



Mémoire d'Actuariat - Promotion 2010

**Allocation d'un fonds IARD
sous contrainte Solvabilité II (QIS5)**

**Alexandre ABOUD
Raphaël CHAUSSENERY**

MOTS-CLÉS : *Gestion Actif-Passif, Assurance Dommages, Inflation, Solvabilité II*

KEYWORDS : *Asset-Liability Management, General Insurance, Inflation, Solvency II*

ENCADREMENT : Teyi LAWSON, Grégoire LACHENAUD

CORRESPONDANT E.N.S.A.E : Christian-Yann ROBERT

Mémoire d'Actuariat - Promotion 2010

Allocation d'un fonds IARD sous contrainte Solvabilité II (QIS5)

Alexandre ABOUD
Raphaël CHAUSSENERY

MOTS-CLÉS : *Gestion Actif-Passif, Assurance Dommages, Inflation, Solvabilité II*

L'objectif de la gestion Actif-Passif est d'identifier la stratégie opérationnelle optimale pour l'entreprise, cette stratégie devant permettre de maîtriser les risques bilanciaux sous contrainte de rentabilité et dans le respect des cadres réglementaire, juridique et comptable.

Elle nécessite d'analyser à horizon donné les évolutions bilanciales probables en fonction de variables vis-à-vis desquelles elle précise des anticipations de marché et d'activité. Elle discriminerait ainsi successivement les différentes options stratégiques admissibles, et conserverait la plus adéquate au sens des fonctions objectifs qu'elle aura définies.

Outre le choix des orientations actuarielles et commerciales et la définition d'un programme de réassurance et de titrisation adapté, la ventilation de l'allocation stratégique ainsi que son adéquation à la propension au risque de la compagnie d'assurance compte parmi les préoccupations majeures de la direction générale.

Cette étude s'est attachée, suite à l'établissement d'objectifs de placement et de solvabilité mesurables, à simuler le comportement économique et comptable d'un fonds IARD, pour différentes allocations d'actifs, et sous différents environnements économiques et réglementaires.

Elle vise en premier lieu à la détermination d'une stratégie de placement appropriée, cette dernière devant permettre à l'assureur de respecter ses différents engagements, et ce tout en visant à la satisfaction des actionnaires et du régulateur.

Elle analyse dans un second temps l'influence de l'inflation du passif sur l'allocation stratégique, et voit le délaissement de la poche taux fixe au profit de la source de corrélation offerte par la poche OATI. Elle désigne ainsi l'intégration d'une telle poche comme l'unique moyen de juguler les effets adverses de l'inflation, et de coupler les éléments du bilan afin de palier à une variabilité accrue du résultat ; Elle décèlera en outre un niveau optimal de couverture qu'elle localisera au voisinage de l'élasticité relative de l'inflation du passif par rapport à l'inflation CPI.

L'inflation du passif différant de l'inflation CPI, et les seuls instruments existants sur le marché étant indexés sur celle-ci, elle questionne ensuite l'impact du risque de base résiduel sur la demande en instruments de couverture. Malgré une adéquation imparfaite, elle montrera que les OATi demeurent la meilleure alternative disponible, et qu'en l'absence d'actifs permettant de couvrir le risque de base résiduel, l'allocation optimale reste inchangée.

Les dispositions prévues par la directive Solvabilité II réduisant structurellement la prime de risque des instruments financiers les plus volatils, elle s'attachera dans une dernière partie à mesurer l'ampleur de leur incidence sur l'allocation en actifs risqués, et s'appliquera à identifier les substituts optimaux. Elle évaluera alors les coûts inhérents au « *Capital de Solvabilité Requis* » en prenant pour base la formule standard telle qu'elle figure dans la préversion du QIS5, et verra les allocations les plus chargées sortir de la frontière efficiente pour laisser place à des portefeuilles plus conservateurs.

Actuarial Thesis - Year 2010

**Allocation optimization in
general insurance
under Solvency II (QIS5)**

**Alexandre ABOUD
Raphaël CHAUSSENERY**

KEYWORDS : *Asset-Liability Management, General Insurance, Inflation, Solvency II*

Asset-Liability management aims at identifying the operations strategy that will best suit the company's objectives and interests, thus enabling it to control balance-sheet risks and to deliver performance while complying with various regulatory frameworks.

This implies projecting the likely balance-sheet evolutions given an analysis horizon, and enables to discriminate policy options in accordance with the board's expectations and adequacy criteria.

Besides the establishment of actuarial and business guidelines, and apart from defining an appropriate reinsurance and securitization program, the board will need to build the company's strategic allocation according to its risk appetite.

This study establishes measurable investment and solvency targets, and focuses on simulating the behavior of a P&C fund under different economic and regulatory environments.

It aims at defining an investment strategy that will enable the insurer to meet its commitments while satisfying both the shareholders and the regulator.

It also considers the influence of liabilities inflation over tactical asset allocation, and identifies inflation linked bonds as the only means to curb inflation's adverse effects on income variability ; It will even specify the optimal weight and locate it around the relative elasticity of liabilities inflation compared to that of CPI inflation.

As liabilities inflation differs from CPI inflation, and as the only instruments available on the market are indexed to the latter, we will also question the impact of the residual basis risk on the original demand for hedging instruments. Despite an imperfect fit, we will show that inflation linked bonds remain the best alternative available, and that in the absence of assets to hedge the remaining basis risk, the optimal allocation remains unchanged.

Knowing that the new regulatory rules structurally reduce the risk premium of the most volatile financial instruments, we will finally assess the impact of Solvency II on risky assets, and try to identify the best substitutes.

Remerciements

Nous souhaitons tout d'abord remercier la direction des investissements d'**AXA France** pour avoir accueilli notre groupe de travail, et plus particulièrement :

- **Vincent JARLAUD**, Responsable du département Gestion Actif-Passif
- **Jérôme VIERLING**, Manager de l'équipe modélisation financière
- **Grégoire LACHENAUD**, Ingénieur en modélisation financière
- **Teyi LAWSON**, Ingénieur en modélisation financière
- L'ensemble du personnel du **département Gestion Actif-Passif**, qui nous a offert une ambiance de travail très agréable

Enfin, nous tenons à remercier l'équipe du **Mastère Spécialisé Actuariat de l'ENSAE**, et spécialement **M. Christian-Yann ROBERT**, notre tuteur pédagogique.

Sommaire

1	Introduction	13
1.1	Contexte de l'étude	14
1.2	Problématique	15
1.3	Méthodologie mise en œuvre	16
1.4	Principaux résultats	17
1.4.1	Allocation de risque minimum	17
1.4.2	Allocation optimale sous contrainte de risque.....	18
1.4.3	Métriques de risque et densité du passif.....	19
2	Construction du modèle ALM	20
2.1	Déroulé du modèle	22
2.2	Modélisation du passif	23
2.2.1	Les sinistres	23
2.2.2	Les provisions techniques	27
2.2.3	Calibration du passif.....	28
2.2.4	Sensibilité du passif au nombre d'assurés.....	28
2.3	Modélisation de l'actif	31
2.3.1	Model point des classes d'actifs.....	31
2.3.2	Modélisation de la courbe des taux nominaux	31
2.3.3	Modélisation des obligations d'état à taux fixe.....	32
2.3.4	Modélisation des obligations indexées sur l'inflation.....	35
2.3.5	Modélisation des actions et de l'immobilier	38
2.3.6	Calibration de l'actif	39
2.4	Mécanisme de réallocation	40
2.4.1	La réallocation par rapport au contrat de gestion	40
2.4.2	La réallocation en duration sur les obligations d'état à taux fixe.....	42
2.5	Pilotage du fonds	43

3	<i>Détermination de l'allocation stratégique dans le scénario central et étude d'impacts</i>	46
3.1	Indicateurs utilisés	46
3.2	Détermination de l'allocation stratégique dans le scénario central	47
3.2.1	Hypothèses centrales de scénarios de passif	47
3.2.2	Résultats intuités	48
3.2.3	Résultats quantifiés	50
3.3	Impact du skew de passif sur l'allocation stratégique	55
3.3.1	Résultats intuités	55
3.3.2	Résultats quantifiés	57
3.4	Impact de l'inflation sur l'allocation stratégique	60
3.4.1	Problématique	60
3.4.2	Eléments préliminaires	60
3.4.3	Hypothèses additionnelles de scénarios de passif	62
3.4.4	Résultats intuités	63
3.4.5	Résultats quantifiés	65
3.5	Impact du risque de base sur l'allocation stratégique	67
3.5.1	Problématique	67
3.5.2	Résultats intuités	68
3.5.3	Résultats quantifiés	69
3.6	Impact du cadre Solvabilité II sur l'allocation stratégique	70
3.6.1	Problématique	70
3.6.2	Eléments préliminaires	70
3.6.3	Résultats intuités	79
3.6.4	Résultats quantifiés	80
4	Conclusion	82
5	Bibliographie	83

1 Introduction

En 2006, les autorités européennes ont amorcé la mise en place de la réforme prudentielle Solvabilité II. Cette directive impose entre autres que les assureurs disposent, au-delà des réserves qui couvrent déjà l'intégralité des engagements souscrits vis-à-vis des assurés, de fonds propres en quantité suffisante pour faire face à des événements imprévus pouvant affecter le respect de leurs engagements.

Jusqu'à présent, le montant de ces réserves était le fruit de normes et de seuils déterministes, et dépendait uniquement des caractéristiques du passif via le montant des primes, la charge de sinistres, et le taux de réassurance. La vision historique était la règle, et la structure de l'actif n'avait pas d'impact.

Désormais, ces calculs seront effectués dans une approche probabiliste dite de « *total bilan* », un monde où stochastique est devenu le maître-mot, et où le profil de risque de chaque entreprise est évalué dans sa globalité. La vision prospective fait dès lors force de loi, et les investissements sur les classes d'actifs risquées s'accompagnent d'une exigence en capitaux propres plus importante, voire prohibitive.

La réglementation réduisant structurellement la prime de risque des instruments financiers les plus volatils, nous nous efforcerons de quantifier l'impact adverse de la directive Solvabilité II sur l'allocation risquée d'un fonds IARD. Les calculs qui seront implémentés pour déterminer le « *Capital de Solvabilité Requis* » et son coût inhérent auront pour base la formule standard telle qu'elle figure dans la dernière « *Etude Quantitative d'Impact* », à savoir la préversion de QIS5.

La corrélation entre actif et passif étant habituellement négligée en assurance-dommages, nous tenterons parallèlement de mettre en évidence l'apparition d'un lien entre ces deux blocs au travers de l'inflation. Nous montrerons que, constituant une source de risque non-mutualisable, elle nécessite une couverture financière via la constitution d'une poche d'obligations indexées sur l'inflation.

Nous discuterons enfin de l'impact du risque de base entre l'inflation CPI et l'inflation du passif, et exhiberons l'influence du skew de passif sur l'allocation optimale selon plusieurs métriques de risque, la probabilité de défaut et la volatilité du résultat notamment.

1.1 Contexte de l'étude

La gestion Actif-Passif vise à maîtriser les risques du bilan d'assurance, en tenant compte de la rentabilité de l'entreprise et dans le respect des contraintes réglementaires, juridiques et comptables. Elle consiste à analyser la situation du bilan et son évolution probable sur un horizon de planification, en fonction de variables vis-à-vis desquelles elle précise des anticipations de marché et d'activité.

L'allocation d'actifs résulte :

- ❖ Des propriétés économiques intrinsèques des différentes classes d'actifs
- ❖ De la structure du passif
- ❖ Des différents niveaux de richesse du fonds
- ❖ De l'interaction Actif-Passif
- ❖ De l'environnement réglementaire (Solvabilité II notamment)

L'objectif de cette étude est donc de définir l'allocation qui optimise la marge du business pour un risque acceptable :

- ❖ La métrique de rendement utilisée est la marge actionnaire nette d'abondement et nette de coût en capital Solvabilité II.
- ❖ Les métriques de risque utilisées sont l'écart-type de cette marge actionnaire ainsi qu'un indicateur de la probabilité de défaut.

1.2 Problématique

Notre problématique se décompose en un ensemble successif de quatre questions, ces dernières étant relatives à chacun des sujets mentionnés ci-après :

- ❖ La construction d'une frontière efficiente nécessitant la définition d'un espace risque/rendement, nous nous sommes intéressés à l'influence de la métrique utilisée sur la composition de l'allocation stratégique, ainsi qu'à la monotonie de leurs évolutions relatives sous différentes hypothèses de passif.
- ❖ Nous nous sommes ensuite attachés à montrer, que bien que l'actif et le passif soient indépendants en absence d'inflation, la prise en compte de cette dernière verrait l'allocation optimale se saisir d'instruments de couverture, cherchant par là-même à coupler les éléments du bilan et à immuniser le résultat.
- ❖ L'inflation du passif différant de l'inflation CPI, et les seuls instruments disponibles sur le marché étant indexés sur celle-ci, nous avons par la suite tenté d'appréhender l'impact du risque de base résiduel sur la demande initiale en instruments de couverture.
- ❖ Les dispositions prévues par la directive Solvabilité II réduisant structurellement la prime de risque des instruments financiers les plus volatils, nous nous sommes enfin appliqués à mesurer l'ampleur de leur incidence sur l'allocation en actifs risqués et à identifier les substituts optimaux.

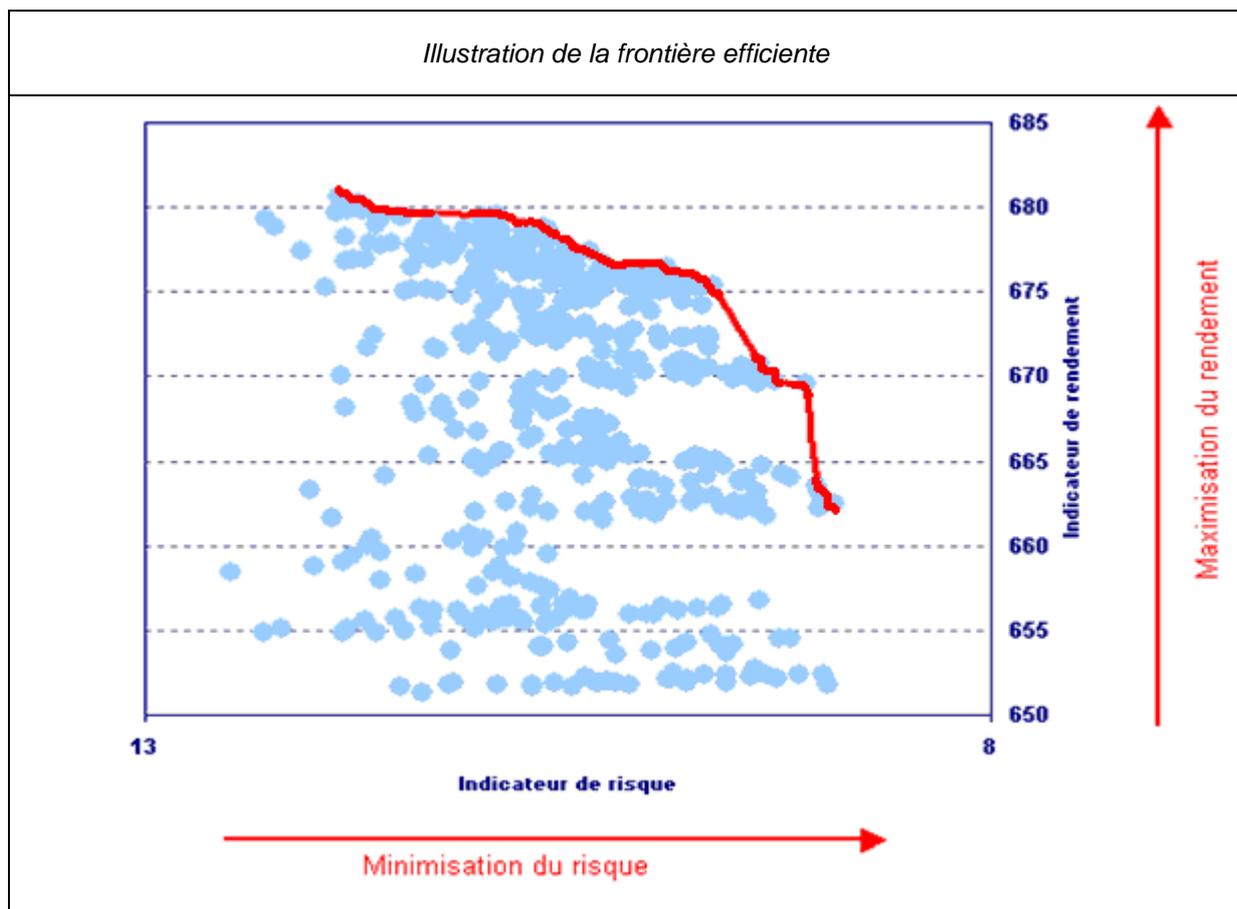
1.3 Méthodologie mise en œuvre

L'étude a été menée en plusieurs étapes :

- ❖ Définition de l'univers d'investissement et choix de la métrique de risque
- ❖ Modélisation de l'actif en quatre classes
- ❖ Modélisation d'un scénario central de passif
- ❖ Déformation de ce scénario central de passif par ajout d'hypothèses
- ❖ Analyse d'impact sur les nuages d'allocations

La démarche consiste à projeter les différentes allocations dans un plan de type risque / rendement et de déterminer quelles sont les allocations qui se trouvent sur la frontière efficiente (minimisation du risque et maximisation du rendement).

La notion de frontière efficiente est illustrée dans le graphique ci-dessous :



Rappel : Ces indicateurs sont obtenus en faisant un déroulé dans un environnement « *real world* ».

1.4 Principaux résultats

1.4.1 Allocation de risque minimum

L'allocation de risque minimum au sens de la métrique de variance est le portefeuille le moins risqué parmi l'ensemble des solutions atteignables et situées sur la frontière efficiente.

La composition de ce portefeuille et sa déformation sous les différents jeux d'hypothèses testés sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

Type de portefeuille	PORTEFEUILLE DE RISQUE MINIMUM			
	Aucune	Corrélée à 100% avec l'inflation CPI (*)	Corrélée à 70% avec l'inflation CPI (**)	Corrélée à 70% avec l'inflation CPI (**)
Réglementation	Solvency I	Solvency I	Solvency I	Solvency II
Obligations	95%	70%	70%	70%
OATi	5%	30%	30%	30%
Actifs Risqués	0%	0%	0%	0%
Commentaires	Le risque technique étant indépendant de l'allocation choisie, le portefeuille qui minimise la variabilité du résultat global est celui qui minimise la variabilité du résultat financier. Il est donc composé uniquement d'obligations d'état à taux fixe ; En effet, les OATi présentent une volatilité relativement supérieure à celle des obligations (5% vs 2.5%), ce qui explique un appétit en diversification plus que limité.	Le portefeuille qui minimise la variabilité du résultat global n'est plus celui qui minimise la variabilité du résultat financier, mais celui qui la limitera tout en permettant de compenser au mieux le risque lié à l'inflation du passif. Ce besoin en couverture est assouvi par la constitution d'une poche OATi, et ce au détriment des obligations puisqu'elles mobilisaient précédemment la quasi-totalité de la richesse.	Bien que les OATi soient devenues un actif de couverture imparfait lorsque l'inflation de passif et l'inflation CPI ne sont plus que partiellement corrélées, la part de richesse qui leur est attribuée demeure inchangée. En effet, le risque de base résiduel ne peut être couvert par aucun des autres actifs à notre disposition ; L'allocation optimale précédente demeure en conséquence la meilleure alternative malgré une adéquation amoindrie.	La composition du portefeuille qui minimise la variabilité du résultat global ne voit pas l'incidence du changement de réglementation. En effet, il était déjà intégralement constitué d'obligations d'état et d'OATi sous Solvabilité I, or ces deux classes d'actifs constituent les instruments les moins coûteux en capitaux propres sous la nouvelle directive et reçoivent un traitement similaire en tous points.

* Inflation du Passif = 50% x Inflation CPI

** Inflation du Passif = 50% x Inflation CPI + Erreur gaussienne

1.4.2 Allocation optimale sous contrainte de risque

L'allocation optimale sous contrainte de risque est, au sens de la métrique de variance, le portefeuille qui maximise l'espérance de gain parmi l'ensemble des allocations de variance égale à la variance visée. Cette dernière correspond au niveau de risque que l'assureur est prêt à accepter, et est communément appelée « *Risk Appetite* ».

Pour donner quelques ordres de grandeur, on notera que l'espérance de gain du business modélisé est de l'ordre de 200 millions d'euros pour une volatilité du résultat technique de 90 millions. L'appétit au risque de l'actionnaire pour le risque financier est quand à lui de l'ordre de 20 millions, soit environ 10% de l'espérance de gain. Ces ordres de grandeurs sont réalistes pour un assureur ayant un portefeuille de taille significative.

La composition du portefeuille optimal et sa déformation sous les différents jeux d'hypothèses testés sont récapitulées dans le tableau ci-dessous :

Type de portefeuille	PORTEFEUILLE OPTIMAL SOUS CONTRAINTE DE RISQUE			
Inflation du Passif	Aucune	Corrélée à 100% avec l'inflation CPI (*)	Corrélée à 70% avec l'inflation CPI (**)	Corrélée à 70% avec l'inflation CPI (**)
Règlementation	Solvency I	Solvency I	Solvency I	Solvency II
Obligations	60%	10%	10%	40%
OATi	0%	40%	40%	40%
Actifs Risqués	40%	50%	50%	20%
Commentaires	<p>Le portefeuille optimal sature la contrainte de « Risk Appetite » et est alloué entre obligations d'état et actifs risqués. On notera également que, les OATi ne présentant pas un couple risque/rendement intéressant, elles se voient exclues de l'allocation au bénéfice des obligations à taux fixe.</p>	<p>Le portefeuille qui maximise l'espérance de gain parmi l'ensemble des allocations de variance égale au « Risk Appetite », se doit, non plus seulement d'asservir sa propre variabilité à l'objectif de risque visé, mais également de juguler au mieux les effets adverses de l'inflation du passif. La constitution d'une poche OATi demeurant le seul moyen d'y parvenir, et les OAT étant l'actif présentant le couple risque/rendement le plus proche, la substitution que nous constatons est somme-toute logique. Notons enfin que le renforcement de la part d'actifs risqués s'explique vraisemblablement par l'augmentation en valeur absolue de notre « Risk Appetite » (+30M).</p>	<p>Bien que les OATi soient devenues un actif de couverture imparfait lorsque l'inflation de passif et l'inflation CPI ne sont plus que partiellement corrélées, la part de richesse qui leur est attribuée demeure inchangée. En effet, le risque de base résiduel ne peut être couvert par aucun des autres actifs à notre disposition ; L'allocation optimale précédente demeure en conséquence la meilleure alternative malgré une adéquation amoindrie.</p>	<p>La nouvelle réglementation sanctionnant les actifs de volatilité élevée par un coût en capital prohibitif, on observe sous Solvabilité II un transfert de 30% de la richesse de la poche risquée vers la poche obligataire. En effet, les obligations d'état disposant initialement d'un couple risque/rendement plus attrayant que celui des OATi, et le traitement réglementaire réservé à ces deux classes d'actifs étant équitable, les instruments à taux fixe demeurent les plus séduisants dans notre nouvel environnement. La permutation observée est en conséquence rationnelle.</p>

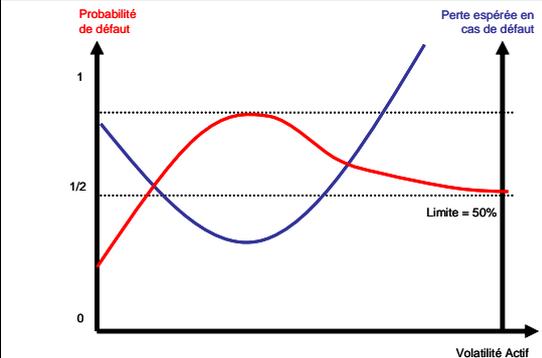
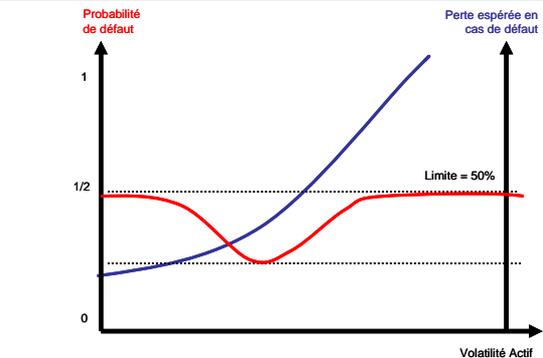
* Inflation du Passif = 50% x Inflation CPI

** Inflation du Passif = 50% x Inflation CPI + Erreur gaussienne

1.4.3 Métriques de risque et densité du passif

Nous avons constaté durant notre étude qu'un même indicateur de risque exprimé comme une fonction de la volatilité de l'actif pouvait évoluer de manière très différente selon le profil du passif, et notamment de la valeur de son coefficient d'asymétrie.

Ce phénomène est illustré ci-dessous en prenant la probabilité de défaut comme mesure de risque :

Probabilité de défaut en fonction de la volatilité de l'actif	
Passif de skew positif	Passif de skew négatif ou nul
	
Commentaire	Commentaire
<p>Si le passif a un coefficient d'asymétrie positif, i.e si la sinistralité médiane est inférieure à l'espérance de la sinistralité, alors l'allocation minimisant la probabilité de défaut est le portefeuille de variance minimale</p>	<p>Si le passif a un coefficient d'asymétrie nul (ou <0), i.e si la sinistralité médiane est supérieure à l'espérance de la sinistralité, alors l'allocation minimisant la probabilité de défaut est un portefeuille comportant une part d'actifs risqués</p>
Allocation minimisant la probabilité de défaut	Allocation minimisant la probabilité de défaut
[100% OAT ; 0% actifs risqués]	[(100%-x%) OAT ; x% actifs risqués]

Le fait de devoir introduire une part d'actifs risqués afin de minimiser la probabilité de défaut au lieu de se concentrer exclusivement sur l'actif sans risque peut sembler pour le moins paradoxal. C'est pourtant un résultat remarquable que l'on a pu observer pour un passif de skew quasi-nul.

Notons cependant que dans la réalité notre passif est généralement de skew positif, et ce pour les raisons fondamentales suivantes :

- ❖ Le théorème central limite tend à normaliser le passif exprimé en euros constants
- ❖ L'inflation cumulée tend à skewer positivement le passif exprimé en euros courants

2 Construction du modèle ALM

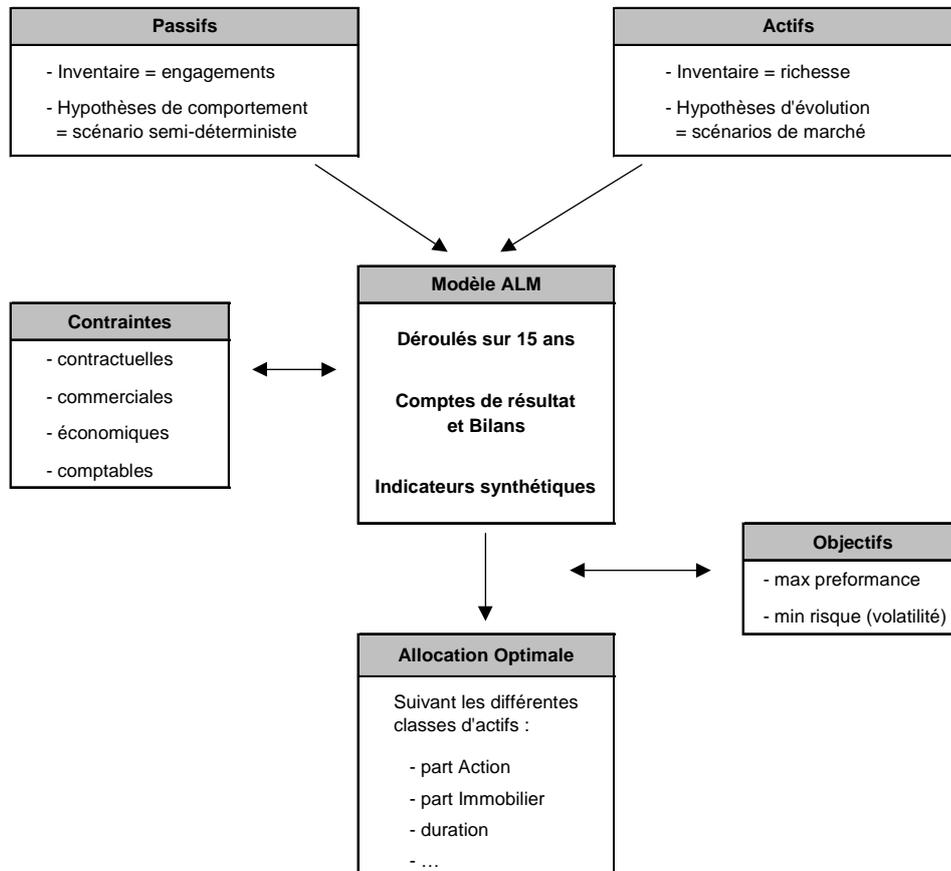
Une étude ALM vise à ce qu'un fonds donné se dote de la meilleure composition des différents actifs sur le marché ; Elle doit en outre permettre à l'assureur de respecter ses différents engagements tout en visant la satisfaction des actionnaires et du régulateur.

Nous avons simulé le comportement économique et comptable d'un fonds IARD pour différentes allocations d'actifs et règles de gestion, sous certaines hypothèses d'évolution des marchés financiers (obligataire, action, immobilier, etc...).

Le modèle peut être utilisé avec des scénarios d'actifs déterministes ou stochastiques. Le scénario de passif est quant à lui stochastique et corrélé à l'actif par le biais de l'inflation. De plus, le modèle permet de traiter différentes tranches de passif au sein d'un même fonds. Ces tranches sont appelées « *Model Points* ». La segmentation est faite suivant des facteurs capables d'influencer le comportement du fonds et augmente ainsi la précision de la modélisation. Chaque model point est suivi séparément, bien que l'allocation d'actifs et les produits financiers soient mutualisés.

Les résultats des simulations sont présentés sous forme de tableaux de synthèse et de graphiques, expliquant l'évolution des différents indicateurs comptables et économiques année après année, et ce tout au long de la projection.

Le fonctionnement du modèle est présenté dans le schéma ci-dessous :



2.1 Déroulé du modèle

Un horizon de 15 ans a été choisi pour dérouler le modèle, le pas du déroulé étant semestriel (bien que les résultats soient affichés annuellement). Le traitement du premier et du second semestre de chaque année n'est pas identique. Ainsi, les opérations effectuées chaque semestre sont les suivantes :

❖ *Au premier semestre*

- Vieillessement de l'actif : calcul des revenus et des plus ou moins-values latentes sur chaque poche d'actifs
- Prise en compte des flux de sinistres réglés, des primes émises, et des boni-mali de provisions
- Réallocation

❖ *Au second semestre*

- Vieillessement de l'actif : calcul des revenus et des plus ou moins-values latentes sur chaque poche d'actifs
- Réallocation
- Calcul de la provision pour risque d'exigibilité (PRE) : bilan des plus ou moins-values latentes totales hors obligations d'état pour dotation ou reprise de la PRE
- Calcul de la réserve de capitalisation : bilan des plus ou moins-values réalisées sur les obligations d'état pour dotation ou reprise de réserve de capitalisation
- Calcul des provisions en fin d'année, de la marge de solvabilité, et appréciation de sa couverture

En fin de chaque année, un test est effectué pour vérifier que le bilan est bien équilibré.

2.2 Modélisation du passif

2.2.1 Les sinistres

La simulation des sinistres doit avoir un caractère aléatoire et correspondre au mieux à la distribution du passif observée empiriquement.

Le caractère aléatoire des sinistres se trouve aussi bien dans leur fréquence que dans leur coût. Il faut donc simuler le nombre de sinistres puis pour chacun d'eux leur coût. La charge totale de sinistres est donc une somme aléatoire de variables aléatoires.

✚ Modélisation du nombre de sinistre (N)

Le nombre de sinistre doit suivre une loi discrète concordant avec la réalité.

La première approche que nous avons eue était de prendre une loi de Poisson, facilement paramétrable. Une des propriétés de cette loi est que sa variance est égale à son espérance, or nous avons besoin pour notre modèle de pouvoir contrôler ce paramètre.

Nous avons donc choisi d'utiliser une loi binomiale négative définie comme suit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(N_i = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r) \times n!} \times p^r \times (1-p)^n \quad \text{avec } r > 0, p \in [0;1]$$

$$\text{et } \frac{\Gamma(r+n)}{\Gamma(r) \times n!} = \begin{cases} \frac{(r+n-1)!}{n!(r-1)!} & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Les moments d'ordre 1 et 2 sont ici distincts et liés par un coefficient multiplicatif 1/p :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espérance} \quad E(N_i) = \frac{r \times (1-p)}{p} \\ \text{Variance} \quad V(N_i) = \frac{r \times (1-p)}{p^2} \end{array} \right.$$

Les paramètres de la loi sont donc choisis en procédant par identification. Si on pose $E(N_i) = \partial_1$ et $V(N_i) = \partial_2$, on obtient alors :

$$r = \frac{\partial_1^2}{\partial_2 - \partial_1} \quad \text{et} \quad p = \frac{\partial_1}{\partial_2}$$

✚ Modélisation du coût des sinistres (C_i)

Le coût des sinistres doit correspondre à une variable aléatoire réelle positive qui reflète bien les données historiques et qui présente une queue de distribution épaisse. Plusieurs lois sont possibles.

Nous avons choisi dans notre cas la loi log-normale dont la densité est définie comme suit :

$$\forall c \geq 0, \quad f(c) = \frac{e^{-\frac{[\ln(c)-m]^2}{2\sigma^2}}}{c \times \sigma \times \sqrt{2\pi}}$$

Les moments d'ordre 1 et 2 sont donnés ci-après :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Espérance} \quad E(C_i) = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}} \\ \text{Variance} \quad V(C_i) = (e^{\sigma^2} - 1) \times e^{2m + \sigma^2} \end{array} \right.$$

Soit par identification si $E(C_i) = \theta_1$ et $V(C_i) = \theta_2^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \ln[E(C_i)] - \frac{1}{2} \times \ln\left(1 + \frac{V(C_i)}{E(C_i)^2}\right) = \ln(\theta_1) - \frac{1}{2} \times \ln\left(1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2}\right) \\ \sigma = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{V(C_i)}{E(C_i)^2}\right)} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1^2}\right)} \end{array} \right.$$

✚ Générateur de sinistres

Afin de simuler plusieurs scénarios de passif, nous avons développé un générateur de sinistres. La première étape consiste à déterminer le nombre de sinistres de l'année en tirant une loi binomiale négative ; Puis, pour chaque sinistre, on simule un coût selon une loi log-normale.

- **Loi Binomiale Négative**

Pour simuler une loi binomiale négative, nous sommes partis de la constatation que cette loi n'est autre qu'un mélange Gamma-Poisson. Nous avons alors dû simuler ces deux lois en utilisant les propriétés suivantes :

- ❖ Si $(U_i)_{i \in [0; A \times r]}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0;1]$, alors la variable aléatoire $X = -\frac{1-p}{p} \times \sum_{i=1}^{A \times r} \ln(U_i)$ suit une loi Gamma de paramètre $\left(A \times r; \frac{p}{1-p}\right)$
- ❖ Si $(U_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0;1]$, alors la variable aléatoire $Y = \text{Inf}\left(n \in \mathbb{N}, \prod_{i=1}^{n+1} U_i \leq e^{-X}\right)$ suit une loi binomiale négative de paramètres $(A \times R; p)$

- **Loi log-normale**

Pour simuler la loi log normale, nous avons utilisé la méthode de Box-Muller qui repose sur le fait que si (U_1, U_2) sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0;1]$, alors les variables aléatoires $X_1 = \sqrt{-2 \times \ln(U_1)} \times \cos(2\pi \times U_2)$ et $X_2 = \sqrt{-2 \times \ln(U_1)} \times \sin(2\pi \times U_2)$ sont indépendantes et suivent une loi normale $N(0;1)$.

De plus, les variables aléatoires $Y_1 = m + \sigma \times X_1$ et $Y_2 = m + \sigma \times X_2$ sont indépendantes et suivent une loi normale $N(m; \sigma^2)$.

En appliquant la fonction exponentielle, il vient finalement que $Z_1 = e^{Y_1}$ et $Z_2 = e^{Y_2}$ sont indépendantes et suivent une loi log-normale $LN(m; \sigma^2)$.

✚ La charge de sinistres

La modélisation de la charge de sinistres doit prendre en compte le délai de paiement des sinistres sur plusieurs années de développement.

Nous noterons $Y_t^{t+\theta}$ le montant des sinistres survenus l'année t et payé θ années plus tard. Nous supposons l'existence d'un délai de règlement maximal Θ . Autrement dit, Θ années après l'année de survenance, tous les sinistres sont définitivement clos

Nous supposons que trois types de facteurs peuvent intervenir dans la charge de sinistres :

- ❖ Un facteur lié à l'année de survenance t
- ❖ Un facteur lié au délai de règlement θ
- ❖ Un facteur lié à l'inflation $\pi(0, t + \theta)$

Nous pouvons ainsi écrire $Y_t^{t+\theta}$ comme étant :

$$Y_t^{t+\theta} = \sum_{i=1}^{N_t} C_i \times K_\theta \times \pi(0, t + \theta)$$

Avec	$Y_t^{t+\theta}$:	Charge des sinistres survenus l'année t et réglés l'année $t + \theta$
	N_t	:	Nombre total de sinistres survenus l'année t
	C_i	:	Coût du $i^{\text{ème}}$ sinistre survenu l'année t
	K_θ	:	Cadence de paiement pour le délai de règlement θ
	$\pi(0, t + \theta)$:	Inflation entre les années 0 et $t + \theta$

✚ Les cadences de règlements

Vu les faibles variations de cadence d'une année sur l'autre, nous supposerons que les cadences sont déterministes. Notons cependant qu'il pourrait être intéressant d'intégrer des cadences aléatoires dans de futures évolutions afin de prendre en compte le risque de sous-évaluation des réserves.

2.2.2 Les provisions techniques

Les différentes provisions modélisées pour l'étude du fonds IARD sont la provision pour primes non acquises (PPNA), la provision pour risques en cours, la provision pour risques croissants, et la provision pour sinistres à payer (PSAP).

✚ La provision pour primes non acquises (PPNA)

Les primes émises (ou à émettre) couvrent une période de garantie qui ne coïncide pas avec l'exercice comptable. La portion de prime relative à l'exercice suivant est reportée prorata temporis, par la constitution d'une provision pour primes non acquises. Cette provision est l'estimation des sinistres couverts par les contrats en cours mais qui surviendront après la date d'inventaire.

Le calcul exact se fait contrat par contrat, mais en pratique on le fait sur le total des contrats d'échéances voisines. Par exemple, on regroupe les contrats par mois et, lorsque les échéances sont réparties dans le mois, on suppose que les contrats ont une date d'effet en moyenne au milieu du mois ; c'est la méthode des 1/24èmes.

✚ La provision pour risques en cours

Lorsque le tarif n'est pas suffisant, la provision pour primes non acquises ne suffit pas pour couvrir tous les sinistres et les frais qui lui sont imputables (cela comprend les frais d'acquisition, qui sont reportés). Il faut alors constituer une provision complémentaire couvrant cette insuffisance. Cette provision est appelée provision pour risques en cours.

Elle sera égale, schématiquement, au pourcentage d'insuffisance du tarif multiplié par la provision pour primes non acquises.

✚ La provision pour risques croissants

Lorsque le risque est croissant dans le temps et que les primes sont constantes, il y a lieu de constituer une provision pour risques croissants.

✚ La provision pour sinistres à payer (PSAP)

Lorsqu'un sinistre survenu avant la date d'inventaire n'est pas intégralement réglé, il doit être provisionné au sein de la provision pour sinistre à payer.

Chaque dossier de sinistre doit contenir une évaluation des sommes restant à payer, incluant le montant des frais directement rattachables (frais d'expertise, de contentieux,...), ainsi que le montant espéré des recours ou des récupérations. Lors de l'inventaire, tous les dossiers doivent être révisés, c'est-à-dire que toutes les évaluations qui ont été faites doivent être contrôlées, et, si besoin, rectifiées.

Pour obtenir le montant de la provision, il faut ajouter au cumul de ces évaluations dossier par dossier :

- ❖ Une estimation des sinistres survenus mais non connus de l'assureur (qui n'a donc pas ouvert de dossier de sinistre)
- ❖ Une estimation des frais de gestion (autres que les frais directement rattachés au dossier)

Pour conforter son estimation de la provision pour sinistre à payer, l'assureur emploie des méthodes statistiques. Ces méthodes exigent toutes que les sinistres (paiements et provisions) soient classés par exercice. Le rattachement par exercice de survenance est retenu dans la majorité des cas.

2.2.3 Calibration du passif

La calibration du passif a été effectuée à partir d'un historique de données de la société AXA. Les principales statistiques nous ont été fournies par la Direction Technique.

Par mesure de confidentialité, nous ne communiquerons pas ces données dans le présent document.

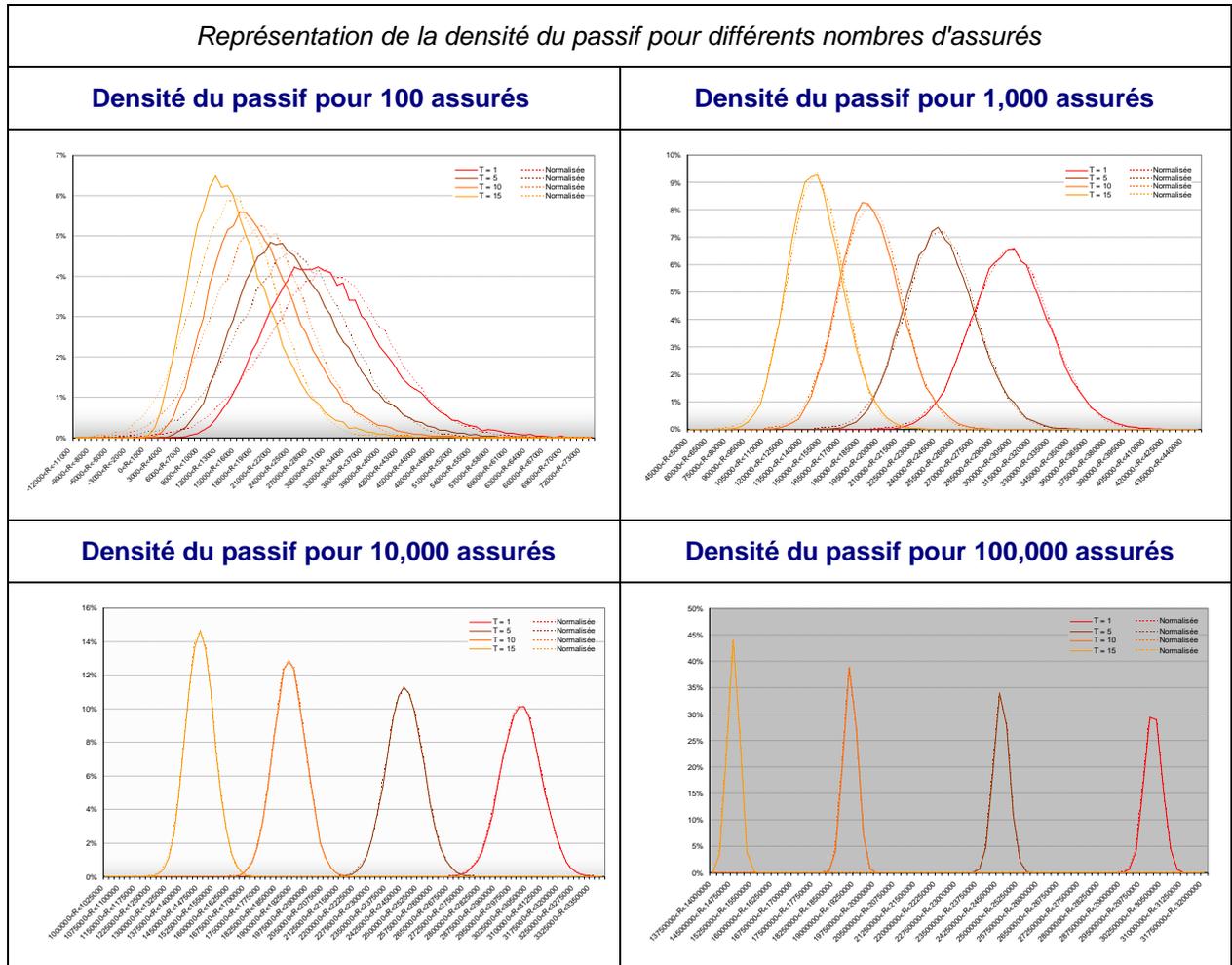
2.2.4 Sensibilité du passif au nombre d'assurés

L'assurance implique un accord entre un assuré, qui paie une prime, et un assureur, qui promet de rembourser à l'assuré les pertes financières liées à la survenance d'évènements prévus au contrat. Pour pouvoir conclure une telle entente avec un individu ou une organisation, l'assureur doit avoir un nombre assez élevé d'ententes couvrant des risques semblables et indépendants. En combinant un grand nombre d'expositions au risque, il est possible de prévoir de façon assez précise les pertes encourues collectivement.

Le principe qui sous-tend cette théorie est la loi des grands nombres, qui, dans le contexte de l'assurance, se formule ainsi : à mesure que le nombre d'expositions au risque augmente, les pertes réelles approchent d'assez près leur valeur escomptée. La perte collective escomptée est ainsi partagée de façon proportionnelle par tous les assurés sous forme de prime. Avec l'assurance, les individus ou les organisations échangent le risque de pertes incertaines, mais possibles.

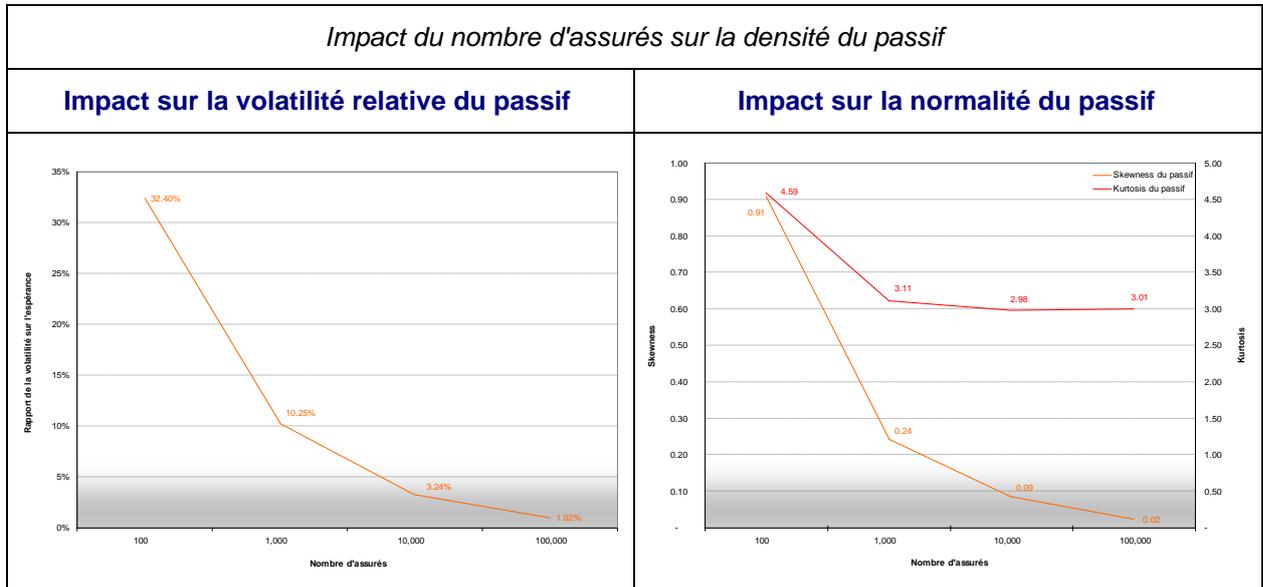
On peut alors légitimement s'interroger sur le nombre seuil d'assurés à partir duquel le principe de mutualisation des risques commence à s'appliquer, ainsi que sur la vitesse de convergence de la sinistralité globale vers une loi normale.

Nous avons représenté l'évolution sur 15 ans du passif d'une activité en run-off avec un taux de départ annuel de 5%, le nombre d'assurés initial variant de 100 à 100,000 :



On observe de manière très nette la diminution de la volatilité relative du passif (sous-entendu, par rapport à l'espérance), ainsi que la disparition du skew inhérent au coût individuel.

Ces observations sont corroborées par les graphiques ci-dessous :



2.3 Modélisation de l'actif

2.3.1 Model point des classes d'actifs

Le modèle ALM ne permet pas de rentrer dans la finesse qui existe sur les marchés financiers. Nous travaillons donc sur des familles d'actifs, chacune représentée par un scénario stochastique à pas semestriel sur 15 ans.

Le modèle simule ainsi les quatre poches d'actifs suivantes :

- ❖ Les obligations d'état à taux fixe
- ❖ Les obligations indexées sur l'inflation
- ❖ Les actions
- ❖ L'immobilier

Un programme de caps dynamique ayant les caractéristiques des caps en portefeuille est également modélisé.

2.3.2 Modélisation de la courbe des taux nominaux

La génération de tous les scénarios d'actifs repose sur la courbe des taux. Celle-ci est diffusée à partir du modèle de Black-Karasinski étendu :

$$\begin{cases} d \ln r = (\theta_t + u - \alpha_1 \ln r) \cdot dt + \sigma_1 \cdot (dW_t^1 + \gamma dt) \\ du = -\alpha_2 \cdot u \cdot dt + \sigma_2 \cdot (dW_t^2 + \gamma dt) \end{cases}$$

Avec :

- ❖ r le taux court à modéliser
- ❖ $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1$ et σ_2 sont des constantes d'élasticité et de volatilité des taux déterminées en début de projection. Elles permettent la calibration économique du modèle. Cette calibration est basée sur l'égalité en début de projection entre la courbe des taux réels et celle recalculée suivant le modèle.
- ❖ γ permet de donner à la courbe des taux une tendance dépendant du temps, induisant sur les taux la notion de prime de portage. S'il est négatif, on a une prime de portage positive et inversement. Une prime de portage positive permet de mieux valoriser les stratégies obligataires de maturité longue par rapport à celles de maturité courte.

2.3.3 Modélisation des obligations d'état à taux fixe

Description de la poche en début de projection

Cette poche regroupe les obligations d'état du portefeuille et la trésorerie (assimilée à un zéro-coupon de maturité nulle). Elle est traitée sous forme d'obligations zéro-coupon de maturités semestrielles, ce qui présente les avantages suivants :

❖ *Le nombre d'obligations à considérer est fortement réduit*

Toutes les obligations zéro-coupon sont sommées par maturité et le nombre d'obligations est ainsi égal au nombre de maturités (on peut passer de 2000 obligations pour un gros portefeuille à 80 obligations).

❖ *La gestion de l'adossement du passif est facilitée*

La durée des obligations considérées est égale à leur maturité.

Il est donc nécessaire de convertir les obligations d'état couponnées en obligations zéro-coupon. Cette opération consiste à traiter chaque flux (coupon ou remboursement de capital) comme une obligation zéro-coupon indépendante définie par :

❖ Sa maturité i , exprimée en semestres : pour simplifier, chaque obligation zéro-coupon obtenue est assimilée à l'échéance semestrielle la plus proche (soit 30/06/AA ou 31/12/AA)

❖ Son flux $Flux_i$: c'est le montant du coupon détaché ou du capital remboursé à la date considérée

❖ Son taux de rendement actuariel TRA_i : c'est celui de l'obligation couponnante initiale (donné en input)

A partir de ces caractéristiques, on détermine alors pour chaque obligation zéro-coupon sa valeur nette comptable (VNC) et sa valeur boursière (VB) :

❖ *Valeur nette comptable (VNC_i)*

Actualisation du flux au taux de rendement actuariel de l'obligation, soit :

$$VNC_i = \frac{Flux_i}{(1 + TRA_i)^{tps_i}} \text{ avec } tps_i = \frac{(date_echeance - date_calcu)}{365.25}$$

❖ *Valeur boursière (VB_i)*

Actualisation du flux au taux zéro-coupon ZC_i de maturité i , soit :

$$VB_i = \frac{Flux_i}{(1 + ZC_i)^{i/2}}, \text{ ou encore en recalculant ces VB à partir des VNC, } VB_i = \frac{VNC_i \times (1 + TRA_i)^{i/2}}{(1 + ZC_i)^{i/2}}$$

De légers écarts entre d'une part, les VNC et VB globales recalculées après découpage, et d'autre part, les VNC et VB de l'obligation couponnante initiale, sont à constater. Ces écarts sont dûs aux approximations des dates d'échéance des obligations zéro-coupon.

Une fois ces éléments déterminés, les zéro-coupons peuvent être agrégés par tranche semestrielle (VNC et VB des zéro-coupons sommés par semestre) sur une durée maximum de 40 ans. Au final, nous avons donc un total de 80 zéro-coupons, auxquels on affecte un TRA moyen (moyenne pondérée des TRA des obligations couponnantes initiales).

La VNC et la VB de la poche d'obligations d'état correspondent aux sommes des VNC et des VB des zéro-coupons des différentes maturités, soit $VNC = \sum_{i=1}^{80} VNC_i$ et $VB = \sum_{i=1}^{80} VB_i$.

Enfin, cette poche intègre les instruments de trésorerie, ces derniers étant assimilés à des zéro coupons de maturité nulle. Elle regroupe tous les montants de trésorerie ou pseudo trésorerie (dettes et créances en instance de paiement) du fonds étudié. En début de projection, la totalité des éléments constituant cette poche est déterminée de telle sorte que le bilan d'inventaire soit équilibré, soit :

$$\begin{cases} VNC_0(t_0) = VNC_totale_passif(t_0) - VNC_totale_actifs_hors_trésor(t_0) \\ VB_0(t_0) = VNC_0(t_0) \end{cases}$$

Viellissement de la poche avant réallocation

Le vieillissement de cette poche est fragmenté par maturité de zéro-coupon. Les VNC et VB recalculées individuellement sont ensuite sommées pour donner celles de la poche globale.

A chaque fin de semestre, il faut déterminer le cash provenant du zéro-coupon arrivant à maturité et recalculer les VNC et VB des autres zéro-coupons.

Avant de détailler ces différents calculs, on rappelle que le TRA moyen du zéro-coupon de maturité i reste inchangé, soit :

$$TRA_moyen_i(s) = TRA_moyen_{i+1}(s-1)$$

Le cash du zéro-coupon arrivant à maturité et transféré en trésorerie (i.e. de maturité $i=1$ au semestre précédent) est déterminé comme suit :

$$Cash_TF(s) = VNC_1(s-1) \times (1 + TRA_moyen_1(s-1))^{1/2}$$

Les VNC des zéro-coupons de maturité $i > 1$ sont vieilles en capitalisant au TRA_{moyen} , soit :

$$VNC_i(s) = VNC_{i+1}(s-1) \times (1 + TRA_{moyen_{i+1}}(s-1))^{1/2}.$$

Les VB des zéro-coupons de maturité $i > 1$ sont recalculées avec la nouvelle courbe des taux du semestre s , soit :

$$VB_i(s) = VNC_i(s) \times \left(\frac{1 + TRA_i(s)}{1 + ZC_i(s)} \right)^{i/2}$$

Au global, on a par sommation des éléments déterminés précédemment :

$$VNC(s) = \sum_{i=1}^{80} VNC_i(s) \text{ et } VB(s) = \sum_{i=1}^{80} VB_i(s)$$

D'autre part, en fin de chaque semestre, la trésorerie est vieillie au taux sans risque et alimentée par tous les cash-flows issus des différentes poches d'actifs. On a donc :

$$VNC_0(s) = VB_0(s) = VB_0(s-1) \times (1 + ZC_0(s-1))^{1/2} + \sum_{poches} Cash_poche(s)$$

Limites de cette modélisation

Le découpage en zéro-coupons présente les limites suivantes, qu'il faut garder à l'esprit :

- ❖ L'agrégation des zéro-coupons peut masquer le fait que certaines obligations sont en plus-values latentes et d'autres en moins-values latentes
- ❖ Pour ajuster la duration, on peut être amené à vendre un coupon d'une obligation sans vendre ses autres coupons et son flux de notionnel, ce qui n'est pas possible dans la réalité

2.3.4 Modélisation des obligations indexées sur l'inflation

Les « *Obligations Assimilables au Trésor indexées à l'inflation* » (OATi) sont des obligations émises par l'État français qui offrent une exposition à l' « *Indice des Prix à la Consommation* » (CPI). Ainsi, chaque année le coupon et le prix de remboursement sont réévalués pour tenir compte de la hausse du CPI depuis le lancement de l'emprunt. L'investisseur est ainsi complètement protégé contre l'inflation.

Les principales caractéristiques d'une OATi sont rappelées ci-dessous :

<i>Caractéristiques d'une obligation indexée sur l'inflation</i>	
Taux de coupon :	Le taux d'intérêt annualisé
Fréquence :	Le nombre de fois où les intérêts sont payés par an
Nominal :	Le montant auquel appliquer le taux de coupon pour déterminer les intérêts
Maturité :	La date de fin de l'engagement

A la différence d'une obligation classique du Trésor, le nominal de l'obligation sera revalorisé chaque année de l'inflation et le coupon servi portera sur ce nouveau nominal théorique.

A la maturité du contrat, le prêteur reçoit le nominal revalorisé de l'inflation. Toutefois si au terme de la période le contrat est en déflation, ce nominal revalorisé risque d'être plus faible que le nominal initial. Certaines émissions, notamment françaises et italiennes, contrairement aux émissions anglaises, remboursent au minimum le nominal initial. Dans cette situation de déflation, le coupon est toujours remboursé sur un nominal revalorisé même si ce dernier est inférieur au nominal initial.

✚ Choix de modélisation

Dans un souci de simplification, une obligation sera représentée par un zéro-coupon dont la maturité sera égale à la durée de l'obligation.

A toute date, l'obligation sera caractérisée par sa VB et sa VNC, mais aussi par son nominal, son TRA et son Index. Ces éléments sont synthétisés dans les formules ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} VB_{OATi}(T) = \frac{N_t}{(1 + TxZCreel_T)^T} \\ VNC_{OATi}(T) = \frac{N_t}{(1 + TRA)^T} \end{array} \right.$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} N_t = N_{t-1} \times (1 + \text{inflation réalisée}(t-1 \rightarrow t)) \\ I_t = I_{t-1} \times (1 + \text{inflation réalisée}(t-1 \rightarrow t)) \\ N_t = N_0 \times I_t \end{array} \right.$$

✚ Le vieillissement des obligations indexées sur l'inflation dans le déroulé

A chaque période, la maturité de l'OATi diminue d'une période et son index est revalorisé d'une période.

Sa VNC est toujours calculée avec la même formule, avec un nominal revalorisé :

$$VNC(t) = VNC(t-1) \times (1 + \text{Inflation}) \times (1 + TRA)^{\text{période}}$$

La VB se déduit de la VNC par la relation suivante :

$$VB(t) = VNC(t) \times \frac{(1 + TRA)^{\text{période}}}{(1 + TxZCréel)^{\text{période}}}$$

Remarque : Si la maturité passe à 0, le montant est passé en cash. Ce montant est bien sûr égal au nominal. On s'assurera qu'à cette date, le nominal est bien supérieur au nominal initial.

La réallocation des obligations indexées sur l'inflation dans le déroulé

Les OATi font partie du contrat de réallocation. A priori leur achat est généralement fait dans un objectif « *Buy and Hold* », mais dans le modèle nous les traiterons comme les autres actifs, le marché des OATi étant liquide.

- **En cas de vente**

Les plus-values ou moins-values réalisées viennent impacter la réserve de capitalisation. Comme sur les obligations d'état, leur vente se fera en tenant compte du fait qu'on veut minimiser la réserve de capitalisation ou sa variation.

On commence donc par trier les OATi par ordre croissant sur la plus ou moins-value latente (dans l'optique de minimiser la réserve de capitalisation) ou sur la valeur absolue de la plus ou moins-value latente (dans l'optique de minimiser la variation de la réserve de capitalisation).

Le montant trié est vendu dans cet ordre.

- **En cas d'achat**

Il se fait sur la dernière maturité d'OATi émise.

Il faut donc définir deux variables : la première définit la fréquence d'émission des OATi sur le marché (chaque x année) et la seconde définit la maturité émise.

Le pilotage du fonds

Si à la fin de l'année, on dispose de suffisamment de produits financiers, on en profite pour nettoyer le portefeuille de ses moins-values latentes en les réalisant. Les OATi seront traitées comme les obligations d'état à taux fixe.

2.3.5 Modélisation des actions et de l'immobilier

La dynamique suivie par les cours des actions et par l'immobilier est une loi log-normale :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + p) \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

- **Pour les scénarios « *real world* »**

$p \neq 0$, c'est un environnement dans lequel on reconnaît une prime de risque à certains actifs (par exemple les actions).

- **Pour les scénarios « *risque-neutre* »**

$p = 0$, c'est un environnement dans lequel tous les actifs rapportent le taux sans risque et où seule leur volatilité permet de les distinguer.

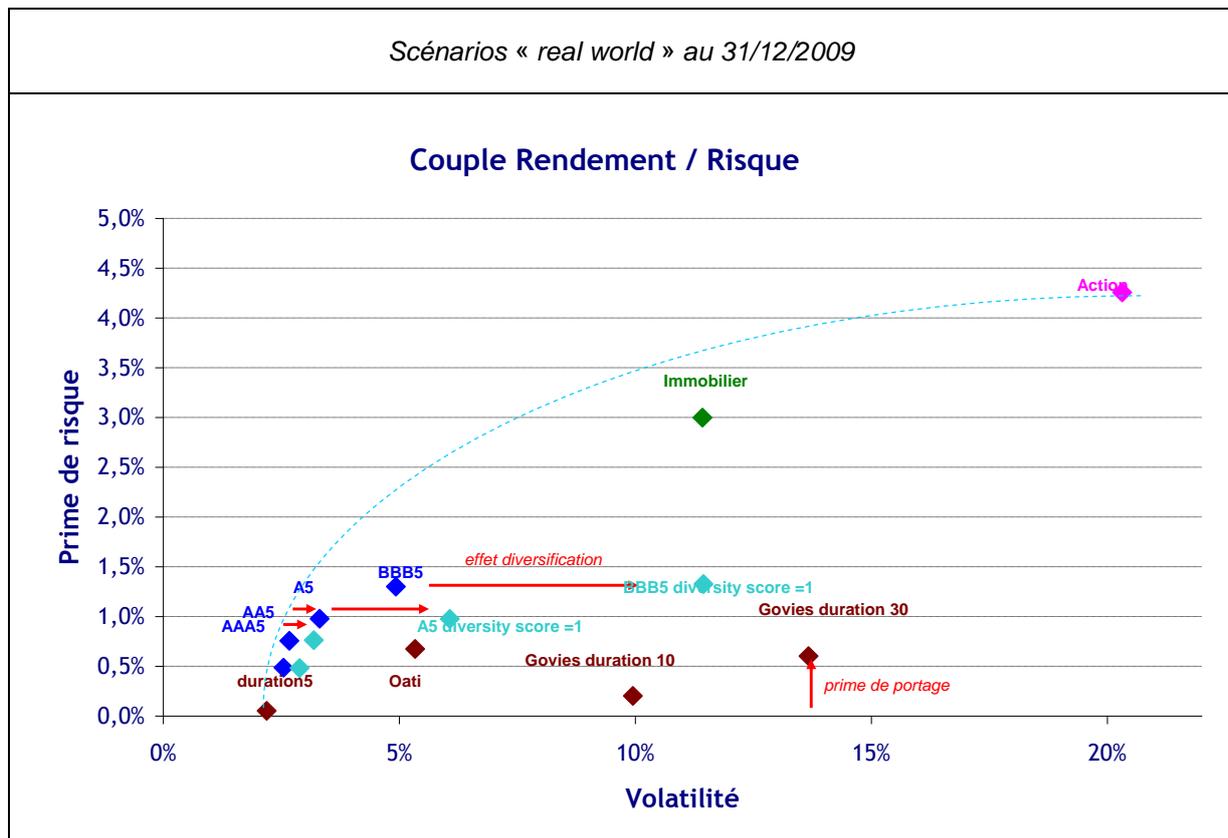
2.3.6 Calibration de l'actif

Les scénarios « *real world* » ont été calibrés au 31/12/2009.

Les cibles de calibration sont données dans le tableau suivant :

	Action Europe	Taux 1 an	Taux 10 ans	Immobilier	Spread A
Médiane	8.0%	4.0%	5.0%	6.5%	1.0%
Centile 2%	-34.0%	0.2%	2.0%	-13.0%	0.0%

Dans le graphique ci-dessous, nous exhibons la prime de risque 10 ans en fonction de la volatilité de l'actif :



2.4 Mécanisme de réallocation

Le modèle réalloue chaque semestre le portefeuille d'actifs en fonction de la règle de gestion (poids des différentes poches d'actifs dans le portefeuille) et de la durée cible du portefeuille. La règle de gestion et la durée cible sont saisies en input pour chacune des 15 années de projection.

2.4.1 La réallocation par rapport au contrat de gestion

La réallocation commence par une vérification des contraintes de gestion. Pour cela, le modèle compare l'allocation actuelle du portefeuille (en VB) avec l'allocation du contrat de gestion (allocation cible).

Si les contraintes de gestion sont vérifiées, cette étape s'arrête là. Sinon, on détermine le cash à allouer ou les montants à vendre dans chaque classe d'actifs pour retrouver l'allocation cible :

Pour les poches Actions et Immobilier :

Le modèle contraint la réalisation de plus ou moins-values (par achats-ventes) pour atteindre le montant de VB correspondant à l'allocation cible du contrat de gestion. Les calculs suivants sont effectués :

+ Calcul de la VB à atteindre

$$VB_{realloc}(s) = part_poche \times VB_totale(s)$$

Avec $\left\{ \begin{array}{l} part_poche : \text{L'allocation pour cette poche du contrat de gestion} \\ VB_totale(s) : \text{La valeur boursière totale du portefeuille au semestre } s \end{array} \right.$

+ Calcul du montant acheté ou vendu pour atteindre cette VB

$$VB_{acheté/vendu}(s) = VB_{realloc}(s) - VB(s)$$

✚ Calcul des plus ou moins-values réalisées

- Si $VB_{\text{acheté/vendu}}(s) \geq 0$: achat d'actifs dans la poche ; aucune plus ou moins-value n'est réalisée

$$PMVR_{\text{realloc}}(s) = 0$$

- Si $VB_{\text{acheté/vendu}}(s) \leq 0$: vente d'actifs dans la poche ; des plus ou moins-values sont réalisées

$$PMVR_{\text{realloc}}(s) = \left[1 - \frac{VNC(s)}{VB(s)} \right] \times (-VB_{\text{acheté/vendu}}(s))$$

✚ Calcul du montant de plus ou moins-value latentes disponible après réallocation

$$PMVL_{\text{realloc}}(s) = PMVL(s) - PMVR_{\text{realloc}}(s)$$

✚ Calcul de la VNC après réallocation

$$VNC_{\text{realloc}}(s) = VB_{\text{realloc}}(s) - PMVL_{\text{realloc}}(s)$$

Remarque : Les plus ou moins-values sont réparties de façon homogène sur l'ensemble de ces poches, on ne considère pas que certains titres puissent être en plus-value latente si la poche est en moins-value latente dans son ensemble, et réciproquement.

2.4.2 La réallocation en duration sur les obligations d'état à taux fixe

Sur la poche taux fixe, l'objectif est de converger à chaque semestre vers la duration cible du fonds.

Cela se fait d'abord par réinvestissement du cash résiduel, et si cela n'est pas suffisant pour converger vers la duration cible, le modèle procède par itération à des achats et vente de zéro-coupons :

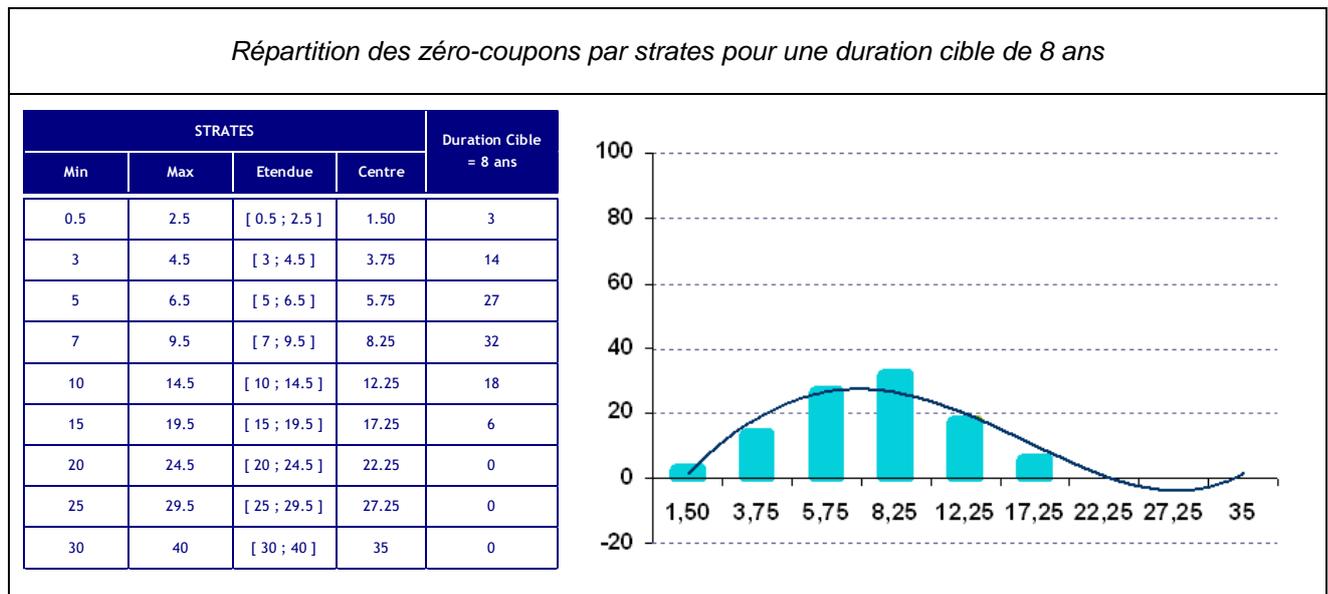
- **En cas de vente**

Les zéro-coupons sont vendus, afin de se rapprocher de la duration cible, par ordre croissant de plus ou moins-values latentes.

- **En cas d'achat**

On place le cash en excédent. Celui ci sera investi en fonction de la duration cible du portefeuille.

Le portefeuille d'obligations est défini par strates, en fonction de la duration cible voulue. Par exemple, pour une duration cible de 8 ans, la répartition des zéro-coupons par strates pourrait être la suivante :



La prise en compte de ces strates permet de mieux refléter la réalité et d'éviter des dérives dans le modèle (formation de « *Barbells* » en particulier).

2.5 Pilotage du fonds

L'objectif est de calculer le résultat du fonds pour pouvoir ensuite payer le dividende et l'impôt. La règle de pilotage par seuils nous donne le montant de plus ou moins-values réalisées (PMVR).

On calcule le résultat brut :

$$\text{Résultat brut (n)} = \text{Revenu (n)} + \text{PMVR (n)} + \text{Résultat technique brut (n)}$$

A ce stade, les plus-values réalisées sont la somme des plus-values issues des réallocations et des plus-values dégagées suivant la règle de dégagement de richesse par seuils.

- **Cas I : Résultat brut (n) < 0**

- Capitaux propres (n) = Capitaux propres (n-1) + Résultat brut (n)
- Résultat brut (n) = Résultat net (n) = 0
- Crédit IS (n) (*) = Crédit IS (n-1) - IS (n)
- IS(n) = 0

(*) ce montant pourra être utilisé jusqu'à épuisement en déduction de l'IS sur tous les exercices suivants

- **Cas II : Résultat brut (n) > 0**

Si Crédit IS (n) > 0

- IS après crédit IS (n) = Max [0 ; 0.33 * Résultat brut (n) – Credit IS (n)]
- Résultat net après crédit IS (n) = Résultat brut (n) – IS après crédit IS (n)
- Crédit IS (n) = Max [0 ; IS après crédit IS (n) – Crédit IS (n)]
- CapitauxPropres (n) = CapitauxPropres (n-1) + RésultatNet(n)

Si Crédit IS (n) = 0

- Résultat net (n) = Résultat brut (n) – 0.33 * Résultat brut (n)
- IS (n) = 0.33 * Résultat brut (n)
- CapitauxPropres (n) = CapitauxPropres (n-1) + RésultatNet(n)

On pilote le montant du dividende à distribuer en fonction du niveau de MSR. La couverture de MSR théorique est lue dans le scénario de passif, on l'appelle MSR cible.

Etude MSR sans prendre en compte les PMVL

On note $K = \text{CapitauxPropres}(n) + \text{RéserveCapi}(n)$

On note RésultatConservé la variable qui indique quelle part de résultat sera à priori non distribuée (utilisée pour augmenter les capitaux propres)

Si $K < \text{MSR cible}(n)$:

On conserve tout le résultat dans les capitaux propres, soit : $\text{RésultatConservé}(n) = \text{RésultatNet}(n)$

Il faut encore augmenter les capitaux propres pour arriver à la MSR cible : on commence par réaliser des plus-values latentes (si possible), et on complète par un abondement si nécessaire.

Si $\text{PMVL} > 0$:

On réalise des PVL pour atteindre la MSR cible.

$$\text{PVR} = \text{Min} [\text{PVL}(n) ; \text{MSR cible}(n) - K]$$

$$\text{PMVL}(n) = \text{PMVL}(n) - \text{PVR}(n)$$

$$\text{CapitauxPropres}(n) = \text{CapitauxPropres}(n) + \text{PVR}$$

On recalcule K :

- Si $K = \text{MSR cible}(n)$, on passe directement à l'étape suivante.

- Sinon, on passe dans le cas suivant ($\text{PMVL} \leq 0$).

Si $\text{PMVL} \leq 0$:

On abonde pour atteindre la MSR cible.

$$\text{Abondement}(n) = \text{MSR cible}(n) - K$$

$$\text{CapitauxPropres}(n) = \text{CapitauxPropres}(n) + \text{Abondement}(n)$$

Si $K \geq \text{MSR cible}(n)$:

On regarde si c'est grâce au résultat que les capitaux propres sont supérieurs à la MSR cible. Si c'est le cas, on doit conserver la partie du résultat permettant d'atteindre la MSR cible, soit :

$$\text{RésultatConservé}(n) = \text{Max} [0 ; \text{MSR cible}(n) - (K - \text{RésultatNet}(n))]$$

Puis on passe directement à l'étape suivante.

✚ Etude MSR en prenant en compte les PMVL

On note $K' = \text{CapitauxPropres}(n) + \text{RéserveCapi}(n) + \text{PMVL}(n) = K + \text{PMVL}(n)$

Si $K' < \text{coef baisse} * \text{MSR cible}(n)$:

Cela signifie que le fonds est en moins-value latente : on abonde pour remonter le niveau des capitaux propres et atteindre la MSR cible.

$$\text{Abondement}(n) = \text{MSR cible}(n) - K'$$

$$\text{CapitauxPropres}(n) = \text{CapitauxPropres}(n) + \text{Abondement}(n)$$

Si $\text{coef baisse} * \text{MSR cible}(n) < K' < \text{coef hausse} * \text{MSR cible}(n)$:

On ne distribue pas le résultat, il reste dans les capitaux propres.

$$\text{Dividende}(n) = 0$$

Si $\text{coef hausse} * \text{MSR cible}(n) < K' < \text{coef max} * \text{MSR cible}(n)$:

On distribue tout ou partie du résultat pour que $K' - \text{Dividende}(n) \geq 1.5 * \text{MSR cible}(n)$.

$$\text{Dividende}(n) = \text{Min} [A ; B]$$

Avec :

$$A = \text{RésultatNet}(n) - \text{RésultatConservé}(n)$$

$$B = \text{Min} [\text{CapitauxPropres}(n) ; \text{Max} (0 ; \text{Min} (K' - 1.5 * \text{MSR cible}(n) ; K - 1.5 * \text{MSR cible}(n)))]$$

$$\text{CapitauxPropres}(n) = \text{CapitauxPropres}(n) - \text{Dividende}(n)$$

Si $\text{coef max} * \text{MSR cible}(n) < K'$:

On distribue tout ou partie du résultat (*) pour que $1.5 * \text{MSR cible}(n) \leq K' - \text{Dividende}(n) \leq 4 * \text{MSR cible}(n)$.

$$\text{Dividende}(n) = \text{Min} [\text{CapitauxPropres}(n) ; \text{Min} (A ; B)]$$

Avec :

$$A = \text{Max} (\text{RésultatNet}(n) - \text{RésultatConservé}(n) ; K' - 4 * \text{MSR cible}(n))$$

$$B = K' - 1.5 * \text{MSR cible}(n)$$

$$\text{DiminutionCapitauxPropres}(n) = \text{Min} [\text{Dividende}(n) ; \text{Max} (0 ; K - \text{MSR cible}(n))]$$

$$\text{CapitauxPropres}(n) = \text{CapitauxPropres}(n) - \text{DiminutionCapitauxPropres}(n)$$

Si $\text{Dividende}(n) = \text{DiminutionCapitauxPropres}(n)$, on s'arrête

Si $\text{Dividende}(n) \geq \text{DiminutionCapitauxPropres}(n)$, on réalise des plus-values latentes à hauteur de ce qu'il reste à verser :

$$\text{PVR}(n) = \text{Dividende}(n) - \text{DiminutionCapitauxPropres}(n)$$

$$\text{PMVL}(n) = \text{PMVL}(n) - \text{PVR}(n)$$

(*) ou même plus

3 Détermination de l'allocation stratégique dans le scénario central et étude d'impacts

3.1 Indicateurs utilisés

L'indicateur de rendement

L'indicateur de rendement retenu pour cette étude est la moyenne de la VAN des dividendes sur l'ensemble des simulations réalisées. Il représente l'espérance de la richesse qui sera dégagée par l'entreprise pour les actionnaires.

La VAN des dividendes est définie comme suit (pour le scénario s) :

$$VAN_Dividendes_d_ans = \sum_{t=1}^d \frac{Dividendes_{t,s} - Abondements_{t,s}}{(1 + Perfa_{t,s})^t} + \left(\frac{Surplus_{d,s}}{(1 + Perfa_{d,s})^d} \right)_+$$

Avec Surplus = Capitaux_Propres + PMVL + Reserve_Capitalisation et d= 15 ans.

Dans le cadre Solvabilité II, on retirera à cette VAN le coût en capital de l'allocation.

Les indicateurs de risque

Le premier indicateur de risque retenu pour cette étude est l'écart-type de la VAN des dividendes actionnaires.

Le second indicateur de risque est l'indicatrice de la survenance de trois abondements successifs au cours des trois premières années. En effet, on supposera que l'actionnaire préférera laisser la société en défaut ou avec un niveau de fonds propres en-deçà du minimum réglementaire plutôt que d'abonder une quatrième fois. Nous allons donc nous servir de ce témoin comme indicateur de la probabilité de défaut.

Le « Risk Appetite »

Nous utiliserons par la suite la notion de « *Risk Appetite* », définie comme étant la limite quantifiée du risque que l'actionnaire est prêt à accepter. Ici, on le définira relativement à la volatilité du gain du portefeuille de risque minimum, en y ajoutant 10% de l'espérance du gain de ce même portefeuille.

3.2 Détermination de l'allocation stratégique dans le scénario central

3.2.1 Hypothèses centrales de scénarios de passif

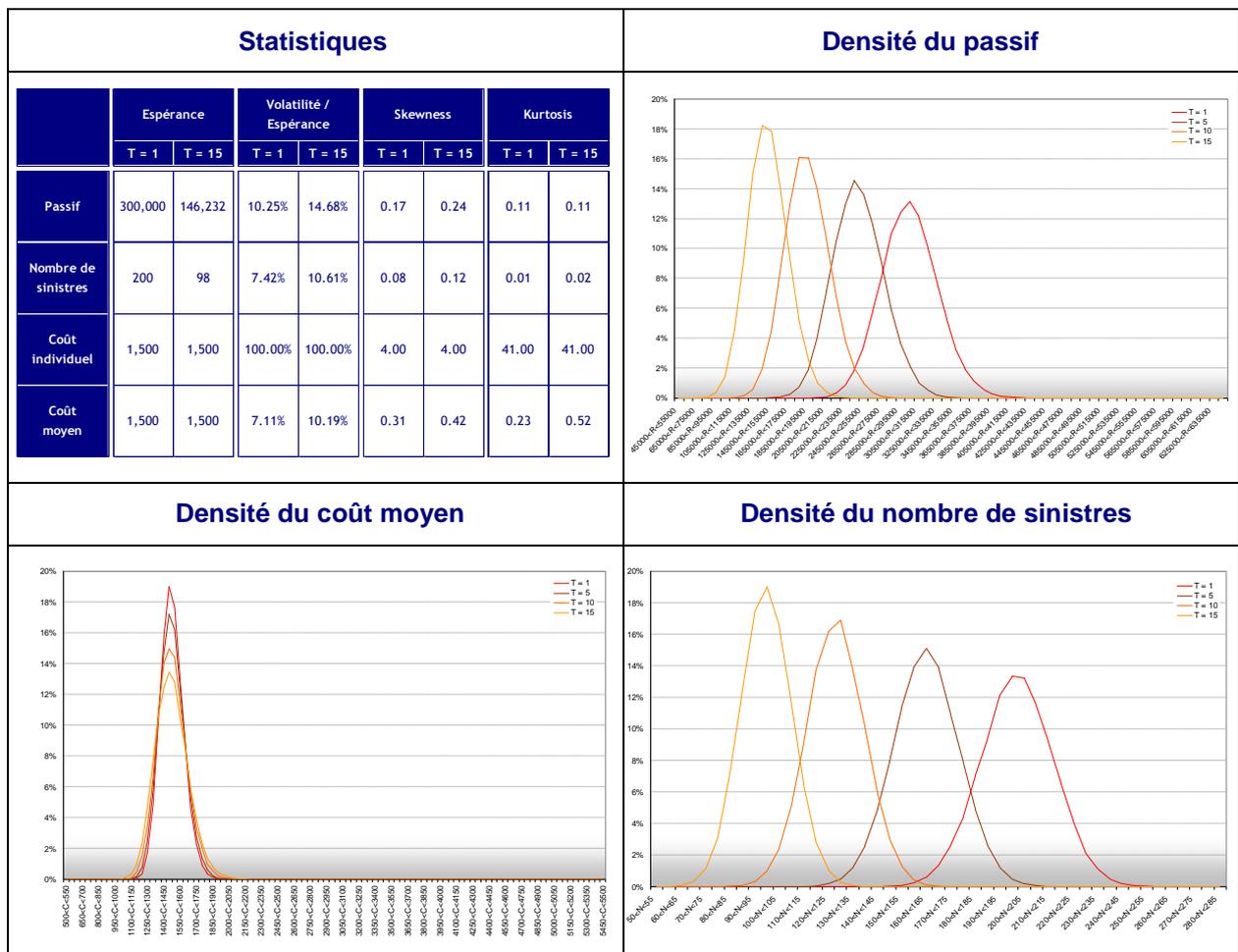
Afin de s'affranchir des contraintes de confidentialité, nous nous intéresserons ici à un fonds fictif. Nous avons par ailleurs choisi de nous concentrer sur la branche dommage automobile.

Rappelons tout d'abord que :

- ❖ La charge de sinistres est estimée selon une approche fréquence/coût
- ❖ La prime est calculée selon le principe de la prime pure (chargement de 45%)
- ❖ Les cadences de provisionnement sont déterministes

Nous avons considéré un nouveau portefeuille en run-off en supposant que la loi de résiliation suit une loi binomiale de paramètre 5% que l'on applique chaque année sur les assurés restants.

L'ensemble des caractéristiques relatives aux scénarios sous hypothèses centrales est récapitulé ci-dessous :



3.2.2 Résultats intuitifs

Ayant bénéficié de l'expertise du plateau, nous avons eu l'intuition que la probabilité de défaut minimale relative à un passif de skew nul (ou négatif) serait paradoxalement obtenue, non pour une allocation non-risquée, mais curieusement pour un portefeuille contenant une part non négligeable d'actifs risqués.

Ce paradoxe qui peut sembler contre-nature sera mis en évidence et quantifié dans le paragraphe suivant. Nous l'illustrons ici de manière simpliste à travers un cas discrétisé fournissant les bonnes intuitions :

Illustration du paradoxe à travers un exemple discrétisé				
	Passif de skew nul (ou négatif) $V=10 ; S=0$	Actif	Probabilité de défaut	Perte espérée
Cas 1 Actif vol nulle $V=0 ; S=0$			50%	10
Cas 2 Actif vol moyenne $V=10 ; S=0$			25%	20
Cas 3 Actif vol élevée $V=50 ; S=0$			50%	50

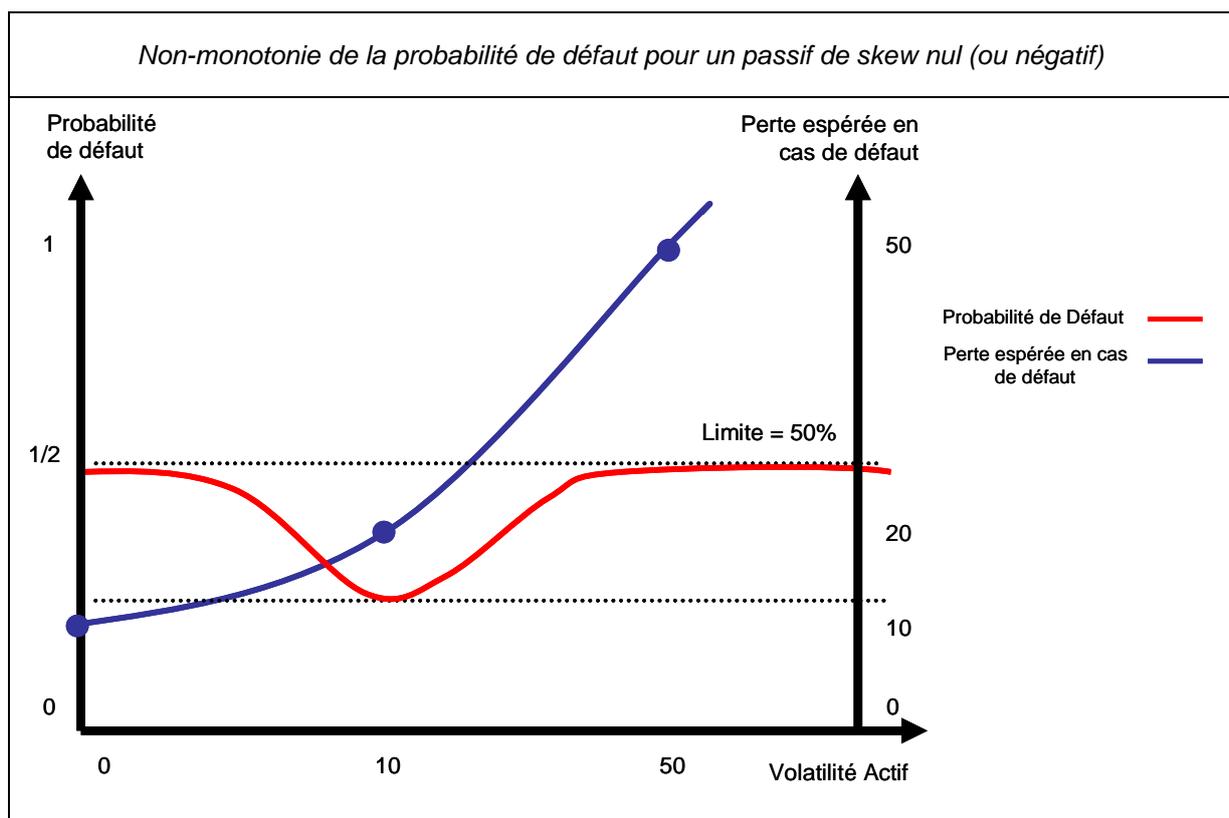
Ce graphique représente en bleu les issues possibles d'un passif dont la distribution serait symétrique, et en rouge les issues possibles des actifs mis en représentation.

On constate donc qu'en plaçant les primes :

- ❖ Dans un actif de vol nulle (portefeuille sans risque), alors l'assureur fait défaut seulement dans le cas où la sinistralité est plus importante, soit dans 50% des cas et ce avec une perte potentielle limitée (10)
- ❖ Dans un actif de vol moyenne (portefeuille mixte), alors l'assureur fait défaut seulement dans le cas où la sinistralité est plus importante et la performance de l'actif adverse, soit dans 25% des cas et ce avec une perte potentielle importante (20)
- ❖ Dans un actif de vol élevée (portefeuille risqué), alors l'assureur fait défaut seulement dans le cas où la performance de l'actif est négative, soit dans 50% des cas et ce avec une perte potentielle plus que considérable (50)

On constate donc que la probabilité de défaut n'est pas monotone avec la prise de risque de l'actif (entendue au sens de la volatilité), mais qu'elle est au contraire minimale pour une allocation ayant des propriétés statistiques proches de celles du passif (i.e une densité symétrique et une volatilité comparable).

Par extrapolation de ces trois cas limites, il vient l'illustration graphique ci-après :



On retiendra de cet exemple que le choix de l'indicateur de risque et la forme du passif (i.e la valeur de ses trois premiers moments) vont influencer sur le choix d'une allocation optimale et pourront éventuellement fournir des résultats divergents.

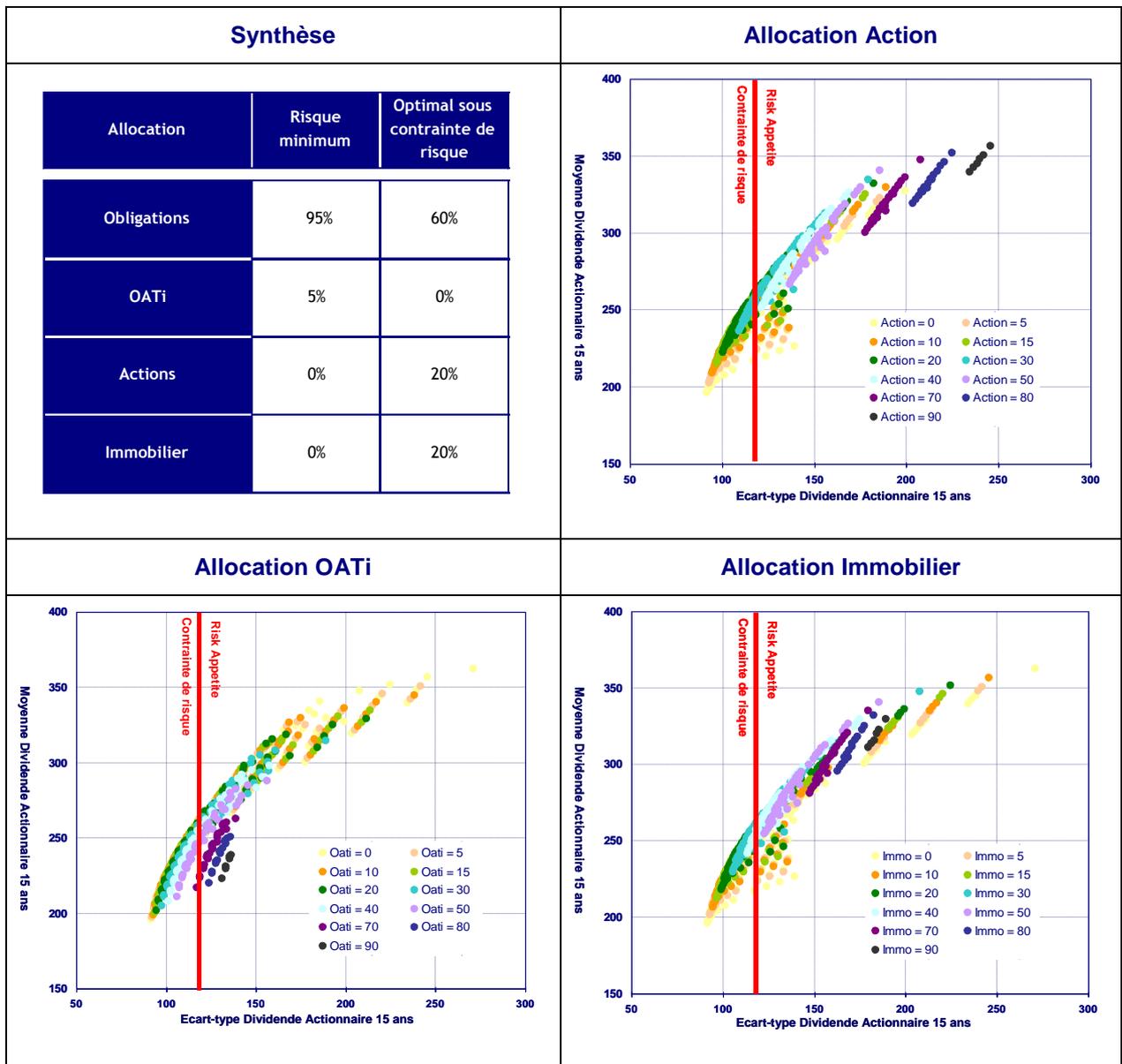
3.2.3 Résultats quantifiés

Nous avons projeté les différentes allocations atteignables dans un plan de type risque/rendement.

On rappelle que notre objectif est d'identifier l'allocation qui optimise la marge du business pour un risque considéré comme acceptable. On utilise pour cela :

- ❖ La moyenne de la marge actionnaire nette d'abondement comme métrique de rendement
- ❖ L'écart-type de cette marge actionnaire comme métrique de risque

L'ensemble des éléments nécessaires pour déterminer la composition des portefeuilles situés sur la frontière efficiente (minimisation du risque et maximisation du rendement) figurent dans les graphiques ci-dessous :



On observe assez naturellement que le rendement est une fonction croissante de la mesure de risque telle que nous l'avons définie, à savoir l'écart-type de la marge actionnaire.

Intéressons-nous à présent à trois portefeuilles singuliers :

❖ *Le portefeuille de risque minimum*

Le risque technique étant indépendant de l'allocation choisie, le portefeuille qui minimise la variabilité du résultat global est celui qui minimise la variabilité du résultat financier. Il est donc composé uniquement d'obligations d'état à taux fixe ; En effet, les OATi présentent une volatilité relativement supérieure à celle des obligations (5% vs 2.5%), ce qui explique un appétit en diversification plus que limité.

❖ *Le portefeuille de rendement maximum*

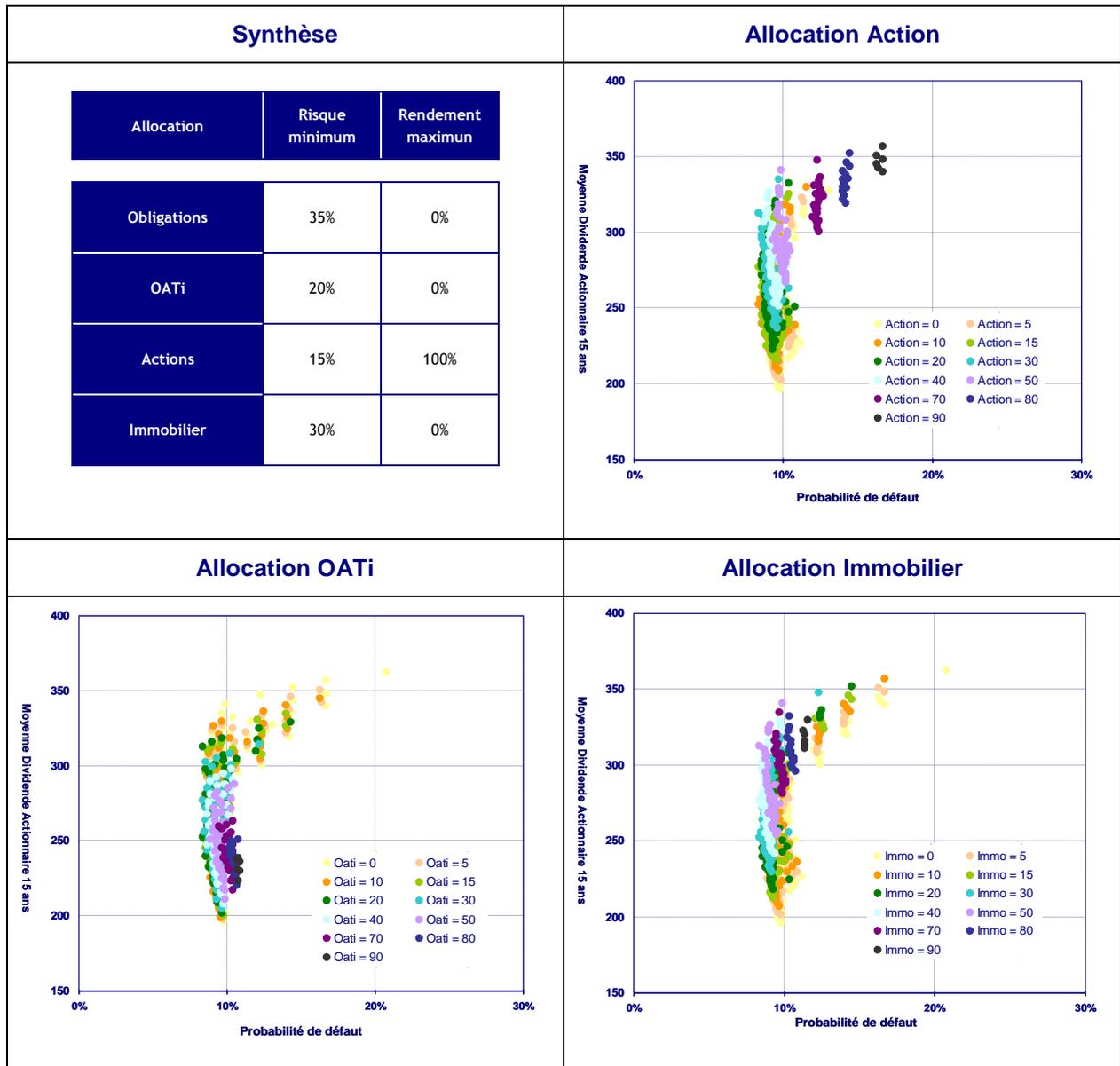
L'allocation qui maximise la variabilité du résultat offrira en contrepartie plus de prime de risque, et maximisera en conséquence l'espérance de rendement. L'allocation que nous recherchons est donc l'allocation la plus volatile, à savoir celle composée intégralement d'actifs risqués.

❖ *Le portefeuille optimal sous contrainte de risque*

La ligne rouge représente le « *Risk Appetite* » de la compagnie, ce seuil étant défini selon la règle énoncée précédemment. Le portefeuille optimal sature la contrainte de « *Risk Appetite* » et est alloué entre obligations d'état, actions, et immobilier. On notera également que l'immobilier est l'actif risqué le plus représenté, sa volatilité étant inférieure à celle des actions.

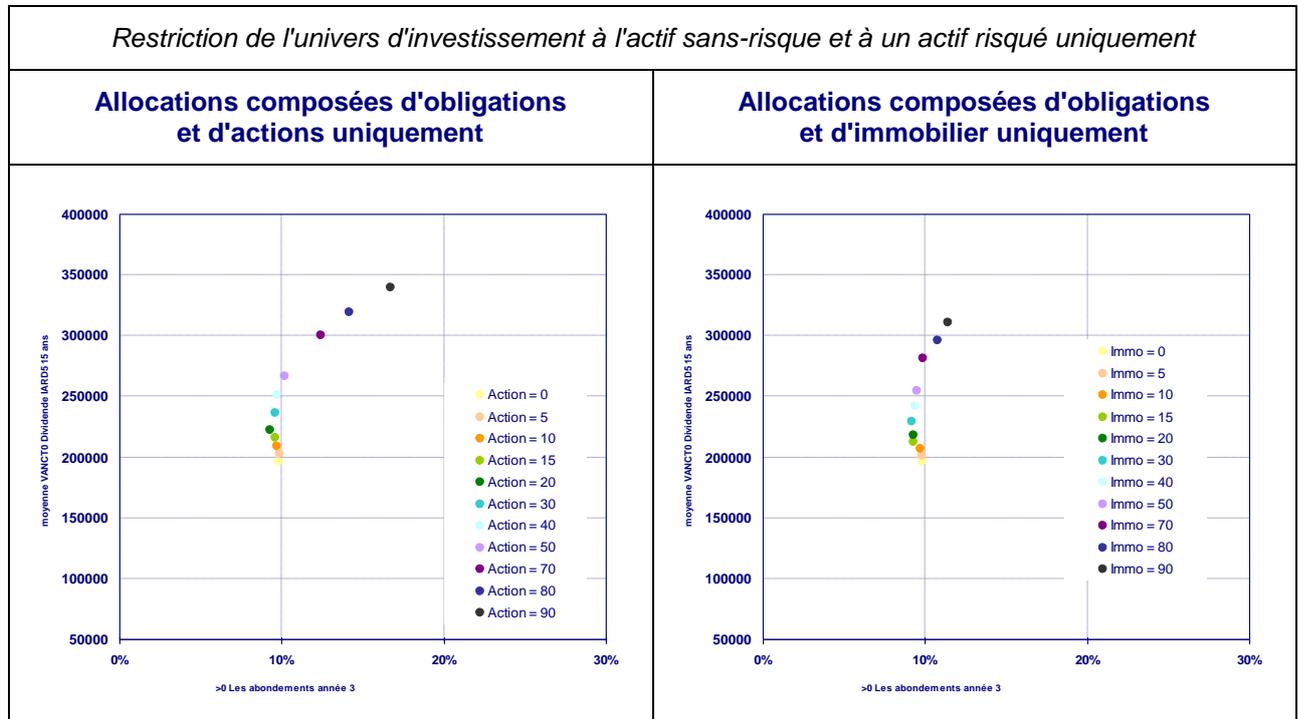
Afin d'exhiber le paradoxe évoqué un peu plus tôt, à savoir la non-monotonie de la probabilité de défaut pour un passif de skew nul, nous allons à présent changer de métrique de risque et projeter les différentes allocations atteignables dans ce nouveau référentiel.

Les graphiques sous la probabilité de défaut sont représentés ci-après :



Le nombre d'actifs disponibles étant ici trop important, il nous est impossible de présenter clairement le phénomène que nous souhaitons mettre en relief sur la base de ces graphiques.

Si nous nous restreignons maintenant à l'actif sans-risque et à un actif risqué uniquement (comme c'était le cas dans le modèle discrétisé), les graphiques précédents deviennent beaucoup plus explicites :

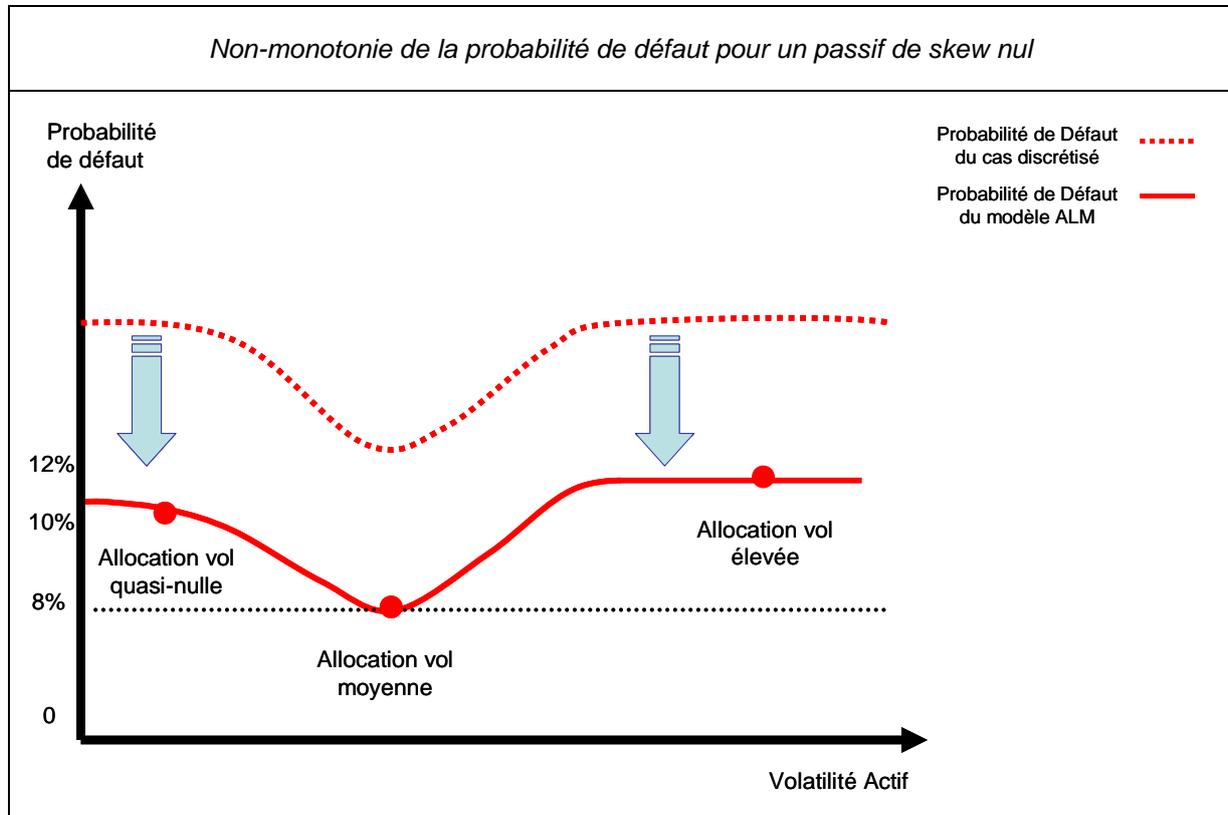


Si l'on se place dans le cas où l'immobilier joue le rôle de l'actif risqué, on constate donc qu'en plaçant les primes d'assurance :

- ❖ Dans un portefeuille d'actifs de volatilité quasi-nulle (0% immobilier, 100% obligations), alors l'assureur fait défaut dans 10% des cas
- ❖ Dans un portefeuille d'actifs de volatilité moyenne (30% immobilier, 70% obligations), alors l'assureur fait défaut dans 8% des cas
- ❖ Dans un portefeuille d'actifs de volatilité élevée (90% immobilier, 10% obligations), alors l'assureur fait défaut dans 12% des cas

On confirme donc bien ici l'intuition initiale, à savoir que la probabilité de défaut n'est pas monotone avec la prise de risque de l'actif (entendue au sens de la volatilité), mais qu'elle est au contraire minimale pour une allocation ayant une volatilité non négligeable ; Le minimum est en effet obtenu, non pour le placement le moins volatil, mais au contraire pour un portefeuille contenant 30% d'immobilier.

Si nous extrapolons à nouveau ces trois cas limites, nous retrouvons à quelques choses près les résultats du cas discret :



Remarquons enfin que si le portefeuille le plus prudent comptabilise 30% d'immobilier dans le cas où ce dernier joue le rôle de l'actif risqué, il ne contient plus que 20% d'actions dans le cas où celles-ci le remplacent dans ce rôle. Notons que ceci n'est pas le fruit du hasard, mais contribue au contraire à ce que le portefeuille de risque minimal atteigne une même vol solution ; Les actions étant plus volatiles que l'immobilier, il est en effet naturel qu'elles soient présentes dans une proportion moindre.

3.3 Impact du skew de passif sur l'allocation stratégique

3.3.1 Résultats intuitifs

Nous avons cherché à savoir si la forme du passif jouait un rôle dans la construction d'une allocation. Nous avons donc regardé comment se comportaient nos indicateurs de risque lorsque le passif était skewé.

Ayant réitéré l'approche précédente, nous avons ressenti que bien que la probabilité de défaut minimale relative à un passif de skew positif soit obtenue pour une allocation non-risquée, elle admet curieusement un maximum pour un portefeuille contenant une part d'actifs risqués et décroît finalement avec l'augmentation de la volatilité de l'actif.

Ce comportement pour le moins paradoxal sera mis en évidence et quantifié dans le paragraphe suivant. Nous l'illustrons ici de manière simpliste à travers un cas discrétisé fournissant les bonnes intuitions :

Illustration du paradoxe à travers un exemple discrétisé				
	Passif de skew positif $V=20$; $S=1.5$	Actif	Probabilité de défaut	Perte espérée
Cas 1 Actif vol nulle $V=0$; $S=0$			20%	40
Cas 2 Actif vol moyenne $V=20$; $S=0$			60%	20
Cas 3 Actif vol élevée $V=50$; $S=0$			50%	50

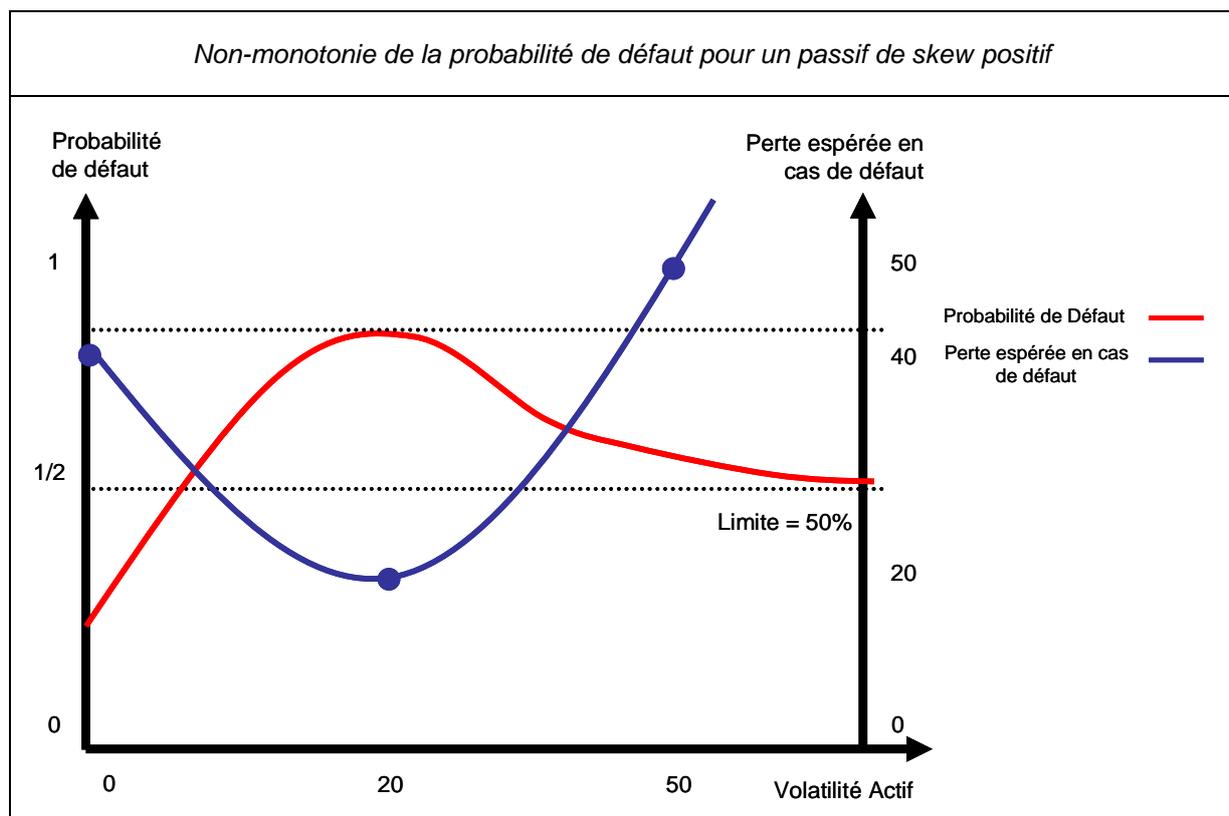
Ce graphique représente en bleu les issues possibles d'un passif de skew positif, et en rouge les issues possibles des actifs mis en représentation.

On constate donc qu'en plaçant les primes :

- ❖ Dans un actif de vol nulle (portefeuille sans risque), alors l'assureur fait défaut seulement dans le cas où la sinistralité est plus importante, soit dans 20% des cas et ce avec une perte potentielle importante (40)
- ❖ Dans un actif de vol moyenne (portefeuille mixte), alors l'assureur fait défaut seulement dans le cas où la sinistralité est plus importante et la performance de l'actif adverse, soit dans 60% des cas et ce avec une perte potentielle limitée (20)
- ❖ Dans un actif de vol élevée (portefeuille risqué), alors l'assureur fait défaut seulement dans le cas où la performance de l'actif est négative, soit dans 50% des cas et ce avec une perte potentielle plus que considérable (50)

Bien que la probabilité de défaut soit, comme on pourrait s'y attendre, une fonction croissante de la prise de risque (toujours entendue au sens de la volatilité de l'actif) au voisinage de 0, on constate qu'elle n'est néanmoins pas monotone mais vient à décroître après avoir atteint un maximum global pour une allocation ayant une volatilité proche de celle du passif.

Par extrapolation de ces trois cas limites, il vient l'illustration graphique ci-après :

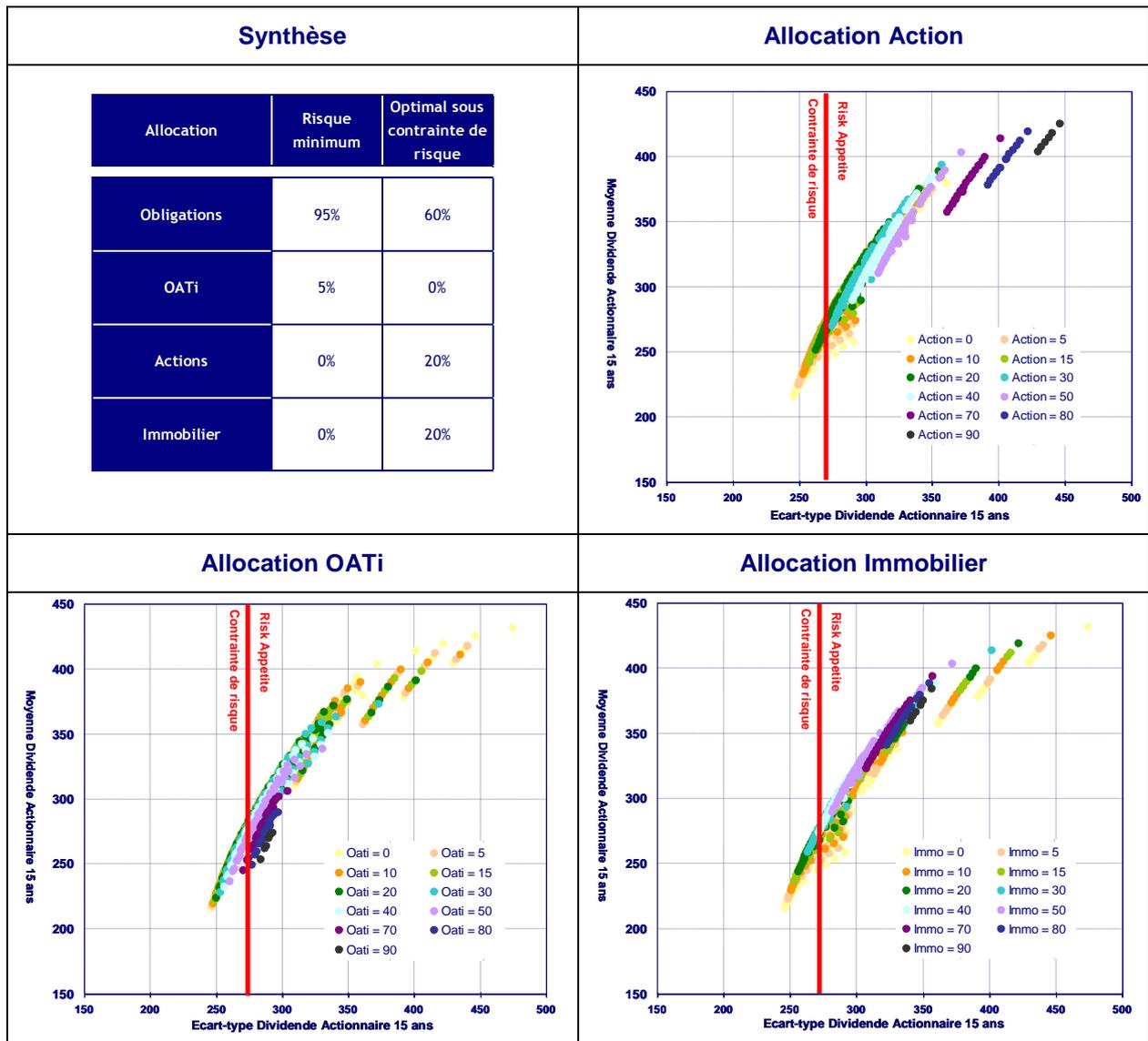


On observe à nouveau que le choix de l'indicateur et la forme du passif (i.e la valeur de ses trois premiers moments) influent sur le choix de l'allocation optimale et pourront conduire à des résultats divergents.

3.3.2 Résultats quantifiés

Nous avons à nouveau projeté les différentes allocations atteignables, et ce dans le même plan qu'au début de l'itération précédente.

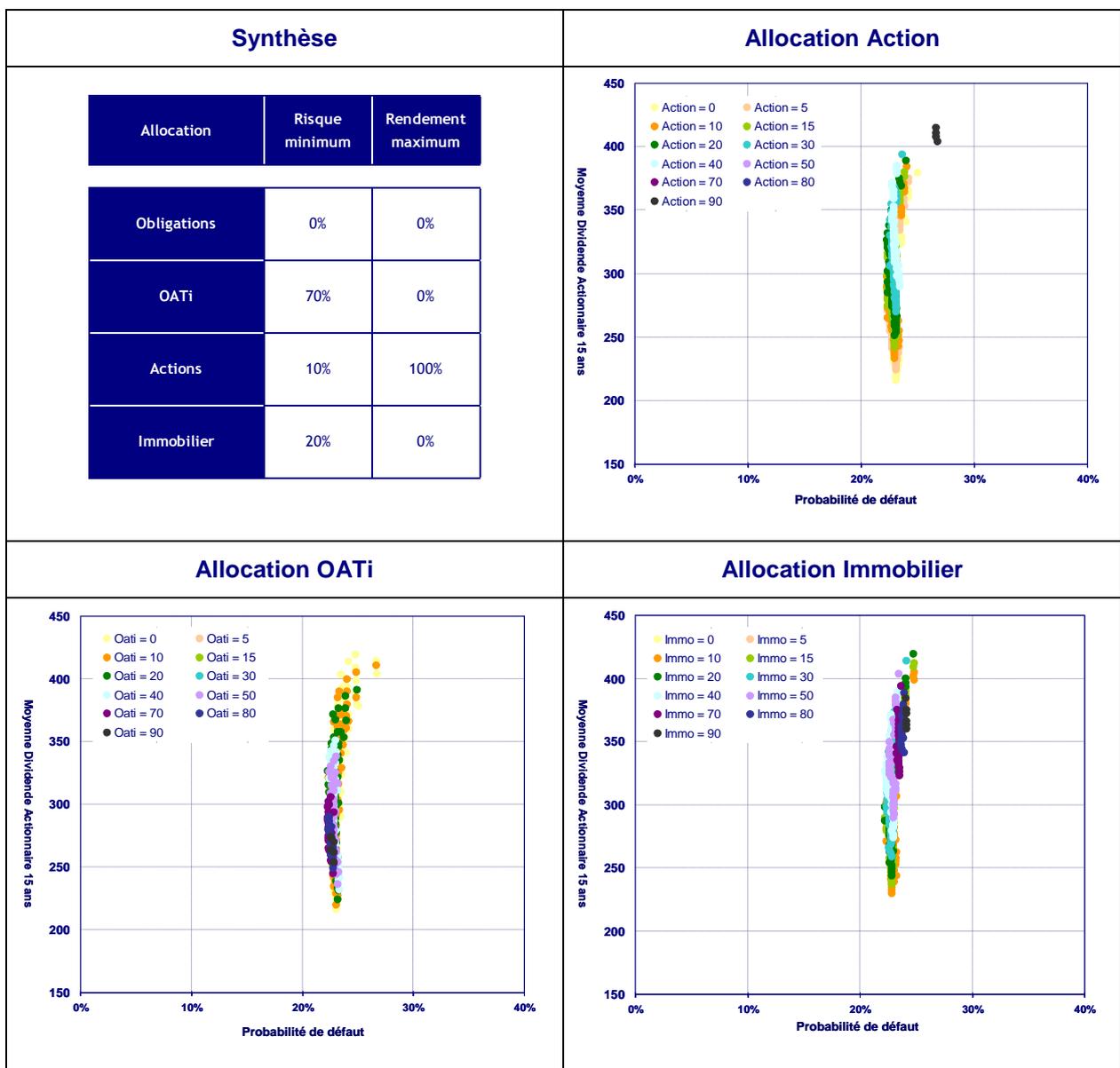
L'ensemble des éléments nécessaires pour déterminer la composition des portefeuilles situés sur la frontière efficiente figurent dans les graphiques ci-dessous :



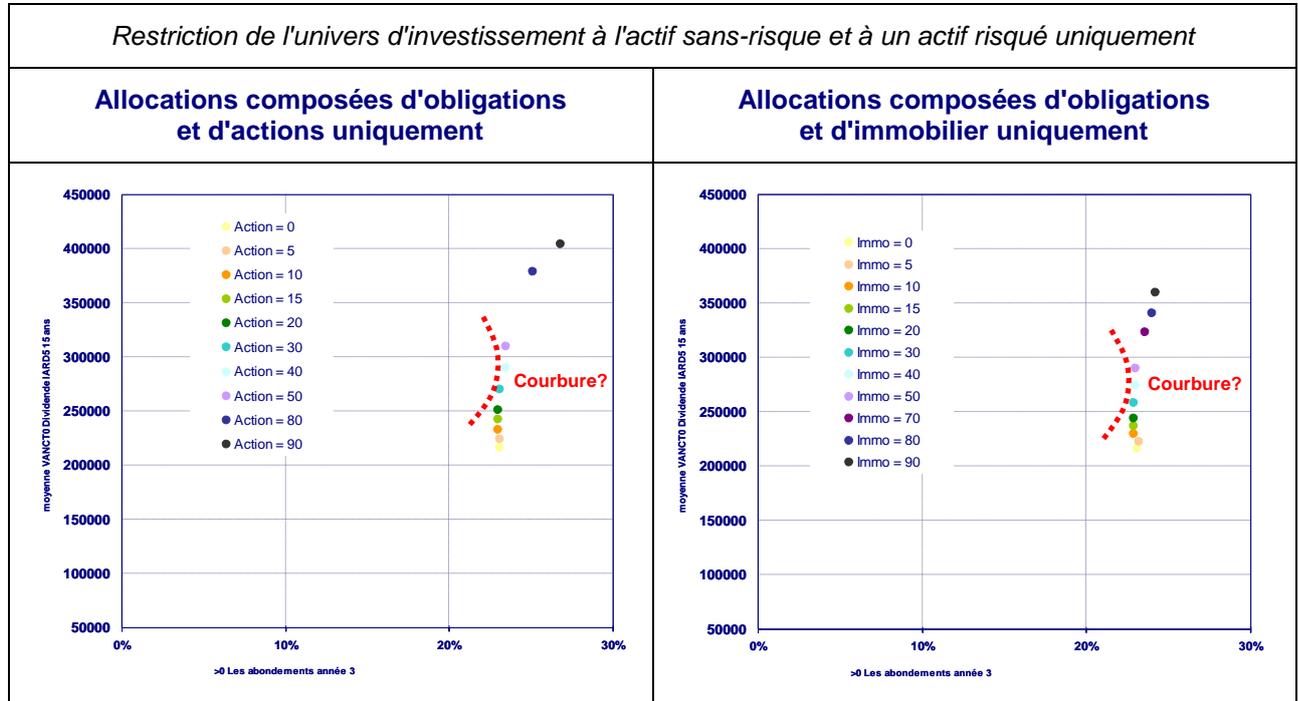
On observe une nouvelle fois le fait que le rendement est bien une fonction croissante de la mesure de risque lorsque l'on entend cette dernière comme étant l'écart-type de la marge actionnaire.

Bien que le niveau de risque ait augmenté sur l'ensemble du nuage, nous ne notons aucune différence dans la composition de nos trois portefeuilles singuliers par rapport à ce que nous avons pu observer dans le scénario central.

Intéressons-nous maintenant à la mise en relief du second aspect de notre paradoxe, à savoir la non-monotonie de la probabilité de défaut pour un passif de skew positif, et projetons les allocations atteignables sous la nouvelle mesure de risque :



En restreignant l'univers d'investissement à l'actif sans-risque et à un actif risqué uniquement, nous avons obtenu le visuel ci-dessous :



Si l'on cherche sur ces graphiques la courbure promise par le modèle discrétisé, on croit pouvoir deviner un timide maximum local qui pourrait s'apparenter au maximum global que nous attendions. Il est malheureusement, si l'on veut demeurer réaliste, bien trop insignifiant pour nous permettre de conclure quand au deuxième aspect de notre paradoxe.

Il pourrait y avoir d'innombrables raisons à la dissolution de la singularité que nous guettions, comme par exemple l'impossibilité de générer un skew suffisant pour que le phénomène escompté se matérialise, ou bien encore la résultante de multiples effets liés à la complexité du modèle dans son ensemble.

Notons qu'un changement de régime a néanmoins bien eu lieu : les allocations les moins volatiles sont maintenant devenues moins risquées au sens de la probabilité de défaut.

3.4 Impact de l'inflation sur l'allocation stratégique

3.4.1 Problématique

Nous avons supposé jusqu'alors qu'il n'y avait pas d'inflation ; Mais que deviennent nos résultats lorsque le passif est inflaté ?

Si l'inflation ne joue pas sur la fréquence des sinistres, elle influe sur leurs coûts, accroissant par là-même la variabilité de la charge totale et potentiellement celle du résultat.

A l'actif, les OATi offrent depuis toujours la possibilité d'une exposition à l'« *Indice des Prix à la Consommation* » (CPI). En l'absence d'inflation au passif, l'allocation stratégique montrait un faible appétit pour ces instruments ; Si les coûts sont à présent inflatés, on est en droit de se demander si le portefeuille optimal s'en octroiera une part plus importante, cherchant par là-même à coupler l'actif au passif et à immuniser le résultat.

Nous tenterons dans cette partie d'analyser l'influence de l'inflation du passif sur l'allocation stratégique, et de voir si l'optimum s'empare de la potentielle source de corrélation qui lui est offerte.

3.4.2 Eléments préliminaires

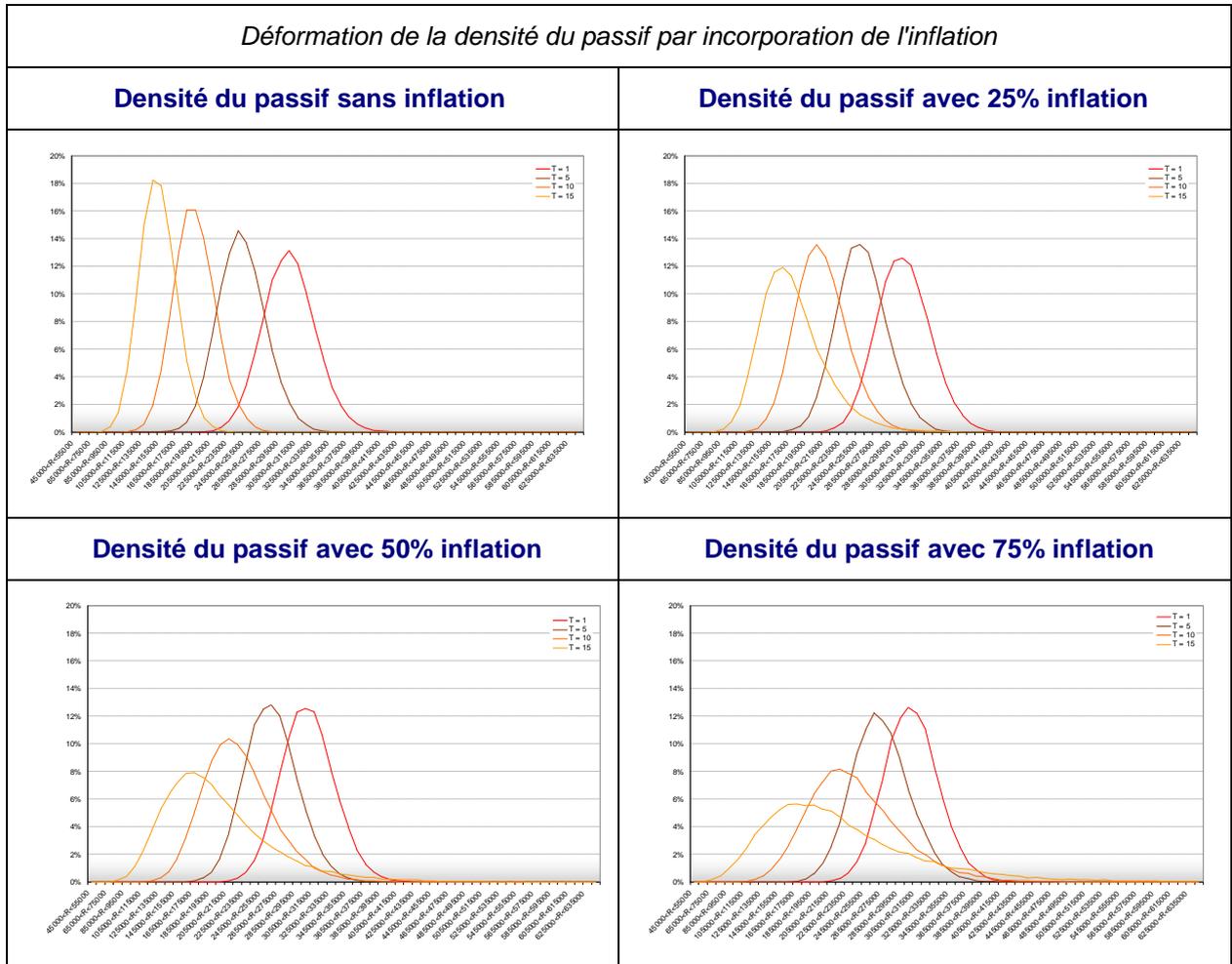
Avant toutes choses, il convient de définir précisément ce qu'est l'inflation et comment elle se matérialise à l'actif et au passif.

En effet, on peut distinguer différents types d'inflation. En général, lorsque l'on évoque l'inflation, on fait référence à l'inflation de l'« *Indice des Prix à la Consommation* » (CPI), mais il en existe une quantité d'autres, comme par exemple l'« *Indice du Coût de la Construction* » (ICC), ou bien encore l'« *Indice du Chiffre d'Affaire du commerce de détail en Valeur* » (ICAV). L'inflation de notre passif est-elle alors bien l'inflation CPI ou relève-t-elle au contraire d'autres facteurs ?

L'inflation CPI, publiée par l'INSEE, se base sur un bouquet de biens et de services proposés aux consommateurs sur l'ensemble du territoire français. Ce bouquet, communément appelé "panier de la ménagère", se décompose en 305 familles et sous-familles parmi lesquelles on retrouvera notamment les boissons, vêtements, et autres loisirs.

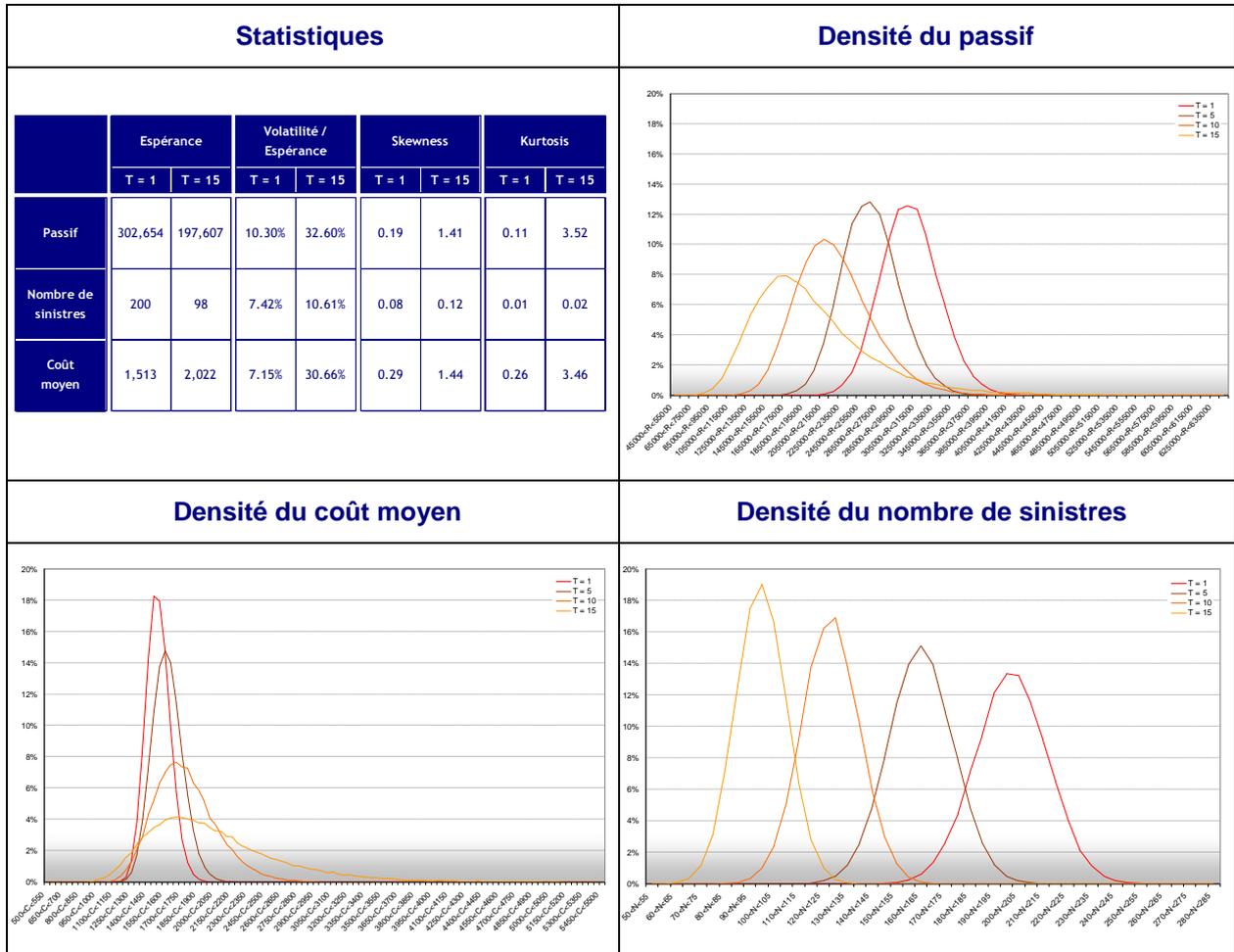
Ce panier s'éloignant très largement de celui d'un assureur, il apparaît alors clairement que l'inflation de notre passif diffère de l'inflation CPI ; Des études internes au groupe Axa ont mis en évidence que l'inflation de son passif automobile était deux fois moindre que l'inflation d'un bien moyen du panier de la ménagère. Ceci revient à dire que la relation entre l'inflation du passif et l'inflation CPI est décrite par un bêta de 50%, valeur que nous retiendrons dans nos travaux.

La déformation de la densité de notre passif suite à la prise en compte de l'inflation est ici illustrée pour différents bêtas :



3.4.3 Hypothèses additionnelles de scénarios de passif

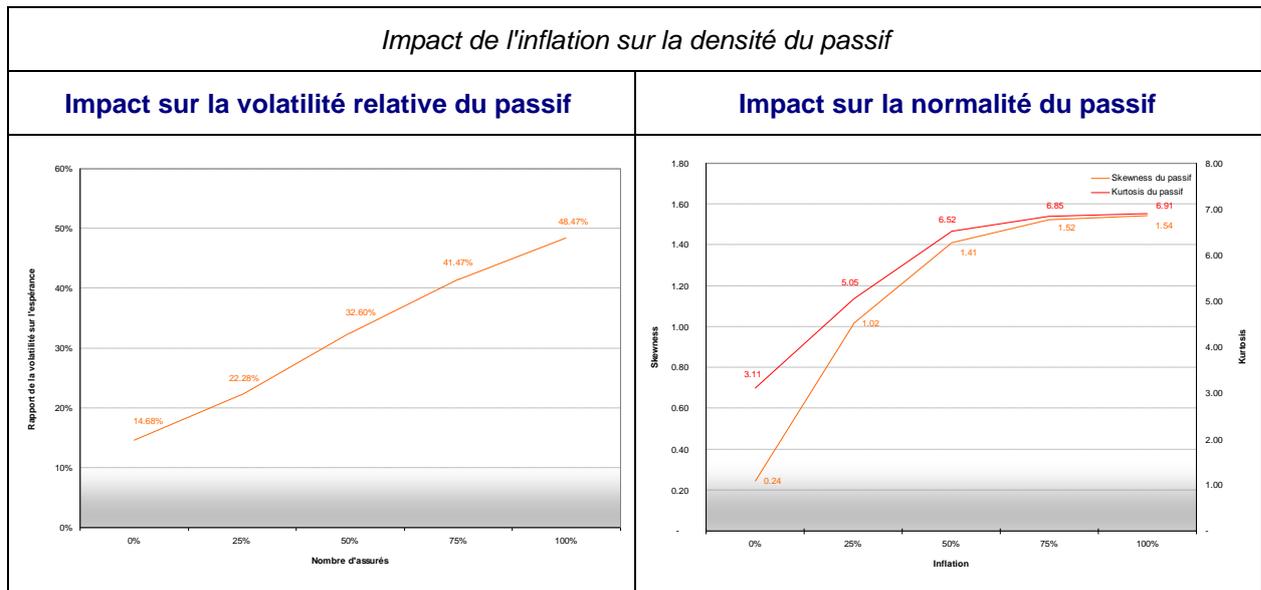
L'ensemble des caractéristiques relatives aux scénarios incorporant les effets de l'inflation est récapitulé ci-dessous :



On observe de manière très nette l'augmentation de la volatilité relative du passif (sous-entendu, par rapport à l'espérance), ainsi que l'apparition du skew inhérent à l'inflation.

En effet, si le skew des coûts individuels se diluait sous l'effet du théorème central limite, le skew d'inflation lui n'est pas diversifiable ; Il impacte directement le numéraire et est en conséquence immun aux effets de la mutualisation.

Ces observations sont corroborées par les graphiques ci-dessous :



3.4.4 Résultats intuitifs

Nous allons montrer dans cette partie que si le passif est inflaté, alors l'intégration d'une poche OATi dans le portefeuille permettra de réduire la variabilité du résultat de l'entreprise. Nous essaierons également de suggérer par un raisonnement simplifié que la pondération attribuée à cette poche est située au voisinage du bêta de l'inflation du passif. Comme déjà mentionné précédemment, ce bêta est entendu comme le nombre décrivant la relation entre l'inflation du passif et l'inflation CPI ; il a été analysé dans des études internes au groupe et estimé à 50%, valeur que nous avons retenue.

Nous poserons dans la suite les hypothèses simplificatrices suivantes :

- ❖ On négligera volontairement le taux réel, assimilant ainsi la performance des OATi à l'inflation
- ❖ Les primes seront calculées selon le principe de la prime pure, i.e nettes de tout chargement
- ❖ Le résultat de l'entreprise se scindera en un résultat technique et en un résultat financier
- ❖ Le résultat technique sera assimilé à la différence entre les primes et les sinistres inflatés
- ❖ Le résultat financier sera décomposé entre la performance des OATi et celle du reste du portefeuille

Nous noterons en outre α la portion de richesse attribuée à l'investissement en OATi, la part allouée aux autres actifs étant alors $(1 - \alpha)$.

Nous pouvons écrire de manière heuristique la variance du résultat de l'entreprise pour l'exercice en cours selon la formule suivante :

$$Var[R_{\text{Technique}} + R_{\text{Financier}}] = Var[\underbrace{P - [1 + \beta \cdot \pi_{\text{CPI}}] \cdot S}_{\text{Résultat Technique}} + \underbrace{(1 - \alpha) \cdot P \cdot \mu_{\text{Portefeuille}} + \alpha \cdot P \cdot \pi_{\text{CPI}}}_{\text{Résultat Financier}}]$$

$$Var[R_{\text{Technique}} + R_{\text{Financier}}] = Var[\underbrace{(P - S)}_{\text{Risque Technique}} + \underbrace{(1 - \alpha) \cdot P \cdot \mu_{\text{Portefeuille}}}_{\text{Risque Financier}} + \underbrace{(\alpha \cdot P - \beta \cdot S) \cdot \pi_{\text{CPI}}}_{\text{Risque de mauvaise adéquation entre l'inflation de l'Actif et celle du Passif}}]$$

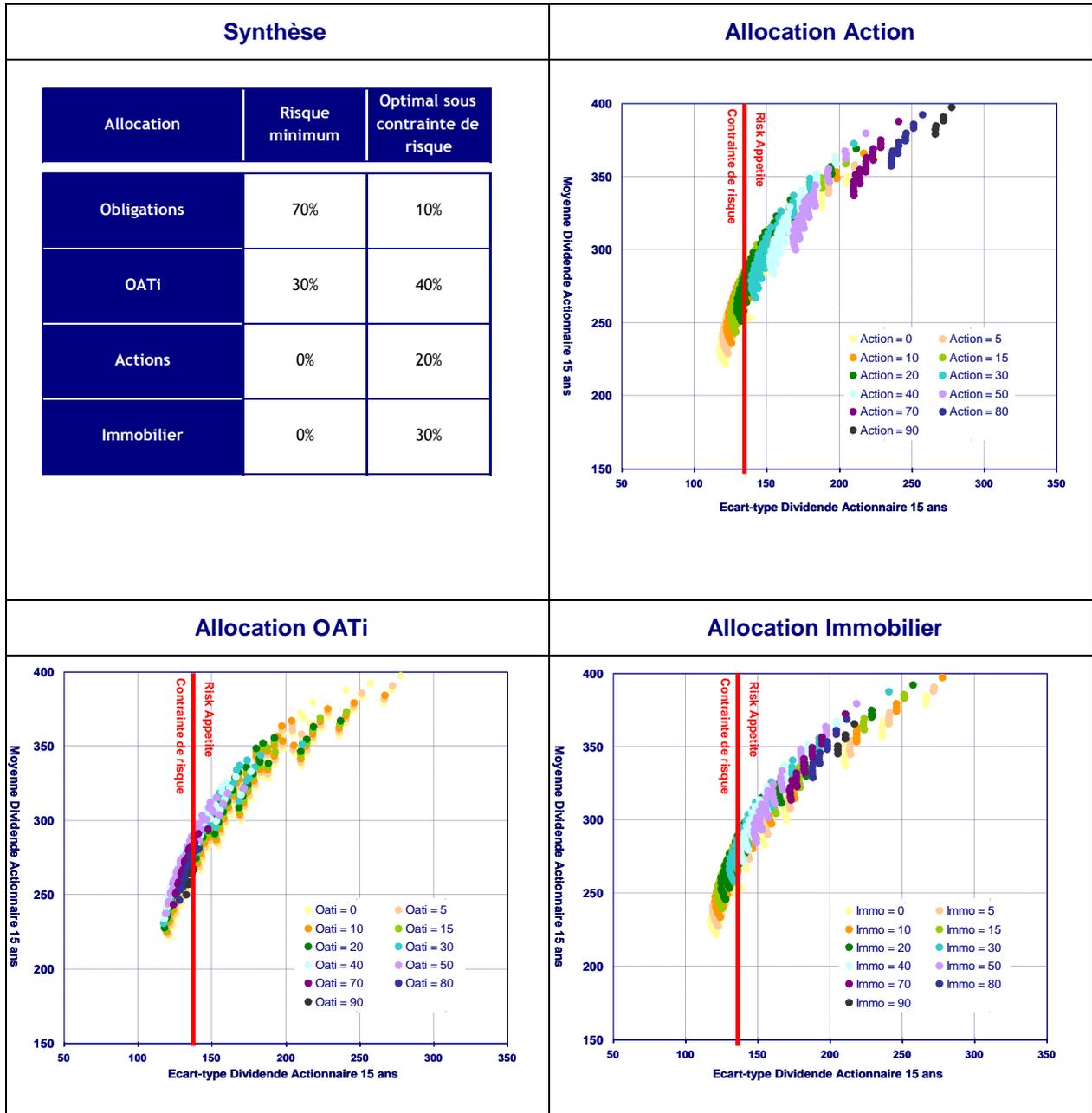
Où	$R_{\text{Technique}}$:	Résultat technique
	$R_{\text{Financier}}$:	Résultat financier
	P	:	Primes d'assurance
	S	:	Charge de sinistres
	α	:	Poids de la poche OATi
	β	:	Elasticité de l'inflation du passif par rapport à l'inflation CPI
	π_{CPI}	:	Inflation CPI
	$\mu_{\text{Portefeuille}}$:	Performance du reste du portefeuille

Par construction, l'espérance de la sinistralité est égale à la prime pure. Si l'on vulgarise maintenant à l'extrême en considérant que la charge est déterministe et s'élève exactement au montant des primes d'assurances collectées, on pressent alors que le risque résultant de la mauvaise adéquation entre l'inflation de l'actif et celle du passif s'annulera pour un alpha égal au bêta. Ceci équivaut à dire que l'allocation optimale verra une pondération de la poche OATi égale à l'élasticité de l'inflation du passif par rapport à l'inflation CPI.

Le risque financier étant également une fonction du coefficient alpha, notons que les propos précédents doivent être pondérés, et que l'on s'attend alors à ce que l'optimum ne se situe pas exactement au niveau du bêta, mais plutôt dans son voisinage.

3.4.5 Résultats quantifiés

L'ensemble des éléments nécessaires pour déterminer la composition des portefeuilles situés sur la frontière efficiente (avec l'écart-type comme mesure de risque) figurent dans les graphiques ci-dessous :



Maintenant que le passif est inflaté, intéressons-nous à nouveau à nos trois portefeuilles singuliers et analysons l'impact de cette nouvelle hypothèse :

❖ *Le portefeuille de risque minimum*

On observe un transfert de 25% de la richesse de la poche obligations vers la poche OATi, cette dernière voyant son poids augmenter de 5% à 30%. En effet, le portefeuille qui minimise la variabilité du résultat global n'est plus celui qui minimise la variabilité du résultat financier, mais celui qui la limitera tout en permettant de compenser au mieux l'inflation du passif. Sachant que la seule manière d'achever cette couverture est de constituer une poche OATi, et que les obligations mobilisaient précédemment la quasi-totalité de la richesse, le phénomène de vases communicant que nous observons est plus que naturel.

❖ *Le portefeuille de rendement maximum*

La maximisation du résultat ne faisant pas plus cas du risque supplémentaire induit par l'inflation du passif que des risques préexistants, l'allocation solution demeure inchangée et se compose toujours intégralement d'actifs risqués.

❖ *Le portefeuille optimal sous contrainte de risque*

On observe un transfert de 50% de la richesse de la poche obligations vers les poches OATi (+40%) et les actifs risqués (+10%), ces dernières voyant leurs poids augmenter respectivement de 0% à 40% et de 40% à 50%. En effet, le portefeuille qui maximise l'espérance de gain parmi l'ensemble des allocations de variance égale au « *Risk Appetite* », se doit, non plus seulement d'asservir sa propre variabilité à l'objectif de risque visé, mais également de juguler au mieux les effets adverses de l'inflation du passif. La constitution d'une poche OATi demeurant le seul moyen d'y parvenir, et les OAT étant l'actif présentant le couple risque/rendement le plus proche, la substitution que nous constatons entre ces deux classes est somme-toute logique. Notons enfin que le renforcement de la part d'actifs risqués s'explique vraisemblablement par l'augmentation en valeur absolue de notre « *Risk Appetite* » (de 115M€ à 145M€), et que l'immobilier consomme intégralement cette ressource supplémentaire du fait d'une volatilité inférieure à celle des actions.

Comme attendu, l'impact de l'inflation du passif sur l'allocation stratégique se traduit essentiellement par la formation d'une poche OATi, cette dernière se constituant au détriment de la poche taux fixe. Notre optimum s'est donc bien emparé de la source de corrélation qui lui était offerte, et ce afin de suivre au mieux les évolutions de la contrainte de passif.

Ajoutons pour conclure, que conformément à nos anticipations, le portefeuille optimal voit une pondération des OATi voisine de l'élasticité de l'inflation du passif par rapport à l'inflation CPI (à savoir 40%, valeur à comparer à un bêta de 50%).

3.5 Impact du risque de base sur l'allocation stratégique

3.5.1 Problématique

Si nous avons bien marqué la différence existant entre inflation de passif et inflation CPI, nous avons jusqu'ici considéré que ces dernières se distinguaient uniquement par le biais d'un facteur multiplicatif bêta, facteur également appelé coefficient d'élasticité.

Bien que le rapport de proportionnalité rattachant l'inflation du passif automobile à l'inflation du panier de la ménagère soit correctement capturé par cette hypothèse, les divergences d'évolution pouvant exister entre ces deux paramètres ont au contraire été totalement ignorées.

En effet, ce postulat implique une corrélation totale entre les éléments modélisés, et fait indirectement des OATi un instrument de couverture parfait de l'inflation de passif. Ceci n'est évidemment pas le cas dans la réalité, d'où la nécessité d'incorporer une source de distorsion additionnelle entre nos deux chroniques.

Nous nous sommes proposés d'incorporer une erreur gaussienne au modèle initial et d'ajuster sa volatilité afin d'approcher au mieux une corrélation empirique voisine de 70%. La relation postulée se résume à l'expression suivante :

$$\pi_{\text{Passif}} = \beta \times \pi_{\text{CPI}} + \varepsilon \text{ où } \varepsilon \text{ suit une } N(0; \sigma_{\varepsilon}^2)$$

Les cibles de calibration sont quant à elles récapitulées dans le tableau ci-dessous :

Corrélation entre inflation du passif et inflation CPI		Volatilité de l'erreur ε			
		0%	1%	2%	3%
Elasticité relative β	25%	100%	87.90%	70.32%	56.57%
	50%	100%	87.90%	70.32%	56.57%
	75%	100%	87.90%	70.32%	56.57%

Nous avons ici fait figurer différentes valeurs du coefficient d'élasticité bêta afin de rappeler qu'il n'a bien naturellement aucune influence sur la corrélation des chroniques d'inflation. La volatilité de l'erreur que nous visons est comme nous le voyons de 2%.

La corrélation entre l'inflation du passif simulé et l'inflation CPI étant à présent de 70%, le cours des OATi diffère de l'exposition réelle et leur utilisation comme actif de couverture implique un risque d'inadéquation communément appelé « *risque de base* ». On est alors en droit de se demander si le portefeuille optimal s'en octroiera une part moins importante, leur capacité à immuniser le résultat étant affaiblie.

3.5.2 Résultats intuitifs

Ayant réitéré l'approche précédente, nous avons ressenti que bien que les OATi présentent un risque de base lorsque l'inflation de passif et l'inflation CPI ne sont que partiellement corrélées, la part de richesse qui leur est attribuée demeure malgré tout inchangée.

Ce phénomène qui pourrait sembler paradoxal à certains sera mis en évidence et quantifié dans le paragraphe suivant. Nous l'illustrons ici en nous replaçant sous les hypothèses simplificatrices précédentes, et en retravaillant l'écriture heuristique que nous avons proposée. La variance du résultat de l'entreprise pour l'exercice en cours s'écrit après incorporation de l'erreur gaussienne :

$$Var[R_{\text{Technique}} + R_{\text{Financier}}] = Var[\underbrace{P - [1 + (\beta \cdot \pi_{\text{CPI}} + \varepsilon)] \cdot S}_{\text{Résultat Technique}} + \underbrace{(1 - \alpha) \cdot P \cdot \mu_{\text{Portefeuille}} + \alpha \cdot P \cdot \pi_{\text{CPI}}}_{\text{Résultat Financier}}]$$

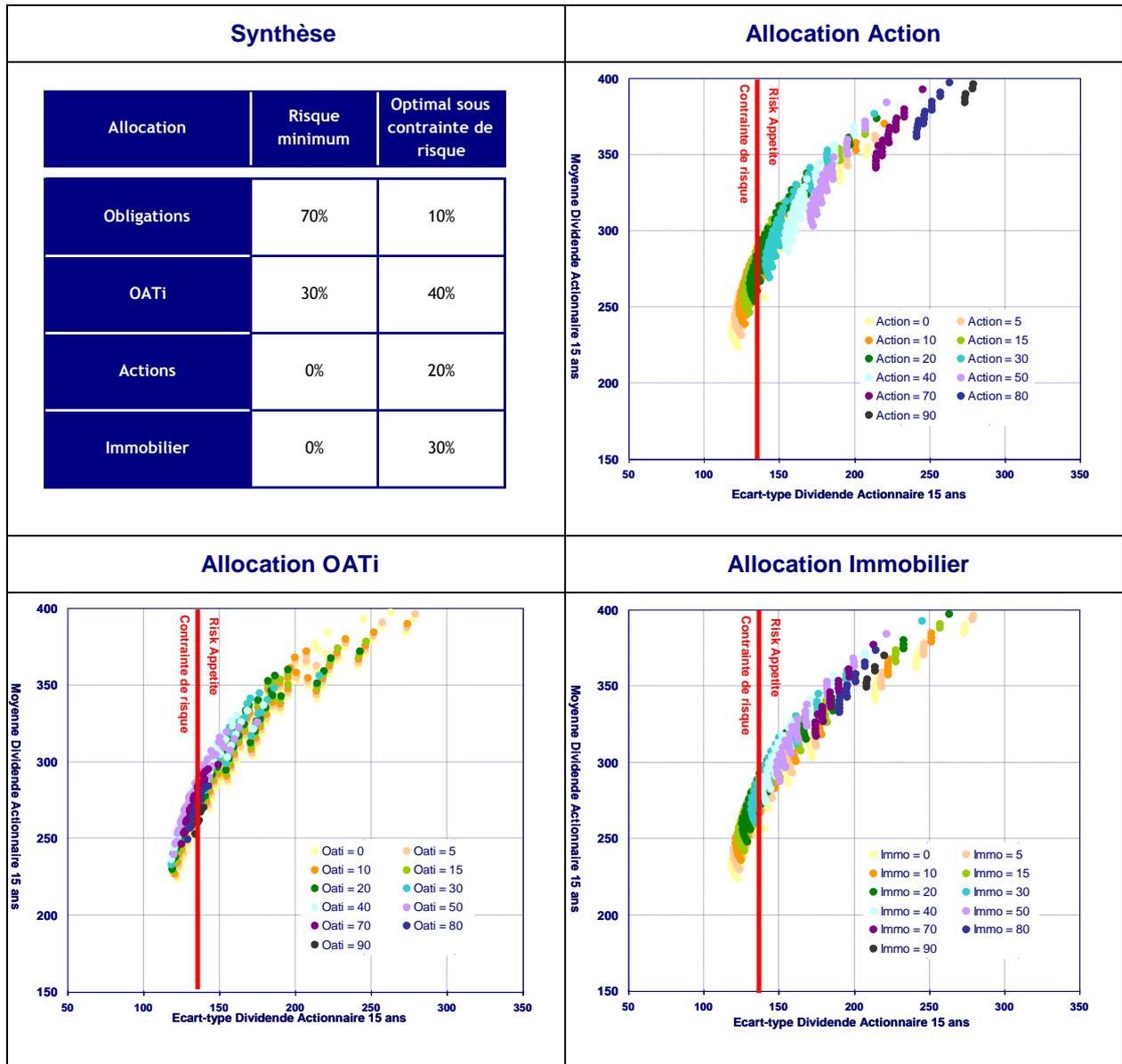
$$Var[R_{\text{Technique}} + R_{\text{Financier}}] = Var[\underbrace{(P - S)}_{\text{Risque Technique}} + \underbrace{(1 - \alpha) \cdot P \cdot \mu_{\text{Portefeuille}}}_{\text{Risque Financier}} + \underbrace{(\alpha \cdot P - \beta \cdot S) \cdot \pi_{\text{CPI}} - \varepsilon \cdot S}_{\text{Risque de mauvaise adéquation entre l'inflation de l'Actif et celle du Passif}}]$$

La seule différence avec l'expression préalable est l'apparition d'un terme supplémentaire dans le risque d'inadéquation des inflations. Ce terme apparaissant comme totalement indépendant des pondérations choisies, il ne peut être couvert mais sera au contraire subi quelque soit la stratégie adoptée.

On pressent alors que l'allocation optimale précédente demeurera inchangée, et qu'elle verra à nouveau une pondération de la poche OATi proche de l'élasticité de l'inflation du passif par rapport à l'inflation CPI.

3.5.3 Résultats quantifiés

L'ensemble des éléments nécessaires pour déterminer la composition des portefeuilles situés sur la frontière efficiente (avec l'écart-type comme mesure de risque) figurent dans les graphiques ci-dessous :



Comme attendu, la dégradation de la corrélation entre inflation du passif et inflation CPI par l'incorporation d'une erreur gaussienne n'a pas eu d'impact sur nos trois portefeuilles singuliers. Bien que les OATi soient devenues un actif de couverture imparfait, le risque de base résiduel ne peut être couvert par aucun des autres actifs à notre disposition ; L'allocation optimale précédente demeure en conséquence la meilleure alternative malgré une adéquation amoindrie.

Notons enfin que notre nuage a été translaté d'un risque additionnel de 1.5 M€, l'uniformité de cette déformation corroborant notre dernière remarque.

3.6 Impact du cadre Solvabilité II sur l'allocation stratégique

3.6.1 Problématique

En 2006, les autorités européennes ont amorcé la mise en place de la réforme prudentielle Solvabilité II. Cette directive impose entre autres que les assureurs disposent de fonds propres en quantité suffisante pour faire face à des événements imprévus pouvant affecter le respect de leurs engagements.

Si jusqu'à présent le montant de ces réserves dépendait uniquement du risque de passif, il dérivera désormais de la globalité des risques portés par chaque assureur. Ceci implique notamment la prise en compte du risque de marché, les investissements sur les classes d'actifs les plus risquées s'accompagnant d'une exigence en capitaux propres plus importante.

Cette nouvelle réglementation réduisant structurellement la prime de risque des instruments financiers les plus volatils, nous pouvons alors nous demander dans quelle mesure la part qui leur est attribuée dans l'allocation stratégique sera impactée.

Nous évaluerons ici le coût inhérent au « *Capital de Solvabilité Requis* » en prenant pour base la formule standard telle qu'elle figure dans la préversion du QIS5, et nous nous efforcerons d'analyser l'influence de cette nouvelle directive européenne sur l'allocation stratégique.

3.6.2 Eléments préliminaires

Pourquoi ce projet ?

La bonne adéquation de la marge de solvabilité et des risques qu'elle est sensée couvrir est un indicateur clef de la résilience d'une compagnie d'assurance en cas de pertes imprévues.

Cette marge vise à réduire le risque d'une perte potentielle des actionnaires en établissant un seuil d'alerte minimum, qui, sitôt dépassé, verra l'intervention du superviseur. Elle permet ainsi une plus grande confiance des investisseurs dans la stabilité financière des compagnies d'assurance.

Les différents acteurs de ce projet de directive sont :

- ❖ La Commission Européenne qui adopte les propositions formelles de la directive
- ❖ Le comité CEIOPS^(*) qui fournit des recommandations techniques
- ❖ L'industrie qui est consultée tout au long du processus de mise en place de la directive

CEIOPS^(*) : *Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors*

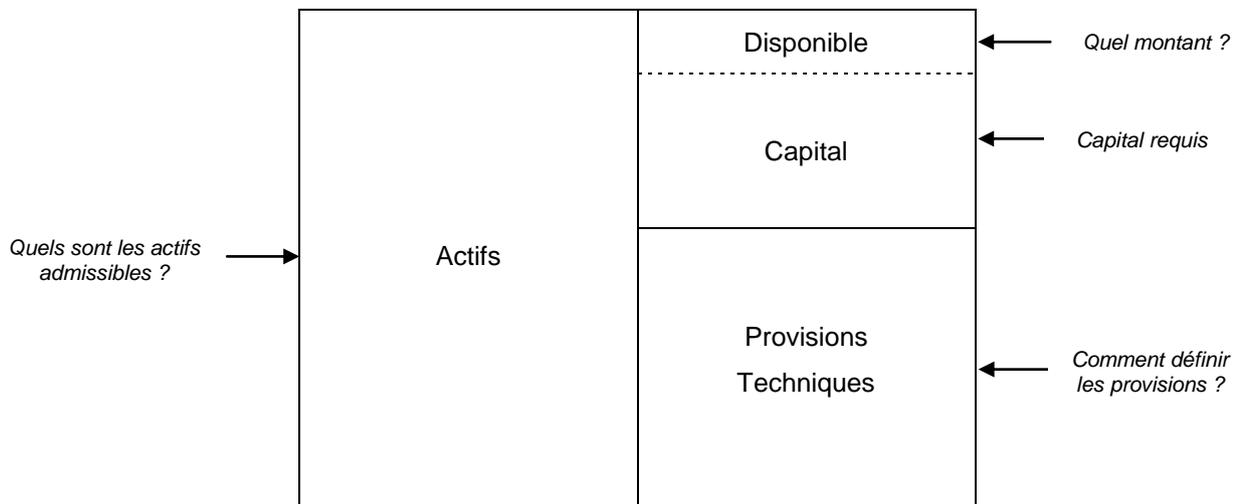
✚ Qu'est-ce que la solvabilité ?

Une compagnie d'assurance est insolvable lorsqu'elle n'a pas à sa disposition le capital nécessaire pour faire face à ses obligations.

A cause de l'inversion du cycle de production, un choc adverse sur la richesse nette d'une compagnie d'assurance peut résulter dans une faillite sans appel.

L'une des raisons d'être essentielle de la réglementation est de prévenir la faillite d'assureurs afin de ne pas laisser leurs assurés livrés à eux-mêmes. La solvabilité est historiquement le premier thème auquel se sont attaqués les régulateurs.

Solvabilité I, le cadre en place depuis les années soixante-dix, imposait des règles sur le capital requis et était dédié à la définition de la marge de solvabilité.



✚ Solvabilité I : Une réglementation qui a démontré son intérêt mais a trouvé ses limites

La directive Solvabilité I repose sur trois piliers que l'on peut résumer ainsi :

- ❖ Les provisions doivent être prudentes
- ❖ Les actifs doivent être résilients, liquides, et profitables
- ❖ Au-delà des réserves techniques, les assureurs doivent disposer d'un montant minimum appelé « *Marge de Solvabilité Règlementaire* » (MSR) et fonction du niveau de leurs engagements

Au-delà de sa simplicité d'implémentation, Solvabilité I était une exigence forte qui a démontré sa robustesse face aux chocs importants (tempêtes, crises financières, etc...).

De nombreuses critiques ont néanmoins été formulées à son égard :

- ❖ L'exposition réelle n'est pas prise en compte
- ❖ Il n'y a pas de réelle segmentation des risques
- ❖ Elle n'incite pas à une culture de gestion des risques exceptée pour la réassurance
- ❖ Elle ne plaide pas en faveur d'une harmonisation des pratiques au niveau européen

La directive européenne Solvabilité II tend à moderniser et à harmoniser cette première directive.

Solvabilité II : Contexte du projet

Le projet Solvabilité II a pour objectifs généraux :

- ❖ De fournir aux autorités de contrôle les outils nécessaires à une bonne appréhension de la solvabilité d'une compagnie d'assurance
- ❖ De couvrir les aspects qualitatifs influant sur l'exposition au risque de la compagnie
- ❖ D'inciter les assureurs à mieux connaître et gérer leurs risques

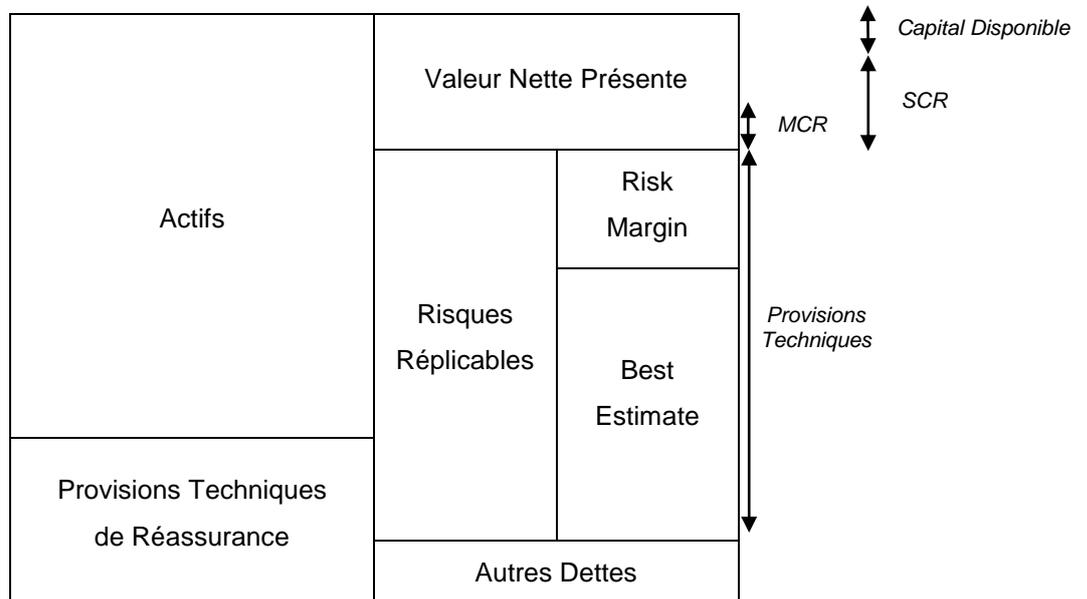
Les propositions émanant des groupes de travail sont discutées entre la Commission Européenne et le comité CEIOPS. Des « *Etudes Quantitatives d'Impact* » (QIS) ont été menées pour valider les méthodes d'évaluation proposées : QIS 1, QIS 2, QIS 3, QIS 4, et plus récemment QIS 5.

Solvabilité II repose sur trois piliers, chaque pilier ayant un objectif qui lui est propre :

- ❖ Le premier pilier a pour objectif de définir des seuils réglementaires quantitatifs, aussi bien pour les provisions techniques que pour les fonds propres. Deux niveaux de fonds propres sont définis, le « *Capital Minimum Requis* » (MCR), et le « *Capital de Solvabilité Requis* » (SCR).
- ❖ Le deuxième pilier a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne, et de définir comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance.
- ❖ Le troisième pilier a pour objectif de favoriser la transparence, et vise à l'harmonisation des données communiquées aux assurés et aux marchés financiers.

La proposition a été formulée de manière à s'adapter aux assureurs et réassureurs quelque soit leur taille et leur degré de sophistication. Elle prévoit une palette de différentes méthodes permettant d'atteindre les objectifs fixés, adaptées à la nature, la taille et la complexité de chaque compagnie.

✚ Solvabilité II : Premier pilier, exigences quantitatives



- **Provisions Techniques**

La valorisation des provisions techniques est un thème de discussion important. La démarche consiste à mesurer le risque et à choisir le montant de réserves relatif à un niveau de risque considéré comme acceptable.

Si aucune stratégie de couverture ne peut être mise en œuvre, les provisions techniques dans un cadre Solvabilité II se décomposent en un « *Best Estimate* » actualisé, auquel vient s'ajouter une « *Risk Margin* » :

- ❖ Le « *Best Estimate* » est égal à la valeur future probable des passifs, actualisée à un taux d'obligation d'état AAA de durée appropriée.
- ❖ La « *Risk Margin* » est calculée selon la méthode du coût du capital, et correspond à la prime à ajouter au « *Best Estimate* » afin qu'un acquéreur accepte de prendre possession des passifs. Elle peut encore s'interpréter comme la rémunération attendue par les actionnaires en contrepartie du capital immobilisé.

La « *Risk Margin* » dérive du coût du capital qui est couramment de 6% par an. Elle est égale au coût du capital réglementaire nécessaire pour supporter les activités d'assurance, à savoir le coût du SCR dans le cas de risques non-réplicables :

$$\text{Risk Margin} = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{6\% \times \text{SCR}_t}{(1 + r_t)^t}$$

- **Proxys**

D'un point de vue actuariel, il est très difficile de calculer le SCR en run-off année après année. Il existe des méthodes simplifiées que l'on peut utiliser en l'absence de données suffisantes ou d'études actuarielles.

La 23^{ème} consultation liste huit proxys mis en place par des experts européens et décrit les conditions nécessaires à leur application.

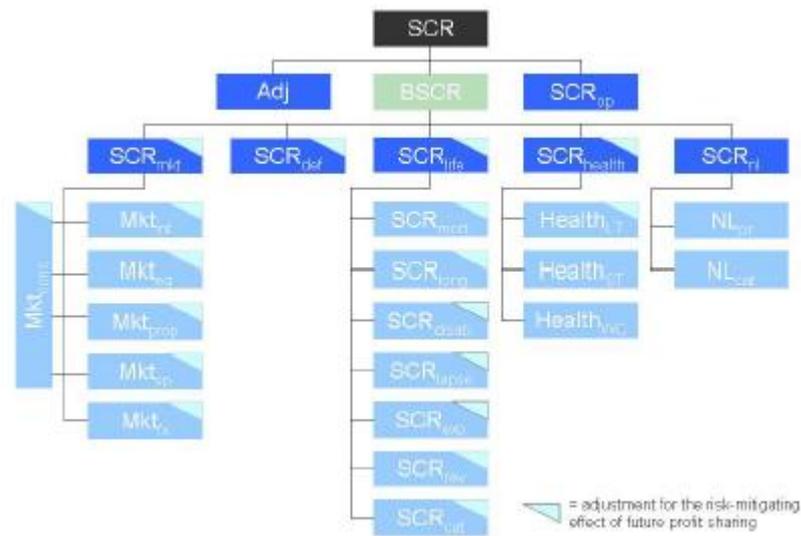
- « **Capital de Solvabilité Requis** » (SCR)

Contrairement aux provisions techniques, le rôle du « *Capital de Solvabilité Requis* » (SCR) est d'absorber les chocs inattendus survenus à la suite d'un évènement exceptionnel.

Le SCR est défini comme le coussin permettant d'assurer que la probabilité de ruine à horizon un an ne dépasse pas 0.5%, ce qui équivaut à un évènement bicentenaire.

Ce capital doit être calculé sur la base du profil de risque de la compagnie, en prenant en compte des éventuelles techniques de mitigation du risque, et des effets de diversification.

Il peut être déterminé selon une formule standard établie par le comité CEIOPS, ou bien produit à l'aide d'un modèle interne. La formule standard s'organise selon une approche basée sur les facteurs de risque. Le capital requis varie en fonction de la nature des actifs détenus. Ainsi chacun des principaux risques est associé à un besoin en capital. Les différents modules de calcul du SCR sont présentés dans le diagramme ci-dessous :



Le SCR se calcule alors de la manière suivante :

$$SCR = SCR_{Basique} - Ajustements + SCR_{Opérationnel}$$

Détermination de la $SCR_{non\ vie}$

Le risque de souscription est le risque d'assurance spécifique qui résulte des contrats d'assurance. Il a trait aux incertitudes relatives aux résultats des souscriptions de l'assureur. Ces incertitudes concernent :

- ❖ Le montant et le moment des règlements des sinistres liés aux passifs existants
- ❖ Le volume d'affaires qui sera souscrit et les taux de prime auxquels il sera souscrit
- ❖ Les taux de prime qui seraient nécessaires pour couvrir les passifs engendrés par les affaires souscrites

Le niveau de capital requis au titre des risques de souscription non-vie s'obtient en déterminant :

- ❖ NL_{pr} Le chargement en capital au titre du risque de tarification et de provisionnement
- ❖ NL_{cat} Le chargement en capital au titre du risque catastrophes

Le premier module traite ensemble les deux principales sources de risque de souscription :

- ❖ Le risque de tarification qui concerne les futurs sinistres survenant pendant et après la période jusqu'à l'horizon d'évaluation de la solvabilité. Le risque est que les dépenses et le volume de pertes (encourues et non encourues) au titre de ces sinistres (comprenant les montants payés sur la période et les provisions passées à la clôture) soient supérieurs aux primes perçues (ou, si les bénéfices ou pertes de l'activité sont prises en compte ailleurs, que la rentabilité soit inférieure aux prévisions). Le risque de tarification existe dès l'émission de la police, avant la survenance de tout événement assuré. Il découle également des incertitudes antérieures à l'émission des polices sur l'horizon temporel. Ces incertitudes concernent le taux de prime qui sera appliqué, les conditions générales et particulières des polices et la répartition et le volume précis des affaires souscrites.
- ❖ Le risque de provisionnement découle de deux sources, d'une part du niveau absolu des provisions pour sinistres qui peut-être mésestimé, et d'autre part de la variabilité des sinistres à venir.

Le second module traite des risques de catastrophe qui résultent d'événements extrêmes ou irréguliers insuffisamment couverts par les chargements au titre des risques de tarification et de provisionnement. Pour éviter un double décompte, le calibrage des scénarios et des pertes de marché doit tenir compte des parties du risque de catastrophe déjà couvertes par le risque de tarification et de provisionnement.

Détermination de la $SCR_{marché}$

Le niveau de capital requis au titre des risques de marché s'obtient en déterminant :

- ❖ SCR_{int} : Le chargement en capital au titre du risque de taux d'intérêt
- ❖ SCR_{eq} : Le chargement en capital au titre du risque sur actions
- ❖ SCR_{immo} : Le chargement en capital au titre du risque sur l'immobilier
- ❖ SCR_{sp} : Le chargement en capital au titre du risque de spread
- ❖ SCR_{conc} : Le chargement en capital au titre de la concentration des risques
- ❖ SCR_{ch} : Le chargement en capital au titre du risque de change

Que l'on agrège ensuite à l'aide de la matrice de corrélation suivante :

Corrélations	Risque de Taux	Risque Actions	Risque Immobilier	Risque de Spread	Risque FX	Risque de Concentration
Risque de Taux	100%	-	-	-	-	-
Risque Actions	50%	100%	-	-	-	-
Risque Immobilier	50%	75%	100%	-	-	-
Risque de Spread	50%	75%	50%	100%	-	-
Risque FX	25%	25%	25%	25%	100%	-
Risque de Concentration	0%	0%	0%	0%	0%	100%

On obtient alors que :

$$SCR_{marché} = \sqrt{\sum_{i \times j} Correlation(SCR_i; SCR_j) \times SCR_i \times SCR_j}$$

Dans notre étude, nous déterminerons une $SCR_{marché}$ simplifiée en nous limitant à la SCR_{taux} , la $SCR_{actions}$ et la SCR_{immo} .

Détermination de la SCR_{taux}

Un risque de taux d'intérêt existe pour tous les actifs et passifs dont la valeur d'actif nette est sensible aux variations de la structure par terme des taux d'intérêt ou à la volatilité des taux. Les actifs et passifs sensibles aux variations des taux d'intérêt sont les investissements en instruments à taux fixe, les passifs d'assurance ainsi que les instruments financiers (capitaux empruntés) et les dérivés de taux d'intérêt. Les flux de passifs futurs seront sensibles à une modification du taux d'actualisation de ces flux.

Selon la dernière « *Etude Quantitative d'Impact* » (QIS5), les chocs à appliquer à la courbe des taux sont fonction de la maturité :

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Choc baissier	-75%	-65%	-56%	-50%	-46%	-42%	-39%	-36%	-33%	-31%	-30%	-29%	-28%	-28%	-27%
Choc haussier	70%	64%	59%	55%	52%	49%	47%	44%	42%	39%	37%	35%	34%	33%	31%

Détermination de la $SCR_{actions}$

Le risque sur actions résulte du niveau ou de la volatilité de la valeur de marché des actions. L'exposition au risque sur actions concerne tous les actifs et passifs dont la valeur est sensible aux variations des cours de bourse.

Ainsi pour calculer la $SCR_{actions}$, on applique un choc de 39% sur la valeur nette de la partie action du portefeuille.

Détermination de la SCR_{immo}

Le risque sur actifs immobiliers résulte du niveau ou de la volatilité des prix de l'immobilier.

Ainsi pour calculer la SCR_{immo} , on applique un choc de 25% sur la valeur nette de la poche immobilier du portefeuille.

- **« Capital Minimum Requis » (MCR)**

Le « *Capital Minimum Requis* » (MCR) est le niveau d'alerte en dessous duquel les ressources financières ne doivent en aucun cas descendre.

Si le montant des fonds éligibles vient à tomber en dessous de ce niveau plancher et que la compagnie d'assurance n'est pas en mesure de palier à ce problème rapidement, son agrément peut lui être retiré.

Le comité CEIOPS suggère que ce seuil soit déterminé selon une formule simple basée sur des éléments pouvant être audités :

$$MCR = \text{Max}[\text{Min}[\text{Max}[MCR_{\text{linear}}; 20\% \times SCR]; 50\% \times SCR]; AMCR]$$

- **Modèle interne**

Les contraintes et hypothèses générales du modèle interne sont les suivantes :

- ❖ Mesure de risque : Value at Risk 99.5%
- ❖ Horizon : 1 an
- ❖ Dépendance : Risques agrégés

- **Solvabilité II : Deuxième pilier, exigences qualitatives**

L'identification des compagnies les plus risquées est également l'un des objectifs des autorités de supervision. Le régulateur peut imposer à un assureur de détenir un capital supérieur au SCR standard et/ou de réduire son exposition s'il le juge opportun. Le pilier II a pour objectif de fixer des normes qualitatives de suivi des risques en interne, et de définir comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs de surveillance.

- **Contrôle et gouvernance interne**

L'activité doit être gérée de manière saine et prudente. Les exigences suivantes ont été formulées :

- ❖ Répartition mesurée des responsabilités et des pouvoirs, le directoire devant notamment démontrer que l'autorité a été proprement déléguée au sein de l'ensemble de l'organisation, et qu'elle est clairement documentée.
- ❖ Efficacité des fonctions actuarielles, de risque, et d'audit interne, les rôles clefs devant être assurés sans faille.
- ❖ Existence de systèmes d'information et de contrôle de la structure, ces derniers devant être dûment alimentés et calibrés.

La directive Solvabilité II met également l'accent sur l'impérative nécessité de préserver l'indépendance totale du département des risques ainsi que son rattachement direct au comité exécutif.

- **Contrôle externe**

Le superviseur a la charge du contrôle externe et fait appliquer les règles définies par la directive Solvabilité II ainsi que les normes préconisées par le comité CEIOPS. Il œuvre à l'harmonisation des procédures et analyse les stress-tests réalisés par les compagnies à sa demande.

Le superviseur peut également imposer la détention d'une marge de solvabilité supplémentaire s'il juge que les risques ont été mal estimés par l'assureur, et plus précisément en cas :

- ❖ D'insuffisance quantitative de la formule standard
- ❖ D'insuffisance quantitative du modèle interne
- ❖ D'insuffisance qualitative de gouvernance

Le modèle interne doit décrire fidèlement la réalité de l'entreprise, ce à quoi doit veiller le superviseur. Dans le cas contraire, il s'assurera de l'implémentation des ajustements nécessaires.

Notons enfin que l'existence d'une procédure de validation standardisée des modèles internes assure une concurrence équitable entre les différents assureurs.

Solvabilité II : Troisième pilier, exigences de transparence

Le dernier pilier concerne l'information publique qui doit venir renforcer la discipline de marché.

L'objectif est notamment de progresser vers une coordination et une harmonisation des informations diffusées dans les États membres à différents niveaux (assurés, marchés ou institutionnels, autorités de contrôle), telles celles incluses dans le dossier annuel réglementaire.

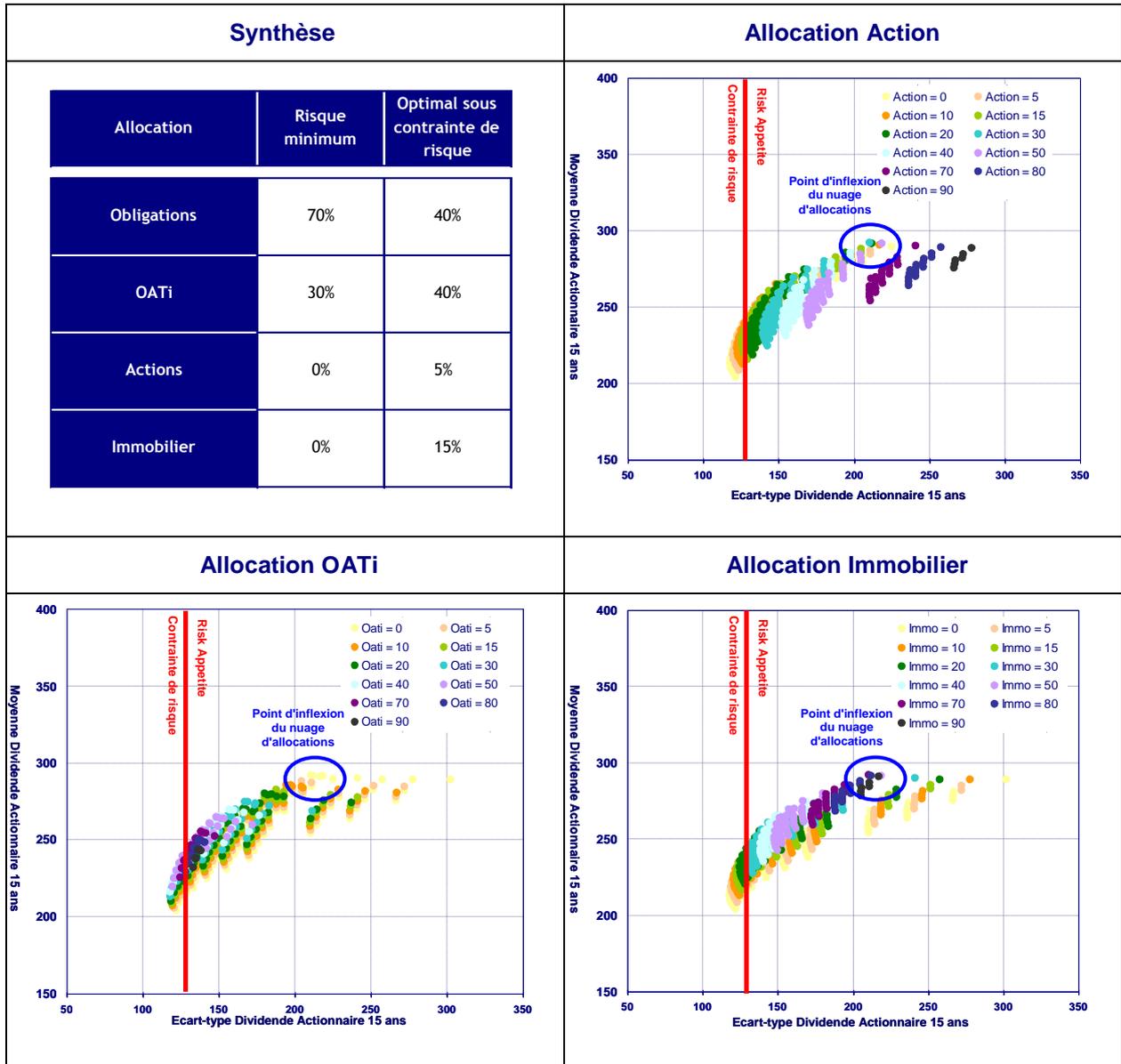
3.6.3 Résultats intuités

Les actifs risqués étant pénalisés dans le référentiel Solvabilité II, on peut vraisemblablement s'attendre à ce que notre nuage de point s'infléchisse pour les allocations comportant une part importante d'actions et d'immobilier.

Une baisse des rendements espérés pour une même prise de risque est également à prévoir, ainsi qu'une augmentation de la part d'obligations d'état dans l'allocation stratégique ; La nouvelle réglementation requiert en effet le même niveau de capital pour une obligation d'état et pour une obligation indexée sur l'inflation, or cette dernière présente un couple risque/rendement moins attractif.

3.6.4 Résultats quantifiés

L'ensemble des éléments nécessaires pour déterminer la composition des portefeuilles situés sur la frontière efficiente (avec l'écart-type comme mesure de risque) figurent dans les graphiques ci-dessous :



Intéressons-nous à nouveau à nos trois portefeuilles singuliers et analysons l'impact du passage de Solvabilité I à la nouvelle réglementation imposée par le cadre Solvabilité II :

❖ *Le portefeuille de risque minimum*

La composition du portefeuille qui minimise la variabilité du résultat global ne voit pas l'incidence du changement de réglementation. En effet, il était déjà intégralement constitué d'obligations d'état et d'OATi sous Solvabilité I, or ces deux classes d'actifs constituent les instruments les moins coûteux en capitaux propres sous la nouvelle directive et reçoivent un traitement similaire en tous points ; Le statu quo que nous observons est donc des plus naturels. On retiendra enfin que le coût de transition réglementaire induit par Solvabilité II est de l'ordre de 30M€.

❖ *Le portefeuille de rendement maximum*

Sous Solvabilité II, l'allocation qui maximise l'espérance de rendement n'est plus celle qui maximise la variabilité du résultat. En effet, bien que le portefeuille de rendement maximum soit toujours constitué intégralement d'actifs risqués, sa distribution entre actions et immobilier a fondamentalement changée du fait d'une inflexion du nuage de points. Les actions étant la poche la plus fortement lestée, leur ratio de sharpe net est littéralement renversé ; Elles voient leur part s'effondrer de 100% à 30%, la richesse excédante étant intégralement transférée vers l'immobilier. Notons pour finir une diminution de l'espérance de rendement de l'ordre de 110 M€, diminution partiellement due à un coût de transition réglementaire évalué à environ 90M€.

❖ *Le portefeuille optimal sous contrainte de risque*

On observe sous Solvabilité II un transfert de 30% de la richesse de la poche risquée vers la poche obligataire, 15% provenant des actions (réduction de 20% à 5%), et 15% de l'immobilier (réduction de 30% à 15%). En effet, les obligations d'état disposant initialement d'un couple risque/rendement plus attrayant que celui des OATi, et le traitement réglementaire réservé à ces deux classes d'actifs étant équitable, les instruments à taux fixe demeurent les plus attractifs dans notre nouvel environnement. La permutation observée est en conséquence rationnelle, tant dans sa nature que dans ses proportions puisqu'elle puise majoritairement dans la poche la plus désavantagée.

Comme attendu, la nouvelle réglementation sanctionnant les actifs de volatilité élevée par un coût en capital prohibitif, les allocations les plus chargées en actions et en immobilier sont sorties de la frontière efficiente et ont laissé place à des portefeuilles plus conservateurs. Nous avons également noté que conformément aux chocs appliqués, l'immobilier était relativement moins pénalisé que les actions, s'y substituant par voie de conséquence au sein des différents portefeuilles efficaces.

4 Conclusion

L'étude que nous avons effectuée abonde dans le sens des travaux menés jusqu'à présent. Elle a vu le délaissement de la poche taux fixe au profit de la poche OATi en présence d'inflation, a montré qu'elle demeurait la meilleure alternative malgré un risque de base inhérent, et a témoigné de la pénalisation des actifs les plus risqués sous la nouvelle directive Solvabilité II.

Nous proposons plusieurs pistes pour poursuivre cette étude. En premier lieu, il serait judicieux d'explorer des branches présentant des déroulements de paiement plus long (comme en construction par exemple), et d'évaluer l'impact de ce paramètre sur la duration optimale à l'actif.

Nous pourrions aussi procéder à l'intégration de sinistres graves ; En effet, la probabilité de liquider des actifs pour faire face à ce type de sinistres étant très faible, mais l'amplitude de la charge de ceux-ci pouvant être très élevée, nous capturerions ici une nouvelle forme de risque de liquidité qui ne peut être ignorée.

Enfin, la poursuite de cette étude irait dans la direction d'un plus grand nombre d'allocations testées et d'un élargissement de l'univers d'investissement.

5 Bibliographie

Options, Futures, and Other Derivatives

HULL John – Editions Prentice Hall

Paul Wilmott on Quantitative Finance

WILMOTT Paul – Editions Wiley

Practical Risk Theory for Actuaries

DAYKIN Chris, PENTIKAINEN Teivo, PESONEN Martti – Editions Chapman & Hall

La gestion Actif-Passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel

PIERMAY Michel, MATHOULIN Pierre, COHEN Arnaud – Editions Economica

Assurance IARD

LUZI Mario – Editions Economica

Etude sur la situation Actif-Passif d'une compagnie d'assurance non-vie

POUGET, SIMOEN – Mémoire d'Actuariat

Allocation stratégique optimale du fonds de prévoyance collective d'Axa France

RAMBAUD – Mémoire d'Actuariat

Spécifications techniques du QIS5

CEIOPS – Commission Européenne