 8 mois, 9 mois, 10 mois, 11 mois, 1 an, 2ans,... 49 ans, 50 ans soit 65 maturités différentes.

Nous disposons donc de 65 variables et de N observations pour ces variables. Soit $r(t, T_m)$ le taux zéro coupon en t de maturité T_m (m allant de 1 à 65).

Notons la variation de taux ZC pour un pas de temps de la manière suivante :

$$dr(t, T_m) = r(t+1, T_m) - r(t, T_m)$$

Nous considérons les taux en variations quotidiennes, par exemple, et nous calculons la matrice de corrélation sur ces variations successives. C'est une matrice de dimension $M \times M$. De cette matrice, nous pouvons en déduire, d'après l'annexe 7, les composantes principales qui sont les **vecteurs propres** de la matrice.

Pour résumer, il faut calculer la matrice des « différences premières », en déduire les matrices de corrélation et de covariance⁵⁸, et expliciter les **facteurs explicatifs de déformation de la courbe des taux**.

Nous avons réalisé pour cela une fonction VBA qui, à partir de la base des taux zéro-coupon splinés, renvoie la matrice de corrélation (ou de covariance, au choix) des variations de ces taux, puis les vecteurs et valeurs propres associés.

Voyons à présent l'étude théorique qui justifie cette démarche.

Chapitre2. Facteurs explicatifs de la sensibilité des taux zéro-coupon

Section 2.1 L'ACP sur les taux d'intérêt zéro-coupon

L'analyse en composantes principales réalisée nécessite de définir la matrice dR suivante :

$$dR = (dr_{t,m}) = \frac{dr(t, T_m) - \overline{dr(., T_m)}}{\sqrt{N} \times \sigma_{dr(., T_m)}} \quad m=1..65 ; t=1..N$$

Avec $\overline{dr(., T_m)}$ et $\sigma_{dr(., T_m)}$ la moyenne et l'écart type des variations de taux de maturités T_m .

D'après Lebart et Fénelon (1975)⁵⁹, nous pouvons écrire chaque élément de dR sous la forme :

$$dr_{t,m} = \sum_{i=1}^{65} \sqrt{\lambda_i} V_{ti} U_{im}$$

⁵⁸ Une ACP est dite normée si l'on travaille sur la matrice de corrélation. Elle n'est pas normée si l'on étudie la matrice de variances-covariances. Des études ont montré que la matrice des corrélations est plus stable.

⁵⁹ Cf. LEBART, FENELON. (1975) *Statistique et informatique appliquées*.

Avec :

- ❖ $(U) = (U_{mi})$, la matrice des i vecteurs propres de la matrice de corrélation des variations de taux (notée $dR^T dR$).
- ❖ $(V) = (V_{iv})$, la matrice des i vecteurs propres de $dR \cdot dR^T$ (transposée de la matrice de corrélation).
- ❖ λ_i , la valeur propre associée au vecteur propre U_i .

Nous pouvons en déduire l'expression suivante :

$$dr(t, T_m) = \overline{dr(., T_m)} + \sum_{i=1}^{65} \sqrt{N} \times \sigma dr(., T_m) \sqrt{\lambda_i} V_{ii} U_{im}$$

D'après Martellini et Priaulet, nous pouvons donc écrire les variations de taux d'intérêts $dr(t, T_m)$ en termes de nouvelles variables C_i^i non corrélées appelées « **axes factoriels** » sous la forme:

$$dr(t, T_m) = \overline{dr(., T_m)} + \sum_{i=1}^M c_{im} C_i^i \quad (\text{II.1})$$

Où

- C_i^i est la $i^{\text{ème}}$ composante principale ou $i^{\text{ème}}$ facteur ($V_{ii} = C_i^i$).
- les c_{im} sont les sensibilités de $dr(t, T_m)$ au $i^{\text{ème}}$ facteur C_i^i , c'est-à-dire les coordonnées du taux zéro coupon de maturité T_m sur le $i^{\text{ème}}$ axe factoriel.

$$c_{im} = \sqrt{N} \times \sigma dr(., T_m) \times \sqrt{\lambda_i} \times U_{im}$$

Rappelons que λ_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur propre associée au $i^{\text{ème}}$ vecteur propre U_{im} (U étant la matrice des m vecteurs propres de la matrice de la corrélation des variations des taux).

La sensibilité de chaque variation de taux résulte d'une variation unitaire isolée sur chacun des facteurs.

Les composantes principales ou axes factoriels sont classés par ordre décroissant des valeurs propres auxquelles ils sont associés.

Lorsque L facteurs suffisent à expliquer plus de 80 % de la variance de la courbe des taux zéro coupon, on va donc écrire plus simplement :

$$\boxed{dr(t, T_m) \approx \overline{dr(., T_m)} + \sum_{i=1}^L c_{im} C_i^i}, \quad \text{en négligeant un terme en } \varepsilon \text{ non explicatif des déformations de la courbe des taux.}$$

En principe, trois facteurs suffisent pour expliquer la quasi-totalité de la variance de la courbe des taux ZC. Ceux-ci sont ordonnés de telle sorte que C_i^i corresponde à la fraction la plus

élevée de la variance totale, c'est-à-dire le rapport de la plus grande valeur propre de la matrice de corrélation des variations de taux sur la somme de toutes les valeurs propres.

Nous avons calculé les matrices de corrélation et de covariance pour les variations des taux quotidiennes, hebdomadaires, et mensuelles (variations historiques).

Après diagonalisation (à l'aide d'une « toolbox » VBA implémentée⁶⁰), il reste à récupérer les vecteurs propres et valeurs propres les plus explicatifs de la variance de la courbe des taux zéro-coupon (i.e. les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres).

En traçant les coefficients c_{im} en fonction des maturités des taux pour les trois premiers facteurs ($i=1, 2, 3$), on obtient une idée de l'effet d'une variation isolée de chacun des facteurs sur les variations de taux $dr(t, T_m)$.

On retrouve les trois mouvements de la courbe des taux décrits dans l'annexe :

- ❖ La **translation** pour le facteur 1 (ou facteur de niveau, noté F1)
- ❖ L'effet de **pente** pour le facteur 2 (noté F2)
- ❖ L'effet de **courbure** pour le facteur 3 (noté F3)

Voici à présent les sensibilités (ou « loadings » dans la littérature anglaise) obtenues dans le cas suivant :

Matrice de corrélation / toutes les maturités jusque 30 ans / calendrier « daily » :

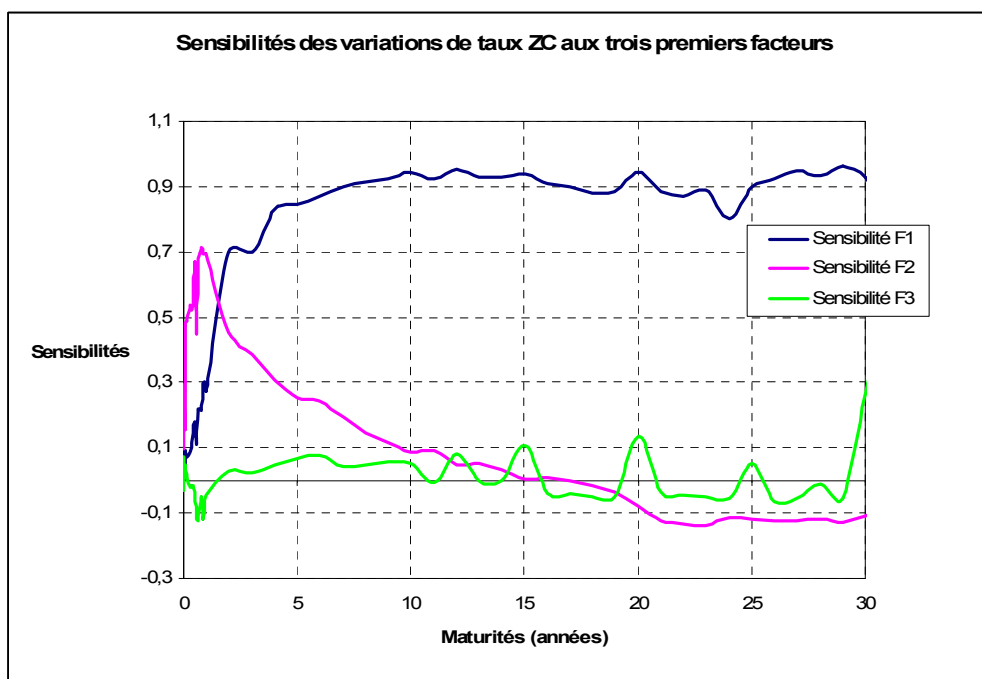


Figure 11 : sensibilités des variations de taux ZC aux trois premiers facteurs

⁶⁰ La méthode utilisée pour avoir les vecteurs propres et valeurs propres est l'algorithme de Jacobi (cf. Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques).

Matrice de covariance / toutes les maturités jusque 30 ans / calendrier « weekly » :



Figure 12 : sensibilités des variations de taux ZC aux trois premiers facteurs (« weekly »)

On s'aperçoit que le facteur 1, relatif à la plus grande valeur propre est à peu près constant à partir d'une certaine maturité. Rappelons que ce facteur est interprété comme représentant les variations parallèles de la courbe des taux. Cette composante explique généralement 60 % ou plus des variations de la courbe des taux.

Voici les pourcentages d'explication de ces trois facteurs pour cet exemple :

	Facteur 1	Facteur 2	Facteur 3
% expliqué	62,03%	15,06%	8,54%
% cumulé	62,03%	77,09%	85,63%

Ces trois facteurs ou composantes principales *expliquent plus de 85 %* des variations de la courbe des taux ZC.

Remarque :

Précisons que les résultats de l'analyse en composantes principales de l'annexe 7, réalisée sur la même base de taux zéro-coupon, mais avec un nombre restreint de maturités, sont plus conformes à ce que l'on retrouve dans la littérature (forme et pourcentage d'explication des trois premiers facteurs).

Chapitre3. Diffusion de la variation des taux zéro-coupon

Section 3.1 Cube de diffusion

A partir de la courbe de taux zéro-coupon du 25 mai 2005 et à l'aide de l'analyse en composantes principales précédente, nous allons projeter les taux zéro-coupon sur un historique choisi.

Rappelons la relation obtenue : $dr(t, T_m) \approx \overline{dr(., T_m)} + \sum_{i=1}^L c_{im} C_t^i$

A chaque pas (journalier ou hebdomadaire, selon le calendrier choisi) et pour toutes les maturités de taux ZC, nous allons ajouter (à partir de la courbe ZC initiale), la moyenne historique des variations (journalière ou hebdomadaire) correspondant au « drift »⁶¹ et la variation aléatoire (également journalière ou hebdomadaire).

$$\boxed{dr(t, T_m) = \overline{dr(., T_m)} + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i c_{im} C_t^i} \quad (\text{II.2})$$

Avec ε_i , 3 tirages de la loi normale centrée réduite.

De façon pratique, nous avons projeté les taux zéro-coupon sur différents horizons pour toutes les maturités, avec des variations aléatoires quotidiennes ou hebdomadaires, et soit avec une analyse sur la matrice de covariance, soit sur la matrice de corrélation (cette dernière étant plus stable dans la littérature). Nous avons également effectué les simulations avec un « drift » nul⁶².

La relation devient :

$$dr(t, T_m) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i c_{im} C_t^i$$

- *Avec la matrice de covariance des variations des taux fixes de swaps :*

Nous calculons la matrice de covariance sur les différences premières (journalières ou hebdomadaires) des taux zéro-coupon reconstruits. Nous récupérons les trois premiers facteurs ou vecteurs propres F_i ($i=1..3$), associés aux trois plus grandes valeurs propres respectives λ_i ($i=1..3$). Simulons ensuite 3 tirages de la loi normale standard.

Ensuite il suffit d'implémenter comme suit :

$$r(t+1, T_m) = r(t, T_m) + dr = r(t, T_m) + \overline{dr(., T_m)} + \varepsilon_1 \times \sqrt{\lambda_1} \times F_1 + \varepsilon_2 \times \sqrt{\lambda_2} \times F_2 + \varepsilon_3 \times \sqrt{\lambda_3} \times F_3$$

Pour chaque date, la variation diffère de par un nouveau tirage de loi normale centrée réduite.

⁶¹ Cf. Annexe 10.3: Glossaire financier.

⁶² LITTERMAN. R, SHEINKMAN. J (1991) Common factors affecting Bond Returns..

Remarque :

Avec le drift nul, nous avons implémenté la relation simplifiée suivante :

$$r(t+1, T_m) = r(t, T_m) + dr = r(t, T_m) + \varepsilon_1 \times \sqrt{\lambda_1} \times F_1 + \varepsilon_2 \times \sqrt{\lambda_2} \times F_2 + \varepsilon_3 \times \sqrt{\lambda_3} \times F_3$$

Voici le résultat obtenu, pour un calendrier « weekly », un horizon de 200 semaines (environ 4 ans) et avec un « drift » nul (ou « dérive » nulle).

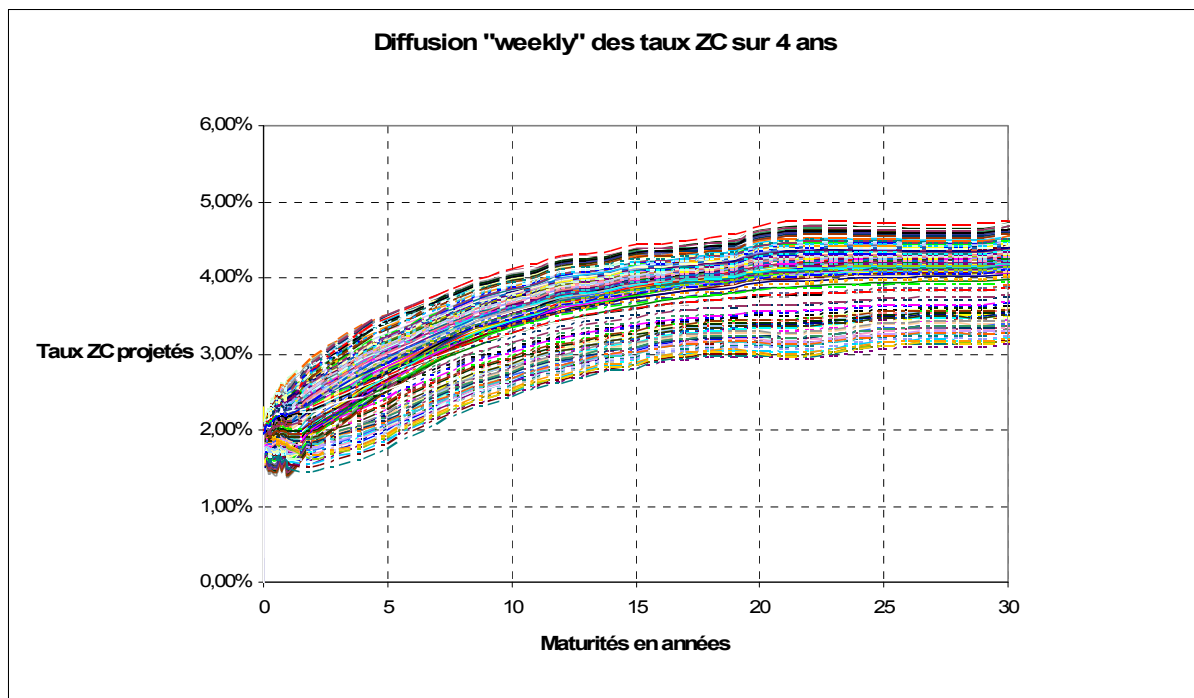


Figure 13 : diffusion hebdomadaire des taux ZC sur 4 ans (« drift » nul)

Nous obtenons une matrice $200 \times M$ (les M maturités de taux ZC) appelée *matrice de diffusion* qui contient, ligne par ligne, les taux zéro-coupon projetés dans le futur d'une semaine sur l'autre à partir de la courbe des taux du 25 mai 2005 ; et ce, pour toutes les maturités de court terme et de long terme.

Cette diffusion permettra de récupérer les taux zéro-coupon futurs qui feront office de *taux forward Euribor*.

Par exemple, s'il on considère la colonne « 3 mois » de la matrice de diffusion, ce vecteur représentera le taux variable du swap Euribor 3 mois que nous voudrions générer par la suite. Les composantes représenteront les valeurs de ce taux toutes les semaines pour un horizon H choisi. Il suffira de récupérer la valeur de ce taux projeté toutes les 12 semaines environ, soit tous les 3 mois, afin d'évaluer les coupons variables et enfin d'actualiser à la date de valorisation.

Exemple de trajectoire simulée du taux zéro-coupon 3 mois :

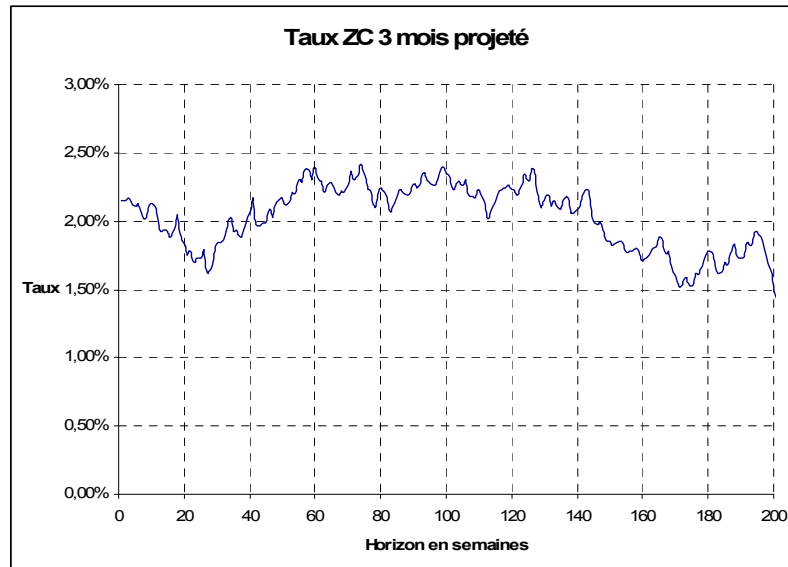


Figure 14 : trajectoire du taux ZC 3 mois sur 200 semaines

- *Avec la matrice de corrélation des variations des taux fixe de swaps :*

Pour des raisons de stabilité, il est préférable de travailler sur la matrice de corrélation explicitée dans les chapitres précédents. Nous procédons de la même manière que pour la méthode de diffusion avec la matrice de covariance. Cependant la formule de sensibilité du taux zéro-coupon diffère :

$$r(t+1, T_m) = r(t, T_m) + dr = r(t, T_m) + drift(T_m) + \sigma \times (\varepsilon_1 \times \sqrt{\lambda_1} \times F_1 + \varepsilon_2 \times \sqrt{\lambda_2} \times F_2 + \varepsilon_3 \times \sqrt{\lambda_3} \times F_3)$$

Le drift pourra prendre deux valeurs : $drift(T_m) = \overline{dr(., T_m)}$ ou $drift(T_m) = 0$; selon la simulation choisie. Nous privilégierons, dans la suite de notre travail, un drift non nul et correspondant à la moyenne des variations de taux. Le paramètre de volatilité σ représente l'écart-type moyen des variations historiques des taux zéro-coupon.

Voyons ensuite le résultat obtenu, pour un calendrier « weekly », un horizon de 200 semaines (environ 4 ans) et un « drift » non nul :

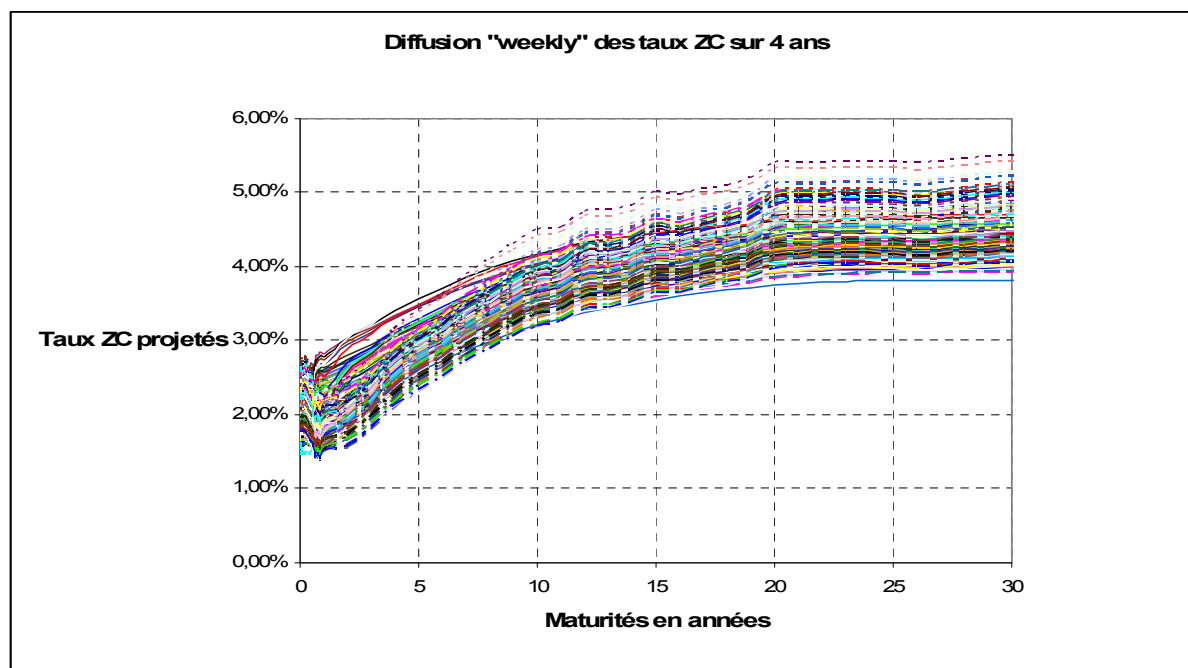


Figure 15 : diffusion hebdomadaire des taux ZC sur 4 ans (« drift » non nul)

Remarque : la fonction réalisée sous VBA renvoie la matrice de diffusion des taux zéro-coupon avec, comme variables d'entrée, les 3 facteurs explicatifs des variations de taux, la courbe zéro-coupon initiale, le paramètre de volatilité σ (1 pour la méthode « covariance »), le drift choisi (0 pour la méthode « covariance ») et enfin l'horizon de projection.

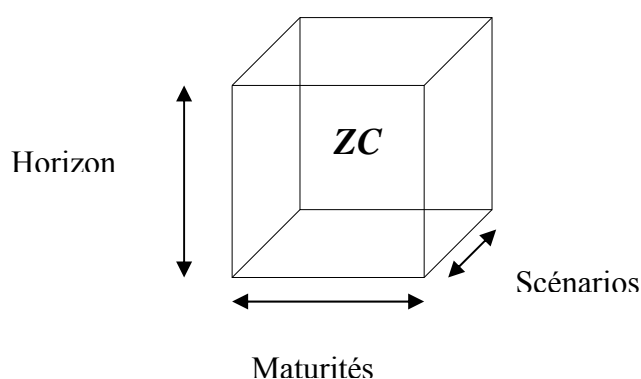
Pour valoriser plus simplement les produits dérivés de taux, nous avons choisi de simuler et de stocker les résultats dans des variables appelées des « cubes de diffusion » ; qui serviront dans toute l'étude.

- **Cube de diffusion :**

Ce que l'on appelle *cube de diffusion* est la matrice de diffusion calculée pour différents scénarios.

Il suffit de créer une fonction VBA qui, à partir du calcul de la matrice de diffusion, renvoie un cube avec différents scénarios. Nous obtenons les taux zéro-coupon projetés sur un horizon H, avec K scénarios et pour toutes les maturités.

Nous appellerons également ce cube un « *Univers de Monte Carlo* », de par le fait de la génération d'un grand nombre de scénarii de taux zéro-coupon projetés.

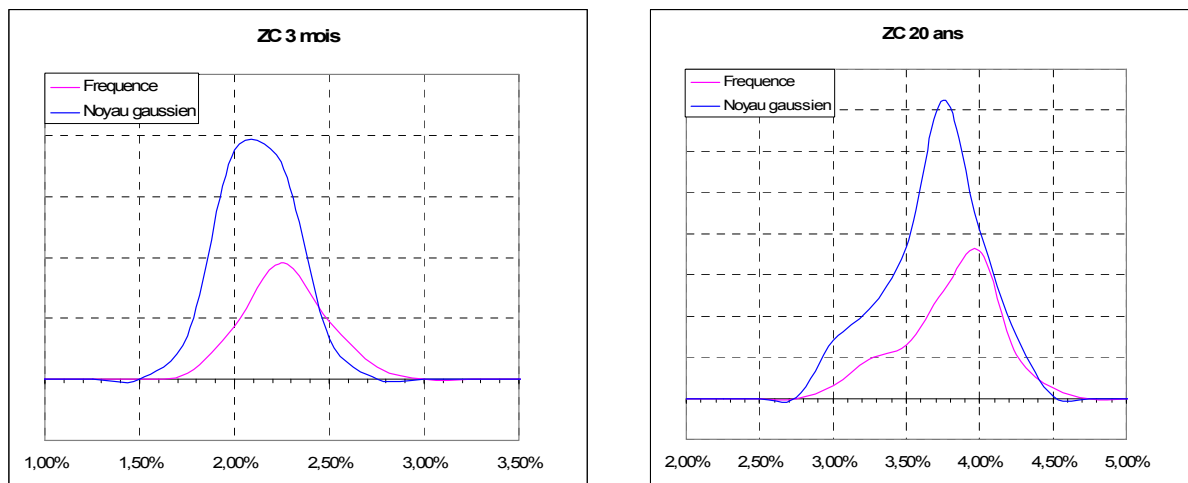


Pour la suite du travail et pour toutes les valorisations de produits de taux, nous allons simuler plusieurs cubes de diffusions à l'aide de fonctions VBA. Celles-ci généreront, à partir de la courbe des taux zéro-coupon, les scénarii de taux variables Euribor futurs voulus sur un horizon H fixé. Nous raisonnerons jusqu'à la fin du mémoire à l'aide de ces cubes comme variables d'entrées de fonctions d'évaluation de prix d'instruments financiers.

Section 3.2 Densités et lissages

Cette section a pour objectif d'obtenir les courbes de densités des taux zéro-coupon obtenues par diffusion. Nous choisissons la maturité du taux et, à l'aide d'une fonction VBA de *lissage par noyau gaussien*, nous traçons les densités lissées.

Ci-dessous, nous représentons graphiquement (en bleues) les densités « lissées » des variables aléatoires associées aux taux ZC 3 mois et aux taux ZC 20 ans (colonnes 3 mois et 20 ans de la matrice de diffusion).



Remarque : la courbe en rose est la densité obtenue avec la fonction fréquence d'Excel.

Chapitre 4. Valorisations d'instruments de couverture : Swaps, Caps et Floors

Dans le dernier chapitre de cette partie II, nous allons, à partir des cubes de diffusions de taux générés précédemment, évaluer divers instruments financiers de couverture contre le risque de taux. Ces instruments simples sont très employés dans toutes les institutions bancaires et constituent une couverture indispensable des positions de taux. Dans la suite du mémoire, nous réévaluerons ces mêmes instruments avec d'autres scénarii de taux issus de modèles plus adéquats et robustes.

Section 4.1 Evaluation d'un swap Taux fixe - Taux variable

a. Définition d'un swap de taux standard

Dans la première partie, nous avons déjà défini le swap de taux d'intérêt standard et ses différentes variantes existantes (Partie I/chapitre 2/section 2.1). A présent, dans la suite de cette section, nous allons valoriser le swap Taux fixe contre Taux variable (Euribor 3 mois ou Euribor 6 mois).

b. Méthodes d'évaluation de swaps de taux standards

Les swaps ne sont pas cotés de manière régulière sur les marchés ; c'est pourquoi, leur valeur de marché doit être recalculée précisément. Leurs multiples caractéristiques suivant les contrats et le fait qu'ils soient « pricés » en taux et non en prix les rendent très spécifiques.

Dans ce paragraphe, nous allons détailler deux méthodes théoriques employées pour valoriser un swap de taux d'intérêt dit « vanille » :

- ❖ La valorisation *par projection des taux forward*
- ❖ La valorisation *par les taux zéro-coupon*

Enfin, nous utiliserons les résultats de l'ACP et d'une diffusion par Monte Carlo de la courbe de taux ZC pour valoriser ce swap standard.

Avant de présenter les différentes méthodologies, rappelons la procédure commune à toute valorisation d'un swap :

Si l'on considère un swap payeur Taux fixe contre Euribor 3M démarrant en date T_0 ; composé de N flux d'intérêts fixes payés annuellement aux dates T_i (notés Ff_{T_i}) et de N flux d'intérêts variables reçus trimestriellement aux dates T_i' (notés $E_{T_i'}$). La **valeur actuelle nette** V en date T_0 de ce swap est la somme de tous ses flux futurs actualisés échangés :

$$V = \underbrace{\sum_{i=1}^{N'} E_{T_i'} DF_{T_i'}}_{\text{Jambe variable}} - \underbrace{\sum_{i=1}^N Ff_{T_i} DF_{T_i}}_{\text{Jambe fixe}} \quad (\text{II.3})$$

Les DF sont les facteurs d'actualisation aux dates T_i et T_i' , recalculés à partir de la courbe des taux ZC en date T_0 .

Les flux de la jambe fixe sont connus à la signature du contrat de swap ; c'est dans l'estimation des flux variables de taux Euribor 3M que l'on fait le choix d'une méthode.

- **Valorisation par projection des taux forward**

Cette méthode consiste à déterminer les flux variables futurs, à partir de la courbe des taux ZC de la date de valorisation, en calculant les taux variables anticipés par le marché (ou « taux implicites »). Ces taux implicites sont les taux « forward » définis dans la première partie. Dans ce cas précis, il suffit de calculer les taux 3 mois « forward » tous les trois mois (Euribor 3M dans 3 mois, Euribor 3M dans 6 mois, etc....).

D'après la formule de calcul des taux « forward » (Partie I/Chapitre 2/Section 2.3), la valorisation de ce swap nécessite uniquement la connaissance des facteurs d'actualisation de la courbe des taux ZC ; les caractéristiques du swap suffisent ensuite (taux fixe, durée, périodicités de paiements et nominal).

Calculons la valeur d'un swap Taux fixe contre Euribor 3M dont les caractéristiques sont les suivantes :

- ❖ Durée : **4 ans**
- ❖ Le « taux de swap » ou « taux fixe » : **5 %**
- ❖ Le taux variable de référence : **Euribor 3 mois**
- ❖ La périodicité de paiement des intérêts à taux fixe : **annuelle**
- ❖ La périodicité de paiement des intérêts à taux variable : **trimestrielle**
- ❖ Nominal : **unitaire**

A noter que la date de valorisation du 25 mai 2005 est celle de la courbe ZC d'actualisation recalculée et correspond à la date de calcul du coupon variable de la première échéance (le premier flux variable tombe trois mois après).

Voici le résultat obtenu avec la fonction VBA *Valoforward*:

$VAN = 8,77 \%$

Remarque 1: la fonction *Valoforward* prend comme input la *courbe spot ZC*, le *taux fixe* du swap, la *maturité* du taux variable, la *durée* du swap et le choix de la méthode à employer (i.e. « forw » ou « ZC »).

Remarque 2: avec le taux fixe swap 4 ans de la courbe ZC du 25 mai 2005, nous retrouvons une VAN de 0,04 %.

- **Valorisation à l'aide des taux zéro-coupon projetés**

Dans le cas d'un swap Taux fixe contre Euribor 3M *standard* i.e. la maturité du taux variable (ici 3 mois) correspond à la périodicité de paiement de ce taux, nous pouvons ainsi valoriser plus simplement ce produit.

La valeur actuelle de la jambe fixe en date de valorisation T_0 se calcule de façon identique. En ce qui concerne la jambe variable, nous allons proposer une écriture théorique simplifiée.

Nous considérons le même swap payeur composé de N' flux d'intérêts de la branche variable distribués aux dates T'_i . Rappelons que les taux sont prédéterminés (constatés trois mois plus tôt). Nous avons $T'_i = T'_{i-1} + 3\text{mois}$.

Notons $f(T, T'_{i-1}, 3\text{ mois}) = f_{T'_{i-1}, 3\text{mois}}$ le taux « forward » 3 mois vu en T démarrant en T'_{i-1} .

D'après la première partie, nous pouvons exprimer ce taux « forward » en fonction de facteurs d'actualisation (en base Exact/360 car la maturité est inférieure à un an) :

$$f_{T'_{i-1}, 3\text{mois}} = \left(\frac{DF_{T'_{i-1}}}{DF_{T'_i}} - 1 \right) \times \frac{360}{T'_{i-1} - T'_i}$$

Ainsi, le coupon variable reçu en T'_i vaut :

$$E_{T'_i} = f_{T'_{i-1}, 3\text{mois}} \times \frac{T'_i - T'_{i-1}}{360} = \frac{DF_{T'_{i-1}}}{DF_{T'_i}} - 1$$

Cette relation n'est pas valable pour le premier coupon $E_{T'_1}$ détaché en T'_1 lorsque celui-ci est déterminé avant la date de valorisation T_0 (la période entre T_0 et T'_1 n'est pas de trois mois).

La **valeur actualisée de la jambe variable** s'écrit alors :

$$V_{\text{Jambe Variable}} = \sum_{i=1}^{N'} E_{T'_i} DF_{T'_i} = \sum_{i=2}^{N'} \left(\frac{DF_{T'_{i-1}}}{DF_{T'_i}} - 1 \right) DF_{T'_i} + E_{T'_1} DF_{T'_1}$$

$$V_{\text{Jambe Variable}} = \sum_{i=2}^{N'} (DF_{T'_{i-1}} - DF_{T'_i}) + E_{T'_1} DF_{T'_1} = DF_{T'_1} (1 + E_{T'_1}) - DF_{T'_{N'}}$$

Nous pouvons en déduire facilement la valeur du swap en ôtant la valeur de la jambe fixe.

Reprenons les caractéristiques du swap évalué dans la première méthode.

Nous obtenons par cette méthode et avec la même fonction VBA le résultat suivant :

$$VAN = 8,77 \%$$

Sans surprise, dans ce cas particulier de swap standard, le résultat est bien le même.

Lorsque la date de valorisation du swap correspond à la date de calcul d'un flux variable (le

premier flux détaché en T'_1 par exemple), alors : $V_{\text{Jambe Variable}} = \sum_{i=1}^{N'} (DF_{T'_{i-1}} - DF_{T'_i}) = DF_{T'_0} - DF_{T'_{N'}}$

Avec $T'_0 = T_0$ la date de valorisation du swap.

Pour notre exemple numérique : $DF_{T_0} = 1$; $DF_{T_N} = \frac{1}{(1+TxZC4ans)^4} = 0,8996$

La jambe variable de ce swap vaut alors : $V_{Jambe\ Variable} = 1 - 0,8996 = 0,1004 = 10,04\%$

La jambe fixe, actualisation des coupons fixes de 5%, vaut : $V_{Jambe\ Fixe} = 18,81\%$

Ainsi nous retrouvons, par différence, la valeur du swap : **8,77 %**

▪ **Valorisation en utilisant le cube de diffusion de L'ACP**

Pour valoriser le swap défini précédemment, nous utilisons à présent le cube de diffusion issu de l'ACP, explicité dans les sections précédentes. A partir d'un univers de Monte Carlo (horizon, maturité, nombre de tirage) comprenant les taux ZC générés, une fonction VBA nommée « *ValoMCswap* » calculera les flux futurs d'Euribor 3 mois et la Valeur Actuelle Nette de ce swap.

L'horizon choisi correspondra à la durée du swap ; la maturité du taux ZC projeté sera donc de 3 mois et le nombre de tirage pourra varier. Il suffira de récupérer, sur des périodes de 3 mois (selon le calendrier choisi), les taux ZC 3M projetés et de les assimiler aux taux Euribor 3M futurs. Le calcul de la Valeur Actuelle Nette sera ensuite identique aux deux autres méthodes. Là encore, la seule différence réside dans l'évaluation des flux d'intérêts variables.

Par exemple, pour calculer le prix du swap taux fixe contre Euribor 3M de durée H en années :

Il faut récupérer, sur un horizon H de diffusion, tous les 3 mois, les taux ZC Euribor3M projetés (suivant le calendrier choisi). La courbe d'actualisation est celle de la date de valorisation (T_0 , date de début du swap).

Voici les résultats obtenus sur le contrat de swap évalué par les deux méthodes précédentes pour 100, 1000 et 5000 tirages :

Swap 4 ans TF5%/E3M		
	<i>Corrélation / drift = moyenne</i>	<i>Covariance / drift nul</i>
100 tirages	12,08%	10,79%
1000 tirages	11,85%	10,63%
5000 tirages	11,80%	10,62%

Pour un taux fixe correspondant au taux fixe du swap 4 ans sur la courbe ZC, le prix du swap avec 1000 tirages (et une matrice de corrélation pour l'ACP) va être aux environs de 3,05 %. Ce qui confirme l'écart avec les méthodes précédentes (11,85 % - 3,05 % = 8,80 %).

c. Comparaisons et conclusion

Les derniers résultats obtenus ne sont pas très satisfaisants. En effet, les prix obtenus dans un premier temps théoriquement et ensuite par la méthode numérique du cube de diffusion sont très éloignés. Le taux fixe du swap de la courbe spot ZC dont la maturité correspond à la durée du swap ne rend pas les deux jambes neutres actuariellement.

Ce résultat semble logique à la vue des hypothèses fortes faites sur le « *drift* » de la diffusion notamment. Prendre un « drift » nul ou un « drift » égal à la moyenne historique des variations de taux ZC s'avère assez arbitraire. Une voie d'amélioration résiderait dans la modélisation du drift de la dynamique du taux court.

Avec un nombre plus important de tirages, il semblerait que le résultat s'améliore.

Pour nuancer ces propos, il est normal que les résultats entre les méthodes soient différents. Les taux « forward » ne vont pas refléter exactement l'évolution des taux dans le futur.

Il est d'usage *d'utiliser un modèle de taux stochastique* plus évolué afin de projeter la trajectoire des taux variables (Euribor 3 mois par exemple). Ce que nous ferons par la suite pour « pricer » ces produits de taux d'intérêts.

Pour conclure, il faut remarquer que la différence essentielle dans la dynamique des modèles de taux se situe dans l'écriture de son terme en dt , c'est-à-dire son drift.

Section 4.2 Evaluations d'options sur taux d'intérêt

L'essor des options sur les taux d'intérêts a été plus récent que celui des modèles de taux. Les professionnels ont donc été amenés à utiliser le modèle de Black de 1976. Les modèles de Vasicek, Ho et Lee, H&W n'apparaissant respectivement qu'en 1977, 1986 et 1990. Dans cette section, nous allons définir les principales options de taux du marché, les évaluer avec le modèle de Black et comparer leurs évaluations, comme pour les swaps, avec une évaluation par la méthode ACP et le cube de diffusion.

a. Définitions de deux options : le « cap » et le « floor »

Définissons à présent quelques dérivés élémentaires comme les *caps*, *caplets*, *floors* et *floorlets*.

▪ Définition d'un cap

Un cap ou « option de taux plafond » est un contrat où le vendeur promet de rétribuer son porteur si le taux d'intérêt de référence vient à dépasser un niveau prédéterminé (le taux d'exercice du cap) à certaines dates fixées dans le futur.

L'acheteur d'un « cap » utilise classiquement ce produit pour se couvrir contre une hausse des taux d'intérêt, par exemple pour couvrir un prêt à taux variable consenti par une banque. Un « cap » est une option sur taux d'intérêt, qui s'active lorsque le taux d'exercice est atteint.

A chaque constat (dates futurs de constatation préfixées), si le niveau du taux variable constaté est supérieur au taux d'exercice, l'acheteur du « cap » reçoit du vendeur le différentiel de taux, appliqué au montant nominal et rapporté au nombre de jours de la période d'intérêt.

Les principales caractéristiques d'un contrat « cap » sont :

- ❖ **La devise et le montant nominal** : ils sont fixés en général à la conclusion du contrat.
- ❖ **Le taux de référence** : il s'agit du taux d'intérêt variable sur lequel repose le contrat. (Libor, Euribor, etc.).
- ❖ **Le taux d'exercice** : il s'agit d'un niveau prédéterminé. Il reste fixe au cours du contrat. Il est aussi appelé taux *plafond*, taux *garanti* ou « *strike* ».
- ❖ **La fréquence de constatation** : il s'agit de la fréquence selon laquelle le taux de référence est comparé au taux d'exercice. Les fréquences les plus usuelles sont mensuelles, trimestrielles, semestrielles et annuelles. Le délai entre deux dates de constatation est appelé *ténor*. Ces périodes sont aussi appelées «*caplets*».
- ❖ **La durée du contrat de cette option** : elle peut aller de plusieurs mois jusqu'à 30 ans.
- ❖ **La prime** : elle est exprimée en pourcentage du montant nominal et est payée à la conclusion de l'opération. Un « cap » acheté peut être revendu avant l'échéance, ce qui donne lieu au versement d'une prime par l'acheteur.

Exemple :

Soit un « cap » de durée 3 ans, de nominal 1 millions d'euros, de taux variable de référence l'Euribor 3 mois, de fréquence de constatation égale à 3 mois et de taux d'exercice égal à 6 %.

Si, à une date de réajustement futur, l'Euribor 3 mois atteint 7 %, le détenteur du « cap » va recevoir le « payoff » P suivant à la fin du trimestre qui suit cette date⁶³:

$$P = 0,25 \times (0,07 - 0,06) \times 1000000 = 2500 \text{ euros}$$

A chaque date de réajustement, l'Euribor 3 mois est constaté. S'il est inférieur à 6 %, il ne génère aucun flux trois mois plus tard ; sinon il engendre, dans trois mois, le « payoff » évalué comme ci-dessus.

Pour un « cap » de 3 ans comme celui-ci, il y a donc 11 dates de constatation (fins des 11 trimestres contenus sur 3 ans). Le premier paiement ne peut intervenir qu'à la fin du second trimestre car le taux initial à $t=0$ n'engendre pas de flux à la fin du premier trimestre (déjà connu à la signature du contrat).

▪ **Définition d'un floor**

Les « floors » sont définis de façon similaire aux « caps ». C'est le symétrique du « cap » en matière de placement.

Un floor, ou « option de taux plancher » est un contrat conditionnel, donnant à son acheteur le droit de placer à un taux d'intérêt plancher (le taux d'exercice) préalablement fixé, un certain montant, sur un certain nombre de périodes, moyennant le paiement d'une prime.

L'exercice de l'option correspond au versement du vendeur à l'acheteur, du différentiel d'intérêt, calculé entre le taux variable de référence et le taux d'exercice du contrat. Le « floor » génère donc un flux lorsque le taux de référence passe « en dessous » du taux plancher préfixé à la signature du contrat.

Les caractéristiques contractuelles d'un « floor » sont les mêmes que pour un « cap » (à l'exception du taux d'exercice qui est un taux dit « **plancher** » pour un « floor »).

b. Evaluations théoriques de produits dérivés de taux

Dans ce paragraphe, nous n'allons pas démontrer les résultats mais simplement les exposer et les étudier. Le « pricing » de produits dérivés de taux n'étant pas l'objet principal du mémoire. Nous nous intéresserons ici aux « caps » et aux « floors » vus comme des *portefeuilles d'options de taux* et à leurs évaluations dans le cadre du modèle de Black.

⁶³ Les taux sont, ici, prédéterminés. Le calcul approxime à 0,25 ans les 3 mois entre deux dates de réajustement. Pratiquement, il faut tenir compte du nombre exact de jours.

▪ « *Le cap est un portefeuille d'options sur taux d'intérêts* »

Nous allons considérer un « cap » de durée T années, de nominal L euros, de taux d'exercice E , et dont le taux de référence est le taux variable Euribor en t de maturité τ noté $T_v(t, \tau)$.

Les dates de constatation du taux Euribor vis-à-vis du « strike » seront t_1, t_2, \dots, t_{n-1} et la date finale $t_n = T$. Notons :

- $T_v(t_i)$ le taux Euribor variable en t_i pour la date de constatation t_{i+1} . C'est le taux effectif sur l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$.

- $\tau_i = \tau = t_{i+1} - t_i$ le ténor, constant et égal à la maturité du taux variable.

Précisons que les taux Euribor sont observés aux dates t_1, t_2, \dots, t_{n-1} et les paiements interviennent aux dates t_2, \dots, t_{n-1}, t_n .

Le flux ou « *payoff* » payé à l'acheteur du cap à chaque date $t_{i+1}, i=1..n-1$ vaut :

$$C_{i+1} = L\tau \text{Max}[0; T_v(t_i) - E] \quad (\text{II.4})$$

Cette dernière expression correspond au paiement d'une *option d'achat européenne* ou « *call* »⁶⁴ sur l'Euribor observé en t_i d'échéance t_{i+1} . Ainsi le cap peut être vu comme un portefeuille de $n-1$ options identiques à celle-ci appelées *caplets*.

Avec les mêmes notations, et un « floor » de mêmes caractéristiques que le « cap » ci-dessus, le *payoff d'un floor* en date t_{i+1} est :

$$C_{i+1} = L\tau \text{Max}[0; E - T_v(t_i)]$$

A noter :

- Un « cap » peut également être défini comme un portefeuille de « *puts* »⁶⁵ ou *d'options de vente européennes* sur des obligations zéro-coupon. Contrairement aux « calls », les paiements des « puts » interviennent à la date de calcul et d'observation du taux Euribor. Il est équivalent pour l'acheteur du « cap » de recevoir le paiement en t_{i+1} ou son montant actualisé en t_i . Le flux C_{i+1} en date t_{i+1} est donc équivalent au flux suivant C'_i en date t_i :

$$C'_i = \frac{L\tau}{1 + \tau T_v(t_i)} \text{Max}[0; T_v(t_i) - E]$$

La valeur de ce flux devient, après calculs :

$$C'_i = L(1 + \tau E) \text{Max} \left[0; \frac{1}{1 + \tau E} - \frac{1}{1 + \tau T_v(t_i)} \right]$$

⁶⁴ Cf. Annexe 10.3: Glossaire financier.

⁶⁵ Cf. Annexe 10.3: Glossaire financier.

Nous reconnaissons le payoff d'un « put » d'échéance t_i et de prix d'exercice $\frac{1}{1+\tau E}$, sur une obligation ZC d'échéance t_{i+1} de nominal L^{66} . Ainsi le « cap » peut être vu comme un portefeuille de $n-1$ « puts » européens sur zéro-coupon d'échéances t_i .

- Le « floor » peut également être vu comme un portefeuille de « puts » sur taux ou de « call » sur obligations zéro-coupon (symétrie par rapport au « cap »). Chaque option composant le « floor » est appelée **floorlet**.

▪ **Evaluation des caps et des floors dans le modèle de Black (1976) :**

Le modèle de Black, facile à exploiter et apparu avant les modèles de taux, reste la référence (pour les professionnels du marché) en matière d'évaluation et de couverture des produits standards comme les « caps » (« floors »). Il assure aussi la positivité des taux.

L'idée est de transformer les flux des « caplets » (« floorlets ») afin de leurs appliquer le modèle de Black utilisé pour l'évaluation d'options sur contrat à terme, en particulier les options européennes ; puisque nous savons qu'un « caplet » peut s'apparenter à de telles options.

Il convient alors de revenir sur la **formule de Black** appliquée à une option européenne sur une variable sous jacente de valeur V .

Définissons les notations suivantes :

T	: date d'échéance de l'option ou durée de vie de l'option
F	: prix « forward » de V (pour un contrat à terme sous jacent d'échéance T)
F_t	: valeur de F à la date t
E	: prix d'exercice de l'option
σ	: volatilité de F (ou volatilité de l'actif sous-jacent)
$B(t, T)$: prix en date t d'un zéro-coupon de maturité T
$N(d)$: la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Voici la formule donnant le **prix d'un call en date t** ⁶⁷:

$$C = B(t, T) [FN(d_1) - EN(d_2)] \quad (\text{II.5})$$

avec :

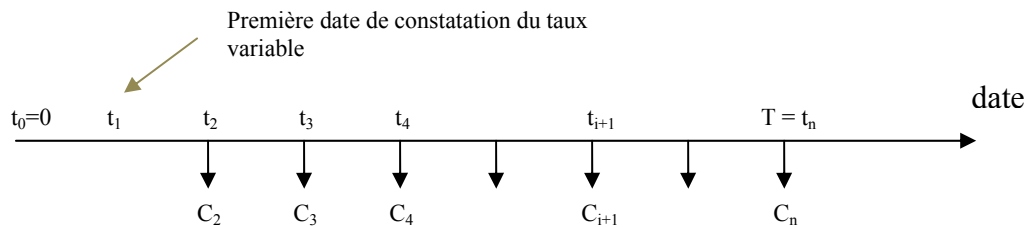
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_t}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

⁶⁶ $\frac{1}{1+\tau T_v(t)}$ est la valeur en t_i d'un ZC payant 1 en t_{i+1} .

⁶⁷ La formule du prix du « put » en t est : $C = B(t, T) [F(N(d_1) - 1) - E(N(d_2) - 1)]$

Remarque : cette formule reste la même selon que F_t soit un prix « forward » ou un prix « futures »⁶⁸. L'hypothèse importante faite ici est que les prix « futures » ou « forward » suivent des lois log-normales.

Evaluons à présent le « cap » prédéfini de durée T années, de nominal L euros, de taux d'exercice E , et dont le taux de référence est le taux Euribor en t de maturité τ noté $T_v(t, \tau)$.



Rappelons qu'à chaque date t_i de constatation, le détenteur du « cap » touche le flux du « caplet » C_{i+1} en date t_{i+1} suivant :

$$C_{i+1} = L\tau \text{Max}[0; T_v(t_i) - E]$$

Le prix du cap à la date t est donné par la relation suivante (somme des $n-1$ « caplets ») :

$$CAP_t = \sum_{i=1}^{n-1} \text{Caplet}_t^{i+1} \quad (\text{II.6})$$

Le « caplet » est la valeur d'un « cap » donné (dont la durée de vie est représenté par un intervalle de temps $[0, T]$) sur une sous période contractuelle $[t_i, t_{i+1}]$. Il s'agit alors de transformer le flux du « caplet » afin de pouvoir lui appliquer la formule de Black précédente.

Les formules de Black **d'évaluation d'options sur contrats « forward »** nous permettent d'évaluer en date t , les valeurs des « caplets » des sous périodes $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\boxed{\text{Caplet}_t^{i+1} = L\tau B(t, t_{i+1}) \cdot \left(F(t, t_i, t_{i+1}) N(d_{i+1}) - EN(d_{i+1} - \sigma_{i+1} \sqrt{t_i - t}) \right)} \quad (\text{II.7})$$

Où :

- ❖ $F(t, t_i, t_{i+1})$ est le taux « forward » (relatif au taux Euribor $T_v(t, \tau)$) vu en t , démarrant en t_i d'échéance t_{i+1} . C'est le sous-jacent du caplet lié au flux C_{i+1} reçu en t_{i+1} .

$$\text{❖ } d_{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{F(t, t_i, t_{i+1})}{E}\right) + \frac{1}{2}\sigma_{i+1}^2(t_i - t)}{\sigma_{i+1}\sqrt{t_i - t}}$$

- ❖ σ_{i+1} est la volatilité du taux « forward » sous jacent $F(t, t_i, t_{i+1})$. Elle est couramment appelée **volatilité du caplet**.

⁶⁸ Cf. Annexe 10.3 : Glossaire financier.

Remarque : le premier « caplet » correspondant au flux C_1 n'est pas pris en compte dans le calcul du « cap » s'il est signé en t_0 car le taux variable $T_v(t_0, \tau)$ de maturité τ est déjà connu.

De façon similaire, le prix du « floor » de mêmes caractéristiques vaut en date t :

$$Floor_t = \sum_{i=1}^{n-1} Floorlet_t^{i+1} \quad (II.8)$$

Avec, selon la formule de Black,

$$Floorlet_t^{i+1} = L\tau B(t, t_{i+1}) \cdot \left(-F(t, t_i, t_{i+1})N(-d_{i+1}) + EN(-d_{i+1} + \sigma_{i+1}\sqrt{t_i - t}) \right) \quad (II.9)$$

Où σ_{i+1} est, à présent, la volatilité du « floorlet » sur le taux variable Euribor de maturité τ .

Remarque :

Il est important de préciser que dans le modèle de Black, la variable diffusée est le taux forward linéaire $F(t, t_i, t_{i+1})$. Ce taux est une martingale sous la probabilité forward neutre $Q_{t_{i+1}}$ ⁶⁹. Ce taux suit la dynamique suivante : $dF(t, t_i, t_{i+1}) = \sigma_{i+1}F(t, t_i, t_{i+1})dW_t$; avec dW_t le mouvement brownien sous la probabilité forward neutre $Q_{t_{i+1}}$.

▪ Applications pratiques

Afin d'évaluer de façon théorique le prix de différents « caps » de marchés, nous avons implémenté une fonction VBA qui utilise les formules précédentes donnant le prix d'un « cap » dans le modèle de Black. Ces évaluations, comparées à des résultats de « calculateurs Bloomberg », serviront de bases comparatives aux prix des mêmes « caps » obtenus à l'aide de la méthode ACP, des cubes de diffusions et des différents modèles de taux implémentés dans la suite du mémoire.

A partir de la courbe de taux zéro-coupon du 12 mai 2005, reconstruite dans la première partie, nous calculons à cette date, les prix de « caps » de taux de référence l'Euribor 3 mois, de « strike » 2 %, et de durées 3, 4 et 5 ans. Les fréquences de constatation sont trimestrielles.

La fonction **Cap théorique** va calculer les facteurs d'actualisation issus de la courbe de taux ZC initiale, en déduire les taux « forward » associés, et appliquer la formule de Black pour évaluer les « caplets » sur chaque intervalle de temps trimestriel pendant la durée du cap. La somme de ces « caplets » donnera le prix du cap. Pour cela, il faut connaître les volatilités de Black des « caplets » sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$; nous les avons récupérées sur Bloomberg :

Temps (en années)	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
Volatilité du caplet	13,95%	16,50%	19,73%	20,49%	20,49%	21,51%	22,72%	23,01%	23,00%	22,91%	22,78%	22,76%

Tableau 2 : volatilités de Black de « caplets »

⁶⁹ Pour une démonstration détaillée de ce résultat, nous pouvons nous référer à l'ouvrage de P. Priaulet et L. Martellini : « Produits de taux d'intérêts. Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture » (2000), pages 206-207.

Voici les résultats obtenus, comparés à des prix Bloomberg :

Durées caps (en années)	3	4	5
Prix caps calculés	1,59%	2,74%	4,12%
Prix caps Bloomberg	1,60%	2,75%	4,13%

Les résultats obtenus sont très proches de ceux du calculateur de « caps » de Bloomberg.

Pour conclure cette application, il convient de rappeler les limites en termes de précision de l'évaluation de telles options à l'aide des formules de Black. Ce modèle reste néanmoins une référence malgré des hypothèses simplifiées (constance de la volatilité du seul sous-jacent sur l'intervalle de temps de chaque « caplet », aucune hypothèse de tendance sur l'évolution stochastique de la courbe des taux).

c. Evaluations de « caps » et de « floors » avec le cube de diffusion

Comme pour valoriser le swap TF contre Euribor 3M à l'aide du cube de diffusion de Monte Carlo, nous allons « pricer » un « cap » et un « floor » en implémentant la fonction VBA *ValoMCOptions*.

De la même façon, cette fonction va s'appuyer sur les résultats issus de l'ACP et d'une diffusion de la courbe ZC spot. A partir d'un univers de Monte-Carlo généré au préalable (taux ZC projetés sur un horizon H pour différentes maturités et pour un grand nombre de tirages), la fonction va évaluer la valeur du cap (floor) en date t .

La formule d'évaluation du cap (ou du floor) va s'écrire sous la forme suivante :

$$cap_{numéro} = \sum_{\text{dates } t}^d \max(0 ; \text{CubeMC}(t, ech, numéro) - E) \times \tau \times DF_t$$

Avec :

- E le « *strike* » du cap
- $\text{CubeMC}(t, ech, numéro)$ est le *taux ZC projeté* aux dates t , d'échéance ech , pour le scénario de Monte Carlo « *numéro* ».
- d correspond à la *durée* du contrat du cap
- τ est le *ténon* du cap

La fréquence de constatation du taux variable de référence du cap va déterminer les dates t . La variable ech représente la maturité de ce taux variable de référence.

La formule ci-dessus va évaluer le cap selon *une* trajectoire de Monte Carlo (« *numéro* »).

Pour chaque trajectoire de Monte-Carlo (appelée scénario), nous allons calculer le « cap » correspondant ; afin de faire une moyenne des prix de « caps » sur les X scénarii.

$$CAP_{moyen} = \frac{1}{X} \sum_{numéro=1}^X cap_{numéro}$$

Nous allons calculer à présent un « cap » (resp. « floor ») de durée 5 ans, de taux d'exercice 2 % (resp. 3 %). Les autres caractéristiques de ces options sont les mêmes que pour les exemples précédents. Nous allons effectuer 5000 chemins de Monte Carlo.

Voici les résultats obtenus :

$CAP_{moyen} = 1,23\%$;	$FLOOR_{moyen} = 5,87\%$
------------------------	---	--------------------------

Section 4.3 Conclusion sur l'ACP dans la valorisation de produits dérivés de taux

Cette partie concernant notamment la méthode statistique de l'analyse en composantes principales se voulait être l'*introduction idéale* à l'étude des modèles stochastiques de taux d'intérêts. Il est indispensable d'employer une telle méthode afin d'obtenir un nombre raisonnable de variables non corrélées et fortement explicatives des déformations de la courbe de taux d'intérêts. Dans la suite, nous réutiliserons cette méthode pour *réduire la dimension des processus de Wiener du terme de diffusion* des modèles de taux. Cette partie, bien que peu satisfaisante au niveau des résultats, a permis de cadrer le travail et la démarche suivie dans la suite du mémoire ; à savoir, définir, générer et stocker les différentes trajectoires futurs de taux court et en déduire (par Monte Carlo notamment) les évaluations de produits dérivés standards de taux.

Nous allons, à présent, affiner l'étude sur le « drift » et « la volatilité » des dynamiques stochastiques de taux d'intérêt courts postulés dans les différents types de modèles. En effet, ce n'était pas l'objet d'attention particulière de cette dernière partie ; l'idée était plutôt d'introduire un raisonnement et de préparer l'étude à venir des modèles *d'absence d'opportunités d'arbitrage* d'une part, et *de marché* de l'autre (respectivement de Hull&White et de BGM).

Nous allons passer de l'univers historique à l'univers dit « risque-neutre » des modèles de taux.

Enfin, nous avons pu également définir les différents produits simples de taux d'intérêts (« swaps », « caps » et « floors »), ainsi que les très usitées formules de Black de 1976.

Partie III. Présentations et implémentations de modèles de taux stochastiques dans les univers risque-neutre et forward-neutre

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser aux modèles fondés sur l'absence d'opportunités d'arbitrage notés AOA⁷⁰. Rappelons que ceux-ci sont construits en cohérence avec la structure par terme des taux d'intérêts (STTI), contrairement aux modèles d'équilibre comme Vasicek et Cox-Ingersoll-Ross. Un modèle AOA utilise la structure par terme des taux d'intérêts (par la suite, notre modèle aura besoin en « entrée » de la courbe des taux zéro-coupon à la date zéro). De plus, le terme correspondant à la dérive dans la dynamique du taux court $r(t)$ va généralement dépendre du temps. En effet, la courbe de taux initiale sera déterminante de la trajectoire suivie par le taux court dans le futur : une forte pente « positive » de la courbe entre deux maturités va se traduire par une dérive « positive » élevée du taux court entre ces deux dates, et inversement.

Bien que le modèle de Ho et Lee de 1986 fut le premier modèle AOA, nous avons choisi d'étudier le modèle de Hull et White, publié en 1990 par J. Hull et A. White, extension des modèles précédents. Ce modèle est un bon compromis entre simplicité et efficacité pratique. Il a l'avantage, contrairement à HJM, d'être markovien et donc de pouvoir être représenté par un arbre « recombinaison ».

Dans cette partie, nous allons tout d'abord présenter théoriquement la diffusion du modèle de Hull et White à un facteur de risque ainsi que, son implémentation pratique à l'aide d'un arbre « recombinaison » de taux, son calibrage sur des produits dérivés de taux et ses limites connues. Nous évoquerons brièvement les extensions directes de ce modèle, comme les modèles de Black-Karasinski, Vasicek « étendu » et Vasicek « généralisé ».

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude et l'implémentation d'un autre type de modèle : le modèle de marché de BGM. Ce type de modèle utilise, contrairement aux précédents, des données de marchés directement observables : les taux « forward ». Ils conviennent parfaitement à l'évaluation de produits de taux comme les « caps » et les « floors ». Nous allons donc également le mettre en œuvre informatiquement afin de « pricer » par le biais des simulations de Monte-Carlo ces instruments dérivés de taux. Nous accorderons une attention particulière aux fonctions de volatilités liées à ce modèle ainsi qu'à une méthode très intéressante concernant la corrélation entre les taux « forward » ; et plus précisément la réduction de la dimension du mouvement Brownien du terme de diffusion.

Enfin, nous terminerons cette partie par une rapide analyse des avantages et inconvénients du modèle de BGM.

⁷⁰ Le terme anglais pour ces modèles est : « No Arbitrage Term Structure Model ».

Chapitre 1. Modèle AOA à un facteur : Hull & White

Section 1.1 Présentation théorique et extensions

a. Introduction

Le modèle de Hull et White⁷¹ s'appuie sur le modèle théorique de « Vasicek généralisé ».

Le modèle généralisé de H&W est un modèle où une fonction f du taux d'intérêt court r (taux spot ou taux comptant) obéit au processus gaussien de diffusion de la forme suivante :

$$\boxed{df(r) = (\theta(t) - a(t)f(r))dt + \sigma(t)dz} \quad (\text{III.1})$$

Par simplification, nous allons considérer les paramètres de volatilité $a(t)$ et $\sigma(t)$ comme *constants*.

A noter que, lorsque $f(r) = r$ et a non nul, nous retrouvons le modèle originel de H&W⁷².

Nous allons donc dans ce chapitre étudier et implémenter le modèle originel de H&W à un facteur qui postule que, dans l'*univers risque neutre*, le taux d'intérêt court suit la dynamique stochastique suivante :

$$\boxed{dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz = \mu dt + \sigma dz} \quad (\text{III.2})$$

Où :

- ❖ $\theta(t)$ est une fonction positive dépendant du temps, choisie pour « coller » à la structure par terme des taux d'intérêts. Ce paramètre est appelé le « drift » ou la « dérive ». Nous l'explicitons par la suite⁷³.
- ❖ a , une constante strictement positive, quantifiant la vitesse de retour sur la valeur moyenne du taux. Appelé « mean reverting », ce paramètre mesure la force de rappel du taux spot vers sa moyenne.
- ❖ σ , une constante strictement positive, représentant le paramètre de volatilité de la diffusion.

Nous rappelons, d'une part, que dr correspond à l'accroissement du taux court r pendant l'intervalle de temps dt ; et que, d'autre part, dz correspond au *processus de Wiener*⁷⁴.

L'hypothèse de la constance des paramètres a et σ est une simplification du modèle et l'implémentation pratique se fera sous celle-ci.

Il est important de préciser que les taux d'intérêts générés par ce modèle sont normalement distribués ; et cela pour toutes les maturités⁷⁵.

⁷¹ Noté dans toute la suite : « H&W ».

⁷² HULL J., WHITE A. (1990) Pricing Interest Rate Derivatives Securities.

⁷³ Cf. Annexe 8.1 : Modèle de H&W à un facteur – Démonstrations.

⁷⁴ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

Remarque :

- ❖ Lorsque, dans la dynamique générale, nous avons $f(r) = r$ et a nul, alors le modèle considéré est le modèle AOA classique de Ho et Lee.
- ❖ Le taux court r qui suit le processus de H&W est une variable aléatoire gaussienne et peut prendre des *valeurs négatives*. C'est une des limites principales du modèle. Par la suite, nous évoquerons les solutions de contournement de ce problème.
- ❖ Par analogie avec $\theta(t)$, calibrée pour que le modèle s'ajuste à la courbe des taux ZC initiale, les paramètres a et σ sont calibrés sur les prix de marchés d'options de taux d'intérêts. Ce calibrage sera effectué, dans cette étude, sur des « jeux » de « caps » et de « floors » de marché.

b. Analyse du processus stochastique sous-jacent

Dans cette sous-section, nous avons repris la démonstration de F. Quittard-Pinon explicitée dans l'ouvrage « Marchés des Capitaux et Théorie Financière » (2003) ; afin d'évaluer, à l'aide de modèles d'équilibre inter temporel, les obligations zéro-coupon.

A partir de l'équation originel de H&W pour le taux court r , *sous l'hypothèse d'un marché parfait*⁷⁶, et en utilisant la *théorie de l'arbitrage*, nous allons retrouver l'équation différentielle vérifiée par le prix d'une obligation zéro-coupon à une date t .

Soit $P(t, s, r)$ le prix en date t d'un ZC d'échéance s , dépendant du taux d'intérêt spot r .

Le taux court suit la diffusion suivante : $dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz = \mu dt + \sigma dz$

Notons

	P_t la dérivée partielle $\frac{\delta P(t, s, r)}{\delta t}$ de $P(t, s, r)$ par rapport à t
	P_r la dérivée partielle $\frac{\delta P(t, s, r)}{\delta r}$ de $P(t, s, r)$ par rapport à r
	P_{rr} la dérivée seconde $\frac{\partial^2 P(t, s, r)}{\partial r^2}$ de $P(t, s, r)$ par rapport à r

Nous adopterons cette notation indicielle pour toutes les dérivées partielles.

Ainsi, par le lemme d'Itô⁷⁷, P vérifie :

$$dP = \left(P_t + \mu P_r + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} \right) dt + \sigma P_r dz$$

⁷⁵ Nous allons le montrer par la suite en annexe 8.

⁷⁶ Cf. Annexe 10.3 : Glossaire financier.

⁷⁷ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

Donc,

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{P} \left(P_t + \mu P_r + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} \right) dt + \frac{1}{P} \sigma P_r dz = \mu(t, s, r) dt - \sigma(t, s, r) dz$$

Avec,

$$\boxed{\begin{aligned} \mu(t, s, r) &= \frac{1}{P} \left(P_t + (\theta(t) - ar) P_r + \frac{1}{2} \sigma^2 P_{rr} \right) \\ \sigma(t, s, r) &= -\frac{1}{P} \sigma P_r \end{aligned}}$$

Soit W le portefeuille obtenu en date t , en vendant n_1 obligations ZC d'échéance s_1 notées P_1 et en achetant n_2 obligations ZC d'échéance s_2 notées P_2 : $W = n_2 P_2 - n_1 P_1$

Le portefeuille étant autofinancé⁷⁸, il vérifie : $dW = n_2 dP_2 - n_1 dP_1$

Ainsi, en posant $w_1 = \frac{n_1 P_1}{W}$ et $w_2 = \frac{n_2 P_2}{W}$, on a :

$$\frac{dW}{W} = w_2 \frac{dP_2}{P_2} - w_1 \frac{dP_1}{P_1}$$

En définissant $\mu(t, s_i, r) = \mu_i$ et $\sigma(t, s_i, r) = \sigma_i$ pour $i=1,2$; le portefeuille vérifie l'équation :

$$\frac{dW}{W} = (w_2 \mu_2 - w_1 \mu_1) dt + (w_1 \sigma_1 - w_2 \sigma_2) dz$$

En considérant alors les proportions $w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$ et $w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}$, afin d'annuler le terme aléatoire en dz , nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{dW}{W} = (w_2 \mu_2 - w_1 \mu_1) dt = r(t) dt$$

En effet, l'absence d'opportunité d'arbitrage dans un marché parfait assure à un portefeuille non risqué de rapporter le taux sans risque r .

Nous en déduisons donc la relation suivante : $\boxed{\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}}$.

Cette relation étant vérifiée quel que soit le choix des échéances s_i , la valeur $\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$ est donc indépendante de l'échéance s de l'obligation ZC.

⁷⁸ Cf. Annexe 10.3 : Glossaire financier.

Nous notons R_m , le processus appelé « prime de risque » ou « prix de marché du risque »⁷⁹:

$$R_m(t, r) = \frac{\mu(t, s, r) - r(t)}{\sigma(t, s, r)}$$

En remplaçant le « drift » $\mu(t, s, r)$ et la volatilité $\sigma(t, s, r)$ par leurs valeurs encadrées page précédente, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$P_t + (\theta(t) - ar + R_m(t, r)\sigma)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} - r(t)P = 0 \quad (\text{III.3})$$

Rappelons les hypothèses sur la prime de risque alors faites par H&W dans leurs articles :

- R_m dépend uniquement du temps
- R_m est une fonction bornée sur tout intervalle $[0, T]$, $T > 0$

Nous écrivons: $P_t + (\phi(t) - ar)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} - r(t)P = 0$ avec $\phi(t) = \theta(t) + R_m(t, r)\sigma$ (III.4)

Le prix d'un ZC vérifie donc l'équation différentielle ci-dessus.

Si nous reprenons la notation classique $P(t, T)$ d'une obligation ZC en date t d'échéance T , vue dans la première partie ; nous cherchons alors une solution de la forme $P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$ qui vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} A_t e^{-B(t, T)r(t)} - r B_t P - B P (\phi(t) - ar) + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 P - r P &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(A_t - B A \phi(t) + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 A \right) e^{-B(t, T)r(t)} + r P (-B_t + aB - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Avec la condition limite $P(T, T) = A(T, T)e^{-B(T, T)r} = 1$ sur le prix d'un ZC.

Ce qui implique les conditions aux limites : $\begin{cases} B(T, T) = 0 \\ A(T, T) = 1 \end{cases}$

Afin d'annuler les deux termes de l'équation différentielle précédente, nous avons le système en $B(t, T)$ suivant à résoudre :

$$\begin{cases} B_t - aB + 1 = 0 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est : $B(t, T) = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}$

⁷⁹ Une explication précise de la prime de risque se trouve en annexe 10.1.

Il reste à résoudre l'équation différentielle en $A(t, T)$ suivante :

$$\begin{cases} A_t - BA\phi(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 A = 0 \\ A(T, T) = 1 \end{cases}$$

D'après la résolution faite par H&W dans leur article original, la solution explicite pour le prix des obligations zéro-coupon est:

$$A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(B(t, T)F(0, t) - \sigma^2 B(t, T)^2 \frac{(1 - e^{-2at})}{4a} \right)$$

Où $F(0, t) = \frac{-\partial \ln(P(0, t))}{\partial t}$ est le **taux « forward » instantané**⁸⁰, déterminé à la date initiale et démarrant en t .

Ainsi, les prix des obligations zéro-coupon à la date future t , de maturité T sont donnés par :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad \text{(III.5)}$$

Où A et B sont définis par :

- $B(t, T) = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}$
- $A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(B(t, T)F(0, t) - \sigma^2 B(t, T)^2 \frac{(1 - e^{-2at})}{4a} \right)$
 $= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} F(0, t) - \sigma^2 \frac{(e^{2at} - 1)(e^{-aT} - e^{-at})^2}{4a^3} \right)$

Ainsi, comme $B(t, T)$ est positif, **le prix des obligations zéro-coupon dans le modèle de H&W est décroissant du taux court $r(t)$** . Montrons à présent que la variable aléatoire du prix d'une obligation ZC suit une loi log-normale.

Rappelons l'expression de $\frac{dP}{P}$ explicitée précédemment :

$$\frac{dP}{P} = \mu(t, T)dt - \sigma(t, T)dz = \mu(t, T)dt + \frac{\sigma}{P}P_r dz$$

D'après la formule du prix du ZC, par dérivation, nous pouvons écrire :

$$dP = P\mu(t, T)dt - P\sigma B(t, T)dz$$

⁸⁰ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

Posons $X = \ln P$ et appliquons le lemme d'îto à cette fonction de P ; nous obtenons la dynamique qui suit :

$$dX = \left(\mu(t, T) - \frac{1}{2} \sigma^2 B(t, T)^2 \right) dt + \sigma B(t, T) dz$$

Sachant que X_t est la dérivée partielle de X par rapport à t ; ainsi par intégration entre 0 et t :

$$X(t) = \ln(P(0)) + \int_0^t \left(\mu(u, T) - \frac{1}{2} \sigma^2 B(u, T)^2 \right) du + \sigma B(t, T) z(t)$$

La variable aléatoire X est alors normalement distribuée, et par conséquent le prix $P(t, T)$ d'une obligation zéro-coupon est **log-normalement distribuée**.

En supposant que $\sigma(t, T, r) = \sigma(t, T) = \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$ i.e. la volatilité du rendement instantané du ZC est déterministe et a une structure exponentielle⁸¹.

Afin d'avoir une expression du taux court $r(t)$, il convient de préciser que, sous cette hypothèse, la fonction $\theta(t)$ se déduit de la structure initiale par terme des taux d'intérêts⁸² et s'écrit analytiquement sous la forme suivante :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\delta F(0, t)}{\delta t} + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})} \quad \text{(III.6)}$$

En négligeant le dernier terme, très petit, d'après la dynamique du taux court postulé précédemment, la dérive de son processus peut donc s'écrire : $\frac{\delta F(0, t)}{\delta t} + a(F(0, t) - r)$.

Cela signifie que le taux court, en moyenne, suit la pente de la courbe des taux « forward » instantanés.

Ainsi, nous en déduisons: $dr(t) = \left(\frac{\delta F(0, t)}{\delta t} + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) - ar(t) \right) dt + \sigma dz$

Enfin, le taux court s'écrit sous la forme⁸³ :

$$\boxed{r(t) = F(0, t) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dz(u) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2} \quad \text{(III.7)}$$

⁸¹ EL KAROUI, ROCHET J.C. (1989) *A pricing formulator Options on Coupon-Bonds*.

⁸² Cf. Annexe 8.1 : Modèle de H&W à un facteur – Démonstrations.

⁸³ Cf. Annexe 8.1 : Modèle de H&W à un facteur – Démonstrations.

c. Extensions

Dans ce paragraphe, nous allons simplement évoquer brièvement d'autres modèles AOA très utilisés par les praticiens, en explicitant leurs processus stochastiques suivis ainsi que leurs avantages et limites.

- **Extension au modèle généralisé de Black Karasinski**

Nous rappelons la dynamique du modèle généralisé : $df(r) = (\theta(t) - a(t)f(r))dt + \sigma(t)dz$

Dans le cas où $f(r) = \log(r)$, nous retrouvons le processus du modèle de Black-Karasinski⁸⁴ (1991) dit « modèle BK ».

Le processus stochastique alors suivi par les taux d'intérêt est l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{d \log(r) = (\theta(t) - a(t) \log(r)) dt + \sigma(t) dz} \quad \text{(III.8)}$$

Ce modèle **log-normal** est un moyen d'obtenir des **taux courts positifs** de façon certaine. Seuls les taux courts suivent une distribution log-normale. Pour les maturités longues, les taux sont approximativement log-normalement distribués.

Les paramètres $\theta(t)$ de « calage avec la STTI », $a(t)$ de vitesse de retour à la moyenne, $\sigma(t)$ de volatilité locale du logarithme du taux court $r(t)$, **dépendent du temps**. Ainsi le modèle admet une double compatibilité : avec la STTI et avec la courbe de volatilité initiale des ZC ou des « caplets ». Ces paramètres sont choisis pour assurer cette cohérence.

L'idée principale est de récupérer le maximum d'informations sur les marchés financiers afin de mieux prévoir l'évolution des taux courts. L'inconvénient demeure dans l'hypothèse à faire sur l'évolution de la volatilité qui provoque parfois des écarts de valorisations.

L'implémentation pratique de ce modèle par H&W suit une démarche très similaire à celle dont nous allons nous intéresser pour le modèle originel. Précisons également que ce modèle est probablement le plus utilisé actuellement dans les services de gestion actif-passif bancaires⁸⁵.

- **Le modèle de « Vasicek étendu »**

Nous allons, dans ce paragraphe, rappeler uniquement la dynamique de ce modèle. Hull&White réalisent une étude détaillée de ce processus dans leur article originel.

$$\boxed{dr = (\theta(t) - a(t)(b - r)) dt + \sigma(t) dz} \quad \text{(III.9)}$$

⁸⁴ BLACK, KARASINSKI (1981) *Bond and Option pricing when Short Rates are lognormal*.

⁸⁵ D'après le progiciel américain d'ALM appelé QRM (Quantitative Risk Manager), le modèle BK est le modèle le plus utilisé.

Une résolution analogue d'une équation différentielle similaire conduit à la valeur d'un zéro-coupon. **Les paramètres du modèle sont également dépendants du temps.**

Ce modèle souffre aussi d'une paramétrisation trop importante, et peut amener des erreurs de modélisation importantes. Le fait, comme pour le modèle précédent, qu'il doit se calibrer sur la structure de volatilité initiale y contribue largement.

▪ **Le modèle de H&W à deux facteurs ou « Vasicek généralisé »**

Ce modèle s'inscrit dans le cadre classique du modèle de HJM. C'est un modèle à deux facteurs markovien : le taux court est markovien par rapport à deux variables d'état.

Rappelons que, dans le modèle de H&W à un facteur, la dynamique du taux court sous la probabilité neutre au risque s'écrit : $dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dz(t)$

Pour expliciter l'effet de retour à la moyenne, l'équation précédente peut être réécrite de la manière suivante : $dr(t) = a \left(\frac{\theta(t)}{a} - r(t) \right) dt + \sigma dz(t)$

On observe un retour à la moyenne de niveau $\frac{\theta(t)}{a}$ avec une force de rappel égale à a .

Le modèle H&W à deux facteurs intègre une composante stochastique supplémentaire $u(t)$ au niveau du terme de retour à la moyenne. Cette composante est représentative du deuxième facteur de risque. Il est alors décrit par les dynamiques stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} dr(t) = (\theta(t) + u(t) - ar(t))dt + \sigma_r dz_r(t) \\ du(t) = -bu(t)dt + \sigma_u dz_u(t) \\ E(dz_r(t)dz_u(t)) = \rho dt \end{cases} \quad \text{(III.10)}$$

Avec :

- ❖ $r(t)$ le taux court du modèle
- ❖ a, b, σ_r, σ_u les paramètres de volatilité dans la formulation de Hull and White
- ❖ $\theta(t)$ le paramètre de « drift »
- ❖ z_r et z_u les mouvements browniens standard sous la probabilité neutre aux risques relatifs au taux court $r(t)$ et à la composante stochastique $u(t)$
- ❖ ρ le coefficient de corrélation entre les mouvements browniens z_r et z_u des deux facteurs de risque

Ce modèle généralisé fournit des formules explicites pour les prix des zéro-coupon, aux différentes dates futures et pour différentes maturités. Ces prix sont exprimés par rapport aux deux variables d'état.

Le prix de l'obligation zéro-coupon $P(t, T)$, à l'instant t , de maturité T , est donné par :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{(-B(t, T) \times r(t) - C(t, T)u(t))} \quad (\text{III.11})$$

Où A , B et C sont définis par :

- L'expression de $A(t, T)$ est fournie en Annexe 8.1
- $B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$ (même expression que dans la formule III.5)
- $C(t, T) = \frac{e^{-a(T-t)}}{a(a-b)} - \frac{e^{-b(T-t)}}{b(a-b)} + \frac{1}{ab}$

Les prix des produits dérivés de taux standards sont obtenus par des formules analytiques, ce qui simplifie le calage du modèle aux données de marchés.

L'intérêt de ce modèle se retrouve principalement dans son *réalisme*, sa *robustesse* et sa *facilité d'implémentation*. En revanche, le calibrage du modèle par l'optimisation des paramètres de celui-ci reste délicat. C'est un problème complexe : il faut minimiser une fonction non linéaire de cinq paramètres.

Pour conclure, nous pouvons dire que ce modèle répond bien aux nombreuses caractéristiques que doit posséder un « bon modèle de taux » (cf. Section 4.3 de la partie I). De nombreux établissements bancaires l'implémentent. Néanmoins, nous n'allons pas l'étudier plus en détail dans notre travail.

Remarque :

Le modèle est décrit sous la probabilité neutre au risque. Cependant, il est clair que l'univers « risque neutre » n'est pas forcément celui dans lequel un établissement bancaire souhaite se placer pour projeter ses marges d'intérêts et établir une stratégie à long terme d'allocation d'actifs ou de couverture. Il est préférable de se placer dans l'univers historique où le rendement instantané espéré des différentes classes d'actifs est différent du taux court instantané.

En pratique, le passage de l'univers « risque neutre » à l'univers historique se traduit par le rajout d'un terme de dérive supplémentaire. Ce terme est calibré de manière à générer une certaine prime de risque (i.e. l'excès de rendement des OAT par rapport au cash).

Pour expliciter cette prime de risque en fonction du taux court, il est plus commode de formuler la dynamique précédente du modèle en termes de taux « forward » instantanés ; pour l'exprimer ensuite en fonction du taux court. Nous n'allons pas développer cette méthode ici.

Section 1.2 Implémentation du modèle de H&W

a. Méthode d'implémentation du modèle à un facteur à l'aide d'arbres recombinaunts

▪ Introduction

Malgré l'existence d'une solution analytique pour le prix des obligations ZC dans le modèle de H&W (cf. section 1.1.b), il est parfois plus simple, pour représenter les modèles AOA comme celui-ci, d'utiliser des approximations numériques.

Dans ce paragraphe, nous allons décrire comment cette classe de modèles de taux s'implémente à l'aide d'arbres de taux d'intérêts, et présenter la méthode de H&W de **construction d'un arbre « recombinaunt » de taux** (également appelé « arbre trinomial »). Cette méthode est très efficace pour générer l'évolution des taux d'intérêts issus des modèles AOA à un seul facteur. H&W ont proposé une technique en deux étapes de construction de tels arbres représentant un large panel de dynamiques de taux courts. Nous allons commenter et adapter leur méthode au processus de H&W décrit dans la section 1.1.

Avant la description proprement dite de la méthode d'implémentation en deux temps, il est nécessaire de faire un rappel sur les arbres de taux d'intérêts. Nous rappelons également que l'implémentation du modèle a été faite sous VBA.

Enfin, le choix des paramètres se fera lors du calibrage du modèle aux données de marchés (sur les produits dérivés de taux) issues du Terminal de données Bloomberg.

▪ Les arbres de taux d'intérêts

Un arbre de taux d'intérêt s'assimile à une **représentation en temps discret du processus stochastique du taux court**. Les taux représentés sur l'arbre sont des taux d'horizon le pas de temps Δt choisi. Le taux court du modèle en temps continu s'identifie alors avec le taux zéro-coupon d'horizon Δt , noté par la suite $R(t)$ au temps t . Chaque pas de l'arbre représente un point t_i dans le temps ; Le pas de temps Δt vaut $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. On discrétise alors le temps en iso périodes de durée Δt . Ainsi, chaque nœud (i, j) de l'arbre de taux correspond au temps t_i et à la position relative j dans l'arbre du taux $R(t_i)$.

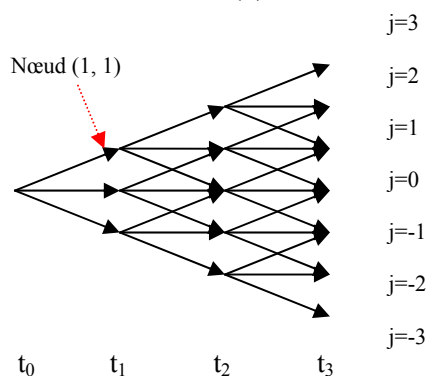


Figure 17 : exemple d'arbre de taux d'intérêts

En résumé, nous divisons respectivement les intervalles de temps et d'espace en sous intervalles égaux de taille Δt et ΔR . ΔR étant l'accroissement du taux $R(t)$ de l'arbre entre la date t et $t + \Delta t$.

Le schéma précédent (figure 17) présente une arborescence standard, mais dans la pratique, il convient de définir d'autres types d'arborescences. Les façons de définir les successeurs d'un nœud peuvent être différentes. Voici deux autres arborescences alternatives dédiées aux taux très faibles (première) et aux taux très élevés (seconde) :



Précisons à présent la version discrétisée du processus originel de H&W, pour ensuite détailler de façon très précise la construction en deux étapes de l'arbre de taux de H&W.

▪ **Processus discrétisé**

Rappelons le processus stochastique suivi par le taux court et postulé par H&W. Rappelons également que l'on a choisi d'implémenter la version simplifiée du modèle avec les paramètres a et σ constants. Nous sommes en univers risque-neutre.

$$dr = (\theta(t) - ar) dt + \sigma dz$$

Ainsi, pour construire l'arbre comme expliqué précédemment, nous discrétisons le temps en périodes constantes de durée Δt , appelée « *pas de temps* ».

Nous identifions le taux court r du modèle en temps continu et le taux zéro-coupon R d'horizon Δt de l'arbre, en temps discret. Le pas de temps doit pour cela tendre vers zéro.

Par conséquent, le taux d'intérêt $R(t)$ au temps t suit la même dynamique que $r(t)$:

$$dR = (\theta(t) - aR) dt + \sigma dz$$

Notons :

- ΔR , la variable aléatoire suivant une distribution normale et représentant l'accroissement du taux $R(t)$ de l'arbre entre la date t et $t + \Delta t$
- Δz , une variable aléatoire de loi normale $N(0, \sqrt{\Delta t})$

Le processus discrétisé s'écrit alors :

$$\Delta R = (\theta(t) - aR) \Delta t + \sigma \Delta z \quad \text{(III.12)}$$

Présentons à présent les deux étapes de construction de l'arbre telles que H&W les préconisent.

▪ **Principes de construction de l'arbre recombinaut de H&W en deux étapes**

❖ Première étape :

Le but de cette première étape est de construire un arbre dont **le nœud central** $(i, 0)$ à **chaque pas de temps a la valeur zéro**.

La méthode de H&W consiste alors en la construction, dans un premier temps d'un **arbre dit « de niveau »**, pour la variable de taux R_I , qui approxime le processus suivant:

$$\boxed{dR_I = (-aR_I)dt + \sigma dz}$$

Cela implique donc de définir une nouvelle variable aléatoire R_I de taux, déduite de R en mettant à la fois $\theta(t)$ et la valeur initiale de r à zéro ($\theta(t) = 0$ pour tout t et $r(0) = 0$).

Cet arbre doit donc être compatible avec le processus discrétisé suivant:

$$\boxed{\Delta R_I = (-aR_I) \Delta t + \sigma \Delta z} \quad \text{(III.13)}$$

Où ΔR_I est une variable aléatoire correspondant à l'accroissement du taux R_I entre t et $t + \Delta t$. ΔR_I suit une loi normale d'espérance $E(\Delta R_I)$ et de variance $Var(\Delta R_I)$ explicitées par la suite. A noter que $R_I(0) = 0$.

La construction de l'arbre recombinaut pour R_I doit respecter la moyenne et l'écart type de la diffusion encadrée. H&W fixent le maillage de l'arbre (i.e. l'ensemble des valeurs possibles pour R_I) et calculent, connaissant la dynamique suivie, les probabilités de passage du taux d'un nœud du maillage à un autre.

L'hypothèse suivante est faite : le taux R_I change sur une période de temps Δt d'une valeur $j\Delta R_I^*$ (j étant un entier relatif).

Le « pas de taux » ΔR_I^* (distance verticale entre deux nœuds de l'arbre) est fixé par H&W grâce à des considérations de stabilité numérique et est égal à : $\Delta R_I^* = \sqrt{3V}$

La variance V de ΔR_I correspond à la volatilité des variations de R_I pour un pas de temps.

Ainsi, la discrétisation de la diffusion de R_I peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\Delta R_I = R_I(t + \Delta t) - R_I(t) = (-aR_I(t))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}x(t) \quad \text{où } x(t) \sim N(0,1)$$

De la dynamique de R_I , nous en déduisons l'espérance et la variance de la variable aléatoire gaussienne ΔR_I :

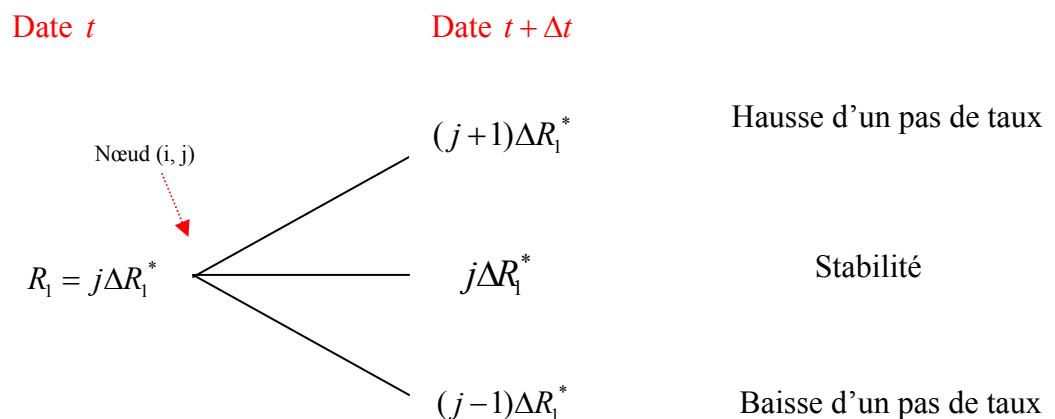
$$\boxed{\begin{aligned} E(\Delta R_I) &= (e^{-a\Delta t} - 1)R_I = MR_I \text{ avec } M = (e^{-a\Delta t} - 1) \\ V(\Delta R_I) &= V = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2a\Delta t})}{2a} \end{aligned}} \quad \text{(III.14)}$$

Voyons à présent la construction de l'arbre « trinômial » :

Pour chaque nœud de l'arbre, il faut choisir le **type de successeur** parmi différentes possibilités ; cela va déterminer la forme de l'arbre entre t et $t + \Delta t$ et également sa forme global entre $t = 0$ et l'horizon final T .

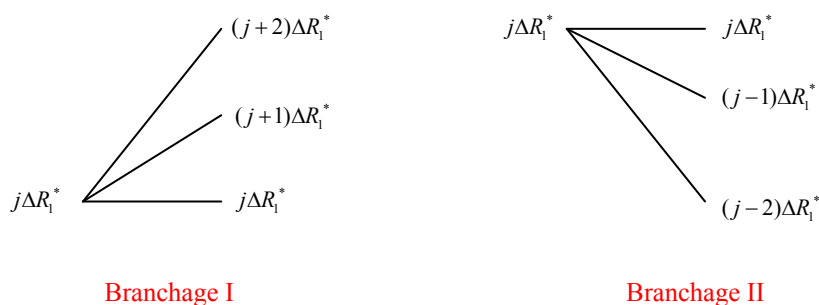
Notons (i, j) le nœud correspondant à $t = i\Delta t$ et $R_1 = j\Delta R_1^*$ (i est un entier naturel et j un entier relatif).

L'**arbre standard** (ou branchage standard) correspond à l'évolution suivante du taux R_1 de la date t à la date $t + \Delta t$.



Avant de calculer les **probabilités de transition** affectées à chacune de ces branches (hausse, stabilité et baisse), revenons sur les différents branchages proposés. Le branchage standard ci-dessus ne permet pas de « coller » parfaitement à la dynamique du taux. **Dans certains cas, les probabilités de transitions deviennent négatives.** H&W proposent donc deux autres types de branchages (notés I et II) qu'ils utilisent lorsque j est suffisamment grand en valeur absolue ; de façon à avoir des probabilités positives d'évolution du taux durant un pas de temps. Notons j_{max} (respectivement j_{min}) la valeur de j au-delà (respectivement en deçà) de laquelle on passe de l'arbre standard à l'arbre II (respectivement I).

H&W posent $j_{max} = Ent\left(\frac{0.184}{a\Delta t}\right) + 1$ et $j_{min} = -j_{max}$ afin de s'assurer de la positivité des probabilités de transition.



Pour calculer les probabilités de chaque branche de l'arbre, il faut s'intéresser à l'espérance et la variance de ΔR_t . Ces probabilités de transitions doivent être cohérentes avec la dynamique de ΔR_t .

Nous nous plaçons au temps $t = i \Delta t$ pour une valeur de $R_t = j \Delta R_t^*$ i.e. sur **le nœud (i, j) de l'arbre**. Intéressons nous aux différents types de branchage.

- Branchage standard :

Nous allons calculer les probabilités p_u , p_d et p_m relatives respectivement à une hausse, baisse et stabilité du taux court entre t et $t + \Delta t$, à partir du nœud (i, j) . A l'aide de la dynamique de ΔR_t , de la définition du branchage standard et des deux premiers moments de ΔR_t , Nous obtiendrons un système d'équations facilement solvable.

Nous avons d'une part,

$$E(\Delta R_t) = (e^{-a\Delta t} - 1)R_t = M R_t = M \times j \Delta R_t^* \quad \text{avec } M = (e^{-a\Delta t} - 1)$$

Et d'autre part,

$$E(\Delta R_t) = p_u \Delta R_t^* + p_m \cdot 0 + p_d \cdot (-\Delta R_t^*) = (p_u - p_d) \Delta R_t^*$$

Ainsi,

$$M \times j \Delta R_t^* = (p_u - p_d) \Delta R_t^*$$

D'où la **première équation**,

$$\boxed{p_u - p_d = Mj}$$

De plus, en considérant les moments d'ordre 2, nous avons :

$$\begin{cases} E(\Delta R_t^2) = p_u \cdot (1 \cdot \Delta R_t^*)^2 + p_m \cdot 0 + p_d \cdot (-1 \cdot \Delta R_t^*)^2 = (p_u + p_d) \Delta R_t^{*2} \\ V(\Delta R_t) = E(\Delta R_t^2) - E(\Delta R_t)^2 = (p_u + p_d) \Delta R_t^{*2} - (Mj)^2 \Delta R_t^{*2} = ((p_u + p_d) - (Mj)^2) \Delta R_t^{*2} \end{cases}$$

Rappelons que le pas d'espace vaut : $\Delta R_t^* = \sqrt{3V} = \sqrt{3V(\Delta R_t)}$

Nous obtenons alors la relation suivante : $V(\Delta R_t) = 3((p_u + p_d) - (Mj)^2)V(\Delta R_t)$

D'où la **seconde équation**,

$$\boxed{(p_u + p_d) - (Mj)^2 = \frac{1}{3}}$$

Nous rappelons également que, pour l'instant, le taux R_t varie de $j \Delta R_t^*$ sur une période Δt . Dans le cas standard ci-dessus, j prend donc les valeurs -1, 0 et 1.

Ainsi, en égalisant les deux dernières équations encadrées, nous obtenons la **dernière équation** du système à résoudre : $\boxed{p_u + p_d + p_m = 1}$

En résolvant le système formé des trois équations encadrées, nous en déduisons les valeurs des probabilités de transition d'un nœud à l'autre entre t et $t + \Delta t$; pour un taux R_I de niveau j ; et dans le cas standard :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_u = \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 + jM}{2} \\ p_m = \frac{2}{3} - (jM)^2 \\ p_d = \frac{1}{6} + \frac{(jM)^2 - jM}{2} \end{array} \right\}$$

- Branchages alternatifs I et II :

Par le même raisonnement, mais avec j variant de 0 à 2 pour le branchage I et de 0 à -2 pour le branchage II, nous avons les résultats suivants :

$$\text{Branchage I} \left\{ \begin{array}{l} p_u = \frac{1}{6} + \frac{-jM + (jM)^2}{2} \\ p_m = -\frac{1}{3} - (jM)^2 + 2jM \\ p_d = \frac{7}{6} + \frac{-3jM + (jM)^2}{2} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} p_u = \frac{7}{6} + \frac{3jM + (jM)^2}{2} \\ p_m = -\frac{1}{3} - (jM)^2 - 2jM \\ p_d = \frac{1}{6} + \frac{jM + (jM)^2}{2} \end{array} \right\} \text{Branchage II}$$

Avant d'entamer la présentation de la seconde étape de construction de l'arbre de taux de R , il est important de rappeler que les variables de taux d'intérêts $R(t)$ et $R_I(t)$ dépendent évidemment du temps t . Par soucis de simplification, nous les avons notés quelquefois R et R_I . Par la suite, une telle simplification d'écriture pourra se reproduire.

❖ Seconde étape :

Après avoir construit l'arbre de « niveau » de R_I , il faut en déduire *l'arbre final de R* , afin qu'il soit compatible avec la courbe des taux ZC initiale.

Soit $\alpha(t)$ la fonction correctrice pour « coller » à la STTI telle que :

$$\boxed{R(t) = R_I(t) + \alpha(t)} \quad \text{(III.15)}$$

D'après les dynamiques suivies par R et R_I , nous en déduisons la relation suivante :

$$d\alpha = (\theta(t) - a\alpha)dt$$

Remarque : α dépend du temps t ; nous notons parfois « abusivement » α au lieu de $\alpha(t)$.

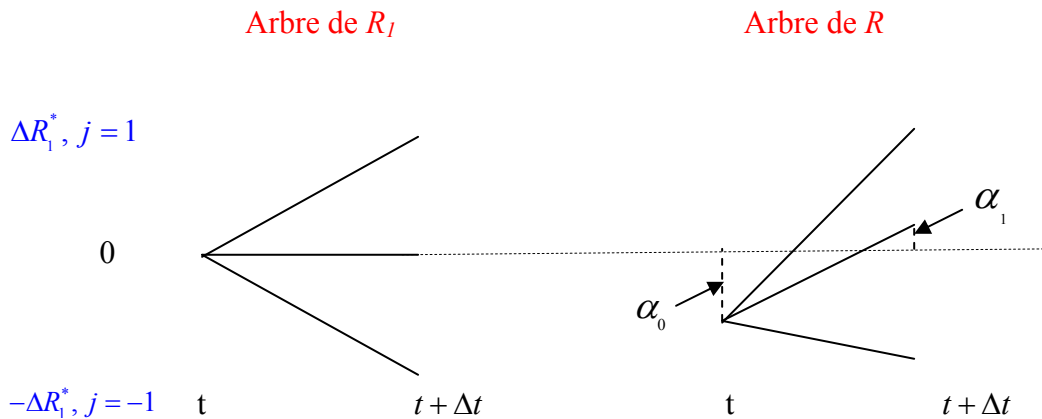
En résolvant cette équation différentielle, et à l'aide des résultats théoriques de la section 1.1, nous pouvons exprimer $\alpha(t)$ à l'aide d'une formule fermée⁸⁶ :

$$\boxed{\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2} \quad \text{(III.16)}$$

⁸⁶ Nous supposons que le paramètre de volatilité a une structure exponentielle.

En appliquant le « correctif » $\alpha(t)$, dont l'expression est explicitée précédemment, nous pouvons construire l'arbre de R , en « déplaçant » les nœuds de l'arbre de R_I . Avec les mêmes probabilités de passage dans les deux arbres, les taux de l'arbre de R aux dates $i\Delta t$ se déduisent de ceux de l'arbre de R_I aux mêmes dates par ajout de α .

De façon plus précise, l'idée de H&W est une translation, en date $t = i\Delta t$ de tous les nœuds de l'arbre de R_I d'une valeur α_i où $\alpha_i = \alpha(t)$ pour $t = i\Delta t$. A cette date, le nœud (i, j) de l'arbre de R_I avec $R_I = j\Delta R_1^*$ devient le nœud (i, j) de l'arbre de R avec $R = j\Delta R_1^* + \alpha_i$.



En date $t + \Delta t$, le taux R devient,

$$R(t + \Delta t) = R_I(t) + \Delta R_1 + \alpha_{i+1} = j\Delta R_1^* - (aj\Delta R_1^*)\Delta t + \sigma\Delta z + \alpha_{i+1}$$

Ainsi la *variation de R* suit le processus discrétisé suivant :

$$\Delta R = R(t + \Delta t) - R(t)$$

$$\Delta R = j\Delta R_1^* - (aj\Delta R_1^*)\Delta t + \sigma\Delta z + \alpha_{i+1} - j\Delta R_1^* - \alpha_i$$

$$\Delta R = -(aj\Delta R_1^*)\Delta t + \sigma\Delta z + \alpha_{i+1} - \alpha_i$$

Or la dynamique de R en t s'écrit $\Delta R = (\theta(t) - aR)\Delta t + \sigma\Delta z = (\theta(t) - (aj\Delta R_1^*) - a\alpha_i)\Delta t + \sigma\Delta z$

Ainsi, en posant $\theta(t) = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i + a\alpha_i\Delta t}{\Delta t}$, nous rapprochons les deux expressions du processus discrétisé du taux R .

Remarque : La formule fermée analytique de $\theta(t)$ pour une dynamique de taux court continue permet de calculer les termes $\theta(i\Delta t)$. Nous n'avons pas retenue cette approche dans la construction pratique de l'arbre de R ; celle-ci ne permettant pas de retrouver parfaitement la courbe des taux initiale (cette formule étant valable dans un cadre continu implique donc un pas de temps très proche de zéro).

H&W proposent *une autre approche*, consistant à calculer les α_i de *manière itérative*, et pouvant s'adapter à d'autres modèles. Ils utilisent les *actifs d'Arrow Debreu*⁸⁷.

Soit $Q_{i,j}$, l'actif AD associé au nœud (i, j) de l'arbre de taux. $Q_{i,j}$ est la valeur actuelle d'un actif dont le « payoff » est 1 lorsque le nœud (i, j) est atteint et 0 dans tous les autres états de la nature. Ainsi $Q_{0,0} = 1$.

En date $t=0$, le correctif de translation vaut $\alpha_0 = \alpha(0) = R(0) - R_1(0) = R(0)$; $R(0)$ étant la valeur initiale observée du taux court R .

Rappelons que p_u, p_m et p_d sont les probabilités d'atteindre respectivement les nœuds (1, 1), (1, 0) et (1, -1) à partir du nœud initial (0, 0) entre les dates $t = 0$ et $t = \Delta t$.

Nous pouvons ainsi calculer, à partir de ces probabilités et dans l'univers risque-neutre, les actifs AD $Q_{1,1}, Q_{1,0}$ et $Q_{1,-1}$:

$$\begin{cases} Q_{1,1} = p_u \exp(-R(0)\Delta t) \\ Q_{1,0} = p_m \exp(-R(0)\Delta t) \\ Q_{1,-1} = p_d \exp(-R(0)\Delta t) \end{cases}$$

La détermination du prix exact du ZC $P(0, 2\Delta t)$ de maturité $2\Delta t$ ($i=2$) se déduit du calcul du second terme correctif α_1 .

D'une part,

$$P(0, 2\Delta t) = \exp(-R(2).2\Delta t)$$

D'autre part, vu des nœuds (1, 1), (1, 0) et (1, -1), le prix de ce ZC est égal respectivement à $e^{-(\Delta R_1^* + \alpha_1)\Delta t}$, $e^{-\alpha_1\Delta t}$ et $e^{-(\alpha_1 - \Delta R_1^*)\Delta t}$.

En date $t=0$, le prix du ZC devient donc :

$$P(0, 2\Delta t) = Q_{1,1}e^{-(\Delta R_1^* + \alpha_1)\Delta t} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1\Delta t} + Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1 - \Delta R_1^*)\Delta t}$$

Alors, nous pouvons en déduire l'expression de α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{\ln\left(Q_{1,1}e^{-(\Delta R_1^*)\Delta t} + Q_{1,0} + Q_{1,-1}e^{(\Delta R_1^*)\Delta t}\right) - \ln\left(e^{-R(2)2\Delta t}\right)}{\Delta t}$$

L'étape suivante consiste à calculer les actifs AD $Q_{2,j}$, pour j un entier relatif allant de -2 à 2.

Par exemple, le nœud (2, 1) ne peut être atteint que par le nœud (1, 1) avec la probabilité p_m ou à partir du nœud (1, 0) avec la probabilité p_u .

⁸⁷ Notés « actifs AD ».

Le taux d'intérêt R appliqué entre $t = \Delta t$ et $t = 2 \Delta t$ à partir du nœud $(1, 1)$ est égal à $R(\Delta t) = R_1(\Delta t) + \alpha(\Delta t) = j\Delta R_1^* + \alpha_1 = \Delta R_1^* + \alpha_1$. De même, à partir du nœud $(1, 0)$, ce taux vaut $0\Delta R_1^* + \alpha_1$.

Il suit que,

$$Q_{2,1} = p_m e^{-(\Delta R_1^* + \alpha_1)\Delta t} Q_{1,1} + p_u e^{-\alpha_1 \Delta t} Q_{1,0}$$

Nous pouvons ainsi calculer tous les $Q_{2,j}$ de la date 2 ($t=2 \Delta t$) et en déduire α_2 d'une formule similaire à la précédente encadrée pour α_1 (à l'aide de $P(0, 3\Delta t)$).

De manière itérative, nous calculons les α_i avec la formule suivante :

$$\alpha_i = \frac{\ln \left(\sum_{j=-N_i}^{j=N_i} Q_{i,j} e^{-(j\Delta R_1^*)\Delta t} \right) - \ln \left(e^{-R(i+1)(i+1)\Delta t} \right)}{\Delta t} = \frac{\ln \left(\sum_{j=-N_i}^{j=N_i} Q_{i,j} e^{-(j\Delta R_1^*)\Delta t} \right) - \ln (P(0, (i+1)\Delta t))}{\Delta t}$$

(III.17)

Avec N_i le nombre de nœuds au dessus et au dessous du nœud central $(i, 0)$ en date $i \Delta t$.
Il reste à évaluer les actifs AD à cette date selon la formule ci-dessous :

$$Q_{i,j} = \sum_l p(l, j) Q_{i-1,l} e^{-(l\Delta R_1^* + \alpha_{i-1})\Delta t}$$

A noter que $p(l, j)$ est la probabilité de passage du nœud $(i-1, l)$ vers le nœud (i, j) .

Cela signifie que pour évaluer les prix des actifs d'Arrow Debreu à la date t_i , il faut connaître le prix de tous les prédécesseurs à la date t_{i-1} et les probabilités les reliant entre eux.

Il est donc possible, à l'aide des expressions itératives des α_i et des $Q_{i,j}$, de construire un arbre « recombinaut » du taux court R , discrétisé en intervalles de temps Δt .

b. Applications : constructions d'arbres de H&W

Nous avons implémenté une fonction VBA sous Excel (nommée **HW**), qui permet de construire, à l'aide de la méthode de H&W décrite précédemment, des arbres « recombinauts » de taux court. Les arbres obtenus à la fin de chacune des deux étapes sont calculés et visualisables.

Cette fonction admet comme « inputs » : les paramètres a et σ du modèle de H&W, le pas de temps dt , la date finale T de l'arbre, la courbe de taux ZC initiale et la méthode d'interpolation (linéaire ou cubique). Le pas de temps et la date finale de représentation de l'arbre sont exprimés en années. Elle permet soit d'afficher l'arbre à la fin de la première étape (avant calage sur la STTI), soit d'afficher l'arbre final voulu.

Afin de tester la justesse de l'implémentation, nous avons retrouvés les arbres de taux de H&W :

1. de l'exemple de la section 21.12 de l'ouvrage de J.C.Hull « *Options Futures & Other Derivatives* ». *Fourth Edition*.

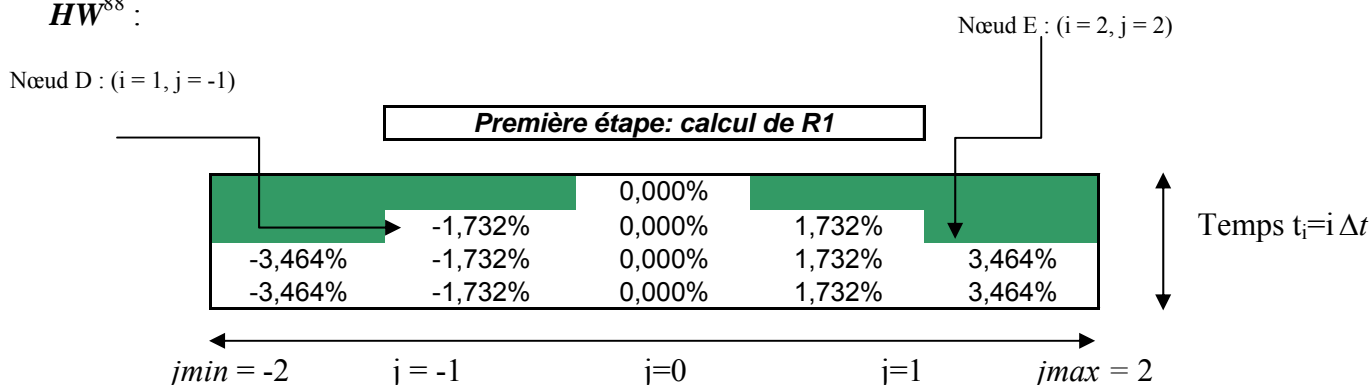
2. de l'application pratique de l'article de J.H.Li intitulé « *A C++ Encoded Hull-White Interest Rate Tree Builder* ». 2002.

Dans un second temps, nous allons construire l'arbre de taux court R relatif à la courbe de taux ZC du 25 mai 2005 reconstruite dans la première partie.

▪ **Premier exemple :**

❖ **Etape 1 :**

Voici l'arbre de R_1 issu de la première étape de construction et calculé avec la fonction HW^{88} :



Avec les paramètres suivants :

<i>Paramètres</i>	<i>Valeur</i>
a	0,1
σ	0,01
Δt	1 an
Date finale T	3 Δt = 3 ans

Rappelons que $\Delta R_1^* = \sqrt{3V(\Delta R_1)}$ et $V(\Delta R_1) = V = \sigma^2 \frac{(1 - e^{-2a\Delta t})}{2a}$.

Dans cette section, la formule de V s'approxime, à l'aide d'un développement limité au premier ordre, par $V = \sigma^2 \Delta t$, ce qui conduit à l'expression suivante : $\Delta R_1^* = \sigma \sqrt{3\Delta t}$

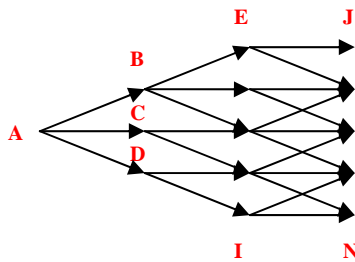
Ainsi le « pas vertical de taux » ΔR_1^* vaut $\Delta R_1^* = 0,01\sqrt{3} = 0,01732$

⁸⁸ Tableau issu d'une feuille Excel, représentant l'arbre de taux.

D'après les valeurs $j_{\max} = \text{Ent}\left(\frac{0.184}{a\Delta t}\right) + 1$ et $j_{\min} = -j_{\max}$, la valeur de j_{\max} est donc de 2 (ce qui signifie que l'arbre n'aura pas plus de 2 nœuds de part et d'autre du nœud central, quel que soit le pas de temps).

Nous retrouvons bien, dans les résultats du tableau représentant l'arbre de R_I , les valeurs de R_I , multiples du pas ΔR_1^* ; pour $j=2$, le taux court de l'étape 1 vaut alors $R_1 = 2\Delta R_1^* = 3,464\%$.

Remarque : le tableau Excel de résultats représente les valeurs du taux R_I de l'arbre suivant. Cet arbre a subi une rotation de 90°.



Après le second pas de temps (à partir de $t = 2\Delta t = 2$ ans), il y a stabilisation « verticale » de l'arbre ($j_{\max} = 2$).

❖ Etape 2 :

Après avoir construit l'*arbre de « niveau »* de R_I , il faut en déduire l'arbre de R , afin qu'il soit compatible avec la STTI. Voici l'arbre obtenu avec les paramètres détaillés dans l'étape 1 et la courbe de taux zéro-coupon spot suivante :

Maturités (années)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Taux ZC	3,430%	3,824%	4,183%	4,512%	4,812%	5,086%

Nœud D : ($i = 1, j = -1$)

Nœud E : ($i = 2, j = 2$)

Deuxième étape: l'arbre de R				
	D	C	B	E
D	3,473%	3,824%	4,183%	4,512%
C	2,788%	3,473%	3,824%	4,183%
B	1,789%	2,788%	3,473%	3,824%
E	6,937%	6,252%	5,253%	4,512%
I	7,984%	6,937%	5,253%	4,512%
N	9,716%	7,984%	6,937%	4,512%
J	8,717%	7,984%	6,937%	4,512%

Les nœuds ont été déplacés pour « coller » à la courbe de taux initiale. En appliquant la méthode concernant la seconde étape de construction de l'arbre de taux $R(t)$, décrite en section 1.2.a, nous retrouvons, avec la fonction **HW** implémentée, les résultats de l'exemple de l'ouvrage de J.C.Hull.

Remarque :

- l'arbre n'est plus symétrique. Il est décalé vers le haut.
- Dans le programme VBA, les trois probabilités de passage d'un nœud à l'autre sont stockées avec le taux de l'arbre (type nœud). Nous avons choisi de ne pas les afficher.

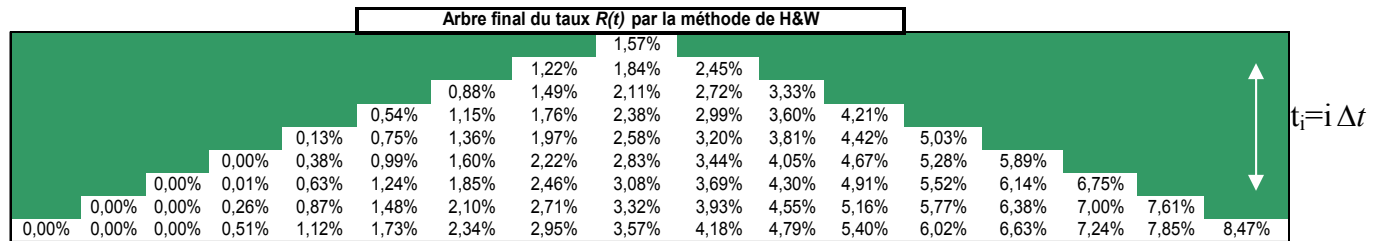
▪ *Second exemple :*

Nous n'allons présenter que les résultats finaux à l'issue de l'étape 2.

La courbe de taux spot utilisée est la courbe US-Treasury du 10 avril 2002 :

Maturités (années)	0,25	0,5	2	5	10	30
Taux	1,70%	1,97%	3,44%	4,60%	5,25%	5,71%

Ci-dessous l'arbre du taux court $R(t)$ (dont les paramètres sont issus de l'exemple de l'article de J.H.Li) recalculé par la fonction **HW** implémentée:



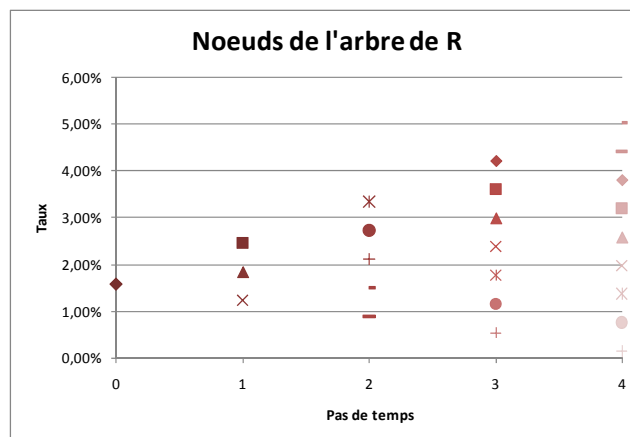
C'est un arbre « recombinant » de taux d'intérêt de H&W d'horizon final $T = 1$ an, divisé en 8 sous intervalles de temps $\Delta t = \frac{1}{8} = 0.125$ année.

Les paramètres utilisés afin d'obtenir la valeur de $R(t)$ à chaque nœud de l'arbre ($t = 1/8, 2/8, \dots, 8/8$) sont les suivants :

<i>Paramètres</i>	<i>Valeur</i>
Λ	0,1
Σ	0,01
Δt	1/8 an
Date finale T	8 $\Delta t = 1$ an

A noter que le pas de taux ΔR_1^* vaut : $\Delta R_1^* = 0,0061$; et que $j_{\max} = 15$.

Voici une représentation graphique partielle de l'arbre de R :



▪ **Application à notre exemple de courbe zéro-coupon :**

Nous avons, pour conclure ces applications, construit l'arbre « recombinaut » de taux d'intérêts $R(t)$ à partir de la courbe de taux ZC du 12 mai 2005 reconstruite en première partie. Nous avons fixé l'horizon final de l'arbre à 20 ans.

Voici les autres paramètres utilisés :

<i>Paramètres</i>	<i>Valeur</i>
Λ	<i>0,1</i>
Σ	<i>0,01</i>
Δt	<i>0.25 an</i>
Date finale T	<i>80 $\Delta t = 20$ ans</i>
j max	<i>8</i>

Le pas de taux ΔR_1^* vaut alors: $\Delta R_1^* = 0,00866$;

L'arbre de taux obtenu se trouve en Annexe 8.2.

Section 1.3 Evaluations de produits dérivés de taux et calibrage du modèle H&W à un facteur

a. « Pricings » analytiques et numériques de caps et de floors

Dans cette section, nous allons, de façon similaire à la partie II, calculer le prix de différents « caps » et « floors » ; théoriquement d'une part et numériquement d'autre part. Evidemment, nous utiliserons ici les arbres, déjà implémentés, issus du modèle de H&W à un facteur.

▪ **Solution analytique**

Rappelons qu'un « cap » et un « floor » peuvent être analysés comme des portefeuilles d'options sur zéro-coupon. Ils peuvent donc être évalués à l'aide de la **formule analytique d'un « call » sur ZC** du modèle de Hull&White.

Dans ce modèle, le prix en date 0 d'un « call » d'échéance T et de prix d'exercice E, sur un ZC $B(0,s)$ d'échéance s et de nominal L, s'écrit :

$$\boxed{LB(0,s)N(d) - EB(0,T)N(d - \sigma_p)} \quad \text{(III.18)}$$

Avec :
$$d = \frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LB(0,s)}{EB(0,T)} + \frac{\sigma_p}{2}, \quad \sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

σ_p représente la volatilité du logarithme du prix de l'obligation zéro-coupon en date T (σ étant la volatilité de la diffusion du modèle de H&W).

La définition et les caractéristiques financières de ces options sont explicitées en partie II.

▪ **Solution numérique**

Dans un premier temps, il convient d'établir les arbres d'évolution du taux court jusqu'à la maturité T de l'option à évaluer. Ensuite, il suffit de calculer le « payoff » de l'option sur toutes les branches terminales.

Nous allons considérer un « cap » de durée T années, de nominal L euros, de taux d'exercice E , et dont le taux de référence est le taux variable Euribor en t de maturité τ noté $T_v(t, \tau)$.

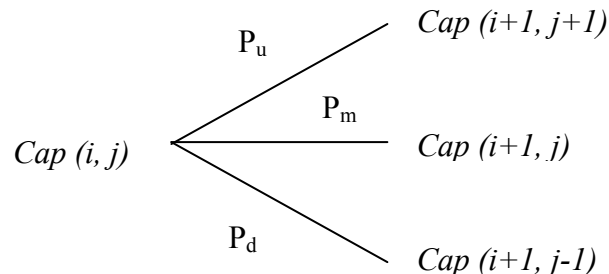
Les dates de constatation du taux Euribor vis-à-vis du « strike » sont t_1, t_2, \dots, t_{n-1} et la date finale $t_n = T$.

D'après la formule (II.4), nous avons en date T , maturité du « cap », le « payoff » suivant :

$$C_T = L\tau \text{Max}[0; T_v(t_{n-1}) - E]$$

La seconde étape consiste à calculer, de façon itérative, les valeurs de l'option aux dates précédentes pour chaque pas de temps de l'arbre construit et ce jusqu'à la date initiale t_0 de valorisation de l'instrument. Les probabilités de transition d'un nœud de l'arbre à un autre seront utilisées.

Cette méthode, appelée « **Backward induction** », peut être représentée schématiquement par la branche suivante :



Avec :

❖ $Cap(i, j) = \frac{Cap(i+1, j+1)p_u + Cap(i+1, j)p_m + Cap(i+1, j-1)p_d}{e^{R(i, j)dt}}$ le cap pour le nœud (i, j)

❖ $R(i, j)$ le taux de l'arbre final au nœud (i, j)

Remarque : Il est également possible d'utiliser les actifs d'Arrow Debreu avec la formule ci-dessous.

$$Cap(0, 0) = \sum_{j=-\min(i, j \max)}^{\min(i, j \max)} Q_{i, j} Cap(i, j)$$

Afin d'évaluer numériquement ces différentes options dans le treillis de H&W, nous allons reprendre le premier exemple de la section 1.2 et évaluer les flux des « caplets » d'un « cap » de nominal $L=1000$, de durée $T=3ans$ et de taux d'exercice $E=4\%$ pour chaque date t_i (de $i=0$ à $i=3$). Le taux de référence de cette option est celui de l'arbre de taux construit dans l'exemple.

Une fois la démarche bien détaillée, nous pourrions implémenter une fonction VBA qui calculera, en date t_0 , le prix d'un « cap » ou d'un « floor » à l'aide d'un arbre de H&W donné.

Reprenons l'arbre final du taux court R obtenu en *entier* et transposons le :

	$t_0 \ i=0$	$t_1 \ i=1$	$t_2 \ i=2$	$t_3=T \ i=3$
$j=2$			9,716% E	8,717% J
$j=1$		6,937% B	7,984% F	6,985% K
$j=0$	3,824% A	5,205% C	6,252% G	5,253% L
$j=-1$		3,473% D	4,520% H	3,521% M
$j=-2$			2,788% I	1,789% N

Rappelons les probabilités de passage d'un nœud à l'autre de cet arbre⁸⁹ de t_0 à T :

Nœuds	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Taux R	3,824%	6,937%	5,205%	3,473%	9,716%	7,984%	6,252%	4,520%	2,788%
Pu	0,1667	0,1217	0,1667	0,2217	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,6666	0,6567	0,6666	0,6567	0,0266	0,6567	0,6666	0,6567	0,0266
Pd	0,1667	0,2217	0,1667	0,1217	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

Nœuds	J	K	L	M	N
Taux R	8,717%	6,985%	5,253%	3,521%	1,789%
Pu	0,8867	0,1217	0,1667	0,2217	0,0867
Pm	0,0266	0,6567	0,6666	0,6567	0,0266
Pd	0,0867	0,2217	0,1667	0,1217	0,8867

En date finale T , le **flux ou « payoff » payé à l'acheteur du cap** vaut alors:

$$1000 \text{Max} [0; R(T) - 4\%]$$

Ici le taux variable observé est celui calculé par le modèle de H&W dans l'arbre « recombinaison ». Il est possible de calculer tous les flux de la branche terminale.

Par exemple, pour le nœud J, en date T , le flux vaut : $47,17 = 1000 \text{Max} [0; 8,717\% - 4\%]$.

Les « cash-flows » de la date précédente t_2 , sous la probabilité de construction de l'arbre, sont obtenus **par actualisation des flux de la date terminale**.

Pour le nœud E et par la méthode « Backward induction », nous obtenons alors le flux suivant (en tenant compte des probabilités et des flux aux branches terminales des nœuds J, K et L) :

$$(0,8867 \times 47,17 + 0,0266 \times 29,85 + 0,0867 \times 12,53) e^{-9,716\%} = 39,66$$

⁸⁹ Nous les récupérons en lançant la macro HW de construction de l'arbre. A chaque nœud sont associées, entre autres, les trois probabilités (variables de type *node*).

Il suffit de réitérer le calcul pour obtenir le prix du « cap » en date t_0 .

▪ *Applications numériques et comparaisons*

Pour ces applications numériques, nous calculerons, selon différentes méthodes, les prix de « caps » dont les durées varieront entre 2 et 10 ans, et dont le taux d'exercice sera de 2 %. Le taux variable de référence sera l'Euribor 6 mois. Ces produits de taux seront donc divisés en « caplets » et « floorlets » de durée 6 mois.

Pour nos calculs, nous allons faire varier les paramètres a et σ , non spécifiés par le modèle. Contrairement à la STTI, ces deux paramètres de volatilités du modèle de H&W, « inputs » essentiels de celui-ci, ne sont pas directement donnés par le marché. Nous allons devoir les estimer à l'aide de prix de marché de « caps » et de « floors ». Cette phase d'estimation des paramètres avec des données de marché correspond au **calibrage du modèle**. Le calibrage du modèle n'étant pas encore effectué, nous fixons arbitrairement dans un premier temps ces deux paramètres :

❖ Paramètres a et σ constants et supposés connus :

<i>Paramètres</i>	<i>Valeur</i>
a	0,1
σ	0,01
Δt	0,1 an

Le pas de temps est fixé à 0,1 année. Nous utilisons la courbe des taux zéro-coupon du 12 mai 2005, date à laquelle nous valoriserons tous les produits de taux. Nous allons « pricer » ces produits **numériquement** et **analytiquement** en faisant varier la méthode d'interpolation (linéaire ou cubique).

Les prix « numériques » seront obtenus à l'aide des fonctions **capfloorHW** (implémentation fonctionnelle du modèle sous VBA, qui fait intervenir la fonction **capfloorletHW** pour l'évaluation des « caplets » et des « floorlets »). Elles réalisent la méthode dite de « Backward induction » ou de « descente de l'arbre de taux ».

Pour la partie analytique, rappelons qu'un « cap » et un « floor » peuvent être analysés comme des portefeuilles d'options sur ZC. Ainsi ils peuvent être évalués à l'aide de la formule analytique d'un « call » sur ZC du modèle de Hull&White.

Nous avons donc implémenté une fonction **HWanal** qui calcule le prix d'un « call » ou d'un « put » en date $t=0$ de maturité T sur un zéro-coupon $B(0,s)$. Cette fonction utilise les formules précédentes et permet de choisir le type d'instrument (« call » ou « put ») et les différents paramètres et caractéristiques financières du produit ainsi considéré (nominal L , « strike » E , volatilité σ , paramètre de retour à la moyenne a , maturités s et T , et courbe d'actualisation).

Comme le « cap » (resp. « floor ») peut être vu comme un portefeuille de $n-1$ « calls » européens identiques (resp. « puts »), une seconde fonction, appelée **HWCapFloorAnal** détermine, en utilisant la fonction précédente, le prix de l'option en date $t=0$ (en sommant ces options sur ZC).

Elle admet les mêmes « input » que *HWanal*, auxquelles nous ajoutons le ténor τ du cap.
Voici les résultats obtenus :

Durées du cap (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus
2	0,699	0,924	0,050	0,904	0,042	0,933	0,055
3	1,596	1,978	0,146	1,971	0,141	2,002	0,165
4	2,754	3,282	0,278	3,278	0,275	3,325	0,326
5	4,144	4,768	0,390	4,774	0,397	4,836	0,479
7	7,377	8,133	0,571	8,159	0,612	8,259	0,777
10	12,773	13,535	0,581	13,604	0,691	13,762	0,978

Tableau 3 : comparatifs de prix numériques et analytiques de « caps »

Les résidus correspondent aux carrés des écarts de prix entre les prix de marché issus de Bloomberg et les prix numériques et analytiques. Le but est de minimiser ces écarts.

Nous constatons en premier lieu que la méthode numérique avec l'arbre de H&W fournit des prix plus proches que ceux résultants de la méthode analytique. De plus, lorsque nous utilisons l'interpolation cubique, les résultats sont plus convenables.

Néanmoins, ces prix calculés demeurent encore assez loin des prix de marché, d'où la nécessité de calibrer le plus finement possible le modèle afin d'estimer au mieux les paramètres a et σ .

Remarque : si nous fixons un pas de temps plus petit, les résidus diminuent ; les prix issus de la méthode numérique se rapprochent de ceux du marché.

Durées du cap (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus
2	0,699	0,920	0,049	0,898	0,040	0,933	0,055
3	1,596	1,974	0,143	1,970	0,140	2,002	0,165
4	2,754	3,275	0,271	3,274	0,270	3,325	0,326
5	4,144	4,760	0,380	4,771	0,393	4,836	0,479
7	7,377	8,122	0,555	8,158	0,609	8,259	0,777
10	12,773	13,520	0,558	13,610	0,700	13,762	0,978

❖ paramètres a et σ constants et à estimer :

Les paramètres de volatilité a et σ sont ici inconnus et doivent être déterminés par un premier calibrage « rapide » du modèle. Nous allons essayer de les choisir judicieusement à partir de prix de « caps » de marché. Le calibrage à proprement dit du modèle se fera par la suite de façon plus précise et sur un jeu de prix de marché plus conséquent (« caps » et « floors » de différents « strike »).

Ainsi, nous estimons ces paramètres à l'aide des prix de marché de caps du Bloomberg à la date du 12/05/05. Ce sont les prix de marché des tableaux de résultats précédents (colonnes bleues). L'idée sous jacente du calibrage d'un modèle de taux consiste en l'obtention des coefficients à estimer qui rendent le modèle aussi proche possible de l'état du marché. En général, les données de marchés utilisées peuvent être la STTI observée et les prix de marché d'actifs contingents.

Ils sont ici estimés en minimisant, en a et σ , la somme des résidus ; c'est-à-dire en minimisant la somme des carrés des écarts entre les prix de caps du marché récupérés (notés $CapMarché_i$) et les prix de caps recalculés (notés Cap_i) :

$$\text{Min}_{a,\sigma} \left(\sum_i (CapMarché_i - Cap_i)^2 \right)$$

Nous obtenons ainsi les paramètres jugés optimaux. C'est la *méthode des moindres carrés ordinaire*.

De façon pratique, nous allons minimiser la somme des résidus avec les prix analytiques des caps des exemples précédents, et obtenus par la fonction VBA que nous avons développée.

Le pas de temps est fixé à 0,1 année et la STTI reste celle du 12 mai 2005.

Une fois les paramètres a et σ obtenus, nous les utilisons comme « inputs » de la fonction *capfloorHW* pour recalculer les prix numériques de ces mêmes caps.

Nous avons ainsi deux tableaux de résultats de prix de caps avec deux jeux de paramètres a et σ , obtenus par minimisation de la somme des résidus sur les prix analytiques et retraités ensuite en ajoutant une contrainte sur le paramètre a .

Paramètres	Valeurs	
	Tableau 1	Tableau 2
a	0,20	0,01
σ	0,505%	0,416%

➤ **Tableau 1 :**

Durées du cap (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus	
2	0,699	0,713	0,0002	0,686	0,0002	0,720	0,0004	
3	1,596	1,614	0,0003	1,605	0,0001	1,633	0,0014	
4	2,754	2,774	0,0004	2,768	0,0002	2,809	0,0030	
5	4,144	4,132	0,0001	4,138	0,0000	4,187	0,0019	
7	7,377	7,285	0,0084	7,315	0,0038	7,389	0,0001	
10	12,773	12,448	0,1059	12,526	0,0610	12,637	0,0185	
							Somme	0,0253

➤ **Tableau 2 :**

Durées du cap (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus	
2	0,699	0,701	0,0000	0,673	0,0007	0,712	0,0002	
3	1,596	1,605	0,0001	1,594	0,0000	1,628	0,0010	
4	2,754	2,770	0,0002	2,763	0,0001	2,810	0,0031	
5	4,144	4,134	0,0001	4,139	0,0000	4,195	0,0026	
7	7,377	7,298	0,0062	7,327	0,0025	7,410	0,0011	
10	12,773	12,476	0,0883	12,554	0,0478	12,677	0,0092	
							Somme	0,0172

Les prix numériques et analytiques se rapprochent clairement des prix de marché au regard des résidus calculés. Les prix calculés du tableau 2 sont les plus satisfaisants : la somme des résidus sur les prix analytiques étant la plus faible.

Dans le tableau 1, le paramètre a est contraint dans l'optimisation à être supérieur ou égal à 0,2 (contrainte dans le tableau 2: $a > 0,01$). Clairement, plus a est petit positif, meilleurs sont les résultats ; mais le problème réside dans le fait qu'en calibrant sans contrainte sur le paramètre a , ce paramètre devient négatif alors qu'il est supposé être positif.

A présent, nous allons calibrer plus précisément le modèle sur un jeu plus important de prix de « caps » et de « floors » et sans contrainte sur le paramètre a .

b. Calibrage du modèle

Nous allons maintenant procéder à l'estimation des paramètres a et σ . Il s'agit de chercher les paramètres qui minimisent la fonction calculant la somme des résidus entre les prix de marché et les prix analytiques des instruments financiers de référence. Cette fonction d'estimation, appelée quelquefois *fonction d'erreur*, s'écrit de façon générale comme suit :

$$Erreur(a, \sigma) = \sum w_i (P_{marché}^i - P_{calc}^i)^2$$

Avec :

- ❖ $P_{marché}^i$ le prix de marché de l' $i^{\text{ème}}$ instrument
- ❖ P_{calc}^i le prix recalculé par le modèle
- ❖ w_i le poids éventuel de l' $i^{\text{ème}}$ instrument

Remarque : $(P_{marché}^i - P_{calc}^i)^2$ est le résidu de l' $i^{\text{ème}}$ instrument.

La somme s'effectue sur tous les instruments, dont nous avons le prix de marché, et qui sont utilisés pour calibrer le modèle. Ici, nous allons considérer 12 « caps » et 12 « floors » de maturités allant de 2 à 10 ans⁹⁰. Les taux d'exercice seront de 2 % et 3 % pour les « caps » ; de 3 % et 4 % pour les « floors ».

Le taux variable de référence sera toujours l'Euribor 6 mois. Ces produits seront donc divisés en « caplets » et « floorlets » de 6 mois.

La minimisation en a et σ se fera également sur les résidus des prix analytiques de tous les « caps » et « floors » (toutes les maturités et tous les « strike ») calculés avec la fonction *HWcapfloorAnal*.

$$\underset{a, \sigma}{\text{Min}} Erreur(a, \sigma) = \underset{a, \sigma}{\text{Min}} \sum_{\text{instruments } i} w_i (P_{marché}^i - P_{analyt.}^i)^2$$

L'optimisation, donc le calibrage, est plus délicat du fait du plus grand nombre de prix d'options, et de l'évolution contraire des prix de « caps » et de « floors ».

Les paramètres optimaux ainsi obtenus sont :

$a_{opt} = \mathbf{0,00738773}$ $\sigma_{opt} = \mathbf{0,01186}$
--

Nous utiliserons ces paramètres pour évaluer, à l'aide de la fonction « capfloorHW », les prix numériques du modèle de H&W de tous les instruments.

Nous avons également cherché ces paramètres en minimisant uniquement la somme des résidus « analytiques » des « caps » de « strike » 2 % et « floors » de « strike » 4 %, les paramètres obtenus sont alors $a_{opt} = 0,00067$ et $\sigma_{opt} = 0,00799$.

⁹⁰ Maturités : 2, 3, 4, 5, 7 et 10 années.

Les résultats des différents « pricing » de toutes ces options (selon les paramètres de volatilités), ainsi que des graphiques comparatifs se trouvent en annexe 8.2.

Voici un graphique illustratif des résultats sur les prix des « caps » de « strike » 2 % :

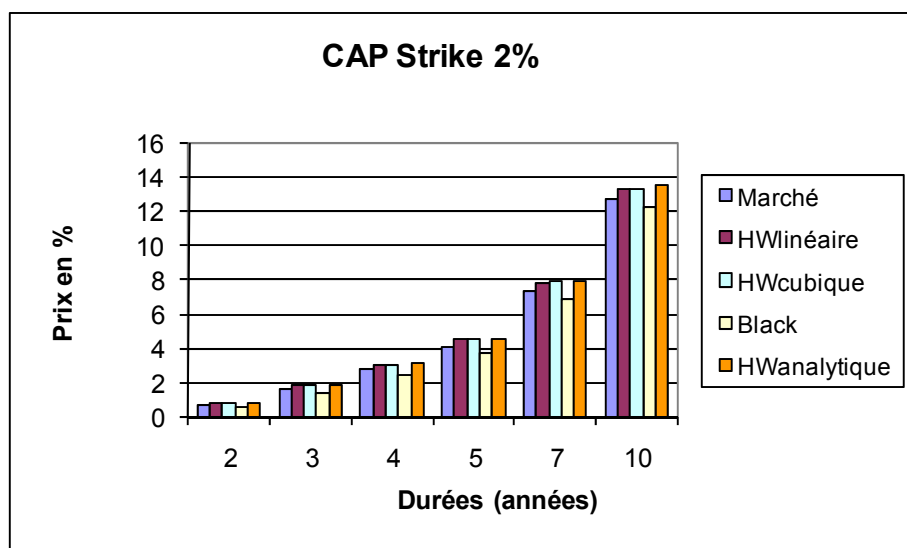


Figure 18 : prix de caps de « strike » 2% par différentes méthodes et après calibrage

Remarque : afin de réaliser la méthode des moindres carrés et d'estimer les paramètres cherchés, nous avons utilisé la macro complémentaire d'Excel appelée SOLVER. Cette fonction d'optimisation (recherchant le minimum dans cette application) peut ne pas produire de résultats satisfaisants et raisonnables. En effet, le solveur peut « tomber » sur des minimums locaux. Une solution alternative consisterait à calculer une matrice de « Sommes de résidus » (SSE, « Sum of Squared Error ») sur des intervalles de valeurs de a et σ régulièrement espacées. Il suffit de réduire progressivement les intervalles de valeurs prises par ces paramètres pour se rapprocher du couple de paramètres optimaux.

Nous avons également réalisé cette méthode ; nous retrouvons et confirmons les résultats obtenus à l'aide du solveur d'Excel.

Section 1.4 Limites du modèle de H&W et perspectives

Ce modèle de H&W présente clairement les inconvénients des modèles à un facteur de risque décrits dans la première partie : d'une part, la **probabilité non nulle d'apparition de taux négatifs** (ce fut le cas dans nos applications pratiques) ; d'autre part, la **non prise en compte de toutes les déformations possibles de la courbe des taux**.

Les résultats de « pricing » des produits dérivés peuvent donc être assez éloignés des prix de marchés, et le calibrage du modèle sur les prix analytiques devenir délicat. Enfin, pour conclure sur les limites de ce modèle, l'implémentation est tout de même assez difficile et technique à mettre en œuvre sous VBA.

Néanmoins, quelques points positifs sont apparus lors de la mise en pratique de ce modèle. L'**existence d'une formule fermée** des prix de produits dérivés a permis toutefois de caler le modèle afin d'obtenir numériquement des prix de « caps » et de « floors » convenables.

Malgré quelques difficultés, l'implémentation reste *très accessible aux praticiens de marché* non spécialisés dans la programmation. Les temps de calculs sont faibles, la précision est bonne pour un nombre d'itérations réduit.

Enfin, la théorie du modèle H&W est parfaitement *cohérente et compréhensible*. Contrairement au modèle de Ho et Lee, il intègre le phénomène de retour à la moyenne, et permet l'utilisation de différentes structures de volatilités, tout en restant maniable.

Une perspective d'amélioration des résultats réside dans le modèle de Black-Karasinski et dans le choix de $f(r) = \ln(r)$ au lieu de $f(r) = r$ (H&W et Ho&Lee) dans la dynamique du taux court $r(t)$. Ces modèles AOA en cohérence avec la STTI ont des performances proches. BK, modèle log-normal, pallie au problème des taux négatifs éventuellement générés par les modèles gaussiens mais est beaucoup moins maniable. Néanmoins, ces modèles présentent une volatilité du taux court très importante dans une conjoncture de taux faibles (c'est le cas pour la fin d'année 2005).

Afin de poursuivre nos travaux, nous pourrions implémenter le modèle de Black-Karasinski, et donc essayer d'améliorer le processus de taux court en faisant dépendre du temps les paramètres a et σ (cf. Section 1.1.c). Une combinaison des modèles selon le niveau des taux pourrait être également une voie à explorer.

Enfin, dans l'idéal, une implémentation du *modèle de H&W à deux facteurs* semblerait être la suite logique à la construction d'un modèle de taux réaliste et robuste, dont la mise en œuvre informatique n'est pas trop complexe. En revanche, son calibrage, du fait de nombreux paramètres à estimer, est très délicat. (cf. Section 1.1.c). Ce ne sera pas fait dans ce mémoire, étant donné la complexité du sujet (sujet à part entière).

Etudions et implémentons à présent un modèle de marché : *le modèle de BGM*.

Chapitre2. Le modèle de marché BGM/LIBOR MARKET MODEL (LMM)

Le *modèle de BGM*⁹¹(1997), Brace-Garatek-Muselia, est un des modèles de taux d'intérêt les plus utilisés. Il fait partie de la nouvelle classe des *modèles de marché*, faisant référence essentiellement aux taux pratiqués sur les marchés financiers (Libor, Euribor, swaps). Ces modèles connaissent un certain succès dans *l'explication du prix des options de taux d'intérêts* (caps, floors) et justifient l'usage des formules de Black pour « pricer » celles-ci. Ils permettent également d'évaluer plus précisément des produits structurés de taux plus évolués.

Auparavant, le modèle classique de *Heath, Jarrow et Morton*⁹²(1992) incluait une spécification du comportement stochastique de quantités financières *non observables directement sur le marché* comme les taux « forward » instantanés, taux purement théoriques. De plus, le calibrage du modèle aux données de marchés nécessitait quelques transformations de ces données à travers des modèles de dynamiques complexes. Cette partie de calibrage des paramètres est très délicate et difficile à mettre en œuvre dans ce type de modèle.

L'introduction du modèle BGM, a radicalement éludé ces difficultés en utilisant et définissant directement des nouvelles *données observables* et utilisées par les praticiens sur le marché comme les *taux forward Libor* ou *Euribor*. Ces nouvelles variables de marché suivent des processus lognormaux construits pour retrouver les volatilités du modèle de Black de 1976. Le modèle de BGM est construit à partir d'un paramétrage spécifique du modèle de HJM.

Nous allons dans ce second chapitre, présenter de façon théorique la dynamique et les caractéristiques du modèle de BGM, plus connu sous le nom de « *modèle de marché Libor* » (ou « Libor Market Model »), pour ensuite l'implémenter sous VBA, afin de pouvoir évaluer les différents produits dérivés de taux simples vus dans les autres chapitres. Nous terminerons par une évocation des nombreux points positifs de ce dernier modèle étudié.

Ce chapitre s'appuiera principalement sur la thèse de I. Grubisic⁹³ : « Interest Rate Theory : The BGM Model ». Ce travail propose des méthodes pratiques et numériques d'implémentation de la dynamique stochastique des taux « forward », de calibrage et de détermination de la structure de volatilité du modèle de marché de BGM.

Il expose également une procédure intéressante de réduction de la dimension du processus de Wiener de la diffusion des taux « forward », afin d'améliorer, entre autre, les temps de calculs lors du « pricing » par des méthodes de Monte-Carlo. Cette procédure est une alternative à l'ACP, et nous allons la mettre en application également ; pour la démonstration, il faudra se référer à la thèse.

Nous nous appuieront également sur l'ouvrage de F. Quittard-Pinon : « Marchés des Capitaux et Théorie Financière », notamment pour les démonstrations théoriques.

⁹¹BRACE A., GATAREK D., MUSELIA M. (1997) The Market Model of Interest Rate Dynamics, *Mathematical Finance* 7.

⁹² Appelé modèle HJM

⁹³ Cf. Bibliographie.

Section 2.1 Présentation théorique du modèle et applications

Avant de réaliser l'étude théorique du modèle et d'explicitier sa dynamique de diffusion, il convient de faire quelques rappels.

a. Définitions, rappels et notations

Nous allons rappeler quelques définitions et résultats déjà obtenus ; et définir les notations essentielles pour la suite de cette section. Elles seront indispensables à la présentation du modèle. Les démonstrations les utiliseront amplement.

- **Obligation zéro-coupon (rappel) :** $P(t, T)$

Nous savons qu'une obligation zéro-coupon de maturité T est un contrat qui garantit à son détenteur le paiement d'une unité monétaire à la date T , sans coupons intermédiaires. Le prix de ce contrat à la date $t < T$ sera noté $P(t, T)$. $P(T, T) = 1$ pour tout T .

- **Taux d'intérêt spot proportionnel : Taux spot Libor** $L(t, T)$

Ce taux en vigueur à la date t et de maturité T est noté $L(t, T)$; constant sur la période de placement $\tau = T - t$ ⁹⁴. C'est le taux proportionnel qui, appliqué à un montant placé en t de $P(t, T)$ unités monétaires, sur toute la période τ , produit un montant d'une unité monétaire en T . C'est tout simplement un taux d'intérêt périodique proportionnel.

Nous avons la formule suivante : $P(t, T) + P(t, T)L(t, T)\tau = 1 \Leftrightarrow L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{P(t, T)\tau}$

Nous l'appellerons « Taux spot Libor » ou « Taux spot Euribor » selon le choix du taux variable de référence⁹⁵.

- **Taux d'intérêt forward proportionnel : Taux forward Libor** $F^L(t, s, T)$

Rappelons que le **taux forward** noté $F(t, s, T)$ $t \leq s \leq T$, vu de la date t , commençant en s et d'échéance T s'exprime par la formule suivante :

$$f(t, s, T - s) = \left(\frac{B(t, s)}{B(t, T)} \right)^{\frac{1}{T-s}} - 1.$$

Nous allons à présent définir le **taux forward Libor** noté $F^L(t, s, T)$ par :

$$F^L(t, s, T) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, s)}{P(t, T)} - 1 \right) \quad \text{(III.19)}$$

⁹⁴ $T-t$ représente la durée en années de la date t à la date de maturité $T > t$.

⁹⁵ Le taux d'intérêt interbancaire de référence est le taux londonien Libor. Par la suite, si l'on ne précise pas, le fait de parler de « taux Libor » fera référence à n'importe quel autre taux interbancaire de marché. Dans les applications pratiques, nous utiliserons l'Euribor.

Ce taux « forward » proportionnel peut être vu comme une estimation du futur taux spot $L(s, T)$ à partir des conditions de marché en date t .

Par la suite, nous noterons également $L^f(t, T)$ ce taux « forward » vu en date t , sur la période futur $[T, T + \tau]$:

$$L^f(t, T) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \tau)} - 1 \right)$$

Ce taux à terme proportionnel correspond aux opérations à terme de la période $[T, T + \tau]$ initiées en date t . Pour $t=T$, $L^f(T, T)$ est le taux spot Libor, taux proportionnel en vigueur sur la période $[T, T + \tau]$.

- **Caplet sur un taux forward Libor**

Un « caplet » sur taux « forward Libor » est une option d'achat européenne ou « call » sur un taux « forward Libor ». Nous les avons définis dans la partie I en section 4.2.

- **Formules de Black pour les caps et les caplets (rappel)**

Soit un « caplet » de maturité T_i , de nominal L et de taux d'exercice E .

Les formules de Black *d'évaluation d'options sur contrats forward* nous permettent d'évaluer en date $t=0$, la valeur de ce « caplet » sur la sous période $[T_{i-1}, T_i]$:

$$\boxed{\text{Caplet}_i^{\text{Black}} = L \tau_i P(0, T_i) \cdot \left(f(0, T_{i-1}, T_i) N(d_i) - EN(d_i - v_i \sqrt{T_{i-1}}) \right)}$$

Où :

- ❖ $\tau_i = T_i - T_{i-1}$
- ❖ $f(0, T_{i-1}, T_i)$ est le taux « forward » vu en t , démarrant en T_{i-1} d'échéance T_i
- ❖ $d_i = \frac{\ln\left(\frac{F(0, T_{i-1}, T_i)}{E}\right) + \frac{1}{2} v_i^2 T_{i-1}}{v_i \sqrt{T_{i-1}}}$
- ❖ v_i est la volatilité du taux « forward » sous jacent $f(0, T_{i-1}, T_i)$. Elle est couramment appelée « **volatilité du caplet** » ou « **volatilité de Black** » et notée v_i^{Black}

b. La dynamique des taux « forward » du modèle de marché BGM

Nous voulons expliciter la dynamique suivie par les taux « forward » du modèle de BGM comme étant la somme d'un terme de « dérive » et d'un terme de diffusion stochastique.

Si l'on considère un modèle de BGM à d facteurs de risque indépendants et relatifs à l'incertitude des marchés Libor (le processus de Wiener du terme de diffusion étant d -multidimensionnel), alors le terme stochastique de diffusion peut s'écrire *de manière analogue* à l'étude faite en partie II :

$$\text{Diffusion} = \sum_{q=1..d} \sigma_{k,q}(t) dW_{k,q}(t) = \sigma_k(t) \cdot dW_k(t) \quad (\text{III.20})$$

Avec :

- ❖ $\sigma_{k,q} = \gamma_{k,q} \text{Fact}_q$ est la composante de volatilité du taux « forward » $F_k(t)$ attribuable au $q^{\text{ième}}$ facteur Fact_q . Nous l'appellerons « volatilité de BGM ».
- ❖ $W_{k,q}$ est la $q^{\text{ième}}$ composante du processus de Wiener de dimension d .

Dans certains cas, la dimension du processus de Wiener peut être réduite. Si les taux « forward » sont parfaitement corrélés, il n'y a plus qu'une seule dimension et qu'une seule source d'incertitude.

Il reste à préciser la formule du « drift » ; généralement, les modèles de taux diffèrent de par le choix de celui-ci. Nous l'exprimerons comme ceci : $\text{Drift} = \mu_k(t)dt$

Les variations de taux « forward » de marché du modèle de BGM suivent donc une dynamique stochastique dont le terme de diffusion est un processus de Wiener à plusieurs dimensions. La condition de compatibilité des prix de produits dérivés standards de taux cotés par le marché avec les formules de Black est indispensable à ce modèle de marché. La principale idée sous-jacente vient du fait que les « caps » sont des actifs très liquides et que par conséquent, leurs prix de marchés peuvent être considérés comme corrects et fiables. Ils pourront servir, de façon sûre, à caler le modèle de BGM ($\mu_k(t)$ et $\sigma_k(t)$ doivent être choisis en cohérence avec les formules de Black).

Afin d'explicitier la dynamique du modèle et de le calibrer, nous allons donc nous appuyer sur un « cap » de taux d'intérêt, dont le taux variable sous-jacent est le taux Libor (cadre théorique de l'étude). En pratique, par la suite, nous utiliserons des taux Euribor en référence aux données initiales de l'étude.

Nous rappelons que les instruments habituels de couverture de risque de taux comme les « caps » ou les « floors » s'appuient sur un ensemble fini de dates (dates de révision de taux et dates de paiement).

Soit l'ensemble $\mathbb{T} = \{T_0, T_1, T_2, \dots, T_M\}$ correspondant à l'armature de dates d'un tel instrument portant sur M sous périodes $[T_{k-1}, T_k]_{k=1..M}$. Ces dates sont les dates de constatation ou de réajustement des taux variables des « caps » négociés sur le marché. Les réajustements sont en général trimestriels ou semestriels.

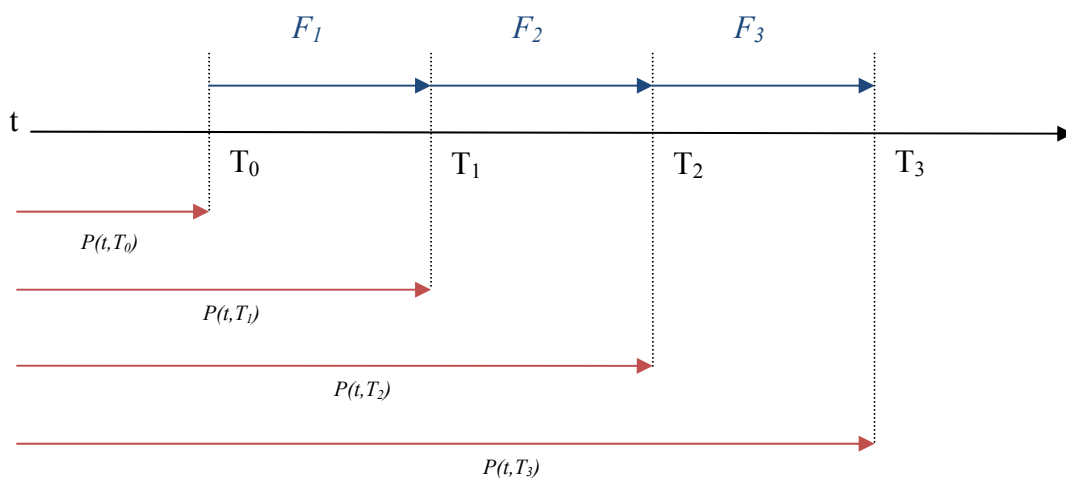
Notons également $T_I=0$ la date de signature du contrat du produit de taux « cap » et t la date courante. La durée des M sous périodes est égale, par définition, à $\tau_k = \tau = T_k - T_{k-1}$.

Soient les **taux forward Libor ou Euribor** $F_k(t)$, vus de la date t , commençant en T_{k-1} et d'échéances T_k tels que: $F_k(t) = F^L(t, T_{k-1}, T_k)$

En utilisant les notations de la section 2.1.a, le taux « forward » Libor associé à \mathbb{J} , se référant à la sous-période $[T_{k-1}; T_k]$ vérifie la relation suivante⁹⁶ :

$$F_k(t) = L^\tau(t, T_{k-1}) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right)$$

Voici un schéma illustratif de la structure de ces taux « forward » associés aux facteurs d'actualisation de la STTI en date t .



Voici à présent l'hypothèse fondamentale concernant la dynamique des taux « forward » $F_k(t)$ dans le modèle de marché BGM et sous la mesure de probabilité \mathcal{Q}_{T_k} associée au zéro-coupon d'échéance T_k :

- Si nous considérons à présent la mesure de probabilité \mathcal{Q}_{T_k} , appelée **probabilité forward-neutre**⁹⁷ associée au numéraire $P(t, T_k)$ ⁹⁸, alors, sous cette mesure, le taux « forward » Libor $F_k(t)$ est une \mathcal{Q}_{T_k} -martingale caractérisée par la dynamique stochastique suivante :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dW_k(t)$$

⁹⁶ Noté également $L_{k-1}^\tau(t)$.

⁹⁷ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

⁹⁸ $P(t, T_k)$ est le prix de l'obligation ZC dont la maturité coïncide avec la maturité du taux forward $F_k(t)$.

- $\sigma_k : \begin{cases} [0, T_{k-1}] \rightarrow \mathfrak{R} \\ t \rightarrow \sigma_k(t) \end{cases}$ sont les fonctions (déterministes, bornées et continues par morceaux) de volatilité des $F_k(t)$ pour $k=1, \dots, M$
- W_k est un processus de Wiener sous \mathcal{Q}_{T_k} à une seule composante, donc unidimensionnel.

Remarque : cette relation est explicitée dans le cas précis où il n'existe qu'un seul facteur de risque, pour un processus de Wiener à une seule composante.

Plus généralement,

- Si nous considérons d facteurs de risque, la dynamique stochastique dans l'univers \mathcal{Q}_{T_k} forward-neutre s'écrit alors :

$$\boxed{dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_k(t) \rangle}$$

Ou encore :

$$\boxed{dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_k(t) \rangle = F_k(t) \sum_{q=1..d} \sigma_{k,q}(t) dW_{k,q}(t)} \quad (\text{III.21})$$

- $\sigma_{k,q} : \begin{cases} [0, T_{k-1}] \rightarrow \mathfrak{R}^d \\ t \rightarrow \sigma_{k,q}(t) \end{cases}$ sont les fonctions (déterministes, bornées et continues par morceaux) de volatilité des $F_k(t)$.
- \langle , \rangle le produit scalaire sur \mathfrak{R}^d
- W_k est un processus de Wiener sous \mathcal{Q}_{T_k} à d composantes corrélées, donc multidimensionnel.

Preuve :

Nous avons par définition du taux « forward » : $F_k(t)P(t, T_k) = \frac{1}{\tau_k} (P(t, T_{k-1}) - P(t, T_k))$

D'après les résultats des rappels mathématiques et financiers, si l'on considère l'actif échangeable de prix $F_k(t)P(t, T_k)$ et le ZC de prix $P(t, T_k)$ comme numéraire, alors

$\phi = \frac{F_k(t)P(t, T_k)}{P(t, T_k)} = F_k(t)$ est une martingale sous la mesure de probabilité forward-neutre

\mathcal{Q}_{T_k} du numéraire $P(t, T_k)$. Par suite, le « drift » de la dynamique stochastique, dans cet univers, du taux « forward » $F_k(t)$ est nul. Nous retrouvons donc les deux dynamiques présentées ci-dessus \square

Remarque :

Soit W_k est un mouvement brownien à N composantes corrélées. Soit R la matrice de corrélation telle que : $(R)_{i,j} = \rho_{i,j}$ avec $\rho_{i,j} dt = dW_k^i dW_k^j$. Il existe alors une matrice B

inversible telle que $BB^T = R$. Cette matrice va représenter la matrice des X facteurs de corrélation les plus explicatifs des variations des taux « forward » (cf. ACP partie II, $X < N$). L'objet ici est de **réduire la dimension du processus de Wiener initial** (la dimension maximale étant le nombre de taux « forward » sur l'armature de dates, soit M).

Notons alors Z_k le mouvement brownien déduit de W_k par décorrélation⁹⁹ ; Nous avons alors la dynamique suivante :

$$\boxed{dF_k(t) = F_k(t)\sigma_k(t)^T B dZ_k(t)} \quad (\text{III.22})$$

Nous intégrerons par la suite ces corrélations dans les fonctions de volatilité de BGM :

$$\sigma^{BGM} = \text{volatilité} \times \text{Facteurs}$$

On obtient alors la dynamique : $dF_k(t) = F_k(t)\langle \sigma_k^{BGM}(t), dZ_k(t) \rangle$

Les deux dynamiques de taux « forward » ici explicitées ne s'appliquent qu'au taux « forward » d'échéance T_k et dans l'univers probabiliste Q_{T_k} . Nous voulons modéliser le comportement de **tous les taux forward simultanément et sous une même mesure**. Nous allons à présent chercher à exprimer la dynamique stochastique de tous les taux « forward » reliés à l'instrument « cap » d'armature de dates notée \mathbb{J} .

Pour cela, il faut connaître les techniques de **changement de numéraire**¹⁰⁰, pour passer de l'univers forward-neutre Q_{T_k} à l'univers forward-neutre $Q_{T_{k-1}}$.

Après quelques lignes de démonstration¹⁰¹, voici les dynamiques obtenues :

Les dynamiques des taux forward $F_k(t)$, dans l'univers de probabilité forward-neutre Q_{T_i} associé au numéraire $P(t, T_i)$, pour les différentes dates de l'armature, dans les trois cas $i < k, i = k, i > k$ sont respectivement :

$$dF_k(t) = \begin{cases} F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\tau_j F_j(t) \langle \sigma_j(t), \sigma_k(t) \rangle}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_i(t) \rangle & i < k, t \leq T_i \\ F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_i(t) \rangle & i = k, t \leq T_{k-1} \\ -F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau_j F_j(t) \langle \sigma_j(t), \sigma_k(t) \rangle}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_i(t) \rangle & i > k, t \leq T_{k-1} \end{cases}$$

Où W_i est le processus de Wiener de dimension d sous la mesure Q_{T_i} (III.23)

⁹⁹ Les vecteurs propres de la matrice de corrélation initiale représentent les directions décorrélant le brownien initial W_k . Ils sont orthogonaux.

¹⁰⁰ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

¹⁰¹ Cf. Annexe 9.1 : Modèle de BGM – Démonstrations.

Remarque : ici notons que $\sigma_k(t) = \sigma_k^{BGM}(t)$, et intègre les facteurs de risque indépendants. Chaque composante de la volatilité est attribuable à un facteur de risque (d facteurs ici). Etudions à présent la structure de volatilité du modèle de BGM c'est-à-dire les fonctions $\sigma_k(t)$ associées aux taux « forward » $F_k(t)$. Nous nous intéresserons également en détail à la *structure de corrélation* liée à ces taux.

c. Structure de volatilité et matrice de corrélation des taux « forward »

Nous allons, dans ce paragraphe, expliciter la structure de volatilité, notée $\sigma_k(t)$, des taux « forward » $F_k(t)$; et proposer une procédure standard permettant de caler le modèle BGM, à la fois aux volatilités de marché, mais aussi à la surface de corrélation des taux. La procédure exposée ici, et implémentée par la suite est largement empruntée à la thèse d'I. Grubisic.

$\sigma_k(t)$ sont les termes de diffusion dans les dynamiques des taux « forward » $F_k(t)$ (associés au mouvement brownien d -dimensionnel W_k) et s'analysent comme étant les volatilités instantanées au temps t pour les taux « forward » $F_k(t)$.

La première hypothèse forte consiste en l'écriture suivante de la structure de volatilité :

$$\boxed{\sigma_k(t) = \gamma_k(t).e_k(t)} \quad k=1, \dots, M$$

Avec :

- $(e_k)_{k=1..M} = \{e_1, \dots, e_M\}$ les vecteurs réels unitaires de dimension d des corrélations entre les taux « forward » (facteurs explicatifs ou vecteurs propres représentant la matrice B définie précédemment¹⁰²)
- $\gamma_k : [0, T_{k-1}] \rightarrow \mathfrak{R} +$ les fonctions de volatilités

Il y a une séparation explicite dans le choix des vecteurs e_k , relatifs à la structure de la corrélation et celui des fonctions de volatilité γ_k , liées aux prix des « caplets ». Il reste à spécifier cette volatilité ; que nous appellerons « *volatilité de BGM* ».

▪ Définition de la volatilité instantanée

Soit l'ensemble V_0 de volatilités implicites de Black des « caplets » de marché correspondants aux taux « forward » : $V_0 = \{v_i^{\text{Black}} \mid i=1, \dots, M\}$. Rappelons que les « caplets » sont cotés en volatilités sur le marché (obtenues par inversion de la formule de Black pour les prix de « caplets »); **La courbe de volatilité** ou « *structure par maturité des volatilités* » des « caplets » représente la volatilité exprimée en pourcentage en fonction de la maturité de départ du taux « forward » de référence sous jacent. Cette courbe de volatilité est généralement décroissante ou, croissante jusqu'à un ou deux ans de maturité puis décroissante. Le fournisseur de données Bloomberg nous les fournit en temps réel.

¹⁰² Nous verrons par la suite que $e_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,d})$, donc que la matrice B des d facteurs explicatifs constitue la nouvelle base orthogonal dans laquelle les volatilités seront exprimées.

Afin de poursuivre l'étude, nous devons préciser le résultat suivant¹⁰³ : le prix d'un « caplet » sur l'intervalle $[T_{i-1}, T_i]$, relatif au « cap » défini au **b.** dans le modèle de BGM *coïncide parfaitement avec celui de la formule de Black* pour ce même « caplet ».

$$\begin{cases} \text{Caplet}_i^{\text{BGM}}(F_i, E, \sigma_i) = \text{Caplet}_i^{\text{Black}}(F_i, E, v_i^{\text{Black}}) & (*) \\ (v_i^{\text{Black}})^2 = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_0^{T_i - T_{i-1}} \|\sigma_i(s)\|^2 ds & (**) \end{cases}$$

Le modèle de BGM est ainsi appelé « *modèle de marché des caps* », car le but de ce modèle est d'être compatible parfaitement avec les prix de marché des caps. Il y a cohérence parfaite entre le modèle BGM et le modèle de Black lorsque nous supposons que la relation (***) est vérifiée pour tout $i=1, \dots, M$.

Les fonctions σ_i sont définies afin que le modèle soit auto-calé sur les volatilités des prix de marché et que les corrélations historiques des taux « forward » soient reproduites. Nous allons à présent expliciter et implémenter une des multiples méthodes de calage de ce modèle.

D'après le résultat précédent, nous avons la relation, en date $t=0$, suivante :

$$\boxed{(v_i^{\text{Black}}(0))^2 = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \int_0^{T_i - T_{i-1}} \gamma_i^2(t) dt} \quad (\text{III.24})$$

Il faudra définir les fonctions γ_k sur tous les intervalles de temps $[T_i, T_{i+1}]$; et pour cela considérer l'ensemble $\Sigma_k = \{v_i^{\text{Black}_k}; i=1, \dots, M-k\}$ qui définit l'évolution de la structure de volatilité dans le temps c'est-à-dire l'évolution temporelle des courbes de volatilités implicites aux caplets de marché. A la date T_k , il reste « en vie » $M - (k+1)$ taux « forward ». En d'autres termes, nous devons connaître à la date $t=0$ toutes les courbes de volatilités futures Σ_k . Un moyen de résoudre ce problème consiste à faire l'hypothèse de constance de la forme des courbes de volatilité à travers le temps i.e. $v_i^{\text{Black}_k} = v_i^{\text{Black}_0}$ pour k allant de 1 à $M-1$. Cette hypothèse est assez envisageable économiquement et justifiée par les observations historiques de structure par maturité des volatilités implicites de « caplets ».

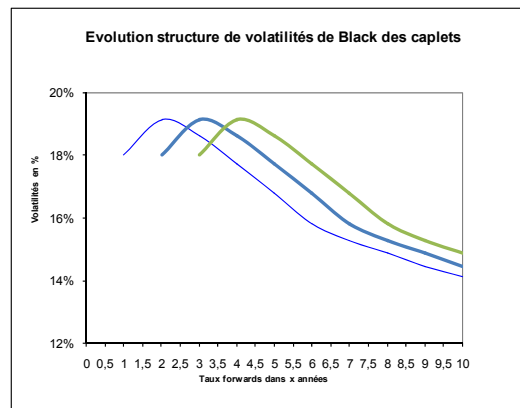


Figure 19 : évolution de la structure de volatilités des « caplets »

¹⁰³ La démonstration est faite par I. Grubisic : « *Interest rate Theory – The BGM model* ». 2002

Remarque :

Nous pouvons écrire la formule précédente en date t : $(v_i^{Black}(t))^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \int_t^{T_{i-1}} \gamma_i^2(u) du$

D'après I. Grubisic¹⁰⁴, la relation précédente et l'hypothèse faite sur l'évolution de la structure de volatilité permettent d'écrire γ_k à l'aide d'une fonction g telle que: $\gamma_k = g(T_{k-1} - t)$.

Elle est bornée, déterministe, intégrable et de dimension M, et s'écrit :

$$g = \eta_1 I_{(0, T_0]} + \eta_2 I_{(T_0, T_1]} + \dots + \eta_{j+1} I_{(T_{j-1}, T_j]} + \dots + \eta_M I_{(T_{M-2}, T_{M-1}]} = \sum_{j=0}^{M-1} \eta_{j+1} I_{(T_{j-1}, T_j]}$$

Avec
$$\begin{cases} \eta_{j+1} = \sqrt{\alpha_{j+1}} \\ \alpha_{j+1} = (j+1)(v_{j+1}^{Black})^2 - j(v_j^{Black})^2 \\ v_0^{Black} = 0 \end{cases}$$

A noter que le terme $(j+1)(v_{j+1}^{Black})^2 - j(v_j^{Black})^2$ doit évidemment être positif ou nul.

Nous avons, au final, l'expression suivante :

$$\gamma_k(t) = \eta_k I_{(0, T_0]}(t) + \eta_{k-1} I_{(T_0, T_1]}(t) + \dots + \eta_{k-j} I_{(T_{j-1}, T_j]}(t) + \dots + \eta_1 I_{(T_{M-2}, T_{M-1}]}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_{k-j} I_{(T_{j-1}, T_j]}(t)$$

Ainsi, cette volatilité instantanée, constante par morceaux, peut se représenter dans un tableau, comme suit :

Taux forward/temps	[0, T ₀]]T ₀ , T ₁]]T ₁ , T ₂]]T ₂ , T ₃]	...]T _{M-2} , T _{M-1}]
$F_1(t)$	η_1	Terminé	Terminé	Terminé	...	Terminé
$F_2(t)$	η_2	η_1	Terminé	Terminé	...	Terminé
...	Terminé
$F_M(t)$	η_M	η_{M-1}	η_{M-2}	η_{M-3}	...	η_1

De façon simplifiée, à la date courante t de valorisation du cap ($t < T_0$), l'hypothèse faite ici consiste à considérer la volatilité $\gamma_k(t)$ en t comme une fonction du nombre de périodes entières d'accumulation d'intérêts entre la prochaine date de réajustement et la date T_{k-1} . Soit η_j la valeur de $\gamma_k(t)$ quand le nombre de période est j. Ainsi $\gamma_k(t)$ est une fonction en escalier. Les η_j peuvent donc être estimés à partir des volatilités de Black des « caplets ». Pour le « caplet » de la période allant de T_{k-1} à T_k , nous avons :

$$(v_k^{Black}(t))^2 T_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_{k-j}^2 \tau$$

¹⁰⁴ La démonstration de l'égalité et le choix de la fonction g est faite par I. Grubisic dans sa thèse : « Interest rate Theory – The BGM model ». 2002.

Voici à présent un exemple d'application numérique pour l'estimation en date $t=0$ des fonctions volatilités γ_k (de BGM) des taux « forward » Euribor F_k . A partir des volatilités spot de marché des « caplets » du « cap » défini précédemment dont la structure de dates de réajustement est \mathbb{J} , nous allons calculer explicitement la formule employée pour le passage des volatilités de Black aux volatilités η_i de BGM. Ces volatilités seront estimées de façon itérative.

Application pratique :

En date 0, nous avons :

$$\left(v_i^{Black}(0)\right)^2 T_{i-1} = \int_0^{T_{i-1}} \gamma_i^2(t) dt = \left(\int_0^{T_0} \gamma_i^2(t) dt + \int_{T_0}^{T_1} \gamma_i^2(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} \gamma_i^2(t) dt + \dots + \int_{T_{i-2}}^{T_{i-1}} \gamma_i^2(t) dt \right) = \int_0^{T_{i-1}} \left(\sum_{j=0}^{i-1} \eta_{i-j} I_{(T_{j-1}, T_j]}(t) \right)^2 dt$$

Pour i allant de 1 à M , nous avons donc :

$$i=1 \quad \left(v_1^{Black}\right)^2 T_0 = \int_0^{T_0} \gamma_1^2 dt = \gamma_1^2 T_0 = \int_0^{T_0} \eta_1^2 dt = \eta_1^2 T_0. \quad \text{soit :} \quad \boxed{\eta_1^2 = \left(v_1^{Black}\right)^2 = \gamma_1^2}$$

$$i=2 \quad \left(v_2^{Black}\right)^2 T_1 = \int_0^{T_1} \gamma_2^2 dt = \int_0^{T_0} \gamma_2^2 dt + \int_{T_0}^{T_1} \gamma_2^2 dt = T_0 \cdot \eta_2^2 + (T_1 - T_0) \eta_1^2$$

$$\left(v_2^{Black}\right)^2 \times 2\tau = \tau \cdot (\eta_2^2 + \eta_1^2) \quad \text{soit :} \quad 2\left(v_2^{Black}\right)^2 = (\eta_2^2 + \eta_1^2)$$

$$\text{soit :} \quad \boxed{\eta_2^2 = 2\left(v_2^{Black}\right)^2 - \eta_1^2}$$

$$i=3 \quad \text{nous retrouvons :} \quad \boxed{\eta_3^2 = 3\left(v_3^{Black}\right)^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}$$

Voici donc la formule que nous allons utiliser dans le calcul des volatilités η_i de BGM, à partir des volatilités de Black (retrouvée par récurrence):

$$\eta_i^2 = i\left(v_i^{Black}\right)^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^2$$

D'où

$$\boxed{\eta_i = \sqrt{i\left(v_i^{Black}\right)^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^2}} \quad \text{(III.25)}$$

Ainsi, à partir d'un vecteur de volatilités de marché de « caplets » (V_0), nous recalculons dans un programme VBA, le vecteur des volatilités de BGM correspondant, pour ensuite le multiplier scalairement par les d -facteurs de risque (cf. dynamique des taux « forward » $F_k(t)$).

Dans le cas précis où le calcul des volatilités de BGM est impossible, car il fait apparaître des η_i complexes, du fait d'un terme $i(v_i^{Black})^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^2$ négatif à partir d'un certain i , il s'agit alors d'estimer les η_i par une méthode de moindres carrés.

Le meilleur estimateur pour $\eta = (\eta_i)_{i=1..M}$ peut être obtenu en résolvant le programme d'optimisation suivant :

$$\min_{\eta} \sum_i \left(i(v_i^{Black})^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \eta_j^2 \right)^2$$

Sous la contrainte : $\eta_i \geq 0$.

Le vecteur de volatilités BGM obtenu présente néanmoins certaines volatilités à 0 (ce n'est pas réaliste mais, à terme, cela conviendra dans l'implémentation du modèle à des fins de « pricing » de produits dérivés de taux simples).

Exemple numérique :

Le graphique suivant représente les volatilités de Black de « caplets » 3 mois pour un « cap » de taux d'exercice 3 % de durée 5 ans et de taux variable de référence l'Euribor 3 mois ; Ces données sont issues du Bloomberg. Nous pouvons appliquer la formule itérative fermée précédente afin d'obtenir les volatilités η_i de BGM correspondantes.

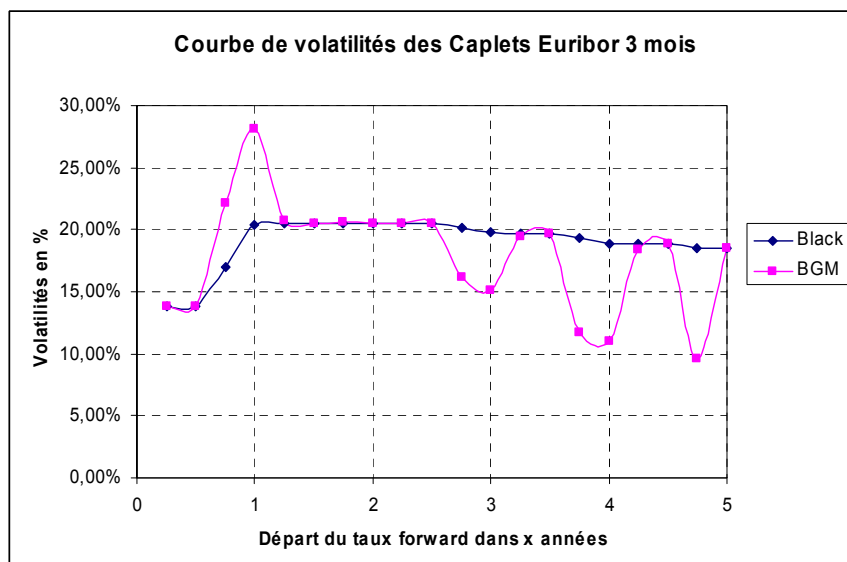
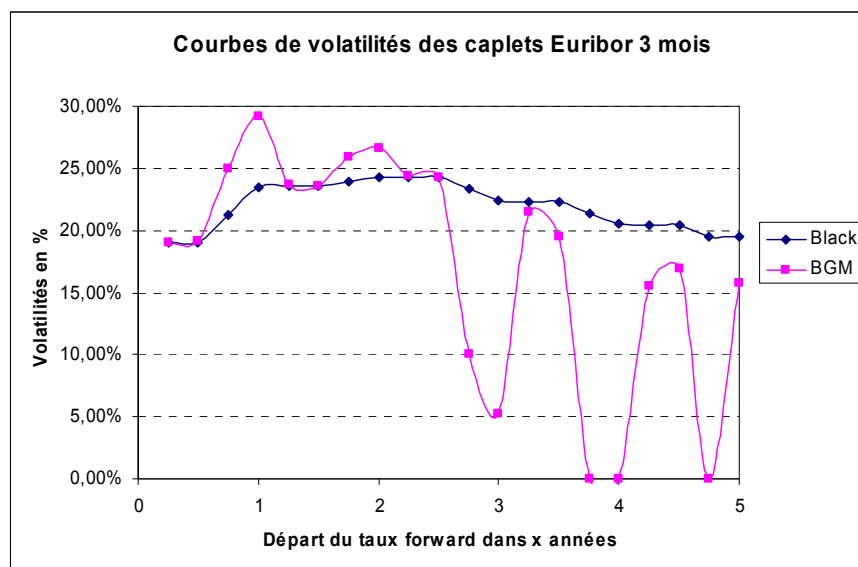


Figure 20 : volatilités de « caplets », de Black et de BGM

Nous donnons également un exemple de volatilités de Black de « caplets » 3 mois récupérées, qui ne permettent pas d'utiliser la formule fermée précédente ; c'est pourquoi dans ce cas précis, nous utilisons la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).

Indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Vols Black	19,06%	19,06%	21,24%	23,49%	23,54%	23,54%	23,89%	24,25%	24,27%	24,27%
Vols BGM	19,07%	19,09%	25,02%	29,23%	23,72%	23,53%	25,92%	26,62%	24,43%	24,29%
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
23,35%	22,39%	22,33%	22,33%	21,40%	20,50%	20,44%	20,44%	19,54%	19,54%	
10,04%	5,30%	21,47%	19,44%	0,00%	0,00%	15,58%	16,88%	0,00%	15,78%	



Remarque : le « cap » utilisé est un « cap » de taux d'exercice 6 % et de durée 5 ans.

- **Réduction de la dimension de la matrice de corrélation**

Nous allons à présent nous intéresser à la structure et au calibrage de la corrélation des taux « forward ». Dans la partie II de ce mémoire ainsi qu'en annexe 7, nous avons présenté et calculé les trois facteurs explicatifs des déformations de la courbe des taux ZC initiale à partir de la matrice de corrélation entre les variations historiques de ces taux zéro-coupon.

Dans le modèle de BGM, il s'agit également d'expliquer l'évolution stochastique des taux « forward ». Le nombre de facteurs explicatifs des déformations aléatoires de la trajectoire des taux « forward » correspondra à la dimension « réduite » du processus de Wiener de la dynamique stochastique suivie. En effet, comme évoqué en b. dans cette section, il convient de réduire la dimension du processus de Wiener du terme de diffusion. Par exemple, pour un « cap » de n années, subdivisé en sous-périodes de 6 mois (Euribor 6 mois comme taux variable de référence), la dimension *maximale* du processus de Wiener associé à la dynamique des taux « forward » et relative à l'armature de dates de cet instrument est $M = 2n - 1$. La matrice de corrélation historique a la même dimension. L'idée est d'implémenter un modèle de BGM où le processus de Wiener serait de dimension r comprise entre 1 et $2n - 1$.

La méthode d'obtention des facteurs les plus explicatifs des variations de taux pourrait être également la méthode d'analyse en composantes principales appliquée à la matrice des corrélations historiques instantanées entre les taux « forward ». Nous étudierons et

implémenterons plutôt la méthode innovante dite « de projection » détaillée dans la thèse d'I. Grubisic.

Nous allons simplement décrire très brièvement l'objet principal de la méthode algébrique employée ici sans la présenter réellement ni la démontrer¹⁰⁵.

Soit R la matrice de corrélation de dimension $M \times M$ et de rang $r \leq M$ correspondante aux corrélations historiques des taux « forward », et construite à partir d'observations journalières des taux sur une longue période. Supposons alors raisonnablement que la matrice reste inchangée dans le temps.

Deux problèmes concernant cette matrice de corrélation se dégagent et doivent être résolus :

- L'obtention des données historiques de taux « forward » à chaque date durant toute la période d'observation rend difficile la construction de la matrice de corrélation.
- Si le rang de la matrice de corrélation R correspond exactement au nombre de processus de Wiener (nombre de facteurs explicatifs suffisants) du modèle de BGM à implémenter (i.e. $r = d$), nous pouvons utiliser R directement afin d'extraire les composantes de volatilités de BGM sur chaque facteur de risque (R correspond à la matrice B).

En pratique, le rang de R est habituellement égal à M , ce qui implique un processus de Wiener M -dimensionnel pour le modèle de BGM. Il convient alors d'implémenter un modèle de BGM à d dimensions ($d < r$, processus de Wiener à d dimensions).

En ce qui concerne le premier point, il est possible de générer une matrice de corrélation paramétrique.

Le second point revient à trouver la matrice A de rang d « la plus proche » de la matrice historique R . En effet, implémenter un modèle de BGM avec un processus de Wiener de dimension d réduite, implique de résoudre le problème suivant :

Trouver la matrice A telle que : $\|R - A\| \leq \inf_{A_i \in R_r} \|R - A_i\|$

Où R_r est l'espace des matrices de corrélation de rang inférieur ou égal à d .

Il faudra ensuite décomposer la matrice A comme le produit matriciel BB^T avec $B \in R^{M \times d}$ la matrice des facteurs explicatifs.

Le choix de la norme reflète la notion de « matrices proches ». I. Grubisic va utiliser la norme de Frobenius¹⁰⁶.

Cette méthode décrite ici est la méthode dite **de projection**.

¹⁰⁵ La démonstration algébrique est trop longue et théorique pour être présentée dans cette étude. Il faudra se reporter à la thèse d'I. Grubisic pour en connaître les détails.

¹⁰⁶ Cf. Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques.

Définissons quelques ensembles :

- Soit S l'ensemble des matrices carrées de dimension M **semi-définie positive**¹⁰⁷

$$S = \{Y \in M^{M \times M} \mid Y \geq 0\}$$

- Soit U l'ensemble des matrices carrées de dimension M dont les termes diagonaux valent 1.

$$U = \{Y \in M^{M \times M} \mid y_{i,i} = 1, i = 1, \dots, M\}$$

- Soit R_d l'ensemble des matrices carrées de rang plus petit ou égal à d .

$$R_d = \{Y \in M^{M \times M} \mid \text{rg}(Y) \leq d, 1 \leq d \leq M\}$$

Ainsi R est une matrice de corrélation si et seulement si $R \in S \cap U$. Toutes ses valeurs propres sont positives.

Pour conclure, le problème à résoudre pour trouver la matrice A la plus proche de R en terme de norme matricielle de Frobenius devient :

$$\gamma(R) = \inf \{\|R - A\| \mid A \in R_d \cap S \cap U\}$$

D'après I. Grubisic, résoudre ce problème est équivalent à chercher la **projection** de la matrice R sur l'ensemble $K_d = S \cap U \cap R_d$. Il va falloir projeter la matrice sur les trois sous-ensembles S , U et R_d .

Il obtient numériquement la matrice A satisfaisant les conditions voulues à l'aide d'un algorithme de projection.

Enfin, par une décomposition en valeurs singulières¹⁰⁸, la matrice A va s'écrire $A = BB^T$, où $B \in R^{M \times d}$ et est normée. Nous prenons donc $(e_i)_{i=1..M} = (b_{i,1}, \dots, b_{i,d})$ comme base de vecteurs orthogonaux.

Nous n'allons pas poursuivre la démonstration de la méthode de projection. Pour avoir plus de précisions et connaître précisément l'algorithme utilisé par I. Grubisic, il faudra consulter son travail et notamment l'algorithme page 38 (cf. bibliographie). En revanche, nous avons implémenté cette méthode, ainsi que celle par l'analyse en composantes principales (ACP ou PCA en anglais) dans les applications sous VBA du modèle de BGM.

Rappel : la méthode de réduction de la dimension de la matrice de corrélation la plus utilisée est celle de l'ACP. Il faut trouver la matrice réelle B de dimension $M \times d$ telle que $A = BB^T$ (B correspondant ici aux d facteurs issus de l'ACP).

¹⁰⁷ Cf. Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques.

¹⁰⁸ « Singular Value Decomposition » en anglais. Cf. Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques.

▪ **Applications pratiques : calibrage de la volatilité et de la corrélation**

❖ Données et exemple d'I. Grubisic :

Nous allons reprendre l'exemple d'I.Grubisic et considérer le modèle de BGM dont la dynamique suit un processus de Wiener à d dimensions et qui met en œuvre 10 taux « forward » $F_k(t)$. Nous considérons l'armature $\mathbb{T} = \{0, 0.5, 1, \dots, 5.5\}$ correspondant aux dates de révisions d'un « cap » de durée 5 ans. L'intervalle de temps entre deux dates de révision du taux variable Libor est donc de 6 mois. En date $t=0$, les 10 taux « forward » initiaux ainsi que les volatilités de Black implicites des « caplets » sont les suivantes :

	[0.5,1]	[1, 1.5]	[1.5, 2]	[2, 2.5]	[2.5, 3]	[3, 3.5]	[3.5, 4]	[4, 4.5]	[4.5, 5]	[5, 5.5]
Indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fk(0)	5,01%	5,60%	5,84%	6,00%	6,13%	6,28%	6,27%	6,29%	6,23%	6,30%
vol black	18,03%	19,15%	18,62%	17,73%	16,79%	15,81%	15,27%	14,87%	14,47%	14,13%

Commençons par le calibrage de la structure de volatilité Σ_0 en déduisant les volatilités de BGM η_i de la formule itérative démontrée précédemment :

	[0.5,1]	[1, 1.5]	[1.5, 2]	[2, 2.5]	[2.5, 3]	[3, 3.5]	[3.5, 4]	[4, 4.5]	[4.5, 5]	[5, 5.5]
Indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vol black	18,03%	19,15%	18,62%	17,73%	16,79%	15,81%	15,27%	14,87%	14,47%	14,13%
vol BGM η_i	18,03%	20,21%	17,51%	14,74%	12,33%	9,50%	11,51%	11,69%	10,75%	10,59%

Il en résulte les fonctions de volatilités $\gamma_k(t)$ en date t :

$$\gamma_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_{k-j} I_{\left(\frac{j}{2}, \frac{j+1}{2}\right]}(t), \quad k=1..10, \quad t \leq \frac{k}{2} \quad (\text{III.26})$$

Nous allons utiliser la formule proposée par Rebonato¹⁰⁹ afin de construire la matrice de corrélation paramétrique R entre les taux « forward ».

Les composantes de la matrice sont de la forme :

$$\rho(i, j) = \theta + (1 - \theta) e^{-\rho |T_{i-1} - T_{j-1}|} \quad \text{avec } \rho = d_1 - d_2 \max(T_{i-1}, T_{j-1})$$

Les paramètres θ , d_1 et d_2 étant donnés par Rebonato : $\theta=0,3$; $d_1=-0,12$; $d_2=0,005$.

Voici la matrice de corrélation R de rang $r=10$ obtenue à l'aide d'une fonction **Corelparam** implémentée dans Excel :

1,000	0,958	0,916	0,876	0,837	0,799	0,763	0,729	0,696	0,665
0,958	1,000	0,957	0,915	0,874	0,834	0,796	0,760	0,725	0,692
0,916	0,957	1,000	0,956	0,913	0,872	0,832	0,793	0,756	0,721
0,876	0,915	0,956	1,000	0,955	0,912	0,870	0,829	0,790	0,753
0,837	0,874	0,913	0,955	1,000	0,954	0,910	0,867	0,826	0,787
0,799	0,834	0,872	0,912	0,954	1,000	0,953	0,909	0,865	0,824
0,763	0,796	0,832	0,870	0,910	0,953	1,000	0,953	0,907	0,863
0,729	0,760	0,793	0,829	0,867	0,909	0,953	1,000	0,952	0,906
0,696	0,725	0,756	0,790	0,826	0,865	0,907	0,952	1,000	0,951
0,665	0,692	0,721	0,753	0,787	0,824	0,863	0,906	0,951	1,000

Tableau 4 : matrice paramétrique de corrélation (R) entre les taux « forward »

Pour implémenter un modèle de BGM à 3 facteurs de risque ($d=3$) ; nous allons évaluer la matrice A de rang 3 la plus proche de R par la méthode de projection. Soit W la matrice

¹⁰⁹ REBONATO R. (1998) On the simultaneous calibration of multi-factor log-normal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix. *Journ. Comp. Fin.*

identité de dimension 10×10 (la méthode implique l'utilisation de cette matrice). En implémentant l'algorithme de la méthode à l'aide d'une fonction VBA nommée ***CaliR***, nous obtenons la matrice réelle B réduite des d -facteurs de dimension $M \times d$ (10×3) telle que $A = BB^T$ suivante :

0,889	-0,388	0,243
0,918	-0,362	0,161
0,947	-0,318	0,035
0,965	-0,217	-0,148
0,968	-0,077	-0,236
0,967	0,063	-0,244
0,963	0,206	-0,174
0,946	0,324	0,010
0,913	0,374	0,159
0,880	0,402	0,253

Tableau 5 : matrice « réduite » B

Cette fonction, réalisant la méthode de projection, a besoin en « input » d'une matrice identité W de la même taille que la matrice de corrélation, de la matrice de corrélation R de dimension $M \times M$ (10×10), du paramètre de tolérance ε (ici $\varepsilon = 0,001$) et de l'entier d correspondant aux nombres de facteurs voulus ($d = 3$).

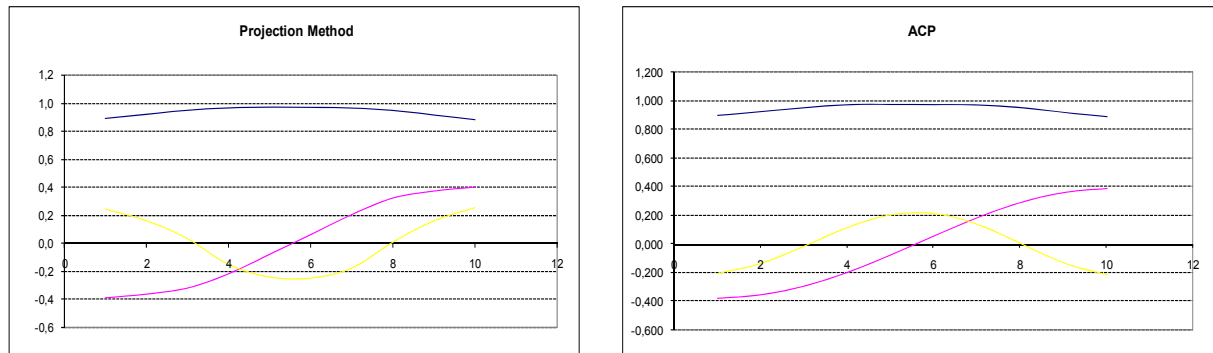
Nous calculons également cette matrice B de rang d à l'aide de la méthode ACP vue dans la partie II du mémoire. Il s'agit de calculer les vecteurs propres associés aux trois plus grandes valeurs propres de la matrice de corrélation paramétrique R ci-dessus ; et d'en déduire, d'après l'étude faite, la matrice réduite B suivante :

0,902	-0,378	-0,207
0,926	-0,352	-0,137
0,956	-0,292	-0,017
0,974	-0,195	0,114
0,977	-0,073	0,201
0,976	0,059	0,211
0,973	0,188	0,136
0,955	0,295	0,003
0,922	0,364	-0,133
0,894	0,393	-0,217

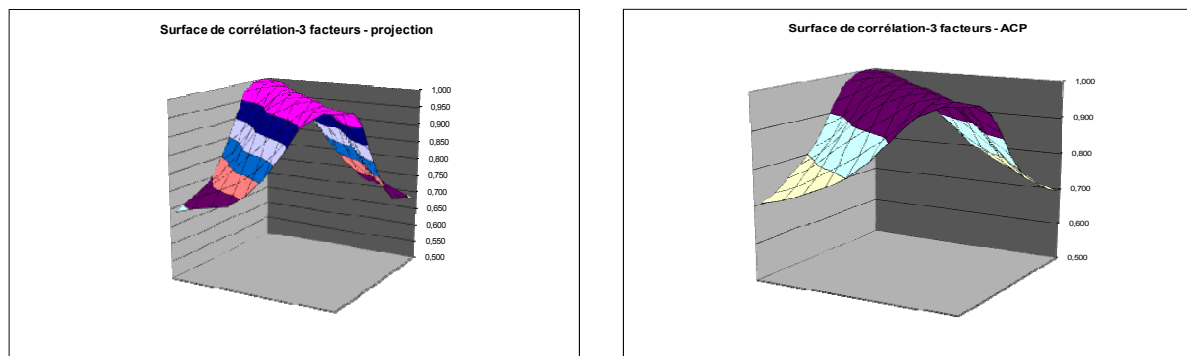
Tableau 6 : matrice « réduite » B – Méthode ACP

Voici les représentations graphiques des trois facteurs selon les deux méthodes (matrices B), ainsi que les surfaces de corrélations pour les matrices A de rang 3 « proches de R ». Nous représentons également en annexe 9.2 la surface de corrélation des taux « forward » (matrice de corrélation R paramétrique).

Facteurs de corrélations



Surfaces de corrélations



❖ Cap sur taux variable Euribor 3 mois :

De façon similaire, nous allons retrouver les matrices R , A et B selon les deux méthodes sur l'exemple d'un « cap » de taux de durée 5 ans et de « caplets » 3 mois. Les paramètres de détermination de la matrice de corrélation paramétrique seront les mêmes.

La matrice de corrélation R est donc de dimension 20×20 . Nous voulons également un modèle de BGM de dimension $d=3$.

Nous obtenons alors, selon les deux méthodes, les matrices réelles B réduites des d -facteurs de dimension $M \times d$ (20×3) telle que $A = BB^T$.

Les résultats matriciels et graphiques se trouvent en annexe 9.2.

Section 2.2 Implémentation et « pricings »

Dans cette section, il s'agit d'implémenter la dynamique vue précédemment du modèle de BGM à plusieurs facteurs. La méthode des simulations de Monte-Carlo va nous permettre d'évaluer, à l'aide de ce modèle, les produits dérivés de taux déjà calculés dans les chapitres précédents.

Nous utiliserons les techniques de calibrage des volatilités de Black ainsi que la « méthode de projection » pour l'obtention des matrices réduites B des d -facteurs.

Rappelons dans un premier temps le principe des *simulations de Monte-Carlo* ainsi que la méthode de *discrétisation d'Euler*.

a. Technique des simulations de Monte-Carlo et discrétisation d'Euler

▪ Méthode de Monte - Carlo

L'idée de la méthode de Monte Carlo est de produire un « large » échantillon (x_1, x_2, \dots, x_N) de taille N d'une loi d'une variable aléatoire X . Nous voulons obtenir une approximation de l'espérance d'une fonction g de cette variable aléatoire : $E(g(X))$.

A partir de cet échantillon, il s'agit de calculer un estimateur de cette espérance qui est la moyenne empirique : $\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(x_j)$

Nous connaissons, pour un nombre N très grand, et d'après le théorème central limite, l'approximation suivante :

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(x_j) \quad (\text{III.27})$$

C'est un *estimateur sans biais de l'espérance* dit « estimateur de Monte Carlo ».

Dans notre cas et concernant les équations différentielles stochastiques (EDS) du modèle de BGM présentées précédemment, il n'existe pas de solutions explicites de celles-ci ; c'est pourquoi, nous emploierons la pratique numérique des simulations de Monte-Carlo. Il conviendra alors de simuler un grand nombre N de trajectoires des taux « forward » à l'aide d'un *schéma de discrétisation d'Euler*.

▪ Schémas d'Euler

Soit l'EDS suivant le processus stochastique suivant : $dX_t = \mu_t(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dW_t$

Soit la partition de l'intervalle de temps $[0, T]$: $\{t_i \in [0, T] \mid 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$

Nous avons : $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta W_n = W_{n+1} - W_n$

Alors le schéma d'Euler est défini par l'égalité suivante :

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + \mu(t_n, X_{t_n})\Delta t_n + \sigma(t_n, X_{t_n})\Delta W_n \quad (\text{III.28})$$

b. Evaluations des produits dérivés de taux

▪ Introduction

Nous allons évaluer les mêmes produits de taux que dans les chapitres précédents, c'est-à-dire les « caps » et les « floors » de taux d'intérêts. Une fois le modèle calibré en termes de volatilités et de corrélations, nous pourrions estimer le prix de ces options.

Voyons donc à présent la démarche à suivre afin de les « pricer » à l'aide des simulations de Monte Carlo et des dynamiques stochastiques *discrétisées* du modèle de BGM.

Pour obtenir le prix d'un « cap » défini au début du chapitre, en date $t=0$, dépendant de l'évolution des taux « forward », nous estimerons l'espérance $E_{Q_{T_M}}(g(F(T)))$ (g est la fonction de « payoff » du « cap », T la date d'échéance, F le vecteur des taux forward F_k solution des dynamiques stochastiques de BGM sous la mesure de probabilité Q_{T_M}).

En effet, nous nous placerons sous la mesure de probabilité forward-neutre Q_{T_M} associée au numéraire $P(t, T_M)$ et appelée « *mesure terminale* ».

Si l'on note $F^{\Delta t} = (F_1^{\Delta t}, \dots, F_M^{\Delta t})$ le vecteur de taux « forward » discret relatif à $F = (F_1, \dots, F_M)$, et $\Delta t = T / M$ le pas de temps, alors l'approximation de Monte-Carlo avec N simulations est définie comme ceci :

$$E_{Q_{T_M}}(g(F(T))) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(F^{\Delta t}(T), j) \quad (\text{III.29})$$

Où l'indice j correspond à la $j^{\text{ième}}$ simulation de Monte Carlo.

▪ Formule discrète

Revenons sur la dynamique des taux « forward » afin d'explicitier sa forme discrétisée selon Euler. L'évolution des taux « forward » dans le modèle de BGM à plusieurs facteurs et *sous la mesure terminale* est décrite à travers le système d'équations différentielles stochastiques suivant¹¹⁰ :

$$dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_M(t) \rangle - F_k(t) \sum_{j=k+1}^{M-1} \frac{\tau F_j(t) \langle \sigma_k(t), \sigma_j(t) \rangle}{1 + \tau F_j(t)} dt \quad (\text{III.30})$$

C'est l'expression de la dynamique suivie par le taux « forward » Libor de l'armature du « cap » sous la probabilité forward neutre Q_{T_M} . Ce système admet une unique solution

$F = (F_1, F_2, \dots, F_M)$ pour laquelle il n'existe pas de forme analytique connue (hormis celle de F_M).

¹¹⁰ Cf. Annexe 9 : Le modèle de BGM.

Il faut alors générer N simulations de Monte Carlo des taux « forward », pour i allant de 1 à M :

$$(F_i(T_0), F_i(T_1), \dots, F_i(T_{M-1}))$$

D'après la dynamique (III.30) et le rappel sur la discrétisation d'Euler, nous pouvons écrire :

$$F_k(t_{n+1}) = F_k(t_n) + F_k(t_n) \langle \sigma_k(t_n), \Delta W_M(t_n) \rangle - F_k(t_n) \sum_{j=k+1}^{M-1} \frac{\tau F_j(t_n) \langle \sigma_k(t_n), \sigma_j(t_n) \rangle}{1 + \tau F_j(t_n)} \Delta t_n$$

Avec $0 \leq t_{n+1} \leq T_M$, $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ et $\Delta W_M(t_n) = W_M(t_{n+1}) - W_M(t_n) = \sqrt{t_{n+1} - t_n} \varepsilon_d^n$

Le processus de Wiener W est de dimension d (nous simulons donc plusieurs mouvements browniens). Nous pouvons écrire, sous la mesure terminale et en temps discret la dynamique suivante : $W(t_{n+1}) - W(t_n) = \sqrt{t_{n+1} - t_n} \varepsilon_d^n$; la variable aléatoire ε_d^n de dimension d suit une loi $N(0, I_d)$ où I_d est la matrice identité de dimension d .

Cette dernière équation devient (en utilisant les notations du paragraphe précédent) :

$$F_k^{\Delta t}(t_{n+1}) = F_k^{\Delta t}(t_n) + F_k^{\Delta t}(t_n) \langle \sigma_k(t_n), \varepsilon_d^n \rangle \sqrt{\Delta t} - F_k^{\Delta t}(t_n) \sum_{j=k+1}^{M-1} \frac{\tau F_j^{\Delta t}(t_n) \langle \sigma_k(t_n), \sigma_j(t_n) \rangle}{1 + \tau F_j^{\Delta t}(t_n)} \Delta t$$

Par suite, nous implémenterons la dynamique de $\ln(F_k(t))$ discrétisée d'Euler suivante ; celle-ci assure la positivité des taux « forward » simulés :

$$\ln(F_k^{\Delta t}(t_{n+1})) = \ln(F_k^{\Delta t}(t_n)) + \langle \sigma_k(t_n), \varepsilon_d^n \rangle \sqrt{\Delta t} - \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau F_j^{\Delta t}(t_n) \langle \sigma_k(t_n), \sigma_j(t_n) \rangle}{1 + \tau F_j^{\Delta t}(t_n)} \Delta t - \frac{\|\sigma_k(t_n)\|^2}{2} \Delta t$$

(III.31)

Avec $0 \leq t_{n+1} \leq T_M$, Δt le pas de temps, $i=1 \dots M$.

Nous avons réalisé plusieurs fonctions VBA reproduisant ces différentes dynamiques de génération des taux « forward » dans le modèle de BGM. Appliquons ces implémentations pratiques sur des exemples précis d'évaluations de « caps » et de « floors ».

Les prix de ces actifs dérivés de taux d'intérêts seront obtenus par la méthode de Monte-carlo, alliée au modèle de BGM, à l'aide de l'approximation (III.29).

- **Implémentation pratique du modèle de BGM à plusieurs facteurs et calculs de prix de caps et de floors.**

Nous avons procédé par étapes dans l'application et l'implémentation du modèle de BGM sous VBA en réalisant plusieurs fonctions appliquées à des exemples précédents.

Une première fonction renverra, sous forme de triangle, les taux « forward » générés par Monte Carlo et le modèle de BGM multifactoriel ; tandis qu'une seconde fonction utilisera ces derniers taux pour évaluer les options de taux d'intérêts.

❖ Triangle de diffusion de Monte-Carlo :

Nous allons travailler, comme précédemment, sur les deux exemples vus pour le calibrage de la volatilité et pour la réduction de la matrice de corrélation par la méthode de projection (nous utiliserons certains résultats obtenus).

- L'exemple de la thèse d'I. Grubisic : à partir des données de taux « forward » de marché et de volatilités de Black de « caplets » Euribor 6 mois d'un « cap » de durée 5 ans, nous recalculons les volatilités η_i de BGM déjà obtenues, pour ensuite appliquer le modèle de BGM à plusieurs facteurs ; afin de retrouver le triangle des taux forward issu de celui-ci.

- Les applications du mémoire (courbe ZC du 12/05/05, caps 2 ans et 5 ans sur Euribor 3 mois).

Dans les deux applications, le triangle des taux « forward » à générer va se présenter sous la forme suivante (sous l'armature de dates T_i déjà définie) :

Forward / Dates	T_0	T_1	T_2	...	T_{i-1}	T_i	T_{i+1}	...	T_{M-1}	T_M
$F_1(t)$	$F_1(T_0)$									
$F_2(t)$	$F_2(T_0)$	$F_2(T_1)$								
$F_3(t)$	$F_3(T_0)$	$F_3(T_1)$	$F_3(T_2)$							
$F_4(t)$										
...										
$F_i(t)$	$F_i(T_0)$	$F_i(T_1)$		$F_i(T_{i-1})$				
...										
...										
$F_M(t)$	$F_M(T_0)$		$F_M(T_{M-1})$	

La date 0 correspond à la date actuelle de valorisation choisie. Chaque intervalle de temps correspondra à un « caplet » du « cap » de maturité T_M que l'on désirera « pricer ». La première colonne sera les taux « forward » vus en date $t=0$ donnés (en ce qui concerne l'exemple de la thèse) ou recalculés à partir des taux zéro-coupon (pour l'exemple du

mémoire). Les dates ci-dessus sont espacées d'un pas de temps de trois ou six mois exprimé en années.

Pour l'exemple de la thèse le pas est de 6 mois, tandis que dans notre exemple, le pas sera de 3 mois. Nous calculerons les taux « forward » sur 5 ans pour évaluer des « caps » de maturités 2 ans et 5 ans.

Exemple de la thèse :

Nous reprenons donc l'exemple d'I.Grubic qui considère le modèle de BGM à 3 dimensions mettant en œuvre 10 taux forward $F_k(t)$ initiaux. L'armature $\mathbb{T} = \{0, 0.5, 1, \dots, 5.5\}$ représente les dates de révisions d'un « cap » de durée 5 ans. Rappelons, qu'en date $t=0$, les 10 taux « forward » de marché initiaux ainsi que les volatilités de Black implicites sont :

	[0.5,1]	[1, 1.5]	[1.5, 2]	[2, 2.5]	[2.5, 3]	[3, 3.5]	[3.5, 4]	[4, 4.5]	[4.5, 5]	[5, 5.5]
Indices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fk(0)	5,01%	5,60%	5,84%	6,00%	6,13%	6,28%	6,27%	6,29%	6,23%	6,30%
vol black	18,03%	19,15%	18,62%	17,73%	16,79%	15,81%	15,27%	14,87%	14,47%	14,13%

Tableau 7 : taux forward initiaux et volatilités implicites de Black de caplets

La fonction **ModBGM** que nous avons implémentée renvoie le triangle des taux « forward » selon la dynamique stochastique discrétisée du modèle de BGM multifactoriel (formule III.30). Ils sont obtenus à partir des données en entrée suivantes :

- Le vecteur de taux *initiaux (forward ou zéro coupon)*
- La *durée des caplets* (maturité en années des taux « forward » et pas Δt_n) et la *date finale* de l'échéancier: T_M
- La *matrice B réduite* des d facteurs indépendants issus de l'ACP ou de la méthode de projection (cf. section précédente)
- Le vecteur de *volatilités de Black* ou de *BGM* associées aux « caplets » (cf. tableau ci-dessus)
- Le *nombre N de simulations* de Monte-Carlo
- Le *numéro de la simulation* de Monte-Carlo, donc du triangle à représenter

Remarque : cette fonction laisse donc le choix à l'utilisateur du nombre N de triangles de BGM à générer i.e le nombre de simulations de Monte-Carlo, le choix du type de taux initiaux, ainsi que le type de volatilités (de Black ou directement de BGM).

Voici les paramètres utilisé pour cet exemple :

Paramètres	Valeur
Taux initiaux	<i>Taux forward (cf. tableau 7)</i>
Volatilités	<i>Black (cf. tableau 7)</i>
Δt	<i>0.5 an</i>
Date finale T	<i>5.5 ans</i>
Matrice B	<i>Méthode de Projection</i>
d	<i>3</i>
N	<i>5000</i>

Voici donc un des triangles de taux « forward » généré (parmi les 5000 simulés) :

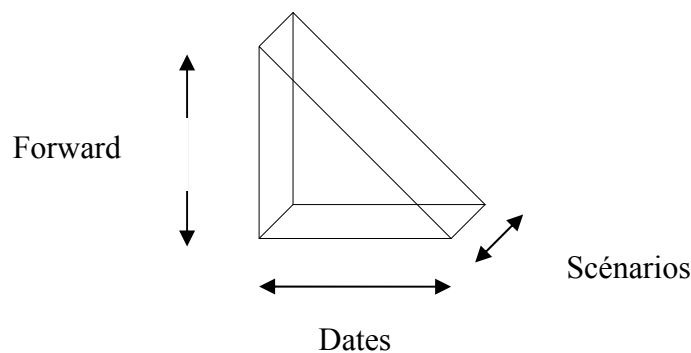
5,01%										
5,60%	5,84%									
5,84%	6,14%	5,94%								
6,00%	6,29%	6,00%	4,57%							
6,13%	6,38%	6,05%	4,39%	4,98%						
6,28%	6,51%	6,10%	4,56%	5,25%	5,58%					
6,27%	6,45%	6,06%	4,68%	5,28%	5,73%	6,24%				
6,29%	6,53%	6,19%	5,00%	5,48%	5,97%	6,77%	8,23%			
6,23%	6,49%	6,07%	5,19%	5,51%	6,03%	6,99%	8,75%	10,27%		
6,30%	6,55%	6,17%	5,17%	5,33%	5,83%	6,92%	8,45%	10,05%	10,24%	

Figure 21 : exemple de triangle BGM de taux forward

Nous transformons, au préalable dans la fonction, les volatilités de Black en volatilités de BGM (cf. sections et applications précédentes). Rappelons que les volatilités de BGM $\sigma_k(t) = \sigma_k^{BGM}(t)$ présentes dans l'équation discrétisé (III.31) intègrent les facteurs de risque indépendants. Chaque composante de la volatilité est attribuable à un facteur de risque. S'il y a d facteurs, le produit scalaire $\langle \sigma_k(t_n), \sigma_j(t_n) \rangle$ s'écrit $\langle \sigma_k(t_n), \sigma_j(t_n) \rangle = \sum_{q=1}^d \sigma_{k,q}(t) \sigma_{j,q}(t)$.

Enfin, cette fonction permet soit d'afficher un triangle de taux « forward » obtenu par une seule simulation, soit de stocker en mémoire dans une variable publique un triangle de taux en 3D, dont la troisième dimension correspond aux différents scénarios stochastiques de taux « forward » (N simulations de Monte-Carlo).

Nous appellerons ce triangle, de façon analogue au cube de diffusion de la première partie, le « **Triangle de diffusion** » des taux « forward » projetés :



Ainsi, pour toutes les valorisations de produits dérivés de taux, nous allons simuler et utiliser un grand nombre de triangles de diffusion avec différents paramètres judicieusement choisis ; et appliquer à ceux-ci une autre fonction VBA de calcul des options de taux par Monte-Carlo.

Données du mémoire :

Nous considérons à présent la date du 12 mai 2005 comme date de valorisation et d'actualisation, c'est pourquoi nous utilisons cette fois la courbe de taux zéro-coupon interpolée (aux mêmes dates de maturités que pour les parties précédentes) comme taux initiaux en « input » de la fonction de **ModBGM** réalisée.

Nous calculerons également les volatilités de BGM à partir de volatilités de Black de « caplets » 3 mois en cette date (cf. section précédente et annexe 9) ; puis à l'aide du modèle de BGM discrétisé, les projections des taux « forward » futurs.

De façon similaire, nous allons retrouver les matrices R , A et B selon les deux méthodes de réduction de matrice sur l'exemple d'un « cap » de taux de durée T années et de « caplets » Euribor 3 mois. Les paramètres de détermination de la matrice de corrélation paramétrique seront les mêmes.

La matrice de corrélation R est donc de dimension $4T \times 4T$. Le modèle de BGM implémenté ici est à 3 facteurs.

Nous retrouvons alors, selon les deux méthodes, les matrices réelles B réduites des d -facteurs de dimension $M \times d$ ($4T \times 3$) telle que $A = BB^T$ déjà obtenues (cf. annexe 9.2 pour $T=5$).

Voici les paramètres utilisés en entrée de la fonction :

<i>Paramètres</i>	<i>Valeur</i>
Taux initiaux	<i>courbe ZC (12 mai 2005)</i>
Volatilités	<i>Black</i>
Δt	<i>0.25 an</i>
Dates finales T	<i>5 ans et 2 ans</i>
Matrice B	<i>Projection (cf. annexe 9.2)</i>
D	<i>3</i>
N	<i>5000</i>

Nous calculons 5000 triangles de diffusion pour des « caps » de maturité 5 ans et 2 ans, de taux variable de référence l'Euribor 3 mois ; et ce, pour les matrices de volatilités de Black en date du 12 mai 2005 suivantes :

Volatilités de Black pour un cap/floor 2 ans au 12/05/2005

<i>Maturités (années) / Strike</i>	<i>2%</i>	<i>3%</i>	<i>4%</i>	<i>5%</i>	<i>6%</i>
0,25	12,85%	13,77%	14,99%	17,19%	19,06%
0,5	12,85%	13,77%	14,99%	17,19%	19,06%
0,75	15,96%	17,02%	18,07%	19,64%	21,24%
1	19,18%	20,38%	21,26%	22,19%	23,49%
1,25	19,25%	20,45%	21,33%	22,24%	23,54%
1,5	19,25%	20,45%	21,33%	22,24%	23,54%
1,75	20,89%	20,47%	21,34%	22,55%	23,89%
2	20,89%	20,47%	21,34%	22,55%	23,89%

Figure 22

Volatilités de Black pour un cap/floor 5 ans au 12/05/2005

Maturités (années) / Strike	2%	3%	4%	5%	6%
0,25	12,85%	13,77%	14,99%	17,19%	19,06%
0,5	12,85%	13,77%	14,99%	17,19%	19,06%
0,75	15,96%	17,02%	18,07%	19,64%	21,24%
1	19,18%	20,38%	21,26%	22,19%	23,49%
1,25	19,25%	20,45%	21,33%	22,24%	23,54%
1,5	19,25%	20,45%	21,33%	22,24%	23,54%
1,75	20,89%	20,47%	21,34%	22,55%	23,89%
2	22,62%	20,48%	21,34%	22,88%	24,25%
2,25	22,70%	20,48%	21,34%	22,89%	24,27%
2,5	22,70%	20,48%	21,34%	22,89%	24,27%
2,75	22,60%	20,13%	20,62%	22,03%	23,35%
3	22,49%	19,76%	19,86%	21,13%	22,39%
3,25	22,48%	19,74%	19,81%	21,07%	22,33%
3,5	22,48%	19,74%	19,81%	21,07%	22,33%
3,75	22,21%	19,31%	19,11%	20,23%	21,40%
4	21,94%	18,90%	18,44%	19,41%	20,50%
4,25	21,92%	18,87%	18,39%	19,35%	20,44%
4,5	21,92%	18,87%	18,39%	19,35%	20,44%
4,75	21,95%	18,50%	17,79%	18,45%	19,54%
5	21,95%	18,50%	17,79%	18,45%	19,54%

Figure 23

En annexe 9.2, nous présentons le triangle des taux « forward » obtenu par la fonction modBGM sur un scénario, pour le vecteur de volatilités de Black correspondant au « strike » 3 % d'un « cap » 5 ans sur Euribor 3 mois.

En effet le vecteur de volatilités de Black choisi va dépendre du « strike » de l'option à « pricer ». Il est disponible sur Bloomberg en temps réel. Toutes les études empiriques montrent qu'il existe une structure par terme des volatilités, qui ne sont pas constantes avec les prix d'exercice.

On appelle « *smile de volatilité* » les courbes *convexes* représentant la volatilité implicite en fonction du prix d'exercice des options pour une échéance/maturité T donnée. En théorie, on obtient une forme caractéristique de « sourire » persistante au cours du temps. Lorsque les options sont en dedans ou en dehors de la monnaie, les volatilités implicites associées sont plus élevées que celle à parité. On l'appelle « *skew de volatilité* » lorsque cette courbe est linéaire. A chaque pas de la simulation de la trajectoire du taux, nous calons la volatilité donnée par le « smile ».

Nous aurions pu faire l'hypothèse simplifiée d'un vecteur de volatilité constant pour chaque « strike » ou même une valeur constante de volatilité quel que soit le « caplet » ou le « strike » ; mais dans une optique de justesse, nous préférons utiliser ces « smile ». Pour information, ils sont très utilisés par les investisseurs pour évaluer par Monte-Carlo des options complexes sur le marché d'options sur devises étrangère ou sur capitaux propres.

Remarque :

Ces volatilités de Black sont transformées dans la fonction VBA en volatilités de BGM par la formule itérative (III.25). Cependant, lorsque cette opération est impossible, il est nécessaire d'utiliser la méthode des moindres carrés (vue en section 2.1.c) afin de transformer ces vecteurs de volatilités en volatilités dites de BGM. La fonction accepte alors directement les volatilités de BGM sans avoir besoin de les recalculer. Il suffit de préciser la nature de ces volatilités en entrée.

C'est le cas pour les vecteurs de volatilités de « strike » 4 %, 5 % et 6 % :

Vol BGM transformées par MCO

4%	5%	6%
15,10%	17,19%	19,07%
14,78%	17,22%	19,09%
23,16%	23,77%	25,02%
28,68%	28,51%	29,23%
21,78%	22,45%	23,72%
21,26%	22,25%	23,53%
21,29%	24,31%	25,92%
21,48%	25,05%	26,62%
21,24%	22,97%	24,43%
21,69%	22,95%	24,29%
10,31%	9,50%	10,04%
7,26%	5,51%	5,30%
19,37%	20,21%	21,47%
19,14%	18,86%	19,44%
1,34%	0,05%	0,00%
0,59%	0,00%	0,00%
16,70%	15,41%	15,58%
17,27%	15,47%	16,88%
0,00%	0,00%	0,00%
16,86%	14,30%	15,78%

Figure 24

❖ Evaluations de caps et de floors par Monte-Carlo à l'aide du triangle de diffusion :

Après avoir générés les triangles de diffusion des taux « forward » grâce à la dynamique discrétisée du modèle de BGM (III.31), il reste à appliquer la méthode de Monte-Carlo sur ces résultats. En effet, nous avons calculés et stockés N scénarii de Monte-Carlo, soit N triangles de taux « forward » (pour N allant de 1000 à 10000).

Rappelons que, pour obtenir le prix d'un « caplet » défini au début du chapitre, en date $t=0$, dépendant de l'évolution des taux « forward », nous estimerons l'espérance $E_{Q_{T_M}}(g(F(T)))$ sous la mesure de probabilité Q_{T_M} . La fonction g sera le « payoff » du « caplet » évalué.

En pratique nous avons obtenus N vecteurs discrets $F^{\Delta t} = (F_1^{\Delta t}, \dots, F_M^{\Delta t})$ de taux « forward » avec un pas de temps de 3 ou 6 mois. Nous pouvons donc appliquer l'approximation (III.29)

$$\text{sur les } N \text{ tirages réalisés: } E_{Q_{T_M}}(g(F(T))) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g(F^{\Delta t}(T), j)$$

La valeur du « cap » (ou du « floor ») s'obtient donc par sommation des « caplets », et la valeur de ces derniers en appliquant cette formule pour un grand nombre N de trajectoires.

Nous reprenons donc les données des deux exemples traités précédemment et évaluons donc, avec les « univers de Monte-Carlo » déjà constitués, le « cap » de durée 5,5 années de la thèse et les deux « caps » de 2 ans et 5 ans que nous avons déjà traités.

Le « caplet » actualisé en date t sur l'intervalle $[T_{k-1}, T_k]$ s'écrit comme ceci :

$$Caplet_k(t) = L\tau P(t, T_k) \text{Max} \left[0; L^r (T_{k-1}; T_{k-1}) - K \right] = L\tau P(t, T_k) \text{Max} \left[0; F_k^{\Delta t}(T_{k-1}) - K \right]$$

K est le « strike » du « cap » et τ le pas de temps. Les taux « forward » $F_k^{\Delta t}(T_{k-1})$ sont les éléments diagonaux du triangle des taux « forward » (en verts).

Il suffit de calculer la moyenne de chaque $caplet_k$ sur tous les scénarii et de sommer ces caplets moyens ($k=1..M$).

$$D'o\grave{u} \text{ la valeur du cap en } t : cap(t) = \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Caplet_k(t; F_{k,j}^{\Delta t}(T_{k-1}); j) \right) \quad (III.32)$$

Avec j le j ème scénario de taux « forward » simulé, et $F_{k,j}^{\Delta t}(t)$ les taux « forward » associés.

Applications aux deux exemples récurrents :

Nous avons implémenté une fonction VBA, nommée **CalculOptionBGM**, qui calcule des « caps » ou des « floors » (que l'on appellera CAP BGM ou FLOOR BGM), au choix, à partir des triangles de diffusion de Monte-Carlo définis précédemment et stockés en mémoire dans une variable publique à trois dimensions. La fonction **OptionTheo** calcule, quant à elle, ces mêmes options avec les formules de Black (CAP THEO ou FLOOR THEO).

Les paramètres en entrée de la fonction **CalculOptionBGM** sont le triangle3D de diffusion préalablement calculé avec **ModBGM** et les paramètres relatifs aux options à évaluer tels que le prix d'exercice de l'option de taux et la durée des intervalles de temps.

Les « caps » et « floors » évalués seront ceux des exemples pris pour construire les triangles de diffusion des applications précédentes. Nous utiliserons par conséquent les triangles de Monte-Carlo obtenus et les mêmes paramètres (pas, durées, volatilités, taux initiaux).

Voici les résultats obtenus sur les deux exemples pour des « strike » allant de 2 % à 6 % et pour des triangles de diffusion de taux « forward » comprenant 1000, 5000 et 10000 scénarii.

- Exemple du « cap » 5,5 ans de la thèse (5000 tirages) :

Strike	CAP BGM	CAP THEO	Erreurs
3%	12,42%	11,83%	4,99%
4%	8,24%	7,91%	4,17%
5%	4,53%	4,57%	-0,85%
6%	2,31%	2,37%	-2,37%

- Exemple du « cap » 5 ans du mémoire avec la courbe ZC du 12 mai 2005 :

Nous avons évalué ce « cap » pour différents nombres de scénarii et, dans un premier temps, avec un **unique vecteur de volatilités** de Black quel que soit le « strike » ; puis, dans un second temps, avec **une matrice de volatilité**.

Vecteur unique de volatilités

1000 tirages

Strike	CAP BGM	CAP THEO	Erreurs
2%	4,23%	4,35%	-2,80%
3%	1,79%	1,90%	-5,70%
4%	0,79%	0,85%	-7,22%
5%	0,36%	0,39%	-7,30%
6%	0,17%	0,18%	-5,78%

10000 tirages

Strike	CAP BGM	CAP THEO	Erreurs
2%	4,34%	4,35%	-0,19%
3%	1,84%	1,90%	-3,17%
4%	0,82%	0,85%	-3,52%
5%	0,38%	0,39%	-2,90%
6%	0,18%	0,18%	-2,04%

Matrice de volatilités (Smile)

1000 tirages

Strike	CAP BGM	CAP THEO	Erreurs
2%	4,23%	4,34%	-2,70%
3%	1,59%	1,72%	-7,57%
4%	0,70%	0,75%	-6,20%
5%	0,29%	0,30%	-2,07%
6%	0,15%	0,16%	-2,17%

10000 tirages

Strike	CAP BGM	CAP THEO	Erreurs
2%	4,37%	4,34%	0,74%
3%	1,72%	1,72%	-0,38%
4%	0,72%	0,75%	-3,13%
5%	0,29%	0,30%	-2,41%
6%	0,16%	0,16%	2,20%

Nous comparons les prix des options obtenus par BGM avec ceux, théoriques, issus des formules de Black et de la fonction *OptionTheo*. Les erreurs (ou écarts) diminuent, globalement, avec le nombre de tirages. Les résultats apparaissent plus satisfaisants avec 10000 scénarii de taux « forward » (i.e. 10000 triangles). Ils s'améliorent également lorsque l'on utilise une matrice de volatilités de Black plutôt qu'un vecteur constant quel que soit le prix d'exercice de l'option de taux. L'erreur maximum faite avec 10000 scénarios est d'environ 3 %.

En annexe 9.3, nous présentons et confirmons ces résultats sur des évaluations de prix de « floors » de mêmes caractéristiques et ce pour les deux exemples précédents.

Remarque : les volatilités de Black utilisées pour le calcul des « caps » dits « théoriques » avec la formule de Black sont représentées par un vecteur de volatilités de « caplets » constant avec le prix d'exercice (cf. annexe 9.3).

Section 2.3 De nombreux avantages « pratiques »

Les résultats de la section précédente sont assez positifs et confirment les nombreux avantages de ces récents modèles de marché et plus particulièrement ceux du modèle de BGM étudié. Le fait que les taux générés soient assurément positifs, distribués selon une loi log-normale et que les taux « forward » Libor ou Euribor en entrée du modèle soient directement observables sur le marché, contribuent fortement à sa popularité parmi les acteurs bancaires du marché.

De plus, ce modèle s'appuie sur des actifs très liquides comme les « swaps » et les « caps » ; et peut se calibrer plus facilement à partir des prix de marchés de ces derniers. En effet, ce sont les taux « forward » qui déterminent le prix des « caps » et « construisent » les scénarii de BGM.

Enfin, il donne une certaine liberté de choix dans la structure de volatilité à considérer, et notamment la possibilité de prendre en compte les « smile » ou « skew » de volatilité : ce qui renforce la précision des valorisations stochastiques des produits dérivés de taux d'intérêts.

Néanmoins, sa mise en œuvre est complexe ; le calibrage et la modélisation de la structure de volatilité restent non triviaux. Du fait de l'absence de solutions explicites des équations différentielles stochastiques et de l'impossibilité d'utiliser un arbre recombinaison, le recours à des simulations de Monte-Carlo, coûteuses en termes de temps de calcul, est inévitable. Enfin l'implémentation pratique sous VBA est très technique.

Partie IV. Analyse comparative et perspectives de mise en œuvre

Nous allons conclure ce mémoire par une rapide synthèse comparative des résultats obtenus et des modèles mis en place, dans le but d'avoir une idée plus précise d'une éventuelle méthodologie à suivre pour la génération et l'emploi des courbes de taux d'intérêts futurs ; la plus adaptée possible au besoin d'un service d'A.L.M bancaire en générale, et pour l'A.L.M de la Caisse des Dépôts en particulier.

Chapitre 1. Comparatif des résultats issus des différentes modélisations

- *En termes de « valorisations » et de résultats :*

Dans ce chapitre, nous rappelons les valorisations obtenues d'un « cap » de durée 5 ans en date du 12 mai 2005 et avec la courbe ZC reconstruite à cette date. C'est l'exemple traité dans les parties précédentes.

Strike	CAP BGM	CAP HW	CAP Black
2%	4,374%	4,536%	4,342%
3%	1,717%	1,954%	1,724%

Tableau 8 : comparatif des résultats des différents modèles

Pour la valorisation par BGM, nous présentons les résultats d'évaluations avec 10000 scénarii de Monte-Carlo et l'emploi d'une matrice de volatilités (un vecteur différent de volatilités de Black pour les prix d'exercice 2 % et 3 %). Le taux variable de référence est l'Euribor 6 mois ; le pas de temps est de 0,5 an.

En ce qui concerne les résultats issus de l'arbre recombinaut de H&W à un facteur, il s'agit également du prix d'un « cap » sur l'Euribor 6 mois. Le pas de temps est de 0,01 an. Les paramètres de volatilités sont $a = 0,00738773$ et $\sigma = 0,01186$.

Il apparait que les résultats de BGM sont les plus proches des prix théoriques issus des formules de Black. Ils sont également plus proches des prix du fournisseur Bloomberg (ICAP). Ce modèle semble donc plus optimal en termes de « pricing » de produits dérivés de taux.

Nous ne présentons pas les évaluations issues de l'analyse historique faite en partie II, celles-ci n'étant pas très satisfaisantes. Cette partie fait plutôt office d'introduction et de présentation des facteurs de risques et de l'analyse en composantes principales ; éléments essentiels pour les modélisations qui ont suivi. Elle nécessite encore un travail d'approfondissement et de recherche sur la modélisation de la tendance suivie par les taux.

- ***En termes de charge de travail et de temps de calcul***

Les implémentations sous VBA des modèles de H&W et de BGM ne se démarquent pas réellement en termes de difficulté de programmation. De façon subjective, celle de l'arbre de H&W semble plus technique et délicate. Concernant les temps de calculs, la valorisation des produits de taux par l'arbre recombinaison de H&W à un facteur est nettement plus rapide. En effet, par BGM, les 10000 simulations de Monte-Carlo minimum rendent l'évaluation sous Excel assez longue. Enfin dans les deux modélisations, le calibrage est un point important et complexe, qui a demandé beaucoup de temps d'étude et de recherche.

Chapitre2. Quelles mises en œuvre et projets d'améliorations?

Avant d'effectuer mon stage au sein du service de gestion actif-passif de la section générale de la Caisse des dépôts et consignations, et donc d'entamer ce travail de recherche sur différentes modélisations stochastiques visant à construire et projeter une structure par terme des taux d'intérêts, nous projetions de mettre en œuvre ces implémentations et résultats, i.e. de les utiliser en production régulière. Nous voulions utiliser à la fois les résultats obtenus mais aussi l'expérience acquise sur le sujet pour satisfaire aux besoins du service. Il avait été envisagé de trouver une méthodologie à suivre consistant à exploiter le travail effectué à l'aide du logiciel de gestion de risque ALM RiskPro™, en production durant cette période.

N'ayant pas eu le temps, avant la fin de mon stage, de poursuivre sur ce sujet et n'ayant plus accès à ce logiciel financier de « risk management », nous proposons néanmoins de réfléchir plus globalement à la façon d'utiliser ces travaux de recherche et scénarii de taux générés ; et de réfléchir aux éventuels développements. Nous ferons part de nos idées d'améliorations et de développements dans la conclusion générale du mémoire.

Nous nous baserons sur l'actuel progiciel d'ALM en production dans le service de gestion actif-passif auquel j'appartiens en ce moment. Ce logiciel, américain, nommé QRM¹¹¹, est un logiciel de « risk management » très utilisé par les établissements bancaires et les compagnies d'assurance.

Rappelons que le gestionnaire actif-passif doit, entre autres choses, ***protéger les marges d'intérêts face aux variations des conditions de marché des taux***, optimiser les emplois/ressources et le résultat, allouer les actifs financiers.

Pour cela il doit mesurer et ***suivre les risques de taux***, de change, de crédit et de contrepartie ; ***anticiper la structure du bilan, les conditions de marché*** ; piloter la liquidité et enfin allouer les fonds propres.

Etant donné l'objet du mémoire, nous allons faire un focus sur la protection des marges d'intérêts face aux variations de marchés de taux c'est-à-dire l'établissement d'une couverture contre le risque de taux généré par des positions de bilan prises (prêt/emprunt à taux fixe/variable). Elle peut être faite, comme nous l'avons vu en partie I, de façon « micro » avec des produits de couverture comme les « swaps », « caps » et « floors » ; ou de façon plus « macro » en équilibrant globalement les risques de taux du bilan.

¹¹¹ Quantitative Risk Management.

Nous distinguerons donc trois besoins précis : la prévision des marges d'intérêts futurs, le calcul du risque global de taux (cf. partie I) et l'évaluation des produits simples de couverture.

- Prévision des marges d'intérêts et calcul du risque global de taux :

Nous avons, dans les deux cas, besoin de prévoir les trajectoires futures des taux variables sur lesquels sont indexés les actifs financiers du bilan (prêts ou titres à taux variables) dans l'optique d'estimer les futures marges d'intérêts des comptes de résultat projetés.

Pour cela, nous pouvons difficilement utiliser les résultats des arbres recombinaux du modèle de H&W. D'une part, l'arbre ne représente pas une trajectoire prévue des taux d'intérêts courts (ou longs même), d'autre part, l'univers risque-neutre de ce modèle ne semble pas convenir. Il est important d'avoir un scénario économique à court, moyen et long terme sur lequel devrait se caler le modèle. L'idéal serait d'avoir des trajectoires de taux issues d'un modèle stochastique qui « passeraient » par des « cibles économiques » (basées par exemple sur des prévisions de l'Euribor 3 mois ou l'OAT 10 ans dans x années).

Les modèles de Black-Karasinski et de H&W à deux facteurs (cf. Partie III, chapitre 1, section 1.1) semblent plus convenir pour de multiples raisons déjà évoquées, et notamment pour obtenir une trajectoire de taux moyenne (issue des trajectoires de Monte-Carlo).

Nous pourrions donc mettre en place ces modèles en se basant sur l'implémentation et le calibrage de H&W à un facteur ; et intégrer une méthode de « ciblage » sur un scénario économique défini au préalable.

Une fois les modèles implémentés et calibrés, il suffit de générer des cubes de diffusions ou « univers de Monte-Carlo » adéquats, correspondants aux trajectoires voulues de taux d'intérêts ; et de les alimenter dans des tables en entrée du progiciel. Le progiciel établira lui-même les bilans, marges d'intérêts et compte de résultats futurs. Il pourra calculer également les Valeurs Actuelles Nettes des différents postes du bilan selon la date de valorisation choisie et donc la courbe de taux ZC initiale.

Une autre alternative serait d'utiliser les modèles déjà implémentés dans le progiciel d'ALM (BK, H&W à un ou deux facteurs, BGM, Black-Derman-Toy,...). Il suffit pour cela d'alimenter la courbe de taux couponnée ou zéro-couponnée en date initiale, ainsi que les paramètres de volatilités et matrices de corrélations. Le logiciel générera les trajectoires de Monte-Carlo des taux voulus (selon les maturités par exemple).

- Evaluations des produits de couverture : « swaps », « caps » et « floors » :

En ce qui concerne le « pricing » de ces produits dérivés de taux, nous utiliserons de préférence le modèle de BGM implémenté et calibré. Nous en avons vu tous les avantages pour évaluer des « caps » et des « floors ». Nous pouvons néanmoins nous servir des arbres de taux recombinaux également programmés car, dans un but unique de « pricing », l'univers risque-neutre est approprié. Il reste cependant à consolider l'outil dans Excel pour qu'il soit utilisable facilement.

Enfin, le modèle de BGM étant également à disposition dans les deux progiciels d'ALM cités, il suffit de rentrer les mêmes données en « input » que celles nécessaires aux fonctions que nous avons programmées (courbe ZC, taux « forward », « smile » de volatilités, pas de temps,

caractéristiques de l'option, nombre de simulations de Monte-carlo voulu, facteurs de risque et matrice de corrélation,...). Le progiciel valorisera les « caps » et « floors » voulus à la date choisie.

Il serait également possible d'alimenter les triangles de diffusion issus de la fonction *modBGM* directement dans les tables en entrée du progiciel, afin que celui-ci ne fasse que le calcul du prix cherché du produit de taux à une date donnée à partir de ces triangles et non la génération stochastique des taux d'intérêts (dans le cas où le calibrage serait moins précis et libre par le biais du progiciel en production).

CONCLUSION GENERALE :

L'objectif premier d'étudier plusieurs modèles stochastiques de taux d'intérêts, de les implémenter sous Excel, de les calibrer sur des prix de marché, et enfin de les comparer par le biais d'évaluations de produits dérivés simples de taux d'intérêts a été pleinement accompli.

A travers cette étude, nous avons mis en exergue les avantages et inconvénients des différentes modélisations mises en œuvre (ou parfois seulement évoquées) ; et révéler les multiples problèmes survenus liés soit au calibrage, à la compréhension et à la programmation de leurs dynamiques, soit à l'étude des structures de volatilités ou de corrélations entre les variations des taux considérés.

Analyser les divers types de modèles (AOA, équilibres, historiques, compatibles avec la STTI, gaussiens, markoviens, multifactoriels,...) et les mettre en pratique sur des exemples concrets, nous a permis de se faire une idée plus précise du ou des modèles de taux les plus adaptés aux besoins d'un gestionnaire ALM (projections de marges d'intérêts ou de bilan, évaluations de produits de couverture, calcul du besoin de fonds propre pour risque global de taux). Dans quels cas choisir tel processus ou telle méthode ? Des considérations de difficultés de programmation, de calibrage, de « pricing » ou encore concernant des temps de calculs trop conséquents vont entrer pleinement dans cette réflexion.

Nous avons, préalablement à l'étude théorique et pratique des modèles de Hull and White à un facteur et du modèle de marché de BGM, redéfini les principales courbes de taux (« swaps », ZC, « forward ») et reconstruit précisément la courbe de taux zéro-coupon (à partir d'une base de données de taux fixe de swaps ou de la méthode « indirecte » de « Vasicek modifié »). Cette reconstruction a été essentielle ; d'une part pour introduire les modèles stochastiques de déformation de la courbe ZC dans le temps, d'autre part afin d'évaluer les swaps, « caps » et « floors » qui serviront de références pour comparer les résultats issus des différents processus stochastiques. L'analyse en composantes principales a également fait office d'introduction idéale. En effet, son emploi préliminaire est quasiment indispensable afin d'obtenir un nombre raisonnable de variables non corrélées et fortement explicatives des mouvements de la courbe des taux spot appelées « facteurs explicatifs ». Cette méthode statistique est utile pour réduire la dimension des processus de Wiener du terme de diffusion, et donc gagner du temps de calcul. Peu satisfaisante en termes de résultats, cette méthode historique faite en seconde partie, a néanmoins défini les « cubes et triangles de diffusion » des taux ZC et « forward », univers de Monte-carlo regroupant les multiples trajectoires de taux d'intérêts et indispensables à la valorisation des options de taux.

En effet, en l'absence de solutions analytiques, il faut recourir à des techniques numériques. Nous avons donc fait appel à l'arbre recombinaut du modèle de H&W à un facteur dans les cadre des modèles AOA ; et aux simulations de Monte-Carlo dans le cadre du modèle de marché des taux « forward » de BGM. Le modèle de Black de 1976 a servi d'outil de calcul du prix théorique de référence des « caps » et des « floors ».

Rappelons enfin que l'étude du modèle de H&W à un facteur de risque et de son arbre trinomial a révélé deux inconvénients majeurs : l'apparition de taux négatifs et la non-prise en compte de toutes les déformations possibles de la courbe des taux. Les prix numériques d'options de taux obtenus restent assez éloignés des prix de marché ou des prix analytiques. Malgré le fait d'être facilement implémentable informatiquement et théoriquement accessible, ce modèle reste difficile à calibrer. Il présente néanmoins des éléments positifs : existence d'une formule fermée des prix de produits dérivés, théorie cohérente, intégration du phénomène de retour à la moyenne et possibles utilisations de différentes structures de volatilité.

Le modèle de BGM va pallier à certaines des limites du modèle de H&W : les taux générés sont assurément positifs et distribués selon une loi log-normale. L'évaluation des « caps » et des « floors » est nettement plus précise grâce à un calibrage sur ces instruments de marché plus facile et adapté. Pour conclure, le choix de la structure de volatilité, en intégrant par exemple les surfaces de volatilités, allié au fait que les taux « forward » en entrée du modèle soient directement observables font de ce modèle un des meilleurs actuellement en terme de « pricing » ; et les résultats de la dernière partie le prouvent.

Avec un grand nombre de scénarii de Monte-Carlo et une structure de volatilité bien définie, les résultats des valorisations par BGM de « caps » sont très satisfaisants. Néanmoins, la mise en œuvre informatique est complexe et les nombreuses simulations de trajectoires de taux ralentissent les temps de calcul par rapport à un arbre de taux classique.

Comme nous l'avons vu dans ce mémoire, de nombreux développements peuvent encore être réalisés. Nous pourrions implémenter les modèles de Black-Karasinski ou de Hull and White à deux facteurs qui semblent correspondre fortement aux besoins ALM et être de bons compromis entre tous les modèles.

Enfin nous pourrions, à des fins de « pricing » plus exacts, améliorer le calibrage du modèle multidimensionnel de BGM sur des jeux de « caplets » ou de « swaptions », et à partir d'une matrice historique de corrélation cette fois (approche non paramétrique).

Il est évident qu'il reste de nombreuses investigations à faire sur les modèles de taux stochastiques vu l'essor et la sophistication des produits dérivés de taux ; car il est important de bien pouvoir les valoriser pour pouvoir en maîtriser les risques.

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES

- BRIGO D., MERCURIO F. (2001) *Interest Rate Models: Theory and Practice*. Springer Finance.
- CHAZOT C., CLAUDE P. (1999) *Les Swaps: Concepts et Applications*. Economica.
- DUPRE D., EL BABSIRI M. (1997) *ALM, Techniques pour la gestion actif/passif*. Editions ESKA.
- HULL J. (1999) *Options, futures and other derivative securities*. Prentice-Hall.
- HULL J. (2004) *Options, futures et autres actifs dérivés*. 5^{ème} édition. Pearson Education.
- HULL J., WHITE A. (2005) *Hull-White on Derivatives. A compilation of articles*. Riskbooks.
- MARTELLINI L., PRIAULET P. (2000) *Produits de Taux d'Intérêt. Méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*. Economica.
- QUITTARD-PINON F., ROLANDO T. (2000) *La Gestion du Risque de Taux d'Intérêt*. Economica.
- QUITTARD-PINON F., (2002) *Mathématiques financières*. Ems management & société.
- QUITTARD-PINON F., (2003) *Marchés des Capitaux et Théorie Financière*. Economica.
- REBONATO R., (1996) *Interest-Rate Option Models Second edition, Understanding, analyzing and using models for exotic interest-rate options*. Wiley.
- SAPORTA G., (1990) *Probabilités, Analyse des données et statistiques*. TECHNIP

ARTICLES

- BRACE A., GATAREK D., MUSIELA D. (1997) The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance* 7, 127-155.
- EL KAROUI N., ROCHET J.C. (1989) A pricing formula for Options on Coupon-Bonds.
- FRYE J. (1997) Principals of Risk: Finding Value-at-Risk Through Factor-Based Interest Rate Scenarios.
- GRUBIŠIĆ I. (2002) Interest Rate Theory: The BGM Model. *Thesis of Igor Gubišić, Master Degree of Mathematics, University of Leiden, Netherlands*.
- HULL J., WHITE A. (2000) The General Hull-White Model and Super Calibration. *University of Toronto, Canada*.
- Li J. (2002) A C++ Encoded Hull-White Interest Rate Tree-Builder. *Duke University Durham, NC*.
- REBONATO R. (1998) On the simultaneous calibration of multi-factor log-normal interest-rate models to Black volatilities and to the correlation matrix, *Journ. Comp. Fin.*

ANNEXES

Annexe 1 : Les bases de calculs

Les *bases de calculs* sont des conventions de base qui précisent la méthode de calcul de la fraction d'année f ; par exemple pour le calcul du nombre de jours entre deux dates.

Si l'on note par $f = \frac{n}{B}$ la fraction d'année écoulée avec B le nombre de jours d'une année.

n est égal au : - nombre de jours total du placement lorsqu'il est *in fine*.
- nombre de jours entre deux détachements de coupons.

Nous allons redéfinir les deux types de bases que nous avons employées :

- La base Exact/360 :

Cette base est essentiellement utilisée pour les taux proportionnels sur les instruments monétaires, c'est-à-dire pour les durées inférieures à 1 an.

B vaut 360 et n correspond au *nombre de jours calendaires exact* du placement

- La base Exact/Exact :

Elle sert essentiellement au calcul des intérêts courus sur les marchés des capitaux français (obligations, swaps, etc....).

B vaut 365 ou 366 lors des années bissextiles et n est également le nombre de jours calendaires exact.

Annexe 2 : Types de courbes de taux zéro-coupon

Il existe trois grands types de courbes de taux zéro-coupon : la courbe *Trésor*, la courbe *interbancaire* ou « swaps », et les courbes « *corporate* ».

- La courbe Trésor est construite à partir des obligations émises par l'Etat (OAT). Il s'agit d'une courbe sans risque car ces Etats disposent de la notation la plus élevée au sein des agences de rating (AAA).
- La courbe interbancaire est celle que l'on va construire à partir des taux de dépôt, des futures et des swaps. Elle n'est pas sans risque car le rating moyen des banques se situe entre A et AA pour S&P par exemple.
- Les courbes «corporate» sont les courbes qui caractérisent les entreprises du secteur privé. Il y en a de multiples qui dépendent du rating des entreprises et de leur secteur économique.

Annexe 3 : Le modèle de Nelson et Siegel

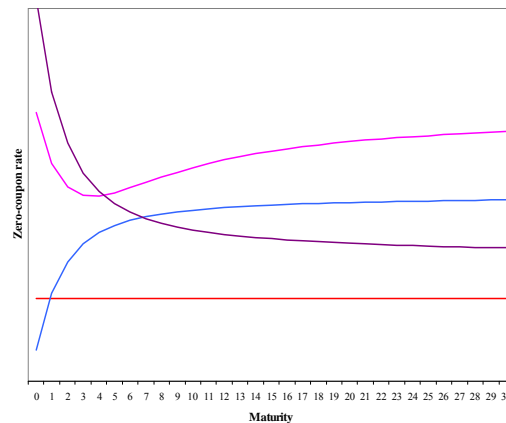
Nelson et Siegel, en 1987, ont imaginé une fonctionnelle permettant de modéliser différentes courbes de taux zéro-coupon. Ce modèle, paramétrique, génère différentes formes de courbe de taux, selon les paramètres choisis. Voici la fonctionnelle de Nelson et Siegel exprimant le taux zéro-coupon en 0 de maturité T :

$$r(0, T) = l + s \left[\frac{1 - \exp(-T/\tau)}{T/\tau} \right] + \gamma \left[\frac{1 - \exp(-T/\tau)}{T/\tau} - \exp(-T/\tau) \right]$$

Avec :

- ❖ l le facteur de niveau
- ❖ s le facteur de rotation
- ❖ γ le facteur de courbure
- ❖ τ le paramètre d'échelle, fixe au cours du temps

Voici différentes formes de courbes de taux que l'on peut obtenir : classique, inversée, plate, « à bosse » ou « à creux ».



Remarque :

L'idée consiste alors à déterminer les paramètres en minimisant l'écart au carré entre le prix de marché et le prix théorique pour un ensemble d'obligations. Nous adopterons une telle démarche dans la construction de la courbe zéro-coupon avec le modèle de « Vasicek Modifié » dans la première partie du mémoire. Nous retrouvons dans ce modèle les mêmes paramètres, mais avec une fonctionnelle différente.

Annexe 4 : La base de données

Taux de dépôt monétaire EURO (en %)

	1 jour	1 sem	2 sem	3 sem	1 mois	2 mois	3 mois	4 mois
TERM	0,00273973	0,01923077	0,03846154	0,05769231	0,08333333	0,16666667	0,25	0,33333333
04/01/1999	3,295	3,225	3,225	3,225	3,195	3,195	3,195	3,185
05/01/1999	3,205	3,205	3,205	3,205	3,175	3,19	3,175	3,175
06/01/1999	3,205	3,205	3,205	3,205	3,1719	3,1588	3,1537	3,175
07/01/1999	3,205	3,205	3,205	3,205	3,175	3,175	3,175	3,175
08/01/1999	3,205	3,205	3,205	3,205	3,175	3,175	3,175	3,175

5 mois	6 mois	7 mois	8 mois	9 mois	10 mois	11 mois	1 an
0,41666667	0,5	0,58333333	0,66666667	0,75	0,83333333	0,91666667	1
3,175	3,175	3,175	3,165	3,165	3,165	3,165	3,165
3,175	3,14	3,165	3,155	3,13	3,145	3,135	3,13
3,175	3,165	3,165	3,155	3,155	3,145	3,135	3,135
3,175	3,165	3,155	3,155	3,145	3,145	3,135	3,135
3,175	3,165	3,155	3,155	3,145	3,145	3,135	3,135

	1 jour	1 sem	2 sem	3 sem	1 mois	2 mois	3 mois	4 mois
	0,00273973	0,01923077	0,03846154	0,05769231	0,08333333	0,16666667	0,25	0,33333333
18/05/2005	2,07	2,07	2,08	2,08	2,085	2,095	2,105	2,115
19/05/2005	2,07	2,07	2,08	2,08	2,085	2,095	2,105	2,105
20/05/2005	2,07	2,07	2,08	2,08	2,085	2,095	2,105	2,115
23/05/2005	2,07	2,08	2,08	2,08	2,085	2,095	2,105	2,115
24/05/2005	2,07	2,08	2,08	2,08	2,085	2,095	2,105	2,125
25/05/2005	2,07	2,08	2,08	2,08	2,085	2,095	2,105	2,115

5 mois	6 mois	7 mois	8 mois	9 mois	10 mois	11 mois	1 an
0,41666667	0,5	0,58333333	0,66666667	0,75	0,83333333	0,91666667	1
2,125	2,125	2,125	2,135	2,135	2,145	2,155	2,165
2,115	2,125	2,135	2,145	2,145	2,145	2,155	2,165
2,125	2,135	2,145	2,155	2,155	2,165	2,175	2,195
2,125	2,135	2,145	2,155	2,155	2,165	2,175	2,195
2,135	2,135	2,135	2,145	2,145	2,155	2,165	2,175
2,125	2,125	2,125	2,135	2,135	2,145	2,155	2,165

Remarque :

- Les maturités, exprimées en années sont en caractères rouges.
- Nous choisissons le taux de dépôt monétaire de maturité 1 an au lieu du taux fixe swap 1 an.
- Les données sont journalières sur la période du 4 janvier 1999 au 25 mai 2005.

Taux fixes des swaps sur Euribor (en %)

	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans
TERM	2	3	4	5	6	7	8	9	10
04/01/1999	3,229	3,33	3,444	3,573	3,709	3,846	3,967	4,0885	4,1735
05/01/1999	3,1975	3,302	3,4415	3,572	3,7045	3,847	3,975	4,082	4,169
06/01/1999	3,1975	3,297	3,4375	3,571	3,706	3,845	3,979	4,086	4,1855
07/01/1999	3,1975	3,297	3,4375	3,571	3,706	3,845	3,979	4,086	4,1855
08/01/1999	3,1975	3,297	3,4375	3,571	3,706	3,845	3,979	4,086	4,1855

11 ans	12 ans	13 ans	14 ans	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans	19 ans	20 ans
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
#N/A	4,323	#N/A	#N/A	4,5085	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,715
#N/A	4,326	#N/A	#N/A	4,5085	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,705
#N/A	4,34	#N/A	#N/A	4,5205	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,695
#N/A	4,34	#N/A	#N/A	4,5205	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,675
#N/A	4,34	#N/A	#N/A	4,5205	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,665

21 ans	22 ans	23 ans	24 ans	25 ans	26 ans	27 ans	28 ans	29 ans	30 ans	40 ans	50 ans
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50
#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,8765	#N/A	#N/A
#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,8765	#N/A	#N/A
#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,86	#N/A	#N/A
#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,86	#N/A	#N/A
#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	#N/A	4,79	#N/A	#N/A

	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans
TERM	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18/05/2005	2,377	2,55	2,71	2,86	3	3,12	3,235	3,335	3,417
19/05/2005	2,3995	2,56	2,75	2,895	3,025	3,16	3,265	3,365	3,4508
20/05/2005	2,4314	2,6	2,765	2,91	3,045	3,175	3,285	3,385	3,466
23/05/2005	2,43	2,6	2,72	2,88	3,025	3,105	3,225	3,33	3,45
24/05/2005	2,366	2,53	2,695	2,835	2,97	3,105	3,215	3,315	3,402
25/05/2005	2,341	2,507	2,6695	2,8165	2,955	3,0841	3,1995	3,3017	3,3845

11 ans	12 ans	13 ans	14 ans	15 ans	16 ans	17 ans	18 ans	19 ans	20 ans
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3,491	3,56	3,613	3,664	3,71	3,749	3,782	3,811	3,836	3,86
3,5153	3,585	3,6308	3,6788	3,73	3,767	3,799	3,827	3,851	3,87
3,54	3,605	3,658	3,706	3,75	3,787	3,819	3,847	3,871	3,895
3,498	3,57	3,617	3,663	3,725	3,7425	3,7745	3,802	3,8255	3,875
3,4755	3,535	3,5945	3,6435	3,68	3,7245	3,7575	3,7865	3,8115	3,82
3,4585	3,535	3,581	3,629	3,6755	3,7155	3,7495	3,7785	3,8035	3,8305

21 ans	22 ans	23 ans	24 ans	25 ans	26 ans	27 ans	28 ans	29 ans	30 ans	40 ans	50 ans
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50
3,876	3,892	3,905	3,9165	3,93	3,9325	3,938	3,943	3,947	3,955	3,98	3,985
3,89	3,905	3,918	3,928	3,935	3,943	3,948	3,952	3,955	3,955	3,98	3,98
3,909	3,924	3,937	3,948	3,955	3,963	3,968	3,972	3,976	3,98	4	4,005
3,863	3,878	3,89	3,9	3,94	3,915	3,92	3,924	3,928	3,965	3,995	3,995
3,851	3,862	3,875	3,886	3,89	3,901	3,906	3,91	3,914	3,91	3,93	3,935
3,8465	3,8605	3,8735	3,8845	3,8955	3,9005	3,9065	3,9115	3,915	3,9215	3,944	3,9435

Remarque :

Les données manquantes sont représentées par des #N/A pour les maturités 11, 13, 14, 16, 17, 18 et 19 ans ; ainsi que pour celles de 21 à 29 ans (pour les dates les plus anciennes de janvier 1999 jusqu'à fin août 2001). A partir de la maturité 30 ans, nous ne disposons que des maturités 40 et 50 ans.

Annexe 5 : La base complète zéro-coupon « splinée »

Voici une partie de la base obtenue avec un calendrier hebdomadaire (« weekly »). Nous avons tous les taux zéro-coupon reconstruits pour toutes les maturités. Ci-dessous, trois dates consécutives sont présentées : vendredi 12/09/2002, vendredi 19/09/2002 et vendredi 26/09/2002.

TERM	0,00273973	0,01923077	0,03846154	0,05769231	0,08333333	0,16666667	0,25	0,33333333	0,41666667	0,5
12/09/2002	3,3866%	3,3856%	3,3845%	3,3834%	3,3819%	3,3563%	3,3361%	3,3159%	3,2959%	3,2759%
19/09/2002	3,3761%	3,3751%	3,3740%	3,3729%	3,3819%	3,3668%	3,3725%	3,3470%	3,3217%	3,1986%
26/09/2002	3,4075%	3,4275%	3,4054%	3,4043%	3,4026%	3,3668%	3,3517%	3,3159%	3,2907%	3,2656%

0,58333333	0,66666667	0,75	0,83333333	0,91666667	1
3,3537%	3,3490%	3,3444%	3,3398%	3,3352%	3,2292%
3,2817%	3,2568%	3,2422%	3,2277%	3,2132%	3,0974%
3,2509%	3,2363%	3,2115%	3,1971%	3,1929%	3,1025%

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3,7705%	3,9859%	4,1725%	4,3465%	4,5009%	4,6272%	4,7325%	4,8187%	4,8931%	4,9530%	5,0082%	5,0532%
3,6427%	3,8592%	4,0494%	4,2179%	4,3812%	4,5136%	4,6215%	4,7041%	4,7827%	4,8456%	4,8970%	4,9485%
3,6425%	3,8544%	4,0516%	4,2279%	4,3883%	4,5201%	4,6310%	4,7199%	4,8036%	4,8664%	4,9350%	4,9827%

Pour les « longues » maturités,

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
4,9513%	4,9342%	4,9171%	4,9002%	4,8840%	4,8691%	4,8560%	4,8451%	4,8371%	4,8326%	4,832%
4,8654%	4,8476%	4,8301%	4,8133%	4,7975%	4,7831%	4,7705%	4,7602%	4,7527%	4,7485%	4,748%
4,9427%	4,9249%	4,9071%	4,8897%	4,8732%	4,8580%	4,8446%	4,8335%	4,8252%	4,8204%	4,820%

Remarque : La matrice « weekly » comporte donc 65 colonnes (maturités en années) et environs 330 lignes correspondantes au nombre de semaines de janvier 1999 à mai 2005.

Annexe 6 : Le modèle de « Vasicek modifié »

Voici les résultats du calcul des paramètres de « Vasicek modifié » (Court et long terme) :

		Court terme			Somme des Résidus à minimiser		
		Données swaps	Vasicek	résidus	Paramètres		
Fonctionnelle de Vasicek G		Maturités	25/05/2005	Somme			
		0,00273973	2,070%	2,079%	8,05384E-09	l	3,4935
		0,01923077	2,080%	2,080%	1,37059E-11	s	3,4727
		0,03846154	2,080%	2,082%	3,99198E-10	gamma	1,9508
		0,05769231	2,080%	2,084%	1,31462E-09	a	0,0004
		0,08333333	2,085%	2,086%	6,33782E-11		
		0,16666667	2,095%	2,093%	4,62434E-10		
		0,25	2,105%	2,100%	2,59812E-09		
		0,33333333	2,115%	2,107%	6,47082E-09		
		0,41666667	2,125%	2,114%	1,20809E-08		
		0,5	2,125%	2,121%	1,55134E-09		
		0,58333333	2,125%	2,128%	9,69506E-10		
		0,66666667	2,135%	2,135%	2,75124E-12		
		0,75	2,135%	2,142%	5,20971E-09		
		0,83333333	2,145%	2,149%	1,82294E-09		
		0,91666667	2,155%	2,156%	1,74536E-10		
		1	2,163%	2,163%	2,64894E-10		

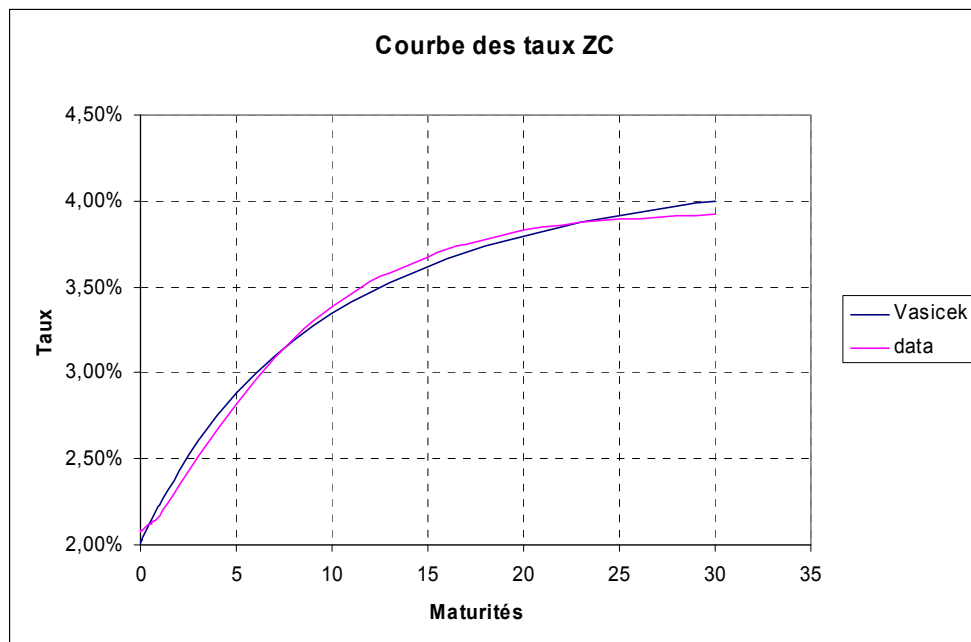
Résultats d'optimisation des paramètres par les MCO

$$\text{Résidus } (c_{i,j} - G(l, s, \gamma, a, j))^2$$

Maturités en années

STTI au 25/05/2005 (c_{i,j})

long terme					
	Données swaps		résidus		
Maturités	25/05/2005	Vasicek	8,50245E-07		Paramètres
1	2,17%	2,179%	1,99365E-08	l	0,0426
2	2,34%	2,318%	5,31943E-08	s	0,0211
3	2,51%	2,492%	2,25509E-08	gamma	-0,0485
4	2,67%	2,668%	2,40412E-10	a	0,3711
5	2,82%	2,831%	2,19493E-08		
6	2,96%	2,977%	4,79577E-08		
7	3,08%	3,104%	3,9535E-08		
8	3,20%	3,214%	2,05232E-08		
9	3,30%	3,308%	4,51296E-09		
10	3,38%	3,390%	2,89991E-09		
11	3,46%	3,460%	2,95867E-10		
12	3,54%	3,521%	1,90989E-08		
13	3,58%	3,574%	4,53512E-09		
14	3,63%	3,621%	6,831E-09		
15	3,68%	3,662%	1,92289E-08		
16	3,72%	3,698%	3,12442E-08		
17	3,75%	3,730%	3,79459E-08		
18	3,78%	3,759%	3,87659E-08		
19	3,80%	3,785%	3,54068E-08		
20	3,83%	3,808%	5,04358E-08		
21	3,85%	3,829%	2,98438E-08		
22	3,86%	3,849%	1,43679E-08		
23	3,87%	3,866%	5,4083E-09		
24	3,88%	3,882%	4,73958E-10		
25	3,90%	3,897%	2,9414E-10		
26	3,90%	3,911%	1,09573E-08		
27	3,91%	3,924%	2,96038E-08		
28	3,91%	3,936%	5,7776E-08		
29	3,92%	3,947%	9,95616E-08		
30	3,92%	3,957%	1,2487E-07		



Annexe 7 : ACP et facteurs explicatifs

Dans cette annexe, nous allons expliquer de manière générale le principe de *l'analyse en composantes principales* sur des variables de marchés corrélées entre elles afin de mieux comprendre la démarche suivie dans les chapitre 1 et 2 de la partie II sur les taux d'intérêts zéro-coupon. La base de données utilisée regroupe un très grand nombre de taux zéro-coupon corrélés, il est donc intéressant de combiner linéairement ceux-ci pour obtenir un faible nombre de variables non corrélées et explicatives.

A partir des taux zéro coupon journaliers de 1999 à 2005 et de maturités de 3 mois à 30 ans¹¹², construisons un tableau dont la première colonne indique les maturités considérées et les colonnes suivantes les corrélations entre les taux zéro-coupon (variables de marché) et les *facteurs* notés F_i allant de 1 à 13 (variables synthétiques issues de l'ACP). Nous reviendrons sur la façon d'obtenir ces facteurs par la suite.

Voici le tableau des facteurs :

Maturités en années	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13
0,25	0,06	-0,56	0,38	0,72	0,16	-0,01	-0,02	-0,02	0,01	-0,01	0,00	0,01	0,01
0,5	0,10	-0,59	0,08	-0,36	-0,71	0,03	0,03	0,00	0,00	0,01	0,00	0,00	-0,01
1	0,14	-0,53	-0,22	-0,46	0,66	-0,07	-0,01	-0,03	0,00	-0,01	0,01	0,01	-0,01
2	0,30	-0,06	-0,42	0,19	-0,05	0,33	-0,05	0,74	0,16	0,02	0,03	-0,01	0,01
3	0,29	-0,02	-0,43	0,21	-0,06	0,36	0,52	-0,53	-0,06	-0,01	0,02	0,01	0,00
4	0,32	0,03	-0,14	0,07	-0,05	-0,12	-0,37	-0,09	-0,39	0,17	-0,71	0,12	0,00
5	0,32	0,05	-0,11	0,05	-0,07	-0,03	-0,55	-0,31	0,44	-0,49	0,17	0,12	0,08
6	0,33	0,05	-0,04	0,05	-0,04	-0,15	-0,28	-0,10	-0,26	0,55	0,60	-0,15	-0,13
7	0,33	0,07	0,08	-0,01	-0,01	-0,28	0,18	0,11	-0,25	-0,39	0,00	-0,68	0,30
8	0,32	0,09	0,14	-0,02	0,00	-0,27	0,25	0,14	-0,09	-0,30	0,04	0,26	-0,74
9	0,32	0,10	0,18	-0,06	0,01	-0,24	0,27	0,12	-0,02	0,08	0,12	0,59	0,58
10	0,32	0,10	0,23	-0,08	0,04	-0,10	0,17	-0,06	0,67	0,42	-0,29	-0,27	-0,09
30	0,27	0,13	0,54	-0,23	0,13	0,71	-0,11	-0,01	-0,19	-0,07	0,01	-0,01	-0,01

Toutes les corrélations ou « sensibilités » du premier facteur F1 sont positives : une variation positive de ce facteur entraîne une hausse de tous les taux. Par exemple une augmentation d'une unité du premier facteur impliquera une hausse de 0,1 point de base du taux à 6 mois. Ce facteur est appelé *facteur de niveau*.

Le deuxième facteur présente des corrélations négatives sur les taux courts et moyen terme jusqu'à la maturité 3 ans ; ces corrélations deviennent positives pour les maturités plus longues. Ainsi, une augmentation de ce facteur provoque une baisse des taux courts et une hausse des taux longs, ce qui correspond à une courbe des taux plus pentue. Ce facteur est communément appelé *facteur de pente*.

A contrario, le troisième facteur présente des corrélations positives sur les taux courts et longs ; elles sont négatives sur les taux de moyen terme. Ce facteur est le *facteur de courbure*.

Il est inutile de conserver autant de facteurs (treize, comme les différentes maturités), même si toutes les variations de taux s'expriment de manière parfaite comme des combinaisons linéaires de ceux-ci. Il faut garder les facteurs qui restituent le mieux la dispersion des taux.

¹¹² Dans le corps du mémoire, nous avons réalisé une ACP sur 65 maturités. Ici, nous avons réduit le nombre de maturités pour rester dans un cadre plus académique.

L'ensemble des observations des variations de taux ZC (1668 observations journalières pour 13 maturités) peut être vu comme un nuage de point dans un espace à 13 dimensions. Le premier axe factoriel correspond à la direction d'allongement maximale de ce nuage ; tandis que le second, orthogonal et non corrélé, traduit la dispersion maximale du nuage le long de cet axe.

Les *composantes principales* sont les variables obtenues par combinaison linéaire des variables initiales selon ce principe. La variance de chaque composante mesure son importance dans la restitution de l'information initiale.

Il est important de préciser que les *variances des composantes principales sont égales aux valeurs propres de la matrice de variance/covariance* des variables initiales (variations journalières de taux ZC). La somme de ces variances est égale à la somme des variances des variables de marché et est appelée l'*inertie du nuage*.

De plus, le premier facteur correspond au vecteur propre de cette matrice associé à la plus grande valeur propre (le second facteur étant le vecteur associé à la deuxième valeur propre et ainsi de suite).

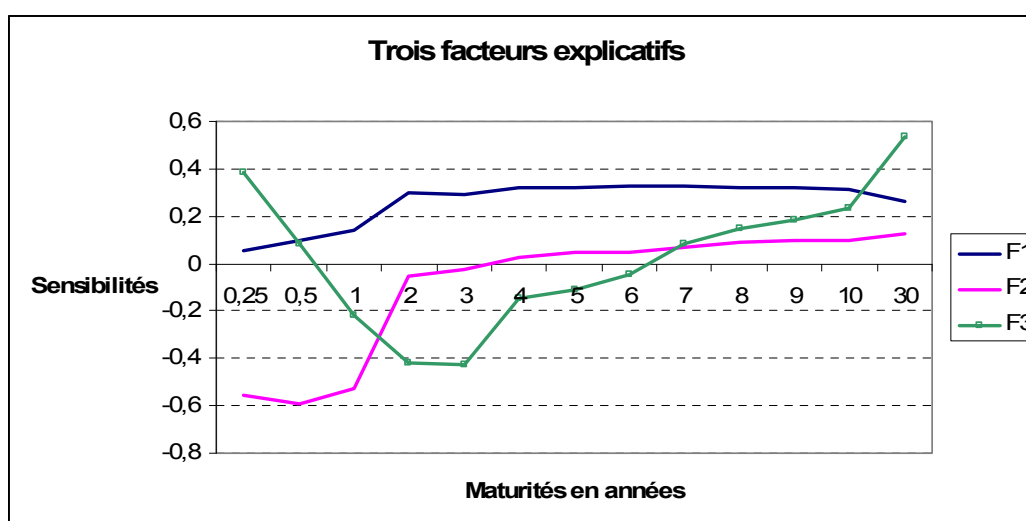
Le pourcentage d'inertie expliqué correspond au rapport de la variance d'une composante principale sur la somme des variances de toutes les composantes. En général les trois premiers facteurs explicités précédemment expliquent près de 90 % de l'inertie. Ils sont donc suffisants pour restituer une grande partie de l'information contenue dans les variations des 13 taux ZC.

Voici les variances des composantes principales sur cet exemple :

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13
8,91	1,95	0,67	0,51	0,33	0,23	0,13	0,10	0,08	0,03	0,03	0,02	0,02

Les trois premiers facteurs expliquent 89 % de l'inertie du nuage de données dans cette étude. Ainsi, l'évaluation du risque de taux peut se faire seulement avec l'étude de ces trois facteurs, et non en prenant compte des variations de taux sur toutes les maturités.

Pour clore cette annexe, voici le graphique des trois facteurs les plus explicatifs des mouvements de déformation de la courbe des taux zéro-coupon :



Annexe 8 : Le modèle de Hull and White à un facteur

▪ Annexe 8.1 : Modèle de H&W à un facteur – Démonstrations

✓ La fonction analytique $\phi(t)$:

Dans cette section, nous allons reprendre en partie la démonstration de l'article original de H&W (1990). Ils retrouvent l'expression analytique de la fonction $\phi(t)$ (cf. formule (III.4)).

Nous savons que, dans le modèle de H&W à un facteur, le prix $P(t, s, r)$ en date t d'un ZC d'échéance s , dépendant du taux d'intérêt spot r diffusé, vérifie l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$P_t + (\phi(t) - ar)P_r + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} - r(t)P = 0 \quad (1) \quad \text{avec } \phi(t) = \theta(t) + R_m(t)\sigma$$

Les prix des obligations zéro-coupon à la date future t , de maturité T dans le modèle sont donnés par la fonction $P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$, solution de l'EDS ci-dessus. Les fonctions A et B satisfont les équations suivantes :

$$\begin{cases} B_t - aB + 1 = 0 & (2) \\ A_t - BA\phi(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 A = 0 & (3) \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites : $\begin{cases} B(T, T) = 0 \\ A(T, T) = 1 \end{cases}$, déduites de la condition limite $P(T, T) = 1$

Ainsi, résoudre ce système d'équations, avec a et σ constants, amène à la solution suivante concernant le prix des ZC : $P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$

Avec :

- $B(t, T) = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a}$
- $A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left(B(t, T)F(0, t) - \sigma^2 B(t, T)^2 \frac{(1 - e^{-2at})}{4a}\right)$

Nous allons déterminer $\phi(t)$ en fonction de $A(0, T)$ et $B(0, T)$, entièrement définis par la STTI initiale, et les paramètres a et σ .

Différencions par rapport à T les équations (2) et (3) ; nous obtenons (avec les notations sur les dérivées partielles identiques à celles du corps du mémoire) :

$$\begin{cases} A_{tT} - \phi(t)[A_T B + AB_T] + \frac{1}{2}\sigma^2 [A_T B^2 + 2ABB_T] = 0 & (4) \\ B_{tT} - aB_T = 0 & (5) \end{cases}$$

Nous en déduisons, en éliminant a et $\phi(t)$ des équations (1) (2) (3) (4) :

$$\begin{cases} ABA_{tT} - BA_t A_T - AA_t B_T + \frac{1}{2}\sigma^2 A^2 B^2 B_T = 0 & (6) \\ B_t B_T - BB_{tT} + B_T = 0 & (7) \end{cases}$$

Les conditions aux limites des équations (6) et (7) sont les valeurs connues $A(0,T)$, $B(0,T)$, $A(T,T)=1$ et $B(T,T)=0$.

H&W ont résolu ces équations; les solutions qui satisfont (6), (7) et les conditions aux limites précédentes sont :

$$\begin{aligned} \diamond B(t,T) &= \frac{B(0,T) - B(0,t)}{\delta B(0,t)} = \frac{B(0,T) - B(0,t)}{e^{-at}} = \frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} \\ \diamond A(t,T) &= \frac{A(0,T)}{A(0,t)} \exp \left(-B(t,T) \frac{\delta \ln A(0,t)}{\delta t} - \frac{B(t,T)^2}{2} \left(\frac{\delta B(0,t)}{\delta t} \right)^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma^2}{\delta B(0,\tau)} \right] d\tau \right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } A(t,T) = \frac{A(0,T)}{A(0,t)} \exp \left(-B(t,T) \frac{\delta \ln A(0,t)}{\delta t} - \frac{\sigma^2}{4a} B(t,T)^2 (1 - e^{-2at}) \right)$$

En remplaçant ces expressions dans les équations (2) et (3),

$$a = \frac{\frac{\delta^2 B(0,t)}{\delta t^2}}{\frac{\delta^2 B(0,t)}{\delta t^2}}$$

$$\phi(t) = -a \frac{\delta \ln A(0,t)}{\delta t} - \frac{\delta^2 \ln A(0,t)}{\delta t^2} + \left(\frac{\delta B(0,t)}{\delta t} \right)^2 \int_0^t \left[\frac{\sigma^2}{\delta B(0,\tau)} \right] d\tau$$

En calculant le dernier terme, nous obtenons :

$$\boxed{\phi(t) = -\frac{\delta^2 \ln A(0,t)}{\delta t^2} - a \frac{\delta \ln A(0,t)}{\delta t} + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})}$$

✓ La fonction analytique $\theta(t)$:

Nous allons expliciter la fonction de « drift » $\theta(t)$, calibrée pour s'ajuster à la STTI initiale. Elle se déduit donc directement de cette courbe de taux d'intérêts ZC initiale.

Nous avons pour cela besoin de définir, sous la probabilité risque neutre, le prix en date t d'un zéro-coupon d'échéance T (noté $P(t, T)$), dans le modèle de H&W. Mais avant toute chose, il convient de rappeler quelques formules de taux et définitions.

Ces définitions, ainsi que la démonstration qui va suivre sont largement inspirées de l'ouvrage de F. Quittard-Pinon : « *Marché des capitaux et théorie financière* ».

L'obligation zéro-coupon est définie, en continu, par $P(t, T) = e^{-Y(t, T)(T-t)}$

Avec le taux de rendement à l'échéance implicite : $Y(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t}$

Soit un espace filtré $(\Omega, \mathfrak{F}_t, \Pi)$ où Ω est l'espace fondamental, \mathfrak{F}_t la filtration, Π la probabilité historique. Nous supposons que le prix du zéro-coupon $P(t, T)$ vérifie l'EDS suivante :

$$\boxed{\frac{dP}{P} = \mu(t, T)dt - \sigma(t, T)dz}$$

$z(t)$ étant le mouvement brownien défini sur l'espace filtré, $\mu(t, T)$ le rendement instantané espéré sous Π en date t de l'obligation ZC et $\sigma(t, T)$ la volatilité instantanée.

En l'absence d'opportunités d'arbitrages, rappelons qu'il existe une fonction $R_m(t)$ appelée « prime de risque » telle que $R_m(t) = \frac{\mu(t, T) - r(t)}{\sigma(t, T)}$

Le taux $r(t)$ est le taux instantané ou « taux sans risque » ; il est défini comme la limite du taux de rendement à l'échéance $Y(t, T)$: $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T)$

Il convient également de définir la fonction $\delta(t, T)$ dite « d'actualisation » :

$$\delta(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T r(u)du\right\}$$

Nous allons, à l'aide du théorème de Girsanov¹¹³, changer de probabilité ; nous pouvons changer le drift $\mu(t, T)$ en $r(t)$ de l'EDS et écrire :

$$\boxed{\frac{dP}{P} = r(t)dt - \sigma(t, T)d\hat{z}}$$

¹¹³ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

En posant : $\hat{z}(t) = z(t) - \int_0^t R_m(u) du$, le théorème assure le fait que \hat{z} soit un mouvement brownien dans $(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q)$ avec Q la nouvelle mesure de probabilité définie par :

$$\frac{dQ}{d\Pi} = \exp \left\{ \int_0^T R_m(t) dz(t) - \frac{1}{2} \int_0^T R_m(t)^2 dt \right\}$$

Comme elle contient les primes de risque, l'espérance du rendement instantané de tout zéro-coupon est égal au taux de l'actif sans risque : $E_Q \left(\frac{dP}{P} \right) = r(t) dt$.

Nous sommes ainsi passés d'un univers historique sous la mesure de probabilité historique Π à l'**univers risque-neutre** $(\Omega, \mathfrak{F}_t, Q)$ sous la mesure de probabilité risque-neutre Q . Cette probabilité, indispensable en finance, assure que, dans cet univers et sous celle-ci, et en l'absence d'opportunités d'arbitrage, les processus de gain d'un actif financier actualisés au taux de l'actif sans risque, sont des Q -martingales¹¹⁴.

La relation suivante en découle :

$$P(t, T) = E_Q \left[\delta(t, T) | \mathfrak{F}_t \right]$$

L'obligation zéro-coupon constitue le **facteur d'actualisation** ou « **Discount Factor** ».

Afin d'obtenir une formule fermée pour le prix du ZC $P(t, T)$, il faut supposer que $\sigma(t, T)$ est déterministe.

Nous appliquons le lemme d'Itô à la fonction $X(P) = \ln(P)$, avec P suivant une diffusion de dérive $P\mu(t, T)$ et de volatilité $-P\sigma(t, T)$.

$$dX = \left[r(t) - \frac{1}{2} \sigma^2(t, T) \right] dt - \sigma(t, T) d\hat{z}$$

D'où l'expression de $P(t, T)$:

$$P(t, T) = P(0, T) \exp \left\{ \int_0^t r(u) du - \int_0^t \sigma(u, T) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u, T) du \right\}$$

Or $P(t, t) = 1$, donc,

$$P(t, t) = P(0, t) \exp \left\{ \int_0^t r(u) du - \int_0^t \sigma(u, t) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u, t) du \right\} = 1$$

D'où

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ \int_0^t -(\sigma(u, T) - \sigma(u, t)) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma^2(u, T) - \sigma^2(u, t)) du \right\}$$

¹¹⁴ Cf. Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières.

Par suite, nous en déduisons le taux de rendement à l'échéance et le taux spot $r(t)$:

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right) - \frac{1}{T-t} \left\{ \int_0^t -(\sigma(u, T) - \sigma(u, t)) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma^2(u, T) - \sigma^2(u, t)) du \right\}$$

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} \left[-\frac{1}{T-t} \ln \left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \right) \right] + \lim_{T \rightarrow t} \left[\int_0^t \frac{(\sigma(u, T) - \sigma(u, t))}{T-t} d\hat{z}(u) \right] + \lim_{T \rightarrow t} \left[\frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\sigma^2(u, T) - \sigma^2(u, t))}{T-t} du \right]$$

Nous savons, d'après la définition du taux « forward » instantané, que :

$$f(t, T) = \lim_{T_2 \rightarrow T} \frac{1}{T_2 - T} \ln \left(\frac{P(t, T_2)}{P(t, T)} \right)$$

Il résulte que :

$$r(t) = F(0, t) + \int_0^t \frac{\delta\sigma(u, t)}{\delta t} d\hat{z}(u) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\delta\sigma^2(u, t)}{\delta t} du$$

D'après El Karoui et Rochet¹¹⁵, seules les structures de volatilités linéaires et exponentielles permettent d'obtenir un taux court Markovien.

Prenons alors comme volatilité instantané $\sigma(t, T)$: $\sigma(t, T) = \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$

Nous avons,

$$r(t) = F(0, t) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dz(u) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{2\sigma^2}{a} (1 - e^{-a(T-u)}) e^{-a(T-u)} du$$

$$r(t) = F(0, t) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dz(u) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2$$

Par différenciation, et après quelques étapes de calculs, nous obtenons la dynamique suivante :

$$dr(t) = \left(\frac{\delta F(0, t)}{\delta t} + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) - ar(t) \right) dt + \sigma dz$$

Connaissant la dynamique postulée par H&W, nous en déduisons l'expression de $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \frac{\delta F(0, t)}{\delta t} + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

¹¹⁵ Cf. EL KAROUI, ROCHET (1989). A pricing formulator Options on Coupon-Bonds.

✓ Expression de $A(t, T)$ dans le modèle de H&W à deux facteurs¹¹⁶ :

La fonction $A(t, T)$ est donnée par l'expression suivante :

$$\ln(A(t, T)) = \ln\left(\frac{P(0, T)}{P(0, t)}\right) + B(t, T)F(0, t) - \eta$$

Où,

$$\eta = \frac{\sigma_r^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 - \rho\sigma_r\sigma_u[B(0, t)C(0, t)B(t, T) + \gamma_4 - \gamma_2] - \frac{1}{2}\sigma_u^2[C(0, t)^2B(t, T) + \gamma_6 - \gamma_5]$$

Et

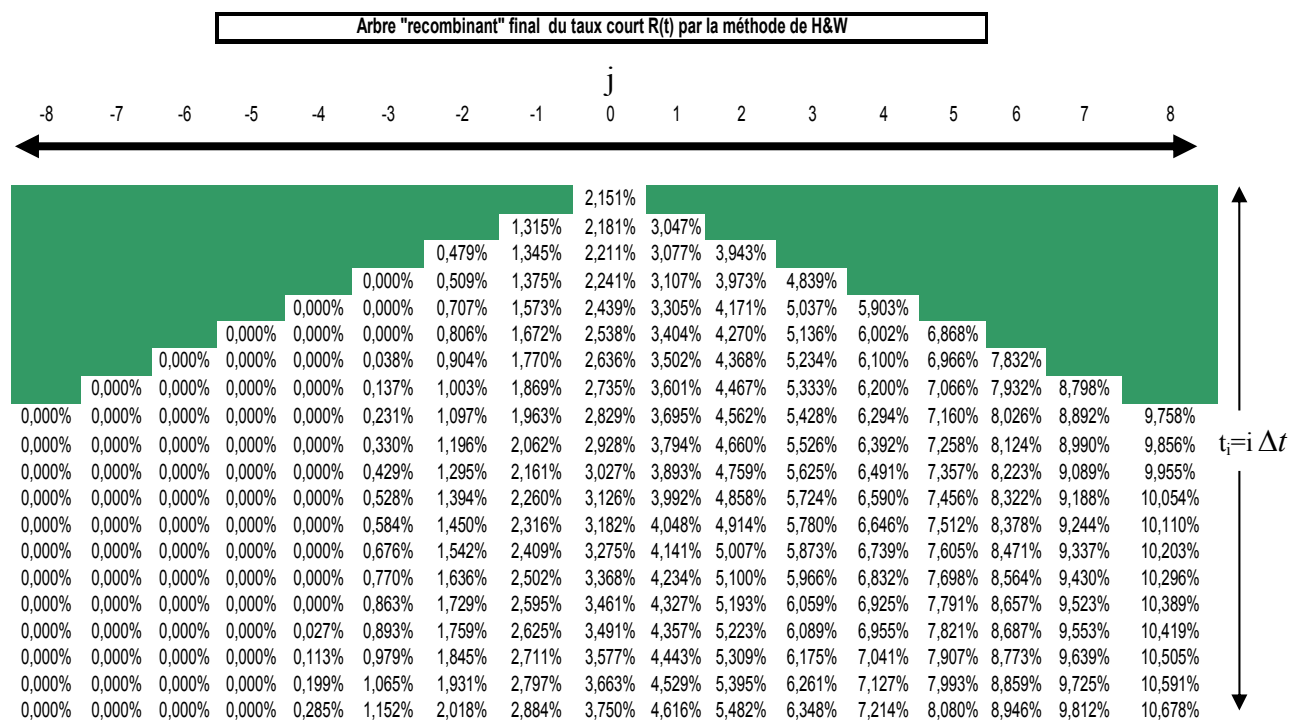
$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{e^{-(a+b)T}[e^{(a+b)t} - 1]}{(a+b)(a-b)} - \frac{e^{-2aT}[e^{2at} - 1]}{2a(a-b)} \\ \gamma_2 &= \frac{1}{ab}\left[\gamma_1 + C(t, T) - C(0, T) + \frac{1}{2}B(t, T)^2 - \frac{1}{2}B(0, T)^2 + \frac{t}{a} - \frac{e^{-a(T-t)} - e^{-aT}}{a^2}\right] \\ \gamma_3 &= \frac{e^{-(a+b)t} - 1}{(a+b)(a-b)} + \frac{e^{-2at} - 1}{2a(a-b)} \\ \gamma_4 &= \frac{1}{ab}\left[\gamma_3 - C(0, T) - \frac{1}{2}B(0, t)^2 + \frac{t}{a} + \frac{e^{-at} - 1}{a^2}\right] \\ \gamma_5 &= \frac{1}{b}\left[\frac{1}{2}C(t, T)^2 - \frac{1}{2}C(0, T)^2 + \gamma_2\right] \\ \gamma_6 &= \frac{1}{b}\left[\gamma_4 - \frac{1}{2}C(0, t)^2\right] \end{aligned}$$

¹¹⁶ Cf. HULL J. (2004) *Options, futures et autres actifs dérivés*. 5^{ème} édition. Pearson Education. Page 670.

▪ **Annexe 8.2 : Modèle de H&W à un facteur – Résultats**

Dans cette annexe, nous présentons divers résultats obtenus :

- ✓ Arbre « recombinant » final du taux $R(t)$ issu de la courbe de taux ZC reconstruite du 12 mai 2005 :



L'arbre n'est pas représenté entièrement, seulement jusqu'à la période $t = 20\Delta t$ (soit 5 ans)

- ✓ Calibrage du modèle sur un jeu de « caps » et de « floors » de différentes durées et pour différents « strike » ; valorisations sur la courbe ZC du 12/05/05 :

Les prix affichés sont ceux calculés au 12 mai 2005. Nous calibrons le modèle avec un jeu de prix de marché de « caps » et de « floors » à cette date (12 de chaque). La durée des « caplets » correspond à la fréquence de constatation du taux variable Euribor 6 mois (référence des instruments choisis), c'est-à-dire 6 mois.

Le pas de temps est ici de 0,01 année.

Après minimisation de la somme des résidus sur les prix analytiques de tous les produits de taux, nous avons les tableaux de résultats suivants. Les paramètres optimaux obtenus sont :

$a_{opt} = 0,00738773$ $\sigma_{opt} = 0,01186$
--

CAP EUR6M Strike 2%

Durées du cap (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus	Black (vol constante) (%)	Résidus
2	0,699	0,828	0,017	0,804	0,011	0,839	0,020	0,590	0,012
3	1,596	1,822	0,051	1,817	0,049	1,848	0,063	1,400	0,039
4	2,754	3,075	0,103	3,073	0,102	3,121	0,135	2,471	0,080
5	4,144	4,526	0,146	4,536	0,154	4,596	0,204	3,790	0,125
7	7,377	7,853	0,227	7,889	0,263	7,983	0,367	6,938	0,193
10	12,773	13,274	0,251	13,365	0,350	13,511	0,544	12,307	0,217

Somme 1,3332

CAP EUR6M Strike 3%

Durées du cap (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus	Black (vol constante)	Résidus
2	0,079	0,160	0,007	0,153	0,005	0,163	0,007	0,048	0,001
3	0,367	0,544	0,031	0,548	0,033	0,555	0,035	0,305	0,004
4	0,844	1,148	0,093	1,154	0,096	1,170	0,107	0,777	0,004
5	1,535	1,939	0,163	1,954	0,176	1,977	0,195	1,476	0,003
7	3,343	3,962	0,383	3,999	0,430	4,044	0,491	3,407	0,004
10	6,641	7,572	0,867	7,655	1,027	7,738	1,203	7,118	0,227

Somme 2,0386

FLOOR EUR6M Strike 3%

Durées du floor (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus	Black (vol constante)	Résidus
2	1,402	0,947	0,207	0,973	0,184	0,959	0,196	1,113	0,084
3	1,807	1,377	0,185	1,390	0,174	1,394	0,171	1,556	0,063
4	2,144	1,733	0,169	1,745	0,159	1,754	0,152	1,926	0,048
5	2,412	2,044	0,135	2,051	0,131	2,068	0,118	2,243	0,028
7	2,865	2,574	0,085	2,571	0,086	2,603	0,069	2,816	0,002
10	3,435	3,268	0,028	3,249	0,035	3,304	0,017	3,631	0,038

Somme 0,7233

FLOOR EUR6M Strike 4%

Durées du floor (années)	Prix de marché (%)	Prix modèle - linéaire (%)	Résidus	Prix modèle - cubique (%)	Résidus	Prix Analytique (%)	Résidus	Black (vol constante)	Résidus
2	3,310	2,251	1,121	2,285	1,051	2,286	1,049	2,536	0,600
3	4,444	3,323	1,258	3,335	1,229	3,374	1,146	3,734	0,504
4	5,372	4,192	1,392	4,202	1,369	4,256	1,245	4,733	0,408
5	6,127	4,928	1,437	4,929	1,436	5,003	1,263	5,584	0,294
7	7,317	6,131	1,407	6,115	1,445	6,223	1,196	7,051	0,071
10	8,644	7,595	1,101	7,552	1,193	7,708	0,876	8,974	0,109

Somme 6,7741

Les résultats des prix avec la formule de Black sont issus d'un vecteur de volatilités constantes égales à 20 %.

Annexe 9 : Le modèle de BGM

▪ Annexe 9.1 : Modèle de BGM – Démonstrations

Les rappels et pré-requis nécessaires à ces démonstrations sont en Annexe 10. Nous nous appuyerons sur les démonstrations de l'ouvrage de F. Quittard-Pinon : « Marchés des Capitaux et Théorie Financière ».

✓ Démonstration de la dynamique (III.23) des taux « forward » Libor :

Rappelons l'hypothèse fondamentale concernant la dynamique des taux « forward » $F_k(t)$ dans le modèle de marché BGM et sous la mesure de probabilité \mathcal{Q}_{T_k} associée au zéro-coupon d'échéance T_k .

En considérant d facteurs de risque, la dynamique stochastique dans l'univers \mathcal{Q}_{T_k} forward-neutre s'écrit :

$$dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_k(t) \rangle = F_k(t) \sum_{q=1..d} \sigma_{k,q}(t) dW_{k,q}(t)$$

- $\sigma_{k,q} : \begin{cases} [0, T_{k-1}] \rightarrow \mathfrak{R}^d \\ t \rightarrow \sigma_{k,q}(t) \end{cases}$ sont les fonctions (déterministes, bornées et continues par morceaux) de volatilité des $F_k(t)$.
- \langle , \rangle le produit scalaire sur \mathfrak{R}^d
- W_k est un processus de Wiener multidimensionnel sous \mathcal{Q}_{T_k} à d composantes corrélées.

De plus d'après (III.22), nous avons la dynamique suivante :

$$dF_k(t) = F_k(t) \sigma_k(t)^T B dZ_k(t)$$

Z_k étant le mouvement brownien déduit de W_k par décorrélation.

Cette dynamique ne s'applique qu'au taux « forward » d'échéance T_k et dans l'univers probabiliste \mathcal{Q}_{T_k} . Nous voulons modéliser le comportement de tous les taux « forward » Libor simultanément et sous une même mesure. Nous allons à présent chercher à exprimer la dynamique stochastique de tous les taux « forward » reliés à l'instrument « cap » d'armature de dates notée \mathbb{J} . D'après le principe de changement de numéraire, pour passer de l'univers forward-neutre \mathcal{Q}_{T_k} à l'univers forward-neutre $\mathcal{Q}_{T_{k-1}}$, il faut utiliser la densité η définie comme suit :

$$\eta(t) = \frac{d\mathcal{Q}_{T_{k-1}}}{d\mathcal{Q}_{T_k}} = \frac{\frac{P(t, T_{k-1})}{P(0, T_{k-1})}}{\frac{P(t, T_k)}{P(0, T_k)}} = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k-1})} (1 + \tau L^c(t, T_{k-1})) = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k-1})} (1 + \tau L_{k-1}(t))$$

Nous avons donc l'expression : $\eta(t) = \frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k-1})} (1 + \tau F_k(t))$ (*)

Nous voulons écrire cette densité sous la forme de l'exponentielle de Doléans - Dade d'un processus k à identifier :

$$\eta(t) = \exp \left\{ \int_0^t k(u)^T dZ_k - \frac{1}{2} \int_0^t \|k^2\| du \right\}$$

Par suite,

$$d \ln(\eta(t)) = k(t)^T dZ_k - \frac{1}{2} \|k^2\| dt$$

D'après (*), nous obtenons :

$$\ln(\eta(t)) = \ln \left(\frac{P(0, T_k)}{P(0, T_{k-1})} \right) + \ln(1 + \tau F_k(t))$$

Nous savons que $F_k(t)$ est un processus stochastique de diffusion et que $\ln(\eta(t))$ est une diffusion fonction de $F_k(t)$ et de t . Alors par le lemme d'Itô (sous sa forme vectorielle) :

$$d \ln(\eta) = -\frac{1}{2} \frac{\tau^2 F_k^2}{(1 + \tau F_k)^2} \sigma_k^T R \sigma_k dt + \frac{\tau}{(1 + \tau F_k)} F_k \sigma_k^T B dZ_k$$

Ainsi, par unicité de l'équation différentielle stochastique, le processus k peut s'écrire comme ceci :

$$k = \frac{\tau}{(1 + \tau F_k(t))} F_k(t) B^T \sigma_k$$

D'où, d'après le théorème de Girsanov (sous sa forme multidimensionnelle), nous avons, sous la nouvelle mesure de probabilité $Q_{T_{k-1}}$:

$$dZ_{k-1} = dZ_k - \frac{\tau}{(1 + \tau F_k)} F_k B^T \sigma_k dt \quad \text{et} \quad BdZ_{k-1} = BdZ_k - \frac{\tau}{(1 + \tau F_k)} F_k R \sigma_k dt \quad (**)$$

Où Z_{k-1} est un processus de Wiener sous cette mesure.

Si l'on veut expliciter la dynamique du taux Libor dans des univers forward-neutre correspondants aux différentes dates de l'armature ; en utilisant la relation précédente et en distinguant deux cas, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \text{Lorsque } i > k : \quad dZ_k - dZ_{k+1} &= -\frac{\tau}{(1 + \tau F_{k+1})} F_{k+1} B^T \sigma_{k+1} dt \\ dZ_{k+1} - dZ_{k+2} &= -\frac{\tau}{(1 + \tau F_{k+2})} F_{k+2} B^T \sigma_{k+2} dt \\ \dots \end{aligned}$$

$$dZ_{i-1} - dZ_i = -\frac{\tau}{(1 + \tau F_i)} F_i B^T \sigma_i dt$$

Ainsi :

$$dZ_k = dZ_i - \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau}{(1 + \tau F_j)} F_j B^T \sigma_j dt$$

D'où ,

$$dF_k(t) = F_k(t) \sigma_k(t)^T B dZ_k(t)$$

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sigma_k(t)^T B \left(dZ_i - \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau}{(1 + \tau F_j)} F_j B^T \sigma_j dt \right)$$

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sigma_k(t)^T B dZ_i - \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau}{(1 + \tau F_j)} F_j \sigma_k(t)^T B B^T \sigma_j dt$$

Enfin nous retrouvons la dynamique postulée pour $i > k$:

$$\boxed{dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_i(t) \rangle - F_k(t) \sum_{j=k+1}^i \frac{\tau F_j(t) \langle \sigma_k(t), \sigma_j(t) \rangle}{1 + \tau F_j(t)} dt}$$

De manière analogue, nous obtenons pour $i < k$:

$$dZ_k = dZ_i + \sum_{j=i+1}^k \frac{\tau}{(1 + \tau F_j)} F_j B^T \sigma_j dt$$

Et la dynamique cherchée $dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_i(t) \rangle + F_k(t) \sum_{j=i+1}^k \frac{\tau F_j(t) \langle \sigma_k(t), \sigma_j(t) \rangle}{1 + \tau F_j(t)} dt \square$

✓ Dynamique sous la mesure terminale Q_{T_M} :

Ecrivons la dynamique sous la mesure terminale du $M^{\text{ième}}$ taux « forward » Libor, qui est la mesure forward-neutre Q_{T_M} (cf. formule (III.22)) :

$$dF_M(t) = F_M(t) \sigma_M(t)^T B dZ_M(t)$$

D'après l'équation (**) ci-dessus, nous pouvons écrire :

$$\frac{dF_{M-1}}{F_{M-1}} = \sigma_{M-1}^T BdZ_{M-1} = \sigma_{M-1}^T \left[BdZ_M - \frac{\tau}{(1 + \tau F_M)} F_M R \sigma_M dt \right]$$

idem pour,

$$\begin{aligned} \frac{dF_{M-2}}{F_{M-2}} &= \sigma_{M-2}^T BdZ_{M-2} = \sigma_{M-2}^T \left[BdZ_{M-1} - \frac{\tau}{(1 + \tau F_{M-1})} F_{M-1} R \sigma_{M-1} dt \right] \\ &= \sigma_{M-2}^T \left[\left[BdZ_M - \frac{\tau}{(1 + \tau F_M)} F_M R \sigma_M dt \right] - \frac{\tau}{(1 + \tau F_{M-1})} F_{M-1} R \sigma_{M-1} dt \right] \\ &= \sigma_{M-2}^T BdZ_M - \frac{\tau}{(1 + \tau F_M)} F_M \sigma_{M-2}^T R \sigma_M dt - \frac{\tau}{(1 + \tau F_{M-1})} F_{M-1} \sigma_{M-2}^T R \sigma_{M-1} dt \end{aligned}$$

D'où, en itérant le calcul, on obtient la relation suivante :

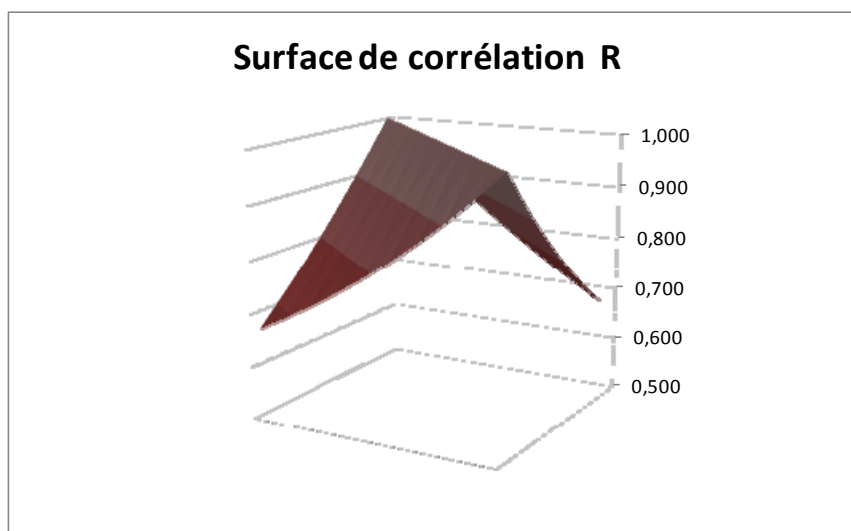
$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sigma_k(t)^T BdZ_M - \sum_{j=k+1}^{M-1} \frac{\tau}{(1 + \tau F_j)} F_j \sigma_k(t)^T R \sigma_j dt$$

Cette expression va s'écrire également, d'après les notations de notre étude (formule (III.30)):

$$dF_k(t) = F_k(t) \langle \sigma_k(t), dW_M(t) \rangle - F_k(t) \sum_{j=k+1}^{M-1} \frac{\tau F_j(t) \langle \sigma_k(t), \sigma_j(t) \rangle}{1 + \tau F_j(t)} dt \square$$

▪ **Annexe 9.2 : Modèle de BGM – Corrélations et triangles de diffusion**

✓ Exemple de la thèse d'I.Grubicic :



▪ **Annexe 9.3 : Modèle de BGM – Evaluations de floors par les simulations de Monte-Carlo**

- ✓ Evaluations de « floors » de durée 5 ans (mêmes caractéristiques que les « caps » du mémoire) :

Vecteur unique de volatilités

Matrice de volatilités (Smile)

1000 tirages

Strike	FLOOR BGM	FLOOR THEO	Erreurs
2%	0,22%	0,22%	0,86%
3%	2,44%	2,18%	11,52%
4%	6,09%	5,56%	9,62%
5%	10,33%	9,53%	8,43%
6%	14,80%	13,75%	7,69%

1000 tirages

Strike	FLOOR BGM	FLOOR THEO	Erreurs
2%	0,20%	0,21%	-0,75%
3%	2,23%	2,01%	10,79%
4%	5,84%	5,38%	8,49%
5%	10,17%	9,44%	7,76%
6%	14,73%	13,72%	7,41%

10000 tirages

Strike	FLOOR BGM	FLOOR THEO	Erreurs
2%	0,22%	0,22%	0,32%
3%	2,36%	2,18%	8,02%
4%	6,00%	5,56%	7,94%
5%	10,22%	9,53%	7,31%
6%	14,69%	13,75%	6,83%

10000 tirages

Strike	FLOOR BGM	FLOOR THEO	Erreurs
2%	0,21%	0,21%	0,13%
3%	2,18%	2,01%	8,13%
4%	5,66%	5,38%	5,14%
5%	10,11%	9,44%	7,09%
6%	14,24%	13,72%	3,82%

Nous rappelons le vecteur de volatilités de Black utilisé pour l'évaluation des « floors » avec la fonction de calcul des options théoriques par les formules de Black :

Indices du caplet	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
vol _{black}	13,95%	13,95%	16,50%	19,73%	20,49%	20,49%	21,51%	22,72%	23,01%	23,00%
Indices du caplet	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
vol _{black}	22,91%	22,78%	22,76%	22,76%	22,37%	21,90%	21,79%	21,79%	22,03%	22,32%

Comme pour les évaluations des « caps » dans le corps du mémoire, les résultats de valorisation des « floors » sont meilleurs avec un plus grand nombre de tirages (10000) et l'utilisation d'une matrice de volatilités de Black.

Annexe 10 : Rappels mathématiques, statistiques et financiers

▪ Annexe 10.1 : Résultats mathématiques et rappels de mathématiques financières

Filtration :

Soit une suite de σ -algèbre $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ telle que $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_n$. Alors l'ensemble $\{\mathcal{F}_i ; i = 0..n\}$ est une filtration.

Mouvement brownien (brownian motion) : On appelle **mouvement brownien** un processus **stochastique** $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues (X_t représentant $X(t)$).

Ce qui signifie qu'il y a :

- ❖ continuité : la fonction $s \rightarrow X_s$ (w) est une fonction continue ;
- ❖ indépendance des accroissements : si $s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de la tribu \mathcal{F}_s engendrée par $\{X_u ; u \leq s\}$;
- ❖ stationnarité des accroissements : si $s \leq t$, la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle de $X_{t-s} - X_0$.

Cette définition permet de caractériser la loi de la variable aléatoire X_t .

Théorème : Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, alors $X_t - X_0$ est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne μt et de variance $\sigma^2 t$, r et σ étant des constantes réelles.

Un mouvement brownien est dit standard si $X_0 = 0$ P p.s. $E[X_t] = 0$, $E[X_t^2] = t$.

X_t peut alors s'écrire : $X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$, où W_t est un **mouvement brownien standard**.

Dans cette écriture, μt représente la partie déterministe où μ est appelé le **drift ou la dérive**, et σW_t représente la partie stochastique (aléatoire) où σ est appelée la **volatilité**.

Processus stochastique : On appelle processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace E muni d'une tribu \mathbb{E} , une famille $\{X_t ; t \in \mathbb{R}\}$ de variables aléatoires sur un espace de probabilité (Ω, \mathbb{A}, P) à valeurs dans (E, \mathbb{E}) .

Processus de Wiener : Le processus $\{W(t), t \in T = [0, \infty[\}$ est dit **brownien standard** ou de **Wiener-Levy**, ou tout simplement de **Wiener**, si

- $P\{W(0) = 0\} = 1$.
- $W(t)$ est un processus à accroissements indépendants sur T .
- Pour tout $h > 0$ la loi de $W(t+h) - W(t)$ ne dépend pas de $t, t \in T$ (homogénéité).
- $\forall t \in T, P\{W(t) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2t}} du$.

Processus de diffusion :

x est un processus de diffusion s'il est solution de l'équation différentielle stochastique (EDS):

$$dx = f(x,t)dt + g(x,t)dz$$

Où

- x est un vecteur de dimension n
- f est une fonction vectorielle $n \times 1$
- g est une fonction matricielle $n \times k$
- z est un processus de Wiener de dimension k .

Pour que x soit l'unique solution de l'EDS, f et g doivent être mesurables, et vérifier que:

- ❖ Il existe $k > 0$, tel que pour tout $t \in [0, T]$ et $x \in \mathfrak{R}_n$:

$$\|f(x,t)\|^2 + \|g(x,t)\|^2 \leq k(1 + \|x\|^2)$$

- ❖ Pour tout $R > 0$, il existe C_R tel que :

$$\|f(x,t) - f(y,t)\|^2 + \|g(x,t) - g(y,t)\|^2 \leq C_R \|x - y\|^2 \text{ pour } \|x\| < R \text{ et } \|y\| < R$$

Lemme d'Itô :

Si $x(t)$ est solution de $dx = \mu(x,t)dt + \sigma(x,t)dz$ alors pour toute fonction numérique $f(x,t)$ de classe C^2 par rapport à x et de classe C^1 par rapport à t , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x,t) \text{ est une diffusion dont la dynamique est régie par le lemme d'ito} \\ df = \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \mu(x,t) \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{1}{2} \sigma^2(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma(x,t) \frac{\delta f}{\delta x} dz \end{array} \right.$$

Pour un processus vectoriel (x est un vecteur de dimension supérieur à 1), on a alors :

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \mu(x,t)^T \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) + \frac{1}{2} \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma(x,t)^T \sigma(x,t) \right) \right) dt + \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right)^T \sigma(x,t) dz$$

Univers risque-neutre et prix de marché du risque :

Soit θ une variable d'état qui suit le processus de diffusion suivant :

$$\frac{d\theta}{\theta} = m(\theta,t)dt + s(\theta,t)dz ; \quad z \text{ processus de Wiener.}$$

Les paramètres m et s sont respectivement le taux de croissance espéré et la volatilité de θ . Soient f_1 et f_2 les prix de deux actifs ZC dérivés dépendant **uniquement** de θ et t .

Leurs dynamiques sont décrites par les processus suivants :

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1(\theta, t)dt + \sigma_1(\theta, t)dz$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2(\theta, t)dt + \sigma_2(\theta, t)dz$$

Le processus z est le même processus de Wiener que celui de l'équation de l'évolution de θ car il représente la seule source d'incertitude.

En considérant le taux sans risque r et un portefeuille localement sans risque π rémunéré à ce taux sur un intervalle de longueur infinitésimale δt ; et tel que : $\pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2$

Le portefeuille consiste en l'achat de $\sigma_2 f_2$ unités de l'actif 1 et la vente de $\sigma_1 f_1$ unités de l'actif 2. Ce portefeuille étant sans risque, nous avons : $\frac{d\pi}{\pi} = rdt$

Par différenciation et discrétisation, en suivant un raisonnement classique déjà évoqué dans le mémoire, nous obtenons la relation suivante : $\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \lambda$.

Ainsi, le prix f d'un actif dérivé quelconque, vérifie :

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \qquad \mu - r = \lambda \sigma$$

Le paramètre λ est appelé **prix de marché du risque**. Il est identique pour tous les actifs dérivés considérés ne dépendant que de θ et t . Ce prix de marché du risque mesure le taux de substitution entre rentabilité (en excès de taux sans risque) et risque pour les actifs dépendant de θ . σ peut alors être vue comme la quantité de risque présente dans l'actif dérivé f . Le terme $\mu - r$ est alors la rentabilité espérée pour cet actif, en excès du taux sans risque.

Dans un univers où le prix de marché est nul, la dérive μ du processus de f est égal au taux sans risque r . Cet univers est qualifié d'**univers risque-neutre**, le processus stochastique de f s'écrit alors :

$$\frac{df}{f} = rdt + \sigma dz$$

D'une façon générale, le processus de f s'écrit $\frac{df}{f} = (r + \lambda \sigma)dt + \sigma dz$. Le choix d'un prix de marché du risque ou « **prime de risque** » revient à définir une probabilité sous laquelle sont calculées les rentabilités espérées des actifs. L'idée est de bien choisir le paramètre λ afin d'obtenir des rentabilités espérées proches des marchés (pour se placer dans un univers réel).

A présent, voyons le cas d'un actif f dépendant de plusieurs variables d'état $\theta_i, i = 1..n$. Ces n variables suivent des processus stochastiques comparables à celui suivi par θ .

D'après le lemme d'îto, généralisé à n dimensions, nous avons la dynamique suivante :

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dz_i = \mu dt + \langle \sigma, dz \rangle$$

Les paramètres μ et $\sigma_i dz_i$ sont respectivement la rentabilité espérée de l'actif et la composante risquée relative à la $i^{\text{ème}}$ variable d'état.

Enfin, nous avons le résultat suivant : $\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$

Où λ_i est le prix de marché du risque lié à θ_i . Le terme $\lambda_i \sigma_i$ mesure la part de l' $i^{\text{ème}}$ variable dans l'espérance de rentabilité attendue. Quand ce terme est positif, les investisseurs demandent une rémunération supplémentaire pour supporter ce risque appelée « prime de risque ». A l'inverse, ce terme négatif, θ_i réduirait le risque global supporté par ceux-ci.

Martingales : définitions, propriétés et théorèmes

Les martingales sont des processus stochastiques essentiels dans l'évaluation risque-neutre. Ce sont des processus constants en espérance conditionnelle. L'espérance de la valeur future d'une martingale, conditionnellement à l'information présente, est égale à sa valeur présente. En d'autres termes, sur un court intervalle de temps, la variation de ce processus est proportionnelle à la variation du mouvement brownien, processus dont les variations ont une espérance nulle ; ainsi la variation entre 0 et une date t , étant la somme de variations sur de courts intervalles, aura aussi une espérance nulle.

Définition :

Soit X une variable aléatoire intégrable. X est une martingale par rapport à la filtration \mathcal{F} si elle vérifie : $E(X(t) | \mathcal{F}(s)) = X(s)$ pour tout $s, 0 < s < t$.

Propriétés :

- ❖ Un processus de diffusion qui est une martingale a un **drift nul** et s'écrit $d\theta = \sigma dz$ où z est un mouvement brownien.
- ❖ Il existe toujours une **mesure martingale équivalente** i.e. une probabilité sous laquelle les prix des actifs, exprimés en unités d'un numéraire convenablement choisi, sont des martingales.

Théorème d'évaluation par changement de numéraire :

Soit la probabilité risque-neutre Q . Elle est supposée unique. Le numéraire de base est le compte épargne défini par $\delta(t) = e^{-\int_0^t r(u) du}$ et $\beta(t) = \frac{1}{\delta(t)}$.

Soit un nouveau numéraire X tel que $X(t)\delta(t)$ soit une Q -martingale, alors il existe une

$$\text{mesure } Q_X \text{ sur } \mathfrak{F}_T \text{ définie par : } \frac{dQ_X}{dQ} = \frac{\frac{X(T)}{X(0)}}{\frac{\beta(T)}{\beta(0)}} = \frac{X(T)}{X(0)} \delta(T)$$

Cette mesure est telle que les actifs financiers exprimés dans ce nouveau numéraire sont des Q_X martingales. La valeur d'équilibre $f(S,t)$ de l'actif dérivé du sous jacent S de « payoff » $H(T)$ en T vaut :

$$f(S,t) = X(t) E_{Q_X}^t \left[\frac{H(T)}{X(T)} \right]$$

Par suite, pour M et N deux numéraires, nous trouvons $\frac{dQ_N}{dQ_M} = \frac{dQ_N dQ}{dQ dQ_M} = \frac{\frac{N(T)}{N(0)}}{\frac{M(T)}{M(0)}}$

Univers forward-neutre :

Soient f et g deux actifs dépendant d'une seule source d'incertitude. Si ces deux actifs sont des actifs qui ne paient pas de flux intermédiaires et que le prix de g est toujours positif.

Définissons le prix relatif $\phi = \frac{f}{g}$ de f par rapport à g i.e. le prix de f est exprimé en unités

d'actif g (g servant de numéraire). Dire qu'il existe une mesure martingale équivalente signifie qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage, il existe une probabilité telle que ϕ soit une martingale sous cette probabilité. Le prix de marché du risque pertinent est alors la volatilité de g .

Un univers dans lequel le prix de marché du risque est la volatilité de g est appelé univers **forward-neutre** de numéraire g .

Nous pouvons alors écrire $f_s = g_s E_g \left(\frac{f_t}{g_t} \right)$ pour tout $s, 0 < s < t$. E_g désigne l'opérateur d'espérance dans l'univers forward-neutre de numéraire g .

Si l'on considère le prix du zéro-coupon $P(t,T)$ payant un euro en date t . Cette dernière équation s'écrit en date $s=0$: $f_0 = P(0,T) E_T \left(\frac{f_T}{P(T,T)} \right) = P(0,T) E_T (f_T)$ où E_T est l'espérance dans l'univers forward-neutre du ZC de maturité T .

Cela montre que l'on peut valoriser n'importe quel actif en calculant son « payoff » espéré, dans l'univers forward-neutre dont le numéraire est le ZC d'échéance T , et en actualisant au taux sans risque.

Soit F le prix forward de f pour un contrat d'échéance T . Nous en déduisons, d'après la formule précédente, que $F = E_T (f_T)$.

Ainsi, dans l'univers forward-neutre associé au numéraire ZC d'échéance T , le prix forward d'un actif pour un contrat d'échéance T , est égal à l'espérance du prix spot futur à la date T .

Théorème de Girsanov :

Soit l'espace filtré $(\Omega, \mathfrak{F}_t, P)$ où Ω est l'espace fondamental, \mathfrak{F}_t la filtration du mouvement brownien z . Soit X une fonction aléatoire adaptée à \mathfrak{F}_t , telle que :

$$E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T X(t)^2 dt \right\} \right] < \infty$$

Soit Q la mesure de probabilité définie sur \mathfrak{F}_t , par la densité de Radon Nikodym :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ \int_0^T X(t) dz(t) - \frac{1}{2} \int_0^T X(t)^2 dt \right\}$$

alors $\hat{z}(t) = z(t) - \int_0^t X(s) ds$ pour $t \in [0, T]$ est un processus de Wiener sous la nouvelle mesure de probabilité Q .

Propriété markovienne d'un processus stochastique :

Un processus stochastique est markovien si et seulement si la distribution conditionnelle de probabilité des états futurs, étant donné l'instant présent, ne dépend que de ce même état présent et pas des états passés. C'est un **processus de markov**.

Taux forward / taux forward instantané :

Revenons tout d'abord sur la notion de taux « forward » et de contrat « forward » (cf. glossaire financier).

Considérons un contrat à terme qui promet au temps t de payer un montant dans le futur à l'instant T_1 et de recevoir un paiement en retour à l'instant T_2 ($T_2 > T_1$). Ce contrat, « forward », est exercé sur une obligation ZC d'échéance en T_2 .

Nous cherchons à connaître le prix de ce contrat. Si l'on duplique ce contrat en achetant, au temps t , une obligation d'échéance T_2 et en vendant x obligations d'échéance T_1 . Pour faire ceci, cela coûte $B(t, T_2) - xB(t, T_1)$. Ce contrat « forward » doit avoir une valeur nulle en T_1 , ainsi x prend la valeur $\frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)}$. x est alors le prix « forward » pour l'achat d'une obligation qui échoit en T_2 au temps T_1 .

Nous savons que le prix d'une telle obligation vaut : $e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)}$ où f est le taux « forward » cherché.

Ainsi nous avons l'égalité suivante : $\frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)} = e^{-f(t, T_1, T_2)(T_2 - T_1)}$ et nous pouvons en déduire le taux « forward » suivant:

$$f(t, T_1, T_2) = - \frac{\ln B(t, T_2) - \ln B(t, T_1)}{T_2 - T_1}$$

Remarque :

- ❖ A l'aide de développements limités, nous retrouvons rapidement l'expression du taux « forward » en temps discret de la section 2.3 de la partie I.
- ❖ Lorsque T_2 tend vers T_1 , le taux « forward » instantané $f(t, T)$ s'écrit alors comme ceci :

$$f(t, T_1) = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{\ln B(t, T_2) - \ln B(t, T_1)}{T_2 - T_1} = \lim_{T_2 \rightarrow T_1} \frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left(\frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)} \right)$$

En supposant que $T_1 = T$ et $T_2 = T + \Delta t$, Δt accroissement de temps infinitésimal, l'expression du **taux forward instantané** est :

$$f(t, T) = \frac{\delta}{\delta T} \ln B(t, T)$$

Le taux « forward » instantané s'écrit donc en fonction du prix d'une obligation zéro-coupon.

Méthodes d'interpolation entre deux taux :

Interpolation linéaire :

Soient les taux zéro-coupon $r(t, T_1)$ et $r(t, T_2)$ de maturités respectives T_1 et T_2 . Nous voulons interpoler (« connaître ») le taux de maturité T avec $T_1 < T < T_2$. Nous utilisons la formule d'interpolation linéaire suivante :

$$r(t, T) = \frac{(T_2 - T)r(t, T_1) + (T - T_1)r(t, T_2)}{(T_2 - T_1)}$$

Interpolation cubique :

Une interpolation cubique s'opère par segment de courbe. Définissons un premier segment entre T_1 et T_4 où l'on dispose des quatre taux zéro-coupon $r(t, T_1)$, $r(t, T_2)$, $r(t, T_3)$ et $r(t, T_4)$.

Alors le taux $r(t, T)$ de maturité t est défini par : $r(t, T) = aT^3 + bT^2 + cT + d$

Contrainte- la courbe doit passer par les quatre taux connus, d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} r(t, T_1) = aT_1^3 + bT_1^2 + cT_1 + d \\ r(t, T_2) = aT_2^3 + bT_2^2 + cT_2 + d \\ r(t, T_3) = aT_3^3 + bT_3^2 + cT_3 + d \\ r(t, T_4) = aT_4^3 + bT_4^2 + cT_4 + d \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi interpoler sur plusieurs taux ZC de maturités différentes en considérant plusieurs segments de dates et taux ZC déjà connus. Afin de reconstituer la courbe des taux zéro-coupon.

Actualisation et valorisation :

L'actualisation donne la valeur aujourd'hui d'un flux (ou d'une suite de flux) qui sera versé dans le futur. A l'inverse de la capitalisation, qui permet de calculer la valeur d'un placement dans le futur. Ces flux futurs ou « Cash Flow » sont des grandeurs algébriques représentant des paiements (négatifs) ou des gains (positifs).

Valoriser en date t (dite « date de valorisation ») un produit financier générant des flux futurs positifs ou négatifs revient à actualiser chaque « Cash Flow » futur à l'aide du facteur d'actualisation approprié (DF ou obligation ZC) de maturité correspondant à la durée écoulée entre la date de tombée de ce flux et la date de valorisation. La courbe des taux ZC utilisée est celle de la date de valorisation du produit.

▪ *Annexe 10.2 : Rappels statistiques et algébriques*

Rang d'une matrice :

Soit M une matrice réelle de dimension $m \times n$. Le rang de M (noté $\text{rg}(M)$) est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes (ou lignes). C'est aussi la taille du plus grand mineur non nul de M .

Propriété importante : une matrice carrée de dimension n est inversible si et seulement si son rang est n .

Trace d'une matrice : Somme des éléments diagonaux d'une matrice.

Matrice semi-définie positive (sdp) :

Une matrice carrée Y de dimension M est *semi-définie positive* (notée $Y \geq 0$) si pour tout vecteur x de dimension M , nous avons : $xYx^T \geq 0$

Propriété importante : une matrice carrée de dimension M est une matrice de corrélation si et seulement si elle est semi-définie positive et tous ses éléments diagonaux valent 1.

Norme de Frobenius :

Soit un espace de Hilbert $(S^{M \times M}, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ de matrices symétriques réelles de dimension $M \times M$.

Où :

- le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ est défini par : $\langle X, Y \rangle_W = \text{trace}(XWYW)$, $X, Y \in S^{M \times M}$
- W est définie positive et dans $S^{M \times M}$

La norme sur $S^{M \times M}$ induite par $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ est alors :

$$\|X\|_W^2 = \langle X, X \rangle_W = \text{trace}(XWXW), \quad X \in S^{M \times M}$$

Dans le cas où $W = I$, la norme matricielle est la norme « Euclidienne » ou « de Frobenius », notée $\|\cdot\|_F$.

Loi Normale ou de Laplace-Gauss :

C'est la loi d'une variable aléatoire X à valeurs réelles, de densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

qui est définie par deux paramètres m (espérance) et σ ($\sigma > 0$, écart-type). Noté $X \sim N(m, \sigma^2)$. σ^2 est la variance de la loi normale. Une telle variable est dite variable gaussienne.

Loi log-normale :

La variable aléatoire positive X suit une loi log-normale de paramètre m et σ ($\sigma > 0$) si la variable aléatoire $\ln(X)$ suit une loi $N(m, \sigma)$

Algorithme de Jacobi : La méthode de Jacobi est une méthode itérative de résolution d'un système matriciel de la forme $Ax=b$. Pour cela, on utilise une suite $x_{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires.

Méthode des moindres carrés / régression linéaire :

On dispose de n couples de points (x_i, y_i) ; $i=1, \dots, n$ constituant un échantillon d'observations indépendantes de (X, Y) . Supposons vraie l'hypothèse $E(Y|X) = \alpha + \beta X$. Le problème est d'estimer α , β ainsi que σ^2 la variance du **résidu** ε . Il suffit de supposer que pour chaque observation, on a $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ où les ε_i sont des réalisations indépendantes d'une variable ε d'espérance nulle et de variance constante σ^2 , quel que soit x_i . On parle alors de **modèle linéaire**.

La **méthode des moindres carrés** cherche à ajuster au nuage de points (x_i, y_i) une droite d'équation $y^* = a + bx$ de telle sorte que $\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2$ soit minimale. On étudie ensuite les propriétés de a et b en tant qu'estimations de α et β ainsi que l'estimation $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 .

▪ **Annexe 10.3 : Glossaire financier**

La plupart des définitions de ce glossaire sont issues de l'ouvrage de M. Quittard-Pinon : « *Mathématiques financières* ».

Couverture : Stratégie financière consistant à protéger une position des mouvements non désirés des cours ou des taux.

Drift : *poussée, terme de dérive ou de tendance*. Son signe indiquera le style d'évolution du mouvement brownien (dérive vers le haut pour un drift positif, vers le bas dans le cas contraire).

Marché parfait : Cadre idéalisé d'un marché. Les titres sont parfaitement divisibles et les ventes à découvert permises. Les opérateurs rationnels, y ont la même importance, sont dotés des mêmes capacités de traiter l'information et ne peuvent, par une action individuelle, faire

bouger les prix. Il n'y a pas de barrière aux emprunts. Les taux de prêts et d'emprunts sont identiques. Il n'y a pas de coûts de transactions, ni de fiscalité.

Obligation : Titre financier, correspondant au partage d'une dette en plusieurs parts d'un montant identique et donnant droit à des versements périodiques de revenus calculé sur la base d'un taux d'intérêt, les coupons, et au remboursement du capital. Le taux peut être fixe ou variable et le remboursement de l'obligation peut s'effectuer en une ou plusieurs fois. Ce remboursement peut être supérieur à la valeur faciale. Après l'émission, les obligations peuvent être négociées sur un marché boursier.

Opportunité d'arbitrage : C'est à la fois un concept théorique et une stratégie financière. On dit d'un marché qu'il offre une opportunité d'arbitrage lorsqu'il est possible de réaliser un profit certain sans mise de fonds propres. Sur un marché en équilibre il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). L'absence d'opportunité d'arbitrage assure l'unicité des prix.

Probabilité risque-neutre : Probabilité pour laquelle les processus de prix actualisés au taux d'intérêt sans risque sont des martingales. Elle conduit à définir un univers fictif dans lequel les prix des actifs financiers s'ajustent au risque de marché. L'univers risque-neutre est un univers probabiliste dans lequel le processus de prix des actifs a un drift égal au taux sans risque r .

Volatilité : *La volatilité est l'expression mathématique qui désigne le risque d'un titre.* Elle définit les variations d'un titre sur une période plus ou moins longue. Plus un titre est volatil, plus la rentabilité du titre est importante afin de compenser le fort risque. La volatilité est le plus souvent calculée en utilisant l'écart type de la valeur.

Structure par terme des taux d'intérêt ou STTI : Expression, à un instant donné, des taux d'intérêt en fonction de leur maturité. On parle de courbe de taux à l'instant t .

Option : Contrat donnant le droit à son détenteur d'acheter ou de vendre ultérieurement un sous-jacent pour un prix précisé dans le contrat et appelé prix d'exercice. Les options d'achat sont appelées des « calls », les options de ventes des « puts ». Si l'option ne peut être exercée qu'à l'échéance du contrat on parle d'option européenne et, d'option américaine si elle peut être exercée à n'importe quel moment jusqu'à l'échéance. Un vendeur d'option a toujours l'obligation de livrer le sous-jacent, tandis que l'acheteur a la possibilité de ne pas utiliser son droit, ce qu'il fera si celui-ci ne se révèle pas avantageux.

Forward : Contrat à terme sur un marché de gré à gré. Il arrête aujourd'hui les termes d'un échange futur et, il permet en particulier d'assurer aujourd'hui un prix fixe pour une opération à venir.

Future : Contrat à terme sur un marché organisé. A la différence du contrat « forward », le marché n'est pas de gré à gré.