

PROMOTION: 2004 / 2005

Mémoire d'actuariat présenté devant

le Jury du C E A

pour l'obtention du

Diplôme d'Actuaire

du CENTRE D'ETUDES ACTUARIELLES

Par : Agnès LOSSI-BEDEL

Victor DONEV

Sur le sujet

Actifs risqués actions, dérivés actions et crédit :

Quels impacts en termes de marge de solvabilité pour un assureur vie ?

Liste du jury

Arnaud CLEMENT-GRANDCOURT
Arnaud COHEN
Gérard CROSET
Jean-Michel EYRAUD
Pierre MATHOULIN
Florence PICARD
Christian Yann ROBERT

Directeur du mémoire :

Odette Césari, Direction des investissements,
AXA France

CONFIDENTIALITÉ

Synthèse

Dans un contexte global difficile pour les actifs dits risqués (volatilité élevée, aversion forte des investisseurs pour le risque, durcissement des contraintes réglementaires et comptables ...), nous avons choisi d'étudier l'intérêt pour un assureur vie dans le contexte d'un contrat d'épargne de maintenir une exposition dans son bilan à ces actifs (et si oui, sous quelle forme) sans risquer sa solvabilité, avec la mise en place de nouvelles normes prudentielles (Solvabilité 2).

En effet, en plus de l'impact économique, les prochaines normes réglementaires (Solvabilité 2) auront très clairement un impact en termes de choix d'allocation d'actifs, ce qui apparait comme une petite révolution pour l'industrie de l'assurance.

Pour se faire, nous nous sommes placés dans le cadre d'un contrat d'épargne très simplifié, mono-générationnel. Nous détaillerons les caractéristiques du contrat étudié ainsi que le cadre comptable et réglementaire associés, et l'ensemble des changements en cours (*première partie*).

Nous développerons ensuite une modélisation vie du cadre bilanciel ALM caractérisée par : (*parties 2 et 3*)

- o une vision des risques à une période,
- o un cadre d'analyse triple, économique, comptable et réglementaire,
- o l'introduction de deux actifs risqués de façon directionnelle et optionnelle, les actions et le crédit, avec un effet taux supposé parfaitement adossé ; ces deux sources de risque quant à elle peu présentes par construction du côté du Passif induisent des mismatches actif-passif, intéressants à qualifier du point de vue de la solvabilité.
- o et des mesures pour juger de l'efficacité ou non des sources de risques introduites dans le bilan.

Nous étendrons par la suite cette vision à une vision dynamique multi-périodes, selon les trois axes d'analyse économique, comptable et réglementaire, pour avoir une analyse la plus riche possible des résultats.

La combinaison de ces axes de recherche nous a ainsi permis de donner une première réponse à la question d'actualité sur les solutions optimales dans un bilan d'assureur vie, pour gérer sa marge de solvabilité.

Dans ce cadre global simplifié, mono-périodique d'abord puis multi-périodiques, du côté du risque Actions, les stratégies de type action convexe ou protégée, à base de dérivés (plus efficacement les options Puts), donnent une réponse qui sort de la vision en Sharpe, en ligne avec la triple recherche actuelle des assureurs et assurés, **délivrer un rendement compétitif sans prendre trop de risques et à moindre coût réglementaire** (*partie 4*). En effet, grâce à un profil asymétrique, ces solutions réduisent l'occurrence des événements extrêmes tout en laissant une exposition forte aux actifs qui financent l'économie. Ainsi, introduire un actif asymétrique est une solution qui répond aux intérêts des deux agents, un actionnaire averse au risque et un assuré avec un appétit fort pour le risque, profitant d'un plancher de rémunération garanti.

On pourrait bien entendu imaginer d'autres solutions Actions qui feraient de la même manière bénéficier de leur profil convexe le bilan d'une compagnie d'assurance (Obligations convertibles, stratégies actions de type CPPI, actif de couverture répliquant la volatilité implicite...)

Du côté du risque de crédit, qui représente une large part des investissements d'une compagnie vie, c'est une allocation qui combinerait l'actif A / BBB dans des proportions importantes (environ 30%) à un actif souverain qui apparait comme une exposition optimale, que ce soit à la lumière économique, comptable ou réglementaire (sur la base du QIS5), c'est-à-dire offrir un niveau de satisfaction maximum pour les actionnaires tout en délivrant un niveau moyen de prestations raisonnable, proche des taux longs en vigueur. Rappelons, qu'un investissement intégralement en dettes souveraines (hors contexte de stress exceptionnel), ne permettrait pas en moyenne, d'offrir des rendements attractifs aux assurés.

Introduire un profil convexe du côté de l'actif crédit est plus délicat, de par une structure moins liquide du marché du crédit que le marché Actions en instruments optionnels. Il existe néanmoins des solutions possibles, notamment une alternative protégée pour intégrer de façon efficace une poche High Yield en portefeuille (en effet, la structure du marché du High Yield en Europe est en fort développement, malgré des expositions très faibles chez les assureurs européens par rapport à celle des compagnies américaines).

TABLE DE MATIERES

SYNTHESE	3
REMERCIEMENTS	7
INTRODUCTION	8
1. LE CONTRAT ETUDIE ET SON CADRE REGLEMENTAIRE	11
1.1. CARACTERISTIQUES GENERALES DU CONTRAT	11
1.1.1. <i>Un contrat qui a pour objet de constituer une épargne</i>	11
1.1.2. <i>Le traitement des frais</i>	12
1.1.3. <i>La sortie du contrat</i>	12
1.2. LES REGLES APPLICABLES AUX ACTIFS DE LA COMPAGNIE	12
1.2.1. <i>Règles relatives à la composition de l'actif</i>	12
1.2.2. <i>Règles de comptabilisation des Actifs</i>	13
1.2.2.1. Règles comptables relatives aux actions (normes françaises et normes IFRS)	13
1.2.2.2. Règles comptables relatives aux obligations.....	15
1.2.2.3. Quid de l'éligibilité des dérivés au vu du Code des Assurances ?	16
1.3. RAPPEL DES DISPOSITIONS REGLEMENTAIRES APPLICABLES A LA COMPAGNIE ET AU BILAN ETUDIE	17
1.3.1. <i>Les capitaux propres et la marge de solvabilité (le cadre Solvabilité 1)</i>	17
1.3.2. <i>Le cadre de Solvabilité 2</i>	18
1.3.2.1. Le projet Solvabilité II.....	18
1.3.2.2. En détail, vers quelle mesure du besoin en fonds propres minimum s'orientent-on?	20
1.3.2.3. Le traitement règlementaire détaillé, les orientations nouvelles suite aux Consultation papers et au QIS 5	21
2. UNE PREMIERE VISION DES RISQUES : UNE MODELISATION SIMPLIFIEE DU CADRE BILANCIEL	27
2.1. CAS D'UNE REVALORISATION D'UN CONTRAT MONO-GENERATIONNEL MONO-PERIODE	27
2.1.1. <i>Cas d'une revalorisation in fine de la provision mathématique (approche 1)</i>	28
2.1.2. <i>Cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique (approche 2)</i>	34
2.2. MODELE D'ACTIF UTILISE POUR REPRESENTER LE RISQUE A L'ACTIF DE LA COMPAGNIE	35
2.2.1. <i>Modélisation d'un indice Action</i>	35
2.2.1.1. Implémentation de la diffusion relative au risque Action	36
2.2.1.2. Indicateurs rendement / risque utilisés	36
2.2.2. <i>Modélisation d'un portefeuille d'Obligations Corporate</i>	37
2.2.2.1. Le modèle choisi pour un titre unique obligataire.....	37
2.2.2.2. Modélisation d'un panier / indice obligataire	40
2.3. PROGRAMME D'OPTIMISATION DOUBLE : QUEL CHOIX DE FONCTION D'UTILITE ?	42
2.4. COMMENT PRENDRE EN COMPTE UNE VISION COMPTABLE ?	44
2.4.1. <i>Rappel du cadre du bilan de modélisation proposé en normes FRGAAP</i>	44
2.4.2. <i>Réécriture du modèle simplifié avec une vision comptable à 1 période (MSCA) Risque Action</i>	44
2.4.2.1. Le cadre comptable du côté des actifs.....	44
2.4.2.2. Illustration bilancielle simplifiée en t=0 et t=1	45
2.4.2.3. Revisite en détail des 3 régimes pour construire le bilan comptable à la lumière du modèle simplifié :	45
2.4.2.4. Un nouvel indicateur à analyser, le résultat comptable en date 1	46
2.4.2.5. Quid de la valorisation comptable des dérivés ?	46
2.4.3. <i>Quid des plus-values latentes ?</i>	47
2.4.3.1. Un nouveau processus de gestion du taux de prestations variables.....	47
2.4.3.2. Ecriture des indicateurs comptables entrant dans le processus de gestion	47
2.4.4. <i>Réécriture du modèle simplifié avec une vision comptable à 1 période (MSCC) Risque Crédit</i>	48
2.4.4.1. Le cadre comptable du côté des actifs de crédit	48
2.4.4.2. Illustration bilancielle simplifiée en t=0 et t=1	49
2.4.4.3. Synthèse sur l'écriture comptable du modèle pour le risque Crédit.....	49
3. UNE SECONDE VISION DES RISQUES : UNE MODELISATION DYNAMIQUE MULTI-PERIODES	51
3.1. L'APPROCHE DYNAMIQUE (MODELE MDSC) : LES CONSEQUENCES.....	51
3.2. UNE REVALORISATION ANNUELLE ECONOMIQUE DE LA PROVISION MATHEMATIQUE, EN VERSION MULTI-PERIODES (MDSE)	51
3.3. UNE REVALORISATION ANNUELLE DE LA PROVISION MATHEMATIQUE, DANS LA VISION COMPTABLE (MDSC). 54	
3.3.1. <i>Des choix de rebalancement</i>	54
3.3.2. <i>Réécriture du modèle en version multi-périodes (MDSC)</i>	54
3.3.2.1. Le cadre comptable du côté Actifs.....	54
3.3.2.2. Illustration bilancielle synthétique entre les dates (t-1) et t.....	55
3.3.2.3. Ecriture des dynamiques des Fonds propres et Prestations	55
3.3.3. <i>Introduction d'une stratégie d'allocation temporelle dynamique</i>	56
3.4. RESUME DES PRINCIPAUX MECANISMES DU BILAN.....	58

4. PILOTER SON ALLOCATION D'ACTIFS ACTIONS SOUS CONTRAINTE : COMMENT RESTER MAITRE DE SON ALLOCATION STRATEGIQUE SOUS CONTRAINTE DE SOLVABILITE? 61

4.1.	CONSTRUCTION D'UNE ALLOCATION D'ACTIFS SIMPLES DANS UN CADRE ACTIONS / TAUX CONSTANT DANS LE 1 ^{ER} CADRE DE VISION DES RISQUES (MONO-PERIODIQUE).....	61
4.1.1.	<i>Un rappel général des hypothèses choisies pour l'analyse quantitative</i>	61
4.1.2.	<i>Résultat dans le cadre économique simplifié mono-période (modèle MSE)</i>	62
4.1.2.1.	Une analyse de l'allocation optimale des actifs du bilan, sur des actifs traditionnels, actions et taux	62
4.1.2.2.	Les solutions asymétriques donneraient-elles une réponse ?	63
4.1.3.	<i>Résultat dans le cadre réglementaire simplifié mono-période (modèle MSE)</i>	71
4.1.4.	<i>Une approche comptable entrainerait-elle de fortes variations d'interprétations ?</i>	73
4.1.4.1.	1ere vision : mise en place du bilan (MSC) à une période.....	73
4.1.4.2.	2 nd e vision qualitative (dans le cadre des normes IFRS).....	75
4.2.	LA SECONDE VISION DES RISQUES, MULTI-PERIODES, MODIFIE-T-ELLE CES CONCLUSIONS ?.....	76
4.2.1.	<i>Résultat dans le cadre économique multi-périodes (modèle MDSEA)</i>	76
4.2.2.	<i>Résultat dans le cadre réglementaire simplifié multi-périodes (modèle MDSEA)</i>	77
4.2.3.	<i>Une approche comptable entrainerait-elle de fortes variations d'interprétations ? (modèle MDSC)</i>	77
4.3.	CONCLUSION SUR LA PRESENCE OPTIMALE D'UNE EXPOSITION SUR ACTIONS DANS LE BILAN D'UN ASSUREUR	80

5. PILOTER SON ALLOCATION D'ACTIFS CREDIT SOUS CONTRAINTE : COMMENT RESTER MAITRE DE SON ALLOCATION STRATEGIQUE SOUS CONTRAINTE DE SOLVABILITE? 81

5.1.	CONSTRUCTION D'UNE ALLOCATION D'ACTIFS SIMPLES DANS UN CADRE OBLIGATION CORPORATE / OBLIGATION SANS RISQUE DANS LE 1 ^{ER} CADRE DE VISION DES RISQUES (MONO-PERIODIQUE).....	81
5.1.1.	<i>Un rappel général des hypothèses choisies pour l'analyse quantitative propre au risque de crédit</i>	82
5.1.2.	<i>Y a-t-il un rating moyen optimal pour gérer son exposition stratégique à un an au risque de crédit, d'un point de vue économique ?</i>	83
5.1.2.1.	Préambule : comment investir de façon optimale l'actif obligataire Corporate dit « risqué » sachant que 50% est investi en obligations souveraines supposées « sans risque » ?	83
5.1.2.2.	Quel rating moyen préférer sans contrainte de taille ?	85
5.1.2.3.	La solvabilité impose des contraintes de taille	86
5.1.2.4.	Quel actif préférer pour un pilotage de la solvabilité économique ?	87
5.1.2.5.	Conclusions	87
5.1.3.	<i>Y a-t-il un rating moyen optimal pour gérer son exposition au risque de crédit, d'un point de vue prudentiel ?</i>	88
5.1.3.1.	Quel est le coût induit en approche standard en capital des allocations optimales dans le cadre économique ?	88
5.1.3.2.	Quel est le coût induit en approche interne en capital des allocations optimales dans le cadre économique ?.....	89
5.1.3.3.	Quel actif préférer dans le cadre d'un pilotage réglementaire ?	90
5.1.3.4.	Anticiper la dynamique en capital.....	91
5.1.3.5.	Conclusion	91
5.1.4.	<i>Comment les normes comptables modifieraient cette vision économique ?</i>	92
5.1.4.1.	Le cadre des normes comptables françaises.....	92
5.1.4.2.	Le cadre des normes comptables IFRS	93
5.1.5.	<i>Améliorer le pilotage ALM grâce à la prise en compte d'effet de diversification entre actifs Corporate ?</i>	93
5.1.5.1.	Les hypothèses choisies	93
5.1.5.2.	Les résultats	94
5.1.6.	<i>L'introduction de dérivés simples ou de stratégies d'allocations serait-elle une solution pour gérer son exposition ?</i>	95
5.2.	LA VISION MULTI-PERIODES MODIFIERAIT-T-ELLE CES CONCLUSIONS ?	96
5.3.	CONCLUSION SUR LA PRESENCE OPTIMALE D'UNE EXPOSITION CREDIT DANS LE BILAN D'UN ASSUREUR.....	97

6. CONCLUSION 99

7. BIBLIOGRAPHIE 101

8. ANNEXES RELATIVES AU RISQUE ACTIONS 103

8.1.	ESTIMATEURS BIAISES DU RISQUE ACTIONS : PERFORMANCE ANNUALISEE	103
8.2.	DYNAMIQUE DE L'EXPOSITION ACTIONS GENEREE PAR LA STRATEGIE DERIVEE	103

9. ANNEXES RELATIVES AU RISQUE DE CREDIT 107

9.1.	DYNAMIQUE D'UN PANIER D'OBLIGATIONS CORPORATE (PREUVE)	107
9.2.	FORMULE FERME DE LA VARIANCE DU PANIER	108
9.3.	METHODOLOGIE CHOISIE POUR LA CALIBRATION DU PANIER D'OBLIGATIONS (SPREAD0, V, P, R, RHO)	109
9.4.	SYNTHESE DES PARAMETRES UTILISES POUR LA MODELISATION DU PORTEFEUILLE OBLIGATAIRE	112

Remerciements

Ce travail de recherche a été mené en parallèle d'un Club lancé au sein d'Exane Derivatives et mené par l'Ingénierie Financière Institutionnelle sur la thématique de comment gérer de façon optimale sa marge de solvabilité.

Nous tenons ainsi à remercier Exane Derivatives pour nous avoir permis d'utiliser le travail mené dans le cadre du Club afin de présenter notre mémoire d'actuariat, et tout particulièrement Mikaël Bouvier pour son soutien technique et ses relectures constructives ainsi que Lionel Assoun pour son soutien.

Enfin, nous remercions nos familles pour leur accompagnement et leur présence au cours de ces mois de travail.

Introduction

Il existe différents cadres pour apprécier la qualité d'une société d'assurance vie, qu'elle soit française ou européenne.

Notre objet consiste à nous intéresser plus particulièrement aux contrats d'assurance vie dits en euros, qui offrent aux assurés une garantie libellée en euros, et non aux contrats dits en unités de compte où la garantie ne porte que sur le nombre d'unités.

Ces contrats possèdent des propriétés particulières, au travers du taux minimum garanti et de l'intéressement de l'assuré au résultat financier de la compagnie, via un mécanisme de participation aux bénéfices. Compte tenu de l'importance de ces contrats au passif des assureurs, la gestion actif-passif des compagnies d'assurance vie peut s'apprécier pour l'essentiel à partir des caractéristiques contractuelles de ces produits.

L'analyse de ces particularités entraîne des politiques d'allocation d'actifs bien spécifiques. C'est ce point de vue que nous souhaitons développer afin de les revisiter dans un contexte où la marge de solvabilité revient au cœur des débats.

La solvabilité d'une compagnie d'assurance peut en effet prendre différentes formes :

- ✓ celle d'une exigence purement économique : détenir assez d'actifs pour faire face à ses engagements
- ✓ celle d'une exigence minimale en capital (réglementairement)
 - normes locales (française, CP195 , isvap) ou Solvency 2
- ✓ une limitation des placements par catégorie et en dispersion.

Il est aussi important de prendre en compte que ces différents formats sont par ailleurs impactés par les normes comptables locales (French Gaap) ou IFRS (normes internationales), avec les propositions de modification des IAS 39 en cours.

Le type de contrat étudié ici sera caractérisé par un actionnaire dont l'intérêt sera la recherche d'une bonne rentabilité des fonds propres et des assurés dont l'intérêt résidera en un taux de revalorisation des primes maximum, via une qualité de gestion des actions et la présence d'actifs risqués pour apporter du rendement.

Quelles solutions d'actifs (directionnels ou dérivés) optimisent la gestion de l'actif risqué dans un cadre ALM ?

La relation dans le partage de rémunération et de portage du risque entre assurés et actionnaires est asymétrique, au travers de

- ✓ l'existence d'une participation des assurés aux bénéfices de la compagnie
- ✓ et l'engagement de l'assureur (et donc les actionnaires) de revaloriser les prestations avec un taux minimum garanti.

Dans un environnement d'actualité sur les questions d'allocations d'actifs optimales pour répondre aux nouvelles exigences réglementaires, les actifs risqués ont-ils leur place dans un bilan d'assurance vie compte tenu du partage économique actionnaire / assurés, et des nouvelles normes en matière de solvabilité et de comptabilité qui mettent une pression de plus en plus forte sur les « actifs risqués » ?

Ce cadre d'analyse dépasse la mesure purement financière de la performance d'une solution (à base de dérivés ou pas) en différenciant dans l'analyse les intérêts des actionnaires de ceux des assurés, dans un cadre global qui se veut économique, comptable et réglementaire.

Nous nous placerons dans un cadre où le point de vue de l'assuré est celui, vu de l'assureur, pour rester dans l'univers de concurrence. Nous n'analyserons pas la recherche comparée d'un assuré qui choisirait le contrat d'assurance optimal du point de vue de son prix.

Enfin, nous avons fait le choix de neutraliser dans notre analyse le risque ALM de taux de manière à nous concentrer sur l'impact d'autres risques à l'actif sur un bilan d'assurance vie, c'est-à-dire ici les risques actions et crédit.

La valeur ajoutée a été concentrée sur trois points majeurs :

- l'introduction à l'actif d'une analyse en termes de stratégie optimale sur des « actifs risqués », hors risque de taux, (la gestion du risque de taux dans un bilan d'assurance vie ayant déjà été abondamment discutée) : c'est-à-dire l'introduction des risques action et spread de crédit avec le développement d'une modélisation originale d'un portefeuille d'Obligation Corporate, en investissements directionnels ou via des instruments dérivés.
- le choix d'une lecture simplifiée du bilan d'une compagnie d'assurance vie, une lecture optionnelle (au passif et à l'actif), qui nous permet de valider la pertinence ou pas des stratégies choisies à l'actif.
- une vision simplifiée de la compagnie qui se place, en plus du cadre purement économique, dans un cadre comptable et réglementaire, tout en restant sur un contrat mono-générationnel. En effet, la plupart des travaux se préoccupent assez peu du cadre réglementaire et comptable applicable aux compagnies, alors qu'il se révèle poser des contraintes majeures dans la vie des contrats. Nous introduirons, dans la vision du modèle simplifié pour une compagnie d'assurance vie, une vision comptable multi-périodes, ainsi qu'une vision réglementaire, afin de tenir compte des problèmes liés aux règles de comptabilisation des placements, et notamment le principe du coût historique qui est souvent négligé, alors qu'ils exercent une influence déterminante sur le calcul du taux de rendement du contrat, et de l'impact du choix d'une stratégie d'allocation d'actifs sur la marge de solvabilité.

L'objet de ce mémoire est de construire un cadre d'analyse simple et pertinent afin de répondre à la question stratégique : comment conserver une exposition risquée dans un bilan d'assurance vie tout en respectant les contraintes économiques, comptables et réglementaires ?

Les solutions dérivées sont-elles un moyen pour résoudre ce conflit, et améliorer l'intérêt général assurés / actionnaires tout en répondant aux normes réglementaires et comptables?

Les stratégies dérivées, du fait de leur profil asymétrique, apparaissent une alternative efficace à la gestion du conflit explicite entre l'intérêt de l'actionnaire et celui des assurés.

Un mapping des stratégies d'achat et de vente d'options vanilles permettra de conclure sur leurs intérêts.

Le sont-elles aussi d'un point de vue comptable et opérationnel ... ?

Dans une première partie, nous présenterons les choix de modélisations effectués pour représenter au mieux le cadre d'un Bilan d'assurance vie, que ce soit à l'actif (description de la modélisation des actifs) ou au Passif (prise en compte des engagements relatifs au contrat analysé), sur la base de deux visions, une vision simplifiée mono-période et une vision multi-périodes, chacune intégrant les trois cadres d'analyse, économique, réglementaire et comptable.

Dans une seconde partie, nous présenterons dans les trois cadres d'analyse déjà cités, les résultats découlant des cadres de modélisation posés, pour les deux risques analysés :

- l'exposition optimale aux actions, avec et sans dérivés sur actions
- l'exposition au risque de crédit, avec et sans dérivés de crédit (la vision avec dérivés de crédit étant abordée de façon qualitative).

Chapitre 1

1. Le contrat étudié et son cadre réglementaire

Afin de bien avoir en tête le cadre développé, nous reprenons les caractéristiques principales des contrats d'assurance vie de type « épargne » dont les garanties sont libellées en euros. Nous nous limitons à celles qui interviennent dans la construction du modèle.

Le principe est que ces contrats donnent lieu à la constitution d'une épargne, qui est fonction des résultats financiers de l'assureur (1.1). Pour ce faire, l'assureur est soumis à des normes comptables (1.2) et à un cadre réglementaire qui se durcit (1.3).

1.1. Caractéristiques générales du contrat

1.1.1. Un contrat qui a pour objet de constituer une épargne

La compagnie qui commercialise ces contrats constitue en son passif une provision mathématique égale au montant de son engagement vis-à-vis de ses assurés (Article R 332-3 du Code des Assurances).

A l'actif du Bilan, la compagnie investit les primes reçues de manière à couvrir ses engagements.

La provision mathématique évolue au cours du temps, en fonction de potentiels versements successifs qui abondent l'épargne acquise (**nous supposons le contrat à prime unique**), et surtout de la revalorisation de l'épargne acquise selon un taux variable.

Ce taux de revalorisation est le même pour tous les assurés de la même génération (**nous supposons une seule génération d'assurés**), il dépendra du rendement dégagé par l'assureur grâce aux actifs placés en représentation de ses engagements.

Il est la somme d'un **taux technique**, qui constitue un plancher, et **d'une participation aux bénéfices**, variable, positive ou nulle.

Taux technique :

C'est à la souscription du contrat que l'assureur définit un taux minimum annuel de revalorisation de l'épargne qui s'appliquera à tous les assurés, sur toute la période de vie du contrat. Le taux ne peut excéder (Article A 132-1) :

- ✓ 75% du TME pour les contrats dont la durée maximale est inférieure à 8 ans
- ✓ $\text{Min}(3.5\%, 60\% * \text{TME})$ pour les contrats de durée supérieure ou égale à 8 ans

Où le TME représente le taux moyen des emprunts d'Etat à long terme calculé sur les six mois précédents la souscription.

Nous nous placerons dans le second cas.

Participation aux bénéfices :

Les règles de calcul de cette participation sont précisées par l'article A331-4 du Code des Assurances.

« Le montant minimal de la participation aux bénéfices à attribuer au titre d'un exercice est déterminé globalement à partir d'un compte de participation aux résultats ». Ce dernier compte ayant reçu :

- ✓ En **recettes** : « 85% du solde d'un compte financier comportant les éléments prévus à l'article A. 331-6 », soit la part du produit net des placements calculée suivant les règles mentionnées à l'article A. 331-7.

Ce solde s'exprime par « le produit du montant moyen au cours de l'exercice des provisions mathématiques ... par le taux de rendement des placements » (A 331-7)

Le montant des produits financiers affectés en recettes du compte de participation est donc calculé au prorata de la part des provisions mathématiques dans le passif de l'assureur.

Se rajoute également en recettes, le solde de la gestion technique, égal à la variation des provisions techniques avant revalorisation des contrats. En pratique, ce solde est l'opposé de la variation pour risque d'exigibilité.

✓ et, en **dépenses**, la participation de l'assureur au solde de gestion technique (A 331-4).

On définit la **participation aux bénéfices**, comme la différence positive entre la participation aux résultats, solde du compte précédent, et les intérêts versés au contrat selon le taux technique.

Le montant de la participation aux bénéfices peut être utilisé pour revaloriser les contrats au-delà du taux technique.

Néanmoins, le Code des Assurance autorise les assureurs à différer cette distribution, d'une durée maximale de 8 ans. Les bénéfices financiers sont alors mis en attente dans une provision, la Provision pour Participation aux Excédents.

Une telle provision permet le cas échéant de lisser le taux de revalorisation des contrats. Nous avons conscience que ce choix, distribution immédiate ou différée, n'est pas neutre pour les assurés, dans la mesure où les revenus distribués et incorporés aux provisions mathématiques capitalisent immédiatement à leur profit (« effet cliquet »), ce qui n'est pas le cas de ceux entrant dans la PPE.

Nous avons fait le choix dans la suite de distribuer immédiatement 100% de la participation aux bénéfices.

1.1.2. Le traitement des frais

Nous sommes bien entendu conscients de la présence de frais, sur versements pour financer les frais de gestion et les frais d'acquisition, et sur encours de manière annuelle.

Ces prélèvements ont un effet majeur dans l'équilibre du contrat d'épargne. Nous avons supposé dans l'analyse par simplicité, l'équilibre initial du bilan net des frais sur versements, et les frais sur encours à zéro, dans la dynamique du bilan.

La prise en compte de frais ne changerait pas les résultats de l'analyse qui se concentre sur la recherche d'une allocation d'actifs optimale, à niveau de frais donné et donc pour une structure de bilan connue.

1.1.3. La sortie du contrat

La sortie du contrat d'effectue par le décès ou le rachat du contrat avant terme. Ce dernier est possible, mais **nous avons supposé qu'il n'y avait aucun rachat anticipé dans notre modélisation (c'est-à-dire une maturité fixée à 8 ans)**, le comportement de rachat étant principalement déterminé par la compétitivité du contrat d'assurance au niveau des taux de marché et le niveau des taux constants étant supposé constant sur toute l'analyse.

1.2. Les règles applicables aux actifs de la compagnie

Outre les règles vues précédemment, le code des Assurances impose aux assureurs le respect d'une marge de solvabilité (point 1.4) et de certaines règles relatives à l'actif.

1.2.1. Règles relatives à la composition de l'actif

Afin de minimiser les risques portés par l'Assureur, le Code des Assurances a imposé des règles de composition et de dispersion du côté des actifs, ces règles allant dans le sens d'une gestion sécuritaire et saine des engagements de la compagnie.

Pour ce qui est des règles de composition de l'actif, la plus importante est celle limitant la part d'actions à 65% au plus du bilan, et celle de l'immobilier à 40% au plus (R 332-3).

Concernant la dispersion, la part des actifs provenant d'un même émetteur autre que celui d'un Etat de l'OCDE est limitée à 5%, et celle des actions d'une même société à 50% du capital de l'émetteur.

1.2.2. Règles de comptabilisation des Actifs

1.2.2.1. Règles comptables relatives aux actions (normes françaises et normes IFRS)

1.2.2.1.1. Provision pour Dépréciation Durable (PDD)

C'est une provision inscrite à l'actif, pour les titres en actions ou immobiliers, et qui introduit une décote de leur valeur comptable ligne à ligne.

La provision est déterminée selon une méthode prospective : différence entre le prix de revient et la valeur recouvrable à l'horizon de détention, estimée à partir d'un taux de rendement prudent correspondant à l'horizon de détention majoré d'une prime de risque. Pour les titres dont la cession est prévue à brève échéance (moins d'un an), la provision correspond à l'intégralité de la moins-value constatée.

Mécanisme : on définit la valeur de référence V_{ref} comme la valeur comptable de l'exercice précédent (c'est-à-dire le prix moyen d'achat – le montant de la PDD à $t-1$). La PDD est alors dotée de $(V_{ref} - \text{valeur de marché})$ dès lors que le prix de marché a présenté une décote de plus de 30% (situation exceptionnelle fin 2008, 20% sinon depuis) par rapport à la valeur de référence durant au moins 6 mois.

- ✓ Dans la pratique, on intègre un relatif rattrapage de l'actif d'ici à sa cession, reflétant une idée de valeur de recouvrement à un horizon de cession, c'est-à-dire qu'on ne dotera que l'écart $\max(0, V_{ref} - 130\%MtM_t)$ par exemple.
- ✓ Quelle règle pour la reprise ? La règle pratique veut que la reprise intervienne si la valeur de marché du titre passe au-dessus de 115% de la valeur PMA/120%.

Comme nous travaillerons des actifs de type indiciel ou panier, nous n'utiliserons pas cette provision, qui s'applique au niveau du titre, dans la suite de l'étude.

1.2.2.1.2. Provision pour Risque d'Exigibilité (PRE)

Cette provision ne touche que les actifs soumis au cadre R332-20. L'analyse est ici par bloc, et non plus ligne à ligne comme la PDD. Elle vise à provisionner en cas de moins - value latentes de la poche .Elle s'appliquera donc à notre cadre d'étude.

Cette provision inscrite au passif complète la PDD dans le sens où les cessions de titres dépréciés pourraient advenir plus tôt que prévu ou avec une moindre récupération qu'escomptée.

Ce risque de dépréciation étant jugé peu fréquent, ce n'est, depuis 2003, qu'un tiers de la moins value potentielle qui est à provisionner chaque année : une moins value globale doit donc perdurer pendant au moins 3 ans pour être provisionnée intégralement. Le mécanisme de dotation est donc le suivant

$$PRE_t = \inf \left[(VCA_t - MtM_t)^+, PRE_{t-1} + \frac{1}{3}(VCA_t - MtM_t)^+ \right]$$

où VCA est la valeur comptable des actifs R332-20, nette des PDD.

La PRE est reprise dès le premier euro. Par simplicité, nous provisionnerons 100% de la moins-value si nécessaire.

Ce mécanisme de PRE induit ainsi un impact lissé sur le résultat de la compagnie.

1.2.2.1.3.Synthèse du traitement comptable

Les compagnies d'assurance en France mènent leurs activités sous une double contrainte comptable. En effet, elles sont soumises à la fois aux dispositions du Code des Assurances et, pour la plupart d'entre elles, aux règles comptables IFRS. Nous mentionnerons, dans les deux cas, les principales règles concernant les investissements en actions.

- Normes françaises

Dans le cadre du Code des Assurances, les actions sont comptabilisées, comme règle générale, à leur coût historique. Les actions (qu'elles soient en direct ou détenues au travers d'OPCVM) sont soumises aux dispositions de l'article R332-20 selon les règles suivantes :

Comptabilisation en valeur historique

- ✓ Les revenus sont enregistrés par compte de résultat
- ✓ Provision pour dépréciation Durable (PDD) : dès lors que le prix de marché a présenté une décote de plus de 20% par rapport à la valeur de référence durant au moins 6 mois.
- ✓ Provision au Passif au niveau de tout l'actif R332-20 d'une PRE, si l'actif est en moins value latente globale

- Normes IFRS

Dans le cadre des normes internationales (IAS 39), les actions, qu'elles soient investies en direct ou via un OPCVM, seront comptabilisées à leur valeur de marché, soit en traitement AFS (impact de la plus ou moins value latente sur le capital) ou en trading (impact de la plus ou moins value latente d'abord sur le résultat puis sur le capital). Ci-joint, les principales caractéristiques en IAS 39.

Actif : Action	<i>Classe Trading</i>	<i>Classe AFS (Disponible à la vente)</i>
<i>Comptabilisation en valeur historique</i>	<i>NON, à sa valeur de marché. Les variations de valeur latentes affectent le Résultat.</i>	<i>NON, à sa valeur de marché Les variations de valeur latentes affectent les Fonds propres</i>
<i>Provisionnement des moins-values latentes</i>	<i>N/A</i>	<i>Moins-values latentes affectent les fonds propres</i>
<i>Provision pour Dépréciation (impairment)</i>	<i>N/A</i>	<i>Oui, la perte cumulée affichée sur les Fonds propres transite vers le Résultat. Règle de déclenchement: seulement si baisse significative ou bien prolongée en dessous de son prix de revient Ex: moins values latentes depuis plus de 6 mois OU BIEN > -20% depuis plus de 6 mois. Actions; non réversible, sauf en cas de vente.</i>

La refonte des IAS 39 vers les IFRS 9 fait disparaître la classe Disponible à la vente), les actions seraient principalement comptabilisées comme Trading, sauf choix en « Juste valeur par capitaux propres » avec ses conséquences irrévocables et absence d'impact sur le résultat des cessions.

1.2.2.2. Règles comptables relatives aux obligations

1.2.2.2.1. Réserve de capitalisation

Les placements des assureurs vie sont essentiellement constitués de placements de type obligataire. Ces titres en valeur de marché sont aussi soumis aux évolutions des courbes des taux.

Néanmoins, l'essentiel de ces placements est destiné à être conservé par l'assureur jusqu'à leur remboursement à leur valeur d'émission. Afin de ne pas inciter l'assureur à « jouer » les plus ou moins values susceptibles d'être réalisés au travers des mouvements de courbe de taux, le Code impose aux Assureurs de ne pas les distribuer et de constituer au Passif une réserve de capitalisation.

Cette provision rentre dans le calcul de la marge de solvabilité (considérée comme quasi fonds propres même si c'est bien une provision technique au sens du Code des Assurances. A noter que cette provision n'existe pas dans les normes IFRS.

Ce mécanisme ne sera pas développé ici, ayant décidé de ne pas introduire le risque de taux comme facteur de risque.

1.2.2.2.2. Synthèse du traitement comptable

Les compagnies d'assurance en France mènent leurs activités sous une double contrainte comptable. En effet, elles sont soumises à la fois aux dispositions du Code des Assurances et, pour la plupart d'entre elles, aux règles comptables IFRS. Nous mentionnerons, dans les deux cas, les principales règles concernant les investissements en obligations corporate (achat supposé en direct).

○ Normes françaises

Dans le cadre du Code des Assurances, les obligations sont comptabilisées, comme règle générale, à leur coût historique. En dehors de quelques cas particuliers (obligations détenues dans des OPCVM, des obligations callables, des obligations structurées...), les obligations sont soumises aux dispositions de l'article R332-19 selon les règles suivantes :

Comptabilisation en valeur historique

- ✓ Amortissement des surcotes-décotes (la différence entre le prix d'acquisition et la valeur de remboursement est amortie sur la durée de vie de l'actif)
- ✓ Les coupons obligataires ainsi que l'amortissement des surcotes-décotes sont enregistrés par compte de résultat
- ✓ Provision pour dépréciation Durable (PDD) : seul le risque de défaillance avéré est provisionné
- ✓ Pas de provisionnement des moins-values latentes
- ✓ Les plus ou moins-values réalisées sont portées à travers la réserve de capitalisation (pas d'impact par le compte de résultat)
- ✓ Les plus ou moins-values obligataires n'impactent pas la provision pour participation aux bénéfices

○ Normes IFRS

Le cadre comptable IFRS permet, en principe, l'enregistrement des obligations corporate sous trois formes différentes :

- ✓ Held to Maturity (HTM) : les obligations enregistrées en HTM sont comptabilisées au coût historique, avec amortissement des surcotes-décotes par compte de résultat. Les variations de valeur de marché de l'actif n'affectent ni le compte de résultat, ni les fonds propres. En cas de dépréciation forte et/ou durable, cette dépréciation doit être enregistrée par compte de résultat. Cette méthode de comptabilisation est très restrictive car elle exige le portage des obligations jusqu'à leur échéance et ne

permet aucune souplesse dans la gestion active des portefeuilles d'actifs. Pour cette raison, les obligations corporate, qui exigent une gestion active, ne sont généralement pas comptabilisées en HTM.

- ✓ Trading : les actifs sont enregistrés à leur valeur de marché. Toute variation du prix de marché est enregistrée par compte de résultat. Cette méthode de comptabilisation induit une forte volatilité du compte de résultat ce qui explique le fait qu'elle est rarement utilisée par les assureurs en France
- ✓ Available for Sale (AFS) : c'est la méthode habituellement utilisée par les assureurs en France pour les obligations corporate. Les actifs sont enregistrés en valeur de marché mais la variation de cette valeur impacte les capitaux propres au lieu d'impacter le compte de résultat. Les obligations enregistrées en AFS sont également soumises aux provisionnements pour dépréciation en cas d'évènement de crédit.

Enfin, il est important de noter que les modifications attendues dans les règles de comptabilisation IAS (normes IFRS 9) vont probablement permettre l'enregistrement des obligations corporate selon une méthode proche de celle imposée par le Code des Assurances (et proche de l'actuel HTM) sans pour autant pénaliser la vente des actifs avant échéance.

1.2.2.3. Quid de l'éligibilité des dérivés au vu du Code des Assurances ?

Les articles R332-45 à 48 précisent l'éligibilité des instruments à terme. Leur utilisation est soumise à des restrictions quantitatives et des règles de contrôles internes (valorisation et simulation de stress scénarios article R.332-58).

Stratégies d'achat autorisées

Objectifs	Stratégies	Position d'Exane
Couvrir des placements détenus ou à détenir (R332-45)	Achat de couverture au travers d'achat de puts	Le sous-jacent du dérivé est identique ou assimilable au sous-jacent de l'instrument et de montant au moins égal au montant notionnel de l'instrument
Optimiser le prix d'achat de placements prévus (R332-46)	Achat de calls	L'opération a pour objet de diminuer l'aléa des conditions de placement futur
Garantir le taux de rendement des placements (R332-47)	Achat d'instruments de couverture de taux	Le sous-jacent de l'instrument est identique ou assimilable à l'emprunt ou la dette détenue

Stratégies de vente très encadrées

Vendre une option précédemment acquise		
Vendre une option lorsqu'elle est achetée de façon simultanée une option similaire, à la différence du prix d'exercice (stratégies dites spread)		Call spread et put spread
Vendre une option d'achat liée à un placement à condition que le sous-jacent soit déjà un placement détenu		Vente de call

Il est important de garder ce cadre en tête dans le contexte de ce qui peut ou ne peut être implémenté.

Nous avons néanmoins choisi de ne pas contraindre l'analyse à ce cadre là.

1.3. Rappel des dispositions réglementaires applicables à la compagnie et au bilan étudié

1.3.1. Les capitaux propres et la marge de solvabilité (le cadre Solvabilité 1)

Le cadre de Solvabilité 1 donne, depuis les années 1970, une règle d'évaluation de fonds propres minimum afin de garantir le respect des engagements pris par l'assureur. Ce niveau de marge de solvabilité ne peut être inférieur à la marge définie par l'article R 334-13 du code des assurances.

Le principe est que cette marge ne dépend que du montant de production de l'assureur (que ce soit d'ailleurs en Assurance vie ou non vie) : par exemple en vie, la marge minimum est égale pour les contrats fonds en euro à 4% des provisions mathématiques corrigé d'un coefficient entre [0.85 et 1] pour tenir compte des engagements de réassurance;

En détail, le besoin de marge sera la somme des deux besoins de marge minimum **M1 et M2** suivants :

M1= 4% des Provisions Mathématiques*Max(PM nette Réass / PM brute; 85%)
1% des Provisions Mathématiques*Max(PM nette Réass / PM brute; 85%)
pour UC

M2=x% CSR. Max(CSR nets de réassurance / CSR bruts,50%)

- CSR= capitaux sous risque = capital garanti – PM
- x=0.3 si durée > 5 ans
- x=0.15 si durée comprise entre 3 et 5 ans
- X=0.1 si < 3ans

Pour faire face à cette marge, les éléments constitutifs de ce besoin en fonds propres sont :

- ✓ Le capital social
- ✓ Les emprunts pour fonds social
- ✓ Les réserves (réglementaires ou libres) yc réserve de capitalisation
- ✓ Les bénéfices reportés
- ✓ 50% des bénéfices futurs en vie
- ✓ Les plus values latentes sur la partie non obligataire de l'actif
- ✓ Les titres ou emprunts subordonnés (sous conditions)
- ✓ La réserve pour fonds de garantie

Il n'y a pas de lien entre le niveau de cette marge de solvabilité et la nature des actifs en représentations.

Ce besoin en fonds propres minimum est donc très loin de refléter le niveau de risque des actifs de la compagnie.

La mise en place d'un nouveau cadre européen, Solvabilité 2, remet ce principe en question. Il s'appuie sur une volonté bienveillante : inciter les assureurs à mieux connaître et gérer leurs risques.

En effet, le cadre actuel de Solvabilité I (datant des années 70) est controversé car le calcul des besoins en fonds propres tel que défini ne prend en compte ni les types de risques ni la qualité de leur gestion.

L'approche ainsi mise en avant par Solvabilité 2, est une approche Actif - Passif, basée sur une mesure économique ou valeur de marché du Bilan, plutôt que sur des mesures comptables existantes.

1.3.2. Le cadre de Solvabilité 2

1.3.2.1. Le projet Solvabilité II

1.3.2.1.1. Les trois piliers de la réforme et les avancées au début 2010

Les axes majeurs du développement de la Directive Solvabilité II concernent :

- Le développement d'une vision économique des actifs et des passifs d'assurance
- La convergence des pratiques au sein des Etats membres

Afin que les changements inhérents à cette réforme soient progressivement mis en place, il est prévu que l'adoption de la réforme se déroule dans le respect du processus dit de « Lamfallussy » :

- **Niveau 1** : la Directive Cadre définit les grands principes du projet de réforme et précise les choix politiques et les orientations économiques.
- **Niveau 2** : les mesures d'application spécifient des éléments plus techniques. Dans un souci d'adaptation du dispositif défini par la Directive Cadre, la Commission européenne est amenée à poser des règles plus précises formalisées dans des directives d'application ou des règlements européens.
- **Niveau 3** : des recommandations sont adoptées en vue d'une application convergente au sein de l'Union européenne. Ce niveau constitue une étape essentielle dans la mesure où il permet la mise en pratique des normes fixées aux deux précédents niveaux.
- **Niveau 4** : la vérification de la conformité des droits nationaux avec le droit européen et l'adaptation du dispositif en vigueur.

La réforme Solvabilité II constitue l'ensemble du corpus de règles ou recommandations figurant aux trois premiers niveaux du processus « Lamfallussy », le dernier niveau permettant l'amélioration du dispositif existant et un contrôle de la cohésion du dispositif au niveau communautaire.

Elle devrait entraîner dans le droit français un certain nombre de changements substantiels, tant au niveau du Code des assurances, du Code de la Sécurité Sociale que du Code de la mutualité. La transposition en droit national devrait se faire au moyen d'outils juridiques souples, telles que des positions ou des recommandations techniques de l'autorité de contrôle.

Il apparaît toutefois délicat à ce stade de préciser la forme que prendra le nouveau dispositif prudentiel.

La réforme est basée sur 3 piliers :

	Evaluer les besoins quantitatifs	Mettre en place un process de supervision	Organiser la communication financière
Objectif	Valorisation du bilan & Besoin en capital	Processus de surveillance harmonisé	Discipline de marché et communication
	Pilier 1	Pilier 2	Pilier 3
Moyens	Mise en place de standards homogènes pour la valorisation des actifs et passifs, et du capital requis (SCR et MCR)	Des exigences qualitatives pour assurer une bonne gouvernance et une bonne gestion des risques et du capital adéquat (contrôle interne, ERM, ORSA...)	Harmonisation / transparence des exigences en terme de communication, de manière à ce que le capital réglementaire et l'analyse qui en découle, soit comparable entre institutions.

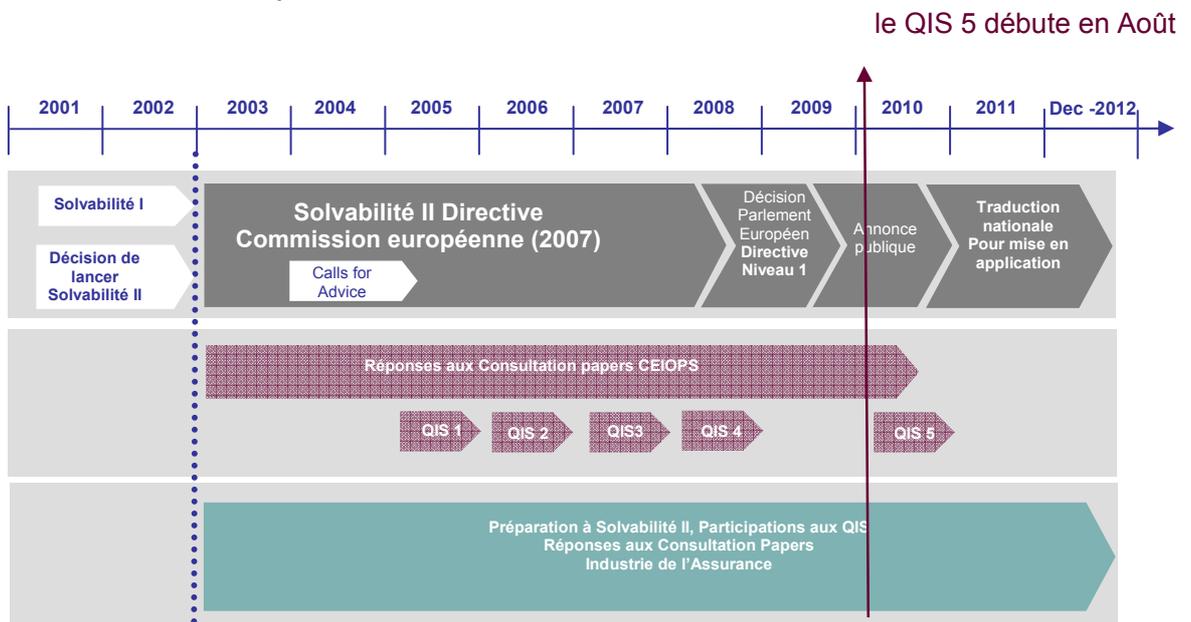
Le pilier 1 de la réforme est toujours en cours de développement. Les conseils finaux du CEIOPS évoquent une nouvelle calibration de la formule standard et le QIS 5 sera l'occasion d'évaluer les impacts en termes de capital réglementaire pour les assureurs.

C'est au niveau du Pilier 2 que sont intégrés les chantiers en cours sur le contrôle interne, l'ERM (Entreprise Risk Management), l'ORSA (Own Risk Solvency Assesment) une approche propre à la réforme et la mise en place Stress test qui viendraient compléter les mesures réglementaires.

Les exigences qualitatives et de contrôles introduits par le Pilier 2 visent à élargir le périmètre de la supervision prudentielle des assureurs.

Le Pilier 3 vient compléter le dispositif existant au niveau des Piliers 1 et 2. La transparence, essentielle à l'entretien de relations de confiance entre le régulateur et les assureurs apparaît comme le symbole fort de ce pilier. Ce pilier ne doit pas être pris comme une simple formalité de plus. C'est sur la base des informations transmises que l'autorité de contrôle pourra ou non prescrire des mesures correctives, et que l'assureur pourra défendre la pérennité de ses activités et de son système de contrôle des risques.

A quelle étape le projet est-il ?



À l'heure actuelle, la mise en œuvre de cette réforme s'accélère, principalement du fait d'un rythme plus soutenu de publication des Consultation Papers par le CEIOPS regroupant les représentants des autorités de contrôle des 30 états membres de l'Union européenne et de l'Espace économique européen.

Ainsi, après la publication du projet de Directive Cadre le 10 juillet 2007 et son adoption par le Parlement européen le 22 avril 2009, l'année 2009 a été marquée par trois vagues de consultations publiques sur les mesures de niveau 2 relatives aux applications fonctionnelles et techniques liées à la Directive Solvabilité II.

Un avis formel du CEIOPS a ainsi pu être fourni à la Commission européenne en octobre 2009 sur la base des retours effectués par les sociétés d'assurance et de réassurance, ainsi que les différents groupements professionnels intéressés par la réforme, notamment la FFSA, le GEMA, le CTIP, le Groupe Consultatif Actuariel Européen et l'Institut des Actuaire.

Un avis définitif, intégrant les retours afférents à la troisième vague de consultations publiques, a été publié fin janvier 2010 en vue d'une adoption par la Commission européenne en 2011.

Afin de mesurer les impacts de la réforme en vue d'en adapter éventuellement le contenu et les exigences, mais également dans le but d'inciter les entreprises d'assurance à en évaluer l'impact sur leur organisation et leur capital réglementaire, Solvabilité II s'est amplement appuyée sur la réalisation d'études quantitatives d'impact, les QIS. Une dernière étude, le QIS 5, prévue pour 2010, sera réalisée d'août à octobre pour les entreprises solo et se poursuivra jusqu'à mi-novembre pour les groupes. Les spécifications techniques finales à prendre en compte ont été publiées en juillet 2010, sur la base du projet présenté en mars par le CEIOPS à la Commission européenne et d'un premier draft publié par la Commission européenne le 15 Avril 2010.

Cette dernière étude qui aura pour objectif principal d'évaluer l'impact du calibrage des mesures de niveau 2 sur les entreprises d'assurance et de réassurance devrait rencontrer un fort succès à l'approche de la mise en application de la réforme, prévue fin octobre 2012.

1.3.2.2. En détail, vers quelle mesure du besoin en fonds propres minimum s'orienté-t-on?

1.3.2.2.1. Les principes de calcul

Le calcul de besoin en fonds propres minimum est basé sur une approche de type Value at Risk du bilan à horizon 1 an :

- avec un niveau de confiance de 90% pour le calcul du **MCR (Minimum Capital Requirement)**. Le Minimum de Capital Requis, le MCR, représente le niveau minimum de fonds propres en-dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique et pourra entraîner le retrait de l'agrément de l'entreprise.
- et un niveau de confiance de 99.5% pour le calcul du **SCR (Solvency Capital Requirement)**. C'est bien le niveau du SCR qui nous intéresse dans l'analyse de l'impact des dérivés sur la Marge de Solvabilité.

Les assureurs sont soumis à des règles d'application plutôt souples. A leur disposition :

- ✓ une Formule Standard (simplifiée ou non)
- ✓ la possibilité de mettre en valide un modèle interne (partiel ou global) en accord avec le régulateur

1.3.2.2.2. La formule standard

La **formule standard** est construite sur la base de modules correspondant aux différents risques identifiés : risques de marché, risques de souscription, risque de contrepartie et risque opérationnel.

Pour la majorité des risques à prendre en compte, le capital réglementaire est évalué par l'intermédiaire de la réalisation d'un choc instantané.

Le calcul du Capital Requis (SCR) par risque est en effet réalisé via une méthode en « Variation immédiate de la valeur nette actif-passif » suite à un choc pré-défini (reflétant le risque une VaR 1Y à 99.5%). Ex pour le risque de marché :

$$SCR_{Mkt, Risk i} = \max(\Delta NAV (Actif - Passif) | shock_i; 0)$$

Le capital final sera obtenu à la suite d'une agrégation des sous capitaux requis, au travers d'une matrice de corrélation.

L'objectif de la formule standard est de donner un résultat de capital réglementaire correct pour un maximum d'intervenants du marché européen dans un maximum de situations possibles. Par conséquent, ces chocs se doivent d'être représentatifs de la réalité des risques portés par les compagnies et les paramètres de la formule standard soigneusement calibrés.

1.3.2.2.3. Le modèle interne

Le **modèle interne** offre l'opportunité d'évaluer le capital réglementaire selon une approche plus en lien avec les risques effectivement portés par l'assureur, contrairement à la formule standard qui fait intervenir un calcul sur une base forfaitaire générale. Afin d'évaluer le capital permettant d'éviter la ruine à un an avec une probabilité supérieure à 99,5%, le modèle interne doit produire une distribution de la situation nette globale à horizon un an prenant en compte l'ensemble des risques matériels inhérents à la compagnie.

Le modèle interne s'appuie nécessairement sur un modèle de valorisation économique des passifs d'assurance. La méthode de calcul du Best Estimate la plus répandue consiste à réaliser des simulations de Monte Carlo en univers risque-neutre avec modification des probabilités de survenance des flux risqués et actualisation au taux sans risque.

Le schéma standard d'un modèle interne est alors le suivant :

- ✓ Construction à la date initiale $t=0$ du bilan économique avec valorisation des actifs en valeur de marché et valorisation du passif cohérente avec le marché.
- ✓ Génération d'un nombre important de simulations sur une année entre les dates $t=0$ et $t=1$ en se plaçant en univers réel.
- ✓ Pour chacun de ces scénarios, établissement du nouveau bilan économique en se plaçant à la date $t=1$. Le capital réglementaire à détenir à la date initiale est alors calculé de sorte que le quantile 0,5% de l'actif net en $t=1$ soit supérieur à 0.

Une des grandes difficultés est que ce schéma engendre la multiplication des calculs et peut générer des temps de traitements très importants.

Une piste pour contourner cette difficulté consiste à définir une approche alternative de valorisation du Best Estimate en utilisant l'approche par portefeuille répliquant, néanmoins peu parfait du fait de l'existence de participations aux bénéficiaires futurs.

Dans notre modèle simplifié, nous serons en mesure, de calculer une mesure standard ainsi qu'une VaR interne, propre à notre économie simplifiée, et compte tenu d'un nombre de facteurs de risque réduits.

1.3.2.3. Le traitement réglementaire détaillé, les orientations nouvelles suite aux Consultation papers et au QIS 5

Dans le cadre de notre modèle simplifié d'une compagnie d'assurance vie, nous nous concentrerons uniquement sur l'évaluation des risques de marché et l'impact de ce niveau minimum de fonds propres dans la gestion de l'allocation d'actifs et dans le pilotage de la marge de solvabilité.

1.3.2.3.1. Le traitement réglementaire du risque Action

Le risque Actions s'applique aux actifs reflétant un risque systémique (Beta de 1). Il concerne toutes les expositions directes et indirectes, et prend en compte les instruments de couverture (sous réserve d'une documentation précisée dans les règles des QIS).

Deux types de risque Actions sont identifiés (hors cadre de l'article 305 b : Directive 2003/41/EC ou actifs cantonnés avec duration moyenne supérieure à 12 ans, où le choc est forfaitaire à 22%)

- les actions dites globales : les actions listées de pays de l'OCDE et de l'Union Européenne
- les « autres » actions : toutes les expositions restantes qui ne peuvent être allouées au risque de crédit ou au risque actions globales, soit les actions émergentes, les actions non listées, les hedge funds et les investissements alternatifs comme les dérivés les parts de SPV, les futures etc...

Dans le QIS4, le calibrage de la charge de capital était de 32% pour les actions cotées et 45% pour les actions non cotées.

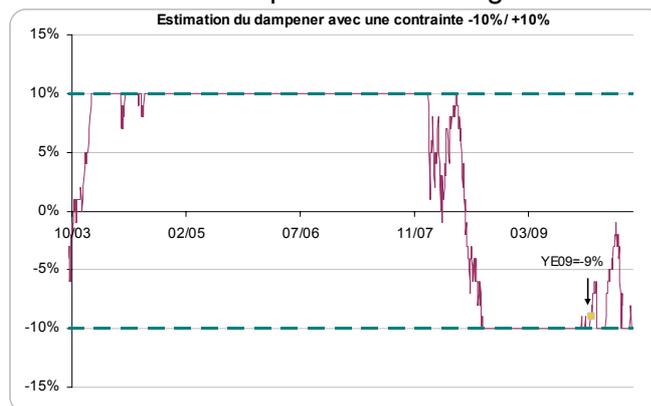
Le dernier avis du CEIOPS fait apparaître que la majorité des membres du CEIOPS est favorable à un passage de ces chocs à 45% pour les actions cotées et 55% pour les actions non cotées.

Il est également évoqué l'ajout d'un choc instantané sur la volatilité, pour les bilans sensible à ce paramètre : 50% à la hausse et -12% à la baisse, qui serait agrégé avec le risque Actions, au travers à nouveau d'une matrice de corrélation (75% entre la baisse des actions et la hausse de la volatilité, 0 entre la baisse des actions et la baisse de la volatilité).

En parallèle, le coefficient de corrélation entre les sous-modules taux et action passerait de 0 à 0,5 pour les bilans sensibles au risque de baisse des taux (0 sinon), ce qui a pour effet de réduire le bénéfice de diversification entre l'investissement obligataire et action.

Le premier draft du QIS 5 apparaît plus souple que prévu, les chocs centraux passant à respectivement 39% et 49% pour les Actions Globales et les Actions Autres (ces scénarios ont été confirmé lors de la publication du calibrage final).

Le mécanisme de dampener a été aussi confirmé : il s'agit d'un coefficient d'ajustement symétrique additif à appliquer aux scénarios centraux actions introduit de manière à rendre les décisions d'allocation d'actifs des assureurs plus contra-cycliques, et ajuster le niveau du choc Actions en fonction du niveau de marché (utilisation d'un mécanisme de moyenne mobile de 3 ans au lieu de 1 an précédemment), dans un intervalle de [-10% - +10%]. Dans le QIS 5, ce coefficient est fixé à -9%, soit un choc de 30% pour les Actions globales.



La volatilité implicite qui avait été maintenue dans le draft du QIS publié le 15 avril a été supprimée dans le calibrage final, pour des questions de simplification. Le choc avait repensé pour rester sur le principe contra-cyclique et ne pas vendre quand les niveaux de volatilité sont hauts, c'est-à-dire statistiquement souvent post crise, rajouter un besoin en capital important (dû à un choc de volatilité égal à 150% d'un niveau courant déjà élevé).

Le choc proposé était alors un choc additif de +10% et -3% du niveau courant. Ce choc s'appliquait sur toutes les expositions Actions, et était corrélé au risque Actions total avec un coefficient de 0.75.

Le QIS 5 a modifié la règle concernant la matrice de corrélation, et introduit une double matrice de corrélation, en fonction des sensibilités de son bilan à la baisse ou à la hausse des taux. Le capital global induit sera celui qui entraînera un capital le plus élevé, après application des deux matrices de corrélation. Ce qui a pour effet de clairement fortement réduire le pouvoir diversifiant côté Actifs, qui néanmoins pouvait être critiqué dans la mesure où lors des événements extrêmes, les actifs (hors taux) ont souvent tendance à se recorréler fortement.

Dans notre modélisation, nous traiterons uniquement du risque Actions globales, risque de volatilité non compris, via une exposition directe ou indirecte au travers d'options comme le seul risque représentatif de la contrainte réglementaire.

1.3.2.3.2. Le traitement réglementaire des Obligations Corporate

Nous ferons ici un bref rappel sur les principes réglementaires de Solvency II applicables aux obligations corporate. Contrairement aux règles prudentielles passées, ces principes sont basés sur la valeur de marché des actifs afin d'estimer la solvabilité économique des assureurs tout en tenant compte des impacts actif/passif.

Dans le cas d'une obligation, le régulateur identifie trois risques économiques :

1. Risque de taux :

- i. L'exigence en termes de capital est basée sur l'impact ALM le plus défavorable d'un mouvement parallèle à la hausse et à la baisse de la courbe des taux. Les chocs sur la courbe des taux sont de l'ordre de +55%/-40%.
- ii. L'impact spécifique de chaque obligation est difficile à estimer car le risque est mesuré de façon agrégée, net de l'effet du passif.
- iii. L'adossement parfait de l'actif au passif implique par conséquent une pondération nulle

2. Risque de volatilité du spread de l'émetteur :

La charge en capital est une fraction du notionnel, fonction des ratings de l'émetteur ainsi que de la durée des titres. Les recommandations du CEIOPS ont fortement évolué depuis la publication du QIS4 en 2008 ; le premier draft du QIS 5, sur la base de l'avis final du CEIOPS de janvier 2010 ont introduit une augmentation sensible de la charge en capital pour les obligations corporate.

$$SCR_{spread} = MtM_{Bond} \times \text{Poids}(\text{rating}, \text{duration})$$

Ci-dessous, voilà comment évoluerait, sans effet de diversification avec d'autres risques de marché ou d'autres lignes de métier, la consommation requise au titre du risque de spread de crédit (risque de marché) pour 100€ investis :

QIS4 (2008)

S&P -Rating	Duration (années)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
AA	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2	2.25	2.5
A	1.0	2.1	3.1	4.1	5.2	6.2	7.2	8.2	9.3	10.3
BBB	1.25	2.5	3.75	5	6.25	7.5	8.75	10	11.25	12.5
BB	3.4	6.8	10.2	13.6	17.0	20.3	23.7	27.1	27.1	27.1
B	5.6	11.2	16.8	22.4	28	33.6	33.6	33.6	33.6	33.6
CCC or lower	11.2	22.4	33.6	44.8	44.8	44.8	44.8	44.8	44.8	44.8
Non noté	2	4	6	8	8	8	8	8	8	8
Moyenne(*)	0.6	1.3	1.9	2.5	3.1	3.6	4.1	4.6	5.1	5.5

QIS5 (1er draft Avril 2010)

Rating (S&P)	Duration (années)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AA	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5	15
A	2.6	5.2	7.8	10.4	13.0	15.6	18.2	20.8	23.4	26.0
BBB	4.5	9	13.5	18	22.5	27	31.5	31.5	31.5	31.5
BB	8.4	16.8	25.2	33.6	42	42	42	42	42	42
B	16.2	32.4	48.6	56.7	56.7	56.7	56.7	56.7	56.7	56.7
CCC or lower	16.2	32.4	48.6	56.7	56.7	56.7	56.7	56.7	56.7	56.7
Non noté	5	10	15	20	25	30	35	35	35	35
Moyenne(*)	2.1	4.1	6.2	8.2	10.1	12.0	13.9	15.3	16.7	18.0

QIS5 (calibrage final 2010)

Rating (S&P)	Duration (années)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0.9	1.8	2.7	3.6	4.5	5.4	6.3	7.2	8.1	9
AA	1.1	2.2	3.3	4.4	5.5	6.6	7.7	8.8	9.9	11
A	1	2.8	4.2	5.6	7.0	8.4	9.8	11.2	12.6	14.0
BBB	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20	22.5	25
BB	4.5	9.0	13.5	18.0	23	27.0	31.5	36.0	40.5	45.0
B	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	60	60
CCC or lower	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	60	60
Non noté	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Moyenne(*)	1.3	2.7	4.0	5.3	6.7	8.0	9.4	10.7	12.0	13.3

Il faut ainsi noter que :

- i. Les dettes souveraines OCDE et EEE sont pondérées à 0, quel que soit le rating du pays.
- ii. A ce jour, la séniorité du titre obligataire, le secteur d'activité de l'émetteur ou la liquidité de l'actif ne sont pas pris en compte (les émetteurs financiers ne sont donc pas exonérés du risque de spread, et ils représentent une large part des portefeuilles d'assurance...!)
- iii. Il est à noter que les obligations sans rating public sont traitées favorablement par rapport aux titres notés High Yield.

Ce renforcement du coût des actifs de crédit par rapport au dernier QIS (analyse pré crise) touche l'ensemble des actifs de crédit (du fait de la suppression des caps de duration pour les actifs < BBB). Il reste néanmoins significatif pour les actifs de bas rating. Il n'y a plus de discrimination au sein des actifs < à BB. Ces actifs peuvent coûter bien plus cher qu'un risque Action à 39%.

Les actifs non notés restent moins touchés (ce calibrage venant d'une observation des spreads de crédit).

3. Risque de concentration : les expositions trop importantes sur un seul émetteur sont pénalisées en termes de capital.
 - i. Les seuils d'activation ainsi que les pondérations du risque dépendent exclusivement du rating de l'émetteur.
 - ii. Une fois encore, les dettes souveraines sont exemptes de charge due au risque de concentration. Elles ont toutefois un effet : elles ont un rôle de dilution sur l'assiette des encours concernés.

Il est important de noter que ces trois risques liés aux titres obligataires ne sont pas, à priori, totalement corrélés. Par conséquent, dans le cadre de Solvabilité 2, ils sont additionnés de manière quadratique ce qui implique :

$$SCR_{mkt} = \sqrt{SCR_{taux}^2 + SCR_{concentration}^2 + SCR_{spread}^2 + 2 \times 0.25 \times SCR_{spread} SCR_{taux}}$$

$$Capital_{Total} \leq Capital_{Taux} + Capital_{Spread} + Capital_{Concentration}$$

Dans notre modélisation nous supposons par la suite que les actifs de l'assureur sont parfaitement adossés en duration au passif et que les actifs obligataires sont bien diversifiés. Nous ne nous intéresserons ni au risque de taux, ni au risque de concentration.

Par conséquent, le risque de volatilité du spread sera considéré comme le seul risque représentatif de la contrainte réglementaire.

1.3.2.3.3. Le traitement agrégé des portefeuilles mixtes : actions et taux

Les risques de taux, actions, et crédit, s'ils sont calculés indépendamment les uns des autres, seront ensuite agrégés en racine via une matrice de corrélation. Cette matrice a considérablement évolué au cours des QIS.

En date du QIS 5, les niveaux de corrélation entre actifs sont supposés plutôt élevés dans le cas le plus courant ou le Bilan de la compagnie est sensible à une baisse des taux (cas où la duration du Passif est supérieure à celle de l'Actif):

- ✓ Un niveau maximum de 50% entre le risque de taux et le risque action
- ✓ Un niveau maximum de 75% entre le risque de crédit et le risque action
- ✓ Un niveau maximum de 50% entre le risque de taux et le risque crédit

+

Première partie :
Les principes de modélisation retenus

Chapitre 2

2. Une première vision des risques : Une modélisation simplifiée du cadre bilanciel ALM

Le cadre réglementaire qui s'applique au contrat est maintenant posé. Nous pouvons ainsi décrire nos différents choix de modélisation.

Nous ne considérerons qu'une seule génération de contrats de maturité fixe 8 ans, c'est-à-dire que nous ferons l'hypothèse que les contrats présents au bilan de l'assureur ont été commercialisés tous à la même date.

Le fait de ne choisir qu'une seule génération de contrats simplifie considérablement l'étude actif-passif, et notamment l'analyse des options implicites dans le bilan. Il fait notamment disparaître les phénomènes de mutualisation entre différentes cohortes d'assurés des rémunérations versées, et assigne un terme naturel qui est celui du contrat en question.

Nous nous proposons ici dans une première étape d'étudier les options implicites attachées à un tel contrat, dans le but dans une seconde étape de tester différentes stratégies d'allocations d'actifs.

Cette modélisation a souvent été utilisée dans une optique de mesure de couverture et de tarification du contrat. Ce n'est pas cet axe que nous étudierons, l'analyse qui suit doit s'entendre nette de tous frais.

Une lecture « optionnelle » du bilan des compagnies d'assurance-vie est commode, parce qu'elle permet, via une formule d'évaluation des options, de valoriser les différents postes du bilan.

Cette approche permet en outre d'étudier le comportement des actionnaires et des créanciers, ainsi que leur réaction à une modification de leur contrat.

Nous envisagerons d'abord le cas simplifié du bilan actif-passif en vision purement économique (2.1), puis les modèles développés pour représenter le risque des actifs financiers dits « risqués » (2.2), ensuite le programme d'optimisation de choix d'allocation d'actif (2.3) et pour finir, une revisite du bilan simplifié en intégrant une vision comptable (2.4).

2.1. Cas d'une revalorisation d'un contrat mono-générationnel mono-période (Modèle économique simplifié) (Cf Grosen / Jorgensen & Brys / de Varenne)

On se place dans le cadre de modélisation du bilan d'une compagnie d'assurance vie qui ne proposerait que des contrats de type euros (et non unités de compte), avec une prime unique, sans possibilité de rachat, assortis

- ✓ d'un rendement garanti r_g ,
- ✓ et d'un taux de participation aux bénéfices b (85% par exemple – pas de mise en réserve d'un exercice sur l'autre au travers du mécanisme de Provision pour Participation aux excédents)
- ✓ sur la base d'un investissement composé de deux actifs, un actif dit sans risque et un actif dit risqué, dont le taux de rendement total est supposé r_a .

Un point important : nous supposons que le risque de taux est parfaitement adossé entre l'actif et le passif. Les mouvements des taux n'auront donc aucun impact sur la valorisation de l'actif et du passif de la compagnie, ce qui revient en simplifiant à supposer une courbe des taux plate et constante dans l'analyse qui suit.

Le risque de placement est donc entièrement porté par l'assureur, à concurrence du taux minimum garanti par le contrat. Ces contrats constituent une grande majorité des produits d'assurance. La gestion actif-passif des compagnies d'assurance-vie peut ainsi s'apprécier, pour l'essentiel, à partir des caractéristiques contractuelles de ces produits. La rémunération d'un contrat en euros a deux composantes : le rendement garanti et la participation aux bénéfices financiers de l'assureur, deux variables d'ajustement.

2.1.1. Cas d'une revalorisation in fine de la provision mathématique (approche 1)

L'approche la plus simple (approche 1) consiste à se placer entre la date d'ouverture du contrat ($t=0$) et son terme T ($T=8$), en oubliant la vie de celui-ci aux dates intermédiaires.

Dans la pratique, cette vision du Bilan entre 0 et T est impossible. La distribution des participations aux bénéfices n'est pas réalisée en fin de contrat, mais elle s'effectue annuellement, et est définitivement acquise (effet cliquet). Nous regarderons dans un second temps (approche 2) comment les résultats sont modifiés dans le cas d'une revalorisation annuelle de provision mathématique, avec effet cliquet acquis à chaque fin de période.

De façon générique, on modélise le bilan de l'assureur de façon à présenter les différents cas de figure auxquels l'assuré et l'actionnaire seront peut être confrontés.

De façon générale, les actionnaires et les assurés d'une société ont des exigences différentes. En effet, hors les scénarios déficitaires très défavorables (et très peu probables), les assurés sont en général protégés par l'existence d'une revalorisation garantie de leur prime d'assurance. Ils préféreront plutôt des placements plus rentables, mais plus risqués. Au contraire, les actionnaires privilégieront la sécurité de leurs investissements, de manière à être en mesure de faire face à ses engagements.

Les créanciers de la compagnie (avant tout les assurés, ici exclusivement) ne sont pas protégés (même s'ils ont un privilège sur les actifs en représentation des engagements) par le droit de responsabilité limitée en cas de faillite du débiteur (même faible), qui lui a une responsabilité limitée au niveau des fonds propres. Dans le cas qui nous intéresse, la prime de risque demandée par les créanciers s'intègre bien dans la rémunération du contrat d'assurance.

Analysons comment le bilan de la compagnie va évoluer. Nous ferons l'hypothèse que la politique de distribution des bénéfices financiers est connue des assurés. Nous avons choisi de fixer le niveau de taux de participation à 85%, quelque soit le niveau de taux minimum garanti et l'évolution de l'actif de la compagnie. Il existe clairement une relation inverse entre le rendement garanti et la participation aux bénéfices de manière à ce que l'assuré qui aurait l'information, puisse arbitrer entre taux garanti et rémunération additionnelle afin de satisfaire sa prime de risque. En théorie, il existe un niveau du taux de participation qui rend le bilan équilibré (ou non arbitrageable). Nous n'avons pas développé cet axe. Nous sommes néanmoins conscients que notre modèle puisse être challengé de ce point de vue.

À la date $t = 0$ (correspondant à la date des décisions d'investissement, le bilan est résumé de façon synthétique de la façon suivante :

Actif ($t=0$)	Passif ($t=0$)	
A_0 : actifs	E_0 : Fonds propres = $(1 - \alpha) A_0$	Avec α qui représente le levier financier, c'est-à-dire la part de dette (provisions mathématiques) dans le passif. Nous prendrons, comme niveau de levier moyen, dans la partie quantitative de l'analyse, le niveau correspondant à la structure moyenne des bilans des Assureurs à fin 2007. (Cf « L'assurance française : Bilan à fin 2007 »)
	L_0 : Engagements = αA_0	

A_0 représente les actifs collectés nets de frais (prime nette). A la date $t=0$, L_0 doit bien représenter la valeur espérée des engagements futurs à maturité (avec un taux d'actualisation comptable posé, qui est différent du taux d'actualisation économique). Nous le supposons par construction, dans un cadre de taux constant.¹

¹ Sans créer de valeur artificielle (égale à l'écart d'actualisation entre taux garanti et taux de marché), il est possible de représenter le passif en reflétant bien sa sensibilité aux taux à chaque date t comme la double composante : un passif espéré représenté par un titre obligataire taux fixe de maturité T (au pair si les taux sont constants, égale à la prime nette collectée) + le passif réalisé entre 0 et t (les droits acquis aux assurés : le taux garanti versé et participation aux bénéfices).

A la date de maturité du contrat, le bilan évoluera de la manière suivante

Actif (T)	Passif (T)
A_T	E_T
	L_T

En moyenne, l'assuré attend un rendement à échéance du contrat qui sera la somme de :

- la participation garantie à l'initiation du contrat
- et une participation aux bénéfices réalisés sur la période

A l'échéance du contrat, à la date T , les provisions mathématiques L^*_T (c'est-à-dire l'engagement minimum de la compagnie envers l'assuré) sont revalorisées au taux garanti $L_0(1+r_g)^T$. Se rajoutera au Passif, une participation aux bénéfices, égale aux revenus financiers² provenant des actifs venant en représentation des provisions mathématiques déduite des intérêts crédités à ces provisions mathématiques, et ajustée du taux de participation, de la forme $(b^* \text{ Produits financiers} - \text{intérêts techniques})^+$. On trouve souvent plutôt l'écriture suivante $b^*(\text{Produits financiers} - \text{intérêts techniques})^+$. La première écriture est plus fidèle aux dispositions du Code des Assurances (Article A 331-4), c'est cette première que nous utiliserons donc.

On peut distinguer, selon la valeur A_T du portefeuille d'actifs de la compagnie en fin de période, trois situations pour l'assuré, résumée dans le tableau ci-dessous:

$A_T < L^*_T$		Situation 1 : L'entreprise est en faillite : elle ne peut pas, à priori, verser le taux minimum garanti	$L_T = A_T$ $E_T = 0$
$A_T > L^*_T$	$\alpha A_T < L^*_T$ La revalorisation des actifs venant en représentation des provisions mathématiques est strictement inférieure à la provision mathématique	Situation 2 : Le taux garanti ne peut être assuré par la seule valorisation des actifs en représentation des provisions mathématiques $b A_T$: l'entreprise sert le taux garanti en puisant dans ses réserves, mais ne peut verser la participation aux bénéfices.	$L_T = L^*_T$ $E_T = A_T - L^*_T > 0$
	$\alpha A_T \geq L^*_T$ La valorisation des actifs venant en représentation des provisions mathématiques est supérieure à la provision mathématique	Situation 3 : L'entreprise : – sert le taux garanti ; – peut distribuer ses résultats financiers pour un montant égal à $b(L_0 A_T / A_0 - L_0) - (L_0(1+r_g)^T - L_0)$	$L_T = L^*_T + L_0 * (b (A_T / A_0 - 1) - ((1+r_g)^T - 1))$ $E_T = A_T - L_T > 0$

- scénario 1 : la compagnie est en « faillite », et ne peut verser le taux garanti minimum promis.
- scénario 2 : la compagnie est juste équilibrée et versera aux assurés uniquement le taux garanti promis
- scénario 3 : la compagnie a réalisé des bénéfices, et versera donc une partie de ces bénéfices en plus du taux garanti promis

Ce qui donne, mathématiquement, l'évaluation suivante du niveau des Engagements à la fin de la période T :

$$L_T = \underbrace{(1+r_g)^T L_0}_{\text{minimum garanti}} + \underbrace{[br_a(T) - ((1+r_g)^T - 1)]^+ L_0}_{\text{participations aux bénéfices}} - \underbrace{[(1+r_g)^T - 1]L_0 - r_a(T)A_0 - E_0}_{\text{cas défavorable : ni les actifs ni les fonds propres n'arrivent à servir le tmg}}^+$$

² C'est-à-dire la somme des revenus encaissés, des plus ou moins values réalisés et des dotations ou reprises de PDD.

$$\text{avec } r_a(T) = \frac{A_T - A_0}{A_0}.$$

Appelons $r_g(T) = ((1 + r_g)^T - 1)$, le rendement garanti cumulé sur la période T pour simplifier les notations :

$$L_T = \underbrace{(1 + r_g(T))L_0}_{\text{minimum garanti}} + \underbrace{[br_a(T) - r_g(T)]^+ L_0}_{\text{participations aux bénéfices}} - \underbrace{[r_g(T)L_0 - r_a(T)A_0 - E_0]^+}_{\text{cas défavorable : ni les actifs ni les fonds propres n'arrivent à servir le tmg}}$$

Le rendement des assurés sur la période s'écrira donc :

$$r_L(T) = \frac{L_T - L_0}{L_0} = r_g(T) + b \left[(1 + r_a(T)) - \left(1 + \frac{r_g(T)}{b} \right) \right]^+ - \frac{A_0}{L_0} \left[\frac{L_0}{A_0} (1 + r_g(T)) - (1 + r_a(T)) \right]^+$$

On introduit deux niveaux critiques pour les rendements :

$$K_1 = \frac{L_0}{A_0} (1 + r_g(T))$$

et

$$K_2 = 1 + \frac{((1 + r_g)^T - 1)}{b} = 1 + \frac{r_g(T)}{b}$$

ainsi que les instruments optionnels européens calls et puts sur le sous-jacent $(1+r_a)$ de strikes associés respectivement à K_1 et K_2 et de maturité T :

$$C_1 = \text{Call}(1+r_a(t), K_1, T-t)$$

se lisant comme une option d'achat, call, sur l'actif $(1+r_a(t))$, de strike K_1 et de maturité résiduelle $(T-t)$

$$C_2 = \text{Call}(1+r_a(t), K_2, T-t)$$

$$P_1 = \text{Put}(1+r_a(t), K_1, T-t)$$

$$P_2 = \text{Put}(1+r_a(t), K_2, T-t)$$

Le rendement des assurés s'écrit ainsi de manière optionnelle :

$$r_L(T) = r_g(T) + b C_2 \left[(1 + r_a(T)), \left(1 + \frac{r_g(T)}{b} \right), 0 \right] - \frac{A_0}{L_0} P_1 \left[(1 + r_a(T)), \frac{L_0}{A_0} (1 + r_g(T)), 0 \right] \quad (1)$$

Le rendement des actionnaires se déduit aussi sur la période :

Notons que $K_1 \leq 1 + r_g(T) \leq K_2$ et rappelons la parité Call - Put à maturité des options pour C_1 et P_1

$$P_1(1 + r_a(T), K_1, 0) + (1 + r_a(T)) = C_1(1 + r_a(T), K_1, 0) + K_1$$

ou de façon synthétique

$$P_1 + (1 + r_a(T)) = C_1 + \frac{L_0}{A_0} (1 + r_g(T))$$

Pour l'actionnaire, on utilise le fait que les bilans aux dates 0 et T sont bien équilibrés :

$$A_0 = E_0 + L_0 \quad \text{et} \quad A_T = E_T + L_T$$

On aura donc en appliquant la relation Call - Put à C_2 et en écrivant $r_a(T)$ comme

$$r_a(T) = \frac{A_T}{A_0} - 1 = \frac{L_0}{A_0} r_L(T) + \frac{E_0}{A_0} r_E(T)$$

Le rendement de l'actionnaire égal à :

$$r_E(T) = \frac{E_T - E_0}{E_0} = r_a(T) + \underbrace{\frac{L_0}{E_0} \left[r_g(T) \left(\frac{1}{b} - 1 \right) + (1-b)C_2 - \left(P_2 - \frac{A_0}{L_0} P_1 \right) \right]}_{\substack{\text{rendement apporté par les primes} \\ \cong 15\% \text{Call-Put Spread, avec une participation de L/E}}} \quad (2.1)$$

Une autre manière de l'écrire, en appliquant la relation Call – Put non plus à C_2 mais à C_1 la relation suivante :

$$r_E(T) = -1 + \frac{A_0}{E_0} C_1 \left[(1+r_a(t)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(T)), 0 \right] - b \frac{L_0}{E_0} C_2 \left[(1+r_a(T)), \left(1 + \frac{r_g(T)}{b} \right), 0 \right] \quad (2.2)$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, ces relations peuvent s'écrire pour toute date $t < T$, et dans un univers où les taux sont constants (notre hypothèse centrale) comme des fonctions d'options européennes (implicitement donc il n'y a pas de possibilité de remboursement anticipé du contrat) :

$$r_L(t) = r_g(t) + b C_2 \left[(1+r_a(t)), \left(1 + \frac{r_g(t)}{b} \right), T-t \right] - \frac{A_0}{L_0} P_1 \left[(1+r_a(t)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(t)), T-t \right]$$

$$r_E(t) = -1 + \frac{A_0}{E_0} C_1 \left[(1+r_a(t)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(t)), T-t \right] - b \frac{L_0}{E_0} C_2 \left[(1+r_a(t)), \left(1 + \frac{r_g(t)}{b} \right), T-t \right]$$

Sous hypothèse que le sous-jacent risqué suit une loi lognormale de volatilité σ^3 , la valeur des options peut être déterminée par la formule de Black -Scholes :

$$C_1[S_t, K_t, T-t] = S_t N(d_1) - K_t e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$P_1[S_t, K_t, T-t] = K_t e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

$$\text{où } \begin{cases} d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K_t e^{-r(T-t)}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \\ N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{cases}$$

On rappelle ainsi que pour C_1 et P_1 (pour C_2 et P_2 , l'écriture serait équivalente) :

$$C_1 \left[(1+r_a(t)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(t)), T-t \right] = (1+r_a(t))N(d_1) - \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(t))e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$P_1 \left[(1+r_a(t)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(t)), T-t \right] = \frac{L_0}{A_0} (1+r_g(t))e^{-r(T-t)}N(-d_2) - (1+r_a(t))N(-d_1)$$

³ Les autres hypothèses sont de portée moins forte : taux d'intérêt constant entre les instants 0 et T, date d'échéance des options, volatilité du titre supposée constante dans le temps et sous-jacent ne versant aucun dividende ou coupon sur la durée du contrat.

$$d_1 = \frac{\ln \left(\frac{(1+r_a(t))}{\frac{L_0}{A_0}(1+r_g(t))e^{r(T-t)}} \right) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Conclusion sur la revalorisation à maturité des engagements :

Cette vision simplifiée, pour un contrat type d'assurance vie en euro, donne ainsi une lecture optionnelle du bilan soit en condensé, les expressions respectivement des rendements :

- ✓ L'actionnaire a un rendement qui s'écrit comme (15%Call-Put Spread) ou comme (-1+100%Call-85% Call) :

$$r_E(T) = -1 + \frac{A_0}{E_0} C \left[(1+r_a(T), \underbrace{\frac{L_0}{A_0}(1+r_g(T))}_{\text{Call sur l'Actif de strike } L_0/A_0*(1+r_g(T))}, 0) \right] - b \frac{L_0}{E_0} C \left[(1+r_a(T)), \underbrace{\left(1 + \frac{r_g(T)}{b}\right)}_{\text{Call sur l'Actif de strike } (1+r_g(T)/b)}, 0 \right]$$

Responsabilité limitée des actionnaires
Versement de la participation au bénéfice

- ✓ L'assuré a quant à lui, une partie fixe additionnée d'une participation (ici 85%) de type ZC+85% Call-Put :

$$r_L(T) = r_g(T) + bC_2 \left[(1+r_a(T)), \underbrace{\left(1 + \frac{r_g(T)}{b}\right)}_{\text{Participation au bénéfice}}, 0 \right] - \frac{A_0}{L_0} P_1 \left[(1+r_a(T)), \underbrace{\frac{L_0}{A_0}(1+r_g(T))}_{\text{Put sur l'Actif de strike } L_0/A_0*(1+r_g(T))}, 0 \right]$$

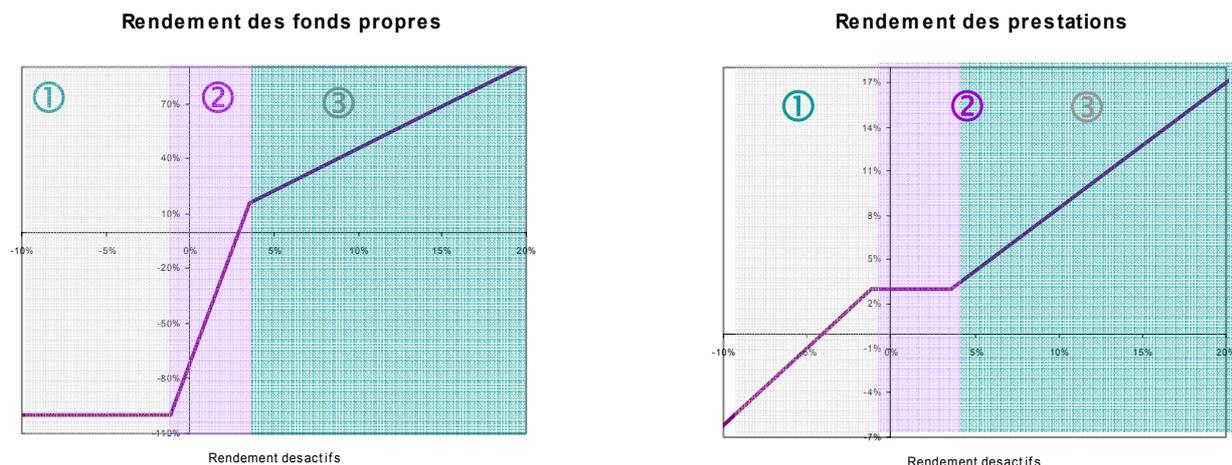
Participation au bénéfice
Évènement de défaut de l'actif

On a ici fait l'hypothèse que les assurés renoncent au *tmg* dans les cas les plus défavorables, et prennent le risque sur tout leur capital, comme les actionnaires, qui ont une responsabilité limitée à hauteur des seuls fonds propres engagés

Le mécanisme caché est la solvabilité, nécessaire à la continuité des activités. La modélisation des scénarios défavorables reste très limitée :

- Responsabilité limitée des actionnaires (put spread au lieu d'un put)
- Possibilité pour les assurés de perdre le rendement garanti peu réaliste (notamment du fait de l'existence de fonds de garantie des assureurs ou de l'Etat qui très certainement viendrait se substituer en cas de faillite...)

Représentation graphique des rendements attendus, pour l'actionnaire et les assurés :



Deux remarques intéressantes même si elles ne sont pas directement le sujet de ce mémoire :

1. **une tarification des frais de gestion** : nous avons supposé que l'ensemble des flux échangés était net de frais et que le bilan initial était parfaitement équilibré. L'assureur a la main sur son allocation d'actifs : investir tout l'actif en actif sans risque favorise l'actionnaire au dépend des assurés. Aussi, une manière simple de calculer un niveau de frais optimal, qui serait fortement dépendant de l'allocation des actifs en représentation des engagements, serait de partir d'un bilan non équilibré et d'en déduire le niveau de frais (sur encours, sur prime ou par rétention de la participation aux bénéfices, selon le mode choisi) qui ex-ante équilibre le bilan net de frais, et évite ainsi pour l'actionnaire un échange « gratuit » d'options...

Valeur des fonds propres en moyenne nette des frais $\overline{E_0} = \text{Capital initial}$

Valeur initiale du contrat moyenne nette des frais $\overline{L_0} = \text{Prime versée}$

Ces conditions ressemblent à des conditions de non arbitrage sur un marché où seraient échangés ce contrat, et les actifs sur lequel il porte.

2. **une mesure du niveau d'équilibre (d'arbitrage) du taux de participation** : de la même manière, il est facile d'écrire E_t comme la somme de deux options d'achat européennes

$$E(t) = A_0 C \left[(1 + r_a), \frac{L_0}{A_0} (1 + r_g(t)) \right] - b L_0 C \left[(1 + r_a), \left(1 + \frac{r_g(t)}{b} \right) \right]$$

A partir de cette évaluation synthétique optionnelle, on peut en déduire pour $t=0$, c'est-à-dire au moment où la compagnie fait ses choix de contrats et de placements, le taux de participation aux bénéfices financiers d'équilibre b^* qui égalise $E(0)=E_0$. Cette lecture du bilan a ainsi l'avantage de pouvoir valoriser à tout moment la valeur des fonds propres et d'en déduire b^* comme une fonction du levier α , du taux garanti r_g , du niveau des taux r et de la volatilité de l'actif général.

Ce n'est pas l'objet de notre analyse. Nous posons le modèle d'évaluation du bilan à une date donnée afin d'avoir un cadre pertinent d'évaluation des stratégies d'allocations d'actifs, les questions de tarification du contrat ayant été validées à l'initiation du bilan, par un bilan en ligne avec le contrat étudié, et le niveau de fonds propres moyens observés (avec surplus potentiels, provenant des plus values latentes par exemple).

⁴ Cette moyenne se calcule sous la probabilité risque neutre de l'actif. Or l'équilibre du contrat s'apprécie habituellement sous la probabilité historique.

2.1.2. Cas d'une revalorisation annuelle de la provision mathématique (approche 2)

Dans la pratique, cette vision du Bilan entre 0 et T est irréaliste. La distribution des participations aux bénéfices n'est pas réalisée en fin de contrat, mais elle s'effectue annuellement, à la fin de chaque exercice comptable, et est définitivement acquise (effet cliquet).

En outre, les assureurs ont la possibilité dans le code des Assurances de différer l'incorporation des bénéfices dégagés aux provisions mathématiques au cours d'un exercice en utilisant la provision pour participation aux excédents (PPE), au maximum sur une durée de 8 années. Nous négligerons cette possibilité au sein de cette étude.

Une première analyse simplifiée consiste à ne pas valoriser le bilan à maturité, mais à le faire dans un premier temps simplement à la fin du premier exercice comptable, à $t = 1$ an. Nous regarderons donc comment l'écriture du Bilan sera modifiée dans le cas d'une revalorisation annuelle de provision mathématique à la fin de la première période.

La méthode de construction des rendements des actionnaires et des prestations est identique à celle décrite précédemment, l'horizon d'analyse étant de 1 an, et le taux garanti annuel le taux r_g .

Ce qui donne, mathématiquement, l'évaluation suivante du niveau des Engagements à la fin de la période 1, supposant l'ensemble des paramètres du bilan connus en (0) :

$$L_1 = \underbrace{(1+r_g)}_{\text{minimum garanti}} L_0 + \underbrace{L_0 [br_a(1) - r_g]}_{\text{participations aux bénéfices}} - \underbrace{[r_g L_0 - r_a(1)A_0 - E_0]}_{\text{cas défavorable : ni les actifs ni les fonds propres n'arrivent à servir le tmg}}$$

avec $r_a(1) = \frac{A_1 - A_0}{A_0}$

Et le rendement des assurés entre les dates 0 et 1 s'écrira donc :

$$r_L(1) = \frac{L_1 - L_0}{L_0} = r_g + bC_2 \left[(1+r_a(1)), (1+\frac{r_g}{b}), 0 \right] - \frac{A_0}{L_0} P_1 \left[(1+r_a(1)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g), 0 \right]$$

Comme précédemment, deux niveaux critiques pour les rendements apparaissent:

$$K_1 = \frac{L_0}{A_0} (1+r_g) \text{ et } K_2 = 1 + \frac{r_g}{b}$$

ainsi que les instruments optionnels européens calls et puts sur le sous-jacent $(1+r_a)$ de strikes associés respectivement à K_1 et K_2 et de maturité 1 an :

$C_1 = \text{Call}(1+r_a, K_1, 1)$, se lisant comme une option Call sur l'actif $1+r_a$, de strike K_1 et de maturité 1 an

$C_2 = \text{Call}(1+r_a, K_2, 1)$

$P_1 = \text{Put}(1+r_a, K_1, 1)$

$P_2 = \text{Put}(1+r_a, K_2, 1)$

De la même manière, le rendement des actionnaires entre 0 et 1 s'écrit :

$$r_E(1) = -1 + \frac{A_0}{E_0} C \left[(1+r_a(1)), \frac{L_0}{A_0} (1+r_g), 0 \right] - b \frac{L_0}{E_0} C \left[(1+r_a), (1+\frac{r_g}{b}), 0 \right]$$

Cette première vision, très simplifiée réduit l'horizon d'analyse à 1 an, en ligne avec l'horizon comptable.

Nous étendrons sur cette base notre cadre de modélisation à une version plus complète (Chapitre 3) de revalorisation annuelle de la participation bénéficiaire dans un format multi-périodes. La valeur du contrat à maturité sera donc la combinaison des valorisations intermédiaires du contrat.

2.2. Modèle d'actif utilisé pour représenter le risque à l'actif de la compagnie

Le portefeuille d'Actif de la compagnie sera vu comme une combinaison $(1-w, w)$ d'actifs sans risque (un portefeuille d'obligations gouvernementales) et d'actifs dits « risqués ».

Nous avons supposé que le risque de taux du bilan était parfaitement adossé entre actifs et passifs, afin de nous concentrer sur les risques de base suivants :

- ✓ Risque actions,
- ✓ Risque de crédit présents dans une obligation corporate et dans un panier d'obligations : seront pris en compte les deux risques principaux qui régissent un titre obligataire (ou un panier de titres) en dehors du risque de taux, le risque de marché, représenté par la variation du spread de crédit, et le risque de défaillance de l'émetteur.

Nous modéliserons ces « actifs de base » (action et crédit), grâce à une modélisation stochastique qui se veut partir des observations de marché pour le choix de la modélisation et le calibrage des paramètres, et cohérente dans le cadre d'un investissement sous forme d'un:

- ✓ Indice Action, selon une dynamique de type Black & Scholes (distribution log normale)
- ✓ Panier d'obligations crédit: modélisation KMV (distribution log-normale du prix de l'obligation sur le régime sans défaut + occurrence de défauts)

Tout au long de ce mémoire, nous faisons le choix de ne pas introduire l'effet de la variation du taux d'intérêt d'un point de vue ALM. Cette problématique a fait l'objet de développements, et ce sont les autres facteurs de risque (action et crédit) qui nous occupent.

Pour ce faire, nous choisirons donc de garder constant le niveau des taux.

Nous introduirons dans un second temps des actifs dérivés de ces actifs de base (principalement sur le sous-jacent Action) afin de mesurer l'apport de la convexité générée par ces stratégies sur un bilan d'assureur.

2.2.1. Modélisation d'un indice Action

La dynamique de l'indice Action sera donc la suivante : l'indice suit un mouvement brownien géométrique, de volatilité σ et d'espérance (taux + prime de risque) de diffusion suivante dans un cadre continu :

$$\begin{cases} S_{t=0} = S_0 \\ \frac{dS_t}{S_t} = \log(r_t + \mu)dt + \sigma^S dW^{S_t} \end{cases}$$

où dW^{S_t} un mouvement brownien géométrique d'espérance 0 et de variance dt sous la mesure de probabilité historique P :

Ce cadre de modélisation (inscrit à l'actif de Black & Scholes en 1973, mais auquel Merton a largement contribué *Journal of Political Economy* n°81, 1973) suppose les hypothèses suivantes :

- Il n'y a aucune restriction sur les ventes à découvert.
- Il n'y a pas de frais de transactions. Tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
- Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé.
- Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
- Le marché fonctionne en continu.
- Le taux sans risque, r_t , est constant (r) et fixe quelque soit la maturité du produit dérivé.

Nous supposons que les dividendes sont inclus dans la prime de risque, de manière continue et non discrétisée, et ainsi réinvestis. Nous avons fait le choix de rester sous une probabilité historique, d'où la présence d'une prime de risque μ .

2.2.1.1. Implémentation de la diffusion relative au risque Action

Entre deux éventuels dividendes discrets, l'équation de diffusion de Black & Scholes s'intègre (le célèbre lemme d' Itô), ce qui permet calculer le processus aux seules dates d'intérêt, $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_N = T$

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} \times (1 + drift)^{t_i - t_{i-1}} e^{-\frac{1}{2}\sigma_s^2(t_i - t_{i-1}) + \sigma_s(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})}$$

Numériquement, il suffit donc de simuler l'innovation gaussienne du processus via

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = \sqrt{t_i - t_{i-1}} \times X_i$$

où (X_1, X_2, \dots, X_N) est un ensemble de N réalisations i.i.d. normales centrées réduites.

Dans le cas de sous-jacents multiples, une matrice de corrélation entre les innovations de chaque sous-jacent est donnée : une factorisation de Cholesky serait alors utilisée pour simuler des processus respectant cette contrainte.

2.2.1.2. Indicateurs rendement / risque utilisés

Les hypothèses que nous avons utilisées en termes de calibrations sont fidèles à une observation de marché.

La modélisation doit rendre compte de techniques d'analyse en ligne avec celles utilisés en pratique :

- un calcul des rendements plutôt sous format arithmétique : $\frac{S_t - S_{t-1}}{S_t}$
- un calcul de risque (volatilité sur une trajectoire) plutôt logarithmique

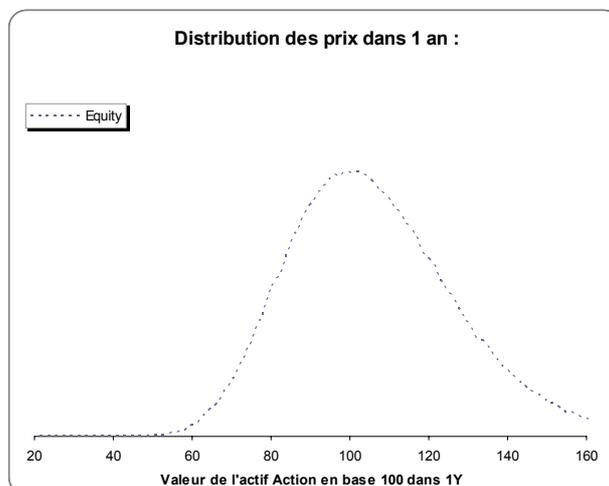
Calculer une performance à partir des performances actuarielles, dans le cadre de la dynamique telle qu'explicitée fournit un indicateur biaisé.

Pour obtenir des indicateurs non biaisés, l'observation des rendements doit se faire de la manière suivante (voir Annexe 1 pour le détail):

- Rendement cumulé annualisé = $\left(\frac{S_{t_j}}{S_0} \right)^{\frac{1}{t_j - t_0}} - 1 = r + \mu$
- Ecart - type du rendement cumulé annualisé = $\frac{1}{\sqrt{t_j - t_0}} \text{EC} \left[\ln \left(\frac{S_{t_j}}{S_{t_0}} \right) \right] = \sigma$

emple d'une diffusion lognormale à 1 an des rendements de l'indice

Prenons une prime de risque égale à 4.5%, une volatilité de 30% et un niveau des taux de 3.5% :



2.2.2. Modélisation d'un portefeuille d'Obligations Corporate

Moins discutée dans la littérature que la modélisation du risque Actions, la modélisation des obligations corporate présente néanmoins un intérêt majeur à la lumière de l'importance de cette classe d'actifs au sein de l'ensemble des actifs des assureurs-vie.

En effet, d'après les statistiques de 2008, 70% des investissements des assureurs français étaient des titres obligataires et plus de 50% de cette poche obligataire était constituée d'obligations d'entreprise ou corporates (yc financières, très représentées).

Il est à noter que le contexte de taux longs bas a favorisé l'augmentation de la proportion d'obligations corporate qui a été utilisée comme première source de rendement additionnel par les assureurs en France, notamment en 2009.

Les obligations corporate sont par ailleurs soumises à des traitements comptables (French GAAP, IFRS) et règlementaires particuliers que nous avons brièvement présentés en première partie afin mettre en perspective le contexte du travail de modélisation et les résultats obtenus.

Pour modéliser les obligations corporate nous considérerons, dans un premier temps, le risque de spread et le risque de défaut d'un unique titre obligataire. Nous généraliserons ensuite cette modélisation à un panier obligataire.

En annexes, vous trouverez l'ensemble des démonstrations ainsi que tous les éléments de calibration.

2.2.2.1. Le modèle choisi pour un titre unique obligataire

La dynamique du prix B du titre obligataire sera de la forme synthétique suivante, sur la base de deux régimes :

- ✓ le premier est le régime de non défaut, et donc le risque de spread
- ✓ le second est le régime de défaut, ou le risque de défaut de l'émetteur

$$\frac{B_t}{B_0} = (1+y)^t \times M(Z) \times (1-D(F)) + R \times D(F)$$

2.2.2.1.1. Le risque de spread

Ce 1^{er} régime est caractérisé par les variables suivantes :

- Rendement de l'obligation : $y=r + \text{spread}$, c'est le rendement attendu hors défaut
- Risque de l'obligation $M(Z)$: risque de marché supposé log-normal, fonction du facteur de risque Z avec w comme paramètre de la volatilité
- Pas de défaut

Quelle forme prend $M(Z)$?

Considérons un **ZC risqué de nominal 1** et d'échéance T , et son évolution entre les dates t et $t+\theta \leq T$, régie par le seul risque de spread s , le taux d'intérêt de référence r étant supposé fixé.

$$B_t = e^{-(r+s_t)(T-t)}$$

$$B_{t+\theta} = e^{-(r+s_{t+\theta})(T-t-\theta)} \quad (\text{hors défaut}),$$

avec r et s étant les formes continues du taux et du spread.

Supposons le spread $s_{t+\theta}$ **gaussien**, de moyenne $m_{t,\theta}$ et de variance $\sigma_{t,\theta}^2$.

Hors déformation par les défauts, il faut que, sous probabilité historique :

$$E[B_{t+\theta}] = e^{-(r+s_t)(T-t-\theta)} = B_t e^{\theta(r+s_t)},$$

ce qui impose la relation suivante entre les paramètres :

$$m_{t,\theta} = s_t + \frac{1}{2} \sigma_{t,\theta}^2 (T-t-\theta)$$

D'où, à chaque date t , à partir de l'observation du spread s_t et d'un niveau pour $\sigma_{t,\theta}^2$, variance du spread de l'obligation pour la période $[t, t+\theta]$, on en déduit $s_{t+\theta}$ et $B_{t+\theta}$.

On a donc de façon littérale la forme suivante pour un titre hors défaut :

$$B_{t+\theta} = B_t \times e^{\theta(r+s_t)} \times e^{(T-t-\theta)\sigma_{t,\theta}Z - (T-t-\theta)^2\sigma_{t,\theta}^2/2}$$

$$B_{t+\theta} = B_t \times \underbrace{e^{\theta(r+s_t)}}_{"(1+y)^\theta"} \times \underbrace{e^{(T-t-\theta)\sigma_{t,\theta}Z - (T-t-\theta)^2\sigma_{t,\theta}^2/2}}_{"M(Z)=e^{vZ-v^2/2}"}$$

où $v = v_{t,\theta,T} = (T-t-\theta)\sigma_{t,\theta}$ est l'écart-type de $\ln\left[\frac{B_{t+\theta}}{B_t}\right]$ quand on l'explique par le seul risque de spread.

ou bien entre 0 et t :

$$B_t = B_0 \times \underbrace{e^{t(r+s_t)}}_{"(1+y)^t"} \times \underbrace{e^{(T-t)\sigma_{0,t}Z - (T-t)^2\sigma_{0,t}^2/2}}_{"M(Z)=e^{vZ-v^2/2}"}$$

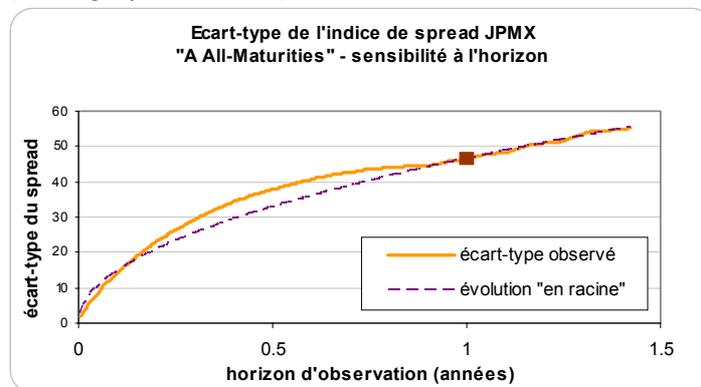
où $v=(T-t)\sigma_{0,t}$ l'écart-type de $\ln\left[\frac{B_t}{B_0}\right]$.

Au bilan, le premier régime est caractérisé par :

- ✓ Une forme log-normale de B , hors défaut
- ✓ Un lien entre la volatilité du titre B et la duration (T-t)

Quelle forme choisir pour la structure de volatilité ?

Sur une base statistique, l'écart-type du spread se comporte selon : $\sigma_{t,\theta} = q\theta^\alpha$ et $\alpha = 0.5$ (Cf Annexe), le facteur q étant relatif à la classe de rating de l'émetteur. La duration du titre impacte peu la volatilité du spread (hors pour les classes de risque High yield, où la probabilité de défaut est élevée à court terme).



On aura ainsi une fonction de volatilité de l'indice obligataire de la forme suivante :

$$v_{t,\theta,T} = (T-t-\theta) \times q_{rating,duration} \times \sqrt{\theta}$$

Nous pouvons isoler le risque de spread dans notre modélisation :

$$\ln\left[\frac{B_{t+\theta}}{B_t}\right] = -(T-t-\theta)(r_{t+\theta} + s_{t+\theta}) + (T-t)(r_t + s_t)$$

$$= \underbrace{-\Delta r \times (T-t-\theta) + \theta r_t}_{\text{log-rendement d'une oblig. sans risque}} + \underbrace{-\Delta s \times (T-t-\theta) + \theta s_t}_{\text{risque de spread}}$$

Le risque de taux peut être neutralisé en supposant r constant ($\Delta r=0$) et en calibrant la volatilité v sur les seules variations de spread historique .

Nous vérifions qu'une obligation sans risque a un spread nul à toute date, i.e. $s_t=0$

et $\sigma=0$. Nous trouvons bien dans ce cas : $\ln\left[\frac{B_{t+\theta}}{B_t}\right] = \theta r_t$.

2.2.2.1.2. Le risque de défaut (une seule contrepartie)

Pour un émetteur donné, nous noterons la probabilité de défaut p , l'événement de défaut étant binaire.

Nous nous plaçons dans un cadre de type Merton avec:

- C : facteur gaussien de la qualité de crédit du titre obligataire : s'il est trop bas, il y a défaut, et l'investisseur récupère instantanément R sur le nominal de son investissement (R supposé constant à ce stade).

$$\text{défaut de l'émetteur} \Leftrightarrow C \leq N^{-1}(p)$$

$$\Leftrightarrow D=1 \text{ avec } D = 1_{C \leq N^{-1}(p)} \text{ (on retrouve bien } E(D)=p)$$

- Z : facteur gaussien de du mark-to-market du titre obligataire : on le suppose corrélé, avec un coefficient de corrélation β , avec le facteur C précédent

$$Z = \beta C + \sqrt{1 - \beta^2} U, \text{ U et C} \sim N(0,1)$$

En mettant bout à bout toutes ces hypothèses :

- ✓ le régime lognormal de B_t/B_0 de variance w et de moyenne $(1+y)$,
- ✓ le niveau de recouvrement R de B_t/B_0 en cas de défaut
- ✓ le facteur Z qui régit B_t hors défaut corrélé avec la qualité de crédit

L'évolution de l'obligation entre 0 et t devient

$$B_t = B_0 \left[(1+y)^t \underbrace{e^{\frac{wZ - w^2}{2}}}_{M(Z)} \times g \times (1 - D(C)) + R \times D(C) \right]$$

Le paramètre β étant difficilement mesurable, pour la suite, on fera l'hypothèse que $\beta=100\%$:

Nous obtenons alors la dynamique suivante pour le titre B_t :

$$B_t = B_0 \left[(1+y)^t e^{\frac{wZ - w^2}{2}} \times g \times 1_{Z > N^{-1}(p)} + R \times 1_{Z \leq N^{-1}(p)} \right]$$

Et observons qu'il existe un spread limite au-delà duquel l'entreprise fait défaut. Nous remarquerons également que nous avons introduit deux nouveaux paramètres g et w , avec $w \neq v$ et $g \neq 1$.

- ✓ En effet, le spread de crédit est un spread sous hypothèse de non défaut : il

faut donc que $E \left[\frac{B_t}{B_0} \mid Z > N^{-1}(p) \right] = (1+y)^t$, ce qui aboutit, après calcul, à

$$g = \frac{1-p}{N(w - N^{-1}(p))}$$

Notons qu'alors on retrouve bien le rendement attendu :

$$E \left[\frac{B_t}{B_0} \right] = (1+y)^t (1-p) + Rp.$$

- ✓ Par ailleurs, v que nous avons estimé sur base statistique est celui d'un indice de spreads et, compte tenu de la diversification interne à l'indice, il a tout lieu d'être plus faible que la volatilité w du spread d'un seul émetteur. C'est notre modélisation pour un panier obligataire qui fera le lien entre les deux dans la partie qui suit.

2.2.2.2. Modélisation d'un panier / indice obligataire

On présente de manière condensée le modèle utilisé par la réglementation bâloise/Solvency ou « modèle de Vasicek », qui implémente une version « panier » du modèle de Merton.

2.2.2.2.1. Le risque de défaut

On suppose que les actifs comportent des obligations de même caractéristique (=même probabilité de défaut, même spread, même volatilité). Chaque obligation i est régie par son facteur de risque propre C_i , combinaison d'un facteur systémique (F , indicateur de qualité du crédit général), et d'un facteur spécifique (ε_i). La diversification entre émetteurs tient à un **coefficient de corrélation $\rho > 0$** et on suppose tous les **facteurs de risque gaussien**.

$$\text{défaut de l'émetteur } i \Leftrightarrow C_i \leq N^{-1}(p)$$

$$\text{avec } C_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i$$

Le taux de défaut moyen du panier obligataire est donc

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{C_i \leq N^{-1}(p)}$$

Quand n est *suffisamment grand* pour diversifier intégralement les risques spécifiques, on montre (voir Annexe 1) que D peut être approximé par :

$$D \approx N \left[\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

Il s'agit de la formule de Bâle II et Solvency II (dans la version QIS 4) ! D représente le taux de défaut moyen du panier, il est uniquement fonction du facteur systémique F tous les risques spécifiques étant parfaitement diversifiés.

2.2.2.2.2. La dynamique complète du panier obligataire

On effectue le même raisonnement sur la partie « non défaut », pour obtenir, après calcul

$$\frac{B_t}{B_0} = (1+y)^t \times e^{w\sqrt{\rho}F - \frac{w^2}{2}\rho} \times \frac{1-p}{N[w - N^{-1}(p)]} \times N \left[w\sqrt{1-\rho} - \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right] + R \times N \left[\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

On montre que la moyenne du rendement ne dépend ni de ρ ni de w et vaut bien:

$$E \left[\frac{B_t}{B_0} \right] = (1+y)^t (1-p) + Rp$$

⇒ Cette loi à 5 paramètres (s_0 , p , ρ , R , w) permet de modéliser toute les configurations type d'une poche crédit, ceci avec des paramètres facilement interprétables.

Configuration

$w=0$

$p=0$

$p>0, \rho=1$

$p>0, 0<\rho<1$

Modèle

risque de défaut binaire seul (équivalent Bâle II)

un indice obligataire log-normal sans défaut (régime Black & Scholes)

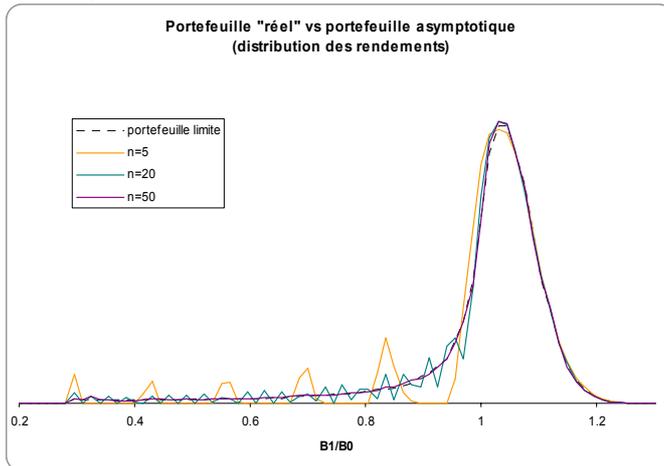
une unique obligation risquée (lognormale tronquée à gauche)

poche obligataire avec risque de spread et de défaut (lognormale déformée par les défauts)

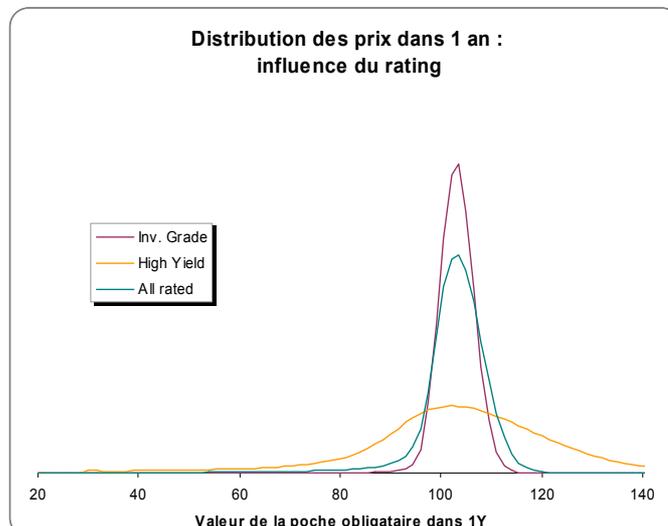
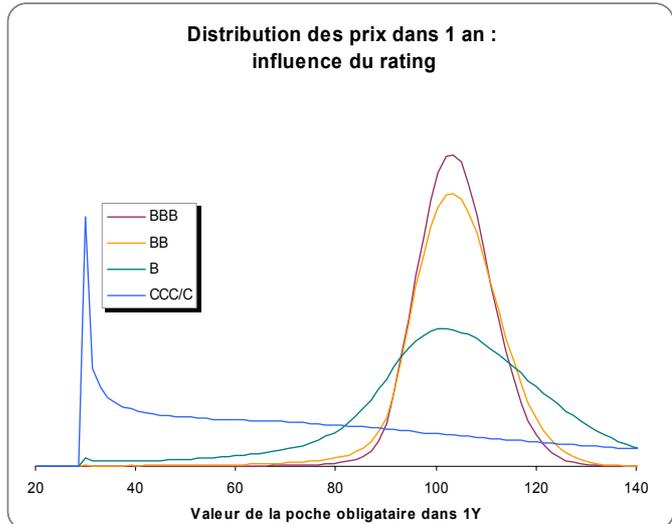
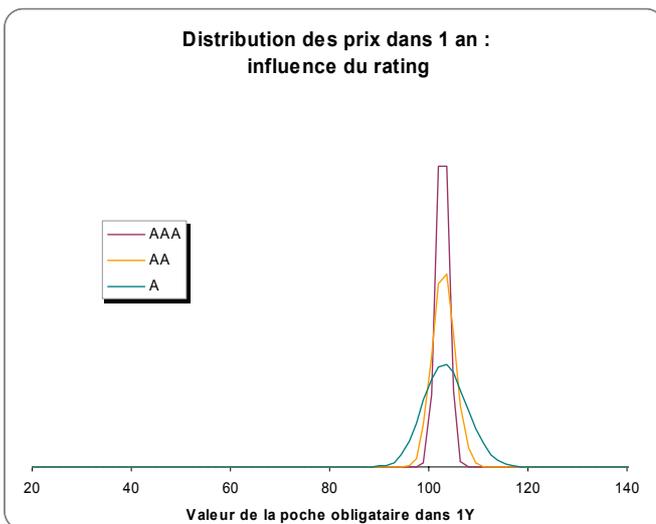
Lien entre w et v : les indices de spreads étant supposés « bien diversifiés », on propose l'hypothèse d'une valeur de $\rho=50\%$ pour les indices. On détermine alors w de sorte que $\sqrt{V \left[\ln \frac{B_t}{B_0} \right]} = v$. On conservera alors ce $w=w(v,t,y,R)$ pour toutes les autres valeur de ρ .

2.2.2.2.3. Quelques illustrations de l'impact des paramètres

Nous représentons ci-dessous les formes que pourraient prendre la distribution du portefeuille obligataire : le premier graphe illustre l'effet du nombre de titres, et les deux suivants les formes des distributions pour chacun des ratings et les paramètres issus de la calibration (Cf Annexe 9.4).



[$R=0.3, \rho=0.05, \rho=80\%, w=6\%, y=5\%$]



Une fois le cadre du bilan posé et la modélisation des actifs détaillée, nous abordons dans le point suivant, le programme d'optimisation choisi, pour répondre à la question que nous posons dans le cadre de ce mémoire : quelle est l'allocation optimale des actifs de la compagnie pour gérer au mieux la marge de solvabilité de l'assureur ?

2.3. Programme d'optimisation double : quel choix de fonction d'utilité ?

Nous développons ici une démarche qui ne recherche pas des niveaux d'équilibre ou le prix des garanties implicites à un tel schéma.

Nous présupposons les paramètres de Passif fixés au préalable par l'assureur (selon la méthode qu'il jugera la plus adéquate et juste possible).

Notre objectif est, compte tenu du Passif existant, de mettre en place un programme d'optimisation, de manière à évaluer quel risque sur ces placements, l'assureur peut être en mesure d'assumer, tout en gardant en tête un taux minimum garanti et un niveau de prestation qui reste concurrentiel.

Von Neumann et Morgenstern (1947) montrent qu'un opérateur financier ayant le choix entre deux distributions aléatoires de revenu préférera celle qui lui apporte la plus grande espérance d'utilité. Dans ce cadre là, un programme « naïf » s'écrirait ainsi : maximiser l'espérance d'utilité jointe de l'assureur et de l'assuré :

$$\text{Max}_{\alpha} E[U(r_L(\alpha), r_E(\alpha))]$$

Il s'écrit, dans un cadre théorique, comme la recherche optimale de l'exposition en actif risqué de manière à améliorer l'espérance d'utilité jointe des rendements des actionnaires et des prestations versées aux assurés. Le choix de la fonction d'utilité jointe paraît clé.

Dans un cadre Markowitz, à un agent, l'allocation optimale serait la solution de la maximisation de son utilité. Dans un cadre d'utilité quadratique (traduisant l'aversion pour le risque de l'agent), avec un niveau d'aversion au risque constant, la résolution pratique, revient à maximiser le rendement espéré sous contrainte de risque. Cette forme est facilement adaptable dans le plan moyenne - variance, et est exploitée fréquemment dans le cadre de la gestion de portefeuille

Dans une première approche, dans ce cadre à deux agents, nous n'avons pas choisi de fonction d'utilité qui donne une préférence à l'actionnaire (E) ou l'assuré (L) et donc opté pour les programmes d'optimisation suivants :

$$\text{Max}_{\alpha, K} (E(r_E(\alpha, K)))$$

avec

$$E(r_L(\alpha, K)) = \mu'$$

ou bien

$$\text{Max}_{\alpha, K} (E(r_L(\alpha, K)))$$

avec

$$E(r_E(\alpha, K)) = \mu$$

sous les contraintes suivantes :

- Solvabilité économique P(Fonds Propres < 0 à 1Y) < 0.5% (C1)
- Budget de risque pas d'endettement au-delà de deux fois la poche action (C2)
- Règlementaire au minimum 35% dans la poche obligataire (C3)

Tous les autres paramètres étant fixés :

- Taux garanti r_g (2.1%) et niveau de participation aux bénéfices b (85%)
- Niveau de levier initial (L_0/A_0 à 96%)
- Volatilité implicite = Volatilité historique = 30%
- Prime de risque Action = 4.5%
- Taux = 3.5%

Nous rechercherons aussi par la suite à comparer les résultats issus de ce programme, avec celui plus classique, qui dans un cadre actif pur, rechercherait à maximiser le rendement moyen des actifs sous contrainte de solvabilité de l'assureur.

Nous avons cherché à exprimer littéralement l'analogie entre ces deux programmes, ce qui aurait eu comme résultat « intéressant », que la métrique de Solvency soit une bonne représentation des objectifs économiques des rendements ALM. Nous montrerons quantitativement que les résultats sont équivalents.

Il est important à cette étape de faire un point sur notre mesure ALM développée sur le rendement des actifs. Le modèle simplifié (paragraphe 2.1.1) a défini deux lois qui lient le rendement des actionnaires et le rendement des assurés avec le rendement des actifs, de manière optionnelle. Cette écriture optionnelle (et notamment la présence d'une option put en dehors) introduit une vraie mesure de distorsion sur les rendements de l'actif (d'après les travaux de Wang sur les mesures de distorsion).

En apparence, la métrique utilisée sur les rendements des deux agents apparaît comme une simple mesure en moyenne, en fait la mesure développée est bien loin d'une mesure symétrique, de type moyenne (nous l'observerons via l'analyse des résultats en partie 4), car elle met un point plus fort aux événements favorables (régime 3 dans le graphe des rendements du paragraphe 2.1.1) par rapport aux événements médians (régime 2). Cette mesure pourrait être lue comme une fonction d'utilité sur les rendements. Il n'est pas facile de déterminer si cette utilité serait concave ou convexe (à priori plutôt mixte), pour en déduire dès à présent quelles solutions d'actifs seront privilégiées.⁵ C'est l'analyse ex-post des résultats qui nous a permis de déduire que cette métrique aurait plutôt tendance à favoriser les actifs asymétriques, et se rapprocherait ainsi d'une mesure de type CVaR (à confirmer avec les résultats de la partie 4).

Enfin, si nous avons à donner une fonction d'utilité au niveau du programme d'optimisation des rendements des deux agents, nous choisirions plutôt (pour être en ligne avec le processus de décision des assureurs) une fonction d'utilité qui donne une préférence à l'actionnaire, tout en assurant de servir un taux de prestation proche d'un taux cible, par exemple le niveau des taux de marché long terme (référence concurrentielle).

La contrainte de solvabilité économique pourra par ailleurs être renforcée (utile notamment dans une vision multi-périodes) et respecter un niveau de fonds propre minimum de manière à rester en dehors des points critiques (au lieu de la faillite, plutôt un capital qui reste supérieur à un capital réglementaire minimum requis avec un niveau de confiance élevé, par exemple 25% du capital réglementaire minimum requis).

Nous introduirons ainsi dans l'analyse d'allocation du risque Actions une préférence pour l'actionnaire (choix du premier programme), conserverons une « solvabilité critique » mesurée par le risque de faillite à 0.05%, par souci d'analogie avec les normes prudentielles. En version multi-périodes, nous introduirons une gestion des trajectoires « en faillite », c'est à dire celles où le capital est inférieur à un niveau critique avec une révision de l'allocation d'actifs vers une allocation sans risque bilan qui assurera la solvabilité de l'assureur.

Nous restons conscients que dans la pratique, l'assureur prendra une marge de manœuvre plus élevée que cette solvabilité jugée « critique ».

⁵Et non pas en sur pondérant les mauvais événements (régime 1) par rapport au régime médian (2), car supposer une responsabilité illimitée des actionnaires, ne modifiait que très peu les allocations optimales !

2.4. Comment prendre en compte une vision comptable ?

Nous utiliserons deux approches pour prendre en compte une vision comptable :

La première s'appuiera sur le cadre des normes comptables françaises et modifiera le modèle développé dans le cadre économique simplifié de manière à introduire les actifs en coût historique et la revalorisation des provisions telle qu'effectuée dans un bilan comptable, en faisant apparaître un Bilan comptable qui intégrera les provisions telles décrites au Chapitre 1.

La seconde donnera à la lumière économique et comptable (french Gaap) des résultats présentés une lecture de l'impact des normes comptables IFRS (IAS 39 et IFRS9) sur ces résultats, qualitativement.

C'est dans le modèle complet (Chapitre 3) que nous introduirons une vision dynamique multi-périodes afin de bien prendre en compte les principaux mécanismes de la gestion d'un contrat mono-génération.

2.4.1. Rappel du cadre du bilan de modélisation proposé en normes FRGAAP

- ✓ Les actifs : Action ou Obligation crédit au coût historique (valeur d'achat)
Les options sont supposées valorisées à leur valeur de marché
- ✓ Les engagements : mono générationnel
sur une seule période
- ✓ Les provisions prises en compte
 - Dotation stratégique de 100% de la participation aux bénéfices
 - Provision pour Risque d'Exigibilité pour les actifs Actions

2.4.2. Réécriture du modèle simplifié avec une vision comptable à 1 période (MSCA) Risque Action

2.4.2.1. Le cadre comptable du côté des actifs

- ✓ Actions
 - Pas de rebalancement de l'actif en cours d'année supposé
 - Evaluation en t à sa valeur d'achat S_t , fonction de la position en (t-1)
 $n_{i,t-1}^{actions}$
 - Seule provision : PRE

Par simplification, nous supposons qu'elle est dotée entièrement si

$$\sum_{i=t-1}^{t-1} q_{i,t-1}^{actions} (S_t - S_i) < 0$$

$$PRE = \left(- \sum_{i=t-1}^{t-1} q_{i,t-1}^{actions} (S_t - S_i) \right)^+ *$$

Notre modèle simplifié n'étant ici qu'à une période, cela revient à écrire pour la partie relative aux engagements techniques :

$$PRE^T = \left(- q_{t-1}^{T,actions} (S_t - S_{t-1}) \right)^+ = \left(- q_{t-1}^{actions} \frac{L_{t-1}}{A_{t-1}} (S_t - S_{t-1}) \right)^+ = \frac{L_{t-1}}{A_{t-1}} PRE$$

- Distinction technique / non technique : il est important (car l'impact sur le bilan comptable est différent) de faire la distinction entre les actifs techniques (en représentations des engagements) et les actifs non techniques. On notera $q_t^{T,X} = \frac{L_t}{A} q_t^X$ la quantité relative aux actifs

techniques et $q_t^{NT,X} = \frac{E}{A} q_t^X$ celle aux actifs non techniques. (X étant relatif aux Obligations sans risque ou aux Actions)

- ✓ Taux :
 - à leur valeur d'achat avec une tombée des coupons comme revenus financiers.
 - On distingue les produits financiers techniques $PF_t^T = q_{t-1}^{T,Gov} \times r$ de ceux non techniques : $PF_t^{NT} = q_{t-1}^{NT,Gov} \times r$
- ✓ L'actif total composé d'obligations sans risque et d'actions s'écrira en date 1

$$A_1 = q^{actions} \times S_{t-1} + q^{Gov} \times (1+r)$$
 (supplément de trésorerie lié aux coupons) : en d'autres termes $A_1 = A_0 + PF_1$

2.4.2.2. Illustration bilancielle simplifiée en t=0 et t=1:

Actif(t=0)	Passif(t=0)
A_0 : actifs composé d'une sous-jacente action S et d'un actif obligataire adossé	E_0 : Fonds propres = $(1-\alpha) A_0$ L_0 : Engagements = αA_0

A la date t du contrat (t=1 dans notre cas), le bilan évoluera de la manière suivante, en supposant que seule la PRE au titre des actifs techniques influence les fonds propres :

Actif(t)	Passif(t)
A_t	E_t R_t PRE_t^T L_t

2.4.2.3. Revisite en détail des 3 régimes pour construire le bilan comptable à la lumière du modèle simplifié :

1) cas favorable (constitution de PAB)

$$(bPF_1^T - PRE_1^T) \geq r_g L_0 \Leftrightarrow bPF_1 \frac{L_0}{A_0} - PRE_1 \frac{L_0}{A_0} \geq r_g L_0$$

$$\Leftrightarrow b(A_1 - A_0) \frac{L_0}{A_0} - PRE_1 \frac{L_0}{A_0} \geq r_g L_0 \Leftrightarrow r_a \geq \frac{r_g}{b} + \frac{PRE_1}{bA_0}$$

$$L_1 = L_0(1+r_g) + \left[bPF_1^T - PRE_1 \frac{L_0}{A_0} - r_g L_0 \right]$$

alors

$$= L_0 \left[(1+r_g) + b \left(r_a - \frac{r_g + PRE / A_0}{b} \right)^+ \right]$$

2) second cas, sans provision de PRE au lancement du contrat :

$$L_1 = (1+r_g)L_0 \text{ et } A_1 > L_1$$

$$A_1 - L_1 > 0 \Leftrightarrow (1+r_a)A_0 - (1+r_g)L_0 > 0 \Leftrightarrow r_a > \frac{L_0}{A_0}(1+r_g) - 1$$

3) cas défavorable : liquidation (plus de fonds propres ni de résultats) : la PRE provisionnée dans le Bilan retourne-t-elle vers l'assuré ?

$$L_1 = A = (1 + r_a)A_0$$

$$\text{et } R_1 + E_1 = 0$$

Au global, les rendements comptables des trois postes du bilan s'écrivent ainsi :

✓ Rendement comptable des actifs :

$$r_1^A = \frac{A_1}{A_0} - 1 \quad r_a = \frac{PF_1}{A_0} = \frac{PF_1^T + PF_1^{NT}}{A_0}$$

✓ Rendement comptable des prestations :

$$\begin{aligned} r_1^L &= \frac{L_1}{L_0} - 1 = r_g + \left[\frac{b}{L_0} PF_1^T - \frac{PRE_1}{A_0} - r_g \right]^+ - \left[r_g - \frac{E_0}{L_0} - r_a \frac{A_0}{L_0} \right]^+ \\ &= r_g + \left[br_1^A - r_g - \frac{PRE_1}{A_0} \right]^+ - \frac{A_0}{L_0} \left[\frac{L_0}{A_0} (1 + r_g) - 1 - r_1^A \right]^+ \end{aligned}$$

✓ Rendement comptable des actionnaires (Post-incorporation du résultat) :

$$r_1^E = \frac{E_1 - E_0}{E_0} = \frac{1}{E_0} \left[A_0 r_1^A - L_0 r_1^L - PRE_1 * \frac{L_0}{A_0} \right]$$

2.4.2.4. Un nouvel indicateur à analyser, le résultat comptable en date 1 :

Le résultat de la compagnie, R_1 , hors fiscalité, est composé de la somme de

✓ Résultat technique:

$$R_1^T = PF_1^T - r_g L_0 - PAB_1 - PRE_1^T$$

$$\text{avec } PAB_1 = \left[bPF_1^T - PRE_1^T - r_g L_0 \right]^+$$

Rapporté au montant de capital, le résultat s'écrit alors :

$$R_1^T = \frac{1}{E_0} \left[\frac{L_0}{A_0} PF_1^T - r_g L_0 - L_0 \left[b \left(r_1^A - \frac{r_g + PRE/A_0}{b} \right)^+ \right] + A_0 \left[\frac{L_0}{A_0} (1 + r_g) - 1 - r_1^A \right]^+ \right]$$

✓ Et du Résultat non technique :

$$R^{NT} = PF^{NT}$$

Les fonds propres avant incorporation du résultat s'écrivent comme $E_1 = A_1 - L_1 - R_1$. Une fois le résultat incorporé, les fonds propres deviennent $E_1 = A_1 - L_1$.

2.4.2.5. Quid de la valorisation comptable des dérivés ?

Supposer que la valeur comptable du dérivé est sa valeur d'achat serait mal prendre en compte l'effet de la couverture intrinsèque de celui-ci par rapport à l'actif qu'il vient protéger.

Notre choix dans ce modèle simplifié: une valorisation en marked to market afin de mesurer leur valeur ajoutée dans la construction des indicateurs comptables, plus particulièrement la PRE.

2.4.3. Quid des plus-values latentes ?

A ce stade, cette vision met de côté un pan important de la vie de ce contrat mono générationnel, celle du stock de plus-values latentes. C'est une erreur sachant que dans Solvabilité 1, le stock de plus-values est bien intégré dans le calcul de la marge de solvabilité (considéré à 100% comme du capital).

Un horizon d'analyse de T périodes (maturité du contrat) entrainerait, le solde de tous les actifs, ce qui reviendrait à la vision purement économique déjà étudiée précédemment. L'horizon d'analyse qui nous intéresse est bien plus court, entre 1 an et T années.

Ce stock de plus values latentes constitue un matelas de réserve que l'assureur peut utiliser afin de gonfler le taux versé aux assurés, les années où les marchés se sont mal comportés.

Notre analyse serait ainsi faussée si nous ne prenions pas dans notre modélisation ce paramètre. Comment le faire dans un modèle à une période? via une condition de réalisation des plus -values latentes.

2.4.3.1. Un nouveau processus de gestion du taux de prestations variables

- ✓ Introduction d'une préférence à l'actionnaire :
Maximiser le rendement moyen des Actionnaires,
sous contrainte d'un *rendement cible* moyen pour les *assurés*
- ✓ Si les produits financiers sont suffisants pour payer le taux garanti (situation de non faillite de l'assureur), alors l'assureur utilisera une partie de ses plus values latentes Actions pour verser un peu plus – une cible de 100% du taux en vigueur paraît une condition correcte pour que le contrat « reste » compétitif dans son environnement concurrentiel. Dans la vie réelle, les assureurs utilisent une référence cible, à base de moyenne mobile sur le niveau des taux des deux ou trois derniers années, afin que le taux versé aux assurés reste « dans » le marché.
- ✓ Le reste des plus-values latentes restera « à disposition » de l'assureur. En effet, sinon (si réalisées), l'assureur perd un outil de pilotage de son résultat, car 85% au moins sera acquis à l'assuré.

2.4.3.2. Ecriture des indicateurs comptables entrant dans le processus de gestion :

- ✓ Calcul du prix moyen d'achat : dans un modèle à une seule période, l'actif S (action) n'est acheté qu'à l'initiation du contrat donc

$$PMA_t^S = S_{t-1}$$

- ✓ Quel est le montant de plus value latente disponible pour l'actif S à la fin de la date t (t=1)?

$$PVL_t^S = q_t^S [S_t - PMA_t^S] \text{ et}$$

$$q_t^S = \sum_{s \leq t} \Delta q_s^S \text{ qui représente les quantités achetées en actif S}$$

- ✓ Un mécanisme de boucle déterminera, grâce à l'écriture du rendement des prestations le montant de plus value latente potentiellement à céder pour s'approcher du taux de prestations cible :

$$PVL_t^{S, \text{postcible}} = q_t^{S, \text{postcible}} [S_t - PMA_t^S]$$

- ✓ Les quantités d'actifs seront modifiées ainsi afin de tenir compte du nouveau stock de plus values latentes : deux possibilités

i. approche proportionnelle :

$$q_t^{S,postcible} = \frac{PVL_t^{S,postcible}}{S_t - PMA_t^S}$$

$$\Delta q_s^{S,postcible} = \Delta q_s^S \frac{q_t^{S,postcible}}{q_t^S}$$

On retrouve bien $q_t^{S,postcible} = \sum_{s \leq t} \Delta q_s^{S,postcible}$, le prix moyen d'achat n'a pas changé.

ii. Approche FIFO (non choisie pour l'instant, et pourtant la plus utilisée)

- ✓ Sans autre acte de gestion, le bilan en valeur comptable s'écrira donc :

$$A_t^{postcible} = \sum_S q_t^{S,postcible} PMA_t^S$$

- ✓ Le compte de résultat sera doté de

$$A_t^{postcible} - A_t - [q_t^{S,postcible} - q_t^S] S_t,$$

soit, exactement de la somme des plus-values réalisées sur l'actif S, définie par :

$$PMVR_t^S = -(q_t^{S,postcible} - q_t^S(a)) [S_t - PMA_t^S]$$

$$A_t^{postcible} = A_t + PMVR_t^S(a)$$

2.4.4. Réécriture du modèle simplifié avec une vision comptable à 1 période (MSCC) Risque Crédit

2.4.4.1. Le cadre comptable du côté des actifs de crédit

- ✓ Obligations Corporate : sont soumises aux mêmes règles que les obligations d'Etat :

- Pas de rebalancement de l'actif en cours d'année supposée
- Evaluation à leur valeur d'achat :
 - au pair si pas de défaut
 - sinon à la valeur de recouvrement $q_{t-1}^{\text{credit}} * D * R$ (coupon non versé en cas de défaut)
- ne sont soumis à PDD (en FRGAAP ou en IFRS) que s'il y a évènement de crédit (on l'oublie car on ne va pas ligne à ligne)
- Non soumis à PRE
- Le stock de plus ou moins values réalisées alimente la réserve de capitalisation. Pas d'effet majeur dans notre analyse à taux constant, le spread de crédit étant plus petit. Hors l'impact sur la marge de solvabilité 1, la réserve de capitalisation ne modifie pas, à notre avis, la stratégie d'allocation d'actifs de l'assureur.

- ✓ Obligations sans risque :

- à leur valeur d'achat avec une tombée des coupons comme revenus financiers.

- ✓ On distingue les produits financiers techniques

$PF_t^T = q_t^{T,Credit} [(1-D) \times (r+s) - D(1-R)] + q_t^{T,Gov} \times r$ de ceux non techniques :

$PF_t^{NT} = q_t^{NT,Credit} [(1-D) \times (r+s) - D(1-R)] + q_t^{NT,Gov} \times r$

- ✓ L'actif total composé d'obligations sans risque et d'actions s'écrira en date 1

$$A_1 = q_0^{Credit} \times [(1-D) \times (1+r+s) + D \times R] + q_0^{Gov} \times (1+r)$$
 (supplément de trésorerie lié aux coupons yc impact du défaut de l'émetteur) :
 en d'autres termes $A_1 = A_1 + PF_1$

2.4.4.2. Illustration bilancielle simplifiée en t=0 et t=1:

Actif(t=0)	Passif(t=0)
A_0 : actifs composés d'un panier d'obligations Corporate de maturité T et d'un actif obligataire adossé	E_0 : Fonds propres = $(1-\alpha) A_0$
	L_0 : Engagements = αA_0

A la date t du contrat (t=1 dans notre cas), le bilan évoluera de la manière suivante, en supposant que seule la PRE au titre des actifs techniques influence les fonds propres :

Actif(t)	Passif(t)
A_t	E_t
	R_t
	L_t
	PRE_t^T

2.4.4.3. Synthèse sur l'écriture comptable du modèle pour le risque Crédit

Au global, les rendements comptables des trois postes du bilan s'écrivent ainsi :

- ✓ Rendement comptable des actifs :

$$r_1^A = \frac{A_1}{A_0} - 1 \quad r_1^A = \frac{PF_1}{A_0} = \frac{PF_1^T + PF_1^{NT}}{A_0}$$

- ✓ Rendement comptable des prestations :

$$r_1^L = \frac{L_1}{L_0} - 1 = r_g + \left[\frac{b}{L_0} PF_1^T - r_g \right]^+ - \left[r_g - \frac{E_0}{L_0} - r_a \frac{A_0}{L_0} \right]^+$$

$$= r_g + [br_1^A - r_g]^+ - \frac{A_0}{L_0} \left[\frac{L_0}{A_0} (1+r_g) - 1 - r_1^A \right]^+$$

- ✓ Rendement comptable des actionnaires (Post-incorporation du résultat) :

$$r_1^E = \frac{E_1 - E_0}{E_0} = \frac{1}{E_0} [A_0 r_1^A - L_0 r_1^L]$$

Chapitre 3

3. Une seconde vision des risques :

Une modélisation dynamique multi-périodes pour se rapprocher de la vraie vie sur le risque Actions

Nous avons choisi afin de mieux prendre en compte la marge de manœuvre de l'assureur au travers de sa politique Actif-Passif et du choix d'une stratégie sur son actif risqué, de développer une vision dynamique pour le risque Actions à partir du modèle simplifié qu'il soit en version comptable ou économique (MSE et MSC).

3.1. L'approche dynamique (Modèle MDSC) : les conséquences

Ce modèle n'est qu'une extension du modèle simplifié développé sur une période. Les indicateurs restent les mêmes : les indicateurs du bilan.

Pour la vision économique pure, les conséquences seront liées à l'évolution de la structure du bilan au cours du temps, dans la mesure où la vision reste à pas annuel, avec un effet cliquet (au niveau de l'évolution de la provision mathématique). Chaque année, sera la réplique d'une gestion de bilan économique à périodicité annuelle, dans laquelle l'assuré recevra le taux garanti et 100% de la participation aux bénéfices dégagée, avec une structure de bilan plus ou moins « riche » en capital que la vision mono-période.

Pour la vision comptable, le fait d'étendre à plusieurs périodes l'analyse enrichit le point de vue comptable à une période, et il était même indispensable de le faire au risque de passer à côté du plus important :

- ne pas négliger l'outil de pilotage « clé » que constitue le stock de plus ou moins values latentes apportées par les actifs R332-20
- et bien mesurer comment ce coussin de plus-values latentes permet de lisser le résultat comptable de l'assureur, et aussi de s'autoriser une prise de risque supérieure au cas où ce coussin n'est pas pris en compte.

3.2. Une revalorisation annuelle économique de la provision mathématique, en version multi-périodes (MDSE)

Nous regarderons comment l'écriture du Bilan sera modifiée dans le cas d'une revalorisation annuelle de provision mathématique, avec effet cliquet acquis à chaque fin de période (approche 3).

A la date intermédiaire t (exercice comptable t), les provisions mathématiques L_t^* (c'est-à-dire l'engagement de la compagnie envers l'assuré) sont revalorisées au taux garanti $L_0(1+r_g)^t$. Se rajoutera au Passif, une participation aux bénéfices, égale à la valorisation des actifs, à ce stade peu importe la nature de l'actif, venant en représentation des provisions mathématiques déduite des intérêts crédités à ces provisions mathématiques, et ajustée du taux de participation.

La méthode de construction des rendements des actionnaires et des prestations est identique à celle décrite précédemment, l'horizon d'analyse étant de 1 an, et le taux garanti annuel le taux r_g .

Ce qui donne, mathématiquement, l'évaluation suivante du niveau des Engagements à la fin de la période t, supposant l'ensemble des paramètres du bilan connus en (t-1) :

$$L_t = \underbrace{(1+r_g)^t L_{t-1}}_{\text{minimum garanti}} + \underbrace{L_{t-1} [br_t^A - r_g]^+}_{\text{participations aux bénéfices}} - \underbrace{\left[r_g L_{t-1} - r_t^A A_{t-1} - E_{t-1} \right]^+}_{\text{cas défavorable : ni les actifs ni les fonds propres n'arrivent à servir le tmg}}$$

avec $r_t^A = \frac{A_t - A_{t-1}}{A_t}$, représentant le rendement des placements à l'actif.

Et le **rendement des assurés** entre les dates (t-1) et t s'écrira donc :

$$r_t^L = \frac{L_t - L_{t-1}}{L_{t-1}} = r_g + bC_2 \left[(1+r_t^A), \left(1 + \frac{r_g}{b}\right), 0 \right] - \frac{A_{t-1}}{L_{t-1}} P_1 \left[(1+r_t^A), \frac{L_{t-1}}{A_{t-1}} (1+r_g), 0 \right]$$

Comme précédemment, deux niveaux critiques pour les rendements apparaissent:

$$K_1 = \frac{L_t}{A_t} (1+r_g) \text{ et } K_2 = 1 + \frac{r_g}{b}$$

ainsi que les instruments optionnels européens calls et puts sur le sous-jacent $(1+r_a)$ de strikes associés respectivement à K_1 et K_2 et de maturité 1 an :

$C_1 = \text{Call}(1+r_a, K_1, 1)$, se lisant comme une option Call sur l'actif $1+r_a$, de strike K_1 et de maturité 1 an

$$C_2 = \text{Call}(1+r_a, K_2, 1)$$

$$P_1 = \text{Put}(1+r_a, K_1, 1)$$

$$P_2 = \text{Put}(1+r_a, K_2, 1)$$

De la même manière, le **rendement des actionnaires** entre (t-1) et t s'écrit :

$$r_t^E = -1 + \frac{A_{t-1}}{E_{t-1}} C \left[(1+r_t^A), \frac{L_{t-1}}{A_{t-1}} (1+r_g), 0 \right] - b \frac{L_{t-1}}{E_{t-1}} C \left[(1+r_t^A), \left(1 + \frac{r_g}{b}\right), 0 \right]$$

Il apparaît alors naturel de présenter le contrat avec revalorisation annuelle de la participation bénéficiaire sous la forme de transactions successives, nouées fictivement à chaque date entre 0 et T. La valeur du contrat à maturité sera donc la combinaison des valorisations intermédiaires du contrat.

Elle ne dépend donc plus seulement de la valeur à maturité de l'actif, mais aussi de toutes les valeurs intermédiaires de l'actif, et du rebalancement ou non effectué à chaque exercice comptable (lors de l'approche économique, nous supposons que l'actif sera rebalancé selon la méthode constant Mix pour maintenir une exposition donnée fixe à chaque date de valorisation du bilan à l'actif risqué).

La valeur du contrat ne fait plus intervenir une option européenne d'achat mais une option exotique portant sur le sous-jacent A et dont le prix dépendra de la trajectoire de A.

Nous implémenterons ainsi une approche économique multi-périodes sur l'analyse Action, à pas annuel, afin de mesurer la valorisation du bilan à maturité, et les distributions respectives des rendements actionnaires et assurés, grâce à l'application des fonctions de rendements annuels explicitées précédemment r^L et r^E à chaque date d'exercice.

Pour une trajectoire de A, on aura ainsi :

Actif (t=0)	Passif (t=0)	
A_0 : actifs	E_0 : Fonds propres $= (1 - \alpha) A_0$ L_0 : Engagements $= \alpha A_0$	\downarrow $A_1 = A_0 * (1 + r_1^A)$ $L_1 = L_0 * (1 + r_1^L)$ $E_1 = E_0 * (1 + r_1^E)$
Actif (t=1)	Passif (t=1)	
A_1 : actifs	E_1 : Fonds propres L_1 : Engagements ...	\downarrow $A_T = A_{T-1} * (1 + r_T^A)$ $L_T = L_{T-1} * (1 + r_T^L)$ $E_T = E_{T-1} * (1 + r_T^E)$
Actif (t=T-1)	Passif (t=T)	
A_T : actifs	E_T : Fonds propres L_T : Engagements	

Attention : il faut être attentif aux trajectoires « extrêmes » où le montant de fond propres s’approche de zéro.

En termes d’allocation d’actifs, même dans les cas où le niveau des fonds propres s’approche de zéro, nous ne modifions pas l’allocation d’actifs testée (ce qui suppose l’intervention d’une instance supérieure qui viendrait prêter à l’assureur le capital pour faire face à son bilan).

L’intervention que nous avons plutôt choisi, certainement plus en ligne avec ce qui est fait en pratique dans la gestion ALM des assureurs, est dès que le niveau de fonds propres devient « critique » en regard d’un niveau minimum, par exemple inférieur à 25% du capital minimum requis réglementairement, nous stoppons toute prise de risque, et investissons 100% des actifs en actif sans risque, ce qui aura pour conséquence l’arrêt immédiat du programme d’allocation d’actifs.

Quid de l’allocation d’actifs « optimale » à implémenter si la structure de bilan en date t a été modifiée ?

La structure de levier joue sur la contrainte de solvabilité (plus il est élevé, plus le bilan pourra absorber des actifs risqués), avec un impact probable sur l’allocation d’actifs optimale à horizon un an, en réponse au programme d’optimisation présenté.

Ce programme multi-périodes a un réel intérêt car d’une part il s’approche de l’horizon de gestion du contrat d’assurance, mais d’autre part, il permettra de challenger la vision mono-période et notamment de mesurer si, à l’initiation du contrat, et au vu des huit années de vie, une dose de risque supplémentaire dans l’allocation d’actifs apparaît plus soutenable pour les deux agents.

3.3. Une revalorisation annuelle de la provision mathématique, dans la vision comptable (MDSC)

Nous avons développé, seulement pour la partie Actions, une extension du modèle MSCA simplifié en une vision multi-périodes.

3.3.1. Des choix de rebalancement

Dans une vision multi-périodes, des choix en termes de rebalancement des actifs sont nécessaires dans la vie du contrat:

- investir une partie du compte de trésorerie en l'investissant dans le portefeuille d'actifs
- réaliser des plus values latentes, en vendant une partie des actifs
- réinitialiser en début d'année ou non une exposition risquée

Tout rebalancement aura pour conséquence

- de modifier la quantité détenue en chaque actif
- de créer du résultat par les *PMVR*
- de modifier la réserve de capitalisation (dans le cas de la vente d'obligations, pas d'effet dans notre cas car les taux sont constants)

Dans le modèle, les réallocations stratégiques seront endogènes, et devront prendre partie sur trois « arbitraires » :

- le budget à allouer aux actifs et à la trésorerie
- la stratégie de révision des quantités en chaque actif en présence de ressource nouvelle et/ou de mouvement de marché et d'exercice comptable. On s'autorise ici sur l'exposition risquée le *buy & hold* (détenir les actifs sans stratégie particulière, autre que celle d'investir la trésorerie et gérer le taux servi aux assurés) et une stratégie de rebalancement dynamique.
- en FRGAAP, la règle pour mettre à jour la valeur comptable : pour un actif acquis à plusieurs dates, nous avons choisi une méthode proportionnelle.

3.3.2. Réécriture du modèle en version multi-périodes (MDSC)

3.3.2.1. Le cadre comptable du côté Actifs:

Par rapport à la vision comptable en mono-période, les actifs ne changent pas, toujours des actions et des obligations sans risque. Le cadre comptable est toujours le même.

La seule différence réside dans le fait qu'en fonction de la stratégie d'allocation choisie, l'actif risqué pourra avoir été acheté à différentes dates dans le temps.

$$\text{Calcul du prix moyen d'achat : } PMA_t^S = \frac{\sum_{s=1}^t \Delta q_s^S S_s}{q_t^S},$$

Δq_s^S représente les quantités d'actif achetées à la date t sachant qu'avec une génération, hors rebalancement d'actif, le seul achat a lieu en date de début du contrat. ($\Delta q_s^S \geq 0$)

Déduction du stock de plus-values latentes disponible:

$$PVL_t^S = q_t^S [S_t - PMA_t^S]$$

Le stock de produits financiers sera composé des revenus obligataires et éventuellement des plus-values réalisées côté Actif risqué.

Calcul du stock de produits financiers impactant le Bilan :

- Déterminer le montant de plus value latentes potentiellement à céder pour s'approcher du taux de prestations cible. (via un mécanisme de boucle)

$$PVL_t^{S,postcible} = q_t^{S,postcible} [S_t - PMA_t^S]$$

Les quantités d'actifs seront modifiées ainsi afin de tenir compte du nouveau stock de plus values latentes.

- Sans autre acte de gestion, le stock de produits financiers sera la somme des coupons perçus par l'actif obligataire et le stock de plus-values réalisées
- Le bilan en valeur comptable s'écrira donc :

$$A_t^{postcible} = \sum_S q_t^{S,postcible} PMA_t^S$$

- Le compte de résultat sera doté de

$$A_t^{postcible} - A_t - [q_t^{S,postcible} - q_t^S] S_t,$$

soit, exactement de la somme des plus -values réalisées sur l'actif S, définie par :

$$PMVR_t^S = -(q_t^{S,postcible} - q_t^S(a)) [S_t - PMA_t^S]$$

$$A_t^{postcible} = A_t + PMVR_t^S(a)$$

3.3.2.2. Illustration bilancielle synthétique entre les dates (t-1) et t :

Actif(t-1)	Passif(t-1)
A_{t-1} : actifs	E_{t-1} : Fonds propres PRE_{t-1}^T L_{t-1} : Engagements

A la date t du contrat (t=1 dans notre cas), le bilan évoluera de la manière suivante :

Actif(t)	Passif(t)
A_t	E_t R_t PRE_t^T L_t

Dynamique de la PRE : cette provision est fonction de la valeur de marché, nous supposons que toujours la PRE re-dotée ou reprise entièrement en une seule fois. C'est donc dPRE qui impactera chaque année le compte de résultat.

$$PRE_t = \left(- \sum_{i=0}^{t-1} q_{i,t-1}^{actions} (S_t - S_i) \right)^+$$

$$dPRE_t = PRE_t - PRE_{t-1}$$

$$dPRE_t^T = PRE_t^T - PRE_{t-1}^T$$

3.3.2.3. Ecriture des dynamiques des Fonds propres et Prestations

Attention, la présence de la provision PRE en date (t-1) modifie les écritures, Ainsi,

$$q_t^{T,X} = \frac{L_t}{A_t} q_t^X$$

les quantités techniques s'expriment comme et les non techniques

$$q_t^{NT,X} = \frac{E_t + PRE_t^T}{A_t} q_t^X$$

comme (X=Gov ou Act)

On aura en synthèse, entre chaque année t et $(t+1)$:

1. Rendement comptable des actifs :

$$A_{t+1} = A_t + PF_{t \rightarrow t+1}$$

$$r_{a,t \rightarrow t+1} = \frac{A_{t+1}}{A_t} - 1 = \frac{PF_{t \rightarrow t+1}}{A_t} = \frac{PF_{t \rightarrow t+1}^T + PF_{t \rightarrow t+1}^{NT}}{A_t}$$

2. Rendement des prestations :

$$L_{t+1} = L_t + L_t r_g + \left[b PF_{t \rightarrow t+1}^T - r_g L_t - (dPRE_{t+1}^T)^+ \right]^+ - A_t \left[\frac{L_t}{A_t} (1 + r_g) - 1 - r_{a,t \rightarrow t+1} + \frac{PRE_t^T}{A_t} \right]^+$$

$$r_{L,t \rightarrow t+1} = \frac{L_{t+1}}{L_t} - 1 = r_g + \left[b r_{a,t \rightarrow t+1} - r_g - \frac{(dPRE_{t+1}^T)^+}{L_t} \right]^+ - \frac{A_t}{L_t} \left[\frac{L_t}{A_t} (1 + r_g) - (1 + r_{a,t \rightarrow t+1}) + \frac{PRE_t^T}{A_t} \right]^+$$

3. Rendement des actionnaires :

$$r_E = \frac{1}{E} \left[Ar_a - Lr_L - dPRE_{t+1}^T \right] \text{ (post incorporation du Résultat)}$$

4. Résultat technique (relatif à E)

$$R = (PF_{t \rightarrow t+1}^T - r_g L_t - PAB - dPRE_{t+1}^T - PMVR_{t \rightarrow t+1}^T) / E_t$$

$$= \frac{1}{E_t} \left[\frac{L_t}{A_t} PF_{t \rightarrow t+1}^T - r_g L_t - L_t \left[b(r_{a,t \rightarrow t+1} - \frac{r_g + dPRE_{t+1}^T / A_t}{b})^+ \right] - dPRE_{t+1}^T \right]$$

$$+ A_t \left[\frac{L_t}{A_t} (1 + r_g) - 1 - r_{a,t \rightarrow t+1} \right]^+ - PMVR_{t \rightarrow t+1}^T$$

Quid des options dans le Bilan ?

Les options qui seront introduites dans le bilan viendront compléter tout simplement les placements à l'actif de l'assureur. Par exemple, une option de vente sur un indice action, de maturité 1 an, à l'exercice, introduit un potentiel nouveau produit financier à l'actif.

A maturité :

Le bilan sera entièrement soldé, les actifs sont vendus à leur valeur de marché.

Les assurés recevront la valeur de la Provision Mathématique acquise sur la période (incluant ainsi une participation au plus values réalisées à la fin du contrat) et les actionnaires la valeur des actifs résiduels.

3.3.3. Introduction d'une stratégie d'allocation temporelle dynamique

Plusieurs alternatives d'allocation se présentent :

3.3.3.1. Stratégie 1 Buy & Hold

C'est la manière la plus simple de gérer son portefeuille. L'allocation entre Actif risqué et Obligations sans risque est décidée à l'ouverture du contrat. Par la suite, les seuls actes de gestion viseront à piloter le taux de rendement des prestations.

C'est cette stratégie qui a été modélisée dans un premier temps. (S1)

3.3.3.2. Stratégie 2 d'allocation cible simple

L'idée s'appuie ici sur le fait que la présence d'un stock positif de plus-values latentes donne à l'assureur une marge de manœuvre au moins autant égale à celle qu'il avait à l'initiation du contrat, où il était par définition nul.

Une fois le taux de prestations piloté, la manière la plus conservatrice consiste à gérer l'allocation d'actifs avec la règle suivante :

- Aucun rebalancement si jamais une provision pour risque d'exigibilité est non nulle (ou bien si le stock de plus values latentes est nul)
- Sinon retour à l'allocation de départ (S2)

La présence d'un stock positif de plus-values latentes donne à l'assureur une marge de manœuvre supérieure à celle qu'il avait, quand il a choisi l'allocation de départ du contrat, en effet ce stock étant par définition nul.

Une fois le taux de prestations piloté, une manière plus agressive consisterait à gérer l'allocation d'actifs avec la règle suivante :

- Aucun rebalancement si jamais une provision pour risque d'exigibilité est non nulle
- Retour à l'allocation de départ +une marge d'allocation optimale

Comment calibrer cette marge d'allocation additionnelle ?

Cette marge pourrait être :

- soit purement déterministe – des pas de 1 ou 5%
- soit fonction d'une règle optimale $f(PVL)$ observée sur une analyse à une période. (c'est cette règle là qui nous intéresse par la suite)

Quelle règle idéale se donner pour $f(PVL)$?

- l'idée : utiliser l'allocation optimale d'une vision comptable à 1 période en faisant bouger le stock de plus values latentes de départ
- la méthodologie : s'appuyer sur un contrat fictif de durée 1 an (où 100% des plus values latentes sera réalisé à la fin de la période au profit 15/85) pour définir en fonction du stock de PVL initial l'allocation optimale selon la règle modifiée choisie qui donne une préférence aux actionnaires:

$$\text{Max } E(R(\text{Actionnaires})) \text{ sc } E(R(\text{prestations})) = \text{Taux cible} = 100\% * r$$

Avec une préférence pour l'actionnaire si le taux cible n'est pas atteignable en moyenne.

Est-ce équivalent à la vision économique à 1 an ? oui, de par le fait que tous les actifs sont vendus à la fin de l'année 1, mais pas tout à fait dans la mesure où à l'initiation, le capital est renforcé de la réserve que constitue le stock de plus-values latentes qui agit comme une dette subordonnée (appelée en cas de solvabilité, sinon préservée).

Le modèle est réécrit en fonction des variables suivantes : PVL le stock de plus values latentes relatives à la poche risquée, α l'exposition en actifs risqués :

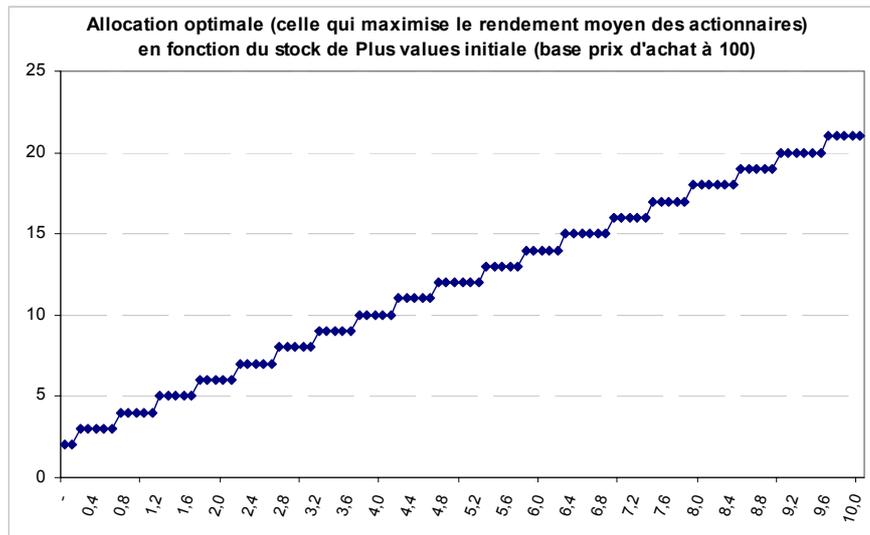
$$q_0^{\text{actions}} = \frac{(100 + PVL)\alpha - PVL}{A_0}$$

$$q_0^{\text{Gov}} = 1 - q_0^{\text{actions}}$$

$$S_0 = PMA_0 + PV^S = 100 + \frac{100PVL}{(100 + PVL)\alpha - PVL}$$

Le stock de PVL en $t=1$ aura évolué en fonction de la performance du marché Actions et contribuera positivement ou pas à la vente de l'actif en fin de période.

Marge d'allocation optimale avec un horizon d'un an en fonction du niveau de PVL initial :



Plus la réserve que constitue le stock de plus-values sera élevée, plus la marge de manœuvre pour l'actionnaire sera grande, et il pourra se permettre d'augmenter son niveau de prise de risque (au travers de son exposition action) et tout en satisfaisant l'assuré. Nous le verrons dans la partie des résultats.

3.4. Résumé des principaux mécanismes du bilan

La démarche suivie s'appuie sur une lecture optionnelle simplifiée du bilan d'un assureur Vie sur la base d'une vision mono période puis enrichie par une vision des risques multi-périodes.

La prise en compte des mécanismes comptables complexifie considérablement la lisibilité des résultats.

Cette étape illustre néanmoins bien la complexité du choix d'investissement à laquelle l'assureur fait face de façon pratique:

- ✓ un choix en termes d'efficacité économique,
- ✓ qui doit rester compatible avec une efficacité comptable et
- ✓ tout prochainement respecter aussi une efficacité règlementaire.

C'est à la lumière des ces trois axes d'analyse, que les choix d'investissement s'opéreront.

Nous analyserons ainsi, dans la seconde partie relative aux résultats, respectivement, comment piloter de façon optimale l'exposition au risque action, puis au risque crédit, à la lumière des trois axes d'efficacité économique, comptable et règlementaire.

Seconde partie

Analyse des résultats

Chapitre 4

4. Piloter son allocation d'actifs Actions sous contrainte : comment rester maître de son allocation stratégique sous contrainte de solvabilité?

Les positions Actions sont en forte diminution dans les portefeuilles des assureurs vie, 7% sur la zone euro, plutôt de l'ordre de 10% sur la France.

Quelles sont les raisons à ce mouvement ? la volatilité comptable induite, un risque économique fort, et une polémique importante sur le coût en capital dans le nouveau régime règlementaire à venir.

Grâce à la modélisation décrite dans les chapitres 2 et 3, et dans le cadre défini au chapitre 1, nous nous attacherons à illustrer les points précédents, en mettant en évidence quelle exposition action apparait optimale, l'efficacité qu'elle apporte dans un bilan, et les solutions à base d'options vanilles pour conserver une exposition à l'actif actions, tout en maîtrisant la satisfaction économique des deux agents principaux (assureur et assuré) et réduire le besoin en fonds propres induit par la classe d'actifs Actions.

4.1. Construction d'une allocation d'actifs simples dans un cadre Actions / Taux constant dans le 1^{er} cadre de vision des risques (mono-périodique)

4.1.1. Un rappel général des hypothèses choisies pour l'analyse quantitative

- ✓ Le bilan d'un assureur vie « moyen » nous fait choisir une maturité des contrats de 8 ans.
- ✓ Quelle structure de bilan prendre comme point de départ de l'analyse ?
 - La structure du bilan reflète la richesse de l'assureur (notamment le montant de plus-values latentes en comptabilité française, soit le niveau de surplus de fonds propres relatif aux engagements).
 - Afin d'être le plus proche de la réalité, nous avons choisi de nous baser sur une structure moyenne du marché des Assureurs vie – Cf Argus de l'Assurance.
 - Le niveau des Fonds Propres relatif est supposé de 4%
 - Nous prendrons par ailleurs comme hypothèse que toutes les réserves sont nulles. Il est important de garder cette hypothèse en tête dans l'analyse des résultats. Toute existence de réserve apportera donc une marge de manœuvre supérieure, dans la gestion de sa marge de solvabilité.
- ✓ Autres paramètres :
 - Un cadre d'évolution des taux constant : 3.5%.
 - Les actifs sont diffusés tels qu'explicités au Chapitre 2, avec des hypothèses de rendement-risque conservatrices. Nous avons choisi une prime de risque de 4.5% et une volatilité de 30% (très au-dessus du niveau historique de long terme, proche de 20%). Pourquoi choisir un tel niveau de volatilité ? Afin de ne pas biaiser l'analyse, et de manière à ce que l'analyse soit robuste. En effet, observer une volatilité historique de 30% est rare. Si dans un tel contexte là, les dérivés apportent une solution, alors dans un monde à 20%, cela n'en sera que plus facile.
 - La volatilité implicite est supposée égale à la volatilité historique, ce qui par contre est agressif (une prime positive est observée en historique de l'ordre de 1.8%).
 - Le bilan est valorisé selon les relations explicitées au chapitre 2, la dynamique étant obtenue grâce à une simulation des actifs (10000 scénarios générés en Monte-Carlo).
 - Différents portefeuilles d'actifs sont analysés, pour des parts d'actions variant de 0 à 100% (et respectivement de 0 à 100% pour l'exposition en obligations sans risque).

4.1.2. Résultat dans le cadre économique simplifié mono-période (modèle MSE)

4.1.2.1. Une première analyse de l'allocation optimale des actifs du bilan, sur des actifs traditionnels, actions et taux :

En fonction de la part de l'actif investi en Actions, nous regardons comment évolue :

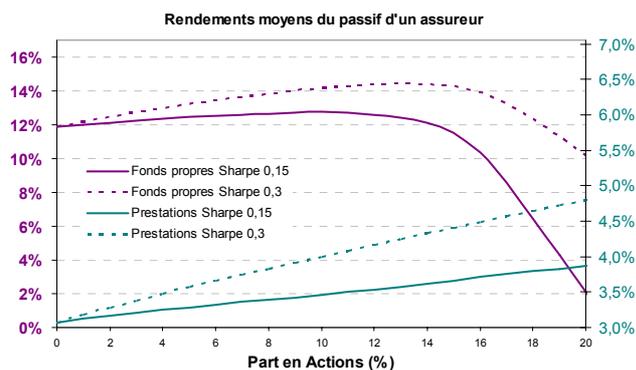
- La rémunération moyenne des Fonds propres et des Prestations
- Les indicateurs de risque
- L'indicateur règlementaire : SCR sous Solvabilité II

4.1.2.1.1. Premiers résultats

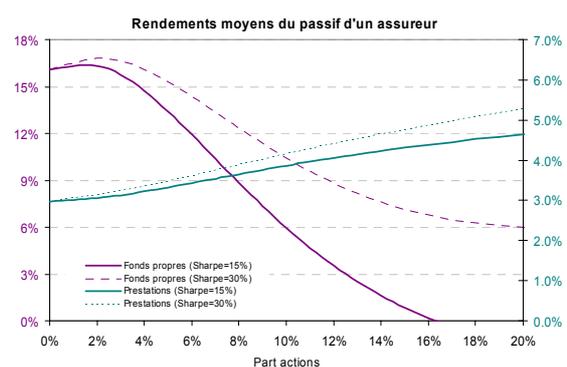
Sans surprise, on retrouve la relation asymétrique dans le partage de rémunération et de portage du risque entre assurés et actionnaires :

- ✓ Des assurés, qui protégés par leur taux minimum garanti, dans la majorité des scénarios, ont un appétit clair pour la prise de risque dans les allocations, au travers de l'exposition en actions. En effet, le rendement moyen des prestations est une fonction croissante de la part en actions dans l'allocation du bilan.
- ✓ Des actionnaires, qui apparaissent averses au risque, dès que les allocations en actions dépassent un niveau. Le rendement moyen des actionnaires est d'abord croissant puis décroissant de la part en actions dans l'allocation du bilan

Vision à maturité:



Vision à horizon 1 an :



Un résultat nous intéresse, c'est la part limite d'actions à partir de laquelle la probabilité de faillite de la compagnie est supérieure à 0.05% : elle est compte tenu de la structure du bilan initial (des fonds propres représentant 4% de l'actif) de l'ordre de 13% pour une exposition risquée essentiellement en Actions.⁶

Compte tenu des paramètres choisis initialement, il est possible de trouver une exposition actions qui maximise le rendement moyen des actionnaires (par rapport à une situation où le bilan n'est composé que d'actifs sans risque), tout en améliorant celui des assurés.

Avec une vision annuelle, ce niveau optimal est proche de 2.5%, soit très faible !

Si on recherche au minimum de maintenir le niveau de rendement de l'actionnaire à celui sans actif risqué, il passe alors à presque 5%, pour un assuré bien mieux servi (+15bps).

Ces expositions sont particulièrement faibles, par ailleurs leur consommation en fonds propres est élevée (en Standard le SCR s'élève, sans effet de diversification sur les taux à 45% de la valeur de marché de l'actif Actions).

⁶ Les paramètres de prime de risque et de volatilité influencent bien entendu ce résultat, la structure du bilan aussi (notamment le niveau de levier : plus il serait élevé, plus l'exposition limite sera forte).

4.1.2.1.2. Impact sur l'allocation optimale de la volatilité de l'actif risqué

Conformément à l'intuition, plus l'actif risqué sera volatile, moins il sera présent dans les allocations d'actif des assureurs vie, le risque induit de faillite devenant trop important pour l'assureur.

4.1.2.1.3. Premiers constats

Premier constat naturel :

L'asymétrie sur le portage et la rémunération du risque freine l'introduction de l'actif Action dans les actifs du bilan d'un assureur vie, renforcée par une pénalisation accrue des actions sous Solvabilité II.

Second constat : le cadre des actifs simples légitime la recherche d'alpha dans la gestion d'actifs *traditionnelle* :

- ✓ Introduire un actif avec un alpha supérieur, sans augmenter son poids, améliore le rendement moyen des agents, assurés et actionnaires.
- ✓ Exemple au travers de la substitution d'un actif avec un Sharpe de 0.15 par un actif avec un Sharpe de 0.30

4.1.2.2. Les solutions asymétriques donneraient-elles une réponse ?

4.1.2.2.1. Intuitions

- ✓ L'introduction d'un actif asymétrique réduit le risque sur les événements extrêmes
- ✓ L'actionnaire aurait donc une tolérance au risque supérieure.
- ✓ Ce nouveau budget de risque autoriserait une nouvelle allocation d'actifs plus rémunératrice qui servirait des rendements moyens supérieurs aux assurés, à rendements moyens constants des actionnaires.

L'introduction de stratégies asymétriques sur la poche risquée donnerait une nouvelle piste de solution pour améliorer l'intérêt des actionnaires et des assurés, et peut-être permettre aux assureurs de maintenir une exposition à l'actif actions, dans un environnement actuel où de plus en plus d'assureurs se posent la question de réduire fortement leur allocation actions.

4.1.2.2.2. Analyse économique des solutions asymétriques à base de dérivés

Nous proposons ici d'analyser sur une maturité 1 an (comme vu précédemment, c'est l'horizon comptable minimum incontournable de gestion du bilan de l'assureur) les quatre familles Actions + options simples, structurées de manière à conserver une exposition stable aux actions, dans une optique statique (les options choisies de même maturité que l'horizon d'analyse sont détenues en Buy & hold jusqu'à leur maturité).

C'est la famille des stratégies convexes qui apparaît comme un moyen optimal pour structurer son exposition à l'actif risqué sans la réduire:

- ✓ stratégie systématique d'achat d'actions couvertes (par un put dans la monnaie)
- ✓ stratégie systématique d'achat d'actions couplé à un achat de call hors de la monnaie

Méthodologie utilisée pour introduire un actif couplé avec un dérivé ?

L'objectif ici est de positionner l'actif dérivé comme un actif de substitution aux Actions, dans le cadre d'investissement détaillé.

La stratégie consistera donc à maintenir une exposition Action constante, par rapport à une position sans dérivé, pour une juste comparaison des stratégies:

- Un achat ou une vente d'options simples
- Combinée à un actif Action dans les mêmes proportions

On écrit ainsi toutes nos stratégies (action seule, action +/- call, action +/- put) comme l'actif A suivant : $A_0 = a_0 B_0 + a_1 S_0 + a_2 D_0$, avec

- B_0 : bon de capitalisation de nominal 100 $B_t = 100e^{rt}$
- S_0 : action $S_t = 100e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$, avec $\mu = r + \text{prime} - \text{div}$
- D : option vanille call ou put sur S de maturité T1 et de strike K, de prix D_t à date t

Par hypothèse, nous prendrons en fait $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda$, de manière à être en ligne avec les règles du Code des assurances relatives aux instruments à terme (instruments éligibles si l'actif sous-jacent est détenu en portefeuille dans la même proportion). Cette indexation de l'option est calibrée de sorte que l'actif initial

$$A_0 = a_0 B_0 + \lambda(S_0 + D_0)$$

exhibe le delta désiré, c'est-à-dire la quantité α d' « actions » unitaire équivalente :

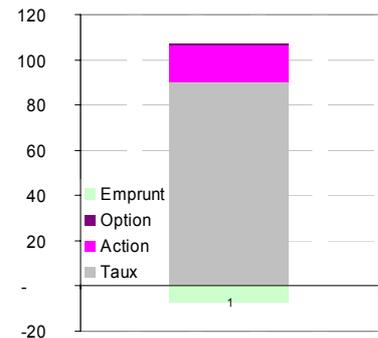
$$\lambda(1 + \Delta_V) \frac{S_0}{A_0} = \alpha.$$

La partie monétaire est ensuite ajustée pour respecter l'investissement nominal de 100 (ou A_0):

$$a_0 = [100 - \lambda(S_0 + V_0)] \frac{1}{B_0}$$

On a donc à toute date :

$$A_t = a_0 B_t + \lambda(S_t + V_t)$$



Contraintes : solvabilité et budget

Nous n'avons pas encore cité les contraintes qui limitent le nombre de stratégies admissibles :

- Solvabilité économique : nous prenons pour contrainte de limiter la probabilité de ruine à 1Y à 50 bp, le même niveau de confiance que celui de Solvency II. On convient que ruine \Leftrightarrow FP < 0, i.e. rendement actionnaire = -100% : $P(\text{FP} < 0 \text{ à } 1Y) < 0.5\%$
- Contrainte de budget / levier maximal : l'assureur peut emprunter pour financer son investissement, mais dans une certaine limite. On testera donc 2 contraintes sur le budget
 - B1 : pas d'endettement au-delà la poche monétaire $[(1 - \alpha)B_0 - a_0 B_0] \leq (1 - \alpha)B_0$, i.e. $\lambda(S_0 + V_0) \leq 100$.
 - B2 : pas d'endettement au-delà de 2× la poche actions (en s'inspirant des limites imposées aux FCP actions UCITS 3 ou de droit commun) $[(1 - \alpha)B_0 - a_0 B_0] \leq \alpha S_0$, i.e. $\lambda(S_0 + V_0) \leq 200\alpha$

4.1.2.2.3. Illustration sur la famille {Action+put} :

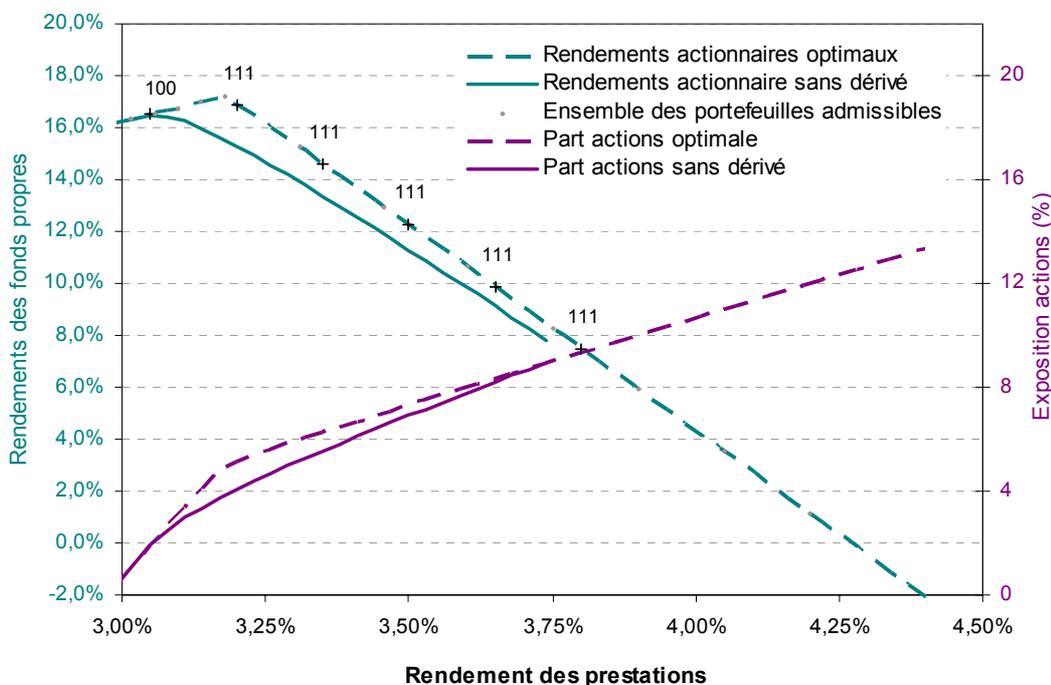
A rendement moyen des prestations équivalentes, il existe un portefeuille optimal, respectant les contraintes qui combine les trois actifs tel que :

- Le rendement moyen des actionnaires augmente jusqu'à 1.6% annuels selon le niveau de rémunération moyenne des prestations

- L'allocation d'actif a évolué vers une poche d'actifs risqués plus importante (grâce à l'introduction d'asymétrie)
- Les portefeuilles optimaux sont des combinaisons stables d'actions et de Put de maturité 1 an, et de strike 111

L'introduction d'un dérivé permet, sous contrainte de solvabilité et de contraintes d'implémentation (B2), d'augmenter le rendement moyen de l'actionnaire, à rendement de prestation moyen de l'assuré fixé, ou d'atteindre des rendements moyens supérieurs pour les deux agents.

Nous privilégions la première approche.



Un exemple chiffré : partir d'une cible de rémunération moyenne des Fonds propres de 15%.

Sans dérivé, l'allocation qui permette en moyenne un rendement de l'actionnaire de 15%, est composée de 4.3% d'Actions et 95.7% d'Obligations sans risque. Le rendement moyen de prestations associées est de 3.2%.

Avec introduction de dérivé (comme explicité plus haut), c'est la stratégie ci-dessous qui apparaît optimale :

$$A_0 = a_0 B_0 + \lambda(S_0 + D_0)$$

avec $\lambda=0.12$ et le strike du put de maturité 1 an de 111. L'exposition induite de la stratégie aux actions (via S et l'option) est ainsi de 5.4% à l'initiation de la stratégie.

	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,2%	3,2%	-
Rendement moyen des fonds propres	15,0%	16,4%	1,4%
VaR99.5%			
Actifs	1,1%	2,4%	1,3%
Fonds Propres	-23,4%	9,7%	33,2%
Prestations	2,1%	2,1%	0,0%
Allocation d'actif			
Obligation	95,7%	94,6%	
Action	4,3%	5,4%	
Structure de l'option Put			
Strike		111	
Indexation		12,0%	

Malgré un contexte d'analyse défavorable (taux bas et volatilités élevées), le gain est significatif (+1.4% sur le rendement moyen de l'actionnaire, tout en augmentant l'exposition à l'actif dit risqué)

Le supplément de prime nécessaire sur l'actif risqué pour amener le même gain en rendement moyen des fonds propres sans dérivés est de 3.2%, soit un doublement presque de la prime de risque.

La famille des solutions Actions convexes fournit une réponse adéquate pour optimiser la marge de solvabilité de l'assureur

L'introduction de stratégies optionnelles pour gérer sa marge de solvabilité, sous contrainte d'un taux de prestation cible est ainsi une voie qui apparaît séduisante.

Ces stratégies néanmoins introduisent un nouveau facteur : la volatilité implicite, alors que les assureurs étaient plutôt sensibles à la volatilité historique des actions, de par leur exposition à l'actif à des placements actions.

Au-delà du mismatch potentiel entre volatilités historique et implicite, l'introduction à l'actif du facteur de volatilité (par les puts Actions) est un **point bénéfique** car il vient compenser la volatilité vendue au Passif (au travers des garanties octroyées aux assurés).

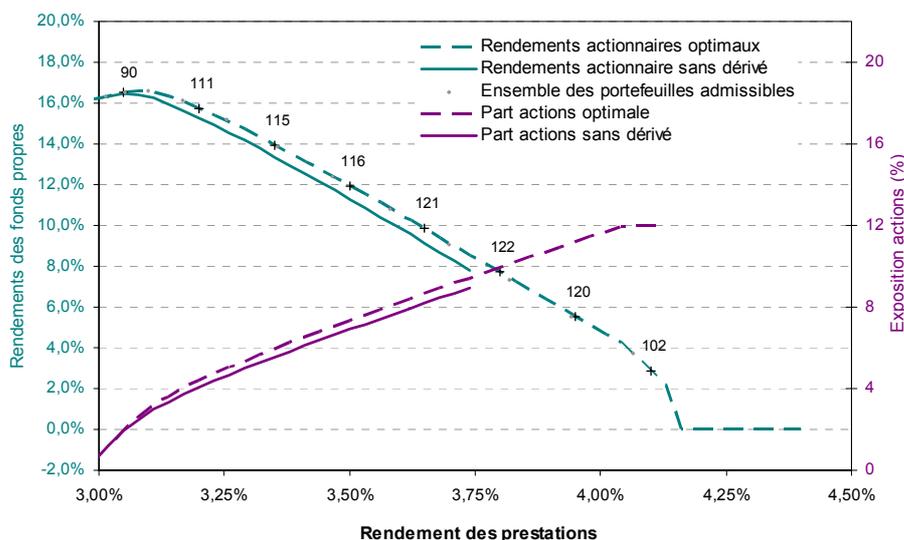
Nous ne nous attacherons pas à mesurer ici, quel serait le nominal d'options optimal de manière à matcher le risque de volatilité implicite des actions au passif.

4.1.2.2.4. Illustration sur la famille {Action+Call} :

La même analyse est effectuée. L'introduction d'une option d'achat pour piloter son exposition à l'actif risqué est une solution efficace pour maintenir une exposition, tout en augmentant les rendements moyens de l'assureur et des assurés.

Les résultats sont néanmoins moins efficaces que ceux de la stratégie précédente :

- Le rendement moyen des prestations versées à l'assuré augmente: entre 8 et 10 bps annuels selon le niveau de rémunération moyenne des Fonds propres
- Le besoin en capital n'est pas significativement réduit.
- L'allocation d'actif a évolué
- vers une poche d'actif risqué plus importante (grâce à l'introduction d'asymétrie)



	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,2%	3,2%	-
Rendement moyen des fonds propres	15,0%	15,5%	0,5%
VaR99.5%			
Actifs	1,1%	1,5%	0,4%
Fonds Propres	-23,4%	-13,4%	10,1%
Prestations	2,1%	2,1%	0,0%
Allocation d'actif			
Obligation	95,7%	95,3%	
Action	4,3%	4,7%	
Structure de l'option Put			
Strike		120	
Indexation		3,4%	

Les deux stratégies qui apportent de la convexité à l'actif du Bilan apparaissent ainsi comme deux alternatives intéressantes pour conserver une exposition Actions, tout en optimisant la rémunération moyenne des actionnaires et des assurés.

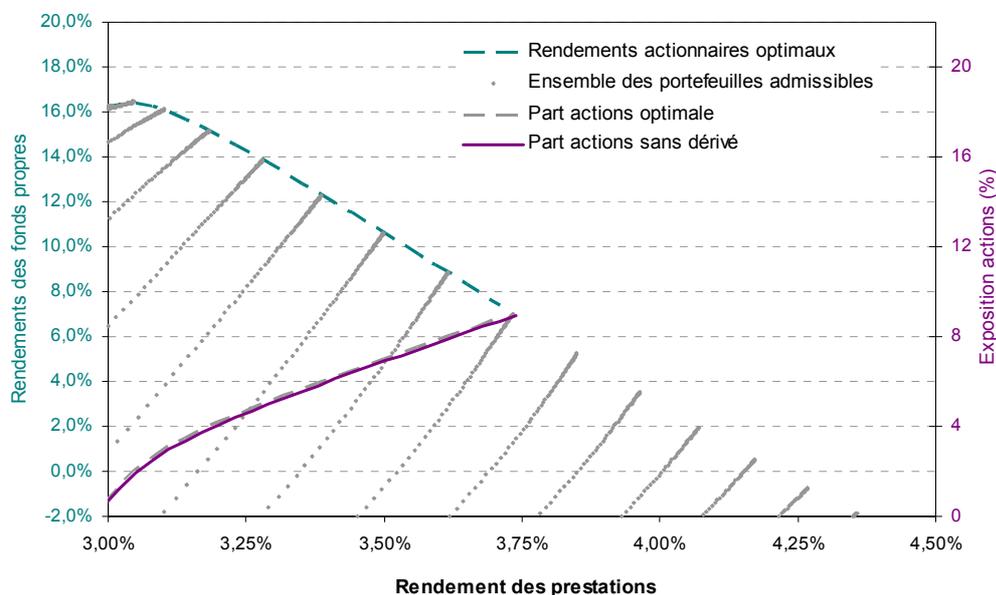
Nous analyserons en partie 4.1.2.2.9 l'impact en besoin en fonds propres des deux solutions.

4.1.2.2.5. Illustration sur la famille {Action-Call} :

L'analyse révèle que de manière structurelle, l'assureur n'a aucun intérêt à introduire des ventes d'options d'achat dans son bilan.

Il n'y a aucun portefeuille, combinaison d'actions et de vente de call qui structurellement améliore le rendement moyen de l'assuré ou de l'actionnaire.

Cela ne présume pas d'opportunités tactiques bien entendu. Structurellement, à exposition fixée, la vente d'option d'achat n'est pas souhaitable dans le bilan d'un assureur vie.



Ce résultat est aussi fortement lié à l'hypothèse initiale que les volatilités historiques et implicites sont identiques en moyenne.

La présence d'un spread positif entre la volatilité implicite et la volatilité historique aurait un effet positif sur l'introduction de stratégie de vente de call dans la gestion d'une exposition Actions.

4.1.2.2.6. Et dans un monde réel ? avec un niveau de taux plus élevé et une volatilité plus basse ?

Les résultats résistent parfaitement aux changements de paramètres :

- Les allocations optimales en actifs risqués sont stables (entre 4 et 10%) pour une cible à 15% de rémunération des Fonds propres
- Un gain apporté par la stratégie dérivée au pire préservé
- Une réduction du besoin en fonds propres estimée encore plus importante

Cas où les taux sont égaux à 4.5% :

	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	4,46%	4,46%	-
Rendement moyen des fonds propres	15%	16%	1,29%
Besoin en capital (SCR equity)	2,70	1,62	-40%
VaR99.5%			
Actifs	-0,3%	2,7%	3%
Fonds Propres	-71,9%	1,8%	74%
Prestations	2,7%	2,7%	0%
Allocation d'actif			
Obligation	91,6%	91,0%	
Action	8,4%	9,0%	
Structure de l'option Put			
Strike		112	
Indexation		19,3%	

Cas où la volatilité est de 20% :

	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,36%	3,36%	-
Rendement moyen des fonds propres	15%	17%	1,82%
Besoin en capital (SCR equity)	2,30	1,07	-53%
VaR99.5%			
Actifs	0,6%	2,4%	2%
Fonds Propres	-35,4%	9,0%	44%
Prestations	2,1%	2,1%	0%
Allocation d'actif			
Obligation	92,8%	92,0%	
Action	7,2%	8,0%	
Structure de l'option Put			
Strike		108	
Indexation		17,7%	

4.1.2.2.7. Analyse règlementaire des solutions asymétriques à base de dérivés

Le besoin en capital devient un critère déterminant dans le choix de la stratégie dérivée. Quel besoin en capital, les solutions optimales trouvées grâce à l'optimisation économique induisent-elles ?

Il ne s'agit pas ici d'utiliser l'axe règlementaire comme un axe d'optimisation sous contrainte d'un capital minimum par exemple (un niveau identique par exemple de 4% à Solvabilité 1), mais simplement d'en déduire, quels seraient les coûts induits par la mise en place à l'actif des deux stratégies convexes retenues.

Nous avons parfaitement en tête que notre modèle ainsi construit, sur la base notamment d'une estimation de marché de la valeur des Passifs, et non de la vraie valeur actuelle des engagements de l'assureur, que ce soit au travers de la participation fixe (taux minimum garanti) et de la participation variable, ne permet pas de mesurer le pouvoir d'absorption du Passif en terme de besoin minimum en capital.

En effet, via la participation aux bénéfices futures, un choc sur l'actif entrainera une valeur du Passif plus faible, et la chute de l'actif sera ainsi compensée (en partie seulement, du fait d'une participation aux bénéfices inférieure à 100%) par la baisse de la valeur du Best Estimate (Passif).

En moyenne, le pouvoir d'absorption pour des contrats où le taux minimum garanti est de 0%, serait de 50%, ce qui représente un gros impact sur le besoin final en fonds propres.

Ceci étant dit, il est néanmoins intéressant, sur la base de la formule Standard (ici QIS 4 et QIS5), d'évaluer la réduction de coût à l'actif, sans l'impact de diversification avec les autres risques de marché et les risques au Passif, apporté par l'introduction des stratégies optionnelles. Rappelons que le risque de taux n'intervient pas, il a été supposé parfaitement adossé.

Les actifs purs sont caractérisés par le SCR_{Mkt} instantané suivant (contexte QIS 4) :

Besoin en Fonds propres pour 100€ investis

Actions	32.0	
Actions + Put	17.9	-44%
Actions + Call	27.5	-14%

Nous rappelons que les stratégies convexes conservent une exposition de 100% aux Actions. En tant d'outil de pilotage, le niveau de Fonds propres, s'il était peu utilisé avant la crise, devient clé. Réduire le besoin en capital donne un levier important dans l'allocation des fonds propres de l'assureur.

Replacées dans le bilan, et en appliquant les allocations de portefeuille optimales (respectivement 4.3% et 5.4% sans et avec dérivé) sur chacune des deux stratégies cela donne le risque de marché initial à l'actif suivant, le risque de taux étant supposé parfaitement adossé :

Solvabilité 2	Action + Put (QIS 4)	Action + Put (QIS 5)
Sans dérivé	1,38	1,68
Avec dérivé	0,96	1,01
Gain	-30%	-40%

Solvabilité 2	Action + Call (QIS 4)	Action + Call (QIS 5)
Sans dérivé	1,38	1,68
Avec dérivé	1,30	1,54
Gain	-6%	-8%

La protection à la baisse des actions intégrées dans le portefeuille de Put sert de véritable amortisseur, indépendamment du niveau d'exposition qui était identique à un portefeuille qui serait investi 100% en actifs actions directionnels. Cette protection a été identifiée par le régulateur, et est bien comptée au titre des expositions nettes (Voir Spécifications techniques du QIS 4 Paragraphe VIII ou SCR12 dans le QIS5).

La prise en compte de l'axe réglementaire, au travers du calcul forfaitaire proposé dans le QIS 4 et le QIS 5, favorise ainsi dans la famille des stratégies d'actifs risquées, la stratégie {Action + Put}.

4.1.2.2.8. Pourquoi autant de convexité ? Est-ce souhaitable ?

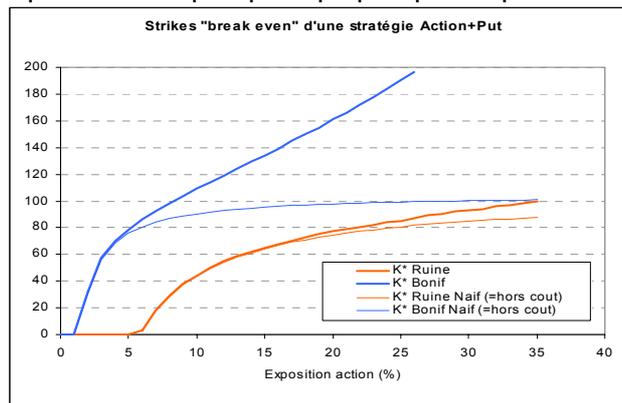
En théorie, l'asymétrie permet, par la réduction du risque (via les événements extrêmes), une exposition plus grande à la prime de risque au travers d'une nouvelle allocation d'actifs plus agressive.

Comment ce portefeuille peut-il à la fois améliorer le point de vue moyen des actionnaires et des assurés?

C'est l'introduction d'un actif asymétrique, qui par la réduction du risque (sur les évènements extrêmes), permet au travers d'une nouvelle allocation d'actif d'augmenter les rendements moyens des actionnaires et des assurés.

Comment expliquer que l'optimum en terme de rendement moyen soit atteint pour un put dans la monnaie (avec des niveaux de strike élevé) ?

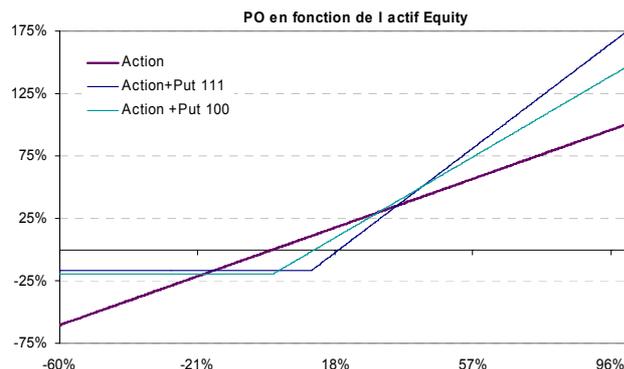
- ✓ La perte de la prime de l'option nécessite d'augmenter le niveau de protection
- ✓ Plus le strike est élevé, plus l'option sera chère (mais sa valeur temps plus faible)
- ✓ Le niveau de protection est donc de plus en plus élevé, et également l'effet de levier induit pour acheter la prime.
- ✓ C'est la combinaison quand le niveau de strike de l'option achetée augmente, de la réduction de la perte de valeur temps de l'option et de l'accroissement positif du levier via la prime de risque qui explique qu'un optimum est atteint.



Cet effet a été commenté dans les articles de Cees Dert & Bart Oldenkamp et Andre Lucas & Dert et nommé l'effet Casino.

Est-ce souhaitable ?

- La convexité de l'actif semble une propriété recherchée dans les périodes de faible couverture comptable (stock de plus values latentes faible) et de pression sur le besoin en fonds propres
- Une telle structure entraine néanmoins une forte tracking-error par rapport à une exposition delta one, qui ne sur-performe que dans les cas de fortes variations annuelles du marché.



Cet effet positif serait-il atténué par une prime VI-VH?

- L'introduction d'une prime (VI-VH) de 2% combinée à une analyse en moyenne efface l'avantage de l'introduction de stratégies vanilles dans l'allocation d'actifs (effet coût trop important sur le rendement moyen).
- Par contre l'analyse en VaR met en évidence le bénéfice de l'introduction de la stratégie d'achat de put : le coût d'assurance reste bénéfique pour une protection à la baisse.
- A noter que dans l'analyse en moyenne, l'achat de Put en dehors de la monnaie favorisera la réduction de l'impact VI-VH (surtout à horizon 1 an), et donc le coût en rendement sur la stratégie.

4.1.3. Résultat dans le cadre réglementaire simplifié mono-période (modèle MSE)

A la différence du paragraphe 4.1.2.2.7, nous choisissons ici un autre angle d'analyse, celui du pilotage réglementaire en vision standard et interne, avec un modèle qui s'appuie sur notre approche simplifiée économique MSE (avec tous ces biais de simplification du côté du passif notamment...).

Notre objectif ici, est de replacer les stratégies dérivées vanilles dans un cadre Rendement / Risque et de challenger la vision précédente en moyenne de l'assureur par une vision en risque (avec l'introduction de la mesure en VaR 99.5% 1 an de Solvabilité II).

Le programme d'optimisation revient alors à minimiser le besoin en Fonds propres, sous contrainte d'un rendement moyen des assurés donné.

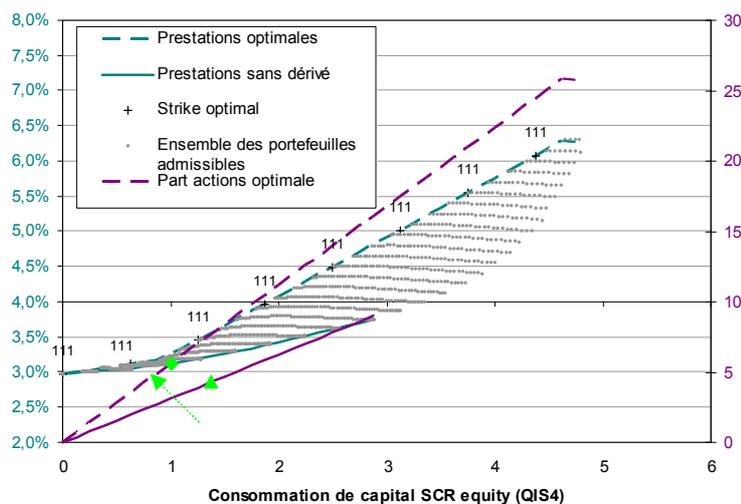
$$\text{Min}_{\alpha, K} (SCR_{Mkt}(\alpha, K))$$

sc

$$E(r_A(\alpha, K)) = \mu$$

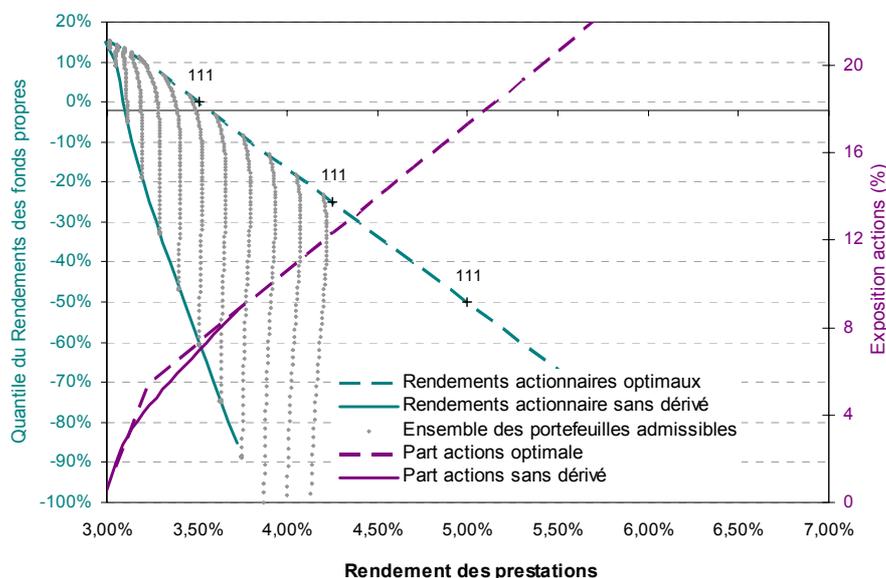
Le résultat de cette optimisation donne les mêmes portefeuilles optimaux que pour l'optimisation en moyenne.

Par exemple, ci-dessous, est représenté le graphe de résultats pour la famille Actions + Put, avec en abscisse le besoin en fonds propres (mesuré par le SCR_{Mkt} en formule standard tel que défini), et en ordonnée, le rendement moyen versé aux assurés.



	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,2%	3,2%	-
Consommation des fonds propres (SII - QIS4)	1,38	0,95	-43,1%
VaR99.5%			
Actifs	1,1%	2,4%	1,4%
Fonds Propres	-23,4%	10,0%	33,5%
Prestations	2,1%	2,1%	0,0%
Allocation d'actif			
Obligation	95,7%	94,7%	
Action	4,3%	5,32%	
Structure de l'option Put			
Strike		111	
Indexation		11,4%	

Si on utilise un critère plus proche d'un modèle interne, le quantile des fonds propres à 99.5% à un an, on obtient l'optimisation suivante à l'horizon un an :



	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,2%	3,2%	-
Rendement moyen des fonds propres	15,0%	16,4%	1,4%
VaR99.5%			
Actifs	1,1%	2,4%	1,3%
Fonds Propres	-23,4%	9,7%	-
Prestations	2,1%	2,1%	0,0%
Allocation d'actif			
Obligation	95,7%	94,6%	
Action	4,3%	5,389%	
Structure de l'option Put			
Strike		111	
Indexation		11,5%	

L'apport du dérivé est très net sur le quantile qui passe même positif, en réduisant à zéro la consommation équivalente de capital au titre du risque de marché (actions globales).

Par ailleurs, que l'on utilise le critère standard ou interne, les portefeuilles optimaux restent très proches et en phase avec l'optimisation réalisée dans le cadre économique en moyenne.

Il y a une convergence des optiques ALM et Solvabilité.

Le point de vue de l'assureur est bien mesuré par le programme de maximisation des rendements moyens des deux agents sous contrainte.

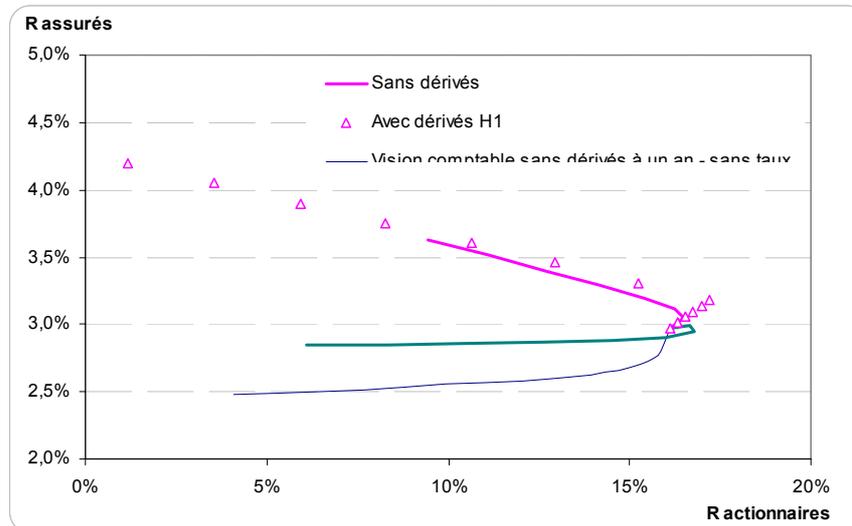
4.1.4. Une approche comptable entrainerait-elle de fortes variations d'interprétations ?

4.1.4.1. 1ere vision : mise en place du bilan (MSC) à une période

Une première analyse de l'allocation optimale des actifs du bilan, sur des actifs traditionnels, actions et taux donne comme attendu, des résultats très en défaveur d'une exposition aux actions.

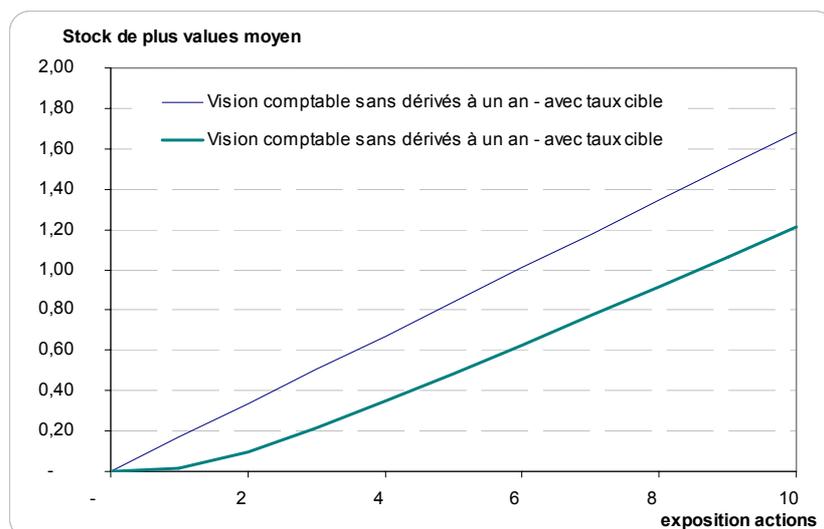
Ces résultats oublient néanmoins, un élément majeur, la réserve que constitue le stock de plus-values latentes

Comme attendu, les résultats en termes de rendement pour les assurés sont considérablement dégradés, néanmoins au-dessus du taux minimum garanti (2.1%).



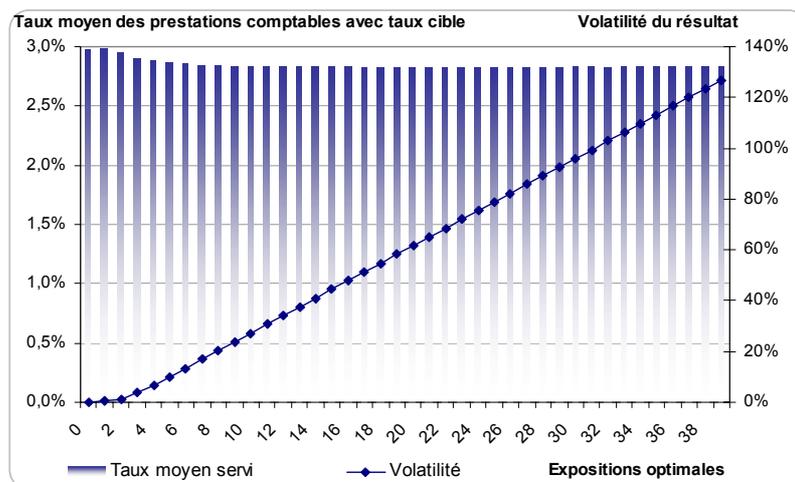
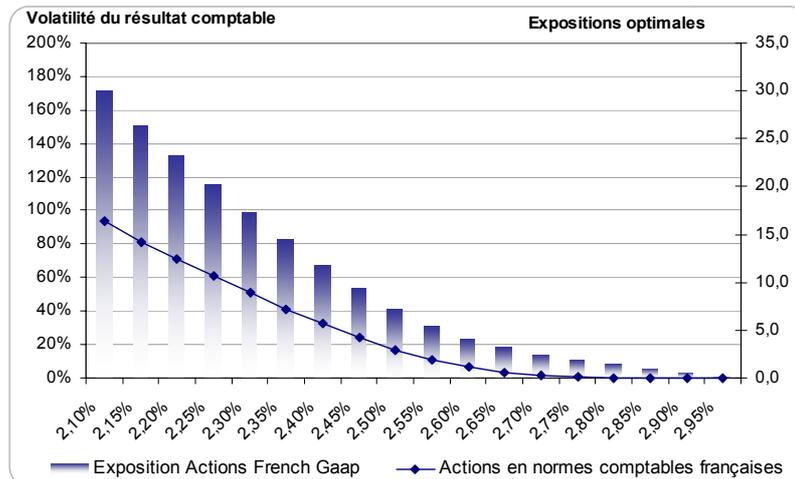
Si nous rajoutons une règle de réalisation des plus-values avec un taux cible pour la rémunération des prestations (taux cible = taux en vigueur = 3.5%), comme explicité au (2.4.3), le rendement moyen des assurés est plus élevé en moyenne, finalement assez peu sensible à l'exposition en actions de l'actif de la compagnie, puisque dans cette vision, les plus-values sur actions ne leur sont pas encore « acquises ».

Les actionnaires eux, restent très averses à une exposition au dessus de 2%...



La vision comptable est plutôt très défavorable à l'introduction d'actions dans les placements de la compagnie, de par la volatilité sur les fonds propres des actionnaires, qui sont impactés par toute provision PRE.

En effet, une autre vision illustre l'impact de l'introduction d'actions sur le résultat comptable en normes françaises en termes de volatilité, sans et avec taux cible respectivement :



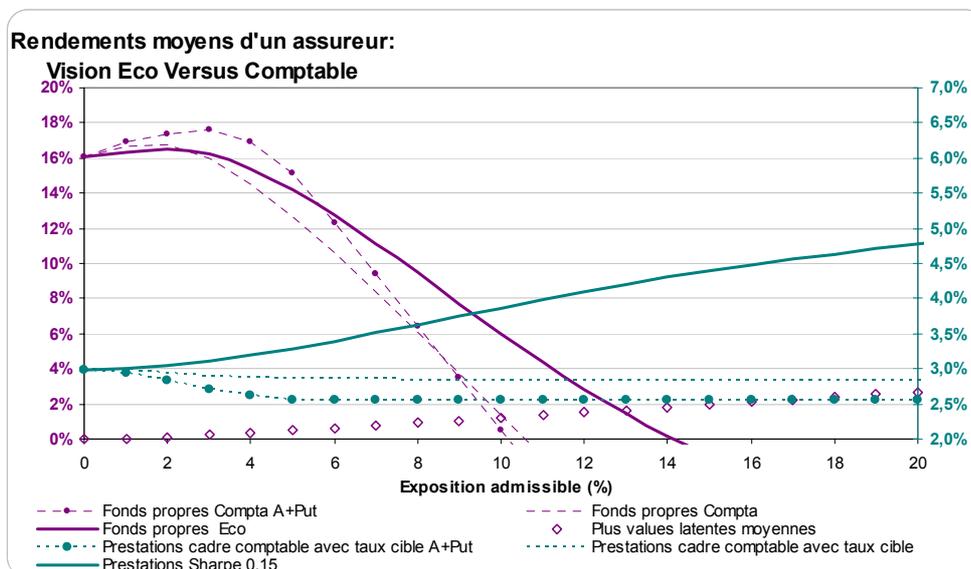
Bien entendu, dans un cadre IFRS, l'introduction d'actions induirait une volatilité soit sur les fonds propres, soit sur le résultat (et par conséquent les fonds propres également), et de façon différente qu'en FRGAAP.

Quel est l'impact comptable de l'introduction de dérivés dans ce cadre simplifié à un an de modélisation, avec l'objectif de taux cible et une stratégie Buy & hold ?

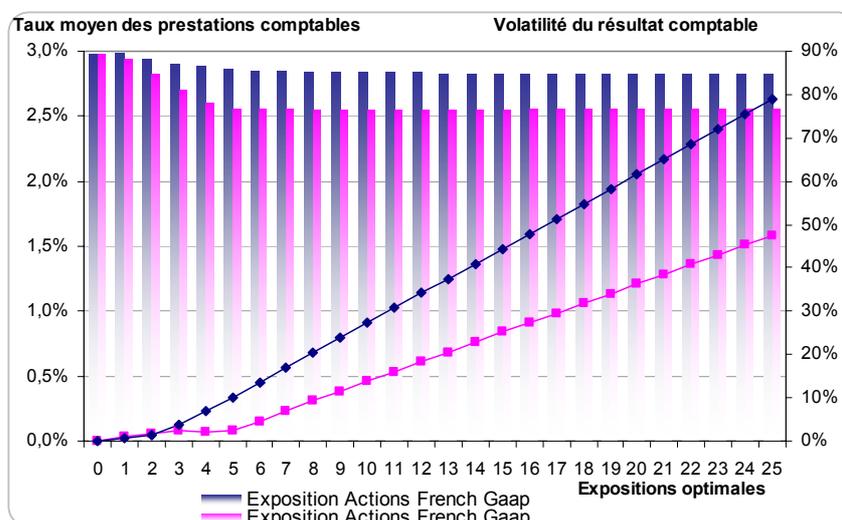
La vision en moyenne des rendements comptables des deux agents, avec l'introduction d'options de vente Put de maturité un an, illustre l'intérêt de l'actionnaire et la perte d'opportunité pour l'assuré qui voit le rendement moyen des prestations diminuer, du fait de l'achat de convexité.

Le programme d'optimisation dans le cadre comptable donne au sein de la famille Action + Put, les options de strike 111 toujours gagnantes.

Cette stratégie convexe permet pour certaines expositions d'augmenter le rendement moyen de l'assureur, de par la protection contre les événements adverses mais ne permet pas d'augmenter le rendement moyen servi aux assurés.



Du côté de la volatilité sur le résultat, on observe une tendance à la baisse, qui accompagne la baisse légère des prestations moyennes versées :



4.1.4.2. 2^{nde} vision qualitative (dans le cadre des normes IFRS)

Dans le cadre IFRS, que ce soit celui qui prévaut (IAS 39) ou celui qui sera mis en place en 2012 (IFRS 9), les actions sont comptabilisées en valeur de marché, avec un impact de cette variation de valeur de marché, soit d'abord par le résultat (trading) ou directement sur les fonds propres (AFS).

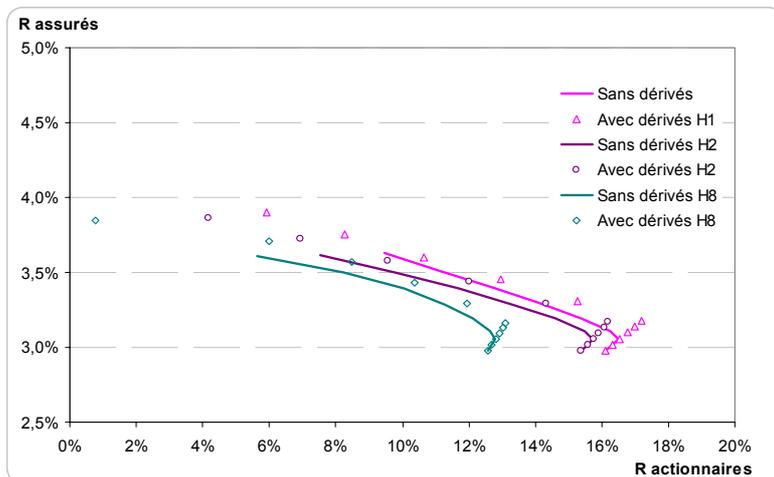
Dans ces deux cas, c'est le rendement de l'actionnaire qui est impacté et on se rapproche ainsi à l'actif de la vision purement économique qui a été développée dans le paragraphe 4.1.2, hormis l'effet sur la volatilité du résultat comptable.

4.2. La seconde vision des risques, multi-périodes, modifie-t-elle ces conclusions ?

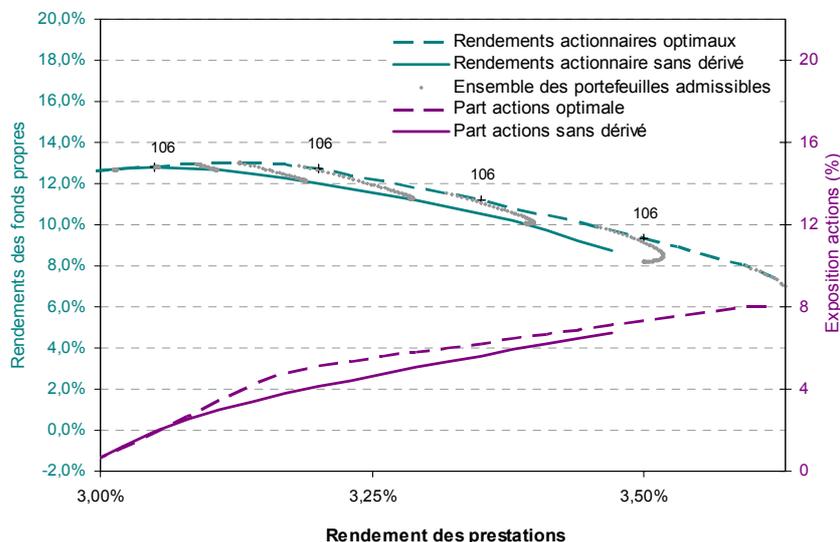
4.2.1. Résultat dans le cadre économique multi-périodes (modèle MDSEA)

Une vision multi-périodes permet-elle d'allouer une part des actifs plus importante que celle optimale déduite à l'étape annuelle, à l'actif Actions ?

En première analyse, reproduisons sur 8 périodes la simulation faite précédemment à un an. La vision en multi-périodes annuelle par ailleurs conforte les résultats sur l'intérêt d'une exposition risquée structurée de façon convexe, comme l'illustre ci-dessous les frontières efficientes aux horizons 1 an, deux ans et à maturité soit 8 ans.



Par exemple, reproduisons l'analyse faite à horizon 1 an à maturité, sachant que l'approche consiste en 8 sous périodes d'investissement, en optimisant le rendement moyen à maturité des actionnaires, pour un niveau moyen de prestations servi à échéance du contrat choisi à 3.25% :



Les structures optimales sont stables à maturité, que ce soit en termes d'allocation, de structure de l'option Put (avec un strike optimal entre 111 et 106) et de gain économique sur le bilan étudié.

En terme de consommation en fonds propres, dans la mesure où chaque année, c'est la même stratégie convexe qui serait mise en place pour satisfaire les deux agents, la réduction de capital telle que vue au paragraphe 4.1.2.2.7 reste stable sur toute la durée du contrat.

	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,20%	3,20%	-
Rendement moyen des fonds propres	12,0%	12,7%	0,7%
VaR99.5%			
Actifs	1,2%	2,4%	1,2%
Fonds Propres	-20,3%	9,7%	30,0%
Prestations	2,1%	2,1%	0,0%
Allocation d'actif			
Obligation	95,9%	94,9%	
Action	4,1%	5,13%	
Structure de l'option Put (dernière période)			
Strike		106	
Indexation		13,4%	

Nous l'avons bien vérifié numériquement en calculant à chaque début de période, le capital au titre du risque de marché Action.

C'est une vraie valeur ajoutée apportée par une telle stratégie, optimale dans un cadre économique et réglementaire.

Pour compléter cette analyse, et bénéficier au mieux de l'analyse multi-périodes, il serait intéressant d'introduire une allocation variable au cours du temps, celle-ci dépendrait, non pas comme vu au paragraphe 3.3.3.2 dans la vision comptable du stock de plus-values latentes, mais de la structure du bilan économique.

Il est logique d'anticiper qu'avec une vision annuelle, sur la base des mêmes provisions techniques, un levier des fonds propres de 10% ou 4% (niveau choisi) ne donnera pas la même latitude en termes de gestion de sa solvabilité, la tendance étant à une meilleure tolérance au risque, pour un actionnaire averse au risque.

Ainsi, une vision multi-périodes qui intégrerait ce paramètre en modifiant chaque année, l'allocation d'actif en fonction de la structure du bilan (une part croissante d'actions en fonction du niveau de levier) aboutirait certainement à une allocation optimale tolérée sur la période caractérisée par une exposition actions supérieure.

Nous avons mis en place, dans la partie suivante, ce programme pour l'approche comptable.

4.2.2. Résultat dans le cadre réglementaire simplifié multi-périodes (modèle MDSEA)

L'analyse réglementaire dans le cadre multi-périodes, rejoindrait comme précédemment les résultats précédents et le point 4.1.3.

4.2.3. Une approche comptable entrainerait-elle de fortes variations d'interprétations ? (modèle MDSC)

Au point 4.1.1, la lumière comptable n'avait pas particulièrement mis en avant la stratégie qui apparaissait optimale dans le cadre économique et réglementaire.

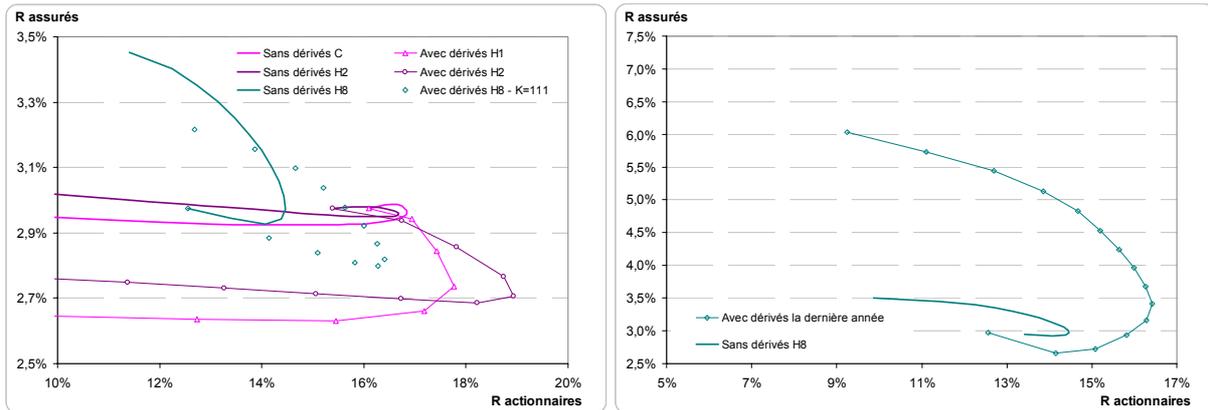
C'est bien cette raison, remettre en perspective une solution économiquement pertinente, qui nous a fait développer notre modèle comptable multi-périodes.

Nous avons mis en place les trois approches présentées dans la dynamique comptable :

- la première avec une simple stratégie Buy & hold des actifs en portefeuille, la stratégie dérivée venant se rajouter à l'exposition action présente en portefeuille,
- une seconde, où à chaque pas annuel, l'exposition Actions est re-initialisée à son niveau de départ si la stratégie est en plus value latente, sinon elle est inchangée, la stratégie dérivée venant ainsi se rajouter à l'exposition action présente en portefeuille (1 Put pour 1 Action).
- Une troisième, où comme précédemment l'exposition en actions est re-initialisée en présence de plus-values latentes, avec une marge additionnelle qui dépendra du stock de plus-values en question (cf paragraphe 3.3.3.2).

Nous ne présenterons que les résultats générés par les seconde et troisième approches, car la première approche présente peu d'intérêt d'un point de vue de recherche optimale d'allocation d'actifs.

Approche 2 : Une première visualisation : un graphe des rendements moyens annualisés des actionnaires versus celui des prestations, à 1 an ,2 ans et à maturité du contrat, avec et sans dérivés.

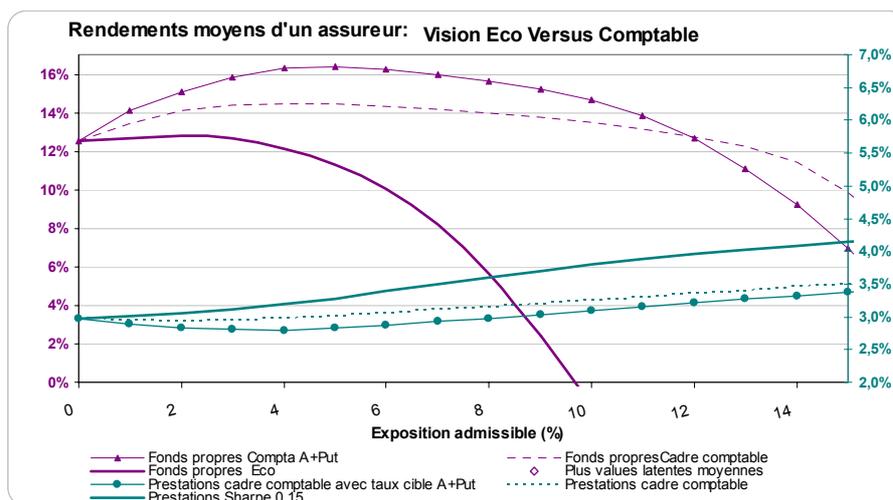


A maturité, les plus-values latentes présentes dans le Bilan sont distribuées, c'est ce que l'on visualise sur le graphe de gauche, dans la courbe verte pleine, qui a bien une forme proche de celles observées dans le cadre économique.

A la différence des années précédentes, la dernière année de vie du contrat, l'assuré recevra le taux garanti ainsi que l'ensemble des plus-values de l'actif, à hauteur de sa participation (ici 85%).

Le graphe de droite donne une vision des prestations servies en moyenne la dernière année : le fort gain la dernière année dans un cadre avec dérivé permettra, sur 8 ans, pour certaines allocations, d'apporter un gain moyen aux assurés par rapport à une allocation sans exposition risquée. L'assuré n'aura pas bénéficié pas en termes de rendement moyen, dans le cadre comptable, de l'effet cliquet qu'il aurait eu dans un cadre purement économique où le rendement financier annuel des actifs vient par chaque année, augmenter la provision mathématique, de manière acquise pour l'assuré.

Plaçons-nous à maturité, et l'ensemble des rendements s'entend comme le rendement moyen annualisé sur les 8 années du contrat :



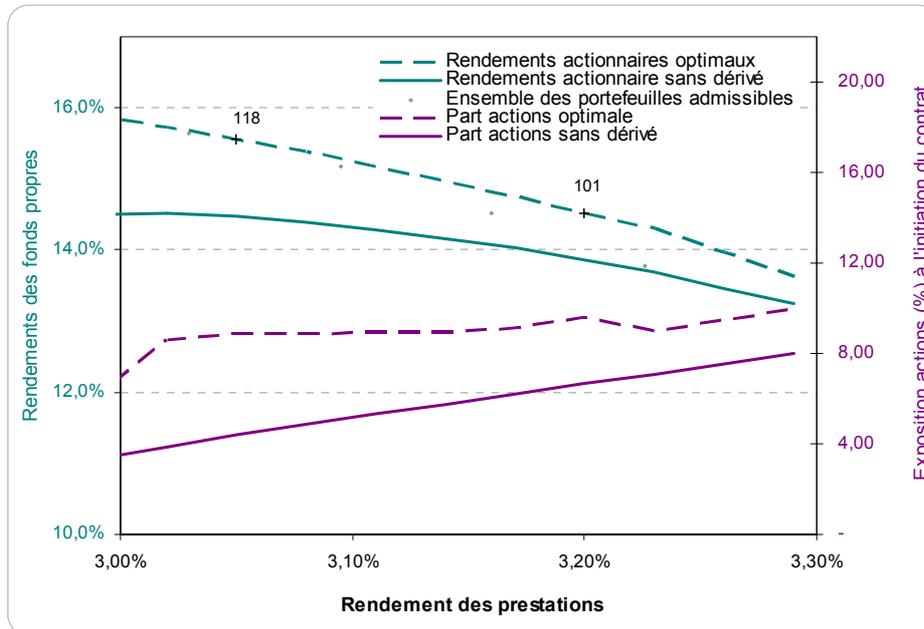
Si l'actionnaire a un intérêt certain à introduire une stratégie convexe pour son actif risqué, cela n'apparaît pas moins pour l'assuré qui voit son rendement moyen annuel réduit de l'ordre de 20bps.

Le coût de la couverture optionnelle systématique pour l'assuré (qui n'en perçoit pas les fruits pendant la vie du contrat) n'apparaît pas compensé sur la durée par le fort gain réalisé la dernière année (représenté par la réalisation du stock de plus-values latentes accumulé pendant la vie du contrat).

Approche 3 :

Nous avons mis en place le programme décrit ci-dessus, de manière à évaluer si l'utilisation du stock de plus-values latentes combinée à l'introduction d'actifs convexes permettait aux deux agents d'améliorer ou pas leur situation personnelle.

L'allocation d'actif pour chaque trajectoire simulée sera variable au cours du temps, et sera réinitialisée à chaque pas annuel, en présence de plus-values dans le bilan, à la valeur optimale estimée au paragraphe 3.3.3.2. La généralisation d'un tel programme sur un horizon de 8 ans donne les résultats agrégés ci-dessous :



	Sans dérivé	Avec dérivé	Gain
Rendement moyen des prestations	3,00%	3,00%	-
Rendement moyen des fonds propres	14,5%	15,8%	1,3%
VaR99.5%			
Actifs	3,1%	3,0%	0,0%
Fonds Propres	14,2%	14,0%	-0,2%
Prestations	2,3%	2,3%	0,0%
Allocation d'actif			
Obligation	93,4%	90,4%	
Action	6,6%	9,61%	
Structure de l'option Put (dernière période)			
Strike		101	
Indexation		3,0%	

Nous retrouvons ici bien un intérêt pour les deux agents à une allocation « convexe » de l'actif risqué en portefeuille, pour des niveaux d'exposition à l'initiation du contrat même supérieure à ce que nous avons pu anticiper (de l'ordre de 9-10%, elle chute en moyenne à 5.68% en fin de vie du contrat), presque 3% au-dessus d'une exposition initiale sans convexité (dérivé).

4.3. Conclusion sur la présence optimale d'une exposition sur actions dans le Bilan d'un assureur

Dans le contexte choisi de modélisation du bilan d'une compagnie d'assurance vie, la présence d'une exposition aux marchés des actions est une question grandement d'actualité. Elle l'a toujours été bien entendu mais elle est renforcée par la forte volatilité de ces actifs ces dernières années et la mise en application imminente (décembre 2012) des nouvelles normes prudentielles de Solvabilité II.

Nous nous sommes attachés à répondre à la question de quelle exposition optimale à l'actif Actions un assureur pourrait se permettre d'introduire dans son bilan tout en gérant sa contrainte de solvabilité, au travers d'une analyse que nous avons cherché à être la plus exhaustive possible. C'est-à-dire en se plaçant dans un cadre d'étude de la solvabilité d'un assureur vie purement économique, puis dans le cadre réglementaire de Solvabilité 2 et enfin dans le cadre le plus familier pour les assureurs, le cadre comptable.

A la lumière de ces trois cadres, il apparaît qu'un assureur non seulement peut mais plutôt doit conserver une exposition à l'actif Actions (pour autant que l'existence d'une prime de risque ne soit pas remise en question) pour satisfaire à la fois ses actionnaires et ses assurés.

Introduire de la convexité dans un Bilan permet ainsi de corriger l'effet asymétrique favorable aux assurés et de rééquilibrer le Bilan en faveur de l'actionnaire.

Et cette réponse est aussi valide dans le contexte de la pénalisation forte des actifs actions au sein de Solvabilité II.

L'actif Actions se révèle efficace, à la fois dans les cadres économique, comptable et réglementaire.

Cet actif apparaît d'autant plus efficace qu'il a structurellement une forme de convexité, de manière à protéger les actionnaires d'un événement de forte baisse des marchés actions qui leur serait très coûteux en consommation de capital à cause du taux minimum de revalorisation annuelle, et à faire bénéficier les assurés d'une exposition maintenue à un actif source de rendement (et de volatilité).

Cette forme de convexité prend ici la forme d'une stratégie Actions à laquelle est associée un achat d'option Put, de manière à ne pas réduire l'exposition Actions mais la maintenir.

Nous pensons que, si cette solution a toujours été efficace dans un cadre économique, la pression réglementaire qui va s'appliquer sur le marché de l'Assurance va favoriser les solutions Actions convexes, c'est-à-dire protégée à la baisse. Elles pourront prendre différentes formes, statique ou dynamique, en format de délégation ou assurée directement par les directions des investissements, et accompagner une gestion active qui recherchera un alpha sur la classe d'actifs actions.

C'est, nous le pensons, la clé de réussite pour maintenir une exposition même faible à un actif qui sur le long terme est le moteur de financement de l'économie.

Chapitre 5

5. Piloter son allocation d'actifs Crédit sous contrainte : comment rester maître de son allocation stratégique sous contrainte de solvabilité?

5.1. Construction d'une allocation d'actifs simples dans un cadre Obligation Corporate / Obligation sans risque dans le 1^{er} cadre de vision des risques (mono-périodique)

Comme dans l'analyse développée sur le risque Actions, il est intéressant de se poser la question du risque induit par les positions obligataires élevées en risque de crédit.

Des positions majoritaires dans les portefeuilles des assureurs vie : en 2008, 70% des placements des assureurs sur la France sont des placements obligataires. 2009 a certainement renforcé cette position, du fait d'une année très intéressante en terme de taux offerts par les titres obligataires.

Parmi ces 70%, 50 à 60% de cette poche porte sur des titres « corporates », avec une forte concentration sur des émetteurs financiers, et sur les « bons » rating de AAA à A.

Placements des assureurs français à fin 2008 :

Nature	% du total des placements	Corporate (hors financières)	Financières	Souverains	Global	
Titres de créance	68.2%					
Actions	9.1%					
Dérivés	0.1%					
OPCVM	4.1%					
Immobilier	1.3%					
Autres placements	17.3%					
		Court terme (<1Y)	0.5%	2.7%	1.0%	4.3%
		Long terme (>1Y)	5.0%	27.1%	31.8%	63.9%
		Global	5.7%	29.7%	32.8%	68.2%

après mise en transparence des OPCVM – source : ACAM

Qualité des placements obligataires des assureurs européens à fin 2008 :

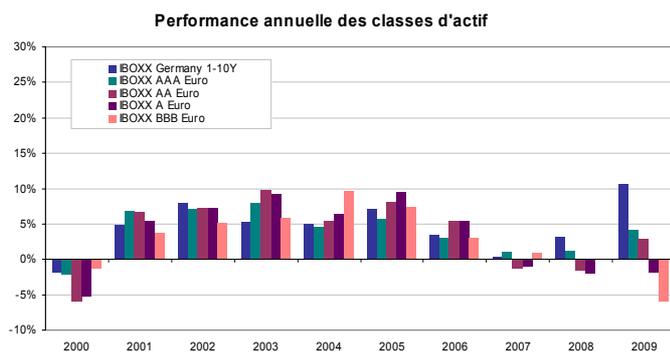
Classe de rating	Part dans l'investissement obligataire Corporate (%)	Duration médiane
AAA	37.8	4.4
AA	27.4	4.3
A	22.2	4.0
BBB	6.7	4.0
BB	0.8	3.7
B	0.5	3.3
CCC ou moins	0.1	3.8
Non noté	4.5	3.0

marché européen 2008 – source : CEIOPS/QIS4

Moins polémique que pour les actifs Actions, la crise de 2008 a néanmoins mis en lumière les actifs de crédit portent un risque, que ce soit au niveau de la variabilité des spreads ou au travers du risque de défaut.

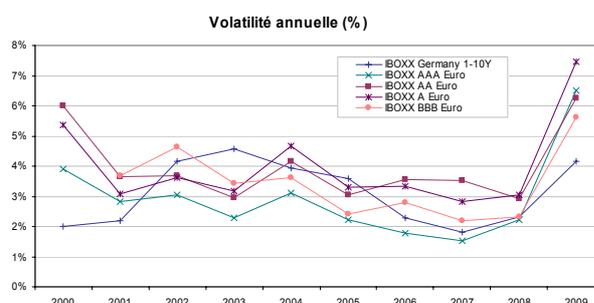
Sur la base des performances sur 10 ans, au sortir de la crise, les actifs les plus sûrs apparaissent plus que jamais comme les meilleurs candidats pour le cœur de portefeuille d'un assureur.

Mis en regard des engagements de long terme d'un assureur, faut-il pour autant aller jusqu'à tout investir en obligations souveraines ? Peut-on utiliser indifféremment AAA et AA en substituts, ou bien délibérément rechercher du rendement avec des expositions A/BBB ?



	Sharpe moyen sur la période
IBOXX Germany 1-10Y	0.42
IBOXX AAA Euro	0.22
IBOXX AA Euro	0.21
IBOXX A Euro	0.18
IBOXX BBB Euro	0.15
ML High Yield Euro	-0.07

	Volatilité annuelle (%)		
	2005	2007	2009
IBOXX Germany 1-10Y	2.3	2.3	3.0
IBOXX AAA Euro	1.8	2.2	7.5
IBOXX AA Euro	3.6	2.9	3.3
IBOXX A Euro	3.3	3.1	3.8
IBOXX BBB Euro	2.8	2.3	4.0
ML High Yield Euro	4.3	4.6	14.9



Il nous paraît ainsi important d'étudier et de mesurer le risque porté par un bilan d'assurance vie, grâce à la modélisation décrite dans les chapitres 2 et 3, et dans le cadre défini au chapitre 1.

Nous nous attacherons à mettre en évidence, dans les trois plans économiques, règlementaires et comptables, quelle exposition crédit apparaît optimale, l'efficacité qu'elle apporte dans un bilan, et l'existence ou non d'une discrimination en fonction du rating moyen et de la durée crédit tout en maîtrisant la satisfaction économique des deux agents principaux (assureur et assuré) et réduire le besoin en fonds propres induit par cette classe d'actifs. Enfin, des solutions simples à base de dérivé ou de stratégie de gestion, peuvent-elles aider au pilotage économique, tout en réduisant le besoin de capital règlementaire ?

5.1.1. Un rappel général des hypothèses choisies pour l'analyse quantitative propre au risque de crédit

Nous nous plaçons dans le même cadre mis en place pour l'analyse du risque Actions. L'objectif est ici de mesurer quel risque de crédit est souhaitable dans le bilan d'un assureur vie, avec un horizon d'analyse égal à l'horizon comptable, 1 an.

Pour ce faire, nous introduirons dans le bilan de l'assureur, à côté des actifs sans risque obligataires, différents risques de crédit, discriminés par leur rating moyen, du AAA au High yield, et leur maturité de 3 à 8 ans.

- ✓ Les taux sans risque sont toujours supposés constants, à 3.5%. Le risque de taux actif-passif est bien supposé adossé. Seule l'introduction du risque de crédit nous intéresse ici, comme nous l'avons regardé pour le risque Actions.
- ✓ Les actifs sont diffusés tels qu'explicités au Chapitre 2, avec les hypothèses précisées en annexe. Le modèle, calibré dans une optique stratégique (paramètres de « long terme »), rend ainsi bien compte du risque de défaut et de spread des obligations.

Pour rappel, sur le régime dit de « défaut », les probabilités de défaut sont celles historiques à horizon 1 an, discriminées en fonction du rating observé.

Le taux de recouvrement a été choisi en ligne avec le niveau historique observé sur 10 ans, 40%.

Pour le régime de « spread », les volatilités des spreads par rating (tranches AAA / AA / A / BBB / HY) s'appuient sur les niveaux historiques des indices JPMX, indices d'Asset Swap spreads, et les niveaux de spread courant sont déduits pour retrouver un niveau de ratio de Sharpe défini initialement.

- ✓ Nous supposons que tous les actifs ont le même niveau de ratio de Sharpe (0.2) afin de ne pas privilégier de façon stratégique un actif par rapport aux autres.
- ✓ Le bilan est valorisé selon les relations explicitées au chapitre 2, la dynamique étant obtenue grâce à une simulation des actifs (10000 scénarios générés en Monte-Carlo).
Différents portefeuilles d'actifs sont analysés, pour des parts d'actifs de crédit variant de 0 à 100% (et respectivement de 0 à 100% pour l'exposition en obligations sans risque).
- ✓ Comme pour l'analyse Actions, une contrainte permanente de **solvabilité économique** est ajoutée: en ligne avec les objectifs de Solvency II, les allocations étudiées respecteront toutes une probabilité de ruine inférieure à 0,5% à 1 an. Nous gardons à l'esprit, qu'un assureur prendra une marge de manœuvre par rapport à ce niveau de solvabilité, qui représente un risque encore bien trop grand s'il est atteint.
- ✓ Nous mesurerons l'optimalité des allocations en choisissant de maximiser l'intérêt de l'actionnaire (dans chacun des cadres économique, réglementaire et comptable) tout en visant une cible de rémunération moyenne pour l'assuré de 3.25% (taux de marché observé - 25 bps).

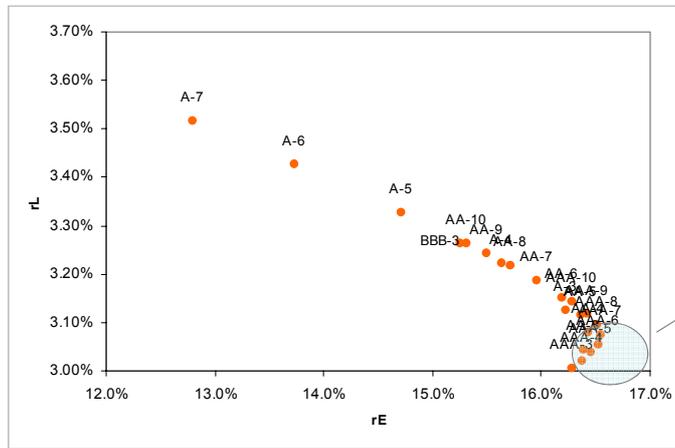
5.1.2. *Y a-t-il un rating moyen optimal pour gérer son exposition stratégique à un an au risque de crédit, d'un point de vue économique ?*

- ✓ Un premier constat :
 - l'asymétrie sur le portage et rémunération du risque freine de la même manière que pour le risque Actions, l'introduction d'obligations Corporate (le rendement profitant en effet aux assurés mais le défaut est supporté en grande partie par les actionnaires)
 - une pénalisation accrue sous Solvabilité 2 des actifs exposés au risque de crédit
- ✓ La méthodologie proposée :
 - le Sharpe traditionnel, malgré ses limites, reste central dans le picking d'actifs
 - nous proposons une mesure plus adaptée à l'ALM d'un assureur, qui distingue les intérêts des assurés et des actionnaires et tient compte de l'asymétrie de l'actif.

5.1.2.1. *Préambule : comment investir de façon optimale l'actif obligataire Corporate dit « risqué » sachant que 50% est investi en obligations souveraines supposées « sans risque » ?*

Un premier angle d'analyse consiste à prendre l'allocation moyenne des assureurs au niveau de leur poche obligataire comme un préambule, et sans optimiser cette répartition, chercher quelle serait l'allocation optimale de la partie Corporate, du point de vue de notre programme d'optimisation ?

C'est ce qui est représenté dans le graphe ci-dessous, à horizon 1an, le rendement moyen apporté aux actionnaires en ordonnée, et le rendement moyen servi aux assurés, en abscisse pour différentes allocations de la partie Corporate, discriminée par un rating moyen et une durée. A exposition figée (50% obligation sans risque / 50% obligations risquées), on observe l'incidence des caractéristiques « moyennes » de la poche obligataire sur les performances ALM.



On observe une zone sous-efficace économique
 AAA 3-4-5-6Y
 AA 3-4-5Y
 A 3Y

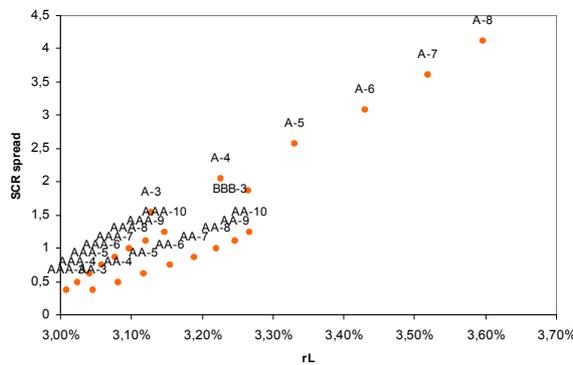
En dessous de A, seul le BBB de durée moyenne 3 an est admissible, l'exposition forfaitaire à 50% rendant les autres allocations de rating plus bas, non admissibles, du point de vue de leur solvabilité limitée.

En conclusion, sans optimisation par la taille, on illustre ici que privilégier une bonne rémunération des fonds propres passerait comme attendu par les actifs les plus sûrs, au détriment des prestations.

Dans ce cas, les durations les plus longues se montreraient plus efficaces.

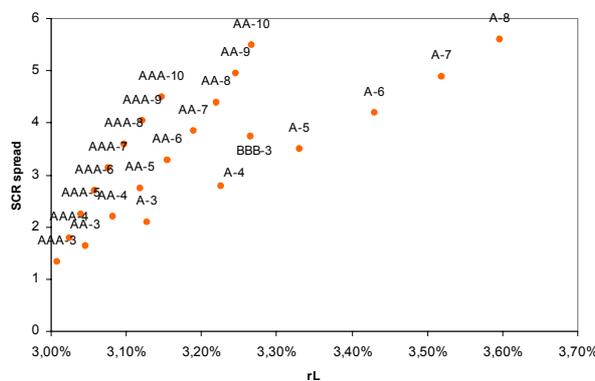
Si l'intérêt des actionnaires n'était pas représenté par le rendement moyen de son capital, mais par le capital réglementaire forfaitaire au titre de Solvabilité 2, qu'advient-il du résultat précédent, sans optimisation de l'effet taille sur la poche Corporate ?

La calibration faite pour le QIS 4 donne une première réponse. Nous la complétons par la récente calibration du QIS 5, sensiblement différente :



Vision QIS 4 :

→ des A atypiques : à cible moyenne de prestations données, un A exige plus de capital que les autres ratings



Vision QIS 5 :

→ Un respect de la hiérarchie rating / durée

→ Mais, pour servir un taux moyen de 3.25% aux assurés, vaut-il mieux du BBB 3Y ? Du AA 8Y ou du A 4Y ?

La vision réglementaire donne une autre illustration de la dualité des intérêts entre celui des actionnaires (mesuré par le SCR) et celui des assurés (mesuré par le rendement moyen des prestations).

Elle apparaît comme une clé d'allocation encore instable, même si le calibrage du QIS 5 n'induit plus, comme c'était le cas dans le QIS 4, d'arbitrage net de certains ratings. L'axe réglementaire, semble se rapprocher de l'axe économique, ce qui est bien le sens recherché. Il reste néanmoins un arbitrage de gain net au

profit de la classe A, en termes de capital minimum nécessaire, avec, par exemple une rémunération des assurés de 3.25% en moyenne.

Un véritable absent dans l'analyse ci-dessous, est l'optimisation de la taille de l'actif risqué (Obligations Corporates).

5.1.2.2. Quel rating moyen préférer sans contrainte de taille ?

Comme pour l'analyse du risque Actions, optimiser son exposition en actifs risqués permet de satisfaire les deux agents, assurés et actionnaires, en fonction de la préférence qui est donné à l'un ou à l'autre, ou aux deux.

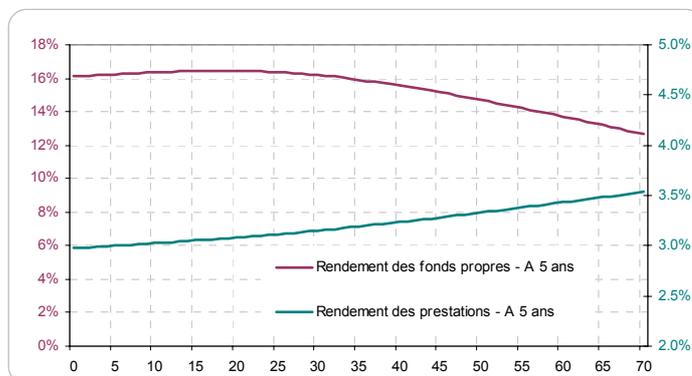
Prenons l'exemple ci-dessous, d'un actif de rating moyen A de durée 5 ans, à partir d'un seuil (environ 20%), le rendement moyen des actionnaires est pénalisé par une part d'actifs risqués trop importante dans le portefeuille d'investissement.

Le rendement moyen servis aux assurés est une fonction croissante de l'exposition à cet actif risqué.

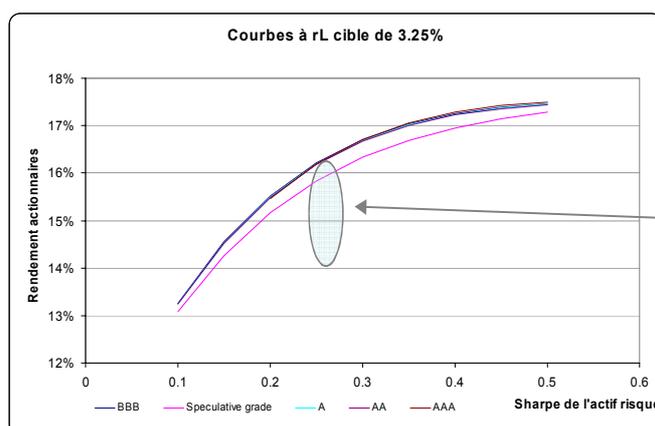
1ere observation : Sans actif risqué ($x=0$), le rendement moyen des prestations est de 3% et le ROE de 16%.

2ème observation : Une cible de ROE de 15% suppose une exposition de $x=47%$ en A 5Y.
Le rendement moyen des prestations correspondant est de 3.3% (gain de 30bps).

3ème observation Une exposition maximale à 70% pour éviter une probabilité de ruine supérieure à 0.5% à 1 an (rappel : 4% de fond propres).



Quelle est alors l'efficacité comparée des différents portefeuilles obligataires, dans la vision ALM, sans contrainte de taille ?



Duration des actifs = 8 ans
Sharpe commun variable
 $r_L = 3.25\%$

Expositions à Sharpe 0.2 pour des prestations de 3.25%

AAA	90%
AA	54%
A	28%
BBB	16%
HY	9%

Une première hiérarchie apparaît, stable en fonction du niveau de Sharpe :

- les actifs de type Investment Grade semblent tous comparables entre eux en terme d'efficacité, à leur exposition maximale
- le HY apparait moins efficace (pénalisé par une probabilité de défaut élevée)

5.1.2.3. La solvabilité impose des contraintes de taille

Le respect du niveau de solvabilité va limiter la taille des actifs les plus « risqués ».

Deux angles d'optimisation :

- ✓ **Maximiser le rendement moyen des actionnaires** : ci-dessous les expositions optimales pour l'actionnaire, et les rendements associés pour l'actionnaire et le Passif (cadre de Ratio de Sharpe de 0.2) :

Rappel sans actif risqué :
 $rE=16\%$ / $rL=3\%$

	AAA	AA	A	BBB	HY
3	100	65	31	16	3
	16.4 / 3.04	16.4 / 3.07	16.4 / 3.06	16.3 / 3.05	16.3 / 3.01
4	98	46	23	13	3
	16.5 / 3.07	16.4 / 3.07	16.4 / 3.07	16.4 / 3.06	16.3 / 3.01
5	74	36	18	10	3
	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.4 / 3.06	16.3 / 3.02
6	59	31	16	9	3
	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.4 / 3.03
7	49	27	14	8	3
	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.4 / 3.04
8	42	25	13	7	3
	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.4 / 3.04
9	37	23	12	7	3
	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.08	16.4 / 3.04
10	33	22	11	7	3
	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.07	16.5 / 3.09	16.4 / 3.04

Expo optimale (=22%)
 $rE=16.5\%$ / $rL=3.07\%$

- ✓ **Maximiser le rendement moyen des prestations** : ci-dessous les expositions optimales pour l'assuré (limitées par la solvabilité « critique »), et les rendements associés pour l'actionnaire et le Passif :

	AAA	AA	A	BBB	HY
3	100	100	100	60	16
	16.4 / 3.04	16.2 / 3.13	14.6 / 3.35	14.7 / 3.34	14.6 / 3.25
4	100	100	85	47	15
	16.5 / 3.08	15.6 / 3.24	13.2 / 3.49	13.7 / 3.43	14.5 / 3.27
5	100	100	70	39	14
	16.4 / 3.12	14.6 / 3.34	12.7 / 3.53	13.1 / 3.49	14 / 3.34
6	100	100	60	34	14
	16.1 / 3.17	13.5 / 3.45	12.4 / 3.55	12.7 / 3.53	13.4 / 3.41
7	100	100	54	31	13
	15.6 / 3.23	12.6 / 3.54	12.2 / 3.58	12.3 / 3.57	13.5 / 3.41
8	100	98	50	28	13
	15 / 3.3	11.9 / 3.6	12 / 3.6	12.2 / 3.58	13.3 / 3.44
9	100	92	47	27	13
	14.3 / 3.37	11.8 / 3.6	11.8 / 3.61	11.7 / 3.63	13.3 / 3.43
10	100	88	45	25	13
	13.5 / 3.44	11.8 / 3.61	11.7 / 3.62	11.7 / 3.62	13.5 / 3.41

Expo max (=45%)
 $rE=11.7\%$ / $rL=3.62\%$

Du point de vue de l'actionnaire, une optimisation par le niveau d'exposition est réalisable, pour chaque degré de risque de la poche risquée. Le gain relatif reste très faible du côté des prestations moyennes, avec le risque de ne plus être compétitif...

En conclusion, la capacité d'allocation vers les actifs les moins risqués est très forte (et on retrouve un résultat classique dans les bilans des assureurs). Néanmoins, même dans le cas de saturation de l'exposition, de manière à respecter la contrainte de solvabilité, le niveau de rendement moyen servis aux assurés reste faible. Il faudra certainement aller chercher un peu de rendement dans les classes plus risqués...

5.1.2.4. Quel actif préférer pour un pilotage de la solvabilité économique ?

Analysons les classes Obligations Corporate par Rating, sur le plan économique au travers du modèle simplifié si on se donne un objectif moyen de prestations de 3.25% ?

Quelle quantité d'actif risqué doit-on alors mettre dans son bilan ?

		AAA	AA	A	BBB	HY
Duration	3	100	100	79	48	16
	4	100	100	53	32	14
	5	100	81	42	25	11
	6	100	68	35	20	10
	7	100	60	31	18	9
	8	89	54	28	16	9
	9	78	51	26	15	9
	10	69	48	24	14	9

Et en moyenne, quelle serait alors la rentabilité des fonds propres ?

		AAA	AA	A	BBB	HY
Duration	3	16.4%	16.2%	15.4%	15.4%	14.6%
	4	16.5%	15.6%	15.4%	15.4%	14.6%
	5	16.4%	15.4%	15.4%	15.4%	14.8%
	6	16.1%	15.4%	15.4%	15.4%	15.0%
	7	15.6%	15.4%	15.5%	15.5%	15.1%
	8	15.4%	15.4%	15.5%	15.5%	15.1%
	9	15.4%	15.4%	15.5%	15.5%	15.1%
	10	15.5%	15.4%	15.5%	15.5%	15.1%

Par exemple, en choisissant comme rating moyen de la poche Corporate du A 8Y, l'allocation optimale serait de 28% (et 72% en obligation sans risque) pour servir un taux de prestation moyen de 3.25%, ce qui correspond à 15.5% de rentabilité moyenne des fonds propres.

On remarque que :

- les classes les **moins volatiles** se heurtent à la contrainte de compétitivité (en blanc italique)
- les actifs high yield sont présents mais, proches de leur contrainte de solvabilité, ils se révèlent **très légèrement** sous-efficaces en terme de rentabilité des FP
- lorsque le pilotage est possible, **on n'observe pas d'écart significatif** en terme de rentabilité des fonds propres à l'intérieur des classes Investment Grade (yc BBB), ni par tranche de duration.

5.1.2.5. Conclusions

Du point de vue de notre modèle stratégique assureur / assurés, et en adoptant une vision de long terme des risques :

- ✓ L'assureur peut significativement améliorer ses prestations en introduisant un actif risqué dans son portefeuille, ceci au prix d'une concession raisonnable sur la rentabilité de ses fonds propres.

- ✓ Dans ce cas, quel risque est le meilleur en termes de caractéristiques moyennes de son investissement obligataire ?
 - une dichotomie Investment Grade / High Yield, dans laquelle les obligations Investment Grade (yc BBB) émergent comme les grandes gagnantes en termes de capacité élevée et de rendement attendu des fonds propres
 - à ce stade, pas de picking idéal à l'intérieur de la poche Investment Grad : la cible optimale dépendra des contraintes internes de rating / duration et taille, mais on remarque que le AAA doit s'entendre sur des durations plutôt longues (>7Y).
 - le HY est plutôt en retrait : ceci tient à l'asymétrie structurelle de l'actif, le risque de défaut augmentant le prix de la garantie (put) fournie par les actionnaires aux assurés

Quelle est la robustesse de ces conclusions aux critères réglementaires ?

5.1.3. Y a-t-il un rating moyen optimal pour gérer son exposition au risque de crédit, d'un point de vue prudentiel ?

- ✓ Nous utiliserons plusieurs indicateurs pour représenter le point de vue réglementaire de l'assureur (dans le cadre de solvabilité II) :
 - SCR_{spread} en approche standard (QIS 4 et QIS 5) à l'actif
 - VaR économique 1 an à 99.5% (équivalente à ce que serait un « modèle interne » sur ce risque) de l'actif ou du capital qui représente bien la situation actif-passif.

5.1.3.1. Quel est le coût induit en **approche standard** en capital des allocations optimales dans le cadre économique ?

Avec la vision donnée par le QIS 4, les allocations optimales du point de vue économique (cf 5.1.2.4), c'est-à-dire qui maximise le rendement moyen des fonds propres, tout en servant un niveau de prestations moyennes de 3.25%, seraient ainsi consommatrices :

		AAA	AA	A	BBB	HY
Duration	3	0.8	0.8	2.4	1.8	2.7
	4	1.0	1.0	2.2	1.6	3.2
	5	1.3	1.0	2.1	1.5	3.2
	6	1.5	1.0	2.2	1.5	3.3
	7	1.8	1.0	2.2	1.6	3.1
	8	1.8	1.1	2.3	1.6	3.0
	9	1.8	1.1	2.4	1.6	3.0
	10	1.7	1.2	2.5	1.7	3.1

A bénéfices identiques pour les assurés, des arbitrages en coût réglementaire apparaissent au sein de la classe IG. En particulier, le A ressort comme une classe fortement pénalisée.

La vision du QIS 5 transforme les coûts de la manière suivante :

		AAA	AA	A	BBB	HY	
Duration	3						
	4	3	3.3	3.3	3.6	3.6	
	5	4	4.4	3.0	3.2	4.3	
	6	5	4.5	2.9	3.1	4.3	
	7	6	5.4	4.5	2.9	3.1	4.5
	8	7	6.3	4.6	3.0	3.1	4.8
	9	8	6.4	4.8	3.1	3.2	5.3
	10	9	6.3	5.0	3.2	3.3	5.3
		10	6.3	5.3	3.4	3.4	5.6

Le régulateur, en renforçant l'exigence relative aux meilleures classes après la crise et, surtout, en relevant les caps de duration pour les BBB/HY, a transformé la hiérarchie des actifs. A bénéfices identiques, les actifs de rating au mieux A et BBB, apparaissent comme une alternative intéressante (du fait de leur poids optimal plus faible).

La suppression du cap sur la duration pour les rating inférieurs ou égaux à BBB (présente dans le 1er draft du QIS 5), a bien compensé l'incitation qu'elle occasionnait vers un actif High Yield (en moyenne B), et de long terme, alors que la probabilité d'occurrence de défaut pousse plutôt à une gestion d'une poche High Yield sur des horizons plutôt de 3-5 ans?

5.1.3.2. Quel est le coût induit en **approche interne** en capital des allocations optimales dans le cadre économique ?

- ✓ Dans un cadre de l'actif seul, nous pouvons utiliser la modélisation crédit développée au paragraphe 2.2.2, pour en déduire une VaR 99.5% à horizon 1 an.

Appliquée au risque de crédit uniquement, et donc corrigée de la partie obligataire sans risque, les consommations en capital équivalente au modèle standard deviendraient les suivantes :

	AAA	AA	A	BBB	HY
3	-2,6	-1,1	1,1	2,7	4,9
4	-2,2	-0,3	1,6	2,6	4,5
5	-1,7	0,4	1,8	2,5	3,8
6	-1,3	0,7	1,9	2,5	3,5
7	-0,8	1,0	2,0	2,5	3,3
8	-0,3	1,1	2,0	2,4	3,3
9	0,1	1,2	2,1	2,4	3,3
10	0,3	1,3	2,1	2,4	3,4

Ces résultats sont le reflet des paramètres utilisés pour calibrer le risque de crédit « économique ». Nos paramètres respectent bien la hiérarchie des ratings, plus le rating est élevé moins le capital requis sera important.

Par delà les méthodes de calibrage, une grande partie de cet écart réside certainement sur la période d'estimation :

- ✓ 10 ans pour notre analyse (qui se voulait refléter un risque moyen long terme),
- ✓ contre Janvier 2007-Décembre 2009 pour le CEIOPS...

Or la période récente surpondère sûrement la volatilité des AAA, ratings typiques des financières notamment.

- ✓ Dans un cadre actif-passif, nous pouvons utiliser la dynamique à un an des fonds propres en économique pour en déduire une VaR 99.5% à horizon 1 an, reflet actif-passif du seul risque introduit dans le bilan, le risque de crédit.

Les consommations en capital minimum deviendraient alors les suivantes :

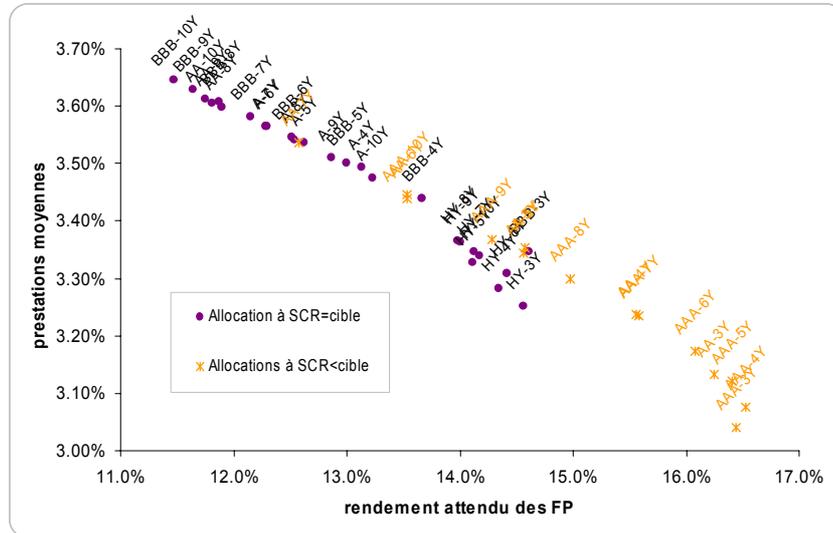
	AAA	AA	A	BBB	HY
3	-0,5	0,9	2,3	2,8	3,9
4	-0,1	1,7	2,0	2,2	3,5
5	0,3	1,7	1,8	1,9	2,8
6	0,8	1,6	1,7	1,7	2,4
7	1,2	1,6	1,6	1,6	2,2
8	1,3	1,5	1,5	1,5	2,1
9	1,3	1,5	1,5	1,5	2,1
10	1,3	1,5	1,5	1,4	2,2

Ce qui aurait tendance à plutôt favoriser les actifs de type investment grade, par rapport aux actifs High yield...

5.1.3.3. Quel actif préférer dans le cadre d'un pilotage réglementaire ?

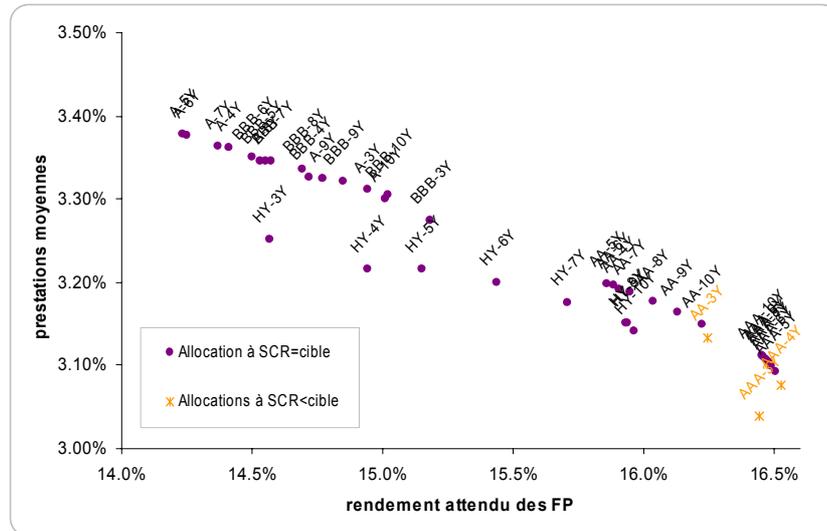
Si on suppose une charge en capital identique à Solvabilité I (soit environ 4% des Provisions Mathématiques = $4\% * 96\% = 3.84\%$), regardons comment Solvabilité II (dans le cadre du modèle standard) va discriminer les classes d'actifs.

Cadre QIS4 :



← Large intervalle de rentabilité des fonds propres
→ un travail possible côté FP

Cadre QIS5 :



← Intervalle très limité de rentabilités accessibles
→ peu d'intérêt à optimiser les FP

Si l'on se fie à la version en cours du QIS5, et sans consommation supplémentaire de capital (ce qui est certainement peu réaliste) :

- ✓ L'accroissement des exigences réglementaires sur la classe Investment Grade entraîne une moindre manœuvrabilité de la poche du côté de l'actionnaire,
- ✓ Dès lors, au prix d'une réduction relativement faible de la rentabilité des fonds propres, on pourrait atteindre des prestations intéressantes avec des investissements en direct A, BBB, voir le High yield de manière convexe.

5.1.3.4. Anticiper la dynamique en capital

Solvabilité II va rendre cruciale la qualité de la sélection de ses actifs obligataires.

En effet, l'exigence en capital sera en effet désormais beaucoup plus dynamique, car elle sera fonction :

- (i) de l'évolution de la valeur de marché entre deux exercices
- (ii) de l'amortissement de la duration
- (iii) des éventuels changements de rating

Ci-dessous, on estime à 1 an la variation relative en capital (ii+iii), pondérée par les probabilités de transition (matrice de transitions S&P 1 an moyenne 1981-2008), hors impact du mark-to-market (i) :

QIS 4					QIS 5				
	AAA	AA	A	BBB		AAA	AA	A	BBB
3	-29%	-8%	-30%	-20%	3	-31%	-30%	-27%	-24%
4	20%	2%	-22%	-12%	4	-22%	-21%	-18%	-16%
5	15%	8%	-17%	-8%	5	-17%	-16%	-13%	-11%
6	12%	12%	-14%	-5%	6	-14%	-13%	-10%	-8%
7	10%	14%	-12%	-3%	7	-11%	-10%	-8%	-6%
8	-8%	16%	-10%	-2%	8	-9%	-8%	-6%	-4%
9	-7%	17%	-9%	-1%	9	-8%	-7%	-4%	-3%
10	-6%	18%	-8%	-2%	10	-7%	-6%	-3%	-2%

Le QIS4, marqué par une forte pénalisation du A rendait la consommation en capital du AA voisin très fluctuante.

Le QIS5, en homogénéisant les exigences sur les actifs Investment Grade, ne présente plus ce phénomène : tous les ratings présentent désormais une réduction uniforme de l'exigence en capital attendue.

→ à charge en capital donnée, c'est un point en faveur des durations courtes... et d'un bon picking, pour éviter les migrations de rating !

5.1.3.5. Conclusion

- ✓ Solvabilité II est une contrainte actionnaire tangible, qui prend en compte le risque de ruine mais ne tient ainsi pas compte de la rémunération des fonds propres ($\neq rE$).
- ✓ Par ses fondements économiques, Solvabilité II va apporter une variabilité accrue dans l'exigence en capital. A ce titre, et sans même tenir compte de la liquidité, il convient d'apporter un soin particulier à sa sélection obligataire : stabilité des ratings, volatilité du mark-to-market, position dans le cycle du crédit (pas de dampener crédit).
- ✓ Quantitativement, les derniers réglages du QIS5 seront cruciaux. Si le calibrage final du QIS 5 reste en ligne avec celui du premier draft (avril 2010), nos calculs confirment que l'optimisation des rendements actionnaires sera un exercice à portée limitée.
- ✓ A ce titre, nous pensons que c'est bien une optimisation des prestations que l'on peut réaliser, en orientant les investissements vers un investissement plutôt composé d'Obligations sans risque (Govies) et d'obligations d'entreprises de rating A / BBB { voire du HY convexe }, ces ratings bénéficiant par leur efficacité du meilleur ratio performance/charge en capital.

5.1.4. Comment les normes comptables modifieraient cette vision économique ?

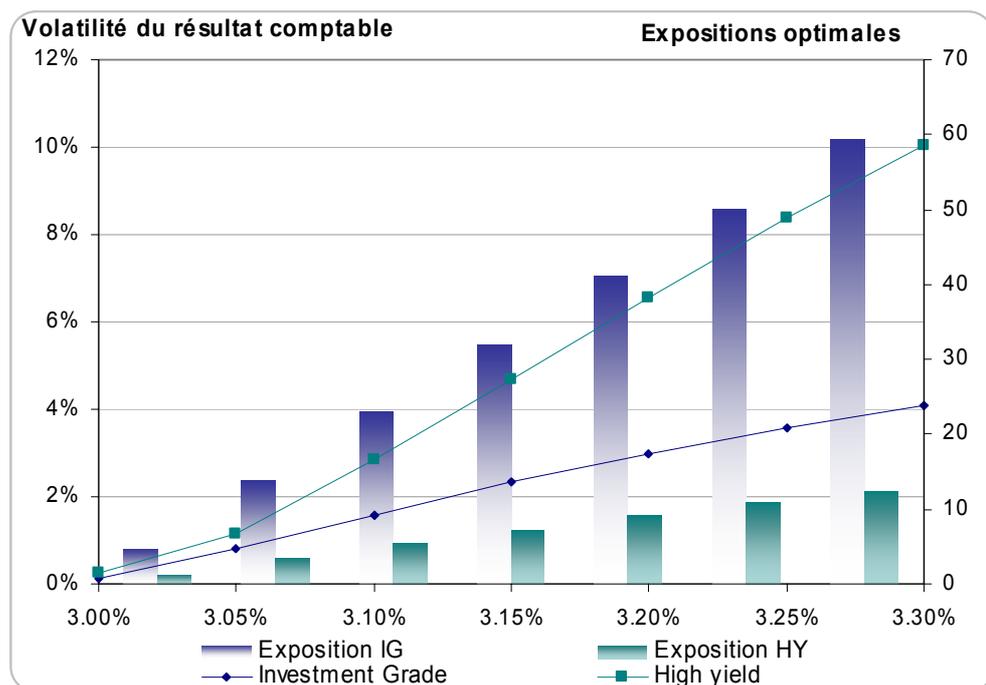
5.1.4.1. Le cadre des normes comptables françaises

Dans ce cadre, nous supposons que les actifs obligataires sont portés, selon une stratégie Buy & Hold, et observés à la fin de l'horizon un an.

Il n'y a donc pas besoin d'introduire ici la notion de Réserve de Capitalisation, qui s'appliquerait en cas de vente d'actifs obligataires.

Nous avons choisi comme angle comptable, d'observer comment évolue la volatilité du résultat comptable, en fonction des actifs de crédit sous-jacent, discriminés par leur niveau de rating, la durée ayant été figée à 8 ans.

- ✓ A 1 période, la volatilité comptable est d'autant plus forte que le crédit est risqué, via le niveau de probabilité de défaut.



A titre de comparaison, la volatilité comptable réduit la volatilité économique d'un facteur 10 pour les actifs IG et seulement 5 pour les actifs HY.

Malgré des expositions plus faibles, le poids du défaut dans le risque des actifs spéculatifs explique que la volatilité comptable du résultat induite soit plus forte que celle induite par un actif de type Investment Grade.

- ✓ Pour autant que le risque de défaut soit supportable, les actifs obligataires sont favorisés, quels que soient leur risque de défaut et la volatilité des spreads.

L'objectif était de mesurer si l'efficacité économique des actifs les plus risqués (=peu d'exposition suffit pour atteindre des prestations relativement élevées) pouvait compenser la volatilité comptable apportée par les seuls défauts. Ce n'est pas le cas : même rapportée aux prestations servies, la comptabilité au coût amorti reste en faveur des actifs les plus sûrs.

Contrairement à l'approche développée dans le cadre de Solvabilité II qui se fonde sur les ratings et la volatilité du prix, c'est l'occurrence réelle de défaut que la comptabilité au coût amorti pénalise. Il s'agit d'un argument supplémentaire en faveur d'une bonne sélection de ses titres et **d'une bonne diversification...**

5.1.4.2. Le cadre des normes comptables IFRS

- ✓ Nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, les normes IFRS ont pour objectif d'améliorer en terme de simplicité l'utilisation des concepts de classification et valorisation des instruments financiers (IAS 39).
- ✓ Cette simplification devrait avoir comme conséquence pour les actifs à revenus fixes, si le business model et les caractéristiques contractuelles de ses flux de trésorerie sont bien remplis, de pouvoir bénéficier d'une comptabilité au coût amorti :
 - La norme ne fixe pas d'obligation de détention à maturité
 - Les ventes sont possibles dans certaines conditions (critères d'investissement non remplis, ajustement du portefeuille, besoin de trésorerie...)
 - La gestion de portefeuille selon différents mode de gestion est ouverte.

Ce changement aura ainsi comme effet de rapprocher l'impact comptable IFRS de celui en normes françaises. C'est la vision précédente (5.1.4.1) qui s'appliquera, et favorisera donc plutôt les actifs obligataires les moins risqués.

5.1.5. Améliorer le pilotage ALM grâce à la prise en compte d'effet de diversification entre actifs Corporate ?

L'analyse présentée jusqu'ici a omis une variable clé : la diversification entre les risques de crédit.

Si le cadre standard de Solvabilité II ne reconnaît pas cet élément (en effet, l'agrégation des risques au sein du calcul du SCR spread est purement additive), l'analyse économique ne peut s'en soustraire, quand on connaît l'impact fort de l'asymétrie dans notre mesure de performance ALM.

Nous avons jusqu'ici supposé au niveau de chaque portefeuille de crédit homogène, que le portefeuille était parfaitement diversifié (n grand), et exposé à 50% au risque systémique.

Ce n'est pas sur la diversification que nous souhaitons travailler, même s'il est important de conserver l'impact de ces hypothèses sur nos résultats, mais sur l'apport de la diversification entre risques de crédit sur la gestion du budget de risque ?

En particulier :

- ✓ L'exposition high yield qui était rapidement contrainte par la solvabilité dans une approche à portefeuille homogène unique serait-elle renforcée ?
- ✓ L'introduction de la diversification intra-rating pourrait changer nos recommandations quant à l'orientation « moyenne » de l'investissement obligataire ?
- ✓ Quelle serait alors l'allocation mixte optimale ?

5.1.5.1. Les hypothèses choisies

Notre modèle de crédit est régi par un unique facteur de risque gaussien. On mesure la corrélation historique entre les indices crédit (rendements 100 jours JPMX 1999-2009), toutes durations confondues.

Corrélation historique entre classes de risques :

	AAA	AA	A	BBB	HY
AAA	100	74	89	81	47
AA	74	100	75	75	69
A	89	75	100	95	56
BBB	81	75	95	100	66
HY	47	69	56	66	100

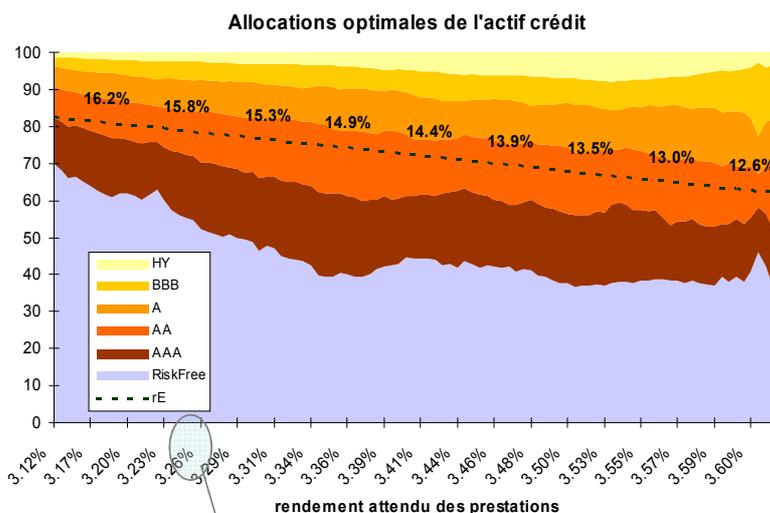
5.1.5.2. Les résultats

Dans la lignée de notre approche économique, comment la diversification permet-elle de libérer du budget de risque en faveur d'actifs peut-être pénalisés par l'approche en portefeuille homogène unique ?

Pour se faire, nous opérons une optimisation de portefeuilles, par rating (sans risque / AAA / AA / A / BBB / HY) et duration (de 3 à 10 ans), dans le cadre de notre mesure ALM actionnaire / assuré.

Composition de la frontière efficiente dans le cadre de mesure ALM : nous représentons en abscisse le rendement moyen des prestations (avec un zoom sur notre cible de 3.25%) et en ordonnée comment se décompose les portefeuilles optimaux par niveau de rating.

La rémunération moyenne des actionnaires est précisée par la frontière en pointillé.



Les durations optimales par rating oscillent en moyenne entre 5 et 8 ans, sans observer une forte discrimination par rating ou risque ALM.

Govies	55%	Allocation optimale diversifié pour cible $r_L=3.25\%$ – $r_E=15.8\%$ – Taux de défaut moyen attendu sur la poche risquée : 0.27% (~BBB) – SCR=2.2 (QIS4) / 4.7 (QIS5)
AAA	17%	
AA	12%	
A	8%	
BBB	5%	
HY	2%	

Le portefeuille homogène « équivalent » en rating BBB a les caractéristiques suivantes :

Portefeuille homogène « équivalent »	
–	18% BBB(7Y) + 82% Govies
–	$r_L=3.25\%$ / $r_E=15.5\%$
–	SCR=1.6 (QIS4) / 3.15 (QIS5)

En conclusion :

- ✓ Le gain apporté par la prise en compte de la diversification intra rating est faible (r_E augmente de 0.3%) et peu significatif en termes de rémunération des fonds propres
- ✓ On observe un rebalancement du budget de risque vers les actifs les plus décorrélés, jusqu'à apparition de la contrainte de solvabilité. Ceci permet certes d'augmenter l'exposition corporates...mais sans grand intérêt pour l'ALM, car au prix d'une charge absolue en capital accrue.

Dans ce cadre choisi, la prise en compte d'effet de diversification entre actifs Corporate ne permet pas vraiment d'améliorer le pilotage ALM.

Malgré l'intérêt sur le Sharpe de l'actif général, l'exercice montre que l'intérêt ALM serait finalement très peu significatif.

Du côté réglementaire, un constat : utiliser la diversification pour augmenter son exposition au risque de crédit entraîne une hausse du taux de défaut global et de la charge en capital résultante.

Ces conclusions inciteraient d'après nous à une relative concentration de l'exposition en termes de rating, en faveur d'investissements de type barbell :

- ✓ Une exposition importante en obligations sans risque pour sécuriser la performance ALM
- ✓ Une prise de risque mesurée et concentrée vers des obligations « risquées » de type A ou BBB pour rechercher du rendement de façon contrôlée.

5.1.6. *L'introduction de dérivés simples ou de stratégies d'allocations serait-elle une solution pour gérer son exposition ?*

En complément d'une gestion directionnelle optimisée de son allocation crédit, comme pour l'analyse Actions, est-ce que l'introduction d'actifs asymétriques donnerait une marge de manœuvre supplémentaire pour la gestion de l'exposition crédit ?

Compte tenu de la mesure ALM que nous avons développée, il apparaît logique qu'elle privilégiera soit les actifs recherchant la génération d'alpha (axe 1 : recherche de solution avec un ratio de Sharpe améliorée – nous ne creuserons pas cet axe) soit les actifs asymétriques (axe 2).

Dans ce contexte, les actifs crédits avec un régime de défaut important (en dessous de BBB non compris) ressortaient toujours légèrement sous efficaces, de par une aversion forte pour le risque des actionnaires. C'est le cas typiquement de la classe d'actifs High Yield.

Les solutions d'investissement au titre de l'axe 2 pourraient alors être de plusieurs types :

- ✓ **L'introduction de dérivés** pour apporter à l'exposition crédit de type Investment Grade une certaine « convexité ». Il ne s'agit pas ici d'acheter des CDS, qui auraient pour équivalence d'annuler l'exposition crédit. Il s'agit de trouver un actif dérivé qui permette de conserver une exposition crédit tout en étant protégé à la baisse (c'est-à-dire à la hausse des spreads). Ces instruments existent (par exemple un Put sur l'indice IBOXX Investment Grade Euro ou un call sur un indice Itraxx de CDS), mais ces marchés de dérivés sur indices crédit restent assez peu liquides. Ils apportent des solutions de gestion de convexité ponctuelle, mais peuvent difficilement constituer une réponse structurelle à une gestion de l'ensemble de l'exposition crédit en portefeuille, comme pouvait l'être l'achat de Put du côté du risque Actions.
- ✓ La mise en place d'une **gestion dynamique convexe** de l'exposition crédit, par exemple sur la base de stratégie d'assurance de portefeuille. L'effet positif d'une telle stratégie sera la construction d'un actif parfaitement asymétrique, plutôt suiveur de marché, et la réduction de l'exposition crédit quand les spreads de crédit montent et l'augmentation à la baisse des spreads. L'inconvénient, réside dans la nécessité d'un pilotage dynamique, et donc une vente de l'actif et un impact sur la réserve de capitalisation qui entraîne que l'horizon de gestion puisse être considérablement raccourci, avec des prises de positions tactiques sur le marché crédit à des moments qui peuvent s'avérer très défavorables.
- ✓ L'actif High yield était en retrait dans l'analyse structurelle de par une structure très asymétrique (forte probabilité de défaut). Une troisième voie consisterait à réhabiliter cet actif de façon structurelle, et ainsi profiter d'opportunités de rendements, qu'elles soient stratégiques ou tactiques au travers d'un bon stock picking, grâce à des solutions de type **capital garanti** sur indice ou fonds **High Yield**. La garantie pourrait par exemple être adossée à un panier sécurisé d'obligations souveraines⁷ et la prise de risque limitée s'appuiera sur un indice ou un fonds High Yield, de manière convexe, grâce à la garantie en capital.

⁷ Nous faisons référence ici à un mécanisme (développé par Exane derivatives) de mise en gage par l'émetteur d'obligations d'Etats pour adosser le capital garanti aux obligations mises en gage, et ainsi réduire fortement l'exposition de l'investissement au risque de l'émetteur.

5.2. La vision multi-périodes modifierait-t-elle ces conclusions ?

Nous n'avons pas développé la vision multi-périodes sur l'analyse du risque crédit, comme nous l'avons fait pour le risque Actions.

Pour ce faire, c'est au niveau de la modélisation de l'actif crédit qu'il aurait fallu intervenir afin de rebalancer à chaque fin d'année le portefeuille sur le rating analysé, et tenir compte des probabilités de défaut historiques forward (et non pas de la seule probabilité de défaut historique à 1 an) pour bien appréhender la déformation du portefeuille de crédit.

Ce qui aura tendance pour le régime de défaut, à fortement augmenter la vision du risque de défaut.

	Horizon	1 an	1 Y / 1Y	1Y / 2Y	1Y / 3Y	1Y / 4Y	1Y / 5Y	1Y / 6Y	1Y / 7Y
Taux de défaut 1 an forward historique moyen	AAA	-	-	0,18	0,27	0,36	0,47	0,43	0,54
	AA	0,03	0,13	0,20	0,36	0,43	0,56	0,67	0,74
	A	0,08	0,32	0,48	0,70	0,92	1,18	1,47	1,69
	BBB	0,24	1,12	1,66	2,41	3,07	3,69	4,12	4,65
	HY	4,06	11,76	14,84	17,07	18,80	20,39	21,72	22,83

Si sur le régime « spread de marché », nous conservons une vision du rendement de manière à conserver un ratio de Sharpe de 0.2 et un niveau de volatilité des indices constants, Il est raisonnable de penser qu'une vision multi-périodes aura tendance à diminuer en moyenne l'intérêt des actifs les plus risqués, à moins de les appréhender de façon convexe, comme explicité dans le point 5.1.6.

5.3. Conclusion sur la présence optimale d'une exposition crédit dans le Bilan d'un assureur

Les grands bouleversements règlementaires et comptables qui se profilent pour les assureurs sont à même de remettre en cause la structure de leurs placements, y compris le portefeuille obligataire, traditionnellement centré sur l'Investment Grade (et notamment les dettes financières).

Dans une optique qui reste celle de la recherche de rendement sous contrainte de passif, nous avons mené une étude pour quantifier performances et risques de différents portefeuilles obligataires, ceci sous les angles économiques, règlementaires et comptables.

Notre analyse, dont les résultats sont synthétisés ci-dessous, a consisté, à étudier des allocations crédit de type Govies + Corporates. Les Govies étant idéalisés comme l'actif de référence sans risque, on module les expositions, les ratings et les durations de la poche Corporates de manière à rechercher la satisfaction maximale des actionnaires sous contrainte d'un taux de prestation cible pour les assurés (taux -25bps).

Il en résulte les résultats synthétisés suivants et la mise en avant en investissement directionnel des actifs A et BBB, comme précisé au point 5.1.5 ou des stratégies convexes du point 5.1.6 :

Rating moyen de la poche Corporate	Analyse économique (performances ALM)	Analyse règlementaire (Capital Solvabilité II)	Analyse comptable (volatilité du Résultat R332-19 / HTM)
AAA	Bonnes performances Pas de discrimination entre ces ratings, mais les actifs les mieux notés supposent des tailles importantes pour assurer des prestations compétitives.	Actifs pénalisés en regard à leur efficacité à servir du rendement.	La comptabilité au coût amorti pénalise uniquement le risque de défaut, qui pèse sur la volatilité du résultat : à ce titre le rating discrimine naturellement bien les obligations entre elles, et il n'est pas compensé par une efficacité / volume des actifs les plus risqués.
AA		Actifs présentant une bonne performance ajustée du coût du capital : par exemple, à prestations servies équivalentes, un moteur BBB consomme près de 50% de capital en moins qu'une allocation AAA / Actif sans risque.	
A			
BBB			
High Yield	Performances ALM en retrait : l'asymétrie apportée par le risque de défaut tend à pénaliser le rendement des fonds propres	Relativement très couteux par rapport à tous els actifs. Sur des durations courtes, peut s'envisager de façon protégée pour bénéficier des rendements intéressants.	

Conclusion

Les dernières crises sur les marchés financiers ont eu comme conséquences pour tous les intervenants du marché de l'assurance vie une remise à plat des politiques d'investissement relatives aux « actifs risqués » en portefeuille. Que ce soit au niveau des régulateurs ou au niveau des compagnies, la question qui se pose est bien celle de faut-il ou non conserver une exposition dans les bilans des compagnies d'assurance, sans risquer la solvabilité des acteurs de l'assurance ? En plus de l'impact économique, les prochaines normes réglementaires (Solvabilité 2) auront très clairement un impact en termes de choix d'allocation d'actifs, ce qui est une petite révolution pour l'industrie de l'assurance.

Y répondre est une question vraiment complexe, dans la mesure où le cadre dans lequel évolue un assureur vie est varié et volatile.

A notre niveau, nous avons choisi de répondre à cette question en nous intéressant à deux sources de risques : le risque Actions et le risque de crédit, en supposant le principal risque d'un assureur, le risque de taux parfaitement adossé. Pour ce faire, nous avons développé un cadre de modélisation pour ces deux sources de risques.

Nous avons ensuite mis au point par ailleurs une mesure de risque ALM afin de bien prendre en compte l'engagement de l'assureur de façon simplifiée : un contrat d'assurance vie, mono-générationnel, regardé en mono puis en multi périodes.

Enfin, nous avons recherché des mesures pour juger de l'efficacité ou non des sources de risques introduites dans le bilan, les plus complètes possibles : économique, réglementaire et comptable.

La combinaison de ces axes de recherche nous a ainsi permis de donner une première réponse à la question d'actualité sur les solutions optimales dans un bilan, pour gérer sa marge de solvabilité.

Dans ce cadre global simplifié, du côté du risque Actions, les stratégies de type action convexe, à base de dérivés, donnent une réponse en ligne avec la double recherche des assureurs et assurés (du rendement en sécurité). On pourrait bien entendu imaginer d'autres solutions Actions qui feraient de la même manière bénéficier de leur profil convexe le bilan d'une compagnie d'assurance (Obligations convertibles, stratégies actions de type CPPI, actif répliquant la volatilité implicite...)

Du côté du risque de crédit, qui représente une large part des investissements d'une compagnie vie, c'est une allocation qui combinerait l'actif A / BBB dans des proportions importantes (environ 30%) à un actif souverain qui apparaît comme une exposition optimale, que ce soit à la lumière économique, comptable ou réglementaire (sur la base du QIS5), c'est-à-dire offrir un niveau de satisfaction maximum pour les actionnaires tout en délivrant un niveau moyen de prestations raisonnable, proche des taux longs en vigueur. Rappelons, qu'un investissement intégralement en dettes souveraines (hors contexte de stress exceptionnel), ne permettrait pas en moyenne, d'offrir des rendements attractifs aux assurés.

Introduire un profil convexe du côté de l'actif crédit est plus délicat, de par une structure moins liquide du marché du crédit que le marché Actions en instruments optionnels. Il existe néanmoins des solutions possibles, notamment une alternative pour intégrer de façon efficace une poche High Yield en portefeuille (les allocations en Europe étant bien inférieures à celle des compagnies américaines).

A cette vision successive de l'introduction de risques dans un bilan (actions puis crédit), comment ces résultats seraient-ils modifiés en termes d'efficacité ALM si les deux risques étaient introduits simultanément ? On peut imaginer que même grâce à la présence d'un effet de diversification (statistiquement la corrélation historique est de l'ordre de -25% entre un indice action et un indice de spread de crédit, Solvabilité II l'a fixé à 75%), la tendance serait à la réduction des allocations optimales des deux actifs risqués de manière à rester « supportable » pour la solvabilité de l'actionnaire.

En conclusion, la nouvelle norme Solvabilité 2 réduit bien les marges de manœuvre dont disposaient l'assureur pour assurer sa solvabilité dans le cadre Solvabilité 1 (notamment grâce au levier que constituait l'ensemble du stock de plus-values latentes). Ce levier sera plus faible, partagé avec l'assuré (au travers de la participation aux bénéfices). Il n'en reste pas moins que ce nouveau cadre met en lumière des solutions pour conserver une exposition aux actifs risqués, actifs qui participent au financement de l'économie.

6. Bibliographie

Eric Briys François de Varenne

« On the risk of Life Insurance. Liabilities: debunking some common pitfalls »
Wharton School, 1995

Christophe Morel et Brigitte Poiblanç

« Une lecture optionnelle du bilan des compagnies d'assurance »
CAIRN, 2001

Anders Grosen Peter Jorgensen

« Life insurance liabilities at market value : an analysis of insolvency risk, bonus policy, and regulatory intervention rules in a barrier option framework »
The journal of Risk and Insurance, 2002

Anders Grosen Peter Jorgensen

« Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies » Center for analytical Finance,
University of AARHUS, 1999

Anders Grosen Peter Jorgensen

« A finite difference approach to the valuation of Path dependent life insurance liabilities » Center for analytical Finance,
University of AARHUS, 2001

Wang S. S.

“Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards Transforms”
Insurance: Mathematics and Economics 1995

KMV Corporation

“Limiting Loan Loss Probability Distribution” 1991

CEIOPS Quantitative Impact Studies n°4 & n°5

Andre Lucas et Cees L. Dert

« On the inefficiency of Portfolio Insurance and Caveats to the Mean/Downside-Risk Framework”
SERIE RESEARCH MEMORANDA, Nov 1998

Cees Dert et Bart Oldenkamp

“Optimal Guaranteed Return Portfolios and the Casino Effect”
SERIE RESEARCH MEMORANDA, June 1997

F. Le Vallois, P Palsky, B Paris, A Tosetti

« Gestion Actif-Passif en Assurance Vie : Règlements, outils, méthodes » Economica

Loubda SERRAR

« Problématique ALM des contrats assurance-vie « Fonds en euro » »

L'assurance française : Bilan à fin 2007 (FFSA)

EVOLUTIONS RÉCENTES DE LA STRUCTURE DES PLACEMENTS DES ASSUREURS –
ANALYSES ET SYNTHÈSES - n° 4 - septembre 2009

Banque de France (Dominique Durant, Julia Guérin) et l'ACAM (Safia Lekehal).

7. Annexes relatives au risque Actions

7.1. Estimateurs biaisés du risque Actions : performance annualisée

Un estimateur biaisé : Calculer une performance à partir des performances actuarielles

Etudions la performance annualisée sur les $2n$ trajectoires :

$$\forall t = 1 \dots H, \quad Perf_t = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \left[\left(\frac{S(i,t)}{S(i,0)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \right] = (1 + \mu_S + r) e^{-\frac{\sigma_S^2}{2}} \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} e^{\frac{\sigma_S}{t} Z_{2,t}} - 1$$

Ainsi,

$$Perf_t \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 + \mu_S + r) e^{-\frac{\sigma_S^2}{2}} e^{\frac{\sigma_S^2}{2t}} - 1 \neq \mu_S + r$$

$$\text{car } \frac{\sigma_S}{t} Z_{2,t} \sim N\left(0, \frac{\sigma_S^2}{t}\right), \text{ d'où } \exp\left(\frac{\sigma_S}{t} Z_{2,t}\right) \sim N\left(\exp\left(\frac{\sigma_S^2}{2t}\right), \exp\left(\frac{\sigma_S^2}{t}\right) \left(\exp\left(\frac{\sigma_S^2}{t}\right) - 1\right)\right).$$

Cette méthode induit un biais et sous estime le trend puisque $\frac{\sigma_S^2}{2} \left(\frac{1}{t} - 1\right)$ est toujours négatif.

Un estimateur convergent : Moyenner les prix à échéances

Calculons la quantité suivante :

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} S(i,t) = S_0 \exp\left(\left(\log(1 + \mu_S + r) - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t\right) \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} e^{\sigma_S Z_{2,t}} = S_0 (1 + \mu_S + r)^t$$

car l'espérance de $\exp(\sigma_S Z_{2,t})$ est de $\exp\left(\frac{\sigma_S^2 t}{2}\right)$.

On a alors :

$$\forall t = 1 \dots H, \quad PerfAnnualisee_t = \left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{S(i,t)}{S(i,0)} \right)^{\frac{1}{t}} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_S + r$$

Cet estimateur est donc bien convergent et sera utilisé par la suite pour estimer les performances annualisées d'un actif.

7.2. Dynamique de l'exposition Actions générée par la stratégie dérivée

On suppose toujours que l'on a une action $S_t = S_0 e^{\left(\frac{\mu - \sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}$, avec $\mu = r + \text{prime} - \text{div}$, sur laquelle on a écrit un call C de maturité T_2 et de strike K_2 . On suppose que volatilité et dividendes sont identiques dans les mondes historiques et implicites.

$$C_t = S_t e^{-d\delta} N(d_1) - K e^{-r\delta} N(d_2)$$

$$\text{Avec } d_{1/2} = \left[\ln\left(\frac{S_t}{K_2}\right) + \left(r - d \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta \right] / \sigma\sqrt{\delta} \text{ et } \delta = T_2 - t.$$

L'exposition courante du call est mesurée par le delta $S_t \frac{\partial C}{\partial S} = S_t e^{-d\delta} N(d_1)$

Utilisant la relation $E[e^{\sigma X} N(aX + b)] = e^{\sigma^2/2} N\left(\frac{a\sigma + b}{\sqrt{1+a^2}}\right)$ valide lorsque $X = N(0,1)$, on montre que, sous probabilité historique,

$$E[S_t \Delta_C] = S_0 e^{\mu-d\delta} N\left(\frac{\sigma^2 t + \ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta}{\sigma\sqrt{t+\delta}}\right)$$

$$E[\Delta_C] = e^{-d\delta} N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta}{\sigma\sqrt{t+\delta}}\right)$$

Ces 2 quantités définissent la moyenne de l'exposition courante en euros et la moyenne de l'exposition courante en %. Notons π la prime action, de sorte que $\mu = r - d + \pi$: on a

$$E[S_t \Delta_C] = S_0 e^{\mu-d\delta} N\left(\frac{\pi}{\sigma\sqrt{T_2}} + d_{1t=0}\right) \text{ et } E[\Delta_C] = e^{-d\delta} N\left(\frac{(\pi - \sigma^2)t}{\sigma\sqrt{T_2}} + d_{1t=0}\right)$$

On a donc le résultat suivant à maturité ($t=T_2$) :

$$E[S_t \Delta_C] = E[S_t] \times N(\text{Sharpe} \times \sqrt{T_2} + d_{1t=0})$$

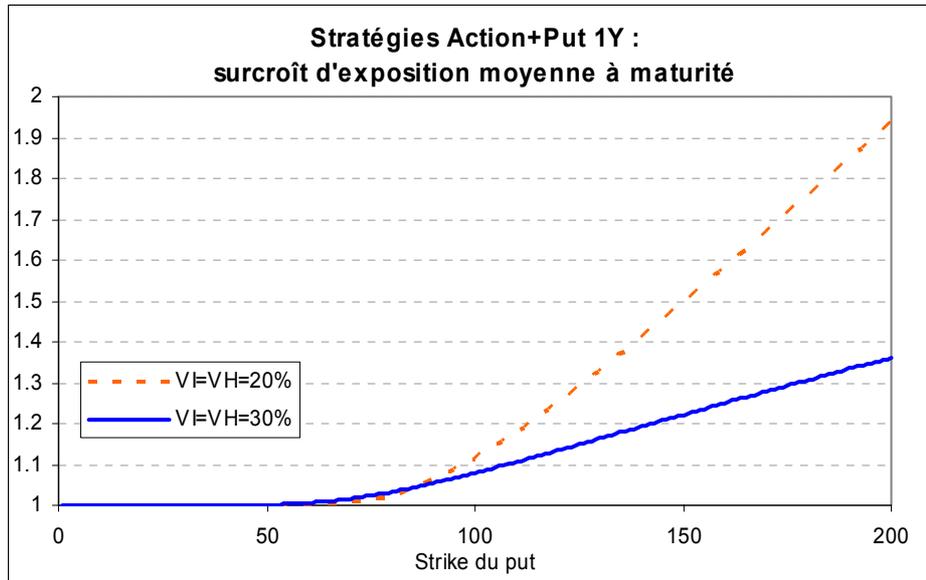
D'où :

- Sans prime de risque, l'exposition courante (en euros) est, en moyenne, l'exposition initiale
- Sinon, on constate en moyenne un gain en exposition (en euros) par rapport à l'exposition initiale, gain directement lié à un décalage de la *moneyness* de l'option par le Sharpe des actions.

Dans notre stratégie « action+put » (aucun dividende à partir d'ici), l'exposition moyenne courante est

$$\begin{aligned} \lambda E[S_t (1 + \Delta_p)] &= \lambda E[S_t \Delta_C] = \lambda \times E[S_t] \times N\left(\text{Sharpe} \frac{t}{\sqrt{T_2}} + d_{1t=0}\right) \\ &= \lambda N(d_{1t=0}) E[S_t] \times \frac{N\left(\text{Sharpe} \frac{t}{\sqrt{T_2}} + d_{1t=0}\right)}{N(d_{1t=0})} \\ &= \alpha \times E[S_t] \times \underbrace{\frac{N\left(\text{Sharpe} \frac{t}{\sqrt{T_2}} + d_{1t=0}\right)}{N(d_{1t=0})}}_{\text{surcroît d'exposition apporté par la prime action}} \end{aligned}$$

Ce surcroît d'exposition est d'autant plus marqué que la volatilité est basse et que le strike est élevé.



Remarque : si on introduit le spread $VI-VH$ via le paramètre u tel que $VI^2=VH^2+u^2$, on a

$$E[S_t \Delta_C] = E[S_t] \times N \left(\frac{-\frac{u^2 t}{2} + \pi + d_{1,t=0} \times VI \times \sqrt{T_2}}{\sqrt{VH^2 T_2 + u^2 (T_2 - t)}} \right)$$

et $E[S_{T_2} \Delta_{C_{t=T_2}}] = E[S_{T_2}] \times N \left(\frac{\pi - u^2/2}{VH} \sqrt{t} + \frac{VI}{VH} d_{1,t=0} \right)$: réduction de la surexposition terminale par le spread $VI-VH$.

8. Annexes relatives au risque de crédit

8.1. Dynamique d'un panier d'Obligations Corporate (preuve)

Principe de la preuve

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{C_i \leq N^{-1}(p)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i \leq N^{-1}(p)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}}$$

Conditionnellement à la réalisation du facteur commun F , les variables $1_{\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}}$ sont des variables aléatoires de Bernoulli, indépendantes et identiquement distribuées. On peut alors appliquer la loi forte des grands nombres, pour écrire que la moyenne empirique D converge presque sûrement vers la l'espérance commune

$$E \left[1_{\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}} \right] \text{ soit } D \approx P \left[\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right] = N \left[\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right].$$

Sur la partie hors défaut, on applique le même raisonnement, pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{wC_i} 1_{C_i \leq N^{-1}(p)} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{w(\sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i)} 1_{\sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i \leq N^{-1}(p)} \\ &= e^{w\sqrt{\rho}F} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{w\sqrt{1-\rho}\varepsilon_i} 1_{\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}} \approx e^{w\sqrt{\rho}F} E \left[e^{w\sqrt{1-\rho}\varepsilon_i} 1_{\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}} \right] \end{aligned}$$

Après calcul :

$$e^{w\sqrt{\rho}F} E \left[e^{w\sqrt{1-\rho}\varepsilon_i} 1_{\varepsilon_i \leq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}} \right] = e^{\frac{w^2}{2}\rho + w\sqrt{\rho}F} N \left[w\sqrt{1-\rho} - \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

En mettant bout à bout les composantes défaut et non défaut, on obtient :

$$\boxed{\frac{B_t}{B_0} = (1+y)^t \times e^{w\sqrt{\rho}F - \frac{w^2}{2}\rho} \times \frac{1-p}{N[w - N^{-1}(p)]} \times N \left[w\sqrt{1-\rho} - \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right] + R \times N \left[\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right]}$$

8.2. Formule fermé de la variance du panier

On montre que, si

$$\frac{B_t}{B_0} = (1+y)^t \times e^{\frac{w\sqrt{\rho}F - \frac{w^2}{2}}{\rho}} \times \frac{1-p}{N[w - N^{-1}(p)]} \times N\left[w\sqrt{1-\rho} - \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right] + R \times N\left[\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

alors

$$\Rightarrow E\left[\frac{B_t}{B_0}\right] = (1+y)^t(1-p) + Rp$$

$$\Rightarrow E\left[\left(\frac{B_t}{B_0}\right)^2\right] = A^2 e^{w^2(1+\rho)} \times N_2(w-q+w\rho, w-q+w\rho, \rho) + 2AR \times N_2(w-q, q-w\rho, -\rho) + R^2 N_2(q, q, \rho)$$

\Rightarrow

Où l'on a défini

- $A = (1+y)^t \times e^{\frac{w^2}{2}} \times \frac{1-p}{N[w - N^{-1}(p)]}$
- $q = N^{-1}(p)$
- $N_2(x, y, \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \text{P}(X \leq x, Y \leq y)$ avec $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \stackrel{\text{loi}}{=} N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$ (répartition normale bivariée)

8.3. Méthodologie choisie pour la calibration du panier d'Obligations (spread0, v, p, R, rho)

Calibration de v sur l'historique des spreads ASW

Nous utiliserons les indices JPMX pour calibrer la volatilité des spreads. Ces indices sont construits par tranche de maturité, pour les ratings AAA,AA,A,BBB et High Yield. Nous utiliserons les indices Corporates Euro.

Méthode

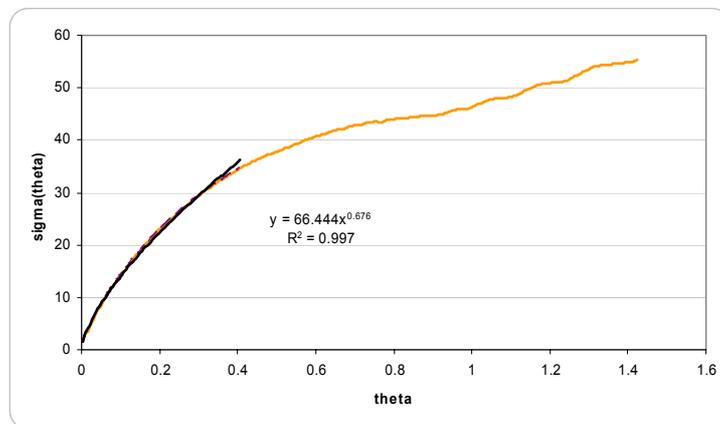
Indice : S=JPMX EURO CORP. XXX YEARS

Période historique : H=[04/01/1999 – 08/10/2009]

Pour une valeur de θ fixée, nous calculons les θ écart-types de $S_{t+\theta} - S_t$ obtenus sur les θ échantillons d'observation sans overlap et nous calculons leur moyenne : σ_θ .

Ensuite, nous calons pour l'indice une forme du type $\sigma_\theta \approx q \times \theta^x$, (en se limitant aux θ entre 0 et 0.4, partie « régulière » de la courbe : nous cherchons ainsi à limiter les effets des rolls d'indice et les effets de duration).

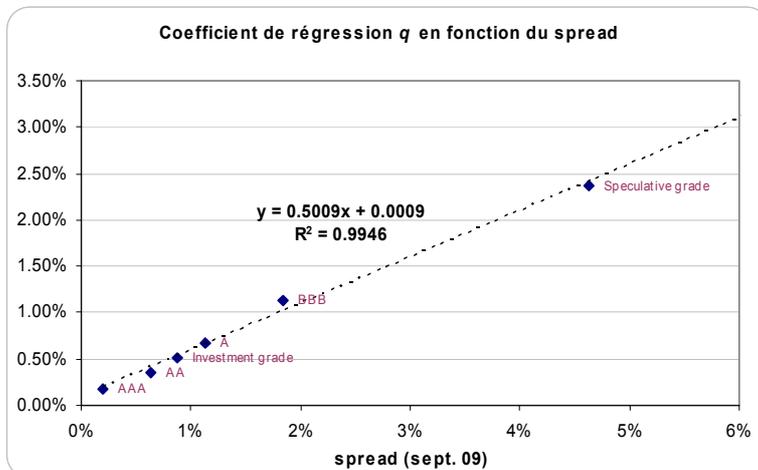
Exemple sur l'indice d' Asset Swap JPMX A



Résultats

La régression aboutit à des R^2 élevés, et des coefficients relativement stables par classe de rating (faible incidence de la duration). Par simplicité, nous proposons de :

1. forcer la puissance à 0.5 (au lieu d'environ ~0.65 - voir tableau complet page suivante)
2. ignorer l'incidence de la duration, et proposer un q indexé par le seul rating
3. pour les ratings non disponibles (BB/B/CCC), nous déterminerons la volatilité par interpolation BBB/High Yield (comme leurs spreads).



Rating	Spread Sept. 09	q retenu
AAA	20	0.18%
AA	63	0.35%
A	113	0.67%
BBB	184	1.12%
BB	239	1.29%
B	496	2.57%
CCC/C	2040	10.31%
Investment grade	88	0.51%
Speculative grade	463	2.38%
All rated	127	0.73%

$$v_{t,\theta,T} = (T - t - \theta) \times q_{rating} \times \sqrt{\theta}$$

	Rating	Corp./ Govies
Index JP AAA	AAA	C
Index JP AAA 1-3 ans	AAA	C
Index JP AAA 3-5 ans	AAA	C
Index JP AAA 5-7 ans	AAA	C
Index JP AAA 7-9 ans	AAA	C
Index JP AAA 10 ans +	AAA	C
Index JP AA	AA	C
Index JP AA 1-3 ans	AA	C
Index JP AA 3-5 ans	AA	C
Index JP AA 5-7 ans	AA	C
Index JP AA 7-9 ans	AA	C
Index JP AA 10 ans +	AA	C
Index JP A	A	C
Index JP A 1-3 ans	A	C
Index JP A 3-5 ans	A	C
Index JP A 5-7 ans	A	C
Index JP A 7-9 ans	A	C
Index JP A 10 ans +	A	C
Index JP BBB	BBB	C
Index JP BBB 1-3 ans	BBB	C
Index JP BBB 3-5 ans	BBB	C
Index JP BBB 5-7 ans	BBB	C
Index JP BBB 7-9 ans	BBB	C
Index JP BBB 10 ans +	BBB	C
Index JP High Yield	Speculative grade	C
Index JP High Yield 1-3 ans	Speculative grade	C
Index JP High Yield 3-5 ans	Speculative grade	C
Index JP High Yield 5-7 ans	Speculative grade	C
Index JP High Yield 7-9 ans	Speculative grade	C
Index JP High Yield 10 ans +	Speculative grade	C
Investment grade	Investment grade	C
Investment grade 1-3 ans	Investment grade	C
Investment grade 3-5 ans	Investment grade	C
Investment grade 5-7 ans	Investment grade	C
Investment grade 7-10 ans	Investment grade	C
Investment grade 10 ans +	Investment grade	C
AAA Govies	AAA	G
AA Govies	AA	G
A Govies	A	G
BBB Govies	BBB	G
High Yield Govies	Speculative grade	G

Regression de l'écart-type du spread $\sigma_{\theta} = q \times \theta^{\alpha}$		
α	q	R^2
0.56	18.35	96.8%
0.48	14.22	95.0%
0.52	20.47	98.0%
0.50	16.79	96.9%
0.57	21.23	97.5%
0.58	19.78	96.8%
0.59	34.61	99.5%
0.64	41.28	98.8%
0.59	43.72	99.8%
0.53	31.14	99.4%
0.58	32.25	99.4%
0.47	26.47	99.5%
0.68	67.26	99.7%
0.64	76.91	99.9%
0.68	83.12	99.8%
0.67	65.54	99.8%
0.69	66.79	99.7%
0.59	47.31	99.8%
0.68	112.49	99.7%
0.63	138.81	99.8%
0.65	122.40	99.7%
0.69	120.62	99.9%
0.67	104.90	99.8%
0.63	169.22	99.6%
0.61	237.64	100.0%
0.59	410.31	100.0%
0.59	315.52	100.0%
0.57	232.12	99.9%
0.55	162.77	100.0%
0.41	197.92	97.6%
0.69	50.80	99.4%
0.66	55.84	99.6%
0.67	60.89	99.6%
0.67	52.28	99.5%
0.70	52.14	99.1%
0.59	32.39	99.2%
0.49	17.32	98.0%
0.60	46.05	99.8%
0.70	81.01	99.8%
0.69	147.33	99.8%
0.61	364.04	100.0%

Calibrage des spreads à Sharpe cible

Soit S la cible de Sharpe. Notons m la quantité $(1+r+s)$ que l'on cherche à calibrer.
Notons encore

$$\frac{B_t}{B_0} = m \times e^{\frac{w\sqrt{\rho}F - w^2}{2}} \times \underbrace{N\left[\frac{1-p}{w - N^{-1}(p)}\right]}_{M \text{ de moyenne } 1-p} \times \underbrace{N\left[w\sqrt{1-\rho} - \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right]}_{D \text{ de moyenne } p} + R \times N\left[\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

En terme de variance : $V\left[\frac{B_t}{B_0}\right] = V[mM + RD] = m^2V[M] + 2m \text{cov}[M, RD] + V[RD]$

D'où le Sharpe (à 1 an) : $S = \frac{m(1-p) + Rp - 1 - r}{\sqrt{m^2V[M] + 2m \text{cov}[M, RD] + V[RD]}}$

On a donc à résoudre en m le polynôme suivant :

$$m^2 \left(V[M] - \frac{(1-p)^2}{S^2} \right) + 2m \left(\text{cov}[M, RD] - \frac{(1-p)(Rp - 1 - r)}{S^2} \right) + \left(V[RD] - \frac{(Rp - 1 - r)^2}{S^2} \right) = 0$$

$V[M]$, $\text{cov}[M, RD]$ et $V[RD]$ sont calculés par Monte Carlo. On prend le plus grand des deux m obtenus, pour atteindre S et non pas $-S$!

Le calibrage en résumé

Un actif obligataire dépend de 5 paramètres (s_0 , p , ρ , R , w) à calibrer :

1. On fixe le rating, la duration T , l'horizon θ : ceci détermine $v_{0,\theta,T} = (T - \theta) \times q_{\text{rating}} \times \sqrt{\theta}$
2. On choisit le recovery ($R=40\%$ par défaut)
3. On calibre w de sorte que, pour $\rho=50\%$, $R=30\%$, spread et probabilité de défaut de long terme,

la volatilité $\sqrt{V\left[\ln \frac{B_\theta}{B_0}\right]}$ soit égale à v . On peut donc calibrer une fois pour toute un abaque de

$w=w(\text{rating}, \theta, T)$, calibrage effectué par Monte Carlo.

4. On choisit p : on prend par défaut $p_{\text{def}}(\text{rating}, \theta)$, abaque de taux de défaut à long terme (cf ci-dessous)
5. On choisit la corrélation ρ (par exemple 50% pour un indice, avec nos hypothèses)
6. On fixe s ou bien on le calibre pour atteindre un Sharpe cible comme détaillé plus haut.

Rating	$w(\text{rating}, 1Y, \text{Maturité}=8Y)$
AAA	1.8%
AA	3.3%
A	6.5%
BBB	10.7%
BB	11.0%
B	20.2%
CCC/C	134.9%
Investment grade	4.7%
Speculative grade	18.5%
All rated	3.4%

Extrait de l'abaque de w

8.4. Synthèse des paramètres utilisés pour la modélisation du portefeuille obligataire

Régime « Spread de marché »

① Niveaux des spreads historiques

Rating	AAA	AA	A	BBB	Investment grade	Speculative grade
s long terme (10Y)	1.8	25.9	59.7	116.3	41.9	387.9
s pour Sharpe=0.2	26.6	45.7	91.1	166.7	70.9	533.4

② Niveaux du paramètre de volatilité de l'indice

Rating	AAA	AA	A	BBB	Investment grade	Speculative grade
ν	1.28%	2.14%	4.18%	7.35%	3.13%	13.97%

Partie « Défaut »

① Probabilités de défaut historiques

(Source Standard & Poors)

Horizon		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux de défaut historique moyen	AAA	-	-	0,09	0,18	0,27	0,37	0,40	0,47	0,51	0,55
	AA	0,03	0,08	0,14	0,25	0,34	0,45	0,56	0,65	0,73	0,83
	A	0,08	0,20	0,34	0,52	0,72	0,95	1,21	1,45	1,69	1,94
	BBB	0,24	0,68	1,17	1,79	2,43	3,06	3,59	4,12	4,63	5,16
	HY	4,06	7,99	11,48	14,32	16,59	18,51	20,13	21,49	22,75	23,86

② Coefficient de corrélation moyenne entre la qualité de crédit des titres obligataires : une mesure de la sensibilité au facteur « macro » F

Choix d'un niveau normatif de 50%, pour représenter une bonne diversification (celle d'indices obligataires)

③ Niveau du recovery $R = 40\%$