

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaraires**

Par : Amandine Bruchet

Sujet : DÉTERMINATION DU TAUX ET DES MONTANTS PRÊTÉS POUR UN PRÊT VIAGER
HYPOTHÉCAIRE A TAUX FIXE SOUS CONTRAINTE DE RENTABILITÉ DANS LE CADRE JURIDIQUE
FRANÇAIS

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

*Membre présents du jury de
l'Institut des Actuaraires*

*Entreprise : Crédit Foncier de
France*

Nom :

Signature :

*Membres présents du jury de la
filière*

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :



**DETERMINATION DU TAUX ET DES MONTANTS PRETES POUR UN PRET VIAGER
HYPOTHECAIRE A TAUX FIXE SOUS CONTRAINTE DE RENTABILITE DANS LE
CADRE JURIDIQUE FRANÇAIS**

Amandine Bruchet

Octobre 2014

Partenariat ESSEC-ISUP - Mémoire d'actuariat

Promotion 2014

RESUME

Mots clés : prêt viager hypothécaire ; risque de dépassement ; modèle des taux de Vasicek ; modèle de longévité actuariel ; modèle des prix immobiliers à changements de régimes markoviens ; corrélation du taux d'intérêt et des prix immobiliers ; value at risk

Actuellement les personnes âgées représentent le segment de population dont le poids augmente le plus au sein de la population française. Ce sont les individus qui affichent les besoins les plus croissants en financements complémentaires à leurs revenus actuels. C'est également la catégorie de population la plus riche en actifs immobiliers. Paradoxalement ce sont les individus pour lesquels il existe le moins de solutions de financements adaptées sur le marché. En effet, les banques sont réticentes à prêter des capitaux aux personnes âgées de 65 ans et plus et exigent d'elles la souscription d'une assurance décès d'autant plus coûteuse que l'individu est âgé et en mauvaise santé. De plus, les produits de financement complémentaires issus d'entreprises privées s'adressant spécifiquement aux personnes âgées ne sont pas parvenus à leur offrir de solution convenable, à l'image de la vente en viager qui contraint le demandeur à céder son logement, quand bien même les français de plus de 65 ans y sont très attachés.

C'est pour parer à ces déficiences que la commercialisation du Prêt Viager Hypothécaire ou PVH a été autorisée en France en 2006. Le PVH est destiné à résoudre les problèmes de financement que rencontrent les personnes âgées en tirant parti de la plus grande richesse dont elles disposent : leur logement, en leur permettant de recevoir une fraction de la valeur de leur bien immobilier en échange du versement unique, à leur décès, de la valeur minimum entre la somme qui leur a été prêtée capitalisée au taux du PVH, ou valeur de la dette, et la valeur de ce bien.

Cependant, il n'existe pas encore premièrement de stratégies de couverture des risques et deuxièmement de méthode de détermination des paramètres clés légales ou standards, détaillées et richement documentées pour le PVH, ce produit complexe au croisement entre la finance et l'assurance, dont l'échéancier des flux est soumis à de nombreux aléas parmi lesquels le risque de dépassement qui lui est spécifique et exclusif.

Ces deux conditions étant en pratique nécessaires pour que l'offre de PVH fleurisse et se pérennise en France, l'objet de ce mémoire est de contribuer à remplir la seconde en essayant d'établir une méthodologie détaillée de détermination du taux de la dette et des montants prêtés pour le PVH. Celle-ci devra tenir compte des caractéristiques de l'emprunteur et de son logement, des trois principaux aléas auxquels est soumis le produit, ainsi que des contraintes auxquelles sont soumises les entreprises offreuseuses : la réalisation d'un objectif de rentabilité, de limitation du risque et la production d'un prêt commercialement attractif qui respecte le cadre juridique français.

Pour cela, après avoir présenté plus en détails le PVH, ses enjeux et modalités, nous expliciterons quatre méthodes intégrant les contraintes précédemment mentionnées: deux méthodes de détermination conjointes du taux et des montants prêtés, une méthode de pilotage par le taux pour un montant prêté donné et une méthode de pilotage par les montants prêtés pour un taux donné. Nous détaillerons les aléas auxquels est soumis l'échéancier du PVH puis établirons des modèles pour les trois aléas principaux : la longévité du groupe des souscripteurs, l'évolution des taux et celle des prix immobiliers. Nous construirons un outil informatique afin de pouvoir simuler des échéanciers de flux selon nos modélisations et tester nos quatre méthodes afin de sélectionner celle qui nous semble le plus adaptée aux contraintes de l'entreprise.

SUMMARY

Keywords: reverse mortgage, crossover risk; Vasicek interest rate model; actuarial longevity model; Markov switching model for housing prices; correlation between interest rates and housing prices; value at risk

Today, the elderly represent the demographic category that grows the most and the quickest among the French population. They have the most growing complementary financing needs to meet. They are also the wealthiest in terms of real estate assets. Paradoxically, seniors are the population segment for which there exists the least appropriate financing solutions for sale on the market. Indeed, banks are reluctant to lend them money and require a death insurance that is all the more costly for them as they are older and sicker. As for the financing solutions offered to them by private companies, they have proved to be inadequate, as reflected by life annuity sales which compels the elderly to sell their housing, even though French people over 65 years old are deeply attached to it.

The sale of reverse mortgages was authorized in France in 2006 as a means to fill this vacant spot on the market. Reverse mortgages are meant to solve the elderly's financing problems by drawing on their biggest asset: their housing, by enabling them to receive a fraction of its value in return for a unique payment to the lender, when they pass away, of an amount equal to the minimum of the loan they received capitalized at a certain rate, called the rate of the debt, and the value of their housing.

However, there does not currently exist in France either hedging strategies or methods to determine the key parameters that are legal or standard, detailed and widely documented for reverse mortgages, a complex category of products standing at crossroads between the financial and insurance spheres, with a cash flow schedule that is subject to numerous hazards among which the crossover risk, which is specific to reverse mortgages.

With those two conditions needing to be met so that the offer of reverse mortgages bloom and be made sustainable in France, the purpose of this paper is to contribute towards filling the second one by trying to establish a detailed method to determine the interest rate and the amount lent for a reverse mortgage. This method should take into account the characteristics of the borrowers and their housing, the three main hazards that make the cash flows schedule of reverse mortgages fluctuate as well as the constraints on professional lenders: meeting a profitability target while limiting the chances of not achieving it, as well as the production of a commercially attractive loan that is respectful of the law.

In order to manage this, after presenting reverse mortgages, their stakes and possible modalities in more details, we will design and quantify four methods incorporating the constraints previously mentioned: two methods to determine the interest rate and the amount lent jointly, one method of management through the interest rate for a given amount lent and one through the amount lent for a given interest rate. We will describe the hazards that make reverse mortgages' cash flows schedules uncertain and subsequently establish models for the three main ones: the longevity of the borrowers, the evolution of interest rates and that of housing prices. We will build a computing tool in order to simulate cash flows schedules in line with our models and test our four methods in order to select the one that is the most adequate to the lenders constraints.

REMERCIEMENTS

Je remercie Thibaud MAUDRY, mon maitre de Stage au Crédit Foncier de France pour m'avoir accueillie au sein de l'équipe Tarification et pour sa volonté permanente de me faire progresser.

Je remercie mon tuteur de mémoire Mathieu ROSENBAUM pour le temps et l'attention qu'il m'a accordés ainsi que les conseils toujours avisés qu'il m'a dispensés.

Je tiens à remercier mes parents, Véronique et Auguste BRUCHET, ma sœur, Noémie BRUCHET ainsi que Maxime LUCOT, Anne-Claire NAIN et Romain BRISSE pour avoir cru en moi, m'avoir soutenue et encouragée tout au long du processus de rédaction de ce mémoire.

Enfin je remercie ma co-stagiaire du Crédit Foncier de France Nina ROBERT pour avoir systématiquement provoqué ma bonne humeur ainsi que pour ses coups de pouce en VBA.

NOTE DE SYNTHÈSE

Mots clés : prêt viager hypothécaire ; risque de dépassement ; modèle des taux de Vasicek ; modèle de longévité actuariel ; modèle des prix immobiliers à changements de régimes markoviens ; corrélation du taux d'intérêt et des prix immobiliers ; *value at risk*

Introduction et problématique :

Actuellement, nous sommes témoins de la forte progression des individus âgés de 65 ans et plus au sein de la population française. D'une part ces individus sont caractérisés par un besoin de liquidités croissant, dû à l'allongement de la durée de vie humaine combiné à la dégradation du ratio actifs/passifs dans le cadre d'un régime de retraite par répartition. D'autre part, ils possèdent une grande richesse en actifs immobilisés, tout particulièrement en valeurs immobilières. Pourtant, il existe un manque de solutions de financement adaptées à cette catégorie de la population, les banques et établissements de crédit assortissant leurs prêts pour les seniors d'une obligation de souscription à une assurance décès d'autant plus chère que son souscripteur est âgé.

La réforme des sécurités de mars 2006 a légalisé la commercialisation d'un produit visant à combler ce vide sur le marché : le Prêt Viager Hypothécaire ou PVH. Ce produit de financement, exclusivement adressé aux seniors propriétaires, consiste à convertir l'actif immobilier des personnes âgées en liquidités en leur octroyant un pourcentage de la valeur de leur logement en une fois, auquel cas on parle de déblocage unique, ou en plusieurs fois, auquel cas on parle de déblocages fractionnés. La seule contrepartie est le versement au prêteur à la date de décès du dernier des souscripteurs d'une valeur égale au minimum de la dette, soit des montants prêtés capitalisés au taux du PVH, et de la valeur du bien immobilier à échéance. Le pourcentage ainsi prêté de la valeur initiale du bien immobilier sous-jacent se nomme quotité, il permet le calcul des montants prêtés dans le cadre d'un contrat de PVH.

Cependant, il n'existe aucune méthode légale et officielle, ni aucune méthode standard et richement documentée de détermination des paramètres clé du PVH à savoir taux et quotité. Or ces deux paramètres sont essentiels car ils influent sur la rentabilité que dégage ce produit, le niveau de risque qui lui est associé, son attrait commercial et sa capacité à se conformer à la législation en vigueur.

Le but de ce mémoire est de pallier ce manque en proposant une méthodologie de détermination du taux et de la quotité du PVH respectueux des objectifs, de la stratégie et des contraintes réelles qui s'appliquent à l'entreprise offreuse. Pour cela, nous tâchons d'apporter une réponse à la problématique suivante : quelle méthodologie de détermination des taux et quotités peut adopter une entreprise offreuse de PVH qui souhaite réaliser un objectif de rentabilité et de limitation du risque associé à ce produit tout en proposant des conditions commercialement attractives et respectueuses du cadre légal ? Nous restreignons le champ d'application de notre étude aux PVH soumis à la législation française dont le taux de la dette est fixe.

Démarche suivie pour sélectionner la méthode :

Pour répondre à cette problématique nous allons élaborer quatre méthodologies possibles de détermination des taux et quotité d'un PVH. Nous les testerons en simulant des échéanciers pour différentes configurations de PVH, puis en calculant le couple de paramètres qui réalise l'optimalité pour chaque méthode et chaque configuration. Nous observerons comment les quatre méthodes envisagées gèrent différents profils de prêt et comparerons les résultats qu'elles fournissent pour appuyer notre recommandation finale d'une méthode parmi les quatre.

Pour simuler les échéanciers de PVH requis, nous devons adopter un modèle de longévité afin de simuler des durées de PVH probables, ainsi qu'un modèle immobilier afin de simuler des valeurs probables pour le bien immobilier sous-jacent au terme du contrat.

En modélisant ainsi la longévité du prêt et l'évolution du prix du bien sous-jacent nous modéliserons le risque central du PVH, dénommé risque de dépassement. Ce risque est né d'une garantie qu'offre le PVH à ses souscripteurs : le plafonnement de la dette à la valeur à terme du bien immobilier sous-jacent. Il se réalise dès lors que le montant de la dette est supérieure à la valeur du bien sous-jacent au moment du décès du dernier des souscripteurs, auquel cas le montant remboursé au prêteur est égal à la valeur du bien et non à celle de la dette, ce qui engendre un manque à gagner pour celui-ci.

En effet, la probabilité de réalisation du risque de dépassement est influencée à la fois par la durée aléatoire du contrat et par l'évolution aléatoire du prix du bien sous-jacent. Le taux de la dette étant typiquement choisi pour être supérieur au taux d'appréciation annuel de l'immobilier, il est quasi certain que la valeur de la dette dépassera un jour celle du bien immobilier. Par conséquent, plus la durée du PVH est longue, plus la probabilité que ce dépassement se produise au cours de la vie du PVH est élevée. De même, plus le prix du bien immobilier se déprécie au cours de la durée du PVH, plus la probabilité que ce prix soit inférieur à la valeur de la dette au terme du prêt est élevée.

Nous opterons également pour un modèle de taux afin de simuler des valeurs probables des taux d'actualisation applicables à chaque flux généré par le PVH. Ces taux d'actualisation nous permettront de calculer la valeur actuelle de ces flux pour chaque simulation.

L'échéancier du PVH est en théorie soumis à d'autres aléas dont nous supposons raisonnablement qu'ils ne se réaliseront pas. Nous négligerons notamment le risque de défaut. En effet, le plafonnement de la dette à la valeur du bien implique que les héritiers ont en théorie toutes les ressources nécessaires au paiement de l'unique montant dû à terme, puisque le bien immobilier, dont la valeur est systématiquement supérieure ou égale au montant de la dette, leur revient. Nous négligerons également le risque de remboursement anticipé ou RA, qui correspond au risque d'un remboursement du PVH avant la date de décès du dernier des souscripteurs. En effet, la garantie de plafonnement n'est pas valable en cas de RA. Un RA fait donc disparaître le risque de dépassement et faire l'hypothèse de non réalisation de ce risque correspond en ce sens à une hypothèse prudente pour le prêteur. En outre le taux de RA effectivement observé pour des PVH en France est très proche de 0.

Les quatre méthodologies envisagées :

Nous explicitons ici quatre méthodologies possibles de détermination des taux et quotités du PVH respectant chacune les contraintes de rentabilité, limitation du risque ainsi que commerciales et juridiques qui s'imposent à l'entreprise du fait de sa stratégie, de ses objectifs ou d'obligations externes.

La contrainte de rentabilité consiste à s'assurer que la fonction objectif, égale au ratio de la valeur actuelle des flux générés par le PVH par la valeur actuelle des montants prêtés, est supérieure à un seuil de rentabilité SR correspondant à un pourcentage constant défini par l'entreprise prêteuse. Les flux pris en compte correspondent aux déblocages, au remboursement mais aussi à tous les produits et coûts associés générés directement par le contrat de PVH et indirectement par d'éventuels contrats souscrits pour assurer la couverture des risques qu'il génère. Cependant la fonction objectif étant une variable aléatoire cette contrainte ne peut être respectée avec certitude. Le souci pour la rentabilité sera donc inclus aux méthodes aux travers du respect de la contrainte de risque suivante.

La contrainte du risque est respectée dès lors que la probabilité que la fonction objectif soit inférieure à SR est inférieure ou égale à la probabilité de non réalisation maximale PNR qu'est prête à accepter l'entreprise et qu'elle définit comme un chiffre constant compris entre 0 et 1. Vérifier le respect de cette contrainte équivaut à vérifier le fait que la Value at Risk de la variable aléatoire définie par la fonction objectif au niveau de confiance PNR est supérieure ou égale à SR.

Concernant la contrainte commerciale, les taux et quotité proposés doivent être multiples de chiffre définis par l'entreprise, et doivent être compris dans des fourchettes que l'entreprise juge acceptables. L'entreprise offreuse doit donc définir un taux de la dette minimal, un taux de la dette maximal, un pas de taux, une quotité minimale,

une quotité maximale et un pas de quotité. Nous tiendrons également compte dans la formulation de nos méthodologies du fait que les préférences des clients reviennent aux PVH dont le taux de la dette est le plus faible, ou dont la quotité est la plus élevée, toutes choses égales par ailleurs.

La contrainte juridique est respectée lorsque l'entreprise offreuse propose exclusivement des couples (taux, quotité) de PVH qui résultent en des Taux Effectif Globaux ou TEG inférieurs au taux de l'usure en vigueur applicable au PVH.

La première méthodologie de détermination des taux et quotités du PVH que nous envisageons, prénommée M_{conj1} consiste à déterminer conjointement les valeurs de taux et de quotité qui minimisent la probabilité que la fonction objectif prenne une valeur inférieure à SR. La seconde, nommée M_{conj2} consiste à déterminer conjointement les valeurs de taux et de quotité qui maximisent l'espérance de la fonction objectif. La troisième, notée $M_{\tau/q}$, consiste à laisser l'entreprise fixer la valeur de la quotité au niveau de son choix, puis à minimiser le taux de la dette du PVH. La quatrième, $M_{q/\tau}$, consiste à laisser l'entreprise donner au taux de la dette la valeur de son choix, puis à maximiser la valeur de la quotité. Ces quatre méthodologies intègrent de surcroît les contraintes de respect des trois conditions vis-à-vis du risque, de l'attrait commercial et de conformité juridique explicitées précédemment.

Modélisations et simulations des trois aléas :

Il convient à présent de choisir et d'explicitier les modèles retenus pour nos trois aléas.

Premièrement nous souhaitons simuler des durées de contrat de PVH probables. Nous voulons donc modéliser et simuler des durées de survie probables du groupe souscripteur, éventuellement augmentées d'un délai de remboursement. Cependant il n'existe pas de base de données conséquente concernant la mortalité des souscripteurs français de PVH, du fait du caractère récent du produit et des faibles volumes d'écoulement en France. Nous nous orientons donc vers l'utilisation de données publiques concernant la mortalité de populations considérées comme de bons proxy des souscripteurs de PVH. Or, statistiquement les souscripteurs français de PVH ont tendance à appartenir aux catégories professionnelles mieux rémunérées que la moyenne et à avoir effectué de nombreuses années d'études. De plus, ils correspondent à des individus qui estiment vivre encore assez longtemps pour utiliser leur prêt et il est possible que l'octroi du PVH rétroagisse sur leur durée de vie restante en l'allongeant. En résumé, ils présentent des caractéristiques suggérant leur tendance à vivre plus longtemps que leurs pairs de même âge. De plus, le risque pèse sur le créancier en cas de sous-mortalité des souscripteurs. Cela indique que les rentiers semblent être la population proxy appropriée. Nous choisissons donc d'utiliser les données des tables officielles TGH05 et TGF05 pour nos calculs. Nous utilisons le modèle actuariel classique des probabilités viagères pour un groupe disparaissant au décès du dernier de ses membres sur ces tables afin de calculer la fonction de répartition de la durée de survie du groupe souscripteur pour les âges entiers. Nous permettons la correction des espérances de décès d'une année à l'autre données par les tables par un coefficient de sous ou de sur mortalité du choix de l'entreprise. Nous pouvons ensuite simuler des durées de survie du groupe emprunteur lorsque l'on connaît le nombre d'individus qui le compose, leurs âges et leurs genres en simulant un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 dont nous recherchons l'antécédent par la fonction de répartition de la durée de survie du groupe emprunteur. Lorsque cet antécédent n'est pas un entier, nous calculons sa partie décimale par interpolation cubique.

Deuxièmement nous souhaitons adopter un modèle afin de simuler des courbes de taux d'actualisation probables au moment de la détermination des taux et quotités nous permettant de calculer la valeur actuelle probable de chacun des flux générés par PVH. Nous avons besoin d'un tel modèle car l'entreprise offreuse ne peut pas savoir avec certitude quel taux d'actualisation est applicable à chacun des flux du PVH au moment de la détermination des taux et quotité. En effet, pour les connaître certainement, il faudrait qu'elle puisse sécuriser ces taux avec des contrats échéants aux dates d'échéance des flux du PVH. Ces dates étant, pour le moins une partie d'entre elles,

aléatoires, elle n'est pas directement capable de souscrire à de tels contrats. La valeur des taux d'actualisation qui s'avèreront être effectivement applicables aux flux du PVH dépend des évolutions des taux d'intérêt entre la date de prise d'effet du PVH et la date d'échéance du flux. Nous adoptons le modèle de taux de Vasicek à un facteur que nous calibrons par la méthode de régression des moindres carrés sur une courbe de facteurs d'actualisation publiée par le Comité de Normalisation Obligatoire datant du 30 septembre 2013. Nous simulons avec Vasicek les

valeurs du taux court aux instants $i \times \Delta t$ avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \times \Delta t = \begin{cases} T & \text{si } T \text{ est un multiple de } \Delta t \\ \left(\text{Ent} \left(\frac{T}{\Delta t} \right) + 1 \right) \times \Delta t & \text{sinon} \end{cases}$, où T

est la durée du contrat de PVH et Δt est la durée des contrats de refinancement de l'entreprise offreuse, soit l'horizon pour lequel elle peut considérer les taux comme certains. Nous en déduisons grâce aux formules de Vasicek les $ZC(i \times \Delta t, i \times \Delta t + 1)$ puis les $DF(i \times \Delta t, i \times \Delta t + 1)$ avec $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, où $ZC(t, T)$ est le taux zéro coupon applicable à la période commençant en t et finissant en T et $DF(t, T)$ le taux d'actualisation déductible du taux zéro coupon augmenté de la prime de risque de l'entreprise prêteuse sur la même période. Nous reconstruisons enfin la courbe des taux d'actualisation, associant à une maturité t , le facteur d'actualisation $DF^*(0, t)$ de façon récursive comme suit:

$$DF^*(0, i \times \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ DF^*(0, (i-1) \times \Delta t) \times DF((i-1) \times \Delta t, i \times \Delta t) & \text{pour } i \in \llbracket 1; n \rrbracket \end{cases}$$

Pour des dates t qui ne sont pas multiples de Δt nous calculons $DF^*(0, t)$ par interpolation cubique.

Enfin, nous souhaitons adopter un modèle afin d'effectuer des simulations de la valeur du bien immobilier sous-jacent à échéance. Cependant nous n'avons pas accès à une base de données privées fournissant un historique de prix immobiliers et les bases de données publiques concernant la valeur de l'immobilier consistent en des séries temporelles couvrant des périodes courtes. Nous recueillons donc des données d'indices immobiliers français provenant de trois sources distinctes : le CEPII, le CGEDD et l'INSEE que nous ramenons à la même base afin de disposer de données annuelles d'indices immobiliers couvrant la période 1890 à 2013. Puisqu'il n'existe pas de modèle de prédiction standard et officiel ni de modèle richement documenté faisant un certain consensus pour les prix immobiliers, nous commençons par observer et analyser nos données. Précisément nous observons le graphique de l'évolution des indices immobiliers ainsi que celui de leurs rendements logarithmiques depuis 1890, puis nous suivons la méthodologie Box & Jenkins afin de comprendre mieux la dynamique de ces derniers en analysant leur autocorrélogramme et en réalisant des tests de racine unitaire sur nos séries. Nous en concluons l'existence de trois caractéristiques des rendements logarithmiques des indices immobiliers : des changements de comportement soit de distribution au cours du temps, une corrélation et persistance de ces comportements à court terme et une dynamique qui repose sur une auto régression d'ordre 1. Cela nous oriente vers l'adoption d'un modèle dynamique de type AR(1) à changements de régimes markoviens, lequel est capable de modéliser et intégrer ces trois caractéristiques.

Pour confirmer ce choix nous testons contre nos données les performances d'une quinzaine de modèles dynamiques autorégressifs simples et à changements de régime markoviens. D'abord, nous testons la validité des hypothèses de ces modèles, soit la significativité de leurs coefficients avec des p-values, l'espérance nulle de l'erreur en calculant la moyenne empirique des résidus, la distribution gaussienne de l'erreur avec des tests de normalité sur les résidus, et une absence d'autocorrélation de l'erreur dans le temps en analysant l'autocorrélogramme des résidus. Ensuite, nous testons l'aptitude des modèles dont les hypothèses sont valides à générer des prédictions conformes au réel. Pour cela nous estimons ces modèles sur deux tiers de nos données et générons des prédictions dynamiques sur le tiers des données restant. Nous examinons alors des statistiques de distance entre nos données et les prédictions des différents modèles puis nous observons visuellement l'adéquation entre la courbe de nos données observées et les courbes de prédictions. A l'issue de ces deux étapes, nous décidons d'adopter un modèle AR(1) à changements de régime markoviens avec constante où les trois paramètres diffèrent pour chacun des 2 régimes pour les rendements logarithmiques d'indices immobiliers. Nous le calibrons sur nos données de 1890 à 2013 via la méthode de l'estimateur de quasi vraisemblance. Nous posons alors l'hypothèse que le rapport du prix du bien immobilier considéré à la fin et au début d'une période est

proportionnel au rapport des indices immobiliers à la fin et au début de la même période : $PI_t = \frac{Id_t}{Id_0} \times PI_0$ où PI_t est le prix immobilier du bien immobilier à l'instant t et Id_t l'indice immobilier en t . Nous accomplissons enfin notre objectif en simulant des valeurs futures de rendements logarithmiques d'indices immobiliers selon notre modèle puis en déduisant des valeurs probables des prix immobiliers futurs par la formule $PI_t = \exp(\sum_{i=1}^t y_i) \times PI_0$, où y_t est le rendement logarithmique de l'indice immobilier entre l'instant $t-1$ et l'instant t , pour des dates t entières. Pour des dates non entières, nous utilisons une interpolation cubique.

Jusqu'à présent nous avons modélisé nos 3 aléas indépendamment les uns des autres. Il nous faut néanmoins valider l'hypothèse de leur indépendance. Sans RA, nous pouvons directement confirmer l'indépendance entre d'une part taux et longévité et d'autre part prix immobiliers et longévité. En effet, l'éventuel impact des évolutions de taux sur la longévité du PVH consisterait à ce que le souscripteur effectue un RA en cas de baisse de taux en réempruntant le montant de son remboursement à des taux plus bas, ce qui est exclu sous nos hypothèses. Réciproquement nous admettons que la longévité du PVH n'a aucun impact sur les taux d'intérêt du marché. De même, l'éventuel impact des prix immobiliers sur la longévité du PVH consisterait à ce que le souscripteur effectue un RA en cas d'augmentation des prix immobiliers en souscrivant un nouveau PVH pour un montant plus important du fait de la valeur initiale du bien sous-jacent plus élevée, ce que nous excluons. Réciproquement nous admettons que la longévité du PVH n'influe pas sur les prix immobiliers.

Nous ne pouvons en revanche admettre sans examen préalable l'indépendance entre les taux d'intérêt et les prix immobiliers. En effet, la grande majorité des achats de biens immobiliers en France étant financée par des prêts, une baisse des taux d'intérêts devrait rendre le financement du logement plus accessible, donc augmenter la demande de biens immobiliers et par conséquent les prix immobiliers, toutes choses égales par ailleurs, et inversement. Cependant la condition toutes choses égales par ailleurs ne tient pas en réalité et de nombreuses variables interfèrent dans cette relation de causalité. Notamment l'introduction des variables revenus des ménages et croissance économique à ce tableau permet d'expliquer qu'en temps de récession les taux et les prix immobiliers baissent simultanément. De plus, la littérature scientifique concernant la relation qui lie taux d'intérêt et prix immobiliers est très partagée et de nombreuses études concluent au caractère négligeable de cette relation, ou à ce que les prix immobiliers n'incorporent pas d'information sur les taux.

Pour valider ou infirmer l'hypothèse d'indépendance entre taux et prix immobiliers nous analysons les données trimestrielles de l'Euribor 1 semaine de 1999 à 2013 au regard de l'indice des logements anciens de l'INSEE de même fréquence couvrant la même période. Nous procédons d'abord à des analyses visuelles de ces deux séries et à des tests de corrélation et de causalité de Granger. Puis nous testons plus d'une trentaine de modèles linéaires simples et à changements de régimes markoviens liant rendements immobiliers et valeurs présentes ou passées des niveaux ou des rendements de taux d'intérêt contre le modèle AR(1) à changements de régimes markoviens indépendant des taux que nous avons sélectionné précédemment. Nous testons la validité de leurs hypothèses: significativité des coefficients, distribution gaussienne d'espérance nulle de l'erreur sans autocorrélation dans le temps. Nous estimons les modèles dont les hypothèses sont valides sur deux tiers des données et générons des prédictions sur le tiers restant afin de les comparer aux données observées par des analyses de statistiques sur les résidus et une analyse d'adéquation visuelle des courbes observées et prédites. Nous concluons que parmi les modèles envisagés dont les hypothèses sont valides, le modèle AR(1) à 2 changements de régimes markoviens indépendant de données de taux est le plus apte à générer des prédictions proches de la réalité.

Nous conservons donc ce modèle et assumons l'indépendance deux à deux entre nos trois aléas et nos trois modèles.

Simulations, résultats et conclusion :

Dotés de nos trois modèles de longévité, de taux et de prix immobiliers nous sommes fins prêts à effectuer des simulations d'échéanciers de PVH probables afin de tester nos quatre méthodologies de détermination des taux et quotités. Nous avons codé en langage VBA trois outils indépendants qui permettent respectivement de simuler des dates de maturité probables du PVH, des courbes de taux d'actualisation probables et des évolutions futures probables pour le prix du bien sous-jacent selon les trois modèles que nous avons établis. Nous avons également codé en VBA un outil central qui importe les simulations de ces trois outils et en déduit en fonction de la valeur du couple (taux, quotité) les échéanciers probables de PVH à partir des informations renseignées par l'utilisateur sur les modalités de déblocages et les coûts et produits associés. L'outil central calcule ensuite la valeur du couple qui réalise l'optimalité sous chacune de nos quatre méthodes et pour chaque ensemble de simulation. Il renvoie pour chaque couple optimal une estimation de la probabilité d'excéder SR, la valeur de la rentabilité moyenne sur l'ensemble des simulations et trois TEG calculés sous différentes hypothèses de longévité du groupe souscripteur et d'appréciation annuelle du bien immobilier sous-jacent.

Avec ces outils, nous calculons les paramètres optimaux fournis par nos quatre méthodes pour plus d'une centaine de configurations du PVH distinctes en termes de profil de déblocages – nombre, fréquence, type et facteurs des déblocages –, de profil de coûts et produits associés – nombre, fréquence, montant unitaire –, de composition du groupe emprunteur – nombre d'individus, âge, genre, hypothèse de sous ou surmortalité –, de valeur initiale du bien sous-jacent et de paramètres d'optimisation – SR, PNR, taux fixé, quotité fixée. Nos observations sont les suivantes : les probabilités d'excéder SR et les rentabilités moyennes ainsi que les TEG sont maximisés par les deux méthodes conjointes parmi les 4 étudiées. La méthode $M_{q/\tau}$ fournit les probabilités minimums ou mediums, et les rentabilités et TEG mediums. La méthode $M_{\tau/q}$ fournit les probabilités minimums ou mediums et les rentabilités et TEG minimums. Nous relevons un nombre important de cas d'insolvabilités avec cette méthode et certains cas dans lesquels la rentabilité moyenne est inférieure à la rentabilité souhaitée. En nous appuyant sur ces observations nous débattons ensuite des avantages et inconvénients de chaque méthode vis-à-vis de quatre aspects d'intérêt : commercial, juridique, pratique et sécuritaire. Notre conclusion est exposée comme suit :

Selon la quotité fixée, la méthode $M_{\tau/q}$ aboutit aux TEG les plus bas donc aux conditions les plus attractives pour le client. Cependant, le choix de cette méthode peut s'avérer risqué pour l'entreprise offreuse puisque c'est la méthode parmi les 4 qui aboutit aux rentabilités moyennes les plus faibles et pour laquelle les cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité pour cette méthode s'accompagnent des plus lourdes pertes. De plus, sur le plan pratique, c'est la méthode la moins flexible en termes de paramètres du PVH, et celle qui conclut le plus fréquemment à l'insolvabilité. Pour adopter cette méthode il faudrait déterminer des quotités fixées distinctes selon les profils de déblocage, de coûts et produits associés et du groupe emprunteur ou accepter de perdre des clients en cas d'insolvabilité. Pour ces raisons, nous ne recommandons pas l'emploi de cette méthode.

Les deux méthodes conjointes fournissent les termes les plus avantageux pour le prêteur en termes de rentabilité du PVH et de probabilité de réalisation de l'objectif souhaité. Elles testent un plus grand nombre de combinaisons (taux, quotité) que les autres méthodes, ce qui leur confère un plus grand pouvoir de résolution. Cependant elles offrent au client les conditions les moins attractives, reflétées par leurs TEG quasi usuraires. L'entreprise qui choisit une de ces méthodes minimisera les profits absolus de son portefeuille de PVH et ses opportunités de mutualiser les risques de ce portefeuille en minimisant les volumes de souscription. Finalement, elles ne permettent pas d'offrir explicitement d'avantage aux profils les moins risqués en permettant aux commerciaux de leur proposer un taux ou une quotité individuellement attractif, exposant tout particulièrement l'entreprise offreuse au risque d'antisélection. Pour ces raisons, nous ne recommandons pas l'emploi de ces méthodes.

La méthode $M_{q/\tau}$ permet d'offrir des conditions attractives au client tout en permettant la réalisation des objectifs de l'entreprise. Elle possède une meilleure capacité de résolution que la méthode $M_{q/\tau}$, et sait s'adapter à une grande variété de profils de PVH. Nous recommandons donc aux entreprises offreuses un pilotage du PVH par le taux, en le fixant à priori puis en déterminant la quotité au cas par cas via cette méthode.

Critique et pistes d'amélioration :

Les principales faiblesses de ce mémoire sont les suivantes : la méthode de détermination des taux et quotité devrait incorporer une contrainte supplémentaire portant sur une mesure des pertes en cas de non réalisation de l'objectif de l'entreprise. En particulier, l'introduction d'une valeur maximale pour l'*expected shortfall* en cas de non réalisation du seuil de rentabilité souhaité serait appropriée. De plus, notre conclusion pêche par l'absence d'une preuve mathématique rigoureuse de la tendance de la méthode $M_{\tau/q}$ à aboutir à l'insolvabilité comparativement aux trois autres méthodes. Quant à nos modélisations, nous manquons de données permettant d'établir que la loi de mortalité des souscripteurs de PVH peut être modélisée correctement à partir de données observées sur des rentiers. Pour le modèle de taux, l'utilisation du modèle de Vasicek n'est pas particulièrement adaptée à des prédictions de taux sur des horizons longs. Or, le contrat de PVH peut durer des dizaines d'années. Enfin, dû à un manque des données immobilières, nous n'avons pu tenir compte des caractéristiques propres au bien outre sa valeur initiale pour formuler nos prédictions. De même, nous n'avons pu établir si les biens immobiliers sous-jacents à des contrats de PVH ont plus tendance à se déprécier que la moyenne des biens français ou non, donc de confirmer ou d'infirmer la réalisation d'un aléa moral pour le PVH. La meilleure façon d'améliorer la réponse apportée à la question soulevée par ce mémoire semble résider dans la correction de ces faiblesses. Cependant nous ressortons de cette étude avec la conviction que la stratégie de pilotage par le taux, en le fixant à priori puis en décidant de la quotité au cas par cas, est la plus appropriée parmi les quatre envisagées pour la détermination des taux et quotité du PVH.

SYNTHESIS NOTE

Keywords: reverse mortgage, crossover risk; Vasicek interest rate model; actuarial longevity model; Markov switching model for housing prices; correlation between interest rates and housing prices; value at risk

Introduction and research question:

Today, we are witnessing a great increase of the 65 + individuals among the total population in France. On the one hand, those individuals are characterized by a growing need for cash assets, owed to the combination of lengthening life spans and a lessening active to inactive ratio in the framework of a pay-as-you-go pension scheme. On the other hand, they own by a substantial wealth in illiquid assets, especially in real estate. And yet, there exists no financing solutions fitted to the needs of this expanding, sizable and fixed assets-wealthy population category. Indeed, most banks and credit institutions match their loans with an obligation for the borrowers to subscribe to a death insurance that is all the more costly as they are older.

A law passed in March of 2006 made legal the sale of a loan aiming at filling this gap on the French market: the reverse mortgage. This financial product, which is exclusively targeted at elderly owners, consists in converting seniors' real estate assets into cash by granting them a percentage of the value of their housing through a unique payment, in which case the loan is a lump sum reverse mortgage, or through several payments. The only compensation is a payment made to the lender when all the borrowers have passed away, equal to the minimum amount between the debt, meaning the amounts lent capitalized at the reverse mortgage's debt rate, and the value of the underlying real estate asset at maturity.

Today there exists no legal and official nor any standard and well documented method to determine the key parameters: debt rate and loan size for reverse mortgages. And yet, these parameters influence reverse mortgages' ability to be profitable, the level of risk associated with this loan, its commercial appeal and its aptitude to comply with the law.

The goal of this paper is to make up for this loophole by establishing a methodology of determination of the debt rate and loan size for a reverse mortgage that complies with the targets, strategies and real constraints of the lender. To do this, we will address the following research question: what method can a lender who wishes to meet profitability and risk limitation targets while offering commercially appealing and law-abiding loans use to determine the debt rate and loan size for a reverse mortgage ? We will restrict the results of this study to the scope defined by fixed rate reverse mortgages that are regulated by French laws.

Approach used to select the method:

To answer this research question, we will elaborate four possible methods to determine the debt rate and loan size of a reverse mortgage. We will simulate cash flow schedules for different reverse mortgage setups. Then we will test our four methods by computing the optimal couple of parameters for each method, each setup and each set of simulations. We will observe how the four methods cope with different reverse mortgage profiles and compare the results they provide. Based on these observations we will recommend one method among the four.

To simulate the cash flows schedules required, we need to adopt a model to simulate likely durations for the reverse mortgage contract, as well as a model to simulate likely values for the property underlying the loan at maturity.

By modelling the duration of the contract and the evolution of the underlying property price, we will model the main risk associated with reverse mortgages, named the crossover risk. This risk stems from the 'no negative equity guarantee' that is compulsory in France for reverse mortgages. Thanks to this guarantee, if the debt value exceeds the value of the underlying property at maturity, the borrowers will only have to repay the value of the underlying

property, and not that of the debt, to the lender. Therefore, the crossover risk materializes whenever the debt value is greater than that of the underlying property at maturity by creating a profitability shortfall for the lender.

Indeed, the probability of occurrence for the crossover risk is affected both by the random duration of the contract and by the random evolution of the underlying property price. With the debt rate being typically chosen to exceed the appreciation rate of real estate, it is almost certain that the debt value will crossover the underlying property price at some point. Therefore, the longer the duration of the contract, the higher the probability that the crossover will occur during the contract life. Likewise, the lower the value of the underlying property at maturity, the higher the probability that this value will be lower than that of the debt at maturity.

We will also opt for an interest rate model in order to simulate likely values for the discount factors that can be used for each cash flow generated by the reverse mortgage. Thanks to those discount factors, we will be able to compute the present value of each one of these cash flows.

The cash flows schedule of a reverse mortgage is theoretically also submitted to other hazards. We will suppose that they won't occur. Especially, we will neglect the default risk because, thanks to the "no negative equity" guarantee, the heirs of the borrowers are supposed to have all the required resources to pay the loan back. Indeed at maturity they will inherit the underlying property, whose value systematically exceeds or equal the amount due. We will also neglect the risk of early repayment or ER, which occurs whenever the loan is paid back before the last of the borrowers passes away. Indeed, the "no negative equity" guarantee is not valid in the case of an ER. An ER therefore removes the crossover risk so that supposing an absence of ER is a cautious hypothesis for the lender. Besides, the ER rate observed in France is very close to 0 for reverse mortgages.

The four methods:

We formulate here four possible methods to determine the debt rate and loan size for a reverse mortgage. Each of them needs to respect some conditions with regards to the loan profitability, the limitation of the risk, as well as to respect some commercial and legal constraints.

The constraint with regards to the profitability consists in making sure that the objective function, equal to the present value of all the cash flows generated by the reverse mortgage divided by the present value of the capital lent, is greater than a profitability threshold PT defined as a constant percentage selected by the lender. The cash flows taken into account correspond to the amount(s) lent, the repayment, but also all the associated revenues and costs generated because of the reverse mortgage, including cash flows from hedging contracts. However, with the objective function being a random variable, it is impossible to fulfill this constraint with certainty. The consideration for the profitability will hence be incorporated to the methods through the constraint regarding the risk, as follows.

The constraint with regards to the risk is fulfilled whenever the probability that the objective function is lower than PT is inferior or equal to the no achievement probability NAP that the lender is ready to accept and defines as a constant number between 0 and 1. Controlling the fulfillment of this constraint is equivalent to checking that the Value at Risk of the random variable defined by the objective function at a NAP confidence level is greater than PT.

As for the commercial constraint, the debt rate and loan size must be multiples of numbers and must belong to a bracket defined by the lender. The lender must hence define a maximum and a minimum for the debt rate and for the loan size (as a percentage of the underlying property initial value), as well as a multiple for both parameters. We will also take into account the fact that borrowers prefer the reverse mortgages with the highest loan size or the lowest debt rate, all else equal.

The legal constraint is met when the lender offers a debt rate and a loan size that guarantee an overall effective rate or OER lower than the legal usury rate for reverse mortgages.

The first method to determine the debt rate and loan size that we consider, named M_{conj1} , consists in determining the two parameters values that together minimize the probability that the objective function be less than PT. The second method, called M_{conj2} consists in determining the two parameters values that together maximize the expected value of the objective function. The third one, $M_{\tau/q}$, consists in letting the lender give the value of his choice to the loan size (as a percentage of the underlying property initial value) then in minimizing the debt rate. The fourth method, $M_{q/\tau}$, consists in letting the lender give the value of his choice to the debt rate then in maximizing the loan size. All these four methods additionally include the risk, commercial and legal constraints previously exposed.

Models for the three hazards:

We will now choose models for our three hazards.

First, we need to simulate probable durations for the reverse mortgage contract. Hence we need to model and simulate probable survival times for the borrowers group, potentially increased by a payout delay. However, there exists no substantial database recording reverse mortgage borrowers mortality in France due to the recentness of the introduction of this type of loan and the low sales volumes observed in this country. This is why we turn towards the use of public mortality data for a good proxy population. Precisely, French borrowers of reverse mortgages tend to belong to the professional categories with incomes greater than average. They tend to have studied for a high number of years. Besides, they think they will survive long enough to use the amounts lent and it is possible that the grant of a reverse mortgage might lengthen their survival time. In conclusion, they tend to live longer than their peers of the same age and gender. Additionally, the risk weighs on the lender in the case of borrowers' undermortality. Based on those pieces of information, the population of annuitants seems to be an appropriate proxy. Consequently, we opt for the data from the TGH05 and TGF05 official life tables for French annuitants. We use the usual actuarial model based on survival probabilities for a group disappearing at the death of the last of its members on this data in order to compute the survival cumulative distribution function of the borrowers group for integer ages. We allow the correction of the expected value for the number of deaths from one year to another by an over or under mortality proportional constant coefficient selected by the lender. We can then simulate survival times for the borrowers group when we know the number of members, their ages and genders by simulating a random number between 0 and 1 and by searching its antecedent through the survival cumulative distribution function of a group with similar characteristics. When this antecedent is not an integer, we compute its decimals through a cubic spline interpolation.

Second, we need to select a model to simulate probable discount factors curves in order to compute the present value of each of the reverse mortgages cash flows. Such a model is required because the lender cannot know with certainty what level of discount factor can be applied to each of the cash flows generated by the reverse mortgage before the loan is paid back. Indeed, to know those levels certainly the lender would have to secure the discount factors with contracts coming due at each of the cash flow maturities. Since some of these maturities are random, the lender cannot subscribe to such contracts directly. Therefore, the value of the discount factors that will prove to be effectively usable for each of the cash flow maturities depends on the evolution of the interest rates between the moment the contract takes effect and the maturities of the cash flows it generates. We opt for Vasicek's single factor interest rate model that we calibrate through the least squares method on a discount factors curve published by the *Comité de Normalisation Obligataire* dating back to the 30th of September 2013. With this model, we simulate the values of the short rate at times $i \times \Delta t$ with $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $n \in \mathbb{N}^*$ and $n \times \Delta t = \begin{cases} T & \text{if } T \text{ is a } \Delta t \text{ multiple} \\ \left(\text{Ent} \left(\frac{T}{\Delta t} \right) + 1 \right) \times \Delta t & \text{otherwise} \end{cases}$ where T is the duration of the reverse mortgage and Δt is the duration of the lender's refinancing contracts – namely the reliability time horizon for the lender's discount rates. Thanks to the explicit formulas given by Vasicek, we infer the values of $ZC(i \times \Delta t, i \times \Delta t + 1)$ and $DF(i \times \Delta t, i \times \Delta t + 1)$ for $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$, where $ZC(t, T)$ is the zero-coupon bond yield over the period starting in t and ending in T and $DF(t, T)$ is the discount factor that can be deduced from the zero-coupon yield increased by the lender's risk premium for the same period.

Ultimately we build and use the discount factors curve associating $DF^*(0,t)$ to a maturity t with the following recursion:

$$DF^*(0, i \times \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \\ DF^*(0, (i-1) \times \Delta t) \times DF((i-1) \times \Delta t, i \times \Delta t) & \text{for } i \in \llbracket 1; n \rrbracket \end{cases}$$

When t is not a multiple of Δt , we compute $DF^*(0,t)$ through a cubic spline interpolation.

Finally, we need to opt for a model that allows us to simulate probable values for the underlying property at maturity. However we don't have access to any private databases keeping track of real estate prices evolution and the public databases with regards to real estate consist in short data series. We hence collect real estate indexes data from three different public sources: the CEPII, CGEDD and INSEE that we even out to the same basis so as to establish an annual frequency real estate index database covering the 1890 to 2013 period. Since there is no standard and official neither a consensus-gathering and well-documented model to simulate future real estate prices, we start by observing and analyzing our data. Precisely, we observe the graph depicting the evolution of the real estate indexes and that of their log returns since 1890 before we follow the Box-Jenkins methodology so as to better understand the dynamics of the latter by analyzing their autocorrelogram and running unit root tests on our data. We conclude from these tests the existence of 3 characteristics of the real estate index log returns: a changing distribution as time passes by, an autocorrelation and persistence of the series behavior on the short term and a dynamic that is based on a first order autoregression. This orientates us towards the use of an AR(1) markov switching model, since this type of model is able to integrate and reproduce those three characteristics.

To confirm this choice we test against our data the performances of about 15 markov switching and simple autoregressive models. First we test the validity of the models hypotheses: coefficients significance with p-values, an expected value equal to zero for the error by computing the empirical mean of the residuals, a Gaussian distribution for the error with normality tests on the residuals and an absence of autocorrelation through time for the error by observing the autocorrelogram of the residuals. Second, we test the ability of the models with valid hypotheses to generate predictions consistent with our observations. To do so, we estimate these models on two thirds of our data and run dynamical predictions on the remaining third. Then we analyze statistics of distance between our data and the predictions and we observe the match between the curve of our data and the curves of predictions. Following these two steps, we decide to opt for an AR(1) markov switching model with a constant for which the three parameters differ for each of the 2 states in order to model the real estate index log returns. We calibrate this model on our data covering the 1890 to 2013 period through the quasi-maximum likelihood method. We make the hypothesis that the ratio of the maturity to initial property price is proportional to that of the maturity to initial real estate index: $PI_t = \frac{Id_t}{Id_0} \times PI_0$ where PI_t is the property price in t and Id_t is the real estate index in t . We can finally simulate future values for the log returns using our model, then infer probable values for the future property prices through the formula $PI_t = \exp(\sum_{i=1}^t y_i) \times PI_0$, where y_t is the log return for the real estate index between time $t-1$ and time t , for t an integer. When t is not an integer we use an cubic spline interpolation.

Until now we have modelled our three hazards independently from one other. Nonetheless we need to validate the hypothesis of their independence. Without ER, we can directly confirm the independence between on the one hand interest rates and the loan duration and on the other hand this duration and property prices. Indeed, the potential impact of interest rates on the loan duration would consist in the borrowers repaying early if the rates decreased by subscribing to a new loan providing the repayment amount with lower interest rates, but this option is excluded under our hypotheses. Reciprocally, we accept as true the fact that the reverse mortgage duration has no impact on the market interest rates. Likewise, the potential impact of the property price on the loan duration would consist in the borrowers repaying early if the property prices went up by subscribing to a new reverse mortgage providing them an amount higher than the amount initially borrowed due to the higher initial property value, but we exclude this option. Reciprocally, we accept as true the fact that the reverse mortgage duration has no impact on property prices.

In contrast, we can't accept as true the independence between interest rates and property prices without preliminary check. Indeed, the overwhelming majority of real estate purchases being financed by loans in France, an interest rates decrease should increase the affordability of real estate, hence increase the demand for properties and therefore make property prices go up, all else equal, and reciprocally. However, the "all else equal" condition does not hold in reality and lots of random variables cause interferences in this causality relationship. Especially, the introduction of the households' income and economic growth random variables in this framework enable us to explain why both property prices and interest rates go down during recession times. Besides, scientific literature on the relationship between interest rates and property prices is divided and several studies conclude that this relationship is insignificant or that property prices don't contain information on interest rates.

In order to accept or reject the hypothesis of independence between interest rates and property prices we analyze the quarterly data for the 1 week Euribor from 1999 to 2013 against the INSEE real estate index of the same frequency covering the same period. First, we proceed with visual analyses as well as correlation and Granger causality tests on these two series. Then we test over thirty linear and markov switching models linking the real estate returns to past or present values for the levels or returns of interest rates against the AR(1) markov switching model independent from interest rates we have previously selected. We test the validity of their hypotheses: coefficients significance, normality of the error with an expected value equal to 0 and with no autocorrelation through time. We estimate the models with valid hypotheses on two thirds of our data and we run predictions on the remaining third. We compare our predictions to the observations through an analysis of the residuals and of the visual match between our data and the predictions curves. We conclude that among the models that proved to have valid hypotheses, the AR(1) markov switching model independent from the interest rates we had initially adopted has the best aptitude to generate predictions that match reality.

Therefore we stick with this model and assume that our three hazards and three models are independent two by two.

Simulations, results and conclusion:

Equipped with our three models for the loan duration, interest rates and property prices we are finally ready to run simulations of probable reverse mortgage cash flows schedules in order to test our four methods of determination of the debt rate and loan size. We have coded under VBA three independent tools to simulate respectively probable maturity times for the reverse mortgage, probable discount factor curves and probable evolutions for the underlying property price according to the models we selected. We also coded a central tool in VBA that imports the simulations of these three tools and infers, in function of the debt rate and loan size parameters, probable cash flows schedules on the basis of the information entered by the user about the way the capital is lent and about the associated costs and incomes. Then the central tool computes the optimal values of debt rate and loan size under each of the four methods and for each set of simulation. Eventually, for each optimal couple determined, it returns an estimation of the probability of exceeding the PT, the average profitability value on the set of simulations and three OERs computed under various hypotheses regarding the longevity of the borrowers' group and the annual increase of the underlying property price.

With these tools, we compute the optimal parameters provided by our four methods for over a hundred setups of reverse mortgages, distinct in terms of unblocking modalities for the capital – number of payments, frequency, type and proportional factor for unblocking -, incomes and costs associated – number, frequency, unit amount-, characteristics of the borrowers' group – number of individuals, ages, genders, under or over mortality factor -, initial value of the underlying property and optimization parameters – PT, NAP, fixed debt rate, fixed loan size. We observe the following: the two joint methods maximize the achievement probabilities and average profitability ratios as well as the OERs among the 4 methods. The $M_{q/\tau}$ method provides the medium average profitability ratios and OERs and the minimum to medium achievement probabilities. $M_{\tau/q}$ provides the minimum average profitability ratios and OERs and the minimum to medium achievement probabilities. We noted a significant number of cases for which this method was not able to provide a solution as well as some cases for which the

average profitability ratio is lower than PT. Building on these observations we discuss the advantages and downsides of each method with regards to four aspects of interest: commercial, legal, practical and security. Our conclusion is exposed below :

Depending on the fixed loan size, the $M_{\tau/q}$ method provides the lowest OERs hence the most appealing conditions for the clients. And yet, choosing this method can turn out to be risky for the lender since this is the method for which the cases in which the profitability threshold is not accomplished go with the heaviest losses. Moreover, this is the method among the four that minimizes the profitability that can be expected a priori from the reverse mortgage. Above all, in practical terms this is the method that fails the most often to come up with a solution. To select this method, the lender would either have to determine fixed loan sizes that differ depending on the unblocking modalities for the capital, on the associated incomes and costs profile and on the characteristics of the borrowers' group or to accept the loss of clients in unsolvable cases. Hence we do not recommend this method.

The two joint methods dispense the most advantageous terms for the lender with regards to average profitability and the probability of exceeding PT. They are the most often solvable methods among the 4 due to the higher number of debt rate and loan size combinations they test. However they also offer the least appealing conditions to the clients, as encapsulated by their almost usurious OERs. Opting for one of these methods would lead the lender to minimize the profits coming from his reverse mortgages portfolio and his opportunities to mutualize the risk across the loans by minimizing the sales volumes. Finally, they don't allow for the lender to explicitly offer advantages to the least risky profiles by enabling the salespeople to offer them an individually appealing loan size or debt rate. Therefore they particularly expose the lender to an adverse selection. Hence we do not recommend these methods.

The $M_{q/\tau}$ method offers appealing conditions to the client while enabling the fulfillment of the lender's objectives. It has a better solving ability than $M_{\tau/q}$ and a good aptitude of adaptation to the different reverse mortgage setups. Therefore we recommend the lender to manage reverse mortgages by fixing the debt rate a priori then by solving for the loan size on a case by case basis through the $M_{q/\tau}$ method.

Critics and opportunities for improvement:

The main weaknesses of this paper are the following: the method of determination of the debt rate and loan size should integrate an additional constraint on a measurement of the losses in case of a failure to accomplish the targeted profitability. Especially, introducing a maximum value for the expected shortfall would be appropriate. Moreover, our conclusion lacks a mathematical demonstration of $M_{\tau/q}$'s tendency to fail to find a solution where the other methods find one. As of our models, we lack data to confirm that reverse mortgage borrowers' mortality law can be modelled based on observations made on annuitants. As for the interest rates model, Vasicek's model is not particularly well adapted to the prediction of probable interest rates for long time horizons. Precisely, reverse mortgages can last dozens of years. Finally, due to a lack of real estate data, we did not take the underlying good's characteristics besides its initial value into account to form predictions of its future prices. Similarly, we were not able to check if the properties underlying reverse mortgage contracts tend to depreciate more than the average French property. Hence we were unable to accept or reject the realization of a real estate moral hazard for this type of loan. The best way to enhance the answer given to our research question in this paper seems to lie in the fixing of these weaknesses. However, we come out of this study with the conviction that the best way to manage a reverse mortgage among the four methods contemplated is by setting its debt rate then by deciding on the loan size on a case by case basis.

TABLE DES MATIERES

Résumé	I
Summary.....	II
Remerciements.....	III
Note de synthèse	IV
Synthesis note	XI
Table des matières.....	XVII
PRETS VIAGERS HYPOTHECAIRES ET PROBLEMATIQUE.....	1
Chapitre 1 : LES PRETS VIAGERS HYPOTHECAIRES	1
Section 1.1 : Un premier aperçu du PVH	1
Section 1.2 : Le marché du PVH	3
Section 1.3 : Deux modèles économiques de gestion du PVH	5
Section 1.4 : Le marché français	6
Section 1.5 : Intérêt du PVH dans le contexte démographique et économique actuel et projeté.....	10
Section 1.6 : Avantages et inconvénients du PVH pour l'emprunteur et le prêteur	10
Section 1.7 : Produits et coûts associés	11
Chapitre 2 : DEFINITION DE LA PROBLEMATIQUE	12
Section 2.1 : Garanties offertes par le PVH	12
Section 2.2 : Comparaison du PVH à des produits structurellement similaires.....	12
Section 2.3 : Introduction aux risques générés par ces structures.....	14
Section 2.4 : Enjeux des deux principaux leviers pour l'emprunteur : taux et quotités	14
Section 2.5 : Délimitation du périmètre de la problématique	15
FONCTION OBJECTIF, CONTRAINTES ET QUANTIFICATION DES QUATRE METHODES	17
Chapitre 1 : L'OBJECTIF DE RENTABILITE	17
Section 1.1 : Champ des possibles des objectifs	17
Section 1.2 : La notion de rentabilité	18
Section 1.3 : Quelle rentabilité ?	19
Chapitre 2 : QUID DES CONTRAINTES EXTERNES ?	19
Section 2.1 : Contraintes commerciales	19
Section 2.2 : Contraintes légales prêt par prêt : seuil de l'usure et TEG	20

Section 2.3 : Contraintes légales globales : le Comité de Bale	22
Chapitre 3 : QUANTIFICATION DES METHODES ENVISAGEES	25
Section 3.1 : Quantification de la fonction objectif.....	25
Section 3.2 : Choix de la mesure de risque	27
Section 3.3 : Contraintes portant sur le taux et la quotité	28
Section 3.4 : Hypothèses sous-jacentes à notre modèle	30
SOURCES D’ALEA DE RENTABILITE	31
Chapitre 1 : RISQUES HERITES DE LA STRUCTURE DES PRETS HYPOTHECAIRES.....	31
Section 1.1 : Risques liés au recouvrement à terme.....	31
Section 1.2 : Risque en cas de litige.....	32
Chapitre 2 : RISQUES HERITES DE LA STRUCTURE DES CONTRATS D’ASSURANCE VIE	33
Section 2.1 : Risque de longévité.....	33
Section 2.2 : Risque de taux.....	34
Section 2.3 : Risque d’anti-sélection.....	35
Chapitre 3 : RISQUES HERITES DE LA STRUCTURE DES OPTIONS DE VENTE	36
Section 3.1 : Risque de dépréciation des prix immobiliers	36
Section 3.2 : Aléa moral : entretien du sous-jacent insuffisant	37
Chapitre 4 : RISQUES SPÉCIFIQUES	38
Section 4.1 : Risque de dépassement	38
Section 4.2 : Risques classiques non endossés.....	39
Section 4.3 : Risques liés au lancement de produits nouveaux	40
Chapitre 5 : ALÉAS RETENUS POUR LA MODÉLISATION.....	41
MODELISATION DES ALEAS INFLUANT SUR LA RENTABILITE DU PVH	42
Chapitre 1 : LONGEVITE DU GROUPE EMPRUNTEUR.....	42
Section 1.1 : Facteurs de mortalité et particularité du profil emprunteur du PVH.....	42
Section 1.2 : Choix de la table	43
Section 1.3 : Modélisation de la durée de survie du groupe emprunteur	45
Section 1.4 : Critique du modèle et des données	48
Chapitre 2: EVOLUTION DES TAUX	50
Section 2.1 : Les facteurs d’actualisation	50
Section 2.2 : Modèle des taux de Vasicek.....	53
Section 2.3 : Adaptation du modèle à nos objectifs.....	55
Section 2.4 : Données et calibration du modèle	56
Section 2.5 : Critique du modèle	56
Chapitre 3 : EVOLUTION DE LA VALEUR DU SOUS-JACENT	57

Section 3.1 : Introduction aux modèles de prix immobiliers	57
Section 3.2: Analyses préliminaires de la série temporelle des prix immobiliers	59
Section 3.3 : Modèles dynamiques a changements de régimes markoviens	61
Section 3.4 : Analyse des résultats de la calibration du modèle	66
Section 3.5 : Critique du modèle	69
Chapitre 4 : CORRELATIONS DES RISQUES ET DISCUSSION DE LEUR INTEGRATION A NOS MODELES	71
Section 4.1 : Discussion sur la corrélation entre les trois risques modélisés	71
Section 4.2 : Choix d'un modèle immobilier dépendant ou indépendant des taux d'intérêts.....	74
SIMULATIONS ET RECOMMANDATION D'UNE DES METHODOLOGIES.....	79
Chapitre 1 : OUTILS DE SIMULATION ET DE RESOLUTION.....	79
Section 1.1 : Validation de la contrainte sur la VaR.....	80
Section 1.2 : Modalités gérées par l'outil central	80
Section 1.3 : Combien de simulations effectuer ?	81
Section 1.4 : Critiques et limites des outils	82
Chapitre 2: EXEMPLES D'APPLICATION.....	83
Section 2.1 : Paramétrage initial de l'outil et résultats de référence	83
Section 2.2 : Variation des déblocages.....	84
Section 2.3 : Variation autour des coûts et produits associés	84
Section 2.4 : Variation de la composition du groupe emprunteur.....	84
Section 2.5 : Variation des paramètres de calcul du TEG	85
Section 2.6 : Variation de la valeur initiale du bien	85
Section 2.7 : Variation des paramètres d'optimisation.....	86
Chapitre 3: PILOTAGE PAR LE TAUX, LA QUOTITE OU PILOTAGE CONJOINT ?.....	87
Section 3.1 : Point de vue commercial.....	87
Section 3.2 : Point de vue juridique	88
Section 3.3 : Point de vue pratique	88
Section 3.4 : Point de vue du risque	89
RECAPITULATIF, CONCLUSION, CRITIQUE GENERALE ET PISTES	
D'AMELIORATION.....	92
Récapitulatif et conclusion	92
Critique générale.....	95
Pistes d'amélioration.....	96
BIBLIOGRAPHIE ET SOURCES	I
Concernant le PVH :.....	I

Concernant la modélisation de la longévité:	I
Concernant la modélisation des taux :.....	I
Concernant la modélisation des prix immobiliers :.....	II
Concernant les simulations, analyses de series et calibrations en pratique:	II

NOTATIONS III

ANNEXES VII

ANNEXE A : Textes de loi fondamentaux.....VII

1) Article L314-1 du Code de la Consommation : définition du PVH	VII
2) Article L314-2 du Code de la Consommation : objet du PVH	VII
3) Article L314-8 du Code de la Consommation : Obligation de l'emprunteur	VII
4) Article L314-9 du Code de la Consommation : plafonnement de la dette	VII
5) Article L314-13 du Code de la Consommation : terme du PVH.....	VII

ANNEXE B : illustrations du fonctionnement du PVHVIII

1) Schéma des flux pour l'emprunteur.....	VIII
2) Illustration du phénomène de crossover ou dépassement selon le taux et la quotite	IX

ANNEXE C : Modélisation des tauxX

1) Demonstrations de vasicek	X
2) Estimations ponctuelles des parametres de vasicek	XIV
3) Courbes des facteurs d'actualisation observée et calculée.....	XV

ANNEXE D : Modélisation des prix immobiliers.....XVI

1) Représentation graphique des indices et des rendements logarithmiques immobiliers :.....	XVI
2) Boite à moustaches des rendements logarithmiques de l'indice immobilier & identification des outliers.....	XVI
3) Autocorrélogramme de la série des rendements logarithmiques de l'indice immobilier.....	XVII
4) Test de stationnarité sur la série des rendements logarithmiques de l'indice immobilier	XVIII
5) Analyse de la validité du modèle immobilier: coefficients, résidus et autres statistiques.....	XIX
6) Statistiques de distance entre prédictions des modèles et observations	XX
7) Représentation graphique des prédictions fournies par les modèles.....	XX
8) Résultats de la calibration du modèle immobilier sélectionné.....	XX

ANNEXE E : Etude de la relation liant taux d'intérêts et prix immobiliersXXI

1) Première schématisation du lien théorique taux d'intérêts-prix immobiliers.....	XXI
2) Deuxième schématisation du lien théorique taux d'intérêts-prix immobiliers	XXII
3) Représentation graphique et analyse de corrélation	XXII
4) Résultats des tests de causalité de Granger.....	XXIII
5) Validité des hypothèses et statistiques de performance des modèles testés	XXIV
6) Statistiques de distance entre observations et prédictions pour les modèles présélectionnés	XXVI

7) Représentation graphique des prédictions fournies par les modèles présélectionnés	XXVI
ANNEXE F : Simulations.....	XXVII
1) Nombre de simulations à effectuer	XXVII
2) Paramétrage de référence de l'outil	XXVII
3) Taux et quotités de référence.....	XXVII
4) Taux et quotités pour divers profils de déblocages	XXVIII
5) Taux et quotités pour divers profils des coûts et produits associés.....	XXX
6) Taux et quotités pour divers profils du groupe emprunteur	XXXII
7) Taux et quotités pour divers paramètres de calcul du TEG.....	XXXIII
8) Taux et quotités pour diverses valeurs initiales du bien	XXXV
9) Taux et quotités pour divers paramètres d'optimisation	XXXVI

PRETS VIAGERS HYPOTHECAIRES ET PROBLEMATIQUE

Dans cette première partie, qui constitue l'introduction de ce mémoire, nous voulons donner à mieux connaître le prêt viager hypothécaire ou PVH afin de dissiper l'obscurité qui l'entoure puis préciser notre problématique. Pour cela, nous allons présenter plus en détails le PVH, ses modalités possibles, résumer les textes de lois qui s'appliquent à lui, exposer les caractéristiques du marché du PVH et ses acteurs, l'intérêt qu'il revêt dans le contexte économique et démographique actuel en France, les avantages et les inconvénients qu'il comporte pour le prêteur et l'emprunteur puis présenter les éléments clés de notre problématique à savoir taux et quotité du PVH avant d'exposer cette dernière et de préciser son champ d'application.

CHAPITRE 1 : LES PRETS VIAGERS HYPOTHECAIRES

Dans ce premier chapitre, nous présentons le PVH, ses caractéristiques, sa législation, l'intérêt qu'il présente dans le contexte actuel et qui justifie la légalisation de sa commercialisation en France, les avantages et inconvénients qu'ils présente pour les parties au contrat, le marché du PVH et les particularités du marché français vis-à-vis de ce produit.

SECTION 1.1 : UN PREMIER APERÇU DU PVH

1.1.1 : Définition légale

Un prêt viager hypothécaire est défini par l'article L314-1 du Code de la Consommation comme « un contrat par lequel un établissement de crédit ou un établissement financier consent à une personne physique un prêt sous forme d'un capital ou de versements périodiques, garanti par une hypothèque constituée sur un bien immobilier de l'emprunteur à usage exclusif d'habitation et dont le remboursement - principal et intérêts - ne peut être exigé qu'au décès de l'emprunteur ou lors de l'aliénation ou du démembrement de la propriété de l'immeuble hypothéqué s'ils surviennent avant le décès. ».

Cette définition nous fournit des informations sur le PVH, que nous complèterons, sur l'identité des prêteurs, celles des emprunteurs, le type, l'objet, la garantie du prêt, les modalités de mise à disposition des fonds ainsi que les événements mettant un terme au prêt. Nous restituons en annexe A ce texte de loi ainsi que quatre autres textes de lois fondamentaux pour la législation du PVH.

Elle précise que le **prêteur** est nécessairement un établissement de crédit ou un établissement financier. L'**emprunteur** est une personne physique propriétaire de son logement. Un unique contrat de PVH peut être octroyé à plusieurs personnes qui forment un groupe emprunteur, même si la définition légale du PVH ne le précise pas. Concernant le **type du prêt**, le PVH est un prêt hypothécaire remboursable in fine portant intérêts. La **garantie** du PVH correspond au bien immobilier de l'emprunteur à usage exclusif d'habitation. Concernant la **mise à disposition des fonds**, deux modalités sont envisageables d'après cette définition. Le versement du montant prêté peut se faire en intégralité en une seule fois, auquel cas on parle de PVH à déblocage unique ou bien il peut se faire partiellement en plusieurs fois au cours de la vie du prêt, auquel cas on parle de PVH à déblocages fractionnés. Dans le cas d'un PVH à déblocages fractionnés, le ou les emprunteurs pourront bénéficier de plusieurs versements soit pendant une durée déterministe convenue au contrat, soit tout au long de leur vie. Dans tous les cas, le premier versement se prénomme bouquet initial et a lieu au début de la vie du prêt. Nous avons illustré en annexe B.1) les schémas des flux générés par un PVH à déblocage unique et par un PVH à déblocages fractionnés. La date de **maturité du prêt** peut correspondre à la date de réalisation de trois événements distincts : le décès de

l'emprunteur unique ou du dernier des co-emprunteurs, l'aliénation ou le démembrement de la propriété du bien immobilier hypothéqué s'ils surviennent avant le décès. En pratique, la date de maturité du PVH est donc aléatoire et correspond dans la très vaste majorité des cas à la date de décès de l'emprunteur ou du dernier des co-emprunteurs. D'autres cas sont envisagés par la loi. En effet, celle-ci permet aux co-emprunteurs du PVH qui le souhaitent de rembourser de manière anticipée leur prêt. Enfin, dans de très rares cas, le non-respect par le ou les emprunteur(s) de leurs obligations vis-à-vis du prêteur pourra mettre fin au contrat.

La loi précise en outre que le PVH ne peut pas être destiné à financer une activité professionnelle. Concernant les déterminants de la valeur des flux, la législation propre au PVH ne définit pas de règles spécifiques en termes d'échéances, de taux de la dette ou de montant prêté. Les **échéances** du prêt seront donc précisées par des clauses contractuelles et négociées entre les parties. Le **taux** du PVH peut être fixe ou révisable. Les **montants prêtés** sont déterminés par le prêteur ou négociés entre les parties. Le montant initial prêté, également appelé bouquet, correspond à un montant calculé en % de la valeur initiale du bien hypothéqué au moment de la demande de prêt. Le % octroyé se nomme **la quotité** et il est déterminé par le prêteur en fonction des caractéristiques des emprunteurs, du bien immobilier sous-jacent, des taux d'intérêt du marché, de la concurrence et de ses propres objectifs.

1.1.2 : En pratique

Le PVH est un produit financier qui permet à une population âgée à faibles revenus, dont l'espérance de vie s'allonge et qui a difficilement accès à des prêts bancaires classiques d'obtenir des liquidités dès lors qu'elle est propriétaire d'un bien immobilier éligible. Le prêteur disposera en contrepartie des montants versés d'une inscription hypothécaire de premier rang. Dans le cas d'un PVH, les emprunteurs ne verseront qu'un seul flux au prêteur et ce, via leurs héritiers à la date du décès du dernier emprunteur. Les héritiers des emprunteurs seront responsables d'effectuer ce versement au créancier et pourront pour cela décider de vendre la maison pour en tirer les liquidités nécessaires au remboursement ou de rembourser directement en utilisant les liquidités à leur disposition s'ils souhaitent conserver la propriété du bien sous-jacent.

1.1.3 : Caractéristique centrale du PVH : le plafonnement de la dette à la valeur du bien à échéance :

En règle générale, le montant de la dette, égal à la somme du capital emprunté et des intérêts cumulés, augmente plus amplement et rapidement que la valeur du bien hypothéqué. De ce fait, si l'emprunteur vit assez longtemps, le montant de la dette pourra dépasser celle du logement sous-jacent.

Ce phénomène, s'il n'est pas assorti d'une garantie pour l'emprunteur, pourra l'amener à faire défaut au moment du décès. En effet, aucun mécanisme n'est prévu par le PVH pour s'assurer que l'emprunteur dispose de fonds nécessaires à son décès pour couvrir l'éventuelle différence positive entre la valeur de la dette et celle de son bien hypothéqué. Pour éviter des situations douloureuses aux héritiers de l'emprunteur et faire du PVH un produit commercialement attractif, celui-ci est par conséquent inévitablement assorti d'une garantie dont on peut traduire le nom anglais comme « fond propres positifs ou nuls » qui limite la valeur du montant effectivement dû et payé par l'emprunteur et ses héritiers à la valeur du bien hypothéqué dont il est propriétaire lors du remboursement.

Cette protection du consommateur induit en contrepartie le risque pour le prêteur de toucher une valeur inférieure à la somme du capital emprunté et des intérêts cumulés au terme du prêt. Ce risque s'appelle le risque de *crossover* en anglais et pourra être traduit comme le risque de dépassement. Il est le risque central généré par le PVH contre lequel le prêteur doit chercher à se couvrir. Sa réalisation dépend de la concrétisation de multiples risques individuels liés notamment à la longévité du groupe emprunteur, à l'évolution de la valeur du sous-jacent et à l'évolution de la valeur des taux d'actualisation, comme nous le verrons par la suite.

Du fait de cette garantie, deux options s'offrent aux héritiers de l'emprunteur au terme du contrat : premièrement, ils peuvent décider de vendre le logement sous-jacent au prêt pour effectuer le remboursement au prêteur. Si le montant touché lors de la vente du bien est inférieur à la valeur de la dette, les héritiers versent la totalité de la somme perçue au prêteur, sinon ils conservent la différence. Dans le premier cas, le prêteur comptabilisera en perte la différence entre le montant remboursé égal à la valeur de revente du bien hypothéqué et la valeur de la

dette. Deuxièmement, ils ont la possibilité de garder la propriété du logement sous-jacent au prêt s'ils disposent de liquidités nécessaires à condition d'utiliser celles-ci pour rembourser le prêteur.

SECTION 1.2 : LE MARCHÉ DU PVH

1.2.1 : Premières apparitions

Les premiers prêts hypothécaires de type viager ont été octroyés en Europe, probablement en Grande Bretagne au début des années 60. L'un des prêts les plus connus et les plus anciens se rapprochant du PVH est celui qu'André François Raffay accorda à Jeanne Calmant en 1965 en lui proposant l'équivalent d'une rente de 500 \$ /mois jusqu'à sa mort, à condition qu'il hérite de sa maison à cette date. A l'époque, il pensait faire une affaire car il avait 45 ans et elle 90. Cependant, il décéda à l'âge de 77 ans en 1996 sans hériter de la maison puisque Jeanne Calmant décéda en 1998 à l'âge de 122 ans.

1.2.2 : Identité des prêteurs :

- **Pays prêteurs :**

L'essentiel du marché des PVH est concentré aux Etats-Unis, Royaume-Uni, Canada et Australie, tant en termes de nombre de prêts que de montants.

Néanmoins, des prêts de type PVH sont commercialisés dans de nombreux pays européens dont l'Allemagne, Malte, l'Italie, la Suède, les Pays-Bas, la Roumanie, la Hongrie et la France.

Le PVH se dénomme *reverse mortgage* ou *home reversion loan*, *lifetime mortgage* et hypothèque inversée ou prêt inversé aux Etats-Unis, Royaume-Uni et Canada respectivement.

Le nombre de PVH octroyés dans tous ces pays est très faible, mais en forte croissance, notamment aux US et au Royaume-Uni, ce qui laisse penser que le marché du PVH présente un potentiel qui n'a jusqu'ici pas été pleinement exploité. Quelques chiffres peuvent illustrer cette réalité : en novembre 2011, 582 000 prêts *Home Conversion Mortgage* étaient en cours aux Etats-Unis contre 50 millions de prêts classiques et moins de 3% de la population éligible avait souscrit ce type de prêt ; le montant total des *lifetime mortgages* au Royaume uni en fin 2012 était de 920 milliards £ contre 772 milliards £ en fin 2011 ; en août 2011, quelques 8000 Canadiens utilisent une hypothèque inversée pour se financer pour un montant d'un milliard \$.

- **Entreprises :**

Dans chaque pays producteur, les établissements prêteurs sont historiquement très concentrés.

Aux Etats-Unis, Bank of America, Wells Fargo et Financial Freedom concentraient ces dernières années la moitié des émissions de *reverse mortgages*. Néanmoins, les trois se sont retirés du marché des PVH entre janvier et juin 2013.

Au Royaume-Uni, Norwich Union et Northern Rock se sont longtemps partagé 90% du marché du *lifetime mortgage*. Celui-ci demeure aujourd'hui très concentré autour d'entreprises telles que Aviva, LV= et Just Retirement. La commercialisation qui se répartit entre les établissements prêteurs et des courtiers est cependant moins concentrée et plus concurrentielle.

Au Canada, CHIP détient un quasi-monopole sur le marché de l'hypothèque inversée.

Les emprunteurs de prêts type PVH souscrivent dans la vaste majorité des cas à l'offre d'entreprises nationales.

1.2.3 : Profil des emprunteurs

Les emprunteurs des prêts type PVH sont des propriétaires en besoin de liquidités qui appartiennent plutôt aux classes moyennes et supérieures avec néanmoins des différences selon les pays, en particulier selon que le marché des prêts type PVH soit dominé par des entreprises privées ou par des programmes publics. Du fait des restrictions

légales dans les pays concernés par ces prêts, la clientèle du PVH est âgée de plus de 60 ans avec une moyenne d'âge supérieure à 70 ans tous pays confondus. Etant donné l'âge de départ à la retraite légal dans ces pays, la clientèle du PVH est constituée dans sa très vaste majorité de retraités. Les groupes emprunteurs sont le plus souvent constitués d'hommes ou de femmes seules ou de couples. Le profil femme seule est plus répandu que le profil homme seul, ce qui peut être expliqué par l'espérance de vie et l'âge moyen plus élevé chez les femmes que chez les hommes ainsi que par un salaire moyen plus faible au cours de la vie professionnelle. La valeur du logement des emprunteurs de PVH est en moyenne plus élevée que la valeur moyenne du logement des personnes âgées. Cela coïncide avec le fait que les emprunteurs de PVH habitent, en particulier aux Etats Unis, dans les régions ou états de leur pays dans lesquels les prix immobiliers sont les plus élevés.

Des études menées aux Etats-Unis et au Royaume Uni indiquent que les personnes âgées sous-entretiennent leur logement et que la valeur de ces logements croît plus lentement que les indices généraux du prix de l'immobilier et que la valeur de l'ensemble des logements toutes tranches d'âge des propriétaires confondues. Des études réalisées par l'INSEE confirment que la valeur moyenne du logement des ménages français âgés décroît avec l'âge : elle est de 121 900 € pour les tranches d'âge de 65 à 69 ans contre quelques 114 000 € pour l'ensemble des personnes âgées de plus de 65 ans en 2002. Si ces statistiques effectuées sur l'ensemble des personnes âgées de pays autorisant la vente de PVH sont représentatives de l'échantillon des emprunteurs du PVH, alors le risque de dépassement pourrait se réaliser plus rapidement sur un emprunteur du PVH que sur un emprunteur plus jeune, toutes choses égales par ailleurs.

Les pays autorisant la vente du PVH ont mis en place une réglementation spécifique afin de protéger les emprunteurs du PVH. En France notamment, le contrat de prêt doit être notarié. Le notaire doit informer l'emprunteur des conséquences successorales du PVH ainsi que des risques qu'il encourt en souscrivant ce prêt. Il conseille l'emprunteur et veille à la précision, à la suffisance et à la validité des termes du contrat et à leur compréhension par l'emprunteur.

1.2.4 : Mise à disposition et utilisation du capital

Certaines modalités de mise à disposition du capital du PVH légales à l'étranger sont exclues par la législation française, notamment la ligne de crédit.

Les modalités de mise à disposition du capital emprunté les plus répandues pour les prêts type PVH, notamment aux Etats-Unis, au Royaume Uni et au Canada, sont le déblocage unique et la ligne de crédit utilisée rapidement.

Le capital emprunté en une fois est avant tout utilisé pour financer des transactions exceptionnelles plutôt que comme un complément de financement des dépenses quotidiennes. Lorsque le capital est au contraire débloqué en fractionné, il sert souvent à régler des soins médicaux tels que l'aide à domicile d'individus dépendants, en particulier dans les pays qui offrent une couverture médicale lacunaire comme les Etats-Unis. Il ne peut cependant pas être utilisé pour s'acquitter des soins en établissement de santé ou en maison de retraite lorsque cela contraint la personne âgée à quitter et céder son logement car cela équivaldrait au terme du contrat et à la date de remboursement pour un prêt de type PVH.

Parmi les autres objets possibles d'affectation des capitaux du PVH, l'entretien et l'amélioration du logement, l'aide financière aux proches et aux héritiers, le remboursement d'un prêt classique ou d'une dette, l'optimisation fiscale et le financement de vacances ou d'un bien de consommation durable tel que la voiture sont les plus cités dans les pays qui commercialisent ce type de prêt.

Pour ce premier motif, entre 1997 et mars 2013, une coopération entre les autorités publiques locales et de nombreuses associations au Royaume Uni avait permis la mise en place du programme *Houseproud* qui offrait la possibilité aux personnes âgées d'aménager leur logement et de l'adapter à leur état de santé via l'octroi de PVH tout en prévoyant des services d'entretien pour les logements concernés.

Une étude publiée par Metlife en mars 2012 suggère que le motif de remboursement d'une dette préexistante gagne du terrain parmi les motifs les plus courants de souscription de *reverse mortgages* aux Etats-Unis.

SECTION 1.3 : DEUX MODELES ECONOMIQUES DE GESTION DU PVH

La mise à disposition et la commercialisation des prêts type PVH s'est développée selon des modèles qui varient d'un pays à l'autre. Deux modèles principaux peuvent être identifiés : premièrement un modèle de marché, dont le précurseur est le Royaume Uni et deuxièmement un modèle interventionniste, à l'image de celui qu'ont adopté les Etats Unis. Dans le cadre du premier, plus répandu, l'offre et la commercialisation du PVH émanent d'entreprises privées et le risque de dépassement est géré au niveau microéconomique par chacune de ces entreprises par des dispositifs de marché tels que la titrisation. Dans le cadre du second, l'offre et la commercialisation de ce type de prêts font intervenir les pouvoirs publics et le risque de dépassement est géré directement par l'Etat au niveau macroéconomique. Spécifiquement, aux Etats-Unis, ce risque est géré par une assurance contre-garantie par l'Etat.

1.3.1 : Focus sur les Etats-Unis

Les prêts type PVH sont apparus aux Etats-Unis dans les années 60 mais ce n'est qu'au terme des années 80, lorsque l'Etat commença à offrir des contre-garanties pour certains de ces prêts que la demande prit son envol. Avant les années 90, quelques 3000 PVH seulement avaient été vendus aux Etats-Unis tandis qu'au cours des années 90, plus de 50 000 PVH furent mis en force.

Le programme HECM pour *Home Equity Conversion Mortgage* a été créé en 1987 par le gouvernement des Etats Unis afin de pouvoir fournir aux souscripteurs des PVH une assurance de l'Etat. Les PVH concernés par cette assurance mettent à disposition les fonds empruntés sous la forme d'une ligne de crédit ou de versements mensuels. Les pouvoirs publics décident d'octroyer ou non aux potentiels établissements prêteurs le droit de participer à ce programme qui concentre plus de 90% du marché américain des PVH. Le département du Logement et du Développement urbain (HUD) effectuera les versements à l'emprunteur du PVH en cas de défaut d'un établissement approuvé par l'administration générale du logement (FHA). Les revenus du programme proviennent des primes d'assurance payées par l'emprunteur.

L'octroi d'un prêt assuré par l'Etat dans le cadre de ce programme est nécessairement précédé de l'intervention d'un conseil indépendant chargé d'informer le potentiel emprunteur des caractéristiques du prêt et des risques encourus. Sont éligibles les individus âgés de 62 ans minimum qui sont propriétaires de leur logement et l'occupent en tant que résidence principale. L'historique du candidat au PVH en termes de remboursement des dettes passées est également pris en compte.

Les emprunteurs des prêts HECM ont le choix entre un taux client fixe ou un taux révisable, lequel est égal à la somme d'un indice, d'une marge et d'un taux d'assurance mensuel de 1,25 %. La marge diffère selon les prêteurs et peut varier au cours de la vie du prêt. Le taux révisable peut être indexé sur le LIBOR ou sur le taux à échéance constante des Etats-Unis (CMT). Pour les taux révisables, le taux initial peut être le TEC (CMT) 1 an, 1 mois ou le LIBOR 1 mois et le taux prévu, qui entre en compte dans la détermination du montant prêté, est indicé sur le taux des bons du trésor américain 10 ans ou sur le taux de swap contre LIBOR 10 ans. Les taux fixes sont déterminés par les prêteurs. Au total les taux clients sont significativement plus élevés pour les PVH que pour des prêts classiques. Le montant maximum qui peut être emprunté dans le cadre de ce programme est de 625 000 \$ en 2013.

1.3.2 : Focus sur le Royaume-Uni

Le Royaume Uni est considéré comme le pays dans lequel sont apparus les premiers PVH et ce, dès le début des années 60. Dans les années 80, les contrats de PVH n'étaient pas rigoureusement réglementés et permettaient que le prêteur exige le remboursement du montant de la dette quand bien même elle surpassait la valeur du bien sous-jacent et ce, en se saisissant des actifs autres que le logement de l'emprunteur. L'expérience de ces situations conflictuelles et douloureuses entre prêteurs et emprunteurs a mis en évidence la nécessité d'inclure aux clauses contractuelles du PVH les garanties de « fond propres positifs ou nuls » et de « non recours ». Pour rappel, la première correspond au plafonnement de la dette à la valeur du bien au terme du prêt tandis que la seconde interdit au prêteur la saisie de tout bien à l'exclusion du bien immobilier sous-jacent au contrat pour se rembourser.

Les principaux prêteurs sont membres du *Safe Home Income Plan* ou SHIP créé en 1991 qui réunit les signataires d'un code de bonne conduite qui vise en particulier la protection des emprunteurs et inclut les deux garanties mentionnées ci-dessus ainsi qu'un engagement de transparence. Aujourd'hui les PVH au Royaume-Uni sont régulés par les autorités du secteur financier britannique.

Le risque de dépassement est soit titrisé, soit conservé au bilan pour la majorité des prêteurs.

SECTION 1.4 : LE MARCHÉ FRANÇAIS

1.4.1 : Particularités du marché français

En France, la commercialisation de prêts viagers hypothécaires a été autorisée par la réforme des sécurités en mars 2006. Depuis, entre 2007 et 2010 moins de 5000 PVH ont été souscrits.

Dès lors, un double constat s'impose : le marché français du PVH se caractérise par une apparition tardive et une faible pénétration. Il convient de s'interroger sur les raisons de cette situation.

La crise financière et économique qui débute en 2008, soit peu de temps après le lancement des premiers PVH sur le marché français peut apparaître comme une explication circonstancielle. En effet, en janvier 2012, un rapport publié par l'Observatoire des crédits aux ménages révèle que le niveau de prudence des ménages français vis-à-vis de la souscription de crédits atteignait son plus haut point depuis 25 ans tandis que les prix immobiliers en chute réduisaient l'attractivité d'un prêt dont les montants prêtés sont indexés sur une valeur immobilière sous-jacente. Cependant, des explications plus durables et ancrées dans le marché français pourraient expliquer ces constats, comme le pointe le « Rapport sur le prêt viager hypothécaire et la mobilisation de l'actif résidentiel des personnes âgées » de Nicolas JACHET, Jacques FRIGGIT, Bernard VORMS et Claude TAFFIN.

Premièrement, des motifs d'ordre culturel peuvent être mis en cause. En effet, les consommateurs français semblent moins disposés à la souscription de crédits et à l'endettement que les ménages américains et britanniques, ce que reflètent les orientations différentes que prennent les lois de ces pays. Par exemple, le corps de lois visant la protection du consommateur met l'accent sur la protection contre le surendettement en France tandis qu'elle insiste sur l'égalité d'accès au crédit aux Etats Unis. D'après le rapport cité ci-dessus, l'attachement au logement et le sentiment d'obligation de transmettre ce bien en héritage sont plus prononcés en France que dans les pays Anglo-Saxons, où la fréquence de déménagement est plus élevée, ce qui pourrait ralentir le développement du PVH en France relativement aux autres pays. Les garanties hypothécaires sont de plus en plus répandues en France que dans les pays Anglo-Saxons car la capacité de remboursement de l'emprunteur est surtout évaluée à partir du niveau de revenus qu'il gagne. La France fait partie par ailleurs des pays où la proportion de propriétaires est la plus faible dans l'Union Européenne avec 57.5% de propriétaires en 2007 contre 65% en moyenne dans cette dernière.

Deuxièmement, des facteurs démographiques pourraient être défavorables à l'expansion de la part de marché du PVH. En effet, en 2013, les français âgés de plus de 75 ans, qui constituent le cœur de cible du PVH, sont nés avant 1938 et appartiennent par conséquent à des générations dont les effectifs sont relativement faibles du fait de l'entre-deux guerres. Le phénomène de « classes-creuses » ainsi observé entre 1918 et 1939 a revêtu une plus grande ampleur en France qu'aux Etats-Unis ou en Angleterre. Le phénomène de baby-boom français a été initialisé aux alentours de 1942, et les individus de cette génération n'atteindront 75 ans qu'après 2017.

Troisièmement certaines caractéristiques économiques françaises pourraient endiguer la croissance du PVH. Notamment, le système des retraites français permet aux retraités de conserver en moyenne un niveau de vie équivalent, quoiqu'un peu inférieur, à celui des actifs. Ainsi le niveau de vie médian des retraités français est de 1 590 € par mois en 2013, contre 1 735 € chez les actifs. De plus, la proportion de propriétaires âgés de plus de 70 ans parmi la population totale de propriétaires est plus faible en France qu'elle ne l'est aux Etats-Unis ou au Royaume-Uni.

Enfin, le contexte français favorise des coûts et prix du PVH plus élevés que ceux des crédits classiques, et plus importants en France que dans les pays anglo-saxons. Les trois premiers points contraignent le nombre de potentiels souscripteurs, ce qui limite les économies d'échelles possibles et élève les coûts fixes unitaires. De plus, il n'existe pas aujourd'hui de concurrence qui puisse faire baisser les prix du point de vue de l'offre de PVH sur le marché français.

Le faible attrait qu'exerce le marché du PVH sur les potentiels offreurs trouve une explication partielle dans le nombre élevé d'aléas qui influent sur sa rentabilité et en font un produit risqué pour le prêteur, en particulier dans le contexte actuel de régulation accrue du secteur financier. Le manque d'expérience des entreprises françaises dans le domaine des prêts hypothécaires et la moindre ampleur des transactions de titrisation en France constituent deux barrières supplémentaires.

1.4.2 : Réglementation des PVH en France

Nous avons restitué en annexe A. quelques-uns des textes du Code de la Consommation les plus fondamentaux pour la réglementation du PVH en France.

Textes législatifs et réglementaires spécifiques au PVH

La réglementation du PVH s'insère dans la réglementation générale du droit des contrats et des crédits.

Le code de la consommation définit la réglementation spécifique applicable au PVH à travers 19 textes législatifs répartis en 8 sections et 2 textes réglementaires. Les 8 sections législatives sont les suivantes, par ordre croissant: définition et champ, pratiques commerciales, le contrat de crédit, plafonnement de la dette, remboursement anticipé, terme de l'opération, sanctions et textes d'application.

Le Code Civil fait également référence au PVH de manière anecdotique.

Nous résumons les textes de loi du Code de la Consommation spécifiques au PVH en les regroupant par thèmes, comme suit :

Définition, champ d'application et garantie fondamentale :

- **Définition et champ d'application :**

Le PVH est défini légalement comme un contrat par lequel une partie cède à une autre un prêt sous forme d'un capital débloqué en une ou plusieurs fois à intervalles réguliers. La partie cédant le prêt est nécessairement un établissement de crédit ou un établissement financier tandis que la partie qui reçoit le prêt est nécessairement une personne physique, soit un particulier, propriétaire d'un bien immobilier à usage exclusif d'habitation. En effet, le prêt sera garanti par une hypothèque constituée sur un bien immobilier à usage exclusif d'habitation dont la partie qui reçoit le prêt est propriétaire. Trois événements peuvent mettre un terme au contrat : le décès de l'emprunteur, l'aliénation ou le démembrement de la propriété de l'immeuble hypothéqué. La date de terme de contrat correspond à la première date de survenance d'un de ces trois événements. A cette date, le remboursement du capital emprunté et des intérêts cumulés devient exigible. Le PVH ne peut avoir pour objet le financement d'une activité professionnelle, sous peine de nullité.

- **Garantie fondamentale : le plafonnement de la dette à la valeur du bien :**

La dette de l'emprunteur ne peut excéder la valeur du bien immobilier hypothéqué au terme du contrat, lorsque le remboursement devient exigible. En cas de cession, la valeur du bien retenue pour appliquer la règle du plafonnement de la dette est celle qui est indiquée dans l'acte de cession. Si cette valeur est contestée par le créancier, les parties choisissent d'un commun accord un expert pour estimer la valeur du bien. Si les parties ne peuvent se mettre d'accord sur le choix de l'expert, celui-ci sera désigné sur requête.

En cas de cession de l'immeuble hypothéqué ou de démembrement de sa propriété, si la valeur estimée par l'expert est supérieure à la valeur inscrite dans l'acte de cession, la dette est plafonnée au prix d'adjudication de

l'immeuble si le prêteur fait valoir son droit de suite en procédant à la saisie et à la vente du bien ou à la valeur d'expertise si le prêteur demande l'attribution judiciaire ou se prévaut du pacte comissoire qu'il a conclu.

Si le bien hypothéqué est cédé au terme du contrat et que le produit de sa vente excède la valeur de la dette, la différence entre ces deux montants est versée à l'emprunteur ou à ses héritiers.

Droits et Obligations du prêteur :

- **En Amont du contrat :**

- Offre préalable :

Le prêteur doit soumettre au potentiel emprunteur une offre préalable à la conclusion du contrat. Celle-ci doit comporter obligatoirement certaines informations, dont les suivantes : identité des parties et date d'acceptation de l'offre, désignation exacte du bien hypothéqué et sa valeur d'expertise, nature du prêt, dates et conditions de mise à disposition des fonds, le taux effectif global calculé à partir d'exemples et d'hypothèses représentatives et la durée de validité de l'offre. En cas de déblocages fractionnés, l'offre préalable doit également contenir un échéancier des versements du capital emprunté durant la durée prévisionnelle du prêt en distinguant capital et intérêts cumulés. En cas de déblocage unique, elle devra comporter un état des intérêts cumulés durant la durée prévisionnelle du prêt. L'objectif de ces deux derniers éléments est de permettre à l'emprunteur de connaître le moment où il aura épuisé l'actif net de son logement. Une fois l'offre remise, le prêteur doit maintenir les obligations qu'elle comporte pendant un minimum de 30 jours à partir de son émission. Le non-respect de ces obligations est puni d'une amende de 3750€ et peut entraîner déchéance du droit aux intérêts en totalité ou dans la proportion fixée par le juge. L'offre préalable doit être distincte de tout support ou document publicitaire.

- Publicité et commercialisation :

Une publicité concernant le PVH doit être « loyale et informative ». Elle doit en particulier indiquer : l'identité du prêteur, la nature de l'opération proposée, son coût total et le taux effectif global, calculé par tranches de cinq ans, ainsi que les perceptions forfaitaires et les modalités du terme de l'opération proposée. Dans le cas d'une publicité écrite, les informations relevant de la nature de l'opération, des hypothèses de calcul du PVH et de la période pendant lequel il s'applique en cas de promotion doivent apparaître avec une taille de caractère supérieure ou égale à celle des autres informations mentionnées sur le support publicitaire et être incluses dans le corps principal du texte. La publicité ne peut mentionner aucun taux en dehors du TEG ni la possibilité de souscrire un PVH sans que l'emprunteur n'ait à fournir d'informations concernant sa situation financière et patrimoniale. Elle ne peut également mentionner la ressource complémentaire qu'offre le prêt sans donner d'informations sur les modalités du terme de l'opération telles que prévues par les articles L. 314-13 et L. 314-14. Le non-respect de ces obligations est puni d'une amende de 3 750 €, applicable au prêteur et à l'annonceur pour le compte duquel est diffusée la publicité. Une opération de PVH ne peut faire l'objet d'un démarchage. Le non-respect de cette interdiction est puni de 5 ans d'emprisonnement et de 375 000 € d'amende et peut entraîner des sanctions supplémentaires, telles que l'interdiction de droits civiques, civils et de famille, l'interdiction d'exercer une fonction publique ou d'exercer une activité dans l'exercice ou à l'occasion de laquelle l'infraction a été commise pendant cinq ans au plus ainsi que la diffusion de la décision prononcée au sujet de l'infraction.

- **Au terme du contrat:**

- Remboursements anticipés:

Le prêteur peut refuser un remboursement partiel anticipé de moins de 10 % du capital versé. En cas de remboursement anticipé ou partiel, le prêteur peut exiger une indemnité. Dans le cas d'un déblocage unique, cette indemnité ne pourra pas dépasser quatre mois d'intérêts sur le capital à rembourser au taux d'intérêt du contrat si la demande de remboursement anticipé intervient avant la fin de la quatrième année du prêt, deux mois d'intérêts sur le capital à rembourser au taux du contrat si cette demande est effectuée entre la cinquième et la fin de la neuvième année du prêt et un mois d'intérêts sur le capital à rembourser au taux du contrat à partir de la dixième année du contrat. Dans le cas de déblocages fractionnés, l'indemnité ne peut dépasser 5/12 des versements dus au titre de la première année si la demande est effectuée avant la fin de la quatrième année, 3/12

si elle est effectuée entre la cinquième et la fin de la neuvième année du prêt et 2/12 à partir de la dixième année du prêt.

- **Recours disponibles au prêteur:**

Si à la suite du décès de l'emprunteur ou du dernier des co-emprunteurs, les héritiers ne paient pas la dette plafonnée à la valeur du bien estimée au jour de l'ouverture de la succession par un expert choisi d'un commun accord entre les parties ou désigné sur requête, ou bien si la succession est vacante, le prêteur peut décider de poursuivre la saisie et la vente du bien immobilier sous-jacent au contrat, en reversant l'éventuel surplus de produit de vente aux héritiers ou se voir attribuer la propriété de ce bien par décision judiciaire ou en vertu d'un pacte commissaire.

- **Au moment du règlement du PVH:**

Le prêteur qui ne restitue pas aux héritiers l'éventuelle différence positive entre le montant du bien cédé et la valeur de la dette ou qui réclame une indemnité de remboursement anticipée supérieure aux limites légales ou en dehors du cadre légal de cette demande est puni d'une amende de 30 000 €.

Droits et Obligations de l'emprunteur:

- **En Amont du contrat :**

L'emprunteur ne peut accepter l'offre que 10 jours après sa réception, après quoi elle doit faire l'objet d'un acte notarié. Le prêteur qui accorde un prêt sans que ces contraintes aient été respectées est puni d'une amende de 3 750 € et peut perdre son droit aux intérêts en totalité ou dans la proportion fixée par le juge.

- **Au cours de la vie du contrat :**

L'emprunteur a pour obligation d'apporter à l'immeuble hypothéqué les soins d'un « bon père de famille ». Il ne peut réclamer le bénéfice du terme lorsque par son fait il a diminué la valeur du bien hypothéqué sous-jacent au contrat, lorsqu'il en change l'affectation ou lorsqu'il refuse son accès au prêteur afin de s'assurer de son bon état d'entretien et de conservation.

- **Au terme du contrat : remboursements anticipés :**

L'emprunteur a le droit de mettre un terme au contrat du PVH en remboursant les sommes qui lui ont été versées accrues des intérêts cumulés. Dans le cas d'un déblocage unique, l'emprunteur a le droit de rembourser une partie des sommes versées. Le prêteur peut cependant refuser un remboursement partiel anticipé du prêt par l'emprunteur de moins de 10 % du capital versé. Dans le cas de déblocages fractionnés, l'emprunteur peut demander une suspension ou modification de l'échéancier des versements.

1.4.3 : Chiffres clé du PVH en France

Moins de 5000 PVH sont produits chaque année en France depuis l'introduction de ce prêt en 2006 jusqu'en 2013. Lors de sa première année de diffusion, entre juin 2007 et juillet 2008, 4400 PVH ont été autorisés pour un montant total de 380 millions €. Ce nombre a fortement baissé à la suite de la crise économique mondiale qui s'est accompagnée d'une baisse des prix immobiliers, donc d'une baisse des montants prêtés pour le PVH, et tourne aujourd'hui plutôt autour du millier par an. L'âge moyen des emprunteurs entre 2007 et 2013 est de 76 ans. Un peu moins de la moitié des PVH sont souscrits par des couples et un peu plus de la moitié sont souscrits par des individus seuls. Pour les PVH à emprunteur unique, plus des deux tiers sont des femmes et moins d'un tiers des hommes. Pour les premières années de commercialisation, la valeur moyenne initiale du bien est comprise entre 300 000 et 350 000 €, pour un montant de prêt moyen d'environ 80 000 € et une quotité moyenne appartenant à la fourchette 25-30%. Depuis 2007, le Crédit Foncier est la seule entreprise française à proposer ce produit, nommé Reversimmo, aux personnes âgées de 65 ans et plus à un taux de 8.95% puis 7.95% pour un montant minimal de 20 000 € prêtés.

SECTION 1.5 : INTERET DU PVH DANS LE CONTEXTE DEMOGRAPHIQUE ET ECONOMIQUE ACTUEL ET PROJETE

Le faible engouement qu'a dégagé le PVH depuis son autorisation jusqu'aujourd'hui ne doit pas occulter l'intérêt réel qu'il peut présenter pour répondre aux besoins des français dans les contextes démographique et économique actuels et projetés.

Sur le plan démographique, le nombre de personnes âgées est amené à augmenter tant en % au sein de la population totale que dans l'absolu. Selon l'INSEE 22,3 millions de personnes seront âgées de plus de 60 ans en 2050 contre 12,6 millions en 2005 soit une hausse de 80%. L'intégration des générations des baby-boomers, nés pour la plupart entre 1946 et 1975 devrait nourrir entre 2006 et 2035 une très forte hausse de cette catégorie de la population, après quoi cette croissance devrait décélérer. La fraction d'individus de plus de 60 ans devrait croître de 20,8 % en 2005 à 30,6 % en 2035. A espérance de vie stable au niveau de 2005, le nombre de français âgés de plus de 60 ans devrait augmenter de plus de 50 % entre 2005 et 2050. L'allongement de la durée de vie d'une génération à l'autre contribuera par ailleurs au vieillissement de la population française en augmentant ce chiffre.

Ce phénomène, combiné au recul de l'âge d'entrée en institution et à la progression de la proportion de propriétaires en France, encouragée par la politique de logement, devrait impliquer un essor du nombre et de la proportion de personnes âgées propriétaires en France, laissant profiler un élargissement du marché des demandeurs potentiels du PVH. La proportion de propriétaires en France est passée de 54,1 % en 2005 à 57,5 % en 2007 et 58,2 % en 2012 et l'INSEE projette que la part des personnes dépendantes vivant en institution devrait diminuer de 33,3 % en 2005 à 29,5 % en 2020. 67 % des ménages dont la personne de référence est âgée de 65 à 74 ans et 61 % des ménages âgés de plus de 75 ans logent dans une maison habituelle contre 57 % et 53 % en 1988. En 2002, 68,2 % soit plus des deux tiers des ménages âgés de plus de 65 ans sont propriétaires de leur logement et n'ont aucun emprunt à rembourser en lien avec leur résidence principale contre 55,6 % en 1988.

Or, les personnes âgées peuvent être décrites comme étant pauvres en trésorerie et riches en actifs. La nécessité de financement de cette cible va augmenter et puisque la plus grande partie de son actif est constituée du logement, un dispositif type PVH qui permet de convertir le logement des personnes âgées en liquidités est amené à représenter une solution de plus en plus adaptée aux besoins de cette catégorie de la population. En 2010, le patrimoine net est de 345 500 € chez les 60-69 ans contre 32 700 € chez les moins de 30 ans, 127 100 € chez les 30-39 ans et 243 700 € chez les 40-49 ans. Selon l'enquête Patrimoine de 1998, le patrimoine immobilier, qui pour la majorité des ménages n'est composé que de la résidence principale, représente 65,8 % du patrimoine total des retraités français. De plus, la diminution du ratio actifs/passifs ainsi que l'augmentation de la durée de vie en France laisse présager une diminution du niveau des retraites et un besoin accru de sources de financement complémentaires pour cette partie de la population. Les prêts classiques qui sont accordés sous condition de la souscription d'une assurance décès d'autant plus chère pour l'emprunteur que celui-ci est âgé et en mauvaise santé ainsi que la vente en viager qui contraint à la cession du logement ne semblent pas être des solutions adaptées et favorables aux personnes âgées à la recherche d'une source de financement.

SECTION 1.6 : AVANTAGES ET INCONVENIENTS DU PVH POUR L'EMPRUNTEUR ET LE PRETEUR

Pour l'emprunteur, le PVH présente de nombreux avantages. En effet, il représente une solution innovante particulièrement bien adaptée au besoin de liquidités des personnes âgées propriétaires, pour laquelle plusieurs modalités de mise à disposition des fonds sont possibles et dont le capital emprunté ne rentre pas dans le champ d'imposition de l'impôt sur le revenu et peut être utilisé par l'utilisateur comme bon lui semble, exception faite d'une utilisation destinée au financement d'une activité professionnelle. Concernant les conditions d'éligibilité, la santé de l'emprunteur n'est pas un critère et contrairement aux autres moyens de financement disponibles, plus celui-ci est âgé et plus le montant qu'il peut emprunter est élevé. L'emprunteur et ses héritiers sont protégés par de multiples garanties et de multiples clauses à leur avantage en particulier le plafonnement du montant de la dette à la valeur du bien grâce auquel aucune dette n'est transférée aux héritiers de l'emprunteur, le maintien de la propriété du bien par les emprunteurs, le droit d'occuper le bien tant que souhaité et l'absence de tout

remboursement ou paiement d'intérêt du vivant de l'emprunteur. Enfin, les indemnités dans le cas d'un remboursement anticipé sont forfaitaires.

Cependant, le PVH n'est pas exempt d'inconvénients pour l'emprunteur, du fait de sa complexité et de son opacité, de son taux élevé, de ses coûts annexes élevés, et de la capacité d'emprunt limitée qu'il procure. En effet, le souscripteur du PVH doit consentir à céder son bien à son décès à l'établissement de crédit pour récupérer dans la plupart des cas un montant significativement inférieur à 50% de ce bien. L'emprunteur court le risque de se faire expulser du bien s'il ne possède pas les moyens physiques ou financiers de l'entretenir correctement. Le maintien de la responsabilité de l'entretien du logement pour l'emprunteur entraîne donc un besoin de trésorerie. L'emprunteur ne pourra pas transmettre son logement en héritage à sa famille et ses proches sauf si ceux-ci acceptent de rembourser le prêt avec leurs propres liquidités, ce qui peut être difficile à envisager en cas d'attachement émotionnel au bien immobilier. Enfin, du fait du non plafonnement de la dette à la valeur du bien lors d'un remboursement anticipé, la souscription d'un PVH contraint l'emprunteur à ne pas céder son logement tant qu'il n'a pas assez de liquidités pour rembourser la dette du PVH, ce qui représente une contrainte lourde lorsque l'état de santé de celui-ci se dégrade et lorsque la configuration de son logement n'y est plus adaptée.

Du côté du prêteur, le PVH présente l'avantage d'un taux de dette élevé, d'une probabilité de défaut de l'emprunteur quasi nulle et d'un large marché potentiel, en voie d'expansion. Cependant, il est un produit complexe, qui l'expose à des risques multiples et difficiles à maîtriser. Il ne dispose pas de recours en cas de dégradation de la valeur du bien si celle-ci n'est pas due à un sous entretien et se trouve par conséquent très exposé au risque d'un krach immobilier de niveau national. Il existe actuellement peu de données disponibles sur les emprunteurs de ce type de prêt, leur profil de mortalité et sur l'évolution des prix de leurs biens ce qui complique significativement les analyses et la modélisation des flux du produit, sa tarification et la mise en place d'une stratégie de gestion du risque. Les établissements de crédit, du fait du caractère récent de ce produit, manquent également d'expérience sur le marché du PVH. Enfin, la législation actuelle du PVH n'est pas nécessairement adaptée aux spécificités de ce produit notamment en ce qui concerne le thème du taux d'usure.

SECTION 1.7 : PRODUITS ET COUTS ASSOCIES

On définit ici par flux associés au PVH, les flux d'argent générés par le PVH, c'est-à-dire ceux qui n'auraient pas eu lieu sans lui, à l'exclusion des flux de versement de déblocages correspondant aux montants prêtés du prêteur au groupe emprunteur et du flux de remboursement du prêt au terme du contrat qui est versé par le groupe emprunteur ou par ses héritiers au prêteur. Un flux associé sera considéré comme un produit associé par celui pour lequel il correspond à une rentrée de trésorerie et comme un coût associé pour celui pour lequel il correspond à une sortie de trésorerie. Les flux associés considérés s'échangent soit directement entre le prêteur et l'emprunteur, soit entre un ou des intermédiaires et le prêteur, soit entre un ou des intermédiaires et l'emprunteur. Les éventuels flux et produit associés qui auront lieu entre le prêteur et l'emprunteur seront décrits et répertoriés au contrat du PVH.

Le PVH se distingue des prêts classiques par un montant de coûts associés significativement plus élevé, dont une partie importante est supportée par l'emprunteur, engendrant un taux effectif global du PVH élevé.

Les coûts associés au contrat du PVH incluent des frais d'expertise en amont du contrat et à son terme, afin d'évaluer la valeur du bien immobilier sur lequel repose le contrat. Dans la plupart des cas, les frais d'expertise au début du contrat sont payés par l'emprunteur. Le PVH faisant l'objet d'un acte notarié, il génère également des frais de notaires. Comme la plupart des contrats de prêt, il engendre un coût d'émission, des frais de dossier et de gestion. Il s'agit d'un prêt hypothécaire qui à ce titre engendre des frais de garantie hypothécaire. L'hypothèque est une forme de garantie onéreuse : elle génère des émoluments du notaire, des frais annexe, une contribution de sécurité immobilière calculée comme un pourcentage du montant emprunté et une taxe de publicité foncière, également calculée comme un pourcentage du montant emprunté. Le PVH peut parfois engendrer des frais d'intermédiation et dans la plupart des cas des primes d'assurance lorsque le prêteur cherche à se couvrir contre les multiples risques auxquels l'exposent le PVH. Du côté de l'emprunteur un remboursement anticipé engendre

le paiement d'une indemnité de remboursement anticipé ainsi que des frais de mainlevée d'hypothèque. Du côté du prêteur, le PVH génère des impôts. En particulier, les intérêts qui se cumulent sur le solde du prêt sont imposables chaque année, même s'ils ne sont pas touchés année après année et même s'ils ne seront peut-être pas touchés à terme non plus du fait du plafonnement de la dette à la valeur du bien.

Ces coûts peuvent être intégrés au taux d'intérêt de la dette du PVH, être retenus sur les montants prêtés à l'emprunteur ou être payés séparément par le prêteur ou l'emprunteur.

Le PVH peut également générer des produits annexes, pour la plupart des cas des prestations versées par des assurances au nom de contrats souscrits pour la couverture des risques du PVH, au prêteur ou à l'emprunteur, selon les cas.

CHAPITRE 2 : DEFINITION DE LA PROBLEMATIQUE

Dans ce second chapitre, nous souhaitons amener, définir et préciser la problématique de ce mémoire. Pour cela, nous décrivons les garanties offertes par le PVH à l'emprunteur et les similarités que sa structure présente avec les produits financiers que sont les prêts hypothécaires in fine et les options de vente ainsi que les produits d'assurance que sont les contrats de capital décès et qui lui permettent l'octroi de ces garanties. Nous présentons les risques engendrés en contrepartie par ces structures, lesquels rendent l'échéancier du PVH incertain et font de la rentabilité de ce produit une variable aléatoire. Nous définissons plus en détails les deux paramètres clés du PVH que sont le taux de la dette et la quotité ainsi que leurs enjeux, avant de formuler explicitement notre problématique et de préciser son champ d'application.

SECTION 2.1 : GARANTIES OFFERTES PAR LE PVH

Une garantie offerte par le PVH à son ou ses souscripteurs correspond à une obligation vis-à-vis du souscripteur, du garant, ici le prêteur, qui entraîne la responsabilité légale de celui-ci en cas de non-respect. Elle correspond à un terme du contrat qui se veut avantageux pour l'emprunteur et par rapport auquel il dispose d'une possibilité de recours en justice.

Le PVH offre de multiples garanties à ses souscripteurs. Premièrement, il leur fournit une **garantie de revenus**, qui correspond à l'obligation légale du prêteur de verser à l'emprunteur les montants convenus en nombre et aux échéances convenus et renseignés dans le contrat. Deuxièmement, il est assorti, en tant que prêt in fine, d'une **garantie de remboursement** qui exempte le souscripteur d'une obligation de remboursement du prêt, tant que celui-ci vit dans le bien immobilier sous-jacent au contrat et tant qu'il entretient celui-ci en « bon père de famille ». Troisièmement, le PVH offre une **garantie d'occupation** ou garantie locative à l'emprunteur, par laquelle il dispose du droit d'occuper le bien immobilier aussi longtemps qu'il le souhaite et en reste propriétaire. Quatrièmement, le souscripteur est protégé par une **garantie de plafonnement**, qui plafonne la valeur de la dette à celle du bien à la date de son décès et qui limite donc le montant du versement que devront effectuer les héritiers de l'emprunteur à un montant auquel ils auront accès par héritage via la transmission du bien immobilier. Cela permet de ne pas laisser de dette aux héritiers de l'emprunteur. Enfin, les souscripteurs sont protégés par une **garantie de non-recours** qui stipule que le créancier ne peut accéder aux actifs des emprunteurs et de leurs héritiers autres que le bien immobilier sous-jacent au contrat du PVH pour se rembourser.

Chacune de ces garanties, source d'avantages pour l'emprunteur, est en contrepartie source de risques pour le prêteur. Ces garanties et les risques qu'elles génèrent rapprochent le PVH d'autres produits financiers et assurantiels comme nous allons le voir dans les sections suivantes.

SECTION 2.2 : COMPARAISON DU PVH A DES PRODUITS STRUCTURELLEMENT SIMILAIRES

Pour pouvoir offrir ces multiples garanties, le PVH emprunte ses caractéristiques à distinctes catégories de produits financiers et assurantiels. Notamment, il partage des caractéristiques communes avec les prêts hypothécaires in fine classiques, les contrats d'assurance vie en cas de décès ainsi qu'avec les options de vente.

En effet, le PVH appartient à la famille des **prêts hypothécaires in fine**: il s'agit d'un prêt de liquidité dans lequel le bien immobilier sous-jacent constitue une garantie de paiement de la dette, lequel s'effectue en une fois au terme du prêt. La première particularité du PVH au sein de cette famille réside dans la date de maturité du prêt qui est aléatoire au lieu d'être certaine et prédéterminée contractuellement, puisqu'elle correspond à la date de décès du dernier des co-emprunteurs. La seconde particularité du PVH au sein de cette famille est que le montant du flux final remboursé au créancier est égal au minimum entre le montant de la dette et la valeur du bien hypothéqué à la maturité dans tous les cas, y compris celui où l'emprunteur dispose de liquidités suffisantes pour rembourser la totalité de la dette, alors que dans le cas d'un prêt hypothécaire classique, la valeur remboursée ne sera inférieure à la dette que si l'emprunteur fait défaut et si la valeur du bien hypothéqué est inférieure à la dette.

La première particularité citée rapproche le PVH d'un produit d'assurance vie, en particulier d'un **contrat de capital décès** souscrit par le créancier du PVH sur la tête de ses co-emprunteurs (groupe disparaissant au décès du dernier de ses membres) dans lequel les déblocages fractionnés font usage de primes et le remboursement final du prêt fait usage de capital décès. Dans les deux cas, un flux positif unique sera versé au créancier du PVH à la date de décès du dernier des co-emprunteurs. Cependant, tandis que le montant du capital décès dans un contrat d'assurance vie est certain et stipulé par le contrat, le montant final reçu par le créancier du PVH est aléatoire puisqu'il dépend notamment des variations de la valeur du bien hypothéqué. En conséquence, le risque que prend en charge le créancier du PVH porte non pas sur le montant des primes payées mais sur le montant du capital décès, contrairement à celui que prend en charge le souscripteur d'un contrat de capital décès.

La deuxième particularité citée permet de répliquer le *payoff* du PVH en prêtant les déblocages du PVH aux échéances du PVH sous forme d'un prêt in fine au taux du PVH remboursable à la date de disparition du groupe emprunteur, en achetant à la date de début du prêt le bien hypothéqué sous-jacent et en vendant une **option de vente** sur ce bien, dont la maturité est égale à la date de décès du dernier des co-emprunteurs et dont le *strike* est égal à la valeur de la dette à maturité du prêt. La particularité d'une telle option de vente résiderait dans la nature aléatoire de sa date de maturité ainsi que dans la nature aléatoire du montant du *strike*. Deux sources d'aléas interviennent dans la détermination du montant du *strike* lui-même : la nature aléatoire de la date de maturité puisque le montant des intérêts dus est fonction croissante de la maturité du prêt et, dans le cas d'une dette qui évoluerait à taux variable, la nature aléatoire de la variation des taux. Dans le cas d'une dette évoluant à taux fixe, cette deuxième source d'aléa n'entre pas en jeu, par conséquent l'unique source d'aléa réside dans la composante date de décès du dernier des co-emprunteurs.

Un prêt viager hypothécaire diffère également d'un prêt hypothécaire in fine classique sur les points suivants : concernant un prêt hypothécaire in fine classique, l'objet du prêt est le plus souvent l'achat d'un bien immobilier, la cible est l'ensemble de la population adulte, les conditions d'éligibilité portent sur le niveau de revenu de l'emprunteur, son endettement et la stabilité de sa situation professionnelle, le solde du prêt diminue au cours de la vie du prêt avec les versements d'intérêt et la dette est donc minimale au terme du prêt. A l'inverse, en ce qui concerne un prêt viager hypothécaire, l'objet du prêt est de générer des liquidités, la cible correspond à la population âgée, les conditions d'éligibilité portent donc avant tout sur l'âge de l'emprunteur, le solde du prêt augmente tout au long de la vie du prêt puisqu'aucun versement n'est effectué par l'emprunteur – remboursement et intérêts compris- avant le terme du prêt où il atteint son point maximal.

Le prêt viager hypothécaire peut également être comparé à un contrat d'assurance vie à versements réguliers souscrit par l'emprunteur, dans le cas de déblocages fractionnés. Dans les deux cas, le nombre de versements effectué au souscripteur, donc la rentabilité du contrat pour l'entreprise, dépend de sa durée de vie. Ces deux types de produits diffèrent sur les points suivants, entre autres : concernant un contrat d'assurance vie à versements réguliers, le fournisseur est typiquement une assurance, le souscripteur paie une ou plusieurs primes initiales avant de commencer à toucher les versements de l'assurance, le terme du contrat correspond très majoritairement au décès de l'assuré, le contrat n'a pas de lien avec l'immobilier et un individu non propriétaire

peut être éligible. Quant au prêt viager hypothécaire, le fournisseur est un établissement financier ou de crédit, le souscripteur n'effectue aucun versement hors RA vers l'emprunteur avant le terme du contrat, qui peut être déclenché par un décès mais aussi par un déménagement, un individu doit être propriétaire pour être éligible et le risque immobilier s'ajoute aux risques de longévité et de taux d'intérêt, que supporte un offreur d'assurance vie.

SECTION 2.3 : INTRODUCTION AUX RISQUES GENERES PAR CES STRUCTURES

Nous entendons par la notion de risque tout événement possible aléatoire, futur, en dehors de la volonté des parties au contrat et préjudiciable à celui sur lequel ou à ce sur quoi pèse le risque.

En contrepartie des garanties que le créancier du PVH offre à ses débiteurs, celui-ci doit porter, quantifier, suivre et gérer les nombreux risques que génère l'octroi des garanties et la structure relevant des trois catégories de produits citées précédemment- prêts hypothécaires in fine, contrat d'assurance vie et option de vente.

En effet le PVH hérite de la similarité de sa structure à celle des prêts hypothécaires in fine classiques le risque de délai entre la date de maturité du prêt et la date de remboursement effective et les risques d'image et juridique en cas de litige notamment causé par la vente forcée du bien sous-jacent ou l'expulsion des locataires. Il hérite de la similarité de sa structure à celle des contrats d'assurance vie les risques liés à l'incertitude des dates d'échéance des flux générés par le contrat tels que le risque de longévité correspondant à une sous mortalité des souscripteurs, le risque de taux et de non correspondance de la duration des actifs à celle des passifs de refinancement et le risque d'anti-sélection par lequel seuls les individus pensant vivre encore assez longtemps s'intéressent à la souscription de produits viagers en cas de vie. Il hérite de la similarité de sa structure à celle des contrats de vente d'une option de vente les risques liés à la valeur du sous-jacent tels que le risque d'une évolution défavorable de la valeur du bien due à une baisse des marchés immobiliers et l'aléa moral qui correspond au risque de mauvais entretien de ce bien une fois qu'il est hypothéqué.

Enfin, la combinaison unique des risques engendrés par le PVH associée à la garantie de plafonnement de la dette génère un nouveau type de risque dont la gestion incombe au créancier du PVH : le risque de dépassement ou *crossover risk*, c'est-à-dire le risque que la valeur de la dette dépasse celle du bien hypothéqué sous-jacent, auquel cas le créancier sera remboursé d'une valeur inférieure à celle qui lui est due au terme du contrat.

SECTION 2.4 : ENJEUX DES DEUX PRINCIPAUX LEVIERS POUR L'EMPRUNTEUR : TAUX ET QUOTITES

Le taux et la quotité sont deux paramètres clés d'un PVH. Ils jouent un rôle déterminant tant dans l'attractivité commerciale que le prêt va exercer sur sa cible, que sur le niveau de rentabilité qu'il va dégager pour le prêteur et sur le niveau de risque auquel celui-ci sera exposé. Toutes choses égales par ailleurs, si d'une part un couple taux bas/quotité élevée aura tendance à séduire la clientèle cible, d'autre part un taux élevé favorisera une rentabilité individuelle conséquente du PVH pour le prêteur mais augmentera la probabilité de réalisation du risque central du PVH, le risque de dépassement, tandis qu'une quotité faible sera propice à une rentabilité élevée du prêt individuel ainsi qu'à une minimisation de la probabilité de réalisation du risque de dépassement. Une bonne méthodologie de détermination des taux et quotités des PVH doit donc s'efforcer de trouver un équilibre entre les trois dimensions : attractivité commerciale, rentabilité et risque du prêt et arbitrer entre elles selon les préférences et les objectifs propres à l'entreprise, tout en tenant compte des contraintes réelles à laquelle l'entreprise doit se soumettre, notamment la législation et la concurrence.

Concernant la quotité, plus celle-ci est grande et plus le volume d'affaire, la part de marché en volume et le profit espéré en euros tendront à être importants. Proposer des quotités trop faibles peut dissuader le client de souscrire un PVH ou le pousser dans les bras de la concurrence. Cependant, plus la quotité est élevée plus le dépassement de la valeur du bien par celle de la dette est probable. En effet, les montants prêtés croissent avec la quotité, la valeur de la dette augmente avec les montants prêtés et la probabilité de réalisation du risque de dépassement augmente avec la valeur de la dette. Par conséquent, la quotité accordée croît en général avec l'âge de

l'emprunteur, car plus celui-ci est âgé, plus la durée de vie du prêt sera courte et moins les intérêts de la dette auront le temps de s'accumuler, ce qui réduira la probabilité de réalisation du dépassement. Dans le cas de déblocages fractionnés, plus l'emprunteur sera âgé et plus le nombre de versements qu'il aura le temps de recevoir sera faible, ce qui aura également tendance à limiter la valeur de la dette et le risque de dépassement. A titre indicatif, un souscripteur de 65 ans peut s'attendre à une quotité comprise entre 10 et 25% tandis qu'un souscripteur de 95 ans peut s'attendre à obtenir une quotité de plus de 40%. Les femmes ayant tendance à vivre plus longtemps que les hommes, la quotité accordée à une femme tendra à être inférieure à celle qu'on accorde à un homme de même âge. D'après le même raisonnement, on accordera une plus petite quotité à un groupe d'individu qu'on n'en aurait accordé à chacun de ses membres pris à part, car un groupe emprunteur de PVH survit toujours au moins aussi longtemps que chacun de ses membres.

Concernant le taux de la dette du PVH, plus celui-ci est élevé et plus la rentabilité d'un contrat individuel tendra à être élevée ; Cependant, un taux élevé pénalise les volumes mis en force et la part de marché en cas de concurrence. De plus, un taux élevé augmente la probabilité de réalisation du risque de dépassement, car un tel taux aura tendance à accroître le montant de la dette et à surpasser le taux de croissance du bien immobilier sous-jacent, donc à augmenter la probabilité que le montant de la dette dépasse celui du bien. A titre indicatif, le taux annuel du PVH est aujourd'hui en France de 7,95%.

Puisque le risque de dépassement augmente à la fois avec le taux et la quotité, un arbitrage est nécessaire entre les niveaux de ces deux paramètres, si l'entreprise souhaite limiter son risque. Ainsi, toutes choses égales par ailleurs, la quotité tendra à être d'autant plus faible que le taux sera élevé et inversement, dans le cas d'une entreprise prêteuse qui cherche à maîtriser son risque de dépassement. On illustre en annexe B)2 le risque de dépassement en fonction du niveau du taux et de celui de la quotité.

SECTION 2.5 : DELIMITATION DU PERIMETRE DE LA PROBLEMATIQUE

On se place du point de vue d'une entreprise qui commercialise des prêts viagers hypothécaires sous contrainte de rentabilité. Celle-ci cherche à déterminer le niveau des deux leviers fondamentaux du PVH, taux et quotité, qu'elle souhaite proposer à chaque groupe emprunteur potentiel en amont du contrat afin de se donner les moyens de réaliser son objectif de rentabilité tout en s'assurant de limiter le risque de non réalisation de cet objectif de rentabilité.

En effet, le PVH est un produit qui expose le prêteur à de nombreux risques, qui font de la rentabilité une variable aléatoire, dont la valeur est incertaine a priori. De ce fait, l'entreprise est amenée à se demander quelle est la probabilité de réalisation minimale de son objectif qu'elle exige ou, de façon équivalente, quelle est la probabilité maximale de non réalisation de son objectif de rentabilité qu'elle est prête à accepter. La détermination des taux et quotités du PVH devra intégrer une dimension liée au risque de ce produit, une mesure du risque de non réalisation de l'objectif de rentabilité que l'entreprise s'est fixé et reposer sur la modélisation des risques qui influent sur la valeur de cette probabilité.

Notre méthodologie de détermination des taux et quotité du PVH tâchera d'intégrer, outre un objectif de rentabilité et une limitation du risque de non réalisation de cet objectif, des contraintes externes et internes commerciales, légales et stratégiques.

Le but de ce mémoire est donc de développer et détailler une méthodologie de détermination des taux et quotité du PVH intégrant les trois dimensions mentionnées précédemment : rentabilité, risque, contraintes externes et internes de l'entreprise offreuse. Cette méthodologie sera formulée de façon à être adaptée aux PVH « classiques », c'est-à-dire les PVH à déblocage(s) unique ou fractionnés dont le taux de la dette est fixe, lesquels représentent le plus gros volume des PVH souscrits en France depuis leur autorisation sur notre marché jusqu'aujourd'hui. Elle sera également formulée de façon à respecter le cadre juridique applicable au PVH qui existe en France actuellement. De plus nous supposerons l'objectif de rentabilité global, c'est-à-dire incluant les frais et produits annexes générés par le contrat de PVH pour l'entreprise, ainsi qu'individuel, c'est-à-dire applicable à chaque contrat de PVH pris seul et non pas à un portefeuille de PVH. Du fait de ces restrictions, notre

méthodologie ne s'adressera pas à des PVH à taux variables ou à des PVH sous forme de ligne de crédits, qui représentent un pourcentage important des PVH souscrits aux Etats-Unis. La méthodologie que nous détaillerons ne sera pas non plus directement applicable à une entreprise qui s'est fixé un objectif de rentabilité ou de maîtrise du risque global sur l'ensemble de son portefeuille de PVH ni à une entreprise qui souhaite déterminer le taux et quotité de ses PVH sous une contrainte autre que la réalisation d'un certain niveau de rentabilité avec un certain niveau minimal de probabilité.

Ainsi nous consacrons la suite de ce mémoire à l'élaboration d'une réponse à la problématique suivante : **comment une entreprise offreuse peut-elle déterminer le taux et la quotité d'un PVH à taux fixe afin de réaliser l'objectif de rentabilité individuel du PVH qu'elle s'est fixé en s'assurant de limiter le risque de non réalisation de cet objectif, tout en tenant compte du cadre juridique français et des contraintes commerciales et stratégiques auxquels elle est soumise ?**

Pour cela, nous allons élaborer en Partie 2 quatre méthodologies de détermination des taux et quotités répondant à ces multiples soucis de l'entreprise en choisissant et en explicitant une fonction objectif, une mesure de risque, des contraintes s'appliquant individuellement aux paramètres taux et quotité puis en proposant quatre approches et méthodes d'optimisation concevables à partir de ces éléments.

C'est alors que nous allons en Partie 3 examiner les aléas qui influent sur la réalisation de notre objectif et choisir parmi eux ceux qu'on va modéliser ou négliger avant d'élaborer en Partie 4 un modèle pour les aléas retenus.

Nous construirons enfin un outil informatique afin de simuler les aléas retenus selon les modèles que nous aurons élaborés et de mettre en pratique nos méthodologies. Nous effectuerons des simulations de flux du PVH via cet outil dont nous présenterons les résultats dans la Partie 5 puis les analyserons afin de choisir la méthodologie parmi les quatre envisagées qui nous semble la plus appropriée à la détermination du couple (taux, quotité) du PVH pour une entreprise qui commercialise ce produit sous contrainte de rentabilité individuelle, de limitation du risque, d'attractivité commerciale et de respect de la loi française. Pour cela nous devons déterminer si la meilleure stratégie de pilotage du PVH pour l'entreprise offreuse est un pilotage par le taux, par la quotité ou un pilotage conjoint par le couple (taux, quotité).

FONCTION OBJECTIF, CONTRAINTES ET QUANTIFICATION DES QUATRE METHODES

La détermination du taux et des montants prêtés soit de la quotité présente de nombreux enjeux pour le prêteur du PVH, commerciaux et financiers notamment. Schématiquement, des taux bas et des montants prêtés élevés seront attractifs commercialement mais préjudiciables à la performance financière du prêteur, tandis que des taux élevés et des montants bas seront répulsifs commercialement mais avantageux pour la performance financière du prêteur. La commercialisation d'un instrument financier n'ayant d'intérêt que si celui-ci se vend et représente un atout pour les finances actuelles ou futures de l'entreprise, la méthodologie des taux et montants prêtés devra trouver le point d'équilibre, jugé optimal par l'entreprise, entre ces deux extrêmes.

Dans cette seconde partie, nous élaborons et quantifions quatre méthodes de détermination du couple (taux, quotité) du PVH de façon à ce qu'elles tiennent compte à la fois de la stratégie de l'entreprise et de ses objectifs, notamment en termes de rentabilité et de limitation du risque, ainsi que des contraintes réelles qui s'appliquent à elle. Pour cela, nous commençons par clarifier la notion de rentabilité et préciser celle qui nous intéresse dans ce mémoire, nous recensons les contraintes externes : commerciales et juridiques qui s'appliquent à l'entreprise dans sa démarche de détermination du taux et de la quotité du PVH puis quantifions une fonction objectif, choisissons une mesure de risque et explicitons quatre méthodes possibles de détermination des paramètres clé du PVH combinant ces cinq considérations : rentabilité, risque, stratégie et objectifs du prêteur, attractivité commerciale et respect de la loi.

CHAPITRE 1 : L'OBJECTIF DE RENTABILITE

Dans ce premier chapitre, nous donnons la définition de la notion de rentabilité, nous justifions le choix d'un objectif de rentabilité comme contrainte centrale dans notre méthode de détermination du couple (taux, quotité) du PVH, nous en présentons les mesures les plus courantes puis précisons le type de rentabilité qui nous intéresse dans ce mémoire, afin de guider dans la suite de cette partie notre choix de la fonction objectif.

SECTION 1.1 : CHAMP DES POSSIBLES DES OBJECTIFS

La méthodologie de détermination des paramètres d'un produit dépend de l'objectif que l'entreprise assigne au produit. Le champ des possibles des objectifs qui peuvent être assignés à un produit et influencer sa tarification est très vaste. Nous considérons ci-dessous les objectifs les plus répandus.

L'entreprise peut souhaiter maximiser la marge unitaire de profit du produit, que l'on peut se représenter comme la mesure du profit dégagé pour chaque euro investi par l'entreprise afin de pouvoir conceptualiser, produire, commercialiser et éventuellement couvrir ou assurer ce produit. Typiquement, la recherche de maximisation de cette marge est l'optique privilégiée par les entreprises qui s'attendent à écouler une faible quantité de produits. Elle peut souhaiter maximiser le profit dégagé par le produit c'est-à-dire le montant des revenus que ce produit génère diminué des coûts qu'il engendre ou bien seulement maximiser les revenus générés par le produit, sans considération des coûts particulièrement dans le cas où ceux-ci correspondent à des coûts fixes ou de structure qui ont déjà été engagés. Elle peut souhaiter avant tout établir une image de qualité, dans le but d'augmenter la rentabilité, les revenus ou le profit des autres produits de sa gamme, ou afin de se donner l'opportunité d'une situation financière future confortable via notamment la fidélisation d'une clientèle. Elle peut vouloir maximiser le volume de vente écoulé, la pénétration du produit et sa part de marché, notamment dans le cas de produits pouvant bénéficier d'économies d'échelle ou lorsque le marché est récent. Elle peut chercher à s'aligner sur la

concurrence, surtout dans le cas d'un produit peu différencié d'un concurrent à l'autre, pour éviter la riposte de concurrents au comportement prédateur ou maintenir un niveau de rentabilité élevé dans le cas d'un oligopole sur un secteur rentable. Elle peut chercher à couvrir des coûts déjà engagés, en particulier dans les secteurs à coûts fixes élevés. Enfin, son objectif premier peut résider dans la simple survie, dans le cas d'un marché très concurrentiel ou en passe d'obsolescence.

Le choix en la faveur d'une des options d'objectifs possibles sera déterminé par de nombreux paramètres, tenant à des contraintes internes à l'entreprise, y compris sa structure de coûts, ses capacités, sa stratégie et les indicateurs de performance sur lesquels elle indexe le système de récompenses de ses employés, à la demande et à son élasticité par rapport aux paramètres du produit, ainsi qu'à la réglementation et à la situation du marché sur lequel est commercialisé le produit en termes de concurrence et de récence.

SECTION 1.2 : LA NOTION DE RENTABILITE

1.2.1 : Définition, modalités possibles et mesures de la rentabilité

Définie au sens large, la rentabilité est le rapport entre un revenu obtenu et les ressources investies, ou un passif mobilisé, pour générer ce revenu.

Elle peut être mesurée de nombreuses manières, selon les modalités de la rentabilité que l'entreprise choisit de surveiller. La rentabilité peut notamment être individuelle, c'est-à-dire mesurée au niveau de chaque produit ou projet de l'entreprise, elle peut également être mesurée au niveau d'un portefeuille de produits, d'un ensemble de portefeuilles de produits complémentaires ou similaires, ou au niveau de l'entreprise dans son intégralité. Elle peut porter sur le présent, le passé ou le futur ou un mélange de ces dimensions temporelles. Une mesure de rentabilité sera dite rétrospective si elle ne prend en compte que les flux générés et le passif mobilisé dans le passé jusqu'au présent. Elle sera dite prospective ou prévisionnelle si elle tient compte des flux futurs et du passif mobilisé dans le futur. Une mesure de rentabilité prospective repose la plupart du temps sur des hypothèses puisque les flux futurs ne sont pas nécessairement connus avec certitude ainsi que sur des clauses contractuelles qui visent à sécuriser l'avenir. La mesure de rentabilité rétrospective pourra ou non être capitalisée, tandis que la mesure de rentabilité prospective correspondra souvent à une valeur actualisée, bien que cela ne soit pas une nécessité. La rentabilité pourra être mesurée afin de refléter les performances de l'entreprise, du portefeuille ou du produit sur l'intégralité de sa vie ou sur une période de temps particulière correspondant à un plus ou moins long terme. La mesure de rentabilité pourra se concentrer sur un sous ensemble des flux, actifs et passifs de l'objet dont on cherche à mesurer la rentabilité ou elle pourra avoir vocation à être exhaustive, donc à répertorier l'intégralité des flux, passifs et actifs qui ont été générés du fait de l'existence de l'objet dont on cherche à mesurer la rentabilité. D'autres distinctions sont encore possibles, notamment celle qui est opérée entre rentabilité économique et rentabilité financière. La première correspond au quotient du résultat net d'impôt par la somme des dettes mesurées conformément aux normes internationales et des capitaux propres tandis que la seconde correspond au quotient du résultat net d'impôt et d'intérêt de la dette financière par les capitaux propres. Le plus souvent, une mesure de rentabilité est exprimée comme un ratio.

Derrière l'unicité du concept, il existe donc une multitude d'indicateurs de rentabilité, allant du simple quotient au calcul actuariel plus complexe, de l'indicateur standardisé utilisé par de nombreux acteurs - tels que le ROE, le ROA, le ROCE, le ROI, le taux de croissance ou le taux de rendement interne- à l'indicateur intégralement ad-hoc c'est-à-dire adapté aux spécificités propres du produit, projet, portefeuille ou de l'entreprise.

1.2.2 : Pourquoi un objectif de rentabilité ?

L'objectif de rentabilité est le plus couramment mis en avant par les entreprises, pourquoi ?

En réalité, les agissements et les choix des entreprises sont guidés par de nombreux objectifs chacun à plus ou moins long terme, chacun plus ou moins priorisé par l'entreprise, chacun pouvant en pratique entrer en conflit avec les autres. La rentabilité fait néanmoins partie des constantes parmi les objectifs qu'ont en vue les entreprises,

que celles-ci cherchent à dégager une rentabilité jugée raisonnable, qui agit comme un support à la réalisation des autres objectifs qu'elle s'est fixée en dégageant les ressources nécessaires à la mise en œuvre d'une stratégie efficace de poursuite de ces autres objectifs ou bien qu'elles érigent la rentabilité comme l'objectif ultime, une fin en soi. Il existe un seuil minimal, nommé seuil de rentabilité, au-dessous duquel la survie de l'entreprise est considérée comme menacée car en dessous de celui-ci l'entreprise générera des pertes qui, accumulées, la conduiront à la faillite. A long terme, l'objectif d'atteinte d'une valeur de rentabilité raisonnable se confond avec l'objectif fondamental de survie. A plus court terme, la réalisation de l'objectif de rentabilité dégage des liquidités précieuses à la poursuite de nombreux autres objectifs que l'entreprise peut s'être fixés. La rentabilité est également un objectif de choix pour l'entreprise, pour la raison pratique que les indicateurs de rentabilité sont relativement aisés à quantifier et les données nécessaires à leur calcul sont relativement aisées à obtenir. Le suivi des performances de l'entreprise vis-à-vis de l'objectif de rentabilité est donc également relativement simple à effectuer. Dans le cadre de l'élaboration d'une méthodologie de détermination des taux et quotités qui se veut générale, c'est-à-dire applicable à toute entreprise, le fait que la rentabilité puisse être mesurée par des indicateurs normés, objectivement quantifiables est un réel atout. Des objectifs d'ordre qualitatifs ou appartenant au champ de la responsabilité sociale et environnementale de l'entreprise sont souvent en pratique bien plus difficiles à suivre et devraient être assortis d'indicateurs de performance tournés vers les spécificités de l'entreprise.

SECTION 1.3 : QUELLE RENTABILITE ?

Nous souhaitons établir une méthodologie de détermination des taux et quotités qui nous permette de déterminer le couple taux-quotité optimal pour chaque PVH individuellement. Pour cela nous allons nous intéresser à un objectif de rentabilité individuel, mesurable au niveau de chaque PVH. Nous nous situerons donc au niveau d'un unique prêt et non pas d'un portefeuille de produits. Les effets de diversifications du risque au sein du portefeuille ne seront pas explicités et nous prenons l'hypothèse que l'entreprise agit de façon à diversifier les risques qui peuvent l'être et en a la capacité. Puisque l'objectif est de déterminer le taux et la quotité du PVH, nous nous plaçons en amont du contrat et adopterons une approche de rentabilité prospective, en valeur actualisée. La période d'intérêt commence à la date du premier flux que génère le PVH et termine au terme du prêt, modulo le délai de remboursement. Nous choisissons donc une mesure de rentabilité portant sur l'intégralité de la vie du PVH. Enfin, nous souhaitons adopter une mesure de rentabilité exhaustive, tenant compte non seulement des versements de déblocage et du flux de remboursement du prêt mais aussi des coûts et éventuels produits associés.

CHAPITRE 2 : QUID DES CONTRAINTES EXTERNES ?

Dans ce deuxième chapitre nous recensons les éléments externes dont l'entreprise doit tenir compte en pratique lorsqu'elle détermine le taux et la quotité de son PVH afin de les intégrer sous forme de contraintes à notre méthode de détermination de ces paramètres, en explorant pour cela les dimensions commerciale et légale de ce prêt.

SECTION 2.1 : CONTRAINTES COMMERCIALES

Jusqu'ici on a envisagé une détermination des taux et quotités de chaque PVH afin que ces prêts génèrent une rentabilité souhaitée par l'entreprise. Cependant, l'objectif de rentabilité n'est pas le seul élément à intégrer à notre méthodologie car concevoir un produit qui une fois vendu peut générer une rentabilité satisfaisante pour l'entreprise mais qui en pratique ne se vend pas du fait d'une faible attractivité commerciale ne présente qu'un intérêt très limité.

Nous sommes ainsi amenés à nous interroger sur l'existence de contraintes commerciales s'appliquant à la détermination des taux et quotité du PVH. Selon le couple taux et quotité proposé au potentiel emprunteur, celui-

ci décidera ou non de souscrire au prêt. Schématiquement, la probabilité de souscription augmente, toutes choses égales par ailleurs, avec la quotité proposée puisque le montant prêté croît avec elle, et elle diminue, toutes choses égales par ailleurs lorsque le taux proposé augmente puisque la dette de l'emprunteur croît avec ce taux. Les contraintes commerciales s'expriment ainsi en termes de taux maximal acceptable pour le client et de quotité minimale acceptable pour lui.

Ces contraintes commerciales résultent de la combinaison des caractéristiques du produit et de l'entreprise prêteuse, des caractéristiques de la demande, de la situation et de la stratégie de la concurrence ainsi que de la situation économique.

Du côté de la demande, ces contraintes commerciales seront notamment déterminées en fonction de la valeur perçue des garanties offertes par le PVH et de ses modalités par le souscripteur potentiel. Avec celle-ci croît le taux maximal acceptable et diminue la quotité minimale acceptable pour le souscripteur. Elles dépendront plus généralement de l'élasticité de la demande aux paramètres taux et quotité, c'est-à-dire la variation en % du nombre de PVH souscrits pour une augmentation du taux de 1 % ou pour une diminution de la quotité de 1 %.

Du côté de l'offre et de la concurrence, les contraintes commerciales dépendent du niveau des taux et quotité fixés par des concurrents directs qui commercialisent des PVH et indirectement des conditions en termes de montants prêtés et de taux dont sont assorties les autres sources de financement disponibles au souscripteur. Elle tient également à la situation du marché : la liberté dans la détermination des taux et quotités sera plutôt faible dans une situation de concurrence pure et parfaite - correspondant à un marché où une multitude d'offres proposent un même produit peu différencié - plutôt élevée dans une situation de concurrence monopolistique - correspondant à un marché sur lequel de nombreux offres proposent un produit différencié avec un large éventail possible de caractéristiques - relativement faible dans une situation de concurrence oligopolistique dans laquelle un petit nombre d'offres très sensibles aux taux et montants prêtés surveillent leurs stratégies mutuelles pour s'aligner les uns sur les autres ou pour réprimer par une politique commerciale agressive tout offre ayant osé dévier de la norme du marché – et très élevée dans le cas d'une situation de monopole – correspondant à un marché avec un seul offre qui le plus souvent dispose seul des ressources nécessaires à la production du produit.

Les contraintes commerciales dépendent également de l'attractivité de l'entreprise offreuse et de sa capacité à fidéliser ses clients, de la qualité de son image. Enfin, elles dépendent de la conjoncture économique : les entreprises sont ainsi incitées à proposer des taux plus bas en temps de crise ou de mauvaise santé économique du pays dans lequel elles commercialisent leurs produits.

SECTION 2.2 : CONTRAINTES LEGALES PRET PAR PRET : SEUIL DE L'USURE ET TEG

La réglementation dans le cadre juridique français délimite les conditions d'éligibilité au PVH en stipulant un âge minimum requis, excluant les non-propriétaires ou les biens immobiliers ne servant pas de résidence principale. Elle délimite le périmètre des objets et des modalités possibles du prêt. Elle définit les conditions de remboursement anticipé. Toutes à leur manière, ces conditions vont influencer indirectement sur la détermination des taux et quotités du prêt.

Il convient tout particulièrement de s'interroger sur l'existence d'obligations légales influant directement sur la détermination des taux et quotités du PVH. La réglementation française n'impose pas de fourchette légale pour les valeurs des quotités. Elle n'impose pas non plus de taux minimum pour la dette du PVH. Cependant, elle impose un plafond aux taux effectif global de chaque PVH, nommé taux de l'usure, lequel engendre l'existence d'une contrainte sur les valeurs du couple (taux, quotité).

2.2.1 : Présentation et calcul des TEG

Les taux effectif globaux (TEG) ont été instaurés en France par la loi sur l'Usure n°66-1010 du 28 décembre 1966 comme des éléments cruciaux des offres de prêts d'argent accordés aux particuliers tout comme aux

professionnels. La définition ainsi que la méthodologie de calcul du TEG a été normalisée et réglementée au niveau européen, afin d'en faire un indicateur fiable du coût réel du financement pour le consommateur et afin de guider celui-ci dans son choix de financement en lui permettant de comparer le coût des diverses options de prêts à sa disposition. Les textes légaux de référence concernant les TEG sont inclus dans le Code de la Consommation. Un TEG erroné ou usuraire entraîne la sanction du prêteur qui l'a communiqué.

Le TEG d'un prêt se calcule comme le taux actuariel, c'est à dire comme un taux d'actualisation applicable à toutes les maturités de flux du contrat, qui permet l'égalité entre la valeur des montants prêtés et la valeur des frais que l'emprunteur devra verser au titre du prêt actualisés à ce taux.

Il est qualifié de global car il inclut tous les frais générés par le contrat. Ainsi, l'article L-313-1 du Code de la Consommation qu'il comprend, au-delà des intérêts et des remboursements du prêt « les frais, commissions ou rémunérations de toute nature, directs ou indirects, y compris ceux qui sont payés ou dus à des intermédiaires » mais qu'il exclut « les charges liées aux garanties dont les crédits sont éventuellement assortis ainsi que les honoraires d'officiers ministériels (...) lorsque leur montant ne peut être indiqué avec précision antérieurement à la conclusion définitive du contrat ». En pratique, il existe une vaste jurisprudence dont le but est de préciser les éléments qui devront ou non être inclus dans le TEG.

Pour la catégorie des crédits à laquelle appartient le PVH, le TEG est calculé comme un pourcentage annuel à terme échu. L'article R313-1 du Code de la Consommation précise que le calcul du PVH se fait sous hypothèse qu'il n'y aura pas de remboursement anticipé et que tout se déroulera selon les conditions et délais renseignés dans le contrat du prêt.

La formule permettant de calculer le TEG d'un prêt est la suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_d} \frac{d_i}{(1 + TEG)^{T_i}} = \sum_{j=1}^{N_c} \frac{c_j}{(1 + TEG)^{T_j}}$$

Où N_d est le nombre de débloques de montants prêtés, N_c est le nombre de flux de coûts pour l'emprunteur, d_i est le montant en € du $i^{\text{ème}}$ déblocage, c_j est le montant en € du $j^{\text{ème}}$ flux de coût pour l'emprunteur, T_i l'intervalle de temps exprimé en années entre la date du premier et du $i^{\text{ème}}$ déblocage, T_j l'intervalle de temps exprimé en années entre la date du premier déblocage et du $j^{\text{ème}}$ flux de coût pour l'emprunteur et TEG le taux effectif global annuel.

Dans le cas particulier du PVH, les échéances des flux et leurs montants n'étant pas connus avec certitude au moment de l'élaboration de l'offre de prêt, le calcul du TEG doit reposer sur des hypothèses représentatives. Le prêteur pourra ainsi présenter plusieurs exemples de valeurs de TEG, calculés en faisant varier les hypothèses qui devront être explicitées et aussi réalistes que possibles.

2.2.2 : Taux d'usure applicable au prêt viager hypothécaire

La réglementation française autorise les organismes de crédit à fixer librement leurs taux d'intérêt, tant que ceux-ci n'engendrent pas le dépassement du taux d'usure applicable. Le taux d'usure est un plafond légal au TEG d'un prêt qui a pour finalité la protection des emprunteurs contre des taux jugés excessifs. Ils sont publiés chaque trimestre par la Banque de France et fixés pour la durée du trimestre suivant leur publication au Journal Officiel. Pour cela, la Banque de France réalise chaque trimestre une étude auprès d'un groupe d'établissement de crédit considéré représentatif afin d'établir la moyenne des TEG des prêts qu'ils ont accordé pour chaque catégorie de prêt. Le taux d'usure qu'elle fixe par la suite est supérieur à 33% de cette moyenne. Les taux d'usure diffèrent selon le montant du prêt.

La législation concernant la répression des établissements de crédit proposant des prêts à taux usuraires est régie par le Code de la Consommation et par le Code Monétaire et Financier. L'article L313-3 du Code de la Consommation précise qu'un prêt est usuraire lorsque son TEG est supérieur au taux d'usure **au moment où le**

prêt est consenti. L'usure est un délit qui peut engendrer un emprisonnement de deux ans et/ou une amende de 45 000 €. Le surcoût imposé au client par rapport au taux de l'usure lui est reversé.

Le PVH appartient aux crédits de trésorerie aux particuliers. Les taux d'usure applicables au PVH au cours du 3^e trimestre 2013 sont ainsi de 20,23 % pour les montants inférieurs ou égaux à 3 000 €, de 15,17 % pour les montants supérieurs à 3 000 € et inférieurs ou égaux à 6 000 € et de 10,52 % pour les prêts d'un montant supérieur à 6 000 €. Le taux de l'usure dépend du montant prêté donc des quotités.

2.2.3 : Conséquence pour la détermination des taux et quotité du PVH

Le calcul du TEG et le respect du seuil d'usure constituent un challenge particulier pour le prêteur du PVH : premièrement car la valeur du TEG est incertaine et car son calcul doit reposer sur de multiples hypothèses, deuxièmement car le PVH est un produit onéreux dont le TEG est proche du seuil d'usure des crédits à la consommation, troisièmement car en pratique la contrainte du TEG augmente le nombre de calculs à réaliser et le temps de détermination du couple de paramètre (taux, quotité) optimal pour chaque méthode.

SECTION 2.3 : CONTRAINTES LEGALES GLOBALES : LE COMITE DE BALE

2.3.1 : Présentation du Comité de Bâle

Le Comité de Bâle, constitué des représentants des banques centrales et des autorités prudentielles de 27 pays depuis 2009, a été créé en 1974 pour établir des normes internationales en termes de pratiques bancaires, de contrôle prudentiel, de surveillance et de coopération internationales avec l'objectif d'assurer la stabilité et la fiabilité du système bancaire et financier international. Il se réunit quatre fois par an à Bâle, dans les locaux de la Banque des Règlements Internationaux. Les recommandations qu'il émet peuvent devenir des obligations légales dans les pays européens lorsqu'elles sont transposées par des directives légales. Le droit ainsi adopté constituera une contrainte globale pour les établissements financiers et les établissements de crédit puisqu'il concerne leur situation financière intégrale et n'a pas vocation à réglementer chacun des contrats et produits commercialisés par ces entreprises, pris individuellement.

Le Comité de Bâle est à l'origine de trois grands accords transposés en droit européen : Bâle I en 1988, Bâle II en 2004 et Bâle III en 2010.

2.3.2 : Bâle I

La création du Comité de Bâle I en 1974 résulte de la faillite de la banque allemande Herstatt la même année, laquelle déclencha une crise sur le marché des changes qui affecta de nombreuses banques par un effet domino. Dans ce contexte, Bâle I s'est centré sur l'objectif de couverture du risque de crédit à travers l'élaboration et la recommandation du ratio Cooke, qui impose une valeur minimale des fonds propres pour un établissement bancaire ou de crédit de 8 % des engagements de crédits de cet établissement. Le risque de crédit est le risque qu'un débiteur fasse défaut ou que sa situation se dégrade au point de dévaluer la créance que l'établissement détient sur lui. Les fonds propres considérés dans ce ratio comprennent le capital, les réserves dont sont déduits les actions propres détenues et la partie non libérée du capital ainsi que des fonds propres complémentaires tels que les dettes subordonnées, dont le remboursement n'intervient qu'après celui de toutes les autres dettes. Les engagements de crédit dont le ratio Cooke tient compte sont calculés comme un montant en monnaie nationale pondéré par un pourcentage censé refléter le risque du crédit. Par exemple la pondération d'un crédit admettant pour contrepartie un Etat de l'OCDE est de 0 % contre 50 % pour un crédit garanti par une hypothèque comme le PVH. Cet accord a été transposé dans l'Union Européenne par une directive datant du 18 décembre 1989.

Bâle I a été un premier pas dans la direction d'une régulation bancaire et financière internationale, liant niveau de fonds propres réglementaires requis et niveau de risque. Cependant cet accord ne tenait compte que du risque de crédit et la pondération du ratio Cooke ne reflétait pas assez fidèlement le niveau de risques des crédits. De plus, le ratio Cooke ne tenait pas compte des risques « hors-bilan » engendrés par les produits dérivés qui ont

connu un essor fulgurant dans les années 1990. La mise en évidence de ces failles et de la nécessité de repenser la réglementation bancaire a amorcé l'élaboration du second accord de Bâle.

2.3.3 : Bâle II

L'accord de Bâle II a pour objectif d'élargir l'approche initiée par Bâle I avec le ratio Cooke aux autres types de risques auxquels sont exposés les établissements bancaires et financiers, d'élaborer un dispositif de surveillance prudentielle et de promouvoir la transparence de la communication financière. Pour cela, le dispositif Bâle II repose sur trois piliers répondant à chacun de ces soucis : le Pilier I porte sur l'exigence de fonds propres, le Pilier II sur la procédure de surveillance prudentielle et le Pilier III sur la discipline de marché.

Le Pilier I propose une version améliorée du ratio Cooke. Celui-ci était critiqué pour mesurer le risque avant tout en termes de montant plutôt qu'en termes de qualité du crédit et pour ne tenir compte que du seul risque de crédit. Pour parer à ces failles, le ratio McDonough recommandé par Bâle II prend en considération les risques opérationnels et de marché en plus du risque de défaut et propose plusieurs méthodologies de quantification de ces risques. Plus précisément, il impose des fonds propres réglementaires supérieurs à 8 % de la somme des risques de crédits, de marché et des risques opérationnels de l'établissement bancaire ou de crédit. Un risque de marché est un risque de perte ou de dévaluation sur des positions dues à des variations de prix ou d'indices sur le marché. Un risque opérationnel est un risque de perte dû à des processus opérationnels dysfonctionnels, à des erreurs commises par des individus, à des systèmes internes inadaptés ou à des événements externes tels que des catastrophes naturelles. Une panne, une fraude ou un litige commercial seront considérés comme la réalisation d'un risque opérationnel. Le risque de crédit peut être évalué par une méthode standard, pour laquelle les probabilités de défaut (PD) seront déterminées en fonction de la note attribuée au crédit par les agences de notations tandis que les taux de perte en cas de défaut (LGD) sont imposés par le superviseur national, notamment l'ACP en France. Il peut également être évalué par une méthode IRB-avancée, pour laquelle la banque développe un modèle interne de déterminations des PD et LGD ou une méthode mixte, nommée IRB-fondation, pour laquelle la LGD est imposée par le superviseur et les PD sont calculées selon un modèle interne. De même, le risque de marché peut être évalué par une méthode standard ou un modèle interne et le risque opérationnel peut être évalué selon une méthode « indicateur de base » centrée sur le Produit Net Bancaire de l'établissement, une approche standard ou une approche « méthodes avancées » centrée sur les données historiques de l'établissement.

Le Pilier II a vocation à inciter les établissements bancaires et de crédit à développer des techniques de gestion de leurs risques et des tests de validité de ces techniques que le superviseur pourra contrôler. Ils sont particulièrement encouragés à pratiquer le *back-testing*, c'est-à-dire la vérification de la validité de leurs méthodes statistiques sur des périodes longues allant de 5 à 7 ans, ainsi que le *stress-testing* qui consiste à mener des simulations de situations extrêmes dont le but est de valider la suffisance des fonds propres pour absorber les pertes en cas de crise.

Le Pilier III incite ces établissements à mettre à disposition du public une information fiable et transparente sur les actifs, les risques et leur gestion. Il vise à discipliner les marchés financiers et à uniformiser les meilleures pratiques des agents de ce marché.

Les recommandations de Bâle II ont été transposées en droit européen par une directive européenne datant de janvier 2008.

A son tour, Bâle II a été critiqué sur plusieurs points : il n'est pas parvenu à prendre en considération l'intégralité des risques auxquels les établissements bancaires et de crédits sont exposés, et laisse notamment de côté le risque de liquidité qui sera mis en avant à la suite de la crise financière mondiale débutée en 2008. Les méthodologies d'évaluation des risques proposées sous-pondèrent les risques de marché et les risques engendrés par des produits complexes tels que la titrisation et ne sont pas parvenues à établir des estimations de ces risques qui reflètent la réalité. De plus, il a été décrit comme pro-cyclique puisqu'en période de bonne santé financière les risques et donc l'exigence de fonds propres diminuent et inversement en période de crise. La mise en avant de ces nécessités d'amélioration et la crise financière ont conduit à l'accord Bâle III de 2010.

2.3.4 : Bâle III

La crise financière a mis en évidence les dysfonctionnements des marchés financiers et par conséquent les lacunes de Bâle II. L'Accord de Bâle III vise à empêcher qu'une telle crise ne se reproduise à l'avenir en renforçant les marchés financiers par le biais de l'instauration d'exigences plus élevées en termes de qualité des fonds propres, l'introduction d'un « coussin contra-cyclique », de ratios de liquidité et d'un ratio d'effet de levier ainsi que par l'élaboration d'une réglementation spécifique pour les établissements et les activités d'importance systémique.

La proportion des fonds propres constituée du *CoreTier 1* c'est-à-dire des fonds propres qui possèdent la meilleure capacité d'absorption des pertes, tels que le capital social et le résultat mis en réserve, est relevée par Bâle III à 4,5 % et les conditions d'éligibilité à ce noyau deviennent plus restrictives et traduisent une augmentation des exigences de qualité des fonds propres. Les superviseurs nationaux sont incités à imposer aux établissements de crédit l'obligation de constituer des fonds propres supplémentaires, nommés coussin contra-cyclique et représentant 0 à 2,5 % du capital dès lors qu'ils observent des évolutions macroéconomiques pouvant indiquer l'augmentation du risque d'une crise d'ampleur systémique. Deux ratios de liquidité, ont été conçus et proposés pour garantir la suffisance d'actifs liquides en possession des établissements de crédit afin de parer aux crises de liquidité. Le ratio à court terme, nommé *liquidity coverage ratio* ou LCR impose aux établissements de crédit la détention d'un stock d'actifs assez liquides pour faire face et survivre à une crise de liquidité d'une durée de 30 jours, tandis que le ratio long terme, nommé *net stable funding ratio* ou NSFR, impose une valeur de financement stable disponible strictement supérieur au financement stable nécessaire sur un horizon d'un an. Bâle III propose la mise en place d'un ratio d'effet de levier, lequel impose que la valeur des fonds propres des établissements de crédit soit supérieur à la valeur du total bilan pondéré par un coefficient de proportionnalité actuellement fixé à 3 % afin de limiter leur endettement par rapport à leur capital. Enfin, l'accord incite les superviseurs à identifier les établissements d'importance systémique, c'est-à-dire ceux dont la taille, la part de marché, et les liens financiers avec les autres établissements sont tels que leurs éventuelles difficultés économiques mettraient en péril la santé d'un nombre conséquent d'autres établissements de crédits. Une fois identifiés, les établissements d'importance systémique mondiale devraient être soumis à des exigences plus élevées que les autres établissements de crédits en termes de niveau et de qualité de fonds propres ainsi que de niveau de liquidités.

La directive CRD4 publiée par l'Union Européenne le 26 juin 2013 transpose les recommandations de Bâle III au droit européen.

Les critiques adressées à Bâle III concernent les imprécisions de ses recommandations en termes d'éléments à intégrer dans les divers ratios proposés ainsi que le caractère apparemment arbitraire de certains des seuils de ratios proposés. Le ratio de levier a été critiqué pour inciter les établissements de crédit à entreprendre des opérations de titrisation pour diminuer le total de leur bilan. Surtout, l'augmentation des exigences de fonds propres des établissements de crédit devrait inévitablement déboucher sur une restriction du financement de l'économie et une élévation du coût du crédit.

2.3.5 : Quel impact pour notre méthodologie de détermination des taux et quotités du PVH ?

Le PVH est offert exclusivement par les établissements qui sont régulés par les recommandations de Bâle. Il génère des risques, en particulier de marché, qui devront selon ces accords être couverts par des fonds propres. Les taux et quotités influent également sur le niveau de risque auquel est exposé le prêteur du PVH.

Dans l'idéal, l'entreprise prêteuse devrait identifier et quantifier l'impact des paramètres taux et quotité des PVH qu'elle commercialise sur le montant des risques tels que définis par les accords de Bâle puisque ceux-ci influent sur le niveau de fonds propres qu'elle devra constituer afin d'en tenir compte au regard de ses disponibilités de fonds propres dans sa méthodologie de détermination des taux et quotités des PVH.

Cependant, étant donnée la taille très modeste du portefeuille de PVH commercialisés en France actuellement, et étant donné le faible montant des prêts type PVH ces impacts seront limités pour un établissement de crédit de taille moyenne dans le contexte actuel. En particulier dans une optique de tarification individuelle des PVH, et non

pas collective au niveau du portefeuille, ces impacts et donc les contraintes réglementaires découlant de Bâle pourront raisonnablement être et seront négligés.

CHAPITRE 3 : QUANTIFICATION DES METHODES ENVISAGEES

Dans ce troisième chapitre nous explicitons la fonction objectif, qui mesure la rentabilité du PVH précisée au Chapitre 1, nous sélectionnons une mesure de risque de non réalisation de l'objectif de rentabilité, nous quantifions les contraintes commerciales et légales recensées lors du Chapitre 2, et combinons tous ces éléments afin d'expliciter quatre méthodes possibles de détermination du taux et de la quotité du PVH qui allient respect des objectifs de l'entreprise en termes de rentabilité et de limitation du risque, recherche d'attractivité commerciale et respect de la loi et qui correspondent à quatre stratégies distinctes de pilotage du PVH selon les priorités de l'entreprise entre ces contraintes. Nous testerons ces quatre méthodes par la suite afin d'en recommander une tout particulièrement aux prêteurs de PVH.

SECTION 3.1 : QUANTIFICATION DE LA FONCTION OBJECTIF

Le but de cette section est d'intégrer l'objectif de rentabilité fixé par l'entreprise à notre méthodologie de détermination du taux et de la quotité d'un PVH.

La fonction objectif, comme son nom l'indique, définit l'objectif à atteindre pour l'entreprise prêteuse de PVH. Sa quantification est au cœur de notre méthodologie car c'est d'elle que va dépendre la pertinence des taux et quotités ainsi déterminés.

3.1.1 : La Valeur Actuelle Nette

On adopte le point de vue d'une entreprise qui s'est fixé un objectif de rentabilité complète, c'est-à-dire tenant compte de tous les coûts et produits générés par le contrat du PVH, y compris ceux qui ne correspondent ni à des versements de montants prêtés, ni à des remboursements, ni à des intérêts, prospective, sur toute la durée du prêt et individuelle c'est-à-dire prêt par prêt. Elle veut connaître la rentabilité à priori du contrat, donc la fonction objectif correspondra à une valeur actualisée.

Une fonction de type valeur actuelle nette (VAN) semble adaptée à la quantification d'une telle rentabilité.

En pratique, en cas de déblocages fractionnés, les quotités successives pourront être calculées comme le résultat d'un coefficient de proportionnalité appliquée à la quotité initiale. Les coefficients de proportionnalité en question pourront être adaptés aux besoins des clients et à la main des commerciaux ou fixés pour tous les prêts de manière centralisée au sein de l'entreprise.

On fait donc l'hypothèse suivante :

$$\exists \lambda_i \in \mathbb{R}_+^*, \forall i \in \llbracket 1; N_d \rrbracket \setminus q_i = q \times \lambda_i \text{ où } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \text{les } \lambda_i \text{ sont connus à priori } \forall i \in \llbracket 1; N_d \rrbracket \end{cases}$$

En adoptant les notations précisées dans la partie intitulée Notations à la suite de notre mémoire, la VAN des flux générés par un PVH à taux fixe s'exprime comme suit :

$$\widetilde{VAN}(\tau; q) = - \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{DF}_i) - \sum_{j=1}^{\widetilde{N}_f} (f_j \times \widetilde{DF}_j) + \sum_{k=1}^{\widetilde{N}_p} (p_k \times \widetilde{DF}_k) + [\min(\widetilde{V}_T, \widetilde{D}_T) \times \widetilde{DF}_T]$$

Avec:

$$\widetilde{D}_T = \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times (1 + \tau)^{\widetilde{T}-t_i})$$

Ici, les variables surmontées d'une vague sont celles dont on considère qu'elles sont aléatoires, donc incertaines au moment de la signature du contrat du PVH.

On a simplifié les notations en indexant les facteurs d'actualisation DF par l'indice qui prend comme valeur les numéros des flux d'une même série lorsqu'on range ces flux par ordre chronologique. En réalité les facteurs d'actualisation devraient être indexés par des dates.

On a donc ici : DF_i (j et k respectivement) le Discount Factor s'appliquant à la période allant du moment où l'on calcule la VAN, prise comme origine des temps, à la date d'échéance du $i^{\text{ème}}$ versement de déblocage (flux de coût et de produit respectivement).

Trois autres simplifications de notation ont été réalisées : premièrement nous n'avons retenu que le taux fixe et les quotités en tant que paramètres de la fonction, alors qu'en réalité les Discount Factors, le montant initial et à maturité du bien sous-jacent, les coefficients de proportionnalité, les montants des flux de produits et de coûts en sont également. Deuxièmement, nous avons annotés les coûts et produits unitaires comme s'ils étaient indépendants des autres paramètres de la fonction alors que dans les faits ils pourront être fonction de ces autres paramètres.

3.1.2 : Quantification du seuil de rentabilité exigé

A première vue, l'entreprise ne pourra pas fixer son objectif de seuil de rentabilité comme une constante exprimée comme un montant en €. En effet, ne connaissant pas à ce stade le taux de la dette et surtout la quotité qu'elle va accorder à ses emprunteurs, elle n'est pas en mesure d'exiger un tel seuil de rentabilité.

Il nous semble plus pertinent d'exprimer le critère de rentabilité comme une fonction proportionnelle au montant prêté, et donc comme une fonction du taux d'intérêt de la dette et des quotités.

Nous choisissons la forme d'une fonction proportionnelle car si nous choisissons une forme de critère permettant une rentabilité relativement plus élevée pour les prêts à petits montants, dans notre modèle l'entreprise aurait tout intérêt à n'accorder que des prêts de faible montant. Inversement, si nous choisissons une forme de critère permettant une rentabilité relativement plus élevée pour les prêts de montants élevés, dans notre modèle l'entreprise aurait tout intérêt à n'accorder que des prêts de montant élevé, modulo son aversion au risque.

Comme le coût du risque et l'aversion au risque du prêteur seront pris en compte lors de l'intégration de la mesure du risque à notre modèle, nous choisissons une forme quantitative de seuil de rentabilité SR proportionnelle au montant prêté, qui n'induera pas de discrimination vis-à-vis du montant du prêt. Cette discrimination se fera via l'introduction de la mesure de risque, puisqu'une quotité plus élevée augmente la probabilité de réalisation du risque de dépassement.

Le critère de rentabilité CR retenu pour ce mémoire s'exprimera donc de la façon suivante :

$$\widetilde{CR}(q) = (1 + SR) \times \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{DF}_i), \text{ où } SR \text{ est une constante à priori positive fixée par le prêteur.}$$

Cette quantification du critère de rentabilité signifie également que le rapport entre produits et frais annexes est susceptible de générer une rentabilité supplémentaire ou un manque à gagner de rentabilité.

3.1.3 : Quantification de l'objectif de rentabilité et de la fonction objectif

L'objectif de rentabilité peut être quantifié, en intégrant la fonction VAN et la fonction CR comme suit :

$$\widetilde{VAN}(\tau; q) \geq \widetilde{CR}(q) \Leftrightarrow \widetilde{O}(\tau; q) \geq SR$$

Où O est la fonction objectif définie comme suit :

$$\tilde{O}(\tau; q) = \frac{\widehat{VAN}(\tau; q)}{\sum_{i=1}^{\tilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widehat{DF}_i)}$$

SECTION 3.2 : CHOIX DE LA MESURE DE RISQUE

Le but de cette section est d'intégrer l'objectif de limitation du risque à notre méthodologie de détermination du taux et de la quotité d'un PVH.

Un agent placé devant la décision de la valeur des paramètres de son produit, à l'image de l'entreprise prêteuse de PVH cherchant à déterminer les taux et quotités de ses prêts, souhaite pouvoir disposer d'un critère pouvant le guider dans sa décision. Dans cette optique, il peut chercher à réduire l'information associée au risque qu'engendrera son choix sous forme d'une valeur réelle, appelée mesure de risque. Il pourra spécifier la valeur de la mesure de risque qu'il est prêt à accepter, en fonction de sa propre aversion ou appétence au risque et en déduire les paramètres du produit qui permettent à la mesure du risque de prendre des valeurs tout au plus ou tout au moins égales au seuil de son choix.

3.2.1 : Mesure de risque : définition et propriétés

Une mesure de risque est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Dans l'idéal, une mesure de risque R devrait présenter les propriétés suivantes :

(P1) *Invariance en loi*: $X \stackrel{Loi}{=} Y \Rightarrow R(X) = R(Y)$

(P2) *Croissance*: $X \geq Y \Rightarrow R(X) \geq R(Y)$

(P3) *Invariance par translation*: $R(X + k) = R(X) + k, \forall k \in \mathbb{R}$

(P4) *Homogénéité positive* : $R(kX) = kR(X), \forall k \in \mathbb{R}_+$

(P5) *Sous additivité*: $R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$

(P6) *Convexité*: $R(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta R(X) + (1 - \beta)R(Y), \forall \beta \in [0; 1]$

Pour faciliter l'interprétation de ces propriétés on peut considérer que X et Y sont des montants de perte en valeur absolue.

(P1) stipule qu'une bonne mesure de risque doit renvoyer la même valeur pour deux variables prenant les mêmes valeurs avec les mêmes probabilités. Avec (P2) on comprend qu'une bonne mesure de risque est telle que le risque mesuré pour une variable prenant systématiquement des valeurs plus élevées qu'une seconde variable est supérieur au risque mesuré pour cette seconde variable. Avec (P3) et (P4), on comprend qu'une bonne mesure de risque ne déforme pas les éléments certains, elle est neutre par rapport à eux et se comporte donc comme la fonction identité sur l'ensemble des réels. (P5) stipule que le risque de deux variables aléatoires, prises ensemble est inférieur ou égal à la somme des risques que ces variables génèrent individuellement. (P5) et (P6) peuvent donc s'interpréter comme des mises en évidence mathématiques du phénomène de diversification des risques.

3.2.2 : Choix d'une mesure de risque

On se place du point de vue d'une entreprise qui s'est fixé un objectif de rentabilité pour un contrat de PVH individuel particulier et cherche à déterminer le taux et la quotité qui lui permettront d'atteindre cet objectif. Or, le PVH est soumis à de nombreux aléas qui influent sur les dates d'échéance des flux qu'il génère ainsi que sur leur montant, et font de la rentabilité individuelle d'un contrat de PVH une valeur incertaine à priori, une variable aléatoire. L'entreprise prêteuse est donc amenée à se demander quel niveau de risque de non réalisation de sa rentabilité objectif elle est prête à accepter.

Ce besoin nous amène à nous intéresser à la *Value at Risk* qui permet précisément de mesurer ce type de risque. Cette mesure de risque a fortement été mise en valeur par les Comités de Bâle, qui l'ont désignée comme un outil privilégié de gestion du risque, une mesure de risque particulièrement bien adaptée à l'appréciation des risques de marché, dont le risque de taux d'intérêt et celui de variations de prix d'actifs tels que les prix immobiliers.

3.2.3 : Value at risk : définition et propriétés

La *Value at Risk* ou VaR est une mesure de risque correspondant à un quantile. Elle constitue un indicateur sur la queue de distribution de la variable qui porte le risque, donc une mesure de risque extrême.

On considère une variable aléatoire réelle X dont on veut mesurer le risque et une constante réelle $\alpha \in [0; 1]$. Le quantile de niveau α , également appelé α -quantile de X est le réel q tel que :

$$P(X < q) \leq \alpha \leq P(X \leq q)$$

La VaR au niveau de confiance $\alpha \in [0; 1]$ de la variable aléatoire X correspond au α – quantile de X , autrement dit :

$$\begin{aligned} VaR_{\alpha}(X) &= \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) \\ \Rightarrow VaR_{\alpha}(X) &= F_X^{-1}(\alpha) \text{ lorsque } F_X \text{ est continue au point } \alpha \end{aligned}$$

La *Value at Risk* respecte les propriétés d'invariance en Loi, de croissance, d'invariance par translation et d'homogénéité positive. Cependant, elle ne respecte pas nécessairement les propriétés de convexité et de sous-additivité. Puisque nous avons choisi une approche de rentabilité individuelle du PVH, le non-respect de ces propriétés, utiles pour intégrer les effets de diversification du risque lorsqu'on considère un portefeuille dans sa totalité, n'est pas pénalisant.

3.2.4 : Intégration de la VaR à notre méthodologie :

Certains des paramètres de la fonction objectif O vont être modélisés et considérés comme aléatoires. O , en tant que fonction de variables aléatoires est elle-même une variable aléatoire.

En intégrant la mesure de risque retenue, et en notant $PNR \in [0; 1]$ la probabilité maximum de non réalisation de l'objectif de rentabilité que l'entreprise est prête à accepter, la contrainte de limitation du risque sur laquelle repose notre méthodologie s'exprime ainsi :

$$P(\tilde{O}(\tau; q) \leq SR) \leq PNR \Leftrightarrow VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR$$

Plus PNR sera faible, plus la quotité sera faible et les taux de la dette élevés. Donc plus PNR sera faible, plus le risque sera couvert en termes de probabilité de réalisation et moins le produit sera commercialement attractif. En outre, plus le seuil de rentabilité est élevé, plus l'entreprise devra en contrepartie accepter un niveau élevé pour PNR .

Cas particulier :

Si le prêteur fixe $SR=0$, on se trouvera dans le cas d'une tarification dont le but est de ne pas effectuer de perte au niveau de probabilité qu'il choisit.

SECTION 3.3 : CONTRAINTES PORTANT SUR LE TAUX ET LA QUOTITE

Le but de cette section est d'intégrer les contraintes commerciales et juridiques explicitées lors du deuxième chapitre à notre méthodologie de détermination du taux et de la quotité d'un PVH.

Du point de vue juridique, le TEG du prêt qui est fonction à la fois du taux et de la quotité doit être inférieur au seuil de l'usure qui est fonction de la quotité.

En pratique, du point de vue commercial, l'entreprise peut souhaiter proposer un taux arrondi à ses clients à un certain multiple et inférieur à un taux qu'elle considérera comme maximal. Elle peut aussi souhaiter proposer des taux supérieurs à un taux minimal, pour des raisons de rentabilité ou de non cannibalisation de ses autres produits. Les taux minimal et maximal pourront être déterminés par l'entreprise en fonction de la concurrence, de la demande et de son élasticité-prix, de l'appétit de l'entreprise pour la rentabilité et de son aversion ou appétence pour le risque, puisque la probabilité de réalisation du risque de dépassement augmente avec le taux de la dette. Enfin pour une quotité q donnée, on suppose que l'entreprise souhaite minimiser le taux qu'elle propose, dans un souci d'attractivité commerciale, à l'intérieur de la fourchette dont le seuil est le taux minimum qu'elle a fixé et le plafond est le taux maximum qu'elle a fixé. Cependant, si l'on opte pour une détermination conjointe du taux et de la quotité, cette dernière contrainte ne pourra être prise en compte.

De même on peut supposer que l'entreprise se fixe des contraintes en termes d'arrondi des quotités à un certain multiple et en termes de fourchette de valeurs de quotités acceptables. Une quotité minimum et une quotité maximum seront déterminées par l'entreprise en fonction de la concurrence, des caractéristiques de la demande, de l'appétit de l'entreprise pour la rentabilité et de son aversion pour le risque, puisque la probabilité de réalisation du risque de dépassement croît, toutes choses égales par ailleurs, avec les quotités. Enfin pour un taux τ donné, on suppose que l'entreprise souhaite maximiser la quotité qu'elle propose, dans un souci d'attractivité commerciale, à l'intérieur de la fourchette évoquée précédemment. Cependant, si l'on opte pour une détermination conjointe du taux et de la quotité, cette dernière contrainte ne pourra être prise en compte.

Dans le cas d'une résolution conjointe, on peut supposer que l'entreprise cherche le couple qui minimise la probabilité de non réalisation de l'objectif de rentabilité ou qui maximise l'espérance de rentabilité sous la contrainte que la probabilité de non réalisation du seuil de rentabilité est inférieure à la probabilité de non réalisation maximale acceptée par l'entreprise.

L'ensemble de contraintes (C) suivant est intégré à notre méthodologie de détermination des taux et quotités que la détermination soit conjointe ou non :

$$(C) : \begin{cases} TEG(\tau, q) \leq \tau_{usure}(q) \\ \tau \bmod \Delta_\tau = 0 \\ \tau \in [\tau_{min}; \tau_{max}], \text{ où } \tau_{min} > 0 \\ q \bmod \Delta_q = 0 \\ q \in [q_{min}; q_{max}], \text{ où } q_{min} > 0 \end{cases}$$

Où Δ_τ et Δ_q sont les pas d'arrondi des taux et quotités respectivement. τ_{usure} est le taux de la dette annuel équivalent au taux d'usure applicable au PVH. $\Delta_\tau, \Delta_q, \tau_{min}, \tau_{max}, q_{min}$ et q_{max} sont fixés par l'entreprise. TEG représente le taux effectif global du prêt, dont la valeur dépend des paramètres quotité et taux.

Dans le cas d'une détermination conjointe de τ et q , on peut envisager deux problèmes d'optimisation correspondant à deux méthodologies distinctes:

$$(M_{conj1}) : \min_{(\tau, q) \in \mathbb{R}_+^2} P(\tilde{O}(\tau; q) \leq SR) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

$$(M_{conj2}) : \max_{(\tau, q) \in \mathbb{R}_+^2} E(\tilde{O}(\tau; q)) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

Dans le cas d'une détermination individuelle de τ où l'on considère q donné, on optera pour la méthodologie suivante :

$$(M_{\tau/q}) : \min \tau \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

Dans le cas d'une détermination individuelle de q où l'on considère τ donné, on optera pour la méthodologie suivante :

$$(M_{q/\tau}): \max q \text{ sous les contraintes } \left\{ \begin{array}{l} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{\theta}(\tau; q)) \geq SR \end{array} \right.$$

Selon les caractéristiques du groupe emprunteur, le montant du bien sous-jacent, la modalité de mise à disposition des fonds demandée, la valeur des coefficients de proportionnalité, la valeur des taux d'intérêts, la situation du marché immobilier, les valeurs de contraintes fixées par l'entreprise, le seuil de rentabilité, la valeur maximale de probabilité de non réalisation et la méthodologie choisie, le problème d'optimisation sous contraintes n'aura pas nécessairement de solution. Le cas échéant, l'entreprise pourra revoir ses objectifs, les valeurs des contraintes, la méthodologie de détermination ou décider de ne pas accorder le prêt demandé.

SECTION 3.4 : HYPOTHESES SOUS-JACENTES A NOTRE MODELE

Les fonctions sur lesquelles reposent nos méthodologies, telles que nous les avons formulées, s'appuient déjà sur des hypothèses sous-jacentes qu'il convient d'explicitier.

Premièrement, nous postulons des montants de frais et de produits annexes indépendants des autres paramètres de nos fonctions, notamment du taux de la dette, des quotités et du nombre de déblocages, du nombre de versement de frais et du nombre de versements de produits. En effet, la valeur des flux et des coûts associés au PVH dépend de la structure des coûts et des contrats annexes souscrits par l'entreprise particulière qui cherche à déterminer le taux et la quotité des PVH qu'elle commercialise. Puisque nous tentons de définir une méthodologie générale, nous considérons le montant de ces flux comme des constantes connues à priori en amont du contrat et non pas comme des fonctions des autres paramètres. En pratique, il est possible que ces montants dépendent des autres paramètres de nos fonctions. Cela implique qu'une entreprise devra déterminer et peut-être modéliser les coûts et produits en amont pour pouvoir appliquer les méthodologies développées dans ce mémoire.

En particulier, nous adoptons une approche de la rentabilité du PVH avant impôts. Nos méthodologies n'intègrent pas explicitement les coûts comptables et les taxes générées par le PVH, lesquelles dépendent du montant cumulé de la dette année après année et donc notamment des taux et quotités.

Deuxièmement, nous postulons une indépendance du nombre de flux de déblocages, du nombre de versements de frais, du nombre de versements de produits et de la maturité du prêt des autres paramètres de nos fonctions, notamment des facteurs d'actualisation donc des taux d'intérêts, et de la valeur du sous-jacent. Ceci sous-tend déjà que nous postulons que la date de maturité du prêt correspond à une date de décès de l'emprunteur ou du décès du dernier des emprunteurs et non pas à une date de remboursement anticipé du PVH. En effet, les causes majeures envisageables de remboursement anticipé dans le cas d'un PVH sont une baisse des taux ou une augmentation significative des prix immobiliers, comme nous le développerons plus en détail par la suite.

Troisièmement, nous avons distingué deux types de paramètres dans nos fonctions : des paramètres aléatoires, c'est-à-dire dont la valeur est incertaine au moment de la signature du contrat et des paramètres considérés comme certains, c'est-à-dire certains au moment de la signature du contrat. Les premiers comprennent les taux d'intérêts, donc les facteurs d'actualisation et la valeur de la dette à maturité, la date de maturité du prêt donc le nombre de déblocages, de flux de produits et de coûts ainsi que la valeur du bien immobilier sous-jacent au terme du contrat. Les deuxièmes comprennent la valeur du sous-jacent au début du contrat, la quotité initiale et les facteurs proportionnels de déblocages permettant de calculer les quotités suivantes, les montants unitaires des frais et des produits associés. Nous supposons que la périodicité des versements des déblocages, produits et frais ainsi que les dates de premier versements, les taux, et quotités successives sont négociées au contrat. Les montants unitaires de frais et produits sont estimés par l'entreprise prêteuse en amont du contrat. Les paramètres aléatoires devront être modélisés.

SOURCES D'ALEA DE RENTABILITE

Dans ce mémoire, nous entendons par la notion de risque tout évènement possible aléatoire, futur, en dehors de la volonté des parties au contrat et préjudiciable à celui sur lequel ou à ce sur quoi pèse le risque. Dans cette troisième partie, nous recensons et décrivons les risques que l'octroi d'un PVH engendre pour le prêteur qui souhaite s'assurer la réalisation d'une certaine rentabilité. Plus largement, nous nous intéressons à tous les évènements possibles qui concourent à rendre l'échéancier du PVH incertain et à faire de sa rentabilité une variable aléatoire et non une valeur sûre. Tous à leur manière, ces risques et évènements possibles menacent la réalisation de la rentabilité souhaitée par le prêteur.

L'entreprise qui souhaite réaliser un objectif de rentabilité des PVH qu'elle commercialise tout en limitant la probabilité de non réalisation de cet objectif devra donc tenir compte de ces risques et sources d'aléa et tenter de les modéliser de la façon la plus réaliste possible afin de pouvoir choisir en conséquence un paramétrage du PVH qui devrait lui permettre de leur faire face de façon à s'assurer la réalisation de sa rentabilité souhaitée avec un niveau de probabilité minimum.

Après avoir décrit tous les risques et sources d'aléas de rentabilité possibles dans le cas d'un PVH à taux fixe, nous sélectionnons et justifions ceux que nous modéliserons ou ceux pour lesquels nous ferons l'hypothèse qu'ils ne se réaliseront pas lors de notre travail de modélisation et de simulation d'échéanciers du PVH dans les quatrième et cinquième parties de ce mémoire.

CHAPITRE 1 : RISQUES HERITES DE LA STRUCTURE DES PRETS HYPOTHECAIRES

Nous présentons dans ce premier chapitre les risques que le PVH a hérités spécifiquement de la structure des prêts hypothécaires, à savoir les risques en cas de litige notamment en cas de cession forcée ou d'expulsion du bien hypothéqué et les risques liés au recouvrement au terme du prêt.

SECTION 1.1 : RISQUES LIES AU RECOUVREMENT A TERME

Dans le cas d'un dénouement du PVH causé par le décès du dernier des souscripteur(s), il existe à priori toujours un délai de recouvrement. Il est facile d'imaginer en effet que les héritiers ne soient pas en mesure d'effectuer le remboursement du prêt dans les 24 heures suivant le décès de leur testateur.

Plusieurs évènements et cas de figure peuvent contribuer à une augmentation du délai de remboursement et diminuer la probabilité d'un remboursement total égal au minimum de la valeur de la dette et de la valeur du sous-jacent au terme du prêt.

Parmi, ceux-ci, les cas suivants peuvent être envisagés : premièrement, les héritiers peuvent contester la valeur d'expertise attribuée au bien immobilier au terme du prêt, dans le cas où ils souhaiteraient conserver ce bien et rembourser le prêt avec leurs propres liquidités. Des modifications de composition familiales et notamment des divorces au sein d'un foyer souscripteur du PVH peuvent compliquer le dénouement du prêt. Le dénouement du prêt peut impliquer l'expulsion d'une ou plusieurs personnes du bien sous-jacent, notamment des propriétaires si l'évènement déclencheur du terme du prêt est un manque d'entretien qui dégrade la valeur du bien, ou un locataire du bien non mentionné au contrat du PVH, lors de la disparition du groupe emprunteur. Enfin, des conflits de créances peuvent allonger le délai de recouvrement du prêt ou engendrer un remboursement partiel. Notamment, les souscripteurs du PVH pourraient posséder des dettes d'ordre supérieur à l'hypothèque. Ils

pourraient également avoir souscrit un prêt de second rang, par exemple un prêt garanti par une caution mutuelle. En cas de non-remboursement de celui-ci, le créancier pourrait se retourner vers les souscripteurs pour obtenir la vente du bien. Puisque la créance est de second rang, le créancier n'aurait recours à cette option que si la valeur du bien est supérieure à la somme due au nom du PVH et de sa créance. La garantie offerte par le contrat de PVH d'occupation du lieu par le souscripteur aussi longtemps que désiré ne sera pas nécessairement effective.

Dans le cas d'un remboursement tardif, l'impact sur la rentabilité dépend d'une part du taux d'intérêt de pénalité applicable à la période de retard de paiement que les souscripteurs devront payer et d'autre part des taux auxquels les sommes remboursées auraient pu être réinvesties durant le délai de recouvrement. Si les premiers sont inférieurs aux seconds, la rentabilité diminuera du fait du délai de recouvrement, et inversement. Dans le cas d'un défaut partiel ou total, la réalisation du risque conduit nécessairement à une diminution de la rentabilité.

Le risque de défaut peut être mitigé lors de la sélection des souscripteurs du PVH auxquels on accepte d'octroyer un prêt, notamment en basant cette sélection sur les réponses qu'ils apportent à un questionnaire, lequel devrait permettre de déceler les cas de figures cités précédemment. Le risque de remboursement tardif est plus difficile à mitiger ou contrôler lorsqu'il est dû à une indisponibilité des héritiers ou à des délais administratifs- notamment le délai de vente du bien immobilier sous-jacent- néanmoins informer les héritiers que le délai de recouvrement est porteur d'un intérêt supplémentaire pourrait s'avérer dissuasif.

Lors de nos modélisations nous intégrerons la possibilité d'un délai de recouvrement, qu'en pratique l'entreprise offreuse devra estimer en amont de la détermination du taux et de la quotité. Cette estimation pourra se faire à partir de statistiques sur les données passées dont dispose l'entreprise de délai de recouvrement pour le PVH ou pour des produits qu'elle estime être de bons proxy, ou à défaut de l'existence de telles données ou d'une instabilité de ce phénomène dans le temps, pourra correspondre à une hypothèse prudente de son choix.

Cependant, nous excluons la possibilité d'un défaut partiel ou total lors de nos modélisations, comme nous l'argumenterons par la suite au sein de cette partie. Nous faisons l'hypothèse que tout se passe selon les termes indiqués dans le contrat du PVH, et donc que le minimum entre la valeur de la dette et la valeur du bien sous-jacent est effectivement remboursé à terme. L'entreprise qui le souhaite peut cependant estimer par des méthodes statistiques sur les données dont elle dispose ou formuler une hypothèse prudente sur le taux de défaut, à la fois en % de cas observés et en % du montant à rembourser lorsque le défaut se réalise, afin de les intégrer à ses modélisations et à sa méthode de détermination des taux et quotités.

SECTION 1.2 : RISQUE EN CAS DE LITIGE

Un litige peut affecter la rentabilité des PVH de deux façons : premièrement, s'il entraîne un dénouement juridique, la rentabilité individuelle du PVH sur lequel porte le conflit sera diminuée du fait de l'augmentation des coûts annexes, qui pourront inclure des frais et honoraires d'huissier, des frais d'expertise, des frais d'enregistrement et une contribution forfaitaire pour l'aide juridique ainsi que des frais d'avocat. Deuxièmement, des litiges peuvent entacher la réputation de l'entreprise et réduire l'attractivité commerciale du PVH, voire de l'ensemble des produits de l'entreprise. Or une diminution des volumes mis en force amoindrit les possibilités de diversification et mutualisation des risques, ce qui menace la rentabilité du portefeuille des PVH et peut-être plus largement celle du portefeuille de l'ensemble des produits proposés par l'entreprise. Du fait de notre approche individuelle ou contrat par contrat de la rentabilité du PVH, notre modèle n'intégrera pas cet effet de contamination.

Dans les pays où le PVH est commercialisé, les motifs de litige suivants ont été observés : litige avec le souscripteur, ses proches ou des associations dans le cas d'un PVH mis à terme par le sous-entretien du logement par le ou les propriétaire(s) âgé(s) qui entraîne une saisie du bien par le prêteur alors que le ou les emprunteur(s) occupent toujours les lieux ; expulsion d'un locataire du bien sous-jacent non mentionné dans le contrat du PVH lors de la disparition du groupe emprunteur ; conflit avec les héritiers qui n'ont potentiellement pas connaissance de l'existence du contrat du PVH avant le décès de leur proche.

Le PVH est un produit d'autant plus susceptible à générer des litiges que son remboursement n'est pas effectué par ses souscripteurs mais par leurs héritiers qui peuvent vivre mal la saisie et la vente de la propriété de leur(s) défunt(s). Afin de réduire ce risque, il est conseillé d'associer les héritiers des souscripteurs à la décision de souscription et si possible, au processus d'information préalable à la souscription du contrat.

Ce risque peut être mitigé en offrant aux clients des conditions commerciales attractives qui assurent leur satisfaction, ainsi que par un processus de partage d'information entre l'entreprise offreuse et les souscripteurs concernant le terme du produit, dans lequel les héritiers devraient être inclus.

Lors de nos modélisations nous considérerons que ce risque ne se réalisera pas, avec comme hypothèse une compréhension, une acceptation et un respect des conditions du contrat par les deux parties ainsi que par les héritiers des souscripteurs. De même les effets de contamination au niveau du portefeuille de produits de l'entreprise pour cause de mauvaise publicité en cas de litige avec un client ne concernent pas notre approche de rentabilité individuelle. L'entreprise offreuse qui souhaite quand même l'inclure à ses modélisations peut estimer les coûts individuels pour chaque PVH dus à la réalisation ce risque via des statistiques calculées sur des portefeuilles de PVH ou produits proxy qu'elle détient ou non en France ou dans des pays étrangers ou simplement formuler une hypothèse qui lui semble prudente.

CHAPITRE 2 : RISQUES HERITES DE LA STRUCTURE DES CONTRATS D'ASSURANCE VIE

Nous présentons dans ce chapitre les risques qui émanent de la nature aléatoire des maturités des flux du PVH soit de la structure des contrats d'assurance vie : le risque de longévité, le risque de taux et le risque d'anti-sélection.

SECTION 2.1 : RISQUE DE LONGEVITE

Le risque de longévité se réalise lorsque la durée de survie du groupe emprunteur est plus importante que prévue, en d'autres termes, en cas de sous-mortalité des emprunteurs.

Une sous-mortalité menace la rentabilité de l'emprunteur de plusieurs façons. Premièrement, si l'emprunteur opte pour une mise à disposition de fonds sous forme de déblocages fractionnés ou d'une annuité, le nombre de déblocages versés par le prêteur est une fonction croissante de la durée de survie du prêteur. Deuxièmement, elle tend à augmenter la valeur de la dette au terme du prêt: d'une part, dans le cas évoqué précédemment, la valeur de la dette croît avec la longévité du groupe emprunteur puisqu'elle est proportionnelle aux montants prêtés, d'autre part, elle tend à augmenter avec la maturité du prêt puisque la dette cumulée augmente au cours du temps. Or, un facteur qui agit sur le montant final de la dette en l'augmentant accroît également la probabilité que la garantie de plafonnement sera exercée, ce qui génèrera une perte pour le prêteur. Troisièmement, elle peut avoir un impact sur la rentabilité des coûts et produits annexes, selon les cas. Par exemple, si chaque versement s'accompagne de frais pour le prêteur, le montant des coûts sera fonction croissante de la longévité. De même, si l'entreprise souscrit une assurance pour se protéger contre la longévité des emprunteurs, les produits pourront augmenter avec la longévité. L'impact sur la composante rentabilité des produits et coûts annexes n'est donc pas tranché à priori, elle dépend de la structure de coûts spécifique à l'entreprise et des contrats qu'elle a souscrits au nom du contrat de PVH initial, ainsi que de l'augmentation des montants prêtés qui interviennent au dénominateur. Enfin, une sous mortalité augmente la probabilité que le contrat de refinancement du prêteur échoira au cours de la vie du PVH, ce qui impliquerait un refinancement non optimal et pourrait entraîner des coûts de refinancement élevés selon le niveau des taux du marché au terme du premier contrat de refinancement.

A priori, ce risque est diversifiable du point de vue du prêteur puisqu'inversement, rien n'interdit une surmortalité des emprunteurs. La difficulté réside dans l'anticipation de la mortalité moyenne des emprunteurs du PVH qui tient compte de leur profil particulier, d'autant plus que les prêteurs de PVH n'ont pas l'expérience dans les produits de type viagers qu'ont les assureurs et que les données concernant la mortalité de ces emprunteurs est très réduite du fait du caractère récent du PVH et du faible nombre de prêts de ce type qui ont été souscrits. De plus, le faible taux de souscription de PVH actuellement en France limite les possibilités de mutualiser efficacement ce risque du fait de la taille réduite des portefeuilles de PVH.

Nous intégrerons ce risque à nos modélisations en modélisant la durée de chaque contrat du PVH, ce qui implique la modélisation de la durée de survie des groupes souscripteurs à partir de la date de prise d'effet du contrat. En effet, pour simuler des échéanciers de PVH, nous devons simuler des valeurs de flux final du PVH, donc modéliser la durée de capitalisation de la dette, ainsi que déterminer le nombre de déblocages et coûts versés ainsi que de produits annexes perçus, qui dépendent également de la durée du PVH.

SECTION 2.2 : RISQUE DE TAUX

Lorsqu'un établissement financier ou de crédit émet un PVH, il doit en contrepartie se refinancer, c'est-à-dire lui-même souscrire emprunter à la hauteur des montants prêtés. Dans l'idéal, il souhaite que son contrat de refinancement ait la même duration que le PVH qu'il a émis, soit que la durée de vie moyenne de ses flux de refinancement pondérés par leur valeur soit égale à celle des flux du PVH. Cependant dans le cas d'un PVH pour lequel la date de maturité du prêt est incertaine, la duration à répliquer n'est pas connue d'avance. Le prêteur ne peut pas opter pour un instrument de refinancement dont les maturités des flux coïncident avec les maturités des flux du PVH, puisqu'au moins une partie des maturités des flux du PVH sont inconnues a priori, notamment la date de disparition du groupe emprunteur. Cette particularité du PVH rend son prêteur particulièrement sensible au risque de taux, c'est-à-dire à une possibilité de réalisation d'un manque à gagner ou de pertes en cas de fluctuation des taux, même dans le cas d'un PVH à taux fixe. Pour un prêt type PVH, le risque se réalise pour le prêteur lorsque les taux d'intérêt augmentent sur le marché au cours de la vie du PVH.

Pour l'illustrer, nous prenons l'exemple d'un prêteur qui émet un PVH à déblocage unique de taux fixe τ qui n'engendre pour lui aucun coût ou produit associé au cours de sa vie et qui arrivera à terme après une durée T , inconnue a priori de ce prêteur. Nous posons l'hypothèse que le prêteur se refinance par un prêt in fine de taux fixe τ' , avec τ' inférieur à τ , du montant de la valeur du PVH accordé pour une durée T' .

Si T s'avère être supérieure à T' , alors le prêteur devra rembourser son prêt in fine avant de percevoir le remboursement du PVH. Pour cela il devra réemprunter au bout de la durée T' un montant égal au remboursement dû au titre de son contrat de prêt de refinancement in fine. Alors, si les taux ont augmenté depuis l'émission de son PVH, tel qu'il doit souscrire à un second contrat de refinancement au taux τ'' supérieur à τ , la rentabilité de son émission de PVH sera inférieure à celle qu'il aurait pu espérer en se refinançant au taux τ' pendant la durée T .

Le prêteur peut décider de ne pas supporter ce risque en se refinançant avec des instruments financiers à taux fixe inférieur au taux du PVH dont la maturité T' est très élevée, de sorte que l'intégralité des flux du PVH seront de façon quasi-certaine perçus ou versés avant que l'instrument de refinancement ne doive être remboursé par le prêteur. Il n'aura pas dans ce cas à se refinancer au cours de la vie du PVH, pourra réinvestir les montants qui lui auront été remboursés aux taux élevés du marché sur le reste de la durée de son contrat de refinancement et ne pâtira pas de la hausse des taux d'intérêt. Cependant, puisque le taux d'intérêt accordé pour un refinancement a tendance à augmenter avec la maturité de l'instrument de refinancement, la rentabilité du prêteur ne sera pas optimale en souscrivant à un contrat de refinancement de durée très supérieure à celle du contrat de PVH.

Si, contrairement aux premiers cas présentés ci-dessus, le prêteur décide de refinancer son prêt à taux variable ou révisable, comme c'est le cas pour la plupart des établissements financiers et de crédit, le manque à gagner se réalisera quelle que soit la durée effective du contrat de PVH et quelle que soit celle du contrat de refinancement en cas d'augmentation des taux d'intérêt du marché au cours de la vie du PVH. Dans ce cas, le prêteur devra alors rémunérer à un taux variable en augmentation son passif tandis que son actif sera rémunéré à un taux fixe.

Il faut noter que pour un PVH à taux variable, même si le taux de la dette augmente en même temps que le coût du refinancement, les intérêts de la dette ne seront pas nécessairement touchés du fait du plafonnement de la dette à la valeur du bien à la date de disparition du groupe emprunteur. L'augmentation de l'actif ne sera donc pas symétrique à l'augmentation du passif du fait de ce plafonnement, ce qui pourra engendrer une baisse de rentabilité pour le prêteur. Pour ce type de PVH, le risque de taux est donc supporté par l'emprunteur avant le dépassement du montant du bien par celui de la dette et par le prêteur après celui-ci.

Ce risque n'est pas diversifiable dans le cas d'un portefeuille de PVH à taux fixe, puisqu'une augmentation des taux d'intérêts diminue la valeur de tous les produits à taux fixes.

Notre fonction objectif, qui est un rapport de valeurs actuelles, nécessite de calculer des courbes de taux probables au moment du calcul de la rentabilité du PVH après avoir simulé ses flux futurs afin de les actualiser. La valeur des taux d'actualisation qui s'appliqueront à l'entreprise entre le jour de calcul et la maturité du flux ne sont pas connus avec certitude car ils dépendent de l'évolution future de la valeur des taux et car ces taux ne peuvent être sécurisés par des contrats, les maturités des flux générés par le PVH étant incertaines. Il faut donc simuler des taux d'intérêt futurs afin de recréer différentes courbes de taux applicables au jour du calcul afin de pouvoir calculer la valeur actuelle des flux et la valeur de notre fonction objectif. Nous retenons donc le risque de taux et l'intégrerons à notre approche en simulant des valeurs de taux d'intérêt futurs.

SECTION 2.3 : RISQUE D'ANTI-SELECTION

L'anti-sélection ou sélection aversive est un phénomène par lequel l'offre élaborée par un offreur attire par construction des demandeurs indésirables de son point de vue. Ce phénomène est lié au problème d'asymétrie d'information : le demandeur possède plus d'informations que l'offreur sur sa désirabilité, les emprunteurs ont une meilleure connaissance de leur risque que le prêteur. Seuls les emprunteurs qui perçoivent le PVH comme une affaire qui leur est rentable souscriront à ce type de prêt.

La réalisation de ce risque affecte la rentabilité du PVH en augmentant la probabilité de réalisation du risque associé.

Par exemple, une anti-sélection sur le plan de la longévité correspondrait à octroyer un PVH à un individu qui serait dans un meilleur état de santé qu'attendu ou qu'une population de référence et pour lequel une sous mortalité est plus probable. Une sous mortalité des souscripteurs est indésirable du point de vue de l'emprunteur pour un PVH car la probabilité de réalisation du risque de dépassement croît avec la durée du contrat de PVH soit avec la durée de survie du groupe emprunteur à partir de la souscription. En effet, la dette du PVH croît avec le temps, et avec elle la probabilité que le montant de la dette dépasse celle du bien sous-jacent au cours de la vie du contrat de PVH, ce qui serait défavorable au prêteur qui ne peut toucher à terme que la valeur minimum entre celle de la dette et celle du bien sous-jacent. Or, plusieurs éléments laissent à penser que ce risque puisse se réaliser dans le cas du PVH puisque les propriétaires d'un bien immobilier de valeur, informés sur les produits financiers de façon à prendre connaissance de l'existence du PVH sont statistiquement plus susceptibles d'appartenir à des classes sociales moyennes ou hautes, lesquelles vivent en moyenne plus longtemps que l'ensemble de la population française. De plus, on peut concevoir qu'un individu sera plus facilement séduit par un PVH à déblocages fractionnés ou de type annuité s'il pense rester en vie pendant longtemps afin d'avoir le temps de recevoir et d'utiliser les montants prêtés que s'il pense mourir sous peu. Cependant la question n'est pas tranchée puisque l'un des motifs les plus souvent évoqués pour la souscription d'un PVH est le besoin de liquidités pour financer des soins médicaux lourds. Le PVH est donc également susceptible d'être souscrit par des individus en mauvaise santé. Par ailleurs, la question de la rétroaction de l'octroi ce prêt sur l'espérance de vie convient d'être posée. Il est en effet possible que le PVH, en contribuant à l'amélioration du niveau de vie ou en étant investi dans des frais de santé de ses souscripteurs, contribue à allonger leur espérance de vie.

On pourrait également concevoir une anti-sélection immobilière, telle que des individus qui possèdent des informations sur leur logement laissant à penser que la valeur de celui-ci va se dégrader puissent vouloir souscrire un PVH afin de convertir leur logement en liquidités tant que sa valeur reste décemment élevée. On pourrait

qualifier d'anti-sélection l'octroi de PVH à des individus ayant propension à dégrader la valeur de leur bien immobilier par leurs actions ou leur manque d'entretien. Une anti-sélection immobilière telle que définie précédemment est indésirable du point de vue de l'emprunteur pour un PVH car plus le prix du bien sous-jacent a tendance à diminuer au cours de la vie et plus la valeur minimum entre celle de la dette et celle du bien sous-jacent à terme tend à diminuer. Or le prêteur ne peut recevoir à terme que le minimum entre la valeur de la dette et celle du bien sous-jacent.

Il faut souligner que la réalisation de ce risque d'anti-sélection dépend des attentes que le prêteur a formées, donc des hypothèses que nous allons inclure dans notre modèle.

Dans le cas de l'anti-sélection immobilière, une bonne connaissance du marché immobilier, une diversification des localisations des biens immobiliers sélectionnés et des dispositions juridiques prises contre les propriétaires qui laissent l'état de leur maison se dégrader excessivement peut aider à mitiger le risque. Pour ces raisons, nous ne retenons pas ce risque comme un risque prioritaire à intégrer dans nos modèles.

Concernant l'anti-sélection de longévité, il est difficile de mitiger et d'intégrer le risque à nos modélisations lorsque l'on ne dispose pas d'historique des longévités de souscripteurs du PVH permettant de construire des tables adaptées à ces souscripteurs servant de référence aux attentes des prêteurs et lorsque les portefeuilles de PVH ont une taille réduite qui limite l'efficacité et le réalisme de méthodes statistiques pour prévoir la longévité telles que les tables de mortalité. Nous allons essayer de soulever la question de l'anti-sélection de longévité lors de notre modélisation de la longévité en sélectionnant des tables prudentes et en introduisant des coefficients de sous ou sur mortalité individuels.

CHAPITRE 3 : RISQUES HERITES DE LA STRUCTURE DES OPTIONS DE VENTE

Nous présentons dans cette partie les risques émanant de la dépréciation de la valeur du bien sous-jacent au contrat soit de la structure des options de vente : le risque de dépréciation des biens immobiliers et l'aléa moral correspondant à un entretien du sous-jacent insuffisant.

SECTION 3.1 : RISQUE DE DEPRECIATION DES PRIX IMMOBILIERS

Une dépréciation ou une appréciation moins favorable qu'espérée des prix immobiliers peut diminuer la rentabilité d'un PVH du fait du plafonnement de la dette à la valeur du sous-jacent. En effet, une telle évolution défavorable augmente la probabilité, toutes choses égales par ailleurs, que le montant de la dette soit supérieur à la valeur du sous-jacent au terme du prêt, et que le montant touché par le prêteur à terme, qui correspond en cas de dépassement à la valeur du bien sous-jacent, soit faible.

Une dépréciation des prix immobiliers peut être constatée au niveau national, régional, local ou individuel. Au niveau individuel, la dépréciation peut s'expliquer par des caractéristiques du produit qui deviennent indésirables ou par un sous-entretien. Aux autres niveaux, la dépréciation s'expliquera typiquement par la santé économique à l'échelle de l'espace considéré ou par des catastrophes d'origine naturelles ou humaines.

Ce risque n'est que partiellement diversifiable. En effet, les risques de dépréciation des prix immobiliers régionaux, locaux et individuels peuvent être diversifiés en octroyant des prêts à des souscripteurs dont les biens immobiliers sont situés dans différentes régions et possèdent des caractéristiques distinctes, c'est-à-dire en se constituant un portefeuille de taille conséquente de sous-jacents localisés dans différentes régions et départements, à la ville et à la campagne, composé de maisons, d'appartements anciens et neufs. Cependant, le faible taux de souscription du PVH en France limite actuellement les possibilités de réaliser une telle diversification. De plus, le risque de dépréciation immobilière national n'est pas diversifiable pour un prêteur distribuant ses produits exclusivement sur le sol français.

Pour calculer la valeur de notre fonction objectif, nous avons besoin de calculer la valeur du flux final du PVH donc de la valeur du bien immobilier sous-jacent à terme. Nous modéliserons donc l'évolution de la valeur du bien sous-jacent dans le temps afin de simuler des échéanciers de PVH et ce-faisant intégrerons une considération pour ce risque à notre approche.

SECTION 3.2 : ALEA MORAL : ENTRETIEN DU SOUS-JACENT INSUFFISANT

L'aléa moral est le phénomène par lequel un individu qui est protégé ne serait-ce que partiellement des conséquences négatives de ses actes ou de sa négligence, notamment du fait d'un contrat, tend à prendre plus de risques, ce qui augmente la probabilité de réalisation de ces conséquences négatives.

Dans le cas du PVH, la conscience qu'ont les souscripteurs du fait qu'ils ne transmettront probablement pas leur maison ou appartement à leurs héritiers ou le sentiment qu'ils ont de n'être plus pleinement propriétaire de ce bien diminue pour eux l'intérêt de l'entretenir. Un contrat de PVH peut également diminuer l'incitation perçue par les souscripteurs propriétaires à payer l'impôt sur la propriété ou à souscrire ou renouveler une assurance habitation.

Un problème de sous-entretien du bien sous-jacent au contrat du PVH peut émerger, d'autant plus que les souscripteurs, des personnes âgées en besoin de liquidités, n'ont pas nécessairement la capacité physique ni les moyens financiers que requiert le maintien en bon état d'un logement.

La valeur du bien immobilier diminue avec le temps en cas de sous-entretien. Le sous-entretien augmente donc la probabilité que la valeur du bien soit inférieure à celle de la dette à terme et menace la rentabilité du PVH puisque le remboursement touché par le prêteur à terme est plafonné à la valeur du bien sous-jacent qui sera d'autant plus faible que le sous-entretien aura été prononcé.

Pour parer à ce risque, la loi indique que l'entretien du bien « en bon père de famille » constitue une obligation pour les souscripteurs. En cas de manquement à cette obligation, le prêteur peut exiger le remboursement immédiat du prêt, ce qui aura pour effet d'écourter la durée du prêt et, en ce sens, de diminuer la probabilité de réalisation du risque de dépassement dont nous allons traiter dans la section des risques spécifiques au PVH. L'exigence de remboursement pour cause de sous-entretien, qui implique dans la plupart des cas la vente du bien, est susceptible de ternir la réputation du prêteur, d'augmenter la méfiance de la cible vis-à-vis du nouveau produit qu'est le PVH et peut entraîner un litige et les risques qui y sont associés. Le prêteur dispose d'une marge de manœuvre qui consiste à proposer un règlement à l'amiable aux souscripteurs, en utilisant le capital restant disponible pour entretenir le bien, souscrire à une assurance habitation ou payer les impôts dus, en cas de déblocages fractionnés.

L'aléa moral est un risque difficile à diversifier car le prêteur ne peut anticiper avec exactitude quels souscripteurs sous entretiendront leur logement au moment de la conclusion du contrat. Il s'agit là d'un problème d'asymétrie d'information.

Cependant à l'inverse, la souscription d'un PVH peut avoir un effet à la hausse sur la valeur du bien, lorsqu'il est utilisé précisément pour aménager la maison, faire des travaux, ou financer des dépenses d'entretien, trois des motifs de souscription les plus couramment cités.

Nous ferons l'hypothèse lors de nos modélisations et simulations d'échéanciers du PVH que tout se passe selon les termes du contrat et dans le respect de la loi, soit que le souscripteur se comporte comme « un bon père de famille » en procurant au bien l'entretien nécessaire. Par conséquent nous négligerons ce risque en supposant qu'il ne se réalisera pas.

Dans ce chapitre, nous présentons les risques présents ou absents de façon spécifique au PVH par rapport aux trois produits similaires : prêts hypothécaires in fine, options de vente et assurance de capital décès. Nous décrivons en conséquence le risque de dépassement, né de la combinaison des multiples risques du PVH et de la garantie de plafonnement de la dette à la valeur du sous-jacent. Nous discutons alors de risques qui ne concernent pas ou revêtent un aspect relativement différent pour le PVH : le risque de défaut et le risque de remboursement anticipé. Enfin nous évoquerons le risque commercial qui pèse d'autant plus sur les produits financiers qu'ils sont nouveaux et complexes.

SECTION 4.1 : RISQUE DE DEPASSEMENT

Le risque de dépassement est le risque central du PVH et le plus spécifique au PVH en termes de gestion pour le prêteur. Il est le risque le plus difficile à maîtriser du fait de la multitude d'aléas qui peuvent déclencher sa réalisation. Il est né dans le cas du PVH de la combinaison des risques générés par la structure de prêt, la structure d'option, la structure de produit viager, aux garanties multiples accordées au souscripteur, en particulier de la garantie de plafonnement de la dette à la valeur du bien. Une fois ce risque réalisé, le prêteur peut encourir de très lourdes pertes.

En pratique, ce risque, d'une nature nouvelle, se réalise dès lors que la valeur du bien est inférieure à la valeur de la dette au terme du prêt, engendrant pour le prêteur une perte égale à la différence entre la valeur de la dette et celle du bien et induisant par conséquent une rentabilité moindre du PVH.

Puisque le taux d'intérêt est choisi de manière à être supérieur à la croissance des prix immobiliers, le prêteur peut a priori être certain qu'il existera une date future lors de laquelle la valeur de la dette dépassera celle du bien. Cependant le risque de dépassement ne se concrétisera pour lui que si le terme du prêt a lieu après la date de dépassement. Les facteurs aléatoires qui contribuent à la réalisation du risque de dépassement sont donc d'une part ceux qui tendent à accroître la maturité du prêt et d'autre part ceux qui tendent à diminuer la durée nécessaire au dépassement de la valeur du sous-jacent par la valeur de la dette, c'est-à-dire ceux contribuant à l'augmentation de la dette et ceux contribuant à la diminution de la valeur du sous-jacent.

La sous-mortalité est le premier des facteurs tendant à accroître la maturité du prêt, car le décès du dernier des co-emprunteurs est dans la plupart des cas l'évènement qui met fin au PVH. Plus les emprunteurs vivent longtemps, plus la dette a le temps de se cumuler à un taux supérieur au taux d'appréciation moyen de l'immobilier et plus la probabilité d'un dépassement est élevée. C'est pour cela qu'il existe un âge minimum légal pour souscrire le PVH, que l'état de santé n'est pas pris en compte dans la décision d'octroi du PVH comme c'est le cas pour les autres prêts et que les quotités et montants accordés sont d'autant plus élevés que le souscripteur est âgé. C'est également pour cela que la quotité accordée à un groupe d'emprunteurs doit être inférieure à celle qui serait accordée à n'importe lequel des individus qui le composent, pris seul, car le groupe survit toujours au moins aussi longtemps que chacun de ses membres et car les prêteurs souhaitent octroyer des montants d'autant plus élevés que le groupe souscripteur a un profil moins risqué. L'allongement de la durée de vie au fil du renouvellement des générations et le profil particulier des souscripteurs du PVH compliquent l'anticipation de la longévité du groupe emprunteur. La durée du prêt dépend également de la réalisation ou non d'autres aléas au cours de la durée du contrat, tels que le remboursement anticipé ou un sous entretien qui engendrerait l'exigibilité anticipée du prêt et la saisie du bien.

Parmi les facteurs contribuant à une dette élevée au terme du contrat, une hausse des taux d'intérêts dans le cadre d'un PVH à taux variable a déjà été citée. Deux paramètres certains à la main du prêteur infèrent sur la probabilité de réalisation du risque de dépassement dans le cas d'un PVH à taux fixe: la quotité et le taux de la dette. Plus ceux-ci sont élevés, plus le montant de la dette à maturité sera important et plus le dépassement est probable et aura tendance à survenir tôt dans la vie du contrat. Nous avons illustré ces phénomènes en annexe B.2).

Parmi les facteurs contribuant à une valeur de bien sous-jacent faible au terme du contrat, les risques de dépréciation des biens immobiliers aux niveaux national, régional, local ainsi qu'un sous-entretien du bien individuel ou des aménagements commercialement peu attractifs effectués au sein du bien par les propriétaires postérieurement à la souscription du prêt ont déjà été discutés précédemment. Une évolution défavorable de la valeur du sous-jacent est d'autant plus difficile à anticiper qu'il n'existe pas de marché à terme de ce risque facilitant les prévisions, comme il en existe pour les taux, et que les données des prix historiques de l'immobilier disponible sont très réduites tant par le nombre d'années qu'elles couvrent – 50 années maximum dans les pays commercialisant le PVH – que par leur précision en termes de différenciation des biens selon qu'ils soient des appartements, des maisons, anciens ou neufs et selon leur localisation. Les données disponibles concernant le phénomène de sous-entretien du logement chez les personnes âgées et la quantification de leur impact sur la valeur du logement concerné sont également très restreintes. La maîtrise de cet aléa nécessitera la constitution d'une base de données des prix immobiliers détaillant toutes ces caractéristiques.

Le prêteur peut choisir de conserver le risque sans son bilan ou de l'externaliser, par exemple en le titrisant ou en souscrivant à des contrats d'assurance.

En modélisant la durée du prêt et l'évolution de la valeur du bien immobilier sous-jacent, nous intégrerons également ce risque à notre modélisation des échéanciers du PVH.

SECTION 4.2 : RISQUES CLASSIQUES NON ENDOSSES

Deux des risques centraux des prêts classiques ne concernent pas ou revêtent un aspect différent pour un PVH : le risque de défaut et le risque de remboursement anticipé.

Le risque de défaut, également appelé risque de crédit ou risque de contrepartie est le risque qu'une perte financière soit engendrée pour le prêteur du fait de l'incapacité de l'emprunteur à honorer sa dette en versant le montant des remboursements de capital et/ou des intérêts dus.

Ce risque est central dans les prêts classiques, les prêteurs tâchent de le maîtriser en instaurant des conditions d'éligibilité liées au niveau de revenus et de richesses actuels ou futurs des potentiels souscripteurs, ainsi qu'en exigeant un surplus de rémunération de la part des profils de souscripteurs les plus risqués appelé prime de risque, lequel se matérialise comme un composant en pourcentage qui vient s'intégrer au taux d'intérêt du prêt.

La structure du PVH semble avoir été conçue de façon à exclure la possibilité d'un défaut. Au cours de la vie du prêt, hors cas particuliers type remboursements anticipés, l'emprunteur n'a aucun versement à effectuer au prêteur et ne peut donc pas faire défaut. Au terme du prêt, le plafonnement de la dette à la valeur du bien implique que les héritiers ont en théorie toutes les ressources nécessaires au paiement du montant dû. En effet, si les héritiers ne possèdent pas les liquidités nécessaires au remboursement et au paiement des intérêts, ils ont toujours la possibilité de vendre le bien immobilier pour honorer la dette. Un cas plus délicat peut survenir lorsque le bien immobilier n'est pas liquide et ne peut trouver d'acheteur au terme du prêt. Alors, si les héritiers ne sont pas en mesure de réunir les liquidités nécessaires au paiement du montant dû, le prêteur pourra saisir le bien et tenter de l'écouler lui-même. Hors cas très particuliers donc, la rentabilité du PVH n'est pas menacée par un risque de défaillance du ou des souscripteurs. Cela explique pourquoi la souscription ne requiert pas de conditions de revenus ou de richesses de la part des emprunteurs.

Le remboursement anticipé correspond au remboursement d'un emprunt avant son échéance contractuelle. Il peut être partiel ou total. Dans le cas d'un PVH, pour lequel la date de maturité n'est pas connue et fixée à priori, un remboursement anticipé se définit plutôt par rapport à l'évènement qui déclenche le remboursement que par rapport à sa date : en particulier, tout remboursement admettant un motif autre que le décès du dernier des coemprunteurs est un remboursement anticipé.

Le remboursement anticipé est un phénomène perçu comme défavorable par le prêteur car il est difficile à anticiper et une mauvaise prévision du nombre et des montants de sorties anticipées corrompt l'optimalité du

refinancement de l'emprunteur et donc la maximisation de sa rentabilité. Il fait également peser sur le prêteur un risque de taux puisqu'une surestimation du phénomène de remboursement anticipé le conduira à souscrire à des contrats de refinancement dont la durée sera inférieure à celle du prêt, ce qui pourra engendrer l'arrivée à échéance du refinancement au cours de la vie du prêt et la nécessité de souscrire à un nouveau refinancement. Si les taux sont élevés au moment où le prêteur renouvelle son financement, les coûts de celui-ci augmenteront et la rentabilité du prêt sera moindre. A l'inverse, une sous-estimation des remboursements anticipés pourra conduire le prêteur à souscrire un refinancement dont la maturité est supérieure à celle du prêt, et comme le taux est généralement fonction croissante de la maturité du contrat, il paiera des intérêts inutilement élevés par rapport à ceux qu'il aurait payés en cas d'estimation correcte des remboursements anticipés. Enfin, il est possible que le taux de réemploi que le prêteur touche sur la durée restante de la vie du prêt en réinvestissant le montant remboursé par anticipation soit inférieur au taux de rémunération du prêt qui a été remboursé par anticipation. Cela engendrera également une perte pour le prêteur au sens d'un manque de revenus à gagner.

La menace que présente le remboursement anticipé pour la rentabilité de l'assureur légitime l'instauration d'une indemnité de remboursement anticipé (IRA) qui consiste en une somme que doit payer l'emprunteur qui rembourse son prêt de façon anticipée afin de dédommager le prêteur. Une IRA peut être forfaitaire, calculée comme un pourcentage du montant restant dû, comme la somme d'un nombre fixé de mois d'intérêts ou selon une formule mixte, ou actuarielle, dans quel cas elle est calculée comme la valeur actuelle de la perte que subit le prêteur du fait du remboursement anticipé. En théorie donc, le prêteur qui dispose d'une clause d'IRA actuarielle, qui a pour but un dédommagement exact du manque à gagner ou de la perte engendrée, est indemnisé contre le remboursement anticipé et le remboursement anticipé ne représentera pas un risque pour lui. Cependant, si du fait d'un remboursement anticipé le prêteur doit lui aussi casser son refinancement par un remboursement anticipé nécessitant le paiement d'une IRA forfaitaire actuarielle, il n'est pas exclu que le remboursement anticipé engendre tout de même des pertes pour le prêteur, en fonction du montant du forfait.

Cependant, dans le cas du PVH, le phénomène de remboursement anticipé ne revêt pas l'aspect pleinement négatif qu'il peut avoir pour les prêts de type classique. En effet, le plafonnement de la valeur de la dette à celle du bien n'est pas effectif en cas de remboursement anticipé. Il est donc possible qu'un remboursement anticipé épargne le prêteur d'une perte due au plafonnement de la dette et que cette épargne fasse plus que compenser l'éventuelle perte engendrée par les conséquences que le remboursement anticipé a sur le refinancement et le réemploi des fonds du prêteur. A priori le remboursement n'est pas nécessairement défavorable au prêteur, il est donc très difficile d'évaluer s'il doit être considéré comme un risque soit un événement dont la réalisation est défavorable. Pour le savoir, il faudrait notamment pouvoir estimer au cas par cas ses conséquences en terme de manque à gagner dû au réemploi, à l'atteinte à l'optimalité du refinancement, à l'éventuelle IRA à payer pour casser le refinancement, et les éventuels gains causés par la perception de l'IRA versée par l'emprunteur et par le non plafonnement du montant touché à la valeur du bien.

Les causes les plus fréquentes de remboursement anticipé sont l'arbitrage, lorsque la valeur de l'immobilier monte ou lorsque les taux d'intérêts baissent, et le déménagement du souscripteur pour des raisons de santé. La probabilité d'un arbitrage est faible, car les coûts initiaux du PVH sont élevés, et la levée d'une hypothèque et son remplacement par une autre hypothèque implique des coûts très importants pour l'emprunteur.

En pratique, les taux de remboursement anticipés observés en France sont très faibles, proches de 0.

Pour ces raisons, nous prendrons comme hypothèse un taux de remboursement anticipé et un taux de défaut nuls lors de notre modélisation de l'échéancier du PVH.

SECTION 4.3 : RISQUES LIES AU LANCEMENT DE PRODUITS NOUVEAUX

Du fait du caractère récent de l'autorisation de la commercialisation du PVH en France, un prêteur de PVH s'expose au risque que ce prêt n'attire qu'un faible nombre de demandeurs. Le prêteur du PVH est d'autant plus exposé à ce risque que ce produit est complexe et opaque aux yeux des consommateurs, que la publicité portant sur ce

produit est fortement réglementée et restreinte et que la cible du PVH, constituée de personnes âgées, est statistiquement moins encline à souscrire à un instrument financier nouveau que la population générale.

La réalisation de ce risque aura pour effet, en limitant le nombre de PVH vendus, de restreindre les revenus dégagés par un portefeuille constitué uniquement de ce type de produit, ainsi que de réduire la capacité du prêteur à diversifier son portefeuille. Or, la diversification d'un portefeuille permet de limiter l'impact négatif de la réalisation de risques sur la rentabilité du portefeuille. Cependant, notre approche de rentabilité individuelle du PVH n'intègre pas l'impact de ce risque.

Lors de nos modélisations, nous ne tiendrons pas compte de ce risque car il n'affecte pas la valeur de notre fonction objectif.

CHAPITRE 5 : ALÉAS RETENUS POUR LA MODÉLISATION

Pour calculer la valeur de notre fonction objectif de rentabilité, nous devons construire un échéancier des flux générés par le PVH, ce qui nécessite de modéliser les dates de flux ainsi que les montants actualisés des flux versés à chacune de ces dates.

Les dates des flux dépendent des fréquences et dates initiales de versement des flux négociées entre le client et l'entreprise, ainsi que de la date de maturité du prêt, laquelle est aléatoire et peut correspondre soit à la date de décès du dernier des emprunteurs soit à une date de remboursement anticipé. En France, l'évènement qui met un terme au PVH est le décès dans presque 100% des cas. Nous modéliserons nécessairement la longévité du groupe emprunteur. Nous postulerons une absence totale de remboursement anticipé car le taux observé est très faible, ainsi que parce que le remboursement anticipé diminue la probabilité de réalisation du risque de dépassement et par conséquent, postuler l'absence de remboursement anticipé constitue une hypothèse prudente vis-à-vis du risque et de la rentabilité du PVH.

Les montants actualisés des flux, dépendent, une fois le montant unitaire des frais et produits annexes estimés pour chaque date de flux, des facteurs d'actualisation, donc des taux d'intérêts, et de la valeur du bien à maturité du prêt ainsi que de la réalisation ou non d'un défaut du client. Comme évoqué précédemment, le risque de défaut sur le prêt viager hypothécaire étant par construction particulièrement faible, nous considérerons le taux de défaut comme négligeable.

Dans la suite de ce mémoire nous allons tâcher de proposer une modélisation probabiliste de trois aléas centraux pour la rentabilité du PVH et dans la réalisation du risque de dépassement : premièrement, la longévité du groupe emprunteur avec un paramètre d'ajustement permettant la prise en compte d'un éventuel délai de remboursement du prêt après le décès du dernier des emprunteurs ainsi qu'avec une prise en compte du risque d'anti sélection, deuxièmement les aléas de taux d'intérêts et troisièmement l'aléa concernant la valeur du sous-jacent à maturité du prêt au niveau national, avec inclusion d'un paramètre d'ajustement permettant la prise en compte de la dépréciation du bien dans le temps due à un vieillissement et à un éventuel sous-entretien du bien.

Parmi les risques décrits au cours des Chapitres 1 à 4 de cette Partie nous ne modéliserons pas le risque de défaut, le risque de litige, le risque commercial, le risque de dépréciation du bien à échelle locale ou régionale, et pas la possibilité des remboursements anticipés. Nous postulons donc que les héritiers des emprunteurs remboursent le prêt selon les termes du contrat, que le portefeuille de PVH est diversifié en termes de localisation et de caractéristiques des biens immobiliers sous-jacents et que la seule cause de terme du prêt est le décès du dernier des emprunteurs.

MODELISATION DES ALEAS INFLUANT SUR LA RENTABILITE DU PVH

Dans cette quatrième partie, nous sélectionnons, décrivons, calibrons et critiquons des modèles pour les trois principaux aléas de rentabilité que nous avons choisis de modéliser au cours de la troisième partie : la longévité du groupe emprunteur, l'évolution des taux d'intérêt et l'évolution des prix immobiliers. Ces modélisations nous permettront de simuler des échéanciers de PVH lors de la partie cinq afin de tester nos quatre méthodes de détermination du couple (taux, quotité) du PVH et de pouvoir choisir celle qui nous semble la plus à même de permettre à l'entreprise de réaliser ses objectifs de rentabilité et de limitation du risque tout en proposant un produit commercialement attractif et respectueux du cadre légal. Nous discutons enfin des possibles dépendances entre ces trois aléas et justifions notre choix d'en tenir compte en les intégrant à nos modélisations et simulations ou non.

CHAPITRE 1 : LONGEVITE DU GROUPE EMPRUNTEUR

Ce Chapitre 1 a pour objectif la sélection, l'exposition et la description du modèle de longévité que nous utiliserons par la suite dans la partie cinq pour simuler la durée de survie du groupe emprunteur du PVH. Pour cela, nous énumérons les principaux facteurs de mortalité et tentons de situer le profil particulier des emprunteurs du PVH vis-à-vis de ceux-ci, nous choisissons une table de mortalité, rappelons les hypothèses, fonctions et mécanismes de calcul de la durée de survie d'un groupe d'individus dans le cadre du modèle actuariel classique puis critiquons le choix de ces modèle et table de mortalité afin d'amorcer les pistes d'amélioration de ce mémoire que nous exposerons dans la partie six de conclusion et critique générale. Conformément au choix que nous avons développé dans la troisième partie, nous assimilons durée du prêt viager hypothécaire et durée de survie du groupe emprunteur à partir de la date de prise d'effet du contrat en supposant un taux de remboursement anticipé nul.

SECTION 1.1 : FACTEURS DE MORTALITE ET PARTICULARITE DU PROFIL EMPRUNTEUR DU PVH

Une demi-douzaine de paramètres ont été identifiés comme les principaux facteurs de mortalité, c'est-à-dire comme les facteurs influant le plus sur la durée de survie d'un individu. Le premier de ces facteurs est l'âge, en fonction duquel la durée de survie espérée croît, pour les enfants en bas âges, puis ne cesse de décroître par la suite. Intuitivement, on peut s'attendre à ce qu'un adulte de 30 ans reste en vie pour une durée supérieure à celle d'un individu de 60 ans, toutes autres caractéristiques des individus mises de côté. La profession, et plus précisément les conditions de travail, influent très significativement la durée de vie restante d'un individu. Selon les données de la Sécurité Sociale, les inactifs et les ouvriers disposent en moyenne d'une durée de vie restante plus faible que les cadres et professions intermédiaires. Malgré son importance, ce critère ne fait pas partie des données d'entrée des tables de mortalité officielles pour des raisons pratiques, car il existe un nombre important de professions distinctes et il serait difficile de quantifier l'impact de ce facteur et de chacune des modalités qu'il peut prendre sur la mortalité avec précision. Le sexe est également un facteur décisif, l'espérance de vie espérée d'une femme étant à priori, tout comme au cours de la vie de l'individu, significativement supérieure à celle d'un homme. Ainsi, d'après l'Institut national d'études démographiques, l'espérance de vie à la naissance d'un homme en 2012 est de 78,5 ans contre 84,9 ans pour une femme et de 22,6 contre 27,2 ans respectivement à 60 ans en 2012. La durée de survie d'un individu dépend également du pays dans lequel il vit. La France fait partie du peloton de tête dans le classement mondial des espérances de vie les plus longues. L'espérance de vie est également fonction croissante de l'année de naissance, ou de la génération, du fait des progrès médicaux et des avancements

de l'hygiène et du niveau de vie qui ont été réalisés au cours du temps. Les cinq facteurs cités précédemment s'appliquent à l'ensemble de la population. Cependant, pour un offreur de produits viagers, un sixième facteur de mortalité vient s'ajouter à cette liste, qui pourra influencer très significativement sur la durée de vie restante espérée de son portefeuille de clients : il s'agit de l'anti-sélection. Dans le cas d'une garantie en cas de vie, ce phénomène, par lequel seuls les individus qui estiment survivre encore assez longtemps pour recevoir un nombre suffisant de paiements et utiliser ces liquidités souscriront à la garantie, n'est pas corrigé et pourra faire du tort à l'offreur du produit viager.

Les emprunteurs du PVH, du fait de la structure du contrat et de la législation française, présentent un profil particulier dont les caractéristiques sont corrélées à ces facteurs de mortalité. Ils présentent par conséquent un profil de longévité distinct de celui de la population française générale. Ils sont premièrement propriétaires d'un bien immobilier, dont la valeur est en moyenne supérieure à la valeur moyenne du logement des français, ce qui augmente l'attrait du PVH à leurs yeux puisque les montants prêtés sont proportionnels à la valeur du bien et croissent avec elle, toutes choses égales par ailleurs. Or, les français ayant pu acquérir la propriété d'un bien immobilier d'une valeur conséquente ont statistiquement tendance à appartenir aux catégories professionnelles dont l'espérance de durée de vie restante sont les plus élevées. Deuxièmement, du fait des contraintes législatives s'appliquant à la publicité de ce produit, les emprunteurs du PVH sont des individus informés, au fait des instruments financiers. Ils ont statistiquement tendance à avoir effectué un nombre d'années d'études élevé, or les personnes les plus éduquées vivent en moyenne plus longtemps que leurs paires et profitent le plus de l'allongement de l'espérance de vie au cours des générations, comme le suggère l'étude "Differences In Life Expectancy Due To Race And Educational Differences Are Widening, And Many May Not Catch Up" publiée en 2011 par HealthAffairs. Troisièmement, les emprunteurs du PVH, en particulier ceux qui ont opté pour des déblocages fractionnés ou sous forme d'annuité, estiment vivre assez longtemps pour recevoir les déblocages souscrits et les utiliser. Quatrièmement, la question d'une éventuelle rétroaction de l'octroi du PVH sur l'espérance de vie mérite d'être soulevée. En effet, l'octroi d'un PVH entraîne une hausse du niveau de vie des souscripteurs, leur permet de financer des soins médicaux ou de recommencer à faire des projets comme des voyages et pourrait en ce sens, allonger leur espérance de vie restante. Enfin, il faut tenir compte de l'âge moyen élevé de la cible du PVH, qui appartient donc à des générations « anciennes » et du fait que notre étude se concentre sur la France.

On peut donc s'attendre à ce que les emprunteurs du PVH présentent une mortalité supérieure à la population française générale du fait de leur âge avancé mais inférieure à celle de la population du même âge.

SECTION 1.2 : CHOIX DE LA TABLE

1.2.1 : Critères de sélection

Idéalement, nous devrions conduire une analyse statistique sur les données historiques de décès des emprunteurs de PVH en France pour modéliser la durée de survie des emprunteurs du PVH en France. Malheureusement, nous ne possédons pas de telles données. Les séries de données existantes à ce sujet ne peuvent être que limitées en volume, du fait du faible nombre de PVH souscrits en France, ainsi qu'en longueur puisque le PVH n'a été autorisé que très récemment, et nous n'y avons pas accès.

La meilleure alternative est l'utilisation de tables pour les garanties en cas de vie, puisque le risque se réalise pour l'entreprise prêteuse en cas de sous-mortalité des souscripteurs du PVH, portant sur la population française générale ou sur les souscripteurs d'annuités, ajustées de façon à refléter les éventuelles informations dont l'entreprise dispose sur les emprunteurs du PVH.

D'après l'analyse que nous avons menée précédemment, les emprunteurs du PVH devraient à priori vivre plus longtemps qu'un individu lambda de même âge tiré au hasard au sein de la population française. Les tables portant sur la population française générale nous fournissent une borne inférieure de l'espérance de vie des emprunteurs du PVH.

Nous choisissons donc de baser nos calculs sur les tables portant sur les souscripteurs d'annuité, d'une part car le profil des souscripteurs de PVH s'approche plus du profil des souscripteurs d'annuités que de la population

générale, d'autre part car le choix de ces tables, plutôt que celles portant sur la population française générale, constitue une hypothèse prudente de longévité. En effet, le risque se réalise en cas de sous-mortalité pour un PVH et les tables portant sur les souscripteurs d'annuité fournissent des estimations d'espérance de vie supérieures aux tables portant sur la population générale.

Nous choisirons de préférence une table de mortalité par générations, afin de tenir compte de l'allongement de l'espérance de vie d'une génération à l'autre, prospective, afin de pouvoir faire des prédictions de durée de vie restante anticipant l'augmentation de l'espérance de vie pour des individus encore en vie en 2013, la plus récente possible, pour que les observations de mortalité les plus récentes soit intégrées aux tables.

Nous baserons donc nos calculs sur les tables TGH05 et TGF05, qui nous semblent correspondre au mieux à nos critères.

1.2.2 : Méthodologie de construction des tables choisies

Les tables TGH05 et TGF05 sont réglementairement destinées à être utilisées pour le provisionnement des rentes viagères à partir du 1^{er} janvier 2007 par les entreprises d'assurance soumises au contrôle de l'ACAM puis de l'ACP.

Elles ont été construites à partir de données de mortalité concernant 700 000 rentes en cours de service entre 1993 et 2005 en provenance de 16 portefeuilles de la FFSA et de 3 portefeuilles du CTIP. Le volume de données étant limité pour la construction de tables de mortalité, ces données ont été ajustées par rapport aux tables de mortalité du moment publiées par l'INSEE pour les années allant de 1962 à 2000.

La construction des tables, décrites par Frédéric Planchet dans sa notice de présentation « Tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers » de 2006 a été effectuée en plusieurs étapes.

La première étape correspond à l'ajustement des taux de mortalités observés avant la construction des tables d'expérience par rapport aux tables INSEE. Pour les plages d'âges de 0 à 40 ans, la structure des taux de mortalité INSEE est reprise du fait d'une absence de données. Pour les plages d'âge supérieures à 40 ans, et inférieures à 95 ans, les taux de mortalité bruts observés sont positionnés par rapport à ceux qui sont répertoriés dans les tables INSEE à l'aide de la formule suivante :

$$\ln\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = a_x \times \ln\left(\frac{q_x^{ref}(t)}{1 - q_x^{ref}(t)}\right) + b_x + \varepsilon_x(t)$$

Où $q_x(t)$ est le taux brut de mortalité à l'âge x l'année t , $q_x^{ref}(t)$ est le taux de mortalité à l'âge x l'année t de la table du moment INSEE de référence et où ε est un bruit blanc. a_x et b_x sont des paramètres à déterminer.

Le constat de l'existence d'une forte corrélation entre a et b est utilisé pour justifier l'introduction de la contrainte suivante :

$$a_x = \beta \times b_x + \alpha$$

Les paramètres β , α et b_x sont estimés par la méthode des moindres carrés sur les données datant de 1994 à 2004. A l'issue de cette étape, les tables d'expérience sont ajustées sur la période 1994-2004 pour les plages d'âges allant de 40 à 95 ans.

Dans une seconde étape, la mortalité future couvrant les années 2005 à 2010 est extrapolée à partir de la tendance observée par le passé, à l'aide de la formule :

$$\ln\left(\frac{q_x(t)}{1 - q_x(t)}\right) = a_x \times \ln\left(\frac{q_x^{ref}(t)}{1 - q_x^{ref}(t)}\right) + b_x$$

Où les coefficients b_x et a_x sont les coefficients qui ont été estimés au cours de l'étape 1.

La mortalité ainsi extrapolée est ensuite réajustée pour être cohérente avec la mortalité nationale observée.

La troisième et dernière étape a pour objectif l'extrapolation des quotients de mortalité pour les âges de 95 ans et plus. Ces taux sont déterminés sous la contrainte de continuité et dérivabilité en $x=95$ ans ainsi qu'en contraignant un taux de mortalité de 0.5 à 110 ans. Ces conditions permettent de déterminer les taux de mortalité pour les grands âges de façon unique.

1.2.3 : Utilisation des tables

Nous choisirons d'adopter l'approche longitudinale, c'est-à-dire la lecture des taux de mortalité par année de naissance plutôt que par année calendaire, afin de ne pas sous-estimer l'impact de l'allongement de vie au cours des générations.

Au cours des sections suivantes, nous envisagerons la possibilité d'inclure un facteur de stress à notre modèle de longévité, permettant de différer les taux de mortalité des souscripteurs de PVH de ceux des rentiers qui ont été observés pour la construction des tables TGH05 et TGF05, à la hausse en cas d'une hypothèse de surmortalité des souscripteurs du PVH par rapport aux rentiers, ou à la baisse en cas de sous-mortalité. L'entreprise prêteuse pourra décider d'adopter un tel coefficient et déterminer sa valeur en fonction des informations dont elle dispose sur le profil des clients de son PVH en termes de facteurs déterminants de la mortalité, de la mortalité qu'elle a éventuellement observé par le passé sur ce portefeuille et de son arbitrage entre rentabilité et attractivité commerciale. Schématiquement, surestimer la mortalité des souscripteurs du PVH nous conduira à sous-estimer la probabilité du risque de dépassement donc les taux et à surestimer les quotités, soit à arbitrer en faveur de l'attractivité commerciale plutôt qu'en faveur de la rentabilité et inversement.

SECTION 1.3 : MODELISATION DE LA DUREE DE SURVIE DU GROUPE EMPRUNTEUR

Le but de cette section est de préciser le modèle qui est utilisé pour déterminer la loi de probabilité de la durée de vie restante du groupe emprunteur et d'explicitier la méthode utilisée pour simuler des dates de disparition du groupe en accord avec cette loi.

1.3.1 : Le modèle de base

Dans une première étape, on veut pouvoir exprimer la fonction de répartition de la durée de survie d'un individu quelconque d'âge x , notée F_x .

On note T_x la durée de vie restante d'un individu d'âge x à l'origine des temps, c'est-à-dire à la date où l'on cherche à simuler la durée de vie restante du groupe emprunteur. Avec ces notations, $T_x + x$ est l'âge de décès de l'individu considéré.

On note ${}_t p_x = P(T_x > t)$ la probabilité qu'un individu quelconque d'âge x soit encore en vie à l'instant $t > 0$.

On désigne par ω l'âge maximum qu'un individu peut atteindre. ω est fonction de la génération dont est issu l'individu. ω est donc tel que ${}_t p_x = 0 \quad \forall t > \omega - x$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_x(t) = 1 - {}_t p_x \Leftrightarrow F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - {}_t p_x & \text{si } 0 < t \leq \omega - x \\ 1 & \text{si } t > \omega - x \end{cases}$$

La connaissance des probabilités ${}_t p_x$ pour $0 < t \leq \omega - x$ nous permettra ainsi de déterminer les valeurs prises par F_x . Dans les lignes suivantes, nous explicitons la méthodologie et le modèle permettant de déterminer ces probabilités.

On considère à un instant pris comme origine les individus d'âge x en nombre L_x . Nous faisons l'hypothèse que ces individus décèdent indépendamment les uns des autres. On introduit la variable aléatoire $X_i(t)$, nommée « indicateur de survie », qui prend la valeur 1 lorsque l'individu $n^o i$ est encore en vie à l'instant t , et la valeur 0 sinon.

On en déduit que l'indicateur de survie suit en tout instant $t > 0$ une loi de Bernoulli: $X_i(t) \sim B({}_t p_x) \Rightarrow E(X_i(t)) = {}_t p_x \forall t > 0$.

De plus: $L_{x+t} = \sum_{i=1}^{L_x} X_i(t)$ où L_{x+t} est le nombre d'individus parmi ceux d'âge x à l'origine des temps qui sont encore en vie à l'instant $t > 0$. L_{x+t} est donc la somme de L_x variables de Bernoulli indépendantes. On en déduit: $L_{x+t} \sim B(L_x, {}_t p_x)$, d'où: $E(L_{x+t}) = L_x \times {}_t p_x, \forall t > 0$.

On note l_{x+t} la valeur espérée, à priori, du nombre d'individus parmi ceux d'âge x à l'origine des temps qui sont encore en vie à l'instant $t > 0$: $l_{x+t} = E(L_{x+t}), \forall t > 0$. Pour $t=0$, ${}_0 p_x = 1$ d'où: $l_x = L_x$, et $l_{x+t} = 0$ pour $t > \omega - x$.

Les probabilités ${}_t p_x$ peuvent alors être déterminées comme suit: ${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \forall t > 0$.

En pratique, les tables de mortalité fournissent les l_{x+t} pour les âges entiers, soit pour $x+t \in \mathbb{N}$, ce qui nous permet de calculer ${}_t p_x$ donc $F_x(t)$ pour tout t et x entiers.

Dans une seconde étape, on veut pouvoir déterminer la loi de survie d'un groupe disparaissant au décès du dernier de ses membres, en extrapolant le modèle établi au niveau d'un individu d'âge x quelconque.

Pour cela, on fait l'hypothèse que les membres du groupe décèdent indépendamment les uns des autres.

Un groupe de n individus d'âges x_i , $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ disparaissant au dernier décès est symbolisé par le vecteur $(x_1, \dots, x_n)$. On note ${}_t p_{(x_1, \dots, x_n)}$ la probabilité qu'il survive à l'instant t et $T_{(x_1, \dots, x_n)}$ la durée de vie restante du groupe.

Notre objectif est d'établir la valeur de la fonction de répartition de la durée de survie de ce groupe, notée $F_{(x_1, \dots, x_n)}(t), \forall t > 0$ où $F_{(x_1, \dots, x_n)}(t) = P(T_{(x_1, \dots, x_n)} \leq t)$.

Comme précédemment, si l'on note ω_i l'âge maximum qu'un individu issu de la même génération que le membre $n^\circ i$ du groupe peut atteindre:

$$F_{(x_1, \dots, x_n)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - {}_t p_{(x_1, \dots, x_n)} & \text{si } 0 < t \leq \max(\omega_i - x_i), i \in \llbracket 1; n \rrbracket \\ 1 & \text{si } t > \max(\omega_i - x_i), i \in \llbracket 1; n \rrbracket \end{cases}$$

Puisque l'évènement $(T_{(x_1, \dots, x_n)} \leq t)$ ne se réalise que lorsque tous les membres du groupe décèdent avant l'instant t , en notant $Y_i(t)$ l'indicateur de survie du membre $n^\circ i$ du groupe à l'instant t , on peut établir l'égalité des évènements comme suit :

$$(T_{(x_1, \dots, x_n)} \leq t) = \bigcap_{i=1}^n (Y_i(t) = 0) = \bigcap_{i=1}^n \overline{(Y_i(t) = 1)}$$

Or, en tenant compte de l'hypothèse d'indépendance des décès des membres du groupe :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{(Y_i(t) = 1)}\right) = \prod_{i=1}^n P(\overline{Y_i(t) = 1}) \Leftrightarrow P(T_{(x_1, \dots, x_n)} \leq t) = \prod_{i=1}^n (1 - P(Y_i(t) = 1))$$

En notant ${}_t p_{x_i}$ la probabilité de survie à l'instant t du membre $n^o i$, on en déduit enfin :

$$F_{(x_1, \dots, x_n)}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - {}_t p_{x_i}) \Leftrightarrow {}_t p_{(x_1, \dots, x_n)} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - {}_t p_{x_i}), \text{ où } t \leq \max(\omega_i - x_i).$$

Nous savons calculer les ${}_t p_{x_i}$ pour t et x_i entiers, nous savons donc calculer $F_{(x_1, \dots, x_n)}(t)$ pour t et x_i entiers, $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

1.3.2 : Ajustement du modèle

Puisque la table de mortalité à partir de laquelle nous allons effectuer nos simulations et calculs est basée sur un portefeuille de rentiers et non sur un portefeuille de souscripteurs de PVH, nous voulons inclure au modèle présenté précédemment un facteur de stress permettant d'intégrer une certaine sous-mortalité ou sur-mortalité d'un souscripteur de PVH par rapport à un rentier.

Pour cela, nous émettons l'hypothèse que le facteur de stress de la mortalité n'est pas fonction de l'âge d'un individu, il correspond donc à une constante ρ qui peut être négative (sur-mortalité) ou positive (sous-mortalité).

Dans le cas d'une sous-mortalité, il convient d'introduire un nouvel âge de décès maximal ajusté $\omega^* \geq \omega$. On note D_x le nombre d'individus décédés entre l'âge x et l'âge $x+1$ ou x est un entier positif, $D_x = L_x - L_{x+1}$. On introduit également $d_x = E(D_x) \Leftrightarrow d_x = l_x - l_{x+1}$, par linéarité de l'espérance.

De même $d_{x+t} = l_{x+t} - l_{x+t+1}$, où t est positif.

On introduit à présent les nombres de décès espérés ajustés du stress, où $1(\rho > 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (respectivement $=$ et $<$):

$$d_{x+t}^* = 1(\rho > 0) \begin{cases} d_{x+t} \times (1 - \rho), & \text{si } x+t < \omega^* \\ l_{x+t}^*, & \text{si } x+t = \omega^* \\ 0 & \text{si } x+t > \omega^* \end{cases} + 1(\rho = 0) \times d_{x+t} \\ + 1(\rho < 0) \begin{cases} d_{x+t} \times (1 - \rho) & \text{si } d_{x+t} \times (1 - \rho) \leq l_{x+t}^* \\ l_{x+t}^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Où l'espérance du nombre de survivants ajusté du stress est :

$$l_{x+t}^* = \begin{cases} l_x & \text{si } t = 0 \\ l_{x+t-1}^* - d_{x+t-1}^* & \text{sinon} \end{cases}$$

Les probabilités de survie individuelles ajustées du stress d'un individu d'âge x à l'origine des temps sont alors calculées comme suit : ${}_t p_x^* = \frac{l_{x+t}^*}{l_x}$.

Enfin la fonction de répartition de la durée de survie du groupe emprunteur ajustée du stress se calcule comme suit, où chacune des probabilités de survie des individus est déterminée à partir du facteur de stress et éventuellement de l'âge maximal spécifié pour cet individu :

$$F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(t) = \prod_{i=1}^n (1 - {}_t p_{x_i}^*)$$

Dans l'idéal, le facteur de stress devrait être déterminé en fonction de la catégorie socio-professionnelle de chacun des emprunteurs. Il devrait également être supérieur dans le cas d'emprunteurs mariés puisqu'un individu marié vit significativement plus longtemps qu'un individu célibataire de mêmes caractéristiques (âge, génération, sexe, pays).

1.3.3 : Simulations de la durée du prêt

On veut effectuer N simulations de la durée de vie restante du groupe emprunteur. Grâce aux tables de mortalité qui fournissent les l_x pour les âges entiers on connaît $F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. On note DR(j) la j^{ème} durée de vie restante du groupe simulée.

Pour chacune des N simulations, on commence par simuler une loi Uniforme sur l'intervalle [0 ;1]. On note u(j) la valeur simulée aléatoirement dans cet intervalle au cours de la j^{ème} simulation.

Au cours de la j^{ème} simulation, on vérifie s'il existe un entier naturel i qui vérifie $F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(i) = u(j)$. S'il existe un tel entier naturel, alors DR(j)=i.

Sinon, on calcule DR(j) par interpolation cubique inverse, après avoir identifié l'indice $s^j \in \mathbb{N}/F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(s^j) > u(j)$ et $F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(s^j - 1) < u(j)$ à l'aide d'une formule récursive.

Plus précisément, si on note ω l'entier naturel tel que $F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(\omega)=1$ et $F_{(x_1, \dots, x_n)}^*(\omega - 1) < 1$, alors:

On utilise le solveur d'Excel pour résoudre l'équation suivante, où $F_{(x_1, \dots, x_n)}^*$ est notée F et où $v \in [0 ; 1]$ est la variable inconnue à déterminer:

$$\begin{aligned} F(s^j - 1 + v) &= u(j) \\ &= F(s^j - 1)(1 - v)^3 + (3F(s^j - 1) + P(s^j - 1))(1 - v)^2v + (3F(s^j) - P(s^j))(1 - v)v^2 \\ &\quad + F(s^j)v^3 \end{aligned}$$

$$\text{Avec, } P(i) = \begin{cases} 2F(1) - F(2)/2 & \text{si } i = 0 \\ \frac{F(i+1) - F(i-1)}{2} & \text{si } i \in \llbracket 1; \omega - 1 \rrbracket \\ 0 & \text{si } i = \omega \end{cases}$$

Alors, DR(j)= $s^j - 1 + v$, où DR(j) est la durée de vie restante du groupe emprunteur calculée au cours de la j^{ème} simulation.

L'entreprise peut vouloir inclure à son modèle de durée du prêt un délai de recouvrement des fonds à la suite du décès du dernier des emprunteurs. Nous introduirons un tel délai à travers une constante DI exprimée en années, représentant le délai de recouvrement moyen postulé, estimé ou observé par l'entreprise prêteuse pour les PVH.

Soit Dr la date de recouvrement du prêt correspondant à la j^{ème} simulation. Nous aurons enfin : Dr(j)=DR(j)+DI.

SECTION 1.4 : CRITIQUE DU MODELE ET DES DONNEES

Pour élaborer notre modèle de longévité nous avons adopté plusieurs hypothèses dont l'éventuelle invalidité éloignerait les prédictions et simulations de notre modèle des données de mortalité qui seront effectivement observées sur le portefeuille des souscripteurs de PVH et compromettrait notre capacité à prédire et simuler la date de maturité du prêt.

Premièrement, nous avons fait l'hypothèse que la loi de mortalité des souscripteurs de PVH peut être raisonnablement assimilée à la loi de mortalité des rentiers, à l'éventuel coefficient de stress près. Nous faisons cette hypothèse car nous ne disposons pas d'informations sur la mortalité des souscripteurs de PVH en France ni sur leur profil. Nous nous sommes donc orienté vers l'utilisation de données de mortalité sur des populations proxy et nous avons préféré assimiler la mortalité des souscripteurs de PVH à celle des rentiers plutôt qu'à celle de la population française générale car le risque pour un PVH se réalise en cas de sous-mortalité, car il existe un phénomène d'auto sélection par lequel seuls les individus qui pensent rester en vie suffisamment longtemps sont séduits par l'idée de souscrire un PVH et car nous avons mis en évidence dans la section 1.1 l'existence de caractéristiques chez les souscripteurs de PVH qui les rapproche des souscripteurs de rentes. S'il s'avère que le

profil du portefeuille de clients du PVH d'une entreprise prêteuse diffère significativement du profil des rentiers alors l'adoption du modèle que nous proposons la conduira à prédire des dates de maturités du prêt non réalistes.

Deuxièmement nous assimilons loi de mortalité des rentiers à l'avenir et loi de mortalité que l'on peut déduire des tables TGH05 et TGF05. Cela suppose que l'échantillon des rentiers observés est représentatif de la population totale des rentiers français et que la tendance observée et extrapolée sur la période de temps passé choisie pour construire les tables se prolongera effectivement à l'avenir. Cependant certaines caractéristiques des données et de la méthodologie utilisées pour construire ces tables peuvent compromettre l'adéquation entre mortalité des rentiers qui sera observée à l'avenir et loi de mortalité prospective contenue par ces tables. Ainsi, Emmanuel Tassin pointe dans son document de 2007 « Construction des tables d'expérience de l'IA » disponible sur le site de l'Institut des Actuaires le fait que les données qui ont été récoltées pour leur construction proviennent de sources très différentes et ont été introduites dans l'analyse de façon égalitaire, sans aucune pondération. Il n'y a pas non plus eu d'analyses de doublon sur ces données car les bases récoltées étaient anonymes. Plusieurs choix ont dû être faits pour construire ces tables et ceux-ci ont été discutés : les tranches d'âge étudiées, la méthodologie retenue pour la fermeture des tables, une référence aux bases de données annuelles plutôt que lissées sur trois ans. Le modèle qui a été utilisé pour l'extrapolation de la mortalité à l'avenir reflète la forte augmentation de l'espérance de vie qui a été observée sur la période d'étude. Si celle-ci se ralentit, comme semble le suggérer les estimations de l'allongement futur de l'espérance de vie publiées par l'INSEE qui ont décliné depuis 2002, les données de mortalité futures calculées par un modèle se basant sur les tables TGH05 et TGF05 s'éloigneront des données qui seront effectivement observées en temps réel. Une entreprise prêteuse souhaitant augmenter l'attractivité commerciale des conditions du PVH pourrait réactualiser les tables de mortalité qu'elle utilise pour son modèle de longévité à partir des scénarios moyens de mortalité future les plus récemment publiés par l'INSEE. Les projections contenues dans les tables TGH05 et TGF05 sous-estiment la mortalité future par rapport aux scénarios moyens INSEE de mortalité future les plus récents, et la surestiment par rapport aux scénarios hauts INSEE. Ainsi, une entreprise prêteuse arbitrant en faveur de la prudence et de la rentabilité pourra réactualiser les tables à partir de l'hypothèse haute de mortalité de l'INSEE.

Troisièmement, le modèle actuariel « classique » que nous utilisons pour calculer la loi de probabilité de la longévité des souscripteurs à partir des données des tables de notre choix, repose sur des hypothèses qui pourront être invalidées en réalité et nuire à la fiabilité des résultats de notre modèle de longévité. Un défaut important de ce modèle est de ne considérer que quatre facteurs explicatifs de la mortalité : à savoir l'âge, le sexe, la génération et le pays, à l'exclusion d'autres facteurs présentés dans de nombreuses études comme significativement influents sur la mortalité d'un individu tels que la profession, la catégorie socio-professionnelle, le statut fumeur ou non-fumeur, la situation matrimoniale ainsi que les ressources disponibles au cours de la retraite. Si le portefeuille de souscripteurs du PVH de l'entreprise prêteuse diffère significativement des rentiers observés pour la construction des tables en termes de combinaison et de proportions de représentation des modalités possibles de ces facteurs explicatifs de la mortalité non inclus dans notre modèle, alors ce portefeuille pourrait se comporter très différemment de nos prévisions sur le plan de la mortalité. Ce modèle repose également sur l'hypothèse d'indépendance des décès des co-emprunteurs du PVH, ce qui ne sera pas systématiquement le cas en réalité notamment en cas de décès entraîné par un accident collectif des souscripteurs.

Quatrièmement, le réalisme de nos simulations de durée du prêt dépend de la validité des hypothèses que nous avons formulées pour pouvoir mettre en application un modèle de longévité dans notre situation particulière. Nous avons notamment décidé d'assimiler durée du prêt et durée de vie restante des souscripteurs du PVH éventuellement corrigé d'un délai de recouvrement en postulant un taux de remboursement anticipé nul. Les simulations de notre modèle de durée du prêt ne seront pas réalistes si le taux de remboursement anticipé observé est significativement supérieur à 0. Faute de données sur la mortalité des souscripteurs du PVH, nous avons introduit la possibilité d'un facteur de stress dont nous avons supposé qu'il est identique pour tous les âges, alors que rien n'interdit que sous-mortalité et sur-mortalité se côtoient dans les faits pour un même individu par rapport à nos tables de base, avec des coefficients distincts pour des plages d'âges distinctes. Nous faisons également l'hypothèse que la répartition des décès entre deux âges de la table peut être calculée par interpolation cubique, ce qui constitue une approximation supplémentaire pour nos simulations.

Dans ce Chapitre 2, nous sélectionnons et détaillons le modèle que nous utiliserons lors de la cinquième partie pour simuler l'évolution des taux au cours de la durée du contrat de PVH, afin de pouvoir simuler différentes courbes de taux d'actualisation au jour de prise à effet du contrat de PVH lesquelles nous permettront de calculer la valeur actuelle des flux engendrés par le PVH et par conséquent la valeur de la fonction objectif de rentabilité pour chacune des simulations. Pour cela, nous rappelons la définition de la notion de facteur d'actualisation, exposons puis adaptons à nos besoins le modèle des taux de Vasicek, présentons notre technique de calibration et fournissons notre estimation des paramètres du modèle puis critiquons notre modélisation afin de dégager des pistes d'amélioration qui seront reprises lors de la partie six de ce mémoire.

SECTION 2.1 : LES FACTEURS D'ACTUALISATION

Afin de calculer la valeur actuelle de la rentabilité dégagée par le PVH, nous avons besoin de calculer les facteurs d'actualisation applicables à chaque date de flux que générera le PVH. Pour chaque flux, le facteur d'actualisation associé portera sur la période débutant au moment où l'on cherche à calculer la rentabilité actualisée des flux futurs du PVH et se terminant à la date de versement ou de perception du flux.

2.1.1 : Définition formelle

Le facteur d'actualisation ou *discount factor* (DF) en anglais s'appliquant à la période commençant en t et finissant en T se notera $DF(t,T)$ et peut être calculé comme suit :

$$DF(t,T) = \frac{1}{(1 + ZC(t,T))^{(T-t)}}$$

Où $ZC(t,T)$ est le taux Zéro-Coupon annuel applicable à la période allant de t à T , qui sont toutes deux des maturités exprimées en nombre d'années.

Pour rappel le taux zéro-coupon applicable à la période $[t ; T]$ est le taux applicable sur la période $[t ; T]$ à un produit financier acheté en t versant un unique flux à maturité T , tel qu'une obligation zéro-coupon achetée en t arrivant à maturité en T .

Plus précisément : soit $P(t,T)$ le prix versé à l'instant t pour l'achat d'une obligation zéro-coupon versant un flux unique de 1 € à l'instant T . Alors $ZC(t,T)$ et $P(t,T)$ sont liés par la relation suivante :

$$P(t,T) \times (1 + ZC(t,T))^{T-t} = 1$$

Par conséquent :

$$P(t,T) = DF(t,T) = \frac{1}{(1 + ZC(t,T))^{(T-t)}}$$

Ce qui nous permet d'établir l'égalité entre le facteur d'actualisation sur $[t ; T]$ et le prix à payer en t pour recevoir en T un flux unique de montant 1 €.

Les formules fournies ci-dessous correspondent à des intérêts composés annuellement et sont valables dès que $T-t$ est supérieure à un an. Pour un instrument financier à composition des intérêts annuelle, les intérêts sont perçus chaque année et remplacés pour la durée de vie restante de l'instrument financier au même taux que le capital. Au contraire, dans le cas particulier d'une durée $T-t$ inférieure à un an, on applique la formule de l'intérêt simple suivante pour calculer l'actualisation:

$$DF(t,T) = \frac{1}{(1 + ZC(t,T) \times (T - t)/360)}$$

Avec :

$$P(t, T) \times (1 + ZC(t, T) \times (T - t)/360) = 1$$

Où la durée $T-t$ est exprimée en nombre de jours et où le taux zéro-coupon est exprimé avec une composition annuelle. Pour un instrument financier avec des taux d'intérêts simples, les intérêts sont perçus mais pas remplacés.

2.1.2 : Passage en temps continu

Dans la sous-section précédente, nous avons raisonné avec des taux d'intérêts annuels soit en termes de composition des intérêts dite discrète. Dans ce cadre, les intérêts cumulés au cours de la première année ne portent intérêt qu'à partir du moment où ils sont ajoutés au capital prêté au bout d'un an, les intérêts cumulés pendant la deuxième année ne porteront intérêt que lorsqu'ils seront ajoutés au capital et aux intérêts de la première année au bout de deux ans et ainsi de suite.

De façon générale, plus la fréquence de composition des intérêts est élevée, soit plus la période comprise entre deux intégrations des intérêts au montant qui porte intérêt est courte, et plus la dette s'accroît rapidement, toutes choses égales par ailleurs.

Lorsqu'un montant M est investi pendant n années à un taux annuel r avec une composition annuelle des intérêts, la somme récupérée à l'issue des n années est : $S = M \times (1 + r)^n$. Si la composition des intérêts n'est pas annuelle mais a lieu m fois par an, cette somme serait de : $S = M \times (1 + \frac{r}{m})^{nm}$.

Lorsque m tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque les intérêts sont composés en continu, la somme récupérée sera : $S = Me^{rn}$ ou e^x représente la valeur de la fonction exponentielle au point réel x .

Soit r_c un taux continu et r_m le taux équivalent pour une composition m fois par an. Ces deux taux sont liés par la relation : $S = M \times (1 + \frac{r_m}{m})^{nm} = Me^{r_c n}$.

Pour l'actualisation en temps continu, on utilise la formule suivante : $M = \frac{S}{e^{r_c n}} = S \times e^{-r_c n}$.

En temps continu, la relation qui lie le prix de l'obligation zéro-coupon au taux d'actualisation et au taux zéro-coupon de compositions continues est donc la suivante :

$$P(t, T) = DF(t, T) = e^{-(T-t) \times ZC(t, T)}$$

C'est sur cette relation que nous nous baserons lors de notre modélisation des taux.

2.1.3 : Notion et sélection du taux d'actualisation

Le taux d'actualisation peut être conçu comme la compensation monétaire (en % du montant prêté) de la privation d'une somme d'argent pendant une certaine période.

En effet 1 € aujourd'hui a plus de valeur qu'1 € perçu à une date future t car l'euro perçu aujourd'hui peut être placé sur les marchés financiers et fructifié et l'investisseur pourra récupérer en t son euro accru d'une valeur monétaire positive que l'on qualifiera d'intérêt. Si je sais que je peux percevoir en t du fait de cet investissement une valeur de $(1 + \tau)^t$ alors mon taux d'actualisation annuel sur la période $[0 ; t]$ où t est exprimé en années est de τ , avec t ici supérieur à un ans. Je peux inversement considérer que la valeur aujourd'hui d'un montant de 1 € perçu en t est de $(1 + \tau)^{-t}$ puisqu'en investissant cette somme aujourd'hui sur le marché je toucherai $(1 + \tau)^t \times (1 + \tau)^{-t} = 1$ € en t . Le taux d'actualisation permet donc le calcul de la valeur aujourd'hui ou valeur actuelle d'un flux perçu ou versé à une date future.

Un taux zéro-coupon est un taux d'actualisation qui s'applique à un investissement ne versant qu'un unique flux à maturité. Ils sont le plus souvent déterminés à partir de l'observation des obligations d'Etat solvables, si l'on veut calculer le taux d'actualisation sans risque, des obligations émises par une entreprise spécifique ou à partir d'indices interbancaires tels le LIBOR ou l'EURIBOR, si l'investisseur est une entreprise qui cherche à actualiser ses

flux avec un taux d'actualisation qui reflète son propre coût de refinancement ou la rentabilité de ses propres activités.

Le choix du taux d'actualisation reflète les exigences de l'investisseur : par exemple s'il n'attend qu'une rentabilité dans l'absolu de son investissement, il pourra choisir comme taux d'actualisation son propre coût de refinancement, c'est-à-dire le taux d'intérêt qu'il aurait ou a lui-même payé pour pouvoir emprunter le montant prêté à la date du prêt pour une durée égale à celle de son investissement. Le taux d'actualisation d'un établissement financier qui exige de ses investissements une rentabilité absolue pourra ainsi être calculé comme la somme d'un indice de refinancement interbancaire et de son spread spécifique, qui représente son surcoût en % du montant prêté par rapport au coût d'intérêt que verserait un investisseur sans risque qui peut emprunter au taux de refinancement interbancaire. Par contre un investisseur plus exigeant peut attendre une rentabilité relative de son investissement par rapport aux autres opportunités d'investissement qu'il aurait pu saisir. Le taux d'actualisation que choisira un investisseur exigeant pourra par exemple correspondre au taux d'intérêt qu'il aurait pu toucher sur le type d'investissement qu'il pratique le plus couramment (surplus de rentabilité relativement à l'activité principale de l'investisseur) ou au taux d'intérêt maximum qu'il touche sur l'ensemble de ses activités d'investissement (surplus de rentabilité relativement à l'activité la plus lucrative de l'investisseur). Le taux d'actualisation d'un établissement financier qui exige de ses investissements une rentabilité relative pourra ainsi être calculé comme la somme d'un indice de refinancement interbancaire, de son spread spécifique, et de la marge que dégagerait l'activité qui sert de référence à la comparaison, laquelle est égale à la différence entre le taux d'intérêt que rapporte cette activité et la somme de l'indice de refinancement interbancaire et du spread spécifique à l'entreprise. L'indice interbancaire de refinancement, le spread et la marge sont susceptibles de varier et le plus couramment de croître avec la durée et la maturité de l'investissement.

2.1.4 : Nécessité d'un modèle de taux d'intérêts

Pourquoi avons-nous besoin d'un modèle de taux d'intérêts ?

La question s'impose puisque d'une part, nous n'avons besoin des facteurs et taux d'actualisation que sur la période débutant au moment du calcul de la rentabilité du PVH, donc au moment de détermination des taux et montants prêtés et se terminant au moment de la maturité des flux, et d'autre part nous savons qu'à chaque moment nous pouvons nous procurer les valeurs des zéro-coupons pour les maturités que l'on souhaite à partir des courbes zéro-coupons publiées par des organismes tels que le CNO en France ou des entreprises comme Bloomberg ou bien encore à partir des prix des instruments financiers commercialisés sur le marché, éventuellement interpolés si la maturité de nos flux ne correspond pas à une maturité d'instrument financier présente sur le marché.

Les courbes de taux zéro-coupons associent à une maturité en ordonnée, le taux zéro coupon s'appliquant à une période débutant à la date de la courbe et terminant à la date de maturité correspondante en ordonnée. Notre première intuition est d'actualiser, au jour de la détermination des taux et quotité, les flux dont nous aurons au préalable modélisé les dates de versement ou perception avec la courbe de zéro-coupons datée de ce jour. Cependant, la courbe des taux se déforme au cours du temps avec l'évolution de la santé économique de chaque Etat, secteur et investisseur particulier. Le taux zéro-coupon applicable pour un investisseur demain sur une période $[0; t]$ n'est pas nécessairement identique au taux zéro-coupon applicable pour ce même investisseur aujourd'hui sur une période $[0; t]$, où 0 représente l'instant auquel le taux est calculé.

Un taux zéro-coupon sur la période $[0; T]$ calculé au temps t , ne sera réellement applicable que si l'investisseur contracte à la date t un contrat à ce taux et pour une maturité T . Or dans le cas du PVH, l'entreprise prêteuse ne peut sécuriser à la date de détermination des taux et quotité des contrats applicables à la maturité des flux du PVH au taux commercialisés en ce jour car la maturité des flux du PVH est précisément incertaine. Les taux d'actualisation utilisés pour calculer la valeur actuelle des flux du PVH devront donc tenir compte des déformations de la courbe des taux au cours de la vie du PVH, pour cela nous devons modéliser ces déformations, soit l'évolution de la valeur des taux dans le temps. Un taux qui ne peut être sécurisé a priori ne pourra être connu avec certitude

qu'à postériori, ce pourquoi nous devons anticiper l'évolution des taux au cours de la vie des contrats de PVH que nous considérons.

SECTION 2.2 : MODELE DES TAUX DE VASICEK

2.2.1 : Critères de qualité d'un modèle de taux :

La qualité d'un modèle de taux dépend de son respect des contraintes suivantes : prise en compte et reproduction des propriétés empiriques observées sur la courbe de taux, facilité et rapidité de mise en pratique, facilité d'interprétation et satisfaction du principe de non arbitrage soit du principe selon lequel il ne peut exister de stratégie financière permettant à un investisseur de réaliser un profit certain à l'avenir sans avoir à réaliser d'investissement initial. Un bon modèle de taux repose sur un nombre limité d'hypothèses, lesquelles doivent être réalistes et cohérentes sur le plan théorique.

Les propriétés empiriques observées sur la courbe des taux qu'un modèle de taux doit être capable de reproduire afin d'être réaliste sont les suivantes : premièrement, les taux d'intérêt ne sont pas négatifs. En effet, il semble logique de ne pas vouloir prêter son argent à taux négatif, dans quel cas la somme des remboursements et intérêts perçue est inférieure au montant prêté. Il faut nuancer cette vérité générale en distinguant les taux nominaux, c'est-à-dire les taux effectivement payés, qui sont toujours positifs des taux d'intérêt réels, égaux aux taux d'intérêt nominaux diminués de l'inflation, qui sont presque toujours positifs mais qu'une forte inflation peut rendre négatifs. Deuxièmement, on constate qu'un effet de retour à la moyenne opère sur les taux. Plus précisément, les périodes de hausses conduisant à des valeurs de taux élevées sont statistiquement plus souvent suivies de périodes de baisses des taux que de périodes de hausses et inversement. Tout se passe comme si les taux oscillaient autour d'une valeur de taux « fixe » dont ils ne peuvent s'éloigner de manière significative et durable. Troisièmement, il semble que la volatilité des taux décroisse avec leur maturité, en d'autres termes : les taux court termes tendent à enregistrer des variations plus importantes au cours du temps que les taux long-terme. Enfin, les taux pour différentes maturités ne sont pas parfaitement corrélés. Cela signifie par exemple qu'une hausse, respectivement baisse, d'un taux zéro-coupon de maturité 1 an n'entraînera pas toujours une hausse, respectivement baisse, proportionnelle avec un coefficient de proportionnalité constant du taux zéro-coupon de maturité 2 ans. En pratique, cela s'exprime par des coefficients de corrélation linéaire entre taux de maturités différentes inférieurs à 1. Plus la différence de maturité est élevée entre les taux, plus le coefficient de corrélation linéaire tend à être faible.

Dans ce mémoire nous cherchons à effectuer des prédictions de taux sur des horizons de temps qui peuvent être long. Nous ne faisons pas de l'ajustement entre la courbe de taux actuelle et la courbe de taux initiale calculée par le modèle un objectif prioritaire. C'est pourquoi nous nous orientons vers un modèle de taux d'équilibre, c'est-à-dire un modèle qui s'appuie sur des hypothèses portant sur le comportement de certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court, plutôt que vers un modèle de taux fondé sur l'absence d'arbitrage, c'est-à-dire un modèle qui recherche un bon ajustement à la courbe des taux initiale et pour lequel elle est un *input*.

2.2.2 : Introduction au modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek est un modèle d'équilibre à un facteur qui permet de simuler les valeurs futures des taux courts et d'en déduire des valeurs futures pour les taux zéro-coupons. Il prend pour hypothèse de base que les taux zéro-coupons pour toute maturité peuvent être déduits de la valeur du taux court en cet instant, lequel sera déterminé par des paramètres certains dont une moyenne long terme des taux court, une vitesse de retour à la moyenne long-terme et une volatilité, par des valeurs de taux court passées et par un aléa gaussien. Ce modèle est facile à interpréter et pratique du point de vue de la mise en application et intègre et reproduit l'effet de retour à la moyenne.

2.2.3 : Définition du taux court

Soit $P(t,T)$ le prix à l'instant t d'une obligation zéro-coupon échéant en T . Soit $Z(t,T)$ le taux zéro-coupon continu applicable à la période $[t ; T]$. $Z(t,T)$, $P(t,T)$ et $DF(t,T)$ sont liés par la relation suivante :

$$P(t,T) = DF(t,T) = e^{-(T-t)*ZC(t,T)}$$

Le taux court, également appelé taux spot ou taux sans risque est la limite du taux continu moyen lorsque la durée de la période à laquelle le taux est applicable tend vers zéro. Mathématiquement, il est défini en t comme suit :

$$r(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} ZC(t, t + \theta)$$

2.2.4 : Hypothèse centrale du modèle de Vasicek

Vasicek fait l'hypothèse que le taux court suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t$$

Où W_t est un mouvement Brownien sous la probabilité historique P et a , b et σ des paramètres constants dans le temps et strictement positifs.

Ce modèle a été conçu afin d'intégrer et de reproduire l'effet de retour à la moyenne qui est constaté de façon empirique sur les taux d'intérêts. En effet, lorsque $r(t)$ est inférieur à b , l'espérance de la variation instantanée ou encore le drift de $r(t)$, égale à $a(b - r(t))$ est positive et le taux court aura tendance à augmenter et à se rapprocher du paramètre b . Lorsque $r(t)$ est supérieur à b , le drift est négatif, donc le taux court aura tendance à diminuer et à se rapprocher de b . Par ce mécanisme, le taux court qui s'éloigne du paramètre b aura tendance à s'en rapprocher à nouveau.

Le paramètre b peut être interprété comme la moyenne à long terme ou encore la limite asymptotique du taux court, il est la valeur de taux autour duquel le taux court oscille au cours du temps.

Le paramètre a peut être interprété comme une force de rappel, la vitesse de retour du taux à sa limite asymptotique. En effet, a est le paramètre qui, au sein du drift, permet d'amplifier, lorsque $a > 1$, ou minimiser, lorsque $a < 1$, l'impact de l'écart entre le taux asymptotique et le taux court sur la valeur de la variation instantanée attendue. Enfin, le paramètre σ détermine la volatilité du processus de taux court, l'ampleur de l'impact de l'aléa représenté par le mouvement brownien sur les variations instantanées du taux court.

Le taux court est modélisé comme un processus oscillant autour d'une valeur de taux long terme, avec une certaine vitesse de retour à la moyenne en cas d'écartement, auquel s'ajoute un facteur purement aléatoire gaussien. Cet aléa représente les déviations par rapport au modèle des simples oscillations.

2.2.5 : Expression des taux zéro-coupon et des facteurs d'actualisation dans le modèle de Vasicek:

Le modèle de Vasicek offre l'avantage, outre la reproduction du phénomène de retour à la moyenne des taux d'intérêts, de fournir une formule analytique explicite pour le calcul des taux courts, des taux zéro-coupon et des facteurs d'actualisation.

En effet, l'application du Lemme d'Ito à la fonction $f(r(t), t) = e^{at}(r(t) - b)$ permet de résoudre l'équation stochastique différentielle de Vasicek comme suit :

$$r(t) = r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW(s)$$

En effectuant un changement de mesure de probabilité de la mesure de probabilité historique P à la mesure de probabilité risque neutre Q sous laquelle les processus de prix des zéro-coupons actualisés sont des martingales, on peut établir les formules explicites suivantes pour les taux zéro-coupon et les facteurs d'actualisation :

$$DF(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$$

$$\text{Où } B(t, T) \text{ vérifie l'équation suivante : } B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

$$\text{Et où } A(t, T) \text{ admet pour formule : } A(t, T) = \exp \left[\left(B(t, T) - (T - t) \right) \left(b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) - \frac{\sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right]$$

Avec $b^* = b - \frac{\sigma\lambda}{a}$, où λ est le prix de marché du risque, supposée constante par rapport au temps et à la valeur du temps court.

L'expression des zéro-coupon se déduit de l'expression des facteurs d'actualisation :

$$ZC(t, T) = \frac{-\ln DF(t, T)}{(T - t)}$$

Nous fournissons les démonstrations de ces résultats en annexe C.1).

SECTION 2.3 : ADAPTATION DU MODELE A NOS OBJECTIFS

Le modèle de Vasicek nous permet de simuler la valeur des taux zéro-coupons aux instants futurs de notre choix et pour la maturité de notre choix selon une loi gaussienne connue.

En effet, grâce à la valeur du taux court à un instant donné qu'on désignera par 0, on pourra simuler des valeurs du taux court en l'instant $t > 0$ de notre choix et en déduire la valeur de $D(t, T)$ et de $ZC(t, T)$ pour toute maturité $T > t$. Nous avons besoin d'intégrer ces simulations des taux futurs pour déterminer le taux applicable sur les durées $[0 ; t_i]$, où 0 désigne l'instant où l'on veut déterminer les taux et quotités du PVH et où les t_i désignent les maturités des flux générés par le PVH, incertaines à l'instant 0.

On suppose que le prêteur du PVH peut sécuriser son taux de refinancement ou le taux auquel il prête dans son activité de référence par des contrats de durée Δt . Δt représente ainsi l'horizon de fiabilité des taux d'actualisation pour le prêteur.

Pour chacune de nos simulations, nous débiterons par déterminer le maximum des t_i que l'on appellera T . Selon les cas et les modalités du contrat du PVH, T pourra être égale à la date de disparition du groupe emprunteur, à la date du dernier flux de produit ou de coût connexe, ou à la date du dernier déblocage si les parties se sont mis d'accord a priori sur un nombre de déblocages fixe et si elles ont convenu que les déblocages seraient versés aux héritiers après la disparition des emprunteurs.

Une fois T déterminé, à partir d'un r_0 donné, nous simulerons les valeurs $r(i \times \Delta t)$ où $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec

$$n \times \Delta t = \begin{cases} T & \text{si } T \text{ est un multiple de } \Delta t \\ \left(\text{Ent} \left(\frac{T}{\Delta t} \right) + 1 \right) \times \Delta t & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous en déduirons les $ZC(i \times \Delta t, i \times \Delta t + 1)$ où $i \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ puis les et les $DF(i \times \Delta t, i \times \Delta t + 1)$ applicables à l'entreprise déductibles des taux zéros coupons augmentés de sa prime de risque.

Nous reconstruirons enfin la courbe des taux d'actualisation, associant à une maturité t , le facteur d'actualisation $DF^*(0, t)$ de façon récursive comme suit:

$$DF^*(0, i \times \Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ DF^*(0, (i - 1) \times \Delta t) \times DF((i - 1) \times \Delta t, i \times \Delta t) & \text{pour } i \in \llbracket 1; n \rrbracket \end{cases}$$

Les taux sont continus, les facteurs d'actualisation correspondent donc à des exponentielles de taux continus pondérés par des durées en valeur opposée, ce qui nous permet d'utiliser le produit pour reconstituer un taux d'actualisation sur une période à partir des taux d'actualisation applicables à des segments de cette période qui en forment une partition.

Les facteurs d'actualisation portant sur les périodes $[0; t_i]$ sont ensuite déduits par interpolation cubique à partir des $n+1$ DF* simulés et connus.

SECTION 2.4 : DONNEES ET CALIBRATION DU MODELE

Nous calibrons notre modèle de taux sur une courbe de facteurs d'actualisation datant du 30 septembre 2013 publiée par le Comité de Normalisation Obligatoire sur son site. Les valeurs des facteurs d'actualisation sont connues pour les maturités entières comprises entre 0 et 60 ans. Pour le taux court initial, nous choisissons la valeur de l'Euribor 1 semaine du 30 septembre 2013.

L'hypothèse implicitement formulée est que le taux de référence choisit par l'entreprise pour actualiser ses flux est celui qui a servi à construire la courbe de facteurs d'actualisation du CNO. Dans le cas contraire, l'entreprise devra calibrer son modèle de taux sur le taux qu'elle choisit comme référence pour actualiser les flux de ses PVH.

La technique de calibration pour laquelle nous optons est la régression des moindres carrés : nous déterminons les paramètres a , b et σ qui minimisent la somme des écarts au carré entre les facteurs d'actualisation fournis par le CNO et les facteurs d'actualisation calculés via les formules de Vasicek pour chacune des maturités comprises entre 0 et 60 ans.

L'outil de calibration est le solveur d'Excel.

En calibrant le modèle sur les données de prix de zéro coupons actuels plutôt que sur l'historique des valeurs du taux court, nous avons estimé les valeurs de paramètres de Vasicek dans l'univers risque neutre plutôt que dans l'univers réel. Autrement dit nous avons estimé les valeurs de a , σ et de b^* .

Grâce à la formule $b^* = b + \frac{\sigma \lambda}{a}$, nous pouvons déduire de nos trois estimations une estimation pour b pour une valeur de λ donnée. Nous choisissons la valeur $\lambda = -1,2$ établie par Riaz Ahmad et Paul Wilmott dans "The market price of interest risk: Measuring and modelling fear and greed in the fixed-income markets".

Nous fournissons en annexe C.2) l'estimation ponctuelle des paramètres de Vasicek résultant de cette calibration.

Comme le montre le graphe restitué en annexe C.3) notre calibration minore les DF pour les maturités les plus courtes et majore les DF pour les maturités les plus longues. Puisque les sorties de trésorerie du prêteur se font dès l'initiation du contrat et puisque les rentrées d'argent principales se font à terme, ceci correspond à une hypothèse prudente de la part du prêteur. Puisque nous cherchons à prédire des valeurs de taux futurs sur un horizon de temps long, l'ajustement de la courbe de taux d'actualisation calculée par le modèle à la courbe actuelle n'est pas primordiale.

SECTION 2.5 : CRITIQUE DU MODELE

Le modèle de Vasicek a été critiqué pour plusieurs de ses hypothèses ainsi que pour les résultats qu'il fournit.

Les critiques que nous allons énoncer limitent le réalisme de nos simulations. Premièrement, le choix d'un aléa gaussien, dont la variance est constante et strictement positive, qui par conséquent peut prendre des valeurs négatives implique que la probabilité de simuler des taux courts négatifs n'est pas nulle, ce qui va à l'encontre de l'hypothèse de non arbitrage. Surtout, un modèle de retour à la moyenne markovien n'est pas très réaliste pour des durées longues de PVH. Deuxièmement, ce modèle suppose des paramètres de moyenne long-terme b et de vitesse de retour à la moyenne a constants au cours du temps et surtout une volatilité des taux courts constante au cours du temps ce qui est contredit par des observations empiriques de la courbe associant à une date en ordonnée le taux court à cette date en abscisse. Troisièmement, ce modèle n'est pas assez flexible pour reproduire toutes les formes de courbe de taux observées sur le marché et les taux zéro-coupons qu'il permet de simuler peuvent différer sensiblement, parfois de l'ordre de plusieurs %, des taux observés sur le marché. Quatrièmement,

les taux simulés avec ce modèle sont parfaitement corrélées entre eux pour des maturités distinctes, ce qui n'est pas le cas des taux observées empiriquement. Cela est dû à la nature mono-factorielle de ce modèle.

Il conviendrait de plus de vérifier et d'établir que l'on peut bien utiliser la valeur de -1,2 pour le prix de marché du risque.

Enfin lors de la conception de notre outil nous adopterons, pour des raisons pratiques, l'hypothèse d'un Δt ou d'un horizon de fiabilité des taux constant et identique pour tous les types de flux : déblocages, coûts, produits et remboursement du prêt. Nous omettons la possibilité que la maturité de certains flux soient certains et que l'entreprise puisse sécuriser les taux associés à ces flux, par exemple si les parties conviennent que les flux continueront à être versés après la disparition du groupe emprunteur. Dans ce cas il faut remplacer nos simulations de facteurs d'actualisation par les facteurs d'actualisation déduits des taux sécurisés. Nous ferons également l'hypothèse pour des raisons pratiques que les spreads et marges que l'entreprise peut souhaiter intégrer à ses facteurs d'actualisation sont constants pour toutes les maturités de taux.

CHAPITRE 3 : EVOLUTION DE LA VALEUR DU SOUS-JACENT

Dans ce Chapitre 3, nous analysons des données immobilières afin de sélectionner le modèle de l'évolution des prix immobiliers dont nous nous servons lors de la partie cinq afin de simuler des valeurs du bien sous-jacent au terme du contrat de PVH. Pour cela, nous introduisons la modélisation des valeurs immobilières en évoquant ses difficultés et les modèles couramment utilisés à cette fin, nous menons une analyse préliminaire de la série temporelle des prix immobiliers afin de déterminer quel type de modèle nous semble convenir le mieux, nous présentons les modèles dynamiques à changements de régime markoviens, présentons les résultats de la calibration de ce modèle à partir de nos données immobilières puis critiquons notre modélisation.

SECTION 3.1 : INTRODUCTION AUX MODELES DE PRIX IMMOBILIERS

3.1.1 : Difficultés de la modélisation immobilière

La modélisation des prix immobiliers est une tâche délicate qui pose de nombreuses difficultés. La première de ces difficultés consiste en la collecte de données de prix immobiliers, car il existe en France un manque de données immobilières de source publique. Les deux principaux indices des prix immobiliers sont publiés par l'INSEE et la FNAIM. Les données de prix immobiliers mises à disposition du public correspondent à des données générales, puisqu'il s'agit d'indices et constituent des séries temporelles courtes et récentes. Notamment les données mises à disposition par l'INSEE sur son site en ce qui concerne les prix des logements anciens en France métropolitaine correspondent à une série d'indices trimestriels débutant en 1996, pour un total de moins de 100 données. En ce sens, la robustesse des modèles immobiliers devrait s'améliorer au fil du temps avec l'acquisition de bases de données plus conséquentes. Le « Rapport sur le Prêt Viager Hypothécaire » par FRIGGIT Jacques, JACHET Nicolas, TAFFIN Claude et VORMS Bernard paru en 2004 insiste sur l'importance de la transparence du prix des logements et la nécessité de la constitution d'une base de données des prix immobiliers complète, détaillée et aisément accessible au public. La difficulté à modéliser les prix immobiliers et à collecter des données tient également à la nature de l'actif immobilier qui n'est pas liquide. Les données qui peuvent être obtenues sur le prix d'un même bien ne sont collectées qu'aux moments de la revente de ce bien, lesquelles ont lieu à des intervalles de temps se comptant le plus souvent en années. Pour un même bien immobilier, le nombre de données de prix qui sont collectées au cours du temps est donc très limité au regard du nombre de données qui pourraient être collectées sur la valeur d'autres investissements classiques comme une action. Deuxièmement, la modélisation des prix immobiliers est compliquée par le grand nombre de variables et paramètres influant sur ceux-ci, le tout à différent niveaux. Au niveau national et macroéconomique, Ogbonna Nneji, Chris Brooks et Charles W.R. Ward évoquent ou mettent en avant, dans l'article de 2012 « House price dynamics and their reaction to macroeconomic changes », l'existence d'interactions entre les taux d'intérêts, le taux d'actifs, la masse monétaire, la production industrielle

et les prix immobiliers. Jacques Friggit met également en avant la corrélation qui peut exister entre les prix immobiliers et les revenus des ménages français. Au niveau local et régional, le prix du bien pourra notamment changer selon qu'il soit situé à la campagne, dans une ville de plus ou moins grande taille, en centre-ville ou en périphérie. Il pourra dépendre dynamisme de la région, des commerces environnants, de l'accessibilité des transports en commun et des politiques publiques d'aménagement. Au niveau individuel, le prix du bien dépendra de ses caractéristiques comme son type : maison ou appartement, son ancienneté, sa taille, l'entretien et les aménagements qu'y apporteront ses propriétaires ou locataires. Les modèles immobiliers pourront donc différer en finesse. Les entreprises prêteuses disposant de bases de données exhaustives et détaillées pourront tenir compte de ces trois niveaux de variables et de paramètres pour élaborer des prédictions immobilières dans le meilleur des cas personnalisées selon le bien immobilier particulier considéré. L'efficacité des modèles des autres entreprises prêteuses, qui se baseront sur des indices plus généraux et nationaux pour effectuer leurs prédictions dépendra de leur capacité à diversifier leurs portefeuilles immobiliers sur les deux dimensions locales et individuelles. La troisième difficulté est que la loi des prix immobiliers en France métropolitaine semble avoir changé au cours du temps par le passé. Des périodes de croissances régulières, de bulles immobilières et de krach se sont ainsi succédées. Nous aborderons plus en détail cette difficulté dans les sections suivantes.

3.1.2 : Modèles immobiliers couramment employés

Contrairement à la longévité, il semble qu'il n'existe pas de modèle immobilier légal et reconnu publiquement et officiellement. Contrairement aux taux d'intérêts, il n'existe pas une dizaine de modèles largement documentés qui explicitent les variables à prendre en compte et la façon dont elles doivent être prises en compte et dont il s'agit, une fois le modèle sélectionné, de déterminer les paramètres. La documentation concernant les modèles immobiliers apparaît comme étant bien plus diversifiée tout en étant moins volumineuse.

Les prix immobiliers sont souvent représentés comme des fonctions linéaires déterministes d'autres variables qui peuvent être macroéconomiques ou représenter les caractéristiques du bien immobilier agrémentées d'un aléa dont la loi est connue, le plus souvent gaussien. Parmi les modèles documentés, les modèles hédoniques sont couramment employés pour déterminer les prix immobiliers. Ils consistent à assimiler le bien immobilier au vecteur qui décrit ses caractéristiques. Les prix immobiliers sont alors estimés sous la forme d'une fonction linéaire de ces caractéristiques dont les coefficients sont à estimer par régression. C'est notamment la méthode utilisée pour l'élaboration des indices de prix immobiliers nationaux. Ces modèles sont appropriés à l'estimation d'un prix immobilier en temps réel à partir de l'information accumulée par le passé mais ils ne se prêtent pas bien à la modélisation des évolutions futures des prix immobiliers car ces prédictions nécessiteraient de prédire en premier lieu les valeurs futures des variables explicatives. Des modèles économiques ont également été élaborés pour déterminer les prix immobiliers en se basant sur le principe d'équilibre de l'offre et de la demande ou en assimilant prix immobilier et valeur nette présente des loyers futurs que ce bien pourrait permettre à ses propriétaires de toucher. Ce dernier modèle est cependant limité puisque les prix des loyers sont restés relativement stables contrairement aux prix de vente des logements anciens. Il ne permet donc pas de modéliser des inflations ou des chutes de prix telles que celles observées en temps respectivement de bulle et de krach. Il existe également des modèles stochastiques dont l'ambition est de modéliser la dynamique du processus des prix ou des rendements immobiliers sans introduire de variables explicatives autres que les prix ou rendements immobiliers eux-mêmes. Notamment des modèles économétriques de type ARIMA sont utilisés pour modéliser la dynamique des prix immobiliers. Le modèle de Black-Scholes, par lequel on considère que la valeur future du bien est déterminée par un paramètre de croissance μ , un paramètre de volatilité σ , une valeur initiale, une date de maturité et un aléa gaussien, est également particulièrement représenté parmi les modèles immobiliers employés. Afin d'introduire une modélisation un peu plus personnalisée des prix immobiliers, les paramètres de Black-Scholes pourront eux-mêmes être fonction des caractéristiques du bien et de sa notation. May et Szymanoski mentionnent ainsi dans leur article « Features of HECM Model » de 1989 que les rendements immobiliers du programme HECM étaient alors modélisées par une loi gaussienne d'espérance 4 % et d'écart type 10 %.

Les prix immobiliers sont souvent modélisés par des mouvements browniens géométriques, comme suit:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + \sigma dW_t \Rightarrow P_t = P_0 \times \exp(\mu t + W_t),$$

Où P_t est le prix du bien immobilier à l'instant t et W_t est un mouvement brownien d'espérance 0 et d'écart-type $\sigma\sqrt{t}$.

Le choix de ce modèle peut être interprété comme suit : le taux de rendement de chaque bien immobilier est considéré comme une observation indépendante d'une variable distribuée selon une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ . La loi des rendements cumulés suit donc une loi normale d'espérance μt et d'écart type $\sigma\sqrt{t}$.

Le raisonnement derrière le choix de ce modèle s'articule ainsi : les prix immobiliers observés semblent avoir augmenté de façon exponentielle au cours du temps, et leur volatilité semble ne pas avoir été constante par le passé. Or modéliser les prix par un mouvement brownien géométrique signifie que l'on s'attend à ce que le niveau des prix croisse de façon exponentielle au cours du temps et à ce que sa volatilité augmente également au cours du temps, quoi que moins rapidement que le niveau des prix. Les prix ainsi modélisés ne sont donc pas stationnaires. Le choix d'une telle marche aléatoire implique que l'on considère que la meilleure prédiction des valeurs des prix immobiliers futurs est la valeur présente au taux de croissance près. Le processus est donc considéré comme n'ayant pas de mémoire, les valeurs des biens immobiliers passés ne constituent pas une information utile pour prédire les valeurs futures du bien. Des chocs aléatoires peuvent faire dévier les valeurs futures du bien de leur valeur attendue mais ceux-ci ne peuvent être prédits au moment présent.

L'une des plus grandes critiques adressée à ce modèle est la remise en question de l'hypothèse d'absence de mémoire des rendements. En effet, si lors des phases de croissance immobilière « stables » cette hypothèse peut paraître plausible, les phases de bulles immobilières auxquelles succèdent des krachs semblent être caractérisées par une corrélation des rendements dans le temps corrigée par un phénomène de type retour à la moyenne, où la moyenne est une fonction croissante du temps. Dans leur article « The Efficiency of the Market for Single-Family Homes » daté de 1989, Karl E. Case et Robert J. Shiller ont ainsi démontré l'existence d'une forme d'autocorrélation sur les marchés immobiliers.

Nous souhaitons élaborer un modèle qui nous permette de faire des prédictions des prix immobiliers futurs, de type probabiliste puisque nous voulons calculer une *Value-at-risk*. Nous ne disposons pas d'une base de données détaillée concernant les prix immobiliers. Nous baserons donc notre modèle sur des indices de prix des logements français généraux. Un tel modèle ne pourra être robuste que pour une entreprise qui dispose d'un portefeuille de biens immobiliers diversifiés, dans des proportions proches des proportions nationales, quant à leurs caractéristiques locales et individuelles. Pour élaborer ce modèle, nous commencerons par analyser les données en notre possession dans la section suivante.

SECTION 3.2: ANALYSES PRELIMINAIRES DE LA SERIE TEMPORELLE DES PRIX IMMOBILIERS

3.2.1 : Données

Les données que nous allons utiliser pour modéliser l'évolution des prix immobiliers sont constituées de 124 observations de fréquence annuelle d'indices des prix immobiliers couvrant la période allant de 1890 à 2013 et l'ensemble du territoire français. Parmi ces données, 46 données couvrant la période 1890-1935 sont issues du site internet du Centre d'Etudes Prospectives et d'Informations Internationales (CEPII), 60 données couvrant la période 1936-1995 sont disponibles sur le site internet du Conseil Général de l'Environnement et du Développement Durable et 18 données couvrant la période 1996-2013 correspondent à l'indice des prix des logements anciens en France métropolitaine de l'INSEE. Toutes ces données sont ramenées à la même échelle en prenant l'indice de l'année 1990 comme base 100.

3.2.2 : Analyse graphique des indices et des rendements logarithmiques immobiliers

Les graphiques sur lesquels portent cette sous-section sont restitués en annexe D)1.

Graphe des prix immobiliers :

Le graphique des indices des prix immobiliers permet d'identifier une tendance globale à la croissance exponentielle sur l'ensemble de la période 1891-2013, quoique ponctuée de baisses abruptes et significatives dont les deux plus remarquables visuellement ont lieu entre 1992 et 1995 et en 2009. On peut en tirer la première conclusion évidente que la série des indices des prix immobiliers en France n'est pas stationnaire entre 1891 et 2013.

Il semble également que la tendance suivie par ces indices ainsi que leur volatilité diffère sur des sous-périodes d'observation distinctes. Ainsi, il ressort visuellement que la tendance est quasi-nulle entre 1891 et 1949, tandis qu'elle est haussière de type exponentielle entre 1950 et 1991 puis entre 2000 et 2007 avec une pente plus importante entre 2000 et 2007 qu'entre 1950 et 1991. A première vue, on peut identifier deux ou trois types de comportements se succédant et s'entrecoupant sur le marché immobilier sur cette période : un comportement de type croissance modérée ou stabilité, un comportement de type croissance exponentielle et un comportement de type décroissance abrupte. Il semble également que le comportement du processus des indices immobiliers en termes de volatilité change au cours du temps : notamment la période de croissance de 2000 à 2007 semble plus déterministe, dans le sens où le tracé de la courbe est plus lisse, que la période de croissance de 1950 à 1991 dans laquelle les indices s'écartent par sous-périodes de la simple tendance déterministe exponentielle. Ces impressions visuelles sont à analyser avec précaution du fait des effets d'échelle qui peuvent masquer la volatilité des indices d'une période sur l'autre, notamment sur des périodes, telle que celle couvrant les années 1891 à 1950, pour lesquelles les indices immobiliers sont faibles. On constate que le régime de croissance modéré est le plus persistant, tandis que les périodes d'envolée abrupte des indices comme en 1987-1989 ou en 2005-2007 sont le plus souvent suivies de chutes des indices immobiliers. Des comportements identiques du processus ont tendance à se succéder dans le temps : notamment, les périodes de baisses, qui sont peu représentées sur l'échantillon de nos observations ont tendance à être regroupées au cours du temps. Schématiquement, une hausse est le plus souvent suivie d'une hausse tandis qu'une baisse est le plus souvent suivie d'une baisse. On interprète ces observations comme une persistance et une corrélation des comportements des indices immobiliers dans le temps.

Afin de tenter de stationariser la série des indices immobiliers, d'annuler les effets d'échelle et la tendance exponentielle qui peuvent nous induire en erreur, nous allons nous concentrer par la suite sur les rendements logarithmiques des indices immobiliers au cours de la période 1890-2013. Nous possédons 123 observations de ces rendements.

Graphe des rendements logarithmiques immobiliers :

La première observation que nous pouvons faire à partir de ce graphique est que la série des rendements logarithmiques immobiliers se rapproche plus visuellement d'une série stationnaire que la série précédemment observée. Les rendements semblent obéir à un certain phénomène de retour à la moyenne autour d'une valeur proche de 0 %, les variations des rendements autour de cette moyenne sont limitées et les valeurs des données n'explorent plus au cours du temps.

Cependant, plusieurs caractéristiques visuelles éloignent la série des rendements du concept de série stationnaire. Premièrement, la volatilité du processus, que l'annulation de la tendance exponentielle permet de révéler, semble différer significativement sur des sous-périodes d'observation distinctes. La volatilité des rendements est visiblement beaucoup plus importante de 1915 à 1945 qu'elle ne l'était entre 1890 et 1910. Deuxièmement, la valeur moyenne empirique des rendements semble également différer sur des sous-périodes distinctes : elle est proche de 0,1 % entre 1945 et 1965 contre 0 % entre 1890 et 1915.

Ce graphique semble finalement suggérer l'existence d'une autocorrélation des rendements immobiliers à différents instants puisqu'une tendance baissière globale peut être observée entre 1960 et 2013.

3.2.3 : Méthodologie Box-Jenkins

Nous choisissons donc à présent de suivre les étapes de la méthodologie Box-Jenkins pour acquérir une compréhension de la dynamique du processus des rendements logarithmiques, d'en explorer les propriétés et les autocorrélations.

Nous commençons par retirer deux données atypiques correspondant aux valeurs maximale et minimale de la série de données (voir annexe D.2)). Nos données sont corrigées de la saisonnalité, nous n'aurons point de correction à apporter aux données de ce point de vue-là. La fonction d'autocorrélation de la série temporelle des rendements logarithmiques immobiliers est géométriquement décroissante, tandis que sa fonction d'autocorrélation partielle n'est significative que pour un lag égal à un. L'autocorrélogramme de cette série restitué en annexe D.3) présente donc les caractéristiques de l'autocorrélogramme d'un processus autorégressif d'ordre 1 ou AR(1). L'inspection de la Q-statistique et de la probabilité nulle associée ne permet de rejeter pour un risque de 5 % l'hypothèse selon laquelle le premier coefficient de corrélation est nul. Le test augmenté de Dickey-Fuller mis en œuvre sur cette série de données restitué en annexe D.4) permet de rejeter l'hypothèse de l'existence d'une racine unitaire. On peut donc accepter au niveau de confiance 95% l'hypothèse selon laquelle le processus autorégressif d'ordre 1 avec constante des rendements immobiliers logarithmiques est stationnaire.

Un processus autorégressif d'ordre 1 semble adapté à la modélisation de la dynamique du processus des rendements logarithmiques immobiliers. Cette observation semble alignée sur la propriété de forte autocorrélation annuelle des variations de prix immobiliers que Jacques Friggit met en avant dans sa note sur « Le prix des logements sur le long terme ». Il explique que cette autocorrélation à un an génère une cyclicité qui est en partie due à la façon dont les investisseurs de marché tendent à extrapoler le passé récent pour former leurs anticipations des prix immobiliers futurs. Lorsque les investisseurs anticipent un marché à la hausse, ils ont tendance à acheter des biens immobiliers dans l'espoir de les revendre pour un prix supérieur au prix d'achat, et inversement. En ce sens le phénomène de hausse ou de baisse du marché immobilier s'auto entretient et ces états sont persistants. Il souligne en outre que l'autocorrélation des variations des prix immobiliers diminue avec le pas de temps et que les cycles du marché immobilier sont de durées variables.

Avant de procéder aux étapes suivantes de la méthodologie de Box & Jenkins qui consiste en l'analyse des coefficients et des résidus du modèle afin d'en déterminer la validité, nous devons spécifier explicitement celui-ci.

Nous voulons que notre modèle de rendements logarithmiques immobiliers intègre les trois observations que nos analyses préliminaires nous ont permis de dégager : premièrement des changements de comportement soit de distribution au cours du temps, deuxièmement une corrélation et persistance de ces comportements à court terme et troisièmement une dynamique qui repose sur une auto régression d'ordre 1. Nous présentons dans la section suivante un modèle conforme à ces trois exigences.

SECTION 3.3 : MODELES DYNAMIQUES A CHANGEMENTS DE REGIMES MARKOVIENS

3.4.1 Présentation du modèle :

Les modèles à changements de régimes markoviens ont été introduits dans les années 80 par Hamilton qui souhaitait modéliser le processus du PIB américain et ont depuis connu un grand essor. Ils permettent de modéliser des processus stochastiques qui se comportent de façon significativement différente au cours du temps, selon le contexte financier et économique et/ou politique et sont théoriquement appropriés pour la modélisation de variables économiques qui se comportent de façon distincte pendant les périodes de croissance ou de crise économique. Ils constituent un compromis entre la recherche de la modélisation temporelle du processus, sur laquelle se concentrent les processus ARIMA, et la volonté de refléter la distribution de la variable aléatoire en un moment t précis.

Il s'agit de modèles linéaires classiques dont les paramètres diffèrent en fonction d'un état sous-jacent non observable directement. L'état est une variable aléatoire discrète notée S_t qui prend des valeurs entières et qui contribue à l'intégration de la dimension temporelle dans ces modèles. Par exemple, si l'on considère que le marché immobilier est caractérisé par deux états distincts correspondant à un état de croissance et un état de

crise ou un état de stabilité et un état de volatilité élevée, S_t pourra prendre les valeurs 1 et 2 où l'évènement $\{S_t = 1\}$ signifie la réalisation d'une période de croissance ou de stabilité immobilière au cours de la $t^{\text{ième}}$ période et où $\{S_t = 2\}$ signifie la réalisation d'une période de crise ou de volatilité immobilière au cours de la $t^{\text{ième}}$ période. Dans le cadre du marché immobilier américain, Ogbonna Nneji, Chris Brooks et Charles W.R. Ward appliquent ce modèle en 2013 dans leur article « House price dynamics and their reaction to macroeconomic changes » en considérant trois états : un état de prospérité ou de forte hausse, un état de croissance stable et relativement modérée et un état de crise. On dénotera par la suite le nombre d'états par $M \in \mathbb{N}^*$.

Les modèles à changements de régimes markoviens offrent également un compromis entre les deux modèles économétriques les plus mis en avant : les modèles ARIMA et les modèles de décomposition tendance-cycle. En effet, le modèle linéaire spécifié peut correspondre à un modèle ARIMA et/ou intégrer une tendance déterministe au cours du temps. La variable S_t permettra quant à elle de modéliser la cyclicité du processus. La combinaison d'une dépendance temporelle de type markovienne et d'une modélisation statique simple de type gaussienne fait des modèles à changement de régime markoviens une classe de modèles apte à posséder un champ vaste de propriétés : allant des queues de distribution fines aux queues épaisses, d'une mémoire courte à une mémoire pseudo longue ainsi que de l'unimodalité à la multimodalité.

Un modèle dynamique à changements de régime markoviens est caractérisé par la combinaison de trois éléments : il s'agit d'un modèle à changement de régime, dont les coefficients dépendent donc de la réalisation d'une variable d'état sous-jacente. C'est un modèle markovien dans le sens où le processus d'état sous-jacent $(S_t)_t$ est modélisé par une chaîne de Markov. Le modèle est dynamique lorsque le modèle linéaire comporte des termes « lagés » c'est-à-dire indicés par une date antérieure à la date de la variable dépendante.

Nos analyses préliminaires nous incitent à adopter un modèle à changement de régime à mémoire courte, avec des probabilités d'état corrélées et des états persistants. Nous envisageons donc un modèle autorégressif d'ordre 1 à changements de régime markoviens :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \Delta PI_t = \beta_{S_t,0} + \beta_{S_t,1} \times \Delta PI_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t, \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_t \hookrightarrow N(0,1) \forall t \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \forall t, \forall k > 0 \end{cases}$$

Où ΔPI_t représente le rendement logarithmique des prix immobiliers entre l'instant $t-1$ et l'instant t , $\beta_{S_t,0}, \beta_{S_t,1}$ sont des paramètres du modèle dont il faut déterminer la valeur pour chacun des M états, σ_{S_t} représente le paramètre de volatilité du modèle, à déterminer également pour chacun des M états et ε_t est un bruit blanc gaussien. Dans la suite pour simplifier la notation on remplace ΔPI_t par y_t .

Afin de pouvoir modéliser des états corrélés et persistants, nous faisons l'hypothèse que S_t est une chaîne de Markov de premier ordre irréductible, apériodique, homogène, indépendante du processus des erreurs $(\varepsilon_t)_t$:

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; M \rrbracket^2, \forall s_{t-k} \in \llbracket 1; M \rrbracket, k \in \llbracket 2; t \rrbracket :$$

$$P(S_t = j / S_{t-1} = i, S_{t-2} = s_{t-2}, \dots, S_1 = s_1) = P(S_t = j / S_{t-1} = i)$$

On suppose constantes les probabilités de transition de l'état i à l'état j p_{ij} . La matrice de transition P constante associée à S_t est alors :

$$P = \begin{pmatrix} P(S_t = 1 / S_{t-1} = 1) & \dots & P(S_t = M / S_{t-1} = 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P(S_t = 1 / S_{t-1} = M) & \dots & P(S_t = M / S_{t-1} = M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M1} & \dots & p_{MM} \end{pmatrix}$$

La matrice de transition $P \in M \times M$ est stochastique car elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (P1) : \forall i, j \ p_{ij} \in [0; 1] \\ (P2) : \forall i \ \sum_{j=1}^M p_{ij} = 1 \end{cases}$$

La propriété (P2) découle du fait que les évènements $\{S_t = 1 / S_{t-1} = i\}, \dots, \{S_t = M / S_{t-1} = i\}$ forment une partition de l'univers Ω .

Cette matrice, combinée à la distribution de l'état initial S_0 , permet de reconstituer intégralement la loi du processus $S_t, \forall t$. Celle-ci se déduit en effet par récurrence, en utilisant les propriétés des chaînes de Markov et la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(S_t, \dots, S_1, y_t, \dots, y_1) = P(y_t / S_t, \dots, S_1, y_{t-1}, \dots, y_1) \times P(S_t, \dots, S_1, y_{t-1}, \dots, y_1)$$

En simplifiant les notations :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow P(S_{t \rightarrow 1}, y_{t \rightarrow 1}) = P(y_t / S_{t \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \times P(S_{t \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \\ &\Leftrightarrow P(S_{t \rightarrow 1}, y_{t \rightarrow 1}) = P(y_t / S_{t \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \times P(S_t / S_{t-1 \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \times P(S_{t-1 \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \\ &\Leftrightarrow P(S_{t \rightarrow 1}, y_{t \rightarrow 1}) = P(y_t / S_{t \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \times P(S_t / S_{t-1}) \times P(S_{t-1 \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1}) \end{aligned}$$

Où la loi de $y_t / S_{t \rightarrow 1}, y_{t-1 \rightarrow 1} \hookrightarrow N(\beta_{S_t,0} + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1}, \sigma_{S_t})$ est connue lorsque les paramètres sont connus.

Ce modèle nous permet de postuler et d'anticiper que des discontinuités de loi des rendements immobiliers telles que celles observées empiriquement par le passé sont susceptibles de se reproduire à l'avenir.

3.4.2 Estimation du quasi-maximum de vraisemblance :

Pour pouvoir simuler des valeurs futures des prix immobilier à partir du modèle à changement de régime markovien précédemment spécifié, nous devons calculer les paramètres du modèle correspondant aux éléments du vecteur $\theta = (\beta_{1,1}, \dots, \beta_{M,1}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{M,0}, \sigma_1, \dots, \sigma_M, (p_{ij})_{i=1,\dots,M; j=1,\dots,M})$. On utilise pour cela la méthode d'estimation du quasi-maximum de vraisemblance qui consiste ici à déterminer les paramètres qui maximisent la somme des logarithmes des probabilités filtrées du processus y_t en tous les points t observés.

Cette optimisation passe par l'explicitation et le calcul intermédiaire des probabilités prédictives et des probabilités filtrées du processus S_t auxquels nous procèderons par récurrence.

Une probabilité prédictive est une probabilité de réalisation d'une valeur en un instant t pour une variable conditionnelle à la connaissance d'informations antérieures à l'instant t .

Les états et les erreurs ne sont pas directement observables dans notre modèle : à l'instant t , l'information disponible consiste donc en l'ensemble des valeurs de y observées jusqu'au moment t compris. On dénote par I_t ce processus d'information qui constitue une filtration, où :

$$I_t = \{y_t, \dots, y_1\} = y_{t \rightarrow 1}$$

Une probabilité prédictive pour S_t en $t-1$ est donc : $P(S_t = i / I_{t-1}, \theta) = P(S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta)$ où $i \in \llbracket 1; M \rrbracket$.

Une probabilité filtrée est une probabilité de réalisation d'une valeur en un instant t pour une variable conditionnelle à la connaissance des informations disponibles jusqu'à l'instant t . ces probabilités peuvent s'interpréter comme un diagnostic à partir de toute l'information cumulée disponible en temps réel de la réalisation de la variable inobservable sous-jacente. La probabilité filtrée de la réalisation de la valeur i pour S_t est donc : $P(S_t = i / I_t, \theta) = P(S_t = i / y_{t \rightarrow 1}, \theta)$ où $i \in \llbracket 1; M \rrbracket$.

Initialisation de la récurrence permettant de calculer l'estimateur de vraisemblance $\hat{\theta}$:

L'objectif de cette étape est de calculer la valeur des probabilités filtrées initiales : $P(S_1 = j / I_1, \theta)$ où $j=1,\dots,M$. Plusieurs méthodes sont possibles : premièrement nous pouvons choisir l'option de neutralité en fixant $P(S_1 = j / I_1, \theta) = 1/M, j=1,\dots,M$. deuxièmement, nous pourrions utiliser nos connaissances du marché pour postuler des valeurs de probabilités filtrées initiales qui reflètent notre diagnostic. Troisièmement, et c'est la méthode que nous allons adopter par la suite, nous pouvons postuler que les probabilités filtrées initiales sont égales aux probabilités de régime permanent de la chaîne de Markov ergodique. Les probabilités filtrées initiales sont alors elles-mêmes fonctions des paramètres à estimer.

Formule récursive :

On suppose qu'on connaît la valeur ou du moins la formule explicite en fonction des paramètres des probabilités filtrées au rang $t-1$ $P(S_{t-1} = j / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta)$, $j = 1, \dots, M$. Notre objectif est d'en déduire la formule explicite de la valeur de la densité du processus y_t en fonction des paramètres à estimer et du passé du processus puis d'en déduire la formule explicite des probabilités filtrées au rang t en fonction des paramètres à estimer. Celles-ci nous permettront à leur tour d'explicitier les probabilités constituant la loi de la variable aléatoire y_{t+1} et ainsi de suite. La somme des logarithmes des densités du processus y_t conditionnelles au passé du processus en tous les points t observés constitue la fonction de quasi-vraisemblance qu'il faut maximiser en déterminant la valeur appropriée de θ .

E1 : On explicite une formule pour les probabilités prédictives $P(S_t = i / I_{t-1}, \theta)$ en fonction des probabilités filtrées et des paramètres à estimer en utilisant le fait que les événements $\{S_{t-1} = j\}_{j=1, \dots, M}$ forment une partition de l'univers Ω ainsi que la formule des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned} P(S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) &= \sum_{j=1}^M P(S_t = i, S_{t-1} = j / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) \\ \Leftrightarrow P(S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) &= \sum_{j=1}^M P(S_t = i / S_{t-1} = j) \times P(S_{t-1} = j / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) \\ \Leftrightarrow P(S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) &= \sum_{j=1}^M p_{ji} \times P(S_{t-1} = j / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) \end{aligned}$$

E2 : On explicite la densité jointe de y_t et S_t en fonction des paramètres à estimer à partir des probabilités prédictives et de la loi de $y_t / (S_t = i, y_{t-1 \rightarrow 1})$ qui est connue en fonction des paramètres par construction :

$$\begin{aligned} f(y_t, S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) &= f(y_t / S_t = i, y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) \times P(S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) \\ \Leftrightarrow f(y_t, S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) &= \varphi\left(\frac{y_t - (\beta_{i,1} \times y_{t-1} + \beta_{i,0})}{\sigma_i}\right) \times P(S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) \end{aligned}$$

où φ est la densité de la loi $N(0,1)$.

E3 : Les événements $\{S_t = i\}_{i=1, \dots, M}$ forment une partition de l'univers Ω , la fonction de quasi vraisemblance pour la période t est alors:

$$L_t(\theta) = f(y_t / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta) = \sum_{i=1}^M f(y_t, S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta)$$

E4 : On explicite la formule de la probabilité filtrée au rang suivant à partir des éléments que l'on sait exprimer comme une fonction des paramètres à estimer et de l'aléa:

$$P(S_t = i / I_t) = \frac{f(y_t, S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta)}{\sum_{i=1}^M f(y_t, S_t = i / y_{t-1 \rightarrow 1}, \theta)}$$

Les paramètres du vecteur θ sont estimés de façon à maximiser la fonction de vraisemblance L :

$$L(\hat{\theta}) = \max(L(\theta)),$$

$$\text{où } \begin{cases} L(\theta) = \sum_{t=1}^T \log(L_t(\theta)) \\ \theta \in \mathbb{R}^{3M+M^2} \end{cases}$$

Les estimateurs de quasi-vraisemblance des paramètres du modèle sont calculés à partir de cette contrainte explicite par rapport aux paramètres à l'aide d'un algorithme d'optimisation récursif fourni dans notre cas par le logiciel Eviews.

3.4.3 Probabilités de lissage :

Nous avons vu que les probabilités d'état filtrées fournissaient un diagnostic en temps réel de l'état sous-jacent au modèle. Les probabilités d'état lissées permettent quant à elles de fournir un diagnostic de l'état à partir de toute l'information disponible sur l'échantillon observé. La probabilité de l'état en l'instant t lorsque l'on a observé un échantillon $y_1, \dots, y_T$, où $T \geq t$ est $P(S_t = i / y_{T \rightarrow 1}, \theta)$. En pratique on estime les probabilités filtrées après avoir estimé la valeur des paramètres du modèle, on considèrera donc : $\hat{P}(S_t = i / y_{T \rightarrow 1}, \hat{\theta})$.

Le but du calcul des probabilités de lissage est d'inférer l'état du processus inobservable à partir de tous les rendements logarithmiques de l'immobilier observés par le passé. Il permet notamment d'estimer la valeur de sigma, la volatilité de l'erreur gaussienne du modèle, en les différents points de temps observés, ce qui nous permettra d'établir des prédictions en dehors de l'échantillon d'estimation du modèle, sur un tiers des données observées, afin d'évaluer l'aptitude de notre modèle à prédire la réalité.

Kim propose en 2004 un algorithme récursif arrière pour calculer ces probabilités.

Initialisation : On initialise l'algorithme avec les probabilités filtrées $P(S_T = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta)$, $j=1, \dots, M$ précédemment calculées qui sont également des probabilités lissées.

Formule récursive :

Pour $P(S_{t+1} = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta)$ connu, où $t \in \llbracket 1; T-1 \rrbracket$:

$$P(S_t = i, S_{t+1} = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta) = P(S_t = i / S_{t+1} = j, y_{T \rightarrow 1}, \theta) \times P(S_{t+1} = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta)$$

$$\Leftrightarrow P(S_t = i, S_{t+1} = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta) = \frac{P(S_t = i, S_{t+1} = j / y_{t \rightarrow 1}, \theta)}{P(S_{t+1} = j / y_{t \rightarrow 1}, \theta)} \times P(S_{t+1} = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta)$$

Ce dernier passage est opéré par Kim qui démontre que sous des hypothèses appropriées, pour S_{t+1} connu, l'information future $\{y_{t+1}, \dots, y_T\}$ ne contient pas d'information supplémentaire sur S_t . On utilise également la formule des probabilités conditionnelles appliquées à la probabilité $P(\cdot / y_{t \rightarrow 1}, \theta)$ selon laquelle: $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$.

On en déduit la probabilité de lissage à l'instant t en utilisant le fait que les événements $\{S_{t+1} = j\}_{j=1, \dots, M}$ forment une partition de l'univers Ω :

$$P(S_t = i / y_{T \rightarrow 1}, \theta) = \sum_{j=1}^M P(S_t = i, S_{t+1} = j / y_{T \rightarrow 1}, \theta)$$

La probabilité de lissage en l'instant t peut donc être déduite de la probabilité de lissage en $t+1$. Les probabilités de lissage en l'instant T pouvant être calculées grâce à la formule récursive des probabilités filtrées précédemment présentée, les probabilités de lissage peuvent être inférées pour toutes les dates d'observation de l'échantillon.

3.4.4 Mise en pratique :

On note PI_t le prix immobilier d'un bien considéré à l'instant t , 0 correspond à l'instant où l'on veut déterminer les taux et quotités du PVH et on note Id_t la valeur de l'indice immobilier en l'instant t .

Nous ferons l'hypothèse que le rapport du prix du bien immobilier considéré à la fin et au début d'une période est proportionnel au rapport des indices immobiliers à la fin et au début de la même période :

$$PI_t = \frac{Id_t}{Id_0} \times PI_0$$

Cela signifie que nous postulons que l'évolution du prix d'un bien immobilier sur l'ensemble de la période considérée quelconque suit la même loi que l'évolution des indices immobiliers généraux, dans notre cas des indices immobiliers des logements anciens en France métropolitaine, à un facteur de proportionnalité près.

Une fois estimés les paramètres de notre modèle, nous pourrions simuler des valeurs de rendement logarithmiques pour des périodes futures entières correspondant à des années. Nous pourrions en déduire la valeur simulée des prix immobiliers à des intervalles de temps correspondant à des années entières par rapport au moment du calcul. En effet les propriétés du logarithme et l'utilisation d'une somme télescopique permettent d'écrire :

$$\sum_{i=1}^t y_i = \ln\left(\frac{Id_t}{Id_{t-1}}\right) + \dots + \ln\left(\frac{Id_1}{Id_0}\right) = \ln(Id_t) - \ln(Id_0) = \ln\left(\frac{Id_t}{Id_0}\right)$$
$$\Rightarrow PI_t = \exp\left(\sum_{i=1}^t y_i\right) \times PI_0$$

Pour des durées simulées de PVH non entières, on déduira le prix immobilier à la date de maturité du prêt par interpolation cubique en considérant les prix immobiliers simulés aux indices de temps entiers les plus proches.

On laissera le choix à l'utilisateur de définir un paramètre constant $\beta_{SE} > 0$ pour refléter l'impact du sous entretien du bien sous-jacent sur les rendements logarithmiques du prix de ce bien ou sa capacité moindre à gagner en valeur par rapport à la moyenne des biens pris en compte dans le calcul des indices immobiliers. Il correspond à une hypothèse prudente qui permet de calculer des taux et quotités d'autant plus aptes à assurer la rentabilité souhaitée mais d'autant moins attractifs commercialement. Le cas échéant, le coefficient minorera les rendements logarithmiques des prix immobiliers en s'intégrant au modèle comme suit :

$$\Delta PI_t = \beta_{S_t,0} - \beta_{SE} + \beta_{S_t,1} \times \Delta PI_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t, \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_t \hookrightarrow N(0,1) \forall t \\ \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \forall t, \forall k > 0 \end{cases}$$

Dans le cas où l'entreprise prêteuse attribue un *scoring* aux biens immobiliers sous-jacents, le coefficient β_{SE} pourrait différer selon le *scoring* du bien et devrait être d'autant plus faible que le bien est bien noté, afin de pouvoir affiner son approche et offrir des taux et quotités plus attractifs aux clients dont le prix du bien est enclin à priori à augmenter significativement. Ces clients sont en effet ceux qui présentent à priori un risque de dépassement moindre et donc une rentabilité supérieure pour le prêteur sur la dimension immobilière du PVH.

SECTION 3.4 : ANALYSE DES RESULTATS DE LA CALIBRATION DU MODELE

3.4.1 : Critères de sélection du modèle à partir des données

Nous allons calibrer plusieurs modèles sur nos données et sélectionner parmi eux celui qui nous semble le meilleur en termes d'une part d'adéquation des hypothèses sous-jacentes du modèle aux propriétés empiriques de nos données, de statistiques de qualité du modèle telles que des mesures de distance entre les données observées et

les données calculées à partir du modèle et d'autre part d'aptitude à générer des prédictions conformes aux données réelles.

3.4.2 : Validité des hypothèses du modèle - Analyse des coefficients et des résidus

Dans l'idéal, on souhaite adopter un modèle dont les hypothèses sont valides soit conforme aux données observées. On souhaite donc que tous les coefficients du modèle soient significatifs, les résidus observés présentent des propriétés empiriques conformes aux hypothèses qui sont faites sur les erreurs, à savoir une espérance nulle, une distribution gaussienne et une absence d'autocorrélation. L'homoscédasticité des rendements immobiliers sur l'ensemble de l'échantillon de données n'est pas considérée car nous permettront aux volatilités des erreurs de varier d'un régime à l'autre.

On considèrera que tous les coefficients sont significatifs à 95% c'est-à-dire que l'on peut rejeter l'hypothèse selon laquelle ils sont nuls à un risque de 5% lorsque les p-values du test de Student mené sur chaque coefficient sont inférieures à ces 5%. On acceptera l'hypothèse selon laquelle l'espérance de l'erreur est nulle lorsque la moyenne empirique des résidus du modèle est proche de zéro. On utilise pour cela la loi des grands nombres qui stipule que la moyenne empirique de variables identiquement distribuées et indépendantes converge presque sûrement vers l'espérance de la loi parente lorsque le nombre d'observations prises en compte dans la moyenne tend vers l'infini, en pratique lorsqu'il est supérieur à 30 comme c'est notre cas ici. On examine la validité de l'hypothèse de normalité des résidus à partir d'un test premièrement visuel sur l'histogramme des résidus et sur le Q-Q plot des résidus, d'une comparaison des coefficients de symétrie et d'aplatissement empiriques des résidus aux valeurs théoriques de 0 et 3 dans le cas d'une gaussienne, et des résultats de divers tests de normalité tels que le test de Jarque-Bera, Liliefors, Cramer-Von Mises, Watson et Anderson-Darling. On considère que les résidus sont indépendants dès lors que leur autocorrélogramme et leur autocorrélogramme partiel ne montrent de coefficients significatifs pour aucun pas de temps et dont les probabilités associées aux q-statistiques pour les différents lags considérés sont élevées.

Nous tenons également compte de statistiques d'adéquation entre le modèle et les données telles que la somme des résidus carré que nous voudrions minimiser et la statistique du R^2 ajusté que nous voudrions maximiser. Enfin nous tenons compte de l'adéquation visuelle entre les données calculées avec le modèle et les données observées sur tout l'échantillon.

Nous répertorions en annexe D.5) les résultats de tests et d'analyses que nous avons effectués sur quatorze modèles. Nous avons supprimé la donnée datant de 1915 de notre série de données avant de procéder aux analyses car elle était associée à un résidu de modèle atypiquement élevé pour la plupart de ces modèles. Trois modèles ressortent d'après nos analyses : un modèle à changement de régime markovien avec constante à deux régimes dont la volatilité varie d'un régime à l'autre, un modèle identique à ce dernier mais pour lequel la volatilité des erreurs ne dépend pas du régime et un modèle autorégressif simple avec constante. Tous leurs coefficients sont significatifs, la moyenne empirique de leurs résidus est très proche de zéro et ceux-ci semblent ne pas être autocorrélés. Nous allons par la suite tester l'aptitude de ces modèles à générer des prédictions proches des données observées afin de procéder au choix définitif de notre modèle immobilier.

Il convient de noter qu'aucun des modèles que nous avons estimé et testé ne génère de résidus gaussiens. Nous analysons une série temporelle dont la distribution, conditionnellement à la connaissance de l'information jusqu'au moment d'observation précédent l'instant considéré, n'est pas gaussienne. L'analyse du *kurtosis* et du *skewness* révèle que cette distribution est relativement symétrique avec un *skewness* empirique proche de 0 mais qu'elle présente des queues de distribution plus épaisses qu'une loi normale avec un *kurtosis* empirique significativement supérieur à 3. Cela signifie que les rendements logarithmiques immobiliers ont par le passé pris des valeurs extrêmes avec une fréquence supérieure à celle qui caractériserait une variable de distribution normale. Il n'est pas rare que des variables de rendements financiers soient caractérisées par un excès de *kurtosis* du fait de l'existence même des risques affectant la rentabilité de tout investissement financier. Cet excès de *kurtosis* peut également être révélateur de l'hétéroscédasticité de notre série puisque l'hétéroscédasticité se caractérise précisément par des queues de distribution plus épaisses que celles de la loi Normale. Il est également

possible que nous soyons pénalisés par le faible nombre d'observations dont nous disposons. Le fait que la distribution de notre série temporelle soit non gaussienne affecte trois dimensions de notre modélisation : la valeur des paramètres estimés, la valeur des statistiques qui nous permettent d'évaluer notre modèle, et la valeur de nos simulations immobilières et donc de nos simulations de rentabilité. Pour la première, il faut signaler que les propriétés des estimateurs par la méthode des moindres carrés ordinaires sont optimales pour des modèles dont les erreurs sont gaussiennes. Sans résidus gaussiens nous ne pouvons être certains que les paramètres estimés soient optimaux c'est-à-dire permettront aux données calculées au modèle d'être au plus proche des données observées. Les intervalles de confiance pour les paramètres des modèles ne pourront être considérés comme certainement fiables au niveau de confiance souhaité. Pour la seconde, de nombreux tests tels que le test de Student permettant de décider si les coefficients peuvent être significatifs ou non reposent sur l'hypothèse selon laquelle les erreurs sont gaussiennes. Nous avons donc effectué des tests de significativité de Wald, reposant sur des hypothèses valables dès que les résidus sont asymptotiquement distribués selon une loi normale, sur chacun des paramètres pris individuellement de nos modèles et ces tests afin de conclure sur la significativité des coefficients au niveau de confiance 95% et reporté ces conclusions en annexe D.5). Pour la troisième, adopter l'hypothèse d'erreurs gaussiennes nous conduira à minimiser la probabilité de réalisation de rendements immobiliers, donc de rentabilités, extrêmement élevées, ce qui correspond à une hypothèse prudente raisonnable pour l'entreprise. Cela nous conduira également à minimiser la probabilité de réalisation de rendements immobiliers extrêmement faibles, donc à minimiser le risque de dépassement par rapport à la dimension immobilière du PVH. L'entreprise prêteuse qui souhaite adopter des hypothèses plus prudentes de ce point de vue pourra notamment intégrer un coefficient de sous entretien majoré à son modèle immobilier.

3.4.3 : Aptitude à générer des prédictions conformes au réel

Pour évaluer l'aptitude des modèles présélectionnés à générer des prédictions conformes au réel, nous estimons les paramètres de ces modèles sur deux-tiers des données (1891-1971) puis nous établissons des prédictions statiques (s) et dynamiques (d) à partir de ces modèles sur le tiers de l'échantillon restant. Enfin nous comparons visuellement et statistiquement les prédictions aux observations.

Le modèle sera jugé d'autant plus performant que les différentes mesures statistiques de distance entre les prédictions et les observations – racine carrée de la moyenne des résidus carrés, moyenne des résidus absolus, résidu moyen en pourcentage et coefficient de Theil - seront faibles et que les courbes de prédiction passeront au plus près visuellement de la courbe observée. Le coefficient de Theil peut être décomposé en une composante de biais, une composante de variance et une composante de covariance. Plus la première est proche de zéro et meilleure est l'aptitude du modèle à refléter la moyenne des observations, plus la seconde est proche de zéro et meilleure est l'aptitude du modèle à refléter la variance des observations. La troisième reflète la proportion du coefficient de Theil qui est due aux résidus de prédiction restants. Ces statistiques de distance entre prédictions et observations sont répertoriées en annexe D.6) pour les trois modèles présélectionnés. Nous restituons également en annexe D.7) les graphiques permettant de comparer les prédictions des deux modèles aux données observées.

Nous ne pouvons pas procéder à ces analyses sur le second modèle, qui est un modèle à changement de régime markovien dont la volatilité est constante d'un régime à l'autre, car en diminuant le nombre d'observations dans l'échantillon servant à l'estimation du modèle, les coefficients estimés ne sont plus uniques.

Les estimations statiques substituent y_{t-1} par la donnée observée en t-1 pour calculer la prédiction au pas suivant : y_t , tandis que les estimations dynamiques substituent y_{t-1} par la donnée calculée par le modèle pour le rang t-1. Dans l'optique de construire un modèle immobilier permettant de faire des prédictions futures, nous nous focaliserons particulièrement sur les résultats des prédictions dynamiques. Si nous avons voulu élaborer un modèle qui permette au mieux d'expliquer et prédire les données observées par le passé, nous nous serions plutôt concentrés sur les résultats statiques.

Le modèle n°1 est plus performant que le modèle n°3 en termes de prédiction dynamiques, la distance agrégée entre les prédictions du modèle et les données observées telles que mesurée par les statistiques portant sur les résidus est moins importante dans le cas du modèle 1 que dans celui du modèle 3. Le modèle 1 reflète également

mieux la variance des observations. Cependant il reflète moins bien que le modèle n°3 la moyenne des observations, sans doute car les prédictions ont été élaborées à partir d'un modèle incluant une constante dans les deux régimes alors que les analyses que nous avons menées révèlent que celle-ci n'est pas significative dans l'un des deux régimes. Le modèle n°3 est plus performant en termes de modélisation statique des rendements immobiliers. Pour les deux modèles, la modélisation statique fournit de meilleurs résultats que la modélisation dynamique, ce qui n'est pas surprenant.

Le modèle n°1 permet en théorie d'élaborer un champ de prédictions immobilières plus vaste qu'un modèle autorégressif d'ordre 1 simple car les valeurs qu'il permet de simuler dépendent non seulement de l'aléa gaussien émanant de l'erreur du modèle autorégressif mais aussi de la réalisation de la variable d'état sous-jacente au modèle. Or nous souhaitons que notre *Value-at-risk* se base sur un champ vaste de cas futurs probables prédits. Du fait de sa meilleure aptitude à élaborer des prédictions dynamiques proches des données observées et de sa forme théorique qui lui permet un large champ de simulations probables, nous retiendrons le modèle 1, soit du modèle AR(1) à changements de régime markoviens avec constante où les trois paramètres diffèrent pour chacun des 2 régimes, pour effectuer nos simulations immobilières.

3.4.4 : Analyse des résultats de la calibration du modèle

Les résultats de la calibration du modèle AR(1) à changements de régime markoviens avec constante où les trois paramètres diffèrent pour chacun des 2 régimes sont exposés en annexe D.8). La calibration a été effectuée via le logiciel Eviews.

Le nombre de régimes qui semble être approprié pour nos données est de 2. Les modèles à un régime que nous avons estimé, correspondant à des modèles autorégressifs simples, présentent des propriétés statistiques moins attractives et/ou sont moins performants en termes de prédiction des données observées que notre modèle à deux régimes. Nous n'avons pas pu estimer de modèles à trois régimes car les coefficients calculés sous cette hypothèse à partir de nos données n'étaient pas uniques.

Nous déduisons des probabilités lissées calculées que l'état 1 s'est probablement réalisé entre 1917 et 1955 ainsi qu'après 2008 tandis que l'état 2 s'est réalisé entre les années 1892 et 1914 ainsi qu'entre les années 1956 et 2007. Lorsque l'état 1 se réalise, les rendements immobiliers ont une volatilité relativement élevée et dépendent relativement faiblement du rendement immobilier de la période précédente. La constante positive indique que dans ces périodes de relative instabilité, les rendements immobiliers tendent quand même à croître en moyenne. Lorsque l'état 2 se réalise, les rendements immobiliers ont une volatilité plus faible et dépendent plus fortement du rendement immobilier de la période précédente. On peut décrire l'état 2 comme un état d'évolution relativement régulière. Pour cet état, la constante n'est pas significative. Cela signifie que la tendance à la croissance est nulle lors de cette période, l'évolution à la hausse ou à la baisse des rendements immobiliers d'une période à l'autre est exclusivement déterminé par le rendement de la période précédente et par un aléa non prévisible par le modèle. La durée attendue de l'état 1, donc de l'état de volatilité, est de 23,5 années contre 39,6 années pour l'état 2 qui est l'état de la relative stabilité et régularité. En effet une fois l'état réalisé, la probabilité de rester dans l'état 1 la période suivante est de 0,957 contre 0,975 pour la probabilité de rester dans l'état 2, une fois celui-ci réalisé. Cela signifie que l'état 2 est plus persistant que l'état 1 et la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 est plus importante que celle de passer de l'état 2 à l'état 1.

SECTION 3.5 : CRITIQUE DU MODELE

La première grande critique que nous pouvons faire de notre modèle porte sur la pauvreté des données immobilières à partir desquelles nous l'avons calibré dû à la pauvreté même des données de sources publiques concernant l'évolution des prix immobiliers dans le temps et à l'absence d'accès à des données de prix immobiliers privées. Nous avons orienté notre choix de modèle et validé ce choix à partir de l'observation de ces données et les paramètres de notre modèle ont été calculés à partir d'elles alors que nous ne possédons que des données immobilières très générales de fréquence faible et peu nombreuses. La possession d'une base de données détaillée et complète des prix de l'immobilier est un élément clé dans la construction d'une méthodologie robuste de

détermination des taux et quotité du PVH intégrant l'aléa immobilier. D'ici quelques années, avec l'alimentation des bases de données immobilières publiques, l'utilisation d'un modèle à changements de régimes markoviens basé sur des données publiques pour modéliser l'immobilier devrait fournir des résultats plus robustes. Le manque de détails dans les données de prix immobiliers ne permet pas de différencier les taux et quotités accordées selon les caractéristiques du bien et ne permet pas de différencier l'attractivité de l'offre selon l'attractivité du profil client sur la dimension immobilière. De plus, nos données émanent de trois sources différentes. Cela aurait pu poser un problème dans le cas de l'estimation d'un modèle à changement de régime markovien dans le sens où, si ces trois sources mesurent les indices immobiliers à partir de méthodologies significativement distinctes, le passage des données d'une source à une autre aurait pu créer des changements de régime artificiels. Cependant, on constate que cela n'a pas été le cas puisque nos années de changement d'un modèle ou état à l'autre ne correspondent pas aux dates de changement de sources : respectivement 1914, 1955 et 2007 pour les premières contre 1935 et 1996 pour les secondes.

Deuxièmement, nous faisons l'hypothèse très contraignante selon laquelle la loi suivie par les rendements logarithmiques des prix de n'importe quel bien immobilier est identique à la loi suivie par les rendements logarithmiques de l'indice des prix des logements anciens en France métropolitaine. Le postulat de cette hypothèse ne pourra être légitime que dans le cas d'une entreprise prêteuse qui possède un portefeuille de PVH diversifiés en termes de caractéristiques locales et individuelles des biens sous-jacents et ce, en respectant les proportions observées à l'échelle de la France métropolitaine, si l'on considère que l'ensemble des biens qui ont été suivis pour la construction des indices ont connu une évolution de leur prix à leur tour représentative de l'évolution des prix des biens immobiliers en France. Cette hypothèse est semblable à celle qui est faite lors de l'utilisation de tables de mortalité : on suppose que la longévité d'un individu quelconque suit la même loi que la longévité moyenne d'un groupe conséquent d'individus dont il présente quelques caractéristiques similaires tels que le pays de résidence, l'âge, le sexe ou l'année de naissance. Pour que cette hypothèse puisse être légitime, l'assureur est tenu de diversifier son portefeuille. A moins d'être en possession d'une vaste base de données immobilières détaillée et d'être capable de construire des modèles personnalisés selon les caractéristiques du bien et de sa localisation influant sur son prix, cette diversification semble nécessaire à la formulation de prédictions probables.

Troisièmement, nous faisons une seconde hypothèse contraignante selon laquelle la loi suivie par les rendements logarithmiques des indices immobiliers à l'avenir est la même que celle que ces rendements ont suivi par le passé entre 1890 et 2013. Cette hypothèse pose deux problèmes distincts : d'une part, il n'est pas exclu que le marché immobilier français se transforme à l'avenir de telle sorte qu'il ne reproduise plus du tous ses comportements passés, d'autre part, si l'on accepte l'hypothèse selon laquelle les rendements logarithmiques immobiliers reproduiront à l'avenir certains des comportements qu'ils ont adopté par le passé, il s'agit d'évaluer si les limites de la période passée considérée peuvent être jugées comme représentatives de ce qui va se passer à l'avenir. Il n'est pas possible de répondre à cette question avec certitude. Nous avons fait le choix de commencer en 1890 car nous ne sommes pas parvenus à collecter de données datant d'avant cette année et car même en remontant en 1890, notre nombre de données est faible. Il est également difficile d'évaluer la fiabilité de ces données anciennes, pour cela nous avons considéré qu'une information approximative valait plus qu'une absence totale d'information.

Quatrièmement, nous avons fait l'hypothèse selon laquelle les rendements immobiliers ne dépendaient explicitement que de deux variables : les rendements immobiliers lors de la période précédente et une variable d'état inobservable. La loi de cette variable d'état dépend implicitement d'autres variables qui influent sur les prix immobiliers incluant probablement les taux d'intérêts, les revenus des ménages français et le taux d'actifs. L'explicitation des relations entre ces variables explicatives et les rendements immobiliers aurait pu diminuer la volatilité de l'aléa supposé gaussien, donc l'impact de sa réalisation sur nos simulations.

Cinquièmement, en choisissant un modèle de chaîne de Markov pour la variable d'état, nous supposons que seules comptent et influent la réalisation de la variable d'état lors de la période précédente pour prédire la variable d'état. Il faudrait pouvoir étudier ces états inobservables pour valider cette hypothèse.

Enfin, un défaut potentiellement majeur de notre modèle immobilier, évoqué dans le quatrième point est son indépendance par rapport à notre modèle de taux. La documentation qui cherche à expliquer la dynamique des prix immobiliers pointe souvent sa corrélation avec le niveau des taux d'intérêts et évoque même une possible causalité allant des taux vers les prix immobiliers. Si le niveau et les évolutions des taux influent sur les valeurs probables des prix immobiliers, nous devrions lier notre modèle immobilier à notre modèle de taux. Nous abordons ce sujet plus amplement dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 4 : CORRELATIONS DES RISQUES ET DISCUSSION DE LEUR INTEGRATION A NOS MODELES

Dans ce Chapitre 4, nous soulevons pour la première fois après avoir modélisé nos trois principaux aléas individuellement la question d'une possible corrélation ou dépendance entre eux. Pour cela nous commençons par discuter des possibles corrélations entre évolution des taux, durée du contrat de PVH et évolution des prix immobiliers deux à deux puis nous nous focalisons sur la relation qui lie taux d'intérêts et prix immobiliers et justifions notre choix d'intégrer ou non une corrélation entre ces deux séries temporelles aléatoires.

SECTION 4.1 : DISCUSSION SUR LA CORRELATION ENTRE LES TROIS RISQUES MODELISES

Jusqu'ici nous avons modélisé nos aléas indépendamment les uns des autres. Pourtant, il est possible qu'ils soient corrélés ou dépendants deux à deux.

4.1.1 : Corrélations en cas de remboursement anticipé

Premièrement, on peut envisager un lien théorique entre le niveau des taux et la longévité du prêt. Ce lien correspondrait à un conditionnement de la durée des prêts par le niveau des taux d'intérêts : lors d'une baisse de taux significative on peut en effet imaginer que le souscripteur du PVH soit tenté de rembourser son prêt de façon anticipée, en tirant éventuellement les liquidités de remboursement d'un prêt classique ou viager hypothécaire à taux plus faible que le PVH initialement souscrit. Une évolution des taux à la baisse après la souscription du PVH par le client pourrait ainsi écourter la durée du prêt si celui-ci arbitre et décide de rembourser son prêt de façon anticipée. La possibilité d'une inférence des taux sur la durée de vie des clients du PVH ou celle de la durée des PVH sur les taux nous paraissent improbables et sont écartées.

Deuxièmement nous pouvons concevoir de la même façon un lien entre le niveau des prix immobiliers et la longévité du prêt. En effet, une hausse du prix du bien immobilier sous-jacent après la souscription d'un PVH peut inciter le client à arbitrer en remboursant de façon anticipée son PVH et en en souscrivant éventuellement un autre pour lequel le montant prêté, proportionnel à la valeur du bien est plus important que la somme du montant initialement prêté et des coûts additionnels du remboursement anticipé et du remplacement du prêt. Le client peut également souhaiter céder son bien immobilier si la valeur de celui-ci a assez augmenté pour que le prix de sa vente puisse couvrir le remboursement du prêt, les coûts du remboursement anticipé et le remplacement du logement. Une évolution des prix immobiliers à la hausse après la souscription du PVH par le client pourrait ainsi écourter la durée du prêt si celui-ci arbitre et décide de rembourser son prêt de façon anticipée. La possibilité d'une inférence des prix immobiliers sur la durée de vie des clients du PVH ou celle de la durée des PVH sur les prix immobiliers nous paraissent improbables et sont écartées.

Nous postulons la nullité du taux de remboursement anticipé pour le PVH, ce qui nous permet de postuler par conséquent l'indépendance deux à deux entre niveau des taux et durée du prêt ainsi qu'entre niveau des prix immobiliers et durée du prêt.

Cette hypothèse est motivée par le fait que le taux de remboursement anticipé observé sur les PVH depuis leur introduction en France est très proche de 0. La quasi absence de remboursement anticipé de type PVH tient à la structure même de ce produit. En effet en cas de remboursement anticipé, la dette n'est pas plafonnée au montant

du bien immobilier, le montant du remboursement est élevé et le client doit payer de surcroît une indemnité de remboursement anticipé. La vente du bien sous-jacent pour rembourser de façon anticipée est peu probable, puisque les souscripteurs du PVH sont typiquement des individus attachés à leur logement. L'accessibilité des prêts classiques pour rembourser de façon anticipée est très réduite pour des personnes âgées qui s'orientent en premier lieu vers le PVH car les autres modes de financement ne leur sont pas disponibles. L'éventualité d'un arbitrage entre un PVH et un second PVH est peu probable car il engendrerait des frais de mainlevée et de nouveaux frais d'hypothèques et de souscription très onéreux dans le cas du PVH. Si ces caractéristiques ne changent pas à l'avenir, l'hypothèse selon laquelle le taux de RA devrait se maintenir à un niveau négligeable semble raisonnable. De plus, comme nous l'avons évoqué précédemment, le remboursement anticipé n'est pas nécessairement défavorable à l'offreur du PVH comme il l'est à l'offreur de prêts classiques. Il diminue la probabilité de réalisation du risque de dépassement et supprime ses effets indésirables, c'est-à-dire le plafonnement, pour les comptes de l'entreprise prêteuse. En ce sens, l'hypothèse de la nullité du taux de remboursement anticipé constitue donc une hypothèse prudente qui permet de ne pas sous-estimer le risque de dépassement.

4.1.2 : Corrélation théorique taux d'intérêts- prix Immobiliers

La troisième corrélation possible, entre taux d'intérêts et prix immobilier, est plus problématique. La théorie la plus souvent mise en avant concernant ce lien repose sur le fait que la vaste majorité des achats immobiliers sont financés par un prêt, partiellement ou en totalité - 85% des ménages français ont eu recours à un prêt pour financer l'achat de leur logement d'après un sondage de l'Observatoire AVendreALouer de 2013. Ainsi, en théorie, lorsque les taux diminuent, toutes choses égales par ailleurs, le nombre de ménages pouvant souscrire à un emprunt pour acheter de l'immobilier devrait augmenter, et la pression d'une demande à la hausse si cette accessibilité du financement se traduit en demande effective devrait faire augmenter les prix immobiliers, et inversement. De plus, du côté des investisseurs, des taux à la baisse devraient augmenter l'attractivité de l'immobilier face aux investissements alternatifs que sont les produits de taux, ce qui devrait également œuvrer dans le sens d'une augmentation de la demande de biens immobiliers et par conséquent, d'une hausse des prix immobiliers. Ici, on ne raisonne qu'en termes de variations des taux et pas en termes de niveau de taux, bien qu'il soit très probable que la décision d'investissement des ménages et des investisseurs tienne compte de ceux-ci. Notamment, des variations de taux n'auront pas d'impact sur la prise de décision d'un ménage tant que les taux sont supérieurs à un plafond acceptable pour eux. Nous avons restitué en annexe E.1) un schéma permettant d'appréhender et représenter ce lien théorique.

La faille majeure de ce raisonnement tient au fait que la condition toutes choses par ailleurs ne tient pas en pratique. D'autres variables, modélisables ou non, perturbent la relation qui lie taux et prix immobiliers de telle sorte que de nombreuses études à ce sujet concluent que la corrélation entre taux et prix immobilier est non significative ou ne possède pas le signe espéré soit négatif. Nous pouvons notamment citer trois arguments qui permettent d'entrevoir la raison pour laquelle les variations de taux n'engendrent pas nécessairement et systématiquement une variation des prix immobiliers en sens inverse.

Premièrement, il existe un effet anticipations par lequel les ménages préféreront attendre avant de souscrire un prêt pour financer un logement, s'ils anticipent que les taux vont baisser. En pratique les ménages et les marchés tendent à extrapoler le passé proche pour formuler leurs anticipations, ce qui veut dire que les ménages auront tendance à anticiper des taux à la baisse lorsque les taux auront baissé dans un passé proche. Inversement, si les ménages anticipent une hausse des taux, ce qui est probable lorsque les taux ont augmenté dans un passé proche, ils pourront préférer souscrire à un prêt pour financer leur achat immobilier au plus tôt.

Deuxièmement, il existe un effet prix tel que si une variation des taux à la baisse se traduit en augmentation des prix immobiliers en augmentant l'accessibilité des prix immobiliers du fait du moindre coût du financement, en poursuivant ce même raisonnement qui postule que la contrainte majeure à la demande est celle de l'adéquation entre montant de financement disponible et prix immobiliers, l'augmentation des prix immobiliers ainsi générée devrait réduire la demande des ménages et les prix devraient s'autoréguler. Ce mécanisme autorégulateur implique l'existence d'une limite à l'impact qu'une variation de taux peut avoir sur les prix immobiliers.

Troisièmement, il existe un effet croissance économique/revenu des ménages par lequel une période de croissance économique a tendance à générer à la fois une augmentation des taux d'intérêt et une augmentation des revenus des ménages. Cette dernière tend à augmenter l'accessibilité des prix immobiliers donc la demande immobilière et par conséquent les prix immobiliers alors même que les taux sont à la hausse. De même, en temps de crise économique, bien que les taux d'intérêts aient tendance à baisser, l'augmentation du chômage, la baisse du revenu des ménages et la perte de confiance en l'économie tendent à diminuer la demande immobilière donc les prix immobiliers. La crise économique mondiale a ainsi eu pour effet en France la baisse simultanée des taux d'intérêts et des prix immobiliers.

Nous restituons en annexe E.2) notre schématisation du lien théorique taux d'intérêts-prix immobiliers tenant compte de ces nouvelles considérations. Ce schéma n'a pas vocation à être exhaustif. Il omet ainsi des variables concernant l'offre immobilière, la démographie française et le taux de ménages propriétaires ou le phénomène par lequel des attentes de taux d'intérêts à la baisse peuvent décider les ménages à attendre avant d'acheter leur logement. Il a pour but de commencer à faire ressortir la complexité de la relation taux-immobiliers qui dépasse la relation triviale taux à la baisse/prix immobiliers à la hausse ainsi que la difficulté à isoler et systématiser cette relation.

4.1.3 : Littérature concernant la corrélation taux d'intérêts-prix immobiliers

Les études concernant la relation liant taux d'intérêts et prix immobiliers est très partagée. Si les taux d'intérêts sont souvent envisagés comme une variable déterminante pour prédire les prix immobiliers, un grand nombre d'entre elles peine à prouver que cette relation est empiriquement significative.

Les créateurs de l'indice des prix immobiliers le plus consulté des Etats-Unis, respectivement Karl E. Case et Robert J. Shiller concluent ainsi dans leur étude « The efficiency of the market for single family homes » menée sur quatre villes américaines entre 1970 et 1986 que les prix immobiliers ne semblent pas incorporer d'information concernant les taux. En revanche, ils concluent qu'il existe une persistance conséquente des rendements des indices immobiliers pour les quatre villes américaines étudiées (Atlanta, Chicago, Dallas, San Francisco) telle qu'une variation de l'indice immobilier une année tend à prédire une variation de l'indice immobilier dans la même direction l'année suivante, de 0,25 à 0,5 fois aussi importante.

Kieran McQuinn et Gerard O'Reilly suggèrent dans leur étude « Assessing the role of income and interest rates in determining house prices » que l'alternative à explorer concernant les taux d'intérêts et prix immobiliers est celle d'une relation non linéaire dans laquelle la déterminante des prix immobiliers est la demande immobilière, elle-même exprimée comme une fonction non linéaire des revenus des ménages et des taux d'intérêts, après avoir insisté sur l'échec auquel aboutissent la plupart des études qui visent à expliciter et quantifier cette relation.

L'étude intitulée "Is there a stable relationship between real interest rates and housing prices? Evidence from several euro area countries" de Sanchez Santos et Abeal Vazquez conclue, à partir de données observées en Espagne, aux Pays-Bas et en France, que la relation entre taux d'intérêts et prix immobiliers est faible. Ce constat est partagé par l'économiste et spécialiste immobilier Tom Lawler selon lequel la relation qui lie taux d'intérêts et prix immobiliers est très faible « au mieux ».

Nous notons également que l'hypothèse retenue pour modéliser les flux des prêts viagers hypothécaires du programme HECM aux Etats-Unis est celle d'une indépendance deux à deux entre durée du prêt, valeur du bien immobilier sous-jacent et taux d'intérêts.

Du côté français Jacques Friggit écrit dans « Le prix des logements sur le long terme » que la corrélation entre taux et prix immobiliers est faible et négligeable sur des pas de temps de 1 à 5 ans.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier la relation entre taux d'intérêts et prix immobiliers, élaborer et tester les performances de modèles de prix immobiliers incluant des variables de niveau ou de variation de taux pour différents lags à partir de données de taux courts et de données d'indices immobiliers français. Si la corrélation observée est significative et les modèles testés plus performant que les modèles sans taux précédemment

développés, nous adopterons l'hypothèse de dépendance entre taux d'intérêts et prix immobiliers et modifierons notre modèle immobilier en conséquence.

SECTION 4.2 : CHOIX D'UN MODELE IMMOBILIER DEPENDANT OU INDEPENDANT DES TAUX D'INTERETS

4.2.1 : Données utilisées

Nous souhaitons étudier les interactions entre les prix immobiliers et les taux d'intérêts pour décider ou non d'inclure des données concernant les taux à notre modèle immobilier et le cas échéant, en expliciter la forme. Pour ces premiers nous disposons de données de l'indice des prix des logements depuis 1890 de faible fréquence : annuelle puis trimestrielle après 1996. Pour les taux d'intérêts, nous disposons de données de taux Euribor depuis leur création en fin 1998 à fréquence quotidienne. Nous étudierons plus particulièrement le taux Euribor 1 semaine puisque notre modèle de taux postule que toutes les variations de taux d'intérêts à l'exception d'un aléa gaussien peuvent être expliquées par les évolutions des taux courts et car nous avons calibré notre modèle à partir d'une valeur initiale de cet indice. Nous disposons donc de deux séries couvrant des périodes différentes et de fréquences différentes.

Or nous avons besoin de données prélevées simultanément dans le temps pour ces deux séries si nous voulons étudier leur corrélation. Afin d'utiliser le maximum de données parmi nos deux séries, nous nous baserons donc sur les données trimestrielles de l'Euribor 1 semaine extraites de Reuters – correspondant à la première donnée disponible pour les mois de janvier, avril, juillet et octobre pour chaque année- et de l'indice des logements anciens en France métropolitaine publiés par l'INSEE du premier trimestre de 1999 au quatrième trimestre 2013 soit soixante données. La robustesse de nos résultats sera donc limitée par le faible volume de nos données.

4.2.2 : Objectif et méthodologie

Dans cette section, nous souhaitons analyser la relation liant les indices de prix immobiliers aux niveaux, variations ou rendements logarithmiques des taux d'intérêt laggués, pour diverses combinaisons de lags de temps et/ou simultanés aux indices de prix. Pour cela, nous allons procéder à des analyses visuelles de ces deux séries, à des analyses de corrélation et à des tests de causalité. Ensuite, nous allons construire et tester divers modèles. Parmi ceux-ci nous présélectionnerons ceux dont les hypothèses sont conformes aux données observées et qui semblent reproduire les données observées de façon performante, avec des erreurs faibles. Comme nous l'avons explicité dans la section 3.4, nous souhaitons présélectionner des modèles dont tous les coefficients sont significatifs à 95% et dont les résidus observés présentent des propriétés empiriques conformes aux hypothèses qui sont faites sur les erreurs, à savoir une espérance nulle, une distribution gaussienne et une absence d'autocorrélation dans le temps. Nous souhaitons également que les modèles présélectionnés soient aptes à reproduire les données observées, donc présentent des statistiques concernant les résidus - à savoir, la somme des résidus carrés et l'erreur type- les plus faibles possibles et qu'ils expliquent la portion la plus élevée possible de la variance des indices immobiliers observée, donc un R^2 ajusté proche de 1. Enfin, nous testerons l'aptitude des modèles présélectionnés à générer des prédictions proches des données observées en estimant les paramètres de nos modèles sur deux tiers des données du premier trimestre de 1999 au dernier trimestre de 2008 puis en générant des prédictions à partir des modèles estimés sur les 20 données restantes, de 2009 à 2013 et en comparant ces prédictions aux données observées. Nous sélectionnerons finalement le modèle le plus performant en termes de prédiction parmi les modèles présélectionnés en tant que modèle immobilier que nous utiliserons pour simuler les flux du PVH.

4.2.3 : Analyses préliminaires

Nous avons restitué en annexe E.3) le graphique représentant nos données de taux et de rendements immobiliers ainsi que les résultats de nos analyses de corrélation entre ces variables.

Commentaires sur le graphique:

Visuellement, on observe une certaine corrélation entre les rendements immobiliers et les variables de taux, par exemple avec une diminution drastique des trois variables observées en 2009 c'est-à-dire à l'occasion de la crise économique mondiale et des évolutions semblables entre les rendements immobiliers et les variations des taux d'intérêts entre 2010 et 2012, cependant il n'existe pas de concordance exacte entre ces deux variables et il est possible que ces coïncidences soient dues à des relations cachées avec d'autres variables économiques affectées par la crise plus qu'à un lien de causalité direct entre taux et rendements immobiliers. De plus la logique explicitée précédemment stipule des évolutions contraires de ces variables, ce qui n'est pas empiriquement validé en ces points de temps. Avant 2009 et après 2012 les variations immobilières et de taux connaissent des évolutions significativement différentes. La logique selon laquelle des taux en baisse impliqueraient une hausse des rendements immobiliers et réciproquement n'est empiriquement pas observée sur cet échantillon de temps : on remarque notamment que les rendements immobiliers et les taux d'intérêts baissent simultanément après 2011 et les rendements immobiliers connaissent un effet de retour à la moyenne autour d'une valeur proche de zéro entre 1999 et 2001 tandis que les taux augmentent puis diminuent significativement. Cependant, on ne peut visuellement pas rejeter l'hypothèse d'une telle causalité pour les années 2002 à 2006 où les taux sont bas et les rendements immobiliers sont élevés ainsi qu'en 2007 et 2008 lorsqu'une forte augmentation des taux s'accompagne d'une baisse significative des rendements immobiliers. Il est possible d'observer des hausses de taux simultanément à des baisses de rendements immobiliers, en 2007 et 2008, comme à une constance des rendements immobiliers, de 1999 à 2000 et des baisses de taux simultanées à des baisses de rendements immobiliers, comme en 2009, et simultanées à une augmentation des rendements immobiliers comme en 2003-2004. S'il existe une relation linéaire entre le niveau ou les variations des taux d'intérêts et les rendements immobiliers celle-ci n'est pas évidente visuellement et elle semble ne pas pouvoir être constante dans le temps et notamment il est possible que le coefficient directeur change de signe selon les sous périodes.

Commentaires sur le tableau de corrélation :

Pour des probabilités inférieures à 5%, on peut accepter l'hypothèse selon laquelle les variables concernées sont corrélées à 95% de confiance. On accepte donc l'hypothèse de corrélation entre, respectivement, les rendements immobiliers et les variations de taux, les rendements immobiliers et les niveaux de taux, les rendements immobiliers et les rendements logarithmiques de taux, ainsi qu'entre les indices immobiliers et les niveaux de taux. On rejette l'hypothèse de corrélation entre les indices immobiliers et les variations de taux, ainsi qu'entre les indices immobiliers et les rendements de taux. La corrélation entre les rendements immobiliers et les variables de taux n'a pas le signe attendu : en effet celle-ci est positive, ce qui indique que ces variables ont tendance à évoluer dans le même sens. La corrélation la plus forte est celle qui lie les rendements immobiliers aux rendements de taux, avec un coefficient de 0,526. Les autres corrélations, inférieures à 0,5 dénotent d'un lien linéaire plus faible.

Il semble exister une corrélation linéaire entre les rendements immobiliers et les variables de taux d'intérêt. Une corrélation peut signifier différentes choses, allant de la simple coïncidence, à l'existence de variables cachées dans quel cas on parle de corrélation *spurious*, jusqu'au lien de causalité. Deux variables peuvent être corrélées sans que cette corrélation ne signifie quoi que ce soit et sans qu'elle nous permette d'émettre des prédictions, mais à l'inverse deux variables liées linéairement sont nécessairement corrélées. De plus, la corrélation entre deux variables peut être nulle sans que celles-ci soient indépendantes, s'il existe entre elles une relation non linéaire. Les analyses de corrélation sont donc à manier avec précaution. Nous allons approfondir l'étude de cette potentielle relation entre taux d'intérêts et rendements immobiliers en effectuant des tests de causalité de Granger entre ces variables.

Commentaires sur les tests de Granger :

Nous avons restitué en annexe E.4) le tableau qui recense les résultats des tests de causalité de Granger que nous avons effectué sur nos variables de taux d'intérêt d'une part et nos variables de prix immobiliers d'autre part.

Dans le tableau ci-dessus, RI est la variable des rendements immobiliers, VARTX la variation des taux, TX le niveau des taux et RTX le rendement logarithmique des taux. La causalité au sens de Granger est que la connaissance du passé de la variable explicative, avec ou sans la connaissance du passé de la variable à expliquer, aide à formuler

des prédictions de la variable à expliquer selon une relation linéaire. Du point de vue économétrique, il s'agit de déterminer si les coefficients de régression associés à la présumée variable explicative et causale pour différents lags peuvent être considérés comme significatifs. On pourra accepter l'hypothèse selon laquelle la variable explicative cause la variable dépendante au sens de Granger à un niveau de confiance de 95% lorsque la probabilité reportée dans le tableau est inférieure à 5%, soit les cases en bleu. La variation des taux semble ainsi causer les rendements immobiliers à un niveau de confiance de 95% pour des lags supérieurs à 2, de même pour les niveaux de taux pour des lags supérieurs à 4 et pour les rendements de taux pour des lags inférieurs à 4. La causalité émanant des variations de taux semblent donc être la plus persistante au cours du temps. Inversement, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle les rendements immobiliers causeraient les niveaux de taux et les rendements immobiliers pour certains lags.

A ce stage, les tests de causalité de Granger semblent suggérer que des informations concernant les taux passés peuvent apporter une aide utile à la prédiction correcte des rendements immobiliers selon une relation linéaire mais n'écartent pas l'hypothèse d'une variable cachée et d'une relation *spurious*. De même, puisqu'il n'est pas exclu que les variables de prix immobiliers causent les variables de taux au sens de Granger, et puisque nous avons établi au chapitre précédent que le passé des variables de prix immobiliers contiennent une information utile à la prédiction de leur valeur futures, il convient de se demander si le fait que l'information contenue par les taux est utile à la prédiction des prix immobiliers n'est pas dû au fait que ces taux contiennent eux-mêmes une information sur le passé des prix immobiliers. Si cette hypothèse s'avère être valide, l'information fournie par les taux concernant le futur des prix immobiliers serait déjà contenue par celle que fournit le passé des prix immobiliers et ferait redondance avec elle. Nous tenterons de le vérifier en comparant les performances de modèles ne contenant que des variables immobilières parmi les variables explicatives à des modèles comprenant également des variables explicatives de taux.

4.2.4 : Modèles, validité des hypothèses et statistiques de performance

A l'issue de ces analyses préliminaires, nous avons testé plus d'une trentaine de modèles linéaires simples et à changements de régimes markoviens liant rendements immobiliers et valeurs présentes et/ou passées pour divers lags de temps des niveaux et/ou rendements de taux d'intérêt et/ou aux indices immobiliers. Pour cela nous avons voulu commencer par tester des modèles qui faisaient sens théoriquement – les variations des rendements immobiliers seraient expliqués par les variations des taux avec un effet fourchette, par lequel le niveau de taux influe sur cette relation- puis nous avons procédé par tâtonnement en conservant les éléments-clé des modèles dont les hypothèses semblent en adéquation avec les observations empiriques de notre échantillon de données. Nous retirons une par une des modèles que nous testons les variables dont les coefficients ne sont pas significatifs et qui présentent la p-value la plus élevée. Nous avons également évalué le modèle autorégressif d'ordre 1 à changement de régimes markoviens que nous avons retenu comme étant le plus performant à l'issue du chapitre précédent et qui n'inclue pas explicitement d'information concernant les taux afin de le tester sur ce nouvel échantillon et de comparer ses performances aux autres modèles testés. Les résultats de ces analyses sont présentés dans les tableaux restitués en annexe E.5), où y représente le rendement immobilier, r^{taux} représente le rendement logarithmique des taux d'intérêts, τ représente le niveau de taux et i représente l'indice immobilier.

Nous présélectionnons cinq modèles dont les hypothèses semblent conformes aux observations empiriques de notre échantillon de données : les modèles 16, 19, 32, 33 et 100, dont nous allons tester l'aptitude à générer des prédictions des rendements immobiliers proches des observations par la suite.

4.2.5 : Qualité des prédictions

Comme dans le chapitre précédent, pour évaluer l'aptitude des modèles présélectionnés à générer des prédictions conformes au réel, nous estimons les paramètres de ces modèles sur deux-tiers des données (1999Q1-2008Q4) puis nous établissons des prédictions statiques (s) et dynamiques (d) à partir de ces modèles sur le tiers de l'échantillon restant. Enfin nous comparons visuellement et statistiquement les prédictions aux observations. Nous restituons en annexe E.6) et E.7) les statistiques de distance entre observations et prédictions et les représentations graphiques des prédictions respectivement pour les 5 modèles présélectionnés.

Ici, nous ne pouvons comparer les prédictions des 5 modèles que sur la base des prédictions statiques. En effet, d'eux d'entre eux (M16 et M19) n'incluent pas de variables passées de rendements immobiliers. Cependant nous pouvons comparer les trois modèles M32, M33 et M100 entre eux sur la base des prédictions dynamiques puisque tous trois comportent des variables de rendements immobiliers passés.

Les graphiques et les statistiques de distance des prédictions statiques et dynamiques concordent pour indiquer que le modèle 100 affiche une meilleure performance que les quatre autres modèles en termes de prédiction des rendements immobiliers. C'est le modèle qui minimise les statistiques de distance et qui génère la courbe de prédictions qui passe au plus près de la courbe des données observées.

Dans le cas de notre échantillon de temps, les données sont particulièrement difficiles à prédire, car l'échantillon d'estimation couvre une période relativement faste de l'économie où les indices immobiliers et les rendements immobiliers sont en forte augmentation, tandis que l'échantillon de prédiction correspond à une période trouble de l'économie lors de laquelle l'indice immobilier est en baisse et peine à se redresser, et où les rendements immobiliers prennent des valeurs négatives. Le modèle 100 qui est un modèle à changement de régime performe relativement bien dans ce contexte puisqu'il est capable de prédire une baisse des rendements immobiliers en 2009. Concernant les prédictions dynamiques, ce modèle ne parvient pas à retranscrire correctement la variance des données observées mais semble dessiner une droite qui passe au milieu des données, ce qui signifie qu'il sait en capturer la tendance. Les prédictions statiques du modèle 100 parviennent à capturer la tendance long terme des rendements immobiliers ainsi que les variations moyen terme autour de cette tendance avec cependant un décalage dans le temps et l'amplitude, ce pourquoi l'adéquation sur le court terme avec les données observées reste améliorable. Les prédictions dynamiques et statiques des modèles à changement de régime markoviens incluant des variables de taux, formulent des prédictions bien trop optimistes car l'échantillon de prédiction correspond à une période de baisse des taux, qu'ils interprètent comme une période de probable explosion des rendements immobiliers, conformément à la logique schématique sous laquelle est communément envisagée la relation taux d'intérêts et prix immobiliers. Concernant les prédictions statiques, les modèles linéaires incorporant des variables de taux, M16 et M19 parviennent quant à eux à capter la tendance long terme suivie par les rendements immobiliers mais oscillent très fortement autour d'elle, ce qui fait qu'en un point quelconque de temps pris au hasard, ils peuvent se trouver très éloignés des données effectivement observées et la valeur du résidu varie fortement au cours du temps.

4.2.6 : Conclusion

Il semble que le modèle 100, qui correspond au modèle autorégressif d'ordre 1 à changements de régimes markoviens sans variable de taux pour lequel nous avons opté à l'issue du Chapitre 3 soit assorti d'hypothèses qui sont plus conformes aux données observées et permette d'élaborer des prédictions plus proches des données observées que les modèles linéaires et à changements de régimes markoviens incorporant des variables de taux que nous avons testé. Pourtant nos analyses préliminaires nous avaient indiqué que les variables de taux contenaient des informations utiles à la prédiction des rendements immobiliers. Nous interprétons cette apparente contradiction comme suit : il est possible que les variables de taux d'intérêts passés et présentes contiennent une information utile à la prédiction des rendements immobiliers, mais que celle-ci soit contenue, en plus d'autres informations utiles, dans le passé des rendements immobiliers ainsi que dans la variable d'état sous jacente, de sorte qu'en présence de ces éléments dans le modèle les variables de taux seules n'apportent pas d'information significative supplémentaire, utile à la prédiction des rendements immobiliers. De fait, lorsque nous introduisons la variable des rendements immobiliers précédente –pour un lag de 1- dans les modèles que nous avons testé, alors les coefficients associés aux variables de taux passaient du statut de coefficients significatifs à celui de coefficients non significatifs. C'est en tous les cas l'interprétation qui semble la plus probable et applicable à nos observations sur le domaine restreint des modèles linéaires et en particulier des modèles linéaires que nous avons testé sur l'indice immobilier et le taux d'intérêt de notre choix sur la période de notre choix.

Nous choisissons, parmi les modèles testés dont les hypothèses semblaient conformes aux données observées, celui qui formule les prédictions de rendements immobiliers les plus proches de la réalité observée soit le modèle autorégressif d'ordre 1 à changements de modèles markoviens avec 2 régimes, intitulé ici M100, d'équation :

$$\forall t \in \mathbb{N}, y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t, \text{ où } \begin{cases} \varepsilon_t \hookrightarrow N(0,1) \forall t \\ cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \forall t, \forall k > 0 \end{cases} .$$

Avec ce modèle, l'éventuel impact des taux d'intérêts sur les prix immobiliers est modélisé à travers la variable d'état sous-jacente et la chaîne de Markov, de même que l'ensemble des variables « cachées », non explicitées telles que le revenu des ménages français et les anticipations, qui peuvent influencer sur le marché immobilier et sa relation avec les taux d'intérêts. Nous supposons pour la suite de ce mémoire une indépendance entre les taux et les prix immobiliers.

Nous conservons les paramètres estimés à partir de l'échantillon de données le plus important, c'est-à-dire ceux que nous avons calculés lors du Chapitre 3.

4.2.7 : Récapitulatif des arguments pour justifier un modèle immobilier indépendant du modèle de taux :

1. De nombreux experts ayant étudié la relation entre taux d'intérêts et prix immobiliers concluent à la non significativité de cette relation où à ce que les taux n'apportent pas d'information utile à la prédiction des prix immobiliers futurs.
2. L'adoption d'un modèle immobilier indépendant des taux permet de ne pas amplifier l'impact des erreurs du modèle de taux sur nos simulations d'échéancier.
3. Le choix d'un modèle immobilier indépendant des taux nous permet d'utiliser plus de données immobilières lors de l'estimation du modèle (plus de 120 contre une soixantaine). Surtout, un modèle immobilier indépendant des taux nous permet d'estimer le modèle sur une durée plus longue (120 ans contre 15 ans pour un modèle intégrant les taux courts). Or le PVH est un prêt qui peut avoir une durée de plus de 20 ans. Nous nous intéressons particulièrement à la tendance longue des évolutions immobilières pour ce produit.
4. D'après nos analyses préliminaires, pour établir un modèle de prédiction des rendements immobiliers dépendant des taux performant, il faudrait que celui-ci inclue des variables supplémentaires pour lesquelles il faudrait établir des modèles de prédiction (notamment revenus des ménages, croissance économique, anticipation). Selon le niveau et les évolutions de ces variables la relation taux-immobilier change.
5. En pratique nous n'avons pas réussi à identifier de modèle immobilier dépendant des taux plus performant que le modèle indépendant des taux.

D'ailleurs le plus grand programme de PVH au monde: le programme HECM aux Etats-Unis, suppose l'indépendance entre les taux d'intérêts et les prix immobiliers.

SIMULATIONS ET RECOMMANDATION D'UNE DES METHODOLOGIES

Dans cette cinquième partie, nous testons nos quatre méthodes de détermination du couple (taux, quotité) d'un PVH à taux fixe sous contrainte de rentabilité dans le cadre juridique français en effectuant des simulations de flux de PVH en accord avec les modèles et les calibrations que nous avons développés lors de la quatrième partie pour la longévité du groupe emprunteur, l'évolution des taux et l'évolution des prix immobiliers ainsi qu'en tenant compte des différentes modalités et configurations possibles du PVH. Pour chacune des simulations nous calculons la valeur de la fonction objectif de rentabilité en fonction du couple (taux, quotité), ce qui nous permet de calculer pour chaque *set* de simulations les valeurs de couples qui réalisent l'optimalité sous chacune des quatre méthodes. Nous reportons et analysons les valeurs de couple (taux, quotité) renvoyées par chacune de nos quatre méthodes pour différentes configurations du PVH. Nous discutons alors des qualités relatives de chacune des quatre méthodes en termes commerciaux, juridiques, pratiques ainsi que vis-à-vis du risque et par conséquent nous désignons à l'issue de cette partie la méthode parmi les quatre qui nous semble la plus appropriée à la détermination du couple (taux, quotité) pour une entreprise qui agit sous contrainte de rentabilité dans le cadre juridique français.

CHAPITRE 1 : OUTILS DE SIMULATION ET DE RESOLUTION

Nous avons codé sous VBA des outils afin de pouvoir effectuer des simulations de flux du PVH et exécuter les procédures de détermination des couples (taux, quotités) au travers de nos 4 méthodes d'optimisation. Nous avons codé un premier outil VBA dans un classeur en charge d'effectuer les simulations de longévité du groupe emprunteur et du PVH selon le modèle actuariel décrit dans le Chapitre 1 : « Longévité du groupe emprunteur » de la Partie 4 « Modélisation des aléas influant sur la rentabilité du PVH ». Dans un second classeur, nous avons codé les procédures permettant la simulation de l'évolution des taux selon la méthode de Vasicek et avec les paramètres exposés dans le Chapitre 2 : « Evolution des taux » de cette même partie. Dans un troisième classeur, nous avons codé les procédures permettant la simulation de l'évolution de la valeur du sous-jacent selon un modèle dynamique à changements de régimes markoviens doté des paramètres estimés dans le Chapitre 3 : « Evolution de la valeur du sous-jacent » de cette même partie. Enfin un quatrième outil VBA permet à l'utilisateur de renseigner les paramètres et modalités du PVH, d'exécuter les procédures des trois premiers outils, d'importer leurs simulations et de calculer la valeur actualisée des flux du PVH pour chacune de ces simulations en fonction de la valeur du couple (taux, quotité) du PVH puis d'exécuter les procédures d'optimisation correspondant aux quatre méthodes afin de renseigner pour chacune le taux et la quotité qui réalisent l'optimalité ainsi que la probabilité de réalisation de l'objectif de rentabilité, la rentabilité moyenne et les TEG qui leurs sont associés.

Dans ce chapitre nous souhaitons présenter l'outil que nous allons utiliser par la suite pour effectuer les simulations sur lesquelles nous nous appuierons pour choisir la méthode qui nous semble la plus adaptée à la détermination d'un couple (taux, quotité) pour le PVH. Pour cela, nous justifions l'utilisation de nos simulations pour valider le respect de la contrainte sur la VaR qui est au centre de nos quatre méthodes, nous décrivons les modalités gérées par nos outils, discutons du nombre de simulations à adopter avant de faire la critique de ces outils.

SECTION 1.1 : VALIDATION DE LA CONTRAINTE SUR LA VAR

Nous allons valider le respect de la contrainte sur la *Value at Risk* à partir d'un grand nombre N de simulations. Pour cela, nous allons simuler N durées de PVH, N courbes de facteurs d'actualisation aux dates des flux du PVH et N prix du sous-jacent à maturité. Pour un taux et une quotité donnés, nous déduirons les flux actualisés du PVH, qui nous permettront de calculer N valeurs de la fonction objectif.

On introduit la variable binomiale X_i qui prend la valeur 1 lorsque l'évènement $\{O(\tau; q) \geq SR\}$ est réalisé pour la $i^{\text{ème}}$ simulation des flux, $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et 0 sinon. Puisque $X_i \hookrightarrow B(P(X_i = 1))$, on sait que $E(X_i) = E(|X_i|) = P(X_i = 1) \in]0; 1[$, $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Les X_i sont intégrables. La valeur prise par X_i , $\forall i \in \llbracket 1; N \rrbracket$, peut être déduite du calcul de la fonction objectif pour un seuil de rentabilité SR donné.

Les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, car pour chacune des X_i la longévité, les facteurs d'actualisation et les prix de l'immobilier sont simulés à partir des mêmes lois, dont les aléas respectivement uniforme, gaussien et sont simulés aléatoirement et indépendamment d'une simulation à l'autre.

On en déduit que la somme des X_i suit la loi binomiale suivante : $\sum_{i=1}^N X_i \hookrightarrow B(N, P(X = 1), P(X = 0))$, où l'on note X la loi parente des X_i .

On sait alors que $E(\sum_{i=1}^N X_i) = N \times P(X = 1)$.

D'après la loi forte des grands nombres, pour $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables intégrables, indépendantes et identiquement distribuées de loi parente X , Y_n converge presque sûrement vers $E(X)$, où $Y_n = n^{-1} \times \sum_{i=1}^n X_i$:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = E(X)\right) = 1$$

Pour N grand, nous allons donc utiliser l'approximation $N^{-1} \times \sum_{i=1}^N X_i = P(X = 1)$ pour calculer la probabilité de l'évènement $\{O(\tau; q) \geq SR\}$ pour τ et q donnés.

A partir d'algorithmes récursifs sur les taux et quotité et pour SR et PNR fixées par l'entreprise prêteuse nous allons pouvoir déterminer les combinaisons possibles de τ et q tels que $P(\tilde{O}(\tau; q) \leq SR) \leq PNR \Leftrightarrow Var_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR$.

Plus précisément, nous allons calculer grâce à un algorithme récursif les taux et quotités qui respectent cette contrainte de *Value at Risk* tout en respectant les autres contraintes de chacune des méthodologies considérées.

SECTION 1.2 : MODALITES GEREES PAR L'OUTIL CENTRAL

Dans l'outil central, l'utilisateur peut renseigner plusieurs paramètres. Les capacités de notre outil en termes de gestion des paramètres délimitent également le nombre de configurations de PVH qui seront simulées dans le Chapitre 2 et sur lesquelles nous baserons nos observations dans le Chapitre 3 afin de pouvoir sélectionner la méthode qui nous semble la plus adaptée à la détermination d'un couple (taux, quotité) d'un PVH à taux fixe sous contrainte de rentabilité dans le cadre juridique français. Nous présentons les paramétrages que notre outil central est capable de gérer dans cette section.

Premièrement, l'outil central permet à l'utilisateur de renseigner les paramètres d'optimisation, c'est-à-dire les paramètres qui relèvent du choix et de la stratégie de l'entreprise vis-à-vis du PVH et de la détermination du couple (taux, quotité). Il peut ainsi renseigner le nombre de simulations qu'il souhaite effectuer pour chaque combinaison de paramètres qu'il entre dans l'outil, la rentabilité cible de l'entreprise et la probabilité minimum de réalisation souhaitée, la quotité fixée dans le cas de la méthode $M_{\tau/q}$, le taux fixé dans le cas de la méthode $M_{q/\tau}$, le taux maximum à respecter lors de la résolution ainsi que le pas du taux, qui représente son arrondi ou le chiffre dont il doit être nécessairement un multiple, la quotité maximum et pareillement le pas de la quotité.

Deuxièmement, l'outil central permet à l'utilisateur de renseigner les paramètres du PVH, c'est-à-dire les paramètres qui relèvent de la rencontre entre la demande du client concernant les caractéristiques du PVH et les

possibilités et contrats annexes de l'entreprise. Parmi ceux-ci comptent la valeur initiale du bien sous-jacent, le facteur des déblocages fractionnés et le type constant ou géométrique des déblocages, le pas de temps constant entre les déblocages, la date de versement du premier déblocage et le nombre de déblocages, ainsi que le nombre, le montant unitaire constant, la fréquence constante et la date des premiers produits et coûts annexes perçus ou payés par l'entreprise au nom du contrat de PVH. Enfin l'utilisateur peut renseigner si les déblocages, coûts et produits continuent d'être versés ou perçus de façon post-mortem, après la disparition du groupe emprunteur ou non.

Les deux types de déblocages constant ou géométrique sont définis comme suit, en reprenant les notations précisées en annexe et en considérant λ le facteur de déblocage constant défini par l'utilisateur :

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda, \forall i \in \llbracket 2; N_d \rrbracket & \text{dans le cas de déblocages constants} \\ \lambda_i = \lambda^{i-1}, \forall i \in \llbracket 2; N_d \rrbracket & \text{dans le cas de déblocages géométriques} \end{cases}$$

Troisièmement, il permet de renseigner les paramètres de longévité, c'est-à-dire les paramètres qui déterminent la durée du PVH et relèvent ou sont déduits pour la plupart du profil sociodémographique du ou des souscripteurs. L'utilisateur peut ainsi renseigner un nombre de co-souscripteurs compris entre 1 et 3, le sexe et l'âge de chaque individu compris dans ce groupe, le stress de mortalité applicable individuellement à chaque individu du groupe, l'hypothèse concernant l'âge maximal de survie pour chaque individu et finalement, le délai de recouvrement du remboursement après le décès du dernier des souscripteurs.

Quatrièmement, l'utilisateur peut y renseigner les paramètres de taux qui relèvent du profil de l'entreprise en termes de refinancement, c'est-à-dire la fréquence de refinancement et le spread de refinancement.

Enfin, l'utilisateur peut renseigner dans l'outil central les hypothèses de calcul du TEG : l'hypothèse concernant la durée de survie du groupe emprunteur et l'appréciation annuelle de la valeur du bien sous-jacent, le montant unitaire, la date de premier versement et la fréquence constante des coûts et produits annexes du PVH pour le client. Il peut également indiquer si les coûts et produits annexes continuent à être versés ou reçus au nom du client après sa mort et renseigner la table des taux usuraires applicables en fonction du montant emprunté.

SECTION 1.3 : COMBIEN DE SIMULATIONS EFFECTUER ?

On suppose que l'entreprise souhaite estimer la probabilité de réalisation de la rentabilité souhaitée avec une certaine précision. Elle souhaite déterminer le nombre de simulations nécessaires pour atteindre cette précision. Nous présentons dans cette section la méthode Wald, qui permet de déterminer l'intervalle de confiance pour une proportion afin de résoudre ce problème.

En reprenant les notations de la section 1.1 de ce chapitre, nous avons établi que $\sum_{i=1}^N X_i \hookrightarrow B(N, P(X=1), P(X=0))$ où X_i est la variable binomiale qui prend la valeur 1 lorsque l'évènement $\{O(\tau; q) \geq SR\}$ est réalisé pour la $i^{\text{ème}}$ simulation des flux du PVH, $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ et 0 sinon. Nous noterons par la suite p la probabilité $P(X=1)$ et q la probabilité $P(X=0)=1-p$. p est la probabilité de réalisation de l'objectif de rentabilité que nous cherchons ici à estimer avec une certaine précision.

Lorsque le nombre de simulations N tend vers l'infini, la proportion p ne tend pas vers zéro, elle reste fixe. On peut écarter la possibilité que notre loi binomiale converge vers une loi de Poisson. De plus on sait que $E(X_i) = p$ et que $V(X_i) = p \times q$ puisque ce sont là les formules des deux premiers moments d'une loi de Bernouilli. Les deux premiers moments de la loi de Bernouilli existent donc et sont finis, avec $(p, q) \in [0; 1]^2$ et $pq > 0$. Nous avons déjà établi dans la section 1.1 que les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Selon le théorème Central-Limite, nous pouvons par conséquent établir que :

$$\sum_{i=1}^N X_i \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(Np, Npq)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Y_N &\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(p, \frac{pq}{N}), \text{ où } Y_n = n^{-1} \times \sum_{i=1}^n X_i. \\ &\Leftrightarrow \frac{Y_N - p}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\text{loi}} N(0,1) \end{aligned}$$

En pratique l'approximation $\frac{Y_N - p}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \sim N(0,1)$ est applicable dès lors que $N \geq 30, Np \geq 5$ et $Nq \geq 5$.

En utilisant cette approximation, nous pouvons réaliser l'encadrement suivant, pour un niveau de confiance $1-\alpha$:

$$P\left(-u_{1-\alpha/2} \leq \frac{Y_N - p}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \leq +u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Où $u_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale centrée réduite. En effet, la loi $N(0,1)$ présentant une répartition symétrique de part et d'autre de l'axe des abscisses, il en résulte que $u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$.

Or :

$$\begin{aligned} -u_{1-\alpha/2} \leq \frac{Y_N - p}{\sqrt{\frac{pq}{N}}} \leq +u_{1-\alpha/2} &\Leftrightarrow -u_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{pq}{N}} \leq Y_N - p \leq +u_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{pq}{N}} \\ &\Leftrightarrow Y_N - u_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{pq}{N}} \leq p \leq Y_N + u_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{pq}{N}} \end{aligned}$$

Soit y_N une réalisation de Y_N . y_N est par conséquent une estimation de la proportion p à la précision : $\pm u_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{pq}{N}}$.

Si l'on souhaite que cette précision soit inférieure à un certain nombre γ . Il faut alors choisir le nombre de simulations N tel que :

$$\begin{aligned} u_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{pq}{N}} \leq \gamma &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{u_{1-\alpha/2}}{\gamma} \times \sqrt{pq} \leq \sqrt{N} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{\gamma}\right)^2 \times pq \leq N \end{aligned}$$

Pour calculer N on pourra remplacer pq dans la formule ci-dessus par $y_N \times (1 - y_N)$ ou par son majorant : $\frac{1}{4}$.

A titre d'exemple, on reporte dans le tableau restitué en annexe F.1) différentes valeurs que peut prendre N en fonction du α et du γ choisis, où l'on a remplacé pq par $\frac{1}{4}$.

SECTION 1.4 : CRITIQUES ET LIMITES DES OUTILS

Nous pouvons formuler des critiques de nos outils sur deux dimensions.

Premièrement, lors de la phase de conception et d'écriture du code de l'outil nous avons formulé des hypothèses contraignantes sur les configurations possibles du PVH. Nos outils ne permettent donc pas d'envisager tous les cas de figure qui pourront se présenter en réalité et lors des simulations, qui nous permettront d'appuyer notre raisonnement afin de choisir la méthodologie de détermination du couple (taux, quotité) qui nous semble la plus adaptée sous contrainte de rentabilité en France, nous ne considérerons que les configurations simulables via nos outils. Notamment, nos outils ne permettent de simuler que des PVH dont le profil des déblocages est caractérisé

par un facteur de déblocages unique et constant au cours du temps et avec des laps de temps constants entre les différents déblocages, et de deux types seulement : constants ou géométriques. Nous ne pouvons simuler des PVH qui ont pour souscripteurs un groupe de plus de trois personnes. Nous ne pouvons de même simuler que des PVH pour lesquels, les coûts et les produits annexes sont de montant et de fréquence constants, tant pour l'entreprise que pour le souscripteur. L'utilisation de notre outil suppose de connaître ou de faire des hypothèses à priori sur la date de 1^{er} versement ou de 1^{ere} perception des coûts et produits annexes, ainsi que sur leur nombre et leur montant. En particulier, on n'envisage que des configurations dans lesquelles les montants des coûts et produits annexes sont indépendants du taux et de la quotité du PVH. Enfin on suppose que le spread de l'entreprise est constant sur toute la durée de vie du PVH.

Deuxièmement, nos outils présentent de limites dues aux limites techniques d'Excel : le nombre de simulations est limité car le nombre de colonnes d'Excel est limité, la précision de la résolution lorsqu'on exécute les procédures d'optimisation est limitée et le temps de simulation et de résolution est relativement long.

CHAPITRE 2: EXEMPLES D'APPLICATION

Dans cette partie, nous rapportons les résultats apportés par nos quatre méthodes de détermination des couples (taux, quotité) face à des profils de PVH qui divergent en termes de profil de déblocage, longévité attendue du prêt, coûts et produits associés, hypothèses de TEG et de valeur initiale du bien ainsi que face à différents niveaux d'objectifs fixés par l'entreprise pour sa probabilité de réalisation et sa rentabilité moyenne. L'objectif de ce chapitre est d'avoir un premier aperçu de la façon dont ces méthodes gèrent les différentes configurations possibles du PVH, et comment on peut les comparer entre elles en termes de probabilité de réalisation, rentabilité moyenne et de TEG auxquelles les solutions qu'elles avancent aboutissent. Ces observations nous serviront de support à la réflexion que nous mènerons dans le Chapitre 3, à savoir laquelle des 4 méthodes nous semble la plus appropriée, en nous fournissant des indications sur l'aptitude de ces méthodes à fournir des solutions réalistes et souhaitables pour l'entreprise prêteuse et le client.

SECTION 2.1 : PARAMETRAGE INITIAL DE L'OUTIL ET RESULTATS DE REFERENCE

Nous avons choisi comme paramétrage de référence le paramétrage exposé en annexe F.2), qui correspond selon nos données à un cas typique en termes de valeur du bien sous-jacent de PVH simple c'est-à-dire à déblocage unique. Ici, nous supposons qu'un couple composé d'un homme et d'une femme de 70 ans dont la mortalité suit celle des tables officielles (pas de sous ou sur mortalité) souscrivent à un PVH à déblocage unique sur un bien immobilier d'une valeur de 300 000 €. Le délai de recouvrement est nul. Il n'y a pas de produits ou de coûts associés au PVH pour l'entreprise offreuse, et il n'existe pour le client qu'un coût de 4 000 € de frais de dossiers à déboursier au moment de la souscription du prêt. L'entreprise offreuse s'est fixé l'objectif d'une rentabilité de 10 % à atteindre dans au moins 95 % des cas. Le taux fixé pour la première méthode ($M_{\tau/q}$) est de 7,95 %, le taux unique offert par le Crédit Foncier, la quotité fixée pour la seconde méthode ($M_{q/t}$) est de 40 %. Pour des raisons commerciales, l'entreprise estime que le taux ne peut dépasser 10 %, et pour maîtriser son risque elle ne souhaite pas offrir de quotité supérieure à 60 %. Nous supposons ici que l'entreprise se refinance tous les ans et que son spread de refinancement est de 0,4 % pour cet horizon de temps. Enfin les taux usuraire retenus sont les taux officiels applicables au 3^{eme} trimestre 2013.

Les résultats des simulations pour ces paramètres de référence, sont répertoriés en annexe F.3), qui décrit donc nos résultats de référence en termes de couples (taux, quotité).

SECTION 2.2 : VARIATION DES DEBLOCAGES

Dans cette section, nous reportons les résultats des simulations pour des profils de déblocage divergents de notre déblocage unique de référence, en modifiant 1 paramètre à la fois (nombre de déblocages, fréquence, date du premier déblocage, facteur du déblocage, type constant ou géométrique, prise en compte ou non des déblocages post mortem), afin d'observer pour la première fois la façon dont les 4 méthodes réagissent à ces changements. Les résultats des simulations sont reportés en annexe F.4).

Nous observons que toutes les configurations de déblocages simulées ont trouvé solution via la méthode $M_{q/\tau}$. Cette méthode est celle des 4 qui fournit les solutions minimums ou mediums en termes de probabilités de réalisation (allant ici de 95 à 96 %), et les solutions mediums en termes de rentabilité moyenne (de 394 à 532 %) et de TEG (de 3,1 à 7,4 %). Toutes les quotités déterminées sont comprises entre 2 et 46 %.

La méthode $M_{\tau/q}$ n'a pas été en mesure d'apporter une solution à 17 des 22 profils de déblocages simulés. Elle est la méthode parmi les 4 qui fournit les résultats minimums à mediums en termes de probabilités de réalisation (de 95 à 95,6 % ici), et minimums en termes de rentabilités moyennes (de 42 à 105 %) et de TEG (de 1,6 à 3,1 %). Les taux déterminés sont compris entre 1,5 et 3 %.

Par définition M_{conj1} maximise la probabilité de réalisation et M_{conj2} la rentabilité moyenne. M_{conj1} fournit des probabilités comprises entre 95,8 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 312 et 1018 %, des taux entre 5,5 et 10 % et des quotités entre 2 et 10 %. M_{conj2} fournit des probabilités comprises entre 95,8 et 99,8 %, des rentabilités moyennes entre 662 et 1104 %, et des quotités entre 2 et 12 %. Avec M_{conj2} tous les taux sont égaux au taux maximal de 10 %. Ces deux méthodes maximisent les TEG qui atteignent fréquemment des niveaux quasi-usuraires entre 5,1 et 10,5 %. Les deux méthodes conjointes apportent des résultats identiques dans 3 des 22 cas.

SECTION 2.3 : VARIATION AUTOUR DES COUTS ET PRODUITS ASSOCIES

Dans cette section, nous effectuons des simulations pour des profils de coûts et produits associés divergents de notre profil de coûts et produits associés de référence, en modifiant 1 paramètre à la fois (nombre de coût et produits, fréquence des coûts et produits, date du premier coût et du premier produit, existence ou non de coûts et produits post mortem), et observons la façon dont les 4 méthodes gèrent ces divergences. Les résultats des simulations sont restitués en annexe F.5).

Ici encore, toutes les configurations simulées ont été solutionnées par la méthode $M_{q/\tau}$. Elle fournit des résultats minimums concernant la probabilité de réalisation (allant de 95 à 95,3 %), et mediums en termes de rentabilité moyenne (de 484 à 533 %), et de TEG (de 3,6 à 6,9 %). Les quotités déterminées sont comprises entre 38 et 53 %.

La méthode $M_{\tau/q}$ fournit les résultats mediums concernant la probabilité de réalisation (allant de 95 à 96,9 %), et minimums en termes de rentabilité moyenne (de 23 à 145 %), et de TEG (de 0,6 à 4,1 %). Le taux est compris entre 0,5 et 4 %. On observe un cas parmi les 16 pour lequel la méthode $M_{\tau/q}$ n'a pas été en mesure d'apporter une solution.

Par définition M_{conj1} maximise la probabilité de réalisation et M_{conj2} la rentabilité moyenne. M_{conj1} fournit des probabilités comprises entre 98,7 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 567 et 1254 %, des taux entre 7,5 et 10 % et des quotités entre 2 et 10 %. M_{conj2} fournit des probabilités comprises entre 98,3 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 998 et 1617 %, et des quotités entre 2 et 13 %. Avec M_{conj2} tous les taux sont égaux au taux maximal de 10 %. Ces deux méthodes maximisent les TEG qui atteignent fréquemment des niveaux quasi-usuraires entre 9,4 et 15,1 %. Les deux méthodes conjointes apportent des résultats identiques dans 2 des 16 cas.

SECTION 2.4 : VARIATION DE LA COMPOSITION DU GROUPE EMPRUNTEUR

Dans cette section, nous effectuons des simulations pour des profils de longévité et de groupes emprunteurs divergents de notre profil référence, en modifiant 1 paramètre à la fois (nombre d'emprunteurs, sexe, âge, sur ou

sous-mortalité, délai de recouvrement), afin d'observer la façon dont les 4 méthodes gèrent ces changements. Les résultats des simulations sont restitués en annexe F.6).

Lorsque l'on fait varier les paramètres de longévité, la méthode $M_{q/\tau}$ fournit les résultats minimums ou mediums concernant la probabilité de réalisation (de 95 à 96,4 %) et mediums pour la rentabilité moyenne (de 127 à 1229 %), et les TEG (de 3,5 à 7,3 %). Cette méthode a permis de déterminer une solution pour tous les cas de figure de longévité simulés. Les quotités sont comprises entre 33 et 60 %.

La méthode $M_{\tau/q}$ fournit les résultats minimums ou mediums concernant la probabilité de réalisation (de 95 à 96,4 %), et minimums pour rentabilité moyenne (de 23 à 218 %), et les TEG (de 1,1 à 4,7 %). Cette méthode n'a pas permis de gérer toutes les configurations de longévité puisque nous avons relevé deux cas d'insolvabilité parmi les 8 étudiés. Les taux sont compris entre 1 et 4,5 %.

Par définition M_{conj1} maximise la probabilité de réalisation et M_{conj2} la rentabilité moyenne. M_{conj1} fournit des probabilités comprises entre 99 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 184 et 2639 %, des taux entre 8 et 10 % et des quotités entre 2 et 14 %. M_{conj2} fournit des probabilités comprises entre 98,3 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 208 et 4274 %, et des quotités entre 2 et 29 %. Avec M_{conj2} tous les taux sont égaux au taux maximal de 10 %. Ces deux méthodes maximisent les TEG qui atteignent fréquemment des niveaux quasi-usuraires entre 9,8 et 15,1 %. Les deux méthodes conjointes apportent des résultats identiques dans 2 des 8 cas.

SECTION 2.5 : VARIATION DES PARAMETRES DE CALCUL DU TEG

Dans cette section, nous reportons les résultats des simulations pour des profils d'hypothèses et des paramètres de calcul du TEG divergents de nos hypothèses et paramètres de référence, en modifiant 1 paramètre ou hypothèse à la fois (nombre, fréquence et date des premiers coûts et produits pour le client, fréquence des coûts et produits pour le client, hypothèses concernant la durée de vie du groupe emprunteur et l'appréciation annuelle de l'immobilier), afin d'observer la façon dont les 4 méthodes réagissent à ces changements. Les résultats des simulations sont restitués en annexe F.7). Nous avons utilisé pour cette section un unique ensemble de simulations.

Lorsqu'on fait varier les paramètres du TEG, la méthode $M_{q/\tau}$ fournit toujours les résultats minimums concernant la probabilité de réalisation (de 95,1 %) et mediums pour la rentabilité moyenne (de 526 %), et les TEG (de 2,9 à 8,1 %). La méthode permet de déterminer une solution pour tous les cas de figure envisagés. La quotité est de 45 %.

La méthode $M_{\tau/q}$ fournit les résultats mediums concernant la probabilité de réalisation (de 95,4 %), et minimums pour la rentabilité moyenne (43 %), et les TEG (de 1 à 2,1 %). Ici nous n'avons relevé aucun cas d'insolvabilité. Les taux sont de 1,5 % dans tous les cas simulés.

Par définition M_{conj1} maximise la probabilité de réalisation et M_{conj2} la rentabilité moyenne. M_{conj1} fournit des probabilités comprises entre 99,7 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 217 et 1246 %, des taux entre 4,5 et 10 % et des quotités entre 2 et 7 %. M_{conj2} fournit des probabilités comprises entre 98,3 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 1026 et 1263 %, et des quotités entre 1 et 20 %. Avec M_{conj2} tous les taux sont égaux au taux maximal de 10 %. Ces deux méthodes maximisent les TEG qui atteignent fréquemment des niveaux quasi-usuraires entre 2,1 et 19,3 %. Les deux méthodes conjointes apportent des résultats identiques dans 6 des 16 cas.

SECTION 2.6 : VARIATION DE LA VALEUR INITIALE DU BIEN

Dans cette section, nous reportons les résultats des simulations pour des valeurs initiales du bien immobilier sous-jacent différentes de notre valeur de référence, afin d'observer la façon dont les 4 méthodes gèrent ces changements. Les résultats des simulations sont restitués en annexe F.8).

La méthode $M_{q/\tau}$ fournit les résultats minimums ou mediums concernant la probabilité de réalisation (95 à 95,1 %) et mediums pour la rentabilité moyenne (de 484 à 558 %), et les TEG (allant de 3,8 à 6,5 %). Toutes les configurations de valeur initiale du bien simulées ont été solutionnées par cette méthode. Les quotités sont comprises entre 41 et 48 %.

La méthode $M_{\tau/q}$ fournit les résultats mediums ou minimums concernant la probabilité de réalisation (de 95 à 95,9 %), et minimums pour rentabilité moyenne (de 26 à 107 %), et les TEG (1,4 à 3,1 %). La méthode a permis de déterminer des paramètres optimaux dans tous les cas simulés, on ne relève pas d'insolubilité. Le taux est compris entre 1 et 3 %.

Par définition M_{conj1} maximise la probabilité de réalisation et M_{conj2} la rentabilité moyenne. M_{conj1} fournit des probabilités comprises entre 99,5 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 258 et 1207 %, des taux entre 5 et 10 % et des quotités entre 1 et 5 %. M_{conj2} fournit des probabilités comprises entre 98,7 et 100 %, des rentabilités moyennes entre 1007 et 1232 %, et des quotités entre 1 et 19 %. Avec M_{conj2} tous les taux sont égaux au taux maximal de 10 %. Ces deux méthodes maximisent les TEG qui atteignent fréquemment des niveaux quasi-usuraires entre 8,3 et 15,1 %. Les deux méthodes conjointes apportent des résultats identiques dans 3 des 8 cas.

SECTION 2.7 : VARIATION DES PARAMETRES D'OPTIMISATION

Ici, nous effectuons des simulations pour des paramètres d'optimisation divergents de nos paramètres d'optimisation de référence, en modifiant 1 paramètre à la fois (rentabilité souhaitée, probabilité minimum de réalisation souhaitée, le taux fixé dans le cas de la méthode $M_{q/t}$, la quotité fixée dans le cas de la méthode $M_{t/q}$) afin d'observer la façon dont les 4 méthodes gèrent ces changements. Nous avons également repris certains cas d'insolubilité observés précédemment pour la seconde méthode et ré-exécuté les simulations pour ces cas de figure en faisant varier la quotité fixée afin de voir comment la méthode réagirait. Les résultats des simulations sont restitués en annexe F.9).

Concernant les variations des objectifs de rentabilité et de probabilités minimum autour de nos paramètres de référence nous faisons les observations suivantes : les deux méthodes conjointes fournissent les probabilités, rentabilités et les TEG les plus élevés. La méthode $M_{q/\tau}$ fournit les probabilités minimums ou mediums, et les rentabilités et TEG mediums. $M_{\tau/q}$ fournit les probabilités de réalisation minimums ou mediums et les rentabilités et TEG minimums. Nous rencontrons à nouveau 5 configurations sur les 8 pour lesquelles $M_{\tau/q}$ n'est pas capable de déterminer une solution optimale.

Nous avons également constaté que lorsqu'on fait varier la quotité fixée, l'objectif de rentabilité et la probabilité minimum, $M_{\tau/q}$ peut déterminer un taux tel que la rentabilité moyenne sur l'ensemble de simulations est inférieure à la rentabilité objectif. Nous restituons en annexe cinq exemples de ce phénomène. Nous n'avons pas observé de cas pour lesquels la rentabilité moyenne est inférieure à la rentabilité objectif avec les trois autres méthodes.

Lorsqu'on fait varier le taux fixé pour la méthode $M_{\tau/q}$, on observe que tous les cas de figures simulés restent solvables via cette méthode.

Pour les cas insolubles par la méthode $M_{\tau/q}$ exposés dans les sections précédentes, le fait de faire varier la quotité ne permet pas toujours de rendre le cas solvable par cette méthode. Parfois faire varier la quotité permet de rendre le cas solvable, mais pour différentes quotités selon les paramètres considérés en terme de longévité du groupe souscripteur et de profil de déblocage.

Récapitulatif du chapitre 2 :

Parmi les 4 méthodes étudiées, les deux méthodes conjointes fournissent les probabilités de réalisation et les rentabilités moyennes ainsi que les TEG les plus élevés.

La méthode $M_{q/\tau}$ fournit les probabilités minimums ou mediums, et les rentabilités et TEG mediums.

La méthode $M_{\tau/q}$ fournit les probabilités minimums ou mediums et les rentabilités et TEG minimums. Nous relevons un nombre important de cas d'insolvabilités avec cette méthode ainsi que quelques cas dans lesquels la rentabilité moyenne est inférieure à la rentabilité souhaitée.

CHAPITRE 3: PILOTAGE PAR LE TAUX, LA QUOTITE OU PILOTAGE CONJOINT ?

Dans ce Chapitre 3 nous allons discuter des avantages et inconvénients, forces et faiblesses de nos 4 méthodes, d'un point de vue commercial, juridique, puis pratique et vis-à-vis du risque afin de sélectionner la méthode parmi les 4 qui nous semble la plus adaptée à la détermination du couple (taux, quotité) d'un PVH à taux fixe sous contrainte de rentabilité dans le cadre juridique français.

SECTION 3.1 : POINT DE VUE COMMERCIAL

Du point de vue commercial, les méthodes conjointes sont celles qui offrent les conditions les moins attractives au client : on observe lors de nos simulations qu'elles fournissent toutes choses égales par ailleurs les taux les plus élevés et les quotités les plus basses des quatre méthodes, transcrits dans les TEG les plus élevés, presque systématiquement à la limite de l'usure. Ceci s'explique par le fait que la formulation même de la méthode est intégralement tournée vers l'intérêt de l'entreprise, avec pour seul objectif ou contrainte vis-à-vis du client la nécessité de produire des couples (taux, quotités) dont les TEG ne sont pas usuraires. Ces méthodes, si elles sont adoptées, risquent par conséquent de mener à des volumes de souscriptions du PVH particulièrement faibles. De plus, elles ne permettent pas de moduler explicitement les leviers taux et quotités du PVH en fonction du profil de risque des clients ni en fonction des niveaux offerts par la concurrence. La quotité et le taux pouvant tous deux varier à la fois d'un client l'autre, la lisibilité du produit est réduite pour le consommateur. Le niveau du taux ou de la quotité, pris individuellement pourront difficilement être justifiés au client. Enfin, il n'existe pas de possibilité de prise en compte d'une éventuelle préférence du client entre taux faible et quotité élevée.

On observe au fil de nos simulations que la méthode $M_{q/\tau}$ offre, parmi les 4 méthodes des conditions « moyennement » attractives soit des TEG mediums, avec les quotités les plus élevées et les taux médiums, mais cette attractivité dépend bien entendu du niveau de taux que l'on fixe à priori. Comparée aux méthodes conjointes sur le plan commercial, elle a l'avantage d'intégrer l'intérêt du client dans sa formulation puisqu'il s'agit une fois le taux fixé d'offrir la quotité la plus avantageuse soit la plus élevée pour le client. Ceci explique les TEG plus faibles qu'elle fournit par rapport à ceux des méthodes conjointes et devrait conduire à générer plus de souscriptions de PVH si cette méthode est adoptée plutôt qu'une des méthodes conjointes. Elle offre également l'avantage à l'entreprise offreuse de pouvoir explicitement s'adapter à la concurrence et moduler l'attractivité commerciale de son PVH en décidant de fixer le taux à un niveau plus ou moins faible et notamment si elle le souhaite de pouvoir explicitement offrir des taux plus faibles aux meilleurs profils de risque afin de les retenir. L'existence d'un taux fixé à priori unique pour tous les clients ou modulé explicitement selon les profils de risque donne au souscripteur une meilleure lisibilité du produit que dans le cas de la méthode conjointe puisqu'à taux égaux, il pourra comparer la quotité qui lui est accordée à celle qui est accordée aux autres clients, tandis qu'à taux modulés en fonction du risque, il pourra comprendre le niveau de taux qui lui est proposé grâce à la connaissance de son profil de risque. Enfin, l'entreprise offreuse aura la possibilité de s'adapter à une éventuelle préférence du client entre taux faible et quotité élevée en modulant le taux fixé.

La méthode $M_{\tau/q}$ offre quant à elle, lors de nos simulations, les conditions les plus attractives soit les TEG minimums, associés aux taux minimums et aux quotités mediums, mais cette attractivité dépend bien entendu du niveau de quotité fixé à priori. Comme la méthode $M_{q/\tau}$, elle a l'avantage d'intégrer l'intérêt du client dans sa formulation puisqu'il s'agit une fois la quotité fixée d'offrir au client le taux le plus avantageux soit le plus faible. De ce fait, elle fournit des couples (taux, quotités) aux TEG plus faibles que les méthodes conjointes et devrait par conséquent générer un volume de souscription supérieur à ces méthodes. Elle offre également l'avantage à

l'entreprise de pouvoir explicitement s'adapter à la concurrence et moduler l'attractivité commerciale de son PVH en décidant d'une quotité fixée plus ou moins faible et notamment si elle le souhaite de pouvoir offrir des quotités plus élevées aux clients dont les profils sont les moins risqués afin de les retenir. Là encore l'existence d'une quotité fixée unique pour tous les clients ou modulée explicitement selon les profils de risque donne au client une meilleure lisibilité du produit que dans le cas de la méthode conjointe. Enfin, l'entreprise offreuse aura la possibilité de s'adapter à une éventuelle préférence du client entre taux faible et quotité élevée en modulant la quotité fixée.

SECTION 3.2 : POINT DE VUE JURIDIQUE

Du point de vue juridique, trois points doivent être mis en avant.

Premièrement, les quatre méthodes fournissent des paramétrages légaux pour le PVH. Pour rappel, il n'existe actuellement dans la juridiction française aucune contrainte individuelle portant sur le niveau du taux ou sur celui de la quotité. La contrainte à respecter est globale : il s'agit de s'assurer que les PVH émis présentent un TEG inférieur au seuil de l'usure applicable, or les 4 méthodes considérées ont été formulées de façon à respecter cette contrainte.

Deuxièmement, lors de nos simulations, nous avons observé le fait que les méthodes $M_{q/\tau}$ et $M_{\tau/q}$ déterminaient des couples (taux, quotités) associés à des TEG significativement inférieurs (c'est-à-dire inférieurs de plusieurs points) au seuil de l'usure applicable. Cela s'explique par le fait que ces méthodes sont formulées de façon à ce que, une fois l'un des deux paramètres fixés, l'autre soit déterminé de façon à maximiser la valeur que le client retirera de son PVH : en maximisant la quotité et en minimisant le taux respectivement. Or le TEG peut être vu comme un indicateur récapitulatif de la valeur qu'offre l'entreprise au client : schématiquement, plus il est faible et plus les termes offerts au souscripteur sont avantageux, avec l'hypothèse que le souscripteur n'a pas de préférence particulière entre un taux faible ou une quotité élevée. Par conséquent, rechercher l'intérêt du client conduit à abaisser le TEG. Les deux méthodes conjointes ne sont au contraire pas formulées de façon à maximiser la valeur offerte pour le client, elles se contentent de respecter la contrainte d'un paramétrage aboutissant sur un TEG non usuraire. En pratique, on observe donc que les méthodes conjointes déterminent des couples (taux, quotité) dont le TEG est supérieur à celui des couples déterminés par les méthodes $M_{q/\tau}$ et $M_{\tau/q}$, et que les TEG qu'elles fournissent sont très proches des taux usuraires. Du point de vue de la juridiction des TEG, la méthode qui présente le plus de risque de non-conformité à la loi est donc la méthode conjointe dans le sens où un léger changement d'hypothèse portant sur le calcul du TEG à posteriori pourrait conduire à un dépassement du seuil de l'usure pour ces méthodes.

Troisièmement, on a observé lors de nos simulations que les méthodes conjointes sont parmi les quatre celles qui déterminent les paramétrages de PVH les plus défavorables au client : taux élevé, quotité basse et TEG proche du seuil de l'usure. Cela s'explique à nouveau par le fait que ces deux méthodes sont formulées de façon à maximiser la valeur retirée du PVH pour l'entreprise au-delà des objectifs qu'elle s'est fixée, avec pour seul égard vis-à-vis du client de fournir des PVH au TEG non usuraire. Ce sont donc les méthodes qui sont le plus susceptibles de générer des litiges et des consciencieux avec les clients voire de déboucher sur un recours aux tribunaux.

SECTION 3.3 : POINT DE VUE PRATIQUE

Du point de vue pratique nous relevons deux observations principalement, l'une concernant la solubilité via les 4 méthodes et l'autre le temps d'exécution de ces méthodes.

Premièrement, lors de nos simulations nous avons constaté que la méthode $M_{\tau/q}$ ne parvenait pas dans de nombreux cas à déterminer de taux optimal pour résoudre notre problème. Des quatre méthodes c'est celle qui conclut le plus souvent à l'insolubilité. Lorsque l'on fait varier notamment le profil des déblocages, de longévité du groupe emprunteur, de coûts associés et les paramètres d'optimisation soit les objectifs de l'entreprise, il faut également faire varier la quotité fixée pour que l'optimisation via cette méthode trouve solution. En pratique l'entreprise qui adopterait cette méthode devrait donc commencer par déterminer le niveau de quotité à fixer

pour chaque combinaison de paramétrage de déblocages et de longévité notamment, ou accepter de perdre de nombreux clients lors des cas d'insolubilité ou encore accepter d'ajuster ses objectifs selon les cas. Par contraste la méthode $M_{q/\tau}$ et les méthodes conjointes ont fait preuve d'une meilleure capacité d'adaptation aux différents profils de PVH et d'une meilleure capacité de résolution. La solubilité de la méthode $M_{q/\tau}$ a été testée pour différents de niveaux de taux jugés raisonnables (c'est-à-dire compris entre 1 et 10%) pour différentes configurations de PVH et lorsque nous avons fait varier ce taux, nous n'avons pas relevé de cas d'insolubilité. La méthode $M_{\tau/q}$ est capable de trouver une solution optimale dès qu'il existe un taux tel qu'associé à la quotité fixée le TEG soit inférieur au seuil de l'usure. De son côté, la méthode $M_{q/\tau}$ trouve une solution optimale dès qu'il existe une quotité telle qu'associée au taux fixé le TEG soit inférieur au taux de l'usure. Si nous considérons nos simulations comme représentatives, il semble par conséquent qu'il soit plus fréquent et probable à priori de trouver une solution légale en faisant varier la quotité et en fixant le taux qu'en fixant la quotité et en variant le taux. Ceci indiquerait que le niveau de la quotité est un facteur plus déterminant que le niveau de taux dans la capacité de l'entreprise à proposer une solution convenable et légale à son client. Dans ce cas, il vaut mieux tester toutes les quotités possibles lors de l'optimisation pour maximiser les chances de trouver une solution. Il nous manque cependant une démonstration et explication mathématique et rigoureuse de ce phénomène qui le confirme de façon certaine. En considérant nos simulations comme représentatives, nous accepterons cette observation faite sur un échantillon limité de cas comme une vérité générale. Les méthodes conjointes sont, elles, capables d'apporter une solution optimale dès lors qu'il existe un couple (taux, quotité) dont le TEG est inférieur au seuil de l'usure. Cette condition sera respectée aisément dès lors que l'entreprise fixera pour les paramètres taux et quotités des fourchettes raisonnables (ie la limite supérieure pour la quotité ne doit pas être trop basse et la limite inférieure pour le taux ne doit pas être trop élevée). Dès que $M_{q/\tau}$ ou $M_{\tau/q}$ sont capables d'établir une solution pour une configuration de PVH il en découle que les méthodes conjointes en seront également capables, tant que les quotités et taux fixés appartiennent à la fourchette acceptable pour ces paramètres spécifiée pour l'optimisation via les méthodes conjointes. En effet les combinaisons de taux et quotités testées par ces deux premières méthodes sont alors également testées par les méthodes conjointes et dès qu'il existe une combinaison au TEG non usuraire pour l'une d'elles, cette même combinaison suffira à remplir le requis de solvabilité des méthodes conjointes.

Pour récapituler, il est donc établi de façon certaine que dès que les méthodes conjointes aboutissent à l'insolubilité alors les deux autres méthodes établiront la même conclusion et de façon contraposée que dès que $M_{q/\tau}$ ou $M_{\tau/q}$ trouvent une solution à une configuration de PVH, les méthodes conjointes le feront aussi, ce qui en fait les méthodes les plus avantageuses en termes de solubilité. De plus si l'on se fie à nos simulations, il semble que la méthode la moins avantageuse en termes de solubilité soit la méthode $M_{\tau/q}$.

Deuxièmement, du point de vue de l'exécution de l'algorithme d'optimisation, les méthodes conjointes sont les méthodes qui mobilisent le plus de ressources et de temps puisqu'elles testent le plus grand nombre de combinaisons lors de la résolution. Libre à chaque entreprise offreuse de déterminer si cela représente une gêne et un élément à prendre en compte ou non.

SECTION 3.4 : POINT DE VUE DU RISQUE

En ce qui concerne la méthode $M_{q/\tau}$, les simulations suggèrent que le risque de dépassement est relativement significatif, puisque les quotités déterminées sont élevées pour satisfaire le client et puisqu'à priori l'entreprise aura tendance à fixer un taux élevé de surcroît. Lors des simulations on a remarqué que c'est cette méthode qui présentait le plus fréquemment la plus faible probabilité de réalisation de la rentabilité souhaitée, dans la limite cependant du respect des objectifs de l'entreprise. Cependant on observe aussi que la rentabilité moyenne via cette méthode restait systématiquement significativement supérieure à la rentabilité souhaitée, ce qui indique que bien que les cas simulés de non réalisation de l'objectif de rentabilité sont plus nombreux pour cette méthode, l'écart entre l'objectif de rentabilité et la rentabilité effectivement atteinte dans ces cas-là est assez faible pour qu'à priori l'entreprise offreuse puisse espérer dépasser son objectif de rentabilité en choisissant les paramètres déterminés par cette méthode.

Quant à la méthode $M_{\tau/q}$, c'est celle parmi les quatre méthodes qui a tendance à fournir les taux les plus faibles, comme nous l'avons observé lors des simulations, en cohérence avec sa formulation même. Par conséquent, on peut s'attendre à ce que le risque de dépassement dans le cas de paramètres déterminés par cette méthode soit faible puisque ce risque croît avec le taux de la dette (jusqu'à un certain point de dépassement). Cependant le risque augmente également avec la quotité, donc le niveau de risque dépend également de la quotité fixée. Lors de nos simulations, nous avons observé que l'écart positif entre probabilité observée et probabilité minimum souhaitée obtenu avec la méthode $M_{\tau/q}$ est en moyenne supérieur à celui obtenu pour la méthode $M_{q/\tau}$. Cela semble indiquer que dans le cas de $M_{\tau/q}$ la probabilité à priori d'atteindre la rentabilité souhaitée a tendance à être supérieure à celle que l'on obtient avec $M_{q/\tau}$. Cependant, nous avons également observé que dans le cas de non-réalisation de la rentabilité souhaitée avec $M_{\tau/q}$ les pertes sont plus lourdes que dans le cas $M_{q/\tau}$. Nous avons notamment relevé des cas dans lesquels les rentabilités moyennes observées lors de nos simulations pour cette première méthode étaient inférieures à la rentabilité souhaitée. A l'opposé, avec $M_{q/\tau}$ les rentabilités moyennes étaient systématiquement largement supérieures à la rentabilité souhaitée. $M_{\tau/q}$ est également la méthode qui fournit les rentabilités moyennes les plus faibles. Or, pour un grand nombre de simulations la rentabilité moyenne est une bonne estimation de la rentabilité que l'entreprise offreuse peut espérer tirer du PVH à priori. En ce sens, c'est avec la méthode $M_{\tau/q}$ que le risque de ne pas atteindre la rentabilité souhaitée est le plus élevé.

En ce qui concerne les méthodes conjointes, on peut s'attendre à ce que le risque de dépassement soit modéré puisqu'elles aboutissent à des quotités très faibles, bien que les taux sont élevés. La rentabilité moyenne associée à ces méthodes est très élevée (lors de nos simulations, jusqu'à plus de 100 fois supérieure à la rentabilité souhaitée), ainsi que la probabilité de réalisation, ce qui confirme l'idée qu'une fois le PVH souscrit, le risque de ne pas atteindre la rentabilité souhaitée est faible pour l'entreprise. Cependant, les méthodes conjointes sont celles qui représentent le plus fort risque commercial et juridique en offrant des conditions très peu attractives au client. De plus, ce risque commercial dont la réalisation consisterait à n'écouler que de très faibles volumes du PVH s'accompagnerait alors d'une difficulté de l'entreprise à mutualiser ses risques. Dans ce cas le risque ne porte pas au niveau du PVH individuel à priori mais au niveau du portefeuille de PVH en cas de pertes sur l'un des composants du portefeuille. Du fait des conditions très peu attractives qu'elles offrent au client, les PVH aux paramètres déterminés par ces méthodes ne devraient attirer que les clients qui n'ont plus aucun autre recours, exposant particulièrement l'entreprise offreuse au risque d'antisélection.

Des quatre méthodes, $M_{\tau/q}$ est la méthode qui semble tout de même présenter le risque le plus important de non réalisation de l'objectif de rentabilité souhaitée par l'entreprise, puisque les simulations ont révélé qu'elle conduisait aux rentabilités moyennes les plus faibles et aux plus lourdes pertes en cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité.

L'analyse du risque met également en évidence le fait qu'il serait plus prudent d'inclure dans l'approche de détermination du couple (taux, quotité) une mesure des pertes dans le cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité et une contrainte sur le niveau de cette mesure, tout spécialement dans le cas de la méthode $M_{\tau/q}$.

Recapitulatif :

Selon la quotité fixée, la méthode $M_{\tau/q}$ aboutit aux TEG les plus bas donc aux conditions les plus attractives pour le client (si l'on considère qu'il n'a pas de préférences en termes de niveau de quotité ou de taux individuellement). Cependant, le choix de cette méthode peut s'avérer risqué pour l'entreprise offreuse puisqu'elle est la méthode parmi les quatre étudiées qui fournit les rentabilités moyennes les plus faibles et pour laquelle les cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité pour méthode s'accompagnent des plus lourdes pertes. Le choix de cette méthode, en dépit des observations précédentes, gagnerait à être accompagné de l'intégration d'une contrainte sur le niveau des pertes en cas de non réalisation de l'objectif. Surtout, sur le plan pratique, c'est la méthode parmi les quatre qui est la moins flexible en termes de paramètres du PVH, et celle qui conclut le plus fréquemment à l'insolubilité. Pour adopter cette méthode il faudrait déterminer des quotités fixées distinctes selon les profils de déblocage, de coûts et produits associés et du groupe emprunteur ou accepter de perdre des clients en cas

d'insolubilité. Pour ces raisons, nous écartons cette méthode des quatre testées, elle ne nous semble pas être la plus recommandable.

En pratique les deux méthodes conjointes déterminent les couples (taux quotités) les plus avantageux pour l'entreprise offreuse en termes de rentabilité individuelle du PVH et de probabilité de réalisation de l'objectif souhaité. Elles présentent l'avantage parmi les quatre méthodes d'être les plus fréquemment solubles puisqu'un plus grand nombre de combinaisons (taux, quotité) est testé. Cependant elles présentent de lourds inconvénients : les conditions offertes au client, correspondant à un taux élevé et une quotité faible sont les moins attractives. Des quatre méthodes, choisir les méthodes conjointes devrait minimiser les profits absolus du portefeuille de PVH en minimisant les volumes de souscription. Cela signifie également que l'entreprise qui opte pour l'une de ces méthodes aura plus de difficultés à mutualiser les risques de son portefeuille du fait de ses faibles effectifs. Egalement, elles ne permettent pas d'offrir explicitement d'avantage aux profils de risque les plus avantageux en permettant aux commerciaux de proposer un taux ou une quotité individuellement attractif. L'entreprise optant pour la méthode conjointe s'expose donc tout particulièrement au risque d'antisélection. Pour ces raisons, nous écartons également les méthodes conjointes.

La méthode $M_{q/\tau}$ permet d'offrir des conditions attractives au client tout en permettant la réalisation des objectifs de l'entreprise. Elle possède une meilleure capacité de résolution que la méthode $M_{\tau/q}$ et sait s'adapter à une grande variété de profils de PVH. Elle est la méthode que nous recommandons le plus parmi les quatre.

RECAPITULATIF, CONCLUSION, CRITIQUE GENERALE ET PISTES D'AMELIORATION

Dans cette sixième et ultime partie nous récapitulons le travail, les objectifs et les découvertes réalisés au cours de ce mémoire. Nous concluons en indiquant la méthode parmi les quatre envisagées qui nous semble la plus adaptée à la détermination du couple (taux, quotité) d'un PVH à taux fixe pour une entreprise offreuse souhaitant s'assurer rentabilité, limitation du risque, attractivité commerciale et respect du cadre juridique français. Nous rappelons les principaux arguments motivant notre choix. Nous critiquons par la suite les faiblesses de ce mémoire et désignons ce qui nous semble en être les principales pistes d'amélioration.

RECAPITULATIF ET CONCLUSION

La commercialisation du prêt viager hypothécaire ou PVH a été légalisée en France en 2006. Cependant, l'encadrement légal de ce produit mal connu reste limité. Il n'existe notamment aucune méthode « légale », ni aucune méthode « standard », détaillée et richement documentée de détermination des paramètres clé, à savoir taux et quotité, de ce produit complexe sur lequel il existe peu de données publiques et dont la valeur et les échéances des flux qu'il génère sont soumises à de nombreux aléas.

Nous nous sommes donc placés dans ce mémoire du point de vue d'une entreprise offreuse de PVH qui souhaite déterminer la valeur du couple (taux, quotité) du PVH en amont du contrat qui lui permette de respecter ses objectifs et les contraintes auxquelles elle est soumise. Notre travail a donc consisté à tenter d'apporter une réponse à la question suivante : comment une entreprise offreuse peut-elle fixer les valeurs du taux et de la quotité du PVH qui lui permettent de s'assurer la réalisation d'un certain niveau de rentabilité du PVH en limitant le risque de non réalisation de cet objectif ainsi qu'en respectant les dispositions juridiques françaises concernant le PVH et en proposant au client un produit aux conditions attractives ?

Pour cela nous avons conçu, formulé et quantifié quatre méthodes de détermination du couple (taux, quotité). Ces quatre méthodes tiennent compte des objectifs de l'entreprise et des contraintes auxquelles elle est soumise ainsi que nous l'avons précédemment mentionné : contrainte de rentabilité individuelle et globale, incluant coûts et produits associés, contrainte de limitation du risque, contrainte de respect du cadre juridique, et contrainte d'attractivité commerciale. Pour ces quatre méthodes, la contrainte de rentabilité est exprimée via la contrainte de faire atteindre à la fonction de rentabilité objectif O un certain seuil de rentabilité SR, avec :

$$\begin{aligned}\tilde{O}(\tau; q) &= \frac{\widetilde{VAN}(\tau; q)}{\sum_{i=1}^{\tilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{DF}_i)} \\ \widetilde{VAN}(\tau; q) &= - \sum_{i=1}^{\tilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{DF}_i) - \sum_{j=1}^{\tilde{N}_f} (f_j \times \widetilde{DF}_j) + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_p} (p_k \times \widetilde{DF}_k) + [\min(\widetilde{V}_T, \widetilde{D}_T) \times \widetilde{DF}_T] \\ \widetilde{D}_T &= \sum_{i=1}^{\tilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times (1 + \tau)^{\tilde{T}-t_i})\end{aligned}$$

La contrainte de limitation du risque passe par une contrainte d'assurer une probabilité minimum de réalisation du seuil de rentabilité souhaité, qui peut être transcrite par le biais d'une *Value at Risk* comme suit, en notant $\text{PNR} \in [0; 1]$ la probabilité maximum de non réalisation de l'objectif de rentabilité que l'entreprise est prête à accepter:

$$P(\tilde{O}(\tau; q) \leq SR) \leq \text{PNR} \Leftrightarrow \text{VaR}_{\text{PNR}}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR$$

La contrainte juridique consiste à s'assurer que le couple (taux, quotité) n'engendre pas de taux usuraire pour le PVH. Enfin concernant la contrainte commerciale, il s'agit d'intégrer les préférences des clients dans notre méthodologie et l'on supposera schématiquement que la satisfaction du client augmente lorsque le taux de la dette baisse et lorsque la quotité augmente.

Pour rappel, nous avons conçu à partir de ces mêmes éléments deux méthodes de détermination conjointes, nommées (M_{conj1}) et (M_{conj2}) , pour lesquelles ni le taux ni la quotité ne sont fixés à priori, et qui consistent respectivement à minimiser la probabilité de non réalisation de la rentabilité souhaitée et à maximiser la rentabilité espérée. Nous avons également conçu deux autres méthodes, l'une consistant à fixer le taux à priori et à déterminer la quotité la plus élevée possible dans le cadre du respect des contraintes citées, nommée $(M_{q/\tau})$, l'autre consistant à fixer la quotité à priori et à déterminer le taux le plus faible possible dans le cadre du respect des contraintes citées, nommée $(M_{\tau/q})$.

Nous avons ensuite adopté des modèles pour les aléas auxquels sont soumis les flux du PVH qui nous ont permis d'effectuer des simulations d'échéanciers du PVH. Nous avons testé nos méthodes en calculant les paramètres de taux et de quotité optimaux sous chacune d'entre elles pour chaque ensemble de simulations effectuées et pour différentes configurations de PVH. Il résulte de ces simulations, et de l'analyse des couples (taux, quotité) fournis par nos 4 méthodes que nous avons choisi de recommander la méthode $(M_{q/\tau})$ à l'entreprise offreuse qui souhaite déterminer son couple (taux quotité) sous contrainte de rentabilité, de limitation du risque, de respect du cadre juridique français et d'attractivité commerciale.

En effet, nous avons écarté la méthode $(M_{\tau/q})$, principalement car il s'agit de la méthode en pratique la moins flexible et adaptable : avec elle nous avons relevé beaucoup de cas d'insolubilité qui indiquent que pour assurer la solubilité via cette méthode il faut choisir une quotité adaptée au profil du groupe souscripteur et au profil de déblocage du PVH. Adopter cette méthode conduirait l'entreprise offreuse soit à perdre des clients en cas d'insolubilité, soit à devoir déterminer au préalable une quotité différente pour chaque combinaison de paramètres du PVH possible. De plus cette méthode est risquée car c'est celle qui est associée aux plus lourdes pertes en cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité. Si une entreprise veut néanmoins opter pour cette méthode, nous lui recommandons d'y intégrer une contrainte sur une mesure de la valeur des pertes en cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité ainsi que sur la valeur de la rentabilité moyenne observée sur l'ensemble des simulations. Nous avons également écarté les méthodes conjointes car elles déterminent des couples (taux, quotité) non attractifs commercialement, avec des TEG à la limite de l'usure. En comparaison, la méthode $(M_{q/\tau})$ est flexible et s'adapte bien aux différentes configurations du PVH sans qu'il faille varier le taux fixé. Elle propose des conditions commercialement attractives au client, notamment des quotités élevées, et permet tant le respect des objectifs de l'entreprise en termes de rentabilité et de limitation du risque que celui de la loi.

La question suivante pour l'entreprise offreuse optant pour cette méthode sera : quel taux fixer ? Nous ne fournissons pas dans ce mémoire de formule de détermination du taux à fixer car la valeur « optimale » de ce taux dépend au cas par cas des taux offerts par la compétition, de la stratégie de l'entreprise, selon qu'elle veuille se placer au-dessus ou en-dessous de la compétition, selon qu'elle privilégie rentabilité, limitation du risque ou attractivité commerciale, l'offre de taux faibles ou de quotités élevées. Le taux doit cependant dans tous les cas être choisis de façon à minimiser le nombre de cas insolubles via la méthode choisie, ainsi qu'en fonction de l'état du marché et de la stratégie de l'entreprise. D'après nos simulations, si nous les tenons pour réalistes et représentatives des cas qui se présenteront dans la réalité, une valeur de taux « raisonnable » - soit lors de nos expérimentations compris entre 1 et 10%- est suffisant à assurer la solubilité via cette méthode. Nous recommandons à l'entreprise offreuse de s'interroger sur les marchés et ses préférences stratégiques afin de présélectionner une valeur de taux fixé qu'elle devra tester sur des paramétrages de PVH qu'elle considère typiques, possibles, fréquents ou représentatifs de sa clientèle avant de l'adopter définitivement. Il est possible tout aussi bien, du fait de la flexibilité de cette méthode, de choisir un taux unique pour tous les clients, ou bien de choisir un taux de référence accompagné d'une table de majorations ou de minorations applicables à ce taux en fonction du profil des souscripteurs, du profil de déblocage demandé ou encore du profil du bien sous-jacent.

En pratique, pour adopter cette méthodologie, il faut pouvoir calculer la rentabilité et la probabilité de réalisation du PVH en fonction du taux et de la quotité. La probabilité de réalisation peut être estimée avec une certaine précision fonction du nombre de simulations déduite du théorème centrale limite si l'on est capable de simuler un nombre suffisamment grand d'échéanciers des flux du PVH. Pour réaliser de telles simulations nous avons construit des outils sur Excel pour simuler la réalisation des sources d'aléa qui font de la valeur actualisée des flux du PVH une variable aléatoire : principalement la durée du contrat du PVH, laquelle dépend de la durée de survie du groupe emprunteur, l'évolution des taux d'actualisation dans le temps et l'évolution de la valeur du bien sous-jacent. Nous avons modélisé la longévité du PVH grâce au modèle actuariel classique de modélisation de la durée de vie humaine basée sur les tables de mortalités, l'évolution des taux via le modèle de taux court à un facteur de Vasicek et l'évolution des prix immobiliers via un modèle markovien à changements de régimes. Nous stockons dans un classeur Excel pour chaque ensemble de simulations la longévité du prêt, les taux d'actualisation applicables à chacun des flux générés au titre du PVH, ainsi que la valeur simulée du bien sous-jacent au terme du prêt. A partir de ces valeurs simulées combinées aux paramètres rentrés par l'utilisateur dans ce même classeur - notamment le nombre, les dates et les facteurs des déblocages ainsi que l'échéancier des couts et produits associés- nous pouvons, pour chaque valeur du couple (taux quotité) donnée, déterminer l'intégralité de l'échéancier du PVH pour chaque simulation et en déduire la valeur prise par la fonction objectif de rentabilité O . Nous pouvons alors estimer la probabilité de réalisation de la rentabilité souhaitée grâce à la loi des grands nombre en divisant le nombre de réalisations de l'objectif observées parmi les simulations sur le nombre total de simulations. Enfin, nous pouvons déterminer les taux et quotités via la méthode $(M_{q/\tau})$ en exécutant un code d'optimisation qui teste si les différentes valeurs de la quotité possibles assurent une probabilité de réalisation de l'objectif de rentabilité supérieure à la probabilité minimum souhaitée et un TEG non usuraire, puis retourne la valeur maximum parmi les valeurs de quotités qui respectent ces contraintes.

Récapitulatif :

A l'issue de ce travail nous sommes convaincus que la meilleure manière pour une entreprise offreuse de piloter le PVH est d'adopter une méthode de pilotage par la quotité, soit fixer le taux à priori et déterminer la quotité au cas par cas, plutôt qu'un pilotage via une optimisation conjointe ou un pilotage par le taux. Nous émettons plus de réserves sur la formulation précise de la méthode, dont nous pensons qu'elle peut être enrichie par une contrainte sur une mesure des pertes en cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité et une contrainte portant sur la rentabilité moyenne observée sur les simulations, ainsi que sur les modèles que nous avons sélectionnés pour chacun des trois aléas que nous avons retenus, lesquels sont améliorables.

Nous avons proposé dans ce mémoire une première méthode de détermination des paramètres clé du PVH à savoir taux et quotité. En tant que premier mémoire d'actuariat français existant, à notre connaissance, sur le sujet, cette méthodologie constitue une première esquisse imparfaite et améliorable mais elle a pour objectif d'être complète, intégralement détaillée et de tenir compte des objectifs, de la stratégie et de l'intérêt de l'entreprise offreuse et de celui du client, des contraintes légales et commerciales soit des contraintes qui s'appliquent en pratique réellement à l'entreprise.

La méthodologie développée a été détaillée de sorte à pouvoir éventuellement constituer par la suite une base de réflexion dont chaque point méthodologique pourra être individuellement retravaillé et amélioré, avec la finalité que les entreprises puissent disposer d'une méthodologie de paramétrage du PVH qui soit viable, tant pour elles que pour le client.

Ce mémoire tente également de réaliser l'objectif plus large d'effacer l'obscurité qui entoure ce produit complexe et nouveau au travers d'une description détaillée de son fonctionnement, de ses modalités, de ses enjeux et des aléas auxquels les flux qu'il génère sont soumis et qui les rendent incertains.

CRITIQUE GENERALE

Ici nous reprenons les critiques de notre travail qui nous semblent les plus saillantes, c'est-à-dire celles qui doivent par la suite nous suggérer les pistes d'amélioration à explorer en priorité. Elles sont de quatre types :

Premièrement, certaines s'adressent aux quatre méthodologies initiales que nous avons conçues. Notamment, aucune n'intègre de contrainte sur les (ou même d'une surveillance des) pertes en cas de non réalisation de l'objectif de rentabilité, ni sur le niveau de la rentabilité moyenne observée sur les observations. Or, il semble nécessaire d'intégrer de telles contraintes, car nous avons observé des cas dans lesquels la rentabilité moyenne était inférieure à la rentabilité moyenne observée malgré une probabilité de réalisation de l'objectif de rentabilité estimée élevée. De plus, nous avons formulé les quatre méthodologies avec la finalité d'atteindre un objectif de rentabilité individuelle. En pratique, il est possible que la méthodologie adoptée par l'entreprise intègre une contrainte de rentabilité collective sur l'ensemble du portefeuille de PVH plutôt qu'une rentabilité individuelle PVH par PVH, surtout dans le cas où cette entreprise mettrait en place des stratégies de couverture ou de mutualisation du risque pour ses PVH. Nous avons également supposé pour nos quatre méthodes que les facteurs de déblocages (et leur dates de versements) étaient définis préalablement à la détermination du couple (taux, quotité), alors qu'en pratique une détermination conjointe du vecteur des déblocages et de ce couple pourrait permettre à l'entreprise de créer une valeur supérieure pour elle-même et/ou ses clients. Enfin, ces quatre méthodes intégrant une contrainte sur des niveaux de probabilités calculés à partir de la simulation de plusieurs aléas, les taux et quotités qu'elles fournissent peuvent varier d'un ensemble de simulation à l'autre pour un paramétrage équivalent. Nous disposons d'une formule permettant de déterminer le nombre de simulations pour assurer une certaine précision sur la probabilité de réalisation de l'objectif de rentabilité estimée mais pas d'une formule qui permette d'établir le nombre de simulations à effectuer pour assurer une certaine précision sur le taux ou la quotité, alors que nous ne souhaitons pas que le couple (taux, quotité) déterminé varie significativement d'un ensemble de simulation à l'autre. En pratique l'adoption d'une de ces méthodes devra donc s'accompagner de la détermination du nombre de simulations nécessaire à s'assurer une certaine précision sur les taux et quotités déterminés, ainsi que l'adoption de pas pour les taux et quotités assez larges pour limiter le risque que les paramètres déterminés varient d'un ensemble de simulations à l'autre.

Deuxièmement, certaines s'adressent à notre sélection de la méthode la plus adaptée parmi les quatre envisagées. Pour sélectionner la méthodologie ($M_{q/\tau}$) nous nous sommes appuyés sur des observations réalisées sur nos simulations. S'appuyer sur de telles observations n'est légitime que si nos simulations peuvent être considérées comme réalistes et représentatives des cas qui seront rencontrés dans la réalité. Or, le réalisme des résultats de nos simulations est limité par certains de nos choix. Par exemple, nous postulons des montants de frais et de produits annexes indépendants des autres paramètres de nos fonctions, notamment du taux de la dette, des quotités et du nombre de déblocages, du nombre de versement de frais et du nombre de versements de produits. Par conséquent nous adoptons une approche de la rentabilité du PVH avant impôts et avant coûts et produits comptables. Concernant la représentativité de nos simulations nous avons décidé d'exclure certaines configurations de PVH lors de la construction de notre outil, par exemple des types de déblocages non constants ou géométriques ou des groupes de souscripteurs de plus de trois personnes comme nous le détaillons dans la section dédiée à la critique des outils. Le réalisme et la représentativité de nos simulations dépendent également de la qualité de nos modèles et de nos calibrations ainsi que de la légitimité de notre choix de négliger certains aléas, que nous soulèverons lors des troisième et quatrième points. Enfin, les nombreux cas d'insolubilité via la méthode ($M_{\tau/q}$) ont joué un rôle important dans notre choix d'écarter cette méthode. Or il nous manque une compréhension rigoureuse et mathématique de ce phénomène qui nous permettrait d'affirmer que cette méthode est moins apte à solutionner notre problème que la méthode que nous avons sélectionnée dans l'absolu et non pas seulement conditionnellement à la représentativité des cas que nous avons simulés et commentés.

Troisièmement, notre choix des aléas à modéliser et à intégrer dans nos simulations est critiquable. En effet, nous avons négligé certains risques en supposant un taux de remboursement anticipé et un taux de défaut nuls ainsi qu'une absence d'antisélection immobilière. Ces hypothèses restent à valider, en particulier un taux de remboursement anticipé non nul complexifierait significativement la modélisation des flux du PVH en introduisant

une dépendance entre les trois sources d'aléas que nous avons retenus : évolution des taux, évolution des prix immobiliers et durée du contrat de PVH.

Quatrièmement, notre modélisation des trois aléas retenus présente des points d'amélioration, que nous avons présentés dans des sections dédiées de la Partie 4 de ce mémoire. Nous en rappelons ici les grandes lignes. Pour le modèle de longévité, le principal défaut de notre modèle est qu'il repose sur l'hypothèse que la loi de la durée de survie des souscripteurs de PVH suit la même que celle des rentiers, que nous n'avons pu vérifier du fait d'une absence de données disponibles sur les durées de vie des souscripteurs du PVH. Ensuite nous avons fait pour ce modèle les mêmes hypothèses classiques que les hypothèses sous-jacentes au modèle actuariel de longévité : les lois de mortalité futures peuvent être déduites de la mortalité observée sur la période retenue pour la construction des tables officielles, et les trois principaux facteurs explicatifs de la mortalité sont l'âge, le sexe et la génération. L'ensemble des informations concernant les autres facteurs de mortalité –profession, pays, fumeur ou non notamment- est englobé par un unique facteur de stress que l'entreprise devra déterminer au cas par cas selon son propre modèle. Enfin nous faisons l'hypothèse que la répartition des décès entre deux âges de la table peut être calculée par interpolation cubique, ce qui constitue une approximation supplémentaire. Pour le modèle de taux, nous avons choisi un des modèles les plus simples mais aussi les plus simplificateurs, soit le modèle de Vasicek, qui suppose un aléa gaussien avec une moyenne long terme, une vitesse de retour à la moyenne et une variance constantes. Ce modèle peut aboutir à la simulation de taux négatifs avec une probabilité non nulle. On suppose là encore que les données de taux courts observés dans le passé permettent d'inférer les comportements des taux dans le futur. Surtout, l'utilisation de ce modèle n'est pas particulièrement adaptée à la prédiction des taux sur des horizons de temps long, comme nous cherchons à en effectuer dans ce mémoire. Concernant le modèle des prix immobiliers, la plus grande critique que l'on peut lui adresser est d'avoir été élaboré et calibré à partir d'une base de données pauvre. Nous faisons l'hypothèse que la loi suivie par les rendements logarithmiques des prix immobiliers est identique quel que soit le bien, ou plutôt, que l'entreprise offreuse saura diversifier son portefeuille de PVH en termes de caractéristiques des biens immobiliers sous-jacent. On suppose la diversification effectuée de sorte que le portefeuille de biens immobiliers sous-jacents aux PVH soit représentatif de la diversité des biens immobiliers en France sur lesquels ont été réalisées les observations qui ont alimenté nos données. Enfin, nous supposons encore une fois que le comportement des rendements immobiliers observés dans le passé permet d'en inférer les évolutions futures. Nous avons également admis une hypothèse d'indépendance entre le niveau des taux et des prix immobiliers qui nous a semblé la plus raisonnable à formuler dans le cadre de nos ressources et de nos données. Cependant ce choix reste critiquable, la question de la dépendance entre ces variables méritant un mémoire à elle seule. Il pourrait notamment être utile de comparer les performances des prédictions dynamiques des modèles immobiliers dépendants et indépendants des taux, calculées pour ces premiers à partir non pas des données observées de taux mais des données prédites par le modèle de taux choisi. Enfin, en décidant de modéliser trois aléas nous prenons le risque de cumuler des erreurs issues de trois modèles.

PISTES D'AMÉLIORATION

Nous exposons par la suite ce qui nous semble être les principales pistes à suivre pour améliorer et approfondir la méthode de détermination des taux et quotités d'un PVH à taux fixe sous contrainte de rentabilité dans le cadre juridique français telle que développée dans ce mémoire.

Premièrement, concernant le choix de la méthode, nous recommandons l'intégration d'une ou de plusieurs contraintes supplémentaires portant sur les valeurs prises par une ou des mesures des pertes en cas de non réalisation de la rentabilité souhaitée, ainsi que sur les valeurs prises par la rentabilité moyenne sur l'ensemble des simulations effectuées. Il serait également utile d'extrapoler notre méthode individuelle afin d'établir une méthode collective applicable à un portefeuille de PVH, avec des objectifs de rentabilité et de limitation du risque portant sur l'ensemble du portefeuille. Cela permettrait notamment de tenir compte des effets de mutualisation et de diversification des risques mis en place par l'entreprise. Enfin, afin de rendre la méthode plus « réaliste » entendu comme plus adaptée aux contraintes réelles de l'entreprise, il serait intéressant de modifier notre

méthode afin de la faire passer d'avant impôts à après impôts afin de calculer la rentabilité réelle du PVH pour le prêteur. Cela nécessiterait de se renseigner de façon exhaustive sur la comptabilité du PVH.

Deuxièmement, concernant les modèles adoptés pour la simulation des aléas, il serait souhaitable de choisir un modèle de taux plus approprié à couvrir des horizons longs de temps que le modèle de Vasicek. Le problème de simulation de taux négatifs pourrait être éradiqué en choisissant le modèle de Cox-Ingersoll-Rox plutôt que celui-ci. Concernant la longévité, il conviendrait de vérifier l'adéquation entre les tables de mortalité officielles conçues à partir de populations de rentiers et la mortalité observée sur les souscripteurs du PVH, et, en cas de non adéquation, de mettre au point des ajustements assurant une adéquation. Cela passera nécessairement par un travail de collecte d'informations comme nous le soulignerons plus loin dans cette section. Concernant le modèle immobilier, il conviendrait d'étudier plus en profondeur l'éventuelle relation de dépendance entre les taux d'intérêt et les prix immobiliers afin de pouvoir l'explicitier et l'utiliser dans la modélisation des flux du PVH dans le cas d'une dépendance. Enfin il pourrait être intéressant d'intégrer d'autres risques à la modélisation, particulièrement celui des remboursements anticipés puis du défaut partiel ou total, bien que cela ne semble pas prioritaire dans le contexte actuel et si les taux de remboursement anticipés et défaut pour ces prêts se maintiennent à l'avenir.

Troisièmement, concernant les simulations, il serait pratique d'établir une formule permettant de déterminer le nombre de simulations d'échéanciers du PVH à effectuer afin d'obtenir la précision voulue sur le taux et/ou la quotité déterminé(e/s).

Quatrièmement, il semble important que deux travaux complémentaires soient réalisés. Un travail de recherche sur les stratégies de couverture qu'une entreprise offreuse de PVH peut adopter pour limiter ses risques permettrait de rendre ce produit plus attractif. En priorité, néanmoins, il est impératif de réaliser un travail de collecte de données et de constitution de bases de données accessibles par les entreprises offreuses. D'une part, il conviendrait de réunir des données permettant d'établir si la loi de mortalité suivie par les souscripteurs du PVH peut être correctement modélisée par le biais des tables de mortalités construites à partir d'observations sur des rentiers moyennant d'éventuels ajustements mineurs, auquel cas il conviendrait également d'explicitier ces ajustements ou s'il est nécessaire de construire des tables de mortalité propres aux souscripteurs du PVH, auquel cas il conviendrait de s'atteler à cette construction. D'autre part, il conviendrait de constituer une base de données retraçant l'évolution des prix immobiliers au mètre carré en France détaillée selon les caractéristiques fondamentales dans la détermination du prix du bien – par exemple sa localisation, son type ou son ancienneté – et de réunir et étudier idéalement des données sur l'évolution des prix des biens de souscripteurs de PVH afin d'établir si l'aléa moral se réalise et doit être modélisé. Il conviendra alors d'établir la cohérence entre les hypothèses sous-jacentes au modèle immobilier sélectionné et les données recueillies et de valider, adapter ou modifier le modèle en conséquence.

BIBLIOGRAPHIE ET SOURCES

CONCERNANT LE PVH :

BHUYAN Vishaal B. (2010): Reverse Mortgages and linked securities. Editions Wiley Finance

BOEHM Thomas P., EHRHARDT Michael C. (1994): Reverse mortgage and interest rate risk. Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association, Volume 22, n°2, p387-408

CHINLOY Peter, MEGBOLUGBE Isaac F. (1994): Reverse Mortgages: Contracting and Crossover Risk. Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association, Volume 22, n°2, p367-386

Code de la consommation, Livre III: Endettement, Titre Ier : Le Crédit, Chapitre IV : Prêt Viager Hypothécaire (textes accessibles sur le site <http://www.legifrance.gouv.fr/>)

FRIGGIT Jacques, JACHET Nicolas, TAFFIN Claude, VORMS Bernard (2004): Rapport sur le prêt viager hypothécaire et la mobilisation de l'actif résidentiel des personnes âgées. La Documentation Française

JAIN Amit, SINGHAL Saket (2008): Reverse Mortgages – Features & Risks. Report of the 10th global conference of actuaries, P187-193

KLEIN Linda S., SIRMANS C. F. (1994): Reverse Mortgages and Prepayment Risk. Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association, Volume 22, n°2, p409-431

MAYER Christopher J., SIMONS Katerina V. (1994): Reverse Mortgages and the Liquidity of Housing Wealth. Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association, Volume 22, n°2, p235-255

Ressources internes du Crédit Foncier

SZYMANOSKI Edward J. (1994): Risk and the home equity conversion mortgage. Journal of the American Real Estate and Urban Economics Association Volume 22, n°2, p347-366

WERNER-HUIBERS C.C. (2013): Equity Release to supplement pension: Risk analyses of reverse mortgages. Master's Thesis Executive Master Actuarial Science

CONCERNANT LA MODELISATION DE LA LONGEVITE:

PETAUTON Pierre (2010): Théorie et pratique de l'assurance vie, 3  édition. Editions Dunod. Chapitres 2 et 5, p21-33 et p65-80

PLANCHET Frederic (2005): Tables de mortalité d'expérience pour les portefeuilles de rentiers. Notice de présentation

CONCERNANT LA MODELISATION DES TAUX :

AHMAD Riaz, WILMOTT Paul (2007): The market price of interest rate risk: Measuring and modelling fear and greed in the fixed-income markets. Wilmott Magazine, Volume de Janvier 2007, p64-70

DEVOLDER Pierre (2001): Les univers virtuels de la finance. Belgian Actuarial Bulletin, Volume 1, n 1, p10-17

Données de facteurs d'actualisation provenant du site du CNO (<http://www.cnofrance.org/>)

HULL John (2011): Options, futures et autres actifs dérivés 8  édition. Editions Pearson. Chapitres 13, 27 et 30, p285-303, p665-683 et p719-751

VASICEK Oldrich (1977): An equilibrium characterization of the term structure. Journal of Financial Economics, Volume 5, p177-188

CONCERNANT LA MODELISATION DES PRIX IMMOBILIERS :

ABEAL VAZQUEZ Jose Pablo, SANCHEZ SANTOS José Manuel (2011): Is there a stable relationship between real interest rates and housing prices? Evidence from several Euro area countries. The Annals of The "Ștefan cel Mare" University of Suceava. Fascicle of The Faculty of Economics and Public Administration, Volume 11, n°2, p46-55

BOURBONNAIS Regis (2011): Econometrie, 8^e edition. Editions Dunod, Chapitre 9, p237-260

BROOKS Chris, NNEJI Ogonna, WARD Charles W. R. (2013): House price dynamics and their reaction to macroeconomic changes. Economic Modelling, Volume 32, p172-178

CASE Karl E., SHILLER Robert J. (1988): The Efficiency of the market for Single-Family Homes. The American Economic Review, Volume 79, n°1, p125-137

Documents disponibles sur le site du Conseil Général de l'Environnement et du Développement Durable sur le thème de l'immobilier

Données immobilières disponibles sur les sites du *CEPII* (<http://www.cepii.fr/>), de l'*INSEE* (<http://www.insee.fr/fr/>) et du *CGEDD* (<http://www.cgedd.developpement-durable.gouv.fr/>)

DORMONT Brigitte (2007): Introduction à l'économétrie 2^e édition. Editions Montchrestien, Chapitre 3.2, p160-169 & Chapitre 4.5, p305-329

HAMILTON James D. (1989): A New Approach to the Economic Analysis of Non stationary Time Series and the Business Cycle. Econometrica, Volume 57, n°2, p357-384

HAMILTON James D. (2005): Regime-Switching Models. The New Palgrave Dictionary of Economics. Second Edition. Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. Palgrave Macmillan, 2008

MCQUINN Kieran, O'REILLY Gerard (2008): Assessing the role of income and interest rates in determining Irish house prices. Economic Modelling, Volume 25, n°3, p377-390

CONCERNANT LES SIMULATIONS, ANALYSES DE SERIES ET CALIBRATIONS EN PRATIQUE:

AMELOT Michèle: VBA Excel 2010 Programmer sous Excel: Macros et langage VBA. Editions ENI

HIS Global Inc: EvIEWS 8 User Guide I. Chapitre 11, p357-459

HIS Global Inc: EvIEWS 8 User Guide II. Chapitres 22, 23, 24 et 31, p85-203 et p389-422

NOTATIONS

1) Paramètres et variables aléatoires

a) Fonction objectif et méthodes

Les variables aléatoires et les éléments considérés comme incertains au moment de la signature du contrat sont signalés par la notation $\sim$. Les autres éléments sont considérés comme des paramètres certains.

τ : taux de la dette du PVH

$\tilde{T}$: terme du contrat

D_t : valeur de la dette à l'instant t

$\tilde{V}_t$: Valeur du bien sous-jacent au contrat à l'instant t

d_i : Montant du $i^{\text{ème}}$ déblocage : $d_i = q_i \times V_0$

N_d : Nombre de déblocages prévus au contrat

$\widetilde{N}_d$: Nombre de déblocages effectivement versés, qui peut différer de N_d selon l'instant où survient la disparition du groupe emprunteur et selon que le contrat autorise des flux post-mortem ou non.

q_i : Quotité du $i^{\text{ème}}$ déblocage. On note $q = q_1$

λ_i : Facteur de proportionnalité du $i^{\text{ème}}$ déblocage : $q_i = q \times \lambda_i, \forall i \in \llbracket 1; N_d \rrbracket$. On note : $\lambda_1 = 1$

$\widetilde{DF}_i$: Facteur d'actualisation s'appliquant à la période allant de l'origine des temps (initiation du contrat ou , date du 1^{er} déblocage ou moment de calcul de la valeur actuelle nette), à la date d'échéance du $i^{\text{ème}}$ versement flux.

$\widetilde{N}_f$: Nombre de flux de frais annexes effectivement versés

f_i : Montant du $i^{\text{ème}}$ flux de frais annexes versés

$\widetilde{N}_p$: Nombre de flux de produits annexes effectivement perçus

p_i : Montant du $i^{\text{ème}}$ flux de produits annexes perçus

t_i : Moment de versement du $i^{\text{ème}}$ flux

TEG : Taux Effectif Global annuel

N_c : Nombre de flux de coûts pour l'emprunteur

c_j : Montant du $j^{\text{ème}}$ flux de coût pour l'emprunteur

T_i : Intervalle de temps exprimé en années entre la date du premier déblocage et du $i^{\text{ème}}$ flux

SR : Seuil de rentabilité fixé par le prêteur

PNR : Probabilité de non réalisation de l'objectif de rentabilité maximum que le prêteur est prêt à accepter

$\tau_{usure}(q)$: Taux de la dette annuel équivalent au maximum des taux effectifs globaux inférieurs au taux d'usure applicable au PVH. Dans le cas du PVH, c'est une fonction de la quotité

Δ_τ : Pas d'arrondi du taux de la dette du PVH fixé par le prêteur

Δ_q : Pas d'arrondi de la quotité du PVH fixé par le prêteur

τ_{min} : Borne inférieure pour le taux de la dette fixée par le prêteur

τ_{max} : Borne supérieure pour le taux de la dette fixée par le prêteur

q_{min} : Borne inférieure pour la quotité fixée par le prêteur

q_{max} : Borne supérieure pour la quotité fixée par le prêteur

b) Modélisation de la longévité

$q_x(t)$: Taux brut de mortalité à l'âge x l'année t

$q_x^{ref}(t)$: Taux de mortalité à l'âge x l'année t de la table du moment INSEE de référence

ε : Bruit blanc

F_x : Fonction de répartition de la durée de survie d'un individu quelconque d'âge x

T_x : Durée de vie restante d'un individu d'âge x à l'origine des temps, c'est-à-dire à la date où l'on cherche à simuler la durée de vie restante du groupe emprunteur

${}_t p_x$: Probabilité qu'un individu quelconque d'âge x soit encore en vie à l'instant $t > 0$, ${}_t p_x = P(T_x > t)$.

Ω : Age maximum qu'un individu peut atteindre

L_x : Nombre d'individus d'âge x à l'origine des temps

$X_i(t)$: L'« indicateur de survie », qui prend la valeur 1 lorsque l'individu $n^o i$ est encore en vie à l'instant t , et la valeur 0 sinon

l_{x+t} : Valeur espérée, à priori du nombre d'individus parmi ceux d'âge x à l'origine des temps qui sont encore en vie à l'instant $t > 0$: $l_{x+t} = E(L_{x+t}), \forall t > 0$

$(x_1, \dots, x_n)$: Groupe de n individus d'âges x_i , $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ disparaissant au dernier décès

D_x : Nombre d'individus décédés entre l'âge x et l'âge $x+1$: $D_x = L_x - L_{x+1}$.

d_x : Espérance du nombre d'individus décédés entre l'âge x et l'âge $x+1$: $d_x = E(D_x)$

ρ : stress de sur ou sous-mortalité

c) Modélisation de l'évolution des taux

$DF(t, T)$: Facteur d'actualisation ou « discount factor » (DF) en anglais s'appliquant à la période commençant en t et finissant en T

$ZC(t, T)$: Taux Zéro-Coupon annuel applicable à la période allant de t à T

$P(t, T)$: Prix versé à l'instant t pour l'achat d'une obligation zéro-coupon versant un flux unique de 1€ à l'instant T

$r(t)$: Taux court

$$r(t) = \lim_{\theta \rightarrow 0} ZC(t, t + \theta)$$

W_t : Mouvement Brownien

a : Paramètre de Vasicek correspondant à la vitesse de retour du taux court à sa moyenne

b : Paramètre de Vasicek correspondant à la moyenne à long terme du taux court

σ : Paramètre de Vasicek correspondant à la volatilité du processus de taux court

Δt : durée des contrats de refinancement du prêteur

d) Modélisation de l'évolution des prix immobiliers

S_t : Variable d'état sous-jacent du marché

M : Nombre d'états du marché

ε_t : Bruit blanc

y_t : Rendement logarithmique de l'indice immobilier entre l'instant t-1 et l'instant t

P : Matrice de transition associée à S_t

p_{ij} : Probabilité de transition de l'état i à l'état j

θ : Vecteur des paramètres du modèle markovien à changements de régimes : $\theta = (\beta_{1,1}, \dots, \beta_{M,1}, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{M,0}, \sigma_1, \dots, \sigma_M, (p_{ij})_{i=1,\dots,M; j=1,\dots,M})$

I_t : Information disponible sur y jusqu'au moment t compris

Pl_t : Prix d'un bien immobilier considéré à l'instant t

Id_t : Valeur de l'indice immobilier en l'instant t

β_{SE} : Paramètre de sous-entretien du bien immobilier considéré

2) Principales Fonctions

- Valeur actuelle nette des flux du PVH en fonction du taux de la dette et de la quotité :

$$\widetilde{VAN}(\tau; q) = - \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{D\bar{F}}_i) - \sum_{j=1}^{\widetilde{N}_f} (f_j \times \widetilde{D\bar{F}}_j) + \sum_{k=1}^{\widetilde{N}_p} (p_k \times \widetilde{D\bar{F}}_k) + [\min(\widetilde{V}_T, \widetilde{D}_T) \times \widetilde{D\bar{F}}_T]$$

- Valeur de la dette à terme du contrat T :

$$\widetilde{D}_T = \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{D\bar{F}}_i \times (1 + \tau)^{\bar{T}-t_i})$$

- Formule permettant de calculer le TEG d'un prêt:

$$\sum_{i=1}^{N_d} \frac{d_i}{(1 + TEG)^{T_i}} = \sum_{j=1}^{N_c} \frac{c_j}{(1 + TEG)^{T_j}}$$

- Formule du critère de rentabilité :

$$\widetilde{CR}(q) = (1 + SR) \times \sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{D\bar{F}}_i)$$

- Fonction objectif :

$$\widetilde{O}(\tau; q) = \frac{\widetilde{VAN}(\tau; q)}{\sum_{i=1}^{\widetilde{N}_d} (V_0 \times \lambda_i \times q \times \widetilde{D\bar{F}}_i)}$$

- Value at risk au niveau de confiance $\alpha \in [0; 1]$ de la variable aléatoire X:

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

3) Méthodes

$$(M_{conj1}): \min_{(\tau,q) \in \mathbb{R}_+^2} P(\tilde{O}(\tau; q) \leq SR) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

$$(M_{conj2}): \max_{(\tau,q) \in \mathbb{R}_+^2} E(\tilde{O}(\tau; q)) \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

$$(M_{\tau/q}): \min \tau \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

$$(M_{q/\tau}): \max q \text{ sous les contraintes } \begin{cases} (C) \\ VaR_{PNR}(\tilde{O}(\tau; q)) \geq SR \end{cases}$$

Où :

$$(C): \begin{cases} TEG(\tau, q) \leq \tau_{usure}(q) \\ \tau \bmod \Delta_\tau = 0 \\ \tau \in [\tau_{min}; \tau_{max}], \text{ où } \tau_{min} > 0 \\ q \bmod \Delta_q = 0 \\ q \in [q_{min}; q_{max}], \text{ où } q_{min} > 0 \end{cases}$$

ANNEXES

ANNEXE A : TEXTES DE LOI FONDAMENTAUX

1) ARTICLE L314-1 DU CODE DE LA CONSOMMATION : DEFINITION DU PVH

« Le prêt viager hypothécaire est un contrat par lequel un établissement de crédit ou un établissement financier consent à une personne physique un prêt sous forme d'un capital ou de versements périodiques, garanti par une hypothèque constituée sur un bien immobilier de l'emprunteur à usage exclusif d'habitation et dont le remboursement-principal et intérêts capitalisés annuellement ne peut être exigé qu'au décès de l'emprunteur ou lors de l'aliénation ou du démembrement de la propriété de l'immeuble hypothéqué s'ils surviennent avant le décès. »

2) ARTICLE L314-2 DU CODE DE LA CONSOMMATION : OBJET DU PVH

« A peine de nullité, le prêt viager hypothécaire ne peut être destiné à financer les besoins d'une activité professionnelle. »

3) ARTICLE L314-8 DU CODE DE LA CONSOMMATION : OBLIGATION DE L'EMPRUNTEUR

« L'emprunteur doit apporter à l'immeuble hypothéqué tous les soins d'un bon père de famille.

Ainsi qu'il est dit à l'article 1188 du code civil, le débiteur ne peut plus réclamer le bénéfice du terme lorsque par son fait, il a diminué la valeur de la sûreté qu'il avait donnée par le contrat à son créancier.

Le débiteur perd également le bénéfice du terme lorsqu'il change l'affectation du bien hypothéqué ou lorsqu'il refuse au créancier l'accès de l'immeuble hypothéqué pour s'assurer de son bon état d'entretien et de conservation. »

4) ARTICLE L314-9 DU CODE DE LA CONSOMMATION : PLAFONNEMENT DE LA DETTE

« La dette de l'emprunteur ou de ses ayants droit ne peut jamais excéder la valeur de l'immeuble appréciée lors de l'échéance du terme.

Lorsque le créancier hypothécaire met en jeu sa garantie à l'échéance du terme, si la dette est alors inférieure à la valeur de l'immeuble, la différence entre cette valeur et le montant de la créance est versée, selon le cas, à l'emprunteur ou à ses héritiers.

En cas d'aliénation du bien, la valeur de l'immeuble est égale à la valeur indiquée dans l'acte de cession sous réserve des dispositions de l'article L. 314-14. »

5) ARTICLE L314-13 DU CODE DE LA CONSOMMATION : TERME DU PVH

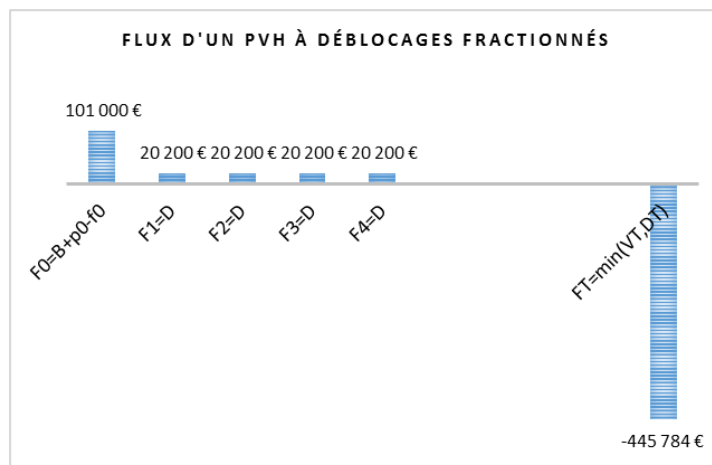
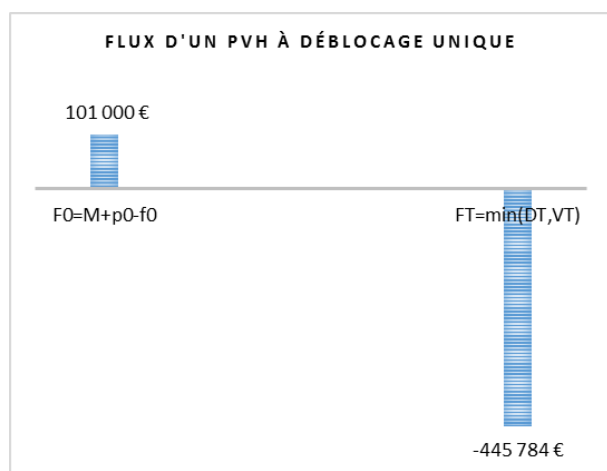
« Lors du décès de l'emprunteur ou du dernier vivant des co-emprunteurs, les héritiers peuvent payer la dette plafonnée à la valeur de l'immeuble estimée au jour de l'ouverture de la succession. Il est procédé à cette estimation en tant que de besoin par un expert choisi d'un commun accord par le créancier et l'emprunteur ou désigné sur requête.

A défaut et nonobstant les règles applicables en matière d'acceptation sous bénéfice d'inventaire, le créancier hypothécaire peut à son choix :

- poursuivre la saisie et la vente de l'immeuble dans les conditions du droit commun, auquel cas la dette est plafonnée au prix de la vente ;
- ou se voir attribuer la propriété de l'immeuble par décision judiciaire ou en vertu d'un pacte comissoire alors même que celui-ci constituait la résidence principale de l'emprunteur.

Le créancier hypothécaire dispose de la même option en cas de succession vacante. »

1) SCHEMA DES FLUX POUR L'EMPRUNTEUR



Avec les notations :

F_t : Flux généré par le PVH t années après son initiation

M : montant débloqué

p_t : produit annexe généré par le PVH après t années. Pour les calculs on a fait l'hypothèse $p_t = 0$ pour tout t .

f_t : frais annexe généré par le PVH après t années. Pour les calculs on a fait l'hypothèse $f_0 = 4000$ et $f_t = 0$ pour tout $t > 0$.

B : Bouquet initial

D : déblocage

T : terme du prêt. On fait l'hypothèse $T = 20$ ans.

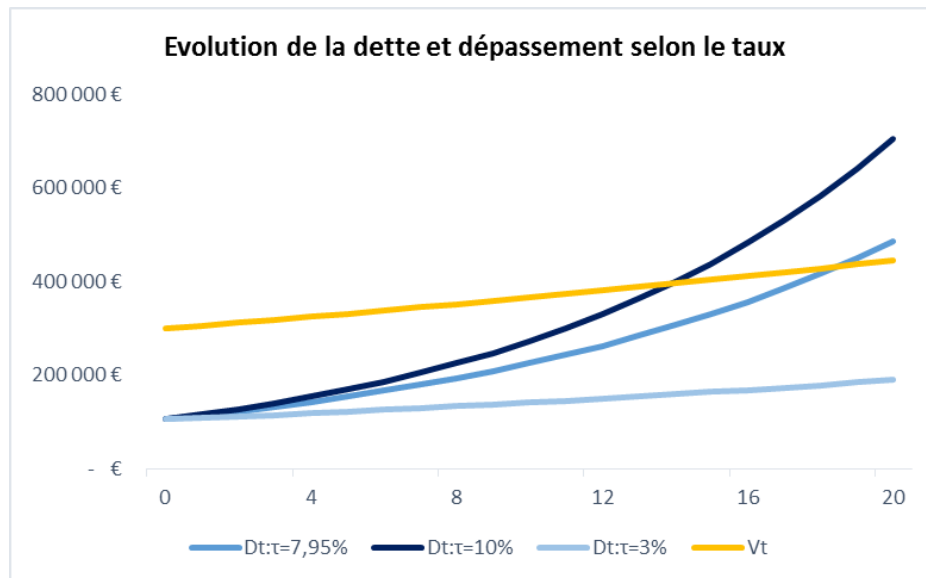
V_t : valeur du bien après t années de contrat

D_t : valeur de la dette après t années de contrat

Et avec les hypothèses supplémentaires suivantes pour les applications numériques : on considère un bien d'une valeur initiale de 300 000 €. Le taux de la dette est de 7,95%, la quotité initiale de 35%, l'appréciation annuelle du bien immobilier sous-jacent est de 2%. Pour le cas des déblocages fractionnés, il y a 5 déblocages au total, de type constant avec comme coefficient de proportionnalité 20%.

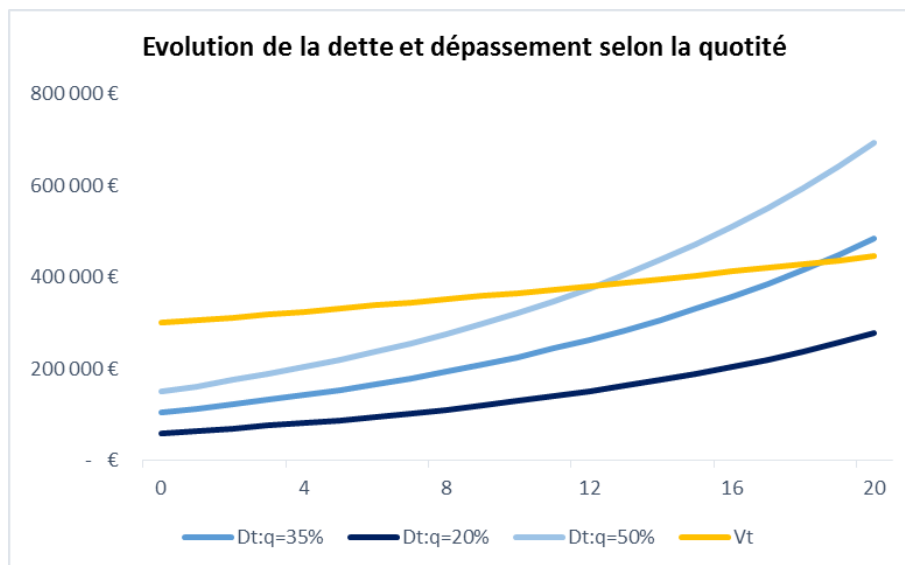
2) ILLUSTRATION DU PHENOMENE DE *CROSSOVER* OU DEPASSEMENT SELON LE TAUX ET LA QUOTITE

a) En fonction du taux



On reprend les hypothèses numériques du cas de déblocage unique et les notations de l'annexe B.1), en faisant seulement varier le taux de la dette. Toutes choses égales par ailleurs, plus le taux de la dette est élevé, plus la probabilité de réalisation du risque de dépassement au cours de la vie du contrat de PVH est élevée et plus cette réalisation survient tôt. Dans notre exemple pour un taux de 10%, elle survient avant $t=14$, pour un taux de 7,95% avant $t=19$ et pour un taux de 3% elle ne survient pas.

b) En fonction de la quotité



On reprend les hypothèses numériques du cas de déblocage unique et les notations de l'annexe B.1), en faisant seulement varier la quotité. Toutes choses égales par ailleurs, plus la quotité est élevée, plus la probabilité de réalisation du risque de dépassement au cours de la vie du contrat de PVH est élevée et plus cette réalisation survient tôt. Dans le cas représenté ci-dessus, le dépassement survient avant 13 ans pour une quotité de 50%, avant 19 ans pour une quotité de 35% et le dépassement ne survient pas dans le cas d'une quotité de 20%.

1) DEMONSTRATIONS DE VASICEK

Première partie : Résolution de l'équation différentielle stochastique pour le taux court

On considère le taux court $r(t)$:

$$\begin{cases} dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t \\ r(0) > 0 \end{cases}$$

On considère la fonction $f(t, X_t) = X_t e^{at}$.

Ses dérivées premières et secondes existent et sont : $\partial_t f = a X_t e^{at}$, $\partial_X f = e^{at}$, $\partial_{XX}^2 f = 0$.

On applique la formule d'Ito à cette fonction :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= \partial_t f dt + \partial_X f dX_t + \frac{1}{2} \sigma_X^2 \partial_{XX}^2 f dt \\ &\leftrightarrow df(t, X_t) = a X_t e^{at} dt + e^{at} dX_t \\ &\rightarrow dr(t) e^{at} = ar(t) e^{at} dt + e^{at} a(b - r(t)) dt + e^{at} \sigma dW_t \\ &\rightarrow dr(t) e^{at} = ab e^{at} dt + \sigma e^{at} dW_t \end{aligned}$$

En intégrant:

$$\begin{aligned} r(t) e^{at} &= r(0) + ab \int_0^t e^{as} ds + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s \\ &\rightarrow r(t) e^{at} = r(0) + b(e^{at} - 1) + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s \\ &\rightarrow r(t) = r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \end{aligned}$$

Propriétés :

- **Calcul de l'espérance :**

$$E(r(t)) = E(r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s)$$

Par linéarité de l'espérance :

$$E(r(t)) = r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} E\left(\int_0^t e^{as} dW_s\right)$$

Puisque les intégrales d'Ito ont une espérance nulle :

$$E(r(t)) = r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at})$$

- **Calcul de la Variance :**

$$\begin{aligned} V(r(t)) &= E(r(t)^2) - E^2(r(t)) \\ &\leftrightarrow V(r(t)) = E\left((r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at}))^2\right) + E\left((\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s)^2\right) \\ &\quad + 2E\left((r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at}))\left(\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s\right)\right) \\ &\quad - (r(0) e^{-at} + b(1 - e^{-at}))^2 \end{aligned}$$

Or $E \left((r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}))^2 \right) = (r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at}))^2$ et en utilisant la linéarité de l'espérance et la propriété de la nullité de l'espérance des intégrales d'Ito :

$$E \left((r(0)e^{-at} + b(1 - e^{-at})) \left(\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s \right) \right) = 0$$

D'où :

$$V(r(t)) = E \left((\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s)^2 \right)$$

Or, les intégrales d'Ito possèdent la propriété suivante:

$$E \left(\left(\int_0^t f(s) dW_s \right)^2 \right) = \int_0^t E(f^2(s)) ds$$

On établit donc :

$$V(r(t)) = \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t E(e^{2as}) ds$$

$$\Leftrightarrow V(r(t)) = \sigma^2 e^{-2at} \int_0^t e^{2as} ds$$

$$\Leftrightarrow V(r(t)) = \sigma^2 \left(\frac{1 - e^{-2at}}{2a} \right)$$

Deuxième partie : Expression du prix des zéro coupons

Etape 1 : Formule de tarification des zéros coupons dans l'univers risque neutre

Pour le prix en t du zéro-coupon versant 1€ en T on adopte la notation suivante :

$P(t) = DF(t, T) = P(t, T, r(t))$ où $t \in [0; T]$ et $r(t)$ est la valeur du taux court en t .

Les deux processus de prix du zéro coupon et du taux court sont définis sur l'espace de probabilité (Ω, F, P) .

$r(t)$ étant un processus d'Itô et $P(t)$ étant une fonction du temps et de ce processus, la formule d'Itô nous permet d'affirmer que $P(t)$ est également un processus d'Itô.

Puisque $P(t) > 0 \forall t$, on peut donc affirmer : $\exists \mu_P(t, r(t))$ et $\sigma_P(t, r(t))$ deux fonctions du temps et de la valeur du taux court telles que $dP(t) = P(t)\mu_P(t, r(t))dt + P(t)\sigma_P(t, r(t))dW_t$, où W_t est le mouvement Brownien sous la mesure de probabilité réelle P précédemment utilisé pour expliciter la formule du taux court.

En notant $\lambda(t, r(t)) = (\mu_P(t, r(t)) - r(t)) / \sigma_P(t, r(t))$ le prix de marché du risque :

$$dP(t) = P(t)(r(t) + \lambda(t, r(t))\sigma_P(t, r(t)))dt + P(t)\sigma_P(t, r(t))dW_t$$

$$\Leftrightarrow dP(t) = P(t)r(t)dt + P(t)\sigma_P(t, r(t))(dW_t + \lambda(t, r(t))dt)$$

$$\Leftrightarrow dP(t) = P(t)r(t)dt + P(t)\sigma_P(t, r(t))d\widehat{W}_t$$

$$\text{Où } \widehat{W}_t = W_t + \int_0^t \lambda(s, r(s))ds$$

Grâce au théorème de Girsanov nous savons que $\widehat{W}_t$, qui n'est plus un mouvement Brownien sous la probabilité P , est néanmoins un mouvement Brownien sur $[0; T]$ par rapport à la mesure de probabilité Q définie par :

$$Q(B) = \int_B \Psi(w) dP(w) \text{ où } B \in \mathcal{F}$$

Et où Ψ est la variable aléatoire définie par : $\Psi = \exp \left(\int_0^T \left(-\lambda(s, r(s)) \right) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(s, r(s)) ds \right)$

Sous cette nouvelle mesure de probabilité, le drift des prix zéro-coupon est le taux sans risque $r(t)$. En passant de la mesure P à la mesure Q nous passons donc de l'univers réel à l'univers risque neutre.

On considère à présent le processus de l'actif sans risque $B(t) = B(t, r(t))$ défini sous Q par :

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt \\ B(0) = 1 \end{cases}$$

Soit $B(t) = \exp(\int_0^t r(s)ds)$ et $\sigma_B = 0$.

En utilisant l'expression du processus des prix dérivés sous Q ainsi que l'égalité $d \frac{P(t)}{B(t)} = \frac{dP(t)}{B(t)} + P(t)d \frac{1}{B(t)}$ et la formule d'Itô sur la fonction $f(t, St) = 1/St$, on peut démontrer que le drift du Processus $P(t)/B(t)$ est nul, soit que ce processus est une martingale sous Q .

On en déduit :

$$P(t) \exp \left(- \int_0^t r(s)ds \right) = E_Q \left[P(T) \exp \left(- \int_0^T r(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Où $\mathcal{F}_t$ représente le processus d'information disponible à la date t .

Or $\exp \left(- \int_0^T r(s)ds \right) = \exp \left(- \int_0^t r(s)ds \right) \times \exp \left(- \int_t^T r(s)ds \right)$ et $\exp \left(- \int_0^t r(s)ds \right)$ est $\mathcal{F}_t$ mesurable d'où :

$$E_Q \left[P(T) \exp \left(- \int_0^T r(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(- \int_0^t r(s)ds \right) E_Q \left[P(T) \exp \left(- \int_t^T r(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

De plus $P(T) = 1$ et $\exp \left(- \int_t^T r(s)ds \right)$ est indépendante de l'information $\mathcal{F}_t$ puisque la valeur du taux court entre t et T dépend des variations du mouvement brownien entre t et T qui sont indépendantes des variations du mouvement brownien antérieures à la date t . Par conséquent :

$$E_Q \left[P(T) \exp \left(- \int_0^T r(s)ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left(- \int_0^t r(s)ds \right) E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s)ds \right) \right]$$

Finalement on obtient la formule de tarification risque-neutre suivante :

$$P(t) = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s)ds \right) \right]$$

Etape 2 : Calcul du prix des zéro-coupons sous Q

On introduit à présent l'hypothèse de constance du prix de marché du risque : $\lambda(t, r(t)) = \lambda \forall t > 0$.

Avec cette hypothèse : $\widehat{W}t = Wt + \int_0^t \lambda(s, r(s))ds = Wt + \lambda t$

Commençons par réécrire le processus suivi par le taux court de Vasicek dans l'univers risque neutre :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma(d\widehat{W}t - \lambda dt)$$

$$\Leftrightarrow dr(t) = a \left(b - \frac{\lambda\sigma}{a} - r(t) \right) dt + \sigma d\widehat{W}t$$

$$\leftrightarrow dr(t) = a(b^* - r(t))dt + \sigma d\widehat{W}_t$$

Avec $b^* = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Lorsque l'on passe de l'univers réel à l'univers risque neutre, la forme générale de l'équation de Vasicek, la force de rappel a et la volatilité σ ne changent donc pas. Seule change la moyenne long terme du taux court b à laquelle il faut soustraire $\frac{\lambda\sigma}{a}$ lors du passage en univers risque neutre.

On déduit donc de la partie 1 que la solution à l'équation différentielle stochastique de Vasicek dans l'univers risque neutre est, pour $s > t$:

$$r(s) = r(t)e^{-a(s-t)} + b^*(1 - e^{-a(s-t)}) + \sigma e^{-a(s-t)} \int_t^s e^{a(u-t)} d\widehat{W}_u$$

Nous souhaitons calculer : $P(t) = E_Q \left[\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \right] = E_Q [\exp(-U(t, T))]$.

Où nous posons :

$$U(t, T) = \int_t^T r(s) ds$$

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale de Rieman, nous pouvons établir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} U(t, T) &= \int_t^T \left[r(t)e^{-a(s-t)} + b^*(1 - e^{-a(s-t)}) + \sigma e^{-a(s-t)} \int_t^s e^{a(u-t)} d\widehat{W}_u \right] ds \\ \leftrightarrow U(t, T) &= (r(t) - b^*) \int_t^T e^{-a(s-t)} ds + b^*(T - t) + \sigma \int_t^T \left[\int_t^s e^{-a(s-u)} d\widehat{W}_u \right] ds \end{aligned}$$

En changeant l'ordre des deux dernières intégrales:

$$\begin{aligned} \leftrightarrow U(t, T) &= (r(t) - b^*)B(t, T) + b^*(T - t) + \sigma \int_t^T \left[\int_u^T e^{-a(s-u)} ds \right] d\widehat{W}_u \\ \leftrightarrow U(t, T) &= (r(t) - b^*)B(t, T) + b^*(T - t) + \sigma \int_t^T B(u, T) d\widehat{W}_u \end{aligned}$$

On en déduit que U suit une loi Normale sous Q soit que $\exp(-U)$ suit une loi log-normale d'espérance :

$$E_Q[\exp(-U(t, T))] = \exp \left[-E_Q(U(t, T)) + \frac{1}{2} V_Q(U(t, T)) \right]$$

Or l'espérance d'une intégrale d'Itô étant nulle :

$$E_Q(U(t, T)) = (r(t) - b^*)B(t, T) + b^*(T - t)$$

De plus :

$$\begin{aligned} V_Q(U(t)) &= \sigma^2 V_Q \left(\int_t^T B(u, T) d\widehat{W}_u \right) \\ V_Q(U(t)) &= \sigma^2 \left[E_Q \left(\left(\int_t^T B(u, T) d\widehat{W}_u \right)^2 \right) - E_Q^2 \left(\int_t^T B(u, T) d\widehat{W}_u \right) \right] \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de nullité de l'espérance et la propriété $E((\int_0^t f(s) dW_s)^2) = \int_0^t E(f^2(s)) ds$ des intégrales d'Itô puis en remarquant que $E(B^2(u, T)) = B^2(u, T)$:

$$V_Q(U(t, T)) = \sigma^2 \int_t^T B^2(u, T) du$$

$$\Leftrightarrow V_Q(U(t, T)) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left[(T-t) - 2 \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a} \right]$$

$$\Leftrightarrow V_Q(U(t, T)) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left[(T-t) - 2B(t, T) + \frac{1}{2a} - \frac{e^{-2a(T-t)}}{2a} \right]$$

Nous pouvons donc écrire : $P(t) = \exp \left[-E_Q(U(t, T)) + \frac{1}{2} V_Q(U(t, T)) \right] = \exp(-r(t)B(t, T))A(t, T)$ en posant :

$$A(t, T) = \exp \left[b^*(B(t, T) - (T-t)) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (T-t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[-2B(t, T) + \frac{1}{2a} - \frac{e^{-2a(T-t)}}{2a} \right] \right]$$

Or

$$B^2(t, T) = \frac{1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}}{a^2} = \frac{2aB(t, T) - 1 + e^{-2a(T-t)}}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-2a(T-t)} = a^2 B^2(t, T) - 2aB(t, T) + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{-2a(T-t)}}{2a} = \frac{a}{2} B^2(t, T) - B(t, T) + \frac{1}{2a}$$

$$\rightarrow A(t, T) = \exp \left[b^*(B(t, T) - (T-t)) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (T-t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[-2B(t, T) + \frac{1}{2a} - \frac{a}{2} B^2(t, T) + B(t, T) - \frac{1}{2a} \right] \right]$$

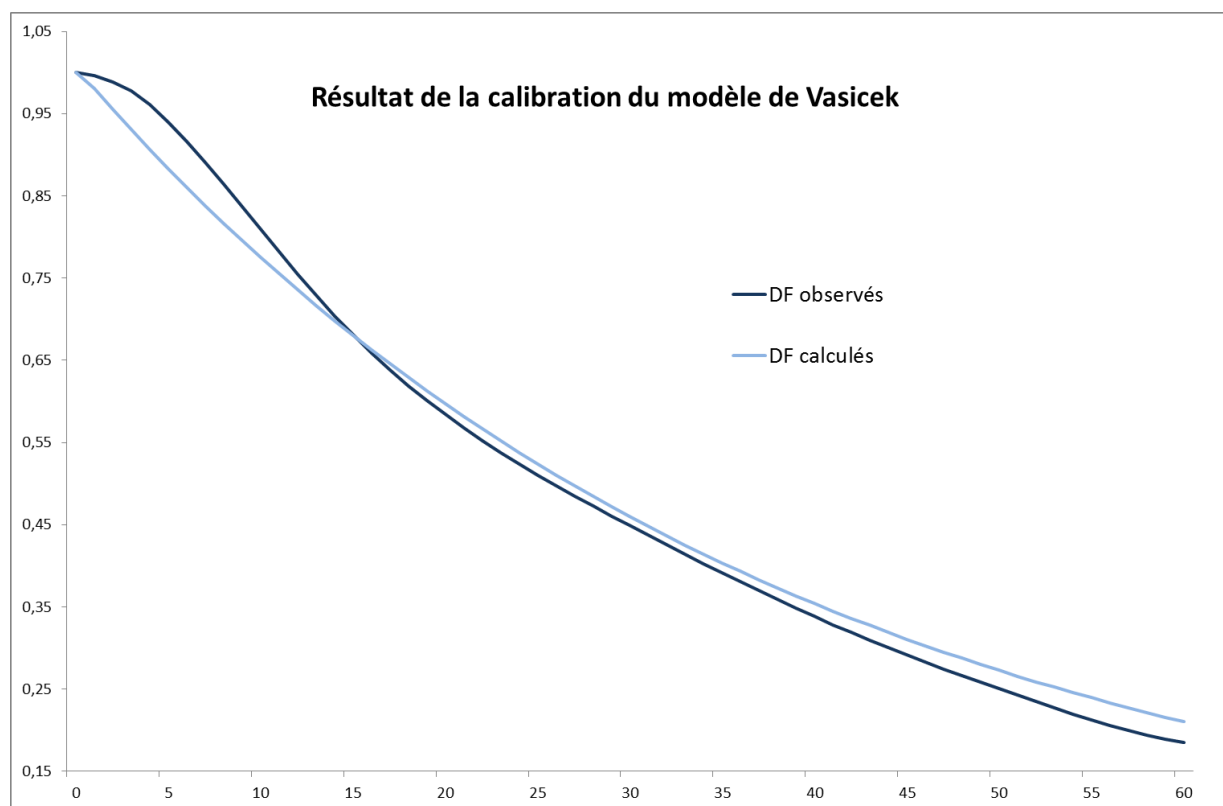
Finalement, on trouve bien:

$$A(t, T) = \exp \left[\left(b^* - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (B(t, T) - (T-t)) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t, T) \right]$$

2) ESTIMATIONS PONCTUELLES DES PARAMETRES DE VASICEK

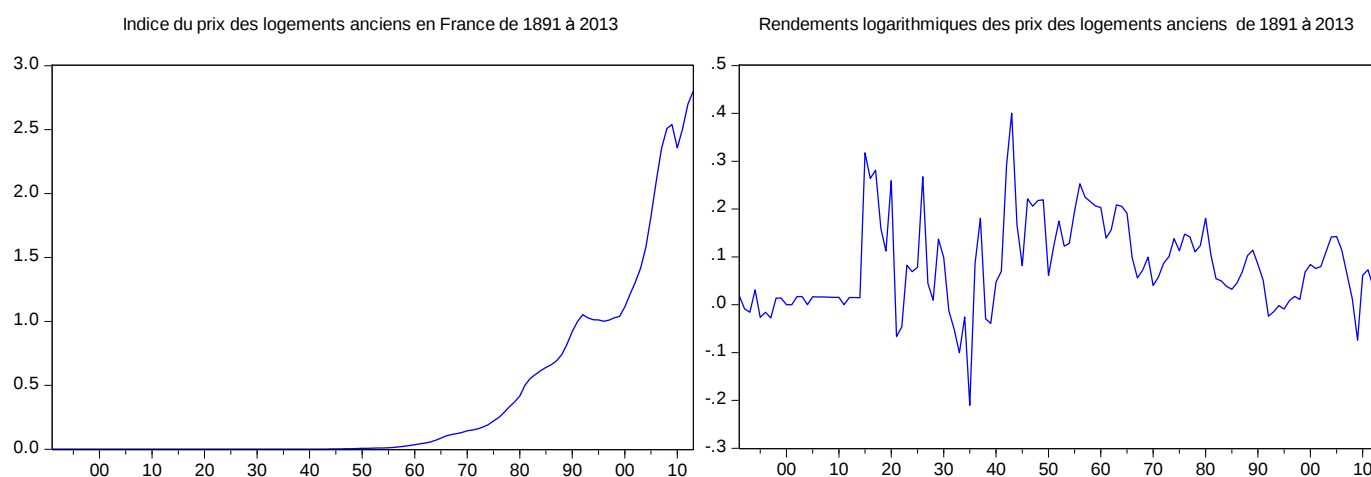
r(0)	0,098%
a	4
b*	2,620%
sigma	5,00%
b (λ=-1,2)	1,120%

3) COURBES DES FACTEURS D'ACTUALISATION OBSERVEE ET CALCULEE



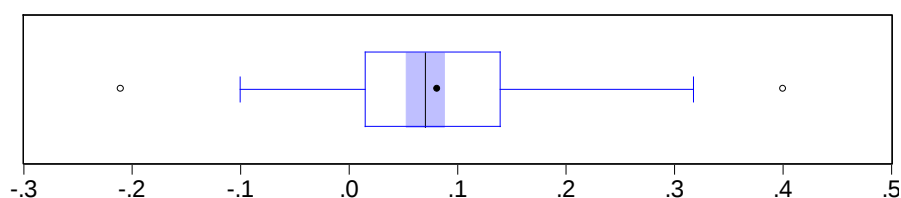
ANNEXE D : MODELISATION DES PRIX IMMOBILIERS

1) REPRESENTATION GRAPHIQUE DES INDICES ET DES RENDEMENTS LOGARITHMIQUES IMMOBILIERS :



2) BOITE A MOUSTACHES DES RENDEMENTS LOGARITHMIQUES DE L'INDICE IMMOBILIER & IDENTIFICATION DES OUTLIERS

On identifie deux outliers parmi les rendements logarithmiques de l'indice immobilier de 1891 à 2013, correspondant aux valeurs minimale (1935 : -0,21) et maximale (1943 : 0,400) de la série.



3) AUTOCORRELOGRAMME DE LA SERIE DES RENDEMENTS LOGARITHMIQUES DE L'INDICE IMMOBILIER

Date: 11/23/13 Time: 14:05

Sample: 1891 2013

Included observations: 121

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.605	0.605	45.454	0.000
		2	0.430	0.101	68.609	0.000
		3	0.328	0.052	82.182	0.000
		4	0.230	-0.013	88.897	0.000
		5	0.229	0.103	95.637	0.000
		6	0.187	-0.001	100.16	0.000
		7	0.157	0.013	103.37	0.000
		8	0.101	-0.041	104.71	0.000
		9	0.154	0.139	107.86	0.000
		1...	0.183	0.059	112.32	0.000
		1...	0.221	0.092	118.91	0.000
		1...	0.115	-0.161	120.72	0.000
		1...	0.031	-0.061	120.85	0.000
		1...	0.026	0.017	120.94	0.000
		1...	-0.011	-0.031	120.98	0.000
		1...	0.014	0.019	121.00	0.000
		1...	0.035	0.049	121.18	0.000
		1...	-0.031	-0.101	121.33	0.000
		1...	-0.051	-0.021	121.81	0.000
		2...	-0.031	0.006	121.97	0.000
		2...	-0.051	-0.061	122.45	0.000
		2...	-0.011	0.055	122.49	0.000
		2...	-0.101	-0.141	124.28	0.000
		2...	-0.121	0.024	126.76	0.000
		2...	-0.061	0.092	127.35	0.000
		2...	0.024	0.136	127.44	0.000
		2...	0.064	-0.011	128.08	0.000
		2...	0.028	-0.061	128.21	0.000
		2...	0.064	0.108	128.86	0.000
		3...	0.032	-0.001	129.03	0.000
		3...	0.050	-0.011	129.45	0.000
		3...	0.044	-0.001	129.77	0.000
		3...	-0.031	-0.121	130.00	0.000
		3...	-0.051	0.041	130.49	0.000
		3...	-0.091	-0.061	132.20	0.000
		3...	-0.051	-0.021	132.79	0.000

4) TEST DE STATIONNARITE SUR LA SERIE DES RENDEMENTS LOGARITHMIQUES DE L'INDICE IMMOBILIER

Null Hypothesis: R has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-4.698135	0.0002
Test critical values: 1% level	-3.486551	
5% level	-2.886074	
10% level	-2.579931	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(R)
Method: Least Squares
Date: 11/23/13 Time: 14:25
Sample (adjusted): 1892 2013
Included observations: 118 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
R(-1)	-0.348618	0.074204	-4.698135	0.0000
C	0.028103	0.008789	3.197604	0.0018
R-squared	0.159861	Mean dependent var		-0.000212
Adjusted R-squared	0.152619	S.D. dependent var		0.075484
S.E. of regression	0.069485	Akaike info criterion		-2.478595
Sum squared resid	0.560075	Schwarz criterion		-2.431634
Log likelihood	148.2371	Hannan-Quinn criter.		-2.459527
F-statistic	22.07247	Durbin-Watson stat		1.978782
Prob(F-statistic)	0.000007			

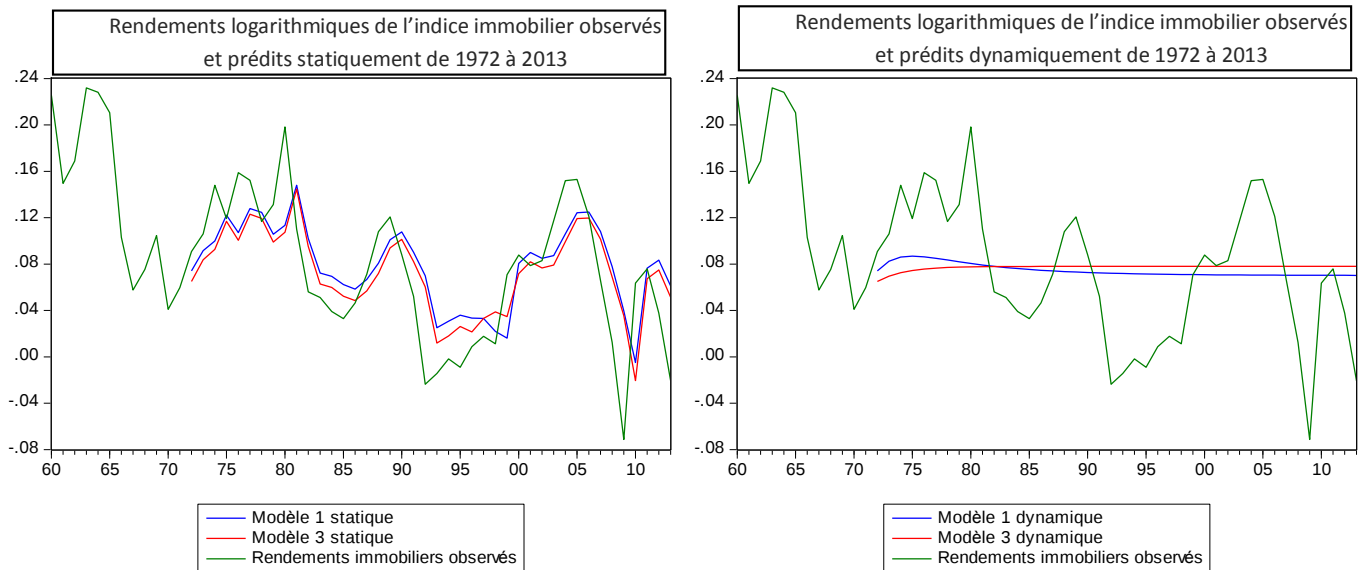
5) ANALYSE DE LA VALIDITE DU MODELE IMMOBILIER: COEFFICIENTS, RESIDUS ET AUTRES STATISTIQUES

N°	Modèle	M	Significativité de tous les coefficients	Moyenne empirique des résidus	P Dickey-Fuller augmenté	Normalité	Jarque-Bera valeur/p	P Lilliefors/Cramer-Von Mises/Watson/Anderson-Darling	Indépendance des résidus - Corrélogramme & Q-stat	Somme Résidus Carrés	R carré ajusté
3	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times y_{t-1} + \beta_2 \times y_{t-2} + \beta_3 \times y_{t-3} + \sigma \varepsilon_t$	NA	Non (ar(2))								
	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times y_{t-1} + \beta_3 \times y_{t-3} + \sigma \varepsilon_t$	NA	Non (ar(3))								
	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times y_{t-1} + \beta_2 \times y_{t-2} + \sigma \varepsilon_t$	NA	Non (ar(2))								
1	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	NA	Oui	-2,39E-18	0	Non	53,13/0	0,0029/0,0001/0/0	Oui	0,48	0,42
	$y_t = \beta_1 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	NA	Oui	1,28E-02	0	Non	96,66/0	0,009/0/0/0	?	0,52	0,39
	$y_t = \beta_{S_t,0} + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t$	2	Oui au moins pour un régime	5,28E-05	0	Non	29,7/0	0,003/0,001/0,001/0,001	Oui	0,45	ND
2	$y_t = \beta_{S_t,0} + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t$	3		Les coefficients ne sont pas uniques							
	$y_t = \beta_{S_t,0} + \beta_1 \times y_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t$	2	Non (Constante)								
	$y_t = \beta_0 + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t$	2	Non (Constante)								
	$y_t = \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{S_t} \varepsilon_t$	2		Les coefficients ne sont pas uniques							
	$y_t = \beta_{S_t,0} + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	2	Oui au moins pour un régime	-1,04E-03	0	Non	73,07/0	0,0017/0/0/0	Oui	0,48	ND
	$y_t = \beta_{S_t,0} + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	3		Les coefficients ne sont pas uniques							
	$y_t = \beta_0 + \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	2		Les coefficients ne sont pas uniques							
	$y_t = \beta_{S_t,1} \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	2		Les coefficients ne sont pas uniques							

6) STATISTIQUES DE DISTANCE ENTRE PREDICTIONS DES MODELES ET OBSERVATIONS

N°	Modèle	S / D	Racine carrée de la moyenne des résidus carrés	Moyenne des résidus absolus	Résidu en % moyen	Coefficient de Theil	Dont biais	Dont variance	Dont covariance
3	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	D	0,056899	0,046274	251,1594	0,345518	0,0272	0,86542	0,107348
3	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	S	0,038999	0,030756	106,8921	0,232141	0,0154	0,27944	0,705206
1	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	D	0,042601	0,041695	127,5137	0,347295	0,6082	0,20187	0,189932
1	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	S	0,059981	0,050797	153,3837	0,445884	0,4005	0,03043	0,569067
2	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	D	Les coefficients ne sont pas uniques						
2	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	S	Les coefficients ne sont pas uniques						

7) REPRESENTATION GRAPHIQUE DES PREDICTIONS FOURNIES PAR LES MODELES

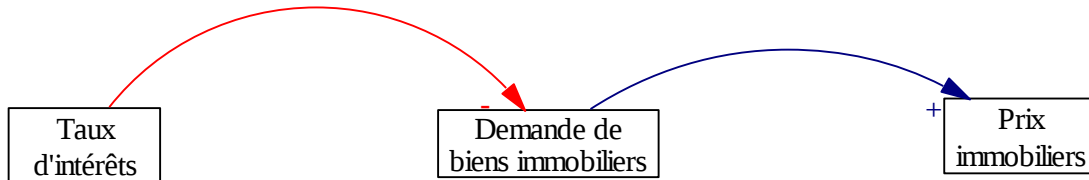


8) RESULTATS DE LA CALIBRATION DU MODELE IMMOBILIER SELECTIONNE

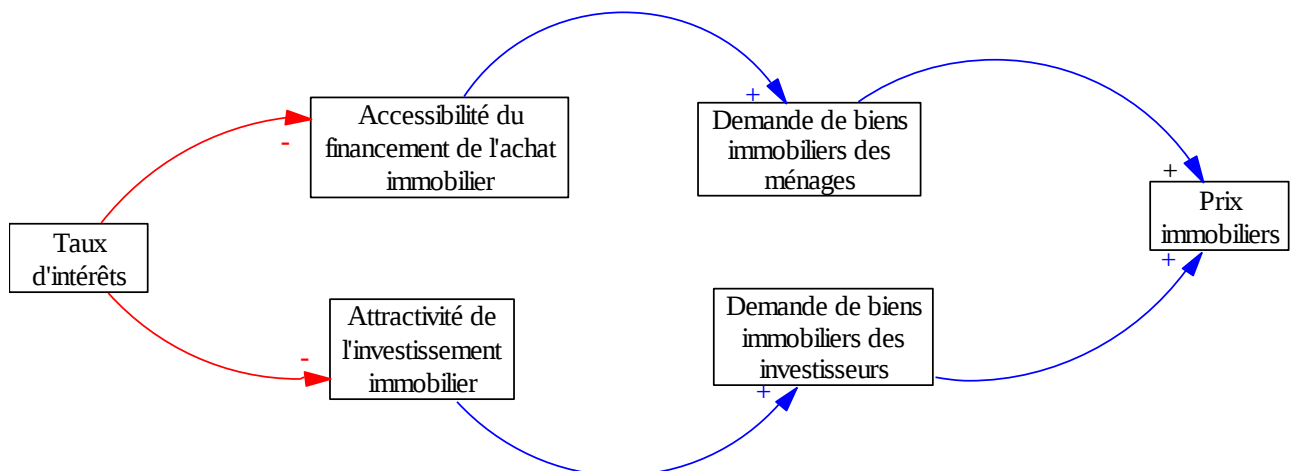
M=2	Type d'estimation	Pii	Constante	Paramètre ar(1)	Volatilité	Duration	Années
Régime 1	Ponctuelle	0,957	0,049	0,427	0,096	23,5	1917-1955; 2008-2013
Régime 1	IC(95%)		[0,006;0,092]	[0,096;0,758]	[0,075;0,121]		
Régime 2	Ponctuelle	0,975	0	0,896	0,030	39,6	1892-1914; 1956-2007
Régime 2	IC(95%)		[-0,005;0,0016]	[0,785;1,007]	[0,025;0,037]		

1) PREMIERE SCHEMATISATION DU LIEN THEORIQUE TAUX D'INTERETS-PRIX IMMOBILIERS

Dans cette annexe nous adoptons les conventions de schématisations suivantes : un encadré représente une variable, une flèche représente un lien de causalité et le signe + ou – de la flèche indique le sens de cette relation de causalité. Plus précisément un signe +, respectivement –, indique qu'une variation positive ou à la hausse de la variable dont part la flèche entraîne une variation positive ou à la hausse, respectivement négative ou à la baisse, de la variable sur laquelle arrive la flèche, et inversement, toutes choses égales par ailleurs. Pour plus de visibilité les flèches agrémentées d'un signe + sont bleues et celles agrémentées d'un signe – sont rouges.

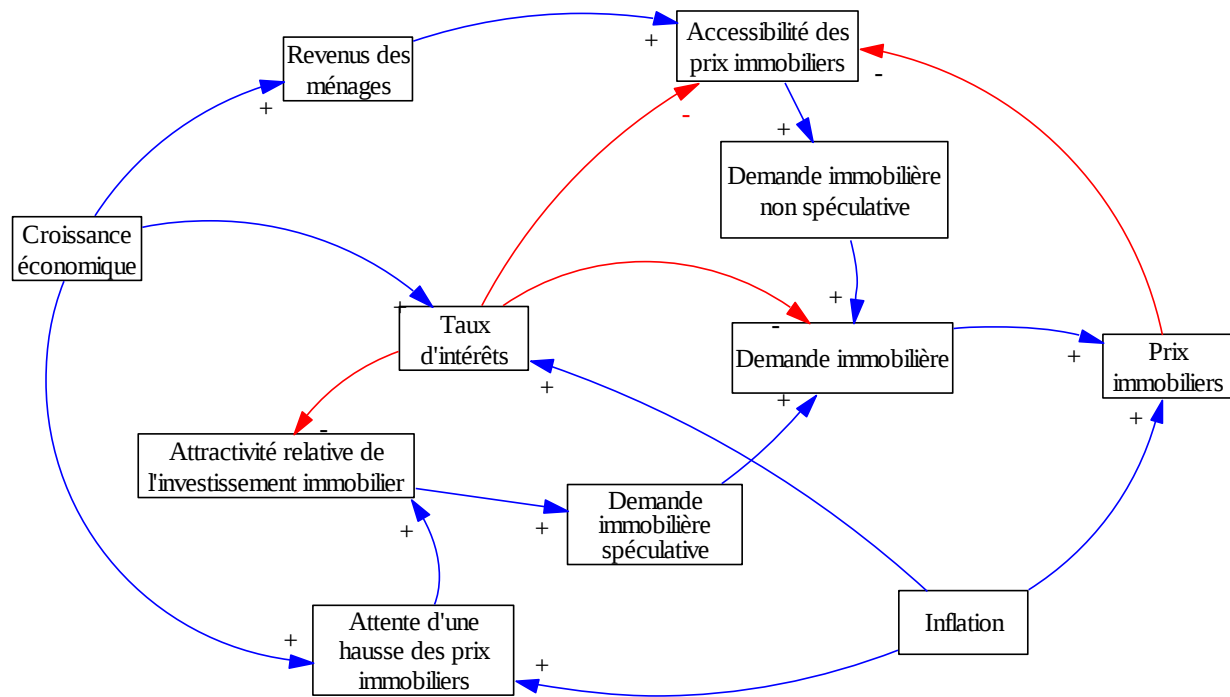


Si l'on distingue demande immobilière des ménages et des investisseurs, on peut préciser ce premier schéma comme suit :



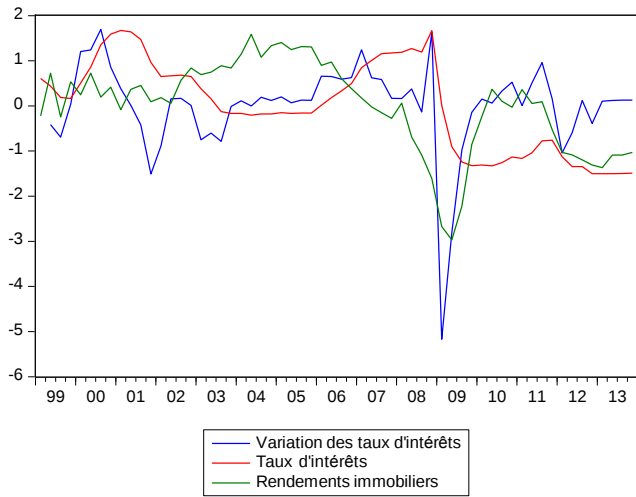
2) DEUXIEME SCHEMATISATION DU LIEN THEORIQUE TAUX D'INTERETS-PRIX IMMOBILIERS

On reprend dans cette annexe E.2) les codes de schématisation explicités en annexe E.1).



3) REPRESENTATION GRAPHIQUE ET ANALYSE DE CORRELATION

Evolutions trimestrielles des variables immobilières et de taux centrées réduites depuis 1999



Analyse de corrélation des taux et prix immobiliers
H0 : Les variables ne sont pas corrélées

		Variation de taux	Niveau de taux	Rendement de taux
Rendement immobilier	Corrélation	0,446	0,294	0,526
	Probabilité	-	0,024	-
Indice immobilier	Corrélation	- 0,030	- 0,521	- 0,133
	Probabilité	0,821	-	0,314

4) RESULTATS DES TESTS DE CAUSALITE DE GRANGER

Hypothèse nulle/Probabilité	1 lags	2 lags	4 lags	12 lags	16 lags
RI ne cause pas VARTX au sens de Granger	0.0538	0.0590	0.2297	0.2389	0.1023
VARTX ne cause pas RI au sens de Granger	0.3839	0.0020	0.0028	0.0135	0.0293
RI ne cause pas TX au sens de Granger	0.0007	0.0604	0.1090	0.1772	0.0362
TX ne cause pas RI au sens de Granger	0.1206	0.1844	0.0031	0.0146	0.0186
RTX ne cause pas RI au sens de Granger	0.0014	0.0029	0.0192	0.2731	0.1472
RI ne cause pas RTX au sens de Granger	0.1980	0.0020	0.0474	0.1735	0.0927

5) VALIDITE DES HYPOTHESES ET STATISTIQUES DE PERFORMANCE DES MODELES TESTES

Modèle	Equation	Méthode	Nb régimes	Significativité de tous les coefficients	Rejet de l'hypothèse de normalité des résidus	Jarque-Bera valeur et proba	Probabilité Lilliefors	Indépendance des résidus	Somme Résidus Carrés	Erreur type	R carré ajusté
M1	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i \times r_{t-i}^{taux} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non							
M2	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times r_{t-1}^{taux} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Oui	3,95E-18	6,92/0,03	> 0,100	Non	0,012740	0,015083	0,168965
M3	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times r_{t-1}^{taux} + \beta_2 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non (Constante)							
M4	$y_t = \beta_1 \times r_{t-1}^{taux} + \beta_2 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non (RTX)							
M5	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times r_{t-1}^{taux} + \beta_2 \times \tau_t + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non (TX(-1))							
M6	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=1}^5 \beta_i \times \tau_{t-i} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non							
M7	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \beta_2 \times \tau_{t-2} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Oui	6,22E-18	1,01/0,60	> 0,100	Non	0,011507	0,014464	0,262533
M8	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Oui	1,68E-18	6,29/0,04	> 0,100	Non	0,014428	0,015772	0,068646
M9	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Oui	-2,35E-19	1,00/0,61	> 0,100	Non	0,011952	0,014609	0,213817
M10	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \beta_3 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non							
M11	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \beta_2 \times \tau_{t-2} + \beta_3 \times y_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Non							
M12	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \beta_3 \times \varepsilon_{t-1})$	OLS	NA	Non (TX(-1))							
M13	$y_t = \beta_0 + \beta_1 \times \tau_t + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	OLS	NA	Oui	1,01E-17	1,45/0,48	> 0,100	Non	0,008189	0,012202	0,451536
M14	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times \tau_{t-i} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^2 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	OLS	NA	Oui	1,11E-04	2,94/0,23	> 0,100	Non	0,002799	0,007267	0,805485
M15	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times \tau_{t-i} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^3 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	OLS	NA	Non	1,16E-04	0,54/0,77	> 0,100	Oui	0,002016	0,006167	0,859906
M16	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^3 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	OLS	NA	Oui	1,80E-04	0,63/0,73	> 0,100	Oui	0,001349	0,005144	0,903346
M17	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^2 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	OLS	NA	Oui	6,57E-05	0,77/0,68	> 0,100	Non	0,002747	0,007268	0,807048
M18	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \beta_4 \times \varepsilon_{t-1})$	OLS	NA	Oui	4,63E-05	0,78/0,68	> 0,100	Non	0,003487	0,008112	0,759639

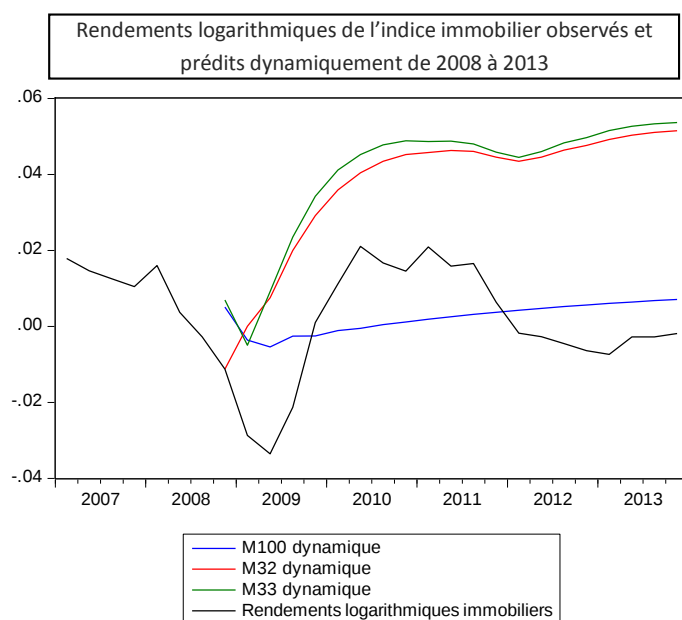
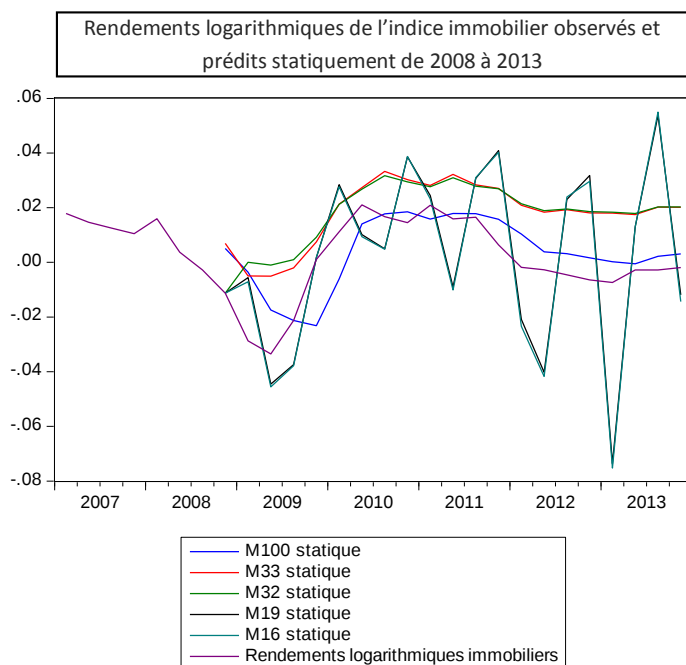
Modèle	Equation	Méthode	Nb régimes	Significativité de tous les coefficients	Espérance des résidus	Rejet de l'hypothèse de normalité des résidus	Jarque-Bera valeur et proba	Probabilité Lilliefors	Indépendance des résidus	Somme Résidus Carrés	Erreur type	R carré ajusté
M19	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^3 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	OLS	NA	Oui	2,75E-04	Non	0,61/0,74	>0.10	Oui	0.001408	0.005255	0.899134
M20	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^2 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	OLS	NA	Oui	6,50E-05	Non	0,61/0,74	>0.10	Non	0.002883	0.007445	0.797502
M21	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times r_{t-1}^{taux} + \beta_{s_t,2} \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	7,77E-05	ND	36.10/0,00	0.00820	Non	0.005678	0.010657	ND
M22	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times r_{t-1}^{taux} + \beta_{s_t,2} \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	3	Les coefficients ne sont pas uniques								
M23	$y_t = \beta_{s_t,0} + \sum_{i=0}^1 \beta_{s_t,i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_{s_t,3} \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Les coefficients ne sont pas uniques								
M24	$y_t = \beta_{s_t,0} + \sum_{i=0}^2 \beta_{s_t,i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_{s_t,4} \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Les coefficients ne sont pas uniques								
M25	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times r_{t-1}^{taux} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Non								
M26	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times \tau_t + \beta_{s_t,2} \times \tau_{t-2} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	8,62E-05	ND	2,28/0,32	0.00820	Non	0.003286	0.008107	ND
M27	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times \tau_t + \beta_{s_t,2} \times \tau_{t-2} + \beta_3 \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	2,22E-04	ND	0,19/0,90	0.00820	Non	0.003867	0.008883	ND
M28	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times \tau_t + \beta_{s_t,2} \times \tau_{t-2} + \beta_{s_t,3} \times \log(\hat{u}_{t-1}) + \sigma \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	-2,84E-04	ND	0,47/0,79	0.00230	Non	0.002584	0.007261	ND
M29	$y_t = \beta_0 + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sum_{i=0}^2 \beta_{i+2} \times \tau_{t-i} + \sigma \varepsilon_t$	MSM	2	Non								
M30	$y_t = \beta_0 + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+2} \times \tau_{t-i} + \sigma \varepsilon_t$	MSM	2	Non								
M31	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+2} \times \tau_{t-i} + \sigma \varepsilon_t$	MSM	2	Non (TX)								
M32	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	-7,31E-05	ND	4,19/0,12	0.08720	Oui	0.002505	0.006875	ND
M33	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	-1,77E-04	Non	0,47/0,79	>0.10	Oui	0.002148	0.006426	ND
M34	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_1 \times y_{t-1} + \sum_{i=0}^1 \beta_{s_t,i+2} \times r_{t-i}^{taux} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Non								
M35	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times i_{t-1} + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+2} \times r_{t-i}^{taux} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	1,28E-04	ND	8,11/0,02	0.03960	Non	0.003682	0.008581	ND
M36	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times i_{t-1} + \beta_2 \times r_t^{taux} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	4,94E-04	Non	0,14/0,93	>0.10	Non	0.003772	0.008517	ND
M100	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	MSM	2	Oui	-4,93E-05	Non	0,42/0,81	>0.10	Oui	0.003037	0.007570	ND

6) STATISTIQUES DE DISTANCE ENTRE OBSERVATIONS ET PREDICTIONS POUR LES MODELES PRESELECTIONNES

Modèle	yt-Modèle	S/D	Moyenne des résidus	Moyenne des résidus absolus	Moyenne des résidus carrés
M16	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times i_{t-1} + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^3 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	S	-0.001659	0.023553	0.000825
M19	$y_t = \beta_0 + \sum_{i=0}^1 \beta_{i+1} \times r_{t-i}^{taux} + \beta_3 \times \log(\bar{c}_{t-1}) + \sigma \times (\varepsilon_t + \sum_{i=1}^3 \beta_{3+i} \times \varepsilon_{t-i})$	S	-0.002408	0.023148	0.000800
M32	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	S	-0.018836	0.018836	0.000409
M33	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	S	-0.018269	0.018269	0.000377
M100	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	S	-0.002996	0.008345	0.000119

Modèle	yt-Modèle	S/D	Moyenne des résidus	Moyenne des résidus absolus	Moyenne des résidus carrés
M32	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$	D	-0.038903	0.038903	0.001654
M33	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \beta_2 \times \tau_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	D	-0.041273	0.041273	0.001838
M100	$y_t = \beta_{s_t,0} + \beta_{s_t,1} \times y_{t-1} + \sigma_{s_t} \varepsilon_t$	D	-0.001648	0.013187	0.000217

7) REPRESENTATION GRAPHIQUES DES PREDICTIONS FOURNIES PAR LES MODELES PRESELECTIONNES



ANNEXE F : SIMULATIONS

1) NOMBRE DE SIMULATIONS A EFFECTUER

En fonction de la précision souhaitée sur la probabilité de réalisation de l'objectif de rentabilité et du risque alpha considéré comme acceptable :

N		Alpha		
		10%	5%	1%
Précision	5,0%	271	385	664
	4,0%	423	601	1 037
	3,0%	752	1 068	1 843
	2,0%	1 692	2 401	4 147
	1,0%	6 765	9 604	16 587
	0,5%	27 057	38 416	66 348

2) PARAMETRAGE DE REFERENCE DE L'OUTIL

Paramètres Simulations	
Nombre Simulations	1000
Valeurs cible	
Rentabilité cible	10%
Probabilité min de réalisation souhaitée	95%
Paramètres PVH	
Montant initial du bien (V0)	300 000 €
Taux (annuel)	7,95%
Quotité	40,00%
Facteur déblocages fractionnés	
Déblocage constant/géométrique	
Échéance constante coûts associés	
Échéance constante produits associés	
pas déblocages (années)	-
nombre de déblocages	1
date du 1er déblocage (années à partir de t=0)	-
pas coûts (années)	-
nombre de flux de coûts	-
date du 1er coût (années à partir de t=0)	-
pas produits (années)	-
nombre de flux de produits	-
date du 1er produit (années à partir de t=0)	-
déblocages versés après disparition (oui/non)	non
coûts versés après disparition (oui/non)	non
produits versés après disparition (oui/non)	non
Coûts et produits du client - Pour calcul TEG	
Coût unitaire	4 000,00
Produit unitaire	
pas coûts (années)	-
nombre de flux de coûts	1
date du 1er coût (années à partir de t=0)	-
pas produits (années)	-
nombre de flux de produits	-
date du 1er produit (années à partir de t=0)	-
coûts versés après disparition (oui/non)	non
produits versés après disparition (oui/non)	non
Paramètres longévité	
Nb d'emprunteurs	2
sexe 1	H
sexe 2	F
sexe 3	
age 1	70
age 2	70
age 3	
stress 1	0
stress 2	0
stress 3	
âge max 1	120
âge max 2	120
âge max 3	
Délai de recouvrement (années)	0
Paramètres taux courts et DF	
Delta t	1
Spread	0,40%
Hypothèses TEG	
TEG 1 (années/%)	ent(Espérance de vie restante) appréciation du bien: 1%/an
TEG 2 (années/%)	ent(Espérance de vie restante) + 3 ans appréciation du bien: 1%/an
TEG 3 (années/%)	ent(Espérance de vie restante) + 3 ans appréciation du bien: 3%/an
Paramètres Optimisation	
Taux max	10%
Pas Taux	0,50%
Quotité max	60%
Pas quotité	1%
Table taux usuraires	
Montant ≤ (€)	Taux d'usure applicable
3000	20,23%
6000	15,17%
∞	10,52%

3) TAUX ET QUOTITES DE REFERENCE

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
MQ/T	7,95%	46,00%	95,10%	523,23%	4,45%	4,06%	6,12%
MT/Q	1,50%	40,00%	95,30%	42,84%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	9,00%	6,00%	99,80%	910,17%	10,14%	10,01%	10,01%
Mconj2	10,00%	2,00%	99,80%	1249,92%	15,14%	14,56%	14,56%

4) TAUX ET QUOTITES POUR DIVERS PROFILS DE DEBLOCAGES

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
20 déblocages trimestriels constants (facteur 100%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	2,00%	96,00%	457,87%	5,66%	5,08%	7,36%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	96,00%	708,05%	5,66%	5,08%	7,36%
Mconj2	10,00%	2%	96,00%	708,05%	5,66%	5,08%	7,36%
20 déblocages trimestriels constants (facteur 50%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	6,00%	95,60%	410,14%	3,38%	3,09%	5,31%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	99,80%	848,55%	8,98%	7,98%	10,31%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	848,55%	8,98%	7,98%	10,31%
20 déblocages trimestriels constants (facteur 10%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	21,00%	95,10%	434,29%	3,44%	3,15%	5,32%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,00%	2%	99,90%	807,15%	10,50%	10,32%	10,32%
Mconj2	10,00%	6%	98,70%	945,16%	9,69%	8,62%	10,39%
5 déblocages annuels constants (facteur 100%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	10,00%	95,00%	433,67%	4,45%	4,03%	6,26%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,50%	2%	99,50%	832,51%	10,36%	10,26%	10,26%
Mconj2	10,00%	4%	98,50%	852,64%	9,13%	8,12%	10,36%
5 déblocages annuels constants (facteur 50%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	16,00%	95,20%	449,01%	4,58%	4,15%	6,34%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,00%	2%	99,90%	792,76%	10,46%	10,28%	10,28%
Mconj2	10,00%	5%	99,60%	939,86%	10,52%	9,35%	10,47%
5 déblocages annuels constants (facteur 10%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	39,00%	95,10%	468,05%	3,80%	3,47%	5,57%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	8,50%	3%	99,90%	766,13%	10,42%	10,20%	10,20%
Mconj2	10,00%	10%	99,40%	1042,61%	10,40%	9,28%	10,44%
5 déblocages mensuels constants (facteur 100%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	7,00%	95,50%	526,82%	5,73%	5,19%	7,28%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,50%	2%	99,20%	931,90%	10,16%	10,09%	10,09%
Mconj2	10,00%	3%	98,20%	1003,84%	9,80%	8,78%	10,38%
5 déblocages mensuels constants (facteur 50%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	15,00%	95,30%	501,72%	4,57%	4,17%	6,24%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,00%	2%	99,70%	900,17%	10,16%	10,03%	10,03%
Mconj2	10,00%	5%	98,50%	1045,59%	9,79%	8,77%	10,38%
5 déblocages mensuels constants (facteur 10%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	36,00%	95,00%	508,19%	4,05%	3,70%	5,76%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,50%	6%	99,90%	1018,15%	10,29%	10,20%	10,20%
Mconj2	10,00%	9%	99,40%	1103,68%	10,51%	9,52%	10,45%
20 déblocages annuels constants (facteur 5%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	26,00%	95,00%	394,16%	4,87%	4,37%	6,71%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	7,00%	2%	99,90%	381,66%	10,21%	9,78%	9,78%
Mconj2	10,00%	10%	98,70%	771,34%	10,01%	8,87%	10,43%
20 déblocages annuels constants (facteur 5%) avec flux PostMortem							
MQ/T=7,95%	7,95%	25,00%	95,20%	398,52%	5,07%	4,55%	6,89%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	8,50%	3%	99,70%	570,53%	10,40%	10,16%	10,16%
Mconj2	10,00%	10%	98,30%	763,34%	10,01%	8,87%	10,43%

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG3
20 déblocages trimestriels géométriques (facteur 100%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	2,00%	95,80%	437,26%	5,66%	5,08%	7,36%
MT/Q=40%	Insoluble						
Mconj1	10,00%	2%	95,80%	661,62%	5,66%	5,08%	7,36%
Mconj2	10,00%	2%	95,80%	661,62%	5,66%	5,08%	7,36%
20 déblocages trimestriels géométriques (facteur 50%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	20,00%	95,50%	509,92%	5,13%	4,66%	6,75%
MT/Q=40%	Insoluble						
Mconj1	8,50%	2%	99,90%	763,48%	10,42%	10,20%	10,20%
Mconj2	10,00%	7%	98,80%	1023,36%	10,19%	9,12%	10,41%
20 déblocages trimestriels géométriques (facteur 10%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	41,00%	95,00%	497,04%	4,50%	4,10%	6,16%
MT/Q=40%	3,00%	40,00%	95,00%	104,68%	3,13%	3,11%	3,11%
Mconj1	8,00%	3%	100,00%	687,12%	10,33%	10,06%	10,06%
Mconj2	10,00%	12%	99,40%	1066,16%	10,34%	9,26%	10,42%
5 déblocages annuels géométriques (facteur 100%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	11,00%	95,20%	445,39%	3,99%	3,63%	5,84%
MT/Q=40%	Insoluble						
Mconj1	9,50%	2%	99,10%	867,62%	10,36%	10,26%	10,26%
Mconj2	10,00%	4%	98,20%	900,42%	9,13%	8,12%	10,36%
5 déblocages annuels géométriques (facteur 50%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	26,00%	95,20%	467,47%	4,19%	3,82%	5,94%
MT/Q=40%	Insoluble						
Mconj1	8,00%	2%	99,30%	636,63%	10,17%	9,91%	9,91%
Mconj2	10,00%	8%	98,30%	991,21%	9,94%	8,87%	10,40%
5 déblocages annuels géométriques (facteur 10%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,00%	497,31%	4,00%	3,66%	5,72%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,60%	42,69%	1,63%	1,61%	1,61%
Mconj1	8,50%	4%	99,60%	800,59%	10,14%	9,96%	9,96%
Mconj2	10,00%	12%	98,30%	1090,43%	10,37%	9,29%	10,43%
5 déblocages mensuels géométriques (facteur 100%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	8,00%	95,70%	520,66%	5,11%	4,64%	6,73%
MT/Q=40%	Insoluble						
Mconj1	9,50%	2%	99,60%	982,56%	10,16%	10,09%	10,09%
Mconj2	10,00%	3%	99,30%	1051,67%	9,80%	8,78%	10,38%
5 déblocages mensuels géométriques (facteur 50%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	18,00%	95,20%	531,81%	5,72%	5,18%	7,27%
MT/Q=40%	Insoluble						
Mconj1	8,50%	2%	99,90%	777,87%	10,44%	10,22%	10,22%
Mconj2	10,00%	7%	98,80%	1042,87%	10,27%	9,20%	10,42%
5 déblocages mensuels géométriques (facteur 10%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,10%	492,58%	3,98%	3,64%	5,69%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,00%	42,19%	1,63%	1,61%	1,61%
Mconj1	6,00%	2%	99,90%	368,72%	10,13%	9,66%	9,66%
Mconj2	10,00%	12%	99,30%	1075,22%	10,33%	9,25%	10,42%
20 déblocages annuels géométriques (facteur 5%)							
MQ/T=7,95%	7,95%	44,00%	95,00%	509,08%	4,43%	4,04%	6,10%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,20%	42,33%	1,64%	1,62%	1,62%
Mconj1	5,50%	2%	100,00%	311,79%	10,04%	9,53%	9,53%
Mconj2	10,00%	12%	99,30%	1079,32%	10,51%	9,51%	10,45%
20 déblocages annuels géométriques (facteur 5%) avec flux PostMortem							
MQ/T=7,95%	7,95%	42,00%	95,30%	506,85%	4,63%	4,22%	6,29%
MT/Q=40%	2,00%	40,00%	95,00%	60,46%	2,14%	2,12%	2,12%
Mconj1	8,50%	4%	100,00%	774,33%	10,24%	10,05%	10,05%
Mconj2	10,00%	12%	99,60%	1059,31%	10,51%	9,51%	10,45%

5) TAUX ET QUOTITES POUR DIVERS PROFILS DES COUTS ET PRODUITS ASSOCIES

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Un coût en t=0 de 1000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,30%	504,59%	4,54%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	96,00%	41,49%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	7,50%	3%	99,90%	567,38%	10,16%	9,86%	9,86%
Mconj2	10,00%	2%	99,70%	1178,12%	15,14%	14,56%	14,56%
Un coût en t=0 de 5000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	44,00%	95,30%	505,65%	4,65%	4,23%	6,30%
MT/Q=40%	2,00%	40,00%	95,30%	57,18%	2,14%	2,13%	2,13%
Mconj1	8,50%	4%	99,30%	755,44%	10,34%	10,13%	10,13%
Mconj2	10,00%	2%	99,20%	1161,16%	15,14%	14,56%	14,56%
Un coût en t=0 ans de 10000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	38,00%	95,10%	528,32%	5,31%	4,82%	6,89%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	9,50%	7%	99,80%	957,09%	10,46%	10,35%	10,35%
Mconj2	10,00%	13%	99,10%	1053,14%	10,45%	9,36%	10,43%
10 coûts annuels à partir de t=0 de 2000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	40,00%	95,00%	506,85%	5,08%	4,61%	6,68%
MT/Q=40%	4,00%	40,00%	95,00%	144,60%	4,14%	4,13%	4,13%
Mconj1	9,50%	8%	99,00%	911,01%	10,33%	10,23%	10,23%
Mconj2	10,00%	13%	98,40%	1013,21%	10,45%	9,36%	10,43%
10 coûts biannuels à partir de t=0 de 2000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	41,00%	95,00%	496,38%	4,96%	4,52%	6,58%
MT/Q=40%	3,00%	40,00%	95,00%	89,23%	3,14%	3,13%	3,13%
Mconj1	9,00%	5%	99,20%	766,16%	10,41%	10,25%	10,25%
Mconj2	10,00%	13%	98,50%	998,17%	10,45%	9,36%	10,43%
10 coûts triannuels à partir de t=0 de 2000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	44,00%	95,00%	512,47%	4,65%	4,23%	6,30%
MT/Q=40%	2,00%	40,00%	95,70%	51,01%	2,14%	2,13%	2,13%
Mconj1	9,50%	10%	99,70%	961,28%	10,15%	10,07%	10,07%
Mconj2	10,00%	13%	99,40%	1069,03%	10,45%	9,36%	10,43%
10 coûts triannuels dont post-mortem à partir de t=0 de 2000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	43,00%	95,00%	520,32%	4,75%	4,33%	6,39%
MT/Q=40%	3,00%	40,00%	95,30%	94,33%	3,14%	3,13%	3,13%
Mconj1	9,50%	9%	98,70%	962,85%	10,23%	10,14%	10,14%
Mconj2	10,00%	13%	98,30%	1069,59%	10,45%	9,36%	10,43%
Spread de 0%							
MQ/T=7,95%	7,95%	47,00%	95,10%	501,10%	4,35%	3,97%	6,03%
MT/Q=40%	1,50%	40%	95,20%	43,15%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	8,50%	4%	100,00%	799,67%	10,34%	10,13%	10,13%
Mconj2	10,00%	2%	99,60%	1250,18%	15,14%	14,56%	14,56%
Spread de 1%							
MQ/T=7,95%	7,95%	43%	95,00%	498,48%	4,75%	4,33%	6,39%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,50%	42,46%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1207,84%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1207,84%	15,14%	14,56%	14,56%

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Un produit en t=0 de 1000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,00%	533,41%	4,26%	3,89%	5,94%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,50%	43,44%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1253,75%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1253,75%	15,14%	14,56%	14,56%
Un produit en t=0 de 5000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	47,00%	95,10%	518,39%	4,35%	3,97%	6,03%
MT/Q=40%	1,00%	40,00%	96,40%	31,54%	1,14%	1,13%	1,13%
Mconj1	9,50%	8%	100,00%	1063,19%	10,33%	10,23%	10,23%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	1375,67%	15,14%	14,56%	14,56%
Un produit en t=0 de 15000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	52,00%	95,10%	516,15%	3,90%	3,57%	5,62%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	96,60%	24,38%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	9,50%	10%	100,00%	1072,37%	10,15%	10,07%	10,07%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	1552,18%	15,14%	14,56%	14,56%
Un produit en t=5 ans de 15000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	49,00%	95,00%	513,35%	4,16%	3,81%	5,86%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	96,90%	23,68%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	9,50%	9%	100,00%	1047,60%	10,23%	10,14%	10,14%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	1477,00%	15,14%	14,56%	14,56%
5 produits annuels à partir de t=0 de 3000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	50,00%	95,00%	504,43%	4,07%	3,73%	5,78%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	95,90%	23,38%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	9,50%	8%	100,00%	1051,18%	10,33%	10,23%	10,23%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	1478,97%	15,14%	14,56%	14,56%
5 produits triannuels à partir de t=0 de 5000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	52,00%	95,10%	518,65%	3,90%	3,57%	5,62%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	96,70%	30,81%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	9,50%	8%	100,00%	1093,73%	10,33%	10,23%	10,23%
Mconj2	10,00%	2%	99,70%	1617,35%	15,14%	14,56%	14,56%
5 produits triannuels dont post-mortem à partir de t=0 de 5000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	53,00%	95,00%	484,17%	3,99%	3,65%	5,70%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	96,80%	30,79%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	9,50%	9%	100,00%	1045,04%	10,23%	10,14%	10,14%
Mconj2	10,00%	2%	99,90%	1587,07%	15,14%	14,56%	14,56%

6) TAUX ET QUOTITES POUR DIVERS PROFILS DU GROUPE EMPRUNTEUR

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Un homme 70 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	52,00%	95,10%	315,21%	4,88%	4,32%	6,39%
MT/Q=40%	4,50%	40,00%	95,00%	134,58%	4,69%	4,67%	4,67%
Mconj1	9,50%	10%	99,00%	597,70%	10,37%	10,24%	10,24%
Mconj2	10,00%	17%	98,30%	631,44%	10,49%	10,31%	10,42%
Une femme 70 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	50,00%	95,00%	406,53%	4,52%	4,07%	6,13%
MT/Q=40%	4,00%	40,00%	95,30%	135,22%	4,17%	4,14%	4,14%
Mconj1	9,00%	7%	99,60%	709,36%	10,10%	9,96%	9,96%
Mconj2	10,00%	14%	99,20%	860,33%	10,52%	10,07%	10,45%
Un homme et une femme 67 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	44,00%	95,00%	669,81%	4,12%	3,81%	5,86%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,10%	49,17%	1,62%	1,61%	1,61%
Mconj1	8,00%	3%	100,00%	917,24%	10,28%	10,06%	10,06%
Mconj2	10,00%	2%	99,60%	1735,68%	14,39%	13,96%	13,96%
Un homme et une femme 85 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	60,00%	96,40%	126,67%	6,53%	5,23%	7,31%
MT/Q=40%	3,50%	40,00%	95,60%	47,24%	3,85%	3,77%	3,77%
Mconj1	9,00%	14%	99,80%	183,96%	10,09%	9,84%	9,84%
Mconj2	10,00%	29%	99,20%	208,01%	10,51%	10,39%	10,39%
Un homme et une femme 70 ans stress 20%							
MQ/T=7,95%	7,95%	40,00%	95,00%	1229,21%	3,95%	3,70%	5,75%
MT/Q=40%	3,50%	40,00%	95,00%	218,48%	3,60%	3,60%	3,60%
Mconj1	9,00%	5%	100,00%	2639,34%	10,02%	9,94%	9,94%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	4273,57%	13,71%	13,40%	13,40%
Un homme et une femme 70 ans stress -20%							
MQ/T=7,95%	7,95%	57,00%	95,10%	369,58%	3,85%	3,49%	5,54%
MT/Q=40%	1,00%	40,00%	96,40%	23,27%	1,16%	1,14%	1,14%
Mconj1	9,00%	6%	100,00%	632,57%	10,31%	10,14%	10,14%
Mconj2	10,00%	14%	99,00%	766,38%	10,52%	10,07%	10,45%
Délai de recouvrement 5 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	39,00%	95,20%	755,60%	5,19%	4,72%	6,79%
MT/Q=40%			Insoluble				
Mconj1	10,00%	2%	99,70%	2038,62%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	99,70%	2038,62%	15,14%	14,56%	14,56%
2 femmes 65 ans délai de recouvrement 1 an							
MQ/T=7,95%	7,95%	33,00%	95,20%	951,65%	4,81%	4,47%	6,54%
MT/Q=40%			Insoluble				
Mconj1	10,00%	2%	99,40%	2610,46%	13,96%	13,60%	13,60%
Mconj2	10,00%	2%	99,40%	2610,46%	13,96%	13,60%	13,60%

7) TAUX ET QUOTITES POUR DIVERS PARAMETRES DE CALCUL DU TEG

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Un coût de 0€ en t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,41%	4,03%	6,09%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,50%	1,50%	1,50%
Mconj1	10,00%	2,00%	100,00%	1246,48%	9,99%	9,99%	9,99%
Mconj2	10,00%	1,00%	100,00%	1263,45%	9,99%	9,99%	9,99%
Un coût de 15000€ en t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,93%	4,48%	6,55%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	2,06%	2,00%	2,00%
Mconj1	4,50%	7%	99,70%	216,87%	10,09%	9,46%	9,46%
Mconj2	10,00%	20%	98,30%	1025,55%	9,30%	8,35%	10,49%
Un coût de 15000€ en t=10 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,73%	4,32%	6,33%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,96%	1,91%	1,91%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	14,69%	14,37%	14,37%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1263,45%	19,27%	18,96%	18,96%
Dix coûts de 1500€ par an à partir de t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,83%	4,40%	6,44%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	2,01%	1,96%	1,96%
Mconj1	5,50%	5%	99,80%	312,06%	10,43%	9,99%	9,99%
Mconj2	10,00%	19%	98,40%	1036,40%	9,15%	8,24%	10,31%
Cinq coûts de 3000€ biannuels à partir de t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,84%	4,41%	6,45%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	2,02%	1,96%	1,96%
Mconj1	5,00%	5%	99,80%	262,00%	10,39%	9,91%	9,91%
Mconj2	10,00%	19%	98,40%	1036,40%	9,19%	8,27%	10,36%
Un produit de 5000€ en t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,26%	3,89%	5,94%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,33%	1,35%	1,35%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	7,25%	7,55%	7,55%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1263,45%	5,59%	6,07%	6,07%
Un produit de 15000€ en t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	3,96%	3,62%	5,67%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,00%	1,06%	1,06%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	4,40%	5,01%	5,01%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1263,45%	2,09%	2,94%	2,94%
Un produit de 15000€ en t=10 ans							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,10%	3,74%	5,85%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,05%	1,10%	1,10%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	6,08%	6,63%	6,63%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1263,45%	3,16%	4,20%	4,20%

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Dix produits de 1500€ par an à partir de t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,03%	3,68%	5,76%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,02%	1,08%	1,08%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	5,04%	5,64%	5,64%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1263,45%	2,46%	3,39%	3,39%
Cinq produits de 3000€ biannuels à partir de t=0							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	4,02%	3,67%	5,75%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,02%	1,07%	1,07%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	4,96%	5,56%	5,56%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1263,45%	2,41%	3,33%	3,33%
Hypothèse TEG1: espérance de vie +5 années							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	3,92%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,62%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	14,24%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	14,24%	14,56%	14,56%
Hypothèse TEG1: espérance de vie +10 années							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	3,49%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,60%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	13,60%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	13,60%	14,56%	14,56%
Hypothèse TEG1: espérance de vie +20 années							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	2,92%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,58%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	12,77%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	12,77%	14,56%	14,56%
Hypothèse TEG1: appréciation annuelle de l'immobilier de 0%							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	3,51%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	15,14%	14,56%	14,56%
Hypothèse TEG1: appréciation annuelle de l'immobilier de 5%							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	8,08%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	15,14%	14,56%	14,56%
Hypothèse TEG1: appréciation annuelle de l'immobilier de 10%							
MQ/T=7,95%	7,95%	45,00%	95,10%	526,02%	8,08%	4,14%	6,21%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,73%	1,64%	1,63%	1,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1246,48%	15,14%	14,56%	14,56%

8) TAUX ET QUOTITES POUR DIVERSES VALEURS INITIALES DU BIEN

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Valeur initiale du bien de 50 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	47,00%	95,10%	508,66%	5,04%	4,58%	6,65%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,91%	2,45%	2,34%	2,34%
Mconj1	5,00%	9%	99,50%	258,28%	15,06%	13,89%	13,89%
Mconj2	10,00%	12%	99,40%	1097,10%	15,14%	13,78%	14,56%
Valeur initiale du bien de 100 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	48,00%	95,10%	495,76%	4,51%	4,12%	6,18%
MT/Q=40%	1,00%	40,00%	95,30%	26,48%	1,44%	1,39%	1,39%
Mconj1	7,50%	5%	99,90%	587,35%	14,95%	14,09%	14,09%
Mconj2	10,00%	19%	98,70%	1007,18%	9,30%	8,35%	10,49%
Valeur initiale du bien de 200 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,00%	496,61%	4,51%	4,12%	6,18%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,20%	42,32%	1,72%	1,69%	1,69%
Mconj1	10,00%	3%	99,90%	1207,29%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	3%	99,90%	1207,29%	15,14%	14,56%	14,56%
Valeur initiale du bien de 700 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	41,00%	95,10%	558,35%	4,88%	4,44%	6,51%
MT/Q=40%	3,00%	40,00%	95,00%	107,34%	3,06%	3,05%	3,05%
Mconj1	9,50%	5%	100,00%	1087,65%	10,05%	9,99%	9,99%
Mconj2	10,00%	6%	99,80%	1231,92%	10,45%	10,40%	10,40%
Valeur initiale du bien de 1 000 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,10%	516,50%	4,36%	3,98%	6,04%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,60%	42,85%	1,54%	1,54%	1,54%
Mconj1	8,00%	1%	100,00%	702,08%	10,32%	10,06%	10,06%
Mconj2	10,00%	4%	99,80%	1214,00%	10,48%	10,42%	10,42%
Valeur initiale du bien de 2 000 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	42,00%	95,00%	519,97%	4,74%	4,31%	6,38%
MT/Q=40%	2,50%	40,00%	95,20%	81,20%	2,52%	2,52%	2,52%
Mconj1	9,50%	1%	100,00%	1075,91%	10,52%	10,40%	10,40%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	1221,06%	10,48%	10,42%	10,42%
Valeur initiale du bien de 5 000 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	48,00%	95,00%	508,32%	4,14%	3,79%	5,84%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,90%	42,19%	1,51%	1,51%	1,51%
Mconj1	10,00%	1%	99,90%	1198,25%	10,38%	10,33%	10,33%
Mconj2	10,00%	1%	99,90%	1198,25%	10,38%	10,33%	10,33%
Valeur initiale du bien de 10 000 000€							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,00%	483,90%	4,32%	3,95%	6,00%
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,10%	41,62%	1,50%	1,50%	1,50%
Mconj1	10,00%	1%	100,00%	1196,26%	10,18%	10,16%	10,16%
Mconj2	10,00%	1%	100,00%	1196,26%	10,18%	10,16%	10,16%

9) TAUX ET QUOTITES POUR DIVERS PARAMETRES D'OPTIMISATION

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Objectif de rentabilité de 3%							
MQ/T=7,95%	7,95%	46,00%	95,10%	508,37%	4,45%	4,06%	6,12%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	95,30%	11,19%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Objectif de rentabilité de 30%							
MQ/T=7,95%	7,95%	36,00%	95,10%	541,33%	5,55%	5,04%	7,12%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	99,90%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	99,90%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Objectif de rentabilité de 50%							
MQ/T=7,95%	7,95%	30,00%	95,10%	561,87%	6,39%	5,78%	7,87%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	99,80%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	99,80%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Objectif de rentabilité de 100%							
MQ/T=7,95%	7,95%	19,00%	95,00%	603,30%	8,27%	7,69%	8,24%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	99,30%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	99,30%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Probabilité de réalisation minimum de 70%							
MQ/T=7,95%	7,95%	60,00%	92,80%	464,93%	3,27%	3,01%	5,05%
MT/Q=40%	0,50%	40,00%	79,10%	11,19%	0,64%	0,63%	0,63%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Probabilité de réalisation minimum de 80%							
MQ/T=7,95%	7,95%	60,00%	92,80%	464,93%	3,27%	3,01%	5,05%
MT/Q=40%	1,00%	40,00%	94,00%	25,77%	1,14%	1,13%	1,13%
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Probabilité de réalisation minimum de 97%							
MQ/T=7,95%	7,95%	28,00%	97,10%	569,00%	6,71%	6,06%	8,14%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Probabilité de réalisation minimum de 99%							
MQ/T=7,95%	7,95%	13,00%	99,00%	629,18%	8,43%	8,38%	8,38%
MT/Q=40%				Insoluble			
Mconj1	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Mconj2	10,00%	2%	100,00%	1227,15%	15,14%	14,56%	14,56%
Paramétrage initial							
MQ/T=10%	10,00%	47,00%	95,20%	757,57%	4,35%	3,97%	6,03%
MQ/T=7,95%	7,95%	47,00%	95,20%	506,19%	4,35%	3,97%	6,03%
MQ/T=5%	5,00%	47,00%	95,20%	224,93%	4,35%	3,97%	5,11%
MQ/T=3%	3,00%	47,00%	95,20%	103,69%	3,12%	3,11%	3,11%
MQ/T=1%	1,00%	38%	95,00%	26,72%	1,15%	1,13%	1,13%
2 femmes 65 ans délai de recouvrement 1 an							
MQ/T=10%	10,00%	33,00%	95,00%	1624,87%	4,81%	4,47%	6,54%
MQ/T=7,95%	7,95%	33,00%	95,00%	972,99%	4,81%	4,47%	6,54%
MQ/T=5%	5,00%	33,00%	95,00%	370,03%	4,81%	4,47%	5,12%
MQ/T=3%	3,00%	33%	95,00%	154,51%	3,13%	3,12%	3,12%
MQ/T=1%	1,00%	32%	95,00%	35,25%	1,14%	1,13%	1,13%

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
Valeur du bien 10 000 000							
MQ/T=10%	10,00%	47,00%	95,00%	749,81%	4,23%	3,86%	5,92%
MQ/T=7,95%	7,95%	47,00%	95,00%	504,99%	4,23%	3,86%	5,92%
MQ/T=5%	5,00%	47,00%	95,00%	225,28%	4,23%	3,86%	5,00%
MQ/T=3%	3,00%	46%	95,10%	104,07%	3,00%	3,00%	3,00%
MQ/T=1%	1,00%	38%	95,00%	26,52%	1,00%	1,00%	1,00%
20 déblocages trimestriels constants (facteur 100%)							
MQ/T=10%	10,00%	2,00%	95,30%	707,35%	5,47%	4,92%	7,19%
MQ/T=7,95%	7,95%	2,00%	95,30%	453,73%	5,47%	4,92%	7,19%
MQ/T=5%	5,00%	2,00%	95,20%	199,22%	5,00%	4,92%	5,00%
MQ/T=3%	3,00%	1,00%	97,50%	97,24%	3,01%	3,01%	3,01%
MQ/T=1%	1,00%	1,00%	95,00%	24,61%	1,01%	1,01%	1,01%
Objectif de rentabilité=8% probabilité de réalisation=70%							
MT/Q=90%	0,50%	90,00%	84,60%	7,91%	0,56%	0,56%	0,56%
Objectif de rentabilité=8% probabilité de réalisation=75%							
MT/Q=90%	0,50%	90,00%	82,40%	7,82%	0,56%	0,56%	0,56%
Objectif de rentabilité=9% probabilité de réalisation=70%							
MT/Q=80%	0,50%	80,00%	80,40%	8,01%	0,57%	0,56%	0,56%
Objectif de rentabilité=9% probabilité de réalisation=80%							
MT/Q=80%	0,50%	80,00%	81,30%	7,85%	0,57%	0,56%	0,56%
MT/Q=70%	0,50%	70,00%	82,10%	8,57%	0,58%	0,57%	0,57%
Paramétrage initial							
MT/Q=60%	Insoluble						
MT/Q=50%	Insoluble						
MT/Q=40%	1,50%	40,00%	95,40%	42,81%	1,64%	1,63%	1,63%
MT/Q=30%	1,00%	30,00%	95,70%	27,08%	1,19%	1,17%	1,17%
MT/Q=20%	1,00%	20,00%	96,90%	27,88%	1,29%	1,26%	1,26%
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	97,80%	28,54%	1,60%	1,54%	1,54%
20 déblocages trimestriels constants (facteur 100%)							
MT/Q=60%	Insoluble						
MT/Q=50%	Insoluble						
MT/Q=40%	Insoluble						
MT/Q=30%	Insoluble						
MT/Q=20%	Insoluble						
MT/Q=10%	Insoluble						
20 déblocages trimestriels constants (facteur 50%)							
MT/Q=60%	Insoluble						
MT/Q=50%	Insoluble						
MT/Q=40%	Insoluble						
MT/Q=30%	Insoluble						
MT/Q=20%	Insoluble						
MT/Q=10%	Insoluble						
20 déblocages trimestriels constants (facteur 10%)							
MT/Q=60%	Insoluble						
MT/Q=50%	Insoluble						
MT/Q=40%	Insoluble						
MT/Q=30%	Insoluble						
MT/Q=20%	2,00%	20,00%	95,00%	56,45%	2,11%	2,10%	2,10%
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	96,00%	25,93%	1,22%	1,19%	1,19%

Méthode/Paramètres et indicateurs	Taux	Quotité	Probabilité de réalisation	Rentabilité moyenne	TEG1	TEG2	TEG 3
5 déblocages annuels constants (facteur 100%)							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%				Insoluble			
MT/Q=20%				Insoluble			
MT/Q=10%	2,00%	10,00%	95,00%	54,81%	2,13%	2,11%	2,11%
5 déblocages annuels constants (facteur 50%)							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%				Insoluble			
MT/Q=20%				Insoluble			
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	96,40%	25,97%	1,21%	1,18%	1,18%
5 déblocages annuels constants (facteur 10%)							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%	1,50%	30,00%	95,70%	41,09%	1,64%	1,62%	1,62%
MT/Q=20%	1,00%	20,00%	95,90%	25,96%	1,21%	1,19%	1,19%
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	96,80%	26,85%	1,44%	1,39%	1,39%
5 déblocages mensuels constants (facteur 100%)							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%				Insoluble			
MT/Q=20%				Insoluble			
MT/Q=10%				Insoluble			
5 déblocages mensuels constants (facteur 50%)							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%				Insoluble			
MT/Q=20%				Insoluble			
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	96,50%	27,33%	1,19%	1,17%	1,17%
5 déblocages mensuels constants (facteur 10%)							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%	3,50%	30,00%	95,00%	130,65%	3,64%	3,62%	3,62%
MT/Q=20%	1,00%	20,00%	95,10%	26,01%	1,21%	1,18%	1,18%
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	96,60%	27,45%	1,42%	1,38%	1,38%
2 femmes 65 ans délai de recouvrement 1 an							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%	1,00%	30,00%	95,60%	36,38%	1,15%	1,13%	1,13%
MT/Q=20%	1,00%	20,00%	96,70%	37,79%	1,22%	1,20%	1,20%
MT/Q=10%	0,50%	10,00%	96,80%	18,04%	0,96%	0,92%	0,92%
Délai de recouvrement 5 ans							
MT/Q=60%				Insoluble			
MT/Q=50%				Insoluble			
MT/Q=40%				Insoluble			
MT/Q=30%	1,00%	30,00%	95,70%	32,18%	1,19%	1,17%	1,17%
MT/Q=20%	1,00%	20,00%	98,00%	33,61%	1,29%	1,26%	1,26%
MT/Q=10%	1,00%	10,00%	99,20%	34,59%	1,60%	1,54%	1,54%