Université Claude Bernard – Lyon 1

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES

Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le : 04/01/2011

Par : M. Julien REVELEN

Titre: « Replicating Portfolio » et capital économique en assurance vie

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Membre du jury de l'Institut des Actuaires

Mme Catherine PIGEON

Membres du jury I.S.F.A.

M. Jean Claude AUGROS
M. Alexis BIENVENÜE
M. Areski COUSIN
Mme Diana DOROBANTU
Mme Anne EYRAUD-LOISEL
M. Nicolas LEBOISNE
M. Stéphane LOISEL
Mlle Esterina MASIELLO
Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS
M. Frédéric PLANCHET
M. François QUITTARD-PINON
Mme Béatrice REY-FOURNIER
M. Christian-Yann ROBERT
M. Didier RULLIERE

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Michèle SONNIER

Entreprise :

Swisslife

Directeur de mémoire en entreprise :

Vladislav Grigorov

Invité :

Autorisation de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé du mémoire :

Mots-clés :

Replicating Portfolio ; capital économique ; MCEV ; Solvabilité II ; modèle interne

Les nouvelles directives Solvabilité II ont pour but de définir le capital économique nécessaire à la solvabilité des compagnies d'assurances. Pour ce faire, la gestion et la quantification des risques par des modèles est alors un élément clé. Une approche possible consiste en l'utilisation des modèles stochastiques de type modèle interne.

Dans ce contexte de simulations, la détermination du capital économique s'apparente au calcul d'une mesure de risque à un seuil et un horizon donné. Ce calcul pose alors un problème d'ordre technique et opérationnel puisqu'il s'agit d'utiliser des « nested simulations » (simulations dans les simulations).

La méthode dite « Replicating Portfolio » a pour but de résoudre cette problématique en ayant recours à un portefeuille d'actifs valorisables par formules fermées.

Ce mémoire présentera le cadre théorique et les applications de la méthode du « Replicating Portfolio ». La faisabilité, les conditions de succès et les limites de l'approche seront discutées. L'analyse se basera sur des exemples concrets de produits épargne type « Euro ».

Abstract :

Keywords:

Replicating Portfolio ; solvency capital requirement ; MCEV ; Solvency II ; internal model

The new guidelines of Solvency II define the solvency capital requirement necessary for the solvency of insurance companies. Risk-Management is one of the key points to manage and quantify risks. Stochastic models constitute one of the approaches to do that.
In this simulation context the determination of the solvency capital requirement can be viewed as a problem of calculation rsik measure with a given horizon and threshold. This calculation leads to a technical and practical issue called "Nested simulations".
The "Replicating Portfolio" technique aims at finding a portfolio which could be priced with closed formula.
This present document will introduce the "Replicating Portfolio" approach. The feasibility, the applications conditions and the limits will be discussed. The analysis will be based on practical examples of savings products

Remerciements

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité de mon travail de fin d'études à l'école Centrale Lyon / ISFA. Ainsi, je tiens tout d'abord à remercier Vladislav Grigorov responsable du service ALM Swisslife France ainsi que Quentin Phung chargé d'études ALM qui ont été mes tuteurs lors de mon stage de fin d'études. En m'accordant de l'autonomie ils m'ont permis d'apporter et développer une analyse à la méthode « des Replicating Portoflio ».

Je remercie aussi Anne Larpin directrice financière Swisslife France et Stephane Camon directeur des risques qui ont prêté une oreille attentive aux différentes conclusions de mon travail.

Je remercie Fatima El Mouquaddem et Christophe Gramet membres du service ALM.

Enfin, je remercie Francois Chaumel responsable du service consolidation de la valeur Generali France qui a été mon tuteur lors de mon apprentissage et m'a permis d'approfondir mes connaissances dans les modèles MCEV. J'ai ainsi eu l'occasion d'enrichir mon mémoire sur la formalisation de la problématique dans les référentiels MCEV/Solvabilité II.

Je remercie Chengal Aida et Yalap Madeleine membres du service consolidation de la valeur.

Tables des matières

Introduction

Qu'il s'agisse des futures dispositions réglementaires (Solvabilité II), de communications financières (EEV/MCEV) ou comptables (IFRS), l'objectif de ces différents réfèrentiels est d'identifier les risques et de les analyser le plus finement possible.

Cependant, si IFRS et MCEV relèvent de la communication financière, Solvabilité II n'est pas destinée à l'information des marchés financiers mais à la détermination d'exigences de solvabilité auxquelles doit répondre l'assureur. Il n'en reste pas moins que ces réfèrentiels s'attachent à valoriser les éléments du bilan de la compagnie selon une vision économique en usant des meilleures hypothèses possibles (au sens « Best Estimate ») lors des projections.

Dans l'actuel contexte français, ce type de référentiel se distingue du cadre réglementaire actuel. Il propose par le biais du Code des assurances les hypothèses, dites actuarielles, permettant une évaluation volontairement prudente des engagements. Cela conduit à prendre en compte des marges implicites de prudence dans la mesure où elles résultent d'hypothèses prudentes.

Afin de proposer une prise en compte explicite de ces marges, les référentiels économiques proposent de mesurer explicitement le risque et de fixer la prudence en référence à ce risque. Pour ce faire, les assureurs doivent utiliser la meilleure information possible pour évaluer leurs engagements et proposer une valorisation cohérente avec le marché, c'est-à-dire selon une vision « Market Consistent ». Les outils de projections stochastiques développés pour des valorisations de type EEV/MCEV constituent un socle pour le calcul des futures exigences réglementaires dans le cadre Solvabilité II.

Sous l'impulsion de la Commision Européenne, le comité européen des contrôleurs d'assurance et de pensions professionnelles (CEIOPS) développe ce futur référentiel, l'objectif principal étant d'adapter et d'harmoniser les exigences de fonds propres des compagnies d'assurances avec les risques que celles-ci encourent dans leur activité. Dans ce calcul d'exigence de solvabilité, le cadre Solvabilité II propose soit le recours à une formule standard soit le calcul de cette marge à l'aide d'un modèle interne. De nombreux assureurs dont la taille est importante ont choisi de développer un modèle interne pour évaluer au mieux leurs risques.

En s'inspirant des développements MCEV, le calcul de la marge de solvabilité se base sur la détermination de la distribution empirique de la richesse de la compagnie à un horizon donné. L'approche Solvabilité II propose la VaR à 99,5% comme mesure de risque ainsi qu'un horizon fixé à un an. Dans ce contexte de simulations stochastiques, ce calcul revient à effectuer des « simulations dans les simulations » ce qui pose un problème d'ordre pratique concernant la puissance de calcul nécessaire. La méthode dite du « Replicating Portfolio » permet alors de résoudre en théorie ce problème.

Dans le cadre de ce mémoire, nous présenterons dans une première partie la problématique du calcul du capital économique à horizon 1 an dans un contexte de simulations. Tout d'abord, nous définirons succinctement la notion de bilan ainsi que les provisions comptables réglementaires. Nous nous attarderons ensuite sur les aspects théoriques des référentiels d'évaluation TEV/MCEV étant donné que le développement du modèle « Replicating Portfolio » a été réalisé sur un outil de projection type MCEV et que ces référentiels peuvent constituer un point de départ pour la compréhension des modèles de projections stochastiques. Après avoir présenté le bilan économique dans le cadre Solvabilité II, nous formaliserons le problème du calcul du capital de solvabilité requis (SCR) et introduirons la méthode « Replicating Portfolio ». Enfin, nous présenterons les caractéristiques générales du modèle de projection utilisé dans le cadre de la modélisation d'un portefeuille de contrat épargne « Euro » afin de mieux appréhender par la suite l'illustration pratique de la méthode « Replicating Portfolio ».

En deuxième partie, nous nous attacherons à définir ce que l'on entend par « Replicating Portfolio », en effet cette notion n'est pas équivalente à la notion de portefeuille de couverture couramment utilisée par la théorie financière. Nous présenterons ainsi deux métriques de réplication qui peuvent permettre de définir un « Replicating Portfolio ». Il s'en suivra une discussion sur l'utilisation de ces métriques dans le calcul du capital économique.

Nous proposerons une application de la méthode dans le cadre de la troisième partie. Un exemple « fictif » de contrat type épargne « Euro » sera d'abord développé afin de comprendre la sensibilité de la méthode aux divers paramètres. Nous illustrerons ensuite cette méthode sur un portefeuille de contrats type « Euros » dans le cadre des normes comptables.

Nous conclurons ce mémoire par une critique de la méthode « Replicating Portfolio ».

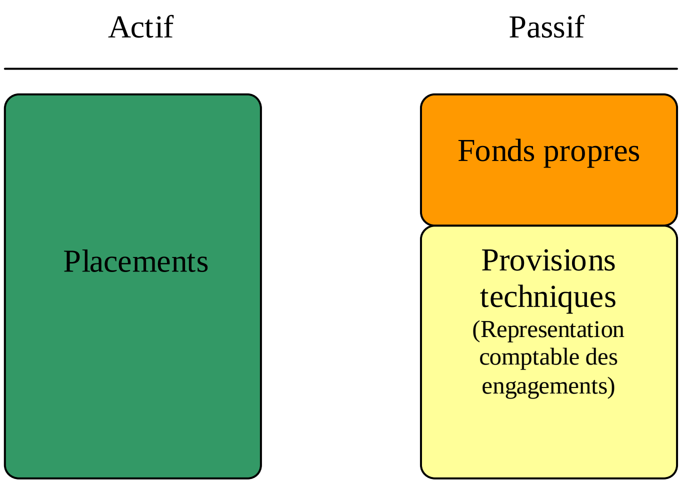
1 Le capital économique dans le cadre d'un modèle interne : l'approche des « Réplication Portfolio »

1.1 *Bilan économique VS Bilan comptable d'assurance vie*

1.1.1 Qu'est ce qu'un bilan (comptable ou économique)

Le bilan d'une société d'assurance est une vision patrimoniale de la situation financière de la compagnie et l'image que l'on perçoit dépend du point de vue que l'on adopte. C'est ce point clé qu'il faut garder à l'esprit lorsque l'on compare la valorisation comptable à la valorisation économique de la compagnie. Ces deux visions sont complémentaires et permettent d'avoir deux points de vue différents. Bien que la méthode des Replicating Portfolio intervienne exclusivement dans une optique de valorisation économique, il est essentiel de comprendre la vision comptable puisque la valorisation économique fait intervenir des éléments de cette dernière.

Commençons d'abord par expliciter la notion de bilan comptable, pour cela nous allons utiliser la vision schématique suivante :



En première lecture, ce bilan fait appel à deux notions qui sont l'actif et le passif.

Définition :

- L'actif (Asset) d'une compagnie d'assurance représente donc l'ensemble des biens (placements) qu'elle possède.

- Le passif (Liability) constitue l'ensemble des engagements contractés à l'égard des assurés et les fonds propres apportés par les actionnaires.

Il est à noter qu'en français le mot passif est ambigu puisqu'il renvoie à la notion d'engagement mais aussi de valeur actuelle de ces engagements que l'on appelle aussi parfois valeur actuelle du passif. Le mot Liability en anglais renvoie explicitement à cette double notion.

Ce schéma permet de définir deux éléments constitutifs du passif :

Les provisions techniques :

Les provisions techniques sont destinées à permettre le règlement intégral des engagements pris envers les assurés ou les bénéficiaires des contrats. Elles doivent donc être suffisantes et représentent au bilan de la compagnie d'assurance *une évaluation ou une estimation* des engagements de la compagnie, c'est-à-dire « la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et l'assuré ». Cette évaluation doit être faite à partir d'hypothèses *prudentes* définies par le Code des assurances.

Fonds propres :

Les fonds propres représentent la richesse intrinsèque de l'entreprise, c'est-à-dire la somme qui reviendrait aux actionnaires en cas de dissolution de l'entreprise.

La notion de provision technique est liée à la vision comptable, le calcul de ces provisions faisant appel au calcul actuariel. D'un point de vue quantitatif, les provisions techniques représentent la plus grande partie du passif du bilan tandis que les fonds propres n'en représentent qu'une faible part.

A présent, nous pouvons distinguer les deux visions bilan comptable / bilan économique.

- Le bilan comptable repose sur une évaluation comptable qui respecte les principes de coût historique dans la majorité des cas, de la continuité d'exploitation et de la prudence comptable.

- Le bilan économique renvoie à la valorisation économique. Elle peut être dite « en valeur de marché » et renvoie alors au prix qu'un tiers serait prêt à payer pour acquérir l'entreprise.

Nous ne détaillerons pas plus la valorisation du point de vue comptable d'une compagnie, mais nous insisterons sur le fait que ces règles comptables sont utilisées dans la valorisation économique par les modèles type Market Consistent Embedded Value (MCEV) puisque par exemple, certains cash-flows s'appuient sur la notion comptable de participation aux bénéfices (PB). Il est donc essentiel de préciser quelques points clés concernant la comptabilité des actifs ainsi que les principales provisions.

1.1.2 Les principales règles comptables françaises (French GAAP)

Étudions d'abord comment sont comptabilisés les actifs financiers. Pour cela la comptabilité distingue les titres amortissables et les titres non amortissables. Cela nous amènera ensuite à introduire les principales provisions « financières » utilisées dans le modèle MCEV.

Les titres amortissables :

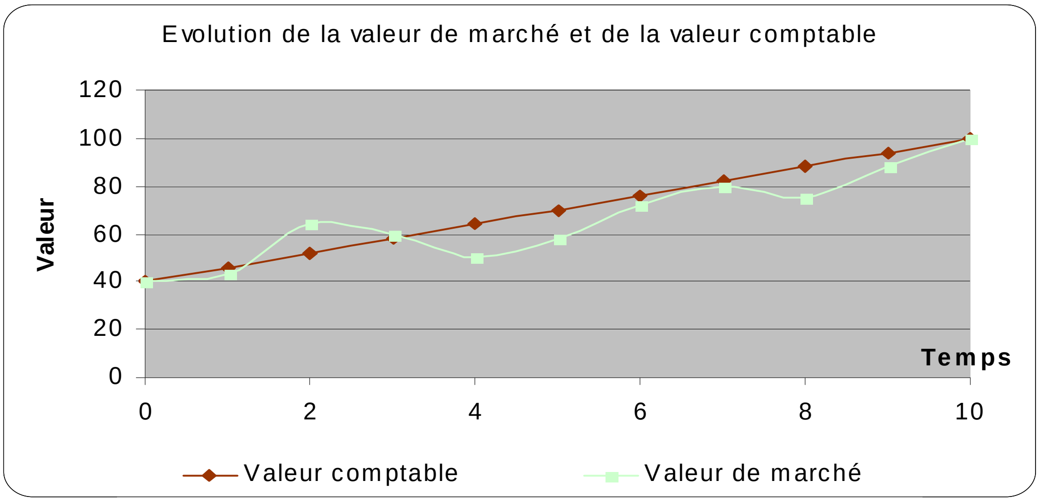
On désigne principalement comme titre amortissable les obligations. Ces titres sont alors comptabilisés selon le principe de coût historique :

Valeur de l'obligation(t) = Valeur d'acquisition(t_0) + amortissement de la surcote/décote(t) + coupon couru(t)

- La valeur d'acquisition (valeur de marché) est égale à la valeur d'achat de l'obligation.
- La surcote/décote est égale à la différence entre la valeur nominale et la valeur de marché au moment de l'.
- L'amortissement représente la « linéarisation » de la surcote/décote sur la durée de vie de l'obligation

Exemple:

- Obligation zéro coupon de nominal : 100
- Valeur de marché : 40
- Décote initiale : 60
- Maturité 10 ans



Les titres non-amortissables:

Parmi les actifs non-amortissables nous trouvons :

- Les actions
- Les actifs immobiliers
- Les OPCVM (fonds)

L'évaluation de ces titres non amortissables au bilan d'une compagnie d'assurance résulte de trois articles complémentaires du Code des assurances :

- la comptabilisation au prix d'acquisition
- l'enregistrement d'une éventuelle provision pour dépréciation à caractère durable (comptabilisation en déduction de la valeur comptable de l'actif ligne à ligne de tout ou partie des moins-values en cas de dépréciation durable)
- le calcul global de la provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques (provisionnement des moins-values latentes globales sur les titres non amortissables par constitution d'une provision au passif du bilan)

Ainsi selon le principe de prudence, des provisions sont dotées si des moins-values sur ces titres venaient à être constatées. Ces provisions doivent donc être vues comme des « réserves » que l'assureur doit doter dans le cas ou il serait amené à constater des moins values sur ces actifs.

La réserve de capitalisation (réserve de capi) :

La réserve de capitalisation est une provision liée aux titres obligataires, l'objectif de cette provision technique étant d'empêcher les entreprises *d'extérioriser et de distribuer leurs plus-values obligataires* ou du moins la partie due aux mouvements de taux.

La règlementation prévoit ainsi la dotation ou la reprise de la réserve de capitalisation :

- En cas de baisse des taux, cette provision est dotée à la hauteur de la plus-value <u>réalisée</u> provenant de la variation des taux.
- En cas de hausse des taux, les moins values <u>réalisées</u> provenant des fluctuations de taux sont compensées par des prélèvements sur cette réserve.

Il est à noter que les plus ou moins values des titres obligataires se décomposent de la façon suivante :

- L'écart entre la valeur de marché et la valeur actuelle au taux de rendement actuariel à l'achat, cet écart correspond à l'effet des fluctuations de taux d'intérêt.
- L'écart entre le prix d'achat et la valeur actuelle au taux de rendement actuariel à l'achat, cet écart correspond à l'effet de la surcote/décote.

Remarquons d'une part que la réserve de capitalisation a un fonctionnement asymétrique puisque celle-ci ne peut être négative et d'autre part que celle-ci n'est dotée ou reprise que dans le cas ou la compagnie est amenée à réaliser les plus ou moins value latentes, c'est-à-dire dans le cas de la vente de son actif.

Exemple de dotation à la réserve de capitalisation :

Soit une obligation de valeur 100% du nominal au bilan de la société d'assurance, vendue 120% suite à une baisse des taux et réachetée immédiatement à 120%.

Sans l'existence de la réserve de capitalisation, on a la situation suivante :

- en contrepartie de la vente de l'obligation, la société d'assurance reçoit en trésorerie 120% du nominal de l'obligation
- la société enregistre un résultat financier de 20% du nominal

Avec la réserve de capitalisation, en plus des éléments précédents, la société d'assurance comptabilise une charge de dotation à la réserve de capitalisation de 20% du nominal, ce qui neutralise le résultat de la cession.

Provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques :

Cette provision est destinée à faire « *face à une insuffisante liquidité des placements notamment en cas de modification du rythme de règlement des sinistres* »

Elle est calculée *globalement* par comparaison entre la valeur de réalisation et la valeur comptable au bilan de tous les actifs autres que les titres amortissables.

Exemple de dotation à la PRE :

Une compagnie d'assurance enregistre une plus-value latente globale sur l'ensemble de son portefeuille de 3,5 millions d'euros ventilée de la manière suivante :

- les plus-values latentes sur titres amortissables représentent 4,5 millions d'euros
- les moins-values latentes sur titres non amortissables représentent 1 million d'euros

Les plus-values des titres non amortissables ne sont pas inscrites au bilan, mais une provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques d'un million d'euros est constituée. Notons que la PRE introduit de la volatilité dans le compte de résultat, c'est pour cette raison qu'un assouplissement (dotation à 1/3) existe.

Provision pour participation aux bénéfices (Fond de PB) :

Il s'agit d'un montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après liquidation de l'exercice qui les a produits.

Le Code des assurances contraint les compagnies d'assurance à redistribuer au minimum 85% des bénéfices qu'elles réalisent à leurs assurés. Cette redistribution doit intervenir au plus tard dans les 8 ans qui suivent le constat des bénéfices. La participation aux bénéfices est donc obligatoire mais la politique d'allocation de cette provision est laissée à la charge de l'assureur.

Pour conclure ce paragraphe et passer d'une vision comptable à une vision économique nous insisterons sur les deux points suivants :

- Sur des marchés liquides la valorisation de l'actif d'une compagnie selon une vision comptable ou économique ne pose en général pas de problèmes.
- La valorisation du passif est beaucoup plus problématique. Selon le point de vue économique, il est très difficile de définir une valorisation de marché de ces engagements, en effet cela supposerait un hypothétique marché sur lequel les assureurs pourraient s'échanger « leurs passifs ». Or ces engagements sont souvent très complexes et ne sauraient en aucun cas être des engagements purement financiers.

Ainsi, dans la partie qui suit, nous allons nous intéresser à la valorisation de ces engagements selon une vision économique.

1.2 La valorisation économique TEV/MCEV

Nous présentons désormais les principes de calcul de la Market Consistent Embedded Value. Ces modèles ont été développés par les assureurs au sein du CFO Forum dans le but de développer des modèles de communication financière. Si à l'origine ces modèles sont destinés à l'évaluation de la richesse intrinsèque de la compagnie d'assurance, ils peuvent fournir un point de départ pour la modélisation du bilan économique dans un référentiel Solvabilité II. En effet, le cadre théorique de la MCEV s'attache à évaluer l'ensemble des risques en juste valeur dans la mesure où l'ensemble des flux projetés ainsi que les hypothèses utilisées sont en cohérence avec les données de marché et reflètent au mieux le portefeuille de l'assureur. Nous allons donc tout d'abord présenter les différents développements de l'évaluation de l'Embedded Value. Nous conclurons sur l'approche Market Consistent Embedded Value qui constitue l'aboutissement actuel de ces méthodes.

1.2.1 La Traditional Embedded Value

La première méthode proposée par le CFO Forum dans les années 1990 a été la « Tradiational Embedded Value » (TEV). Cette première approche déterministe a permis d'adopter un point de vue clair sur les notions de New Business et d'In Force et de lier les notions de tarification, de performance et de rendement du capital. La TEV constitue un point de départ pour la compréhension des modèles d'évaluation financière.

La TEV :

La TEV représente la valeur actuelle des montants futurs probables distribuables à l'actionnaire. En se plaçant du point de vue de l'actionnaire, il s'agit du prix théorique qu'un investisseur extérieur serait prêt à payer pour acquérir l'ensemble de la compagnie, cela tient compte de l'ensemble des flux futurs de la compagnie.

La TEV est constituée de deux éléments, l'Actif Net Réévalué (ANR) et de la Valeur de l'In Force (VIF).

$$\boxed{\text{TEV} = \text{Richesse de la compagnie} = \text{ANR} + \text{VIF}}$$

L'Actif Net Réévalué (ANR) :

L'ANR représente la part de richesse de la compagnie qui serait immédiatement distribuable aux actionnaires dans le cas d'une cessation d'activité de la compagnie. Il est défini comme l'Actif Net Comptable corrigé des éléments suivants pour tenir compte de la vision économique :

- Plus ou moins values latentes sur actifs de placements nettes de contraintes de distribution aux assurés.
- Ajustements sur provisions techniques par rapport aux contraintes réglementaires ou économiques et nettes de contraintes de distribution aux assurés.
- Les éventuelles non-valeurs (frais d'acquisition reportés, actifs incorporels, survaleurs) sont dépréciées.
- Plus- ou moins-values latentes sur créances ou dettes contractées.

Le traitement concernant la réserve de capitalisation est laissé à la discrétion de la compagnie.

La Value In Force (VIF) :

La VIF correspond à la valeur actuelle probable des profits futurs distribuables aux actionnaires en tenant compte du coût de la marge de solvabilité. Ainsi, elle se présente comme la Present Value of Future Profit diminué du Coût du Capital (CoC)

$$\boxed{\text{VIF} = \text{PVFP} - \text{Coc}}$$

Present Value Future Profit (PVFP) :

La Present Value of Future Profits (PVFP) est égale à la valeur actuelle des profits (pertes) futurs industriels, nets d'impôts, générés par le portefeuille de contrats en vigueur.

En considérant un contrat de maturité n, R_k le résultat de l'année k et i le taux d'actualisation annuel. On a :

$$\boxed{\text{PVFP} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}}$$

Le résultat de l'année k étant défini par :

+	Primes
+	Produits financiers
-	Prestations
-	Variations des provisions techniques
-	Participation des assurés aux excédents
-	Frais récurrents (acquisition, administration et autres)
-	Impôt
+/-	Divers

Résultat disponible l'année k

Nous obtenons ainsi une chronique de profits futurs dont l'on calcule la valeur actuelle à l'aide d'un taux d'actualisation. Ce taux d'actualisation revêt un caractère important puisqu'il doit représenter le risque intrinsèque inhérent au portefeuille d'affaires. En pratique celui-ci est égal au taux sans risque augmenté d'une prime de risque censé refléter le risque contenu dans le portefeuille. La TEV a notamment été fortement critiquée sur ce point car cette prime de risque est souvent fixée de manière arbitraire et ne reflète pas réellement le risque du portefeuille.

Cost Of Capital (CoC) ou Cout de la Marge de Solvabilité (CMS) :

Le cout de la marge de solvabilité représente le coût de portage de la marge de solvabilité. Il existe plusieurs façons de déterminer ce coût, l'une d'entre elle consiste à voir ce coût comme un coût d'opportunité dû à la différence de rendement entre les actifs mis en représentation de la marge de solvabilité et le rendement attendu par l'actionnaire.

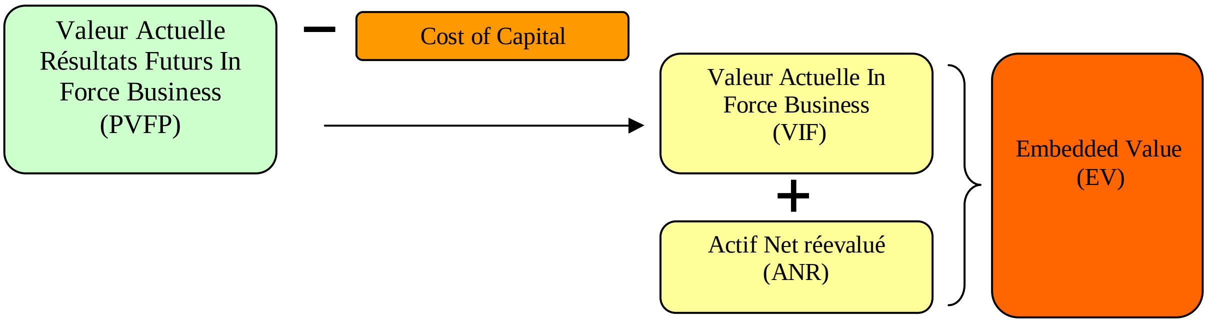
Notons que le besoin en marge de solvabilité pour l'année i est déterminé à partir des exigences réglementaires.

$$\mathrm{CoC} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{MS}_{t-1} * (\mathrm{i} - (1 - \mathrm{IS}) * \mathrm{r})}{(1+\mathrm{i})^{t}}$$

Où:

- MS_t : Besoin en marge de solvabilité à la date t
- i : Taux d'actualisation
- IS : Taux d'imposition
- r : Taux de rendement des actifs en représentation de la marge de solvabilité

On peut ainsi représenter l'ensemble de ces éléments de façon schématique :



Pour conclure cette présentation de la TEV, on remarque d'une part que le caractère déterministe de la TEV ne permet pas de valoriser les options et les garanties financières dans les contrats type épargne « Euros » et que d'autre part la TEV utilise un unique taux d'actualisation qui ne représente pas correctement le risque en portefeuille. C'est pourquoi le CFO Forum a proposé par la suite des méthodes de valorisation basées sur des modélisations stochastiques inspirées des modèles d'évaluation de la théorie financière.

En mai 2004, l'approche European Embedded Value a été développée dans le but de proposer un référentiel commun d'évaluation pour les compagnies d'assurance. Parmi les deux approches « Econometric » et « Market Consistent », c'est l'approche Market Consistent de l'Embedded Value qui semble avoir été retenu par l'ensemble des compagnies d'assurance. Celle-ci diffère notamment de l'approche « Econometric » par l'utilisation de l'univers de probabilité risque neutre pour la projection des flux, ce qui assure une valorisation en accord avec les prix de marché des actifs et évite l'exercice délicat de l'évaluation des primes de risque des différents actifs dans l'univers historique.

1.2.2 La Market Consistent Embedded Value

En juin 2008 les principes clés de la MCEV ont été publiés par le CFO Forum, en Octobre 2009 ceux là ont été redéfinis afin de tenir compte d'une prime d'illiquidité dans la spécification de la courbe de taux d'actualisation. Cette prime de liquidité avait été mise en exergue lors de la crise financière afin de tenir compte du caractère peu liquide de certains investissements effectués par les compagnies d'assurance.

Ainsi, comme point de départ à la présentation du calcul de la MCEV on peut retenir les principes clés du CFO Forum :

- *Principe 5* - Encadrement de la détermination du coût du capital
- *Principe 6* - Définition de la Value In Force (Taux d'actualisation)
- *Principe 7* - Prise en compte des options et garanties financières (évaluées par des techniques stochastiques)
- *Principe 10* - Les hypothèses économiques doivent être homogènes avec des données observables
- *Principe 12* - Les résultats du calcul de l'EV doivent être consolidés et restitués au niveau du groupe en utilisant une classification par activité compatible avec les états réglementaires
- *Principe 13,14* - La courbe de taux utilisée doit être en accord avec les taux constatés sur les marchés des capitaux. Au taux de référence peut être ajoutée une prime de liquidité pour les passifs peu liquides.

L'approche MCEV se distingue principalement de l'approche TEV par le principe 7 qui propose un cadre d'évaluation des options et des garanties. Principe qui recommande explicitement le recours à l'utilisation de modèles stochastiques calibrés de façon cohérente avec les prix de marché observés.

Nous pouvons désormais définir la MCEV comme la somme de trois éléments :

- Le capital libre (Free Surplus) correspond au capital alloué aux affaires couvertes mais non requis.
- Le capital requis (Required Capital) correspond au capital réglementaire nécessaire à la couverture des engagements.
- La Value In Force

Ainsi la définition de la MCEV se rapproche de celle de la TEV de par sa structure, cependant des composantes sont ajoutées à la Value In Force.

La Value In Force :

La VIF est la somme algébrique des éléments suivants :

VIF = PVFP – TVOG – FCRC – CRNH

Où :
- PVFP : Present Value Futur Profits
- TVOG : Time value of financial options and guarantees
- FCRC : Frictional costs of required capital
- CRNH : Cost of residual non hedgeable risks

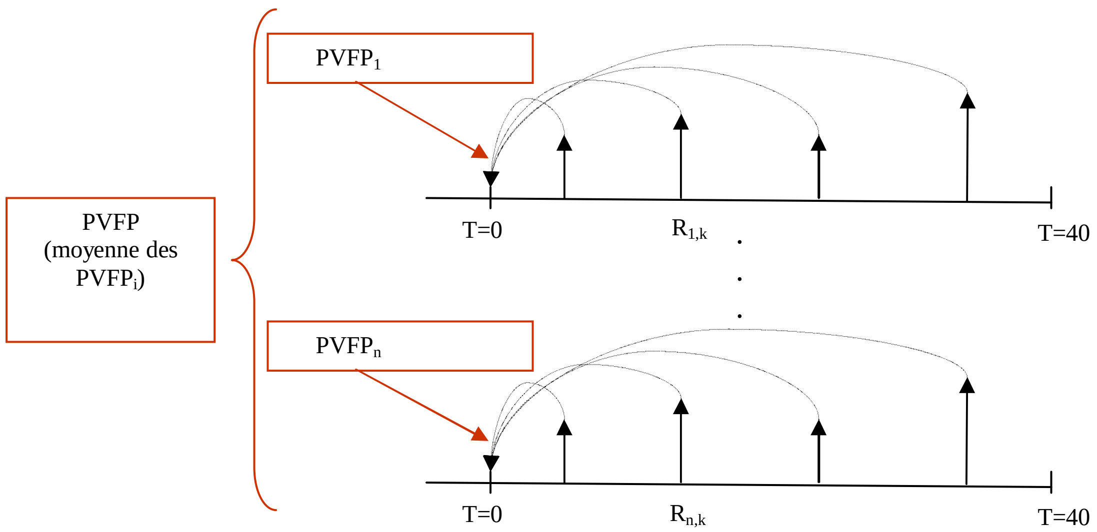
La PVPF :

La PVFP est définie de la même façon que dans la TEV, cependant nous allons ici préciser son mode de calcul dans la mesure où l'on se place ici dans un contexte de simulation.

Le calcul consiste donc :

- Projections des résultats de chaque année dans l'univers risque neutre à l'aide de simulations de sous-jacents économiques (taux, indices actions…)
- Actualisation et sommation de ces flux à l'aide des déflateurs simulation par simulation
- Calcul de la moyenne empirique des cash-flows actualisés qui constituera donc la PVFP

Schématiquement :



Où:

- $PVFP_i = \sum_{t=1}^{T} R_{i,t} * Deflateur_{i,t}$
- $PVFP = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} PVFP_i$
- $E[Déflateur_0] = E[Déflateur_t | F_t]$

Cette méthode de calcul peut s'appliquer à n'importe quelle séquence de flux et notamment au calcul de la valeur de marché du passif (cf. Best Estimate). Ainsi, on peut définir les termes suivants :

- Cash-flow : il s'agit d'une séquence de flux monétaires.
- Present Value : il s'agit de la valeur actuelle d'un cash-flow ou d'un flux
- Market Value : il s'agit de la valeur de marché d'un cash-flow ou autre, dans un contexte de simulation celle-ci est obtenue par la moyenne des Present Value.
- Déflateur : il s'agit du facteur d'actualisation utilisé dans le monde risque neutre, ce processus vérifie la propriété de martingalité.

Valeur Temps des Options et Garanties (TVOG) :

De façon générale, la valeur temps d'une option représente la différence entre le prix de l'option et sa valeur intrinsèque. Ainsi, pour valoriser la valeur temps des options et garanties contenue dans les engagements de la compagnie, la valeur intrinsèque des options est calculée à partir d'un scénario central « Certainty Equivalent » et la valeur des options par simulation de Monte Carlo. On obtient alors la valeur temps des options par la différence de ces deux éléments.

Valeur stochastique des résultats futurs (1000 simulations)

−

Valeur des résultats futures deterministes (scénario « Certainty Equivalent »)

TVOG

Cette valeur temps vient en déduction de la PVFP puisqu'elle constitue une non valeur pour les actionnaires étant donné que ces options appartiennent aux assurés. Nous verrons le caractère de ces options dans la partie modélisation du portefeuille de contrats euros.

Remarque : Dans le contexte de projection risque neutre, le scénario Certainty Equivalent correspond au scénario central de la projection déduit de la courbe de taux sans risque initiale. Cette courbe de taux permet de déduire les taux forwards qui permettent de projeter les rendements futurs des différents actifs.

Cout de friction du capital (FCRC) :

Ce cout représente de la même façon que le CoC le coût de portage du capital requis. Cependant, dans une approche risque neutre ce coût représente uniquement un coût lié à l'imposition des produits financiers générés par le capital ainsi que les frais de gestion de celui-ci. En effet, la vision coût d'opportunité n'a plus de sens dans la mesure où toutes les classes d'actifs sont revalorisées au taux sans risque.

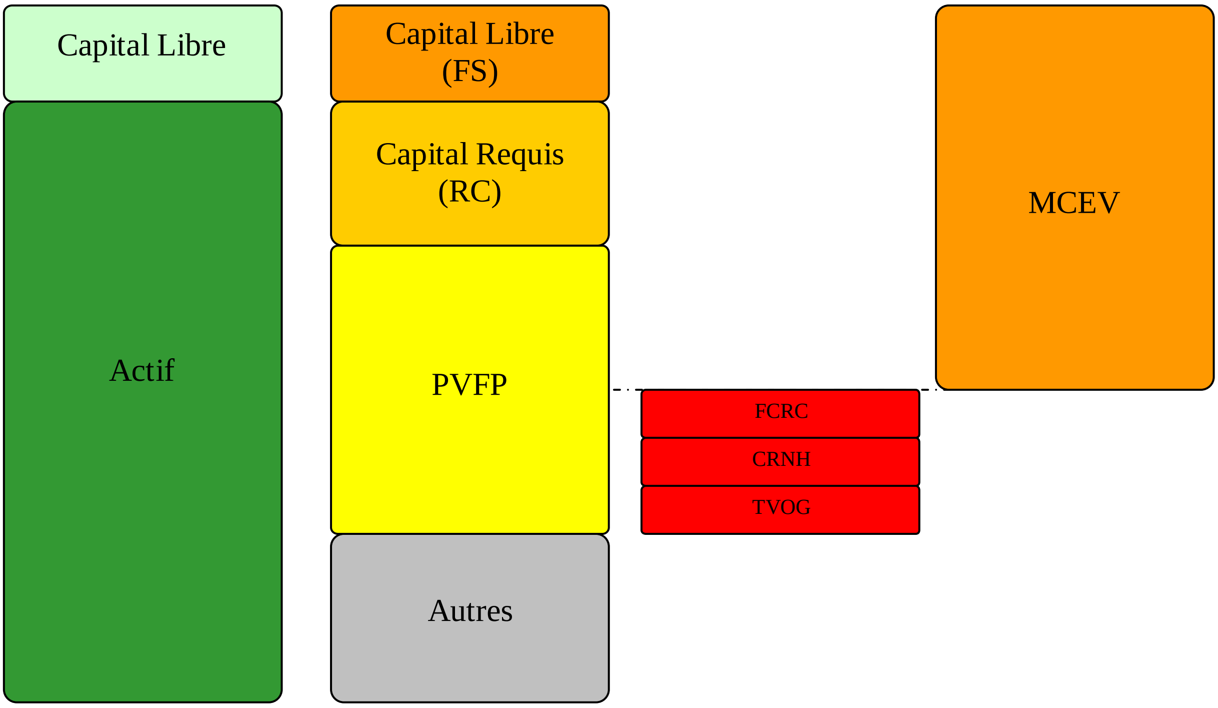
Cout des risques non couvrables (CRNHR) :

Ce coût représente le coût de l'ensemble des risques non couvrables de nature financière ou non financière. On peut notamment citer quelques exemples de risques :

- Risque opérationnel : panne informatique…
- Risque d'assurance : mortalité, morbidité, longévité, risque sur les réserves, catastrophe,…
- Risque comportemental : réaction non rationnelle des assurés face à une variation importante des marchés…

Voici à présent le bilan MCEV à partir de l'ensemble de ces éléments.

Bilan MCEV :



Remarque : Dans le bilan ci-dessus, il serait plus judicieux de faire apparaître le coût du capital (FCRC) au niveau du capital requis mais la lecture finale de la valeur MCEV serait alors moins immédiate.

Pour conclure cette présentation des différentes méthodes d'évaluation économique de la valeur intrinsèque des compagnies, nous insisterons sur le fait que ces méthodes s'attachent à évaluer à sa « juste valeur » les passifs des compagnies à l'aide de projections stochastiques. Ce type de modèle peut donc être utilisé en partie pour répondre aux problématiques d'évaluation dans le référentiel Solvabilité II.

1.3 Le capital économique dans Solvabilité II

Le projet Solvabilité II a été lancé en 2001 par la Commission Européenne. Il a pour but d'instaurer un régime de solvabilité européen basé sur une approche économique harmonisée au sein du marché européen et d'inciter les assureurs à mieux gérer leurs risques. Il propose un cadre réglementaire permettant la mesure et le contrôle des risques pour les compagnies d'assurance et les mutuelles. Ce référentiel s'articule autour de trois piliers :

- *Pilier 1 :* Exigences quantitatives
- *Pilier 2 :* Exigences qualitatives
- *Pilier 3 :* Discipline de marché

C'est particulièrement l'étude du Pilier 1 qui nous intéresse ici puisque celui-ci définit l'ensemble des éléments clés concernant l'évaluation de la solvabilité des compagnies. Ce pilier permet de définir les règles quantitatives dans les trois domaines suivants :

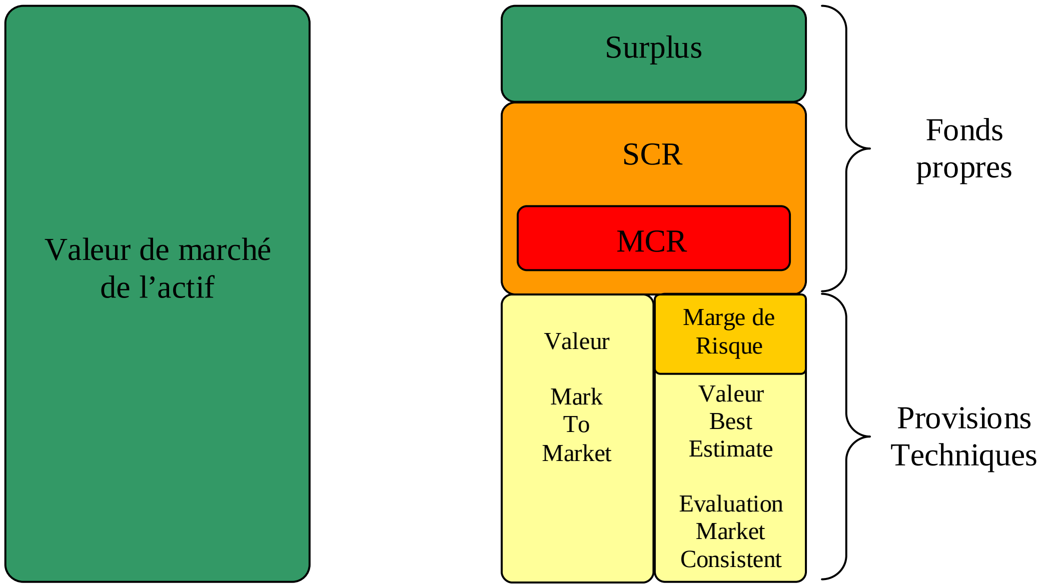
- les provisions techniques avec un objectif d'harmonisation de leur valorisation.
- l'exigence de capital où deux niveaux de capital seront déterminés :
  - le minimum de capital requis ou MCR (Minimum Capital Requirement) déterminé suivant un calcul simplifié et identique pour toutes les compagnies
  - le capital de solvabilité requis ou SCR (Solvabilité Capital Requirement) dont le calcul repose soit sur l'utilisation d'une formule standard (basée sur des facteurs et des modules de risque) soit sur l'utilisation d'un modèle interne capable de retracer la situation propre de la compagnie
- la définition et les règles d'éligibilité des éléments de capital

Dans ce mémoire nous nous intéressons au calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne partiel, ainsi il est nécessaire de définir le bilan économique dans le référentiel Solvabilité II.

1.3.1 Bilan Solvabilité II

Comme nous l'avons évoqué, le référentiel Solvabilité II propose une vision économique du bilan alors que le bilan sous Solvabilité I était bâti sur la notion de « cout historique ».

Le bilan sous Solvabilité II se présente de la façon suivante :



Les fonds propres :

Nous ne détaillons pas ici les éléments éligibles en représentation des fonds propres, notons juste que ceux là sont segmentés en deux parties, fonds propres de base (basic own funds) et fonds propres auxiliaires (ancillary own funds). Des sous classes Tier 1, Tier 2, Tier 3 existent alors afin de définir quels éléments peuvent s'inscrire en représentation du MCR et SCR.

Les fonds propres sont composés d'une partie surplus (de la même façon que dans un bilan MCEV ou autres) et d'une partie capital économique que nous allons détailler ici.

Le capital économique :

Sous solvabilité II le capital économique présente « deux niveaux » correspondant au MCR et SCR.

- *MCR*

L'exigence minimale de capital ou « Minimum Capital Requirement » (MCR) est un premier seuil d'alerte de la solvabilité qui a pour objectif d'émaner d'un calcul simplifié tout en étant fiable et robuste. Il représente le niveau en dessous duquel les fonds propres ne doivent pas chuter, sous peine d'une intervention des autorités de contrôle.

Sa méthode de calcul a évolué dans les différents QIS, le QIS 5 propose d'utiliser un MCR calculé comme le maximum entre d'un $MCR_{combined}$ qui varie entre 25% du SCR et 45% du SCR et une quantité AMCR fixé de façon forfaitaire dans la directive Solvabilité II.

- *SCR*

Le SCR doit donner un niveau de capital qui permet à l'assureur d'absorber les pertes imprévues et significatives. Il est censé refléter le montant de capital requis pour que l'assureur puisse faire face à ses obligations pendant un horizon de temps spécifié et suivant un niveau de confiance donné. Pour le calculer, différentes approches sont proposées aux compagnies. Une formule standard, permet un calcul « simple » applicable à toutes les sociétés quel que soit le pays. Afin d'avoir une approche estimant au mieux les risques, les compagnies peuvent développer des modèles internes qui doivent être validés par les autorités de contrôle. Enfin, elles peuvent également faire une combinaison des deux en associant certains risques à la formule standard et d'autres risques à un modèle interne.

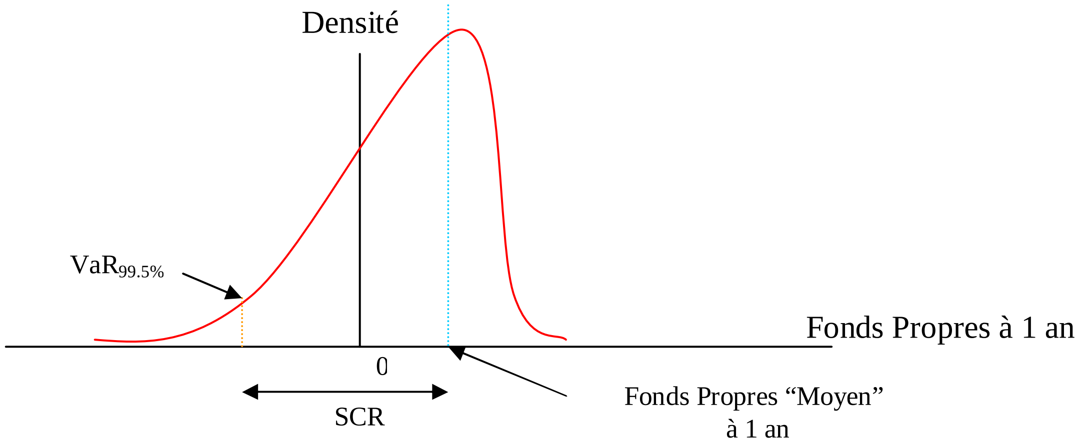
Dans le cadre d'un modèle interne, le SCR par :

Directive Solvabilité II 2009 – Article 101 - Calcul du capital de solvabilité requis

Le capital de solvabilité requis correspond à la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an.

De part la définition du bilan, la compagnie sera jugée insolvable si les fonds propres deviennent négatifs à un horizon 1 an. Ainsi, le calcul du SCR revient au calcul de la $VaR_{99,5\%}$ à partir de la distribution des fonds propres futurs (à 1 an).

Schéma :



Nous verrons dans la prochaine section comment ce calcul peut s'effectuer dans un contexte de simulations ce qui constitue le cœur de ce mémoire.

Les provisions techniques :

Le référentiel Solvabilité II place le principe « current exit value » au cœur du calcul des provisions techniques. Ainsi, la directive Solvabilité II (2009) définit les provisions techniques de la façon suivante :

Directive Solvabilité II 2009 – Article 76 – Dispositions générales

La valeur des provisions techniques correspond au montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champ leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance.

Ce référentiel distingue alors deux types de risques au passif des compagnies dont le traitement en terme de provision diffère par l'ajout d'une marge pour risque.

Ainsi on distingue :

- Les risques couvrables (« hedgeable ») sont les risques qui peuvent être couverts par des instruments financiers sur un marché liquide. Pour ce type de risque, la provision inscrite au passif de la compagnie sera égale au prix de la couverture observé sur le marché.
- Les risques non-couvrables (« non hedgeable ») sont les risques ne pouvant pas être couverts par la mise en place d'une stratégie de couverture. Ce type de risque est

valorisé par le calcul d'une provision « Best Estimate » et l'ajout d'une marge pour risque.

Nous pouvons à présent détailler la notion de provision « Best Estimate » ainsi que la notion de marge pour risque.

- *Le Best Estimate :*

Directive Solvabilité II 2009 – Article 77 – Calcul des provisions techniques
La meilleure estimation correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinents.

La provision Best Estimate est calculée selon le principe « Current Exit Value » c'est-à-dire selon une logique de valeur de transfert définie comme le prix auquel l'engagement pourrait être échangé entre deux parties informées. Elle correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de toutes les entrées et sorties futures qui seront requises pour honorer les obligations d'assurance pendant toute la durée de leur vie, y compris toutes les dépenses, garanties financières et options contractuelles.

Les modèles de projection de type MCEV peuvent ainsi être utilisés puisqu'ils modélisent l'ensemble des flux futurs de la compagnie selon des hypothèses économiques réalistes et cohérentes avec le marché. Comme nous l'avons vu dans le calcul de la MCEV, ce sont les résultats futurs qui sont projetés mais étant donné que ces résultats sont déterminés à partir des comptes de résultats futurs, il est facile de récupérer les cash flows de passif (prestations, frais, commissions…) afin de calculer une provision Best Estimate.

De la même façon que dans le calcul de la PVFP dans un contexte de simulations, on aura :

$$BE = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(\left(\Pr estations_i^t + Fraix_i^t + Commisions_i^t \right) - \left(\Pr imes_i^t + Autres_i^t \right) \right) * Deflateur_i^t$$

Où:

- n : nombres de simulations
- T : horizon de projection

Remarque : Par abus de langage, on parlera indifféremment de Best Estimate, de valeur de marché du passif (Market Value Liability) ou encore de valeur du passif pour designer la moyenne des flux futurs actualisés.

La marge pour risque :

Directive Solvabilité II 2009 – Article 77 – Calcul des provisions techniques

La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.

Dans la logique d'un provisionnement en « current exit value », afin d'assurer la transferabilité du portefeuille en cas de faillite, les compagnies sont tenues de provisionner une marge pour risque en plus du Best Estimate. En effet, dans le cas d'une faillite, le repreneur du portefeuille aurait à faire face à deux coûts. D'une part le coût des engagements et d'autre part le coût du capital réglementaire à constituer pour supporter ces engagements. Le premier coût est valorisé à travers la provision Best Estimate et le second par la marge pour risque.

Dans le QIS 5, cet élément est valorisé à l'aide de la méthode « coût du capital » que l'on peut rapprocher du coût des risques non couvrables (CRNHR) ainsi que des coûts de friction du capital requis (FCRC) dans l'approche MCEV. Dans cette approche coût du capital, l'expression de la marge pour risque est donnée par :

$$Risk\ Margin = CoC * \sum_{t \geq 0}^{T} \frac{SCR(t)}{(1+r_{t+1})^{t+1}}$$

Où:

- r_t : taux annuel sans risque de maturité t
- SCR(t) : SCR de l'année t
- CoC : taux de coût du capital

Remarque : Notons que cette marge pour risque n'a pas lieu d'être pour les risques couvrables, en effet celle-ci est déjà incluse dans le prix mark to market.

D'un point de vue pratique le calcul de cette marge pour risque s'avère très délicat puisqu'il fait intervenir les SCR futurs. Le calcul du SCR à t=0 étant déjà délicat, le CEIOPS propose certaines simplifications afin d'évaluer cette marge pour risque.

A ce stade, nous pouvons conclure que les référentiels réglementaires (Solvabilité II) ou les référentiels de communication financière (MCEV) ont un objectif similaire qui est d'identifier les risques et d'en proposer une analyse la plus détaillée possible. Le principe fondamental commun à ces deux approches réside dans l'utilisation d'hypothèses « Best Estimate », c'est-à-dire le recours à des hypothèses les plus réalistes possibles compte tenu de l'information que possède l'assureur ainsi que de l'information disponible sur le marché.

Nous allons désormais nous intéresser au calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne développé sur la base d'un outil de projection MCEV (Prophet / ALS). En utilisant la définition du QIS 5 qui définit le SCR à partir de la Value At Risk calculée sur la distribution des fonds propres à horizon 1 an, nous verrons que dans un contexte de simulations, ce calcul requiert une approche « simulations dans les simulations ».

Remarque : Il est important de noter que les modèles de projections type « MCEV » peuvent permettre la valorisation de provisions Best Estimate à t=0 mais en aucun cas le calcul du SCR définit comme précédemment qui fait appel à de nouvelles simulations.

1.3.2 Le capital économique dans le cadre d'un modèle interne

Comme nous l'avons présenté, le calcul du SCR repose sur le calcul de la Value At Risk à 99,5% de la distribution des fonds propres à horizon 1 an. Ainsi, il s'agit de déterminer le quantile à 99,5% de cette distribution, le capital économique étant obtenu comme la différence entre la valeur moyenne des fonds propres à horizon 1 an et la VaR à 99,5% (cf schéma SCR)

Pour présenter le principe de calcul SCR, nous utilisons un bilan simplifié ou l'on ne considère que la fraction d'actifs en représentation des engagements et nous présentons la formalisation du problème inspirée de **Planchet, Juillard & Guibert** [2010] ainsi que de **Loisel & Devineau** [2009].

Notons que ces deux articles traitent du même problème mais sous des aspects différents dans leur formalisation théorique. D'une part, **Planchet, Juillard & Guibert** [2010] proposent d'évaluer le SCR à l'aide de la variable aléatoire Best Estimate tandis que **Loisel & Devineau** [2009] proposent une approche directe en utilisant la variable « fonds propres ». Ces approches sont similaires dans la mesure où les fonds propres peuvent être obtenus comme la différence de la valeur de marché de l'actif et du Best Estimate ou comme la valeur actuelle probable des résultats futurs.

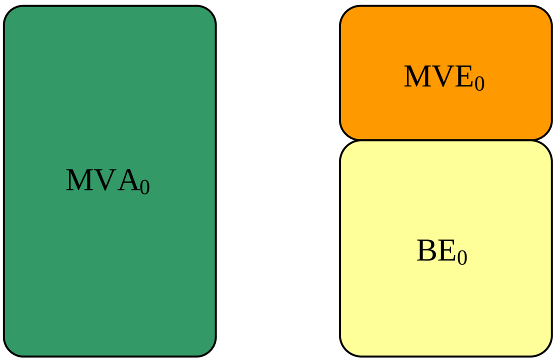
D'autre part, **Planchet, Juillard & Guibert** [2010] proposent en utilisant l'hypothèse simplificatrice de proportionnalité entre le Best Estimate de l'année 'i' et le SCR de cette même année de prendre en compte la marge pour risque dans leur modélisation. **Loisel & Devineau** [2009] ne tiennent pas compte de la marge pour risque dans leur modélisation, il semble donc que celle-ci soit calculée à posteriori une fois le SCR déterminé.

Dans ce mémoire et dans le cadre du développement de l'approche « Replicating Portfolio », nous considérons la distribution de la variable Best Estimate à 1 an pour le calcul de la VaR à horizon 1 an. D'autre part, nous ne modélisons pas la marge pour risque, on pourrait s'inspirer des développements de **Planchet, Juillard & Guibert** [2010] afin de l'intégrer. Enfin, nous étudions uniquement le calcul du SCR et non du MCR qui découlerait notamment du calcul du SCR et des provisions techniques.

Remarque : La distribution du Best Estimate à 1 an a bien un sens mathématique car le Best Estimate à 1 an est une variable aléatoire étant donné que celle-ci s'exprime comme une espérance conditionnelle à l'information en t=1 (ce qui n'est pas le cas du Best Estimate à t=0). Par abus de langage nous parlerons aussi bien de distribution du Best Estimate à 1 an que distribution du passif à 1 an.

1.3.2.1 Bilan à t=0

Avec les hypothèses que nous venons de faire le bilan simplifié peut être vu de la façon suivante :



Définitions :

- MVA_0 : Valeur de marché l'actif à t=0 en représentation des engagements et la marge de solvabilité.
- BE_0 : Valeur du « Best Estimate » à t=0
- MVE_0 : Valeur de marché la partie de fond propres en représentation de la marge de solvabilité (ie du SCR).

Équations :

- $MVL_0 = BE_0$
- $MVE_0 = MVA_0 - BE_0$
- $BE_0 = E_Q\left[\sum_{t=0}^{40} \text{Liability}_t * \text{Deflateur}_t\right]$

- Avec :
    - Liability$_t$: « Flux de passif » aléatoire ((Prestations+Frais+Commissions)$_t$ – (Primes+Autres)$_t$)
    - Déflateur : Facteur d'actualisation aléatoire

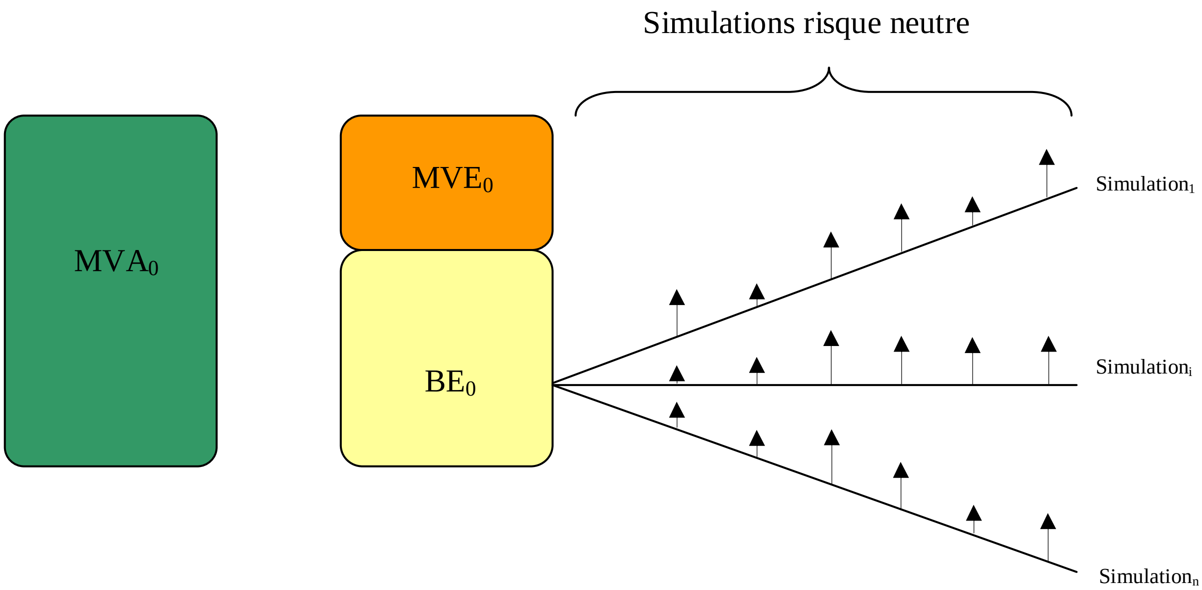
Valorisation des différents postes :

- La valeur de marché de l'actif est obtenue « aisément » dans le cas d'actifs liquides et relativement simples à partir des données de marché que l'on peut recueillir pour la valorisation des différents actifs. Les actifs plus complexes (dérivés…) ou moins liquides (immobilier…) peuvent être plus délicats à valoriser.

- Le Best Estimate s'exprimant comme l'espérance des flux futurs de passif se calcule en général en utilisant une approche par simulations de Monte Carlo.
- Dans le cadre de ce bilan simplifié, la valeur des fonds propres (égal au SCR ici) peut être vue comme la différence entre la valeur de marché du passif et de l'actif.

Simulations :

En se plaçant dans un contexte de simulations et dans le cadre d'une évaluation Market Consistent, le Best Estimate à t=0 est calculé à partir de simulations dans le monde risque neutre. On projette les flux de passifs en accord avec les flux d'actifs simulés et on calcule le Best Estimate à l'aide de l'estimateur classique de l'espérance.



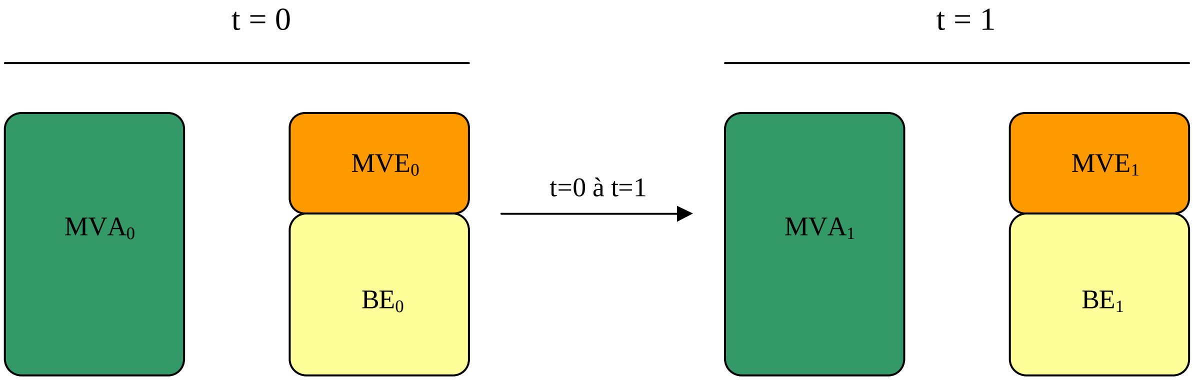
$$BE_0 = \mathrm{E_Q}\left[\sum_{t=0}^{40} \mathrm{Liability}_{\,t} * \mathrm{Deflateur}_t\right] \approx \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{40} Liability_t^i * Deflateur_i^t$$

Où :

- $Liability_t^i = \left(\left(\Pr\acute{e}stations_i^t + Fraix_i^t + Commisions_i^t\right) - \left(\Pr imes_i^t + Autres_i^t\right)\right)$
- i : indice de simulation
- t : indice d'horizon de projection

1.3.2.2 Passage de t=0 à t=1

Afin de déterminer la distribution des fonds propres à horizon 1 an, nous devons développer la dynamique du bilan de t=0 à t=1.



On a :

- $MVA_1 = MVA_0*(1+R_1) - F_1$
- $MVE_1 = MVA_1 - BE_1$
- $BE_1 = E_Q\left[\sum_{t=1}^{40} FluxPassifs_t * Deflateur_t \middle| F_1\right]$

Où :

- R_1 : Taux de rendement de l'actif sur la période 1
- F_1 : Flux de prestations servi au cours de la période

Notons que vu de t=0, MVA_1 , MVE_1 et BE_1 ainsi que R_1 et F_1 sont des variables aléatoires.

Remarque : On ne considère pas les primes nouvelles que l'on pourrait encaisser sur la première période (hypothèse Run Off du portefeuille).

Détermination du SCR

Pour le calcul du SCR il nous faut utiliser la mesure de probabilité historique puisque l'on s'intéresse au calcul d'un quantile historique sur la distribution des fonds propres

Dans le cadre de ce bilan simplifié en notant **P** la mesure de probabilité historique le SCR est tel que : $\mathbf{P}(MVE_1 > 0) = \mathbf{P}(MVA_1 - BE_1 > 0) = 99{,}5\%$

Or, $MVA_1 = MVA_0*(1+R1) – F1$ et $MVA_0 = MVE_0 + BE_0$

Et par hypothèse simplificatrice $MVE_0 = SCR$

On a ainsi, $MVA_1 – BE_1 = (SCR+BE_0)*(1+R_1) – F1– BE_1$

D'ou SCR tel que : $\mathbf{P}((SCR+BE_0)*(1+R_1) – F_1 – BE_1>0) = 99{,}5\%$

Soit, $\mathbf{P}\left(SCR > \frac{BE_1 + F_1}{1+R_1} - BE_0\right) = 99{,}5\%$

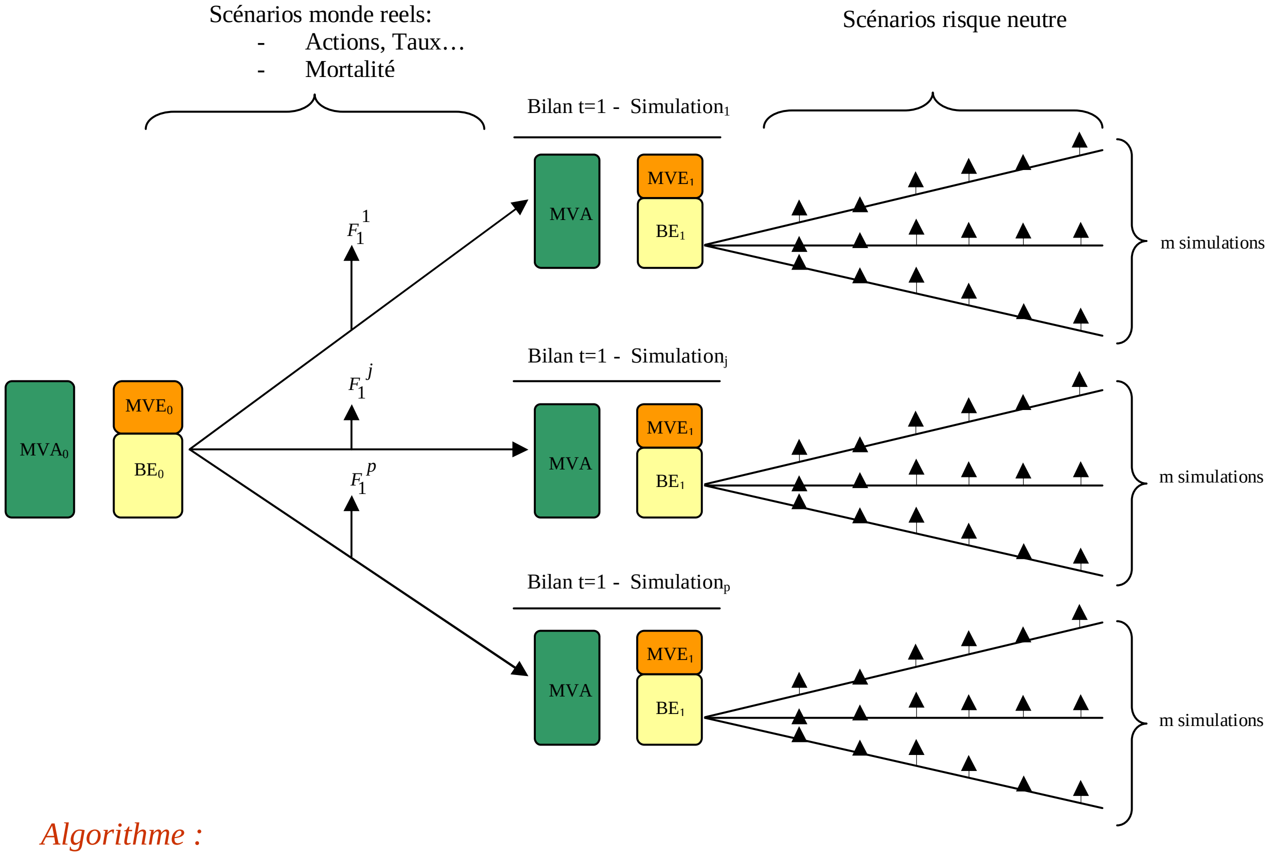
On obtient donc l'expression $\boxed{SCR = VaR_{99,5\%}(\frac{BE_1 + F_1}{1+R_1}) - BE_0}$

En pratique le bilan initial étant supposé connu, BE_0 est donc connu et c'est le calcul de la VaR à 99,5% de la variable aléatoire $\lambda = \frac{BE_1 + F_1}{1+R_1}$ qui pose problème. En effet, celle-ci fait intervenir l'expression de la variable aléatoire $BE_1 = E_Q\left[\sum_{t=1}^{40} Liability_t * Deflateur_t \middle| F_1\right]$ c'est-à-dire l'espérance conditionnelle des flux de passifs futurs sachant l'information en t=1. Le calcul du SCR se résume donc au calcul de la VaR à 99,5% de la variable aléatoire λ . Dans une approche par simulations ce point est délicat et renvoie à la problématique des simulations dans les simulations.

1.3.2.3 Les « simulations dans les simulations »

Dans un contexte de simulations, il est nécessaire de simuler un premier jeu de scénarios primaires sous la probabilité historique qui va permettre d'évaluer le quantile à 99,5% de la variable aléatoire $\lambda = \frac{BE_1 + F_1}{1+R_1}$. Or la variable BE_1 s'exprime comme une espérance conditionnelle à l'information connue à t=1, il nous faut donc simuler un jeu de simulations secondaires sous probabilité risque neutre pour chaque simulation primaire afin d'estimer cette espérance conditionnelle et obtenir une réalisation de BE_1 et ainsi de λ.

Schématiquement :



Algorithme :

Début

Pour j = 1 à p *   / p simulations primaires « Monde Réel »*

Simuler des trajectoires actifs / passifs de t=0 à t=1

Taux de rendement R_1^j

Flux de prestation F_1^j

Pour i = 1 à m *   / m simulations secondaires « Risque Neutre »*

Simuler des trajectoires actifs / passifs de t=1 à t = 40

Calcul $BE_{1,i}^j = \sum_{i=1}^{40} Liability_t^i * Deflateur_t^i$

Fin Pour

Calul $BE_1^j = \frac{1}{m} * \sum_{i=1}^{m} BE_{1,i}^j$

Calul $\lambda_j = \frac{BE_1^j + F_1^j}{1+R_1^j}$

Fin Pour

Calcul de VaR (λ)   / Estimation classique d'un quantile à partir d'un p-uplet

Fin

Nous venons donc de formaliser le problème du calcul du SCR dans une optique de valorisation Market Consistent. L'approche par simulations conduit au problème des simulations dans les simulations, cette approche est très coûteuse en temps de calcul et difficilement réalisable sur des portefeuilles de grande taille. L'approche « Replicating Portfolio » est alors une des approches possibles en théorie pour résoudre ce problème.

1.3.3 Introduction à l'approche « Replicating Portfolio »

Comme nous venons de le constater la valorisation « des » Best Estimate à t=1 n'est pas envisageable d'un point de vue calculatoire. La méthode du « Replicating Portfolio » semble être une piste de réflexion intéressante pour répondre à cette problématique. Elle repose sur l'idée simple :

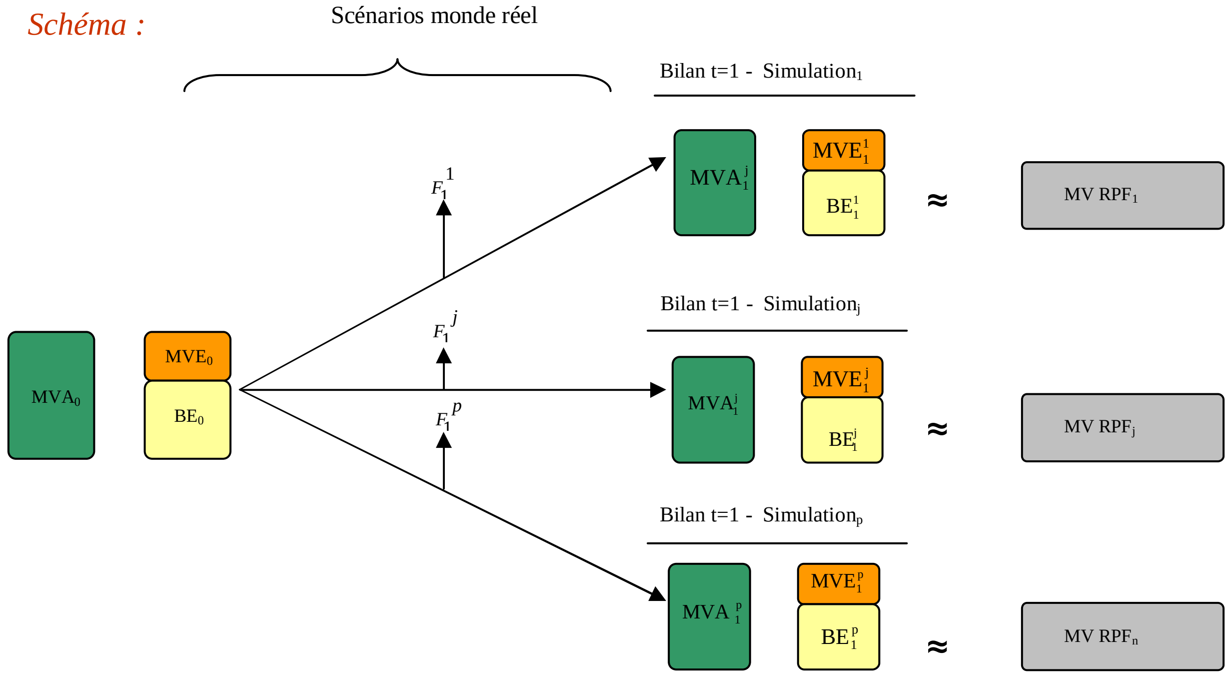
> Déterminer un portefeuille d'actifs financiers valorisables par formules fermées permettant de répliquer le passif.

On peut aussi se reporter à la définition de **Oeschlin** [2007] :

> *"We can define a replicating portfolio as a portfolio of standard financial instruments which matches the cash flows generated by the liabilities as good as possible."*

Le portefeuille répliquant sera utilisé comme proxy « des » passifs à t=1 et la valorisation de celui-ci se faisant par formules fermées permettra de ne pas avoir recours aux simulations dans les simulations.

Schéma :



Où

- MV RPF_i : Market Value Replicating Portfolio simulation i ($\approx BE_1^i$)

Le schéma fait apparaître un point clé concernant l'utilisation du portefeuille répliquant :

La valeur de marché du portefeuille répliquant doit être très proche de celle du passif qui aurait été calculé par des simulations dans les simulations pour chaque état en t=1

C'est ce point qui va conditionner toute la méthode et nous verrons par la suite en quoi celui-ci est problématique.

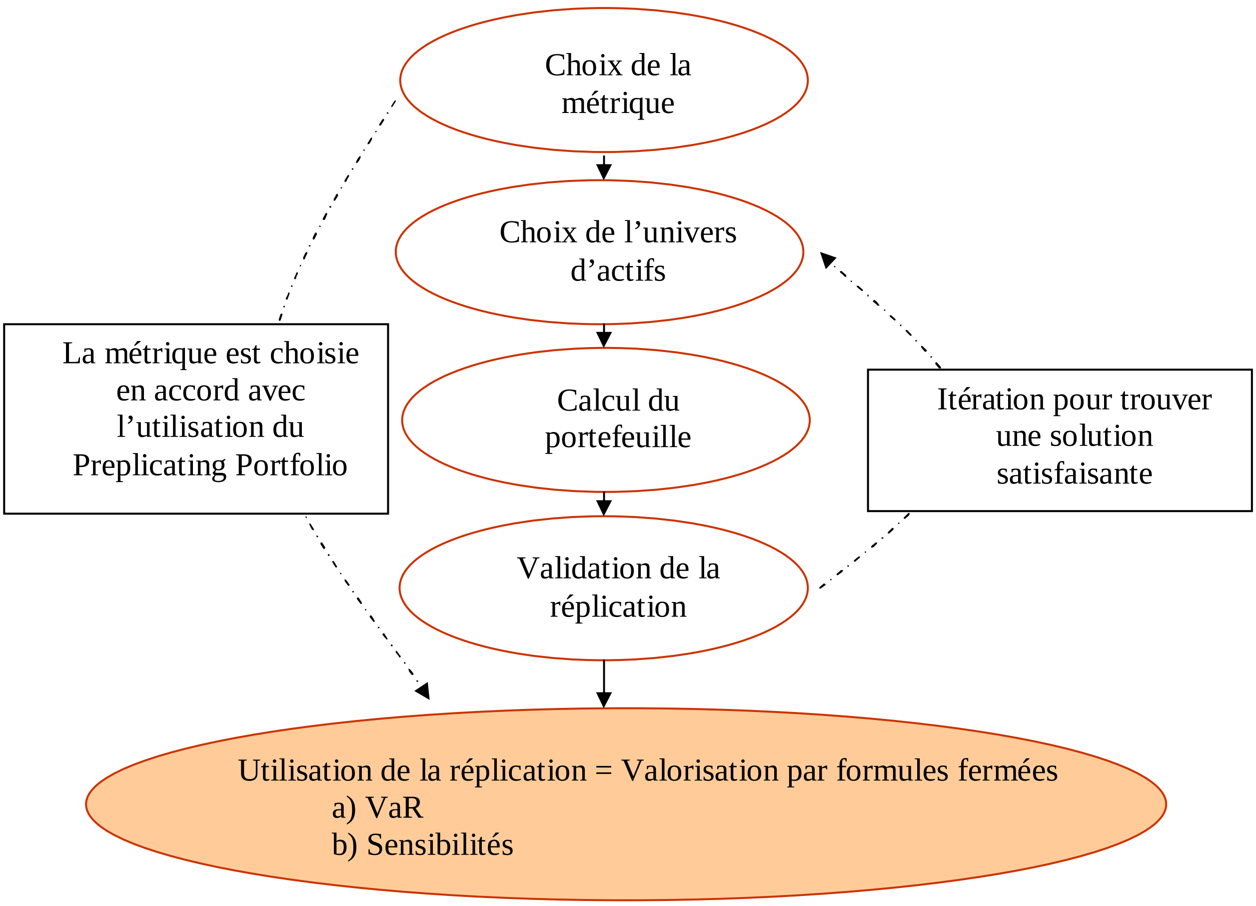
Revenons pour le moment à la définition qui fait apparaître des notions essentielles :

- « répliquer » renvoie en tout premier lieu à la notion de portefeuille de couverture à l'image des couvertures proposées dans les techniques financières. Au vu des nombreuses garanties financières proposées aux assurés, il semble envisageable de vouloir répliquer un passif à l'aide d'instruments financiers. Cependant, si l'on regarde précisément la dynamique des cash-flows on peut dès lors réaliser que trouver « un portefeuille de couverture » serait vain au vu de la complexité « macro » du passif. De plus, l'utilisation du portefeuille répliquant ne nécessite peut être pas d'aller aussi loin dans la réplication des flux. En effet on ne souhaite pas utiliser le portefeuille répliquant comme couverture mais comme instrument nous permettant de calculer la valeur de marché des Best Estimate (ou passif) à t=1. On comprend donc que la notion de réplication semble avoir un sens plus faible. C'est pour cette raison que nous nous intéresserons aux métriques de réplication (par exemple la Present Value Matching) qui définissent la notion de réplication à un sens plus faible et nous verrons comment ces métriques peuvent être utilisées dans le calcul de la VaR.

- « actifs financiers » renvoie à l'univers d'actifs financiers que la méthode va utiliser. Dans un premier temps et dans le cadre de ce mémoire, cet univers doit être déterminé en amont de la méthode, c'est-à-dire que l'actuaire doit au vu de sa connaissance du passif et des garanties proposées dans les contrats intuiter des actifs financiers qui pourraient répliquer le passif. Ce travail est loin d'être évident et des garanties simples peuvent très vite mener à des actifs « complexes » ou inexistants d'un point de vue financier du fait des normes comptables ou des managements rules.

- « valorisation par formules fermées », il s'agit de pouvoir valoriser l'ensemble des instruments financiers par formules fermées pour ne pas avoir recours à des simulations dans les simulations. Ce point est relativement important puisque cette valorisation dépendra de deux aspects. D'une part la valorisation d'actifs dérivés tels que les produits de taux ou d'actions peut être difficile compte tenu de la complexité du produit. D'autre part, il serait intéressant que cette valorisation soit en accord avec les dynamiques sous-jacentes des variables économiques simulées dans le modèle ALS. Or, nous allons le voir, ces modèles sont relativement complexes ce qui pose problème dans la valorisation du portefeuille répliquant par formules fermées.

Nous pouvons donc conclure cette présentation de la méthode par la description générale suivante:



1.4 Modèle Actif/Passif d'un portefeuille de contrats épargne « Euro »

Avant de développer plus en détail la méthode « Replicating Portfolio » et de proposer l'application sur un portefeuille de contrats épargne « Euros », nous précisons dans cette section le principe de calcul des flux de passif à l'aide du modèle Prophet/ALS sur ce même type de contrat.

Ainsi, nous proposons tout d'abord une description du modèle d'actifs utilisé qui se base sur le modèle de **Hibbert, Mowbray & Turnbull** [2001] puis nous détaillons les mécanismes liant l'actif et le passif.

Cette partie est une partie théorique puisque l'ensemble de ces flux est déjà modélisé sous Prophet / ALS, elle a pour but d'introduire à la compréhension des liens actifs / passifs.

1.4.1 Modélisation de l'Actif

Le modèle d'actifs utilisé ici est le modèle developpé par **Hibbert, Mowbray & Turnbull** [2001] et commercialisé par Barrie & Hibbert. Ce générateur de scénarii économiques fait partie des modèles de référence et a largement inspiré le modèle développé par **Algrhim & al** [2005] approuvé par la *Casualty Actuarial Society* ainsi que la *Society Of Actuary*.

A l'inverse des modèles composites où la modélisation de chaque classe d'actif est faite de façon « indépendante » et où l'agrégation est ensuite réalisée afin de proposer une description globale de l'actif, les modèles intégrés proposent une description globale de l'actif dans le but de rendre les variables économiques cohérentes entre elles.

Nous présentons ici le principe du modèle décrit dans **Hibbert, Mowbray & Turnbull** [2001], le modèle réellement utilisé était quelque peu différent notamment par la prise en compte de spécificités sur la modélisation des rendements actions. Nous présentons uniquement les variables économiques que nous utiliserons par la suite, à savoir la structure par termes de taux d'intérêt qui permet de déduire le prix des zéro coupons ainsi que les actions. La modélisation des actifs immobiliers ne sera pas considérée.

Dans le modèle de **Hibbert, Mowbray & Turnbull** [2001], les auteurs proposent de générer de façon cohérente les variables financières, en particulier les structures de taux d'intérêt, à la fois réelles et nominales, les taux d'inflation, les rentabilités des actions et les dividendes.

Le point de départ du modèle de **Hibbert, Mowbray & Turnbull** [2001] est la modèlisation de la structure des taux d'intérêt nominaux à partir des deux composantes séparées :

- une structure des taux d'intérêts réels (paramétrée à partir des obligations indexées sur l'inflation)
- une modélisation de l'inflation qui permet la prise en compte des anticipations d'inflation sur différents horizons.

Le taux d'intérêt nominal est alors défini comme le rendement réel plus l'inflation :

$$R_{nominal}(t,T) = R_{réel}(t,T) + R_{inflation}(t,T)$$

Les auteurs proposent alors les dynamiques suivantes pour les taux d'intérêts réels et l'inflation.

Taux d'intérêt réel :

La modélisation de la courbe des taux d'intérêt réel est réalisée à l'aide d'un modèle de **Hull & White** [1994] à deux facteurs :

Le premier facteur correspond au taux court $r_1(t)$ et suit un processus de Varice où le retour à la moyenne est $r_2(t)$. Ce second facteur qui correspond donc au niveau de retour à la moyenne évolue selon une dynamique de Vasicek. Ainsi, le taux court est ramené vers la valeur moyenne de long terme $r_2(t)$ qui lui-même évolue selon un processus de Vasicek.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} dr_1(t) &= \alpha_{r_1}\left(r_1(t) - r_2(t)\right)dt + \sigma_{r_1} dZ_{r_1}(t) \\ dr_2(t) &= \alpha_{r_2}\left(\mu_r - r_2(t)\right)dt + \sigma_{r_2} dZ_{r_2}(t) \end{aligned}$$

Où :

- $r_1(t)$: taux court réel instantané en t
- $r_2(t)$: niveau du retour à la moyenne du taux court réel instantané en t

- μ_r : niveau du retour à la moyenne pour $r_2(t)$
- α_{r_1} : force de rappel - coefficient autorégressif du processus du taux court réel
- α_{r_2} : force de rappel - coefficient autorégressif du processus de retour à la moyenne
- σ_{r_1} : volatilité annualisée (écart-type) du taux court réel
- σ_{r_2} : volatilité annualisée (écart-type) du retour à la moyenne
- $dZ_{r_1}(t)$: aléa sur le processus du taux court réel, qui suit une loi Normale (0;1)
- $dZ_{r_2}(t)$: aléa sur le processus de retour à la moyenne, qui suit une loi Normale (0;1)

Ce modèle propose alors une formule fermée pour l'évaluation des obligations zeros-coupons de prix $P_{réel}(t,T)$, solution proche de la solution du modèle à un facteur de Vasicek. On peut alors définir le taux réel à terme :

$$R_{réel}(t,T) = -\frac{\ln(P_{réel}(t,T))}{T-t}$$

Taux d'inflation :

L'inflation est modélisée de la même façon et selon le même modèle à deux facteurs. On a ainsi :

$$dq_1(t) = \alpha_{q_1}\left(q_1(t) - q_2(t)\right)dt + \sigma_{q_1} dZ_{q_1}(t)$$
$$dq_2(t) = \alpha_{q_2}\left(\mu_q - q_2(t)\right)dt + \sigma_{qr_2} dZ_{q_2}(t)$$

Où :

- $q_1(t)$: taux instantané de l'inflation en t
- $q_2(t)$: niveau de retour à la moyenne du taux instantané de l'inflation en t
- μ_q : niveau du retour à la moyenne pour $q_2(t)$
- α_{q_1} : force de rappel - coefficient autorégressif du processus du taux d'inflation
- α_{q_2} : force de rappel - coefficient autorégressif du processus de retour à la moyenne
- σ_{q_1} : volatilité annualisée (écart-type) du taux d'inflation
- σ_{q_2} : volatilité annualisée (écart-type) du retour à la moyenne
- $dZ_{q_1}(t)$: aléa sur le processus du taux d'inflation qui suit une loi Normale (0;1)
- $dZ_{q_2}(t)$: aléa sur le processus de retour à la moyenne, qui suit une loi Normale (0;1)

On obtient alors de la même façon les taux à termes à partir de la structure par terme des prix « zéro coupon inflation » $P_{inflation}(t,T)$.

On a ainsi : $$R_{inflation}(t,T) = -\frac{\ln(P_{inflation}(t,T))}{T-t}$$

A partir de ces deux variables, les autres variables économiques découlent de ces deux premières.

Taux d'intérêt nominal :

En supposant l'indépendance entre les taux réels et l'inflation, ainsi qu'en utilisant la relation d'**Irving Fisher** [1911], les auteurs explicitent le taux d'intérêt nominal :

$$R_{nominal}(t,T) = R_{réel}(t,T) + R_{inflation}(t,T)$$

A partir de cette structure de taux nominal qui correspond à la structure de taux sans risque, il est possible de déterminer la valeur des déflateurs Def(T) à partir des taux sans risques annuels :

$$Def(T) = \frac{1}{(1+R_{nom}(0,1))\ldots(1+R_{nom}(i-1,i))\ldots(1+R_{nom}(T-1,T))}$$

Taux de rentabilité des actions (hors dividendes):

Les auteurs proposent de modéliser le taux de rentabilité E(t) sur une période Δt des actions à partir du taux de rendement sans risque déduit de la courbe des taux nominaux auquel ils ajoutent un excès de rendement X(t) pour tenir compte du caractère risqué de l'investissement.

$$E(t) = \ln\left(\frac{1}{P_{nominal}(t-\Delta t)}\right) + X(t)$$

L'excès de rendement est par la suite modélisé selon un modèle de Markov à deux états (« Markov Regime-Switching ») pour palier les défauts de la modélisation « classique » du modèle Lognormal Indépedant (modèle type **Black & Scholes** [1973]) qui prend difficilement en compte les queues de distribution.

Ainsi, X(t) suit une loi normale où :

- X(t) a une moyenne $\mu_{E,1}$ et une variance $\sigma^2_{E,1}$ si le régime est dans l'état 1
- X(t) a une moyenne $\mu_{E,2}$ et une variance $\sigma^2_{E,2}$ si le régime est dans l'état 2

Les deux régimes étant :

- un régime avec une volatilité ordinaire associé à une rentabilité moyenne ordinaire
- un régime avec une volatilité élevée associé à une rentabilité moyenne faible

Une matrice de transition permet de déterminer la dynamique de changement de régime :

$$P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & 1-P_{1,1} \\ 1-P_{2,2} & P_{2,2} \end{bmatrix}$$

Où :

- $P_{1,1}$: **P(**Modèle en régime 1 sur [t, t+Δt] **|** Modèle en régime 1 sur [t-Δt,t] **)**
- $P_{2,2}$: **P(** Modèle en régime 2 sur [t, t+Δt] **|** Modèle en régime 2 sur [t-Δt,t] **)**

Taux de dividendes :

Le taux de dividende évolue selon la dynamique :

$$d\log(y(t)) = \alpha_y(\mu_y - \log(y(t)))\,dt + \sigma_y dZ_y(t)$$

Où :

- y(t) : Taux de dividende à la date t
- α_y : Force de rappel
- μ_y : Moyenne de long terme du (log) taux de dividende
- σ_y : Volatilité du (log) taux de dividende ($\sigma_y = \sigma_{E,1}$ si régime 1, sinon $\sigma_y = \sigma_{E,2}$)
- $dZ_y(t)$ suit une Loi Normale N(0,1)

Le dividende à la date t est obtenu par : $D(t) = S(t).y(t)\Delta t$

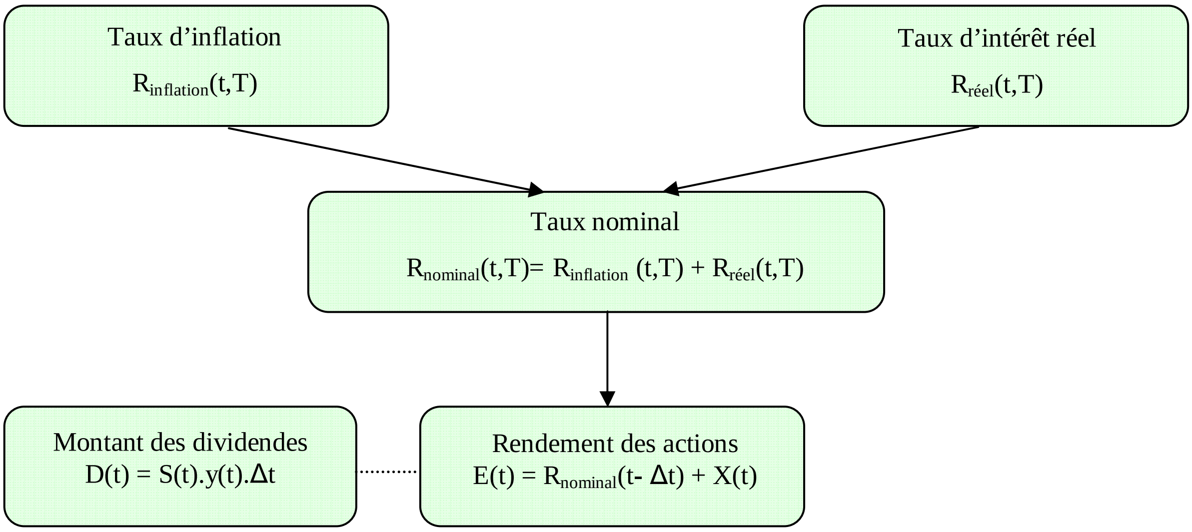
Où :

- S(t) : Prix de l'action à t

Remarque : A partir du taux de rendement total E(t) et du taux de dividende, on a la relation suivante : $(S(t) + S(t).y(t).\Delta t)) / S(t - \Delta t) = \exp(E(t))$

Étant donné que nous n'avons pas implémenté et calibré ce modèle nous n'expliciterons pas le principe de calibration, nous noterons juste que « les différents browniens » sont corrélés à l'aide d'une matrice de corrélation et la simulation de ceux là se basent sur la décomposition de Cholesky.

Nous pouvons conclure la présentation théorique de ce modèle par le schéma partiel suivant :



Cadre pratique :

D'un point de vue pratique ce modèle d'actifs est utilisé par la partie ALS du logiciel Prophet/ALS et permet de générer les tables stochastiques des scénarii économiques qui se présentent alors de la façon suivante :

SIMULATION	ECONOMY	CLASS	MEASURE	TERM	2008	2009	2010	2011
1	EUR	EQUITY	RET_IDX	0	1	0.7612001339	0.8709691622	0.8197312824
1	EUR	EQUITY	RNY_PC	0	3.28	4.1590284977	3.4600274074	3.8322682541
1	EUR	EQUITY_RE	RET_IDX	0	1	0.9360531956	1.2571455134	1.2382936091
1	EUR	EQUITY_RE	RNY_PC	0	2.7197358951	2.9317996788	2.5549335252	2.6029158305
1	EUR	ILZCB	PRICE	1	0.9778138806	0.9649971636	0.9604498920	0.9624245713
1	EUR	ILZCB	PRICE	2	0.9518465284	0.9342993462	0.9248853158	0.9268753067
1	EUR	ILZCB	PRICE	3	0.9240540587	0.9070525393	0.8927467873	0.8935478405
1	EUR	ILZCB	PRICE	5	0.8678656653	0.8605161605	0.8369956182	0.8336594161
1	EUR	ILZCB	PRICE	10	0.7474833766	0.7752481578	0.7342266218	0.7195361333
1	EUR	ILZCB	PRICE	15	0.6642480186	0.7186522946	0.66713859	0.6446032076
1	EUR	ILZCB	PRICE	30	0.5519442042	0.6399726003	0.5761447519	0.5441668167
1	EUR	INFLN	INFLN_IDX	0	1	1.0017489558	0.9928866895	0.9776393475
1	EUR	VALN	DEF	0	1	0.9702327501	0.9408606883	0.9179690173
1	EUR	ZCB	PRICE	1	0.9702327501	0.9697267879	0.9756694362	0.9763781423
1	EUR	ZCB	PRICE	2	0.9376131234	0.9367168568	0.9504334256	0.952167863
1	EUR	ZCB	PRICE	3	0.9022752461	0.902987773	0.9247458666	0.9271577339
1	EUR	ZCB	PRICE	5	0.8307270063	0.8350650135	0.8712704681	0.8746710533
1	EUR	ZCB	PRICE	10	0.6550492545	0.6677441727	0.7366108746	0.7457642660
1	EUR	ZCB	PRICE	15	0.5158849801	0.5371824733	0.6266476325	0.6413536165
1	EUR	ZCB	PRICE	30	0.315336566	0.3409663237	0.4386740070	0.4548493387
1	EUR	CASH	RET_IDX	0	1	1.0306805248	1.0628566082	1.0893613849
1	EUR	CASH	RNY_PC	0	3.0219287723	3.0740909067	2.4631442309	2.3905326718
1	EUR	FTSE	RET_IDX	0	1	0.9608998124	1.6785597937	2.2535237346
1	EUR	FTSE	RNY_PC	0	3.69	3.5337551789	1.8536927318	1.4903653142
1	EUR	HSBC	RET_IDX	0	1	0.8554900367	2.3829290448	3.3855441079
1	EUR	HSBC	RNY_PC	0	5.7735	5.8173952529	2.2422197781	1.6853949293
1	EUR	1_EUR_IN_CHF	RET_IDX	0	1.4741081703	1.6078822148	1.8628476887	1.8994528603
1	EUR	1_EUR_IN_USD	RET_IDX	0	1.4015151515	1.4234563893	1.3791628751	1.5007181719

Dans le cadre du Replicating Portfolio nous utiliserons les données suivantes :

- Le cours de l'action (RET_IDX) pour une action côtant 1€ à la date initiale
- Le déflateur (DEF)
- La structure de zéro-coupons (ZCB)

Cette table est composée de 5000 simulations, il existe aussi des tables dites « choquées » qui correspondent à des chocs sur les paramètres de volatilité des actions, des taux ou encore de mortalité, celles-ci permettent le calcul des sensibilités du passif. Notons que ces tables sont générées à partir de la date t=0.

1.4.2 Modélisation du passif : contrats type épargne « Euro »

Nous présentons ici les principes de la modélisation de contrats type épargne « Euro » dans un cadre de simulations Market Consistent puisque l'étude de la méthode « Replicating Portfolio » portera sur ce type de contrats.

Nous détaillons tout d'abord le cadre légal relatif à ce type de contrats et nous abordons ensuite les mécanismes de lien actifs/passifs.

1.4.2.1 Les contrats type épargne « Euro »

Nous présentons ici les principales caractéristiques des contrats d'assurance vie de type épargne « Euro ». Intéressons nous tout d'abord à la constitution de l'épargne par le biais des mécanismes de participation aux bénéfices.

La revalorisation du contrat

Le taux global de revalorisation d'un contrat d'assurance vie est calculé à partir de deux éléments : le taux d'intérêt technique et la participation aux bénéfices.

- *Le taux d'intérêt technique*

A la souscription du contrat, l'assureur fixe un taux minimum annuel de revalorisation qui s'appliquera pour toute la durée de celui-ci. Aux termes de l'article A 132-1 du Code des Assurances, ce taux ne peut excéder :

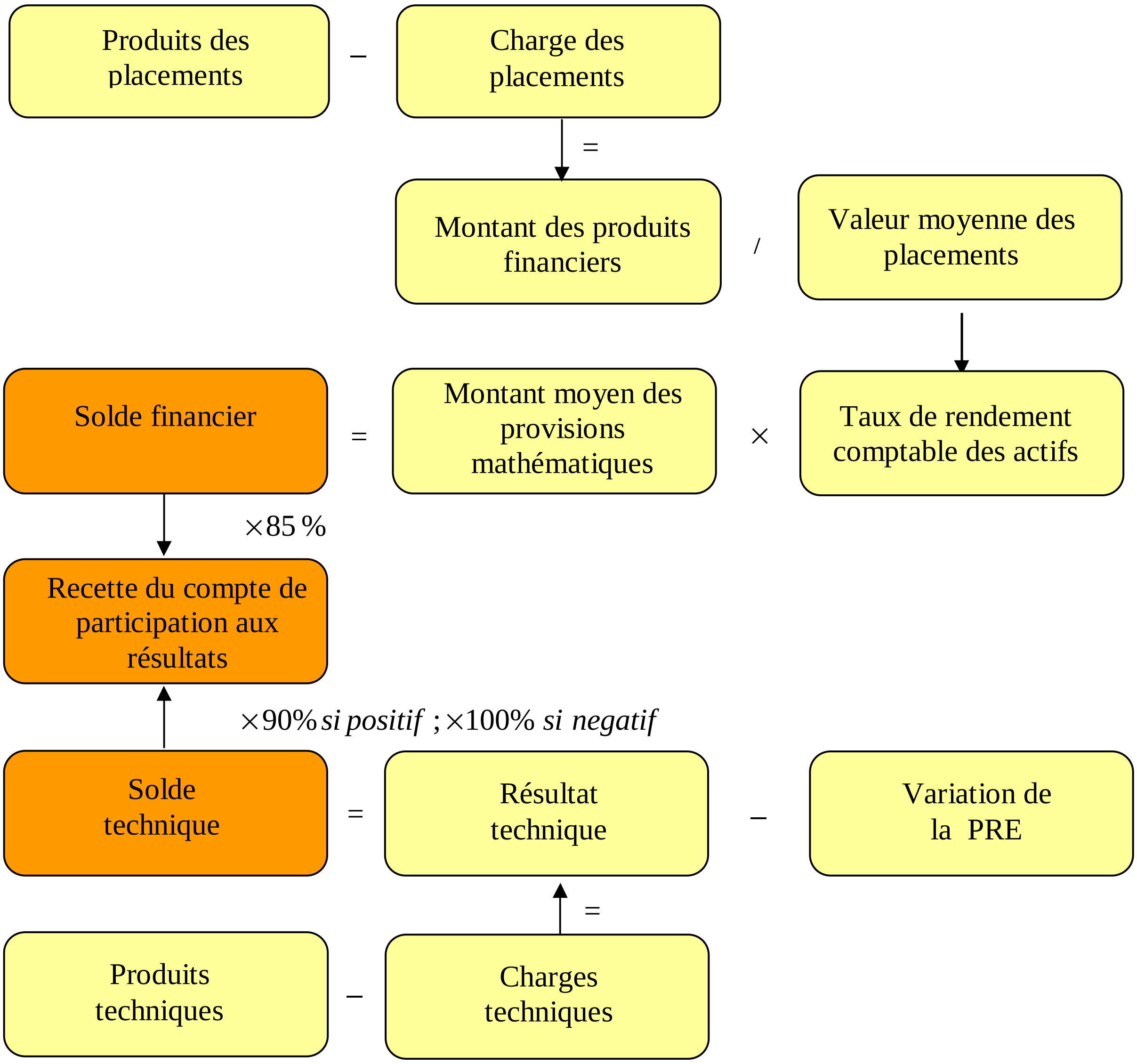
- 75% du TME pour les contrats dont la durée maximale est inférieure à 8 ans
- min(3,5% ; 60% du TME) pour les contrats dont la durée est supérieure à 8 ans

A ce taux vient s'ajouter un taux de participation aux bénéfices. Il dépend des bénéfices financiers mais aussi des bénéfices, ou pertes techniques générées par l'assureur.

- *La participation aux bénéfices*

L'article A 331-4 du Code des Assurances précise les règles de calcul de la participation bénéficiaire à attribuer au titre d'un exercice. Cette participation est déterminée à partir d'un compte de participation aux résultats.

Ce compte de participation est calculé de la façon suivante :



La participation aux bénéfices est définie comme la différence positive entre la participation aux résultats, solde du compte précédent, et les intérêts versés au contrat selon le taux technique. Cette **participation aux bénéfices est obligatoire**.

Ce montant de participation bénéficiaire peut alors être utilisé de plusieurs façons :

- par une augmentation directe des provisions mathématiques
- par une augmentation de la provision pour participation aux bénéfices (fonds de PB)
- par une combinaison des deux méthodes ci-dessus

En effet, le Code des Assurances autorise les assureurs à différer cette distribution d'une durée n'excédant pas 8 ans. Les bénéfices financiers ainsi mis en attente sont placés dans la provision pour participation aux bénéfices. Cette disposition permettant à l'assureur de lisser dans le temps le taux de revalorisation des contrats.

Notons cependant que le choix entre distribution immédiate ou différée n'est pas neutre pour l'assuré. En effet, du fait de la garantie cliquet liée à la nature de la provision mathématique, on peut remarquer que les sommes incorporées aux provisions mathématiques capitalisent immédiatement à leur profit ce qui n'est pas le cas de celles reçues par la provision pour participation aux excédents.

Un contrat peut également comporter une clause de **participation aux bénéfices dite contractuelle**. Elle est définie comme un pourcentage des produits financiers nets des charges financières et n'est versée qu'aux assurés ayant souscrit ce contrat.

Enfin, l'assureur peut verser une **participation aux bénéfices discrétionnaire** à ses assurés dans le but d'atteindre le niveau de revalorisation de ses concurrents, dans une optique de défense de son portefeuille. Cet élément constitutif de la revalorisation de l'épargne s'ajoute au taux d'intérêt technique, aux clauses de participation aux bénéfices contractuelles et réglementaires et est à la discrétion de l'assureur.

Les chargements

On peut distinguer deux types de chargements :

- *Chargement sur flux (prime initiale, versements libres)*

Que ce soit pour la prime initiale ou pour les versements libres, les chargements sur flux sont destinés à financer les frais d'acquisition de ces flux. Ils s'expriment en pourcentage de ces flux et ne sont prélevés qu'une seule fois au moment de l'acquisition de ces flux.

- *Chargement sur encours*

L'épargne constituée est affectée d'un prélèvement annuel sur encours, ce prélèvement est destiné à couvrir les frais de gestion des actifs tel que les coûts de transactions appliqués aux opérations de bourse.

Terme du contrats / Rachats

La sortie du contrat s'effectue par le décès de l'assuré ou le rachat du contrat. Ce dernier est possible à tout moment mais peut donner lieu à la retenue d'une indemnité par l'assureur. Celle-ci (article R 331-5 du Code des assurances) ne peut excéder 5% de la provision mathématique et est en tout état de cause nulle après dix ans.

Parmi les rachats on peut distinguer :

- **Le rachat partiel** correspond au versement par l'assureur d'une fraction du capital constitué par le souscripteur. L'autre partie reste investie dans le contrat.
- **Le rachat total** correspond au versement total par l'assureur de l'épargne constituée. Un rachat total met donc fin au contrat.
- **L'avance** permet au souscripteur d'obtenir une partie de son épargne sans mettre fin au contrat. Elle correspond à un prêt consenti par l'assureur qui devra être remboursé par l'assuré.

Le cadre réglementaire developpé ci-dessus met en avant un certain nombre d'options au sens financier que les assurés possédent lorsqu'ils souscrivent à ce type de contrats. Ce sont ces options qui légitimisent l'approche « Replicating Portfolio ». Nous les présentons ici succinctement, les instruments répliquants seront présentés dans la deuxième partie.

Parmis les principales options nous pouvons citer les suivantes :

- Le rachat : l'option de rachat permet aux clients de disposer de tout ou partie de leur épargne disponible. Celle-ci peut engendrer des difficultés pour l'assureur dans la mesure ou elle peut l'amener à faire des cessions d'actifs dans un environnement économique défavorable.
- Réinvestissement : Il s'agit de la possibilité laissée aux assurés d'effectuer des versements complémentaires au sein de leurs contrats. Ces versements bénéficient parfois d'une garantie de taux qui peut être soit celle prévue à l'origine du contrat soit celle prévalant lors du versement.
- Taux minimum garanti : Comme nous l'avons vu, il s'agit du plancher de rémunération annuelle sur les contrats euros.
- Effet cliquet : il s'agit du mécanisme par lequel les intérêts réalisés au cours d'une année, sont définitivement acquis sans pouvoir être remis en cause par les futurs résultats du placement en question. Cet effet est particuliérement important lors de la distribution de la PB.

Nous pouvons maintenant nous intéresser aux liens actifs / passifs et aux principes de calcul des flux de passifs.

1.4.2.2 Les liens Actifs / Passifs

Nous présentons ici le principe du modèle Actif / Passif d'un point de vue simplifié. Il s'agit d'introduire les liens existant entre l'actif et le passif et ainsi mieux comprendre la modélisation des flux de passifs et leurs interactions avec l'actif. Nous n'entrons pas dans le détail du modèle et nous utiliserons des simplifications de celui-ci dans la partie application.

Etant donné les différents scénarii économiques générés par le modèle d'actifs, nous avons différentes évolutions des variables économiques (taux, actions…). En fonction de l'état de ces différentes variables, l'assureur sera amené à prendre des décisions de gestion concernant l'actif. Ces décisions auront alors un impact sur le comportement des assurés ce qui génerera à son tour un impact sur le passif. Ce sont ces interactions actif/passif qui nécessitent une modélisation dynamique.

Le modèle se base sur l'organigramme suivant permettant de passer de l'année N à l'année N+1 :

Debut d'année 01/01/N

L'assureur réalise un rebalancement de l'actif selon sa stratégie d'allocation cible :
- ⇨ Investissement / Désinvestissement
- ⇨ Réalisation de Plus ou Moins values sur les actifs : $PMV_{allocation}$

Milieu d'année 01/06/N

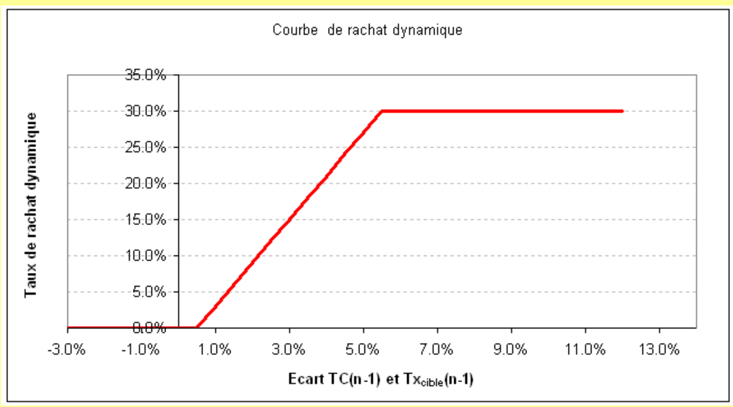
Les liquidités disponibles :
- Produits financiers (coupons, dividendes...)
- Désinvesstissement actions / obligations
  - ⇨ réalisation de $PMV_{désinvestissement}$ actions / obligations

Règlement des flux à verser aux assurés à partir des liquidités

Préstations :
- Préstation Déces : $PM_{ouverture}(N) * (1 - tx_{prélevement})$
- Rachats = $PM_{ouverture}(N)*(tx_{rachat\ structurel}(N) + tx_{conjoncutrel}(N))$

Frais :
- Frais de gestion
- Frais de placements…

Où $tx_{conjoncturel}$ fonction de l'écart entre TRC(N-1) et Tx_{cible}(N-1)



Fin d'année après préstations : 31/12/N

Dotation / Reprise des provisions reglementaires :

- PRE : PRE(N) = PRE(N-1) +dotPRE(N) – reprisePRE(N)
- Reserve de Capi : $RC(N) = RC(N) + RC_{dot}(N) - RC_{reprise}(N)$

Evaluation des produits financiers et du taux de rendement comptable

- $PdtsFi(N) = Coupons(N) + Dividendes(N) + Intérêts(N) + PMVL_{réalisées}(N)$
- Taux de rendement comptable : $TRC(N) = \dfrac{PdtsFi(N)}{\text{Montant comptable des actifs}(N)}$

Politique de revalorisation :

- Taux cible : Taux de revalorisation cible défini par l'assureur comme fonction du Taux Swap 10 ans
- Taux servi avant $PB_{discrétionnaire}$: $tx_{technique}(N)+max(PB_{contractuelle} * TRC(N) - tx_{technique}(N);0)$

Taux de PB minimal > Taux cible

Oui

Utiliser le résultat financier pour créditer le taux cible aux PM

Doter le fonds de PB de la différence entre le taux cible et le taux de PB minimal

Non

Essayer de créditer le taux cible aux PM. Le cas échéant utiliser le fond de PB.

Si insuffisant

Realiser les plus ou moins value latente actions.

Si insuffisant

Reduire la marge financière de la compagnie. Toutefois au moins x % de la marge financière est conservée.

Si insuffisant

Ne pas servir totalement le taux cible. Créditer au moins le taux minimal.

⇨ Potentiellement résultat négatif l'année N et rachat dynamique l'année N+1

Revalorisation finale des PM :

- $Tx_{servi}(N) = Tx_{servi\ avant\ PB\ discrétionnaire}(N) + Tx_{PB\ discrétionnaire}(N)$
- $PM_{revalorisée}(N) = PM_{ouverture}(N)*(1+Tx_{servi}(N))$

Fin année 31/12/N et passage à l'année 01/12/N+1

$PM_{ouverture}(N)=PM_{revalorisée}(N)$

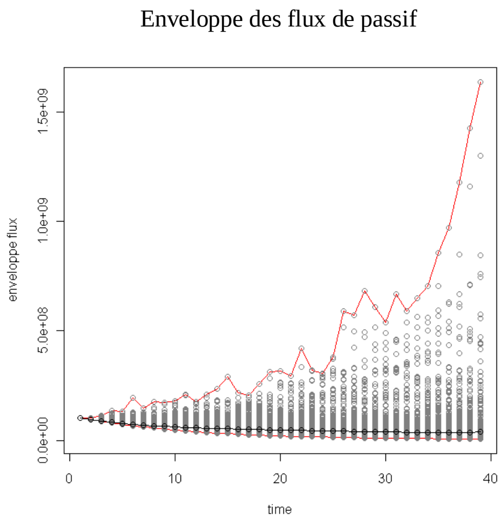
Nous venons de présenter les mécanismes liant l'actif et le passif. Ces mécanismes sont complexes et une présentation compléte et rigoureuse de ceux là demanderait un long développement qui ne constitue pas le cœur de ce mémoire. Afin de conclure cette partie, nous pouvons noter que bien que l'on se situe dans une logique de valorisation économique, les élèments comptables interviennent d'une part par les provisions techniques tels que la PRE, le fond de PB… et d'autre part par le taux de rendement comptable défini à patir des valeurs comptables et non de marché. Nous verrons que ce sont ces liens comptables qui posent problème en pratique dans la méthode « Replicating Portfolio »

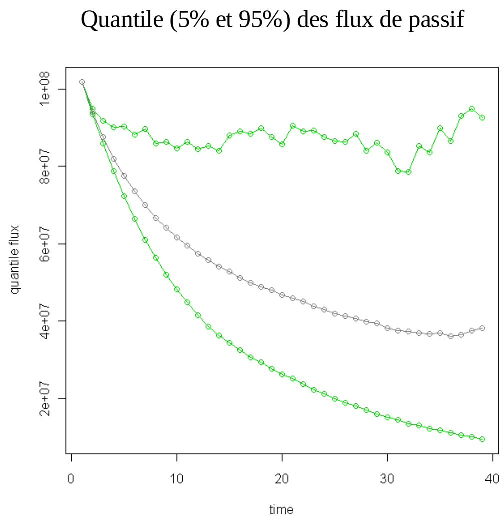
Afin de conclure cette partie, nous présentons l'allure des cash-flow de passif sur un portefeuille de contrats épargne, exemple qui sera repris et détaillé dans la partie exemples réels.

Exemple :

- Taux de rachat : 10% cela signifie que chaque année 10% des assurés sortent du contrat
- Taux de PB : 90 %, participation bénéficiaire à 90% des produits financiers
- Taux minimum garanti : 2%
- PM initiale = 1 000 000
- Pas de fond de PB

Dans un cadre de simulations stochastiques, le flux de passif à une date donnée peut être vu comme une variable aléatoire dont la moyenne sera le flux moyen de passif de l'assureur. En itérant ce raisonnement à toutes les dates on peut observer le passif complet à horizon 40 ans, avec une représentation de la ligne moyenne ainsi que de l'enveloppe de ces flux (graphique de gauche).





Nous constatons que la « variance » des flux de passif est croissante avec le temps de la même façon que celle du prix d’une action dans le cadre du modèle du brownien géométrique. L’analyse des quantiles de flux ainsi que la ligne moyenne met en évidence l’écoulement « décroissant » du passif.

Nous pouvons à present présenter la mise en place de la méthode « Replicating Portfolio ».

2 La méthode dite des « Replicating Portfolio » : Présentation théorique

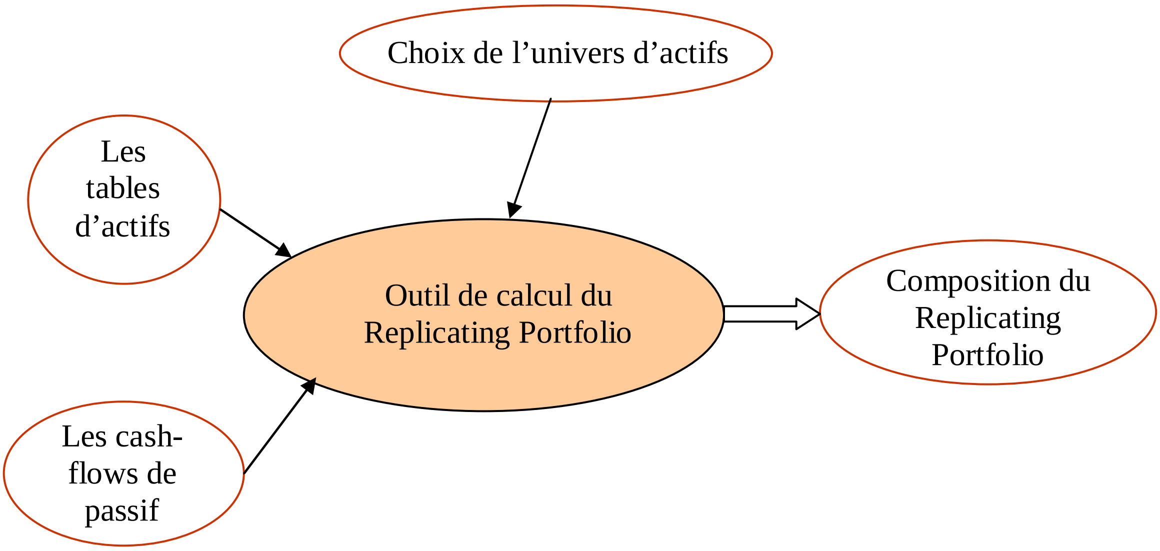
2.1 Les données / L'univers d'actifs

Avant de détailler le problème d'un point de vu mathématique nous allons préciser les flux de données utilisés par la méthode :

Nous pouvons distinguer deux types de flux

- Les flux de données générés par le modèle Prophet ALS :
    - Les tables d'actifs
    - Les cash-flows de passif
- Les flux des actifs « répliquants »

Schématiquement :



Nous avons déjà présenté les cash-flows de passif qui sont générés par le modèle Porphet / ALS. Nous présentons à présent l'univers d'actifs « répliquants ».

L'univers d'actifs représente les actifs qui sont utilisés par la méthode, cet univers est choisi à priori. Ayant connaissance des différentes garanties proposées dans les contrats l'actuaire doit « intuiter » les actifs qui lui semblent intéressants de sélectionner pour tenter de répliquer un passif or nous verrons que ce point n'est pas aisé à résoudre. Présentons tout d'abord les différents actifs que nous allons considérer dans cette étude vis-à-vis des garanties proposées dans les contrats d'assurance vie type épargne « Euro » ce qui justifiera par la même occasion l'approche de la réplication par des actifs financiers.

Frais fixes / Flux fixes :

Les frais fixes et autres flux indépendants des conditions économiques peuvent être répliqués par des zéro-coupons. Cet instrument va verser 1€ à maturité, ainsi on peut envisager une « gamme » de 40 zéro-coupons compte tenu de l'horizon de projection que nous considérons.

Flux liées à des investissements en actions :

A l'image des contrats type UC (Unité de Compte), nous pouvons envisager de répliquer certains flux à partir d'une position sur action, c'est-à-dire un « actif » ou l'on décide dès aujourd'hui de dénouer la position à une date fixée dans le futur. Un flux positif signifie une vente de l'action à maturité, un flux négatif un achat.

Garanties planchers / Taux minimum garanti / Participation aux bénéficies :

Ces garanties que l'assureur « offre » à l'assuré sont en réalité des options financières. Dès lors il est intéressant de trouver l'équivalent financier à ces options. On pensera notamment aux calls et puts (qui sont finalement équivalents à l'aide de la parité call/put) pour la garantie plancher. Le taux minimum garanti peut être à priori assimilé à une option sur taux mais celui-ci peut aussi être vu selon une vision call. Nous reviendrons sur ce point lors de la réplication du portefeuille de contrats épargne.

Nous pouvons retenir que les actifs de type call/put ainsi que les options de taux type caps/floors peuvent avoir un sens certain dans la méthode Replicating Portfolio

Options de rachats anticipés :

Les options de rachats anticipés peuvent avoir trait au caractère des options américaines, cependant comme nous l'avons vu dans la section « management rules » le comportement des assurés n'est pas supposé rationnel vis-à-vis du marché financier, ainsi nous préférerons aborder le cas des rachats dynamiques avec des options sur swap (swaption) ou l'assuré pourra en quelque sorte arbitrer entre le taux du marché et un strike « psychologique ».

Nous pouvons synthétiser l'univers d'actifs à l'aide du tableau suivant :

Instrument	Maturité	Strike	Terme	Objectif
Zéro coupon (ZCB)	Date de « sortie » du flux			Répliquer la composante fixe du flux
Equity	Date de dénouement de la position			Répliquer les flux fortement corrélés au prix de l'action à une date donnée.
Call / Put	Date d'exercice de l'option	Strike à fixer au vu de la garantie à répliquer en fonction de : (TMG , PB contractuelle, allocation d'actifs…)		Répliquer les options implicites du passif
Floors / Caps	Durée de vie du contrat	Strike à fixer au vu de la garantie, notamment en fonction du TMG		Répliquer les options implicites du passif
Swaption (receiver/payer)	Date d'exercice de l'option	Strike à fixer en fonction du comportement de l'assuré	Durée de vie du swap	Répliquer la garantie de rachat anticipé

Pour conclure ce paragraphe, on notera qu'il est essentiel que l'actuaire ait une connaissance très précise du passif de la compagnie et on se demandera si il est réaliste de pouvoir intuiter des paramètres tel que les strikes et les sous-jacents des instruments (options de taux). Enfin, on remarquera que l'ensemble des paramètres à choisir à priori nous amène rapidement à construire un univers d'actifs « assez grand » et complexe.

2.2 Métriques de réplication

Nous avons vu que de nombreuses garanties financières sont présentes dans les contrats d'assurance vie. Cependant ces garanties ne sont pas en général purement financières mais sont aussi liées à des clauses liées à la vie ou au comportement de l'assuré, il est dès lors très difficile de trouver des portefeuilles de couverture pour ces contrats d'assurance vie même si certaines solutions existent sur des contrats particuliers.

Ainsi, lorsque l'on étudie la méthode des Replicating Portfolio il ne faut pas aborder cette méthode selon une approche type «portefeuille de couverture » au sens classique qui consisterait à trouver une stratégie permettant de couvrir parfaitement les flux auxquels devra faire face l'assureur. La notion de réplication est à considérer à un sens plus faible, justifiée par le fait que nous souhaitons utiliser le Replicating Portfolio comme approximation « du Best Estimate » à date t=1 en valeur de marché. Cela signifie comme nous l'avons vu que pour chaque simulation la valeur de marché du Replicating Portfolio sachant les conditions économiques à la date t=1 doit être très proche de la valeur de marché du Best Estimate en t=1 qui serait obtenu à l'aide des « simulations dans les simulations ». L'utilisation du Replicating Portfolio est donc plus « restreinte » que celle d'un portefeuille de couverture, il s'ensuit que la notion de réplication est à prendre à un sens plus faible à priori.

On va donc tout d'abord choisir ce que l'on nomme « métrique » c'est-à-dire définir la notion de réplication qui devra être en accord avec l'utilisation que l'on souhaite faire du portefeuille répliquant. Notons dès à présent que dans cette approche « heuristique » il ne semble pas exister de portefeuille répliquant unique et que ce portefeuille pourra dépendre de la métrique utilisée et de la méthode de détermination du portefeuille.

2.2.1 Present Value Matching

Intuitivement la réplication en present value repose sur l'idée que la market value étant égale à l'espérance de la present value sous la probabilité risque neutre, un portefeuille qui serait proche pour chaque simulation de la present value du passif pourrait avoir une market value proche de celle du passif

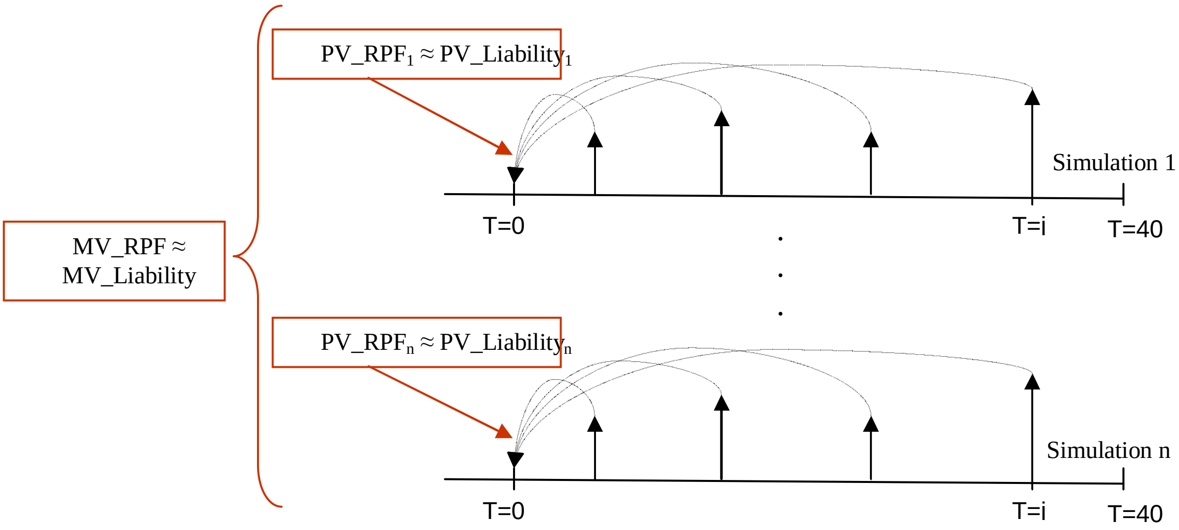
Formellement la métrique Present Value Matching peut être définie de la façon suivante :

« Deux cash flow sont similaires si et seulement si leur present value pour chaque scénario est égale. »

2.2.1.1 La minimisation des moindres carrés

Il s'agit de trouver un portefeuille d'actifs qui minimise l'écart entre la present value du passif et celle du portefeuille pour chaque simulations.

Schématiquement :



Notations :

- Present value liability simulation $i = PV\_liability(i) = \sum_{t=1}^{40} Deflateurs_i(t) * Flux\_liability_i(t)$
- Present value assets k simulation $i = PV\_assets_k(i) = \sum_{t=1}^{40} Deflateurs_i(t) * Flux\_assets_{k,i}(t)$
- Present value portfolio simulation $i = PV\_RPF(i) = \sum_{p=1}^{k} PV\_assets_k(i)$
- Market Value $= MV = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} PV(i)$ (n étant le nombre de simulations)

A partir des k actifs choisis à priori nous pouvons formuler le modèle suivant, où les poids (w_1, …, w_k) sont les inconnues du problème.

$$\forall i, \quad PV\_liability(i) = w_1 * PV\_assets_1(i) + ... + w_k * PV\_assets_k(i) + \xi(i)$$

- $i \in [1,5000]$: indice de simulations

$\xi(i)$ représente l'erreur entre la present value du passif et celle du portefeuille répliquant pour la simulation i, nous supposerons l'hypothèse classique de normalité des résidus, hypothèse qui devra ensuite être vérifiée par des tests statistiques.

Nous venons de poser le modèle de Present Value Matching, modèle qui s'apparente à une régression linéaire multiple en considérant les actifs du portefeuille répliquant comme les régresseurs. La vision « équivalente » en considérant la distance des moindres carrés est la minimisation de la fonction objective suivante :

$$f(w_1,\ldots w_k) = \sum_{i=1}^{n} [PV\_liability(i) - \sum_{j=1}^{k} w_j * PV\_assets_j(i)]^2$$

La minimisation de cette fonction conduit alors à la solution « classique » de l'équation matricielle des moindres carrés :

$$(A^T*A)*w=A^T*L$$

$$A = Assets\_matrix = \begin{pmatrix} PV\_A_1(1) & \ldots & PV\_A_j(1) & \ldots & PV\_A_k(1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ PV\_A_1(i) & \ldots & PV\_A_j(i) & \ldots & PV\_A_k(i) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ PV\_A_1(n) & \ldots & PV\_A_j(n) & \ldots & PV\_A_k(n) \end{pmatrix}$$

$$L = Liability = \begin{pmatrix} PV\_Liability(1) \\ \ldots \\ PV\_Liability(i) \\ \ldots \\ PV\_Liability(k) \end{pmatrix} \qquad w = poids = \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_i \\ \ldots \\ w_k \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation correspond alors aux poids qui minimisent au mieux le critère des moindres carrés :

$$w=(A^T*A)^{-1}*A^T*L$$

Qualité de la réplication :

Afin de contrôler la qualité de la régression nous utiliserons notamment les tests et indicateurs statistiques suivants :

- R^2
- Test de Jaque Bera

Ce test permet de vérifier la normalité des résidus (dans notre cas) et repose sur les caractéristiques du skewness et du kurtosis de la loi normale.

Les hypothèses :

H0 : « les résidus sont distribués selon une loi normale »

H1 : « les résidus ne sont pas distribués selon une loi normale »

Dans le cadre de l'hypothèse H0 on construit une statistique qui suit une loi du khi deux à deux degré de liberté. Cette statistique doit être proche de 0 pour ne pas rejeter H0, ainsi la région critique est définie par la valeur t_α tel que $\chi_{1-\alpha}(t_\alpha)=95\%$. Ainsi si $t>t_\alpha$ on rejettera l'hypothèse H0. En pratique ce test est très exigent pour l'analyse des résidus d'une régression, ainsi il se révélera souvent négatif dans notre étude.

- Test Kolmogorov Smirnov

L'idée de ce test étant de valider l'adéquation entre la fonction de répartition de la Present Value du « Replicating Portfolio » et celle du passif. Nous ne détaillerons pas ce test mais on remarquera que ce test suppose de connaître la fonction de répartition du passif ce qui n'est pas le cas dans notre étude puisque celle-ci est empirique.

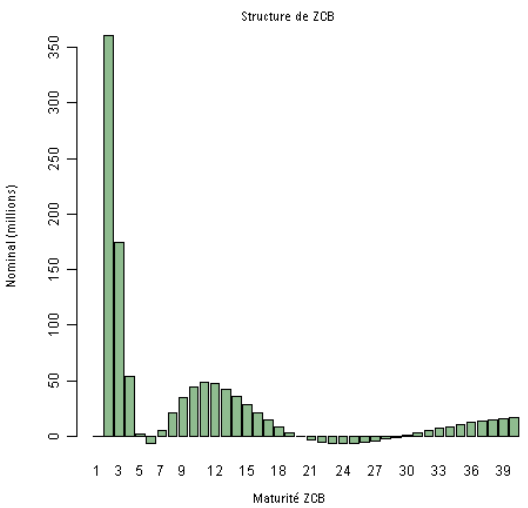
Nous visualiserons les résultats graphiquement selon trois graphiques

- Graphe de régression (plan present value RPF / present value portfolio)
- Densité RPF VS Liability
- Densité Erreurs VS Densité Normale

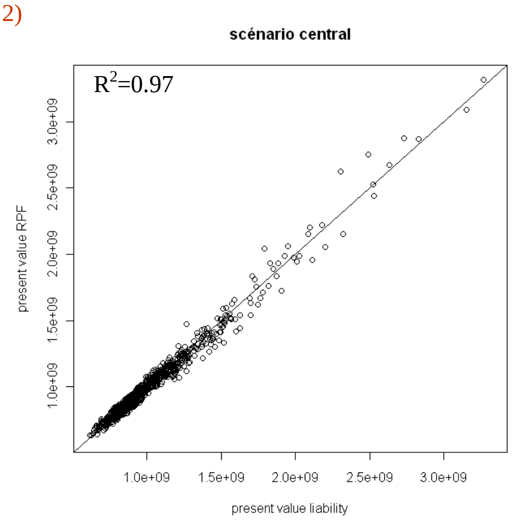
Pour comprendre pourquoi l'utilisation de la solution classique des moindres carrés peut ne pas être satisfaisante et implique l'utilisation de la régression sur composantes principales, nous allons présenter un succinctement un exemple de réplication portant sur un portefeuille de contrats épargne (exemple qui sera détaillé à la section III-2). Notons juste pour le moment le profil des poids ZCB et le graphique de régression :

Exemple : Portefeuille contrats épargne « Euros »

1)



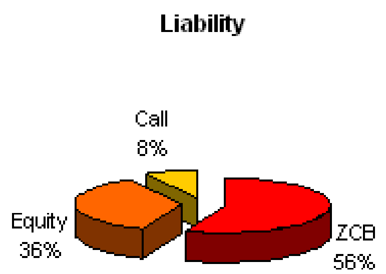
2)



Nous pouvons constater sur cet exemple que même si les critères statistiques tels que le R^2 semblent satisfaisant ceux là n'impliquent pas que le portefeuille répliquant soit « bon » comme nous le verrons dans la troisième partie. Cependant dans cette première illustration nous allons plutôt nous focaliser sur les valeurs numériques des poids.

Tout d'abord si l'on représente le pourcentage représenté par les actifs ZCB au sein de la market value du portefeuille nous remarquons que celui-ci est très important.

Répartition des actifs :



Cela signifie que ces actifs jouent un rôle relativement prépondérant dans la réplication, en quelque sorte ils forment une base de flux non aléatoire. Les actifs equity ainsi que les calls sur action introduisent quant à eux une certaine volatilité qui permet de capter les mouvements de plus grande amplitude lié à l'investissement en actions d'une partie de l'actif en face des passifs.

Un point essentiel à souligner concerne les poids que nous venons de déterminer, en effet lorsque nous analysons la valeur des poids des ZCB nous observons une alternance de signe positif et négatif, ce qui selon une approche « couverture » signifierait des positions short-long. Cet aspect est contre-intuitif, nous nous attendions en effet à une structure de ZCB décroissante représentant une certaine allure « d'écoulement décroissant ».

Comme nous allons le voir à partir de l'analyse en composante principale de la matrice des assets, ce manque de stabilité est en fait dû à la forte corrélation entre les variables explicatives. Par exemple, intuitivement cela est confirmé par le fait que le prix du ZCB à 2 ans est fortement lié à la valeur du ZCB à 3 ans. Ce problème de corrélation se traduit en pratique par une quasi-colinéarité dans la matrice A^T*A synonyme de quasi-non inversibilité.

2.2.1.2 La régression sur composantes principales

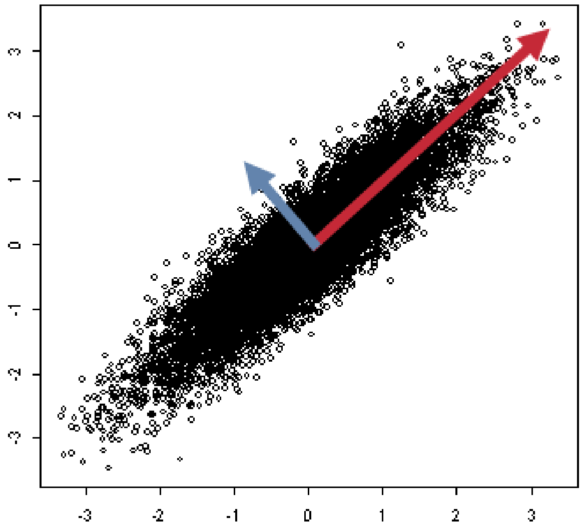
L'approche générale de la régression sur composantes principales est d'utiliser lors de la régression les axes principaux de la matrice des régresseurs. Ces axes sont en effet orthogonaux entre eux vis-à-vis du produit scalaire défini à l'aide de la covariance et apportent alors de la stabilité aux résultats de la régression.

Avant de préciser son application dans le cadre des Replicating Portfolio, nous pouvons rappeler quelques éléments de l'analyse en composante principale.

Rappel méthode Analyse en Composante Principale :

L'analyse en Composante Principale est une méthode statistique très efficace dans le traitement de données multis-facteurs où l'on s'intéresse à obtenir une vision synthétique des facteurs les plus influençant. D'un point de vue « intuitif », en utilisant une représentation des individus dans le plan des variables, la méthode consiste à chercher les directions de l'espace qui explique au mieux la variance de l'échantillon. Ces directions sont en fait les vecteurs propres de la matrice de corrélations (ou de covariance) des variables, la valeur propre associée représente le pourcentage de variance expliquée.

Illustration sur un nuage de points à deux dimensions :



En rouge, la composante principale qui explique le plus de variance du nuage de points et en bleu la seconde orthogonale à la première.

Nous pouvons désormais passer à l'analyse en composantes principales de la matrice des assets tirée de l'exemple précédent. Deux choix s'offrent alors à nous, d'une part considérer la matrice de variance-covariance des données centrées et d'autre part considérer la matrice variance-covariance des données centrée-réduites qui est alors la matrice de corrélation. Ces deux approches ne sont pas équivalentes puisque la deuxième approche permet en quelque sorte de ramener toutes les variables sur la même base unitaire.

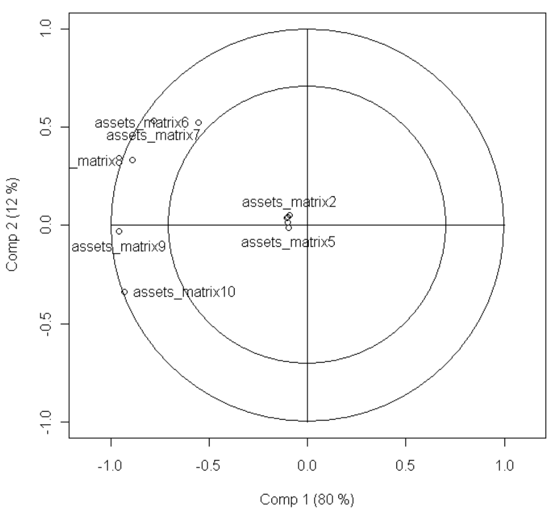
Illustrons ce point en visualisant le cercle des corrélations ainsi que les composantes principales sur la base des variables sur un exemple simple.

Analyse des composantes principales sur la matrice des assets :

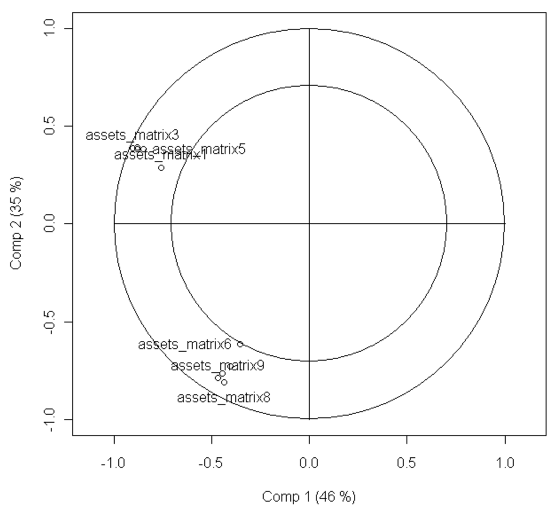
On considère la matrice dont les 5 premiers actifs correspondent aux zéro-coupons de maturité 2 à 6 ans, les 5 derniers aux equity de maturité 2 à 6 ans.

Cercle des corrélations :

Données centrées



Données centrées-réduites



Composantes principales :

Données centrées

Loadings:

	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10
assets_matrix1							-0.282	0.568	-0.599	-0.484
assets_matrix2						0.194	-0.587	0.447	0.234	0.602
assets_matrix3						0.361	-0.540	-0.346	0.403	-0.544
assets_matrix4						0.544		-0.477	-0.605	0.317
assets_matrix5						0.729	0.523	0.360	0.241	
assets_matrix6	-0.149	0.372	-0.591	0.418	0.562					
assets_matrix7	-0.312	0.559	-0.338	-0.199	-0.661					
assets_matrix8	-0.430	0.422	0.482	-0.450	0.449					
assets_matrix9	-0.539		0.410	0.705	-0.206					
assets_matrix10	-0.636	-0.608	-0.369	-0.293						

Données centrées réduites

Loadings:

	Comp 1	Comp 2	Comp 3	Comp 4	Comp 5	Comp 6	Comp 7	Comp 8	Comp 9	Comp 10
assets_matrix1	-0.356	0.155	0.185	-0.750			0.403	0.219	0.168	
assets_matrix2	-0.413	0.205		-0.236			-0.527	-0.267	-0.589	-0.136
assets_matrix3	-0.422	0.209		0.139			-0.361	-0.165	0.597	0.494
assets_matrix4	-0.413	0.210		0.329			0.116		0.266	-0.762
assets_matrix5	-0.397	0.207	-0.134	0.406	-0.102		0.439	0.249	-0.443	0.395
assets_matrix6	-0.166	-0.330	0.699	0.131	-0.554	0.215				
assets_matrix7	-0.208	-0.412	0.311	0.106	0.446	-0.670	0.155			
assets_matrix8	-0.205	-0.437		0.104	0.492	0.541	-0.213	0.412		
assets_matrix9	-0.219	-0.424	-0.341			0.261	0.313	-0.691		
assets_matrix10	-0.189	-0.392	-0.476	-0.210	-0.468	-0.362	-0.231	0.369		

L'analyse des composantes principales et des cercles des corrélations montre que lorsque l'on effectue l'ACP sur les variables non-réduites, les premières composantes principales n'expliquent pas les actifs 1 à 5 qui sont les zéro-coupons, ces actifs sont en effet placés au centre du cercle des corrélations donc très mal expliqués par les deux premières composantes. Cela ce visualise aussi sur « les coordonnées » des composantes principales. Les actifs ZCB présentant une variance beaucoup plus faible se trouvent alors dans les « dernières » composantes principales. Dès lors, il semble plus intéressant d'utiliser l'ACP sur les variables centrées-réduites de façon à conserver les ZCB qui doivent jouer un rôle dans la réplication.

Après cette approche intuitive de l'ACP, nous pouvons formaliser la méthode de régression sur composantes principales.

Régression sur les composantes principales :

On commence tout d'abord par centrer et réduire la matrice des assets :

$$\text{Assets} = A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & A_{i,j} & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,k} \end{pmatrix} \Longrightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}-\tilde{A}_1}{\sigma(A_1)} & \cdots & \frac{A_{1,k}-\tilde{A}_k}{\sigma(A_k)} \\ \vdots & \frac{A_{i,j}-\tilde{A}_j}{\sigma(A_j)} & \vdots \\ \frac{A_{n,1}-\tilde{A}_1}{\sigma(A_1)} & \cdots & \frac{A_{n,k}-\tilde{A}_k}{\sigma(A_k)} \end{pmatrix}$$

Remarque : Pour des raisons de clarté dans les écritures, on note $PV\_A_{i,j}=A_{i,j}$

A partir de la matrice des Assets centrée-réduite, nous pouvons calculer la matrice de corrélation :

$$C = \frac{1}{k} * \tilde{A}' * \tilde{A}$$

Cette matrice est une matrice symétrique réelle donc celle-ci est diagonalisable dans une base orthonormée. Les vecteurs propres ($PC_1,\dots,PC_k$) sont appelés les composantes principales, et nous pouvons noter PC la matrice des composantes principales qui correspond à la matrice de passage de la base des variables originelles à la base des composantes principales.

$$PC = \begin{bmatrix} PC_{1,1} & \cdots & PC_{1,k} \\ \vdots & PC_{i,j} & \vdots \\ PC_{k,1} & \cdots & PC_{k,k} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres associées ($\lambda_{1,\dots,}\ \lambda_k$) correspondent au pourcentage de variance expliquée par chaque composante principale. En ordonnant, les composantes principales en ordre décroissant vis-à-vis des valeurs propres correspondantes, on peut sélectionner les $p<k$ composantes principales qui expliquent (en cumulé) un seuil de variance prédéterminé. En pratique ce seuil sera fixé au environ de 98%.

Nous obtenons une matrice PC tronquée qui n'est donc plus une matrice de changement de base mais qui conserve une grande partie de l'information :

$$PC' = \begin{bmatrix} PC_{1,1} & \cdots & PC_{1,p} \\ \vdots & PC_{i,j} & \vdots \\ PC_{k,1} & \cdots & PC_{k,p} \end{bmatrix}$$

La régression va être ensuite effectuée dans la nouvelle base des composantes principales, pour cela il faut projeter le nuage de points dans cette nouvelle base, ce qui s'obtient aisément à partir de la formule de projection :

$$\text{Present Value des composantes principales} = PVPC = A * PC'$$

Le modèle est alors réécrit de la façon suivante :

$$\forall i, \quad PV\_liability(i) = w_1 * PVPC_1(i) + \ldots + w_p * PVPC_p(i) + \xi(i)$$

- $i \in [1,5000]$: indice de simulations

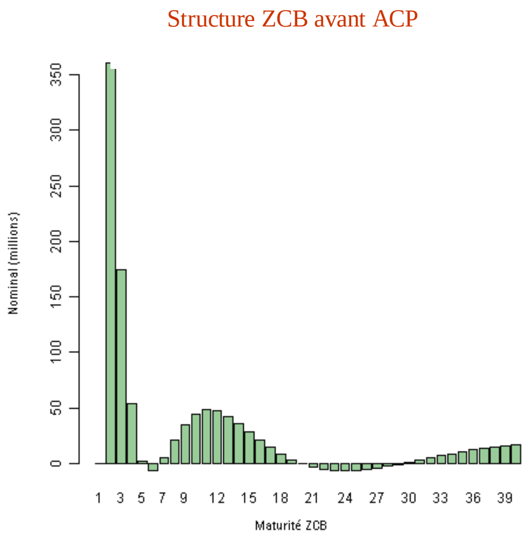
En utilisant une minimisation des moindres carrés, on obtient la solution w_{PC} dans la base des composantes principales :

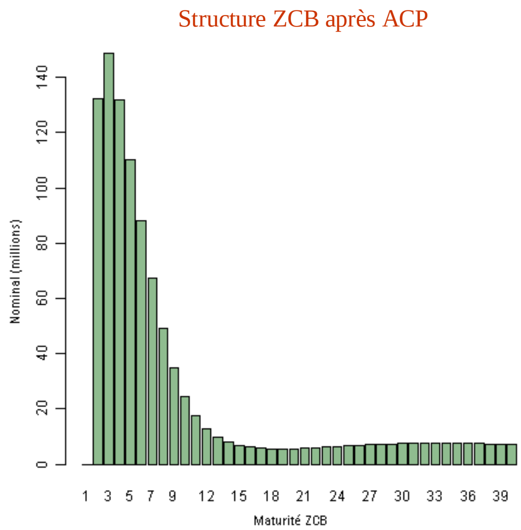
$$w_{PC} = (PVPC^T * PVPC)^{-1} * (PVPC^T * L)$$

Afin d'obtenir la solution dans la base initiale des actifs, nous utilisons la matrice de changement de base :

$$w = PC' * w_{PC}$$

Nous pouvons illustrer l'effet de la régression en ACP sur l'exemple précédent :





Nous commenterons cette méthode et les aspects qui lui sont liés dans le calcul de la VaR ou encore des sensibilités du portefeuille dans la partie limites et aspects du Replicating Portfolio. Nous pouvons cependant conclure la présentation de cette métrique à l'aide d'une remarque intuitive concernant la Present Value Matching. En faisant le constat simple que selon cette métrique un euro à 5 ans peut être similaire à un euro dans six ans en jouant sur les taux d'actualisation et du fait de la corrélation entre les taux à différentes maturités, nous pouvons constater que cette méthode tend à perdre de l'information temporelle même si une partie de cette information est contenue dans l'actualisation par le déflateur. Il semble donc intéressant d'introduire une métrique de réplication qui conserve une bonne approximation de la market value tout en apportant une dimension temporelle à la réplication. La métrique de Present Cash-Flow Matching semble pouvoir répondre à cette problématique.

2.2.2 Present Cash Flow Matching :

Comme nous venons de l'introduire, le but de la méthode Present Cash-Flow Matching est double :

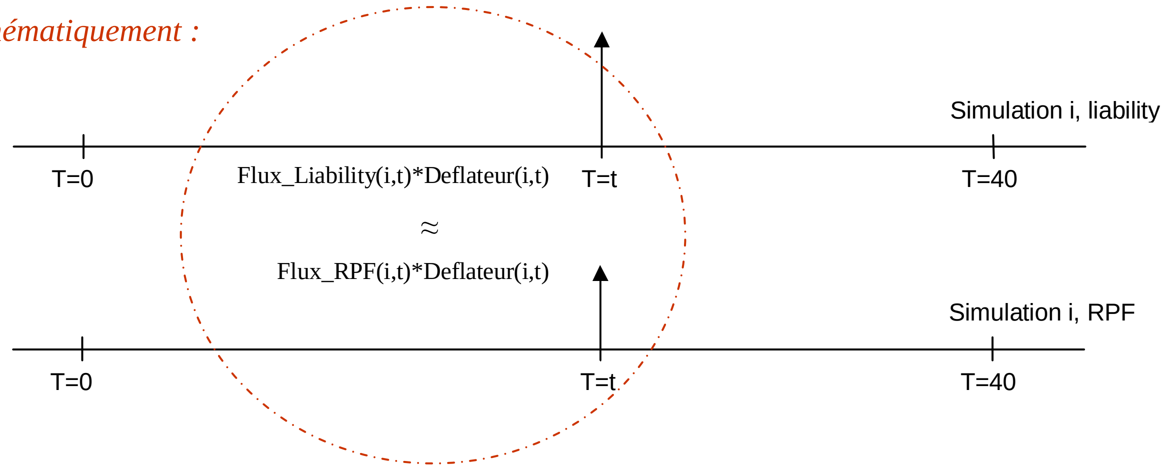
- Conserver une dimension temporelle dans la réplication
- Trouver une bonne approximation de la present value du passif pour chaque scénario et ainsi obtenir une approximation de la market value

La métrique en Present Cash-Flows Matching peut être définie de la façon suivante :

> *« Deux cash flow sont similaires si et seulement si leurs flux actualisés sont égaux à toutes dates et pour chaque scénario»*

On peut cependant de suite s'interroger quant à la faisabilité d'une telle réplication, en effet celle-ci semble très contraignante puisqu'elle impose une contrainte sur l'ensemble des dates et des scénarios. Il se peut alors que l'univers d'actifs ne soit pas assez grand ou encore qu'il n'existe pas de solutions satisfaisantes c'est-à-dire suffisamment « réplicantes » au vu des critères statistiques.

Schématiquement :



En utilisant la même logique de notation qu'à la section 3-1), nous pouvons définir la present value d'un flux à d'une date et pour une simulation donnée.

Notation :

$$\bullet \text{ Present value flux date } t, \text{simulation } i = PV\_flux(i,t) = Deflateurs(i,t) * flux(i,t)$$

Modèle :

$$\forall i,t \;\; PV\_flux\_liability(i,t) = w_1 * PV\_flux\_assets_1(i,t) + \ldots + w_k * PV\_flux\_assets_k(i,t) + \xi(i,t)$$

- $i \in [1:5000]$
- $t \in [1:40]$

Remarquons que sous cette forme le problème n'est plus tout à fait un problème de type « régression linéaire » puisque celui-ci fait apparaître deux dimensions.

En utilisant la distance des moindres carrés, le problème peut être vu par la minimisation en $(w_1,\ldots,w_k)$ de la fonction suivante :

$$f(w_1,\ldots w_k) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{40}\left(PV\_flux\_liability(i,t) - \sum_{j=1}^{k} w_j * PV\_flux\_asset_j(i,t)\right)^2$$

Il s'agit de la minimisation d'une somme double, ce qui ne permet pas d'utiliser directement la solution des moindres carrés.

Cependant en utilisant un indice synthétique qui parcourt n*40, nous pouvons réécrire la fonction sous la forme suivante :

$$f(w_1,\ldots w_k) = \sum_{p=1}^{n*40}\left(PV\_flux\_liab(p) - \sum_{j=1}^{k} w_j * PV\_flux\_asset_j(p)\right)^2$$

Où :

$$PV\_flux\_liab = \begin{pmatrix} PV\_flux\_liab(1,1) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(1,i) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(1,40) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(i,j) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(n,40) \end{pmatrix} \qquad PV\_flux\_assets_k = \begin{pmatrix} PV\_flux\_asset_k(1,1) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(1,i) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(1,40) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(i,j) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(n,40) \end{pmatrix}$$

Le modèle peut alors se représenter sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} PV\_flux\_liab(1,1) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(1,i) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(1,40) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(i,j) \\ \ldots \\ PV\_flux\_liab(n,40) \end{pmatrix} \approx w_1 \begin{pmatrix} PV\_flux\_asset_1(1,1) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_1(1,i) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_1(1,40) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_1(i,j) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_1(n,40) \end{pmatrix} + \ldots + w_k \begin{pmatrix} PV\_flux\_asset_k(1,1) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(1,i) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(1,40) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(i,j) \\ \ldots \\ PV\_flux\_asset_k(n,40) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi(1,1) \\ \ldots \\ \xi(1,i) \\ \ldots \\ \xi(1,40) \\ \ldots \\ \xi(i,j) \\ \ldots \\ \xi(n,40) \end{pmatrix}$$

On obtient alors une solution du problème de la même façon que celle obtenue dans le cas de la régression linéaire multiple de la section 2-1-1 :

$$(A^T*A)*w=A^T*L$$

La matrice A des assets est une matrice de taille n*40 ce qui accroît considérablement la taille du système. Il est intéressant de remarquer que les problèmes de quasi-colinéarité des colonnes de la matrice des assets sont désormais beaucoup moins présents puisque par construction les actifs forment en quelque sorte une base ce qui peut être vu sur l'exemple qui suit.

Remarque : En considérant les cinq premiers ZCB on obtiendrait une matrice de la forme suivante

$$Assets = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0.92 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0.87 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0.80 & 0 \\ 0.97 & \vdots & 0 & \vdots & 0.75 \\ \vdots & 0.93 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0.88 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots & 0.79 & \vdots \\ 0.99 & \vdots & 0 & \vdots & 0.72 \\ \vdots & 0.95 & \vdots & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

Qualité de la réplication :

Afin de contrôler la qualité de la réplication, nous pouvons utiliser les critères statistiques et les tests statistiques propres à la régression, c'est-à-dire que nous pouvons nous intéresser aux critères concernant la present value du portefeuille répliquant. Ainsi de la même façon qu'à la section 2-2-1-1), on étudiera :

- Le nuage de points dans le plan Present Value Portfolio / Present Value Liability (plan contenant n points)
- La distribution de la Present Value
- La distribution des erreurs

L'apport de la méthode pourra être visualisé à partir du diagramme des flux :

- Diagramme des flux RPF / Liability
- Diagramme des quantiles RPF / Liability

Ces deux derniers graphiques permettent un contrôle d'ordre qualitatif concernant la réplication de la séquence de flux.

On pourra enfin étudier la droite des moindres carrés dans le plan où l'on effectue la minimisation c'est-à-dire le plan composé des n*40 points, son interprétation est difficile puisque celle-ci « mélange » des flux de différents horizons

Remarque : Le Present Cash-Flows Matching est très similaire au Cash-Flow Matching mis à part que par le biais de l'actualisation on accorde plus d'importance au flux de premières années c'est-à-dire proche de nous. Notons cependant que cela introduit une plus grande variance sur les flux lointains et que cela entraine peut-être une dégradation des résultats de la régression ainsi qu'une plus grande difficulté à trouver les actifs répliquants.

2.2.3 Questions / Problématiques liées au calcul de la VaR

Comme nous l'avons vu, la méthode du « Replicating Portfolio » utilise comme données des scénarii issus de t=0. Les différentes métriques permettent de déterminer un portefeuille qui minimise une fonction objective que l'on s'est fixée. Des critères statistiques ainsi que des tests sur des scénarii choqués tels que les sensibilités permettent de voir comment se comporte le portefeuille répliquant et de juger de la qualité de la réplication du passif en t=0.

Cependant, peut-on alors utiliser ce portefeuille répliquant en t=1 ? Puisque nous ne connaissons pas la distribution du passif à horizon 1 an, quelle crédibilité peut-on donner à la distribution déterminée en utilisant le Replicating Portfolio? Le but de cette partie n'est pas de répondre à ces questions mais plutôt de comprendre en quoi ces aspects sont problématiques.

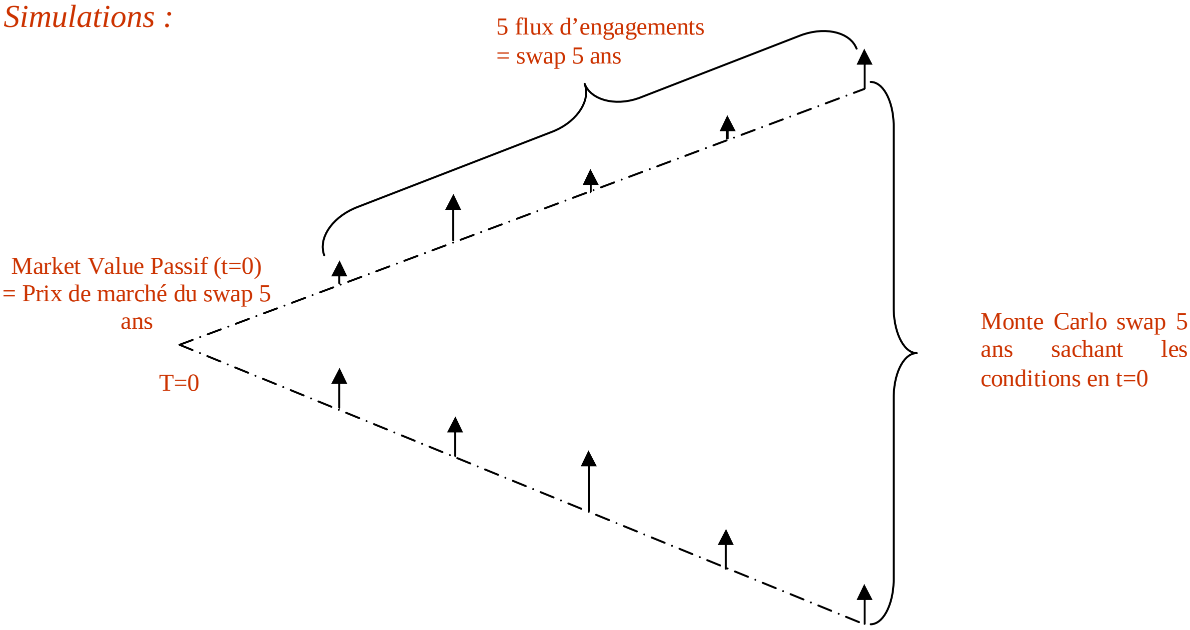
2.2.3.1 Calcul de la distribution du passif

Pour essayer de comprendre ces aspects nous allons illustrer notre propos à l'aide d'un passif fictif simple qui nous permettra d'aborder ces problèmes d'un point de vue purement qualitatif.

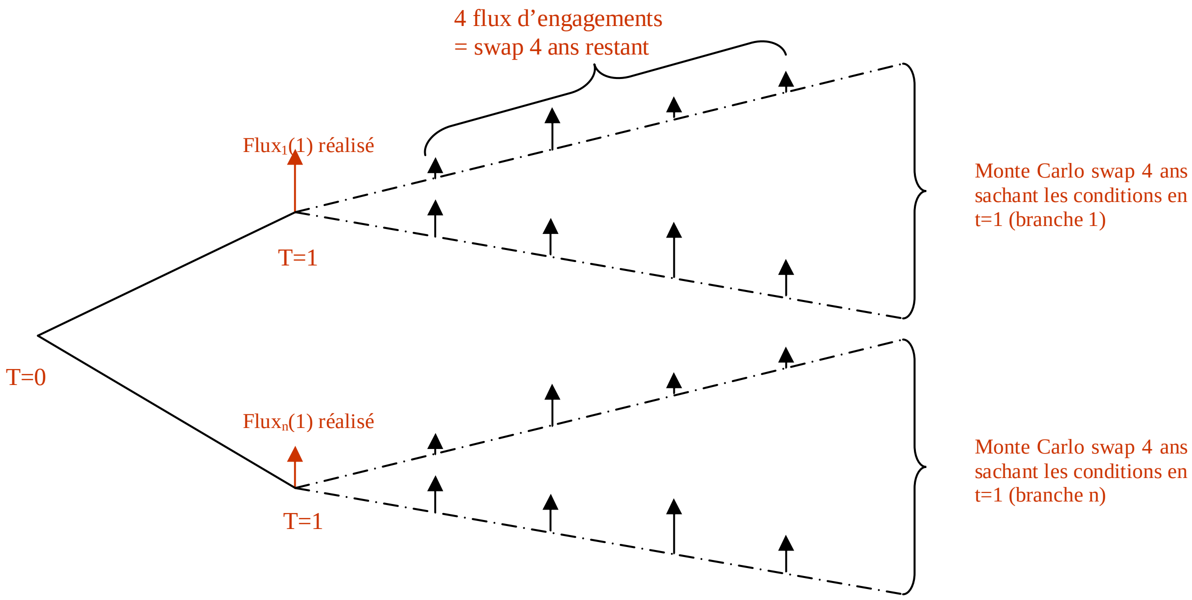
Exemple :

Imaginons que la compagnie d'assurance ait pour passif un swap de taux d'une maturité de 5 ans sur un taux arbitraire de 2,5%. Présentons alors le calcul de la distribution du passif. À t=0, le passif de la compagnie est un swap de taux à horizon 5 ans et la projection de 5000 scénarios risque neutre permet de valoriser ce swap à sa valeur de marché.

Simulations :



Le calcul de la VaR est alors le suivant, en « avançant » dans le temps l'engagement de l'assureur devient un swap sur taux de maturité 4 ans en t=1. En effet, si l'assureur honore son engagement en t=1 il aura payé la jambe fixe et reçu la jambe variable correspondant au flux en t=1, l'engagement restant sera bien un swap de maturité 4 ans vu de t =1.



En utilisant l'approche du portefeuille répliquant, il suffit alors de valoriser le portefeuille (ici le swap de 4 ans) selon les conditions économiques qui prévalent en t=1.

On peut conclure à l'aide de cet exemple et selon une approche par portefeuille de couverture qu'il faut logiquement :

- Eliminer les instruments de maturité 1 an puisqu'ils correspondent à des flux écoulés.
- Ajuster les maturités des instruments c'est-à-dire les diminuer d'un an.

Une fois le portefeuille réajusté, nous pouvons valoriser celui-ci à l'aide de formules fermées ce qui nous permet d'obtenir les différentes market value du passif à 1 an selon les conditions de marché. L'actualisation de ces valeurs par les déflateurs de première année correspondantes permet de déterminer la distribution du passif.

Nous venons d'expliciter la logique de calcul de la VaR en considérant un portefeuille qui répliquerait parfaitement chaque flux dans une approche par simulation. Examinons quels problèmes nous pouvons anticiper vis-à-vis des métriques que nous avons présentées.

2.2.3.2 « Intuition » du rôle de la métrique dans le calcul de la distribution

En comparant les deux méthodes de Present Value Matching et Cash Flows Matching nous pouvons comprendre à présent l'élément essentiel qui les distingue.

Present Value Matching :

La réplication de la present value ne semble pas permettre le calcul d'une VaR, en effet cette méthode résume une séquence de flux (un cash-flow) en une seule variable qui est la valeur actuelle (present value). On perd donc l'information temporelle concernant la sortie de chaque flux. Cette information est certes contenue dans l'actualisation, cependant peut on pour autant considérer que les maturités des instruments renvoient réellement à une date de sortie de flux ? Il semble que la réponse à cette question est négative comme nous le verrons sur les exemples concrets ou l'on peut par exemple répliquer un flux de zéro-coupons à l'aide d'un portefeuille de zéro-coupons où l'effet de compensation est très visible. Les poids déterminés par cette méthode doivent donc se lire de façon cumulée.

Le calcul de la VaR à partir de cette méthode ne semble alors pas envisageable si l'on utilise ce portefeuille de la même façon qu'un portefeuille de couverture.

Present Cash-Flows Matching :

La méthode Present Cash-Flows Matching se distingue essentiellement par le fait que l'on peut associer la maturité de l'instrument à la date de sortie du flux du passif. Ainsi pour un passif de 40, il est nécessaire d'avoir au minimum 40 instruments. Le raisonnement de calcul de la VaR semble pouvoir être envisageable, en effet par cette méthode on se rapproche de l'idée d'un portefeuille de couverture. Notons tout de même qu'il ne s'agit en aucun cas d'un portefeuille de couverture puisque celui-ci est déterminé sur des scénarios simulés qui ne représentent qu'un sous-ensemble des états possibles du monde. Ainsi même si ce portefeuille était parfaitement répliquant sur un jeu de scénarii il pourrait très bien s'avérer non-répliquant sur d'autres scénarii.

La présentation «intuitive » des aspects liés au calcul de la VaR permet de soulever un problème bien plus « profond » à la méthode. Quelle que soit la métrique de réplication utilisée, la détermination du portefeuille répliquant est effectuée à partir des scénarios simulés à t=0. Les différents critères de « qualité » permettent de confirmer ou non la qualité de réplication sur ces scénarios. L'utilisation prévisionnelle du portefeuille répliquant est alors en lien avec d'autres scénarii qui seraient simulés à t=0. Or pour le calcul de la VaR nous souhaiterions utiliser le caractère prévisionnel pour des scénarii simulés à partir de t=1, ce qui d'un point de vue passif est complètement différent. Nous n'avons donc aucun critère d'erreur ou autre pour l'utilisation de ce portefeuille répliquant dans le calcul de la VaR. Nous reviendrons sur ce point lors de la conclusion sur les limites de la méthode.

Intéressons nous désormais au pricing du portefeuille répliquant.

2.2.3.3 Pricing du portefeuille répliquant / Calcul des sensibilités

Pricing du portefeuille répliquant :

L'objectif de ce mémoire n'ayant pas été « axé » sur le pricing du portefeuille répliquant et au vu de la complexité des modèles stochastiques du modèle Prophet ALS nous avons utilisé une approche selon le modèle « classique » de Black et Scholes. Il s'agit d'une première approche concernant la valorisation du portefeuille répliquant qui mériterait d'être étudiée plus précisément. Nous allons préciser ici le pricing des options sur actions. Les options sur taux sont valorisées de la même façon selon le modèle de Black. Ce pricing a été effectué pour permettre le calcul des sensibilités ainsi que de visualiser les résultats sur la VaR. En pratique le portefeuille répliquant et le calcul de la VaR seront effectués à l'aide d'un logiciel externe

ZCB et equity :

En ce qui concerne ces actifs répliquants, leur valorisation ne pose pas de problèmes puisque la valeur de ces instruments se déduit directement des tables stochastiques. En effet celles-ci renseignent sur les prix des zéro-coupons de maturité 1-2-3-5-10-15-30 ans, les autres maturités étant déduites par interpolation linéaire.

Les positions sur equity sont simplement déduites du prix de l'action en t=0 (ou t=1 selon la valorisation que l'on considère) par le principe de non-arbitrage. En effet une position sur action est équivalente à l'achat ou la vente de celle-ci à t=0 qui aboutirait au même payoff à maturité.

Call / Put :

Au vu de la complexité du modèle action et du modèle de taux, nous avons choisi d'utiliser le modèle de Black-Scholes en accord avec la structure par termes de taux d'intérêt.

Nous prendrons donc comme taux d'intérêt le taux ZCB associé à la maturité correspondante. Il reste alors à déterminer la volatilité du modèle.

En supposant le modèle du brownien géométrique, on a l'égalité suivante :

$$S_t = S_0 e^{((r_t - \frac{\sigma_t^2}{2})t + \sigma W_t)}$$

En passant au logarithme et en utilisant les propriétés de l'opérateur d'espérance et de variance :

$$E[\ln(S_t)] = (r_t - \frac{\sigma_t^2}{2}) * t$$
$$Var[Ln(S_t)] = \sigma^2 * t$$

On peut alors estimer la volatilité à l'aide de la moyenne ou encore de la variance empirique. On obtient alors une volatilité de 28% qui est quasi indépendante de la maturité de l'option. On utilisera alors ce paramètre en première approche.

Remarque : On pourrait tout aussi bien calculer les prix à t=0 des options par un calcul de type Monte-Carlo et en déduire la volatilité implicite.

Le pricing des autres instruments ne sera pas explicité dans ce rapport mais il se base sur le modèle de Black.

Les sensibilités :

A partir de la valorisation du portefeuille répliquant il est alors aisé de calculer les sensibilités de celui-ci en choquant les paramètres du modèle.

Nous pourrons alors calculer les sensibilités suivantes :

- Chocs de taux (déplacement parallèle de la courbe de taux d'intérêt)
- Chocs sur la volatilité des actions

A l'aide du pricing que nous avons effectué, nous ne pourrons pas calculer les sensibilités suivantes :

- Chocs sur la volatilité des taux

En effet, dans le modèle de Black Scholes que nous avons utilisé la volatilité des taux n'intervient pas puisque nous utilisons une structure de taux « constante ». Dans une approche plus rigoureuse cette sensibilité pourrait être calculée.

Nous pourrons alors comparer les trois sensibilités suivantes :

- Sensibilité du passif calculé par la méthode de Monte-Carlo (scénarios choqués)
- Sensibilité du portefeuille répliquant calculé par la méthode de Monte-Carlo (scénarios choqués)
- Sensibilité du portefeuille répliquant calculé à l'aide des formules fermées

3 Mise en pratique de la méthode des Replicating Portfolio

Dans cette section nous allons présenter des exemples concrets de mise en pratique de la méthode des Replicating Portfolio. Nous introduirons tout d'abord le cas d'un contrat fictif type contrat épargne (capital différé) avec un paiement à terme de type « financier », cela nous permettra de déterminer le portefeuille de couverture parfait. L'introduction d'actifs polluants permettra d'illustrer le caractère discriminant de la métrique. Nous calculerons aussi les VaR associées, ce calcul sera fait à partir des scénarii risque neutre puisque nous n'avons pas eu à disposition les tables « historiques ».

Nous présenterons ensuite l'aspect comptable qui permettra de se rapprocher d'un contrat réel d'épargne. Suite à ce premier exemple, nous étudierons la réplication d'un portefeuille de contrats épargne proche d'un exemple réel en étudiant le rôle de l'allocation d'actifs ainsi que des dotations aux différentes provisions. Cet exemple sera l'occasion de comprendre l'influence de la comptabilité dans le modèle.

3.1 *Introduction à un contrat d'épargne avec garanties*

3.1.1 Présentation du contrat « fictif » d'un point de vue financier

Nous allons donc considérer le contrat portant les caractéristiques suivantes :

Point de vue de l'assuré :

L'assuré verse une prime unique à la date t=0 de 1000 Euros.

Point de vue de l'assureur :

L'assureur s'engage à verser à terme du contrat (5 ans) :

- La prime capitalisée au taux minimum garanti de 2,5%
- 85% de ces produits financiers

Il considère alors l'allocation d'actifs suivante :

- 20% d'actions
- 80% d'obligations zéro-coupons à maturité 5 ans (investissement au taux sans risque à 5 ans déterminé par la structure de taux initiale)

Schématiquement :

- Taux minimum garantie : 2,5%
- Taux de PB : 85%
- Allocation d'actifs:
  - o 80 % taux sans risque à 5 ans
  - o 20 % equity

- Prime initiale : 1000 €
- Maturité : 5 ans

Le payoff du produit à maturité est donc le suivant :

$$\boxed{\mathrm{Payoff}(t=5)=\mathrm{Prime}*(1+2.5\%)^5+\mathrm{Prime}*\max(85\%*\mathrm{Fond}(t=5)-(1+2.5\%)^5,0)}$$

En effet, le contrat stipule un taux minimum garanti à 2,5% annuel, ce qui introduit un flux certain à maturité correspondant à la capitalisation de la prime à 2,5%. Concernant la partie optionnelle, avec une participation aux bénéfices (PB) de 85% sur l'ensemble des revenus financiers, l'assuré se voit offrir un call sur le « fond » avec un strike à $(1+2{,}5\%)^5$.

Au vu de l'allocation fixe :

$$\mathrm{Fond}(t=5)=S_5+(1+tx_{5ans})^5$$

Nous pouvons réécrire le payoff de la façon suivante et ainsi faire apparaître un call sur action

$$\boxed{\mathrm{Payoff}(t=5)=\mathrm{Prime}*(1+2.5\%)^5+20\%*85\%*\mathrm{Prime}*\max(S_5-\frac{(1+2.5\%)^5-85\%*80\%*(1+tx_{5ans})^5}{20\%*85\%},0)}$$

Le portefeuille de couverture de ce produit peut être déterminé :

Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	5 ans		Prime*(1+2.5%)^5 = 1131
CALL (sur	5 ans	1.8402	20%*80%*Prime = 170

Avant de passer aux résultats de la réplication par les deux métriques exposées à la section 2-2), nous allons conclure la présentation de ce produit fictif en présentant quelques clauses spécifiques à l'assurance vie qui nous éloignent de cet exemple fictif :

- Un contrat d'assurance-vie comporte toujours une clause liée à la vie de l'assuré, or sur cet exemple ce n'est pas le cas. On peut ainsi imaginer que si l'assuré décède avant l'échéance de son contrat, un versement à un tiers pourrait avoir lieu. Le payoff écrit ci-dessus serait donc conditionné par l'évènement l'assuré est en vie et le portefeuille de couverture précédemment déterminé ne serait plus valable. Ce problème pourrait cependant être « éliminé » par mutualisation des risques de décès sur un portefeuille d'assurés, en effet le passage à un niveau macro entraîne une mutualisation des risques de mortalité et l'usage d'une table de mortalité déterministe viendrait en quelque sorte pondérer les payoffs des différents contrats ce qui pourrait jouer en faveur d'une réplication de la sorte.
- Dans de nombreux cas les contrats d'assurance vie stipulent une clause de rachat, cela signifie que l'assuré peut racheter son contrat lorsqu'il le souhaite (cf management rules pour les rachats dynamiques). On peut imaginer que ce type de clause est réplicable par des options de type américaines,cependant,comme nous l'avons vu, le comportement de l'assuré n'est pas considéré comme rationnel d'un point de vue financier, il ne raisonnera pas forcément selon une approche d'arbitrage.

3.1.2 Premiers résultats de réplication / VaR

3.1.2.1 Les replications

Dans ce paragraphe nous allons effectuer trois réplications en spécifiant des univers d'actifs différents :

a. uniquement avec le portefeuille de couverture de façon à tester la méthode
b. avec le portefeuille de couverture et des actifs « polluants »
c. avec un portefeuille imparfait

a) <u>Réplication avec le portefeuille de couverture</u>

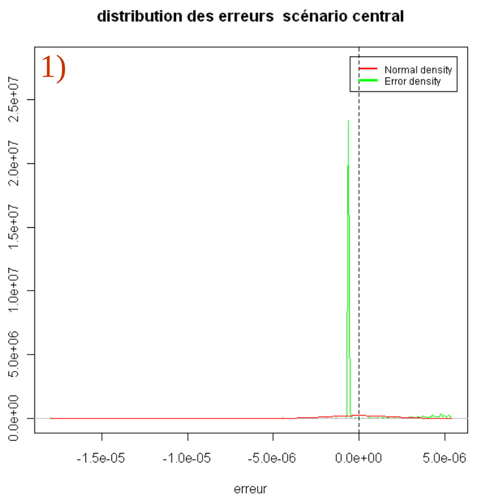
Nous illustrons les résultats des deux méthodes Present Value Matching et Present Cash-Flow matching en utilisant le portefeuille de couverture comme univers d'actifs. Nous nous attendons évidemment à ce que les deux méthodes retrouvent la composition exacte du portefeuille de couverture (poids déterminés à la section 1-1))

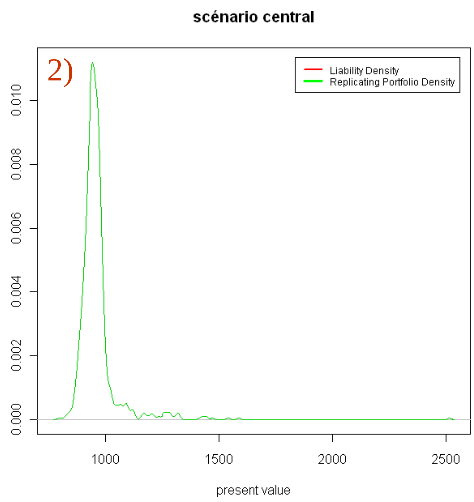
Univers d'actifs :

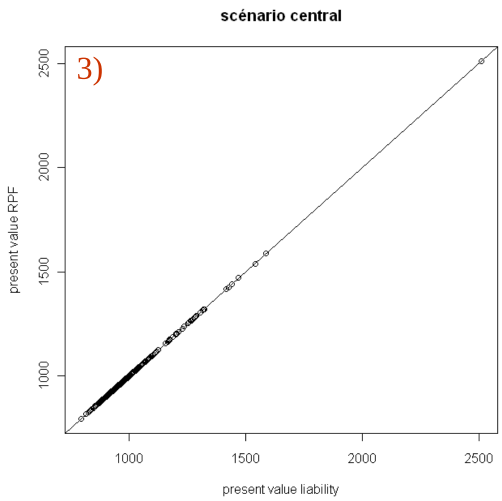
Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	5 ans		?
CALL (sur action)	5 ans	1.8402	?

Present Value Matching (seuil de variance à 98%):

Analyse graphique







Critère	
R^2	1
Jarque Bera	0
Kolomogorov	1

Figure 1: Les erreurs étant très faibles, ce graphique n'est pas très lisible et n'a pas de signification vis-à-vis de la normalité des résidus.
Figure 2 : La densité du portefeuille répliquant est confondue avec celle du liability ce qui est confirmé par le test de Kolmogorov (test qui est cependant à relativiser compte tenu du fait que l'on ne connaît pas la distribution réelle du passif).
Figure 3 : La première bissectrice du plan est parfaitement alignée sur le nuage de point dans le plan Present Value RPF / Present Value Liability

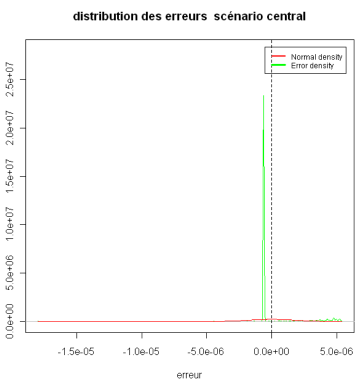
Portefeuille répliquant :

Instrument	Maturité	Strike	Poids	p-value
ZCB	5 ans		1131	0.0
CALL (sur action)	5 ans	1.8402	170	0.0

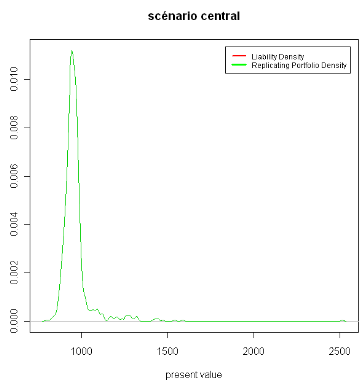
On retrouve donc logiquement la composition du portefeuille de couverture.

Present Cash-Flow Matching :

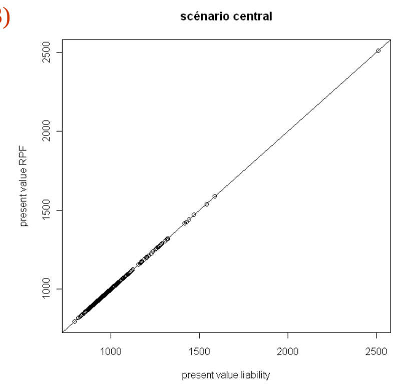
1)



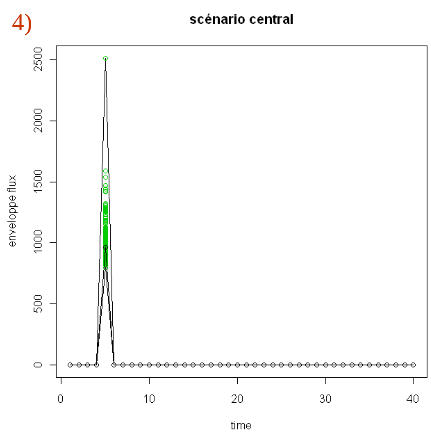
2)



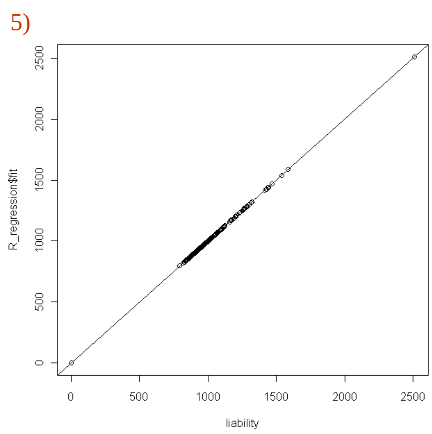
3)



4)



5)



Figures 1-2-3 : l'interprétation est la même que dans le cas du Present Value Matching.

Figure 4 : Le flux du RPF (couleur verte) réplique parfaitement le flux du passif (couleur rouge), le « pic » est dû au fait qu'il s'agit d'un flux unique à la date t=5.

Figure 5 : Il s'agit de la représentation dans le plan flux RPF / Flux liability, le nuage contient 40000 points.

Concernant les poids déterminés par cette seconde métrique, nous retrouvons bien la composition du portefeuille de couverture.

b) *Réplication avec le portefeuille de couverture et actifs polluants*

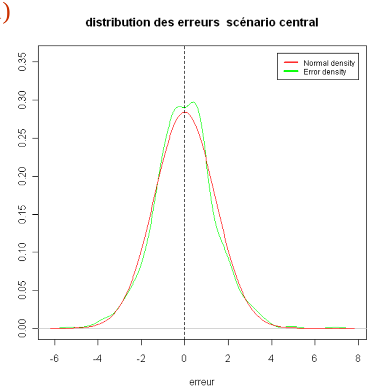
A l'univers du portefeuille de couverture nous allons ajouter des actifs polluants, c'est-à-dire des actifs qui ne sont en théorie pas utiles dans la réplication. Nous allons dans un premier temps voir comment ceux là influent sur la méthode et dans la section 3-1-2-2) nous verrons l'impact dans le calcul de la distribution du passif.

Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	3 ans		?
ZCB	4 ans		?
ZCB	5 ans		?
CALL (sur action)	4 ans	$(1+0.02)^4=1.08$	?
CALL (sur action)	5 ans	1.8402	?

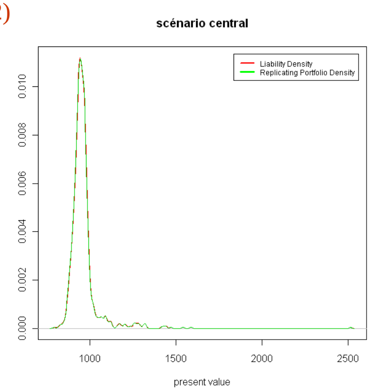
Present Value Matching (seuil de variance à 98%):

Analyse graphique

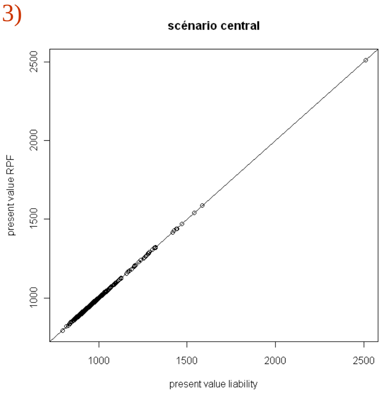
1)



2)



3)



La qualité de la réplication est quasi-équivalente selon les critères statistiques (R^2 élevé, Jarque Bera à 0.10), sauf le test de Kolmogorov (0.70) qui semble indiquer que les distributions du liability et du RPF différent un peu.

Portefeuille répliquant :

Instrument	Maturité	Strike	Poids	p-value
ZCB	3 ans		- 250	0.0
ZCB	4 ans		476	0.0
ZCB	5 ans		906	0.0
CALL (sur action)	4 ans	1.08	0.04	0.04
CALL (sur action)	5 ans	1.8402	169	0.0

L'introduction des actifs ZCB de maturité 3 et 4 ans est venue introduire « un biais » dans la réplication. La qualité de celle-ci reste la même mais les actifs qui n'ont à priori pas de lien avec le passif ont été utilisés dans la réplication, ces actifs vont comme nous le verrons impacter dans le calcul de la distribution du passif.

Nous ne détaillons pas les résultats de la métrique Present Cash-Flow Matching puisque ce sont les mêmes qu'à la réplication a) cela est dû au fait que l'on conserve l'information concernant la date du flux.

c) *Portefeuille inexact*

Nous allons désormais considérer un univers d'actifs choisi à priori sans connaissance précise du passif. Aussi nous allons introduire des ZCB, des equity et des calls de maturités différentes.

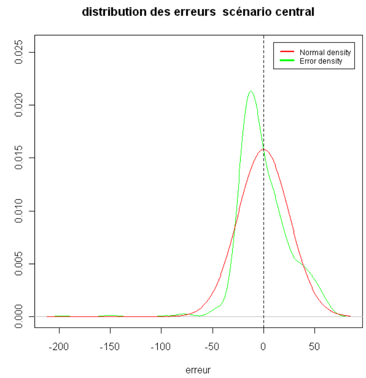
Instrument	Maturité	Strike	Poids
ZCB	3 ans		?
ZCB	4 ans		?
ZCB	5 ans		?
EQUITY	3 ans		?

EQUITY	4 ans		?
EQUITY	5 ans		?
CALL (sur action)	4 ans	1	?
CALL (sur action)	5 ans	1.5	?

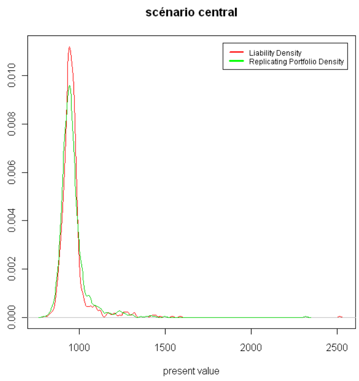
Present Value Matching (seuil variance 98%)

Analyse graphique

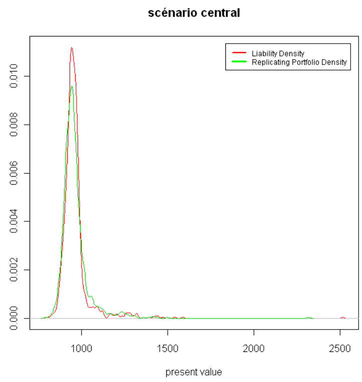
1



2



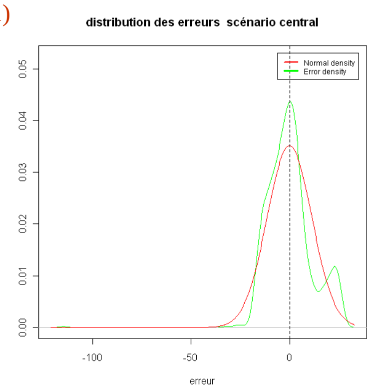
3



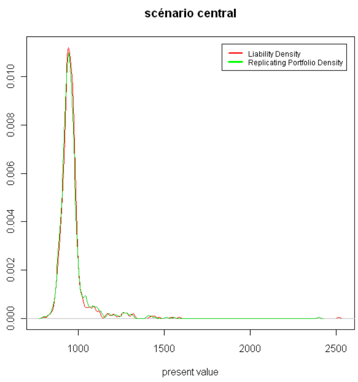
Present Cash-Flow Matching

Analyse graphique

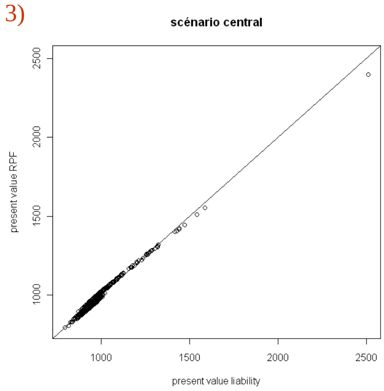
1)



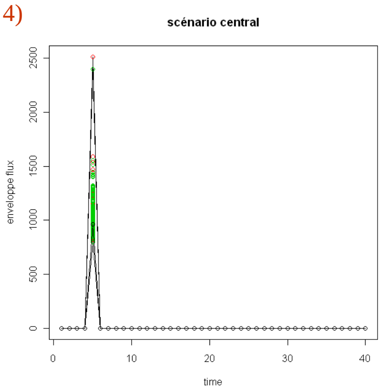
2)



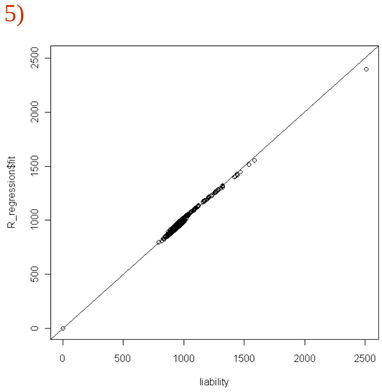
3)



4)



5)



Critère	PVM	PCFM
R^2	0.92	0.95
Jarque Bera	0	0
Kolomogorov	0.033	0.5

On observe donc que la réplication en Present Value Matching est plus affectée que celle en Present Cash Flow Matching et sa qualité est moins bonne.

Portefeuille répliquant :

Instrument	Maturité	Strike	Poids (PVM)	Poids (PCFM)
ZCB	3 ans		-176	0
ZCB	4 ans		452	0
ZCB	5 ans		520	1146
EQUITY	3 ans		-32	0
EQUITY	4 ans		0	0
EQUITY	5 ans		67	-24
CALL (sur action)	4 ans	1	-13	0
CALL (sur action)	5 ans	1.5	84	178

On observe que dans les deux méthodes les positions sur equity viennent compenser le strike qui n'est pas bien ajusté.

Remarque :

En utilisant un seuil de variance à 95% on obtient une régression de qualité equivalente mais la structure de ZCB est alors différente et les autres poids restent sensiblement les mêmes. (351 ZCB(3 ans), 359 ZCB(4 ans), 347 ZCB(5 ans))

Commentaires :

A l'aide de ce premier exemple nous voyons que la méthode Present Value Matching peut introduire des actifs qui n'ont pas de lien avec le flux de passif, en effet lorsque l'on introduit des actifs polluants (réplication b) ceux là ne sont pas éliminés par la méthode. On obtient alors un portefeuille répliquant qui a une present value très proche du passif à répliquer sur un grand nombre de simulations, cependant il semble que l'on ait perdu l'information temporelle contenue dans la date de sortie du flux de passif. L'illustration par les deux réplications c et c' illustre le fait qu'il existe plusieurs solutions très proches vis-à-vis des critères de réplication mais lointaines dans leurs interprétations. En effet, à l'aide du même univers d'actifs nous obtenons des réplications qui présentent une structure de ZCB très différente selon le seuil de variance expliqué que l'on conserve lors de l'analyse en composantes principales. La question qui se pose alors est la suivante, compte tenu des réplications très différentes en termes de poids mais très proches vis-à-vis des critères statistiques celles-ci peuvent elles donner des résultats équivalents dans le calcul de la VaR ?

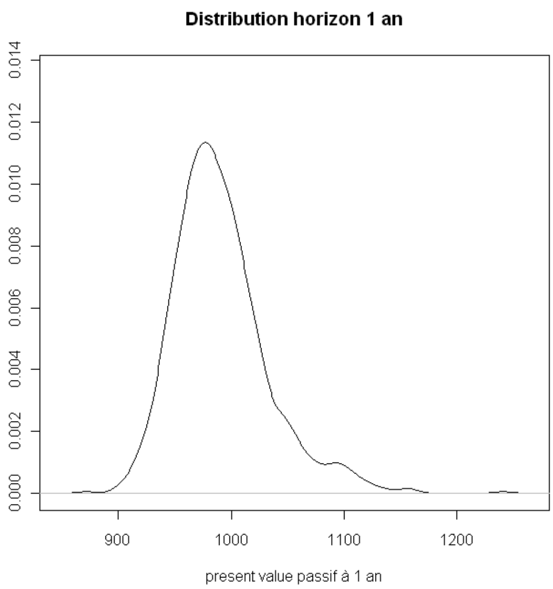
Notons enfin, que comme « prévu » la métrique Present Cash Flow Matching n'introduit pas les actifs polluants puisqu'elle tient compte du caractère temporel du flux.

3.1.2.2 Les distributions de passif

A l'aide des différents portefeuilles répliquant que nous avons obtenus nous pouvons déterminer les Value At Risk à horizon 1 an. Nous utilisons des scénarios dits « historiques » qui sont en fait des simulations stochastiques « réalistes » concernant la première période. Il suffit alors de valoriser le portefeuille répliquant à l'issue de ces 1000 scénarios pour obtenir la distribution du passif à horizon 1 an.

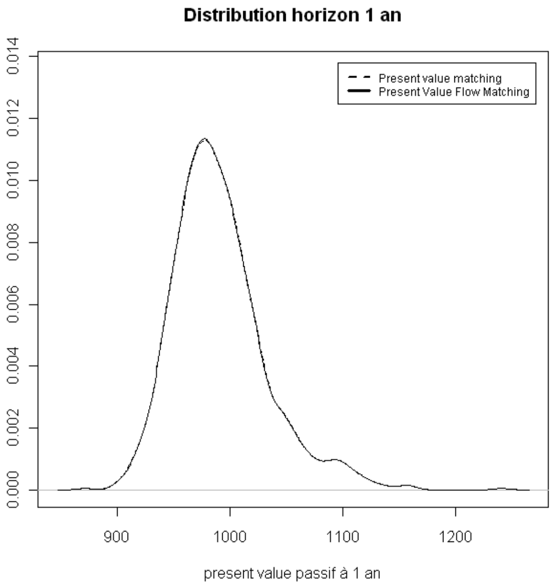
On utilisera la distribution obtenue à l'aide du portefeuille de couverture comme référence et celle-ci sera tracée en trait continu sur le graphique, elle correspond à celle qu'on obtient à partir de la métrique Present Cash-Flow Matching.

a) Distribution avec le portefeuille de couverture



En utilisant le portefeuille de couverture comme univers d'actifs, les deux métriques donnent bien la même distribution.

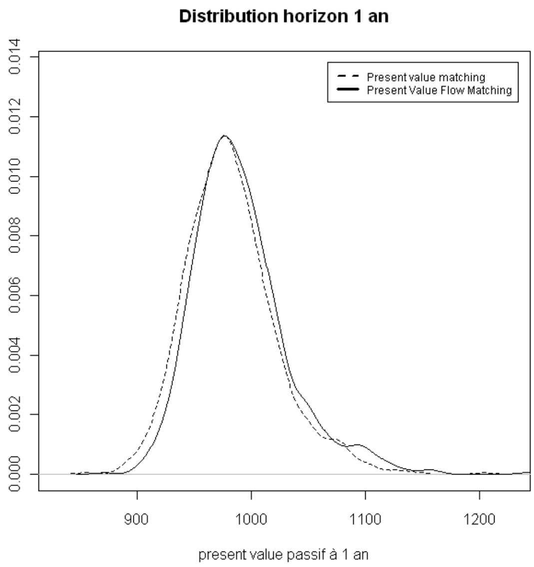
b) Distribution avec le portefeuille de couverture et actifs polluants



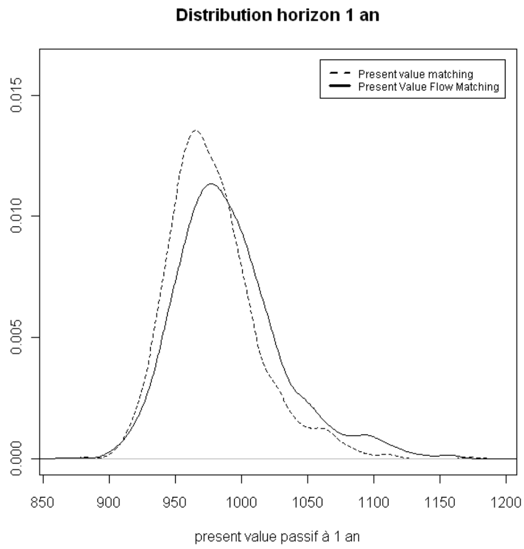
La distribution obtenue à l'aide de la métrique Present Cash-Flow Matching reste inchangée tandis que celle obtenue à l'aide de la métrique Present Value Matching est très légèrement affectée à cause de l'introduction des zéro-coupons.

c) Distribution avec l'univers inexact

Seuil de variance à 98%



Seuil de variance à 95%



On observe à l'aide de cette dernière réplication que la distribution déterminée à partir de la métrique Present Value Matching est sensible au seuil de variance expliqué utilisé lors de l'ACP. Il n'y a donc pas en quelque sorte unicité de cette distribution et on peut observer les résultats numériques concernant cette distribution.

Tableau récapitulatif:

Univers	Moyenne PVM	Moyenne PCFM	$VaR_{99,5\%}$ PVM	$VaR_{99,5\%}$ PCFM
Couverture	990	990	1070	1070
Couverture + polluants	990	990	1071	1070
Inexact	982	990	1054	1070
Inexact	978	990	1042	1070

On peut donc à l'aide de ce tableau et sur cet exemple conclure que la distribution obtenue avec la métrique Present Value Matching présente une plus grande sensibilité à l'univers d'actifs que l'on considère. Cette sensibilité semble moindre à l'aide de la métrique Present Cash-Flow Matching

Cet exemple simple nous permet de comprendre une problématique majeure dans la méthode des replicating portfolio qui est de savoir dans quelle mesure le portefeuille répliquant peut être utilisé dans le calcul de la VaR. Si dans cet exemple nous disposons de la « vraie » distribution qui peut nous servir de point de références cela n'est bien entendu pas envisageable en pratique puisque c'est le but même de la méthode, dès lors se pose une question ouverte qui est de quantifier l'erreur vis-à-vis de la vraie distribution.

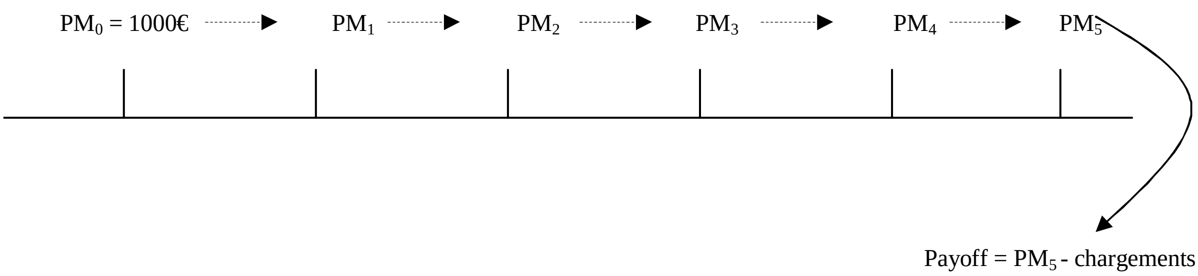
3.1.3 Produit épargne « Euro » en pratique dans les normes comptables

Comme nous l'avions précisé dans l'introduction concernant le produit simplifié « capital différé à terme » n'est pas à proprement dit un produit d'assurance. De plus, même si dans certains pays le « payoff » du produit peut s'apparenter à celui que nous avons présenté le cadre comptable français impose une toute autre vision à ce type de contrat.

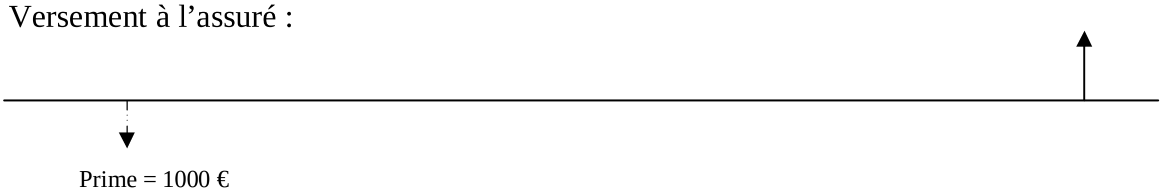
Concernant les caractéristiques du produit nous utiliserons les mêmes mais leur interprétation sera désormais en accord avec leur définition comptable. En effet, dans le cadre des normes comptables françaises, l'assureur doit effectuer annuellement la revalorisation de la provision et c'est la provision constituée à l'issu des cinq ans qui sera versée à l'assuré au terme des cinq ans.

Schématiquement :

Evolution de la provision :



Versement à l'assuré :



Du fait de l'obligation de l'assureur de provisionner, l'assuré ne reçoit finalement pas un flux à terme déterminé par la valeur du fond à maturité du contrat car c'est l'ensemble de la trajectoire du fond qui déterminera la valeur de la PM finale qui lui sera servie. L'assuré possède un contrat Path Dependant à l'image des options asiatiques qui permettent de bénéficier des performances des actions sur la durée de vie de l'option. Pour préciser cette vision Path Dependant, détaillons la dynamique de la PM sur cet exemple :

$$PM_t = PM_{t-1} * (1 + \max(85\% * rdt\_comptable_{t-1}, 2.5\%)$$

Cette définition récursive peut être écrite à partir la PM initiale :

$$\mathrm{PM}_t = \mathrm{PM}_0 \prod_{j=1}^{t} (1 + \max(85\% * \mathrm{rdt\_compatble}_{t-1}, 2.5\%))$$

En considérant le taux de revalorisation sur une période et en effectuant la décomposition classique du max nous pouvons faire apparaître « une option de taux » de type caps:

$$Taux\_revalorisation_t = \max(85\% * rdt\_comptable_t, 2.5\%) = 2.5\% + \max(85\% * rdt\_comptable_t - 2.5\%, 0)$$

Ainsi dans cette seconde partie nous allons essayer de répliquer un portefeuille de produits d'épargne où les cash-flows sont obtenus à l'aide de la dynamique de PM que nous venons de présenter. Notons dès à présent deux points qui nous éloignent de l'analogie financière :

- Dans la revalorisation de la PM, le taux « sous-jacent » des options de taux n'est pas un taux de marché puisqu'il s'agit du taux de rendement comptable qui dépend de l'allocation d'actifs et des règles de provisionnement comptable. Ainsi il sera intéressant d'illustrer l'effet d'une allocation flexible dans la réplication ainsi que le rôle des différentes provisions.

- Le parallèle avec des options de taux type « caps » n'est pas juste, en effet une option de type caps ne fonctionne pas sur le principe de capitalisation. Or dans le cadre la dynamique de cette PM il s'agit de « produits de max », en quelque sorte il faudrait s'engager sur un cap et ensuite investir l'intégralité de la somme obtenue à maturité dans un nouveau cap, etc.… Ce type de produit a été étudié et pose des problèmes de valorisation en formule fermée.

3.2 Réplication d'un portefeuille de contrats épargne en fonction de plusieurs paramètres

Nous considérons désormais un portefeuille de contrats épargnes sur une PM initiale de 1 000 000 Euros.

Les caractéristiques suivantes sont fixées :

- Taux de rachat déterministe = 10%
- TMG = 2%
- Taux de PB contractuelle = 90%
- Taux de chargement = 0.5%

Remarque :

Notons que dans cette modélisation simplifiée d'un portefeuille de contrat épargne nous ne faisons pas intervenir le fond de PB puisque cela introduit encore une complexité.

Les caractéristiques de dotations aux provisions ainsi que d'allocation d'actifs seront fixées sur chaque exemple. Nous nous intéresserons essentiellement à la réplication et non au calcul de la VaR puisque ce point a été discuté à la section précédente.

3.2.1 Allocation 100% "Cash"

Dans cette partie, nous étudions des cas particuliers où l'on essaye de minimiser l'impact des normes comptables car celles-ci tendent à nous éloigner des rendements financiers par les différentes dotations lors des moins values des actifs. On essaiera donc de se ramener à l'exemple précédent, en utilisant tout d'abord une allocation fixe de façon à pouvoir fixer des strikes des options (notons que dans l'exemple de la section 1 l'utilisation d'un call sur action n'a de sens que sur une allocation fixe). Les différentes dotations à la réserve de capi et à la PRE nous conduisent dans un premier temps à envisager la réplication d'un portefeuille de contrat où l'assureur choisit une allocation dans du « cash » à 100% c'est-à-dire un investissement capitalisé au taux court annuel. Les variations de valeur sont alors comptabilisées en résultat.

Ainsi la valeur du fond peut être écrite de la façon suivante :

$$\text{Fond}_t = 1€ * \prod_{i=1}^{t} (1 + \text{taux\_annuel}_{t-1})$$

Pour répliquer ce passif nous allons nous intéresser à deux univers d'actifs possibles tout en gardant à l'esprit que la PM est construite de façon path-dependant.

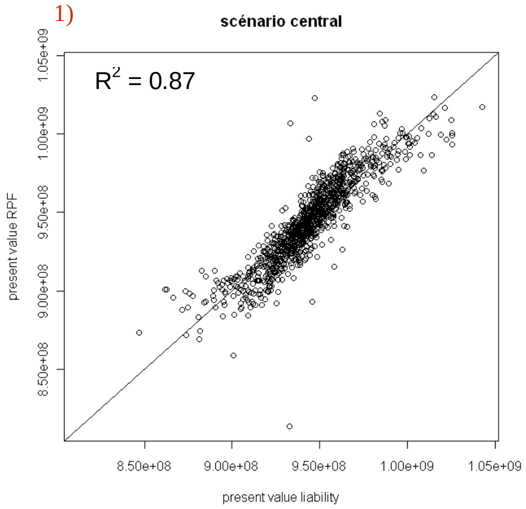
a) Univers de ZCB et call

Cet univers d'actifs est constitué de 39 zéros-coupons de maturité 2 à 40 ans ainsi que de 40 calls. Nous considérons le « cash » comme sous-jacent des calls et les strikes sont fixés comme à l'exemple 1, c'est-à-dire qu'ils tiennent compte du taux de PB ainsi que du taux minimum garanti.

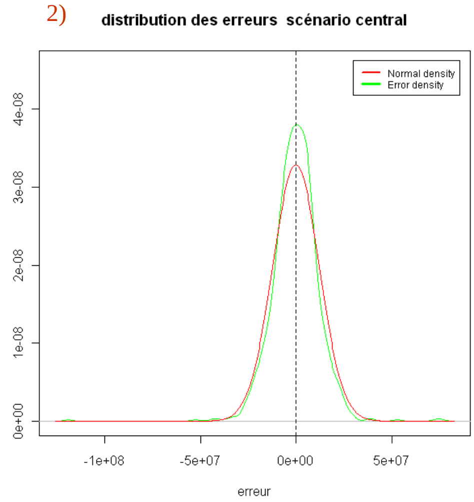
A une date i,
$$\text{Strike Call}(i) = \frac{(1+2\%)^i}{90\%}$$

Nous allons illustrer graphiquement les résultats de cette réplication et nous ne présenterons pas les résultats numériques sur cet exemple.

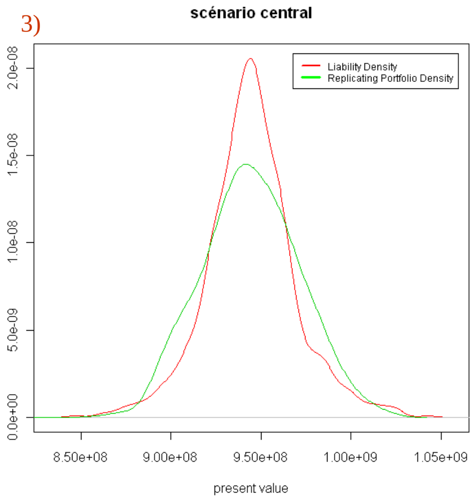
1)



2)



3)



Nous obtenons ainsi une réplication de qualité moyenne, la normalité des résidus n'est pas vérifiée par le test de Jarque Bera, le test d'adéquation entre la distribution du portefeuille répliquant et celle du passif est rejeté. Notons cependant que ces tests sont très exigeants.

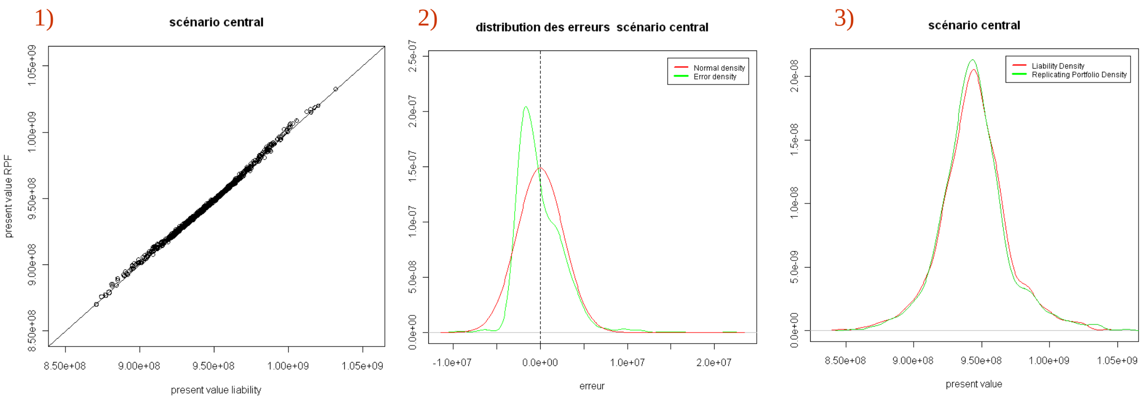
Compte tenu du fait que nous connaissons la dynamique de la PM et que celle-ci ne fait pas (ou peu) intervenir de dotations aux différentes provisions, il semble intéressant de considérer une nouvelle classe d'actifs correspondant à l'idée des caps capitalisés même s'il est clair que nous ne pourrons évaluer ces actifs à l'aide de formules fermées (élément essentiel dans le calcul de la VaR).

b) Univers de ZCB et Caps capitalisés

Nous remplaçons la classe des calls par une classe de caps dont le payoff actualisé est le suivant :

$$PV\_Actif_i = Deflateur(i) * \prod_{t=1}^{i} (1 + \max(90\% * rfi_t, 2\%))$$

Nous pouvons alors tester la réplication à l'aide du nouvel univers d'actifs et illustrer les résultats de façon graphique :



A l'aide de cette nouvelle classe d'actifs nous améliorons nettement la qualité de la régression et l'adéquation de la distribution du RPF vis-à-vis du passif est vérifiée. Nous pouvons noter que la réplication n'est pas tout à fait parfaite cela peut être dû à la différence entre rendement comptable et rendement financier même si dans le cas de cet exemple (et c'est le but) le rendement comptable du cash est très proche du rendement financier. Les chargements pourraient aussi avoir un rôle.

On voit sur cet exemple très particulier où l'on considère une allocation 100% cash que l'idée d'approximer la capitalisation de caps par des call où l'on considère le strike de façon « capitalisée » ne donne pas des résultats assez satisfaisants en pratique, en effet on a évidemment :

A une date i, $$\prod_{t=1}^{i} (1 + \max(90\% * rfi_t, 2\%)) \neq (1+2\%)^i + \max(90\% * fond_i - (1+2\%)^i, 0)$$

Notons cependant que l'égalité tend à être vérifiée lorsque l'on réalise le maximum quasiment tout le temps (ou quasiment jamais) ce qui peut être le cas avec des actifs ayant un rendement constant plus important que le taux minimum garanti. Cela nous amène à illustrer cet exemple à l'aide d'une allocation 100 % obligations qui aura donc un rendement comptable constant.

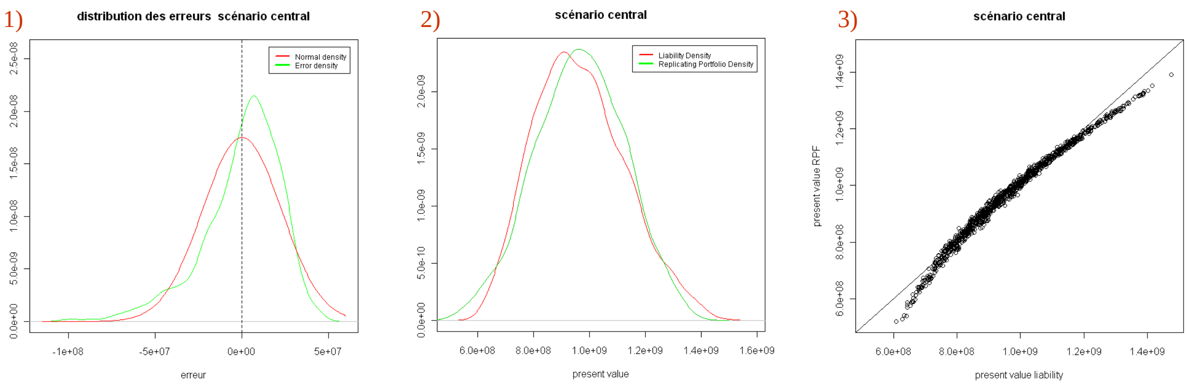
3.2.2 Allocation 100 % obligations

Dans cette sous-partie nous choisissons une allocation d'actifs à 100 % d'obligations, l'obligation de maturité 40 ans porte sur un coupon de 4%. Comme nous venons de l'expliquer, ce taux de rendement étant supérieur au taux minimum garanti il semble que le « max » sera toujours réalisé et que donc les cash-flows seront fixes (on verra cependant que ce n'est pas le cas). Dès lors, une réplication à l'aide de zéro-coupons semble envisageable.

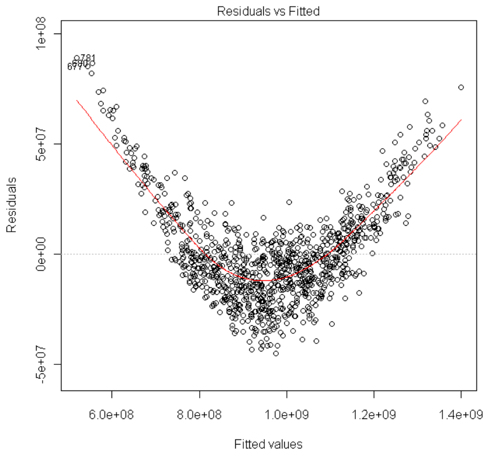
a) Univers ZCB

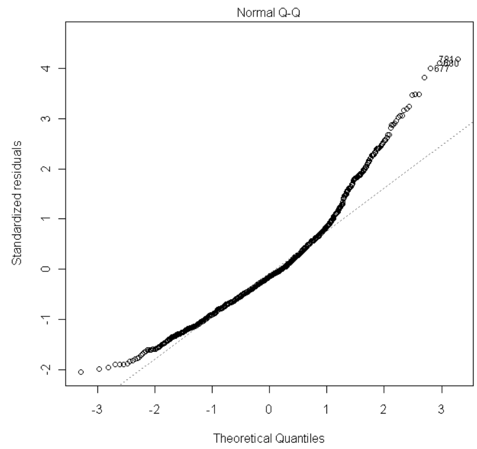
Nous choisissons dans un premier temps de répliquer ce passif à l'aide de zéro-coupons uniquement en intuitant que les cash-flows devraient être quasi-constants et que cet univers d'actifs devrait donner des résultats satisfaisants. On illustre cette réplication à l'aide des deux métriques.

Present Value Matching



La réplication à l’aide de la métrique Present Value Matching donne des résultats insatisfaisants. En effet, sur la figure 3 on observe que le nuage de points n’est pas bien « distribué » autour de la première bissectrice ce qui est partiellement confirmé par le graphe de normalité des résidus. Une analyse des résidus ainsi qu’un graphe des QQ-Plot illustrent parfaitement ce problème.

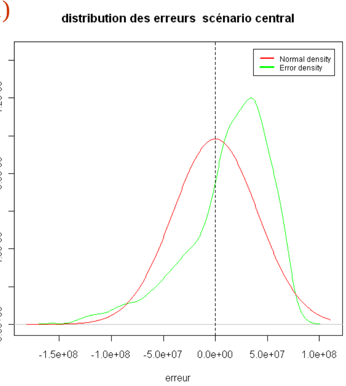




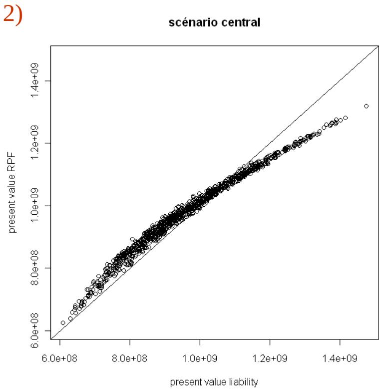
En ce qui concerne la métrique Present Cash-Flow Matching, celle-ci donne des résultats encore plus particuliers comme nous pouvons le voir sur les graphiques suivants. Notons que la figure 4) qui représente le graphique des flux permet de se rendre compte que la réplication devient mauvaise sur les flux lointains ce problème pourrait être dû au fait que plus l’on s’éloigne de t=0 plus l’effet du « max de max » peut avoir un impact du fait de la capitalisation.

Present Cash-Flow Matching

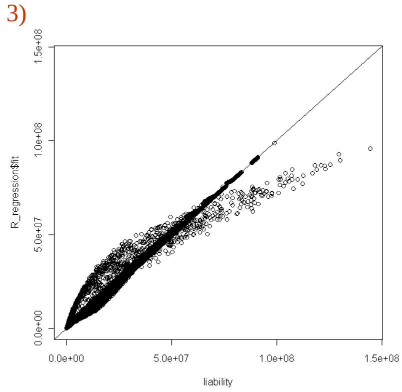
1)



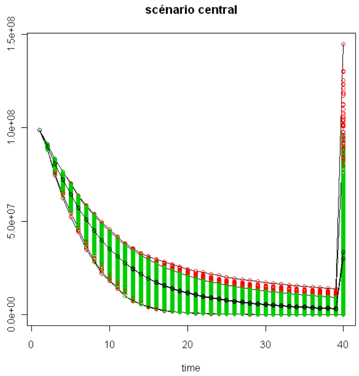
2)



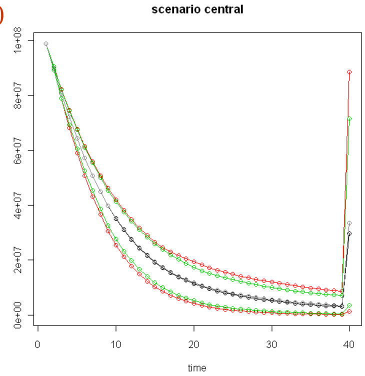
3)



4)



5)



Remarque :

En termes de Market Value nous obtenons les résultats suivants :

Méthode	Market Value Liability	Market Value RPF	Erreur (%)
PVM	965 965 680	972 727 439	0.72 %
PCFM	965 965 680	978 522 485	1.30 %

Comme nous venons de le voir les résultats ne semblent pas assez satisfaisants et des erreurs sont commises sur les scénarii extrêmes. Une analyse plus fine fait apparaître le rôle de la réserve de capitalisation, en effet il ne faut pas oublier que cette provision est liée à la valeur de marché des obligations et comme celle-ci ne peut pas être négative elle apporte un rôle asymétrique à la réplication. Lorsque les taux montent, les obligations peuvent alors être en moins value, la réserve de capitalisation est alors reprise. La baisse des taux entraine une dotation à la réserve de capitalisation ce qui n'impacte pas les cash-flow servis à l'assuré. Cet effet asymétrique va alors être « capté » par l'introduction de Floors qui va permettre de compenser l'effet de la réserve de capitalisation.

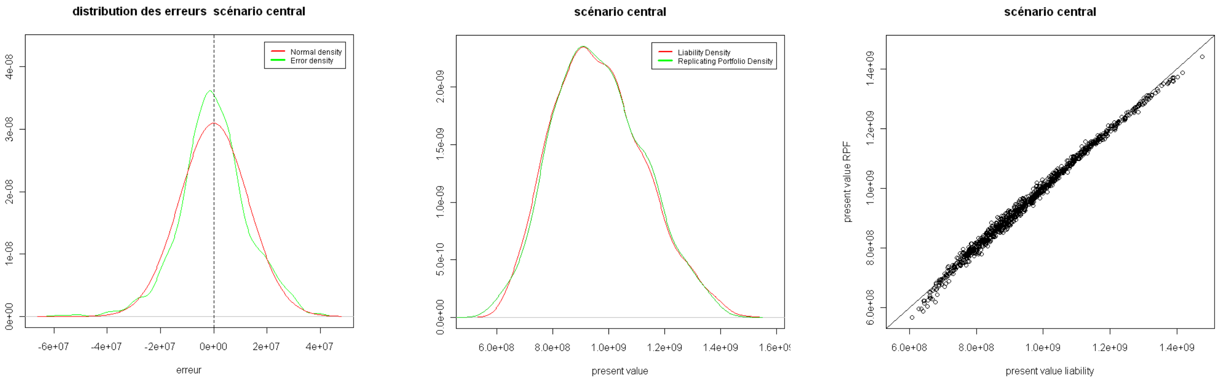
b) Univers ZCB et floors

Nous avons donc choisi d'introduire des floors portant sur le sous-jacent taux annuel à 40 (durée de l'obligation), le strike étant fixé à 4% qui sont le taux de l'obligation. On propose donc un univers de 40 floors de durée variant de 1 à 40 ans. Nous nous intéressons aux résultats de la méthode Present Value Matching.

Rappel : $$\text{Payoff} \quad \text{floorlet}_{t+1} = \max(\text{strike} - \text{tx\_40ans}_t, 0)$$

Intuitivement lors d'une hausse des taux les obligations perdent alors en valeur de marché et peuvent être en moins value, l'assureur puise alors dans la réserve de capi pour compenser ces moins values. Le floor a alors le même effet que la réserve de capi avec un rôle asymétrique.

Present Value Matching



La réplication est alors de très bonne qualité selon cette métrique, le R^2 est élevé (0.9931) et le test de Kolmogorov Smirnov se révèle satisfaisant (0.70) test qui on l'a vu est très sensible. La normalité des résidus n'est encore pas vérifiée par le test de Jarque Bera, un test moins puissant (moyenne-variance) permettrait d'accepter la normalité des résidus. Une analyse des résidus plus précise montre que ceux là semblent être en adéquation avec l'hypothèse de normalité. Des résultats similaires sont obtenus avec la méthode Present Cash-Flow Matching.

Remarque : Market Value

Méthode	Market Value Liability	Market Value RPF	Erreur (%)
PVM	965 965 680	966 014 640	-0.0005

Commentaires :

Nous avons sur cet exemple illustré la difficulté de « saisir » le rôle de la réserve de capitalisation, de plus on comprend bien que cette démarche « manuelle » est difficile à mettre en oeuvre sur des passifs plus complexes où l'allocation d'actifs est flexible et où d'autres provisions peuvent intervenir.

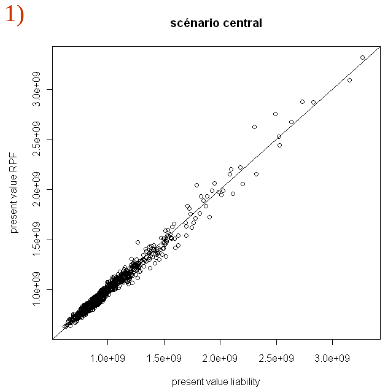
Nous allons finir cette partie concernant la réplication du portefeuille de contrat épargne par une allocation fixe 50% actions-50 obligations.

3.2.3 L'allocation 50% actions -50% obligations

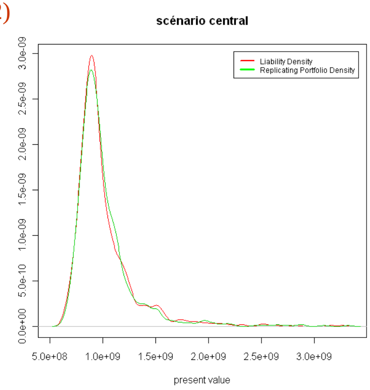
Ici nous étudions une allocation fixe 50% actions - 50% obligations, cette allocation plus complexe fait donc intervenir la PRE et la réserve de capi. Nous n'entrerons pas dans une analyse précise de la réplication et nous nous satisferons des résultats donnés par la réplication basée sur une série de call ou le strike est « capitalisé ». Ce point illustre bien le caractère « heuristique » de la méthode des replicating portfolios, en effet il arrive parfois que l'on trouve une solution satisfaisante mais qui peut sembler loin de la complexité du passif. On remarquera d'ailleurs à nouveau que la solution à l'aide Present Value Matching est satisfaisante tandis que celle obtenue à l'aide de la métrique Present Cash-Flow Matching semble montrer que l'univers d'actifs choisi n'est pas satisfaisant pour effectuer une bonne réplication des flux. Enfin, un calcul des distributions montrerait qu'il est bien difficile de se faire une idée de la distribution du passif à horizon 1 an.

Present Value Matching

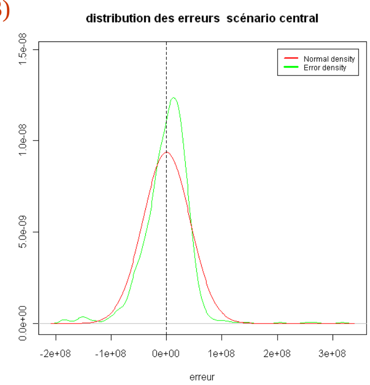
1)



2)



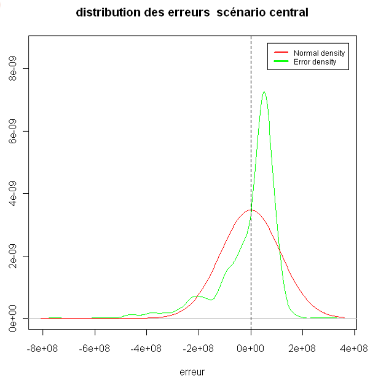
3)



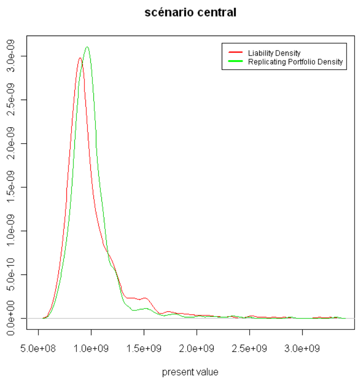
Critère	PVM	PCFM
R^2	0.974	0.92
Jarque Bera	0	0
Kolomogorov	0.85	0

Present Cash-Flow Matching

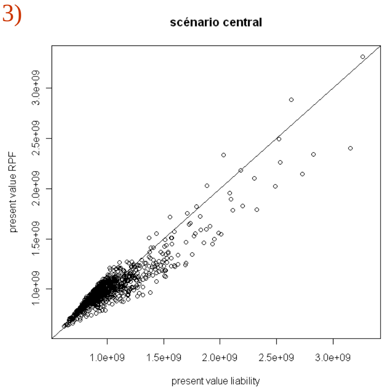
1)



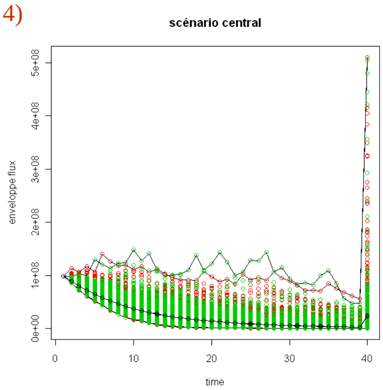
2)



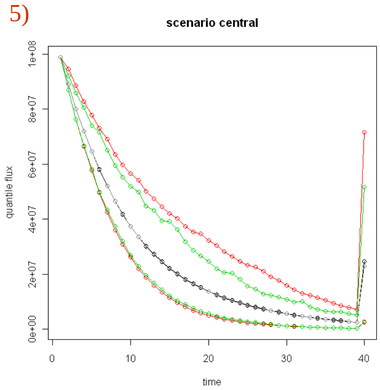
3)



4)



5)



Conclusion

Points clés de la méthode « Replicating Portfolio »

La méthode du « Replicating Portfolio » est une approche possible pour répondre à la problématique du calcul des simulations dans les simulations pour un calcul de capital économique. Elle répond aussi à une idée plus ancienne des assureurs qui est de comprendre d'un point de vue financier leur passif. Cependant au vu de l'ensemble des garanties ainsi que de la complexité des normes comptables sur le passif à un niveau macro, on peut s'interroger sur la pertinence de ce parallèle. Dès lors le portefeuille répliquant ne pourra être qu'une approximation du passif dont il est nécessaire de comprendre les éléments et hypothèses qui permettent de le déterminer.

Connaissance de la métrique

Dans ce rapport nous avons présenté deux métriques qui permettent de définir la notion de « réplication », d'autres métriques existent tel que la Terminal Value Matching qui s'intéresse au flux capitalisé au taux sans risque annuel (flux terminal).

La connaissance et la compréhension de cette métrique sont très importantes puisqu'elle conditionne l'utilisation du portefeuille répliquant. Si intuitivement on associe la notion de réplication à la notion de couverture qui peut « s'apparenter » à la notion de cash-flow matching, on gardera à l'esprit que toutes les métriques ne permettent pas de raisonner en termes de flux. C'est pourtant cet élément qui semble essentiel lorsqu'on aborde la problématique de la détermination de la distribution du passif.

Present Value Matching :

Aspects :

- La present value du cash-flow à t=0 ainsi que la valeur de marché du passif à t=0 semble être bien approximées. Les sensibilités à t=0 déduites présentent en général une faible erreur.

- Les critères statistiques permettent de contrôler la qualité de la réplication à t=0 mais il est très difficile de satisfaire aux tests de normalité des résidus dans le cadre de la régression linéaire. L'utilisation de scénarii tests peut être intéressante dans la validation du portefeuille.

- L'ACP permet de se soustraire au problème de corrélations entre les différents actifs financiers. Cela montre aussi qu'il existe de nombreuses solutions répliquantes pour un même passif et confirme le fait que cette métrique est peu exigeante.

Domaine d'application / Limites :

- L'utilisation de cette métrique semble intéressante lors de calcul de revalorisation mensuel où l'on modifie les conditions de marché à t=0. Ceci peut être justifié par la qualité de l'approximation de la valeur de marché centrale ainsi que des sensibilités.

- Le calcul de la VaR peut être problématique. Cette réplication ne tient pas réellement compte de l'aspect temporel du flux, c'est-à-dire que nous ne pouvons pas associer les maturités des actifs répliquants à la date de sortie des flux de passif.

Present Cash-Flow Matching :

Aspects :

- Cette métrique a pour but de conserver la bonne qualité d'approximation de la market value ainsi que des sensibilités et d'ajouter un caractère temporel à la réplication. Elle donne alors souvent des résultats moins bons sur la réplication de la market value ainsi que de la present value à t=0.

- Le problème de minimisation ramené à un problème des moindres carrés n'est peut être pas adapté à cette minimisation puisque les flux lointains sont traités de la même façon que les flux proches (même si par l'actualisation ceux là sont diminués). Ce problème pourrait peut-être traité par le biais d'une pondération dans la régression.

- Les critères statistiques permettent de juger de la qualité de la réplication de la Present Value. En ce qui concerne le matching des cash-flow, il reste à développer un outil de quantification des erreurs, l'utilisation de la représentation en quantile est peut être un point intéressant.

- Sur certains passifs tel qu'à l'exemple III-3), il semble clair que certains actifs financiers manquent à la réplication (voir l'inadéquation du graphique du quantile des flux).

Domaine d'application / Limites :

- Les résultats concernant la réplication en t=0 sont en général moins bons que par la métrique précédente. Cela est surement dû au caractère plus restrictif de la méthode, dès lors un univers d'actifs mal adapté donnera des résultats peu satisfaisants.

- L'apport de cette réplication pourrait être intéressant dans le calcul de la VaR car celle-ci permet d'associer la maturité des actifs à la date de sortie des flux de passif.

- La difficulté principale de cette métrique réside dans le choix (et l'existence...) des actifs potentiellement réplicants. Il semble alors que celle-ci soit trop exigeante sur des passifs complexes.

L'univers d'actifs

L'univers d'actifs à considérer est le deuxième point essentiel de la démarche, cet univers est pour le moment déterminé par l'utilisateur or il est très souvent difficile d'intuiter bons actifs et les paramètres de ceux là. Un algorithme qui permettrait de tester par itérations différents univers d'actifs semble être l'étape suivante nécessaire au développement de la méthode.

- Les garanties simples (TMG…) qui semblent pouvoir être répliquées par des options financières sont en fait complexes à cause des normes comptables.
    - Les rendements ne sont pas financiers mais comptables (effets asymétriques)
    - L'univers d'actifs classiques (options sur actions, options de taux) semble être mal adapté.

- Le recours à des actifs plus proches des flux tel que la « capitalisation de caps » pourrait être intéressante cependant la valorisation par formules fermées n'est pas envisageable.

- L'allocation d'actifs joue un rôle crucial dans la détermination des sous-jacents de ces actifs. Dès lors une allocation flexible d'actifs sera mal représentée par des actifs dont le sous-jacent est fixe.

Notons enfin que de nombreuses garanties tel que le rachat dynamique ou encore le fond de PB n'ont pas étés prises en compte. Or ces garanties posent de réelles questions concernant leurs réplications par des actifs financiers.

La validation et l'utilisation du portefeuille répliquant

- La validation du portefeuille à t=0 peut être faite avec des tests statistiques. On pourra aussi utiliser des scénarii de « back testing » afin de valider la qualité de la réplication. Cependant, ces tests ne permettent en aucun cas de juger de la validité du portefeuille lors de son utilisation dans le calcul de la VaR c'est-à-dire en t=1.

- La valorisation du portefeuille répliquant n'a pas réellement été étudiée, mais celle-ci pose clairement problème si l'on souhaite garder une cohérence avec les modèles des dynamiques sous-jacentes.

- Il n'y a pas d'indicateurs quantitatifs pour juger de la qualité de la distribution que l'on obtient à l'aide du portefeuille répliquant ce qui représente un défaut. Une bonne réplication en t=0 ne permet en aucun cas de conclure à une distribution juste en t=1.

Ainsi nous pouvons conclure sur le fait que cette méthode semble être un point de départ intéressant dans le calcul de capital économique. Comme tout modèle, l'expertise et la compréhension du gestionnaire actif/passif pour juger de la qualité des résultats semble être nécessaire. De plus ce gestionnaire doit avoir une connaissance du passif très pointu pour pouvoir intuiter les actifs répliquants et les liens potentiels avec les normes comptables.

Développement / Les approches alternatives

Développement :

Au vu des difficultés à intuiter les actifs, il serait très intéressant de construire un algorithme permettant d'automatiser la construction du portefeuille répliquant. Il s'agit en fait de rajouter une boucle d'itération sur l'univers d'actifs dans la méthode précédente. Cependant compte tenu du caractère heuristique de la méthode il faudrait penser à un critère d'arrêt de l'algorithme. Ce critère d'arrêt devrait tenir compte des écarts aux sensibilités, du R^2 et autres critères concernant les résidus. Ce type de développement pourrait être intéressant dans le cas du Present Cash-Flow matching ou il est particulièrement difficile de trouver une solution répliquante.

Au sein d'une direction des risques le caractère « heuristique » concernant la détermination d'une distribution à horizon 1 an n'est pas envisageable. Il faudrait donc trouver un moyen de validation concernant la qualité de cette distribution. On pourrait envisager d'effectuer « le vrai calcul » de la distribution sur des passifs simple et de la comparer à celle du replicating portfolio. Cependant, cela ne permettra jamais de conclure quant à la qualité de la réplication sur d'autres passifs. Il s'agit bien là d'une question ouverte sur la méthode et sur le calcul de capital économique selon d'autres méthodes.

Approches alternatives :

Certaines compagnies d'assurances s'intéressent à d'autres méthodes dont une des méthodes prometteuses semble être l'accélérateur de simulations dans les simulations. Au vu de la législation qui stipule la détermination de la VaR à 99.5%, il n'est donc pas nécessaire de calculer l'ensemble de la distribution. Ainsi si l'on considère 1000 simulations primaires (c'est-à-dire de t=0 à t=1), il suffit de déterminer les 50 scénarii les plus défavorables qui constituent la queue de distribution. Une fois ces scénarii déterminés il serait envisageable d'effectuer les simulations secondaires. La principale difficulté de cette méthode est d'identifier les scénarii primaires défavorables au vu de la complexité des relations entre l'actif et le passif. On pourra se reporter à l'article « *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des 'simulations dans les simulations' pour le calcul du capital économique Solvabilité II* » **Devineau & Loisel** [2009]

D'autres approches sont basées sur des formules semi-analytiques ou le caractère asymptotiquement gaussien conditionnellement à des facteurs de risque systémiques est exploité. On se réfèrera sur ce point à *« Un cadre de reference pour un modèle interne partiel en assurance de personnes : application à un contrat de rentes viageres »* **Planchet, Juillard & Guibert** [2010]

Enfin, un point non abordé dans ce mémoire est la génération des tables d'actifs dans l'univers risque historique pour la première année et risque neutre à partir de cette première année. Assurer une cohérence entre ces univers est en pratique délicat et nécessite des ajustements de tables, l'approche directe par les déflateurs est alors une possibilité. Cette approche se base sur la simulation dans l'univers historique et l'estimation de primes de risque. On pourra se reporter à : *« Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ? »* **H. Dastarac & P. Sauveplane** [2010]

Bibliographie

Actif-passif :

- Cayeux H. & Autier G. (2003) *Garanties implicites d'un contrat d'assurance-vie en euros.* Mémoire Actuariat ENSAE
- Ohnouna E. (2008) *Evaluation 'Best Estimate' de contrats d'épargne en euros.* Mémoire Actuariat ULP
- Piermay M., Mathoulin P. & Cohen A. (2002) *La gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance ou d'un investisseur institutionnel.* Economica
- Tosetti A., Le Vallois F., Palsky P., & Paris B. (2003) *Gestion actif-passif en assurance vie. Réglementations, outils et méthodes.* Economica
- Tosseti A., Béhart T., Fromenteau M. & Ménart S. (2002) *Assurance, Comptabilité, Réglementation, Actuariat*. Economica

MCEV :

- CFO Forum (2009) *Market Consistent Embedded Value Principles.*
- Henge F. (2006) *Rapprochement des concepts de la Valeur Intrinsèque et du Capital Economique en Assurance Vie.* Mémoire Actuariat ULP
- Juillard M. (2010) *Approche Bilantielle.* Présentation Séminaire SEPIA
- Rio & Kruger *Mesure de la valeur d'un portefeuille d'Assurance Vie Epargne en euro et impact des facteurs y contribuant.* Mémoire Actuariat CEA

Solvabilité II :

- ACP (2010) *Solvabilité II : lancement de la 5ème étude d'impact (QIS 5)*. ONC
- CEIOPS (2010) *Technical specifications for QIS 5*
- Parlement Européen (2009) *Directive du parlement européen et du conseil sur l'accès aux activitès de l'assurance et de la réassuance et leur exercice (Solvabilité II).*
- Therond P. (2008) *IFRS, Solvabilité 2, Embedded value : quel traitement du risque ?*
- Therond P. (2007) *Introduction à solvabilité 2.*

Capital économique :

- Bauer D., Bergmann D. & Reuß A. (2010) *Solvency II and Nested Simulations - a Least-Squares Monte Carlo Approach.* Présentation ARIA Annual Meeting
- Ben Dbabis M. (2009) *Modèles de risques et solvabilité en Assurance vie.* Mèmoire actuariat
- Dastarac H. & Sauveplane P. (2010) *Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ?* Mémoire ENSAE
- Devineau L. & Loisel S. (2009) *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II.*
- Génot B. (2008) *Calcul de Capital Economique pour un portefeuille de contrats en euros à l'aidede méthodes de Monte Carlo.* Mémoire ISFA
- Planchet F., Guibert Q. & Juillard M. (2010) *Un cadre de reference pour un modèle interne partiel en assurance de personnes : application à un contrat de rentes viageres.*

Replicating Portfolio:

- Daul S. & Gutierrez E. (2008) *Replication of Insurance Liabilities.* Article Risk Metrics Group
- Ka-Man Wong (2009) *Internal capital models and replicating portfolio.* Presentation Watson Wyatt
- Oeschlin J. & Aubry O. (2007) *Replicating embedded options.* Article Life & Pensions
- Mason L. (2008) *Building smart internal models.* Article Life Insurance
- Morrison S. (2008) *Replicating portfolio for economic capital: replication or approximation.*
- Schrager D. (2008) *Replicating Portfolios for Insurance Liabilities.* Article Actuarial Sciences
- Wilson T. (2007) *ING Insurance Economic Capital Framework.* Présentation ING

Générateurs de scenarios économiques:

- Faleh A., Planchet F., Rulliere D. (2009) Les Générateurs de Scénarios Économiques : quelle utilisation en assurance ?
- Hibbert J., Mowbray P. & Turnbull C. (2001) *A stochastic asset model & calibration for long-term financial planning purposes.*
- Planchet F., Thérond P., Kamega A. (2009) *Scénarios économiques en assurance.* Economica

Tables des Annexes

Code R

```
################################################################################
#Chargement des données "assets" (actifs candidats)
################################################################################

#importation des données assets bond
data_assets_bond<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_bond_2.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des donneés equity position
data_assets_equity<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_equity.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données call
data_assets_call<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicating portfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_call.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données put
data_assets_put<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mes documents\\Replicating portfolio
 R\\data\\data_assets\\data_assets_put.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des donnés swaption
data_assets_swaption_r<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_swaption_r.csv", header=TRUE, {sep=";"})

#importation des données cap_r
data_assets_cap_r<-read.table("D:\\Documents\\JREVELEN\\Mesdocuments\\Replicatingportfolio
R\\data\\data_assets\\data_assets_cap_r.csv", header=TRUE, {sep=";"})

################################################################################
#Chargement des tables stochastiques des actifs
################################################################################
#deflateurs
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_eq_dw_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_eq_up_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_dw_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_dw_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_up_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_up_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_vol_dw.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_deflateurs_tx_vol_up.RData")

#equity
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_eq_dw_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_eq_up_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_dw_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_dw_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_up_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_up_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_vol_dw.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_equity_tx_vol_up.RData")

#ZCB
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_eq_dw_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_eq_up_25.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_dw_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_dw_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_up_10.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_up_100.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_vol_dw.RData")
load("D:\\Documents\\JRevelen\\Mes documents\\Replicating portfolio R\\data\\Tables R\\data_eur_ZCB_tx_vol_up.RData")
```

```
################################################################################
#Present Value Matching
################################################################################

################################################################################
#Calcul des present value
################################################################################
#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_bond=function(maturity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_bond=value_deflateurs[1:nb_simul,maturity+1]
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_equity_position=function(maturity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_equity_position=value_equity[1:nb_simul,maturity+1]*value_deflateurs[1:nb_simul,maturity+1]
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

PV_equity_call=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_equity_call=vector("numeric",nb_simul)
	for(i in 1:nb_simul){
		PV_equity_call[i]=max(value_equity[i,maturity+1]-strike,0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
	}
	return(PV_equity_call)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_equity_put=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_equity_put=vector("numeric",nb_simul)
	for(i in 1:nb_simul){
		PV_equity_put[i]=max(strike-value_equity[i,maturity+1],0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
	}
	return(PV_equity_put)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_swaption_r=function(maturity,temp,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_swaption_r=vector("numeric",nb_simul)
	taux_swap_simul=vector("numeric",nb_simul)

#boucle sur les différentes simulations avec calcul du taux swap à maturité et PV_swap
	for(i in 1:nb_simul){
		value_ZCB_simul=value_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),]
		value_deflateurs_simul=value_deflateurs[i,]
		ZCB_maturity=coupons(maturity,temp,value_ZCB_simul)
		taux_swap_simul[i]=(1-ZCB_maturity[temp])/sum(ZCB_maturity)
		if(strike>taux_swap_simul[i]){
			taux_court=(1/value_ZCB_simul[1,(maturity+1):((maturity+1)+temp-1)])-1
			for(j in 1:length(taux_court)){
				PV_swaption_r[i]=PV_swaption_r[i]+(strike-
taux_court[j])*value_deflateurs_simul[(maturity+1)+j]
				}
		}else{
			PV_swaption_r[i]=0
		}
	}
return(PV_swaption_r)
}
```

```
coupons=function(date,temp,value_taux){
	value_taux_date=value_taux[,date+1]
	coupons=vector("numeric",temp)
	test=c(1,2,3,5,10,15,30)
	for(i in 1:temp){
		if(i %in%test){
			j=which(test==i)
			coupons[i]=value_taux_date[j]
		}
		else{
			if(i>=30){
				coupons[i]=value_taux_date[7]
			}
			else{
				i_min=which.max(which(test<i))
				i_max=i_min+1
				coupons[i]=(1/(test[i_max]-test[i_min]))*(value_taux_date[i_max]-value_taux_date[i_min])*(i-
				test[i_min])+value_taux_date[i_min]
			}
		}

	}
return(coupons)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_swaption_p=function(maturity,temp,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_swaption_p=vector("numeric",nb_simul)
	taux_swap_simul=vector("numeric",nb_simul)

#boucle sur les différentes simulations avec calcul du taux swap à maturité et PV_swap
	for(i in 1:nb_simul){
		value_ZCB_simul=value_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),]
		value_deflateurs_simul=value_deflateurs[i,]
		ZCB_maturity=coupons(maturity,temp,value_ZCB_simul)
		taux_swap_simul[i]=(1-ZCB_maturity[temp])/sum(ZCB_maturity)
		if(strike>taux_swap_simul[i]){
			taux_court=(1/value_ZCB_simul[1,(maturity+1):((maturity+1)+temp-1)])-1
			for(j in 1:length(taux_court)){
				PV_swaption_p[i]=PV_swaption_p[i]+(taux_court[j]-
				strike)*value_deflateurs_simul[(maturity+1)+j]
				}
		}else{
			PV_swaption_p[i]=0
		}
	}
return(PV_swaption_p)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_cap_r=function(maturity,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_cap_r=vector("numeric",nb_simul)
	for(i in 1:nb_simul){
		taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,maturity+1])-1
		PV_cap_r[i]=(max((strike-taux_court),0))*value_deflateurs[i,maturity+1]
	}
return(PV_cap_r)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_liability=function(value_liability,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_liability=vector("numeric",nb_simul)
	for (i in 1:nb_simul){
		PV_liability[i]=sum(value_liability[i,]*value_deflateurs[i,2:41])
	}
return(PV_liability)
}
```

```
################################################################################
#Portfolio
################################################################################

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_bond=function(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_bond=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_bond[,1]))
	for (i in 1:length(data_assets_bond[,1])){
		PV_assets_bond[,i]=PV_bond(data_assets_bond[i,1],value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_bond)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_equity=function(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_equity=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_equity[,1]))
	for (i in 1:length(data_assets_equity[,1])){
		PV_assets_equity[,i]=PV_equity_position(data_assets_equity[i,1],value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_equity)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_call=function(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_call=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_call[,1]))
	for (i in 1:length(data_assets_call[,1])){
		PV_assets_call[,i]=PV_equity_call(data_assets_call[i,1],data_assets_call[i,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_call)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_put=function(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_put=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_put[,1]))
	for (i in 1:length(data_assets_put[,1])){
		PV_assets_put[,i]=PV_equity_put(data_assets_put[i,1],data_assets_put[i,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_put)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_swaption_r=function(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_swaption_r=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_swaption_r[,1]))
	for (i in 1:length(data_assets_swaption_r[,1])){

	PV_assets_swaption_r[,i]=PV_swaption_r(data_assets_swaption_r[i,1],data_assets_swaption_r[i,2],data_assets_swaption_r[i,3],v
alue_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_swaption_r)
}

#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_swaption_p=function(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_swaption_p=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_swaption_p[,1]))
	for (i in 1:length(data_assets_swaption_p[,1])){

	PV_assets_swaption_p[,i]=PV_swaption_p(data_assets_swaption_p[i,1],data_assets_swaption_p[i,2],data_assets_swaption_p[i,3]
,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_swaption_p)
}
#--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
PV_assets_cap_r=function(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul){
	PV_assets_cap_r=matrix(nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_cap_r[,1]))
	for(i in 1:length(data_assets_cap_r[,1])){
		PV_assets_cap_r[,i]=PV_cap_r(data_assets_cap_r[i,1],data_assets_cap_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	}
return(PV_assets_cap_r)
}
```

```
#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
assets=function(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	assets=NULL
	if (bond==TRUE){
	assets_bond=PV_assets_bond(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets_bond,deparse.level=0)}
	if (equity==TRUE){
	assets_equity=PV_assets_equity(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_equity,deparse.level=0)}
	if (call==TRUE){
	assets_call=PV_assets_call(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_call,deparse.level=0)}
	if (put==TRUE){
	assets_put=PV_assets_put(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_put,deparse.level=0)}
	if (swaption_r==TRUE){
	assets_swaption_r=PV_assets_swaption_r(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_swaption_r,deparse.level=0)}
	if (swaption_p==TRUE){
	assets_swaption_p=PV_assets_swaption_p(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_swaption_p,deparse.level=0)}
	if(cap_r==TRUE){
	assets_cap_r=PV_assets_cap_r(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_cap_r,deparse.level=0)}
	return(assets)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
sensi_assets=function(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul){
	sensi_assets=NULL
	assets=NULL
	if (bond==TRUE){
	assets_bond=PV_assets_bond(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets_bond,deparse.level=0)}
	if (equity==TRUE){
	assets_equity=PV_assets_equity(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_equity,deparse.level=0)}
	if (call==TRUE){
	assets_call=PV_assets_call(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_call,deparse.level=0)}
	if (put==TRUE){
	assets_put=PV_assets_put(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_put,deparse.level=0)}
	if (swaption_r==TRUE){
	assets_swaption_r=PV_assets_swaption_r(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_swaption_r,deparse.level=0)}
	if (swaption_p==TRUE){
	assets_swaption_p=PV_assets_swaption_p(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_swaption_p,deparse.level=0)}
	if(cap_r==TRUE){
	assets_cap_r=PV_assets_cap_r(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul)
	assets=cbind(assets,assets_cap_r,deparse.level=0)}
	sensi_assets=t(attributes(scale(assets,scale=FALSE))$scale)
return(sensi_assets)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
sensi_liability=function(value_liability,value_deflateurs,nb_simul){
	sensi_liability=mean(PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul))
}

##################################################################################
#Calcul des market value
##################################################################################

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
#Market value de la liability (liability est le vecteur des present value de la liability)
#---------------------------------------------------------------------------------------------
MV_liability=function(liability){
	MV_liability=mean(liability)
}
```

```
#-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
#Market value du portefeuille d'actifs (vecteur ligne)
#-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
MV_assets=function(assets_matrix){
	MV_assets=t(attributes(scale(assets_matrix,scale=FALSE))$scale)
}



##############################################################################
#ACP
##############################################################################

#-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
affichage=function(prediction,liability,title){
	min=min(min(liability),min(prediction))
	max=max(max(liability),max(prediction))
	plot(liability,prediction,xlim=c(min,max),ylim=c(min,max),xlab="present value liability",ylab="present value RPF",main=title)
	abline(0,1)
	#identify(liability,prediction)
	density_liability=density(liability)
	density_portfolio=density(prediction)
	min=min(min(density_liability$y),min(density_portfolio$y))
	max=max(max(density_liability$y),max(density_portfolio$y))
	x11()
	plot(density_liability,ylim=c(min,max),col=2,xlab="present value",ylab="",main=title)
	lines(density_portfolio,col=3)
	legend("topright",legend=c("LiabilityDensity","ReplicatingPortfolioDensity"),lty=c("solid","solid"),col=c("red","green"),lwd=c(2
	,3),inset=.025,cex=0.75)
		#repartition_liability=ecdf(liability)
		#repartition_portfolio=ecdf(prediction)
		#x11()
		#plot(repartition_liability,col=2,main=title)
		#lines(repartition_portfolio,col=3)
	error=prediction-liability
	density_error=density(error)
	density_error_th=dnorm(density_error$x,mean=0,sd=sd(error))
	x11()
	plot(density_error,ylim=c(0,1.2*max(density_error$y,density_error_th)),col="green",xlab="erreur",ylab="",main=paste("distribut
	ion des erreurs ",title))
	lines(density_error$x,density_error_th,col="red")
	abline(v=0,lty="dashed")
	legend("topright",legend=c("Normaldensity","Errordensity"),lty=c("solid","solid"),col=c("red","green"),lwd=c(2,3),inset=.025,ce
	x=0.75)
list(density_liability=density_liability,density_portfolio=density_portfolio)
}
#-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
ACP_regression=function(liability,assets_matrix,seuil){
	PC=princomp(assets_matrix,cor=TRUE,scores=TRUE)
	eigenvector=PC$loadings
	eigenvalue=(PC$sdev)^2
	var_explain=eigenvalue/(sum(eigenvalue))
	ncomp=match(TRUE,cumsum(var_explain)>=seuil)
	PC=eigenvector[,1:ncomp]
	Y=assets_matrix%*%PC
	weights=solve(t(Y)%*%Y,t(Y)%*%liability)
	coef=PC%*%weights
	prediction=assets_matrix%*%coef
list(ncomp=ncomp,PC=PC,coef=coef,prediction=prediction)
}

#-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
ACP_sensi=function(liability,assets_matrix,MV,tx_up_100,tx_dw_100,tx_up_10,tx_dw_10,bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,
cap_rseuil,nb_simul){
	PC=princomp(assets_matrix,cor=TRUE,scores=TRUE)
	eigenvector=PC$loadings
	eigenvalue=(PC$sdev)^2
	var_explain=eigenvalue/(sum(eigenvalue))
	ncomp=match(TRUE,cumsum(var_explain)>=seuil)
	PC=eigenvector[,1:ncomp]
	Y=assets_matrix%*%PC
	b=t(Y)%*%liability
	S=t(Y)%*%Y
	C=NULL
```

```
	t_C=NULL
	contraintes=0
	null=NULL
	if(MV==TRUE){
		contraintes=contraintes+1
		MV_PC=MV_assets(assets_matrix)%*%PC
		t_C=cbind(t_C,t(MV_PC))
		C=rbind(C,MV_PC)
		MV_liability=mean(PV_liability(value_liability,value_deflateurs,1000))
		b=rbind(b,MV_liability)
	}
	if(tx_up_100==TRUE){
		contraintes=contraintes+1

	sensi_tx_up_100=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx_up_10
0,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
		MV_tx_up_100=sensi_tx_up_100%*%PC
		t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_up_100))
		C=rbind(C,MV_tx_up_100)
		MV_liability_tx_up_100=sensi_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,1000)
		b=rbind(b,MV_liability_tx_up_100)
	}
	if(tx_dw_100==TRUE){
		contraintes=contraintes+1

	sensi_tx_dw_100=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_tx_dw_1
00,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
		MV_tx_dw_100=sensi_tx_dw_100%*%PC
		t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_dw_100))
		C=rbind(C,MV_tx_dw_100)
		MV_liability_tx_dw_100=sensi_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,1000)
		b=rbind(b,MV_liability_tx_dw_100)
	}
	if(tx_up_10==TRUE){
		contraintes=contraintes+1

	sensi_tx_up_10=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_up_10,va
lue_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
		MV_tx_up_10=sensi_tx_up_10%*%PC
		t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_up_10))
		C=rbind(C,MV_tx_up_10)
		MV_liability_tx_up_10=sensi_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,1000)
		b=rbind(b,MV_liability_tx_up_10)
	}
	if(tx_dw_10==TRUE){
		contraintes=contraintes+1

	sensi_tx_dw_10=sensi_assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_dw_10,v
alue_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
		MV_tx_dw_10=sensi_tx_dw_10%*%PC
		t_C=cbind(t_C,t(MV_tx_dw_10))
		C=rbind(C,MV_tx_dw_10)
		MV_liability_tx_dw_10=sensi_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,1000)
		b=rbind(b,MV_liability_tx_dw_10)
	}
	null=matrix(0,nrow=contraintes,ncol=contraintes)
	S=cbind(rbind(S,C),rbind(t_C,null))
	weights=solve(S,b)
	coef=PC%*%weights[1:(length(weights)-contraintes)]
	prediction=assets_matrix%*%coef
list(ncomp=ncomp,PC=PC,coef=coef,prediction=prediction,sensi_tx_up_100=sensi_tx_up_100,sensi_tx_dw_100=sensi_tx_dw_100,sens
i_tx_up_10=sensi_tx_up_10,sensi_tx_dw_10=sensi_tx_dw_10)
}

##########################################################################################################
#Determination du portfeuille
##########################################################################################################

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
portfolio=function(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,seuil,nb_simul){
	market_value=matrix(nrow=1,ncol=3)
	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
	liability=PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul)
	regression=ACP_regression(liability,assets_matrix,seuil)
```

```
	R=RSquared(regression$prediction,liability)
	stat=jarque(regression$predict-liability,nb_simul)
	affichage(regression$prediction,liability,"scénario central")
	market_value[1,1]=mean(PV_liability(value_liability,value_deflateurs,1000))
	market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%regression$coef)
	market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]
list(regression=regression,poids=regression$coef,market_value=market_value,liability=liability,prediction=regression$prediction,R=R,st
at=stat)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
sensi=function(poids,bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,nb_simul){
	market_value=matrix(nrow=9,ncol=3)

	#--------scénario_central
		liability=PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul)
		market_value[1,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
		market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
		market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]
		affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"scénario central")

	#--------sensi_tx_up_100
		liability=PV_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
		market_value[2,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx_up_100,value_d
eflateurs_tx_up_100,1000)
		market_value[2,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
		market_value[2,3]=100*(market_value[2,1]-market_value[2,2])/market_value[2,1]
		x11()
		affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux +100bps")

	#--------sensi_tx_dw_100
		liability=PV_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
		market_value[3,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_tx_dw_100,value_
deflateurs_tx_dw_100,1000)
		market_value[3,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
		market_value[3,3]=100*(market_value[3,1]-market_value[3,2])/market_value[3,1]
		x11()
		affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux -100bps")

	#--------sensi_tx_up_10
		liability=PV_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
		market_value[4,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_up_10,value_defl
ateurs_tx_up_10,1000)
		market_value[4,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
		market_value[4,3]=100*(market_value[4,1]-market_value[4,2])/market_value[4,1]
		x11()
		affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux +10bps")

	#--------sensi_tx_dw_10
		liability=PV_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
		market_value[5,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_dw_10,value_def
lateurs_tx_dw_10,1000)
		market_value[5,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
		market_value[5,3]=100*(market_value[5,1]-market_value[5,2])/market_value[5,1]
		x11()
		affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux -10bps")

	#--------sensi_tx_vol_up
		liability=PV_liability(value_liability_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul)
		market_value[6,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_up,value_equity_tx_vol_up,value_def
lateurs_tx_vol_up,1000)
		market_value[6,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
```

```
			market_value[6,3]=100*(market_value[6,1]-market_value[6,2])/market_value[6,1]
			x11()
			affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux vol +25%")

	#--------sensi_tx_vol_dw
			liability=PV_liability(value_liability_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul)
			market_value[7,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_dw,value_equity_tx_vol_dw,value_d
eflateurs_tx_vol_dw,1000)
			market_value[7,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
			market_value[7,3]=100*(market_value[7,1]-market_value[7,2])/market_value[7,1]
			x11()
			affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"taux vol -25%")

	#--------sensi_eq_up_25
			liability=PV_liability(value_liability_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul)
			market_value[8,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_eq_up_25,value_equity_eq_up_25,value_def
lateurs_eq_up_25,1000)
			market_value[8,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
			market_value[8,3]=100*(market_value[8,1]-market_value[8,2])/market_value[8,1]
			x11()
			affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"equity vol +25%")

	#--------sensi_eq_dw_25
			liability=PV_liability(value_liability_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul)
			market_value[9,1]=mean(liability)

	assets_matrix=assets(bond,equity,call,put,swaption_r,swaption_p,cap_r,value_ZCB_eq_dw_25,value_equity_eq_dw_25,value_de
flateurs_eq_dw_25,1000)
			market_value[9,2]=sum(MV_assets(assets_matrix)%*%poids)
			market_value[9,3]=100*(market_value[9,1]-market_value[9,2])/market_value[9,1]
			x11()
			affichage(assets_matrix%*%poids,liability,"equity vol -25%")

return(market_value)
}


################################################################################
#Present cash Flow matching
################################################################################

################################################################################
#Calcul des flux de Present Value
################################################################################

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_bond=function(maturity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_bond=vector("numeric",time*nb_simul)
	indice=maturity
	for(i in 1:nb_simul){
			p_flow_bond[indice]=1*value_deflateurs[i,(maturity+1)]
			indice=indice+time
	}
return(p_flow_bond)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_equity=function(maturity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_equity=vector("numeric",time*nb_simul)
	indice=maturity
	for(i in 1:nb_simul){
			p_flow_equity[indice]=value_equity[i,maturity+1]*value_deflateurs[i,maturity+1]
			indice=indice+time
	}
return(p_flow_equity)
}

#---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_call=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_call=vector("numeric",time*nb_simul)
```

```
	indice=maturity
	for(i in 1:nb_simul){
		p_flow_call[indice]=max((value_equity[i,maturity+1]-strike),0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
		indice=indice+time
	}
return(p_flow_call)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_put=function(maturity,strike,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_put=vector("numeric",time*nb_simul)
	indice=maturity
	for(i in 1:nb_simul){
		p_flow_put[indice]=max((strike-value_equity[i,maturity+1]),0)*value_deflateurs[i,maturity+1]
		indice=indice+time
	}
return(p_flow_put)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_swap_r=function(maturity,term,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_swap_r=vector("numeric",time*nb_simul)
	for(i in 1:nb_simul){
		for(j in maturity:(maturity+term-1)){
			taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,j+1])-1
			p_flow_swap_r[((i-1)*time+j+1)]=(strike-taux_court)*value_deflateurs[i,j+1]
		}
	}
return(p_flow_swap_r)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_swap_r=function(maturity,temp,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_swap_r=vector("numeric",time*nb_simul)
	for(i in 1:nb_simul){
		value_ZCB_simul=value_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),]
		value_deflateurs_simul=value_deflateurs[i,]
		ZCB_maturity=coupons(maturity,temp,value_ZCB_simul)
		taux_swap_simul=(1-ZCB_maturity[temp])/sum(ZCB_maturity)
		if(strike>taux_swap_simul){
			for(j in maturity:(maturity+temp-1)){
				taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,j+1])-1
				p_flow_swap_r[((i-1)*time+j+1)]=(strike-taux_court)*value_deflateurs[i,j+1]
			}
		}

	}
return(p_flow_swap_r)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_swap_p=function(maturity,term,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_swap_p=vector("numeric",time*nb_simul)
	for(i in 1:nb_simul){
		for(j in maturity:(maturity+term-1)){
			taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,j+1])-1
			p_flow_swap_p[((i-1)*time+j+1)]=(taux_court-strike)*value_deflateurs[i,j+1]
		}
	}
return(p_flow_swap_p)
}

#--------------------------------------------------------------------------------
p_flow_cap_r=function(maturity,strike,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_cap_r=vector("numeric",time*nb_simul)
	indice=maturity
	for(i in 1:nb_simul){
		taux_court=(1/value_ZCB[7*(i-1)+1,maturity+1])-1
		p_flow_cap_r[indice+1]=(max((strike-taux_court),0))*value_deflateurs[i,maturity+1]
		indice=indice+time
	}
return(p_flow_cap_r)
}
```

```
#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_flow_liability=function(value_liability,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_flow_liability=NULL
	for(i in 1:nb_simul){
		p_flow_liability=c(p_flow_liability,value_liability[i,1:time]*value_deflateurs[i,2:(time+1)])
	}
return(p_flow_liability)
}




#################################################################################
#Portfolio
#################################################################################

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_bond=function(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_bond=p_flow_bond(data_assets_bond[1,1],value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_bond[,1])>=2){
		for (i in 2:length(data_assets_bond[,1])){

	p_cash_flow_bond=cbind(p_cash_flow_bond,p_flow_bond(data_assets_bond[i,1],value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=
0)
		}
	}
return(p_cash_flow_bond)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_equity=function(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_equity=p_flow_equity(data_assets_equity[1,1],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_equity[,1])>=2){
			for (i in 2:length(data_assets_equity[,1])){
	p_cash_flow_equity=cbind(p_cash_flow_equity,p_flow_equity(data_assets_equity[i,1],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,ti
	me),deparse.level=0)
			}
	}
return(p_cash_flow_equity)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_call=function(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_call=p_flow_call(data_assets_call[1,1],data_assets_call[1,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_call[,1])>=2){
		for (i in 2:length(data_assets_call[,1])){
	p_cash_flow_call=cbind(p_cash_flow_call,p_flow_call(data_assets_call[i,1],data_assets_call[i,3],value_equity,value_deflateurs,n
	b_simul,time),deparse.level=0)
		}
	}
return(p_cash_flow_call)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_put=function(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_put=p_flow_call(data_assets_put[1,1],data_assets_put[1,3],value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_put[,1])>=2){
		for (i in 2:length(data_assets_put[,1])){
	cash_flow_put=cbind(p_cash_flow_put,p_flow_put(data_assets_put[i,1],data_assets_put[i,3],value_equity,value_deflateurs,nb_si
	mul,time),deparse.level=0)
		}
	}
return(p_cash_flow_put)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_swap_r=function(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
```

```
	p_cash_flow_swap_r=p_flow_swap_r(data_assets_swaption_r[1,1],data_assets_swaption_r[1,2],data_assets_swaption_r[1,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_swaption_r[,1])>=2){
		for (i in 2:length(data_assets_swaption_r[,1])){
	p_cash_flow_swap_r=cbind(p_cash_flow_swap_r,p_flow_swap_r(data_assets_swaption_r[i,1],data_assets_swaption_r[i,2],data_assets_swaption_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=0)
		}
	}
return(p_cash_flow_swap_r)
}






#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_swap_p=function(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_swap_p=p_flow_swap_p(data_assets_swaption_p[1,1],data_assets_swaption_p[1,2],data_assets_swaption_p[1,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_swaption_p[,1])>=2){
		for (i in 2:length(data_assets_swaption_p[,1])){
	p_cash_flow_swap_p=cbind(p_cash_flow_swap_p,p_flow_swap_p(data_assets_swaption_p[i,1],data_assets_swaption_p[i,2],data_assets_swaption_p[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=0)
		}
	}
return(p_cash_flow_swap_p)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_cap_r=function(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_cap_r=p_flow_cap_r(data_assets_cap_r[1,1],data_assets_cap_r[1,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
	if(length(data_assets_cap_r[,1])>=2){
		for (i in 2:length(data_assets_cap_r[,1])){

	p_cash_flow_cap_r=cbind(p_cash_flow_cap_r,p_flow_cap_r(data_assets_cap_r[i,1],data_assets_cap_r[i,3],value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time),deparse.level=0)
		}
	}
return(p_cash_flow_cap_r)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_cash_flow_assets=function(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
	p_cash_flow_assets=NULL
	if (bond==TRUE){
	p_cash_bond=p_cash_flow_bond(data_assets_bond,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_bond,deparse.level=0)
	}
	if (equity==TRUE){
	p_cash_equity=p_cash_flow_equity(data_assets_equity,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_equity,deparse.level=0)
	}
	if (call==TRUE){
	p_cash_call=p_cash_flow_call(data_assets_call,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_call,deparse.level=0)
	}
	if (put==TRUE){
	p_cash_put=p_cash_flow_put(data_assets_put,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_put,deparse.level=0)
	}
	if (swap_r==TRUE){
	p_cash_swap_r=p_cash_flow_swap_r(data_assets_swaption_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_swap_r,deparse.level=0)
	}
	if (swap_p==TRUE){
	p_cash_swap_p=p_cash_flow_swap_p(data_assets_swaption_p,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_swap_p,deparse.level=0)
	}
	if (cap_r==TRUE){
	p_cash_cap_r=p_cash_flow_cap_r(data_assets_cap_r,value_ZCB,value_deflateurs,nb_simul,time)
	p_cash_flow_assets=cbind(p_cash_flow_assets,p_cash_cap_r,deparse.level=0)
	}
```

```
return(p_cash_flow_assets)
}

##############################################################################
#Regression
##############################################################################
#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
R_regression=function(liability,assets_matrix){
	R_regression=lm(liability~0+assets_matrix)
	min=min(min(liability),min(R_regression$fit))
	max=max(max(liability),max(R_regression$fit))
	plot(liability,R_regression$fit,xlim=c(min,max),ylim=c(min,max))
	R_regression=summary(R_regression)
	abline(0,1)
	return(R_regression)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
solving=function(liability,assets_matrix){
	poids=solve(t(assets_matrix)%*%assets_matrix,t(assets_matrix)%*%liability)
return(poids)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
matrix_predict=function(vector_predict,nb_simul,time){
	matrix_predict=matrix(nrow=nb_simul,ncol=time)
	k=1
	for(i in 1:nb_simul){
		for(j in 1:time){
			matrix_predict[i,j]=vector_predict[k]
			k=k+1
		}
	}
return(matrix_predict)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
enveloppe_flux=function(value_liability,nb_simul){
	value_min=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
	value_max=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
	value_mean=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
	for (i in 1:length(value_liability[1,])){
		value_min[i]=min(value_liability[1:nb_simul,i])
		value_max[i]=max(value_liability[1:nb_simul,i])
		value_mean[i]=mean(value_liability[1:nb_simul,i])
	}
	plot(1:length(value_liability[1,]),value_min,,xlab="time",ylab="enveloppe
flux",ylim=c(min(value_min),max(value_max)),col=2,type='o')
	points(1:length(value_liability[1,]),value_max,col=2,type='o')
	for(i in 1:nb_simul){
		points(1:length(value_liability[1,]),value_liability[i,],col=gray(0.5))
	}
	points(1:length(value_liability[1,]),value_mean,type='o')
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
enveloppe_flux_duo=function(titre_graphe,value_liability,value_portfolio,nb_simul){
	value_min_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
	value_min_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
	value_max_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
	value_max_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
	value_mean_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
	value_mean_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
	for (i in 1:length(value_liability[1,])){
		value_min_l[i]=min(value_liability[1:nb_simul,i])
		value_min_p[i]=min(value_portfolio[1:nb_simul,i])
		value_max_l[i]=max(value_liability[1:nb_simul,i])
		value_max_p[i]=max(value_portfolio[1:nb_simul,i])
```

```
			value_mean_l[i]=mean(value_liability[1:nb_simul,i])
			value_mean_p[i]=mean(value_portfolio[1:nb_simul,i])
		}
		plot(1:length(value_liability[1,]),value_min_l,main=titre_graphe,xlab="time",ylab="enveloppe
flux",ylim=c(min(min(value_min_l),min(value_min_p)),max(max(value_max_l),max(value_max_p))),type='o')
		points(1:length(value_portfolio[1,]),value_min_p,type='o')
		points(1:length(value_liability[1,]),value_max_l,type='o')
		points(1:length(value_portfolio[1,]),value_max_p,type='o')
		for(i in 1:nb_simul){
			points(1:length(value_liability[1,]),value_liability[i,],col=2)
		}
		for(i in 1:nb_simul){
			points(1:length(value_portfolio[1,]),value_portfolio[i,],col=3)
		}
		points(1:length(value_liability[1,]),value_mean_l,type='o')
		points(1:length(value_portfolio[1,]),value_mean_p,type='o')
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
enveloppe_flux_quantile=function(titre_graphe,value_liability,value_portfolio,nb_simul){
		value_q05_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
		value_q05_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
		value_q95_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
		value_q95_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
		value_mean_l=vector("numeric",length(value_liability[1,]))
		value_mean_p=vector("numeric",length(value_portfolio[1,]))
		for (i in 1:length(value_liability[1,])){
			value_q05_l[i]=quantile((value_liability[1:nb_simul,i]),probs=0.05,names=FALSE)
			value_q05_p[i]=quantile((value_portfolio[1:nb_simul,i]),probs=0.05,names=FALSE)
			value_q95_l[i]=quantile((value_liability[1:nb_simul,i]),probs=0.95,names=FALSE)
			value_q95_p[i]=quantile((value_portfolio[1:nb_simul,i]),probs=0.95,names=FALSE)
			value_mean_l[i]=mean(value_liability[1:nb_simul,i])
			value_mean_p[i]=mean(value_portfolio[1:nb_simul,i])
		}
		plot(1:length(value_liability[1,]),value_q05_l,main=titre_graphe,xlab="time",ylab="quantile
		flux",ylim=c(min(min(value_q05_l),min(value_q05_p)),max(max(value_q95_l),max(value_q95_p))),type='o',col=2)
		points(1:length(value_portfolio[1,]),value_q05_p,type='o',col=3)
		points(1:length(value_liability[1,]),value_q95_l,type='o',col=2)
		points(1:length(value_portfolio[1,]),value_q95_p,type='o',col=3)
		points(1:length(value_liability[1,]),value_mean_l,type='o')
		points(1:length(value_portfolio[1,]),value_mean_p,type='o',col=gray(0.5))
}

##################################################################################
#Determination du portfeuille
##################################################################################

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
p_portfolio=function(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul,time){
		liability=p_flow_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul,time)
		assets_matrix=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simu
l,time)
		market_value=matrix(nrow=9,ncol=3)
		regression=R_regression(liability,assets_matrix)
		#poids=data.matrix(regression$coef[,1])
		#dimnames(poids)=NULL
		poids=solving(liability,assets_matrix)
		flux_portfolio=matrix_predict(assets_matrix%*%poids,nb_simul,time)
		flux_liability=matrix_predict(liability,nb_simul,time)
		x11()
		enveloppe_flux_duo("scénario central",flux_liability,flux_portfolio,nb_simul)
		x11()
		enveloppe_flux_quantile("scenario central",flux_liability,flux_portfolio,nb_simul)
		assets_matrix_PV=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB,value_equity,value_deflateurs,nb_simul)
		liability_PV=PV_liability(value_liability,value_deflateurs,nb_simul)
		x11()
		affichage(assets_matrix_PV%*%poids,liability_PV,"scénario central")
		market_value[1,1]=MV_liability(liability_PV)
		market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV)%*%poids)
		market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]
list(regression=regression,poids=poids,flux_portfolio=flux_portfolio,market_value=market_value)
}

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

```
p_sensi=function(poids,bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,nb_simul,time){
	market_value=matrix(nrow=9,ncol=3)

	#-------Sensi_tx_up_100

	assets_matrix_tx_up_100=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx
	_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul,time)
	flux_portfolio_tx_up_100=matrix_predict(assets_matrix_tx_up_100%*%poids,nb_simul,time)
	liability_tx_up_100=p_flow_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul,time)
	flux_liability_tx_up_100=matrix_predict(liability_tx_up_100,nb_simul,time)
	x11()
	enveloppe_flux_duo("taux + 100 bps",flux_liability_tx_up_100,flux_portfolio_tx_up_100,nb_simul)

	assets_matrix_PV_tx_up_100=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_100,value_equity_tx_up_100,
	value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
	liability_PV_tx_up_100=PV_liability(value_liability_tx_up_100,value_deflateurs_tx_up_100,nb_simul)
	x11()
	affichage(assets_matrix_PV_tx_up_100%*%poids,liability_PV_tx_up_100,"taux +100bps")
	market_value[1,1]=MV_liability(liability_PV_tx_up_100)
	market_value[1,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_up_100)%*%poids)
	market_value[1,3]=100*(market_value[1,1]-market_value[1,2])/market_value[1,1]

	#-------Sensi_tx_dw_100

	assets_matrix_tx_dw_100=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_t
	x_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul,time)
	flux_portfolio_tx_dw_100=matrix_predict(assets_matrix_tx_dw_100%*%poids,nb_simul,time)
	liability_tx_dw_100=p_flow_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul,time)
	flux_liability_tx_dw_100=matrix_predict(liability_tx_dw_100,nb_simul,time)
	x11()
	enveloppe_flux_duo("taux - 100 bps",flux_liability_tx_dw_100,flux_portfolio_tx_dw_100,nb_simul)

	assets_matrix_PV_tx_dw_100=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_100,value_equity_tx_dw_10
	0,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
	liability_PV_tx_dw_100=PV_liability(value_liability_tx_dw_100,value_deflateurs_tx_dw_100,nb_simul)
	x11()
	affichage(assets_matrix_PV_tx_dw_100%*%poids,liability_PV_tx_dw_100,"taux -100bps")
	market_value[2,1]=MV_liability(liability_PV_tx_dw_100)
	market_value[2,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_dw_100)%*%poids)
	market_value[2,3]=100*(market_value[2,1]-market_value[2,2])/market_value[2,1]

	#-------Sensi_tx_up_10

	assets_matrix_tx_up_10=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_u
	p_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul,time)
	flux_portfolio_tx_up_10=matrix_predict(assets_matrix_tx_up_10%*%poids,nb_simul,time)
	liability_tx_up_10=p_flow_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul,time)
	flux_liability_tx_up_10=matrix_predict(liability_tx_up_10,nb_simul,time)
	x11()
	enveloppe_flux_duo("taux + 10 bps",flux_liability_tx_up_10,flux_portfolio_tx_up_10,nb_simul)

	assets_matrix_PV_tx_up_10=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_up_10,value_equity_tx_up_10,val
	ue_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
	liability_PV_tx_up_10=PV_liability(value_liability_tx_up_10,value_deflateurs_tx_up_10,nb_simul)
	x11()
	affichage(assets_matrix_PV_tx_up_10%*%poids,liability_PV_tx_up_10,"taux +10bps")
	market_value[3,1]=MV_liability(liability_PV_tx_up_10)
	market_value[3,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_up_10)%*%poids)
	market_value[3,3]=100*(market_value[3,1]-market_value[3,2])/market_value[3,1]

	#-------Sensi_tx_dw_10

	assets_matrix_tx_dw_10=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_
	dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul,time)
	flux_portfolio_tx_dw_10=matrix_predict(assets_matrix_tx_dw_10%*%poids,nb_simul,time)
	liability_tx_dw_10=p_flow_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul,time)
	flux_liability_tx_dw_10=matrix_predict(liability_tx_dw_10,nb_simul,time)
	x11()
	enveloppe_flux_duo("taux - 10 bps",flux_liability_tx_dw_10,flux_portfolio_tx_dw_10,nb_simul)

	assets_matrix_PV_tx_dw_10=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_dw_10,value_equity_tx_dw_10,v
	alue_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
	liability_PV_tx_dw_10=PV_liability(value_liability_tx_dw_10,value_deflateurs_tx_dw_10,nb_simul)
	market_value[4,1]=MV_liability(liability_PV_tx_dw_10)
```

```
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_dw_10%*%poids,liability_PV_tx_dw_10,"taux -10bps")
market_value[4,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_dw_10)%*%poids)
market_value[4,3]=100*(market_value[4,1]-market_value[4,2])/market_value[4,1]

#-------Sensi_tx_vol_up

assets_matrix_tx_vol_up=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_up,value_equity_tx
_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_vol_up=matrix_predict(assets_matrix_tx_vol_up%*%poids,nb_simul,time)
liability_tx_vol_up=p_flow_liability(value_liability_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul,time)
flux_liability_tx_vol_up=matrix_predict(liability_tx_vol_up,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("taux vol +10%",flux_liability_tx_vol_up,flux_portfolio_tx_vol_up,nb_simul)

assets_matrix_PV_tx_vol_up=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_up,value_equity_tx_vol_up,v
alue_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul)
liability_PV_tx_vol_up=PV_liability(value_liability_tx_vol_up,value_deflateurs_tx_vol_up,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_vol_up%*%poids,liability_PV_tx_vol_up,"taux vol +25%")
market_value[5,1]=MV_liability(liability_PV_tx_vol_up)
market_value[5,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_vol_up)%*%poids)
market_value[5,3]=100*(market_value[5,1]-market_value[5,2])/market_value[5,1]

#-------Sensi_tx_vol_dw

assets_matrix_tx_vol_dw=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_dw,value_equity_t
x_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul,time)
flux_portfolio_tx_vol_dw=matrix_predict(assets_matrix_tx_vol_dw%*%poids,nb_simul,time)
liability_tx_vol_dw=p_flow_liability(value_liability_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul,time)
flux_liability_tx_vol_dw=matrix_predict(liability_tx_vol_dw,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("taux vol -10%",flux_liability_tx_vol_dw,flux_portfolio_tx_vol_dw,nb_simul)
assets_matrix_PV_tx_vol_dw=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_tx_vol_dw,value_equity_tx_vol_dw,
value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul)
liability_PV_tx_vol_dw=PV_liability(value_liability_tx_vol_dw,value_deflateurs_tx_vol_dw,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_tx_vol_dw%*%poids,liability_PV_tx_vol_dw,"taux vol -25%")
market_value[6,1]=MV_liability(liability_PV_tx_vol_dw)
market_value[6,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_tx_vol_dw)%*%poids)
market_value[6,3]=100*(market_value[6,1]-market_value[6,2])/market_value[6,1]

#-------Sensi_eq_up_25
assets_matrix_eq_up_25=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_up_25,value_equity_eq_
up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul,time)
flux_portfolio_eq_up_25=matrix_predict(assets_matrix_eq_up_25%*%poids,nb_simul,time)
liability_eq_up_25=p_flow_liability(value_liability_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul,time)
flux_liability_eq_up_25=matrix_predict(liability_eq_up_25,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("equity vol +25%",flux_liability_eq_up_25,flux_portfolio_eq_up_25,nb_simul)
assets_matrix_PV_eq_up_25=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_up_25,value_equity_eq_up_25,va
lue_deflateurs_eq_up_25,nb_simul)
liability_PV_eq_up_25=PV_liability(value_liability_eq_up_25,value_deflateurs_eq_up_25,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_eq_up_25%*%poids,liability_PV_eq_up_25,"equity vol +25%")
market_value[7,1]=MV_liability(liability_PV_eq_up_25)
market_value[7,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_eq_up_25)%*%poids)
market_value[7,3]=100*(market_value[7,1]-market_value[7,2])/market_value[7,1]

#-------Sensi_eq_dw_25
assets_matrix_eq_dw_25=p_cash_flow_assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_dw_25,value_equity_eq
_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul,time)
flux_portfolio_eq_dw_25=matrix_predict(assets_matrix_eq_dw_25%*%poids,nb_simul,time)
liability_eq_dw_25=p_flow_liability(value_liability_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul,time)
flux_liability_eq_dw_25=matrix_predict(liability_eq_dw_25,nb_simul,time)
x11()
enveloppe_flux_duo("equity vol -25%",flux_liability_eq_dw_25,flux_portfolio_eq_dw_25,nb_simul)
assets_matrix_PV_eq_dw_25=assets(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r,value_ZCB_eq_dw_25,value_equity_eq_dw_25,
value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul)
liability_PV_eq_dw_25=PV_liability(value_liability_eq_dw_25,value_deflateurs_eq_dw_25,nb_simul)
x11()
affichage(assets_matrix_PV_eq_dw_25%*%poids,liability_PV_eq_dw_25,"equity vol -25%")
market_value[8,1]=MV_liability(liability_PV_eq_dw_25)
market_value[8,2]=sum(MV_assets(assets_matrix_PV_eq_dw_25)%*%poids)
```

```
	market_value[8,3]=100*(market_value[8,1]-market_value[8,2])/market_value[8,1]

return(market_value)
}

################################################################################
# Calcul de la VaR (ZCB,equity,call)
################################################################################

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
#Fonction pricing BS Call européen
#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
implied_vol=function(market_price,maturity,strike,S0,taux){
	FindVola=function(x,market_price,maturity,strike,S0,taux){
			option_price=BS_price(maturity,strike,S0,taux,sigma=x)
			return(market_price-option_price)
	}
uniroot(FindVola,interval=c(-10,10),market_price=market_price,S0=S0,strike=strike,maturity=maturity,taux=taux)$root
}

#Prix pour un call
BS_price=function(maturity,strike,S0,taux,sigma){
	d1 = (log(S0/strike) + (taux + sigma * sigma/2) * maturity)/(sigma * sqrt(maturity))
	d2 = d1 - sigma * sqrt(maturity)
	BS_price=(S0*pnorm(d1)-strike*exp(-taux*maturity)*pnorm(d2))
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
# Sous fonction composition portefeuille repliquant
#(recopie les data_assets pour permettre le comparaison de VaR selon les deux méthodes)
#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
composition=function(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r){
	if(bond==TRUE){
			data_assets_bond=data_assets_bond
	}else{
			data_assets_bond=NULL
	}
	if(equity==TRUE){
			data_assets_equity=data_assets_equity
	}else{
			data_assets_equity=NULL
	}
	if(call==TRUE){
			data_assets_call=data_assets_call
	}else{
			data_assets_call=NULL
	}
	if(put==TRUE){
			data_assets_put=data_assets_put
	}else{
			data_assets_put=NULL
	}
	if(swap_r==TRUE){
			data_assets_swaption_r=data_assets_swaption_r
	}else{
			data_assets_swaption_r=NULL
	}
	if(swap_p==TRUE){
			data_assets_swaption_p=data_assets_swaption_p
	}else{
			data_assets_swaption_p=NULL
	}
	if(cap_r==TRUE){
			data_assets_cap_r=data_assets_cap_r
	}else{
			data_assets_cap_r=NULL
	}
list(data_assets_bond=data_assets_bond,data_assets_equity=data_assets_equity,data_assets_call=data_assets_call,data_assets_put=data_a
ssets_put,data_assets_swaption_r=data_assets_swaption_r,data_assets_swaption_p=data_assets_swaption_p,data_assets_cap_r=data_asse
ts_cap_r)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
#Calcul de la VaR (ZCB,equity,call),
```

```
#output:
#echantillon = valeurs des passifs simulés à t=1
#q95= quantile à 95%
#mean =moyenne de la distribution

#Remarque: value_reel_ZCB=valeur des ZCB dans les scénarios historiques
#idem pour value_reel_equity,value_reel_deflateurs
#A defaut d'avoir les scénarios historique on prend les risque neutre

#------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------
VaR_actual=function(poids,value_reel_ZCB,value_reel_equity,value_reel_deflateurs,nb_simul){
	data_assets_bond=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_bond
	data_assets_equity=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_equity
	data_assets_call=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_call
	data_assets_put=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_put
	data_assets_swaption_r=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_swaption_r
	data_assets_swaption_p=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_swaption_p
	data_assets_cap_r=composition(bond,equity,call,put,swap_r,swap_p,cap_r)$data_assets_cap_r

	distribution=vector("numeric",length=nb_simul)
	MV_assets_portfolio=NULL
	new_poids=NULL
	if(bond==TRUE){
		if(data_assets_bond[1,1]==1){
			MV_assets_bond=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_bond[,1])-1)
			new_poids=c(new_poids,poids[2:length(data_assets_bond[,1])])
			for(i in 1:nb_simul){
				indice=0

	struct_ZCB=coupons(1,data_assets_bond[length(data_assets_bond[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
				for(j in data_assets_bond[2:length(data_assets_bond[,1]),1]){
					indice=indice+1
					MV_assets_bond[i,indice]=struct_ZCB[j-1]*value_reel_deflateurs[i,2]
				}
			}
		}else{
			MV_assets_bond=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_bond[,1]))
			new_poids=c(new_poids,poids[1:length(data_assets_bond[,1])])
			for(i in 1:nb_simul){
				indice=0

	struct_ZCB=coupons(1,data_assets_bond[length(data_assets_bond[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
				for(j in data_assets_bond[1:length(data_assets_bond[,1]),1]){
					indice=indice+1
					MV_assets_bond[i,indice]=struct_ZCB[j-1]*value_reel_deflateurs[i,2]
				}
			}
		}
		MV_assets_portfolio=cbind(MV_assets_portfolio,MV_assets_bond)
	}

	if(equity==TRUE){
		if(data_assets_equity[1,1]==1){
			MV_assets_equity=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_equity[,1])-1)

	new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+2):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1]))])
			for(i in 1:nb_simul){
			MV_assets_equity[i,1:length(data_assets_equity[,1])1]=value_reel_equity[i,2]*value_reel_deflateurs[i,2]
			}
		}else{
			MV_assets_equity=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_equity[,1]))

	new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+1):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1]))])
			for(i in 1:nb_simul){
			MV_assets_equity[i,1:length(data_assets_equity[,1])]=value_reel_equity[i,2]*value_reel_deflateurs[i,2]
			}
		}
		MV_assets_portfolio=cbind(MV_assets_portfolio,MV_assets_equity)
	}

	if(call==TRUE){
		if(data_assets_call[1,1]==1){
			MV_assets_call=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_call[,1])-1)
```

```
	new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+2):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+length(data_assets_call[,1]))])
				for(i in 1:nb_simul){
					indice=1
				struct_ZCB=coupons(1,data_assets_call[length(data_assets_call[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
					for(j in data_assets_call[2:length(data_assets_call[,1]),1]){
						indice=indice+1
						taux=(1/struct_ZCB[j-1])-1

MV_assets_call[i,indice1]=BS_price(data_assets_call[indice,1]1,data_assets_call[indice,3],value_equity[i,2],taux,0.30)*value_reel_deflateurs[i,2]
					}
				}
			}else{
				MV_assets_call=matrix(0,nrow=nb_simul,ncol=length(data_assets_call[,1]))

	new_poids=c(new_poids,poids[(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+1):(length(data_assets_bond[,1])+length(data_assets_equity[,1])+length(data_assets_call[,1]))])
				for(i in 1:nb_simul){
					indice=0
					struct_ZCB=coupons(1,data_assets_call[length(data_assets_call[,1]),1],value_reel_ZCB[(7*(i-1)+1):(7*i),])
					for(j in data_assets_call[,1]){
						indice=indice+1
						taux=(1/struct_ZCB[j-1])-1
						MV_assets_call[i,indice]=BS_price(data_assets_call[indice,1]-1,data_assets_call[indice,3],value_equity[i,2],taux,0.30)*value_reel_deflateurs[i,2]
					}
				}
			}
			MV_assets_portfolio=cbind(MV_assets_portfolio,MV_assets_call)
	}
	echantillon=MV_assets_portfolio%*%new_poids
	dens=density(echantillon)
	plot(dens,ylim=c(0,1.2*max(dens$y)),xlab="present value passif à 1 an",ylab="",main="Distribution horizon 1 an")
	q95=quantile(echantillon,probs=0.95,names=FALSE)
	mean_echantillon=mean(echantillon)
list(MV_assets_portfolio=MV_assets_portfolio,echantillon=echantillon,q95=q95,mean=mean_echantillon)
}

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
#Plot de la distirbution (comparaison de deux var)
#echantillon_pv= echantillon RPF en present value matching
#echantillon_pvm= echantillon RPF en present value flow matching

#-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------
plot_var=function(echantillon_pv,echantillon_pvm){
	density_pv=density(echantillon_pv)
	density_pvm=density(echantillon_pvm)
	plot(density_pv,ylim=c(0,1.2*max(density_pv$y,density_pvm$y)),xlab="present value passif à 1 an",ylab="",main="Distribution horizon 1 an",lty="dashed")
	lines(density_pvm)
	legend("topright",legend=c("Present value matching","Present Value Flow Matching"),lty = c("dashed","solid"),lwd=c(2,3),inset=.025,cex=0.75)
	q95_pv=quantile(echantillon_pv,probs=0.95,names=FALSE)
	q95_pvm=quantile(echantillon_pvm,probs=0.95,names=FALSE)
	#abline(v=q95_pv,col="red",lty="dashed")
	#abline(v=q95_pvm,col="red")
	mean_pv=mean(echantillon_pv)
	mean_pvm=mean(echantillon_pvm)
list(q95_pv=q95_pv,q95_pvm=q95_pvm,mean_pv=mean_pv,mean_pvm=mean_pvm)
}
```