

Mémoire présenté devant le Centre d'Etudes Actuarielles
pour l'obtention du diplôme
du Centre d'Etudes Actuarielles
et l'admission à l'Institut des Actuaires

le : 10/10/2012

Par : **Mathieu POULIN**

Titre : **Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie**

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1an 2 ans)
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membre présent du jury de
l'Institut des Actuaires :

Membres présents du jury du
Centre d'Etudes Actuarielles :

Thomas BEHAR

Vincent DAMAS

Gérard CROSET

Arnaud COHEN

Jean-Pierre DIAZ

Brigitte DUBUS

Paul ESMEIN

Michel FROMENTEAU

Stéphane MENART

Christophe IZART

Pierre PETAUTON

Marine CORLOSQUET-HABART

Aymeric KAMEGA

Damien TREMEL

Florence PICARD

Olivier LOPEZ

Secrétariat :

Bibliothèque :

SCOR SE
5, avenue Kléber
F-75795 PARIS CEDEX 16
Tél. : +33 (0)1 58 44 70 00
Fax : +33 (0)1 58 44 85 00
Siret : 562 033 357 00046 - APE 6520 Z

Entreprise :

Nom : SCOR
Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Sophie PICARD
Signature :

Invité :

Nom : _____
Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat





Mémoire d'Actuariat - Promotion 2008

Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie

Mathieu POULIN

MOTS-CLÉS : *expérience, exposition, fréquence, sévérité, incertitude des paramètres, bootstrap, approche bayésienne, crédibilité*

KEYWORDS : *experience, exposure, frequency, severity, uncertainty of parameters, bootstrap, Bayesian approach, credibility*

ENCADREMENT : Sophie PICARD

CORRESPONDANT CEA : Olivier LOPEZ

Résumé

L'objectif de ce mémoire est la proposition et l'analyse de solutions actuarielles nécessaires à la tarification des traités de réassurance non-proportionnels Non-Vie en Excédent de sinistre (XS).

Face aux besoins internes des compagnies de réassurance de mieux maîtriser les risques de souscription des affaires et de s'adapter aux nouvelles réglementations plus exigeantes quant à la quantification des risques (Solvabilité II pour l'Europe par exemple), les méthodes empiriques traditionnellement utilisées ont été remplacées par des méthodes probabilistes, basées sur la modélisation de la fréquence annuelle des sinistres, et de leur sévérité individuelle ultime.

La nature des expositions de pointe acceptés par les compagnies de réassurance, et parfois le peu d'informations statistiques disponible, sont un défi pour les actuaires dans la réalisation de leur approche de tarification. Ils sont de ce fait confrontés à des difficultés majeures de choix et de paramétrage des distributions de probabilité à utiliser lors de la modélisation des risques.

Le coeur du mémoire traite du choix et du paramétrage des distributions de fréquence et de sévérité adaptées aux expositions et données de réassurance, et de leur mise en application dans un cas pratique de tarification XS.

Nous proposons deux méthodes de mesure d'incertitude des paramètres des lois ajustées sur les données d'expérience : le bootstrap paramétrique et l'approche bayésienne. Nous montrons dans le cas pratique à quel point la prise en compte de cette incertitude peut impacter les résultats de tarification.

Pour la sévérité, la tarification sur base exposition est une alternative qui peut se révéler payante pour diminuer le risque d'incertitude sur les tarifs lié à la tarification sur base expérience. Nous proposons de ce fait également une méthode de mélange en crédibilité des tarifications sur expérience et sur exposition.

Lors du passage des méthodes empiriques aux méthodes probabilistes, un certain nombre de solutions et d'astuces supplémentaires peuvent être mises en place. Leur descriptif figure en annexe, car n'ayant pas fait l'objet d'illustration spécifique dans notre cas pratique.

Abstract

The aim of this thesis is to propose and analyse the actuarial solutions necessary for pricing Non-Life non-proportional Excess of Loss (XL) reinsurance treaties.

In order to better control underwriting risk inside companies and adapt to new risk-based regulation (such as Solvency II in Europe), traditional empirical reinsurance pricing was replaced by probabilistic pricing based on modeling of annual loss frequency and severity of individual loss.

The nature of top exposure accepted by reinsurers and often the lack of statistical information at disposal for the pricing are challenging for reinsurance pricing actuaries. They are indeed confronted to major difficulties for choosing and calibrating probability distributions used to model the risks.

We concentrated in the core of the thesis on the choice and the parameterization of frequency and severity models adapted to reinsurance exposures and data and the application to a case study of XS of loss pricing.

We propose two methods for measuring uncertainty around parameters of distribution laws adjusted on experience data, namely the parametric bootstrap and the Bayesian approach. We show notably via the case study how important this uncertainty is given the potential impact it has on the prices.

For the severity, the pricing based on exposure data is an interesting alternative to reduce the risk of uncertainty around the prices obtained with experience pricing. We therefore also propose a method based on credibility theory for mixing experience and exposure pricings.

As empirical methods were replaced by probabilistic methods for pricing, a number of additional solutions and expert tips were introduced. We decided to describe them in appendix because they are not applied to our case study.

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaitais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier tout particulièrement Madame Sophie PICARD, directrice de l'Audit Interne à SCOR, qui en tant que directrice de mon mémoire, s'est toujours montrée à l'écoute et très disponible tout au long de sa réalisation. Je la remercie également pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'elle a consacrés et sans lesquels ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Madame Ecaterina NISIPASU, responsable du département Modélisation Actuarielle, et Monsieur Eric LECOEUR, directeur de l'Actuariat Groupe, pour leur attentive relecture du mémoire.

Je remercie naturellement le CEA d'avoir accepté la réalisation de ce mémoire avec un délai supplémentaire.

Je n'oublie pas ma femme et mon fils pour leur soutien et leur patience. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Introduction	23
I Rappels de Réassurance	25
1 Les besoins de réassurance	25
2 Les formes de réassurance non-proportionnelles	26
2.1 L'excédent de sinistres	27
2.1.1 XS par Risque	28
2.1.2 XS Clash	29
2.1.3 XS par Évènement	30
2.2 Le distinguo branche courte, branche longue	30
3 La tarification technique : ses objectifs	31
3.1 Décision de souscription	31
3.2 Suivi de portefeuille : provisionnement et rentabilité	32
3.3 Suivi du risque de tarification	33
4 La tarification technique : ses composantes	33
4.1 Prime pure	33
4.1.1 Données d'expérience	34
4.1.2 Revalorisation des primes, des sinistres et des seuils de communication	34
4.1.3 L'approche classique (empirique) par l'exploitation des données d'expérience (en branche courte)	36
4.1.4 L'approche probabiliste en fréquence et sévérité	37
4.1.5 Prime pure d'un contrat en excédent de sinistre	39
4.1.6 Avantages et limites de l'approche en fréquence et sévérité	40
4.1.7 Incertitude de paramètres dans l'approche en fréquence et sévérité	41
4.2 Chargement de sécurité et prime de risque	42
4.2.1 Principe d'allocation du capital	43
4.2.2 Les mesures de risque	43
4.2.3 Capital alloué aux traités	44
4.2.4 Temporalité du risque	46
4.3 Chargements économiques et prime technique	47
4.3.1 Les frais de suivi et de gestion du traité	47
4.3.2 Le courtage	48
II Présentation du cas pratique et application de la méthode empirique (Burning Cost)	49
5 Présentation du cas pratique	49
6 Burning Cost sur le Cas pratique	52

III	Distribution du nombre de sinistres : la Fréquence	56
7	Seuil de modélisation et échantillon de nombre de sinistres au dessus du seuil	56
7.1	Choix Seuil de modélisation	56
7.2	Echantillon de nombre de sinistres au dessus du seuil	58
8	Les données de référence	61
9	Choix d'un modèle de fréquence des sinistres	61
9.1	Hétérogénéité, contagion et sur-dispersion	61
9.2	La loi de Poisson : la loi des évènements rares	62
9.3	Les lois sur-dispersées	64
9.3.1	La classe des lois de Poisson-Mélange	64
9.3.2	La loi Binomiale Négative	66
9.3.3	Une alternative : la loi de Poisson Généralisée	68
9.3.4	Comparaison entre Binomiale Négative et Poisson Généralisée	69
9.4	Estimation des paramètres par Maximum de Vraisemblance	70
9.4.1	Estimation des paramètres pour la loi de Poisson Généralisée	70
9.4.2	Estimation des paramètres pour la loi de Poisson	71
9.4.3	Estimation des paramètres pour la loi Binomiale Négative	71
9.4.4	Résultats des estimations des paramètres sur les trois lois par le maximum de vraisemblance	72
9.5	Les tests d'hypothèses comme outils d'aide au choix du modèle	73
9.5.1	Un Test de sur-dispersion : indice de dispersion de Fisher	74
9.5.2	Le rapport de vraisemblance	76
9.5.3	Conclusion sur les tests	77
10	Incertitude des paramètres de la fréquence	78
10.1	La limite asymptotique du maximum de vraisemblance	78
10.2	Le bootstrap paramétrique	79
10.2.1	L'algorithme	79
10.2.2	Présentation des résultats	80
10.3	L'approche bayésienne	90
10.3.1	La distribution a posteriori des paramètres	90
10.3.2	La distribution a posteriori des paramètres	91
10.3.3	Le résultat Poissonien	91
10.3.4	Le cas des lois Binomiale Négative et Poisson Généralisée	93
10.3.5	Mise en application de l'algorithme	95
11	Conclusion sur la fréquence	109
IV	Distribution du montant de sinistre : sévérité	110
12	Sévérité empirique "multi-ajustée"	111

13 Ajustement de sévérité (fitting)	112
13.1 La loi de vraisemblance	112
13.2 Tests d'adéquation	112
13.2.1 Test d'Anderson-Darling	112
13.2.2 Test du maximum de vraisemblance	113
14 Incertitude des paramètres de la sévérité	117
15 Résultats de primes pures d'expérience	120
16 Utilisation des distributions de sévérité issues des données d'exposition	124
16.1 Modèle stochastique sous-jacent	125
16.2 Les contrats XS Incendie en Europe	126
V Mélange en crédibilité des tarifications expérience et exposition	130
17 Crédibilité d'expert sur l'espérance de la fréquence	130
18 Estimateur de crédibilité complet des primes pures	131
Conclusion	135
Références	136
Annexes	139
Annexe 1 : Agrégation fréquence / sévérité par transformée de Fourier rapide	139
Annexe 2 : Description détaillée de l'algorithme de Nelder-Mead	142
Annexe 3 : L'algorithme de Metropolis-Hasting	143
Annexe 4 : Catalogue des lois de fréquence et de sévérité utilisées à la SCOR	144
Annexe 5 : Mélange avec les courbes de marché	152
Annexe 6 : Ajustement des queues de distribution	159
Annexe 7 : Sévérité sur base exposition - les contrats aux Etats-Unis	161
Annexe 7 : Modélisation des sinistres exceptionnels	165
Annexe 8 : Mélange des Risk Process	167

Synthèse

Le sujet de ce mémoire est d'analyser et illustrer l'apport des récentes techniques actuarielles, appliquées à la tarification probabiliste des traités de réassurance non proportionnels en excédent de sinistres (ou XS) Non-Vie pour les branches courtes (dont les sinistres se développent peu dans le temps et sont payés rapidement).

L'enjeu du mémoire est de mettre en lumière l'avancée majeure que constitue la tarification probabiliste tout en montrant la nécessité de maîtriser les outils de choix et paramétrage des lois de distribution des deux composantes du risque, la fréquence annuelle des sinistres et la sévérité des sinistres individuels. Cette nécessité de maîtrise des modèles et paramètres de la tarification est d'autant plus accentuée en réassurance qui assure la protection des risques extrêmes peu fréquents.

Nous proposons donc des méthodes de mesure de l'incertitude des paramètres de la tarification, cette incertitude étant peu explorée dans les approches traditionnelles de tarification des traités de réassurance. Nous montrons que la prise en compte de cette incertitude des paramètres peut avoir un impact significatif sur les résultats de tarification des traités. Nous proposons également une nouvelle méthode de mélange en crédibilité des tarifications sur base expérience et sur base exposition qui nous le verrons permet de diminuer les effets d'incertitudes.

Tout au long du mémoire, nous illustrons le propos au moyen de l'application à un cas pratique de tarification de traité non proportionnel en branche courte (Incendie).

Mise en perspective du contexte général :

Les couvertures en traités non proportionnels permettent une grande souplesse dans leur définition et leur fonctionnement. Contrairement aux traités proportionnels les plus répandus (quote-part et excédent de pleins), la prime de réassurance revenant à la couverture non proportionnelle n'est pas fixée mécaniquement par une règle de partage prédéfinie. En d'autres termes, le partage du sort entre réassureur et assureur n'est plus aussi évident que dans les cas de réassurance proportionnelle. Pour cette raison, le fonctionnement des traités non proportionnels permet une tarification individualisée du contrat, c'est à dire indépendante de la tarification originale des risques ou polices couvertes.

La réassurance non proportionnelle en Excédent de Sinistre (XS) offre aux clients (les cédantes), des protections contre des risques et sinistres extrêmes qui par définition se sont peu, voire ne se sont jamais réalisés par le passé. Les actuaires de réassurance travaillent par conséquent avec très peu de données d'expérience ce qui complique inévitablement la modélisation du risque, et aura conduit à proposer des méthodes de tarification alternatives basées sur l'exposition (par exemple, le profil de portefeuille listant les risques en portefeuille de la cédante).

Dans le passé, les actuaires des compagnies de réassurance effectuaient la tarification des traités de réassurance au moyen de méthodes empiriques, des méthodes pratiques mais aussi simplistes et surtout non adaptées à la constante augmentation des besoins de quantifier, en interne, les risques liés à la tarification, et de répondre aux exigences de la nouvelle réglementation Solvabilité II. Avec l'introduction des méthodes probabilistes, les actuaires se sont retrouvés en position

de donner les distributions autour des résultats de leur tarifications, nécessaires pour mesurer le risque lié à leur modélisation.

En pratique, les actuaires utilisent une approche de tarification probabiliste, soit entièrement basée sur les données d'expérience, soit combinée avec les informations d'exposition. La tarification probabiliste consiste à reconstituer le processus de risque complet de chaque élément aléatoire intervenant dans la sinistralité du portefeuille couvert. Le modèle stochastique sous-jacent à la tarification des tranches XS est un modèle en fréquence et sévérité (le plus souvent supposés être des variables aléatoires indépendantes). La « fréquence » est associée la distribution du nombre de sinistres ultimes dépassant un certain seuil, pour la période de couverture et l'exposition en question. La distribution du montant des sinistres ultimes est la « sévérité » définie au-delà de ce même seuil. La modélisation fréquence/sévérité au-delà d'un certain seuil, rend cohérentes les primes pures entre des tranches de franchises et de portées différentes, et permet d'obtenir une distribution de la charge annuelle ultime.

La fréquence et la sévérité sont en général dérivés d'une tarification sur base expérience qui consiste à calculer la prime d'équilibre (ou actuarielle) du traité en s'appuyant sur sa sinistralité historique une fois ajustée afin d'être représentative de la sinistralité à anticiper pour l'année de couverture à tarifier. Bien qu'elle soit pratique et simple à mettre en place, elle est de peu d'utilité pour la tarification des tranches hautes qui n'ont jamais été sinistrées sur la période d'observation.

La sévérité peut être dérivée d'une tarification sur exposition qui utilise le profil de portefeuille des polices assurées (souvent par bandes d'engagement ou sommes assurées par catégorie de garanties) exposant le traité, et les données de référence (benchmark) notamment : (1) des courbes permettant de recalculer la distribution des sinistres couverts une fois appliquées au profil de portefeuille et (2) les ratios de sinistres à primes d'assurance (ou Loss Ratio) qui peuvent être estimés pour le portefeuille couvert.

Quelle que soit la modélisation utilisée, les distributions de fréquence et de sévérité, explicites ou implicites doivent être utilisées et la distribution de la charge annuelle ultime par tranche doit être obtenue. Sa moyenne correspond à la prime (dite pure), nécessaire pour couvrir la charge des sinistres du contrat pour la période de couverture. Un chargement de la prime pure est ensuite appliqué, pour prendre en compte les frais internes (par exemple : les frais de gestion), les frais externes (par exemple : le courtage), et un chargement de sécurité/ profitabilité pour servir la rémunération attendue des traités et calculée en utilisant le capital « alloué » au traité. Ce capital alloué dérive lui-même d'un opérateur de risque choisi.

La qualité de la modélisation est primordiale et impacte non seulement la prime pure mais aussi, au travers de la mesure de risque choisi, les chargements de sécurité et profitabilité. De plus, ces résultats probabilistes obtenus par la tarification peuvent être utilisés comme l'une des composantes de la modélisation du portefeuille du réassureur, et alimentent le modèle interne pour calculer le capital requis nécessaire à la couverture du risque de la société de réassurance (Solvency Capital Requirement (SCR)).

Articulation du mémoire :

Le mémoire s'articule autour de cinq parties décrites dans les paragraphes ci-dessous.

En résumé :

Nous rappelons dans un premier temps les bases de la réassurance non proportionnelle et des tarifications techniques empirique et probabiliste.

Nous présentons ensuite le cas pratique sur lequel nous réalisons un calcul de « Burning Cost » (approche traditionnelle de tarification empirique) pour mettre en exergue la nécessité de tarifier en fréquence et sévérité. Nous appliquons ensuite à ce cas pratique les solutions actuarielles proposées dans le cadre de la tarification probabiliste.

En ce qui concerne le choix d'une distribution de fréquence, l'actuaire ne peut en général qu'exploiter les données d'expérience et est en pratique confronté à un échantillonnage de faible taille et à la difficulté de déterminer la nature de la loi de distribution (et de ses paramètres). Nous proposons d'analyser les différentes lois de probabilité exploitables pour la modélisation de la fréquence des sinistres individuels ainsi que les techniques menant au choix et paramétrage de ces lois. Nous proposons par ailleurs aux actuaires deux techniques peu exploitées dans les approches traditionnelles de tarification pour mesurer l'incertitude des paramètres de la loi de fréquence : le bootstrap paramétrique et l'approche bayésienne.

En ce qui concerne le choix d'une distribution de sévérité, l'actuaire peut exploiter les données d'expérience mais aussi les résultats des modèles d'exposition par risque. Il est en pratique souvent confronté à la difficulté de calibrer la queue de distribution de sévérité, fondamentale pour la tarification des tranches hautes. Nous proposons d'analyser l'ajustement des échantillons de sinistres par des lois de distribution continues, et l'incertitude des paramètres des lois ajustées par le bootstrap paramétriques.

Enfin pour diminuer l'incertitude sur la sévérité et par conséquent sur le tarif, nous proposons une technique de mélange en crédibilité des résultats d'expérience et d'exposition.

Les alternatives de modélisation des queues de distribution des lois de sévérité et les techniques de renforcement des lois de sévérité sont également présentés en annexe de ce mémoire. Elle ne figure pas dans le coeur du mémoire car nous avons préféré nous concentrer sur les techniques mises en application dans le cas pratique.

1 - Rappel de Réassurance

Le type de protection le plus courant en réassurance non-proportionnel est l'excédent de sinistres, dit « XS ». Dans les traités en excédent de sinistres, le réassureur rembourse la cédante des montants de sinistres dépassant une certaine franchise (aussi appelée priorité) notée F , jusqu'à hauteur d'une certaine limite, notée L . Les bornes du traité, franchise et limite, définissent une tranche de réassurance. Le montant maximal couvert par le réassureur, $C=L-F$, est appelé portée de la tranche (C comme « capacity »). La convention pour nommer la tranche est $C XS F$.

La tarification technique des tranches XS consiste à déterminer la prime pure des tranches (la valeur actuelle probable des sinistres qui vont être payés au titre du traité).

Le chargement dit de sécurité, correspondant à la rémunération du capital allouée aux risques pris par l'acceptation de l'XS, est ajouté à la prime pure pour déduire la prime de risque. Enfin les chargements économiques (gestion, courtage) sont ajoutés pour obtenir la prime technique de l'XS.

Les données d'expérience utilisées en tarification de réassurance sont les primes d'assurance (dites assiettes de primes), sinistres et seuils de communication des sinistres par année d'expérience (éventuellement par type de risque). Ces données sont fournies par la cédante.

La première étape de calcul de la prime pure consiste à redresser les données historiques (primes d'assurance, sinistres et seuils) afin de le rendre représentatif des conditions de souscription et économiques de l'année de couverture à évaluer. Ce redressement, ou revalorisation des données d'expérience est appelé mise en « As If ».

Les actuaires appliquaient traditionnellement la méthode empirique dite du « Burning Cost » pour tarifier les XS. Cela consiste à calculer les charges individuelles à la tranches par application des bornes du traité aux sinistres revalorisés de base, d'en déduire les charges annuelles à la tranche pour chaque année d'expérience, de calculer les taux annuels par division des charges annuelles à la tranches et des primes As If par année, et d'effectuer une moyenne pondérée des taux obtenus par année d'expérience par les primes As If.

L'approche probabiliste en fréquence et sévérité est venue remplacée la méthode « Burning Cost ». Le paramétrage des deux composantes du risque, fréquence et sévérité, est obtenu à partir de l'échantillon obtenu après mise en as if des données historiques sur l'horizon d'expérience, en général compris entre 10 et 15 ans maximum.

Cela aboutit à des échantillons de petite taille, ce qui induit une incertitude sur l'estimateur de la prime pure. Lorsque les paramètres sont considérés comme aléatoires, l'estimateur de la prime pure devient une variable aléatoire dont nous pouvons dériver l'expression de la moyenne et de la variance.

2 - Présentation du cas pratique et application du Burning Cost

Nous appliquons les solutions actuarielles proposées dans ce mémoire à un cas pratique de tarification d'un programme de réassurance Incendie en 2011 pour un client polonais.

Il est composé de trois tranches de réassurance XS par risque, 6.5 M€ XS 3.5 M€, 20 M€ XS 10 M€ et 45 M€ XS 30 M€. Les données d'expérience (sinistres, primes, seuils de communication) fournies par la cédantes sont présentées. Une première analyse de l'historique permet de conclure que la première tranche (dite basse) est partiellement travaillante en ce sens qu'elle a été touchée par des sinistres par le passé, mais n'a jamais été traversée par des sinistres supérieurs à 10 M€. Les deux tranches supérieures (dites hautes) sont dites non travaillantes car elles n'ont

jamais été touchées.

L'intérêt de la tranche basse pour la cédante, est de lui garantir une rétention par sinistre de 3.5 M€, au plus. L'intérêt des tranches hautes est une protection de ses résultats en cas de sinistre de pointe exceptionnel, et lui permet d'augmenter ses possibilités de souscription par la diminution du capital mobilisé pour faire face aux grands risques couverts en partie par la réassurance.

La présentation du profil de portefeuille du cas pratique, composé principalement du nombre de risques, des primes de base et des sinistres maximum possibles par bande de sommes assurées pour l'année de tarification (2011), permet de confirmer cette stratégie de protection mise en place par la cédante.

Le " Burning Cost " est appliqué sur le cas pratique pour mettre en exergue les faiblesses de la méthode empirique puisqu'elle conduit à une sous-tarification sur la tranche partiellement travaillante et à une tarification nulle sur les tranches hautes non travaillantes. Nous mettons ainsi en lumière la nécessité d'appliquer la méthode de tarification sur expérience probabiliste en fréquence et sévérité.

3 - Distribution du nombre de sinistres : la Fréquence

L'échantillon de nombre de sinistres annuels est calculé sur le cas pratique. Il est composé de 9 données uniquement (9 années d'expérience de 2002 à 2010), présente une volatilité empirique non négligeable mesurée par son indice de dispersion (rapport variance sur moyenne empiriques) très supérieur à 1, et des nombres de sinistres annuels très faibles (inférieure à 6) caractéristiques des échantillons de réassurance.

L'analyse de ce résultat permet de mettre en lumière par la pratique la nécessité de modéliser le nombre de sinistre des XS de réassurance au moyen de loi non seulement modélisant les évènements rares, la loi de Poisson, mais aussi représentant la sur-dispersion des échantillons. Pour cette dernière caractéristique, nous présentons et comparons deux alternatives à la loi de Poisson, la Binomiale Négative et la Poisson Généralisée de queue plus épaisse à indice de dispersion égal.

En sus de l'échantillon du cas pratique, quatre autres échantillons théoriques de tailles différentes (5, 15, 30 et 100 années d'expérience) simulés dans une Binomiale Négative d'indice de dispersion égal à 1.5 sont introduits pour illustrer la problématique d'analyse de la fréquence en réassurance. Le dernier échantillon a un horizon d'expérience volontairement très supérieur au maximum observable, car dans ce cas, les propriétés asymptotiques des outils présentés ensuite pour le choix et le calibrage de la loi de fréquence ajustée sur cet échantillon sont vérifiées. L'estimation par maximum de vraisemblance sur les trois lois, Poisson, Binomiale Négative et Poisson Généralisée, est réalisée sur les 4 échantillons théoriques et le cas pratique. Ils révèlent une orientation vers les deux lois sur-dispersées en première approche. Par ailleurs l'analyse des épaisseurs de queue empiriques des échantillons montre la bonne discrimination par maximum de vraisemblance des échantillons. Ceux à plus faible queue sont bien orientés vers la Binomiale Négative et les autres à queue plus épaisse sont orientés vers la Poisson Généralisée. Le maximum de vraisemblance écarte en première approche le choix de la loi de Poisson.

Nous proposons ensuite deux tests statistiques de sur-dispersion, par l'indice de dispersion de Fisher et le rapport de vraisemblance, appliqués aux échantillons. L'analyse des résultats montre que ces tests classiques sont peu adaptés aux échantillons de petite taille. Ils ne permettent en effet pas de conclure au rejet catégorique de la loi de Poisson sauf éventuellement dans le cas de l'échantillon 4 de 100 ans, alors même que tous les échantillons sont très sur-dispersés avec des indices de dispersion supérieurs à 1.5. De plus, l'hypothèse Poisson est de moins en moins rejetée lorsque les échantillons deviennent petits. Nous concluons que les tests statistiques de discrimination des lois de fréquence sont peu adaptés aux échantillons de petite taille. Nous indiquons qu'il vaut mieux se fier aux résultats du maximum de vraisemblance que ceux des tests statistiques pour effectuer son choix de modélisation du nombre de sinistres annuels en réassurance. Nous choisissons du reste de mener le cas pratique avec le choix d'une loi Binomiale Négative déterminée par maximum de vraisemblance.

Nous proposons ensuite deux méthodes de mesure de l'incertitude des paramètres ajustées par maximum de vraisemblance, la méthode du bootstrap paramétrique et la méthode bayésienne.

Ces méthodes appliquées au premier paramètre des trois lois de fréquence ajustée sur les échantillons rendent aléatoires l'estimateur de la moyenne de la fréquence. L'analyse des distributions des estimateurs des moyennes de fréquences permet de montrer que l'incertitude prise en compte par le bootstrap conduits à une éventuelle sous-estimation des moyennes de fréquence de 15% (pour l'échantillon 3 de 30 ans) à 40% (pour le plus petit échantillon 1 de 5 ans) dans le cas du choix de la Poisson. Dans le cas de la Binomiale Négative et Poisson Généralisée, l'incertitude mesurée par le bootstrap est plus grande car les lois sont sur-paramétrées par rapport à la Poisson, ce qui peut conduire à une sous-estimation de 20% (échantillon 2) à 50% (échantillon 1) de la moyenne de la fréquence. Dans le cas pratique pour lequel la Binomiale Négative est choisie, la sous-estimation est de 45% environ. Par la méthode bayésienne, les mesures d'incertitudes sont encore plus fortes avec des cas de sous-estimation de plus de 85% (cas échantillon 1 - Poisson Généralisée). L'accentuation de l'incertitude par la méthode bayésienne tient au fait que le bootstrap paramétrique simule les paramètres dans la même distribution ajustée d'origine. Il ne reconnaît de ce fait pas ou peu l'asymétrie dans l'incertitude des paramètres contrairement à la densité a posteriori des paramètres utilisée pour la simulation des paramètres dans l'approche bayésienne.

4 - Distribution du montant de sinistre : la Sévérité

Nous mettons en exergue les difficultés et incertitudes liées au choix de la loi de fréquence dans le chapitre précédent. Nous nous intéressons aussi aux techniques d'ajustements des lois de montants de sinistre au cas pratique uniquement afin de faciliter l'analyse.

La plupart des lois de sévérité ajustées se trouvent dans le haut du classement d'après les tests statistiques d'adéquation d'Anderson Darling et la mesure d'entropie. Elles sont toutefois rejetées car elles ne possèdent pas de queue de distribution suffisamment épaisse pour obtenir des primes pures significatives pour les deux tranches supérieures non travaillantes.

La loi de Pareto, à queue de distribution très lourde, pourtant dans le bas du classement vis à vis de l'ajustement, est préférée dans ce cas pour mieux représenter les sinistres extrêmes

pouvant toucher les tranches hautes. D'autres techniques sont proposées en annexe du mémoire comme le raccordement de la distribution empirique sur les zones de risques travaillantes, avec des distributions de sévérité à queue épaisse sur le haut dans la zone de sinistralité extrême. Par souci de concision, et du fait de la non application au cas pratique, nous n'avons pas présenté cette proposition dans le coeur du mémoire.

Une fois la loi de Pareto choisie, nous analysons l'incertitude de paramètre de cette loi. Nous utilisons la technique du bootstrap paramétrique et analysons les impacts sur les charges individuelles aux tranches dont les estimateurs deviennent des variables aléatoires. Il en résulte que sur le cas pratique, la prise en compte d'incertitude de paramètre de sévérité pourrait conduire à une sous-estimation de la charge à la tranche de 16% sur la tranche basse et de plus de 90% sur la tranche la plus haute.

Nous analysons le résultat de prime pure sur le cas pratique et concluons que la prise en compte des incertitudes des paramètres de fréquence et de sévérité peut conduire jusqu'à plus de 170% de sous-estimation de la prime pure (incertitude par méthode bayésienne sur la fréquence). Ces impacts sur la prime pure tendent à prouver l'absolue nécessité de la prise ne compte de cette incertitude en tarification de réassurance non-proportionnelle.

Par ailleurs des indicateurs de variance des estimateurs (notamment de fréquence) montrent que l'impact sur le capital alloué et donc sur le chargement de sécurité serait lui aussi très significatif, avec tout l'enjeu que cela représente pour la tarification mais aussi pour les modèles interne de compagnies mesurant le risque de souscription des affaires.

5 - Mélange en crédibilité des tarifications expérience et exposition

La tarification sur expérience révèle des faiblesses pour la modélisation des sinistres extrêmes, c'est-à-dire dans la queue de distribution de la sévérité. Nous présentons une technique alternative de modélisation de la sévérité basée sur l'utilisation des données d'exposition et le profil de portefeuille de la cédante, et l'appliquons au cas pratique.

Nous proposons enfin une méthode de mélange en crédibilité des tarifications sur expérience et sur exposition, ce qui permet de minimiser les incertitudes de tarification. La technique consiste à pondérer les estimateurs de primes pures sur expérience et sur exposition par un facteur de crédibilité dont la valeur optimale est trouvée en minimisant la variance de l'estimateur de la prime pure crédibilisée.

Le risque spécifique du client est d'une certaine mesure éloigné du risque de l'industrie représenté par les courbes d'exposition utilisées pour modéliser la sévérité en tarification sur exposition. Nous introduisons de ce fait un facteur d'incertitude autour de l'estimateur de la prime pure d'exposition qui peut prendre des valeurs entre 0 et l'infini.

Les résultats sur le cas pratique montrent que plus le facteur d'incertitude sur la tarification sur exposition est faible, plus le facteur de crédibilité (poids accordé à la tarification sur expérience) est faible et plus on se rapproche du tarif sur exposition avec une incertitude nulle autour de l'estimateur de la prime pure.

Nous montrons qu'en prenant un écart type égal à 25% de la moyenne sur l'estimation de la prime pure d'exposition, on diminue les coefficients de variation des estimateurs des primes pures crédibilisées de moitié par rapport aux primes pures sur expérience uniquement car les poids accordés à l'expérience passent d'un peu moins de 100% à 30% sur les deux premières tranches et de 100% à 4% sur la dernière tranche.

La tarification sur exposition et son mélange en crédibilité avec l'expérience permet grâce à cette technique de réduire l'incertitude sur l'estimation de la prime pure des traités de réassurance non-proportionnels ainsi à n'en pas douter sur le chargement de sécurité de ces primes pures.

Conclusion

Ce mémoire montre en définitive que quelles que soient la qualité, la quantité et la disparité des données et informations, l'actuaire tarificateur peut appliquer des méthodes simples à mettre en œuvre comme le bootstrap paramétrique et l'approche bayésienne pour mesurer et maîtriser l'incertitude de ses tarifs.

Ces méthodes sont ou peuvent être utilisés dans de nombreux autres domaines d'application comme la tarification des branches longues en Non Vie, la tarification des contrats d'assurance Vie, le provisionnement technique, la détermination du capital requis pour le risque de souscription des sociétés d'assurance et de réassurance.

Dans chacun de ces domaines, l'actuaire est confronté à la nécessité de construire des modèles mélangeant des données très hétérogènes, avec le souci constant de maîtriser la crédibilité et l'incertitude de son résultat.

Synthesis

The subject of this thesis is to analyse and illustrate the recent contribution of actuarial techniques applied to probabilistic pricing of Non-Life short tail reinsurance Excess of Loss (XL) treaties.

The aim of this thesis is to highlight how the probabilistic methods helped a lot improve the pricing of reinsurance treaties. We want to show it leads to a need for mastering the tools used to choose and parameterize the models for the two components of risks, frequency and severity of losses during the year. This is of absolute necessity in particular for reinsurance which deals with extreme and rare events.

We propose methods to measure uncertainty around pricing parameters, this uncertainty being not much studied in traditional pricing of reinsurance treaties. We show that taking into account the uncertainty of parameters can have a significant impact on pricing results. We also propose a new method for mixing experience and exposure pricings using credibility theory. We will see this methodology reduces uncertainty effects of parameterization that appear during experience pricing.

All through this thesis, we will illustrate the points raised with a case study of pricing of short tail non-proportional reinsurance treaty (Property).

Overall context of the thesis :

Non-proportional covers can vary a lot in terms of definition and functioning. In contrast with more common proportional treaties (Quota-Share and Surplus), the reinsurance premium is not fixed by a predefined mechanical rule. In other words, the share of the risk between the reinsurer and the insurer is not as simple as in the case of proportional reinsurance. As a matter of fact, the functioning of non-proportional treaties allows for an individual pricing of each contract, that is to say independent from the base insurance pricing of the underlying risks or policies covered.

The aim of non-proportional Excess of Loss (XL) reinsurance is to protect clients (cedents) to extreme risks/claims which by definition never occurred by the past. Reinsurance actuaries therefore work with very few experience data. The result is the modeling of the risk is even harder. It led to the proposition of new pricing methods based on exposure to risks (for example, the portfolio profiles listing the risks of cedents' portfolios).

In the past, actuaries in reinsurance companies were using empirical methods such as « Burning Cost » to price reinsurance treaties. These methods were very practical but also too simplistic. They were not adapted to the constant increase in needs for managing risks linked to pricing and for dealing with the new regulatory Solvency II requirements. With the introduction of probabilistic methods, actuaries were given the possibility to give the distributions of prices, a necessary path to measurement of risk linked to pricing.

In practice, actuaries use probabilistic pricing methodologies, either entirely based on experience data or combined with risk exposure information. Probabilistic pricing involves reconstructing completely the risk process looking at each stochastic element that may impact the losses of the

portfolio. In this pricing, the experience data are usually used. The underlying stochastic model is a frequency severity model (most of the time considered to be independent random variables). The « frequency » is linked to the distribution of the number of ultimate losses above a certain threshold, for the period of coverage and the corresponding exposure. The distribution of the ultimate losses is called the « severity » and is also defined above the threshold. The modeling of frequency and severity ensures the consistency of the pure premiums between layers with different limits (priorities and capacities), and allows to derive a distribution of the ultimate annual charge to each layer.

Frequency and severity are generally derived from pricing based on experience data. Experience pricing consists in calculating actuarial premium of treaties using historical losses, adjusted to be representative of the losses that can be anticipated for the year of coverage. Even if experience pricing is practical and simple to put in place, it is useless for pricing high layers that have never been hit according to past observations.

Severity can be derived from pricing based on exposure which uses portfolio profile of insured policies (often per band of sum insured per classes of guarantees) exposing the treaty, and reference data (benchmark) notably : (1) curves that allow to calculate the loss distribution when applied to the portfolio profile and (2) loss to insurance premium ratios (or Loss Ratio) that can be estimated for the covered portfolio.

Whatever the model used, frequency and severity distributions are derived to obtain a distribution of the annual ultimate charge to the layer. The mean of this distribution corresponds to the pure premium, which is the necessary premium to cover the expected losses during the period of coverage. A loading of the pure premium then occurs to take into account internal costs (for example administrative costs), external costs (for example brokers' commissions), and a security loading called the profitability which corresponds to the required return on the allocated capital to the treaty. The allocated capital is derived from a risk measure chosen by the company.

The quality of the modeling is essential because it does not only impact the pure premium calculation but also through the risk measure, the security loading / profitability. Furthermore, the probability distribution results obtained during the modeling of the reinsurance portfolio feed the internal model which aims to calculate the required capital necessary to cover the risk of the company (Solvency Capital Requirement (SCR)).

Content of the thesis :

The thesis is composed of five parts that are described in the following paragraphs.

In summary :

We first recall the basis of non-proportional reinsurance and of empirical and probabilistic pricing methods.

We then present a case study on which we apply a « Burning Cost » (traditional empirical approach) to highlight the necessity to price in frequency and severity instead. We then apply

actuarial solutions to the case study in the context of probabilistic pricing.

Concerning the choice of a frequency distribution, the actuary can, in general, only rely on experience data and is, in practice, confronted to samples of small size. The result is significant uncertainty around the determination of the nature of the distribution law (and its parameters). We propose to analyse the different probability laws available for the modeling of the frequency of individual losses, the techniques available for choosing a law. We also propose the measure of the uncertainty around the parameters of this law by the bootstrap and Bayesian methods, this uncertainty being not often taken into account in traditional pricing of reinsurance treaties.

Concerning the choice of a severity distribution, the actuary can use the experience data as well as the results from exposure per risk models. In practice, he is often confronted with the difficulty of calibrating the tail of severity distribution, which is fundamental for the pricing of higher layers. We propose to analyse the fitting of loss samples to continuous distribution laws, and the uncertainty around the parameters of the fitted laws using parametric bootstrap.

In order to reduce the uncertainty on severity and therefore on prices, we propose a methodology for mixing the results from experience and exposure using the credibility theory.

The options for modeling the tail of severity distribution, and the techniques for reinforcing distributions in the tail are also presented in appendix of the thesis. We did not incorporate them to the core of the thesis because we preferred to concentrate on techniques that are used for the case study.

1 - Recall on Reinsurance

Excess of Loss, also called « XL » is the most common non-proportional reinsurance type of protection. In excess of loss treaties, the reinsurer reimburses the cedent for the amounts of losses that go beyond a certain priority, noted P , until a certain limit, noted L . The boundaries of the treaty, priority and limit, define a reinsurance layer. The maximum amount covered by the reinsurer, $C=L-P$, is called the capacity of the layer. The convention is to express the layer C XS P .

Techniques for pricing XL layers consist in determining the pure premiums (the actual value of losses that can be paid according to the protection).

The security loading, which corresponds to the return on the capital allocated to the risks taken by accepting the XL cover, is added to pure premium to obtain the risk premium. Finally, economic loadings (administrative costs and brokerage) are added to obtain the technical premium of XL.

The experience data used in reinsurance pricing are insurance premiums (also called base premium), losses and communication thresholds per experience year (possibly by type of risk). These data are given by the cedent.

The first step of calculation of pure premium is the revaluation of historical data (insurance premiums, losses and threshold) so that they become representative of the underwriting and

economic conditions of the year of coverage. This revaluation of experience data is called « As If » calculation.

Actuaries were traditionally using the empirical method called « Burning Cost » to price XL layers. It consists in calculating individual charges to the layer by applying the boundaries of the treaty to « As If » historical losses, then to deduce the annual charge on the layer for each experience year, to calculate annual rate by dividing annual charges with « As If » premiums, and finally to apply a weighted average of annual rates with « As If » premiums.

The probabilistic approach in frequency and severity replaced the « Burning Cost » method. The parameterization of the two components of risk, frequency and severity, is obtained using samples of 10 to 15 years revaluated historical data.

These small samples lead to uncertainty around pure premium estimators. When parameters are considered as random variables, pure premium estimator also become random variables for which we can derive the mean and the variance.

2 - Presentation of case study and application of Burning Cost

We apply the actuarial solutions proposed in this thesis to a case study of pricing of a 2011 Property reinsurance program for a polonese client.

The program is composed of three XL layers per risk, a 6.5 M€ XS 3.5 M€, 20 M€ XS 10 M€ and 45 M€ XS 30 M€. Experience data (losses, premiums, and communication thresholds) given by the cedents are presented. A first analysis of historical data permits to conclude that the first layer (also called low layer) is a partially working layer since it has been hit by losses in the past, but has never been crossed by losses superior to 10 M€. The two superior layers (also called high layers) are non-working layers since they were neve hit in the past.

The objective of the cedent with the first layer is to guarantee a retention per loss of 3.5 M€ at most. The objective of the two high layers is to protect the profit and loss in case of exceptional loss, and to allow the cedent to increase its underwriting possibilities by reducing the capital allocated to cover extreme risks accepted partially by reinsurers.

The presentation of cedent's portfolio profile in the case study (containing number of risks, base premiums and maximum possible losses per band of sum insured for the year to price, 2011) confirms this strategy of protection of the cedent.

The “Burning Cost” is applied to the case study in order to highlight the weaknesses of this empirical method since it leads to under-estimation of pure premium of first layer and null pure premiums for the two non-working layers. We therefore emphasize the necessity to apply probabilistic experience pricing in frequency and severity.

3 - Distribution of number of losses : Frequency

The sample of number of losses per year is calculated for the case study. It is composed of

9 data only (9 years of experience from 2002 to 2010). It has non negligible empirical volatility measured by its dispersion index (ratio of empirical variance to empirical mean) largely superior to 1, and very small number of annual losses (inferior to 6) characteristic of reinsurance sample.

Analysis of this results highlights the necessity to model number of losses for XS reinsurance by means of laws that no only represent rare events, like the Poisson law, but also represent over-dispersion of samples. For this last characteristic, we present and compare two alternatives to Poisson law, the Negative Binomial and the Generalized Poisson with heavier tail for the last one given equal dispersion index.

In addition to case study sample, we use four other samples with different lengths (5, 15, 30 and 100 experience years) simulated in a Negative Binomial law with dispersion index equal to 1.5 in order to illustrate the issues raised during analysis of frequency in reinsurance. The last sample has a length highly superior to the maximum observable, because in this case, asymptotic properties of proposed tools for the choice and parameterization of frequency adjusted on this sample are verified. We apply estimation of parameters by maximum likelihood with Poisson, Negative Binomial and Generalized Poisson on the four samples and the case study. The results show the maximum likelihood woul orientate actuary on the choice of the two over-dispersed law instead of Poisson. In addition, the analysis of empirical tails of samples show a good discrimination of maximum likelihood. Indeed Generalized Poisson fits better to those samples with thicker tail.

We propose two statistical tests to identify over-dispersion in samples, the Fisher dispersion index and the likelihood ratio. We apply these tests to the samples. It shows that these classical tests are not adapted to samples with small length. Indeed, they don't permit to conclude to the clear rejection of the Poisson but in the case of the fourth sample of 100 years, even though all samples are over-dispersed with dispersion index superior to 1.5. In addition, Poisson hypothesis is even less rejected when samples get smaller. We conclude that statistical tests to discriminate frequency laws are not adapted to small samples. We indicate it is better to use maximum likelihood results than statistical tests' results in order to choose a law for modeling number of annual losses. For the case study, we choose the Negative Binomial as suggested by maximum likelihood result.

We then propose two methods to measure uncertainty on parameters found by maximum likelihood, the parametric bootstrap and Bayesian method.

These methods applied to first parameter of three frequency laws adjusted on samples turn frequency mean estimators into random variables. Analysis of distributions of frequency mean estimators show that uncertainty on parameters with parametric bootstrap leads to possible under-estimation of frequency mean of 15% (for third sample of 30 years) to 40% (for smallest sample 1 of 5 years) in case of Poisson choice. In case of Negative Binomial and Generalized Poisson, uncertainty measured by bootstrap is higher for over-dispersed laws compared to Poisson, and it possibly leads to under-estimation of 20% (for sample 2) to 50% (for sample 1) of frequency mean. In the case study, for which Negative Binomial has been chosen, under-estimation of frequency mean is around 45%. With Bayesian method, uncertainty measured is even higher with in some cases under-estimation of more than 85% (sample 1 - with Generalized Poisson).

Higher uncertainty with Bayesian method comes from the fact parametric bootstrap simulates parameters in the same original adjusted distribution. It therefore does not recognize as much asymmetry in parameter uncertainty as in Bayesian approach for which parameters are simulated in clearly asymmetric a posteriori distributions.

4 - Distribution of loss amount : Severity

We highlighted difficulties and uncertainties linked to the choice of frequency laws in previous chapter. In this chapter, we concentrate on techniques for fitting continuous distributions of losses amount on the case study only in order to facilitate the analysis.

Most of severity laws in the top of fitting ranking according to statistical tests of Anderson-Darling and Entropy are rejected because they don't have sufficiently thick tails to give significative pure premiums on the two highest non-working layers.

Even though the Pareto law is one of the last in the fitting ranking, it has a thicker tail and is therefore preferred to better represent possible extreme losses hitting high layers. Other techniques are also proposed in appendix like a method for linking empirical distributions on working risk area, with thick tail severity distributions on higher extreme losses area. For conciseness purposes, and since this method is not applied to the case study, we did not present the solution in the core of the thesis.

Once Pareto law is chosen, we analyse parameter uncertainty using parametric bootstrap technique. Estimator for annual charge to layers become random variables in this case. The impact for the case study is big since it leads to under-estimation of annual charge of 16% for low layer to more than 90% for higher layer.

We finally analyse impact on pure premiums of parameter uncertainty which show that they can be under-estimated by more than 170% in some cases (uncertainty on parameters for frequency by Bayesian method and for severity by parametric bootstrap). These impacts on pure premium is a prooth of necessity to take into account this uncertainty in non-proportional reinsurance pricing.

Otherwise, indicators of variance estimators (notably on frequency) show that impact on allocated capital and therefore security loading in pricing could be even more significative, with all the stake it represents in pricing but also in internal model of companies measuring the underwriting risk of businesses.

5 - Experience and Exposure pricings mixing using credibility theory

We present an alternative modeling of severity based on exposure data and cedent's portfolio profiles and apply it to the case study.

We finally propose a method for mixing experience and exposure pricing using credibility theory. This technique consists in weighting the experience and exposure pure premium estimators with a credibility factor whose optimal value is obtained by minimizing the variance of resulting cre-

dibilized pure premium estimator.

Specific risk of cedent is somehow different from industry risk represented by exposure curves used when modeling severity based on exposure. We therefore introduce an uncertainty factor on exposure pure premium estimator that can have values between 0 and infinity.

The results on the case study show that the lower the uncertainty factor is on exposure pricing, the lower the credibility factor (weight given to experience factor) is and the closer we are to exposure price with null uncertainty on pure premium estimator.

We show that if we take as uncertainty factor on exposure pricing a standard deviation equals to 25% of exposure pure premium estimator, we reduce the coefficient of variation of credibilized pure premiums' estimators compared to experience pure premiums only, this because the weight given to experience goes from a little less than 100% to 30% on the first two layers and from 100% to 4% on the highest layer.

Exposure pricing and its mixing with experience pricing using credibility theory allow to reduce uncertainty around estimation of pure premiums and without doubt of security loading of non-proportional reinsurance treaties' prices.

Conclusion

This thesis show that whatever the quality, quantity and disparity of the data and information the actuary has for pricing, he can apply practical and simple methods, such as the bootstrap and the Bayesian approach, to measure and therefore control the accuracy of his prices.

Furthermore, these methods are or can apply to other areas of concern such as the pricing of long-tail business, the pricing of life insurance contracts, reserving and underwriting risk capital requirement calculation.

In each of these areas, actuaries have to model using mixed heterogeneous data, having constantly in mind the absolute necessity of controlling the credibility and the uncertainty of their results.

Introduction

Dans la partie 1, nous rappelons les principes de base de la réassurance, les spécificités des clauses principales de réassurance XS pour les branches courtes et les principes classiques de tarification des traités XS. Nous introduisons les concepts, la terminologie et les notations de base utiles pour la suite du mémoire. Nous montrons les principales hypothèses et limites de l'approche traditionnelle empirique sur expérience, appelée Burning Cost. Nous introduisons l'approche probabiliste et ses principales notations et outils.

Dans la partie 2 nous présentons les données du cas pratique de tarification utilisé comme application des solutions actuarielles de tarification présentées dans la suite du mémoire. Nous appliquons également la méthode traditionnelle empirique Burning Cost sur le cas pratique et analysons les résultats.

Ensuite, les parties 3 et 4 sont consacrées à l'analyse des solutions actuarielles dans le cadre de la tarification probabiliste. La partie 3 concerne le choix de la distribution de la fréquence de sinistres. Nous y proposons des techniques de choix de loi de fréquence et de mesure de l'incertitude des paramètres de la loi en fonction du niveau d'information d'expérience disponible. Dans la partie 4, nous nous concentrons sur le choix de la distribution de la sévérité des sinistres et la technique de prise en compte de l'incertitude de paramètre. Nous analysons également l'impact sur les tarifs de la prise en compte de l'incertitude de l'estimation des paramètres des lois de fréquence et de sévérité ajustées sur les données d'expérience. Enfin nous présentons la technique de modélisation de la sévérité sur la base des données d'exposition, une alternative intéressante pour atténuer l'impact sur les tarifs de la prise en compte de l'incertitude des paramètres des lois ajustées sur l'expérience.

Dans la partie 5, nous proposons aussi à cette fin une technique de mélange en crédibilité des processus de sinistralité sur base expérience et sur base exposition.

Tout au long du mémoire, nous présentons donc un cas pratique de tarification Incendie sur expérience et exposition et commentons les résultats obtenus par application des techniques présentées dans chacune des parties.

Pour aider à la compréhension globale des composantes à traiter, le tableau de synthèse suivant a été réalisé :

traité dans le mémoire
non traité dans le mémoire

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
Proportionnelle	Longue	Cat					

FIGURE 0.1 – Périmètre du mémoire

Ce tableau récapitulatif rend compte du périmètre couvert dans ce mémoire. Par souci de concision, il se concentre sur la tarification technique des couvertures non catastrophiques des contrats de réassurance non-proportionnel en branche courte.

En ce qui concerne les couvertures catastrophiques, qui protègent contre les risques naturels tels les tremblements de terre, les tempêtes et les inondations, elles font l'objet d'une tarification au travers d'outils experts de marché comme RMS ou EQECAT. Les modèles physiques et actuariels sous-jacents à ces outils ont chacun leurs spécificités. Il serait très intéressant d'étudier la sensibilité et la crédibilité de ces outils aux choix actuariels formulés car ces outils modélisent des événements naturels à faible fréquence et dont l'impact est souvent considérable. Le caractère imprévisible des événements naturels modélisés rend la tarification hautement incertaine. Nous avons toutefois limité notre étude au cas des expositions non catastrophiques.

Les branches engendrant des sinistres à règlement rapide (en général dans l'année) sont dites à « développement court » (exemple : Dommage aux Biens). Les branches engendrant des sinistres, qui par leur nature, ont des règlements différés dans le temps, sur plusieurs années, sont dites à « développement long » (exemples : Responsabilité Civile Automobile, Responsabilité Civile Générale). Ce mémoire s'attache à la détermination des distributions de la fréquence et de la sévérité à l'ultime. La prise en compte de la volatilité des développements de sinistres pourrait faire l'objet d'un prolongement des travaux, sur l'incertitude existante dans le calcul et le choix des facteurs de développement des sinistres (les patterns) dans le temps. Sur les branches longues, la stochasticité intrinsèque des patterns n'en reste pas moins un élément d'incertitude de grande importance pour la tarification et notamment pour l'allocation du capital.

La modélisation de la sinistralité attritionnelle (récurrente, non exceptionnelle) ne suffit parfois pas pour refléter les vraies expositions du traité. La couverture Terrorisme par exemple doit faire l'objet d'un traitement spécifique, appelé tarification des sinistres exceptionnels, qui vient ensuite se mélanger au processus de sinistralité dit « attritionnel ». Le terme attritionnel se réfère aux sinistres récurrents, répétitifs, normaux par opposition à ce qui est de l'ordre du non récurrent, comme les grands sinistres à faible période de retour.

Première partie

Rappels de Réassurance

La Réassurance est par essence une transaction financière impliquant un transfert de risque (cession) d'une compagnie d'assurance (la cédante) vers une compagnie de réassurance (le réassureur) en échange d'un paiement (la prime de réassurance).

Les termes de la transaction sont définis dans le traité de réassurance. Du fait de la complexité des traités de réassurance, il arrive souvent qu'ils soient signés des mois après que le transfert de risque ait eu lieu. Afin de documenter contractuellement l'acceptation du risque, une version allégée du traité est utilisée. Il s'agit de la note de couverture appelée « slip » de réassurance, qui contient les termes principaux de l'accord. Les slips de réassurance sont eux signés avant que le risque soit transféré et accepté par le réassureur.

Le réassureur peut lui aussi transférer les risques à d'autres entités, appelées dans ce cas les rétrocessionnaires au travers de transactions financières (rétrocession) de même nature que la réassurance.

1 Les besoins de réassurance

Les besoins de réassurance chez les cédantes sont multiples.

Le premier d'entre eux peut être la nécessité pour une compagnie d'assurance d'augmenter sa capacité de souscription. En effet, les compagnies d'assurance peuvent se trouver dans des situations où le risque accepté auprès de leurs clients dépasse leur solidité financière. Le fait de transférer le risque à un réassureur via un contrat de réassurance peut leur permettre d'accepter la totalité du risque et ainsi de répondre aux besoins du client.

L'assureur peut aussi se tourner dans ce cas vers des solutions de coassurance. Cependant, l'assureur devra alors entrer en contact avec ses concurrents pour partager le risque, ce qui peut aller à l'encontre de ses intérêts, notamment dans un marché très compétitif. La coassurance présente également le désavantage pour le client assuré de devoir négocier avec plusieurs compagnies, notamment en ce qui concerne le paiement des primes et le règlement des sinistres.

L'autre avantage de la réassurance est d'offrir aux cédantes la possibilité de diversifier leur portefeuille de risque. Les risques souscrits par les assureurs sont consommateurs de capital mobilisé pour les couvrir. En faisant usage de la réassurance, elles peuvent participer à de plus en plus de risques dont elles cèdent une portion aux réassureurs toujours plus grande, tout en consommant le même capital. Cette réduction dans la concentration du risque diminuera la volatilité des résultats annuels de la cédante et lui permettra de gagner en diversification sur son capital requis pour couvrir les risques. Dans le cadre de la réglementation Solvabilité 2, le capital de solvabilité requis représente le capital cible nécessaire pour absorber des chocs exceptionnels. Les cédantes pourront faire appel à la réassurance pour atteindre un niveau acceptable de risque, qui correspond à une probabilité de ruine à un an inférieur à 0.5%.

Même si une cédante conserve la responsabilité ultime vis à vis de l'assuré, la plupart des réglementations d'assurances dans le monde reconnaissent la réassurance comme un outil de pilotage du risque permettant la réduction du besoin en capital. En effet la garantie offerte par le réassureur de payer sa part de sinistre est reconnue dans le calcul du besoin en capital de la cédante. C'est la raison pour laquelle il n'est pas rare de voir les formules de calcul de capital requis pour la souscription des risques se baser sur les primes d'assurance au net de réassurance et sur les réserves nettes de la part des réassureurs dans les provisions techniques des cédantes.

Bien sûr, si la réassurance permet de diminuer le risque technique, elle introduit par ailleurs pour la cédante un risque de contrepartie, celui de la faillite du réassureur. Il faut noter que le capital requis pour ce risque variera le plus souvent en fonction du niveau de solvabilité de la compagnie de réassurance, mesuré par sa note auprès des agences de notation, ou bien par son ratio de solvabilité tel que calculé suivant les normes en vigueur.

Enfin les risques couverts par les assureurs sont parfois exposés à des événements extrêmes et peu fréquents comme des catastrophes d'origine naturelle telles que les tremblements de terre, les inondations, les cyclones, ou d'autres types de catastrophes comme l'accident d'un avion de ligne. Le fait de devoir disposer de suffisamment de capital pour couvrir ces catastrophes peut rendre les opérations d'assurance non viables économiquement. Le fait de transférer l'exposition catastrophique aux réassureurs permet de résoudre le problème des événements peu fréquents mais menaçant la solvabilité des assureurs en cas d'occurrence de ces événements.

Du point de vue de la réassurance, l'offre de protection catastrophique devient viable économiquement par le fait que les réassureurs participent à des risques exposés aux catastrophes dans le monde entier, ce qui permet de diversifier le risque. Les réassureurs possèdent également des départements dédiés à la gestion des risques catastrophiques. Ils ont accumulé de l'expérience et de la connaissance sur le sujet, ce qui leur permet de tarifer plus correctement les expositions catastrophiques et d'accepter plus facilement ces risques.

2 Les formes de réassurance non-proportionnelles

Il existe deux formes principales de réassurance pour les traités, la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle.

En réassurance proportionnelle, les primes et sinistres sont partagés proportionnellement entre l'assureur et le réassureur. La réassurance proportionnelle crée de fait une sorte de partenariat entre l'assureur et le réassureur. Du fait de la proportionnalité du partage des risques, ils ont des intérêts communs en ce qui concerne la performance du portefeuille couvert. Les principales clauses négociées sont les clauses de commission, qui sont versées à l'assureur par le réassureur en participation des frais d'acquisition du portefeuille, ainsi que les clauses de participation aux bénéfices ou pertes.

En réassurance non proportionnelle on trouve deux grandes catégories de couverture : les traités en excédent de sinistres (en anglais Excess of Loss ou XS) et les traités en Excédent de perte (Aggregate Excess of Loss, qui ont une variante appelée Stop Loss).

Les Traités Aggregate Excess of Loss couvrent la charge annuelle de sinistres au-delà d'un montant qui est la franchise annuelle notée AAD (comme Annual Aggregate Deductible) avec un engagement maximal annuel noté AAL (comme Annual Aggregate Limit). Le Stop Loss suit le même principe, les bornes étant libellées non plus en montants mais en Loss Ratio (ratio charge annuelle d'assurance / prime annuelle d'assurance).

En réassurance non-proportionnelle, les intérêts entre assureur et réassureur peuvent diverger : le réassureur XS sera impacté par la sévérité et la fréquence des grands sinistres, et échappera à la fréquence des petits sinistres. Le réassureur a pour prime de réassurance la prime qu'il a lui-même tarifé ou accepté, et ne subit pas la tarification originale de l'assureur.

2.1 L'excédent de sinistres

Le type de protection le plus courant en réassurance non-proportionnel est l'excédent de sinistres, dit « XS par sinistre ». Dans les traités en excédent de sinistres, le réassureur rembourse la cédante des montants de sinistres dépassant une certaine franchise (aussi appelée priorité) notée F , et généralement jusqu'à hauteur d'une certaine limite, notée L . Les bornes du traité, franchise et limite, définissent une tranche de réassurance. Le montant maximal couvert par le réassureur, $C = L - F$, est appelé portée de la tranche (C comme « capacity »).

La convention pour nommer la tranche est C XS F .

Les tranches de réassurance s'appliquent donc à chaque sinistre d'assurance dit « à la base ».

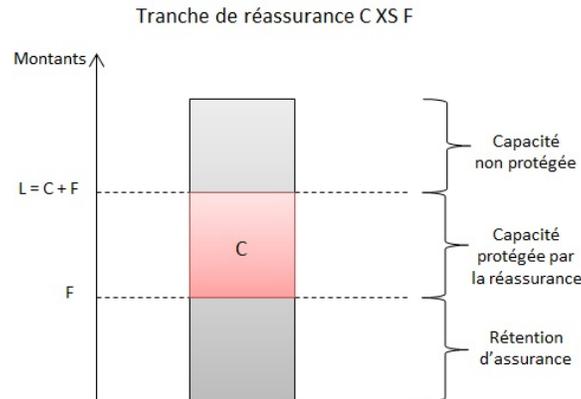


FIGURE 2.1 – Tranche de réassurance C XS F

La prime de réassurance est souvent exprimée en taux de l'assiette de prime d'assurance (correspondant au portefeuille couvert). Le taux peut être fixe ou variable (dépendant de la sinistralité de la tranche, dans certaines bornes).

Une tranche XS peut être assortie de clauses supplémentaires de limitation d'engagement. Les plus courantes sont les suivantes :

- Une clause de limite annuelle notée *AAL* (Annual Aggregate Limit) : dans l’année, le ré-assureur ne paiera jamais plus que ce montant.
- Des clauses de reconstitutions de capacité, gratuites ou payantes : lorsque la portée *C* est consommée, le réassureur mettra à disposition une autre portée *C* (gratuite ou payante selon des conditions prédéfinies au traité) et ainsi de suite selon le nombre de reconstitutions définies au traités. Il peut arriver que le nombre de reconstitutions soit illimité.
- Une clause de franchise annuelle notée *AAD* (Annual Aggregate Deductible) : le réassureur ne commencera à prendre en charge les sinistres que lorsque la charge annuelle à la tranche dépassera ce montant.

Pour les excédents de sinistres, l’appellation “...par sinistre...” qui apparaît dans les traités de réassurance peut en réalité recouvrir plusieurs réalités d’exposition et situations statistiques. Les distinctions suivantes sont souvent rencontrées : l’XS par RISQUE, l’XS CLASH, et l’XS par ÉVÈNEMENT.

2.1.1 XS par Risque

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash Evènement				
		Cat	Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
Proportionnelle	Longue						

FIGURE 2.2 – Couverture XS Par Risque

L’excédent de sinistres par risque, l’XS PAR RISQUE, est lié à la survenance d’un sinistre sur une seul risque du portefeuille de l’assureur. Un risque est par exemple équivalent à une police pour l’assureur. L’exemple type est l’incendie d’un bâtiment d’une usine, défini comme un risque indépendant des autres dans le portefeuille couvert. Le réassureur paie la partie du sinistre qui excède un montant pré-établi. La couverture s’applique donc séparément pour chaque sinistre de chacun des risques d’assurance. Il est donc primordial de définir clairement ce qui constitue un risque dans le traité de réassurance.

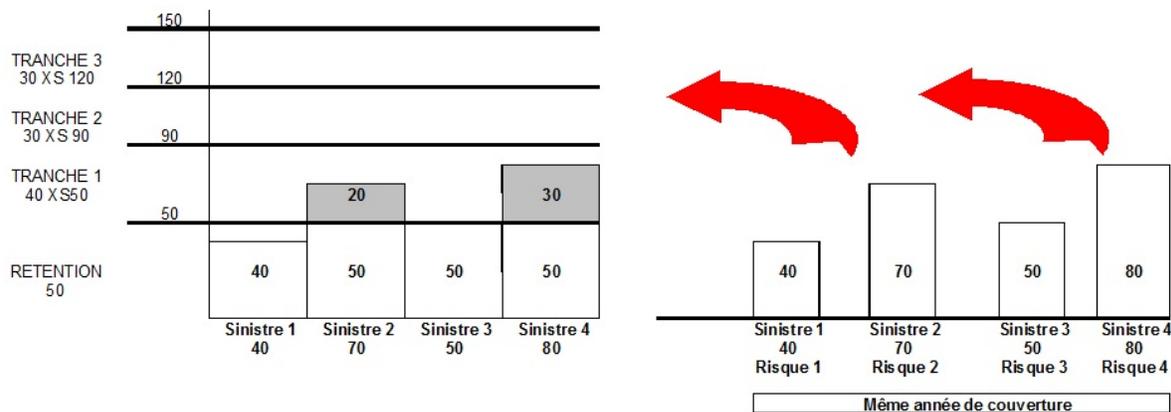


FIGURE 2.3 – Fonctionnement de l'excédent de sinistres par risque

2.1.2 XS Clash

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
Proportionnelle	Longue	Cat					

FIGURE 2.4 – Couverture XS Clash

L'excédent de sinistres dit XS CLASH est liée à la survenance d'un sinistre de même origine sur plusieurs risques, pourtant réputés indépendants, du portefeuille de l'assureur. Le réassureur est confronté à une accumulation non anticipée de sinistres :

- L'exemple type en assurance-dommage est le cas d'un incendie se propageant d'un bâtiment à l'autre, ces deux bâtiments étant assurés par une même cédante.
- L'exemple type en responsabilité civile est la co-responsabilité retenue de plusieurs entreprises, indépendantes mais assurées (sans le savoir) chez un même assureur, et étant intervenue sur une même opération.

L'exposition « Clash » dépend du degré de concentration des portefeuilles, et de sa répartition en risques réellement indépendants. En pratique, les mesures d'exposition relatives à l'exposition Clash sont plus difficilement maîtrisées. Si l'assureur possède plusieurs centres de souscription séparés, et que le portefeuille généré par ces centres est couvert par un même traité en excédent de sinistres, des procédures de contrôle des accumulations doivent être mises en place.

2.1.3 XS par Évènement

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
	Longue	Cat					
Proportionnelle							

FIGURE 2.5 – Couverture XS Par Évènement

L'excédent de sinistres par évènement, l'XS PAR ÉVÈNEMENT, est liée à la survenance d'un évènement de même cause sur plusieurs risques réputés non indépendants (au regard de la survenance de l'évènement) dans le portefeuille de l'assureur. Le réassureur est confronté à une accumulation anticipée de sinistres. Le réassureur paie la partie du sinistre qui excède un montant pré-établi. Les pertes découlant d'un même évènement sont regroupées et le réassureur rembourse le montant de la perte globale qui excède le montant pré-établi. Il est donc primordial de définir clairement ce qui constitue un évènement dans le traité de réassurance.

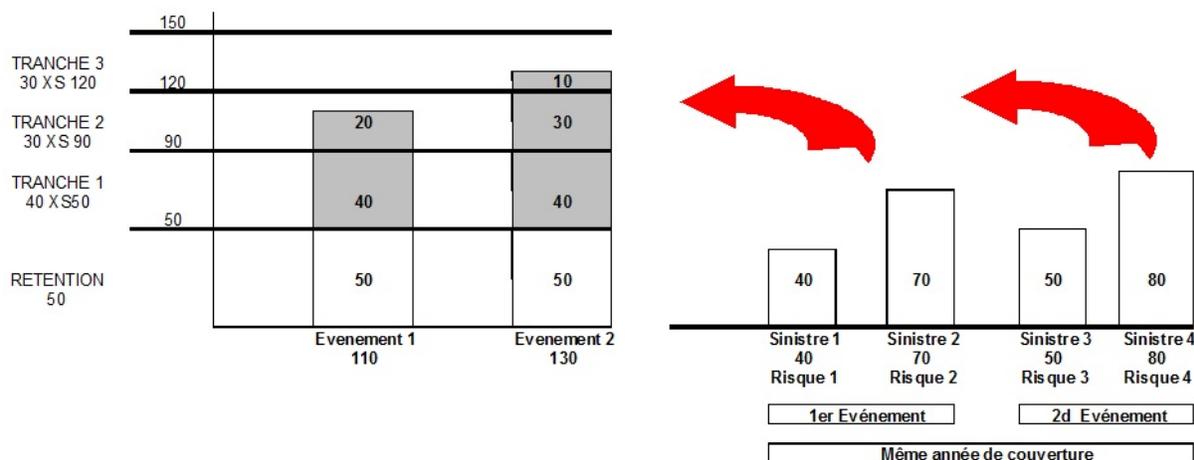


FIGURE 2.6 – Fonctionnement de l'excédent de sinistres par évènement

2.2 Le distinguo branche courte, branche longue

De manière simplifiée :

Les branches engendrant des sinistres à règlement rapide (en général dans l'année) sont dites à "développement court" (exemple : l'incendie...).

Les branches engendrant des sinistres, qui par leur nature, ont des règlements différés dans le temps, sur plusieurs années, sont dites à “développement long” (exemple : Responsabilité Civile (RC) Automobile, Responsabilité Civile Générale...).

En effet, les paiements de sinistres peuvent s’étaler dans le temps pour des raisons *judiciaires* (détermination des responsabilités, des indemnités) ou pour des raisons *intrinsèques* (consolidation de sinistres corporels graves par exemple). A une date d’observation donnée (par exemple la date de tarification du traité), il reste des inconnues dont l’actuaire devra évaluer l’impact :

- Certains sinistres sont survenus mais sont non encore déclarés à la date d’évaluation. Ils imposent la constitution de provisions dites Incurred But Not Yet Reported = IBNYR,
- Certains sinistres sont survenus, déclarés à la date d’évaluation mais insuffisamment provisionnés (d’où la nécessité de constituer des provisions appelées Incurred But Not Enough Reserved = IBNER).

La réalité est souvent plus nuancée, par exemple :

- Pour la branche incendie, on peut noter des développements différents selon les pays ou les marchés. Aussi, pour les sinistres importants y compris les catastrophes naturelles, les paiements peuvent s’étaler sur des périodes plus longues qu’une seule année.
- De même pour les branches longues, il existe de fortes différences entre les marchés. Par exemple pour la RC automobile, l’existence ou non de barème conditionne très fortement les développements observés. Il existe également au sein d’un même marché des comportements de développement très différents selon les cédantes, selon qu’elles privilégient ou non les règlements amiables ou contentieux.
- Différentes natures d’indemnisation peuvent, bien entendu, se trouver présentes dans un même sinistre : les indemnités matérielles qui compensent la destruction d’un bien, les indemnités pour préjudice corporel touchant l’intégrité du corps humain et les indemnités pour pertes financières à la suite d’un sinistre matériel (pertes d’exploitation), d’un mauvais conseil (responsabilité civile professionnelle).

3 La tarification technique : ses objectifs

3.1 Décision de souscription

La tarification technique avant acceptation est un des indicateurs importants nécessaire à la décision de souscription d’un traité non proportionnel.

La tarification d’un traité a pour objectif premier d’évaluer les coûts engendrés par les engagements du contrat, afin de parvenir dans la durée (compte tenu des aléas statistiques de la sinistralité) à un résultat technique équilibré.

La prime pure calculée par l’actuaire est égale à la valeur actuelle probable des engagements

futurs liés aux sinistres. Autrement dit, il s'agit du meilleur estimateur ("best estimate" en anglais) des coûts futurs (engendrés par les sinistres) au traité, comme prescrit par le cahier des règles professionnelles de l'Institut des Actuaires (référence [1]). L'actuaire devra prendre soin d'indiquer au souscripteur les éléments d'incertitude (comme les hypothèses structurantes de sa modélisation) sous-jacente à l'évaluation de la prime pure.

La prime pure doit ensuite être complétée par les éléments suivants :

- un chargement de profitabilité pour servir la rémunération attendue des actionnaires, est calculé en utilisant le capital alloué au traité.
- les chargements pour prendre en compte les frais internes (par exemple : les frais de gestion), les frais externes (par exemple : le courtage).
- les correctifs liés aux ajustements de primes de réassurance (par exemple pour prendre en compte les clauses de reconstitutions payantes).

Le deuxième objectif de la tarification est d'estimer la profitabilité d'un traité. Sur un même traité, il existe une seule cédante et en général plusieurs réassureurs (souvent de l'ordre de quatre à dix mais parfois jusqu'à plus de trente). Le réassureur qui a la plus grande part de la cession totale est appelé le réassureur apériteur (leader). Celui-ci peut jouir de certains privilèges par rapport aux autres (tel que la possibilité de mener des audits), et en général c'est uniquement avec lui que la cédante discutera d'une éventuelle modification du contrat ou bien négociera dans le but d'inclure des affaires spéciales. Les autres réassureurs doivent suivre la décision de ces discussions. Compte tenu de la prime de marché obtenue et fixée par l'apériteur, le test de profitabilité permet d'orienter le souscripteur dans la structuration du traité avant toute acceptation.

Dans le cas d'un désaccord important relatif aux résultats liés à la modélisation de l'actuaire et le souscripteur, un arbitrage est souhaitable et peut en pratique prendre différentes formes plus ou moins collégiales selon les organisations des départements de souscription, des départements actuariels et des procédures en place.

3.2 Suivi de portefeuille : provisionnement et rentabilité

A l'échelle d'un portefeuille de réassurance, l'indicateur de déviation de prime de réassurance technique par rapport à la prime de réassurance effectivement souscrite servira à déterminer le rapport sinistres à primes (S/P ou loss ratio) pour l'exercice de souscription à attendre. Or cette information est fondamentale dans le processus de calcul des provisions complémentaires de sinistres (IBNYR, Incurred But Not Yet Reported et IBNER, Incurred But Not Enough Reserved).

En effet, parmi l'éventail important des méthodes de calculs des provisions techniques en réassurance, certaines d'entre elles s'appuient sur les ratios de sinistres à primes ultimes qui, multipliés par les primes acquises ou émises, permettent d'obtenir une estimation des sinistres ultimes.

Ces méthodes sont utilisées notamment pour les années d'occurrence ou de souscription récentes quand la durée observée de développement des sinistres n'est pas suffisante. Dans ce cas, les méthodes classiques s'appuyant sur les développements passés ne sont plus assez robustes, et

une estimation adéquate de la sinistralité ultime passe alors par de bons estimateurs de ratio de sinistres à primes ultimes issus de la tarification.

3.3 Suivi du risque de tarification

La tarification consiste à effectuer une première modélisation avant la souscription d'un contrat. En pratique, un exercice important pour les actuaires consiste à se poser la question si, pour les générations antérieures d'affaires, la tarification ne souffre pas de biais systématiques (sur/sous tarification). Différentes approches sont possibles, en relation avec les données et pratiques de provisionnement pour une segmentation spécifique, et la sophistication des systèmes de données jouent un grand rôle pour la mise en place de telles analyses.

4 La tarification technique : ses composantes

Les composantes classiques de la tarification technique sont la (1) prime pure (2) les chargements de sécurité et de profitabilité, ces deux composantes formant la (3) prime de risque. La prime de risque sera complétée par (4) des chargements économiques (par exemple, des frais internes de gestion, de courtage) et des ajustements pour la prise en compte des primes d'ajustement (par exemple, prise en compte des primes de reconstitutions payantes) pour former (5) la prime technique ou la prime d'équilibre.

PRIME PURE
+ Chargement de sécurité
= PRIME DE RISQUE
+ Chargement économique (de gestion, de courtage, ...)
= PRIME TECHNIQUE ou PRIME D'ÉQUILIBRE

4.1 Prime pure

PRIME PURE
+ Chargement de sécurité
= PRIME DE RISQUE
+ Chargement économique (de gestion, de courtage, ...)
= PRIME TECHNIQUE ou PRIME D'ÉQUILIBRE

La prime pure est la valeur (actuelle) probable des sinistres qui vont être payés au titre du traité. Le montant de cette prime pure serait suffisant à la garantie d'un résultat (Prime - Sinistres) nul, si les sinistres n'étaient pas aléatoires. En branche courte, l'impact de l'escompte est négligé.

4.1.1 Données d'expérience

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
Proportionnelle	Longue	Cat					

FIGURE 4.1 – Données d'expérience

En pratique, les informations communément fournies par les cédantes / courtiers sont les suivantes :

Sur les 5 à 10 derniers exercices, par type de risque (particuliers / industriels...) :

- Les sinistres individuels supérieurs à la moitié de la franchise (et les sommes assurées concernées),
- Les évolutions des capitaux assurés totaux, des assiettes de primes et du nombre de polices,
- Les évolutions de la capacité de souscription et/ou de rétention par type de risques,
- Le slip de réassurance incluant les clauses quantitatives,
- Liste des exclusions,
- Estimation des capitaux assurés totaux, de l'assiette de primes et du nombre de polices pour l'année à couvrir,
- Le profil de portefeuille en prime et nombre de polices - ventilé selon le type de risques et comprenant les informations de co-assurance,
- La description des risques de pointe.

4.1.2 Revalorisation des primes, des sinistres et des seuils de communication

Principe de revalorisation

La première étape de calcul de la prime pure consiste à redresser un échantillon de statistiques historiques, afin de le rendre représentatif des conditions de souscription et économiques de l'année de couverture à évaluer. Ce redressement, ou revalorisation des données historiques est appelé mise en "As if".

Une telle revalorisation doit prendre en compte les changements éventuels de politique de souscription, de sélection des risques, de composition du portefeuille, les changements éventuels de politique de provisionnement des sinistres (provisions pour sinistres à payer) pour les branches à développement long.

Les statistiques redressées sont :

- les sinistres individuels historiques
- les assiettes de primes historiques
- les sommes assurées

Revalorisation des primes Le redressement des primes historiques doit prendre en compte les modifications tarifaires de base de l'assureur. La revalorisation des primes permet de recalculer les assiettes de primes qui auraient été émises (et acquises) sur les années d'expérience si les conditions économiques et tarifaires avaient été celles de l'année de couverture.

Cas de l'XS par Risque / Clash :

Pour chaque année d'expérience passée k , nous disposons du nombre de polices souscrites nb_k , et de la prime moyenne appliquée par police par l'assureur $P_{police,k}$ et des montants de primes historiques P_k . Les primes sont revalorisées de la manière suivante :

$$P_{AsIf,k} = P_{police,année\ de\ cotation} \times nb_k = P_{année\ de\ cotation} \times \frac{nb_k}{nb_{année\ de\ cotation}}$$

Dans le cas où l'actuaire ne dispose pas des informations du nombres de polices, il devra revaloriser les primes historiques à partir d'un indice représentatif de l'évolution tarifaire du portefeuille d'assurance couvert.

NB : Cas de l'XS par Évènement :

En ce qui concerne les évènements naturels pour lesquels les couvertures XS sont mises en place, la probabilité de survenance d'un évènement ne dépendra pas du nombre de polices couvertes. Seul son coût dépendra du nombre de polices couvertes, des capitaux moyens couverts par police et du degré de destruction de ces capitaux assurés par le phénomène naturel considéré (le degré étant lié à l'intensité de l'évènement).

Ainsi pour chaque année d'expérience, l'assiette de prime As if à considérer sera égale à l'assiette de primes (acquises) estimée pour l'année à coter :

$$P_{AsIf,k} = P_{année\ de\ cotation}$$

On fera en sorte de revaloriser les coûts des évènements comme s'ils survenaient pendant l'année de cotation.

Revalorisation des sinistres et des seuils de communication La revalorisation des sinistres et des seuils (en montant) de communication des sinistres dépendent également du type d'XS coté :

Cas de l'XS par Risque / Clash :

Le coût des sinistres individuels est revalorisé en utilisant un indice de revalorisation décrivant

l'inflation économique sur les capitaux assurés (ainsi que d'autres éléments comme la surinflation¹ dans le cas des branches couvrant les dommages corporels). Dans le cas de la branche incendie, notamment la couverture des dommages directs, l'utilisation du même indice de revalorisation que les capitaux (l'indice d'évolution des coûts à la construction par exemple) est en général acceptable.

NB : Cas de l'XS par Évènement :

La revalorisation des événements et donc des coûts des sinistres d'accumulation dépendent du nombre de polices sinistrées et du degré de destruction des capitaux assurés pour chaque police sinistrée. L'exposition au risque est fournie par les capitaux assurés totaux C_k (nombre de polices \times valeur moyenne des capitaux assurés par risque). Si l'on considère que le degré de destruction des capitaux assurés serait le même aujourd'hui pour chaque risque, il faut donc revaloriser chaque sinistre historique $S_{hist,k}$ de la manière suivante :

$$S_{AsIf,k} = S_{hist,k} \times \frac{C_{année\ de\ cotation}}{C_k}$$

4.1.3 L'approche classique (empirique) par l'exploitation des données d'expérience (en branche courte)

La tarification sur expérience est une tarification qui tient compte de la sinistralité passée : on entend par sinistralité le rapport entre les sinistres survenus à une époque pendant une période d'exposition, et les expositions de l'époque. De pratique simple, la tarification sur expérience est largement utilisée en réassurance. Quelle que soit les approches complémentaires adoptées, elle constitue une référence incontournable de perception du comportement statistique du traité non proportionnel.

Concrètement, le réassureur dispose de statistiques historiques observées sur plusieurs années d'expérience, le nombre d'années d'expérience souhaitable dépendant de la branche. Il dispose également de paramètres techniques de tarification, notamment les indices de revalorisation des capitaux, primes, sinistres, lui permettant de construire des statistiques revalorisées dites "As if" représentatives de l'exposition à coter.

Il convient d'abord d'identifier et de traiter séparément les statistiques par classe de risques homogènes.

La première étape de calcul consiste à redresser un échantillon de statistiques historiques, afin de le rendre représentatif des conditions de souscription et économiques de l'année de couverture à évaluer. Un tel redressement doit prendre en compte :

- les changements (éventuels) de politique de souscription, de sélection des risques, de composition du portefeuille,

1. Dans le cas des dommages corporels, l'apparition de la surinflation peut être liée à des renchérissements des frais de soin après une jurisprudence.

- les changements (éventuels) de politique de provisionnement de la cédante (provisions pour sinistres à payer) pour les branches à développement long,
- la revalorisation des capitaux assurés, des sinistres et des assiettes de primes

La seconde étape consiste, pour chaque année d'expérience, à calculer les charges annuelles As if du contrat à tarifier, qui doivent tenir compte des spécificités du traité : clauses applicables dont les limites annuelles... Ces charges seront ensuite rapportées aux assiettes de primes As if, et on obtient un taux annuel estimé As if, notée Tx_k pour chaque année d'expérience k .

La troisième étape consiste à calculer le taux moyen ("Burning Cost") sur les n années d'expérience disponible lorsque la série des taux est stable, ou de projeter un taux probable lorsque l'on décèle une tendance. Le burning cost s'interprète comme étant la moyenne pondérée des taux obtenus par année d'expérience par l'assiette de primes As if calculée. De manière équivalente :

$$BURNING\ COST = \frac{\sum_{k=1}^n Tx_k * P_{AsIf,k}}{\sum_{k=1}^n P_{AsIf,k}}$$

Cette approche basique comporte de nombreuses limites :

- La tarification sur expérience suppose que l'histoire passée se répètera dans l'avenir, idée acceptable seulement dans un contexte de stabilité relative de politique de souscription,
- Elle ne tient pas directement compte de l'exposition de chaque tranche (profil de portefeuille) notamment en XS par risque,
- Elle permet d'obtenir quelques scenarii mais ne fournit pas tous les scenarii probables,
- Elle ne permet pas de coter les tranches dites statistiquement « non travaillantes » c'est à dire n'ayant jamais été touchées, après revalorisation des sinistres, sur les années d'expérience observées,
- Elle est particulièrement peu adaptée aux expositions de très faible fréquence, mais de forte sévérité et à la cotation des options alternatives de clauses annuelles.

4.1.4 L'approche probabiliste en fréquence et sévérité

Un portefeuille de réassurance est caractérisé par deux composantes, le nombre de sinistres par année, aussi appelé fréquence (notée N) et le coût de chaque sinistre individuel, aussi appelé la sévérité (X_i étant le $i^{\text{ème}}$ sinistre).

N et X_i sont des variables aléatoires considérées comme indépendantes. Les montants de sinistres X_i sont eux considérés indépendants et identiquement distribués. Ils suivent tous la loi du montant de sinistre notée X . Les deux variables aléatoires, N et X_i sont par ailleurs définie au-dessus d'un certain seuil X_0 . Ce seuil, calculé au cours de la tarification technique, sert à ne sélectionner pour la modélisation que les sinistres qui impactent le calcul de la prime pure sur les

tranches de réassurance cotées. Le modèle fréquence/sévérité consiste à spécifier les distributions de probabilité pour les variables N et X avec pour but ultime de modéliser le risque lié à un portefeuille de réassurance. L'ensemble fréquence, sévérité et seuil de modélisation est appelé "Risk Process".

Le calcul de la prime pure est directement déduit des distributions de fréquence et de sévérité.

Notations :

- X_0 : seuil de modélisation
- $N_{/X_0}$: nombre annuel de sinistres supérieur à X_0
- $X_{/X_0}$: sévérité des sinistres individuels compris dans l'intervalle $[X_0, +\infty[$, avec pour fonction de distribution cumulée F_{X/X_0}

Par définition la fonction de distribution vaut pour tout $x \in [X_0, +\infty[$:

$$F_{X/X_0}(x) = \frac{F_X(x) - F_X(X_0)}{1 - F_X(X_0)}$$

avec F_X la fonction de distribution de la variable aléatoire du montant de sinistre individuel à la base X .

Démonstration :

$$F_{X/X_0}(x) = P(X \leq x / X \geq X_0)$$

$$F_{X/X_0}(x) = \frac{P(X \leq x \cap X \geq X_0)}{P(X \geq X_0)}$$

$$F_{X/X_0}(x) = \frac{P(X \leq x) - P(X \leq X_0)}{P(X \geq X_0)}$$

$$F_{X/X_0}(x) = \frac{F_X(x) - F_X(X_0)}{1 - F_X(X_0)}$$

Par ailleurs, l'espérance de la fréquence au seuil vaut

$$E(N_{/X_0}) = E(N) \times (1 - F_X(X_0))$$

avec N la variable aléatoire du nombre de sinistre à la base.

Démonstration :

$$E(N_{/X_0}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P(N = n / X \geq X_0)$$

$$E(N_{/X_0}) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times P_N(N = n) \times P_X(X \geq X_0)$$

$$E(N_{/X_0}) = E(N) \times (1 - F_X(X_0))$$

Si on note Y , la charge de sinistre à la tranche C XS F, elle peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$Y = \text{Min}[C, \text{Max}(0, X_{/X_0} - F)]$$

La fonction de distribution de la charge à la tranche s'écrit :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ F_{X/X_0}(y + F) & 0 \leq y \leq C \\ 1 & y > C \end{cases}$$

et Z la variable aléatoire associée à la sinistralité annuelle dans la tranche avant application des clauses de limitations annuelle AAD , et AAL :

$$Z = \sum_{i=1}^{N/X_0} Y_i = \sum_{i=1}^{N/X_0} \text{Min}[C, \text{Max}(0, X_{i/X_0} - F)]$$

et enfin Z' la sinistralité annuelle après clauses annuelles :

$$Z' = \text{Min}[AAL, \text{Max}(0, Z - AAD)]$$

4.1.5 Prime pure d'un contrat en excédent de sinistre

Si on considère dans un premier temps que le traité ne comporte pas de clause de limitation annuelle, ce qui revient à poser $AAD = 0$ et $AAL = +\infty$, la prime pure PP vaut dans ce cas :

$$PP = E(Z) = E(N) \times \int_F^{C+F} (1 - F_X(x)) dx$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} PP &= E(Z) \\ PP &= E(E(Z/N_{/X_0})) \\ PP &= E(N_{/X_0} \cdot E(Y)) \\ PP &= E(N_{/X_0}) \times E(Y) \\ PP &= E(N_{/X_0}) \times \int_0^C y f_y(y) dy \\ PP &= E(N_{/X_0}) \times \int_0^C (1 - F_Y(y)) dy \\ PP &= E(N_{/X_0}) \times \int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}(x)) dx \\ PP &= E(N) \times \int_F^{C+F} (1 - F_X(x)) dx \end{aligned}$$

L'espérance de la charge de sinistre individuelle à la tranche s'exprime comme l'intégrale entre les bornes de la tranches C X_S F de la fonction de survie de la variable liée au montant de sinistre individuel $X_{/X_0}$. Il s'agit du reste de l'aire au-dessus de la courbe de distribution cumulée de $X_{/X_0}$ entre la franchise F et la limite $C + F$.

La variance de la sinistralité annuelle dans la tranche peut également se déduire des deux premiers moments de $N_{/X_0}$ et Y :

$$V(Z) = (E(Y))^2 V(N_{/X_0}) + V(Y) E(N_{/X_0})$$

Démonstration :

$$V(Z) = V(E(Z/N_{/X_0})) + E(V(Z/N_{/X_0}))$$

$$\begin{aligned}
V(Z) &= V(N_{/X_0}E(Y)) + E(N_{/X_0}V(Y)) \\
V(Z) &= (E(Y))^2V(N_{/X_0}) + V(Y)E(N_{/X_0})
\end{aligned}$$

Dans les cas où le traité comporte une clause de limitation annuel, que ce soit un $AAD > 0$ et/ou un $AAL < +\infty$, la prime pure s'exprime comme l'espérance de la sinistralité annuelle après application de ces clauses :

$$PP = E(Z') = E(\text{Min}[AAL, \text{Max}(0, Z - AAD)]) = \int_{AAD}^{AAD+AAL} (1 - F_Z(x))dx$$

Il devient alors nécessaire de connaître la distribution de la sinistralité annuelle F_Z qui s'obtient par agrégation des processus de fréquence et de sévérité. Il existe certains cas où la fréquence et la sévérité sont de telles natures que le résultat de l'agrégation est immédiatement obtenu par une formule analytique ou un algorithme simple (algorithme de Panjer par exemple). Cependant dans la plupart des cas, l'actuaire sera contraint de procéder à une agrégation soit par simulation aléatoire du nombre de sinistres et de leurs montants à partir des distributions de fréquence et de sévérité, soit par un algorithme de transformée de Fourier rapide. L'annexe 1 décrit cet algorithme de transformation de Fourier utilisée pour l'agrégation de toute distribution de fréquence et de sévérité.

4.1.6 Avantages et limites de l'approche en fréquence et sévérité

La modélisation en fréquence et sévérité présente l'avantage de représenter clairement la réalité des risques analysés.

Dans le cas des excédents de sinistres sans clauses annuelles, et des excédents de pertes, le calcul de la prime pure s'obtient directement par la multiplication de l'espérance de la fréquence et d'un calcul d'intégrale sur la distribution de sévérité. Nul besoin de passer par des simulations ou autres techniques consommatrices de temps de calcul pour obtenir directement la prime pure de l'affaire.

Cette modélisation garantit également la cohérence des primes pures entre les tranches de réassurance de hauteur et d'amplitude différentes, évidemment à condition que la distribution de sévérité soit bien croissante sur tout son intervalle de définition. Enfin, le modèle fréquence/sévérité donne la possibilité de construire une distribution de probabilité pour la prime pure, ce qui, nous le verrons, est essentiel pour l'application des techniques modernes de chargement de sécurité de la prime pure.

Comme tout modèle, l'approche en fréquence et sévérité présente certaines limites. L'hypothèse d'indépendance entre le nombre de sinistres et leurs montants n'est pas toujours vérifiée dans la réalité. Par ailleurs, les actuaires manquent parfois de masse statistique pour produire les distributions de fréquence et de sévérité crédibles. Un modèle construit avec peu de données peut devenir très sensible à l'incertitude autour du choix des distributions et des estimations des paramètres.

4.1.7 Incertitude de paramètres dans l'approche en fréquence et sévérité

Les paramètres des lois de fréquences, notés θ_f , et de sévérité, notés θ_s , sont la plupart du temps calibrés à partir de données d'expérience et d'exposition. L'incertitude des paramètres est plus ou moins forte suivant la quantité et la qualité de ces données. Nous verrons dans la suite de ce mémoire comment mesurer l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité dans la cas de la tarification sur expérience. Nous pouvons d'ores et déjà indiquer comment s'écrivent la prime pure (espérance de la sinistralité annuelle) en fonction des paramètres de fréquence et de sévérité à caractère aléatoire :

$$PP = E(Z) = E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))E_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} PP &= E(Z) = E(N_{/X_0})E(Y) \\ PP &= E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))E_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) \\ PP &= E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))E_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right) \end{aligned}$$

et la variance de la sinistralité annuelle en fonction des paramètres de fréquence et de sévérité à caractère aléatoire :

$$\begin{aligned} V(Z) &= (E_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right))^2(V_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)) + E_{\theta_f}(V(N_{/X_0}/\theta_f))) \\ &\quad + (V_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right) + E_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (x - F)(1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right. \\ &\quad \left. - \left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right)^2\right))E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)) \end{aligned}$$

Démonstration :

$$V(Z) = (E(Y))^2V(N_{/X_0}) + V(Y)E(N_{/X_0})$$

avec

$$\begin{aligned} E(N_{/X_0}) &= E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)) \\ E(Y) &= E_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right) \\ E(N_{/X_0}) &= E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)) \\ V(N_{/X_0}) &= V_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)) + E_{\theta_f}(V(N_{/X_0}/\theta_f)) \\ V(Y) &= V_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right) + E_{\theta_s}\left(\int_F^{C+F} (x - F)(1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right. \\ &\quad \left. - \left(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx\right)^2\right) \end{aligned}$$

Remarque : Dans le cas des lois de fréquence de Poisson, Binomiale Négative et Poisson Généralisée présentées dans la suite de ce mémoire, nous avons : $E(N_{/X_0}) = E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)) = E_{\lambda}(\lambda)$, λ étant le premier paramètre de ces lois. Le deuxième paramètre des lois Binomiale Négative et Poisson Généralisée, responsable de la sur-dispersion, n'a donc pas d'influence sur la prime pure des tranches XS. Ils jouent en revanche sur la variance de la sinistralité annuelle.

La variance de la sinistralité annuelle n'est pas à confondre avec la variance de l'estimateur de la prime pure. L'estimateur de la prime pure lorsqu'on a ajusté les lois de fréquence de paramètre θ_f , et de sévérité θ_s , s'écrit :

$$\hat{P}P = E(N_{/X_0}/\theta_f)E(Y/\theta_s)$$

Le caractère aléatoire des paramètres fait de l'estimateur de la prime pure une variable aléatoire dont l'espérance et la variance peuvent être déduites de la manière suivante :

$$E(\hat{P}P) = PP = E(Z)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} E(\hat{P}P) &= E(E(N_{/X_0}/\theta_f)E(Y/\theta_s)) \\ E(\hat{P}P) &= E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))E_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) \\ E(\hat{P}P) &= PP = E(Z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V(\hat{P}P) &= V_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))V_{\theta_s}(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx) \\ &\quad + (E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)))^2 V_{\theta_s}(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx) \\ &\quad + V_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))(E_{\theta_s}(\int_F^{C+F} (1 - F_{X/X_0}^{\theta_s}(x))dx))^2 \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} V(\hat{P}P) &= V(E(N_{/X_0}/\theta_f)E(Y/\theta_s)) \\ V(\hat{P}P) &= V_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))V_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) \\ &\quad + (E_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f)))^2 V_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) \\ &\quad + V_{\theta_f}(E(N_{/X_0}/\theta_f))(E_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)))^2 \end{aligned}$$

4.2 Chargement de sécurité et prime de risque

PRIME PURE
+ Chargement de sécurité
= PRIME DE RISQUE
+ Chargement économique (de gestion, de courtage, ...)
= PRIME TECHNIQUE ou PRIME D'ÉQUILIBRE

La prime de risque est égale à la prime pure plus le chargement de sécurité. Comme il existe une certaine volatilité autour de la prime pure due d'une part aux incertitudes relatives à la modélisation (erreur dite de « paramètres ») et d'autre part au caractère aléatoire des sinistres, il est nécessaire de mettre du capital en face de ce risque afin schématiquement d'assurer la solvabilité du réassureur vis-à-vis de l'assureur, et de rémunérer ce capital mobilisé.

Le chargement de sécurité correspond au coût de ce capital au cours du temps, facturé à l'assureur.

4.2.1 Principe d'allocation du capital

L'allocation du capital consiste à déterminer pour chaque traité sa contribution au profit espéré de la compagnie. Cette contribution représente le capital alloué au traité sur lequel le chargement de sécurité est calculé.

L'allocation du capital doit respecter le principe général suivant : plus le risque d'un traité est grand, plus il met de temps à se développer dans le temps et moins le traité se diversifie avec le reste du portefeuille, plus le capital alloué au traité doit être grand.

4.2.2 Les mesures de risque

Une certaine mesure de risque est nécessaire pour déterminer le montant de capital alloué aux traités de réassurance.

Dans le cas du choix d'une mesure de risque fonction de la prime pure du traité, c'est à dire de l'espérance du risque, le principe général d'allocation du capital défini ci-dessus n'est respecté. En particulier, la volatilité du risque n'est pas prise en compte.

D'où l'idée d'allouer du capital à un traité en fonction non seulement de la prime pure mais aussi en fonction d'une composante de volatilité, en d'autres termes une fonction de l'écart type du risque du traité. Cependant, si l'écart type est une mesure qui permet de prendre en compte la volatilité du risque, elle a le désavantage de charger en capital sur la base de l'ensemble des écarts possibles par rapport à la moyenne, qu'ils soient positifs ou négatifs. De plus, cette mesure de risque n'est pas adaptée à la réassurance non proportionnelle, pour laquelle les distributions de sinistres sont le plus souvent à queue lourde. En effet, l'écart type mesure la dispersion autour de la moyenne, mais ne rend pas compte de l'asymétrie des distributions et de la disposition des masses de probabilité autour de leur centre, comme leur regroupement proche ou loin du centre de probabilité. Enfin l'écart type ne prend pas en compte la diversification du traité dans le portefeuille de la compagnie.

De ce fait, une mesure de risque plus appropriée à la réassurance s'est imposée naturellement ces dernières années. La Value At Risk (VaR) au seuil α correspond au montant pour lequel la probabilité que le risque dépasse ce montant est inférieure à $1 - \alpha$. Rappelons que cette mesure a été testée à de nombreuses reprises dans le cadre de la mise en place de la réglementation Solvabilité II sur le marché européen, et le seuil retenue à ce titre est $\alpha = 99.5\%$, soit l'évènement rare ayant pour période de retour 200 ans.

Si la VaR est facilement déterminée lorsqu'on dispose de la distribution du risque, et si elle ne s'intéresse qu'à la déviation négative au seuil α , il n'en reste pas moins qu'elle ne permet pas de prendre en compte toute la queue de distribution, c'est-à dire qu'elle ne discrimine pas les risques en fonction des évènements plus rares, au-delà du seuil.

La VaR n'est par ailleurs pas considérée comme une mesure de risque cohérente, comme définie dans [6], car elle n'est pas sous-additive. Dans certains cas, pour deux risques X_1 et X_2 , $VaR(X_1 + X_2) \geq VaR(X_1) + VaR(X_2)$, ce qui veut dire que la mesure de risque peut conduire à une concentration des risques dans un portefeuille plutôt qu'à leur diversification (déconcen-

tration).

Une mesure de risque cohérente est l'expected shortfall (ES), aussi connue sous le nom de Tail-VaR (TVaR), ou VaR conditionnelle. Cette fois, il s'agit de prendre en compte toute la queue de distribution du risque puisque l'expected shortfall au seuil α correspond à la moyenne des $1 - \alpha$ pires évènements :

$$ES(X) = E(X/X \leq F_X^{-1}(1 - \alpha)) = E(X/X \geq VaR_\alpha(X))$$

où F_X^{-1} est la fonction de distribution inverse du résultat pour le risque X .

L'expected shortfall est une bonne mesure de risque pour déterminer les capitaux alloués aux traités. La contribution du traité au risque total de la compagnie est reflétée au travers d'une structure de dépendance entre les traités, entre les lignes d'affaires, et autres niveau d'agrégation des risques du portefeuille (exemple : les zones géographiques).

4.2.3 Capital alloué aux traités

Une approche pour l'allocation du capital passe par la description du portefeuille (non-vie) par un arbre de dépendance. Pour simplifier la compréhension, le portefeuille Z est composé de plusieurs branches Y_i , elles-mêmes composées de plusieurs traités X_{ij} . Le capital alloué au traité X_{ij} est sa contribution à l'expected shortfall du portefeuille Z :

$$K(X_{ij}, Z) = -E(X_{ij}/Z \leq F_Z^{-1}(1 - \alpha)) = -E(X_{ij}/Z \geq VaR_\alpha(Z))$$

C'est l'espérance des réalisations de X_{ij} pour les $1 - \alpha$ pires réalisations du portefeuille Z . En sommant les contributions de tous les traités du portefeuille, on retrouve aisément l'expected shortfall du portefeuille car $Z = \sum X_{ij}$.

Les dépendances au sein du portefeuille (entre les traités, puis entre les branches pour simplifier) sont modélisées au travers de copules. Comme la plupart du temps, les données d'expérience sont insuffisantes pour calibrer les paramètres des copules, ces paramètres sont calibrés en analysant les relations causales entre les risques du portefeuille, c'est-à-dire en pensant à des scénarii dans le portefeuille et en faisant estimer par des experts les probabilités conditionnelles.

Une fois les copules entre Traités et entre branches calibrées, l'outil de modélisation des risques Non-Vie de la compagnie peut produire une agrégation de l'arbre de dépendance, en commençant par simuler les traités à la base de l'arbre (leurs distributions étant connues grâce à la tarification), puis en remontant dans l'arbre par application des copules. Le résultat de cette simulation est l'obtention des distributions des risques au niveau des branches, comme au niveau du portefeuille tout entier. L'autre résultat important de la simulation, c'est l'obtention des fonctions de diversification $H_{Y \subset Z}^\alpha$ entre les branches Y et le niveau portefeuille Z et des copules $C_{X,Y}$ entre les traités X et les branches Y . Après quelques développements, on déduit la formule du capital alloué au traité en fonction de la copule et de la fonction de diversification :

$$K(X, Z) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dH_{X \subset Z}^\alpha(F_X(x)) \quad (4.1)$$

avec

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) = \int_0^1 \frac{\partial C_{X,Y}(u,v)}{\partial v} \cdot dH_{Y \subset Z}^\alpha(v) dv = \frac{\int_0^1 \frac{\partial C_{X,Y}(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial C_{Y,Z}(v,1-\alpha)}{\partial v} dv}{1-\alpha} \quad (4.2)$$

Démonstration :

Pour fixer les notations :

$$C_{Y,Z} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

$$\{u, v\} \rightarrow C_{Y,Z}(u, v) = P(Y \leq F_Y^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(v))$$

$$\frac{\partial C_{Y,Z}}{\partial u}(u, v) \iff P(Z \leq F_Z^{-1}(v) / Y = F_Y^{-1}(u))$$

$$\frac{\partial C_{Y,Z}}{\partial v}(u, v) \iff P(Y \leq F_Y^{-1}(u) / Z = F_Z^{-1}(v))$$

et

$$H_{Y \subset Z}^\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$u \rightarrow H_{Y \subset Z}^\alpha(u) = P(Y \leq F_Y^{-1}(u) / Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha)) = \frac{P(Y \leq F_Y^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))}{P(Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))} = \frac{C_{Y,Z}(u, 1-\alpha)}{1-\alpha}$$

L'impact de la diversification se traduit donc par la transformation d'une mesure de risque initiale, l'expected shortfall, en une fonction de transformation du risque appelée fonction de diversification qui spécifie la contribution des branches et des traités au portefeuille tout entier. Si on reprend la définition du capital alloué au traité X dans Z :

$$K(X, Z) = -E(X/Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))$$

$$K(X, Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X/Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha)}(x) dx$$

$$K(X, Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X/Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha)}(x)$$

avec $f_{X/Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha)}$ la densité de probabilité de la variable aléatoire $X/Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha)$ et $F_{X/Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha)}$ sa fonction de probabilité cumulée.

$$K(X, Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dP(X \leq x / Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))$$

$$K(X, Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dP(X \leq F_X^{-1}(F_X(x)) / Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))$$

$$K(X, Z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dH_{X \subset Z}^\alpha(F_X(x))$$

avec $H_{X \subset Z}^\alpha$ la fonction de diversification entre le traité X et le portefeuille Z .

Il reste à déterminer cette fonction de diversification en fonction de ce dont on dispose en fin de simulation de l'arbre de dépendance Non-Vie de la compagnie, notamment en fonction des fonctions de diversification entre les branches Y et le portefeuille Z et les copules entre les traités et les branches :

Pour tout $u \in [0, 1]$:

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) = P(X \leq F_X^{-1}(u) / Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))$$

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) = \frac{P(X \leq F_X^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha))}{1-\alpha}$$

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) \iff \frac{\int_0^1 P(X \leq F_X^{-1}(u), Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha) / Y = F_Y^{-1}(v)) dv}{1-\alpha}$$

X et Z sont conditionnellement indépendants sachant Y

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) \iff \frac{\int_0^1 P(X \leq F_X^{-1}(u) / Y = F_Y^{-1}(v)) \cdot P(Z \leq F_Z^{-1}(1-\alpha) / Y = F_Y^{-1}(v)) dv}{1-\alpha}$$

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) = \frac{\int_0^1 \frac{\partial C_{X,Y}(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial C_{Y,Z}(v,1-\alpha)}{\partial v} dv}{1-\alpha}$$

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) = \int_0^1 \frac{\partial C_{X,Y}(u,v)}{\partial v} \cdot dH_{Y \subset Z}^\alpha(v) dv$$

Dans le cas particulier d'un seul traité dans la compagnie, on vérifie après quelques développements que le capital alloué au traité correspond bien à l'expected shortfall :

$$K(X, X) = -ES(X) = -E(X / X \leq F_X^{-1}(1-\alpha)) = -\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(u) du$$

Démonstration :

On reprend l'équation 4.2 permettant d'obtenir la fonction de diversification.

$$C_{X,Y}(u, v) = C_{X,X}(u, v) = \text{Min}(u, v)$$

$$C_{Y,Z}(v, 1-\alpha) = C_{X,X}(v, 1-\alpha) = \text{Min}(v, 1-\alpha)$$

ce qui en dérivant ce minimum par rapport à v permet d'obtenir :

$$\frac{\partial C_{X,Y}(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial C_{Y,Z}(v,1-\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial C_{X,X}(u,v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial C_{X,X}(v,1-\alpha)}{\partial v} = \left(\begin{cases} 0 & u \leq v \\ 1 & u > v \end{cases} \right) \left(\begin{cases} 0 & 1-\alpha \leq v \\ 1 & 1-\alpha > v \end{cases} \right)$$

$$H_{X \subset Z}^\alpha(u) = H_{X \subset X}^\alpha(u) = \frac{\begin{cases} u & u \leq 1-\alpha \\ 1-\alpha & u > 1-\alpha \end{cases}}{1-\alpha}$$

et en reprenant la formule du capital alloué 4.1 ci-dessus :

$$K(X, X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dH_{X \subset X}^\alpha(F_X(x))$$

$$K(X, X) = - \int_0^1 F_X^{-1}(u) \cdot dH_{X \subset X}^\alpha(u) \text{ en effectuant le changement de variable } x = F_X^{-1}(u) \text{ puis}$$

en remplaçant la dérivée de la fonction de diversification :

$$K(X, X) = -\frac{1}{1-\alpha} \int_0^{1-\alpha} F_X^{-1}(u) \cdot du$$

4.2.4 Temporalité du risque

Enfin, la temporalité du risque (le fait que du capital est mobilisé sur un traité tant qu'il existe de l'incertitude sur le résultat du traité dans le temps) est prise en compte au travers d'un facteur temps, mesurant la durée du traité.

De cette manière, le risque individuel de chaque traité, la diversification dans le portefeuille

et la mesure de duration des traités sont pris en compte pour déterminer le chargement de sécurité de chaque traité.

4.3 Chargements économiques et prime technique

PRIME PURE
+ Chargement de sécurité
= PRIME DE RISQUE
+ Chargement économique (de gestion, de courtage, ...)
= PRIME TECHNIQUE ou PRIME D'ÉQUILIBRE

Les principaux chargements économiques à appliquer sont de manière générale :

- Les frais de suivi et de gestion des traités et des sinistre,
- Le courtage,
- Les taxes éventuelles exigibles sur la prime du contrat,
- Les rabais pour reconstitutions payantes.

4.3.1 Les frais de suivi et de gestion du traité

Tout traité accepté fera l'objet d'un traitement de base et aura un suivi chez le réassureur. Certains traitements peuvent être considérés comme incontournables et d'un coût fixe, quelles que soient les caractéristiques de l'affaire (enregistrement des termes du traité dans les bases de données techniques du réassureur, comptabilisation, tarification...), d'autres seront directement liés à ses caractéristiques dépendant de :

- la nature des sinistres et de leur développement dans le temps : suivi de l'affaire sur plusieurs années, calcul de provisions complémentaires de sinistres,
- la complexité du traité et de ses clauses,
- la taille de l'affaire : nécessité d'études spécifiques, fréquence et gestion des sinistres,
- apéritition.

Les clés de répartition des frais de suivi et de gestion, ainsi que la formule de chargement des primes techniques dépendent donc directement des modes de calculs et des interprétations des quantités obtenues par l'analyse de comptabilité analytique mise en place par la compagnie. Une première approche, par souci de simplification, peut consister à considérer une série de montants fixes de gestion, déclinée par :

- nature de la branche couverte (développement long, court, branches ou traités particuliers...)
- activité sinistre anticipée du traité

Le taux de frais de gestion, pour 100% de la couverture, à additionner au taux de risque est :

Taux de gestion = Frais de gestion fixes (pour 100% de la tranche) / (Part du réassureur dans la tranche* Assiette de prime)

Les frais de gestion sont donc indépendants de la part du réassureur.

4.3.2 Le courtage

Le courtage est destiné à rémunérer l'intermédiaire de réassurance. Le courtage s'exprime en pourcentage de la prime payée par la cédante.

Si le courtage est de 10%, alors le réassureur :

- récupèrera 90% de la prime avec courtage pour payer ses frais, les sinistres et générer son bénéfice,
- versera 10% de la prime avec courtage à l'intermédiaire.

On a donc pour un taux de courtage de 10% :

- Prime XS sans courtage = (1-10%) Prime avec courtage
- Prime XS avec courtage = Prime sans courtage / (1-10%)
- Taux XS avec courtage = Taux XS sans courtage / (1 - 10%)

Deuxième partie

Présentation du cas pratique et application de la méthode empirique (Burning Cost)

5 Présentation du cas pratique

Pour illustrer le propos théorique du mémoire, nous avons choisi de présenter la tarification d'un programme de réassurance Incendie en 2011 pour un client polonais.

Le programme est composé de trois tranches de réassurance XS par Risque :

- T1 : 6.5 M€ XS 3.5 M€
- T2 : 20 M€ XS 10 M€
- T3 : 45 M€ XS 30 M€

Année	Nb Sinistres	Sinistres	Primes	Seuil de Communication
2002	3	3 836 494	209 593 792	2 493 369
		4 769 078		
		3 337 610		
2004	2	3 088 896	269 903 443	2 388 440
		6 253 491		
2005	3	3 079 311	276 080 065	2 339 154
		6 803 949		
		2 730 205		
2006	1	6 157 301	298 918 567	2 315 994
2007	2	2 765 292	340 761 531	1 959 507
		2 212 256		
2008	5	7 719 388	356 527 879	1 868 433
		2 013 151		
		4 170 176		
		3 264 663		
		2 862 056		
2009	4	2 422 323	368 592 825	2 095 104
		3 238 902		
		4 513 776		
		2 294 612		
2010	4	5 071 274	220 961 260	2 048 000
		7 840 643		
		4 380 677		
		2 178 263		
	24			

TABLE 5.1 – Données d'expérience revalorisées

Pour la tarification sur base expérience, on dispose des données d'expérience revalorisées (montants en €) sur un horizon d'expérience de 9 ans allant de 2002 à 2010. La cédante fournit pour chaque année les montants de sinistre individuel à la base, les primes d'assurance de l'année, et le seuil de communication des sinistres au réassureur. L'ensemble de ces informations est reporté dans le tableau de synthèse des données d'expérience ci-dessus.

On remarque en première analyse que les sinistres au dessus du seuil de communication de la cédante chaque année sont très peu nombreux, entre 0 (en 2003) et 5 (en 2008).

On envisage d'ores et déjà la nécessité de modéliser le nombre de sinistres annuels au moyen de lois de fréquence non seulement adaptées à la représentation des événements rares mais aussi des lois reflétant la volatilité observée d'année en année en terme de nombre de sinistres, puisque certaines années sont avec très peu de sinistres (moins de 2, voire aucun), d'autres avec plus de 4 sinistres.

On pense aussi à l'incertitude inhérente à la détermination des paramètres de ces lois sur la base d'un échantillon de nombre de sinistres composé de 9 réalisations (années) seulement. L'incertitude des paramètres des lois de fréquence est le plus souvent omise aujourd'hui par les actuaires dans la tarification. L'analyse des données d'expérience de base de ce cas pratique met en lumière à quel point il devrait faire l'objet d'études plus approfondies au cours de la tarification. Un des objectifs de ce mémoire est non seulement de montrer comment s'effectue le choix des lois de fréquence adaptées aux données de réassurance, mais aussi de proposer de nouveaux outils aux actuaires pour prendre en compte l'incertitude de la paramétrisation de ces lois liée au manque ou à la rareté des données.

La cédante souhaite se protéger contre les sinistres individuels exceptionnels au travers d'un programme de réassurance composé de trois tranches.

La première tranche T1 de 6.5 M€ en XS de 3.5 M€ est une tranche dite travaillante puisque l'expérience des 9 dernières années montre qu'elle aura été touchée chaque année sauf en 2003 et 2007 avec à chaque fois au moins un sinistre au dessus de la franchise de 3.5 M€. Cette première tranche travaillante n'aura toutefois jamais été traversée par le passé avec aucun sinistre au dessus de 10 M€, le sinistre revalorisés maximum s'étant produit la dernière année (2010) pour un montant de 7.84 M€ environ.

En sus de cette protection contre des sinistres exceptionnels mais assez probable puisque s'étant produit ces dernières années, la cédante souhaite se protéger contre d'éventuels sinistres d'intensité jamais observée par le passé. Elle s'assure cette protection au travers de la cession du risque par deux tranches hautes T2 de 20 M€ en XS de 10 M€ et T3 de 45 M€ en XS de 30 M€, dites non travaillantes puisque jamais touchées par des sinistres par le passé.

On comprends que la tranche basse travaillante permet d'améliorer le résultat annuel de la cédante par la cession d'un risque à plus forte probabilité de réalisation que celle du risque cédé sur les tranches plus hautes non travaillantes. Pour ces dernières, le but reste évidemment une protection du résultat en cas d'évènement exceptionnel, mais aussi cette cession des risques extrêmes peu probables permet à la cédante d'augmenter ses possibilité de souscription par la diminution du capital mobilisé pour faire face aux risques liés à la souscription.

La prime de la cédante pour l'année de cotation 2011 est égale à 394 130 000 €. La cédante fournit par ailleurs le profil de portefeuille, qui indique notamment comment est répartie cette prime dans des tranches de sommes assurées jusqu'à 80 M€ :

	S Amin (€)	S Amax (€)	Nb Risques	%Nb Risques total		SMP (€)	S Amoy (€)	Prime (€)	%Prime total	Loss Ratio
	0	2,000,000	909,468	98.53%	99.26%	207,067,907,161	227,680	324,820,092	82.41%	70%
	2,000,000	3,500,000	6,755	0.73%		17,575,573,818	2,601,861	21,507,068	5.46%	70%
T1	3,500,000	5,000,000	2,437	0.26%	0.58%	10,044,728,149	4,121,760	9,596,777	2.43%	70%
	5,000,000	6,000,000	973	0.11%		5,340,481,762	5,488,676	4,616,687	1.17%	70%
	6,000,000	7,000,000	782	0.08%		5,033,979,958	6,437,316	4,460,049	1.13%	70%
	7,000,000	8,000,000	396	0.04%		2,964,831,812	7,486,949	2,521,256	0.64%	70%
	8,000,000	9,000,000	438	0.05%		3,727,697,435	8,510,725	2,927,061	0.74%	70%
	9,000,000	10,000,000	358	0.04%		3,415,108,017	9,539,408	2,398,292	0.61%	70%
T2	10,000,000	12,500,000	413	0.04%	0.15%	4,607,959,950	11,157,288	4,635,612	1.18%	70%
	12,500,000	15,000,000	367	0.04%		5,033,373,582	13,714,914	5,916,429	1.50%	70%
	15,000,000	17,500,000	163	0.02%		2,619,005,856	16,067,521	1,996,354	0.51%	70%
	17,500,000	20,000,000	155	0.02%		2,892,074,563	18,658,546	2,087,019	0.53%	70%
	20,000,000	25,000,000	154	0.02%		3,463,994,371	22,493,470	2,340,233	0.59%	70%
	25,000,000	30,000,000	91	0.01%		2,441,256,849	26,826,998	1,302,232	0.33%	70%
T3	30,000,000	35,000,000	42	0.00%	0.01%	1,338,681,782	31,873,376	1,021,988	0.26%	70%
	35,000,000	40,000,000	20	0.00%		744,021,859	37,201,093	337,640	0.09%	70%
	40,000,000	45,000,000	15	0.00%		625,244,694	41,682,980	361,880	0.09%	70%
	45,000,000	50,000,000	17	0.00%		798,906,880	46,994,522	363,497	0.09%	70%
	50,000,000	60,000,000	11	0.00%		590,116,753	53,646,978	563,484	0.14%	70%
	60,000,000	70,000,000	4	0.00%		254,650,908	63,662,727	126,818	0.03%	70%
	70,000,000	80,000,000	8	0.00%		567,856,708	70,982,086	229,532	0.06%	70%
Total			923,067			Total			394,130,000	

FIGURE 5.1 – Profil de portefeuille du cas pratique

Le profil montre que le portefeuille est composé de 923 067 polices d'assurance (colonne Nb Risques) représentant un total de 394 130 000 € de primes d'assurance. Les polices d'assurance de somme assurée comprise entre 0 et 2 M€ représentent 82.41% de la prime total et 98.53 % du nombre de risques total.

Le Sinistre Maximum Possible (SMP - le sinistre correspondant à une destruction totale de toutes les sommes assurées de la bande) dans chaque tranche est aussi fourni par la cédante, par exemple environ 207 MM€ dans la première bande de sommes assurées. La somme assurée moyenne dans cette bande est déduite du nombre de risques et du SMP, elle vaut $207\,067\,907\,161 / 909\,468 = 227\,680$ €. Les risques souscrits par la cédantes dans cette bande peuvent être considérés comme des petits risques représentant une grande majorité du portefeuille en nombre et en prime.

Sur la deuxième bande de sommes assurées comprise entre 2M€ et 3.5M€, la somme assurée moyenne est déjà bien plus élevée, elle s'établit à 2 604 861 €. Elle comprend moins de risques, 6 755 en tout pour 5.46% de la prime totale. On s'aperçoit que l'essentiel des polices est concentré dans les deux premières bandes de sommes assurées.

Les deux premières bandes de sommes assurées non protégées par la réassurance concentrent donc 99.26 % des risques qui représentent 87.87% de la prime totale. On comprends que la cédante souhaite maximiser son résultat en gardant les plus petits risques représentant la majorité du portefeuille tout en maîtrisant son risque par la cession à la Réassurance au delà de 3.5 M€.

On voit que la tranche 1, 6.5 M€ en XS de 3.5 M€ couvre toutes les polices de somme assurée supérieure à 3.5 M€, soit $100\% - 99.26\% = 0.74\%$ des risques de la cédante et $100\% - 87.87\% = 12.13\%$ de la prime totale. Les données d'expérience montre qu'il s'agit d'une tranche travaillante que la cédante souhaite mettre en place pour maîtriser son résultat annuel sur le portefeuille.

La tranche 2, 20 M€ en XS de 10 M€ couvre 0.16% des risques pour $4.64\%+0.76\%=5.40\%$ de la prime totale. Cette tranche non travaillante vise à protéger la cédante sur un peu plus 5% de la prime pour des risques extrêmes non observés par le passé. Enfin, la cédante veut céder 1/10 000 (0.01%) de ces grands risques représentant moins de 1% de la prime totale (0.76%) au travers de la troisième tranche de réassurance non travaillante, de 45 M€ en XS de 30 M€.

La cédante fournit également son estimation de loss ratios à la base (rapport sinistre à prime) par bande de sommes assurées. Il a été communiqué à 70% pour toutes les bandes de sommes assurées.

6 Burning Cost sur le Cas pratique

Comme expliqué dans la première partie, les actuaires utilisaient par le passé une approche de tarification empirique appelée Burning Cost basée sur les données d'expérience passées fournies par la cédante. L'objectif consistait, pour chaque tranche XS du programme de réassurance, à calculer les charges individuelles à la tranches qui sommées donnaient les charges annuelles à la tranches pour chaque année d'expérience. Les charges annuelles à la tranche rapportées aux primes As If permettaient de déduire les taux annuels As If. Si aucune tendance dans les taux annuels n'était observable, le calcul du burning cost correspond à la somme pondérée des taux annuels par les primes as if des années. Le burning cost appliqué à l'assiette de prime de l'année de cotation permet de déduire la prime pure de la tranche de réassurance cotée. Le tableau ci-dessous expose le calcul du Burning Cost pour la tranche basse T1 travaillante :

Tranche 6,5 XS 3,5 (M€)

Année	Nb Sinistres	Sinistres	Charge XS par sinistre	Charge annuelle	Primes As If	Taux Annuel
2002	3	3,836,494	336,494	1,605,572	209,593,792	0.766%
		4,769,078	1,269,078			
		3,337,610	0			
2004	2	3,088,896	0	2,753,491	269,903,443	1.020%
		6,253,491	2,753,491			
2005	3	3,079,311	0	3,303,949	276,080,065	1.197%
		6,803,949	3,303,949			
		2,730,205	0			
2006	1	6,157,301	2,657,301	2,657,301	298,918,567	0.889%
2007	2	2,765,292	0	0	340,761,531	0.000%
		2,212,256	0			
2008	5	7,719,388	4,219,388	4,889,564	356,527,879	1.371%
		2,013,151	0			
		4,170,176	670,176			
		3,264,663	0			
		2,862,056	0			
2009	4	2,422,323	0	1,013,776	368,592,825	0.275%
		3,238,902	0			
		4,513,776	1,013,776			
		2,294,612	0			
2010	4	5,071,274	1,571,274	6,792,594	220,961,260	3.074%
		7,840,643	4,340,643			
		4,380,677	880,677			
		2,178,263	0			
24						

Burning Cost	0.983%
Assiette de prime Année de Cotation	394,130,000
Prime Pure	3,874,446

TABLE 6.1 – Burning Cost Tranche basse T1 : 6.5 XS 3.5 M€

Les charges individuelles des sinistres sont simplement déduites de l'application de la franchise de 3.5 M€ et de la limite de 10 M€ de la tranche XS. Par exemple, la part du sinistre à la base en 2002 de 4 769 078 € cédé en réassurance XS via la tranche 1 est de $4\,769\,078 - 3\,500\,000 = 1\,269\,078$ €. Le dernier sinistre à la base communiqué en 2002, d'un montant 3 337 610 €, ne dépasse pas la franchise de 3.5 M€ et la charge individuelle à la tranche est par conséquent nulle. On remarque comme observé précédemment au cours de l'analyse des données d'expérience que la tranche de réassurance T1 n'est pas entièrement travaillante. Aucun des sinistres à la base revalorisés ne dépasse la limite de la tranche 10 M€. La charge individuelle à la tranche maximale se produit en 2010 pour un montant de 4 340 643 €. Cette tarification empirique sur la tranche T1 revient donc en réalité à tarifier une tranche de 4.340 M€ en XS de 3.5 M€. On comprend la limitation d'une technique de tarification qui permet difficilement de prévoir toutes les réalisations probables futures.

Le graphique suivant rend compte de l'évolution des taux annuels dans le temps avec une moyenne égale à 0.955% :

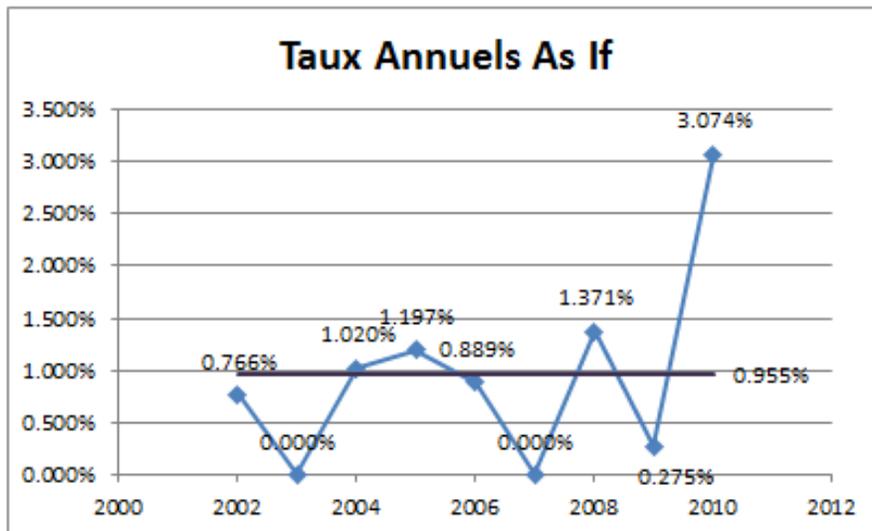


TABLE 6.2 – Taux Annuels As If Tranche basse T1 : 6.5 XS 3.5 M€

On remarque un taux annuel très supérieur en 2010, de 3.074% exactement, contre pas plus de 1.5% les autres années. Ceci s'explique par une diminution conséquente de la prime de base entre 2009 et 2010, de 369 M€ à 221 M€, soit une baisse de 148 M€, avec pourtant dans le même temps une très mauvaise sinistralité puisque la charge annuelle à la tranche en 2010 est la plus élevée (6.8 M€ environ) sur tout l'horizon d'expérience. Cette mauvaise sinistralité par rapport aux autres années alors même que l'exposition en prime baisse nettement en 2010 demanderait à ce que plus d'investigations soit menées, notamment sur les changements de profils de portefeuille de la cédante au cours des années.

Ce point particulier mis à part, les charges annuelles et taux annuels sont déduits sans que se dégage toutefois de tendance remarquable dans l'évolution des taux au cours des années. Aucun ajustement de tendance n'est nécessaire et le burning cost de la tranche peut être directement déduit de la pondération des taux annuels par les primes as if pour obtenir un burning cost de 0.983%. Cela correspond à la part de la prime de base demandée par le réassureur pour accepter en cession les risques couverts par cette tranche de réassurance. La multiplication de ce burning cost avec la prime totale de l'année de cotation permet d'obtenir via cette méthode empirique une prime pure de 3 874 446 M€, c'est à dire un peu moins d'1% (exactement le burning cost 0.983%) des primes d'assurance totale. Sur la base des informations d'exposition présentées ci-dessus, la tranche 1 rappelons-le protégeant des polices rFreprésentant 12.13% de la prime d'assurance totale, cela veut dire que le réassureur demande $0.98\%/12.13\% = 8.1\%$ environ des primes de base des risques couverts.

Comme on pouvait s'y attendre le résultat du burning cost sur les tranches T2 et T3 non travaillantes est nul car aucun des sinistres d'expérience revalorisés ne touche ces tranches. Ceci confirme un des biais de cette tarification empirique non adaptée aux calculs des tarifs sur les tranches statistiquement non travaillantes.

Tranche 20 XS 10 (M€)
 et Tranche 45 XS 30 (M€)

Année	Nb Sinistres	Sinistres	Charge XS par sinistre	Charge annuelle	Primes As If	Taux Annuel
2002	3	3,836,494	0	0	209,593,792	0.000%
		4,769,078	0			
		3,337,610	0			
2004	2	3,088,896	0	0	269,903,443	0.000%
		6,253,491	0			
2005	3	3,079,311	0	0	276,080,065	0.000%
		6,803,949	0			
		2,730,205	0			
2006	1	6,157,301	0	0	298,918,567	0.000%
2007	2	2,765,292	0	0	340,761,531	0.000%
		2,212,256	0			
2008	5	7,719,388	0	0	356,527,879	0.000%
		2,013,151	0			
		4,170,176	0			
		3,264,663	0			
		2,862,056	0			
2009	4	2,422,323	0	0	368,592,825	0.000%
		3,238,902	0			
		4,513,776	0			
		2,294,612	0			
2010	4	5,071,274	0	0	220,961,260	0.000%
		7,840,643	0			
		4,380,677	0			
		2,178,263	0			
24						

Burning Cost	0.000%
Assiette de prime Année de Cotation	394,130,000
Prime Pure	0

TABLE 6.3 – Burning Cost Tranches hautes T2 : 20 XS 10 M€ et T3 : 45 XS 30 M€

Afin de déterminer des primes pures non nulles pour les tranches non travaillantes, les actuaires avaient coutumes de tarifier les tranches hautes au moyen d'une technique d'extrapolation utilisant la loi de sévérité continue de Pareto. Nous ne rentrons pas ici dans le détail de ce calcul, nous préférons montrer comment le changement de méthode de tarification s'est engagé en réassurance par l'introduction d'une tarification probabiliste visant à déterminer à partir des données d'expérience et d'exposition les distributions de fréquence et de sévérité du risque à la base de la cédante.

Du fait de la rareté des informations d'expérience dans les zones extrêmes de risque, les actuaires ont très vite été confrontés à la nécessité de choisir des lois de distribution de nombre de sinistres se prêtant bien à la modélisation des événements rares, mais aussi reflétant la volatilité des nombres observées sur un horizon d'expérience passé restreint. Le prochain chapitre présente les lois de fréquence proposés pour la modélisation des nombres de sinistres en réassurance. On y expose les différences entre ces lois, et notamment entre les lois surdispersées. Nous indiquons les techniques permettant de faire le choix de la loi de fréquence. Enfin nous proposons des techniques de mesure de l'incertitude des paramètres en fonction du niveau d'information disponible.

Troisième partie

Distribution du nombre de sinistres : la Fréquence

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
	Longue	Cat	Proportionnelle				

FIGURE 6.1 – Fréquence/Sévérité sur base expérience

Comme vu précédemment, les données d'expérience sont constituées principalement du rapport entre les sinistres survenus à une époque pendant une période d'exposition, et les expositions de l'époque.

Pour être exploitables, ces données doivent être assez fournies, longues, et le portefeuille sous-jacent (la composition des catégories de risques, la couverture des polices originales, et leurs garanties, l'environnement légal, etc...) ne doit pas avoir significativement changé pour la période observée.

7 Seuil de modélisation et échantillon de nombre de sinistres au dessus du seuil

7.1 Choix Seuil de modélisation

Le choix du seuil de modélisation X_0 est contraint par les seuils de communication revalorisés par année d'observation ainsi que par la valeur de la franchise contractuelle la plus basse du programme de réassurance non-proportionnel (un programme correspondant à un ensemble de tranches XS à coter).

Le seuil de modélisation est au moins égal au maximum des seuils de communication revalorisés par année. Lorsque ce maximum dépasse la franchise la plus basse, l'actuaire doit procéder à une réduction de l'horizon d'expérience ou réclamer la communication des sinistres à un seuil inférieur. Dans tous les cas, l'actuaire doit soigneusement choisir son seuil de modélisation entre le maximum des seuils de communication revalorisés et la franchise la plus basse. En effet, du niveau du seuil de modélisation dépendra toute la cotation puisque les fréquence et sévérité sont tronquées à gauche au seuil. Choisir un seuil d'analyse (ou de modélisation) trop bas peut revenir

à se concentrer sur l'analyse de la survenance des "petits" sinistres et ne pas expliquer suffisamment la survenance des plus grands sinistres qui seront à charge du programme XS et peuvent provenir d'un processus aléatoire différent.

Note : En pratique, un seuil de l'ordre de 75% de la franchise de réassurance est souvent un choix qui fait sens par rapport aux ruptures de comportement observés entre les petits et les grands sinistres.

Sur le cas pratique, nous identifions dans le tableau ci-dessous en gris les sinistres en dessous de 3 M€, ce qui correspond à 85% de la franchise de la tranche XS du programme la plus basse, 3.5 M€.

Année	Nb Sinistres	Sinistres	Primes	Seuil de Communication
2002	3	3 836 494	209 593 792	2 493 369
		4 769 078		
		3 337 610		
2004	2	3 088 896	269 903 443	2 388 440
		6 253 491		
2005	3	3 079 311	276 080 065	2 339 154
		6 803 949		
		2 730 205		
2006	1	6 157 301	298 918 567	2 315 994
2007	2	2 765 292	340 761 531	1 959 507
		2 212 256		
2008	5	7 719 388	356 527 879	1 868 433
		2 013 151		
		4 170 176		
		3 264 663		
		2 862 056		
2009	4	2 422 323	368 592 825	2 095 104
		3 238 902		
		4 513 776		
		2 294 612		
2010	4	5 071 274	220 961 260	2 048 000
		7 840 643		
		4 380 677		
		2 178 263		
	24			

TABLE 7.1 – Données d'expérience revalorisées

Nous pouvons aussi tracer l'histogramme des sinistres à la base par année d'expérience, ce qui permet de positionner la franchise de la tranche T1, ainsi que le seuil de 85% de cette franchise égale à 3 M€. On voit que les sinistres de pointe au dessus du seuil sont conservés. Les plus petits sinistres plus fréquents de l'ordre de 2.1 M€ à 2.7 M€ sont écartés de l'analyse car ils sont considérés comme non représentatifs de la sinistralité extrême possiblement impactant les tranches XS du programme. Les sinistres compris entre le seuil 3 M€ et la franchise 3.5 M€ sont au nombre de 5. Nous décidons de les conserver dans l'étude car ils se rapprochent de certains sinistres bas ayant touchés la tranche, comme en 2002 les sinistres de 3.34 M€ (non impactant

la tranche) et de 3.84 M€ (impactant la tranche), en 2008 les sinistres de 3.26 M€ et de 4.17 M€, en 2009 les sinistres de 3.24 M€ et de 4.51 M€.

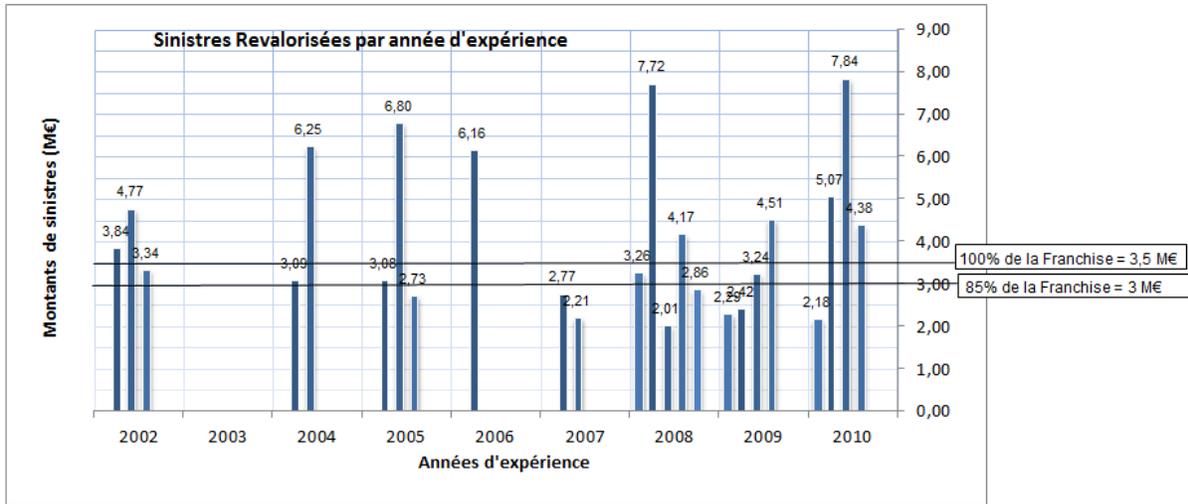


FIGURE 7.1 – Choix du seuil de modélisation

On fait donc le choix pragmatique de placer le seuil de modélisation $X_0 = 3 \text{ M€}$ ce qui correspond à un peu plus de 85% de la franchise la plus basse du programme. Il en résulte que 16 des 24 sinistres à la base sont retenus pour la modélisation en fréquence et sévérité sur base expérience.

7.2 Echantillon de nombre de sinistres au dessus du seuil

Une fois le seuil de modélisation fixé, l'étape suivante de la cotation consiste à construire une distribution de fréquence des sinistres au dessus du seuil. Après avoir filtré les sinistres au dessus de ce seuil, ils sont comptés pour chaque année d'expérience, ce qui permet d'obtenir un échantillon de nombre de sinistres historiques au dessus du seuil de modélisation $C_{X/X_0,k}$.

Les fréquences historiques ainsi obtenues doivent être revalorisées pour tenir compte des changements d'expositions et pour qu'elles deviennent ainsi représentatives du portefeuille de l'année de cotation.

Dans le cas des XS par risque, l'actuaire revalorise sur la base des nombres de polices par année lorsqu'il dispose de l'information. Le nombre de sinistre revalorisé vaut dans ce cas :

$$n_{X/X_0,k} = C_{X/X_0,k} \times \frac{nb_k}{nb_{\text{année de cotation}}}$$

Sinon, les primes as if sont utilisées pour revaloriser les nombres de sinistres :

$$n_{X/X_0,k} = C_{X/X_0,k} \times \frac{P_{AsIf,k}}{P_{\text{année de cotation}}}$$

NB : Dans le cas des XS par événement, les nombres de sinistres historiques ne sont pas revalorisés car la probabilité de survenance d'un événement ne dépend pas du nombre de polices

couvertes comme dans le cas de la revalorisation des primes historiques.

Nous rappelons que 16 sinistres au dessus du seuil de modélisation de 3 M€ ont été retenus. Le nombres de sinistres au-dessus du seuil sont calculés et revalorisés par les ratios de primes entre l'année de cotation et l'année d'expérience. On obtient ainsi le tableau suivant des sinistres au-dessus du seuil et des nombres de sinistres revalorisés :

Année	Nb	Sinistres > X0	Revalorisation des Nombres	Nb As If
2002	3	3 836 494	394 130 000 / 209 593 792 = 1.88045	5.64134
		4 769 078		
		3 337 610		
2004	2	3 088 896	394 130 000 / 269 903 443 = 1.46026	2.92053
		6 253 491		
2005	2	3 079 311	394 130 000 / 276 080 065 = 1.42759	2.85519
		6 803 949		
2006	1	6 157 301	394 130 000 / 298 918 567 = 1.15662	1.31852
2008	3	7 719 388	394 130 000 / 356 527 879 = 1.10547	3.31640
		4 170 176		
		3 264 663		
2009	2	3 238 902	394 130 000 / 368 592 825 = 1.06328	2.14857
		4 513 776		
2010	3	5 071 274	394 130 000 / 220 961 260 = 1.78371	5.35112
		7 840 643		
		4 380 677		
16				

TABLE 7.2 – Sinistres au-dessus du seuil

En 2010, la fréquence As if est élevée probablement du fait de la baisse de l'assiette de prime de 2010 par rapport à 2009 et 2011. Le graphique suivant montre l'évolution des fréquence As if dans le temps :

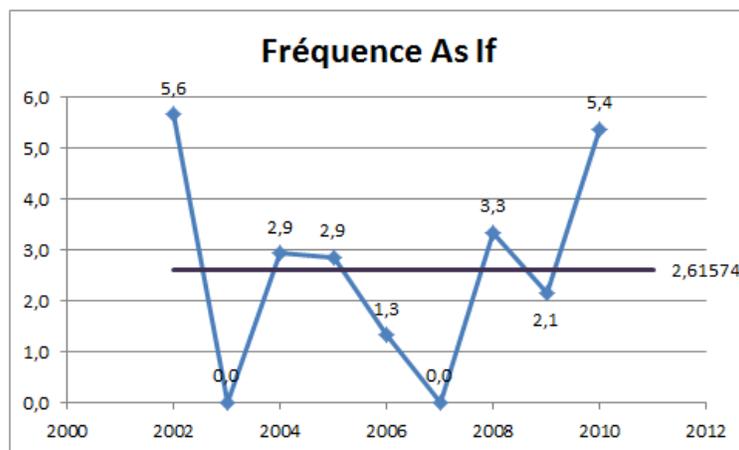


FIGURE 7.2 – Fréquence As If

On y voit qu'aucune tendance particulière (linéaire ou incurvée) ne se dégage de la représen-

tation graphique des fréquences As If sur l'horizon d'expérience. Les fréquences maximales sont atteintes en début d'horizon (5.6) et fin d'horizon d'expérience (5.4 en 2010). Ces fréquences As If sont plus élevées que les autres années car la primes de base revalorisées de ces années 2002 et 2010 sont bien plus faibles que les autres années. Comme indiqué au moment de réaliser le Burning Cost, il serait donc intéressant de demander à la cédante les profils de portefeuille par année afin de repérer d'éventuels variations par acceptation ou abandon de certains risques d'une année sur l'autre. Cela pourrait remettre en question certaines décision de la tarification de réassurance et notamment demander à revoir les poids accordés à l'information obtenue pour telle ou telle année d'expérience.

On observe égalité une volatilité empirique non négligeable des fréquences dans le temps.

Le vecteur de fréquences est de taille $n = (2010-2002+1) = 9$ et on le note de la manière suivante :

$$\{k_i\}_{i=2002,\dots,2010} = \{5.64134, 0, 2.92053, 2.85519, 1.31852, 0, 3.3164, 2.13857, 5.35112\}$$

Les moyenne empirique $\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ et variance emirique $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2$ sont calculées :

$\bar{k} = 2.61574$ et $s^2 = 4.10905$ ce qui donne un coefficient de dispersion empirique :

$DI = \frac{s^2}{\bar{k}} = 1.57089$ effectivement important, ce qui constitue un premier indicateur de volatilité conséquente autour de la moyenne.

A partir de ce vecteur de nombre de sinistres annuels $\{k_i\}_{i=1,\dots,n}$, les actuaires commencent par ajuster une loi de fréquence, la loi de la population dont est issue l'échantillon. Du fait de la taille limitée des échantillons, l'incertitude sur les lois et les paramètres des lois utilisées pour modéliser la fréquence est grande.

Dans la suite de cette partie figure une revue des outils dont l'actuaire dispose pour modéliser la fréquence des sinistres, en gardant à l'esprit la nécessité d'analyser l'incertitude de modélisation et d'estimation des paramètres pour tarifer les affaires.

La première sous-section est consacrée à l'exposé des techniques qui mènent au choix d'un modèle, avec au préalable un rappel des lois de fréquence utilisées pour modéliser le nombre de sinistres. Une attention particulière est portée aux relations entre la loi de Poisson simple et les lois dites sur-dispersées comme la Binomiale Négative et la Poisson Généralisée, ainsi qu'à l'estimation des paramètres de ces lois. Puis certains des tests statistiques qui permettent de discriminer une distribution par rapport à une autre sont présentés.

La deuxième sous-section est dédiée à la présentation des méthodes de mesure de l'incertitude des paramètres des distributions. La première d'entres elles est l'approche statistique classique qui consiste à regarder la limite asymptotique en loi des estimateurs des paramètres obtenus par maximisation de la fonction de vraisemblance. Puis deux méthodes alternatives sont proposées : l'approche empirique par bootstrap paramétrique et l'approche bayésienne.

8 Les données de référence

Tout au long de l'étude de la fréquence, l'application des méthodes abordées seront non seulement basées sur l'échantillon de nombre du cas pratique, mais aussi sur quatre échantillons de nombre de sinistres dont l'horizon d'expérience est de n années. Les échantillons ont tous pour particularité d'avoir été générés aléatoirement à partir d'une loi Binomiale Négative d'espérance égale à 4 et d'indice de dispersion (ratio Variance / Espérance) élevé égal à 1.5 nombre de sinistres. Des tirages aléatoires successifs ont été réalisés dans cette loi jusqu'à temps d'obtenir des échantillons effectivement de moyenne égale à 4 et de rapport variance sur moyenne empirique égal à 1.5 :

- Échantillon 1 : $\{2,1,5,7,5\}$ avec $n = 5$ (petit horizon d'expérience)
- Échantillon 2 : $\{2,3,5,4,4,7,10,2,6,4,0,2,4,5,2\}$ avec $n = 15$ (horizon d'expérience moyen)
- Échantillon 3 : $\{5,3,7,9,5,5,5,1,6,0,8,3,5,5,2,1,4,2,1,4,4,6,3,9,0,3,6,1,3,4\}$ avec $n = 30$ (grand horizon d'expérience).
- Échantillon 4 : $\{4,6,4,3,5,5,3,4,5,4,7,2,9,3,4,3,3,3,11,9,7,3,2,4,6,0,3,7,1,4,6,3,2,3,4,4,2,5,3,5,5,4,2,1,4,5,1,1,10,3,8,4,2,7,3,3,8,7,1,2,2,3,2,4,3,6,2,1,5,5,0,2,12,4,3,1,3,4,2,2,4,1,2,5,1,4,4,5,8,4,4,2,2,3,11,4,2,9,3,4\}$ avec $n = 100$ très grand.

Ce dernier échantillon a un horizon d'expérience volontairement très supérieur au maximum observable, une trentaine d'années. Dans ce cas, l'utilisation des propriétés asymptotiques des tests statistiques proposés est théoriquement plus juste que lorsque l'échantillon a un petit horizon d'expérience. Il s'agira de vérifier ce point grâce à l'échantillon 4.

Pour rappel, l'échantillon du cas pratique est constitué de $n = 9$ valeurs de fréquence suivantes : $\{5.64134, 0, 2.92053, 2.85519, 1.31852, 0, 3.3164, 2.13857, 5.35112\}$.

9 Choix d'un modèle de fréquence des sinistres

9.1 Hétérogénéité, contagion et sur-dispersion

Les échantillons observés de la variable aléatoire : « Nombre annuel de sinistres » sont incontestablement petits car l'horizon d'expérience des données est souvent réduit à quelques années. Ces échantillons traduisent les réalisations de la fréquence de sinistralité appliquée à une population de polices d'assurance d'un portefeuille, exposées aux garanties assurées. L'enjeu de la modélisation du nombre de sinistres annuels consiste à déterminer la loi de fréquence de la population dont provient l'échantillon étudié. Cependant, avant toute modélisation, il convient de se poser les questions adéquates au sujet de la population.

La première d'entre elles est : s'agit-il d'une population homogène ou hétérogène ? Une population est homogène si la sinistralité des polices d'assurance se comporte de la même façon face au risque. Cela revient à considérer que toutes les polices ont la même fréquence moyenne de sinistre. Une population est hétérogène lorsque la population est composée de sous-populations ou polices d'assurance qui réagissent différemment au risque, avec des fréquences moyennes de sinistre différentes. Il suffit de penser à un portefeuille automobile composé de conducteurs assurés appartenant à différentes classes d'âge, plus ou moins exposés au risque d'accident suivant la

localisation (zones rurale/urbaine) et la fréquence de leurs déplacements. Le comportement au volant est différent d'un individu à l'autre, certains conducteurs enregistreront plus de sinistres que d'autres.

Une autre question qui se pose est : s'agit-il d'une population exposée à un risque de contagion ? En effet, lorsque survient un sinistre pour une police d'assurance, les probabilités que d'autres polices du portefeuille soient à leur tour touchées, sont-elles augmentées ? On peut trouver facilement des exemples de risque de contagion spatiale : par exemple, dans un portefeuille constitué d'immeubles assurés en dommage incendie, la survenance d'un incendie peut provoquer des départs de feu sur les immeubles assurés voisins. En assurance Automobile, un accident impliquant plusieurs véhicules peut donner lieu à la déclaration de plusieurs sinistres par les automobilistes assurés. En assurance Crédit-Caution, du fait des interactions entre les assurés, la défaillance d'un nombre restreint de débiteurs peut générer un mécanisme de propagation des chocs à toute l'économie. La contagion spatiale se caractérise par la survenance d'évènements consécutifs à d'autres évènements, à un ou plusieurs endroits dans le portefeuille.

Lorsque très peu d'information concernant le portefeuille est disponible, l'actuaire ne peut repérer des phénomènes d'hétérogénéité et/ou de contagion que par l'analyse de l'échantillon du nombre de sinistres dont il dispose. Ces phénomènes se traduisent dans les échantillons des populations concernées par une sur-dispersion des nombres autour de leur moyenne. La sur-dispersion correspond à une variance supérieure à leur moyenne. Par opposition, la sous-dispersion correspond à une variance inférieure à leur moyenne.

Du fait de la vision agrégée du comportement d'une population, l'actuaire qui détecte une sur-dispersion dans ses échantillons, est le plus souvent incapable de déterminer l'origine de cette sur-dispersion : hétérogénéité, contagion ou les deux. C'est la raison pour laquelle J.GURLAND dans [32] fait référence à la « contagion apparente » pour l'hétérogénéité et à la « vraie contagion » pour le phénomène de contagion. Quelque soit l'origine de la sur-dispersion, l'actuaire est amené dans ce cas à utiliser des modèles ou lois dites « sur-dispersées » c'est-à-dire dont l'indice de dispersion, égal au rapport variance sur espérance, est supérieur à 1.

9.2 La loi de Poisson : la loi des évènements rares

La loi de Poisson est une loi particulièrement bien adaptée aux problèmes de réassurance car elle permet de décrire la survenance d'évènements peu probables ou rares dans un portefeuille constitué de nombreuses polices. Elle est souvent introduite comme la loi limite de la loi Binomiale, la loi discrète du nombre de réalisations k après n essais d'expérience, lorsque chaque essai à la probabilité p de se réaliser et que n tend vers l'infini.

On note N la variable aléatoire du nombre de sinistres.

Pour $m \in \mathbb{N}^+$, $p \in]0, 1[$, la densité de loi Binomiale s'écrit :

$$P_{m,p}(N = k) = C_m^k p^k (1-p)^{m-k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} p^k (1-p)^{m-k}$$

$$E(N) = mp \text{ et } V(N) = mp(1-p) < E(N)$$

Puisque $(1 - p) < 1$, l'indice de dispersion de la loi Binomiale est inférieur à 1 : $DI = \frac{V(N)}{E(N)} < 1$. Il s'agit de ce fait d'une loi dite sous-dispersée.

La description et la modélisation du nombre de sinistres annuels dans un portefeuille sont facilitées par la vision spatiale des polices d'assurance qui le composent. La surface unitaire occupée par les m polices d'assurance (appelées individus) d'un portefeuille est découpée en m sous-aires régulières composées d'une police. Pour satisfaire à l'exigence d'homogénéité face au risque de la population, l'intensité de la survenance d'un sinistre sur un individu est dans un premier temps considérée comme la même, quelque soit l'emplacement de l'individu dans le portefeuille. Cette intensité correspond à l'espérance du nombre de sinistres par unité d'aire. Par ailleurs, l'interaction entre les polices des sous-aires est considérée comme impossible dans ce premier schéma, ce qui caractérise l'absence de contagion spatiale du risque dans le portefeuille.

Pour chaque sous-aire de surface $1/m$, les probabilités d'occurrence des sinistres sont définies comme une loi de Bernoulli :

*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*

FIGURE 9.1 – Première représentation spatiale du portefeuille

Prob(pas de sinistre dans la sous-aire dans l'année) = $p = 1 - \frac{\lambda}{m}$
 Prob(1 sinistre dans la sous-aire dans l'année) = $q = 1 - p = \frac{\lambda}{m}$
 Prob(2 sinistres ou plus dans la sous-aire dans l'année) = 0

Par conséquent, le nombre de sinistres annuels dans le portefeuille suit une loi Binomiale de paramètres m et de probabilité p de succès. Finalement si le portefeuille est composée de nombreuses polices d'assurance, en faisant tendre m vers l'infini, le nombre de sinistres annuel suit alors une loi de Poisson d'intensité λ :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P_{m,p}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} P_{m,p}(N = k) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m!}{k!(m-k)!} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^{m-k} \\ \lim_{m \rightarrow +\infty} P_{m,p}(N = k) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)!}{m^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{m}\right)^k \end{aligned}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} P_{m,p}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

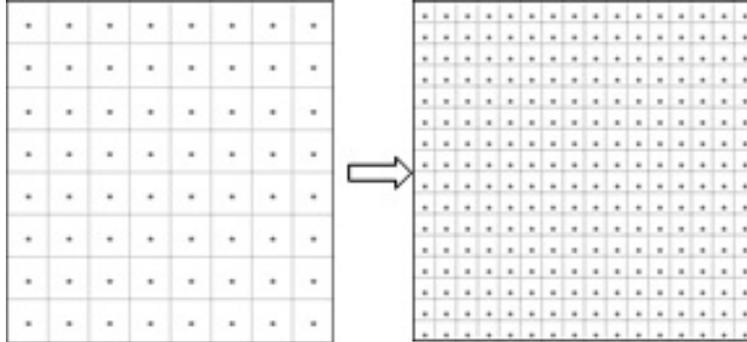


FIGURE 9.2 – Deuxième représentation spatiale du portefeuille

C'est la raison pour laquelle la loi de Poisson est souvent référencée comme la loi des événements rares.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $P_k(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
avec $E(N) = \lambda$ et $V(N) = \lambda$

La loi de Poisson n'est ni sur-dispersée, ni sous-dispersée. Elle s'adapte de ce fait particulièrement bien aux échantillons issus d'une population homogène, dans laquelle chaque individu est indépendant des autres, et est soumis à une fréquence de Poisson de même moyenne. En revanche lorsque les échantillons présentent des signes de sur-dispersion, notamment lorsque le rapport variance sur espérance empiriques est très supérieur à 1, il se peut que la loi de Poisson simple soit rejetée au profit de lois dites sur-dispersées.

9.3 Les lois sur-dispersées

Dans ce paragraphe, nous décrivons deux lois sur-dispersées qui, du fait de leurs spécificités, sont couramment utilisées en pratique pour refléter l'hétérogénéité et la contagion dans les portefeuilles d'assurance : la loi Binomiale Négative qui appartient à la classe des lois de Poisson-Mélange et à la classe des lois de Poisson Composées, et la loi de Poisson Généralisée qui appartient à la classe des lois de Poisson Composées. Nous verrons dans la suite de ce chapitre comment la Poisson Généralisée offre des possibilités de modélisation de la fréquence des sinistres plus intéressantes dans certains cas que la loi Binomiale Négative.

9.3.1 La classe des lois de Poisson-Mélange

Dans le cas d'une population hétérogène, celle-ci est constituée de sous-groupes ou individus qui peuvent toujours être considérés comme indépendants (sauf dans le cas de l'exposition à un risque de contagion dans le même temps), suivant des lois de Poisson, mais dont les fréquences moyennes sont différentes. Dans le cadre d'une représentation spatiale du portefeuille comme introduite précédemment, l'hétérogénéité du portefeuille peut se caractériser par une variabilité de l'intensité de la survenance de sinistre par unité d'aire suivant les régions sur la surface.

Le portefeuille peut être découpé en i régions dans lesquelles les polices sont soumises à leur propre intensité λ_i :

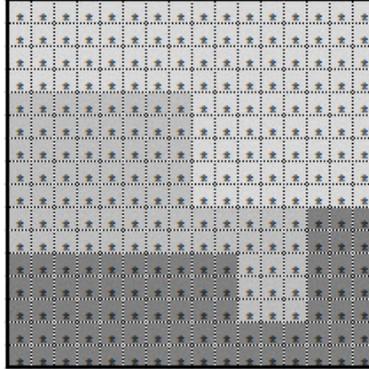


FIGURE 9.3 – Troisième représentation spatiale du portefeuille

Il est de ce fait apparu naturel de modéliser le phénomène d'hétérogénéité par la prise en compte d'un effet aléatoire ϵ autour de la fréquence moyenne λ de la loi de Poisson. L'effet aléatoire ϵ a pour moyenne $E(\epsilon) = 1$ tandis que sa volatilité $V(\epsilon)$ permet de caractériser la disparité des fréquences au sein du portefeuille.

La probabilité de la variable aléatoire du nombre de sinistres conditionnellement à l'effet aléatoire sur la moyenne est une loi de Poisson qui s'écrit :

$$P(N = k/\epsilon) = P(\text{Poisson}(\lambda\epsilon) = k) = \frac{(\lambda\epsilon)^k}{k!} e^{-\lambda\epsilon} \quad (9.1)$$

Dans un premier temps, la forme de la loi de l'effet aléatoire ϵ importe moins que sa variance $V(\epsilon)$ car c'est cette dernière qui est responsable de l'effet de sur-dispersion autour de la moyenne. L'indice de dispersion $DI = \frac{V(N)}{E(N)} = 1$ pour la loi de Poisson simple. Grâce à l'effet aléatoire, DI est supérieur strictement à 1 pour les lois de Poisson-Mélange.

Ceci peut être démontré en écrivant la moyenne de la variable aléatoire de la façon suivante :

$$E(N) = \lambda$$

Démonstration :

$$E(N) = E(E(N/\epsilon))$$

$$E(N) = E(\lambda\epsilon)$$

$$E(N) = \lambda E(\epsilon)$$

et la variance de la variable aléatoire de la façon suivante :

$$V(N) = \lambda + \lambda^2 V(\epsilon)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
V(N) &= E(N^2) - (E(N))^2 \\
V(N) &= E(E(N^2/\epsilon)) - \lambda^2 \\
V(N) &= E(V(N/\epsilon) + (E(N/\epsilon))^2) - \lambda^2 \\
V(N) &= E(\lambda\epsilon + (\lambda\epsilon)^2) - \lambda^2 \\
V(N) &= \lambda E(\epsilon) + \lambda^2 E(\epsilon^2) - \lambda^2 \\
V(N) &= \lambda + \lambda^2(V(\epsilon) + (E(\epsilon))^2) - \lambda^2 \\
V(N) &= \lambda + \lambda^2(V(\epsilon) + 1) - \lambda^2 \\
V(N) &= \lambda + \lambda^2 V(\epsilon)
\end{aligned}$$

ce qui conduit à un indice de dispersion :

$$DI = \frac{V(N)}{E(N)} = 1 + \lambda V(\epsilon) \geq 1$$

Il existe a priori une infinité de manières de décrire l'effet aléatoire ϵ sur la fréquence moyenne. Les lois de Poisson-Mélange les plus connues sont :

- la Poisson Gaussienne inverse avec ϵ suivant une loi Normale centrée,
- la Poisson Lognormale avec ϵ suivant une loi Lognormale,
- la Binomiale Négative avec ϵ suivant une loi Gamma.

Les deux premières distributions présentent le désavantage d'avoir une densité de probabilité en formule non-fermée. Elles ne s'écrivent que sous la forme d'intégrales, ce qui complique leurs manipulations. Il suffit de penser par exemple à l'estimation des paramètres par le maximum de vraisemblance. En revanche, la densité de probabilité de la Binomiale Négative possède une formule fermée, ce qui rend cette distribution beaucoup plus pratique pour la modélisation des nombres de sinistres.

9.3.2 La loi Binomiale Négative

La loi Binomiale Négative (notée NB) est une loi de Poisson-Mélange en ce sens qu'elle peut être déduite d'une loi de Poisson simple dont le paramètre λ est soumis à un effet aléatoire ϵ qui suit une loi Gamma telle que :

$$\epsilon \sim \text{Gamma}(v, v)$$

avec $v \in]0, +\infty[$, $E(\epsilon) = 1$ et $V(\epsilon) = \frac{1}{v}$

On démontre alors que N suit une loi Binomiale Négative : $N \sim NB(v, \frac{v}{\lambda+v})$, ce qui correspond d'après sa définition à l'expérience suivante : "Nombre d'échecs avant v succès lorsque la probabilité de succès est $p = \frac{v}{v+\lambda} = \frac{1}{DI} \in]0, 1[$ ".

On démontre alors que N suit une loi Binomiale Négative :

$$P_{v,p}(N = k) = \left(\frac{k+v-1}{k}\right) p^v (1-p)^k = \frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(k+1)\Gamma(v)} p^v (1-p)^k$$

ou en remplaçant l'écriture en v et p ci-dessus par l'écriture en λ et p pour effectuer le rapprochement avec la loi de Poisson simple de paramètre λ :

$$P_{\lambda,p}(N = k) = \frac{\Gamma(k + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} p^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^k$$

avec une espérance :

$$E(N) = \frac{v(1-p)}{p}$$

une variance :

$$V(N) = \frac{E(N)}{p} = \lambda + \frac{\lambda^2}{v}$$

et un indice de dispersion :

$$DI = \frac{V(N)}{E(N)} = 1 + \frac{\lambda}{v}$$

Lorsque v tend vers l'infini, l'indice de dispersion tend vers 1 et la loi tend vers une loi de Poisson de paramètre λ . Lorsque v tend vers 0, la dispersion devient infinie.

Il existe des façons de présenter la loi Binomiale Négative autres que celle de l'associer à la classe des lois de Poisson-Mélange décrivant le caractère hétérogène d'une population. Cette loi peut aussi expliquer par un processus de contagion spatiale dans une population donnée. Dans ce schéma, la répartition des polices d'assurance dans le portefeuille n'est plus homogène. Il existe des concentrations de polices appelées « clusters » à un ou plusieurs endroits dans le portefeuille, de sorte que si un évènement se produit sur une police dans un cluster, la propagation de l'évènement à d'autres polices du cluster est possible. Ce processus reconnaît donc la dépendance des polices d'assurance du portefeuille au regard du risque.

Schématiquement, cela peut se représenter de la manière suivante :

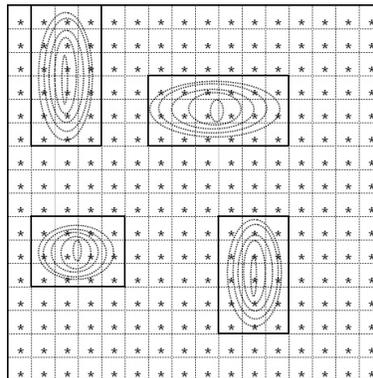


FIGURE 9.4 – Quatrième représentation spatiale du portefeuille

En reprenant l'exemple de l'assurance Automobile utilisé pour décrire la contagion spatiale, si le nombre d'accidents annuels K suit une loi de Poisson et que le nombre de déclarations de

sinistres par accident M suit une loi Logarithmique² alors le nombre total de sinistres annuels suit une loi Binomiale Négative.

De cette façon, la loi Binomiale Négative peut être considérée comme une loi de Poisson composée : $N = \sum_{i=1}^K M_i$.

La loi Binomiale Négative est particulièrement bien fondée. Elle permet de décrire l'hétérogénéité en fréquence d'une population, ou sa propension au phénomène de contagion, ou même les deux. Par ailleurs sa forme analytique est simple. C'est la raison pour laquelle les actuaires l'utilisent souvent pour décrire la sur-dispersion de leurs échantillons.

9.3.3 Une alternative : la loi de Poisson Généralisée

Comme alternative à la loi Binomiale Négative, il existe la loi de Poisson généralisée (notée *PG*). L'un des processus menant à cette distribution est le processus de branchement de Galton-Watson, un processus stochastique permettant de décrire des dynamiques de populations. Il s'agit d'un processus pouvant décrire la contagion dans une population de la manière suivante : lorsque M individus de la population (notés $i = 1, \dots, M$) sont exposés en même temps à un sinistre, ils exposent chacun L_i autres individus ($i = 1, \dots, M$), qui à leur tour exposent chacun $L_{i,j}$ autres individus ($j = 1, \dots, L_i$) et ainsi de suite.

Si les M individus sont soumis à une loi de Poisson de paramètre θ et que les $L_i, L_{i,j}, \dots$ sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi de Poisson de paramètre ω , alors le nombre total d'individus exposés dans la population suit une loi de Poisson généralisée de paramètre θ et ω . GOOVAERTS et KAAS montrent dans [29] comment la loi de Poisson Généralisée appartient à la famille des lois de Poisson Composées en tant que somme Poissonnienne de lois de Borel³ au lieu de la loi Logarithmique comme dans le cas de la loi Binomiale Négative. En ce sens, elle constitue un candidat intéressant pour la modélisation de la contagion spatiale (phénomène de « clustering ») dans les portefeuilles.

La densité de probabilité de la loi de Poisson généralisée s'écrit :

Pour $\theta \in \mathbb{R}^+$ et $\omega \in [0, 1[$,

$$P_{\theta,\omega}(N = k) = \frac{\theta(\theta + \omega k)^{k-1}}{k!} e^{-(\theta + \omega k)}$$

avec

avec une espérance :

$$E(N) = \frac{\theta}{1 - \omega}$$

une variance :

$$V(N) = \frac{\theta}{(1 - \omega)^3}$$

2. Une variable aléatoire M suit une loi Logarithmique de paramètre θ si $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $P(M = k) = \frac{\theta^k}{-k \ln(1-\theta)}$

3. Une variable aléatoire L suit une loi de Borel de paramètre ω si $\forall k \in \mathbb{N}^+$, $P(L = k) = \frac{(k\omega)^{k-1} e^{-k\omega}}{k!}$

et un indice de dispersion :

$$DI = \frac{V(N)}{E(N)} = \frac{1}{(1-\omega)^2}$$

Il s'agit donc d'une extension naturelle de la loi de Poisson. Si $\omega = 0$, l'indice de dispersion vaut 1, la variance égale la moyenne, et on se retrouve en présence d'une loi de Poisson simple de paramètre λ . Si $\omega > 0$, l'indice de dispersion devient supérieur à 1, et la distribution représente la sur-dispersion des données de fréquence. Lorsque ω tend vers 1, l'indice de dispersion devient infini.

9.3.4 Comparaison entre Binomiale Négative et Poisson Généralisée

La loi Binomiale Négative et la loi de Poisson Généralisée sont deux lois servant d'alternative à la loi de Poisson simple lorsque l'actuaire ajuste un modèle à des échantillons supposés sur-dispersés de nombre de sinistres. Il arrive que l'actuaire ne soit pas satisfait par la Binomiale Négative car la queue de distribution de cette loi peut ne pas être assez épaisse pour s'ajuster correctement aux données. Or, à indice de dispersion DI égal entre les deux lois, quelques développements mathématiques montrent que la Poisson Généralisée est non seulement plus asymétrique que la Binomiale Négative, mais aussi que sa queue de distribution est plus épaisse :

$$\begin{cases} \gamma_{PG}(N) > \gamma_{BN}(N) \\ \kappa_{PG}(N) > \kappa_{BN}(N) \end{cases}$$

Démonstration :

La vérification peut se faire en regardant comment se comportent, à indice de dispersion égal, les coefficients d'asymétrie $\gamma(N)$ (Skewness) et d'aplatissement $\kappa(N)$ (Kurtosis) des deux lois.

Par définition :

$$\begin{aligned} \gamma(N) &= \frac{\mu_3(N)}{\sigma(N)^3} \\ \kappa(N) &= \frac{\mu_4(N)}{\sigma(N)^4} \end{aligned}$$

avec $\mu_i(N)$, le moment centré d'ordre i de N et $\sigma(N)$, l'écart type de N .

Dans [4], R.S. AMBAGASPITIYA et N. BALAKRISHNAN donnent les formules des moments centrés jusqu'à l'ordre 4 de la loi de Poisson généralisée PG, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} \gamma_{PG}(N) = \frac{\mu_3(N)}{\sigma(N)^3} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{3}{1-\omega} - 2 \right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} (3\sqrt{DI} - 2) \\ \kappa_{PG}(N) = \frac{\mu_4(N)}{\sigma(N)^4} = 3 + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{15}{(1-\omega)^2} - \frac{20}{(1-\omega)} + 6 \right) = 3 + \frac{1}{\lambda} (15DI - 20\sqrt{DI} + 6) \end{cases}$$

Pour la Binomiale Négative BN, les formules des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement sont :

$$\begin{cases} \gamma_{BN}(N) = \frac{\mu_3(N)}{\sigma(N)^3} = \frac{2-p}{\sqrt{v(1-p)}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(2\sqrt{DI} - \frac{1}{\sqrt{DI}} \right) \\ \kappa_{BN}(N) = \frac{\mu_4(N)}{\sigma(N)^4} = \frac{6}{v} + \frac{p^2}{v(1-p)} = \frac{1}{\lambda} \left(6DI - 6 + \frac{1}{DI} \right) \end{cases}$$

Or $\forall DI \in]1, +\infty[$, on a les inégalités :

$$\begin{cases} 3\sqrt{DI} - 2 > 2\sqrt{DI} - \frac{1}{\sqrt{DI}} \\ 15DI - 20\sqrt{DI} + 6 > 6DI - 6 + \frac{1}{DI} \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire que lorsque les indices de dispersion des deux lois sont égaux :

$$\begin{cases} \gamma_{PG}(N) > \gamma_{BN}(N) \\ \kappa_{PG}(N) > \kappa_{BN}(N) \end{cases}$$

Les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, supérieurs pour la loi Poisson généralisée, en font un candidat idéal pour remplacer la loi Binomiale Négative lorsqu'il s'agit d'épaissir la queue de distribution du modèle de fréquence des sinistres.

Le graphique suivant permet d'illustrer les différences entre les densités de probabilité des lois Binomiale Négative et Poisson Généralisée ayant même espérance ($E(N) = 4$) et même indice de dispersion ($DI = 1.5$). La queue de distribution de la loi de Poisson Généralisée apparaît, comme prévu, plus épaisse que celle de la loi Binomiale Négative.

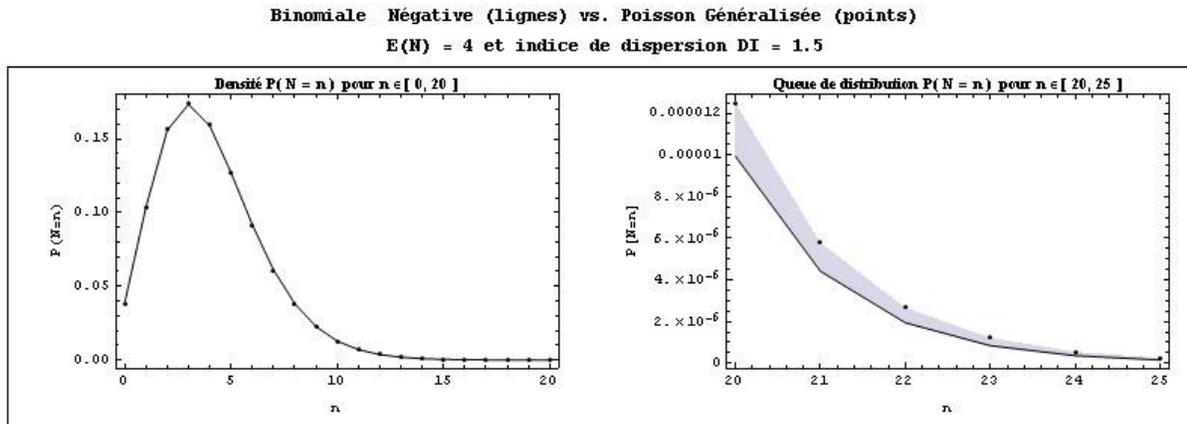


FIGURE 9.5 – Queue de distribution plus épaisse de la loi de Poisson Généralisée

9.4 Estimation des paramètres par Maximum de Vraisemblance

En statistique classique, l'estimation des paramètres des lois de fréquence se fait par maximisation de leur vraisemblance ou, par défaut, la méthode des moments. Ce qui suit constitue un rappel de l'estimation des paramètres des trois lois de probabilité considérées en utilisant la méthode de maximisation de la vraisemblance.

9.4.1 Estimation des paramètres pour la loi de Poisson Généralisée

Par la méthode des moments, les estimateurs des paramètres sont :

$$\begin{cases} E(N) = \lambda \implies \hat{\lambda} = \bar{k} \\ \frac{V(N)}{E(N)} = \frac{1}{(1-\omega)^2} \implies \hat{\omega} = 1 - \sqrt{\frac{\bar{k}}{s^2}} \end{cases}$$

Quant à la vraisemblance de la loi de Poisson généralisée, elle vaut :

$$\begin{cases} L(\lambda, \omega/\underline{k}) = \prod_{i=1}^n P_{\lambda, \omega}(N = k_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega)+\omega k_i)^{k_i-1}}{k_i!} e^{-(\lambda(1-\omega)+\omega k_i)} \\ Ln(L(\lambda, \omega/\underline{k})) = nLn(\lambda(1-\omega)) + \sum_{i=1}^n (k_i - 1)Ln(\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega) + \omega k_i) - n\lambda(1-\omega) - \omega n\bar{k} - \sum_{i=1}^n Ln(k_i!)) \end{cases}$$

Pour la maximisation de la vraisemblance de la Poisson généralisée, il est encore une fois recommandé d'utiliser l'algorithme itératif de Nelder-Mead.

9.4.2 Estimation des paramètres pour la loi de Poisson

Pour fixer les notations, l'échantillon du nombre de sinistres de taille n sera noté $\underline{k} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$.

La fonction de vraisemblance L s'écrit :

$$L(\lambda/\underline{k}) = \prod_{i=1}^n P_{\lambda}(N = k_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{k_i} e^{-\lambda}}{k_i!} \quad (9.2)$$

d'où (Ln désignant le logarithme népérien) :

$$Ln(L(\lambda/\underline{k})) = \sum_{i=1}^n Ln\left(\frac{\lambda^{k_i} e^{-\lambda}}{k_i!}\right) = n\underline{k}Ln(\lambda) - n\lambda - \sum_{i=1}^n Ln(k_i!) \quad (9.3)$$

La maximisation du logarithme népérien de la fonction de vraisemblance s'effectue en annulant la dérivée partielle par rapport à λ :

$$\frac{\partial Ln(L(\lambda/\underline{k}))}{\partial \lambda} = 0 \iff \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \bar{k} \quad (9.4)$$

$\hat{\lambda}$ est l'estimateur λ de pas le maximum de vraisemblance. La méthode de maximisation de la vraisemblance appliquée à la loi de Poisson a pour avantage d'aboutir à une formule fermée pour l'estimation du paramètre λ . Ce n'est pas le cas de la loi Binomiale Négative, ni de la loi de Poisson Généralisée.

9.4.3 Estimation des paramètres pour la loi Binomiale Négative

Par la méthode des moments, les estimateurs des paramètres sont obtenus immédiatement :

$$\begin{cases} E(N) = \lambda \implies \hat{\lambda} = \bar{k} \\ \frac{V(N)}{E(N)} = 1 + \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{p} \implies \hat{p} = \frac{\bar{k}}{s^2} \quad \text{avec } s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2 = \frac{n-1}{n} \bar{s}^2 \end{cases}$$

Cependant la méthode des moments n'est pas celle qui maximise la quantité d'information apportée par l'échantillon comme le fait la méthode de maximisation de la fonction de vraisemblance :

$$\begin{cases} L(\lambda, p/\underline{k}) = \prod_{i=1}^n P_{\lambda, p}(N = k_i) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i} \\ Ln(L(\lambda, p/\underline{k})) = \sum_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} + n v Ln(p) + n \bar{k} Ln(1-p) \end{cases}$$

Pour la Binomiale Négative, l'annulation des dérivées partielles du logarithme de la fonction de vraisemblance ne permet pas d'aboutir à des formules fermées pour l'estimation des paramètres λ et p . Il faut recourir à un algorithme itératif de recherche de maximum sur la surface que représente le maximum de vraisemblance, comme l'algorithme d'optimisation non-linéaire de Nelder-Mead, dont la description détaillée figure en annexe 2 de ce mémoire.

9.4.4 Résultats des estimations des paramètres sur les trois lois par le maximum de vraisemblance

Nous indiquons au travers du tableau suivant les paramètres obtenus pour les trois lois de fréquence proposées pour les quatre échantillon ainsi que le cas pratique :

	Poisson			Binomiale Négative			Poisson Généralisée		
	Rg	λ	$\ln(L(\lambda))$	Rg	p	$\ln(L(\lambda,p))$	Rg	w	$\ln(L(\lambda,w))$
Échantillon 1	(3)	4.00	-11.07	(1)	0.79	-11.01	(2)	0.11	-11.01
Échantillon 2	(3)	4.00	-33.88	(2)	0.72	-33.42	(1)	0.15	-33.42
Échantillon 3	(3)	4.00	-69.90	(1)	0.64	-68.53	(2)	0.19	-68.58
Échantillon 4	(3)	4.00	-224.94	(2)	0.70	-221.08	(1)	0.17	-220.99
Cas pratique	(3)	2.62	-18.72	(1)	0.62	-18.33	(2)	0.20	-18.37

FIGURE 9.6 – Estimateurs des paramètres et max du log-vraisemblance des lois de fréquences ajustées (Rg est le rang de classement)

Quelque soit l'échantillon, les maximums de vraisemblance des lois Binomiale Négative et Poisson Généralisée sont meilleurs que ceux de la loi de Poisson simple. Si on s'en tient aux seuls résultats concernant la logvraisemblance, on choisit effectivement la loi de fréquence dont la logvraisemblance est la plus faible donc la plus proche de l'échantillon. On déciderait donc de prendre la Binomiale Négative pour les échantillons 1 et 3, et le cas pratique tandis que l'on choisirait la Poisson Généralisée pour les échantillons 2 et 4. La tendance au choix d'une loi surdispersée plutôt que la loi de Poisson n'est pas surprenante étant donné que nous sommes en présence d'échantillons à forte dispersion égale à 1.5 pour les quatre premiers échantillons et un peu plus élevée encore et égale à 1.57 pour le cas pratique.

En revanche, ni la loi Binomiale Négative, ni la loi de Poisson Généralisée ne l'emportent sur tous les échantillons. Afin de mieux comprendre la tendance au choix de l'une plutôt que l'autre, on propose donc de s'intéresser aux coefficients d'asymétrie et kurtosis des échantillons (empiriques), et des lois ajustées Binomiale Négative et Poisson Généralisée :

	Empirique			Binomiale Négative		Poisson Généralisée	
	Rg	γ	κ	γ	κ	γ	κ
Échantillon 1	(5)	-0,11	1.56	0.68	3.59	0.68	3.60
Échantillon 2	(2)	0.78	3.65	0.76	3.77	0.77	3.83
Échantillon 3	(4)	0.27	2.49	0.85	4.00	0.86	4.07
Échantillon 4	(1)	1.13	4.21	0.77	3.81	0.80	3.89
Cas pratique	(3)	0.17	1.97	1.08	4.62	1.08	4.67

FIGURE 9.7 – Analyse de l’asymétrie γ et du kurtosis κ (Rg : rang de classement empiriques)

Les échantillons pour lesquels le maximum de vraisemblance privilégie le choix de la Poisson Généralisée sont surlignés en bleu tandis que lorsque le choix se porte sur la Binomiale Négative, le surlignage est en rouge. On remarque que suivant le rang de classement des coefficients d’asymétrie et des kurtosis sur les échantillons (indicateurs de l’épaisseur des queues de distribution empirique), ce sont bien les échantillons dont la distribution possède une queue plus épaisse, les échantillons 2 et 4 de rang 1 et 2 en bleu pour lesquels le choix s’oriente plus vers la Poisson Généralisée. Le chapitre précédent s’était en effet attaché à prouver que la Poisson Généralisée possède une queue de distribution plus épaisse que la Binomiale Négative à paramètre λ équivalent. A partir du rang 3 (celui du cas pratique pour lequel le coefficient d’asymétrie vaut 0.17 et le kurtosis vaut 1.97), jusqu’au rang 5 (celui de l’échantillon 1 de coefficient d’asymétrie -0.11 et de kurtosis 1.56), le choix s’oriente pour tous les échantillons vers la loi Binomiale Négative. On déduit donc une certaine cohérence des orientations du choix de la loi surdispersée au vu de l’analyse des coefficients d’asymétrie et kurtosis empiriques.

Par ailleurs on vérifie bien que pour chacun des échantillons, le coefficient d’asymétrie et le kurtosis des lois Binomiale Négative sont sensiblement plus faibles que ceux des lois Poisson Généralisée ajustées.

Le chapitre suivant traite des tests d’hypothèses qui permettraient d’affiner les arguments en la faveur de tel ou tel choix de loi de fréquence.

9.5 Les tests d’hypothèses comme outils d’aide au choix du modèle

Pour choisir entre la loi de Poisson simple et une loi alternative sur-dispersée comme la loi Binomiale Négative, et la loi de Poisson Généralisée, deux tests d’hypothèses sont analysés : le test de sur-dispersion basé sur la statistique liée à l’indice de dispersion de Fisher et le test du rapport de vraisemblance.

Les tests d’hypothèses permettent de prendre une décision quant au rejet ou non d’une hypothèse H_0 appelée hypothèse nulle, sur la base d’un échantillon de données observées. Ils utilisent une statistique T qui mesure l’écart entre les données et l’hypothèse nulle. Plus la valeur observée de T , notée t , est grande, plus il y a d’évidence que l’hypothèse H_0 ne tient pas. L’hypothèse alternative, notée H_1 , est la négation de H_0 et revient à dire que « H_0 est fausse ». La décision de rejeter H_0 correspond alors à l’acceptation de l’hypothèse alternative H_1 . La p-value, qui correspond à la probabilité que la statistique T soit supérieure à t sachant H_0 : $p = Pr(T \geq t/H_0)$,

permet de prendre une décision concernant le rejet ou non de l'hypothèse nulle.

Le niveau de signification du test étant fixé à un seuil α , la règle de décision consiste à rejeter H_0 si $p < \alpha$. Le calcul de p dépend de la définition de la distribution de la statistique T sous l'hypothèse H_0 . Le plus souvent il s'agit de la loi vers laquelle T converge lorsque l'échantillon de données est suffisamment grand. En présence de petits échantillons de données, cette approximation quant au choix de la distribution de T devient discutable.

9.5.1 Un Test de sur-dispersion : indice de dispersion de Fisher

L'hypothèse testée H_0 : « l'échantillon vient d'une loi de Poisson » est essentiellement équivalent à $E(N) = V(N) = \lambda$ contre $V(N) > E(N)$.

La statistique naturelle T pour estimée l'indice de dispersion $DI = \frac{V(N)}{E(N)}$ est :

$$T = \frac{\frac{(n-1)\bar{S}^2}{n}}{\bar{K}} = \frac{S^2}{\bar{K}}$$

avec \bar{K} et \bar{S}^2 les variables aléatoires des moyenne et variance empiriques de l'échantillon.

$\bar{k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ correspond à la réalisation de \bar{K} tandis que $\bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (k_i - \bar{k})^2$ correspond à celle de \bar{S}^2 .

La valeur observée de T est donc $t = \frac{\frac{n-1}{n}\bar{s}^2}{\bar{k}}$

Lorsque s^2 est sensiblement plus grand que \bar{k} , c'est-à-dire que t est plus grand que 1, il y a lieu de penser que l'échantillon est sur-dispersé.

Or sous l'hypothèse H_0 , la statistique nT , connue sous le nom d'indice de dispersion de FISHER, est asymptotiquement distribuée comme une loi du Khi 2 à $n - 1$ degrés de liberté (réf. [37] de HOEL (1943)).

Si la p-value $p = P(nT > nt/H_0) = P(\chi_{n-1,2} > nt)$ est inférieure au seuil fixé $\alpha = 5\%$, alors l'hypothèse de la loi de Poisson est rejetée au profit d'une loi alternative sur-dispersée.

En calculant les quatre premiers moments de nT , HOEL montre que l'approximation par une loi du Khi 2 est satisfaisante pour des échantillons aussi petits que $n = 5$, lorsque la moyenne de la loi de Poisson est supérieure à 5. Dans le cas contraire, l'approximation de la distribution de nT par sa limite asymptotique en loi, en particulier pour des petits échantillons, n'est pas réaliste. Il faut donc recourir à d'autres techniques pour choisir la distribution de nT .

La technique du bootstrap paramétrique proposée dans la suite permettrait de construire une distribution empirique de nT sur laquelle l'estimation de la p-value pour les petits échantillons est plus juste.

	nt	DKhi2	p-value
Échantillon 1	6	9.5	19.91%
Échantillon 2	21	23.7	10.16%
Échantillon 3	43.5	42.5	4.09%
Échantillon 4	148.5	123.2	0.01%
Cas pratique	12.6	15.5	12.76%

FIGURE 9.8 – Test de sur-dispersion au seuil

La distance du Khi 2, D , correspond à la valeur de nT pour laquelle $P(nT > D/H_0) = \alpha$.

Par conséquent si $nt > D$, $p = P(nT > t/H_0) < P(nT > D/H_0) = \alpha$ et l'hypothèse H_0 est rejetée.

Pour les grands échantillons (3 et 4), la p-value est inférieure au seuil de 5%, 4.09% pour l'un, et encore bien plus faible 0.01% pour l'échantillon le plus grand. Pour ces deux échantillons, la conséquence est que l'hypothèse d'une loi de Poisson est clairement rejetée. En revanche, pour les échantillons plus petits, y compris le cas pratique, l'hypothèse d'une loi de Poisson ne peut être rejetée au seuil de 5% (les p-value sont supérieures à ce seuil et les distance du Khi2 sont supérieures à la réalisation de la statistique nt). On remarque également que pour ces échantillons pour lesquels la Poisson n'est pas rejetée au vu du test de sur-dispersion, les p-value sont d'autant plus élevées que le nombre d'année d'expérience diminue, 10.16% pour l'échantillon 2 de 15 ans (horizon d'expérience moyen en réassurance), 12.76% pour le cas pratique basée sur 8 année d'expérience et enfin 19.91% pour l'échantillon 1 basé sur un horizon d'expérience court de 5 ans seulement.

L'horizon d'expérience de 15 ans en deçà duquel le choix d'une loi de Poisson est accepté alors même que les échantillons sont sur-dispersés correspond à un horizon moyen d'expérience en réassurance. Il existe par conséquent de nombreux cas de tarification où l'horizon d'expérience est plus petit et aussi de très nombreux autres cas où l'horizon est plus grand, ce qui vient conforter l'importance de l'anlyse du choix de la distribution de fréquence plutôt que la tendance a s'orienter par défaut vers l'un ou l'autre des choix, la Poisson ou la Binomiale Négative. A noter qu'aujourd'hui, la Poisson Généralisée est peu utilisée en pratique. Elle offre pourtant, nous l'avons vu, une réel opportunité de mieux modéliser des nombres de sinistres possédant des caractéristiques de sur-dispersion et dont les distributions empiriques ont des queues très épaisses.

Nous verrons que la distribution empirique de nT obtenue par bootstrap dans les chapitres suivant ne remettront pas en cause ces conclusions. Nous sommes en effet plutôt proche des conditions d'acceptabilité de l'approximation de la statistique par une loi du Khi2 (telles qu'étudié par HOEL) avec les 4 échantillons d'au moins 5 années et de fréquence moyenne égale à 4. Pour le cas pratique, le nombre d'année d'expérience est suffisant, en revanche la fréquence moyenne s'éloigne de la limite de 5 déduite par HOEL. Nous vérifierons au moment d'aborder la technique du bootstrap que les conclusions ne changent pas non plus pour le cas pratique, malgré les conditions limites d'applicabilité de la limite en loi de la statistique nT .

9.5.2 Le rapport de vraisemblance

Le test de rapport de vraisemblance permet de tester l'hypothèse d'une loi dégénérée contre une loi alternative non dégénérée. Le test se résume à tester l'hypothèse H_0 contre H_1 avec :

$$\begin{cases} H_0 : a = 0 \text{ (loi de Poisson)} \\ H_1 : a > 0 \text{ (loi sur - dispersée)} \end{cases}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a = \frac{1}{v} & \text{dans le cas de la Binomiale Négative} \\ a = \omega & \text{dans le cas de la Poisson Généralisée} \end{cases}$$

La statistique du rapport de vraisemblance s'écrit :

$$T = 2(\text{Ln}(L_1) - \text{Ln}(L_0))$$

$$\text{avec : } \begin{cases} L_0 & \text{la vraisemblance de la loi de Poisson} \\ L_1 & \text{la vraisemblance de la loi Binomiale Négative ou Poisson Généralisée} \end{cases}$$

La statistique T tend asymptotiquement en loi vers une loi du Khi 2 à un degré de liberté à condition que la dégénérescence ait lieu en fixant certains des paramètres de la loi non dégénérée.

C'est le cas pour la Poisson contre la Poisson Généralisée puisque le passage de cette dernière à la première se fait en fixant $\omega = 0$. Au seuil α , si la P-value $p = P(T > t/H_0) < \alpha$, le test est rejeté.

Pour la Poisson contre la Binomiale Négative, le passage n'est possible qu'en faisant tendre le paramètre v de cette dernière vers l'infini.

Dans [43], LAWLESS (1987) montre que dans ce cas, si le seuil est fixé à α , la statistique T tend en loi vers une loi dont la probabilité vaut $\frac{1}{2}$ en 0 et $\frac{1}{2}$ Khi 2 à un degré de liberté à droite de 0, et que la distance du Khi 2 se calcule au seuil 2α .

Si la P-value $p = P(T > t/H_0) < 2\alpha$, le test est rejeté. La Distance du Khi 2 D est égale à 2.70554 pour Poisson contre Binomiale Négative et 3.84146 pour Poisson contre Poisson Généralisée, du fait des limites asymptotiques de la statistique différentes entre ces deux cas. Si $t > D$, l'hypothèse H_0 est rejetée.

Application numérique :

	Poisson contre Binomiale Négative		Poisson contre Poisson Généralisée	
	t	p-value	t	p-value
Échantillon 1	0.11	36.78%	0.11	74.35%
Échantillon 2	0.92	16.91%	0.92	33.80%
Échantillon 3	2.74	4.88%	2.63	10.48%
Échantillon 4	7.71	0.27%	7.90	0.49%
Cas pratique	0.77	19.00%	0.71	40.05%

FIGURE 9.9 – Test du rapport de vraisemblance au seuil de 5%

Au seuil de 5%, lorsque l'alternative est la Binomiale Négative, l'hypothèse d'une loi de Poisson n'est pas rejetée pour les échantillons 1 et 2 et le cas pratique puisque les p-value dépassent deux fois le seuil (égales à 36.78%, 16.91% et 19.00% respectivement) et la distance du Khi 2 de 2.70554 est supérieure à la statistique (égales à 0.11, 0.92, et 0.77 respectivement). C'est également le cas lorsque l'alternative est une Poisson Généralisée (p-value égales à 74.35%, 33.80% et 40.05% respectivement toutes supérieures au seuil de 5%). En sus, l'échantillon 3 tombe alors dans le même cas d'un non rejet de l'hypothèse Poisson plutôt que Poisson Généralisée car la distance du Khi 2 de 3.84146 est supérieure à la réalisation de la statistique 2.63. L'hypothèse Poisson est pourtant tout juste rejetée lorsque l'alternative est une Binomiale Négative car la distance du Khi 2 est bien plus faible égale à 2.70554, ce qui passe en dessous de la réalisation de la statistique 2.74 dans ce cas.

Avec le test du rapport de vraisemblance, l'hypothèse de Poisson pourrait être retenue pour tous les échantillons sauf le 4 très théorique (horizon d'expérience de 100 ans improbable).

A indice de dispersion empirique supérieur à 1 et un peu près constant (égal à 1.5 pour les 4 échantillons et à 1.57 pour le cas pratique), le rejet de la Poisson apparaîtrait normal. Le test ne rejette pourtant pas cette hypothèse pour les échantillons 1, 2, 3 et le cas pratique.

Comme dans le test de sur-dispersion, la distribution empirique de la statistique T peut être obtenue par bootstrap empirique, ce qui permettrait de lever l'incertitude sur la limite en loi de la statistique T du test pour les petits échantillons notamment.

9.5.3 Conclusion sur les tests

Les tests de sur-dispersion et du rapport de vraisemblance appliqués aux échantillons étudiés et au cas pratique ne permettent pas de rejeter la loi de Poisson alors même que ce sont des échantillons sur-dispersés. Le choix de la loi de Poisson au seul prétexte qu'elle permet de représenter les événements rares et que les tests ne la rejettent pas n'est pas suffisant dans le cas des échantillons de nombre utilisés pour la tarification des traités de réassurance, tout particulièrement lorsque l'indice de dispersion empirique observé est sensiblement supérieure à 1. De plus, plus le nombre d'années d'expérience est petit, plus l'incertitude accentue le phénomène de non rejet de la loi de Poisson. Dans la plupart des cas, lorsque la sur-dispersion est observée empiriquement l'actuaire devrait se mettre sur la piste des lois sur-dispersées.

Pour le cas pratique, sur la base de l'analyse des logvraisemblance et des coefficients d'asymétrie et kurtosis, nous retiendrons pour la suite du mémoire la loi Binomiale Négative comme loi de fréquence des sinistres.

Nous avons montré comment orienter l'actuaire dans son choix de loi de fréquence. Le prochain chapitre vise à proposer aux actuaires des techniques de mesure de l'incertitude de ces paramètres, un point fondamental tant l'environnement de réassurance est incertain par nature et les données servant à la calibration sont peu nombreuses. Cette incertitude des paramètres et pourtant aujourd'hui très peu voire jamais regardée dans le cadre de la tarification traditionnelle des traités de réassurance non proportionnels.

10 Incertitude des paramètres de la fréquence

Dans cette section, nous proposons un exposé des techniques statistiques qui servent à évaluer l'incertitude des paramètres des lois de fréquence discrètes (Poisson simple, Binomiale Négative et Poisson Généralisée) ajustées aux échantillons de nombre de sinistres annuels. L'incertitude sur les paramètres de la distribution de fréquence provient de la difficulté à évaluer les vrais paramètres de la population d'où est extrait le petit échantillon étudié.

En statistique classique, l'estimation des paramètres se fait par la méthode du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments. Mais ces estimateurs sont eux aussi des variables aléatoires, par exemple si l'on prend deux échantillons finis d'une même distribution, les estimateurs par maximum de vraisemblance des paramètres vont être différents. Utiliser des paramètres fixes dans un modèle fréquence-sévérité peut conduire à une sous-évaluation du risque, car les estimateurs des paramètres sont calculés sur une quantité trop faible de données d'expérience.

Nous proposons la revue de trois approches permettant la prise en compte de l'incertitude des paramètres :

- Les méthodes statistiques « classiques » comme la limite asymptotique normale des estimateurs par le maximum de vraisemblance,
- Les méthodes empiriques comme le bootstrap paramétrique,
- l'approche bayésienne avec la méthode de simulation Monte Carlo par chaîne de Markov.

Le bootstrap et l'approche bayésienne ont suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années, et leur application est facilitée notamment grâce à l'évolution de la performance des ordinateurs et la disponibilité de logiciels professionnels de simulation.

10.1 La limite asymptotique du maximum de vraisemblance

Pour fixer les notations :

- $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p)$ les p paramètres de la loi du nombre de sinistres annuels,
- $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_p)$ les p variables aléatoires estimateurs des paramètres de la loi par le maximum de vraisemblance,
- $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$ la réalisation de $\hat{\Theta}$ obtenue par maximisation de la fonction de vraisemblance sur la base des échantillons étudiés.

Pour évaluer l'incertitude des paramètres, la théorie statistique classique stipule que lorsque la taille de l'échantillon de données tend vers l'infini, les estimateurs des paramètres de la loi

à p paramètres par le maximum de vraisemblance, notés $\hat{\Theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$, sont des variables aléatoires qui suivent approximativement une loi Normale multivariée avec la matrice de variance-covariance donnée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher :

$$\hat{\Theta}\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} N(\hat{\Theta}\sqrt{n}, I(\hat{\Theta})^{-1})$$

La matrice d'information de Fisher s'écrit :

$$I(\hat{\Theta}) = -\frac{1}{n} E\left(\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \text{Ln}(L(\Theta/\underline{k}))\right]_{i,j \in [1,p]^2}\right)$$

avec $L(\Theta/\underline{k})$ la fonction de vraisemblance.

Dans le cas de la loi de Poisson : $\hat{\lambda} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} N(\hat{\lambda}, \frac{\hat{\lambda}}{n})$

Cependant, la plupart du temps, l'échantillon n'est pas suffisamment grand pour considérer que l'approximation de la distribution des estimateurs des paramètres par une loi Normale multivariée est adéquate. Dans les conditions de modélisation auxquelles sont confrontés les actuaires en réassurance, dont les échantillons de nombre de sinistres sont réduits, l'utilisation des méthodes de bootstrap et bayésienne pour l'estimation de l'incertitude des paramètres est plus appropriée.

10.2 Le bootstrap paramétrique

Cette méthode consiste à approximer la distribution des estimateurs des paramètres en échantillonnant un grand nombre de fois à partir de la distribution ajustée sur l'échantillon de départ. Cette distribution ajustée correspond à l'hypothèse de départ sur la population. A chaque échantillonnage, l'ajustement donne lieu à de nouvelles valeurs pour les estimateurs des paramètres. La distribution empirique de ces estimateurs permet de rendre compte de la variation des estimations que l'actuaire aurait pu faire si il avait observé un très grand nombre de fois un échantillon de taille n issu de la distribution de la population. Au lieu de l'approximation en Normale multivariée de la théorie classique, une distribution empirique de $\hat{\Theta}$ est obtenue.

10.2.1 L'algorithme

L'algorithme consiste dans un premier temps à estimer, par le maximum de vraisemblance, les p paramètres de la loi de fréquence ajustée P_{Θ} , sur l'échantillon d'origine \underline{k} , ce qui permet d'obtenir $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_p)$. Le meilleur estimateur de la loi de la population P_{Θ} dont est issu l'échantillon \underline{k} de nombre étudié est $\hat{P}_{\Theta} = P_{\hat{\theta}}$.

A lieu ensuite un tirage aléatoire dans $P_{\hat{\theta}}$ d'un nombre B suffisamment grand d'échantillons de même taille n que l'échantillon d'origine. Pour chaque échantillon $j = 1, \dots, B$ simulé \underline{k}_j , le maximum de la fonction de vraisemblance $L(\Theta/\underline{k}_j)$ est calculé pour en déduire les réalisations des estimateurs des paramètres $\hat{\theta}_j = (\hat{\theta}_{j,1}, \hat{\theta}_{j,2}, \dots, \hat{\theta}_{j,p})$. Un échantillon de taille B d'estimateurs de paramètres $\{\hat{\theta}_j\}_{j=1, \dots, B}$ est ainsi obtenu par le bootstrap.

La distribution empirique des estimateurs des paramètres qui en découle sert à l'estimation de l'incertitude des paramètres. Lorsque l'échantillon est de taille n très grande, la distribution empirique de Θ obtenue par le bootstrap doit correspondre à la loi Normale multivariée prévue par la théorie classique.

10.2.2 Présentation des résultats

a) Cas Poissonnien

Prenons le cas de la loi de Poisson, $P_{\hat{\theta}} = P_{\hat{\lambda}=4}$, avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^+, P_{\hat{\lambda}}(N = k) = \frac{\hat{\lambda}^k e^{-\hat{\lambda}}}{k!}$$

c'est-à-dire la loi de Poisson simple ajustée sur l'échantillon d'origine.

B échantillons bootstrap de taille n sont générés avec $P_{\hat{\lambda}=4}$.

Pour chaque échantillon, l'estimateur $\hat{\lambda}$ est recalculé de sorte qu'un échantillon de B réalisations de l'estimateur est obtenus, $\{\hat{\lambda}\}_{j=1, \dots, B}$. La distribution empirique que constitue cet échantillon rend compte de la variation de l'estimateur autour de l'estimation de départ calculée sur l'échantillon d'origine, supposée égale à $\hat{\lambda} = 4$ pour les 4 échantillons.

Une fois simulés, on peut tracer sur un graphique les densités de probabilité du paramètre de Poisson des trois premiers échantillons, révélant une certaine symétrie dans l'incertitude autour de l'estimateur moyen égal à 4 :

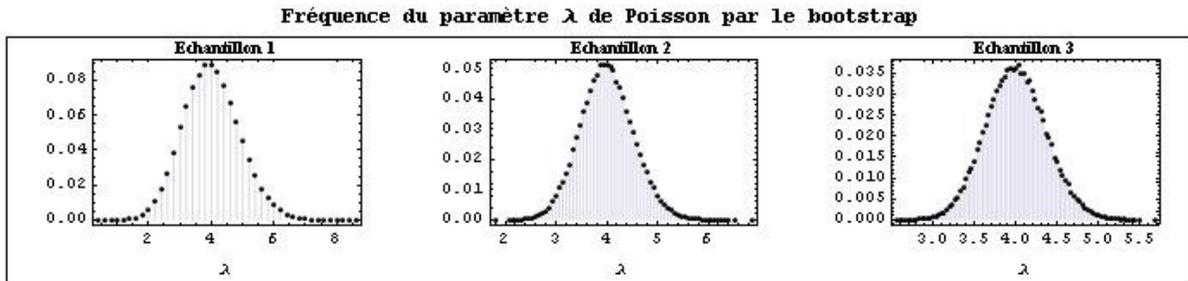


FIGURE 10.1 – Bootstrap du paramètre de la loi de Poisson simple sur les trois échantillons

Ce graphique montre à quel point la dispersion autour de la moyenne du paramètre de Poisson est grande, et d'autant plus grande que l'échantillon de nombre est de petite taille. L'incertitude mesurée par bootstrap est d'autant plus grande que l'échantillon est de petite taille.

On remarque par ailleurs que les moyennes des échantillons bootstrap ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeur car le tirage aléatoire sur la loi de fréquence qu'est la loi de Poisson simple aboutit à des échantillons de nombres entiers de sinistres. Ce phénomène s'estompe lorsque l'échantillon d'origine devient grand.

On peut aussi dresser le tableau d'analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistres annuel dans le cas du choix d'une loi de Poisson (pour rappel l'estimateur de la moyenne dans le cas Poissonnien correspond au paramètre de la loi) :

BOOTSTRAP	Analyse de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres (cas Poisson)		
	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
Espérance	4.0	4.0	4.0
Ecart Type	0.9	0.5	0.4
CoV	22.4%	12.9%	9.1%

Distribution de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres (cas Poisson)			
Probabilité cumulée	Valeurs du paramètre λ de Poisson		
	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
0	0.8	2.1	2.6
5%	2.6	3.2	3.4
10%	2.8	3.3	3.5
15%	3.0	3.5	3.6
20%	3.2	3.5	3.7
25%	3.4	3.7	3.8
30%	3.6	3.7	3.8
35%	3.6	3.8	3.9
40%	3.8	3.9	3.9
45%	3.8	3.9	4.0
50%	4.0	4.0	4.0
55%	4.0	4.1	4.0
60%	4.2	4.1	4.1
65%	4.4	4.2	4.1
70%	4.4	4.3	4.2
75%	4.6	4.3	4.2
80%	4.8	4.4	4.3
85%	5.0	4.5	4.4
90%	5.2	4.7	4.5
95%	5.6	4.9	4.6

FIGURE 10.2 – Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par bootstrap, cas Poisson (échantillons 1, 2 et 3)

Il est important de rappeler que dans le cas de la loi de Poisson, l'erreur commise sur le paramètre est exactement l'erreur commise sur l'espérance et la variance du nombre de sinistres. Ceci vient du fait que les estimateurs de ces deux premiers moments sont égaux : $E(\hat{N})^{Boot} = E(N/\lambda, p) = V(\hat{N})^{Boot} = V(N/\lambda, p) = \lambda$

Les estimateurs des espérances de l'estimateur sont égaux à 4 pour les trois échantillons. On mesure des coefficients de variation CoV du paramètre égaux à 22.4%, 12.9% et 9.1% pour les échantillons 1, 2, et 3 respectivement, ce qui indique de moins en moins d'incertitude sur l'estimation de la moyenne de la fréquence à mesure que l'horizon d'expérience grandit (5 ans, 15 ans, 30 ans pour les échantillons 1, 2, et 3 respectivement). Ce sont au demeurant des coefficients de variation qui font état d'une incertitude non négligeable sur l'estimation de la fréquence des sinistres. Ce tableau montre en effet qu'il y a 30% de chance pour l'échantillon 1 que l'on se soit trompé d'au moins 1 dans l'estimation du nombre de sinistre annuel moyen égal à 4. En effet il y a 15% de probabilité que le paramètre de Poisson soit en réalité inférieur à 3, et 15%

qu'il soit en réalité supérieur à 5. Pour l'échantillon 2, il y a 30% de probabilité de s'être trompé d'au moins 0.5, et pour l'échantillon 3 de 0.4 dans l'estimation du paramètre. Nous avons aussi surligné en rouge le quantile à 95% de ces estimateurs. Ils sont égaux à 5.6, 4.9 et 4.6 pour les échantillons 1, 2 et 3 respectivement. Ce quantile correspondrait à la valeur que nous choisirions si nous n'acceptons que 5% de probabilité de sous-estimer la moyenne du nombre de sinistres annuel. En d'autres termes, la prise en compte de l'incertitude du paramètre de la loi de Poisson pourrait mener à prendre une sécurité de 1.6, 0.9 et 0.6 par rapport à la moyenne de la fréquence égale à 4. Cela confirme par l'exemple le caractère non négligeable de l'incertitude du paramètre de fréquence de Poisson en particulier pour les échantillons de petites tailles. L'impact sur les résultats de prime pure des tranches à côté serait significatif. Nous verrons dans la suite de ce mémoire les impacts sur la prime pure du cas pratique.

Sur l'échantillon 4 de taille très grande, la distribution empirique de $\hat{\lambda}$ et la distribution continue normale obtenue par la théorie classique sont, comme prévu, assez proches :

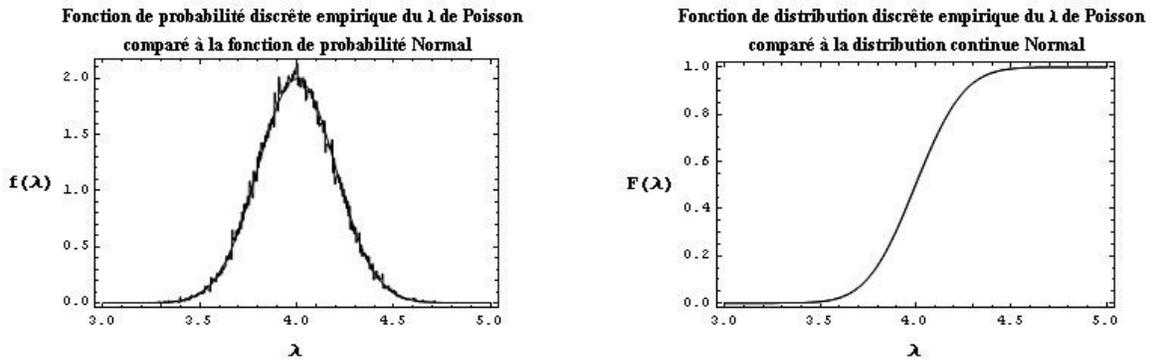


FIGURE 10.3 – Comparaison de la théorie classique et du bootstrap sur l'incertitude du paramètre de la Poisson simple (Echantillon 4 très grand)

Par ailleurs sur les $B = 100\,000$ échantillons simulés, la statistique du test de sur-dispersion peut être calculée :

$$t_j = \frac{\frac{(n-1)s_j^2}{n}}{k_j}$$

ce qui permet :

- d'obtenir la distribution empirique de la statistique T_{emp} ,
- de calculer la P-value empirique $p_{emp} = P(nT_{emp} > nt/H_0)$, la distance empirique au seuil D_{emp} telle que $P(nT_{emp} > D_{emp}/H_0) = \alpha$,
- de revoir les conclusions obtenues avec ce test en utilisant la limite en loi de la statistique :

	nt	DKhi2	Demp
Échantillon 1	6	9.5	9.2
Échantillon 2	21	23.7	23.6
Échantillon 3	43.5	42.5	42.4
Échantillon 4	148.5	123.2	123.3
Cas pratique	12.6	15.5	15.2

FIGURE 10.4 – Test de sur-dispersion au seuil (100 000 simulations bootstrap contre Khi 2 théorique)

Les distances empiriques au seuil obtenue par le bootstrap et reportées dans le tableau ci-dessus sont très proches de celle du Khi 2, y compris pour les petits échantillons. Ceci tend à montrer que l’hypothèse de limite en loi de la statistique du test de sur-dispersion est acceptable pour les échantillons de nombres de sinistres manipulés par les actuaires de réassurance.

Par conséquent, les conclusions sur le test ne sont pas changées.

b) Cas Binomiale Négative et Poisson Généralisée

Binomiale Négative

Dans le cas de la loi Binomiale Négative, $P_{\hat{\theta}} = P_{\hat{\lambda}, \hat{p}}$ est la densité de la loi ajustée sur les estimateurs des paramètres obtenus par maximum de vraisemblance, avec $\forall k \in \mathbb{N}^+$:

$$P_{\hat{\lambda}, \hat{p}}(N = k) = \frac{\Gamma(k + \frac{\hat{\lambda}\hat{p}}{1-\hat{p}})}{\Gamma(k+1)\Gamma(\frac{\hat{\lambda}\hat{p}}{1-\hat{p}})} (\hat{p})^{\frac{\hat{\lambda}\hat{p}}{1-\hat{p}}} (1-\hat{p})^k$$

$B = 100\,000$ échantillons bootstrap de taille $n = 5$, $n = 15$, $n = 30$ sont générés avec $P_{\hat{\lambda}=4, \hat{p}=0.79}$, $P_{\hat{\lambda}=4, \hat{p}=0.72}$, $P_{\hat{\lambda}=4, \hat{p}=0.64}$ pour les échantillons 1, 2 et 3 respectivement. Pour chaque échantillon généré, les estimateurs des paramètres $\hat{\lambda}$ et \hat{p} sont recalculés de sorte qu’un échantillon de B réalisations des paramètres, noté $\{\hat{\lambda}_j^{Boot}, \hat{p}_j^{Boot}\}_{j=1, \dots, B}$, est obtenu. Dans le cas pratique, afin de déterminer l’incertitude des paramètres $\{\hat{\lambda}, \hat{p}\}$ de la loi Binomiale Négative choisie comme loi de fréquence au chapitre précédent, on applique un bootstrap paramétrique en choisissant un nombre de simulation égal à $B = 100\,000$ également. Les B échantillons bootstrap de taille $n = 9$ sont générés avec $P_{\hat{\lambda}=2.61, \hat{p}=0.62}$.

L’estimateur de l’espérance de la fréquence $E(\hat{N})^{Boot} = E(N/\lambda, p) = \lambda$ est une variable aléatoire.

Son espérance vaut $E_{\lambda, p}(E(\hat{N})^{Boot}) = E_{\lambda, p}(E(N/\lambda, p)) = E_{\lambda, p}(\lambda)$.

Sa variance vaut $V_{\lambda, p}(E(\hat{N})^{Boot}) = V_{\lambda, p}(E(N/\lambda, p)) = V_{\lambda, p}(\lambda)$.

Son coefficient de variation vaut $CoV = \sqrt{V_{\lambda, p}(\lambda)}/E_{\lambda, p}(\lambda)$.

Le tableau suivant montre l’analyse de l’estimateur de la moyenne du nombre de sinistres annuel dans le cas du choix d’une loi Binomiale Négative, pour les échantillons 1, 2 et 3 ainsi que le cas pratique :

BOOTSTRAP	Analyse de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres (cas Binomiale Négative)			
	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3	Cas pratique
Espérance	4.1	4.0	4.0	2.67
Ecart Type	1.1	0.6	0.4	0.68
CoV	26.9%	15.7%	11.1%	25.4%

Distribution de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres (cas Binomiale Négative)				
Probabilité cumulée	Valeurs du paramètre λ de la Binomiale Négative			
	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3	Cas pratique
0	0.6	1.7	2.2	0.44
5%	2.4	3.0	3.3	1.67
10%	2.8	3.3	3.4	1.78
15%	3.0	3.4	3.6	2.00
20%	3.2	3.5	3.6	2.11
25%	3.4	3.6	3.7	2.22
30%	3.4	3.7	3.8	2.33
35%	3.6	3.7	3.8	2.33
40%	3.8	3.9	3.9	2.44
45%	3.8	3.9	3.9	2.56
50%	4.0	4.0	4.0	2.67
55%	4.2	4.1	4.1	2.67
60%	4.2	4.2	4.1	2.78
65%	4.4	4.3	4.2	2.89
70%	4.6	4.3	4.2	3.00
75%	4.8	4.5	4.3	3.11
80%	5.0	4.5	4.4	3.22
85%	5.2	4.7	4.5	3.33
90%	5.6	4.9	4.6	3.56
95%	6.0	5.1	4.8	3.89

FIGURE 10.5 – Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par bootstrap, cas Binomiale Négative (échantillons 1, 2 et 3 et cas pratique)

Les coefficients de variation CoV des estimateurs de la moyenne du nombre de sinistres annuel dans le cas Binomiale Négative sont égaux à 26.9%, 15.7% et 11.1% pour les échantillons 1, 2, et 3 respectivement. Ils sont donc de 2% à un peu moins de 5% plus élevés que dans le cas du choix de la loi de Poisson. Ceci tient au fait que la loi Binomiale Négative est définie par deux paramètres au lieu d'un seul pour la loi de Poisson. L'incertitude à deux dimensions λ et p en Binomiale Négative (comparée à l'incertitude à une seule dimension en Poisson) accentue la dispersion sur l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistres. Par ailleurs, les quantiles à 95% sont égaux à 6.0, 5.1 et 4.8 pour les échantillons 1, 2 et 3 respectivement, soit supérieurs d'environ 0.2 à 0.4 par rapport au cas Poissonien en terme de sécurité par rapport à la moyenne égale à 4.

Le cas pratique montre un coefficient de variation de 25.4% avec un quantile à 95% égal à 3.89 soit un écart de 1.22 (ou +45%) par rapport à la moyenne de 2.67. Nous verrons par la suite l'impact que cela représente sur les primes pures des tranches tarifées.

A l'instar du cas Poissonien, on peut tracer sur un graphique le résultat du bootstrap des deux paramètres pour les échantillons 1, 2 et 3 et le cas pratique :

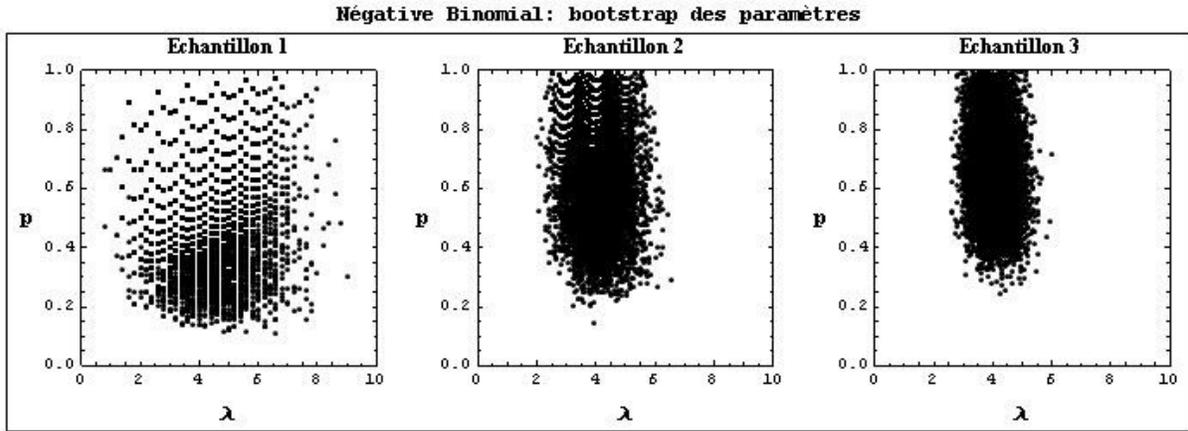


FIGURE 10.6 – Bootstrap des paramètres de la Binomiale Négative sur les trois échantillons

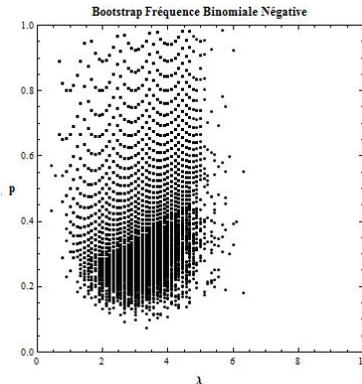


FIGURE 10.7 – Incertitude des paramètres par le bootstrap paramétrique sur le cas pratique

On peut ainsi se rendre compte visuellement de la dispersion des paramètres qui est d'autant plus grande que l'échantillon est petit et l'incertitude sur le paramétrage de la fréquence est grande.

Poisson Généralisée Dans le cas de la loi de Poisson Généralisée, $P_{\hat{\theta}} = P_{\hat{\lambda}, \hat{\omega}}$, avec $\forall k \in \mathbb{N}^+$:

$$P_{\hat{\lambda}, \hat{\omega}}(N = k) = \frac{\hat{\lambda}(1 - \hat{\omega})(\hat{\lambda}(1 - \hat{\omega}) + \hat{\omega}k)^{k-1}}{k!} e^{-(\hat{\lambda}(1 - \hat{\omega}) + \hat{\omega}k)}$$

$B = 100\,000$ échantillons bootstrap de taille $n = 5$, $n = 15$, $n = 30$ sont générés avec $P_{\hat{\lambda}=4, \hat{\omega}=0.79}$, $P_{\hat{\lambda}=4, \hat{\omega}=0.72}$, $P_{\hat{\lambda}=4, \hat{\omega}=0.64}$ pour les échantillons 1, 2 et 3 respectivement. Pour chaque échantillon généré, les estimateurs des paramètres $\hat{\lambda}$ et $\hat{\omega}$ sont recalculés de sorte qu'un échantillon de B réalisations des paramètres, $\{\hat{\lambda}_j^{Boot}, \hat{\omega}_j^{Boot}\}_{j=1, \dots, B}$.

L'estimateur de l'espérance de la fréquence $E(\hat{N})^{Boot} = E(N/\lambda, w) = \lambda$ est une variable aléatoire.

Son espérance vaut $E_{\lambda,w}(E(\hat{N})^{Boot}) = E_{\lambda,w}(E(N/\lambda, w)) = E_{\lambda,w}(\lambda)$.

Sa variance vaut $V_{\lambda,w}(E(\hat{N})^{Boot}) = V_{\lambda,w}(E(N/\lambda, w)) = V_{\lambda,w}(\lambda)$.

Son coefficient de variation vaut $CoV = \sqrt{V_{\lambda,w}(\lambda)}/E_{\lambda,w}(\lambda)$.

Le tableau suivant montre l'analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistres annuel dans le cas du choix d'une loi Poisson Généralisée, pour les échantillons 1, 2 et 3 :

BOOTSTRAP	Analyse de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres (cas Poisson Généralisée)		
	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
Espérance	4.1	4.0	4.0
Ecart Type	1.1	0.6	0.4
CoV	27.0%	15.7%	11.20%

Distribution de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres (cas Poisson Généralisée)			
Probabilité cumulée	Valeurs du paramètre λ de la Poisson Généralisée		
	Echantillon 1	Echantillon 2	Echantillon 3
0	0.6	1.7	2.4
5%	2.4	3.0	3.3
10%	2.8	3.2	3.4
15%	3.0	3.4	3.5
20%	3.2	3.5	3.6
25%	3.2	3.6	3.7
30%	3.4	3.7	3.8
35%	3.6	3.7	3.8
40%	3.8	3.9	3.9
45%	3.8	3.9	3.9
50%	4.0	4.0	4.0
55%	4.2	4.1	4.1
60%	4.2	4.2	4.1
65%	4.4	4.3	4.2
70%	4.6	4.3	4.2
75%	4.8	4.5	4.3
80%	5.0	4.5	4.4
85%	5.2	4.7	4.5
90%	5.6	4.9	4.6
95%	6.0	5.1	4.8

FIGURE 10.8 – Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par bootstrap, cas Poisson Généralisée (échantillons 1, 2 et 3)

Les coefficients de variation CoV des estimateurs de la moyenne du nombre de sinistres annuel dans le cas Poisson Généralisée sont égaux à 27.0%, 15.7% et 11.2% pour les échantillons 1, 2, et 3 respectivement. Ces indicateurs de dispersion pour la Poisson Généralisée sont quasiment

identiques à ceux de la Binomiale Négative. On remarque également que les distributions de l'estimateur de la moyenne de la fréquence (le paramètre λ) dans le cas de la Poisson Généralisée sont quasiment identiques à ces mêmes distributions dans le cas de la Binomiale Négative. En particulier les quantiles à 95% (sécurité potentiellement prise par rapport à la moyenne) sont quasiment identiques. Les lois Binomiale Négative et Poisson Généralisée sont en effet des lois de fréquence à deux paramètres, donc surdéfinies par rapport à la loi de Poisson à un seul paramètre, ce qui renforce l'incertitude autour de la détermination du paramètre λ .

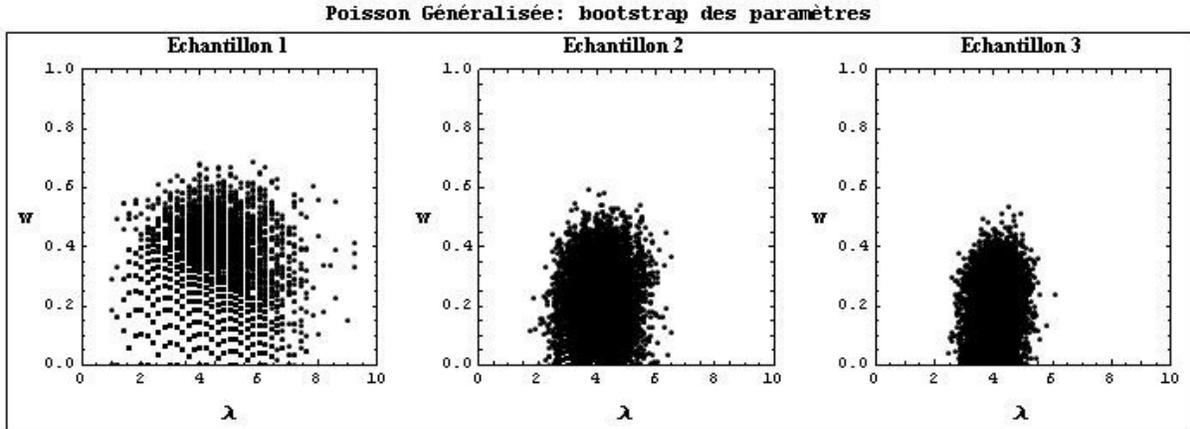


FIGURE 10.9 – Bootstrap des paramètres de la Poisson Généralisée sur les trois échantillons de taille de plus en plus élevée

Comme pour la Poisson, le phénomène lié aux échantillons de nombres entiers simulés s'estompe lorsque l'échantillon devient grand. Ces graphiques rendent aussi compte de la diminution de l'incertitude sur les paramètres lorsque la taille de l'échantillon augmente.

Nous indiquons ci-après le tableau récapitulatif des résultats d'analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre impactant la prime pure dans le cas Binomiale Négative et Poisson Généralisée pour les trois échantillons et le cas pratique :

BOOTSTRAP	Analyse de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres- comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
Espérance	4.1	4.1	4.0	4.0	4.0	4.0	2.67
Ecart Type	1.1	1.1	0.6	0.6	0.4	0.4	0.68
CoV	27.0%	27.0%	15.7%	15.7%	11.1%	11.2%	25.4%

	Distribution de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres - comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
0	0.6	0.6	1.7	1.7	2.2	2.4	0.4
5%	2.4	2.4	3.0	3.0	3.3	3.3	1.7
10%	2.8	2.8	3.3	3.2	3.4	3.4	1.8
15%	3.0	3.0	3.4	3.4	3.6	3.5	2.0
20%	3.2	3.2	3.5	3.5	3.6	3.6	2.1
25%	3.4	3.2	3.6	3.6	3.7	3.7	2.2
30%	3.4	3.4	3.7	3.7	3.8	3.8	2.3
35%	3.6	3.6	3.7	3.7	3.8	3.8	2.3
40%	3.8	3.8	3.9	3.9	3.9	3.9	2.4
45%	3.8	3.8	3.9	3.9	3.9	3.9	2.6
50%	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	4.0	2.7
55%	4.2	4.2	4.1	4.1	4.1	4.1	2.7
60%	4.2	4.2	4.2	4.2	4.1	4.1	2.8
65%	4.4	4.4	4.3	4.3	4.2	4.2	2.9
70%	4.6	4.6	4.3	4.3	4.2	4.2	3.0
75%	4.8	4.8	4.5	4.5	4.3	4.3	3.1
80%	5.0	5.0	4.5	4.5	4.4	4.4	3.2
85%	5.2	5.2	4.7	4.7	4.5	4.5	3.3
90%	5.6	5.6	4.9	4.9	4.6	4.6	3.6
95%	6.0	6.0	5.1	5.1	4.8	4.8	3.9

FIGURE 10.10 – Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par bootstrap - Comparaison Binomiale Négative et Poisson Généralisée (échantillons 1, 2 et 3 et cas pratique)

Dans le cas de la prise en compte de l'incertitude des paramètres de fréquence, une position conservatrice consisterait à choisir le quantile à 95% plutôt que la moyenne de l'estimateur, ce qui représenterait une augmentation de 50% ($= (6 / 4) - 1$), 27.5% ($= (5.1 / 4) - 1$) et 20% ($= (4.8 / 4) - 1$) de la fréquence moyenne pour les échantillons 1, 2 et 3 et de 45.6% ($= (3.89 / 2.67) - 1$) pour le cas pratique. Nous rappelons par ailleurs que le choix de la Binomiale Négative ou de la Poisson Généralisée ne change quasiment pas le résultat concernant l'impact de l'incertitude sur la moyenne de la fréquence. Cela veut dire que l'impact sur la prime pure serait le même peu importe que l'on choisisse l'une ou l'autre des lois.

On peut aussi s'intéresser à l'estimateur de la variance de la fréquence qui comme l'estimateur de la moyenne est une variable aléatoire, notamment pour prendre la mesure de l'impact potentiel

non plus sur la prime pure mais sur le capital alloué à chaque tranche. On peut comparer les distributions de ces variables aléatoires pour la loi Binomiale Négative et Poisson Généralisée suivant les trois échantillons. L'estimateur de la variance de la fréquence vaut $V(\hat{N})^{Boot} = V(N/\lambda, p) = \frac{\lambda}{p}$ pour la Binomiale Négative et $V(\hat{N})^{Boot} = V(N/\lambda, w) = \frac{\lambda}{(1-w)^2}$ pour la Poisson Généralisée.

Le tableau suivant montre l'analyse de l'estimateur de la variance du nombre de sinistres annuel dans le cas du choix d'une loi Binomiale Négative ou d'une Poisson Généralisée, pour les échantillons 1, 2 et 3 ainsi que le cas pratique :

BOOTSTRAP	Analyse de l'estimateur de la VARIANCE du nombre de sinistres- comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
Espérance	8.5	8.4	6.8	6.7	6.3	6.3	5
Ecart Type	5.0	5.1	2.5	2.6	1.8	1.8	2.6
CoV	59.3%	61.2%	37.6%	38.0%	28.3%	28.5%	52.3%

	Distribution de l'estimateur de la VARIANCE du nombre de sinistres - comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
0	0.8	0.8	1.9	1.8	2.5	2.5	0.5
5%	3.5	3.2	3.8	3.7	4.0	4.0	2.3
10%	4.0	3.8	4.2	4.1	4.3	4.3	2.5
15%	4.5	4.3	4.5	4.4	4.5	4.6	2.8
20%	4.8	4.7	4.7	4.7	4.8	4.8	3.0
25%	5.2	5.2	5.0	4.9	5.0	5.0	3.3
30%	5.5	5.3	5.2	5.1	5.2	5.2	3.4
35%	5.8	5.7	5.4	5.4	5.4	5.4	3.7
40%	6.3	6.2	5.7	5.6	5.6	5.6	3.9
45%	6.7	6.7	5.9	5.9	5.7	5.8	4.1
50%	7.2	6.8	6.2	6.1	6.0	6.0	4.4
55%	7.7	7.3	6.5	6.4	6.2	6.2	4.6
60%	8.2	8.0	6.8	6.7	6.4	6.4	4.9
65%	8.7	8.7	7.1	7.1	6.6	6.7	5.3
70%	9.5	9.3	7.5	7.5	6.9	6.9	5.6
75%	10.3	10.2	8.0	7.9	7.2	7.3	6.0
80%	11.3	11.3	8.5	8.5	7.6	7.6	6.5
85%	12.7	12.7	9.1	9.1	8.0	8.1	7.3
90%	14.7	14.5	10.0	10.1	8.6	8.7	8.3
95%	18.3	18.2	11.6	11.6	9.6	9.7	10.0

FIGURE 10.11 – Analyse de l'estimateur de la variance du nombre de sinistre par bootstrap - Comparaison Binomiale Négative et Poisson Généralisée (échantillons 1, 2 et 3 et cas pratique)

Nous remarquons qu'à l'instar du résultat d'analyse de l'estimateur de la moyenne, les distributions des estimateurs de la variance de la fréquence sont aussi quasi identiques entre la Binomiale Négative et la Poisson Généralisée. Ceci laisse à penser que la prise en compte de l'incertitude des paramètres de fréquence par le bootstrap sur la prime pure des tranches serait le même non seulement sur la prime pure comme évoqué plus haut mais aussi sur le capital alloué et donc la prime chargée que l'on choisisse la loi Binomiale Négative ou la loi Poisson Généralisée comme loi de fréquence.

10.3 L'approche bayésienne

10.3.1 La distribution a posteriori des paramètres

Pour fixer les notations, le vecteur de paramètres Θ est une variable aléatoire qui suit une loi de densité $f(\Theta)$ dite « a priori », c'est-à-dire avant toute observation de données. En statistique bayésienne, l'observation d'un échantillon de données \underline{k} permet d'actualiser l'information sur Θ et d'en déduire une loi de densité conditionnelle $f(\Theta/\underline{k})$ dite « a posteriori » des paramètres. Cela passe par l'application du théorème de Bayes, qui permet d'inverser les probabilités. Dans sa forme continue multivariée il s'écrit :

$$f(\Theta/\underline{k}) = \frac{f(\underline{k}, \Theta)f(\Theta)}{f(\underline{k})} = \frac{f(\underline{k}/\Theta)f(\Theta)}{\int f(\underline{k}/\Theta)d\Theta}$$

La loi a priori de densité $f(\Theta)$ est fixée par l'actuaire, nous reviendrons sur ce point par la suite.

La loi de \underline{k}/Θ est de densité $f(\underline{k}/\Theta) = \prod_{i=1}^n f(k_i/\Theta)$.

Ce produit des probabilités des éléments de l'échantillon sachant Θ correspond exactement à la définition de la fonction de vraisemblance de l'échantillon : $f(\underline{k}/\Theta) = L(\Theta/\underline{k})$.

Par ailleurs le terme $\frac{1}{f(\underline{k})}$ est une constante par rapport au vecteur de paramètres Θ .

Par conséquent :

$$f(\Theta/\underline{k}) = \frac{L(\Theta/\underline{k})f(\Theta)}{f(\underline{k})}$$

$f(\Theta/\underline{k}) = \text{constante} \times \text{fonction de vraisemblance} \times \text{distribution a priori des paramètres}$

Ce qui peut se réécrire de la manière suivante :

$$f(\Theta/\underline{k}) \propto L(\Theta/\underline{k})f(\Theta)$$

avec \propto le symbole qui équivaut à "proportionnel à".

Dans les paragraphes suivants, nous montrons comment simuler un échantillon de Θ/\underline{k} à partir de la fonction de vraisemblance et de la définition d'une distribution a priori. Cet échantillon, au même titre que celui obtenu par la méthode du bootstrap paramétrique, permettra de construire une distribution empirique des paramètres, rendant compte de leur incertitude.

10.3.2 La distribution a posteriori des paramètres

Le principal désavantage de cette méthode est la nécessité du choix d'une distribution a priori des paramètres. Il est donc recommandé de mener une étude d'impact de stabilité de la distribution a posteriori en fonction du choix de la distribution a priori.

Lorsque les données sont suffisamment informatives (horizon d'expérience suffisamment grand), une mauvaise distribution a priori n'influencera pas grandement la distribution a posteriori, car l'information apportée par l'échantillon via la fonction de vraisemblance $L(\Theta/\underline{k})$ sera nettement plus élevée que l'information a priori, traduite sous la forme de la densité $f(\Theta)$. Il s'agit d'une propriété asymptotique de l'analyse bayésienne.

Le choix d'une distribution a priori conjuguée est aussi critiqué : une distribution a priori des paramètres est dite conjuguée lorsqu'étant donné une fonction de vraisemblance, la distribution a posteriori appartient à la même famille de distributions. Par exemple, une fonction Gamma a priori, associée à la fonction de vraisemblance de la loi de Poisson, conduit à une fonction Gamma a posteriori. La plupart du temps, l'actuaire ne possède pas de connaissance a priori sur la forme de la distribution a priori des paramètres. Il se peut qu'il sache en revanche dans quel intervalle de valeurs ces paramètres se trouvent. Lorsque l'actuaire pense que le paramètre se situe sur un intervalle $[a, b]$ sans pouvoir en dire plus, la distributions a priori à utiliser est la distribution dite plate, diffuse ou non informative. Dans ce cas la distribution a priori est une loi Uniforme : $f(\theta) = \frac{1}{b-a}$ avec $a \leq \theta \leq b$

La loi Uniforme est utilisé lorsqu'il n'y a pas de raison de favoriser une valeur spécifique de paramètre dans l'intervalle $[a, b]$ des valeurs possibles. Lorsque la valeur du paramètre peut s'étendre sur un intervalle infini, alors le choix de cette distribution diffuse uniforme devient impropre car son intégrale ne vaut plus 1.

Sous l'hypothèse d'une distribution a priori $f(\Theta)$ Uniforme, la distribution a posteriori devient proportionnelle à la fonction de vraisemblance : $f(\Theta/\underline{k}) \propto L(\Theta/\underline{k})$

10.3.3 Le résultat Poissonien

a) Distribution a priori Uniforme :

Dans le cas du choix d'une distribution a priori Uniforme pour le paramètre de fréquence moyenne λ de la loi de Poisson, la distribution a posteriori est directement déduite :

$$f(\lambda/\underline{k}) \propto L(\lambda/\underline{k}) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{k_i} e^{-\lambda}}{k_i!} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n k_i!} e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}$$

soit

$$f(\lambda/\underline{k}) \propto e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n k_i}$$

Pour rappel, la densité de la loi Gamma de paramètres r et s s'écrit :

$$f(x) = \frac{x^{r-1} e^{-sx}}{(1/s)^r \Gamma(r)}$$

Sa moyenne est égale à r/s et sa variance à r/s^2 .

Par analogie, on en déduit que $f(\lambda/\underline{k})$ est la densité d'une loi gamma de paramètre $\sum_{i=1}^n k_i + 1$ et n et que :

$$\lambda/\underline{k} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^n k_i + 1, n\right)$$

et

$$N/(\lambda/\underline{k}) \sim \text{NB}\left(\sum_{i=1}^n k_i + 1, \frac{n}{n+1}\right)$$

avec $E(N/(\lambda/\underline{k})) = \bar{k} + \frac{1}{n}$ et $V(N/(\lambda/\underline{k})) = (1 + \frac{1}{n})E(N/(\lambda/\underline{k}))$

Par conséquent, par l'approche bayésienne, en prenant une distribution a priori non informative Uniforme pour le paramètre de la Poisson, l'incertitude sur le paramètre se traduit par le passage d'une loi de Poisson à une loi Binomiale Négative, loi sur-dispersée, dont l'indice de dispersion s'écrit :

$$\frac{V(N/(\lambda/\underline{k}))}{E(N/(\lambda/\underline{k}))} = (1 + \frac{1}{n})$$

Plus l'échantillon est grand, plus l'incertitude sur le paramètre diminue. L'indice de dispersion tend vers 1, et la loi Binomiale Négative tend vers la loi de Poisson simple d'origine. Dans le cas d'un échantillon de deux données pour lequel l'incertitude sur le paramètre de la loi de Poisson est quasi-maximale, la fréquence serait modélisée par une loi Binomiale Négative dont l'indice de dispersion vaut 1.5.

b) Distribution a priori Gamma :

Si désormais la distribution a priori est la loi conjuguée $\text{Gamma}(r, s)$:

$$f(\lambda/\underline{k}) \propto L(\lambda/\underline{k})f(\lambda)$$

soit

$$f(\lambda/\underline{k}) \propto e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n k_i} \lambda^{r-1} = e^{-\lambda(n+s)} \lambda^{\sum_{i=1}^n k_i + r - 1}$$

donc

$$\lambda/\underline{k} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^n k_i + r, n + s\right)$$

Voici ici une autre façon de décrire le manque d'information a priori sur le paramètre de la loi de Poisson. Si l'actuaire pense que le paramètre λ se localise à la valeur m en moyenne mais que son estimation est très imprécise (variance quasi infinie), ce qui revient à dire qu'il ne possède aucune information a priori sur le paramètre, alors la distribution a priori Gamma peut s'écrire en fixant les paramètres r et s de la manière suivante : $r = \epsilon$ et $s = \frac{\epsilon}{m}$, avec ϵ très petit.

Dans ce cas :

$$\lambda/\underline{k} \sim \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^n k_i + \epsilon, n + \frac{\epsilon}{m}\right) \cong \text{Gamma}\left(\sum_{i=1}^n k_i, n\right)$$

et

$$N/(\lambda/\underline{k}) \sim \text{NB}\left(\sum_{i=1}^n k_i, \frac{n}{n+1}\right)$$

avec $E(N/(\lambda/\underline{k})) = \underline{k}$ et $V(N/(\lambda/\underline{k})) = (1 + \frac{1}{n})E(N/(\lambda/\underline{k}))$

On retrouve le même résultat sur l'indice de dispersion que lorsque la distribution a priori est uniforme :

$$\frac{V(N/(\lambda/\underline{k}))}{E(N/(\lambda/\underline{k}))} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Il s'agit aussi d'un résultat proche de celui obtenu en appliquant le bootstrap paramétrique sur le paramètre λ d'une loi de Poisson étant donné un échantillon \underline{k} .

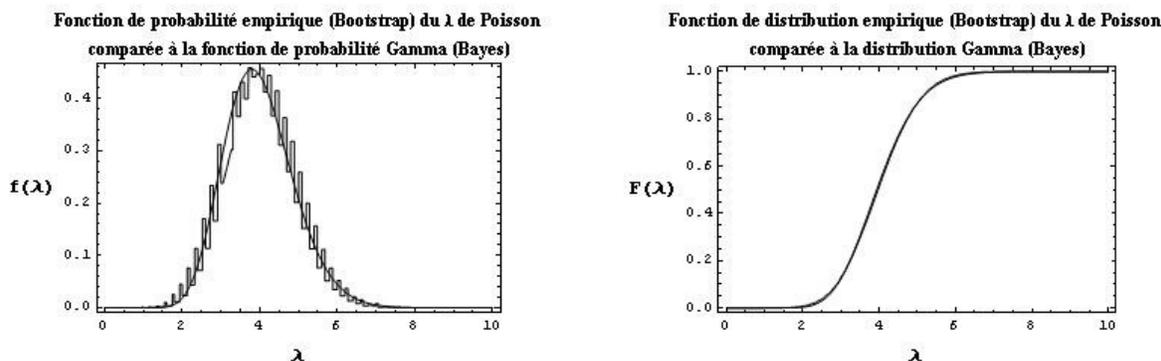


FIGURE 10.12 – Comparaison du bootstrap, et de la théorie bayésienne sur l'incertitude du paramètre de la loi de Poisson simple (échantillon 1)

Dans le cas de la Poisson simple, la théorie bayésienne qui prévoit une loi Gamma lorsque l'information a priori est non informative et le bootstrap paramétrique font apparaître des résultats similaires sur la forme de la distribution du paramètre.

10.3.4 Le cas des lois Binomiale Négative et Poisson Généralisée

a) La Binomiale Négative :

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$L(\lambda, p/\underline{k}) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i + 1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i}$$

Et la distribution a posteriori des paramètres est donnée par :

$$f(\lambda, p/\underline{k}) \propto L(\lambda, p/\underline{k})f(\lambda, p) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i + 1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} \right) (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i} f(\lambda, p)$$

La distribution a priori quant à elle peut s'écrire :

$$f(\lambda, p) = f(p/\lambda)f(\lambda)$$

$$f(\lambda, p/\underline{k}) \propto \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i + 1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} \right) (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i} f(p/\lambda)f(\lambda)$$

b) La Poisson généralisée :

$$L(\lambda, \omega/\underline{k}) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega) + \omega k_i)^{k_i-1}}{k_i!} e^{-(\lambda(1-\omega) + \omega k_i)}$$

ce qui donne comme distribution a posteriori des paramètres :

$$f(\lambda, \omega/\underline{k}) \propto \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega) + \omega k_i)^{k_i-1}}{k_i!} e^{-(\lambda(1-\omega) + \omega k_i)} \right) f(\omega/\lambda)f(\lambda)$$

Une manière de spécifier les probabilités conditionnelles $f(p/\lambda)$ et $f(\omega/\lambda)$ est d'égaliser l'indice de dispersion des deux modèles :

$$DI = \frac{1}{p} = \frac{1}{(1-\omega)^2}$$

En l'absence d'information a priori, le paramètre ω peut être considéré comme distribué de manière uniforme sur son intervalle de définition $[0, 1]$.

Par conséquent la distribution a priori du paramètre p/λ est celle d'une loi Beta de type I de paramètre $\frac{1}{2}$ et 1 :

$$f(p/\lambda) = \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}}$$

Ce qui permet d'obtenir avant toute considération a priori sur la distribution du paramètre λ de Poisson :

$$f(\lambda, p/\underline{k}) \propto \left(\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i + 1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} \right) (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i} \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} f(\lambda)$$

$$f(\lambda, \omega/\underline{k}) \propto \left(\prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega) + \omega k_i)^{k_i-1}}{k_i!} e^{-(\lambda(1-\omega) + \omega k_i)} \right) f(\lambda)$$

En l'absence d'information a priori, la distribution du paramètre λ peut être considérée comme Uniforme ou Gamma comme indiqué précédemment dans le cas Poissonien simple.

Contrairement au cas Poissonien, les distributions a posteriori des paramètres des lois Binomiale Négative et Poisson généralisée ne sont pas proportionnelles à une forme connue de distribution analytique. Dans ce cas, le tirage aléatoire des paramètres dans ses distributions se fait par échantillonnage de Metropolis-Hasting, aussi connue sous le nom de simulation Monte Carlo par chaîne de Markov (cf Annexe 3).

10.3.5 Mise en application de l'algorithme

Avant toute chose, la distribution a priori du paramètre λ est choisie pour la suite de l'étude comme une loi Uniforme non informative.

a) Loi Binomiale Négative :

Les estimateurs des paramètres λ, p se trouvent par la méthode des moments ou par maximisation de la fonction de vraisemblance. Ces estimateurs $(\hat{\lambda}, \hat{p})$ servent à l'initialisation de l'algorithme de Metropolis-Hastings sur la densité a posteriori $f(\lambda, p/\underline{k})$.

On simule λ au moyen de la distribution $f(\lambda/p, \underline{k})$ en utilisant une variation de l'algorithme de Metropolis. La fonction de transition est une marche aléatoire tronquée à gauche en 0 : $q(\lambda, \lambda') = f_{N(\lambda, 1, [0, +\infty])}(\lambda')$ avec $f_{N(\lambda, 1, [0, +\infty])}$ la densité d'une loi Normale de moyenne λ , d'écart type 1.

Ce choix de valeur pour l'écart type résulte d'un test empirique ayant montré que l'espace des possibles de λ est suffisamment bien parcouru tout en évitant le rejet de trop de candidats.

L'écart type ne doit être ni trop important (le mouvement serait trop grand, ce qui est bon, mais les candidats seraient très peu acceptés, le plus souvent rejetés), ni trop petit (même si les mouvements sont acceptés, il faudrait beaucoup trop de simulations pour sortir de la partie « burn-in » de la chaîne de Markov, ce qui correspond à du « poor mixing » comme décrit en annexe).

Le tirage dans cette loi de transition permet d'obtenir un candidat $\lambda' \sim N(\lambda, 1, [0, +\infty])$.

Le candidat est accepté avec la probabilité :

$$\alpha(\lambda, \lambda') = \text{Min}\left(1, \frac{f(\lambda'/p, \underline{k})q(\lambda', \lambda)}{f(\lambda/p, \underline{k})q(\lambda, \lambda')}\right)$$

$$\alpha(\lambda, \lambda') = \text{Min}\left(1, \frac{f(\lambda', p/\underline{k})q(\lambda', \lambda)}{f(\lambda, p/\underline{k})q(\lambda, \lambda')}\right)$$

$$\text{car } f(\lambda'/p, \underline{k}) = \frac{f(\lambda', p/\underline{k})}{f(p, \underline{k})} = \frac{f(\lambda', p/\underline{k})f(\underline{k})}{f(p/\underline{k})f(\underline{k})}$$

$$\alpha(\lambda, \lambda') = \text{Min}\left(1, \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda' p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda' p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda' p}{1-p}} (1-p)^{k_i} \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} f(\lambda')}{\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i} \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} f(\lambda)} \frac{f_{N(\lambda', 1, [0, +\infty])}(\lambda')}{f_{N(\lambda, 1, [0, +\infty])}(\lambda)}\right)$$

$$\alpha(\lambda, \lambda') = \text{Min}\left(1, \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda' p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda' p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda' p}{1-p}} (1-p)^{k_i}}{\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i}} \frac{f_{N(\lambda', 1, [0, +\infty])}(\lambda)}{f_{N(\lambda', 1, [0, +\infty])}(\lambda')}\right)$$

car la distribution a priori du paramètre λ est uniforme.

Cette probabilité veut dire qu'il est généré une valeur u dans une loi Uniforme sur $[0, 1]$ ensuite comparé à $\alpha(\lambda, \lambda')$. Si la probabilité est supérieure à u , alors le candidat λ' est accepté, sinon on réitère l'opération à partir du tirage du candidat jusqu'à obtenir un candidat accepté.

Ensuite a lieu la simulation de p dans $f(p/\lambda, \underline{k})$ en utilisant une variation de l'algorithme de Metropolis Hastings. La fonction de transition est une marche aléatoire tronquée entre 0 et 1.

$$q(p, p') = f_{N(p, 0.1, [0, 1])}(p')$$

avec $f_{N(p, 0.1, [0, 1])}$ la densité d'une loi normale de moyenne p , d'écart type 0.1.

et $p' \sim N(p, 0.1, [0, 1])$

Et une fois p' tirée dans cette loi Normale, il est accepté avec la probabilité :

$$\alpha(p, p') = \text{Min}\left(1, \frac{f(p'/\lambda, \underline{k})q(p', p)}{f(p/\lambda, \underline{k})q(p, p')}\right) = \text{Min}\left(1, \frac{f(\lambda, p'/\underline{k})q(p', p)}{f(\lambda, p/\underline{k})q(p, p')}\right)$$

Soit :

$$\alpha(p, p') = \text{Min}\left(1, \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p'}{1-p'})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda p'}{1-p'})} (p')^{\frac{\lambda p'}{1-p'}} (1-p')^{k_i}}{\prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(k_i + \frac{\lambda p}{1-p})}{\Gamma(k_i+1)\Gamma(\frac{\lambda p}{1-p})} (p)^{\frac{\lambda p}{1-p}} (1-p)^{k_i}} \left(\frac{p'}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{f_{N(p, 1, [0, +\infty])}(\lambda)}{f_{N(p', 1, [0, +\infty])}(\lambda')}\right)$$

L'opération est réitérée à partir du tirage du candidat jusqu'à obtenir un bon candidat.

En posant $(\lambda, \phi) = (\lambda', \phi')$, les opérations décrites ci-dessus sont répétées jusqu'à obtenir un nombre m de couple de paramètres, Seul les $m/2$ derniers couples sont retenus pour être certain d'avoir dépassé la partie « burn-in » de la chaîne de Markov. Typiquement, si $m = 200\ 000$, les 100 000 derniers couples de paramètres peuvent être considérés comme tirées de la probabilité jointe à posteriori cible $f(\lambda, p/\underline{k})$.

On présente ci-dessous les graphiques de résultat de la simulation bayésienne (sur les échantillon 1, 2 et 3 ainsi que le cas pratique). Pour chacun des graphiques se trouve la représentation graphique de la densité de probabilité a posteriori des paramètres $f(\lambda, p/\underline{k})$ sous forme de surface et de lignes de niveau dans la partie supérieure, et les points simulés dans cette densité via l'algorithme de Metropolis-Hastings et la série temporelle du paramètre λ dans la partie inférieure :

Négative Binomiale: $\{ \hat{\lambda}, \hat{p} \} = \{ 4., 0.79064 \}$

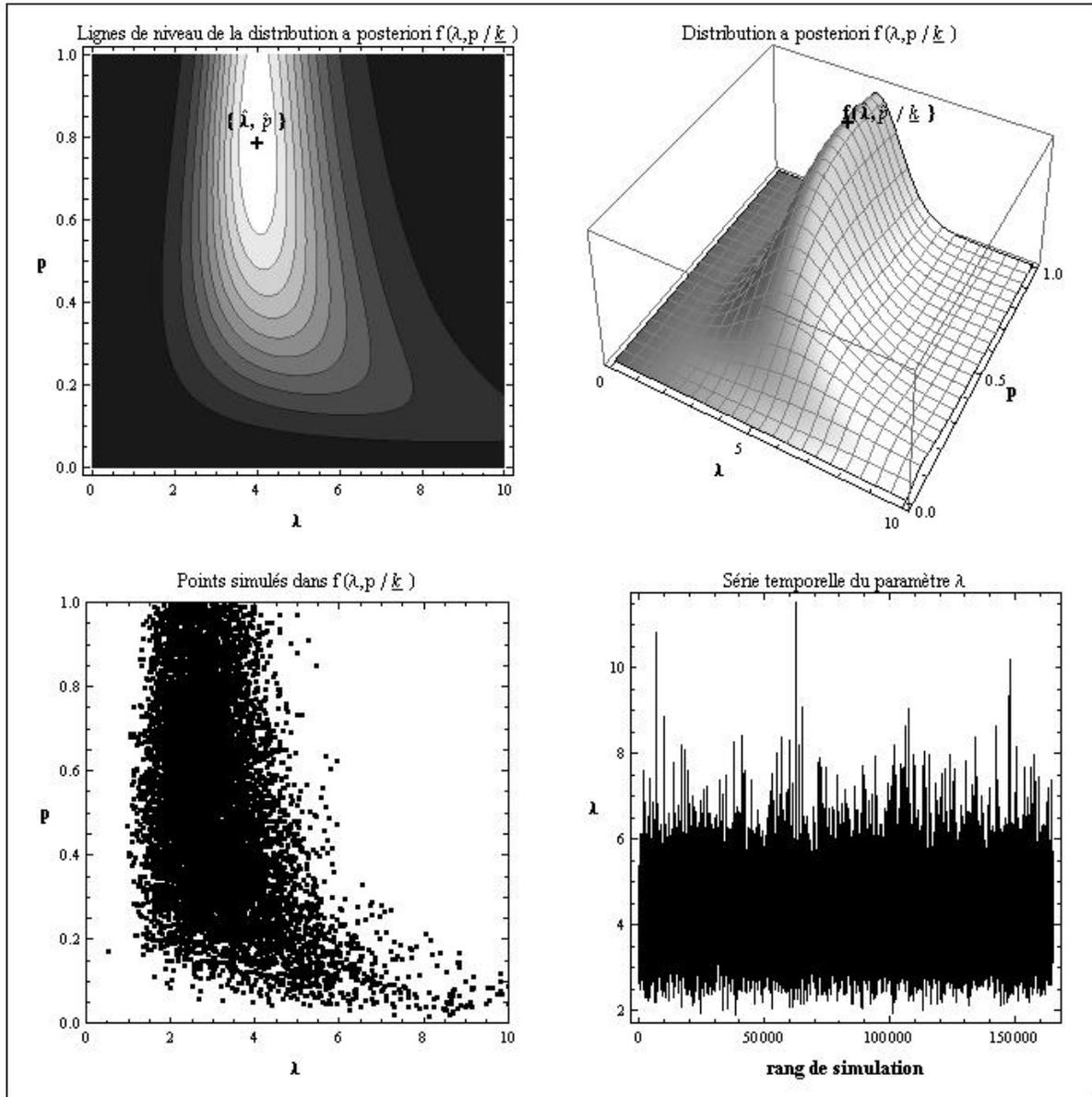


FIGURE 10.13 – Résultats bayésiens pour la Binomiale Négative sur l'échantillon 1

Négative Binomiale – Echantillon 2 : $\{ \hat{\lambda}, \hat{p} \} = \{ 4, 0.715847 \}$

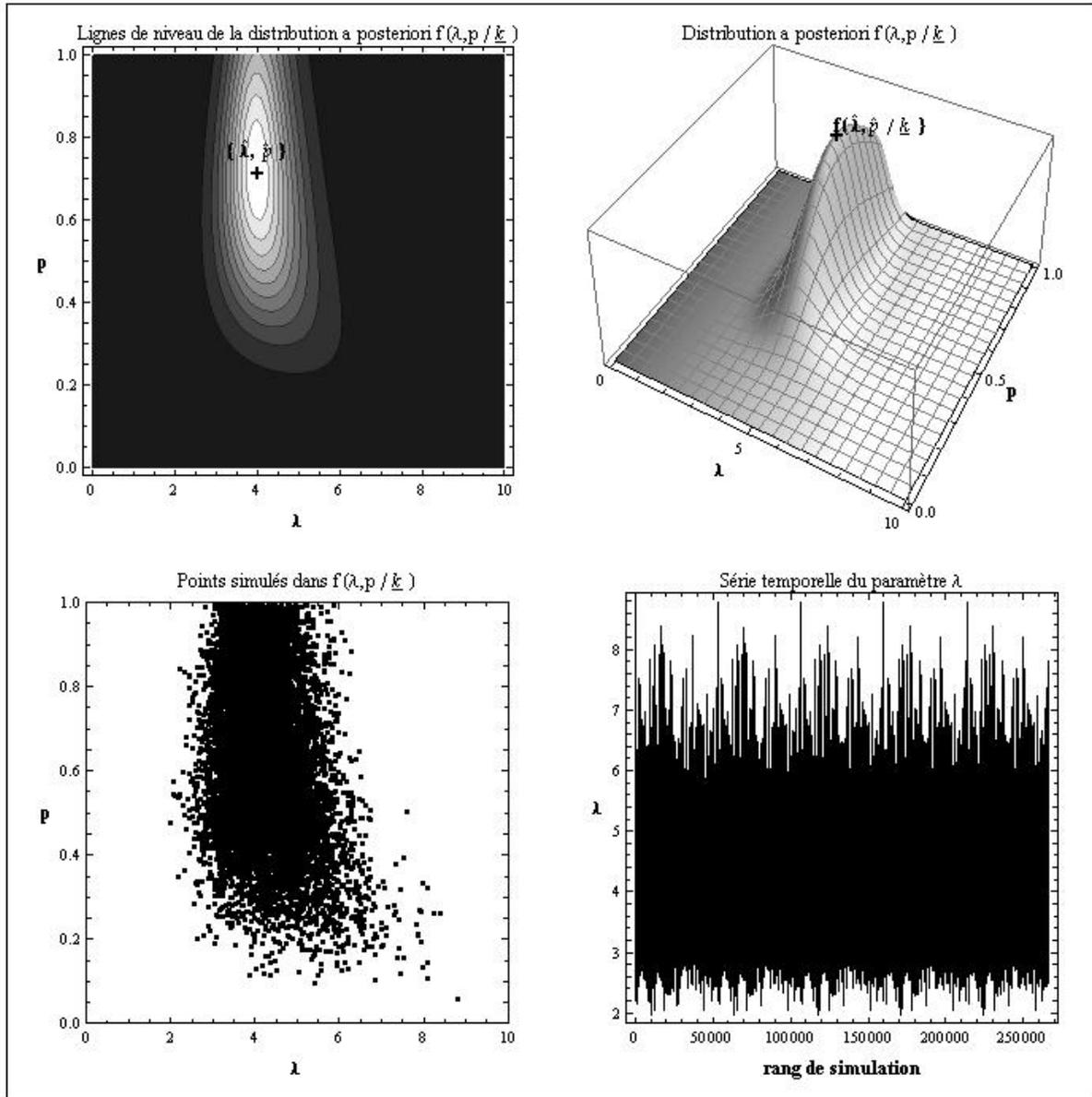


FIGURE 10.14 – Résultats bayésiens pour la Binomiale Négative sur l'échantillon 2

Négative Binomiale – Echantillon 3 : $\{ \hat{\lambda}, \hat{p} \} = \{ 4, 0.641855 \}$

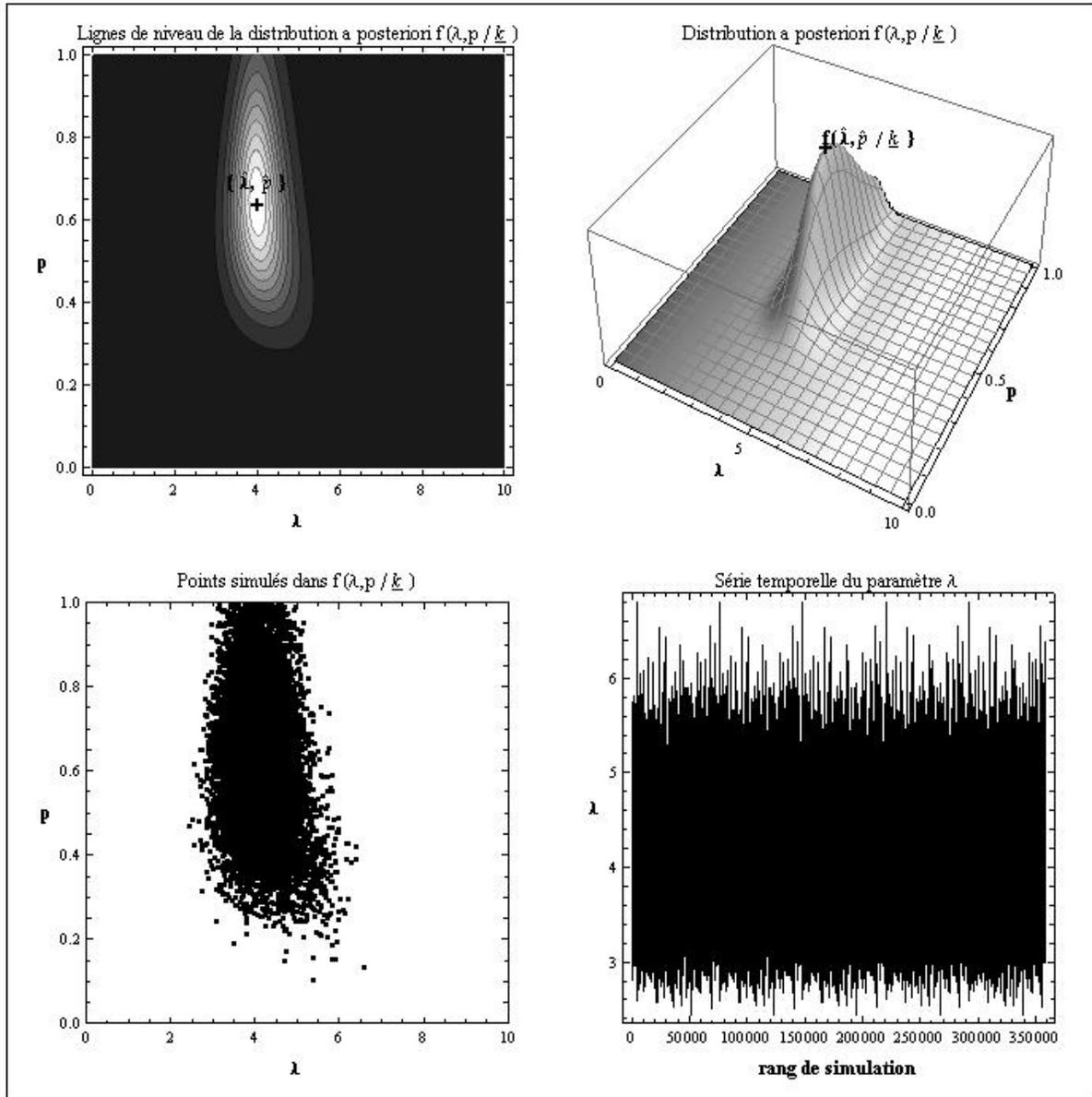


FIGURE 10.15 – Résultats bayésiens pour la Binomiale Négative sur l'échantillon 3

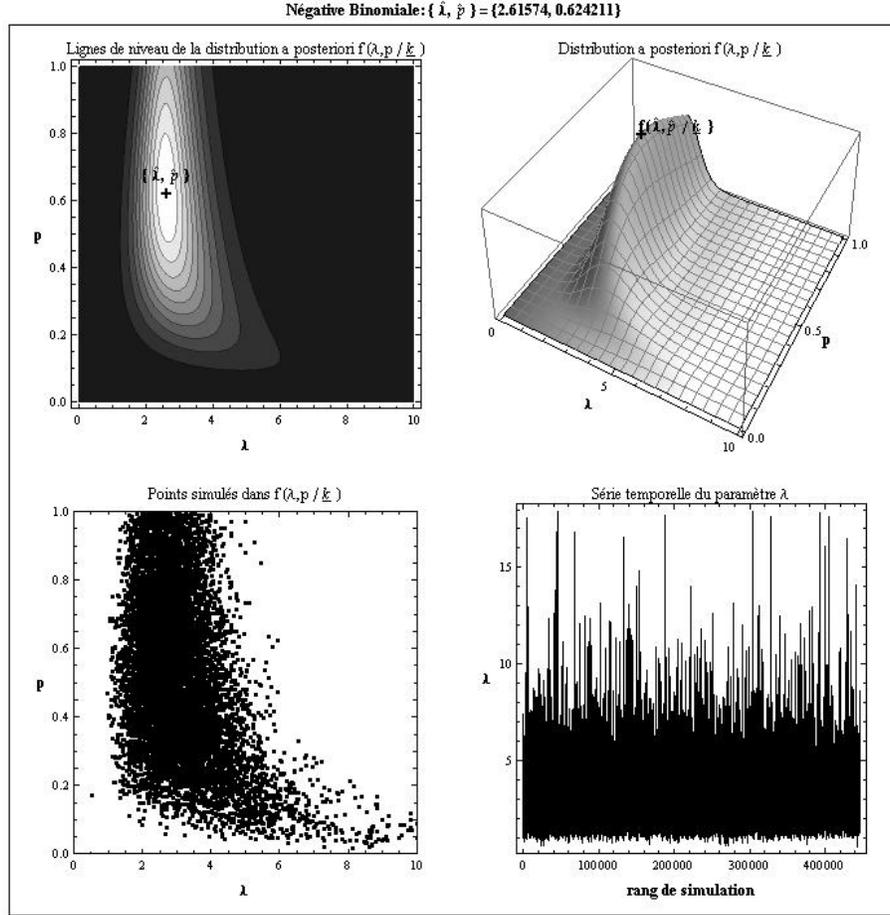


FIGURE 10.16 – Résultats bayésiens pour la Binomiale Négative sur le cas pratique

Les échantillons de 100 000 réalisations des paramètres $\{\hat{\lambda}_j^{Bayes}, \hat{p}_j^{Bayes}\}_{j=1, \dots, 10000}$ vont permettre de construire les tableaux d'analyse des estimateurs de la moyenne et variance des nombres de sinistres annuel en fin de chapitre.

b) Loi de Poisson Généralisée : Les estimateurs $\hat{\lambda} = \hat{k}$, $\hat{\omega} = 1 - \sqrt{\frac{\hat{k}}{s^2}}$ sont choisis pour l'initialisation de l'algorithme de Metropolis Hastings sur la distribution a posteriori $p(\lambda, \omega / \underline{k})$ qui va servir à la simulation des paramètres λ, ω . λ' est tiré dans la loi $N(\lambda, 1, [0, +\infty[)$. Il est accepté avec la probabilité :

$$\alpha(\lambda, \lambda') = \text{Min}\left(1, \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda'(1-\omega)(\lambda'(1-\omega)+\omega k_i)^{k_i-1} e^{-(\lambda'(1-\omega)+\omega k_i)}}{k_i!}}{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega)+\omega k_i)^{k_i-1} e^{-(\lambda(1-\omega)+\omega k_i)}}{k_i!}} \frac{f_{N(\lambda', 1, [0, +\infty[)}(\lambda)}{f_{N(\lambda, 1, [0, +\infty[)}(\lambda')}\right)$$

Puis vient la simulation de ω dans $p(\omega / \lambda, \underline{k})$ en utilisant une variation de l'algorithme de Metropolis Hastings. La fonction de transition suit une marche aléatoire tronquée entre 0 et 1.

$$q(\omega, \omega') = f_{N(\omega, 0.1, [0, 1])}(\omega') \text{ avec } \omega' \sim N(\omega, 0.1, [0, 1])$$

ω' tiré dans cette loi normale est accepté avec la probabilité :

$$\alpha(\omega, \omega') = \text{Min}\left(1, \frac{f(\omega'/\lambda, \underline{k})q(\omega', \omega)}{f(\omega/\lambda, \underline{k})q(\omega, \omega')}\right) = \text{Min}\left(1, \frac{f(\omega', \lambda/\underline{k})q(\omega', \omega)}{f(\omega, \lambda, p/\underline{k})q(\omega, \omega')}\right)$$

$$\alpha(\omega, \omega') = \text{Min}\left(1, \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega')(\lambda(1-\omega')+\omega'k_i)^{k_i-1}}{k_i!} e^{-(\lambda(1-\omega')+\omega'k_i)}}{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda(1-\omega)(\lambda(1-\omega)+\omega k_i)^{k_i-1}}{k_i!} e^{-(\lambda(1-\omega)+\omega k_i)}} \frac{f_{N(\omega', 1, [0, +\infty])}(\omega)}{f_{N(\omega, 1, [0, +\infty])}(\omega')}\right)$$

L'opération est réitérée à partir du tirage du candidat jusqu'à obtenir un bon candidat.

En posant $(\lambda, \omega) = (\lambda', \omega')$, les opérations décrites ci-dessus sont répétées jusqu'à obtenir un nombre m de couples de paramètres. Les $m/2$ derniers couples pourront être considérés comme ayant été tirés de la probabilité jointe à posteriori $p(\lambda, \omega/\underline{k})$.

Poisson Généralisée – Echantillon 1 : $\{ \hat{\lambda}, \hat{w} \} = \{ 4, 0.10561 \}$

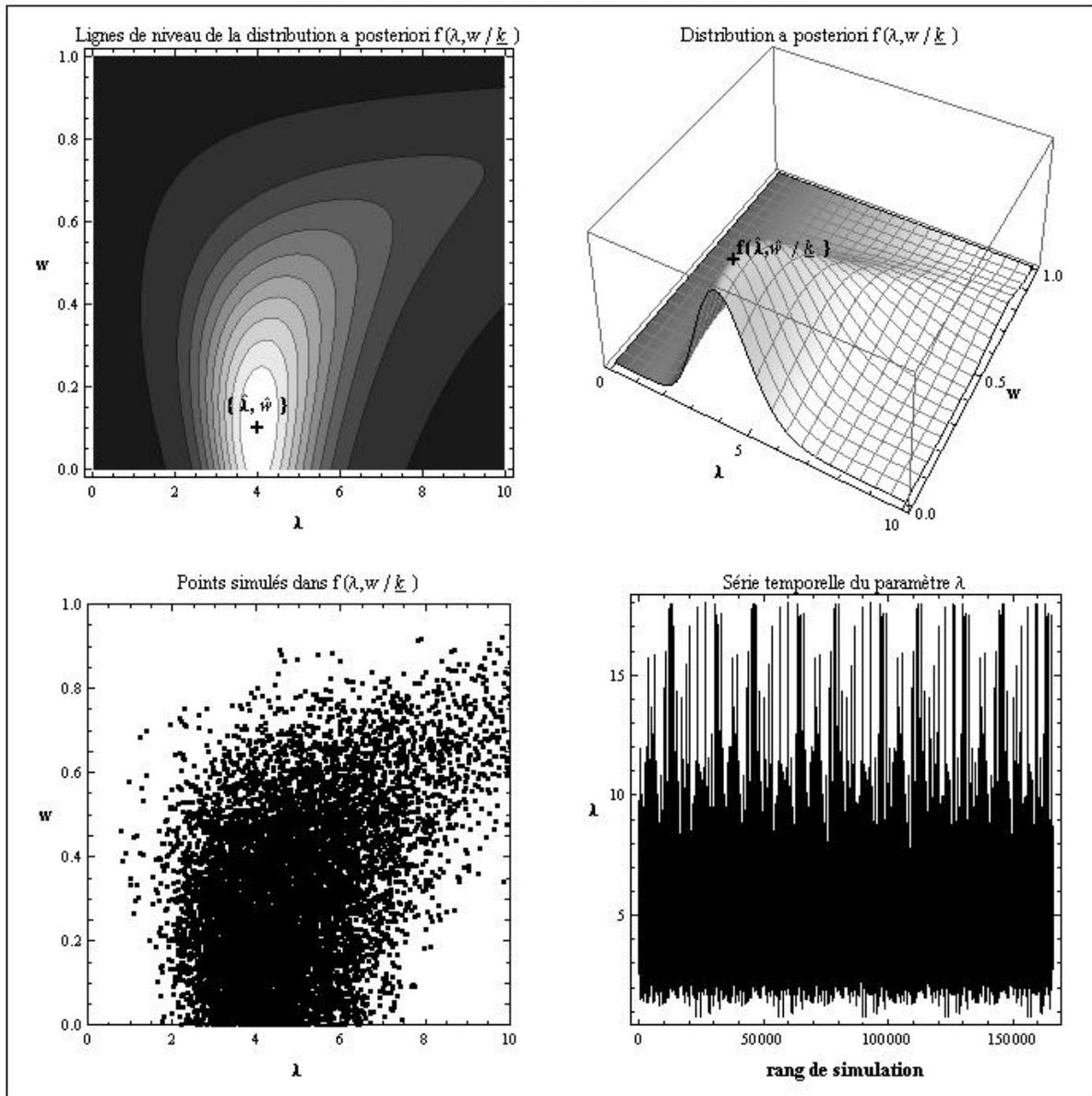


FIGURE 10.17 – Résultats bayésiens pour la Poisson Généralisée sur l'échantillon 1

Poisson Généralisée – Echantillon 2 : $\{ \hat{\lambda}, \hat{w} \} = \{ 4, 0.154326 \}$

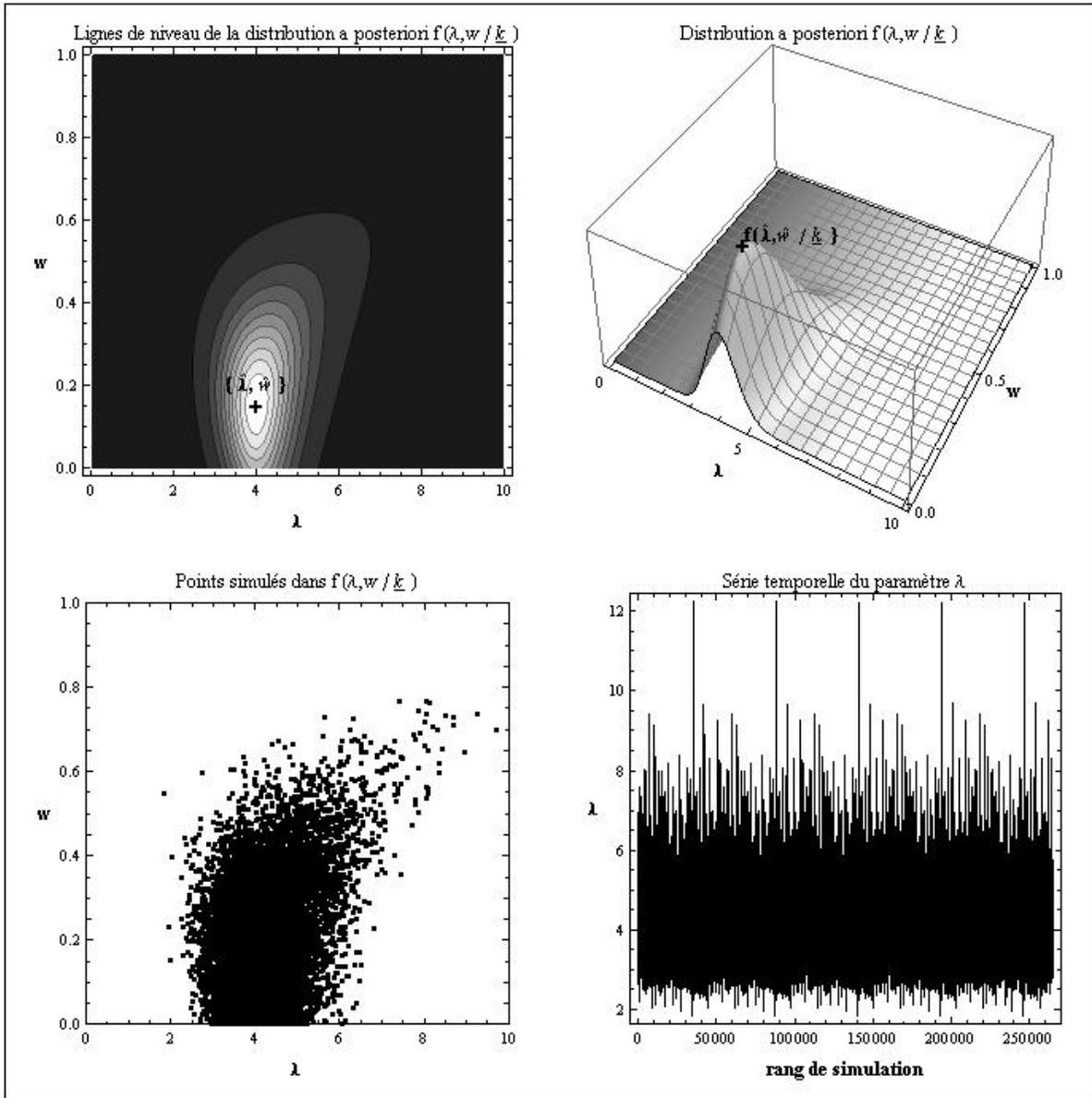


FIGURE 10.18 – Résultats bayésiens pour la Poisson Généralisée sur l'échantillon 2

Poisson Généralisée – Echantillon 3 : $\{ \hat{\lambda}, \hat{w} \} = \{ 4, 0.193623 \}$

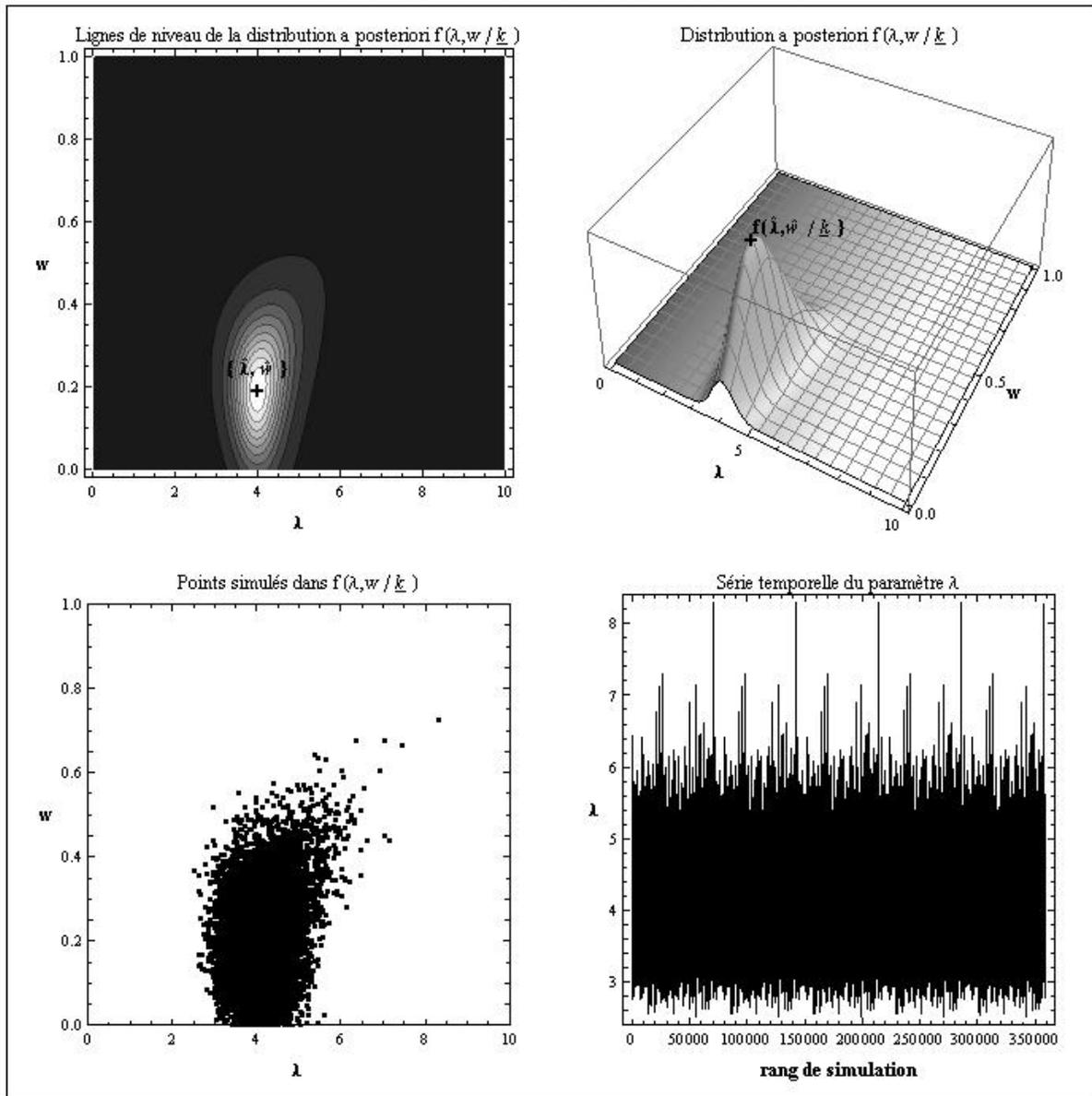


FIGURE 10.19 – Résultats bayésiens pour la Poisson Généralisée sur l'échantillon 3

Les graphiques montrent une fois de plus que plus l'échantillon est de grande taille, plus l'incertitude sur les paramètres diminue. Il est toujours bon de regarder la série temporelle des paramètres simulés afin d'y repérer le phénomène de « poor mixing », ou le fait que pendant une longue période, le paramètre plafonne à une valeur fixe. Ces phénomènes sont souvent le signe d'un mauvais choix de générateur de paramètres dans la simulation Metropolis, et d'un mauvais parcours de l'espace des possibles.

Les graphiques montrent aussi que par rapport au bootstrap, l'algorithme bayésien permet de prendre en compte une certaine asymétrie dans les simulations des paramètres autour de la

moyenne de l'estimateur de fréquence. Ceci tient au fait que la densité a posteriori dans lequel sont tirées les échantillons de paramètres sont asymétriques à l'origine. Ceci aura tendance à décaler vers le haut l'espérance des estimateurs de la moyenne des nombres de sinistres comme nous le verrons dans les tableau ci-dessous. Le phénomène est d'autant plus visible que l'échantillon est petit, que la densité a posteriori des paramètres est dispersée, et donc que l'incertitude sur les paramètres est grande.

Comme dans le cas du bootstrap, nous rappelons que les estimateurs de la moyenne et de la variance sont des variables aléatoires qui s'expriment en fonction des paramètres de la manière suivante :

– Binomiale Négative :

$$E(\hat{N})^{Bayes} = E(N/\lambda, p) = \lambda$$

$$V(\hat{N})^{Bayes} = V(N/\lambda, p) = \frac{\lambda}{p}$$

– Poisson Généralisée :

$$E(\hat{N})^{Bayes} = E(N/\lambda, w) = \lambda$$

$$V(\hat{N})^{Bayes} = V(N/\lambda, w) = \frac{\lambda}{(1-w)^2}$$

ce qui permet d'établir le tableau d'analyse de l'estimateur de la moyenne suivant pour les échantillons 1, 2 et 3 ainsi que pour le cas pratique :

BAYES	Analyse de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres- comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
Espérance	4.9	5.2	4.2	4.3	4.1	4.1	3.12
Ecart Type	2.0	2.3	0.8	0.8	0.5	0.6	1.27
CoV	41.4%	44.8%	18.2%	19.2%	13.1%	13.4%	40.8%

	Distribution de l'estimateur de la MOYENNE du nombre de sinistres - comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
0	0.4	0.3	1.5	1.8	2.3	2.2	0.5
5%	2.6	2.7	3.1	3.1	3.3	3.3	1.7
10%	3.0	3.0	3.3	3.3	3.4	3.4	1.9
15%	3.2	3.3	3.4	3.4	3.5	3.6	2.1
20%	3.5	3.5	3.5	3.6	3.6	3.6	2.2
25%	3.6	3.7	3.7	3.7	3.7	3.7	2.3
30%	3.8	3.9	3.8	3.8	3.8	3.8	2.5
35%	4.0	4.1	3.9	3.9	3.9	3.9	2.6
40%	4.2	4.3	4.0	4.0	3.9	3.9	2.7
45%	4.4	4.5	4.1	4.1	4.0	4.0	2.8
50%	4.6	4.7	4.1	4.2	4.1	4.1	2.9
55%	4.8	4.9	4.2	4.3	4.2	4.2	3.0
60%	5.0	5.1	4.3	4.4	4.2	4.2	3.2
65%	5.2	5.3	4.5	4.5	4.3	4.3	3.3
70%	5.4	5.6	4.6	4.6	4.4	4.4	3.4
75%	5.7	5.9	4.7	4.7	4.5	4.5	3.6
80%	6.0	6.3	4.8	4.9	4.6	4.6	3.8
85%	6.5	6.9	5.0	5.0	4.7	4.7	4.0
90%	7.1	7.8	5.2	5.3	4.8	4.8	4.4
95%	8.6	9.7	5.5	5.6	5.0	5.1	5.1

FIGURE 10.20 – Analyse de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistre par méthode bayésienne - Comparaison Binomiale Négative et Poisson Généralisée (échantillons 1, 2 et 3 et cas pratique)

Les coefficients de variation CoV des estimateurs de la moyenne du nombre de sinistres annuel peuvent être comparé au bootstrap :

– Binomiale Négative

Ils sont égaux à 41.4%, 18.2% et 13.1% (méthode bayésienne) contre 27.0%, 15.7% et 11.1% (méthode bootstrap) pour les échantillons 1, 2 et 3. Pour le cas pratique, le coefficient de variation est égale à 40.8% dans le cas bayésien contre 25.4% dans le cas du bootstrap.

– Poisson Généralisée

Ils sont égaux à 44.8%, 19.2% et 13.4% (méthode bayésienne) contre 27.0%, 15.7% et 11.2% (méthode bootstrap) pour les échantillons 1, 2 et 3.

Nous observons donc une mesure d'incertitude des paramètres beaucoup plus forte avec la méthode bayésienne qu'avec la méthode du bootstrap paramétrique. Ceci tient probablement au fait que la simulation des paramètres via le bootstrap se fait toujours à partir d'un échantillonnage dans la même loi de fréquence ajustée sur l'échantillon d'origine. Le bootstrap au contraire de la méthode bayésienne, ne reconnaît de ce fait pas ou peu l'asymétrie dans l'incertitude des paramètres que la densité à posteriori des paramètres reconnaît très clairement dans la formule bayésienne.

Dans la méthode bayésienne, les distributions montrent parfaitement cette asymétrie de l'estimateur de la moyenne du nombre de sinistres annuel avec une déviation plus forte des réalisations vers les grandes valeurs. Les moyennes sont de ce fait décalées vers le haut par rapport à l'estimation originale égale à 4 avec un phénomène encore une fois très accentué sur le petit échantillon pour lequel la moyenne est égale à 4.9 et 5.2 dans les cas de la Binomiale Négative et de la Poisson Généralisée respectivement.

Il en résulte aussi que les quantiles à 95% sont eux aussi très nettement décalés vers le haut. Ils sont respectivement égaux à 8.6 (cas Binomiale Négative) et 9.7 (cas Poisson Généralisée) dans le cas de l'échantillon 1 contre 6.0 sur ce même échantillon mais avec le bootstrap. Dans le cas de la prise en compte de l'incertitude des paramètres de fréquence, une position conservatrice consisterait à choisir ce quantile à 95% plutôt que la moyenne de l'estimateur (car la probabilité d'avoir une moyenne des nombres de sinistres annuel supérieure à une certaine valeur serait inférieure à 5%), ce qui représenterait sur l'échantillon 1 en particulier avec la Binomiale Négative une augmentation de 115% (bayésien) contre 50% (bootstrap) et avec la Poisson Généralisée une augmentation de 142% (bayésien) contre 50% (bootstrap). Sur le cas pratique, cela représenterait avec la Binomiale Négative une augmentation de 64.7% (bayésien) contre 45.6% (bootstrap).

Dans le cas du bootstrap, l'incertitude sur l'estimateur de la moyenne de la fréquence est indépendant du choix entre Binomiale Négative et Poisson Généralisée. On remarque que dans le cas bayésien, l'incertitude est mesurée supérieure avec la Poisson Généralisée. Ceci tient au fait qu'au travers de la simulation dans la densité à posteriori des paramètres, il y a reconnaissance avec cette méthode de la plus grande épaisseur de queue de distribution de la Poisson Généralisée que celle de la Binomiale Négative.

On peut aussi dresser le tableau d'analyse de l'estimateur de la variance suivant pour les échantillons 1, 2 et 3 ainsi que pour le cas pratique :

BAYES	Analyse de l'estimateur de la VARIANCE du nombre de sinistres- comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
Espérance	20.6	44.2	7.5	8.3	7.1	7.2	11.7
Ecart Type	58.5	249.2	4.3	9.2	2.6	3.2	43.7
CoV	284.7%	564.2%	57.7%	110.4%	37.3%	45.0%	372.5%

	Distribution de l'estimateur de la VARIANCE du nombre de sinistres - comparaison cas Binomiale Négative (BN) et cas Poisson Généralisée (PG)						
	Echantillon 1		Echantillon 2		Echantillon 3		Cas pratique
	BN	PG	BN	PG	BN	PG	BN
0	0.9	1.0	2.4	2.5	3.0	2.8	0.8
5%	3.7	3.8	3.9	3.9	4.2	4.2	2.5
10%	4.3	4.4	4.3	4.3	4.6	4.5	2.8
15%	4.8	4.9	4.5	4.6	4.8	4.8	3.2
20%	5.2	5.4	4.8	4.8	5.1	5.0	3.4
25%	5.6	5.9	5.0	5.1	5.3	5.2	3.7
30%	6.1	6.4	5.3	5.3	5.5	5.4	4.0
35%	6.6	7.0	5.5	5.6	5.7	5.7	4.3
40%	7.1	7.6	5.8	5.9	6.0	5.9	4.7
45%	7.7	8.4	6.0	6.2	6.2	6.2	5.1
50%	8.4	9.3	6.3	6.5	6.5	6.4	5.5
55%	9.2	10.4	6.7	6.9	6.7	6.7	6.0
60%	10.2	11.9	7.0	7.3	7.0	7.0	6.6
65%	11.5	13.8	7.4	7.8	7.3	7.4	7.3
70%	13.2	16.3	7.9	8.3	7.7	7.8	8.2
75%	15.4	20.0	8.5	9.0	8.1	8.3	9.4
80%	18.6	25.8	9.2	10.0	8.7	8.8	11.0
85%	24.0	35.9	10.2	11.2	9.3	9.6	13.5
90%	34.6	58.9	11.7	13.3	10.3	10.8	18.0
95%	64.7	138.5	14.7	17.5	12.0	12.8	30.0

FIGURE 10.21 – Analyse de l'estimateur de la variance du nombre de sinistre par méthode bayésienne - Comparaison Binomiale Négative et Poisson Généralisée (échantillons 1, 2 et 3 et cas pratique)

Il révèle que l'écart entre la méthode bayésienne et la méthode du bootstrap paramétrique est encore plus prononcée sur l'incertitude de l'estimateur de la variance de la fréquence (impactant le capital allouée) que sur l'incertitude de l'estimateur de la moyenne de la fréquence (impactant la prime pure).

Ces divers résultats laissent à penser que la prise en compte de l'incertitude des paramètres de fréquence par la méthode bayésienne conduirait à des écarts de prime pure et de primes chargées très significatifs par rapport au cas sans incertitude des paramètres mais aussi par rapport au cas de la reconnaissance de l'incertitude par la méthode du bootstrap. Nous analyserons dans

la suite de ce mémoire les écarts sur la prime pure dans le cas pratique uniquement afin de simplifier l'analyse.

11 Conclusion sur la fréquence

Le choix d'un modèle de fréquence adapté aux échantillons et la décision de la prise en compte de l'incertitude des paramètres ont un impact significatif sur les tarifs de réassurance.

Le bootstrap et la théorie bayésienne sont des approches puissantes dont on peut se servir pour rendre compte des erreurs commises lors de l'analyse de la fréquence des sinistres des contrats de réassurance. Des techniques plus sophistiquées de choix de modèle existent, comme l'analyse bayésienne des poids relatifs des modèles (Bayesian Model Averaging, comme décrit dans [38]).

La prise en compte d'informations autres que l'expérience, comme des informations d'exposition, de marché ou des avis d'experts, permettraient de raffiner l'analyse de la fréquence des sinistres, de la rendre plus crédible. La théorie bayésienne est particulièrement bien adaptée à l'ajout d'une connaissance a priori dans la modélisation.

Cet exposé partait de l'hypothèse d'une connaissance a priori non informative. L'incertitude naissait de l'information apportée par l'échantillon uniquement. Nul doute que plus l'information utilisée par les actuaires est importante, plus sa connaissance a priori est fine, moins il y a d'incertitude sur le choix des modèles et des paramètres, avec les conséquences que cela implique sur la détermination du tarif.

Quatrième partie

Distribution du montant de sinistre : sévérité

Une fois l'analyse de la fréquence des sinistres terminée, vient l'étape suivante de détermination de la sévérité au dessus du seuil. L'ensemble des sinistres revalorisés sont filtrés au dessus du seuil pour former un échantillon de sinistres $\{x_i\}_{i=1,\dots,k}$. Cet échantillon permet de construire une distribution empirique de probabilité, F_{emp} , comme première approximation de la distribution de la variable aléatoire montant de sinistre individuel X . F_{emp} est une fonction en escalier définie comme suit :

$$F_{emp}(x) = P(X \leq x) = \frac{\sum_{i=1}^k I(x_i \leq x)}{k}$$

où $I(A)$ est la fonction indicatrice de l'événement A .

La distribution empirique ainsi construite présente deux problèmes majeurs :

1. Elle peut mener à des incohérences de primes pures entre des tranches de hauteurs différentes. Il suffit de penser à deux tranches de réassurance adjacentes, de même amplitude mais de hauteur différente se trouvant sur un plateau de la fonction empirique en escalier. Dans ce cas, l'intégrale au-dessus de la courbe de distribution de sévérité et par conséquent la prime pure est la même pour les deux tranches, ce qui n'est pas acceptable. Nous pouvons corriger ce problème en construisant une distribution empirique de sévérité dite "mutli-ajustée".
2. La distribution empirique est construite à partir de l'échantillon de sinistres au dessus du seuil de modélisation. Si cet échantillon peut être considéré comme représentatif de la sinistralité attritionnelle, il capte souvent mal la sinistralité extrême. La distribution empirique s'arrête au maximum des montants de sinistre de l'échantillon. Au-delà, les probabilités de montants de sinistre sont nulles par construction. Or si les tranches de réassurance à coter commence par exemple au-dessus de ce maximum, la prime pure est alors nulle si elle est calculée sur la distribution empirique.

Afin de modéliser la sévérité dans son intégralité, et contourner ce problème lié à l'insuffisance des observations historiques, nous disposons de deux techniques. La première consiste à ajuster une distribution de loi continue à la distribution empirique. Cette opération s'appelle le "fitting". La distribution de sévérité devient la loi ajustée dont la queue permet de produire des primes pures non nulles pour les tranches hautes. Il arrive cependant que l'échantillon de sinistres soit trop petit, provoquant des erreurs importantes dans le fitting et une mauvaise appréciation de la sinistralité extrême sur la queue de la distribution fittée. L'incertitude autour de l'estimation des primes pures des tranches hautes qui se trouvent sur la queue devient grande. La deuxième solution est meilleure dans ce cas. Elle consiste à procéder au "blending" de la distribution empirique avec une loi de distribution continue, c'est à dire de raccorder les deux lois pour que la première, l'empirique, soit conservée pour représenter la sinistralité attritionnelle, et l'autre, analytique, modélise les sinistres lourds.

12 Sévérité empirique “multi-ajustée”

La distribution empirique multi-ajustée a été créée afin d’obtenir une fonction de distribution strictement croissante dérivée de la distribution empirique de sévérité. Cela permet d’assurer la cohérence des primes pures des tranches de réassurance cotées.

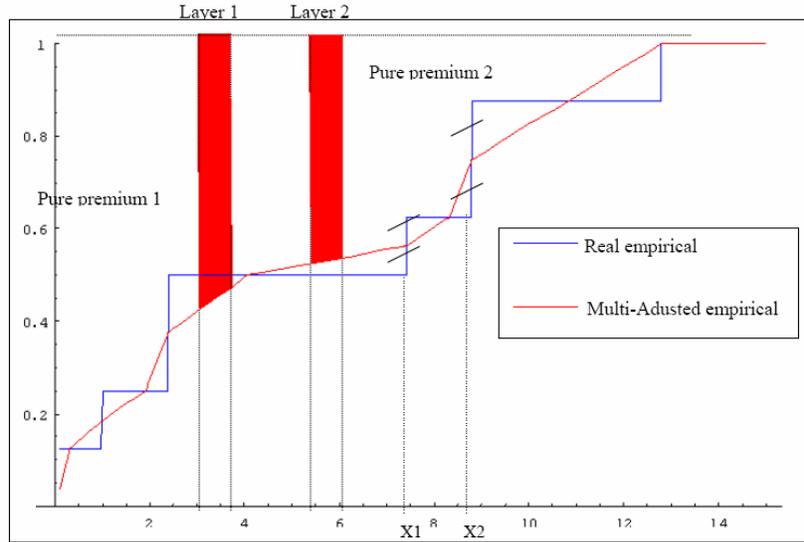


FIGURE 12.1 – Sévérité empirique “multi-ajustée”

La fonction de distribution empirique multi-ajustée $F_{multi-ajustée}$ respecte les contraintes suivantes :

- $F_{multi-ajustée}(x_{min}) = 0$ alors que $F_{emp}(x_{min}) \neq 0$
- $F_{multi-ajustée}$ passe au milieu de chaque saut de probabilité de F_{emp} et conserve la prime pure entre deux valeurs de l’échantillon de sinistres $\{x_i, x_{i+1}\}$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 - F_{multi-ajustée}(x)) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1 - F_{emp}(x)) dx$$

ce qui permet de définir le point de croisement entre les deux fonctions sur chaque plateau de la fonction empirique.

- $F_{multi-ajustée}(x_{max}) = 1$

La construction de la fonction de distribution empirique multi-ajustée permet de parer au problème de cohérence entre les primes pures des tranches de réassurance. Elle ne permet pas de régler le second problème de limitation de la fonction empirique au maximum des montants de sinistre de l’échantillon.

13 Ajustement de sévérité (fitting)

13.1 La loi de vraisemblance

L'actuaire est amené, si l'échantillon le permet, à ajuster une loi de distribution continue afin d'obtenir une sévérité qui respecte l'expérience de sinistre sur le bas, et qui extrapole la sinistrose sur le haut.

La fonction de distribution empirique est une distribution tronquée à gauche au seuil de modélisation. Nous utilisons donc l'expression tronquée à gauche des fonctions de distribution continue que l'on souhaite ajuster. Un catalogue des fonctions de distribution utilisées pour l'ajustement de sévérité se trouve en annexe 4.

Pour réaliser le fitting, la méthode du maximum de vraisemblance donne par définition de meilleurs résultats que la méthode des moments. La fonction de vraisemblance sur l'échantillon $\underline{x} = \{x_i\}_{i=1,\dots,k}$ s'écrit :

$$L(\Theta/\underline{x}) = \prod_{i=1}^k \frac{f(\Theta, x_i)}{1 - F(x_0)}$$

avec f la densité de probabilité de la loi ajustée, F la fonction de distribution cumulée, Θ la variable aléatoire associée au vecteur de paramètres de la loi ajustée, et x_0 le seuil de modélisation. Le logarithme de la fonction de vraisemblance s'exprime comme une somme :

$$\ln(L(\Theta/\underline{x})) = \sum_{i=1}^k \ln f(\Theta, x_i) - n \ln(1 - F(x_0))$$

Comme dans le cas de la fréquence, le maximum de cette fonction ne s'obtient pas dans tous les cas grâce à des formules fermées solutions des équations d'annulation des dérivées partielles par rapport aux paramètres. L'algorithme itératif de Nelder-Mead initialisé à partir des estimateurs des paramètres obtenus par la méthode des moments permet dans tous les cas de trouver les meilleurs estimateurs possibles des paramètres, ceux qui maximisent la fonction de vraisemblance. On notera $\hat{\theta}$ le vecteur des estimateurs des paramètres ainsi trouvés.

13.2 Tests d'adéquation

Pour choisir une loi de distribution plutôt qu'une autre, deux tests d'adéquation sont réalisés, le test d'Anderson-Darling et le test du maximum de vraisemblance. Il s'agit de tester l'hypothèse H_0 : "La variable aléatoire montant de sinistre individuel au dessus du seuil X_0 suit la loi continue définie par sa fonction de distribution de probabilité $F_{\hat{\theta}}$ " contre l'hypothèse H_1 : " X ne suit pas la loi continue définie par $F_{\hat{\theta}}$ ".

13.2.1 Test d'Anderson-Darling

Le test d'Anderson-Darling est basé sur le calcul d'une distance entre la fonction de distribution empirique et la fonction ajustée définie ainsi :

$$A_k^2 = k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_{emp}(x) - F_{\hat{\theta}}(x))^2}{F_{\hat{\theta}}(x)(1 - F_{\hat{\theta}}(x))} dF_{\hat{\theta}}(x)$$

$$A_k^2 = -k + k \sum_{i=1}^k (F_{emp}(x_{i-1})^2 - F_{emp}(x_i)^2) \text{Ln}(F_{\hat{\theta}}(x_i)) + ((F_{emp}(x_{i-1}) - 1)^2 - (F_{emp}(x_i) - 1)^2) \text{Ln}(1 - F_{\hat{\theta}}(x_i))$$

avec $F_{emp}(x_0) = 0$

Le test au seuil α permet de valider l'hypothèse H_0 si $A_k^2 \leq c_\alpha$, c_α correspondant au quantile $1 - \alpha$ de la table d'Anderson-Darling. La figure 13.1 ci-dessous indique les correspondances entre la distance d'Anderson-Darling et le quantile.

0,10	-	1,05	0,6680	2,60	0,9561	4,15	0,9926
0,13	0,0003	1,10	0,6912	2,65	0,9586	4,20	0,9930
0,15	0,0014	1,15	0,7127	2,70	0,9610	4,25	0,9934
0,17	0,0042	1,20	0,7324	2,75	0,9633	4,30	0,9938
0,20	0,0096	1,25	0,7503	2,80	0,9654	4,35	0,9941
0,23	0,0180	1,30	0,7677	2,85	0,9674	4,40	0,9944
0,25	0,0296	1,35	0,7833	2,90	0,9692	4,50	0,9950
0,28	0,0443	1,40	0,7973	2,95	0,9710	4,60	0,9955
0,30	0,0618	1,45	0,8111	3,00	0,9726	4,70	0,9960
0,33	0,0817	1,50	0,8235	3,05	0,9742	4,80	0,9964
0,35	0,1036	1,55	0,8350	3,10	0,9756	4,90	0,9968
0,38	0,1269	1,60	0,8457	3,15	0,9770	5,00	0,9971
0,40	0,1513	1,65	0,8556	3,20	0,9783	5,50	0,9983
0,42	0,1764	1,70	0,8648	3,25	0,9795	6,00	0,9990
0,45	0,2019	1,75	0,8734	3,30	0,9807	7,00	0,9997
0,47	0,2276	1,80	0,8814	3,35	0,9818	8,00	0,9999
0,50	0,2532	1,85	0,8888	3,40	0,9828		
0,53	0,2786	1,90	0,8957	3,45	0,9837		
0,55	0,3036	1,95	0,9021	3,50	0,9846		
0,57	0,3281	2,00	0,9082	3,55	0,9855		
0,60	0,3520	2,05	0,9138	3,60	0,9863		
0,63	0,3753	2,10	0,9190	3,65	0,9870		
0,65	0,3930	2,15	0,9239	3,70	0,9878		
0,68	0,4199	2,20	0,9285	3,75	0,9884		
0,70	0,4412	2,25	0,9328	3,80	0,9891		
0,75	0,4815	2,30	0,9368	3,85	0,9897		
0,80	0,5190	2,35	0,9405	3,90	0,9902		
0,85	0,5537	2,40	0,9441	3,95	0,9908		
0,90	0,5858	2,45	0,9474	4,00	0,9913		
0,95	0,6154	2,50	0,9504	4,05	0,9917		
1,00	0,6427	2,55	0,9534	4,10	0,9922		

FIGURE 13.1 – Table d'Anderson-Darling

Pour découvrir la manière dont cette table a été construite, le lecteur peut se référer à l'article d'Anderson et Darlon, "A Test of Goodness of Fit", [5].

13.2.2 Test du maximum de vraisemblance

Cette méthode utilise le concept de l'entropie de Shannon. L'entropie de Shannon est une fonction mathématique qui décrit le niveau d'information contenu dans un signal ou un événement : un signal électrique, un fichier informatique sont des sources d'information. L'entropie statistique, due à Claude Shannon, est une fonction mathématique qui correspond à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information. Si on considère l'information apportée par l'observation d'un événement A sachant que la densité de probabilité est f Shannon propose de mesurer cette information par $-\text{Ln}(f(A))$. L'espérance de l'information dans un

modèle caractérisé par la densité f est :

$$I(f) = -E(\text{Ln}(f(A))) = \int \text{Ln}(f(A))f(A)dA$$

Plus la source est redondante, moins elle contient d'information au sens de Shannon.

L'entropie S ou l'information I apportée par l'observation de l'échantillon de sinistre \underline{x} sachant que la densité de probabilité de X est $f_{\hat{\theta}}$ s'écrit :

$$S(X) = kI(X) = -\sum_{i=1}^k f_{\hat{\theta}}(x_i) \text{Ln}(f_{\hat{\theta}}(x_i))$$

Parmi les fonctions ajustées, celle dont l'entropie est la plus faible sera par conséquent considérée comme la meilleure d'entre toutes.

En pratique, sur le cas pratique, on réalise dans un premier temps un ajustement de sévérité sur l'échantillon de sinistres au-dessus du seuil de modélisation $X_0 = 3M\text{€}$, en prenant un ensemble de lois de distributions continues du catalogue (c.f. Annexe 4).

Les tableaux suivant montrent les résultats obtenus pour chacune des lois ajustées : les paramètres, l'entropie, et l'alpha d'Anderson :

Classement suivant le maximum de vraisemblance			
Nom de la Loi	Entropie	Paramètres	Alpha de Anderson
Echantillon	14,6848		
FermiDirac	15,4265	{1,60652*10^6,2,69083*10^6}	0,800501
Evt	15,4276	{214745,,1,75983*10^6}	0,837028
Exponential	15,4282	{1,84535*10^6}	0,852760
Benktander	15,4282	{3*10^6,1,84255*10^6,0,9999}	0,852752
BoseEinstein	15,4282	{1,84546*10^6,-6,29233*10^6}	0,852172
Normal	15,4452	{3,38122*10^6,2,51279*10^6}	0,330692
Gamma	15,4784	{8,09234,530743,}	0,351454
Pareto	15,4944	{3*10^6,2,33498}	0,769216
MultiExpo	15,5029	{1,47119*10^7,-2,55288}	0,789795

FIGURE 13.2 – Ajustement de sévérité : classement suivant le maximum de vraisemblance (entropie)

Classement suivant le test d'Anderson			
Nom de la Loi	Entropie	Paramètres	Alpha de Anderson
Echantillon	14,6848		
Exponential	15,4282	{1,84535*10^6}	0,852760
Benktander	15,4282	{3*10^6,1,84255*10^6,0,9999}	0,852752
BoseEinstein	15,4282	{1,84546*10^6,-6,29233*10^6}	0,852172
Evt	15,4276	{214745,,1,75983*10^6}	0,837028
FermiDirac	15,4265	{1,60652*10^6,2,69083*10^6}	0,800501
MultiExpo	15,5029	{1,47119*10^7,-2,55288}	0,789795
Pareto	15,4944	{3*10^6,2,33498}	0,769216
Gamma	15,4784	{8,09234,530743,}	0,351454
Normal	15,4452	{3,38122*10^6,2,51279*10^6}	0,330692

FIGURE 13.3 – Ajustement de sévérité : classement suivant le test d'Anderson

Suivant le test d'Anderson, les lois Gamma et Normal sont écartées. Ensuite nous sommes enclin à choisir entre les lois Exponentielle, Benktander, BoseEinstein, FermiDirac et Evt car elles se trouvent dans le haut du classement dans les deux cas. Cependant, nous devons aussi regarder de plus près les résultats de primes pures sur les trois tranches suivant le choix de sévérité réalisé (on prends aussi la fréquence sans incertitude de paramètres pour le calcul des primes pures qui permettent de mener au choix de la loi de sévérité) :

en M€	T1: 6,5 XS 3,5	T2: 20 XS 10	T3: 45 XS 40
FermiDirac	3.639	0.074	0,000
Evt	3.594	0.095	0,000
Exponential	3.573	0.109	0,000
Benktander	3.572	0.109	0,000
BoseEinstein	3.566	0.108	0,000
Normal	4.393	0.015	0,000
Gamma	3.403	0.005	0,000
Pareto	3,607	0,906	0,192
MultiExpo	3.748	1.112	0.188

FIGURE 13.4 – Primes Pures par tranche suivant la loi de sévérité

Pour toutes les lois, sauf les lois de Pareto et MutliExpo, les primes pures sont très faibles voire nulles pour les tranches élevées T2 : 20 M€ XS 10 M€ et T3 : 45 M€ XS 40 M€. Ces deux tranches hautes se trouvent au delà du maximum des sinistres observés de l'échantillon $X_{Max} = 7.8$ M€. Les 16 sinistres au-dessus du seuil forment donc trop peu d'expérience pour coter les deux tranches hautes. Nous avons fait la même observation dans le cas de l'application de la méthode empirique. Le Burning Cost ne permettait pas de calculer de prime pure sur les tranches non travaillantes.

On trace ici les graphiques des lois sur la zone de la tranche basse numéro 1 T1 : 6.5 M€ XS 3.5 M€ puis sur la zone des tranches hautes au-delà de l'expérience T2 et T3 :

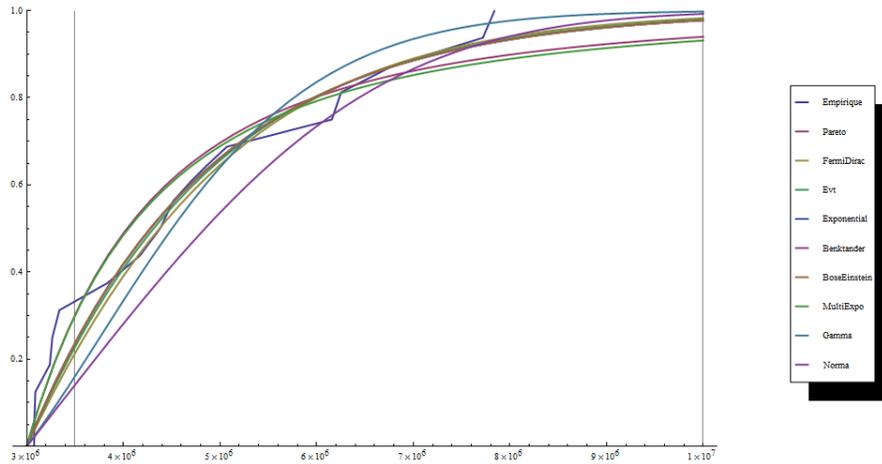


FIGURE 13.5 – Ajustement de sévérité sur le bas

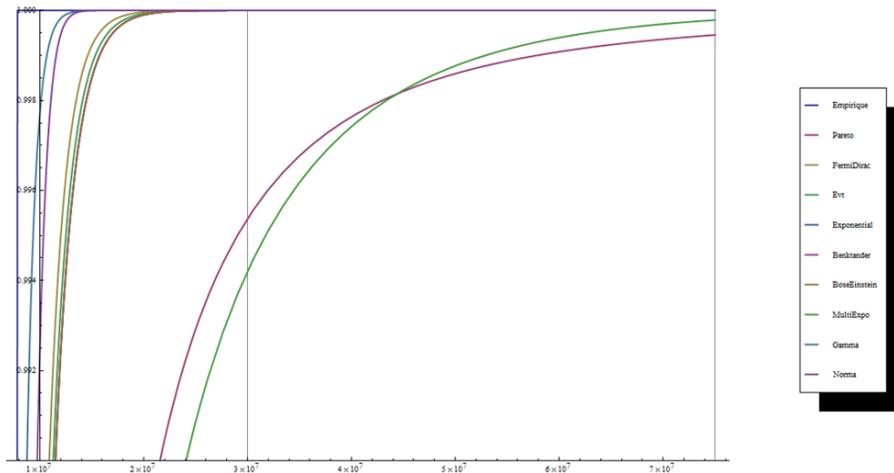


FIGURE 13.6 – Ajustement de sévérité sur le haut

Le premier graphique confirme visuellement que les lois Normal et Gamma sont très éloignées de l'échantillon et doivent par conséquent être écartées. Par ailleurs, les autres lois semblent plus proches de l'échantillon même si la loi de Pareto et la loi MutliExpo semblent plus éloignées. Mais le deuxième graphique vient confirmer le fait qu'en collant trop à l'échantillon, y compris sur le haut, toutes les lois sauf la Pareto et la MutliExpo touchent très peu ou pas les tranches du haut T2 et T3.

Par prudence, nous décidons par conséquent de choisir la loi de Pareto à queue lourde pour modéliser la sévérité. Le paramètre de Pareto trouvé par maximum de vraisemblance est $\hat{\alpha} = 2.335$.

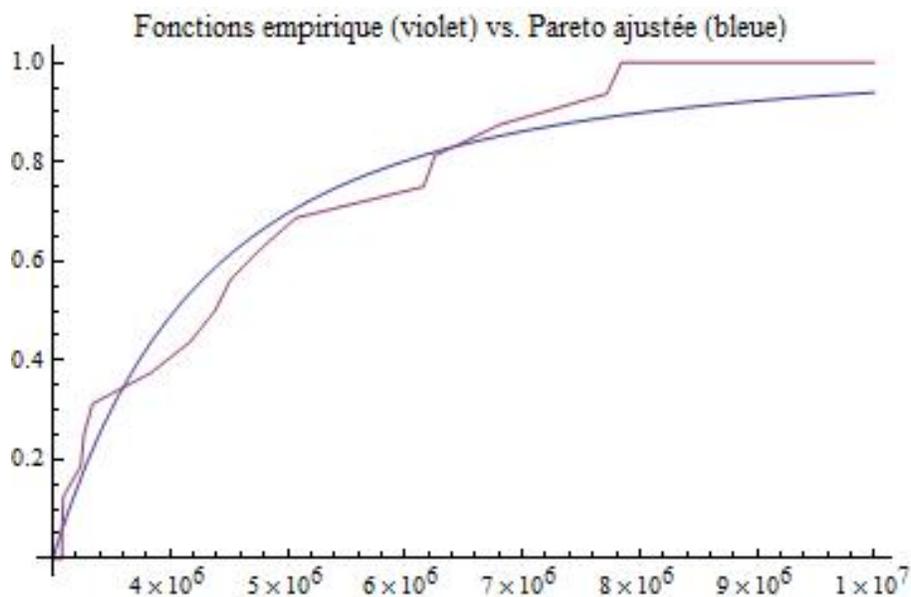


FIGURE 13.7 – Fonctions de distribution empirique (violet) vs. Pareto ajustée (bleue)

14 Incertitude des paramètres de la sévérité

Comme au moment de l'analyse de la fréquence, la question de l'incertitude des paramètres des lois de sévérité ajustées aux échantillons de sinistres se pose. La manière la plus simple de la prendre en compte est d'appliquer un bootstrap paramétrique sur la loi de sévérité ajustée sur l'échantillon. La méthode consiste rappelons-le à approximer la distribution des estimateurs des paramètres en échantillonnant un grand nombre de fois à partir de la loi ajustée de départ, et d'estimer à chaque fois les paramètres de la loi de sévérité sur l'échantillon généré.

Dans le cas de la sévérité, l'incertitude des paramètres impacte différemment le tarif des tranches suivant leur hauteur. Ceci tient au fait qu'une des composantes de la prime pure à la tranche est l'aire au-dessus de la distribution cumulée de sévérité calculée entre la franchise et la limite de la tranche.

Afin de prendre en compte l'incertitude sur le paramètre de Pareto, on réalise le bootstrap paramétrique de la loi sur la base d'un échantillon des 16 sinistres, ce qui conduit à la simulation de 10 000 valeurs de α suivante :

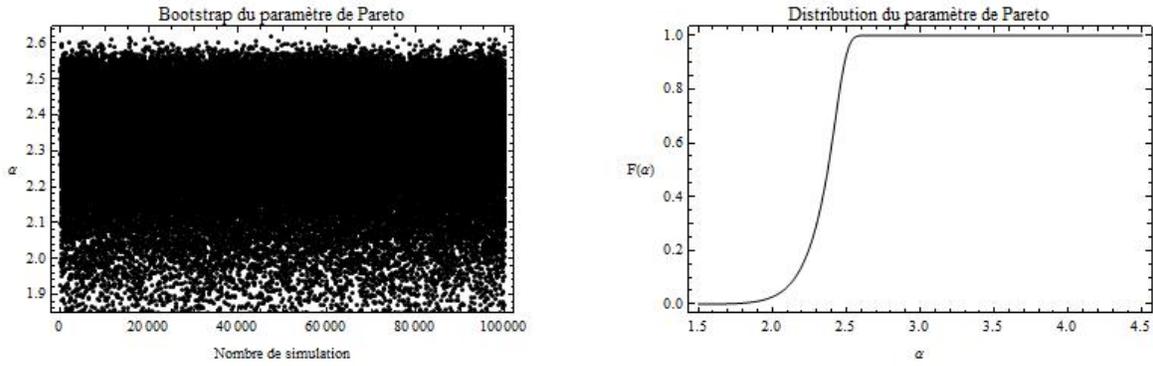


FIGURE 14.1 – Bootstrap paramétrique du paramètre alpha de Pareto

ce qui donne pour espérance et coefficient de variation de α :

$$E(\alpha) = 2.48$$

$$\frac{\sigma(\alpha)}{E(\alpha)} = 27.3\%$$

On rappelle ici les formules de détermination des espérances et variances des primes pure pour une tranche C XS F sachant que la distribution de sévérité ajustée au seuil X_0 est une loi de Pareto de paramètres α et X_0 dont la fonction de distribution s'écrit : $F_{P(X_0, \alpha)}(x) = 1 - (\frac{x}{X_0})^{-\alpha}$. Par ailleurs, le caractère aléatoire du paramètre de forme α de la Pareto implique le fait que $E(Y) = \int_F^L (1 - F_{P(X_0, \alpha)}(x)) dx$ et donc l'estimateur de la prime pure PP_{expe} sont des variables aléatoires.

avec une formule fermée pour la surface au-dessus de la distribution de Pareto entre la franchise F et la limite L de la tranche lorsque le paramètre α est connu :

$$E(Y) = \int_F^L (1 - F_{P(X_0, \alpha)}(x)) dx = \begin{cases} \frac{(F \times (\frac{F}{X_0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X_0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} & \alpha \neq 1 \\ X_0 \text{Log}(\frac{L}{F}) & \alpha = 1 \end{cases}$$

Dans le cas de la prise en compte de l'incertitude du ou des paramètres de sévérité, l'espérance de la charge à la tranche devient une variable aléatoire dont on peut tracer les caractéristiques (espérances, écart type, coefficient de variation et distribution complète) pour les trois tranches :

BOOTSTRAP	Analyse de l'estimateur de la CHARGE A LA TRANCHE (M€)		
	T1 - 3.5 XS 6.5	T2 - 20 XS 10	T3 - 45 XS 30
Espérance	1.377	0.351	0.078
Ecart Type	0.114	0.094	0.039
CoV	8.3%	26.7%	50.3%

Distribution de Probabilité cumulée			
0	1.179	0.219	0.034
5%	1.250	0.260	0.046
10%	1.266	0.270	0.049
15%	1.278	0.278	0.051
20%	1.289	0.285	0.053
25%	1.299	0.291	0.055
30%	1.308	0.297	0.057
35%	1.317	0.303	0.059
40%	1.327	0.310	0.061
45%	1.337	0.317	0.063
50%	1.348	0.325	0.066
55%	1.360	0.333	0.069
60%	1.374	0.343	0.072
65%	1.389	0.354	0.076
70%	1.406	0.366	0.080
75%	1.426	0.382	0.086
80%	1.450	0.401	0.093
85%	1.482	0.427	0.103
90%	1.526	0.463	0.118
95%	1.601	0.532	0.148

Delta (Quantile 95%, Espérance)	16.3%	51.3%	90.5%
---------------------------------	-------	-------	-------

FIGURE 14.2 – Analyse estimateur de la charge à la tranche

Ce tableau révèle que plus la tranche est élevée, plus l'incertitude de paramètre influe sur l'incertitude de la charge individuelle à la tranche. On passe d'un coefficient de variation de 8.3% sur la tranche basse T1 à 26.7% sur la T2 et 50.3% sur la T3. De la même façon que dans le cas de la prise en compte de l'incertitude des paramètres de la fréquence, une attitude prudente consisterait à choisir le quantile à 95% plutôt que la moyenne comme charge individuelle à la tranche. Nous n'aurions dans ce cas que 5% de probabilité de voir la moyenne de la charge à la tranche dépasser la valeur choisie pour le calcul de la prime pure. Cette assurance ferait en revanche augmenter de 16.3%, 51.5% et 89.5% la charge annuelle à la tranche pour les T1, T2 et T3 respectivement, ce qui ne manquerait pas d'avoir d'importantes conséquences sur la valeur des primes pures calculées sur les tranches.

Le chapitre suivant vise à mettre en exergue l'impact qu'a la prise en compte ou non de l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité sur les primes pures des tranches à tarifier du cas pratique.

15 Résultats de primes pures d'expérience

Nous rappelons tout d'abord la formule de l'estimateur de la prime pure des tranches dans le cas d'une Binomiale Négative choisie comme fréquence et d'une Pareto choisie comme loi de sévérité :

$$PP_{\hat{expe}} = E(N/\lambda, p)E(Y/\alpha)$$

$$PP_{\hat{expe}} = \lambda \int_F^L (1 - F_{P(X0, \alpha)}(x)) dx = \lambda \frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1}$$

Ce qui permet dans les différents cas (avec ou sans incertitude de fréquence et de sévérité) d'établir les distributions de cette estimateur et en particulier des deux premiers moments :

Cas sans incertitude :

$$E(PP_{\hat{expe}}) = \hat{\lambda} \int_F^L (1 - F_{P(X0, \hat{\alpha})}(x)) dx$$

$$V(PP_{\hat{expe}}) = 0$$

Cas avec incertitude du paramètre de fréquence :

$$E(PP_{\hat{expe}}) = E_{\lambda}(\lambda) \frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\hat{\alpha}} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\hat{\alpha}})}{\hat{\alpha} - 1}$$

$$V(PP_{\hat{expe}}) = V_{\lambda}(\lambda) \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\hat{\alpha}} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\hat{\alpha}})}{\hat{\alpha} - 1} \right)^2$$

Cas avec incertitude du paramètre de sévérité :

$$E(PP_{\hat{expe}}) = \hat{\lambda} E_{\alpha} \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} \right)$$

$$V(PP_{\hat{expe}}) = \hat{\lambda}^2 V_{\alpha} \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} \right)$$

Cas avec incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité :

$$E(PP_{\hat{expe}}) = E_{\lambda}(\lambda) E_{\alpha} \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} \right)$$

$$V(PP_{\hat{expe}}) = V_{\lambda}(\lambda) \left(V_{\alpha} \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} \right) \right)^2 + E_{\alpha} \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} \right)^2 + E_{\lambda}(\lambda)^2 V_{\alpha} \left(\frac{(F \times (\frac{F}{X0})^{-\alpha} - L \times (\frac{L}{X0})^{-\alpha})}{\alpha - 1} \right)$$

Cela permet aussi de dresser le tableau final des résultats de primes pures sur expérience pour les trois tranches suivant que l'on prend en compte l'incertitude de paramètres ou pas, sur la fréquence et/ou la sévérité et suivant les méthodes bootstrap ou bayésienne pour la fréquence :

Analyse de l'estimateur de la PRIME PURE DES TRANCHES

Espérance PRIME PURE en M€	T1 - 3.5 XS 6.5	T2 - 20 XS 10	T3 - 45 XS 30
Sans incertitude	3.607	0.906	0.192
incertitude de sévérité	3.602	0.919	0.202
incertitude de fréquence (Bootstrap)	3.682	0.925	0.196
incertitudes de fréquence (Bootstrap) / sévérité	3.678	0.938	0.207
incertitude de fréquence (Bayes)	4.296	1.080	0.228
incertitudes de fréquence (Bayes) / sévérité	4.291	1.095	0.242

Coefficient de Variation PRIME PURE en %	T1 - 3.5 XS 6.5	T2 - 20 XS 10	T3 - 45 XS 30
Sans incertitude	0.0%	0.0%	0.0%
incertitude de sévérité	8.3%	26.7%	50.3%
incertitude de fréquence (Bootstrap)	25.4%	25.4%	25.4%
incertitudes de fréquence (Bootstrap) / sévérité	26.7%	37.4%	57.6%
incertitude de fréquence (Bayes)	40.8%	40.8%	40.8%
incertitudes de fréquence (Bayes) / sévérité	41.8%	50.2%	68.5%

Quantile 95% PRIME PURE en M€	T1 - 3.5 XS 6.5	T2 - 20 XS 10	T3 - 45 XS 30
Sans incertitude	3.607	0.906	0.192
incertitude de sévérité	4.189	1.391	0.387
incertitude de fréquence (Bootstrap)	5.362	1.348	0.285
incertitudes de fréquence (Bootstrap) / sévérité	5.405	1.578	0.418
incertitude de fréquence (Bayes)	7.075	1.778	0.376
incertitudes de fréquence (Bayes) / sévérité	7.176	2.034	0.521

Δ(Quantile 95% - Espérance) PRIME PURE en %	T1 - 3.5 XS 6.5	T2 - 20 XS 10	T3 - 45 XS 30
Sans incertitude	0.0%	0.0%	0.0%
incertitude de sévérité	16.3%	51.3%	90.5%
incertitude de fréquence (Bootstrap)	45.6%	45.6%	45.6%
incertitudes de fréquence (Bootstrap) / sévérité	47.0%	68.2%	101.7%
incertitude de fréquence (Bayes)	64.7%	64.7%	64.7%
incertitudes de fréquence (Bayes) / sévérité	67.2%	85.8%	115.5%

Δ(Quantile 95% - Espérance(sans incertitude)) PRIME PURE en %	T1 - 3.5 XS 6.5	T2 - 20 XS 10	T3 - 45 XS 30
Sans incertitude	0.0%	0.0%	0.0%
incertitude de sévérité	16.1%	53.5%	101.6%
incertitude de fréquence (Bootstrap)	48.7%	48.8%	48.4%
incertitudes de fréquence (Bootstrap) / sévérité	49.8%	74.2%	117.7%
incertitude de fréquence (Bayes)	96.1%	96.2%	95.8%
incertitudes de fréquence (Bayes) / sévérité	98.9%	124.5%	171.4%

TABLE 15.1 – Analyse de l'estimateur de la prime pure sur expérience sur les trois tranches (cas pratique)

Les quatre premiers tableaux montrent les résultats de moyenne, de coefficient de variation, de quantile à 95%, et d'écart entre ce quantile à 95% et l'espérance de l'estimateur de la prime pure sur base expérience pour les trois tranches à tarifier du cas pratique et les différents cas de prise en compte d'incertitude de paramètres traités dans ce mémoire :

- sans incertitude,

- avec incertitude du paramètre de sévérité uniquement,
- avec incertitude des paramètres de fréquence (via méthode bootstrap) uniquement,
- avec incertitude des paramètres de fréquence (via méthode bootstrap) et incertitude du paramètre de sévérité
- avec incertitude des paramètres de fréquence (via méthode bayésienne) uniquement,
- avec incertitude des paramètres de fréquence (via méthode bayésienne) et incertitude du paramètre de sévérité

Le dernier tableau montre les écarts entre le quantile à 95% de l'estimateur et le calcul de la prime pure sans incertitude.

On retrouve naturellement les mêmes coefficients de variation sur la prime pure que sur la moyenne de la fréquence lorsque seule l'incertitude des paramètres de fréquence est prise en compte. Ils sont égaux à 25.4% avec la méthode bootstrap et 40.8% avec la méthode bayésienne. Le coefficient de variation est constant dans les tranches puisque c'est l'incertitude de fréquence et non de sévérité qui est prise en compte. De la même façon, nous obtenons les mêmes écarts entre le quantile à 95% et l'espérance pour la prime pure et la moyenne de la fréquence. Ils sont égaux à 45.6% (bootstrap) et 64.7% (bayésien) respectivement.

On mesure dans le dernier tableau les écarts entre le quantile à 95% de l'estimateur de la prime pure et la prime pure calculée sans incertitude. On trouve entre 48.4% et 48.7 suivant les tranches avec le bootstrap et entre 95.8% et 96.2% suivant les tranches avec la méthode bayésienne. Cette augmentation des écarts, légère dans le cas du bootstrap et très prononcée dans le cas bayésien vient du fait que la méthode bayésienne introduit nous l'avons vu un écart significatif entre la valeur (fréquence ou prime pure) sans incertitude et la moyenne de l'estimateur de la valeur (fréquence ou prime pure) avec prise en compte de l'incertitude via la simulation dans la densité de probabilité a posteriori des paramètres.

En définitive, dans le cas de la prise en compte uniquement de l'incertitude des paramètres de fréquence avec la méthode bayésienne sur le cas pratique, nous pourrions trouver une prime pure jusqu'à près de 100% (entre 95.8% et 96.2%) supérieure à la prime pure calculée sans incertitude soit, 7.075 M€ au lieu de 3.607 M€ pour la tranche 1, 1.778 M€ au lieu de 0.906 M€ sur la tranche 2 et 0.376 M€ au lieu de 0.192 M€ sur la tranche 3 très haute. Il y a par ailleurs confirmation sur la prime pure que l'incertitude de Bayes est plus forte que l'incertitude par le bootstrap, puisqu'on trouve 5.362 M€, 1.348 M€ et 0.285 M€ dans ce dernier cas sur les tranches 1, 2 et 3 respectivement.

Dans le cas de la prise en compte de l'incertitude de sévérité uniquement, on retrouve les mêmes coefficients de variation et écarts entre quantile à 95% et espérance de l'estimateur pour la prime pure et la charge annuelle à la tranche. Ces valeurs augmentent plus les tranches sont élevées, de 8.3% à 50.3% en passant par 26.7% sur le coefficient de variation et de 16.3% à 90.5% en passant par 51.3% sur l'écart entre quantile à 95% et espérance. Ceci confirme l'augmentation de l'incertitude plus on monte dans les tranches non traversées par l'expérience. On mesure par ailleurs dans le dernier tableau les écarts entre le quantile à 95% de l'estimateur de la prime pure et la prime pure calculée sans incertitude. On trouve 16.1%, 53.5% et 101.6% pour les tranches 1, 2 et 3.

Dans le cas de la prise en compte uniquement de l'incertitude du paramètre de sévérité avec la méthode bootstrap sur le cas pratique, nous pourrions en définitive trouver une prime pure jusqu'à plus de 100% (égal à 101.6% sur la tranche 3) supérieure à la prime pure calculée sans incertitude, avec une incertitude moindre pour les tranches plus basse, soit 4.189 M€ au lieu de 3.607 M€ pour la tranche 1, 1.391 M€ au lieu de 0.906 M€ sur la tranche 2 et 0.387 M€ au lieu de 0.192 M€ sur la tranche 3 très haute.

Enfin la prise en compte de l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité conduirait dans le cas le plus extrême (mesure avec la méthode bayésienne sur la fréquence) à des estimations de prime pure presque toujours 100% supérieure aux prime pure sans incertitude. On trouve + 98.9% sur la tranche 1, + 124.5% sur la tranche 2 et jusqu'à + 171.4% sur la tranche 3. En montant, nous aurions des primes pures de 7.176 M€ au lieu de 3.607 M€ pour la tranche 1, 2.034 M€ au lieu de 0.906 M€ pour la tranche 2 et 0.521 M€ au lieu de 0.192 M€ pour la tranche 3.

Ces résultats sur le cas pratique tendent à prouver qu'on ne peut pas faire abstraction de la prise en compte de l'incertitude des paramètres des modèles de fréquence et sévérité ajustées en tarification de réassurance. L'impact sur la prime pure est trop significatif pour ne pas prendre en compte cette incertitude. Le seuil de matérialité est largement dépassé sur la prime pure, on sait aussi qu'il serait très significatif sur le capital alloué au vu des résultats de variance des estimateurs. Une prochaine étude pourrait montrer l'impact sur le capital alloué également et donc sur la mesure du capital requis lié à la souscription des traités de réassurance non proportionnel.

Dans les chapitres suivants, nous présentons une autre façon de déterminer la distribution de sévérité en utilisant les données d'exposition plutôt que les données d'expérience. Nous proposons aussi une méthode de mélange en crédibilité des estimations de prime pure sur expérience et sur exposition, ce qui nous le verrons permet d'atténuer l'effet d'incertitude des paramètres sur la prime pure.

16 Utilisation des distributions de sévérité issues des données d'exposition

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
	Longue	Cat					
Proportionnelle							

FIGURE 16.1 – XS par Risque / Sévérité sur la base des données d'exposition

Dans le cas des couvertures XS par risque uniquement, l'actuaire peut, s'il dispose des informations relatives au profil de risque du portefeuille, mener une tarification sur exposition.

La tarification sur expérience consiste à établir le prix des affaires en s'appuyant sur une information de sinistralité du passé. La tarification sur exposition repose elle uniquement sur les informations actuelles du portefeuille d'assurance cédé. Elle fait office d'alternative intéressante lorsque l'actuaire dispose de toutes les données pour la développer. Elle peut servir à venir conforter, remplacer ou même compléter la tarification sur expérience ou offrir un choix intéressant en ce qui concerne la dérivation de la distribution de sinistralité par risque.

Le profil de risque est caractérisé par un découpage du portefeuille cédé en un ensemble de bandes de sommes assurées pour lesquelles les risques sont considérés comme homogènes. Cette hypothèse d'homogénéité permet de ne travailler qu'avec une seule distribution des sinistres individuels dans chacune des bandes. Le regroupement des risques dans des bandes de sommes assurées est inévitable. Il est en général impossible de modéliser un par un les risques du portefeuille tant ces risques peuvent être nombreux.

En sus du découpage du profil de risque en n bandes de sommes assurées, il faut connaître l'allocation $\{w_k\}_{k=1,\dots,n}$ de la prime d'assurance totale P ainsi que les ratios de sinistres à primes, les "loss ratios", $\{LR_k\}_{k=1,\dots,n}$, dans les tranches. Ces deux données permettent naturellement de déduire la prime pure PP_k comme espérance des sinistres annuels $E(S_k)$ dans chacune des bandes :

$$PP_k = E(S_k) = Pw_kLR_k$$

Les poids de primes ainsi que les loss ratios par bande sont considérés comme étant nets de franchises d'assurance.

16.1 Modèle stochastique sous-jacent

Par hypothèse, les risques d'une bande de sommes assurées sont homogènes, indépendants et identiquement distribués. On note X_k la variable aléatoire associée au montant de sinistre individuel dans la bande k et N_k la variable aléatoire associée au nombre de sinistres annuels dans la bande. Le modèle collectif permet d'écrire la sinistralité annuelle totale S_k dans la tranche comme suit :

$$S_k = \sum_{i=1}^{N_k} X_{k,i}$$

$$E(S_k) = E(N_k)E(X_k)$$

Si $E(X_k)$ est connu, on en déduit l'espérance du nombre de sinistres :

$$E(N_k) = \frac{E(S_k)}{E(X_k)}$$

L'espérance du nombre de sinistres $E(N)$ pour le profil de risque est égale à la somme des espérances du nombre de sinistres dans chaque bande de sommes assurées :

$$E(N) = \sum_{k=1}^n E(N_k)$$

Quant à la distribution du montant de sinistre individuel F_X pour le profil de risque, elle est déduite par mélange des distributions de montant de sinistre individuel par bande de somme, pondérés par les espérances de sinistres par bande :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F_X(x) = \sum_{k=1}^n \frac{E(N_k)}{E(N)} F_{X_k}(x)$$

avec F_{X_k} la fonction de distribution cumulée de X_k .

Finalement la prime pure d'une tranche de réassurance C XS F s'obtient grâce aux deux composantes :

$$PP = E(N) \times \int_F^{C+F} (1 - F_X(x)) dx \quad (16.1)$$

Ces équations montrent que la difficulté de la tarification sur exposition réside dans l'attribution d'une distribution de sévérité individuelle réaliste pour chaque bande de sommes assurées. Les marchés européens et américains, du fait de leurs spécificités (ex : types de construction en incendie, limites d'assurance en accident) ont développé des fonctions de distribution de sévérité très différentes.

16.2 Les contrats XS Incendie en Europe

En incendie, la somme assurée est une bonne mesure de risque en ce sens que le niveau de destruction de la somme assurée est le meilleur indicateur du niveau de sévérité d'un sinistre touchant le risque. Il est par ailleurs communément admis l'hypothèse que les risques de même niveau de somme assurée, donc appartenant à la même bande de sommes assurées, ont des taux de destruction de la somme assurée identiquement distribués. En incendie, le taux de destruction des sommes assurées des risques d'une bande de sommes assurées, noté $\frac{X_k}{SA_k}$, est indépendant du risque. SA_k correspond à la sommes assurée la plus propre à refléter les sommes assurées des risques dans une bande. Il peut s'agir par défaut de la moyenne des sommes assurées des risques dans la bande.

Pour une tranche de réassurance illimitée, $+\infty XS D$, et une bande de somme assurée k , la variable aléatoire associée au montant de sinistre individuel retenu par la cédante est $Min(X_k, D)$ et l'espérance de sinistre annuel retenu par la cédante $E(R_k)$ s'écrit :

$$E(R_k) = E(N_k)E(Min(X_k, D))$$

On en déduit le ratio de prime pure retenu par la cédante comme fonction de la franchise D comme suit :

$$E(R_k) = \frac{E(N_k)E(Min(X_k, D))}{E(N_k)E(X_k)} E(S_k)$$

$$E(R_k) = \frac{E(Min(X_k, D))}{E(X_k)} E(S_k)$$

$$\frac{E(R_k)}{E(S_k)} = \frac{E(Min(X_k, D))}{E(X_k)}$$

$$\frac{E(R_k)}{E(S_k)} = \frac{\int_0^D (1 - F_{X_k}(x)) dx}{\int_0^{SA_k} (1 - F_{X_k}(x)) dx}$$

Nous prenons désormais la variable taux de destruction $X_k^* = \frac{X_k}{SA_k}$ dont la fonction de distribution est définie sur $[0, 1]$,

$$\forall u \in [0, 1], \quad F_{X_k^*}(u) = F_{X_k}(SA_k \times u)$$

Le ratio de prime pure retenu par la cédante s'écrit alors :

$$\frac{E(R_k)}{E(S_k)} = \frac{\int_0^D (1 - F_{X_k^*}(u)) du}{\int_0^1 (1 - F_{X_k^*}(u)) du}$$

Ce ratio présente l'avantage de ne pas changer en cas d'inflation ou de changement de monnaie (passage à l'Euro).

La courbe de cette fonction ratio de prime pure retenu par la cédante est aussi appelée courbe d'exposition. En notant G_k cette fonction définie sur $[0, 1]$:

$$G_k(x) = \frac{\int_0^u (1 - F_{X_k^*}(u)) du}{\int_0^1 (1 - F_{X_k^*}(u)) du}$$

et en dérivant G_k on trouve facilement une relation entre G_k et $F_{X_k^*}$:

$$F_{X_k^*}(u) = \begin{cases} 1 & u = 1 \\ 1 - \frac{G'_k(u)}{G'_k(0)} & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (16.2)$$

puisque

$$G'_k(u) = \frac{1 - F_{X_k^*}(u)}{E(X_k^*)}$$

Les courbes d'exposition étant connues, on en déduit donc l'espérance du nombre de sinistres annuels dans une bande de sommes assurées :

$$\begin{aligned} E(N_k) &= \frac{E(S_k)}{E(X_k)} \\ E(N_k) &= \frac{Pw_k LR_k}{\int_0^{SA_k} (1 - F_{X_k}(x)) dx} \\ E(N_k) &= \frac{Pw_k LR_k}{SA_k \int_0^1 (1 - F_{X_k^*}(u)) du} \end{aligned} \quad (16.3)$$

La courbe du taux de destruction des sommes assurées (courbe d'exposition) étant connue, la fonction de distribution de sévérité individuelle et la prime pure à la tranche XS peuvent être déduites.

Dans [8], l'auteur propose une famille de courbes d'exposition paramétriques, appelée MB-BEFD⁴, qui en faisant varier les deux paramètres, se révèlent très appropriées pour s'ajuster à des courbes d'expositions empiriques. La famille de distribution de sévérité obtenue en appliquant l'équation 16.2 s'écrit :

$$F_{X_k^*}(u) = \begin{cases} 1 & u = 1 \\ 0 & u < 1 \wedge (g = 1 \vee b = 0) \\ 1 - \frac{1}{1+(g-1)u} & u < 1 \wedge b = 1 \wedge g > 1 \\ 1 - b^u & u < 1 \wedge bg = 1 \wedge g > 1 \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-u} + (1-gb)} & u < 1 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge bg \neq 1 \wedge g > 1 \end{cases} \quad (16.4)$$

La dernière sous-classe à deux paramètres b et g qui peuvent se réduire à un seul paramètre c .

$$b_c = b(c) = e^{(3.1-0.15(1+c)c)}$$

$$g_c = g(c) = e^{((0.78+0.12c)c)}$$

4. Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein et Fermi-Dirac distribution

Les courbes historiques de “Swiss Re” et des “Lloyds” peuvent être retrouvées en choisissant des valeurs bien précises de c :

- $c = 0$ correspond à la distribution de sinistre total car $g(0)=1$
- Les quatre courbes définies par $c = \{1.5, 2.0, 3.0, 4.0\}$ coïncident avec les courbes Swiss Re tels que définies dans [8]
- La courbe définie par $c = 5.0$ coïncide très bien avec la courbe Lloyd utilisée pour la tarification des risques industriels.

Pour rappel, le profil de portefeuille du client est comme suit :

	S Amin (€)	S Amax (€)	Nb Risques	%Nb Risques total		SMP (€)	S Amoy (€)	Prime (€)	%Prime total	Loss Ratio	
	0	2,000,000	909,468	98.53%	99.26%	207,067,907,161	227,680	324,820,092	82.41%	87.87%	70%
	2,000,000	3,500,000	6,755	0.73%		17,575,573,818	2,601,861	21,507,068	5.46%		70%
T1	3,500,000	5,000,000	2,437	0.26%	0.58%	10,044,728,149	4,121,760	9,596,777	2.43%	6.73%	70%
	5,000,000	6,000,000	973	0.11%		5,340,481,762	5,488,676	4,616,687	1.17%		70%
	6,000,000	7,000,000	782	0.08%		5,033,979,958	6,437,316	4,460,049	1.13%		70%
	7,000,000	8,000,000	396	0.04%		2,964,831,812	7,486,949	2,521,256	0.64%		70%
	8,000,000	9,000,000	438	0.05%		3,727,697,435	8,510,725	2,927,061	0.74%		70%
	9,000,000	10,000,000	358	0.04%		3,415,108,017	9,539,408	2,398,292	0.61%		70%
		10,000,000	12,500,000	413		0.04%	4,607,959,950	11,157,288	4,635,612		1.18%
T2	12,500,000	15,000,000	367	0.04%	0.15%	5,033,373,582	13,714,914	5,916,429	1.50%	4.64%	70%
	15,000,000	17,500,000	163	0.02%		2,619,005,856	16,067,521	1,996,354	0.51%		70%
	17,500,000	20,000,000	155	0.02%		2,892,074,563	18,658,546	2,087,019	0.53%		70%
	20,000,000	25,000,000	154	0.02%		3,463,994,371	22,493,470	2,340,233	0.59%		70%
	25,000,000	30,000,000	91	0.01%		2,441,256,849	26,826,998	1,302,232	0.33%		70%
T3	30,000,000	35,000,000	42	0.00%	0.01%	1,338,681,782	31,873,376	1,021,988	0.26%	0.76%	70%
	35,000,000	40,000,000	20	0.00%		744,021,859	37,201,093	337,640	0.09%		70%
	40,000,000	45,000,000	15	0.00%		625,244,694	41,682,980	361,880	0.09%		70%
	45,000,000	50,000,000	17	0.00%		798,906,880	46,994,522	363,497	0.09%		70%
	50,000,000	60,000,000	11	0.00%		590,116,753	53,646,978	563,484	0.14%		70%
	60,000,000	70,000,000	4	0.00%		254,650,908	63,662,727	126,818	0.03%		70%
	70,000,000	80,000,000	8	0.00%		567,856,708	70,982,086	229,532	0.06%		70%
Total			923,067		Total			394,130,000			

FIGURE 16.2 – Profil de portefeuille du cas pratique

Les sommes assurées moyennes (SAmoy) calculées des 21 bandes de sommes assurées sont déduites des Sinistres Maximum Possibles (SMP) divisés par les nombres de risque.

Ensuite, nous choisissons la courbe d'exposition MBBEFD SCOR pour les contrats XS property de paramètre $c = 4.2$.

Ceci permet d'obtenir les deux paramètres $b_c = e^{(3.1-0.15.(1+c).c)} = 0.838618$ et $g_c = e^{((0.78+0.12.c).c)} = 219.818$ et de construire la courbe de destruction des sommes assurées $F_{X_k^*}$ par l'équation 16.4.

Puis les fréquences des bandes de sommes assurées $E(N_k)$ sont déduites des primes, loss ratios, sommes assurées moyennes et courbe de destruction de la somme assurée par l'équation 16.3.

Enfin la courbe de distribution de sévérité d'exposition du portefeuille est déduite du mélange pondéré par les fréquences des fonctions de sévérité des bandes : $F_{X_k}(x) = F_{X_k^*}(\frac{x}{SAmoy_k})$:

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{21} \frac{E(N_k)}{E(N)} F_{X_k}(x)$$

avec

$$E(N) = \sum_{k=1}^{21} E(N_k)$$

Enfin les primes pures des tranches de réassurance sont déduites de l'équation 16.1 :

- T1 : $E(P_{expo}^{T1}) = 4.543\text{M€}$
- T2 : $E(P_{expo}^{T2}) = 1.419\text{M€}$
- T3 : $E(P_{expo}^{T3}) = 0.136\text{M€}$

Cinquième partie

Mélange en crédibilité des tarifications expérience et exposition

Nous avons vu précédemment la possibilité de construire des “Risk Process” en fréquence et sévérité sur la base de données d’expérience et d’exposition pour les contrats XS / risque. L’avantage principal de ce type de modélisation est de fournir une modélisation totale du risque au dessus du seuil, assurant une cohérence des taux des diverses tranches du programme de réassurance et la possibilité d’appliquer les méthodes de chargement de sécurité qui reposent en essence sur la volatilité et/ou sur les sinistres rares du risk process. L’actuaire peut de plus obtenir immédiatement le tarif d’une tranche de réassurance additionnelle dont la franchise est au-dessus du seuil de modélisation.

Pour les XS par risque pour lesquels une tarification sur exposition, en sus de la tarification sur expérience, a été menée, il faut savoir quel résultat utiliser en définitive en terme de fréquence et de sévérité et ceci pour chaque tranche de réassurance du programme.

On propose donc à l’actuaire de choisir un pivot, une des franchises des tranches de réassurance du programme, qui correspond au montant en dessous duquel il a totalement confiance dans le résultat sur expérience et au dessus duquel il pense qu’il faut mélanger les résultats sur expérience et sur exposition. Il peut déterminer ce pivot sur la base du caractère plus ou moins travaillant des tranches des réassurance du programme. Pour les tranches de réassurance travaillantes (totalement traversées par un ou plusieurs sinistres), l’incertitude du résultat de tarification sur expérience est bien évidemment moindre que pour les tranches partiellement travaillantes (partiellement traversées par un ou plusieurs sinistres) voire absolument pas travaillantes (pas du tout touchées par les sinistres d’expérience).

L’introduction d’un pivot définit une zone au dessus de laquelle on peut définir une approche en crédibilité mixant résultats sur expérience et sur exposition pour la tarification des tranches au dessus du pivot.

17 Crédibilité d’expert sur l’espérance de la fréquence

Une première approche consiste à imposer que la sévérité au dessus du pivot soit celle obtenue sur la base exposition et de proposer à l’actuaire d’appliquer le facteur de crédibilité Z qu’il souhaite aux espérances des fréquences sur exposition et sur expérience de la première tranche de réassurance au dessus du pivot F_{pivot} :

$$E(N/X \geq F_{pivot}) = Z.E(N_{expé}/X_{expé} \geq F_{pivot}) + (1 - Z).E(N_{expo}/X_{expo} \geq F_{pivot})$$

$$E(N/X \geq F_{pivot}) = Z.E(N_{expé})P(X_{expé} \geq F_{pivot}) + (1 - Z).E(N_{expo})P(X_{expo} \geq F_{pivot})$$

$$E(N/X \geq F_{pivot}) = Z.E(N_{expé})(1 - F_{X_{expé}}(F_{pivot})) + (1 - Z).E(N_{expo})(1 - F_{X_{expo}}(F_{pivot}))$$

Il est aussi invité à choisir la loi de la fréquence entre loi de Poisson et la loi Binomiale Négative et son facteur de dispersion autour de la moyenne. La fonction de sévérité sur exposition est tronquée au seuil F_{pivot} , ce qui permet finalement d'obtenir un risk process complet {fréquence, sévérité, seuil F_{pivot} } utilisable pour la tarification des tranches de réassurance au dessus du pivot.

18 Estimateur de crédibilité complet des primes pures

Une deuxième approche, consisterait à calculer la prime pure $\hat{P}P$ d'une tranche au-dessus du pivot comme la moyenne pondérée par un facteur de crédibilité w des deux estimateurs de primes pures, sur base expérience $P\hat{P}_{expe}$ et sur base exposition $P\hat{P}_{expo}$:

$$\hat{P}P = w.P\hat{P}_{expe} + (1 - w).P\hat{P}_{expo}$$

La variance de cette estimateur de crédibilité s'écrit

$$V(\hat{P}P) = w^2.V(P\hat{P}_{expe}) + 2.w.(1 - w)CoV(P\hat{P}_{expe}, P\hat{P}_{expo}) + (1 - w)^2.V(P\hat{P}_{expo}) \quad (18.1)$$

La valeur optimale du facteur de crédibilité peut être trouvée en minimisant la variance de l'estimateur de crédibilité $V(\hat{P}P)$, donc en annulant la dérivée première de $V(\hat{P}P)$ par rapport à w , $\frac{\partial V(\hat{P}P)}{\partial w} = 0$:

$$\hat{w} = \frac{V(P\hat{P}_{expo}) - CoV(P\hat{P}_{expe}, P\hat{P}_{expo})}{V(P\hat{P}_{expo}) + V(P\hat{P}_{expe}) - 2CoV(P\hat{P}_{expe}, P\hat{P}_{expo})}$$

ce qui en remplaçant dans 18.1 permet d'obtenir :

$$V(\hat{P}P) = \frac{V(P\hat{P}_{expo}).V(P\hat{P}_{expe}) - CoV(P\hat{P}_{expe}, P\hat{P}_{expo})^2}{V(P\hat{P}_{expo}) + V(P\hat{P}_{expe}) - 2CoV(P\hat{P}_{expe}, P\hat{P}_{expo})}$$

Si on considère ensuite que les tarifications sur expérience et sur exposition sont indépendantes alors $CoV(P\hat{P}_{expe}, P\hat{P}_{expo}) = 0$ et le facteur de crédibilité et la variance de l'estimateur de crédibilité deviennent :

$$\hat{w} = \frac{V(P\hat{P}_{expo})}{V(P\hat{P}_{expo}) + V(P\hat{P}_{expe})}$$

$$V(\hat{P}P) = \frac{V(P\hat{P}_{expo}).V(P\hat{P}_{expe})}{V(P\hat{P}_{expo}) + V(P\hat{P}_{expe})}$$

On remarquera que la variance de l'estimateur de crédibilité est inférieure à la variance de l'estimateur sur base expérience $V(\hat{P}P) \leq V(P\hat{P}_{expe})$ et à la variance de l'estimateur sur base exposition $V(\hat{P}P) \leq V(P\hat{P}_{expo})$.

En ce qui concerne la variance de l'estimateur de la prime pure d'expérience d'une tranche C XS F sans clause de limitation annuelle :

$$V(P\hat{P}_{expe}) = V(E(N/\theta_f)E(Y/\theta_s))$$

avec $Y = \text{Min}(C, \text{Max}(X - F, 0))$

La variance de l'estimateur de la prime pure sur base expérience tient en grande partie à l'incertitude des paramètres des lois de fréquence et de sévérité retenue au cours de la modélisation.

$E(N/\theta_f)$ et $E(Y/\theta_s) = \int_F^{C+F} (1 - F_X^{\theta_s}(x))dx$ sont des variables aléatoires du fait de l'incertitude des paramètres de la fréquence θ_f pour l'une et du fait de l'incertitude des paramètres de sévérité θ_s pour l'autre.

Elles sont par ailleurs des variables aléatoires indépendantes ce qui permet de décliner la variance du produit des variables aléatoires en :

$$\begin{aligned} V(P\hat{P}_{expe}) = & V_{\theta_f}(E(N/\theta_f)).V_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) \\ & + E_{\theta_f}(E(N/\theta_f))^2 V_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) \\ & + V_{\theta_f}(E(N/\theta_f))E_{\theta_s}(E(Y/\theta_s))^2 \end{aligned}$$

Remarque : pour la Poisson, la Binomiale Négative ou la Poisson Généralisée, $E(N/\theta_f) = E(N/\lambda, \cdot) = \lambda$, donc $E_{\theta_f}(E(N/\theta_f))^2 = E_\lambda(\lambda)$ et $V_{\theta_f}(E(N/\theta_f))^2 = V_\lambda(\lambda)$

Par ailleurs, en ce qui concerne la sévérité :

$$E_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) = E_{\theta_s}(\int_F^L (1 - F_X^{\theta_s}(x))dx)$$

$$V_{\theta_s}(E(Y/\theta_s)) = V_{\theta_s}(\int_F^L (1 - F_X^{\theta_s}(x))dx)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} V(P\hat{P}_{expe}) = & V_{\theta_f}(E(N/\theta_f))(V_{\theta_s}(\int_F^L (1 - F_X^{\theta_s}(x))dx) + (E_{\theta_s}(\int_F^L (1 - F_X^{\theta_s}(x))dx))^2) \\ & + E_{\theta_f}(E(N/\theta_f))^2 V_{\theta_s}(\int_F^L (1 - F_X^{\theta_s}(x))dx) \end{aligned}$$

On remarquera que le paramètre de dispersion des lois de fréquence sur-dispersées, et donc l'incertitude autour de ce paramètre, n'influe pas sur la variance de l'estimateur de la prime pure lorsqu'il n'y a pas de clause de limitation annuelle au contrat. Dans le cas de présence de clauses de limitations annuelles dans le contrat, la variable aléatoire fonction de distribution agrégée $F_{Z(\theta_f, \theta_s)}$ aura une distribution et donc des moments dépendants de tous les paramètres y compris la dispersion de la fréquence :

$$E(P\hat{P}_{expe}) = E_{\theta_f, \theta_s} \left(\int_{AAD}^{AAL} (1 - F_{Z(\theta_f, \theta_s)}(x))dx \right)$$

$$V(P\hat{P}_{expe}) = V_{\theta_f, \theta_s} \left(\int_{AAD}^{AAL} (1 - F_{Z(\theta_f, \theta_s)}(x))dx \right)$$

En ce qui concerne la variance de l'estimateur de la prime pure sur base exposition, on peut

fixer l'écart type à un certain pourcentage γ de l'espérance, par exemple 25%, pour prendre en compte l'incertitude liée à une déviation du risque du client par rapport au risque de l'industrie représenté par les courbes d'exposition utilisées dans cette tarification.

$$\sigma(P\hat{P}_{expo}) = \gamma E(P\hat{P}_{expo})$$

$$V(P\hat{P}_{expo}) = \gamma^2 E(P\hat{P}_{expo})^2$$

Le cas pratique présenté en partie VII utilise cette dernière approche pour mélanger la tarification sur expérience et sur exposition. On y montre comment le facteur de crédibilité, et donc le poids de l'expérience, évolue en fonction de la hauteur des tranches de réassurance à coter.

On fait le choix d'une incertitude de paramètres de fréquence suivant l'approche bayésienne ainsi qu'une incertitude de paramètre de sévérité, ce qui donne d'après les tableaux de résultats de primes pures sur expérience ci-dessus :

- T1 : $E(PP_{expe}^{T1}) = 4.210\text{M€}$
- T2 : $E(PP_{expe}^{T2}) = 1.305 \text{ M€}$
- T3 : $E(PP_{expe}^{T3}) = 0.422\text{M€}$

On applique enfin la crédibilité aux primes pures des trois tranches :

$$E(PP) = w.E(PP_{expe}) + (1 - w).E(PP_{expo})$$

$$\hat{w} = \frac{V(PP_{expo})}{V(PP_{expo}) + V(PP_{expe})}$$

et

$$V(\hat{P}) = \frac{V(PP_{expo}).V(PP_{expe})}{V(PP_{expo}) + V(PP_{expe})}$$

sachant que $V(PP_{expo}) = \gamma^2 E(PP_{expo})^2$ dépend du paramètre γ d'incertitude de la prime pure d'exposition.

Les tableaux suivants montrent les résultats de crédibilité de la tarification sur expérience, d'espérances et de coefficients de variation des primes pures crédibilisées des tranches en fonction du paramètre d'incertitude d'exposition choisi pour les trois tranches :

Facteurs de crédibilité tarification sur expérience			
en %	T1: 6,5 XS 3,5	T2: 20 XS 10	T3: 45 XS 30
$\gamma \rightarrow +\infty$	100,0%	100,0%	100,0%
$\gamma = 100 \%$	86,5%	87,0%	40,1%
$\gamma = 50 \%$	61,6%	62,5%	14,4%
$\gamma = 25 \%$	28,6%	29,4%	4,0%
$\gamma = 10 \%$	6,0%	6,3%	0,7%
$\gamma = 1 \%$	1,6%	1,6%	0,2%
$\gamma = 0 \%$	0,0%	0,0%	0,0%

TABLE 18.1 – facteurs de crédibilité tarification sur expérience

Espérances Primes Pures Crédibilisées			
en M€	T1: 6,5 XS 3,5	T2: 20 XS 10	T3: 45 XS 30
$\gamma \rightarrow +\infty$	4,291	1,095	0,242
$\gamma = 100\%$	4,325	1,137	0,178
$\gamma = 50\%$	4,388	1,216	0,151
$\gamma = 25\%$	4,471	1,324	0,140
$\gamma = 10\%$	4,528	1,399	0,136
$\gamma = 1\%$	4,539	1,414	0,136
$\gamma = 0\%$	4,543	1,419	0,136

TABLE 18.2 – Résultats d’espérances de Primes Pures crédibilisées

Coefficient de Variation Primes Pures Crédibilisées			
en %	T1: 6,5 XS 3,5	T2: 20 XS 10	T3: 45 XS 30
$\gamma \rightarrow +\infty$	41,8%	50,2%	68,5%
$\gamma = 100\%$	38,6%	45,1%	58,9%
$\gamma = 50\%$	32,1%	35,7%	41,6%
$\gamma = 25\%$	21,5%	22,5%	23,7%
$\gamma = 10\%$	9,7%	9,8%	10,0%
$\gamma = 1\%$	5,0%	5,0%	5,0%
$\gamma = 0\%$	0,0%	0,0%	0,0%

TABLE 18.3 – Coefficients de variation des Primes Pures crédibilisées

Lorsque l’incertitude sur la tarification sur exposition tend vers l’infini, la crédibilité du tarif sur expérience est maximale (100%), et on retrouve les primes pures et coefficients de variation de la tarification sur expérience sur toutes les tranches. Plus l’incertitude sur la tarification sur exposition diminue, plus la crédibilité du tarif sur expérience diminue (pour tendre vers 0) quelque soit la tranche et plus on se rapproche du tarif sur exposition. Comme nous avons pris en compte l’incertitude du paramètre de sévérité pour la tarification sur expérience, on remarque toujours une crédibilité dégressive du tarif sur expérience au fur et à mesure que l’on monte dans les tranches.

Si on fixait à 25% le paramètre d’incertitude sur le tarif sur exposition, nous aurions dans ce cas des coefficients de variation de 21.5%, 22.5% et 23.7% sur les tranches 1, 2, et 3 respectivement au lieu de 41.8%, 50.2% et 68.5% sur ces mêmes tranches lorsque seule la tarification sur expérience est réalisée.

L’incertitude sur la prime pure serait par conséquent clairement réduite grâce à la prise en compte de cette proposition de mélange en crédibilité de la tarification sur expérience et sur exposition.

Par souci de concision, nous avons indiqué en annexes 6 et 7 les possibilités de modélisation des sinistres exceptionnels et le mélange des risk process attritionnel et extrêmes.

Conclusion

Au travers des exemples de ce mémoire, nous avons vu à quel point l'incertitude des paramètres de fréquence et de sévérité peut avoir un impact sur le résultat de la prime pure des tranches de réassurance cotées. La quantité de données d'expérience dont les actuaires disposent pour tarifier les traités de réassurance non-proportionnels est souvent faible, ce qui augmente l'incertitude sur le résultat.

Dans ce mémoire, nous avons présenté les outils permettant de modéliser les deux composantes du risque, la fréquence et la sévérité, les méthodes permettant de choisir parmi les différents modèles, ainsi que les techniques bayésienne ou bootstrap paramétrique permettant de mesurer l'incertitude des paramètres de ces deux composantes. Nous avons montré comment tarifier sur base exposition pour compléter la tarification sur base expérience. Nous avons enfin proposé une technique de mélange en crédibilité des deux tarifications qui permet de réduire l'incertitude autour de l'estimation des primes pures.

Nous nous sommes concentrés dans ce mémoire sur la tarification des branches courtes. Dans le cas des branches longues, l'incertitude sur la détermination des patterns de développement pourrait faire l'objet d'une étude à part entière. Une prochaine étude pourrait aussi mesurer l'influence de la prise en compte de l'incertitude des paramètres sur le niveau de capital alloué aux traités de réassurance servant pour le calcul du chargement de sécurité de la prime pure. Dans le cadre d'un modèle interne, il serait également intéressant d'analyser la sensibilité du capital requis pour le risque de souscription à l'incertitude des paramètres de tarification.

Références

- [1] *Cahier des Règles Professionnelles*. Institut des Actuaire, 2004.
- [2] C. ACERBI and D. TASCHE. Expected shortfall : a natural coherent alternative to value at risk. 2001.
- [3] P. ALBRECHT. An evolutionary credibility model for claim numbers. 1985.
- [4] S. AMBAGASPITIYA and N. BALAKRISHNAN. On the compound generalized poisson distributions. *ASTIN Bulletin International Actuarial Association*, 24 :1 :255–263, 1994.
- [5] T.W ANDERSON and D.A DARLING. A test of goodness of fit. *Journal of the American Statistical Association*, 49(268), Dec. 1954.
- [6] P. ARTZNER, F. DELBAEN, J.M. EBER, and D. HEALTH. *Coherent Measures of Risk*. 1999.
- [7] G. BENKTANDER and C.O SEHERDAHL. On the analytical representation of claim distributions with special reference to excess-of-loss reinsurance. *Trans. 16-th Intern. Congress Actuaries*, pages 626–646, 1960.
- [8] S. BERNEGGER. Swiss re exposure curves and the mbbefd distribution class. *Astin Bulletin*, 27 :99–111, 1997.
- [9] A. BLONDEAU and C. PARTRAT. *La réassurance : approche technique*. Economica, 2004.
- [10] N.M. BODOFF. Capital allocation by percentile layer. 2007.
- [11] H. BOHLMANN. Introductory report : Experience rating and credibility. 1967.
- [12] M. BUSSE, U. MÄULLER, and M. DACOROGNA. Robust estimation of reserve risk.
- [13] C. CHARLES and J.R. HEWITT. Credibility for severity. 1971.
- [14] M. COCKROFT. Bayesian credibility for excess of loss reinsurance rating. 2004.
- [15] M. COCKROFT, C. CERNESSON, and R. PATEL. Rating long tail excess of loss reinsurance. 2004.
- [16] A. COHEN, G. DUPIN, and C. LEVI. Tarification de l’incendie des risques industriels français par la méthode de la crédibilité. 1986.
- [17] M. DACOROGNA and R. BÜRGI. Risk aggregation dependance structure and diversification benefits. 2007.
- [18] M. DENUIT and A. CHARPENTIER. *Mathématiques de l’Assurance Non-Vie - Tome I - Principes Fondamentaux de Théorie du Risque*. Economica, 2004.
- [19] M. DENUIT and A. CHARPENTIER. *Mathématiques de l’Assurance Non-Vie - Tome II - Tarification et Provisionnement*. Economica, 2005.
- [20] R.A DERRIG, K.M. OSTASZEWSKI, and G.A. REMPALA. Applications of resampling methods in actuarial practice. 2000.
- [21] R.M DUVAL. A bayesian approach to negative binomial parameter estimation. 1999.
- [22] B. EFRON. Bootstrap methods : Another look at the jackknife. 1977.
- [23] B. EFRON and R.J. TIBSHIRANI. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall/CRC, 1993.
- [24] P. EMBRECHTS, C.KLUPPELBERG, and T.MIKOSH. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, 1997.

- [25] P.D. ENGLAND and R.J. VERALL. Stochastic claims reserving in general insurance. 2002.
- [26] M. FLOWER, I. COOK, C. DIVITT, V. GOSRANI, A. GRAY, G. JAMES, G. JOHAL, M. JULIAN, L. LEE, D. MANEVAL, and R. MASSEY. Reinsurance pricing : Practical issues and considerations. 2006.
- [27] A. FRACHOT, T. RONCALLI, and E. SALOMON. The correlation problem in operational risk. 2004.
- [28] E. FRANCKX. La théorie du comportement et la credibility theory américaine.
- [29] M. GOOVAERTS and R. KAAS. Evaluating compound generalized poisson distributions recursively. *ASTIN Bulletin International Actuarial Association*, 21 :2 :193–198, 1991.
- [30] V. GOULET, A. FORGUES, and J. LU. Credibility for severity revisited. 2006.
- [31] D.J. GRADY. Credibility discussion.
- [32] J. GURLAND. Some applications of the negative binomial and other contagious distributions. *Am J Public Health Nations Health*, 49(10) :1388–1399, 1959.
- [33] C.A. HACHEMEINSTER. Credibility for regression models with applications to trend. 1975.
- [34] J.E HANSEN. A note on full credibility for estimating claim frequency. 1972.
- [35] W.K HASTINGS. Monte carlo sampling method using markov chains and their applications. *Biometrika*, 57 :97–109, 1970.
- [36] T.N. HERZOG. *Introduction to Credibility Theory*. Actex, 1994.
- [37] P.G. HOEL. On indices of dispersion. *Ann. Math. Statist.*, 14 :155–162, 1943.
- [38] J. HOETING, D. MADIGAN, A. RAFTERY, and C. VOLINSKY. Bayesian model averaging : A tutorial. *Statistical Science*, 14 :382–417, 1999.
- [39] I. HOLZMÜLLER. The united states rbc standards, solvency ii, and the swiss solvency test. 2008.
- [40] W.S. JEWELL and R. SCHNIEPER. Credibility approximations for bayesian prediction of second moments. 1985.
- [41] R. KAUFMANN, A. GADMER, and R. KLETT. Introduction to dynamic financial analysis. 1999.
- [42] S.A. KLUGMAN, H.H. PANJER, and G.E. WILLMOT. *Loss Models : From Data to Decisions*. Wiley, 2004.
- [43] J.F.L. LAWLESS. Negative binomial and mixed poisson regression. *La Revue Canadienne de Statistique*, 15 :209–225, 1987.
- [44] H.C. MAHLER. A graphical illustration of experience rating credibilities. 1998.
- [45] L.A MAYERSON, D.A JONES, and N.L BOWERS JR. On the credibility of the pure premium. 1968.
- [46] G.G. MEYERS. An analysis of experience rating. 1985.
- [47] S. MILDENHALL. Four actuarial applications of the bootstrap. 1999.
- [48] S. MILDENHALL. A note on the myer and read capital allocation formula. 2003.
- [49] S. MILDENHALL. Correlation and aggregate loss distributions with an emphasis on the iman-conover method. 2005.

- [50] S. MILDENHALL. A multivariate bayesian claim count development model with closed form posterior and predictive distributions. 2006.
- [51] J.F. MOORE. Tail estimation and catastrophe security pricing. 1999.
- [52] R. NORBERG. Credibility theory. 2004.
- [53] P. PARODI and S. BONCHE. Uncertainty-based credibility and its applications to excess of loss reinsurance. 2008.
- [54] C. PARTRAT, E. LECOEUR, E. NISIPASU, J.M. NESSI, and O.REIZ. *Provisionnement Technique en Assurance Non-Vie*. Economica, 2007.
- [55] G. PATRIK and I. MASHITZ. Credibility for treaty reinsurance excess pricing. 1990.
- [56] P.J.R PINHEIRO, J.M. ANDRADE, and S. DE LOURDES CENTENO. Bootstrap methodology in claim reserving. 2000.
- [57] F. PLANCHET and P. THEROND. *Mesure et Gestion des Risques d'Assurance Analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière*. Economica, 2007.
- [58] M. RYTGAARD. Estimation in the pareto distribution. 1990.
- [59] SCOR. *From Principle-Based Risk Management To Solvency Requirements Analytical Framework for the Swiss Solvency Test*. Second edition, 2008.
- [60] SCOR. Using capital allocation to steer the portfolio towards profitability. 2008.
- [61] C. SHANNON. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27 :379–423 and 623–656, 1948.
- [62] E. STRAUB. Estimation of the number of excess of claims by means of the credibility theory. 1971.
- [63] P.J. STRUZZIERI and P.R. HUSSIAN. Using best practices to determine a best reserve estimate. 1998.
- [64] UTAH UNIVERSITY. Bootstrapping, jackknifing and cross validation. reusing your data. 2007.
- [65] G.G. VENTER. Classical partial credibility with applications to trend. 1986.
- [66] J.F. WALHIN, L. HERFURTH, and P. DE LONGUEVILLE. The practical pricing of excess of loss treaties. 2003.
- [67] S. WANG. A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *Journal of Risk and Insurance*, 67 :15–36, 2000.
- [68] S. WANG. A risk measure that goes beyond coherence. 2002.
- [69] M.V. WÜTHRICH and M. MERZ. *Stochastic claims reserving methods in insurance*. Wiley, 2008.

Annexe 1 : Agrégation des processus de fréquence et de sévérité par transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide discrète est un algorithme qui permet de transformer un vecteur de n valeurs dans \mathbb{R} en un vecteur de longueur n dans \mathbb{C} :

$$FFT : f = [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}] \rightarrow \tilde{f} = [\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-1}]$$

avec

$\tilde{f}_k = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp(\frac{2\pi i}{n} jk)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ la transformée de Fourier directe (FFT pour Fast Fourier Transform) et

$f_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{f}_k \exp(-\frac{2\pi i}{n} kj)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ la transformée de Fourier inverse (IFFT pour Inverse Fast Fourier Transform)

La transformée de Fourier rapide est un algorithme “rapide” dans le sens qu’une FFT de longueur $n = 2^r$, $r \in \mathbb{N}$, peut s’écrire sous la forme de la somme de deux FFT, chacun de longueur $\frac{n}{2} = 2^{r-1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k &= \sum_{j=0}^{n-1} f_j \exp(\frac{2\pi i}{n} jk) \\ \tilde{f}_k &= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2j} \exp(\frac{2\pi i}{n} 2jk) + \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} f_{2j+1} \exp(\frac{2\pi i}{n} (2j+1)k) \\ \tilde{f}_k &= \sum_{j=0}^{m-1} f_{2j} \exp(\frac{2\pi i}{m} jk) + \exp(\frac{2\pi i}{n} k) \left(\sum_{j=0}^{m-1} f_{2j+1} \exp(\frac{2\pi i}{m} jk) \right) \end{aligned}$$

où $m = \frac{n}{2}$

$$\tilde{f}_k = \tilde{f}_k^a + \exp(\frac{2\pi i}{n} k) \tilde{f}_k^b$$

alors \tilde{f}_k^a et \tilde{f}_k^b peuvent être à leur tour s’écrire comme la somme de deux FFT de longueur $\frac{m}{2} = 2^{r-2}$. En répétant cette procédure r fois, on obtient finalement des transformations simples de longueur 1. En calculant dès le départ les transformations simples de longueur 1, il devient immédiat d’obtenir par composition successive les transformations de longueur 2, 2^2 , 2^3 , ..., 2^r .

Application de la transformée de Fourier rapide pour la charge de sinistre annuelle à la tranche :

1. Fonction caractéristique de la charge annuelle de sinistre et transformée de Fourier rapide :

La variable aléatoire liée à la charge annuelle de sinistre pour les traités en excédent de sinistre $Z = \sum_{i=1}^{N/X_0} Y_i = \sum_{i=1}^{N/X_0} \text{Min}[C, \text{Max}(0, X_{i/X_0} - F)]$ a pour densité de probabilité f_Z définie comme suit :

$$f_Z(x) = P(Z = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_{/X_0} = n)P(Y = x/N_{X_0} = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N_{/X_0} = n)f_Y^{*n}(x)$$

avec $f_Y^{*n}(x) = \int_{y=0}^x f_Y^{*(n-1)}(x-y) \times f_Y(y)dy$, la n-convolution de f_Y , la densité de probabilité de la charge individuelle à tranche Y .

Si on s'intéresse maintenant à la fonction caractéristique de Z , ϕ_Z , sous l'hypothèse que les Y_i charges individuelles à la tranche sont des variables aléatoires indépendantes :

$$\begin{aligned}\phi_Z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(x)e^{itx} dx = E(e^{itZ}) \\ \phi_Z(t) &= E_{N_{/X_0}}(E(e^{it(Y_1+Y_2+\dots+Y_{N_{X_0}})})|N_{/X_0}) \\ \phi_Z(t) &= E_{N_{/X_0}}(\phi_Y(t)^{N_{/X_0}}) \\ \phi_Z(t) &= P_{N_{X_0}}(\phi_Y(t))\end{aligned}$$

Si la fonction caractéristique de Z est la transformée de Fourier de f_Z , la transformée de Fourier inverse est la densité de probabilité de Z qui s'écrit :

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_Z(t)e^{-itx} dx$$

$P_{N_{X_0}}$ étant la fonction génératrice des moments de la fréquence. Pour la plupart des distributions de fréquence analytique usuelles comme la Poisson, la Binomiale, la Binomiale Négative, la fonction génératrice des moments possède également une forme analytique connue :

- Poisson de paramètre λ : $P_N(t) = E(t^N) = e^{\lambda(t-1)}$
- Bernoulli de paramètre p : $P_N(t) = E(t^N) = 1 + p(1-t)$
- Binomiale Négative de paramètres n et p : $P_N(t) = E(t^N) = (\frac{p}{1+(p-1)t})^n$
- Binomiale de paramètres n et p : $P_N(t) = E(t^N) = (1 - p(1-t))^n$

En revanche, les fonctions caractéristiques des distributions de probabilité continues ne possèdent pas toutes de forme analytique, en particulier ici dans le cas de distribution à la tranche XS. Il devient donc nécessaire dans ce cas de passer dans le domaine discret pour approximer la fonction de densité de Z . Si la fonction caractéristique dans sa forme continue permet de transformer une densité continue en une fonction continue complexe, la transformation de Fourier rapide permet de transformer un vecteur de n valeurs réelles en un vecteur de n valeurs complexes.

2. Calcul de la densité de probabilité de Z par FFT :

La première étape consiste à déterminer le domaine de définition de Z dont la fonction de

distribution est comprise entre 0 et Z_{max} . Pour cela, on utilise les deux premiers moments de la variable qui s'expriment en fonction des deux premiers moments de N_{X_0} et Y :

$$E(Z) = E(N_{X_0})E(Y)$$

$$V(Z) = E(N_{X_0})V(Y) + V(N_{X_0})(E(Y))^2$$

On pose ensuite $Z_{max} = E(Z) + p\sqrt{V(Z)}$ avec p choisi égal à 50 pour être sûr de prendre en compte tous les possibles de la variable aléatoire Z .

Pour satisfaire aux conditions d'application de la FFT, on décide par ailleurs de poser le nombre de points de discrétisation égal à $n = 2^r$ avec $r = 14$.

Le pas de discrétisation est alors égal à $\delta_Z = \frac{Z_{max}}{n}$.

Quant à la variable aléatoire Y , son maximum Y_{max} est égal à la capacité de la tranche C si celle-ci est finie, sinon on choisit par exemple un quantile très élevé de F_Y .

Puis on détermine le vecteur de discrétisation de la densité $f_Y : \{f_0, f_1, \dots, f_{m-1}\}$ avec $m = Ent(\frac{Y_{max}}{\delta_Z}) + 1$ l'entier supérieur le plus proche de $\frac{Y_{max}}{\delta_Z}$ et

$$f_0 = F_Y(\frac{\delta_Z}{2})$$

et

$$f_j = F_Y(j\delta_Z + \frac{\delta_Z}{2}) - F_Y(j\delta_Z - \frac{\delta_Z}{2}), j = 1, \dots, m - 1$$

La deuxième étape consiste à compléter le vecteur de f_Y par des 0 pour obtenir un vecteur de longueur n , $\{f_0, f_1, \dots, f_{m-1}, 0, 0, \dots, 0\}$, puis de lui appliquer la transformation de Fourier rapide :

$$\tilde{f}_Y = \phi_Y = FFT(\{f_0, f_1, \dots, f_{m-1}, 0, 0, \dots, 0\})$$

Connaissant la forme analytique de la fonction génératrice des moments de la fréquence, on applique la formule $\tilde{f}_Z(t) = \phi_Z(t) = P_{N_{X_0}}(\phi_Y(t))$ pour obtenir le vecteur de longueur n $\tilde{f}_Z = \phi_Z$.

Enfin, par transformée de Fourier inverse, on obtient le vecteur f_Z de longueur n : $f_Z = IFFT(\tilde{f}_Z)$.

Une interpolation linéaire entre les n points permet d'obtenir la densité et la fonction de distribution cumulée de Z , F_Z , ce qui permet de calculer la prime pure avec ou sans clauses de limitations annuelles :

$$PP_{sans} = E(Z) = \int_0^{Z_{max}} (1 - F_Z(x))dx$$

$$PP_{avec} = E(Z') = E(Min[AAL, Max(0, Z - AAD)]) = \int_{AAD}^{AAD+AAL} (1 - F_Z(x))dx$$

Annexe 2 : Description détaillée de l'algorithme de Nelder-Mead

L'algorithme d'optimisation non-linéaire de Nelder-Mead (1965) est un algorithme itératif utilisant le concept de mouvement d'un simplexe polytope de $N+1$ sommets dans un espace à N dimensions pour trouver le minimum d'une fonction dans cette espace. Dans le cas présent, l'opposé de la fonction de vraisemblance ayant ses deux paramètres variant sur leurs domaines de définition constitue une surface sur laquelle un triangle est itérativement bougé sur la surface jusqu'à atteindre le minimum qui correspond au maximum de la fonction de vraisemblance.

Plus précisément, dans un premier temps a lieu l'initialisation de l'algorithme par le choix d'un triangle d'initialisation à un certain endroit sur la surface. Il est de coutume de calibrer ce point de départ du triangle grâce aux estimateurs des paramètres obtenus par la méthode des moments. Le point du triangle sur lequel l'opposé de la fonction de vraisemblance est maximal est ensuite retiré du triangle, pour être remplacé par la réflexion de ce point par rapport au centre de gravité du triangle. Si le point obtenu est meilleur, le triangle se retrouve étiré dans cette direction. Dans le cas contraire, le triangle se trouvant dans une vallée est réduit par homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre le point du triangle où l'opposé de la fonction de vraisemblance est minimal.

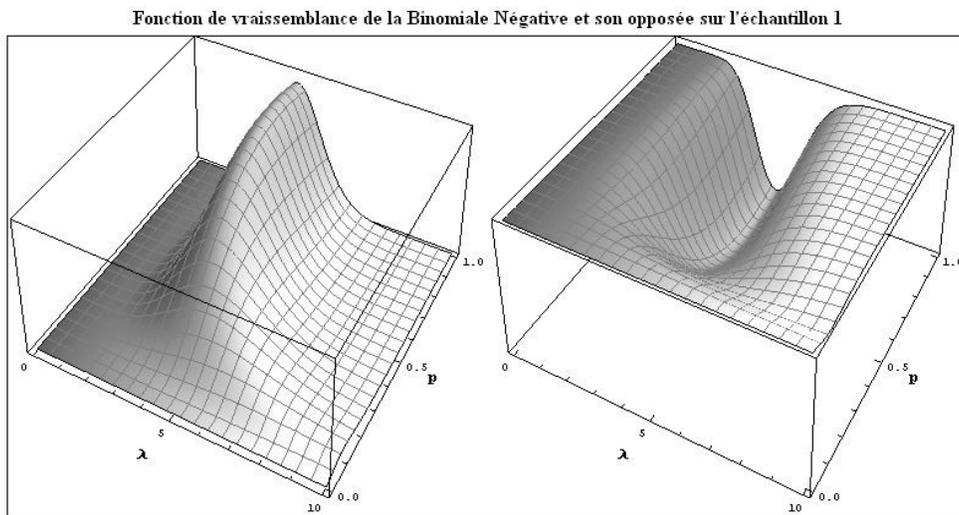


FIGURE 18.1 – Fonction de vraisemblance d'une loi Binomiale Négative et son opposée

Annexe 3 : L'algorithme de Metropolis-Hasting

Avant d'introduire l'algorithme de Metropolis-Hasting, quelques considérations sur les chaînes de Markov sont nécessaires.

On note X_t l'état à la date t d'une variable aléatoire X .

X est un processus de Markov si la probabilité de passage de la variable d'un état à l'autre dans l'espace des possibles ne dépend que de l'état présent de la variable :

$$P(X_{t+1} = x_{t+1}/X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_t = x_t) = P(X_{t+1} = x_{t+1}/X_t = x_t)$$

L'objectif de l'algorithme de Metropolis-Hasting (Metropolis et Ulam 1949 et Metropolis et al. 1953) est d'effectuer un tirage aléatoire dans une distribution $f(\Theta) = \frac{g(\Theta)}{C} \iff f(\Theta) \propto g(\Theta)$ où g est connue mais la constante C soit n'est pas connue, soit est très difficilement calculable.

Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. détermination d'une valeur initiale Θ_0
2. tirage d'un candidat Θ^* à partir de la valeur courante Θ et d'une fonction de transition $q(\Theta_1, \Theta_2)$, probabilité de retourner Θ_2 sachant Θ_1 . L'unique contrainte sur la fonction de transition est qu'elle soit symétrique, i.e. $q(\Theta_1, \Theta_2) = q(\Theta_2, \Theta_1)$
3. acceptation du candidat Θ^* avec la probabilité $\alpha = \frac{f(\Theta^*)}{f(\Theta)} = \frac{g(\Theta^*)}{g(\Theta)}$. La constante de normalisation C disparaît du fait du ratio des probabilités.
4. si le saut de Θ vers Θ^* augmente la densité ($\alpha > 1$), le candidat est accepté et l'algorithme est repris à l'étape 2. Si le saut Θ vers Θ^* diminue la densité ($\alpha \leq 1$), le candidat est accepté avec la probabilité α , si il est rejeté, il faut retourner à l'étape 2.

Cet algorithme se résume par conséquent à accepter des candidats avec la probabilité :

$$\alpha = \text{Min}\left(1, \frac{f(\Theta^*)}{f(\Theta)}\right)$$

Il génère une chaîne de Markov $\{\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_m\}$ car la fonction de transition de Θ_k à Θ_{k+1} ne dépend que de Θ_k . Après une période « burn in », la chaîne atteint un état stationnaire, par exemple $m/2$ si m est suffisamment grand. $\{\Theta_{(m/2)}, \Theta_{(m/2)+1}, \dots, \Theta_m\}$ peut alors être considéré comme un échantillon issu d'un tirage aléatoire dans $f(\Theta)$.

Dans [35], Hastings généralise cet algorithme en utilisant une fonction de transition arbitraire et en posant la probabilité d'acceptation à :

$$\alpha = \text{Min}\left(1, \frac{f(\Theta^*)q(\Theta^*, \Theta)}{f(\Theta)q(\Theta, \Theta^*)}\right)$$

Il s'agit alors de l'algorithme de Metropolis-Hastings.

Annexe 4 : Catalogue des lois de fréquence et de sévérité

Lois de Fréquence

Loi de Bernoulli $Be(p)$

$$\text{Densité de probabilité } \forall k \in \mathbb{N}, f_p(k) = \begin{cases} 1-p & k=0 \\ p & k=1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

$$\text{Fonction de distribution cumulée } \forall k \in \mathbb{N}, F_p(k) = \begin{cases} 1-p & 0 \leq k < 1 \\ 1 & k \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Fonction caractéristique } \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = (1-p) + pe^{it}$$

$$\text{Moyenne } E(Be(p)) = p$$

$$\text{Variance } V(Be(p)) = p(1-p)$$

Loi Binomiale $Bi(n, p)$

$$\text{Densité de probabilité } \forall k \in \mathbb{N}, f_{n,p}(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\text{Fonction caractéristique } \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = ((1-p) + pe^{it})^n$$

$$\text{Moyenne } E(Bi(n, p)) = np$$

$$\text{Variance } V(Bi(n, p)) = np(1-p)$$

Loi de Poisson $P(\lambda)$

$$\text{Densité de probabilité } \forall k \in \mathbb{N}, f_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\text{Fonction caractéristique } \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\text{Moyenne } E(P(\lambda)) = \lambda$$

$$\text{Variance } V(P(\lambda)) = \lambda$$

Loi Binomiale Négative $NB(n, p)$

$$\text{Densité de probabilité } \forall k \in \mathbb{N}, f_{n,p}(k) = C_{n+k-1}^{n-1} p^n (1-p)^k$$

$$\text{Fonction caractéristique } \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = \left(\frac{p}{(1-(1-p)e^{it})} \right)^n$$

$$\text{Moyenne } E(NB(n, p)) = \frac{n(1-p)}{p}$$

Variance $V(NB(n, p)) = \frac{n(1-p)}{p^2}$

Lois de Sévérité

Loi Pareto $P(X_0, \alpha)$

X_0 correspond au point de troncature à gauche de la loi.

Densité de probabilité $\forall x \geq X_0, f_{X_0, \alpha}(x) = \frac{\alpha}{X_0} \left(\frac{x}{X_0}\right)^{-1-\alpha}$

Fonction de distribution cumulée $\forall x \geq X_0, F_{X_0, \alpha}(u) = 1 - \left(\frac{x}{X_0}\right)^{-\alpha}$

Fonction de distribution cumulée inverse $\forall u \in [0, 1[, F_{X_0, \alpha}^{-1}(u) = X_0(1 - u)^{\frac{-1}{\alpha}}$

Moyenne ($\alpha \geq 1$) $E(P(X_0, \alpha)) = X_0 \frac{\alpha}{\alpha-1}$

Variance ($\alpha \geq 2$) $V(P(X_0, \alpha)) = X_0^2 \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$

Loi Benktander $B(X_0, \alpha, \beta)$

Cette loi introduite par BENKTANDER et SEHERDAHL en 1960 dans [7], a pour particularité d'avoir un comportement asymptotique (queue de distribution) à mi-chemin entre la loi Exponentielle et la loi de Pareto.

Comme pour la loi de Pareto, X_0 correspond au point de troncature à gauche de la loi.

Le paramètre $\beta \in]0, 1]$ est un paramètre de forme qui permet de faire varier la queue de distribution entre la loi Exponentielle ($\beta \rightarrow 1^-$) de paramètre α et la loi de Pareto ($\beta \rightarrow 0^+$) de paramètre $\theta = \frac{1}{\alpha} + 1$.

Densité de probabilité $\forall x \geq X_0, f_{X_0, \alpha, \beta}(x) = \frac{X_0 e^{\frac{X_0^\beta - x^\beta}{\alpha\beta}} \left(\frac{x}{X_0}\right)^\beta \left(1 + \frac{x^\beta}{\alpha} - \beta\right)}{x^2}$

Fonction de distribution cumulée $\forall x \geq X_0, F_{X_0, \alpha, \beta}(x) = 1 - \left(\frac{x}{X_0}\right)^{\beta-1} e^{\frac{X_0^\beta - x^\beta}{\alpha\beta}}$

Fonction de distribution cumulée inverse $\forall u \in [0, 1[, F_{X_0, \alpha, \beta}^{-1}(u) = (\alpha(1-\beta) PLog\left(\frac{X_0^\beta \left(\frac{e^{\frac{X_0^\beta}{\alpha\beta}}}{1-u}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{\alpha(1-\beta)}\right))^{\frac{1}{\beta}}$
avec $PLog(z)$ solution pour w de $z = we^w$

Moyenne $E(B(X_0, \alpha, \beta)) = X_0(X_0^{-\beta} + \frac{1}{\alpha})\alpha$

Variance $V(B(X_0, \alpha, \beta)) = \frac{X_0^{2-2\beta} \alpha^2 \left(-\beta + \frac{2X_0^\beta \int_1^{+\infty} e^{-\frac{X_0^\beta}{\alpha\beta} t} dt}{\beta-1}\right)}{\beta}$

Loi Exponentielle $Exp(\beta)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\beta}(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\beta, X_0}(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x-X_0}{\beta}}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\beta}(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\beta, X_0}(x) = 1 - e^{-\frac{x-X_0}{\beta}}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\beta}^{-1}(u) = -\beta \text{Log}(1 - u)$$

Au seuil X_0 :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\beta, X_0}^{-1}(u) = X_0 - \beta \text{Log}(1 - u)$$

Moyenne A la base :

$$E(Exp(\beta)) = \beta$$

Au seuil X_0 :

$$E(Exp(\beta)) = \beta + X_0$$

Variance A la base :

$$V(Exp(\beta)) = \beta^2$$

Au seuil X_0 :

$$V(Exp(\beta)) = \beta^2$$

Loi Pareto Généralisée $Pg(\sigma, \epsilon)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\sigma, \epsilon}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \epsilon \frac{x}{\sigma}\right)^{-\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\sigma, \epsilon, X_0}(x) = \frac{1}{\sigma} \left(1 + \epsilon \frac{X_0}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\epsilon}} \left(1 + \epsilon \frac{x}{\sigma}\right)^{-\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\sigma, \epsilon}(x) = 1 - \left(1 + \epsilon \frac{x}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\sigma, \epsilon, X_0}(x) = 1 - \left(\frac{1 + \epsilon \frac{X_0}{\sigma}}{1 + \epsilon \frac{x}{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\epsilon}}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\sigma, \epsilon}^{-1}(u) = \frac{\sigma}{\epsilon} \left((1 - u)^{-\epsilon} - 1\right)$$

Au seuil X_0 :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\sigma, \epsilon, X_0}^{-1}(u) = \frac{\sigma}{\epsilon} \left((1 - u)^{-\epsilon} \left(1 + \epsilon \frac{X_0}{\sigma}\right) - 1\right)$$

Moyenne A la base :

$$E(Pg(\sigma, \epsilon)) = \frac{\sigma}{1-\epsilon}$$

Au seuil X_0 :

$$E(Pg(\sigma, \epsilon, X_0)) = \frac{X_0 + \sigma}{1-\epsilon}$$

Variance A la base :

$$V(Pg(\sigma, \epsilon)) = \frac{\sigma^2}{(1-\epsilon)^2(1-2\epsilon)}$$

Au seuil X_0 :

$$V(Pg(\sigma, \epsilon, X_0)) = \frac{(X_0 + \sigma)^2}{(1-\epsilon)^2(1-2\epsilon)}$$

Loi Normale $N(\mu, \sigma)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\mu, \sigma, X_0}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma(Erf(\frac{-X_0+\mu}{\sqrt{2}\sigma})+1)}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(1 - Erf\left(\frac{\mu-x}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\mu, \sigma, X_0}(x) = \frac{Erf\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) - Erf\left(\frac{x-X_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{1 - Erf\left(\frac{X_0-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

Moyenne A la base :

$$E(N(\mu, \sigma)) = \mu$$

Au seuil X_0 :

$$\text{avec } \lambda = \frac{\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_0-\mu}{\sigma}\right)^2}}{1 - Erf\left(\frac{X_0-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

$$E(N(\mu, \sigma, X_0)) = \mu + \lambda$$

Variance A la base :

$$V(N(\mu, \sigma)) = \sigma^2$$

Au seuil X_0 :

$$\text{avec } \lambda = \frac{\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X_0-\mu}{\sigma}\right)^2}}{1 - Erf\left(\frac{X_0-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

$$V(N(\mu, \sigma, X_0)) = \sigma^2 - \lambda(\mu + \lambda - X_0)$$

Loi Lognormale $LN(\mu, \sigma)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{Log}(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\mu,\sigma,X_0}(x) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\text{Log}(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{x\sigma\left(\text{Erf}\left(\frac{-\text{Log}(X_0)+\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)+1\right)}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \text{Erf}\left(\frac{\mu-\text{Log}(x)}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right)$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\mu,\sigma,X_0}(x) = \frac{\text{Erf}\left(\frac{\text{Log}(x)-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\text{Log}(X_0)-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{1 - \text{Erf}\left(\frac{\text{Log}(X_0)-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

Moyenne A la base :

$$E(LN(\mu, \sigma)) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

Au seuil X_0 :

$$E(LN(\mu, \sigma, X_0)) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \text{Log}(X_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)}{1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu - \text{Log}(X_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)}$$

Variance A la base :

$$V(LN(\mu, \sigma)) = e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

Au seuil X_0 :

$$V(LN(\mu, \sigma, X_0)) = \frac{e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} (1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu - \text{Log}(X_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)) (1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu + 2\sigma^2 - \text{Log}(X_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right)) - (1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu + 2\sigma^2 - \text{Log}(X_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right))^2)}{(1 + \text{Erf}\left(\frac{\mu - \text{Log}(X_0)}{\sqrt{2}\sigma}\right))^2}$$

Loi Czeledin $Cz(\mu, \sigma, \kappa)$

Cette loi a pour fonction de distribution, une fonction définie par morceaux.

Pour $x < \kappa$, son comportement est celui d'une loi Lognormale de paramètres μ et σ , tandis que pour $x \geq \kappa$, elle se comporte comme une loi de Pareto de paramètre κ et α avec α déterminé de manière à assurer la dérivabilité de la fonction autour du seuil κ .

$$\alpha = -\frac{e^{-\frac{(-\mu + \text{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sigma(-1 + \text{Erf}\left(\frac{-\mu + \text{Log}(\kappa)}{\sqrt{2}\sigma}\right))}$$

$$\text{avec } \text{Erf}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

on notera également $\text{Erfc}(z) = 1 - \text{Erf}(z)$ et InverseErf l'inverse de Erf

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\mu,\sigma,\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(-\mu + \text{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma x} & x < \kappa \\ \frac{e^{-\frac{(-\mu + \text{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \left(\frac{X_0}{x}\right)^\alpha & x \geq \kappa \end{cases}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\mu,\sigma,\kappa,X_0}(x) = \frac{f_{\mu,\sigma,\kappa}(x)}{1 - F_{\mu,\sigma,\kappa}(X_0)}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\mu,\sigma,\kappa}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(x)}{\sqrt{2\sigma}})) & x < \kappa \\ 1 - \frac{1}{2}\operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(x)}{\sqrt{2\sigma}})(\frac{X_0}{x})^\alpha & x \geq \kappa \end{cases}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\mu,\sigma,\kappa,X_0}(x) = \frac{F_{\mu,\sigma,\kappa}(x) - F_{\mu,\sigma,\kappa}(X_0)}{1 - F_{\mu,\sigma,\kappa}(X_0)}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\text{avec } p_0 = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(x)}{\sqrt{2\sigma}}))$$

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\mu,\sigma,\kappa}^{-1}(u) = \begin{cases} e^{\mu + \sqrt{2\sigma} \operatorname{InverseErfc}(2u-1)} & x < p_0 \\ \kappa(1 - \frac{u-p_0}{1-p_0})^{-\frac{1}{\alpha}} & x \geq p_0 \end{cases}$$

Au seuil X_0 :

$$F_{\mu,\sigma,\kappa,X_0}^{-1}(u) = F_{\mu,\sigma,\kappa}^{-1}(u(1 - F_{\mu,\sigma,\kappa}(X_0)) + F_{\mu,\sigma,\kappa}(X_0))$$

Moyenne ($\alpha \geq 1$) A la base :

$$E(Cz(\mu, \sigma, \kappa)) = \frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}(-1+\alpha)\sigma} \kappa + \frac{1}{2}e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}})$$

Au seuil X_0 :

$$E(Cz(\mu, \sigma, \kappa, X_0)) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}(-1+\alpha)\sigma} \kappa + \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} (\operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}}) - \operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}}))}{\operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}})} & X_0 < \kappa \\ \frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{(-1+\alpha)\sigma \operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}})} X_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} & X_0 \geq \kappa \end{cases}$$

Variance ($\alpha \geq 2$) A la base :

$$V(Cz(\mu, \sigma, \kappa)) = \frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}(-2+\alpha)\sigma} \kappa^2 + \frac{1}{2}e^{2(\mu + \sigma^2)} \operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}}) - (\frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}(-1+\alpha)\sigma} \kappa + \frac{1}{2}e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}}))^2$$

Au seuil X_0 :

$$V(Cz(\mu, \sigma, \kappa, X_0)) = \begin{cases} \left(\frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{(-2+\alpha)\sigma} \kappa^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} + e^{2(\mu + \sigma^2)} (\operatorname{Erfc}(\frac{\mu + 2\sigma^2 - \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}}) - \operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}})) - \frac{\operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}})}{\operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}})} \right) - \left(\frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}(-1+\alpha)\sigma} \kappa + \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} (\operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}}) - \operatorname{Erfc}(\frac{\mu + \sigma^2 - \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}}))}{\operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(X_0)}{\sqrt{2\sigma}})} \right)^2 & X_0 < \kappa \\ \frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{(-2+\alpha)\sigma \operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}})} X_0^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \left(\frac{e^{-\frac{(-\mu + \operatorname{Log}(\kappa))^2}{2\sigma^2}}}{(-1+\alpha)\sigma \operatorname{Erfc}(\frac{-\mu + \operatorname{Log}(\kappa)}{\sqrt{2\sigma}})} X_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^2 & X_0 \geq \kappa \end{cases}$$

Loi Fermi Dirac $F(\beta, \mu)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\beta,\mu}(x) = \frac{1}{\beta \operatorname{Log}(e^{\frac{x}{\beta}} + 1)} \frac{1}{e^{\frac{x-\mu}{\beta}} + 1}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\beta,\mu,X_0}(x) = \frac{1}{\beta \operatorname{Log}(e^{\frac{x-X_0}{\beta}} + 1)} \frac{1}{e^{\frac{x-\mu}{\beta}} + 1}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\beta,\mu}(x) = 1 - \frac{\text{Log}(e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} + 1)}{\text{Log}(e^{\frac{\mu}{\beta}} + 1)}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\beta,\mu,X_0}(x) = 1 - \frac{\text{Log}(e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} + 1)}{\text{Log}(e^{\frac{\mu-X_0}{\beta}} + 1)}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\beta,\mu}^{-1}(u) = \mu - \beta \text{Log}(e^{(1-u)\text{Log}(e^{\frac{\mu}{\beta}} + 1)} - 1)$$

Au seuil X_0 :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\beta,\mu,X_0}^{-1}(u) = \mu - \beta \text{Log}(e^{(1-u)\text{Log}(e^{\frac{\mu-X_0}{\beta}} + 1)} - 1)$$

Loi EVT (Extreme Value Theory) $Evt(a, b)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} e^{e^{-\frac{x-a}{b}}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{a,b,X_0}(x) = \frac{\frac{1}{b} e^{-\frac{x-a}{b}} e^{e^{-\frac{x-a}{b}}}}{1 - e^{e^{-\frac{x-a}{b}}}}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{a,b}(x) = e^{e^{-\frac{x-a}{b}}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{a,b,X_0}(x) = \frac{e^{e^{-\frac{x-a}{b}}} - e^{e^{-\frac{X_0-a}{b}}}}{1 - e^{e^{-\frac{X_0-a}{b}}}}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{a,b}^{-1}(u) = a - b \text{Log}(-\text{Log}(u))$$

Au seuil X_0 :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{a,b,X_0}^{-1}(u) = a - b \text{Log}(-\text{Log}(u + (1-u)e^{e^{-\frac{X_0-a}{b}}}))$$

Loi Bose Einstein $Bo(\beta, \mu)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\beta,\mu}(x) = \frac{1}{\beta \text{Log}(1 - e^{\frac{\mu}{\beta}})} \frac{1}{1 - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\beta,\mu,X_0}(x) = \frac{1}{\beta \text{Log}(1 - e^{-\frac{X_0-\mu}{\beta}})} \frac{1}{1 - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\beta,\mu}(x) = \frac{\text{Log}(1 - e^{\frac{\mu}{\beta}}) - \text{Log}(1 - e^{-\frac{x-\mu}{\beta}})}{\text{Log}(1 - e^{\frac{\mu}{\beta}})}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\beta,\mu,X_0}(x) = \frac{\text{Log}(1-e^{-\frac{X_0-\mu}{\beta}}) - \text{Log}(1-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}})}{\text{Log}(1-e^{-\frac{X_0-\mu}{\beta}})}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\beta,\mu}^{-1}(u) = \mu - \beta \text{Log}(1 - e^{(1-u)\text{Log}(1-e^{\frac{\mu}{\beta}})})$$

Au seuil X_0 :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\beta,\mu,X_0}^{-1}(u) = \mu - \beta \text{Log}(1 - e^{(1-u)\text{Log}(1-e^{-\frac{X_0-\mu}{\beta}})})$$

Loi Weibull $W(\alpha, \beta)$

Densité de probabilité A la base :

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha}{x} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, f_{\beta,\mu,X_0}(x) = \frac{\frac{\alpha}{x} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}}{e^{-\left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha}}$$

Fonction de distribution cumulée A la base :

$$F_{\alpha,\beta}(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall x \geq X_0, F_{\alpha,\beta,X_0}(x) = 1 - \frac{e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}}{e^{-\left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha}}$$

Fonction de distribution cumulée inverse A la base :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\alpha,\beta}^{-1}(u) = \beta(-\text{Log}(1 - u))^{\frac{1}{\alpha}}$$

Au seuil X_0 :

$$\forall u \in [0, 1[, F_{\alpha,\beta,X_0}^{-1}(u) = \beta\left(\left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha - \text{Log}(1 - u)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Moyenne A la base :

$$E(W(\alpha, \beta)) = \beta \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)$$

$$\text{avec } \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Au seuil X_0 :

$$E(W(\alpha, \beta, X_0)) = \frac{\beta}{e^{-\left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha\right)$$

$$\text{avec } \Gamma(z, x) = \int_x^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Variance A la base :

$$V(W(\alpha, \beta)) = \beta^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)^2 \right)$$

Au seuil X_0 :

$$V(W(\alpha, \beta, X_0)) = \left(\frac{\beta}{e^{-\left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha}} \right)^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1, \left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1, \left(\frac{X_0}{\beta}\right)^\alpha\right)^2 \right)$$

Annexe 5 : Sévérité sur base expérience - Mélange des courbes empiriques et courbes de marché

L'actuaire peut ne pas être satisfait par la loi de distribution ajustée sur l'échantillon.

Cela se produit notamment lorsque la queue de distribution n'est pas suffisamment lourde, et ne peut pas être correctement interprétée en terme de récurrence de sinistres de pointe.

Dans ce cas, il dispose d'une facilité de raccordement de la distribution empirique représentative de la sinistralité à forte fréquence avec des lois de distribution à queue lourde comme la loi de Pareto ou de Benktander (cf. Annexe 4), calibrées à partir de références plus larges (consensus sur les sinistres de pointe).

Cette facilité doit dans le même temps conserver la règle de cohérence des primes pures des tranches.

Une fonction dite "hybride" permet de partager l'espace des possibles entre :

- une zone de confiance ou crédibilité maximale envers l'expérience entre x_0 le seuil de modélisation et un seuil de raccordement, x_r ,
- une zone de transition de la fonction empirique vers la fonction de marché entre x_r et x_{max} , qui traduit la perte de crédibilité envers l'expérience,
- une zone d'utilisation de la fonction de marché au-delà de x_{max} , qui représente la zone de crédibilité maximale envers la loi de marché puisqu'aucune donnée d'expérience n'a été observée au-delà de ce seuil.

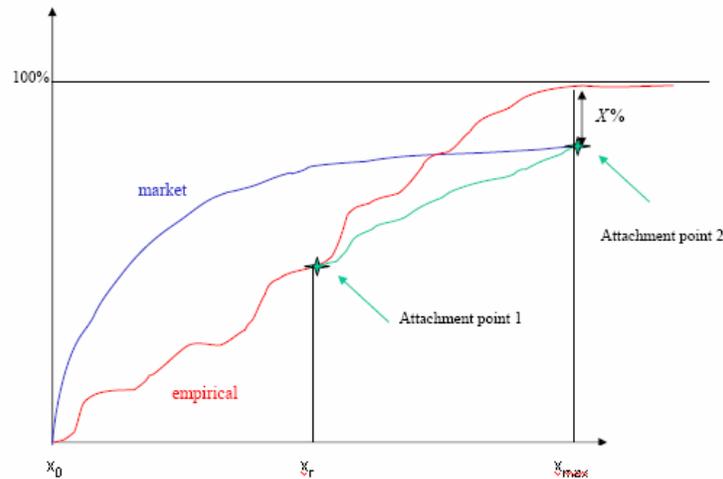


FIGURE 18.2 – Illustration mélange empirique et marché

La fonction hybride est définie comme suit :

$$\begin{cases} F_{hybride}(x) = F_{emp}(x) & x_0 \leq x \leq x_r \\ F_{hybride}(x) = F_{emp}(x_r) + [F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r))]^{p(x)} & x_r < x \leq x_{max} \\ F_{hybride}(x) = F_{marché}(x) & x > x_{max} \end{cases}$$

avec

$$p(x) = \frac{Ln(F_{emp}(x)(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r)))}{Ln(F_{emp}(x)F_{marché}(x_{max}) \times (1 - F_{emp}(x_r)))}$$

ce qui permet à $F_{hybride}$ de respecter les cinq conditions suivantes :

1. $F_{hybride}(x_r) = F_{emp}(x_r)$
2. $F_{hybride}(x_{max}) = F_{marché}(x_{max})$
3. $F_{hybride}$ est croissante sur son domaine $[x_0, +\infty[$
4. $\forall x \in [x_r, x_{max}], F_{marché}(x_{max}) \times F_{emp}(x) \leq F_{hybride}(x) \leq F_{emp}(x)$

Nous apportons la preuve que ces contraintes sont respectées pour la fonction hybride ainsi définie en annexe 5.

La fonction hybride est définie comme suit :

$$\begin{cases} F_{hybride}(x) = F_{emp}(x) & x_0 \leq x \leq x_r \\ F_{hybride}(x) = F_{emp}(x_r) + [F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r))]^{p(x)} & x_r < x \leq x_{max} \\ F_{hybride}(x) = F_{marché}(x) & x > x_{max} \end{cases}$$

avec

$$p(x) = \frac{Ln(F_{emp}(x)(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r)))}{Ln(F_{emp}(x)F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r)))}$$

$$p'(x) = \frac{f_{emp}(x)(Ln[F_{emp}(x)F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r))] - Ln[F_{emp}(x)(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r)])}{F_{emp}(x)(Ln[F(x)F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r))])^2}$$

or

$$F_{emp}(x)F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r)) > F_{emp}(x)(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r))$$

$$Ln[F_{emp}(x)F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r))] > Ln[F_{emp}(x)(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r))]$$

ce qui permet de dire que $p'(x) > 0$, que p est une fonction strictement croissante et que $p(x) \geq 1$

Hypothèse 1 : $F_{hybride}(x_r) = F_{emp}(x_r)$

Démonstration :

Quand $x = x_r$, $F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r) = 0$ donc $F_{hybride}(x_r) = F_{emp}(x_r)$

Hypothèse2 : $F_{hybride}(x_{max}) = F_{marché}(x_{max})$

Démonstration :

Quand $x = x_{max}$, $F_{emp}(x_{max}) = 1$ et $p(x_{max}) = \frac{Ln(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r))}{Ln(F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r)))}$

$$F_{hybride}(x_{max}) - F_{emp}(x_r) = (F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r)))^{p(x_{max})}$$

$F_{hybride}(x_{max}) > F_{emp}(x_r)$ ce qui permet d'appliquer la fonction logarithme et d'obtenir :

$$p(x_{max}) = \frac{Ln(F_{hybride}(x_{max}) - F_{emp}(x_r))}{Ln(F_{hybride}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r)))} = \frac{Ln(F_{marché}(x_{max}) - F_{emp}(x_r))}{Ln(F_{marché}(x_{max})(1 - F_{emp}(x_r)))}$$

ce qui permet d'écrire : $F_{hybride}(x_{max}) = F_{marché}(x_{max})$

Hypothèse 3 : $F_{hybride}$ est une fonction croissante sur $[x_0, +\infty[$

Démonstration :

Quand $x_0 \leq x \leq x_r$, $F_{hybride}(x) = F_{emp}(x)$ donc $F_{hybride}$ est une fonction croissante sur $[x_0, x_r]$

Quand $x_r < x \leq x_{max}$, $F_{hybride}(x) = F_{emp}(x_r) + (F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r)))^{p(x)}$
pour simplifier on pose :

$$\begin{cases} A = F_{emp}(x_r) \\ B = F_{marché}(x_{max}) \\ f_{emp}(x) = f(x) \\ F_{emp}(x) = F(x) \end{cases}$$

alors

$$F_{hybride}(x) = A + (B(F(x) - A))^{p(x)}$$

avec

$$p(x) = \frac{Ln(F(x)(B - A))}{Ln(BF(x)(1 - A))}$$

$$p'(x) = \frac{f(x)[Ln(BF(x)(1 - A)) - Ln(F(x)(B - A))]}{F(x)[Ln(BF(x)(1 - A))]^2}$$

et

$$(F_{hybride}(x))' = (B(F(x) - A))^{p(x)}(p(x)Ln(B(F(x) - A)))'$$

avec

$$(p(x)Ln(B(F(x) - A)))' = \left(\frac{Ln(F(x)(B - A))}{Ln(BF(x)(1 - A))} Ln(B(F(x) - A)) \right)'$$

ce qui conduit à :

$$(F_{hybride}(x))' = \underbrace{(B(F(x) - A))^{p(x)}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } x > x_r}} \left(\frac{\text{Ln}(F(x)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x)(1 - A))} \text{Ln}(B(F(x) - A)) \right)'$$

par conséquent pour prouver que $(F_{hybride}(x))' \geq 0$, on vérifie que :

$$\left(\frac{\text{Ln}(F(x)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x)(1 - A))} \times \text{Ln}(B(F(x) - A)) \right)' \geq 0$$

en montrant que :

$$x \mapsto \frac{\text{Ln}(F(x)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x)(1 - A))} \text{Ln}(B(F(x) - A))$$

est une fonction croissante sur $[x_r, x_{max}]$.

Pour $x_r < x_1 < x_2 < x_{max}$,

$$\text{Ln}(F(x_2)(B - A)) \geq \text{Log}(F(x_1)(B - A))$$

en effet $x \mapsto \text{Ln}(F(x) \times (B - A))$ est une fonction négative puisque $0 \leq F(x) \times (B - A) \leq 1$.
Si on divise par $\text{Ln}(F(x_1)(B - A))$, on obtient :

$$0 \leq \frac{\text{Ln}(F(x_2)(B - A))}{\text{Ln}(F(x_1)(B - A))} \leq 1$$

$x \mapsto \text{Ln}(F(x) \times (B - A))$ est négative et croissante car $0 \leq B(F(x) - A) \leq 1$
donc

$$0 \leq \frac{\text{Ln}(B(F(x_2) - A))}{\text{Ln}(B(F(x_1) - A))} \leq 1$$

ce qui permet d'écrire :

$$0 \leq \frac{\text{Ln}(F(x_2)(B - A)) \text{Ln}(B(F(x_2) - A))}{\text{Ln}(F(x_1)(B - A)) \text{Ln}(B(F(x_1) - A))} \leq \frac{\text{Ln}(B(F(x_2) - A))}{\text{Ln}(B(F(x_1) - A))}$$

Si on note : $g : x \mapsto \frac{\text{Ln}(B(F(x) - A))}{\text{Ln}(BF(x)(1 - A))}$

$$g'(x) = f(x) \frac{F(x) \text{Ln}(BF(x)(1 - A)) - (F(x) - A) \text{Ln}(B(F(x) - A))}{F(x)(F(x) - A) \text{Ln}(BF(x)(1 - A))^2}$$

Si on note $h(x) = F(x) \text{Ln}(BF(x)(1 - A)) - (F(x) - A) \text{Ln}(B(F(x) - A))$ le numérateur de $g'(x)$

$$h'(x) = f(x) (\text{Ln}(BF(x)(1 - A)) - \text{Ln}(B(F(x) - A)))$$

$BF(x)(1 - A) \geq B(F(x) - A)$ donc $\text{Ln}(BF(x)(1 - A)) \geq \text{Ln}(B(F(x) - A))$

et F est une fonction croissante, donc : $f(x) \geq 0$ et $h'(x) \geq 0$

h est une fonction croissante et $h(x_{max}) = A \text{Ln}(B(1 - A)) \leq 0$

donc $h(x) \leq 0$, $g'(x) \leq 0$, et g est une fonction décroissante

C'est la raison pour laquelle nous pouvons écrire que :

$$\frac{\text{Ln}(BF(x_2) - A)}{\text{Ln}(BF(x_2)(1 - A))} \leq \frac{\text{Ln}(BF(x_1) - A)}{\text{Ln}(BF(x_1)(1 - A))}$$

ou encore

$$\frac{\text{Ln}(BF(x_2) - A)}{\text{Ln}(BF(x_1) - A)} \leq \frac{\text{Ln}(BF(x_2)(1 - A))}{\text{Ln}(BF(x_1)(1 - A))}$$

et finalement :

$$0 \leq \frac{\text{Ln}(F(x_2)(B - A)) \text{Ln}(B(F(x_2) - A))}{\text{Ln}(F(x_1)(B - A)) \text{Ln}(B(F(x_1) - A))} \leq \frac{\text{Ln}(BF(x_2)(1 - A))}{\text{Ln}(BF(x_1)(1 - A))}$$

ou

$$\frac{\text{Ln}(F(x_2)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x_2)(1 - A))} \text{Ln}(B(F(x_2) - A)) \leq \frac{\text{Ln}(F(x_1)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x_1)(1 - A))} \text{Ln}(B(F(x_1) - A))$$

ce qui prouve que $x \mapsto \frac{\text{Ln}(F(x)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x)(1 - A))} \text{Ln}(B(F(x) - A))$ est une fonction croissante.

On a finalement $(\frac{\text{Ln}(F(x)(B - A))}{\text{Ln}(BF(x)(1 - A))} \text{Ln}(B(F(x) - A)))' \geq 0$ et $(F_{hybride}(x))' \geq 0$

$F_{hybride}$ est une fonction croissante sur $]x_r, x_{max}]$.

Quand $x > x_{max}$, $F_{hybride}(x) = F_{marché}(x)$ donc $F_{hybride}$ est croissante sur $]x_{max}, +\infty[$.

Au final, nous venons de prouver que $F_{hybride}$ est croissante sur tout son intervalle de définition.

Hypothèse 4 : $\forall x \in [x_r, x_{max}], F_{hybride}(x) \geq F_{marché}(x_{max}) F_{emp}(x)$

Démonstration :

$$F_{hybride}(x) = F_{emp}(x_r) + [F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r))]^{p(x)}$$

$$F_{hybride}(x) \leq F_{emp}(x_r) + [F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r))]$$

car $p(x) \leq 1$ et $0 \leq F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r)) \leq 1$.

$$F_{hybride}(x) \leq F_{emp}(x_r) + F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r)$$

car $F_{marché}(x_{max})(F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r)) \leq F_{emp}(x) - F_{emp}(x_r)$,

donc

$$F_{hybride}(x) \leq F_{emp}(x)$$

Par ailleurs :

$$F_{hybride}(x) = A + (B(F(x) - A))^{p(x)}$$

Pour tout x où $BF(x) \leq A$, $F_{hybride}(x) \geq A \geq BF(x)$

Pour tout x où $BF(x) > A$, démontrons que $F_{hybride}(x) \geq BF(x)$

$$F_{hybride}(x) - BF(x) = A + (B(F(x) - A))^{p(x)} - BF(x)$$

p est croissante et $1 \leq p(x) \leq \frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}$

sachant

$$0 \leq B(F(x) - A) \leq 1, (B(F(x) - A))^{p(x)} \geq (B(F(x) - A))^{\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}}$$

donc

$$F_{hybride}(x) - BF(x) \geq A + (B(F(x) - A))^{\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}} - BF(x) = i(x)$$

en dérivant i par rapport à x ,

$$i'(x) = Bf(x) \times ((B(F(x) - A))^{\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}} - 1)$$

on a $\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))} - 1 \geq 0$, donc $(\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))} - 1) \text{Log}(B(F(x) - A)) \leq 0$

soit en passant à l'exponentielle :

$$(B(F(x) - A))^{\left(\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))} - 1\right)} - 1 \leq 0$$

$i'(x) \leq 0$ et i est décroissante.

Or

$$i(x_{max}) = A + (B \times (1 - A))^{\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}} - B$$

et comme $\text{Ln}(B - A) = \text{Ln}(B(1 - A)) \frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}$ en passant à l'exponentielle

$$B - A = (B(1 - A))^{\frac{\text{Ln}(B-A)}{\text{Ln}(B(1-A))}}$$

et $i(x_{max}) = 0$

i est décroissante donc i est une fonction positive,

ce qui permet de conclure que $F_{hybride}(x) \geq BF(x)$ soit

$$F_{hybride}(x) \geq F_{marché}(x_{max})F_{emp}(x)$$

Annexe 6 : Sévérité sur base expérience - Ajustement des queues de distribution

Une facilité pratique peut être intéressante à utiliser, il s'agit des opérateurs de distorsion de distributions continues de probabilité. Ces opérateurs agissent sur les fonctions de sévérité en les sévérant de plus en plus au fur et à mesure que l'on se déplace vers les valeurs de pointe de la distribution.

Deux opérateurs de distorsions de la fonction de sévérité sont proposés :

- la PH-Transform,
- la Wang-Transform

La transformation s'applique à la fonction de survie de X : $S_X = 1 - F_X$.

Pour la PH-Transform :

$$S_X^*(x) = S_X(x)^{\frac{1}{p}}$$

avec $p \geq 1$ le coefficient d'aversion au risque.

Quand $p = 1$, la transformation est neutralisée.

Pour la Wang-Transform :

$$S_X^*(x) = \phi(\phi^{-1}(S_X(x) + \alpha))$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

et ϕ la fonction de distribution d'une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$, ϕ^{-1} son inverse.

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Quand $\alpha = 0$, la transformation est neutralisée.

Ces deux transformations permettent de charger de manière conséquente la prime pure des tranches hautes tout en assurant un chargement plus léger des primes pures des tranches basses.

Ces transformations présentent aussi l'avantage de conserver la nature de certaines lois de distributions. Pour la PH-Transform, les lois exponentielle, Pareto, Weibull et Burr sont stables après transformations :

$Y = PH(X)$	Moyenne	Variance
$X \sim EXP(\frac{1}{b})$ $Y \sim EXP(\frac{1}{b\rho})$ <i>Lien</i> (X, Y)	b $b\rho$ $E(Y) = \rho E(X)$	b^2 $b^2\rho^2$ $V(Y) = \rho^2 V(X)$
$X \sim Pareto(\alpha, \lambda)$ $Y \sim Pareto(\frac{\alpha}{\rho}, \lambda)$ <i>Lien</i> (X, Y)	$\frac{\lambda}{\alpha-1}$ $\begin{cases} \frac{\lambda}{\frac{\alpha}{\rho}-1} & \rho < \alpha \\ \infty & \rho \geq \alpha \end{cases}$ $E(Y) = E(X) \frac{\alpha-1}{\frac{\alpha}{\rho}-1}$	$\frac{\lambda^2 \alpha}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}$ $\frac{\lambda^2 \frac{\alpha}{\rho}}{(\frac{\alpha}{\rho}-1)^2 (\frac{\alpha}{\rho}-2)}$ $V(Y) = \frac{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}{(\alpha-\rho)^2 (\alpha-2\rho)\rho^2} V(X)$
$X \sim WEIBULL(\alpha, \beta)$ $Y \sim WEIBULL(\alpha, \beta\rho^{\frac{1}{\alpha}})$ <i>Lien</i> (X, Y)	$\beta\Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)$ $\beta\rho^{\frac{1}{\alpha}}\Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)$ $E(Y) = \rho^{\frac{1}{\alpha}} E(X)$	$\beta^2 \{2\Gamma(\frac{2}{\alpha} + 1) - [\Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)]^2\}$ $(\beta\rho^{\frac{1}{\alpha}})^2 \{2\Gamma(\frac{2}{\alpha} + 1) - [\Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1)]^2\}$ $V(Y) = \rho^{\frac{2}{\alpha}} V(X)$
$X \sim BURR(\alpha, \beta, \tau)$ $Y \sim BURR(\frac{\alpha}{\rho}, \beta, \tau)$ <i>Lien</i> (X, Y)	$\frac{\beta^{\frac{1}{\tau}} \Gamma(\alpha - \frac{1}{\tau}) \Gamma(1 + \frac{1}{\tau})}{\Gamma(\alpha)}$ $\frac{\beta^{\frac{1}{\tau}} \Gamma(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{\tau}) \Gamma(1 + \frac{1}{\tau})}{\Gamma(\frac{\alpha}{\rho})}$ $E(Y) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\frac{\alpha}{\rho} \frac{1}{\tau})}{\Gamma(\alpha - \frac{1}{\tau}) \Gamma(\frac{\alpha}{\rho})} E(X)$	$\frac{\beta^{\frac{2}{\tau}} \Gamma(\alpha - \frac{2}{\tau}) \Gamma(1 + \frac{2}{\tau})}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{\beta^{\frac{1}{\tau}} \Gamma(\alpha - \frac{1}{\tau}) \Gamma(1 + \frac{1}{\tau})}{\Gamma(\alpha)} \right)^2$ $\frac{\beta^{\frac{2}{\tau}} \Gamma(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{2}{\tau}) \Gamma(1 + \frac{2}{\tau})}{\Gamma(\frac{\alpha}{\rho})} - \left(\frac{\beta^{\frac{1}{\tau}} \Gamma(\frac{\alpha}{\rho} - \frac{1}{\tau}) \Gamma(1 + \frac{1}{\tau})}{\Gamma(\frac{\alpha}{\rho})} \right)^2$

TABLE 18.4 – Stabilité des lois de distribution par PH-Transform

Pour la Wang-Transform, des propriétés de stabilité sont vérifiées pour les lois normales et lognormales :

- Pour $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y \sim N(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$
- Pour $Ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Ln(Y) \sim N(\mu + \alpha\sigma, \sigma^2)$

De plus amples informations au sujet des deux transformateurs peuvent être trouvés notamment dans [68] et [67].

Annexe 7 : Sévérité sur base exposition - les contrats aux États-Unis

La branche Incendie aux États-Unis est découpée en deux sous-branches, la branche des particulier appelée “Personal Property” et la branche commerciale appelée “Commercial Property”. Nous verrons que l’approche de tarification sur exposition de ces deux sous-branches est la même.

La force de cette tarification et le poids qu’elle représente dans la tarification des contrats Incendie sur le marché américain tient à la fois à la qualité et à la quantité d’information de marché à disposition des réassureurs de la place. Ces derniers ont en effet la possibilité moyennant finance d’accéder à une base de données gigantesque de la part de l’organisme appelé ISO (Insurance Services Office). L’ISO rassemble les primes et les sinistres à un niveau aussi fin que le contrat d’assurance auprès de la majorité des assureurs américains. Les actuaires de cet organisme se servent de ces informations pour construire des courbes de destruction des édifices par bande fine de sommes assurées (notée BSA_k dans la suite), et par type de construction (notée t dans la suite). Nous verrons que ces fonctions de sévérité servent de base pour la production du tarif sur exposition des contrats Incendie américains.

Plus spécifiquement pour les deux sous-branches, l’ISO fournit également les données suivantes :

- Personal Property :
 - les poids de primes par état, bande fine de sommes assurées et type de construction,
 - les loss ratios de marché par type de contrat. On distingue trois types de contrat pour le Personal Property, les contrats “Fire Dwelling”, “Home Owners” ou “Farm Owners”, suivant le type de couverture du contrat :
 - Le premier type, “Fire Dwelling” couvre classiquement les assurés contre les dommages aux édifices causés pas l’incendie, l’effondrement, l’explosion, la grêle, la tempête, etc... Il s’agit d’une assurance particulièrement adaptée aux clients propriétaires louant leur habitation. En effet le deuxième type de contrat “Home Owners” ne couvre en général pas les habitations dans lequel le client n’habite pas. Par ailleurs, si les dommages causés aux biens ne permettent plus de le louer, le contrat “Dwelling Fire” offre aux propriétaires une compensation pour perte de loyer pendant une certaine période, le temps en général d’effectuer les réparations.
 - Pour ce qui est du contrat “Home Owners”, il convient en général aux propriétaires désireux de protéger non seulement leur habitation mais aussi le contenu des logements contre tout type de dommage.
 - Enfin le troisième type “Farm Owners” est adapté aux clients gérants d’un domaine fermier. Il présente l’avantage d’à la fois comporter toutes les couvertures possibles qu’offre un contrat “Home Owners”, et de protéger ses biens d’exploitation, édifices et animaux contre tout type de risque. Il s’agit en quelque sorte d’une assurance mixte offrant aux fermiers la protection à la fois de son habitation et de son activité.

- Commercial Property :
- les poids de primes par bande fine de sommes assurées et type de construction,
- les loss ratios de marché par type de construction

Par ailleurs, l'actuaire en charge de la tarification doit récupérer les données cédantes suivantes :

- Personal Property :
- les poids de primes par bande de sommes assurées du portefeuille, notées BSA_K dans la suite, w_{BSA_K} pour les poids,
- les poids de primes par état w_e ,
- les poids de primes par type de construction w_t ,
- les franchises d'assurance (notées SIR_K dans la suite), et les sommes assurées moyennes (notées SA_K dans la suite) des bandes de sommes assurées
- Commercial Property :
- les poids de primes par bande de sommes assurées du portefeuille w_{BSA_K} ,
- les poids de primes par type de construction w_t ,
- les franchises d'assurance SIR_K , et les sommes assurées moyennes des bandes de sommes assurées SA_K

Une fois les données de référentiel et les données cédantes récupérées, l'actuaire peut procéder à la construction des processus de fréquence et de sévérité sur base exposition des contrats incendie américains.

Comme mentionné auparavant, l'approche de tarification des deux sous-branches, "Personal Property" et "Commercial Property" est la même. Il s'agit, à partir des données, de construire les fonctions de sévérité au niveau dit atomique de la tarification.

Pour "Personal Property" comme pour "Commercial Property", le niveau atomique correspond à la bande de sommes assurée BSA_K et le type de construction t . Pour chaque atome, on construit la fonction de sévérité par mélange pondéré par les poids $w_{BSA_k,t}$ des fonctions de sévérité des tranches fines BSA_k :

$$F_{X_{BSA_K,t}}(x) = \frac{\sum_{k=1}^K w_{BSA_k,t} F_{X_{BSA_k,t}}(x)}{\sum_{k=1}^K w_{BSA_k,t}}$$

Les poids $w_{BSA_k,t}$ sont obtenus :

- Personal Property : par multiplication des poids de primes par état, bande fine de sommes assurées et type de construction du référentiel et des poids de primes par état w_e de la cédante.
- Commercial Property : directement du référentiel.

Pour chaque atome, vient ensuite le calcul du montant de prime, $P_{BSA_K,t} = P \cdot w_{BSA_K} \cdot w_t$.

Par ailleurs le loss ratio de l'atome $LR_{BSA_K,t}$ est le loss ratio de marché dépendant du type de contrat côté pour la sous-branche "Personal Property", et le loss ratio de marché du type de construction pour la sous-branche "Commercial Property".

Enfin vient le calcul de l'espérance des sinistres d'assurance dont la variable aléatoire s'exprime de la manière suivante :

$$X_{BSA_K,t}^{ins} = \text{Min}(SA_K, \text{Max}(X_{BSA_K,t} - SIR_K, 0))$$

ce qui permet de déduire la fonction de sévérité :

$$F_{X_{BSA_K,t}^{ins}}(x) = \begin{cases} F_{X_{BSA_K,t}}(x + SIR_K) & 0 \leq x < SA_K - SIR_K \\ 1 & x \geq SA_K - SIR_K \end{cases}$$

et

$$E(X_{BSA_K,t}^{ins}) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{X_{BSA_K,t}^{ins}}(x)) dx$$

Finalement, on obtient l'espérance du nombre de sinistre de chaque atome en utilisant la relation d'égalité des primes pures suivante :

$$E(N_{BSA_K,t}) E(X_{BSA_K,t}^{ins}) = P_{BSA_K,t} LR_{BSA_K,t}$$

$$E(N_{BSA_K,t}) = \frac{P_{BSA_K,t} LR_{BSA_K,t}}{E(X_{BSA_K,t}^{ins})}$$

Comme présenté ci-dessus dans la description du modèle stochastique sous-jacent à la tarification sur exposition, la fonction de sévérité de la cotation F_X s'obtient ensuite par pondération des

fonctions de sévérité des atomes par les espérances des fréquences des atomes et l'espérance de la fréquence par sommation des espérances des fréquences des atomes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F_X(x) = \sum_{BSA_K, t} \frac{E(N_{BSA_K, t})}{E(N)} F_{X_{BSA_K, t}}(x)$$

$$E(N) = \sum_{BSA_K, t} E(N_{BSA_K, t})$$

Annexe 7 : Modélisation des sinistres exceptionnels

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash				
			Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
	Longue	Cat					
Proportionnelle							

FIGURE 18.3 – Modélisation des sinistres exceptionnels

Nous avons vu dans les différentes parties du mémoire comment l'actuaire décrit le risque en construisant fréquence et sévérité à partir des données cédantes et de marché. Il peut par ailleurs vouloir rajouter une composante de risque lié à des sinistres exceptionnels non pris en compte dans la construction précédente.

Pour la modélisation des sinistres exceptionnels, nous avons développé trois facilités de création de risk process dit probabiliste caractérisé par l'ensemble {fréquence, sévérité, seuil de modélisation}.

Risk Process analytique pur

Dans ce cas, on propose de choisir directement le seuil de modélisation, la distribution de fréquence et ses paramètres parmi les lois de Bernoulli, Binomiale, Poisson et Binomiale Négative et la distribution de sévérité au seuil et ses paramètres parmi les lois Exponentielle, Lognormale, Benktander, Normale, Pareto, Bose Einstein, Pareto Généralisée, Fermi Dirac, Weibull, et EVT (Extreme Value Theory).

L'annexe 4 donne la définition de ces lois de fréquence et de sévérité en terme de densité, fonction de distribution cumulée, fonction inverse, moyenne et variance à la base et au seuil X_0 .

Risk Process fréquence analytique / sévérité empirique

Dans ce cas, l'actuaire définit le seuil, et la fréquence comme dans le cas d'un Risk Process analytique pur. La sévérité n'est pas déterminée de manière analytique mais à partir d'un ensemble de montants de sinistres individuels et leurs poids relatifs, ce qui permet de construire une distribution de sévérité empirique. L'actuaire a le choix de relier ces montants de sinistres comme dans le cas d'une distribution empirique classique avec des sauts de probabilité à chaque montant de sinistre, ou bien comme dans le cas d'une distribution empirique "multi-ajustée" tels que décrits dans le paragraphe 9.

Risk Process empirique pure

Dans ce cas, l'actuaire définit le seuil puis un ensemble de montants de sinistres avec leurs périodes de retour respectives. La fréquence est automatiquement considérée comme distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre égal à la somme des inverses des périodes de retour des sinistres. L'actuaire a par ailleurs le choix de relier les montants de sinistres comme dans le cas d'une distribution empirique classique avec des sauts de probabilité à chaque montant de sinistre, ou bien comme dans le cas d'une distribution empirique "multi-ajustée" tels que décrits dans le paragraphe 9, ce qui permet au final de construire la distribution de sévérité du risk process.

Annexe 8 : Mélange des Risk Process

Type de Réassurance	Type de Branche	Exposition	Couverture XS	Sinistralité Attritionnelle	Distributions attritionnelles pouvant être dérivées	Sinistralité Exceptionnelle	Choix et Mélange
Non Proportionnelle	Courte	Non Cat	Risque	Données d'expérience	Fréquence et Sévérité	Simulations de scénarios extrêmes	Choix et Mélanges de Processus attritionnels et exceptionnels
			Clash Evènement				
			Risque	Données Exposition et Loss Ratio d'assurance	Sévérité par risque		
	Longue	Cat					
Proportionnelle							

FIGURE 18.4 – Mélange des Risk Process

Une fois les risk process construits pour la partie attritionnelle du risque (en utilisant les données d'expérience et d'exposition) et pour la partie sinistralité extrême du risque, il faut trouver une technique pour construire un risk process mélange utilisable par la suite pour coter n'importe quelle tranche de réassurance au dessus du seuil de modélisation du risk process mélange. Notons qu'il y a des situations où le nombre de risk process est supérieur à deux car la sinistralité exceptionnelle a été modélisée par plusieurs risk process différents du fait de la multiplicité des couvertures de risque du contrat de réassurance (tremblement de terre, tempête, terrorisme,...).

Seuil de modélisation

Très naturellement, le seuil de modélisation du risk process mélange est le maximum des seuils de modélisation des risk process à mélanger.

Convolution des variables aléatoires de fréquence

La loi de fréquence mélange est la loi de la variable aléatoire somme des variables aléatoires de fréquence des risk process à mélanger :

$$N = \sum_{i=1}^n N_i$$

La fréquence mélange a une densité de probabilité f_N égale à la convolution des densités de probabilité des fréquences à mélanger f_{N_i} :

$$f_N = f_{N_1} \otimes f_{N_2} \otimes \dots \otimes f_{N_n}$$

Si on s'intéresse aux fonctions caractéristiques des variables aléatoires, on s'aperçoit que la convolution se traduit en terme de fonction caractéristique par un produit simple :

$$\phi_N(t) = \phi_{N_1}(t) \times \phi_{N_2}(t) \times \dots \times \phi_{N_n}(t)$$

Or les lois de fréquences ont une fonction caractéristique analytique dont la définition se trouve en annexe 4.

Une fois la fonction caractéristique de la somme trouvée, on applique une transformation de Fourier Rapide Inverse pour obtenir la densité de probabilité de f_N .

Mélange pondéré des lois de sévérité

En ce qui concerne la sévérité, la fonction de sévérité mélange est obtenue en effectuant un mélange pondéré par les espérance des fréquences des fonctions de distribution de sévérité individuelles :

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^n \frac{E(N_i)}{E(N)} F_{X_i}(x)$$

avec

$$E(N) = \sum_{i=1}^n E(N_i)$$