



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du Diplôme d'Actuaire EURIA et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 02 Septembre 2014

Par : Yassir RADI

Titre : Optimisation numérique dans le cadre de modèles ORSA

Confidentialité : non.

**Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaire**

Luc GREBILLE

Signature :

Entreprise

Prim'Act

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA

Karine ARZUR

Reinhardt EULER

Directeur de mémoire en entreprise

Frédéric PLANCHET

Signature :

Invité

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Bibliothèque :

Secrétariat :

Optimisation numérique dans le cadre de modèles ORSA

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Frédéric Planchet, Associé au sein de *Prim'Act*, de m'avoir proposé de travailler sur ce sujet. Ses conseils avisés et ses remarques judicieuses m'ont permis de mieux cerner la problématique et d'affiner ma démarche.

Je remercie également Aymric Kamega, Directeur Associé chez *Prim'Act*, pour son suivi et ses recommandations lors de ce stage ainsi que le corps professoral de l'*Euria* qui m'a apporté une formation de qualité.

L'élaboration de ce mémoire doit beaucoup aux équipes de *Prim'Act* pour leur générosité d'esprit et leurs précieux conseils. Je tiens particulièrement à remercier Montassar Tammar et Elie Ifergan pour les échanges qui m'ont permis d'avancer sur le sujet.

Je tiens dernièrement à exprimer toute ma reconnaissance envers Philippe Lenca, professeur à Télécom Bretagne, ainsi que l'équipe pédagogique de Télécom Bretagne, pour m'avoir donné la possibilité de compléter ma formation d'ingénieur par des études d'actuariat.

Mots clés : ORSA, épargne, Contrats Euros, Taux minimum garanti, *Best Estimate*, Modèles stochastiques, Simulation, assurance vie, rachat, risques financiers, options cachées, valorisation, *Monte Carlo*, erreurs d'approximation, Pilier 2.

Résumé

Au cœur du Pilier 2 de solvabilité II, l'*ORSA* (*Own Risk and Solvency Assessment* ou Évaluation Interne des Risques et de la Solvabilité) suppose l'évaluation de l'entreprise par elle-même de sa solvabilité. Il s'agit d'un processus qui illustre la capacité de l'organisme à identifier, mesurer et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité d'une manière prospective.

Actuellement, les réflexions concernant l'*ORSA* mettent en avant la complexité à mettre en place un tel processus. En effet, l'approche adoptée par les assureurs dans le cadre des calculs Pilier 1 s'avère très mal adaptée au cadre de l'*ORSA*, qui nécessite d'obtenir une information sur la distribution du taux de couverture des engagements sur un horizon du plan stratégique de l'entreprise.

Il devient donc inéluctable de penser à des nouvelles classes de modèles qui contournent cette difficulté de projection tout en étant compatibles avec les exigences opérationnelles de l'*ORSA*. Si en assurance non vie des solutions relativement simples peuvent être proposées (cf. Planchet et al. [2010][PF10]), la complexité des interactions actif / passif rend la tâche a priori plus complexe en assurance vie et notamment en épargne. En effet, la présence d'options cachées dans le passif de l'assureur (taux minimum garanti, participation aux bénéfices, possibilité de rachat, etc.) rend le sujet délicat d'un point de vue technique.

L'objectif de ce mémoire est de proposer un prolongement des deux modèles analytiques : Bonnin et al. [2014][BF14a] pour l'épargne générale et Bonnin et al. [2014] [BF14b] pour l'épargne retraite. L'extension proposée se concentre sur la valorisation des deux options : taux minimum annuel garanti et participation aux bénéfices. Elle entend rendre la formule analytique plus générale et plus adaptée à la fois à la politique de participation aux bénéfices de l'assureur et à la particularité de son actif.

Le choix de la prise en compte des options cachées par des formules fermées conduit à des performances compatibles aux exigences opérationnelles de l'*ORSA*. Le modèle décrit évite les complications de l'excès de paramétrisation et privilégie une meilleure intelligibilité des calculs et des résultats.

Keyword: ORSA, savings contracts, Minimum guaranteed rate, *Best Estimate*, stochastic models, Simulation, life insurance, surrender, financial risks, embedded options, Valuation, *Monte Carlo*, approximation errors, pillar 2.

Abstract

At the heart of Pillar 2 of Solvency II, ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) requires that the company has the ability to evaluate its own solvency. It is a process that illustrates the ability of the organization to identify, measure and manage the elements that alter its solvency based on a prospective approach.

Currently, the reflections conducted by the different actors on the ORSA highlight the complexity to implement such a process. Indeed, the approach taken by insurers under Pillar 1 is very poorly suited to the ORSA framework, which requires obtaining information about the distribution of coverage ratio on the horizon of the strategic plan of the company.

It becomes inevitable to think of new classes of models that circumvent the difficulty of projection while being compatible with the operational requirements of the ORSA. If in non-life insurance some relatively simple solutions can be proposed (see Planchet et al. [2010] [PF10]), the complexity of interactions between assets and liabilities makes the task more complex in life insurance and savings contracts in particular. Indeed, the presence of embedded options in the liability of the insurer (guaranteed minimum rate, profit sharing, surrender, etc.) makes the subject delicate from a technical point of view.

The objective of this thesis is to propose an extension of the two analytical models: Bonnini et al.[2014][BF14a] for general savings and Bonnini et al. [2014] [BF14b] for retirement savings. The proposed extension focuses on the valuation of two options: a guaranteed annual minimum rate and profit sharing. It intends to generalize the analytical formulas and suggests the consideration of both : profit sharing policy and the particularity of the insurer's assets .

Choosing the approximation of embedded options by closed formulas leads to consistent operational performance required by the ORSA framework . The described model avoids the complications of an excess of parametrization and favors more understandable calculations and results.

Mots clés : ORSA, épargne, Contrats Euros, Taux minimum garanti, *Best Estimate*, Modèles stochastiques, Simulation, assurance vie, rachat, risques financiers, options cachées, valorisation, *Monte Carlo*, erreurs d'approximation, Pilier 2.

Synthèse

Contexte général

L'*ORSA* (*Own Risk and Solvency Assessment* ou Évaluation Interne des Risques et de la Solvabilité) est un processus prospectif au cœur du Pilier 2 de Solvabilité II. Il est une des composantes les plus importantes du dispositif de gouvernance des sociétés d'assurance. Actuellement, ce sujet concentre de plus en plus de réflexions de la part des assureurs en France, alors que le Pilier 1, plus mature à présent, est en phase de stabilisation.

Les discussions actuelles sur ce sujet mettent en évidence la complexité de la mise en place d'un tel processus. Cette difficulté provient de la nécessité de trouver une façon rigoureuse pour projeter le taux de couverture des engagements sur l'horizon du plan stratégique de l'entreprise. Si des solutions relativement simples peuvent être proposées en assurance non-vie (cf. Planchet et al. [2010][PF10]), la complexité des interactions actif/passif rend la tâche a priori plus complexe en assurance vie et notamment en épargne. En effet, la présence d'options cachées dans le passif de l'assureur (taux minimum garanti, participation aux bénéfices, possibilité de rachat, etc.) rend le sujet délicat d'un point de vue technique.

L'objectif de ce mémoire est de proposer un prolongement des deux modèles : Bonnin et al. [2014][BF14a] pour l'épargne générale et Bonnin et al. [2014] [BF14b] pour l'épargne retraite. L'extension proposée se concentre sur la valorisation des deux options : taux minimum **annuel** garanti et participation aux bénéfices. Le cadre de la valorisation de l'option rachat est quant à lui repris du modèle épargne retraite de Bonnin et al. [2014] [BF14b]. L'idée est de continuer la démarche basée sur les formules analytiques et de montrer qu'il est possible d'avoir des formules fermées en présence de ces deux options. Notre approche s'inspire des travaux de Lindset [2001][Lin01] et Persson et Aase [1996][KKA96] qui ont été adaptés à la problématique *ORSA* épargne de ce mémoire.

Démarche

Nous verrons dans un premier temps que les modèles de calcul *ALM* adoptés par les assureurs ne permettent pas de répondre à la problématique *ORSA*. Il est donc inéluctable de réfléchir à des nouvelles classes de modèles qui contournent cette difficulté. Nous ferons ensuite un état de l'art des approches qui existent à l'heure actuelle tout en insistant sur le cadre dans lequel se situe la démarche du mémoire. Le modèle sera ensuite exposé afin de mettre en avant la nécessité de pouvoir valoriser les deux options : taux minimum annuel garanti (noté TMG par la suite) et participation aux bénéfices.

L'étude se concentre sur la valorisation des deux options citées *supra* de la façon suivante :

1. établir les formules fermées en les adaptant au modèle de taux de *Vasicek* [1977][VAS77]
2. étudier la sensibilité des prix établis aux paramètres du modèle
3. définir les erreurs d'une approximation par méthodes de *Monte Carlo*
4. application dans le cadre d'un modèle *ORSA*
5. prise en compte du paramètre temps de calcul

Modèle *ALM* classique pour l'*ORSA*, pourquoi pas ?

Les modèles de calculs d'engagements dans le cadre du Pilier 1 de Solvabilité II en présence d'interactions actif/passif fortes (typiquement en épargne) développés par les assureurs utilisent une approche "rustique" consistant globalement à injecter dans un modèle *ALM* de production de comptes sociaux des trajectoires issues d'un générateur de scénarios économiques "risque neutre" (cf. Planchet et al.[2009] [PF09]) pour construire *in fine* un estimateur empirique du *Best Estimate* de ces engagements ; cette démarche est rappelée dans Leroy et Planchet [2011][LG11] :

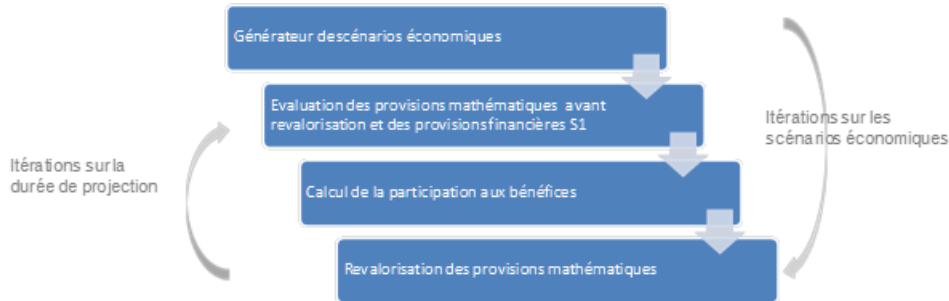


FIGURE 1 – Illustration calcul *Best Estimate* dans un cadre classique Pilier 1

Indépendamment des difficultés conceptuelles que soulève une telle approche, elle s'avère très mal adaptée au cadre de l'*ORSA*, qui nécessite d'obtenir une information sur la distribution du taux de couverture des engagements sur un horizon de quelques années. En effet, la complexité d'un modèle *ALM* classique - de par ses paramètres- et son temps conséquent de calcul font en sorte que son utilisation devient très vite inenvisageable. De plus, le cadre du processus *ORSA* suppose la nécessité d'estimer rapidement la déformation du ratio de couverture tout en sachant que seule une estimation est requise. Dès lors, la capacité à pouvoir calculer les provisions et, partant, à projeter le bilan économique de manière efficace devient un enjeu central auquel la structure "Pilier 1" ne permet pas de répondre.

Les modèles proposées

Afin de répondre à la problématique de projection du processus *ORSA*, deux classes de modèles ont été développées depuis 2009. Ces modèles abordent la problématique de deux façons différentes. Une première classe vise à diminuer le nombre de simulations nécessaires : optimisation des simulations secondaires par Nteukam et Planchet [2010] [NO10] et l'accélération de l'approche Simulations dans les Simulations de Devineau et Loisel [2009] [DL09]. La deuxième classe préfère avoir recours à des formules fermées : les approches basées sur des formules fermées analytiques par Bonnin, Combes, Planchet et Tamar [2014][BF14a] , l'algorithme de *Least-Squares Monte Carlo* par Bauer et al.[2010][BD08] et les approches par portefeuilles de réplcation (cf. Revelen [2009][Ju109]).

La démarche proposée dans le cadre de ce mémoire s'inscrit dans le prolongement des formules analytiques de Bonnin et al .[2014][BF14a], elle repose sur un calcul direct du *Best Estimate* du contrat sans passer par un modèle *ALM* classique. La contrainte de ce calcul est que le *Best Estimate* initial issu du modèle doit coïncider avec celui issu des outils "Pilier 1" qui projettent effectivement la mécanique des comptes sociaux et donc le taux servi. Une fois que cette condition sera vérifiée, la projection du *Best Estimate* est obtenue en utilisant la formule fermée pour chaque nœud de projection des facteurs de risque. La distribution du capital réglementaire *SCR* est ensuite obtenue par formule standard ce qui permet la détermination du ratio de couverture ($\frac{\text{Fonds Propres}}{\text{SCR}}$).

Best Estimate par formules fermées

Cette partie expose le modèle utilisé pour le calcul du *Best Estimate* à l'instant initial.

La cadre de travail proposé par Bonnin et al .[2014][BF14a] expose une manière analytique pour l'approximation du *Best Estimate* d'un contrat d'épargne. L'idée ici est de pouvoir obtenir des formules fermées pour un calcul robuste et justifiable dans le cadre de modèles *ORSA*. Ce cadre est repris dans Bonnin et

al. [2014] [BF14b] pour un modèle épargne retraite pour établir que le *Best Estimate* à l’instant initial a la formule suivante :

$$Best\ Estimate(0, Maturité) = \alpha \times \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [Prestation_j] - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [Cotisation_j]$$

où α est un coefficient exprimant le coût de l’option de rachat, $\Omega(0, j)$ le coût de l’option de revalorisation, $P_n(0, j)$ le prix du zéro-coupon nominal à l’instant initial de maturité j et $\mathbb{P}^a$ la probabilité historique.

Nous remarquons donc que la capacité à estimer le *Best Estimate* dépend intimement de l’efficacité des méthodes de calcul des facteurs déflateurs $\Omega(0, j)$, étant donné que le calcul des autres éléments de l’équation est immédiat.

Limites : Bonnin et al. [2014] [BF14b] proposent une méthode d’estimation des facteurs $\Omega(0, j)$. Cette approche présente les limites suivantes :

- Le modèle propose de calculer l’option de revalorisation en se basant sur la simplification que l’objectif de revalorisation de prestations de retraite est en général très fortement lié à l’inflation des prix. Cette simplification, propre au cadre de l’épargne retraite, ne peut pas être considérée dans le cadre de l’épargne générale où l’objectif de revalorisation rejoint en général une partie du rendement annuel de l’actif de l’assureur.
- Le modèle propose le calcul des facteurs $\Omega(0, j)$ par des méthodes de *Monte Carlo* en adoptant une discrétisation annuelle. L’erreur de cette approche de calcul n’a pas été estimée et l’optimisation de sa convergence n’a pas été étudiée.

Solution proposée : Afin de contourner ces deux limites, nous proposons une méthode d’estimation des facteurs $\Omega(0, j)$. Cette estimation passe par la prise en compte d’un taux minimum annuel garanti et un rendement annuel d’un actif. Elle présente l’avantage de fournir une formule fermée et s’adapte au modèle de taux utilisé pour la projection. Cette extension entend rendre la formule plus générale et plus adaptée à la fois à la politique de participation aux bénéfices de l’assureur, et en même temps à la particularité de son actif.

En notant TMG_i le taux minimum annuel garanti de l’année i , $Rendement_i$ le rendement annuel de l’année i d’un actif et $Actualisation_i$ le processus d’actualisation de l’année i ; nous proposons la formule suivante pour le calcul des options taux minimum garanti et participation aux bénéfices :

$$\Omega(0, j) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^{max(TM G_1, Rendement_1)}}{e^{Actualisation_1}} \frac{e^{max(TM G_2, Rendement_2)}}{e^{Actualisation_2}} \cdots \frac{e^{max(TM G_j, Rendement_j)}}{e^{Actualisation_j}} \right]$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre utilisée pour la valorisation.

Chaque année, l’assuré voit son épargne se revaloriser à hauteur du maximum entre un taux minimum annuel garanti et un rendement annuel d’un actif. Le terme est ensuite actualisé à l’aide d’un processus d’actualisation qui rejoint le calcul classique d’un *Best Estimate* Pilier 1.

Étude des facteurs déflateurs Ω

La capacité à estimer les facteurs Ω est le principal objectif de ce mémoire. Nous montrons qu’il est possible d’avoir des formules fermées pour Ω en adaptant les formules de Lindset [2001][Lin01] et Persson et Aase [1996][KKA96] au modèle de taux de Vasicek [1977][VAS77]. Ces formules sont obtenues en considérant un actif suivant la dynamique classique de *Black & Scholes* [1973][FB73].

Nous avons ensuite calibré les paramètres du modèle sur la courbe publiée par l’EIOPA le 30 avril 2014 dans le cadre des *stress tests*. Les résultats ci-après illustrent la valeur de l’option correspondant à une unité de prime de cotisation pour deux types de rendements, $\Omega_1(0, j)$ pour un rendement constaté sur le

processus d'actualisation ($Rendement_i = Actualisation_i$) et $\Omega_2(0, j)$ pour un rendement constaté sur un actif gaussien¹ négativement corrélé au processus d'actualisation, pour des maturités entre 1 et 5 ans :

Maturité	$\Omega_1(0, Maturité)$	$\Omega_2(0, Maturité)$
1	1.014604	1.080652
2	1.025127	1.180592
3	1.031960	1.278935
4	1.035486	1.383176
5	1.036076	1.493779

TABLE 1 – Comparaison du prix de l'option pour deux profils de rendement

Nous constatons que la volatilité importante calibrée sur l'actif gaussien augmente la valeur du facteur Ω , cela rajoute un chargement au *Best Estimate* que l'assureur doit provisionner. Une étude plus détaillée a concerné la sensibilité de ces deux prix aux différents paramètres du modèle. En effet, dans le cadre de la projection *ORSA*, la valeur du *Best Estimate* futur (et ainsi du ratio de couverture) dépend de la déformation des facteurs de risque et donc des variations des paramètres du modèle. Les résultats de cette étude montrent que :

- Le prix $\Omega_1(0, Maturité)$ est plus sensible à la volatilité du taux, en comparaison à la sensibilité aux taux minimum garanti ou au taux nominal initial. Une attention particulière doit être accordée à la calibration de ce paramètre. La variation du taux minimum annuel garanti a quant à elle plus d'impact sur le prix de $\Omega_1(0, Maturité)$ que le taux nominal initial. Cela explique pourquoi dans la conjoncture actuelle des taux bas, la plupart des assureurs ne proposent pas de taux minimum garanti².
- Le prix $\Omega_2(0, Maturité)$ est plus sensible au taux minimum annuel garanti. Nous avons remarqué que la variation des autres paramètres a moins d'impact sur le prix final qu'une variation du taux minimum annuel garanti. En effet, le chargement dû à cette option atteint rapidement le double de l'unité de cotisation pour des taux minimums annuels de l'ordre de 2 % et une maturité de plus de 10 ans.

Remarque : Nous notons que les résultats de l'étude de sensibilité sont propres aux paramètres ajustés. Un ajustement de paramètres différent aura comme conséquence de changer les résultats de la sensibilité des deux prix $\Omega_1(0, Maturité)$ et $\Omega_2(0, Maturité)$.

L'étape suivante consiste à quantifier l'erreur d'estimation des facteurs Ω en passant par des méthodes directes de type *Monte Carlo*. Cette étape est motivée par trois raisons majeures. La première est que le modèle de Bonnin et al. [2014][BF14b] estime ces facteurs par une méthode de *Monte Carlo* et nous souhaitons donc avoir une idée sur l'erreur commise en choisissant cette démarche. La deuxième raison est qu'en implémentant cette deuxième classe de méthodes de *pricing*, nous pouvons confirmer l'exactitude des résultats obtenus par formules fermées. La troisième raison est d'ordre informatique et concerne le temps de calcul des facteurs Ω qui s'avère assez chronophage en passant par une formule fermée.

Les résultats de cette partie ont permis de définir des mesures d'erreur liées au *Best Estimate*. En effet, nous montrons que l'erreur totale peut être décomposée en une erreur systématique, et une autre statistique. L'erreur systématique caractérise le schéma de discrétisation, la méthode numérique pour approximer l'intégrale et le nombre de pas de discrétisations ; alors que l'erreur statistique dépend du nombre de simulations. Nous avons ensuite établi une relation qui permet de lier les deux paramètres : nombre de simulations et nombre de discrétisations pour un budget de temps donné, cette relation est basée sur le théorème de Duffie et Glynn [1995][DD95]. Concrètement, l'erreur totale pour $\Omega_1(0, Maturité)$ est de l'ordre de 0,2 % pour un budget de 4 discrétisations et 16 simulations et peut être réduite à 7×10^{-7} % pour une méthode précise de calcul de l'intégrale et un nombre de simulations de 262 144 et 512 discrétisations. Une relation a été établie entre le nombre de simulations et le nombre de discrétisations afin de pouvoir diviser l'erreur totale par deux. Pour $\Omega_2(0, Maturité)$, l'erreur totale varie de 0,8 % à 0,04 % pour un budget maximal de simulations. Le théorème de Duffie et Glynn [1995][DD95] n'est pas vérifié dans le cas de $\Omega_2(0, Maturité)$.

1. pratiquement, nous avons établi une formule générale des corrélations pour un actif de type *Black & Scholes* [1973][FB73] avec un taux stochastique

2. Selon l'étude récente de l'ACPR sur les taux de revalorisation ACPR [2014][ACP14]

Application dans le cadre d'un modèle ORSA

Nous appliquons dans cette partie les méthodes de valorisation de la partie précédente, afin de construire un modèle de projection de la déformation du taux de couverture dans le cadre de l'*ORSA*. Il s'agit d'un modèle qui prend en compte le risque financier uniquement (taux, *spread* et actions). Le cadre de cette application s'inspire d'une situation réelle.

Les résultats de la projection illustrent la répartition des taux de couverture par année de projection dans le graphe ci-après :

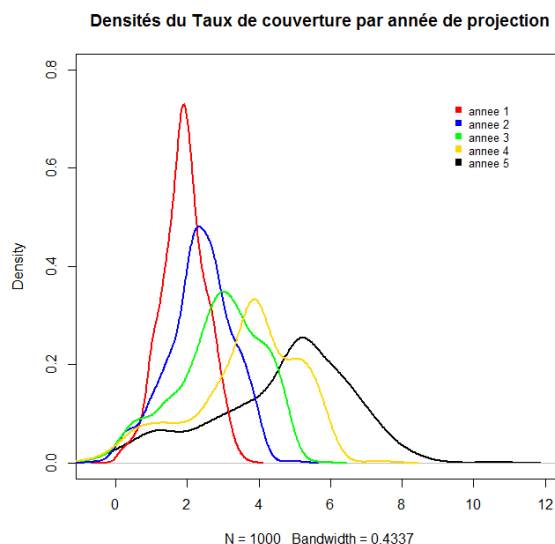


FIGURE 2 – Densité du taux de couverture par année de projection

Nous notons que le taux de couverture s'améliore d'une façon notable en avançant dans le temps. Il passe d'une moyenne de 190.71% pour la première année de projection à 461.82% pour la cinquième année de projection. La raison est que les résultats annuels de l'entreprise viennent augmenter les fonds propres ce qui améliore la situation de l'entreprise. Aucune distribution de dividendes n'est prévue pour cette première modélisation.

D'un point de vue stratégique, il est intéressant de changer la politique de distribution des dividendes, et voir l'impact sur le taux de couverture. L'outil permet de tester différentes politiques afin de respecter un ratio de couverture cible. L'objectif de l'*ORSA* étant de piloter les stratégies des assureurs, nous allons supposer que l'entreprise a exprimé son appétence aux risques de la façon suivante :

Appétence aux risques : *“La probabilité de rester à un taux de couverture du capital réglementaire de 120% doit être supérieure à 90% pour chacune des 5 années du plan stratégique”*

Afin de voir le comportement des taux de couverture autour de certains points particuliers et voir comment ils évoluent, les fonctions de répartition des taux de couverture pour chaque année de couverture sont présentées dans le graphe suivant :

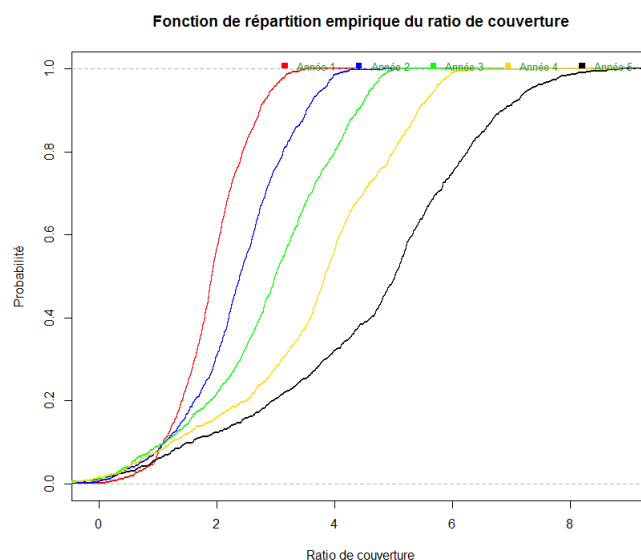


FIGURE 3 – Fonction de répartition empirique du taux de couverture par année de projection

Pour voir si la politique actuelle permet de respecter cette contrainte, nous allons calculer le quantile à 10% de la distribution du ratio de couverture pour chaque année de projection. Le tableau ci-après montre les résultats obtenus :

Année	Quantile à 10%
1	127.82%
2	131.18%
3	131.61%
4	151.35%
5	178.33%

TABLE 2 – Le quantile à 10% du taux de couverture

Nous constatons que la politique de distribution des dividendes actuelle permet de respecter l'appétence aux risques formulée par l'entreprise. Nous pouvons donc tester plusieurs politiques afin de voir dans quelle mesure elles peuvent correspondre à son appétence aux risques.

Nous supposons que l'entreprise a fait le choix de verser en dividendes une partie de ses résultats après impôts. Nous calculons par la suite le quantile à 10% des distributions du ratio de couverture pour des pourcentages des résultats affectés aux dividendes entre 2% et 10% :

% du résultat affecté aux dividendes	2%	4%	6%	7%	8%	10%
année 1	125.66%	123.51%	121.35%	120.27%	119.19%	117.04%
année 2	128.95%	126.73%	124.51%	123.39%	122.28%	120.06%
année 3	129.38%	127.15%	124.91%	123.80%	122.68%	120.45%
année 4	138.92%	136.49%	134.07%	132.85%	131.64%	129.21%
année 5	175.16%	172.00%	148.83%	147.25%	165.66%	162.50%

TABLE 3 – Quantile à 10% pour différentes politiques de distribution de dividendes

Nous remarquons que l'entreprise peut se permettre de verser jusqu'à 7% de son résultat annuel après impôts en dividendes tout en respectant son appétence aux risques.

L'analyse des résultats de la projection a permis l'identification des scénarios les plus défavorables pour l'assureur dans ce cas. En effet, une combinaison d'une baisse des taux et d'une hausse des *spread* des obligations du portefeuille de l'assureur avec une chute du rendement des actions a comme conséquence directe la dégradation du ratio de couverture.

Nous avons montré à travers cet exemple simple qu'il est possible d'avoir des résultats de projection facilement interprétables. Le point le plus chronophage du modèle est le calcul des facteurs déflateurs. Passé cette étape, les calculs se simplifient et différentes hypothèses peuvent être modifiées et testées pour voir l'impact sur les distributions des ratios de couverture.

Prise en compte du temps de calcul

Le temps de calcul devient de plus en plus un enjeu central pour les assureurs. Dans le cadre de l'*ORSA*, il est au cœur de la problématique. En effet, les modèles implémentés doivent être capable d'estimer rapidement la déformation du ratio de couverture. Dans ce sens, nous proposons une démarche consistant à optimiser le code *R* utilisé pour la projection. Cette optimisation passe par l'utilisation de la parallélisation des calculs et l'accélération de la génération des trajectoires de taux par des bibliothèques dynamiques (implémentées sous *C/Fortran*).

Les résultats montrent que nous pouvons avoir un gain total de 20 % du temps de calcul pour une erreur totale estimée de 0.2 %.

Conclusion

Le modèle exposé ici permet donc la projection stochastique du bilan économique d'un organisme assureur dans le cadre de contrats d'épargne en Euros. Le choix de la prise en compte des options cachées par des formules fermées conduit à des performances compatibles aux exigences opérationnelles de l'*ORSA*. Le modèle décrit évite les complications de l'excès de paramétrisation et privilégie une meilleure intelligibilité des calculs et des résultats.

L'extension proposée dans ce travail entend prolonger les travaux de Bonnin et al. [2014][BF14a] et Bonnin et al. [2014] [BF14b]. Elle permet la prise en compte du rendement d'un actif ce qui la rend plus adaptée à la fois à la politique de participation aux bénéfices de l'assureur, et en même temps à la particularité de son actif. L'étude de sensibilité a permis une meilleure compréhension de la variation des prix des options taux minimum annuel garanti et participation aux bénéfices. Un passage par des méthodes de *Monte Carlo* peut être envisagé étant donné que son erreur a été estimée.

Cette classe de modèles est une voie de recherche prometteuse. Différents points peuvent être améliorés et des extensions peuvent être proposées. Nous citons par exemple la possibilité d'ajuster une loi normale sur le rendement total de l'actif de l'assureur ; cette étape passe par l'approximation d'une somme de lois log-normales par une loi log-normale (cf. Dufresne [2009] [Duf09]) et entend s'adapter au profil de l'actif de l'assureur. Une deuxième extension consiste à généraliser le calcul des facteurs Ω en prenant en compte une politique de taux servi correctement représentée par un nombre limité de variables. Une troisième étude peut se concentrer sur l'optimisation des calculs des facteurs Ω en passant par un outil de calcul matriciel différent de *R* et l'étude détaillée du calcul de la fonction de répartition d'une loi normale multivariée utilisée pour le calcul de Ω (cf. Genz et Bretz [2009][GA09])

Keyword: ORSA, savings contracts, Minimum guaranteed rate, *Best Estimate*, stochastic models, Simulation, life insurance, surrender, financial risks, embedded options, Valuation, *Monte Carlo*, approximation errors, pillar 2.

Summary

General context

ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) is a forward-looking process at the heart of Pillar 2 of Solvency II. It is one of the most important components of the governance of insurance companies. Currently, the subject is concentrating more and more reflections from the insurers in France, while Pillar 1, more mature now, is in the stabilization phase.

Current discussions on the subject highlight the complexity of the implementation of such a process. This difficulty arises from the need to find a rigorous way to project the coverage ratio on the horizon of the strategic plan of the company. While relatively simple solutions can be proposed in non-life insurance (see Planchet et al. [2010][PF10]), the complexity of the asset / liability interactions makes the task more complex in life insurance and specially savings contracts. Indeed, the presence of embedded options in the liability of the insurer (minimum guaranteed rate, profit sharing, surrender, etc.) makes this subject delicate from a technical point of view.

The aim of this paper is to propose an extension of two models: Bonnin et al.[2014][BF14a] for general savings and Bonnin et al. [2014] [BF14b] for retirement savings. The proposed extension is focused on the development of two options: a minimum guaranteed **annual** rate and profit sharing. The valuation of the surrender option is this time taken from retirement savings model Bonnin et al. [2014] [BF14b]. The idea is to continue the approach based on analytical formulas and show that it is possible to have closed formulas in the presence of these two options. Our approach relies on the work of Lindset [2001][Lin01] and Persson and Aase [1996][KKA96] that have been adapted to the savings *ORSA* problem of this thesis.

Approach

We will see at first that the classical ALM models adopted by insurers fail to solve the ORSA problem. So it is inevitable to think of new classes of models that circumvent this difficulty. We will then see an overview of the approaches that exist today and emphasize on the context of the approach adopted in the thesis. The model will then be exposed to highlight the need to develop the two options: minimum annual guaranteed rate (noted later TMG) and profit sharing.

The study focuses on the valuation of the two options mentioned above as follows:

1. establish closed formulas and adapt them to the interest model rate of *Vasicek* [1977][VAS77]
2. investigate the sensitivity of established prices to the model parameters
3. define errors of the approximation by Monte Carlo methods
4. application in the context of a model ORSA
5. consideration of the computing time parameter

Classic ALM model for ORSA, why not?

The model calculations of the best estimate of liabilities under Pillar 1 of Solvency II in the presence of asset / liability interactions (typically savings) developed by insurers use a "rustic" approach, it consists in general in injecting into an ALM production model trajectories from a "risk-free" generator of economic scenarios (cf. Planchet et al [2009][PF09]) to build an empirical estimator of Best Estimate of liabilities; this approach is described in Planchet and Leroy [2011] [LG11] :

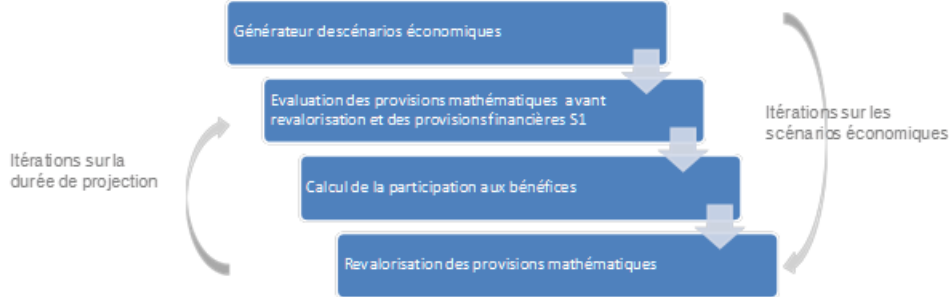


Figure 4 – Best Estimate calculation under Pillar 1

Regardless of the conceptual difficulties raised by this approach, it is very poorly suited to the ORSA process, which requires obtaining information on the distribution of coverage ratio over a period of several years. Indeed, the complexity of a classic ALM model - by its parameters - and therefore its time calculation shall ensure that its use quickly becomes infeasible. In addition, the ORSA process needs to be able to quickly estimate the deformation of the coverage ratio, knowing that only an estimation is required. Therefore, the ability to be able to calculate the reserves and thus to project the economic balance effectively becomes a central issue that the structure "Pillar 1" does not answer.

The proposed models

To solve the issue of projection under ORSA framework, two classes of models have been developed since 2009. These models address the problem in two ways. A first class aims to reduce the number of required simulations: optimization of initial simulations by Nteukam and Planchet [2010] [NO10] and accelerating Nested simulations by Devineau and Loisel [2009] [DL09]. The second class prefers to use closed formulas: approaches based on analytical closed formulas by Bonnin, Combes, Planchet and Tammar [2014] [BF14a] Least-Squares Monte Carlo algorithm by Bauer and al . [2010][BD08] and approaches by replicating portfolios (see Revelen [2009] [Jul09]).

The approach proposed in this thesis is an extension of the analytical formulas from Bonnin et al. [2014] [BF14b], it is based on a direct calculation of the best estimate of the contract without using a classic ALM model . The constraint of this calculation is that the initial best estimate from the analytical model must coincide with the one derived from "Pillar 1" calculations. Once this condition is satisfied, the projection of the best estimate is obtained by using the closed form for each projection node risk factors. The distribution of regulatory capital is then obtained by using the standard formula for the SCR calculation which allows the determination of the coverage ratio ($\frac{Equity}{SCR}$).

Best Estimate by closed formulas

This section sets out the model used to calculate the best estimate at the initial time.

The proposed framework by Bonnin et al. [2014] [BF14a] presents an analytical way to approximate the best estimate of a savings contract. The idea is to obtain closed formulas for a robust and justifiable approximation under ORSA process. This framework is included in Bonnin et al. [2014] [BF14b] for a retirement savings model, the best estimate at the initial time has the following formula:

$$Best\ Estimate(0, Maturity) = \alpha \times \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [benefit] - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [subscription]$$

where α is a coefficient representing the cost of the surrender option, $\Omega(0, j)$ the cost of accumulation option, $P_n(0, j)$ the price of nominal zero-coupon bond at the initial time maturing at j and $\mathbb{P}^a$ the historical probability.

We note that the ability to estimate the best estimate depends intimately on the effectiveness of methods for calculating deflators factors $\Omega(0, j)$. Since the calculation of the other elements of the equation is immediate.

limitations: Bonnin et al. [2014] [BF14b] propose a method for estimating factors $\Omega(0, j)$. This approach has the following limitations:

- The model proposed to calculate the revaluation option based on the simplification that the purpose of revaluation of pensions in general is very closely linked to inflation price. This simplification, specific to the frame of retirement savings, can't be regarded as part of the overall savings when the objective of revaluation joins usually an annual return on the assets of the insurer.
- The model provides the calculation of factors $\Omega(0, j)$ using Monte Carlo methods by adopting an annual discretization. The error of this approach has not been assessed and the optimization of its convergence has not been studied.

Proposed solution: To circumvent these limitations, we propose a method to estimate the factors $\Omega(0, j)$. This estimation takes into account a guaranteed annual rate and an annual return on an asset. It has the advantage of providing a closed formula and is adapted to the interest rate model used for projection. This extension aims at making the formula more adapted to both the profit sharing policy of the insurer and simultaneously to the particularity of its assets.

Noting TMG_i the guaranteed annual rate minimum of year i , $return_i$ the annual return for the year i of an asset and $Discount_i$ the discount process of the year i ; we propose the following formula to calculate the minimum guaranteed rate and profit sharing options:

$$\Omega(0, j) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^{\max(TM G_1, return_1)}}{e^{Discount_1}} \frac{e^{\max(TM G_2, return_2)}}{e^{Discount_2}} \cdots \frac{e^{\max(TM G_j, return_j)}}{e^{Discount_j}} \right]$$

where $\mathbb{Q}$ the risk-free probability used for valuation.

Each year, the insured sees his savings to upgrade to the maximum height between an annual minimum guaranteed rate and an annual return on an asset. The term is then discounted using a discount process that joins the classical calculation of a Best Estimate under Pillar 1.

The main difference from the proposed model Bonnin et al. [2014] [BF14b] is taking into account the performance of an asset through $return_i$. This extension aims to make the formula more adapted to both the profit sharing policy of the insurer, and simultaneously to the particularity of its assets.

Study of deflator factors Ω

The ability to estimate the factors Ω is the main objective of this thesis. We show that it is possible to have closed formulas for Ω by adapting the formulas from Lindset [2001] [Lin01] and Persson and Aase [1996] [KKA96] to the interest rate model of Vasicek [1977] [VAS77]. These formulas were obtained by considering an asset under the classical dynamics of Black & Scholes [1973] [FB73].

We then calibrate the model parameters on the curve published by EIOPA April 30, 2014 as part of the stress tests. The following results illustrate the value of the option for a premium unit of assessment for two types of returns, $\Omega_1(0, j)$ for a return equal to the discount process ($return_i = Discount_i$) and $\Omega_2(0, j)$ for a return of a Gaussian asset³ negatively correlated with the discount process, for maturities between 1 and 5 years:

3. practically, we have established a general formula for correlations for Black & Scholes [1973] [FB73] asset with a stochastic rate

Maturity	$\Omega_1(0, \text{Maturity})$	$\Omega_2(0, \text{Maturity})$
1	1.014604	1.080652
2	1.025127	1.180592
3	1.031960	1.278935
4	1.035486	1.383176
5	1.036076	1.493779

Table 4 – Comparison of the price of the option for two return profiles

We find that the high volatility calibrated Gaussian asset increases the factor Ω , It adds a load to the best estimate for the insurer. A more detailed study concerned the sensitivity of these two prices to different model parameters. Indeed, as part of the ORSA projection, the value of future Best Estimate (and thus coverage ratio) depends on the deformation of the risk factors and therefore variations of the model parameters. The results of this study show that:

- The price $\Omega_1(0, \text{Maturity})$ is more sensitive to volatility rate, compared to the sensitivity to minimum guaranteed rate or the initial nominal rate. Particular attention should be paid to the calibration of this parameter. The change in the annual guaranteed minimum rate has more impact on the price of $\Omega_1(0, \text{Maturity})$ than the initial nominal rate. This explains why in the current environment of low interest rates, most insurers do not offer guaranteed rate⁴.
- The price $\Omega_2(0, \text{Maturity})$ is more sensitive to the guaranteed annual rate minimum. We noted that the impact of changes in other parameters has less impact on the final variation than the impact of the guaranteed annual rate minimum price. Indeed, this option has been loading quickly and achieved double the unit of assessment for minimum annual rate of about 2% and a maturity of 10 years.

Note: We note that the results of the sensitivity analysis are specific to the fitted parameters. An adjustment of various parameters will result in change of the sensitivity of the results of the two prices $\Omega_1(0, \text{Maturity})$ and $\Omega_2(0, \text{Maturity})$.

The next step is to quantify the estimation of errors of factors Ω error when using direct Monte Carlo methods such. This step is motivated by three main reasons. The first is that the model of Bonnin et al. [2014][BF14b] considers calculation of these factors by a Monte Carlo method and therefore we want to have an idea about the error when choosing this approach. The second reason is by implementing this second class of pricing methods, we can confirm the accuracy of the results of closed formulas. The third reason is a computer order one and due to the computation time factors Ω that is fairly time-consuming through a closed formula.

The results of this part have defined error measures related to the Best Estimate. Indeed, we show that the total error can be decomposed into a systematic error, and statistic error. The systematic error characterizes the discretization scheme, the numerical method to approximate the integral and the number of discretization; while the statistical error depends on the number of simulations. We then established a relationship that is used to link two parameters: number of simulations and number of discretizations for a given budget time, this relationship is based on the theorem Duffie and Glynn [1995] [DD95]. Specifically, the total error for $\Omega_1(0, \text{Maturity})$ is about 0.2 % for a budget of 4 discretizations and 16 simulations, it can be reduced to 7×10^{-7} % for an accurate calculation of the integral and a number of simulations of 262144 and 512 discretizations. A relationship was found between the number of simulations and the number of discretizations in order to divide the total error by two. For $\Omega_2(0, \text{Maturity})$ The total error varies from 0.8 % to 0.04% for a maximum budget of simulations. Duffie and Glynn [1995] [DD95] Theorem is not verified in the case of $\Omega_2(0, \text{Maturity})$.

4. According to the recent study by the ACPR rates revaluation ACPR [2014] [ACP14]

Application in the context of ORSA framework

In this part, we apply the valuation methods of the previous section to construct a projection model of the deformation of coverage ratio under the ORSA framework. This model takes into account only the financial risk (interest rate, spread and equity). This application is based on a real situation.

The projection results show the distribution of coverage by the years of projection in the graph below:

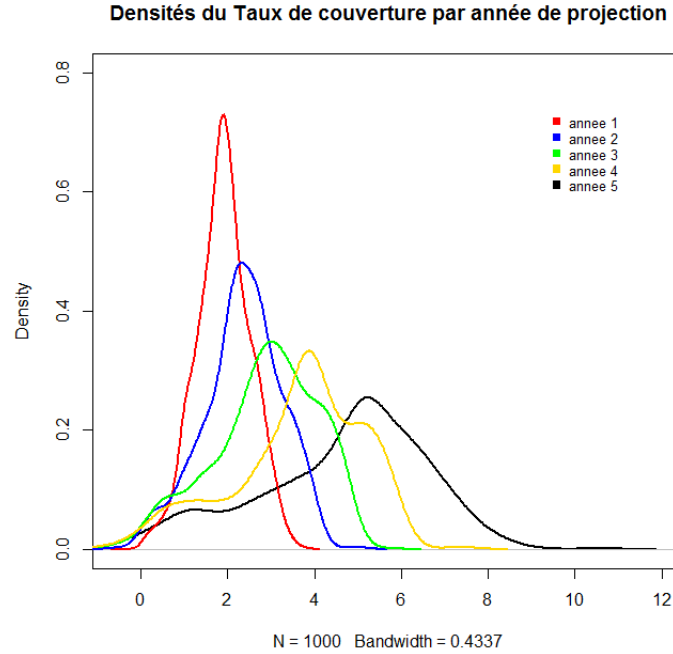


Figure 5 – Density of coverage ratio for each year of projection

We note that the coverage ratio is significantly improved when advancing in time. It passes from an average of 190.71% for the first year projection to 461.82 % for the fifth year of projection. The reason is that the annual results of the company will provide more equity which improves the situation of the company. No dividend is planned for this first model.

From a strategic perspective, it is interesting to change the policy of dividend distribution, and see the impact on coverage ratio. The tool allows to test different policies to maintain target of coverage ratio. The purpose of the ORSA is to steer insurance strategies, we will assume that the company has expressed its risk appetite as follows:

Risk appetite: *“The probability of remaining in a coverage ratio of regulatory capital to 120 % must be greater than 90 % for each of the five years of the strategic plan “*

To see the behavior of coverage ratio around certain points and see how they evolve, the cumulative distribution functions of coverage ratios for each year are presented in the following graph:

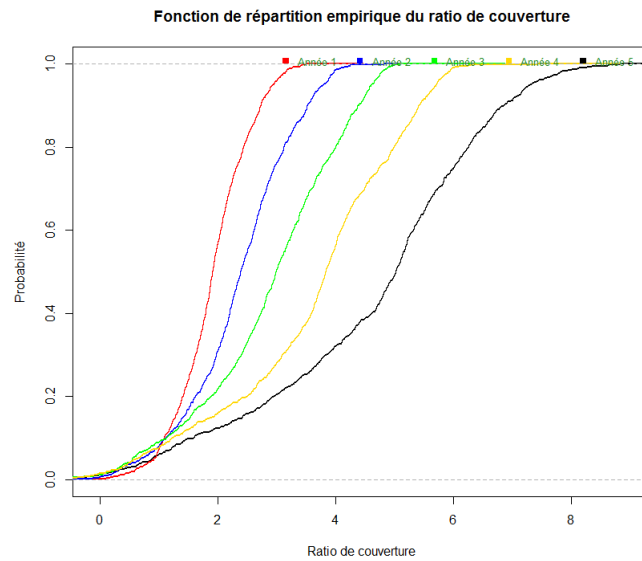


Figure 6 – Empirical cumulative distribution function of coverage ratio for each year of projection

To see if the current policy respects the constraint, we will get the 10% quantile of the distribution of coverage ratio for each projection year. The table below shows the results:

Year	10% quantile
1	127.82%
2	131.18%
3	131.61%
4	151.35%
5	178.33%

Table 5 – 10% quantile of the distribution of coverage ratio

We find that the current dividends distribution policy respects the risk appetite made by the company. Then we can test several policies to see how they can match its risk appetite.

We assume that the company has decided to pay a dividend of its after-tax results. We calculate subsequently the 10% quantile distribution coverage ratio results for several percentages allocated to dividends between 2% and 10%:

percentage of income allocated to dividends	2%	4%	6%	7%	8%	10%
Year 1	125.66%	123.51%	121.35%	120.27%	119.19%	117.04%
Year 2	128.95%	126.73%	124.51%	123.39%	122.28%	120.06%
Year 3	129.38%	127.15%	124.91%	123.80%	122.68%	120.45%
Year 4	138.92%	136.49%	134.07%	132.85%	131.64%	129.21%
Year 5	175.16%	172.00%	148.83%	147.25%	165.66%	162.50%

Table 6 – 10% quantile for different policy dividend

We note that the company can afford to pay up to 7% of its annual profit after tax as dividends while respecting its risk appetite.

Analysis of the results allows the identification of worst-case scenarios for the insurer in this case. Indeed, a combination of lower interest rates and higher bond spread portfolio of the insurer with a decrease in return on equity cause the degradation of coverage ratio.

We have shown through this simple example that it is possible to easily have interpretable results of projection. The most time-consuming of the model is the calculation of deflator factors. After this step, the calculations are simplified and assumptions can be modified and tested to see the impact on the distributions of coverage ratios.

Consideration of computing time

The computation time becomes increasingly a key issue for insurers. As part of the ORSA, it is the heart of the problem. Indeed, the models implemented must be able to quickly estimate the deformation of the coverage ratio. In this sense, we propose an approach to optimize the R code used for projection. This optimization requires the use of parallel computing and accelerated path generation rate by dynamic libraries (implemented in C / Fortran).

The results show that we can have a total gain of 20% of the computation time for an estimated 0.2% total error.

Conclusion

The model presented here enables stochastic projection of economic balance of an insurer for savings contracts. The choice of considering embedded options by closed formulas leads to consistent operational results for ORSA requirement. The described model avoids the complications of an excess parametrization and favors more understandable calculations and results.

The proposed extension in this work intends to extend the work of Bonnin et al. [2014][BF14a] and Bonnin et al. [2014][BF14b]. It allows considering the return on an asset which makes it most suitable to both political profit sharing of the insurer, and the particularity of its assets. The sensitivity study enabled a better understanding of the variation in prices of guaranteed annual minimum rate options and profit sharing. Monte Carlo methods can be here considered, since their error was estimated.

This class of models is a promising research path. Points can be improved and extensions may be available. For example the adjustment to a normal distribution on the total return of the assets of the insurer; This step requires the approximation of the sum of log-normal distributions by a log-normal distribution (see Dufresne [2009] [Duf09]) and intends to fit the profile of the assets of the insurer. A second extension is to generalize the calculation of factors Ω taking into account the policy of profit sharing used properly represented by a limited number of variables. A third study can focus on optimizing factor calculations Ω through a different tool than R and the detailed study of the calculation of the distribution function of a multivariate normal distribution used to calculate Ω (see Genz and Bretz [2009] [GA09]).

Table des matières

1	Contexte général	25
1.1	Assurance Vie en France	25
1.2	Principes de l' <i>ORSA</i>	27
1.2.1	L' <i>ORSA</i> , pourquoi faire ?	27
1.2.2	Résumé des textes traitant l' <i>ORSA</i>	27
1.2.3	Mise en place d'un processus <i>ORSA</i>	28
1.3	Les aspects quantitatifs de l' <i>ORSA</i> vie	30
1.3.1	Contexte	31
1.3.2	Un modèle <i>ALM</i> classique pour l' <i>ORSA</i> , pourquoi pas ?	32
1.3.3	Diminuer le nombre de simulations Vs recours à des formules fermées	32
1.4	Approche par formules fermées pour les projections <i>ORSA</i>	33
2	Cadre général du calcul d'un <i>Best Estimate</i> pour un contrat d'épargne	35
2.1	Contexte	36
2.2	Méthodologie du calcul	36
2.3	Best Estimate dans le cas général d'un contrat d'épargne	37
2.3.1	Modèles de durée appliqués au rachat	37
2.3.2	Expressions générales	38
2.3.2.1	Cas d'un rachat déterministe	38
2.3.2.2	Cas d'un rachat stochastique	39
2.3.2.3	Projection du <i>Best Estimate</i>	39
2.4	<i>Best Estimate</i> dans le cadre d'un contrat d'épargne incluant un taux minimum garanti	40
2.4.1	Calcul avant prise en compte des rachats conjoncturels	40
2.4.2	Prise en compte des rachats conjoncturels	42
2.4.3	Projection du <i>Best Estimate</i>	43
3	Formules fermées pour le calcul des facteurs déflateurs des prestations	44
3.1	Présentation des contrats	44
3.2	Modèle de taux	45
3.3	Calcul à l'aide d'une formule fermée	46
3.4	Lien avec la formule classique de Black & Scholes [1973][FB73]	47
3.4.1	Étude de sensibilité du prix $\pi_1(0, t)$	48
3.5	Calcul et discrétisation	51
3.6	Formule fermée matricielle avec rendement égal au taux court	52
3.6.1	Application numérique et comparaison	53
3.6.2	Étude de sensibilité du prix $\pi_2(0, t)$	54
3.7	Formule fermée matricielle avec rendement gaussien de l'actif	56
3.7.1	Calcul des corrélations	58
3.8	Applications et comparaisons	59
3.8.1	Étude de sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$	60
4	Mesures d'erreurs associées au calcul du <i>Best Estimate</i>	63
4.1	Discrétisation du modèle de taux	63
4.1.1	Discrétisation exacte	64
4.1.2	Discrétisation d' <i>Euler</i>	65
4.2	Méthode de calcul de l'intégrale du taux court	65
4.2.1	Contexte	65
4.2.2	Méthodes d'intégration des trapèzes et de <i>Simpson</i>	66
4.3	Biais de la discrétisation et du choix de la formule intégrale	67

4.3.1	Contexte et notations :	67
4.3.2	Formule fermée dans le cas d'une discrétisation d' <i>Euler</i> et d'une méthode échantillonnage des trapèzes	70
4.3.3	Formule fermée dans le cas d'une discrétisation exacte et d'une méthode d'échantillonnage des trapèzes	71
4.3.4	Application et comparaison :	72
4.4	Compromis entre nombre de simulations et nombre de discrétisations	73
4.4.1	Application au calcul du prix $\pi_1(0, t)$ 3.8 :	75
4.4.2	Application au calcul du prix $\pi_3(0, t)$ 3.18 :	78
5	Application dans le cadre d'un modèle <i>ORSA</i>	80
5.1	Contexte	80
5.2	Description des données	81
5.3	Étapes de projection	81
5.4	Projection des taux	82
5.4.1	Description du modèle de <i>Nelson et Siegel</i> [1987] [NC87]	83
5.4.2	Ajustement d'un <i>Vasicek</i> à partir d'un <i>Nelson et Siegel</i>	84
5.4.3	Cohérence entre le <i>Vasicek</i> et la courbe <i>EIOPA</i> :	85
5.5	Projection du passif	87
5.5.1	Projection du <i>Best Estimate</i>	87
5.5.2	Projection de l'exigence du capital réglementaire	87
5.6	Projection de l'actif	87
5.7	Résultats de la projection	89
5.8	Erreurs d'estimation du <i>Best Estimate</i>	98
6	Implémentation et optimisation des temps de calcul	100
6.1	Contexte	100
6.2	Problématique du temps de calcul dans le modèle <i>ORSA</i>	102
7	Conclusion	107
	Bibliographie	108

Table des figures

1	Illustration calcul <i>Best Estimate</i> dans un cadre classique Pilier 1	6
2	Densité du taux de couverture par année de projection	9
3	Fonction de répartition empirique du taux de couverture par année de projection	10
4	Best Estimate calculation under Pillar 1	13
5	Density of coverage ratio for each year of projection	16
6	Empirical cumulative distribution function of coverage ratio for each year of projection	17
1.1	Compte de participation aux résultats pour un contrat en Euros	26
1.2	Étapes de la mise en place d'un processus <i>ORSA</i>	28
1.3	Illustration du principe des Sds	31
2.1	Illustration calcul <i>Best Estimate</i> dans un cadre classique	35
3.1	Évolution des composantes du portefeuille en fonction du taux nominal initial	48
3.2	Évolution du prix du contrat en fonction du taux nominal initial	49
3.3	Prix du contrat en fonction du taux minimum garanti	50
3.4	Prix du contrat en fonction de la maturité	51
3.5	Comparaison des prix $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\hat{\pi}_2(0, t)$	54
3.6	Prix $\pi_2(0, t)$ en fonction du taux nominal initial pour différentes maturités	55
3.7	Prix $\pi_2(0, t)$ en fonction du taux minimum garanti pour différentes maturités	55
3.8	Prix $\pi_2(0, t)$ en fonction de la volatilité du taux pour différentes maturités	56
3.9	Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction du taux nominal initial pour différentes maturités	60
3.10	Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction du taux minimum garanti pour différentes maturités	60
3.11	Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction de la volatilité du taux pour différentes maturités	61
3.12	Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction de la volatilité des actions pour différentes maturités	61
3.13	Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction de la corrélation taux/Actions pour différentes maturités	62
4.1	Évolution de l'erreur en fonction du nombre de pas de discrétisations	72
4.2	EQM en fonction du nombre de pas de discrétisations et du nombre de simulations	76
5.1	Courbes des taux <i>EIOPA</i> et <i>Nelson et Siegel</i>	84
5.2	Courbe des taux <i>Vasicek</i>	85
5.3	Comparaison des courbes finales	86
5.4	Calcul des facteurs $\Omega(n, j)$	87
5.5	Densité du <i>Best Estimate</i> par année de projection	90
5.6	Densité de la valeur de l'actif par année de projection	91
5.7	Densité des variables <i>SCR</i> et fonds propres par année de projection	92
5.8	Densité du taux de couverture par année de projection	93
5.9	Fonction de répartition empirique du taux de couverture par année de projection	94
5.10	Impact d'une hausse des taux dans le cadre d'un exercice <i>ORSA</i>	96
5.11	Variables d'intérêt du scénario défavorable	96
5.12	Prix de l'option taux minimum garanti par maturité	97
5.13	Comparaison de l'erreur totale pour les deux discrétisation : <i>Euler</i> et exacte	98
6.1	Architecture d'un système DISAR	101
6.2	<i>Profiling</i> des étapes de calcul de $\pi_2(0, 10)$	104
6.3	Évolution du temps de calcul du facteur omega en fonction de la maturité du contrat	104

Liste des tableaux

1	Comparaison du prix de l'option pour deux profils de rendement	8
2	Le quantile à 10% du taux de couverture	10
3	Quantile à 10% pour différentes politiques de distribution de dividendes	10
4	Comparison of the price of the option for two return profiles	15
5	10% quantile of the distribution of coverage ratio	17
6	10% quantile for different policy dividend	17
7	Tableau des notations mathématiques	23
8	Tableau des notations financières	23
3.1	Tableau des paramètres de l'étude de la sensibilité au taux nominal	49
3.2	Exemple du vecteur c_j des états de revalorisation	52
3.3	Exemple de la matrice $\hat{c}_j$	52
3.4	Tableau des paramètres de l'étude de la sensibilité au taux nominal	53
3.5	Prix des trois contrats $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\hat{\pi}_2(0, t)$	53
3.6	Exemple du vecteur $\bar{c}_j$ des états de revalorisation	57
3.7	Paramètres de la simulation pour le calcul de $\pi_3(0, t)$	59
3.8	Valeurs des prix $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\pi_3(0, t)$ pour différentes maturités	59
4.1	Paramètres de simulation pour la comparaison des erreurs	72
4.2	Tableau des valeurs de l'erreur en fonction du nombre de pas de discrétisations	73
4.3	Paramètres pour le calcul de $\pi_1(0, t)$	75
4.4	Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N	77
4.5	Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N pour une discrétisation exacte	77
4.6	Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N pour une discrétisation exacte	77
4.7	Paramètres de la simulation pour le calcul de $\pi_3(0, t)$	78
4.8	Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N	78
5.1	Prestations et cotisations fournies par Assurance A	81
5.2	Étapes de projection modèle <i>ORSA</i>	82
5.3	Paramètres du modèle de <i>Nelson et Siegel</i>	83
5.4	Paramètres de diffusion des trois facteurs de forme	84
5.5	Paramètres du modèle de <i>Vasicek</i>	85
5.6	Paramètres de l'actif obligataire	88
5.7	Allocation de l'actif	88
5.8	Paramètres de la projection	89
5.9	Variables d'intérêt de la première année	89
5.10	Moyenne et écart type de la distribution du <i>Best Estimate</i>	90
5.11	Moyenne et écart type de la distribution de la valeur de l'actif	91
5.12	Moyenne et écart type des variables <i>SCR</i> et Fonds propres	92
5.13	Moyenne et écart type de la distribution du ratio de couverture	93
5.14	Le quantile à 10% du taux de couverture	95
5.15	Quantile à 10% pour différentes politiques de distribution de dividendes	95
5.16	Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N	99
6.1	Performances du <i>DISAR</i>	101
6.2	Étapes de projection modèle <i>ORSA</i>	102
6.3	Articulation des deux étapes 2 et 3	103
6.4	Comparaison des temps de calcul des simulations	105
6.5	Comparaison des temps de calcul des simulations <i>DLL</i>	106
6.6	Comparaison des temps de calcul par formules fermées et discrétisation d' <i>Euler</i>	106

Notations mathématiques

Notation	Signification
$\mathbb{Q}^f$ ou $\mathbb{Q}$	probabilité risque neutre
$\mathbb{P}^a$ ou $\mathbb{P}$	probabilité historique
$a \vee b$	maximum entre a et b
$a \wedge b$	minimum entre a et b
$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X)$	espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ de la variable aléatoire X
$\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$	probabilité produit de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$
$[X]^+$	partie positive de la variable aléatoire X . Égale à $\max(X, 0)$
$\mathcal{N}(m, \nu)$	loi normale de moyenne m et de variance ν
Φ	fonction de répartition d'une loi normale
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	filtration relative à l'information disponible à l'instant t
$\text{cov}(X, Y)$	covariance des variables aléatoire X et Y
${}^t A$	la transposée d'une matrice A
$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$	opérateur de domination
$f(x) = o(g(x))$	opérateur de prépondérance
$\underset{x}{\operatorname{argmin}}(f(x))$	valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint la plus petite valeur

TABLE 7 – Tableau des notations mathématiques

Notations financières

Notation	Signification
<i>ALM</i>	<i>Asset and Liability Management</i>
$B(0, t)$ ou $P_n(0, t)$	prix zéro-coupon nominal à l'instant initial de maturité t
<i>BE</i>	<i>Best Estimate</i>
<i>MCR</i>	<i>Minimum Capital Requirement</i>
<i>ORSA</i>	<i>Own Risk and Solvency Assessment</i>
<i>SCR</i>	<i>Solvency Capital Requirement</i>
SdS	Simulations dans les Simulations
TMG	taux minimum garanti
<i>VaR</i>	<i>Value at Risk</i>
VR	Valeur de rachat

TABLE 8 – Tableau des notations financières

Introduction

L'*ORSA* (*Own Risk and Solvency Assessment* ou Évaluation Interne des Risques et de la Solvabilité) est un processus prospectif au cœur du Pilier 2 de Solvabilité II. Il est une des composantes les plus importantes du dispositif de gouvernance des sociétés d'assurance. Actuellement, ce sujet concentre de plus en plus de réflexions de la part des assureurs en France, alors que le Pilier 1, plus mature à présent, est en phase de stabilisation.

Les discussions actuelles sur ce sujet mettent en évidence la complexité de la mise en place d'un tel processus. Cette difficulté provient de la nécessité de trouver une façon rigoureuse pour projeter le taux de couverture des engagements sur l'horizon du plan stratégique de l'entreprise. Si des solutions relativement simples peuvent être proposées en assurance non-vie (cf. Planchet et al. [2010][PF10]), la complexité des interactions actif/passif rend la tâche a priori plus complexe en assurance vie et notamment en épargne. En effet, la présence d'options cachées dans le passif de l'assureur (taux minimum garanti, participation aux bénéfices, possibilité de rachat, etc.) rend le sujet délicat d'un point de vue technique.

L'objectif de ce mémoire est de proposer un prolongement des deux modèles : Bonnin et al. [2014][BF14a] pour l'épargne générale et Bonnin et al. [2014] [BF14b] pour l'épargne retraite. L'extension proposée se concentre sur la valorisation des deux options : taux minimum **annuel** garanti et participation aux bénéfices. Le cadre de la valorisation de l'option rachat est quant à lui repris du modèle épargne retraite de Bonnin et al. [2014] [BF14b]. L'idée est de continuer la démarche basée sur les formules analytiques et de montrer qu'il est possible d'avoir des formules fermées en présence de ces deux options. Notre approche s'inspire des travaux de Lindset [2001][Lin01] et Persson et Aase [1996][KKA96] qui ont été adaptés à la problématique *ORSA* épargne de ce mémoire.

Démarche

Nous verrons dans un premier temps que les modèles de calcul *ALM* adoptés par les assureurs ne permettent pas de répondre à la problématique *ORSA*. Il est donc inéluctable de réfléchir à des nouvelles classes de modèles qui contournent cette difficulté. Nous ferons ensuite un état de l'art des approches qui existent à l'heure actuelle tout en insistant sur le cadre dans lequel se situe la démarche du mémoire. Le modèle sera ensuite exposé afin de mettre en avant la nécessité de pouvoir valoriser les deux options : taux minimum annuel garanti et participation aux bénéfices.

L'étude se concentre sur la valorisation des deux options citées *supra* de la façon suivante :

1. établir les formules fermées en les adaptant au modèle de taux de Vasicek [1977][VAS77]
2. étudier la sensibilité des prix établis aux paramètres du modèle
3. définir les erreurs d'une approximation par méthodes de *Monte Carlo*
4. application dans le cadre d'un modèle *ORSA*
5. prise en compte du paramètre temps de calcul

Chapitre 1

Contexte général

Le but de ce chapitre est de présenter le cadre général du mémoire. Le contexte règlementaire et la problématique sont exposés afin de pouvoir comprendre les enjeux du sujet.

1.1 Assurance Vie en France

Le marché de l'assurance vie est important et dynamique en France, où l'offre de contrats individuels d'assurance vie et de capitalisation est abondante. Les dernières statistiques du mois de juin 2014 de la Fédération Française des Sociétés d'Assurances [2014] [FFS14] affichent un montant des cotisations collectées par les sociétés d'assurances au cours des six premiers mois de 2014 de **63,8 milliards** d'euros. Les prestations s'élèvent à **53,5 milliards** d'euros sur cette même période, ce qui donne une collecte nette de **10,3 milliards** depuis le début de l'année 2014.

L'encours des contrats d'assurance-vie (provisions mathématiques + provisions pour participation aux bénéfices) s'élève à **1 490,2 milliards** d'euros à fin juin 2014 ce qui laisse dire qu'il va certainement dépasser le cap symbolique des **1 500 milliards**¹, signe de la bonne santé du placement préféré des Français qui a séduit 27.5 millions d'assurés détenteurs de 52 millions de contrats, ce qui les place parmi les plus grands épargnants au monde.

Plus que 85% des 1 490,2 milliards d'euros d'encours sont placés en des fonds en Euros (dont 40% en mono support). Le périmètre de ce mémoire concerne les contrats d'épargne dit en "Euros" ou fonds en Euros mono support.

Définition : Un contrat en Euros mono support est un contrat d'épargne garantissant contractuellement le capital placé. C'est un contrat qui comprend des "*engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine*" selon l'article L310-1 du code des assurances. L'assurance s'engage à rembourser à l'échéance du contrat une somme égale aux primes nettes versées augmentées d'une revalorisation et diminuées des frais de gestion.

La revalorisation est faite annuellement en considérant le maximum entre le taux minimum garanti et la participation aux bénéfices. De plus, les revenus perçus chaque année sont acquis par l'assuré.

Nous pouvons alors constater qu'il y a trois options dans un contrat d'épargne en Euros mono support :

Taux minimum garanti (noté TMG par la suite) : défini dans l'article A132-2 du code des assurances, l'assureur s'engage à une rémunération minimale pour tous les versements réalisés pendant toute la durée du contrat. Depuis le 1^{er} Aout 2010, de nouvelles modalités sont rentrées en vigueur visant à encadrer les taux minimums garantis proposés par les assureurs. Elles précisent que :

- Le TMG peut être fixé chaque année sans excéder 85% du rendement des actifs de l'assureur au cours des 2 dernières années.
- L'assureur ne peut proposer un TMG que sur une période supérieure à 6 mois.
- Le TMG doit être exprimé de façon annualisée.

1. Selon le dossier assurance vie de l'argus de l'assurance du 11 juillet 2014 [2014][AA14]

- Une enveloppe annuelle globale est constituée pour déterminer les ressources qu'un assureur peut consacrer chaque année au financement des TMG. Le plafond des TMG dépend de l'environnement des marchés obligataires. Ce plafond était par exemple en 2012 de 3,375%.
- La promesse de revalorisation des contrats bénéficiant d'un TMG ne doit pas nuire à la rémunération des autres contrats.

Aujourd'hui les assureurs parlent davantage de taux minimum annuel garanti (**TMAG** ou **Taux minimum garanti** selon les articles 132-2 et 132-3 du code des assurances). Soit le rendement garanti par l'assureur sur l'année. Mais d'anciens contrats présentent encore la notion de taux minimum garanti (TMG). En effet, l'assureur s'engageant à fixer une rémunération minimale pour tous les versements réalisés l'année en cours. Les contrats étudiés dans ce mémoire prévoient un TMG et des TMAG fixés par avance. Ce point sera détaillé dans le **chapitre 3** relatif à la valorisation de cette option.

Selon la dernière étude sur les taux de revalorisation de l'ACPR [2014][ACP14], près de 69 % des provisions mathématiques présentent un TMG en 2013 inférieur ou égal à 0,2%. Cette étude note aussi que la plupart des contrats dont la revalorisation est contrainte par un TMG sont des contrats anciens. La baisse constatée sur les TMG actuellement est compensée par une revalorisation élevée.

Participation aux bénéfices : définie dans l'article A331-3 et calculée suivant l'article A331-4 du code des assurances. Elle est déterminée en fonction du rendement technique et financier des actifs en représentation des engagements règlementés. Les assureurs ont l'obligation de reverser, dans un délai de 8 ans, une partie des bénéfices qu'ils ont réalisés durant l'exercice comptable. Le montant minimal de la participation aux bénéfices au terme d'un exercice, est établi à partir du compte de participation aux résultats. La figure qui suit de Denis [2012] [Den12]² illustre le mécanisme de calcul du solde du compte de participation aux résultats :

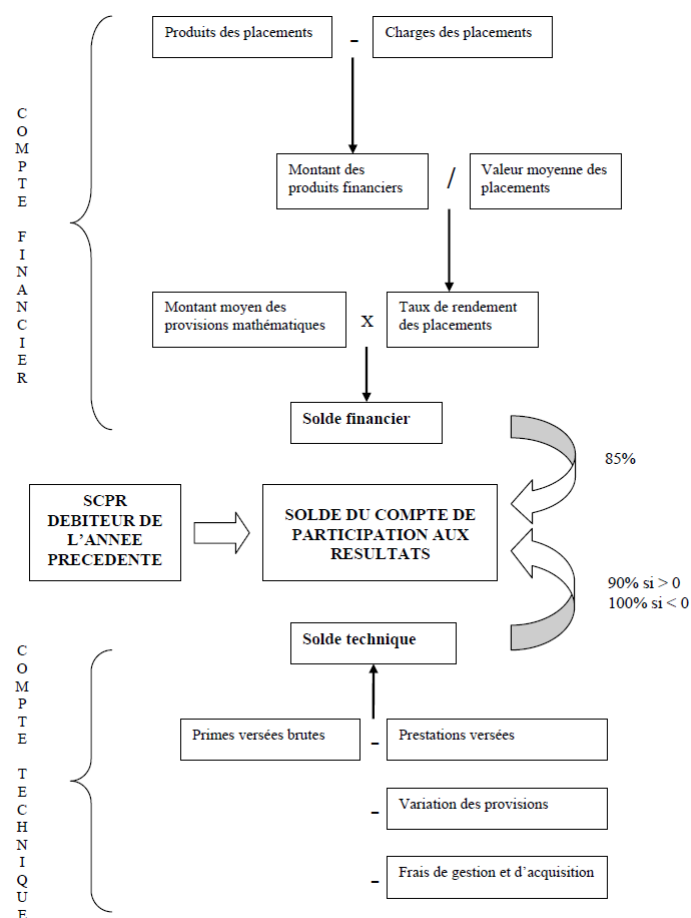


FIGURE 1.1 – Compte de participation aux résultats pour un contrat en Euros

2. SCPR pour solde du compte de participation aux résultats

Option de rachat : les revenus perçus chaque année sont définitivement acquis. De fait, l'assureur doit garantir à tout instant la valeur acquise du capital.

L'objectif de ce mémoire est de valoriser ces trois options présentes dans la garantie d'un assureur dans le cadre d'un modèle *ORSA* défini par la suite. Nous exposons dans le chapitre suivant le cadre réglementaire qui encadre un processus *ORSA*.

1.2 Principes de l'*ORSA*

L'*ORSA* (*Own Risk and Solvency Assessment* ou évaluation interne des risques et de la solvabilité) est un processus prospectif au cœur du Pilier 2 de solvabilité II. Son but est de mettre à la disposition des équipes dirigeantes des outils d'analyse décisionnelle les incitant à réfléchir à gérer leur risque d'une manière prospective, tout en prenant du recul par rapport au Pilier 1. Il s'agit d'un dispositif de pilotage qui doit être adapté au profil du risque de l'entreprise.

L'ACPR [ACP13] rappelle que les textes de référence sur l'*ORSA* sont les articles 45, 246 (alinéa 4) et 120 de la directive 2009/138/CE (ci-après directive Solvabilité 2). Il faut noter que l'article 45 a été amendé par la directive *Omnibus II* avec l'ajout d'un paragraphe spécifique concernant les mesures du paquet branches longues.

À l'heure actuelle (18/08/2014), seulement 13 % des organismes ont déjà réalisé leur *ORSA* à blanc parmi 23 organismes interrogés par *PWC* [PWC14]. Il s'agit d'une proportion peu élevée au regard de la date de remise du premier exercice à blanc mené par l'ACPR, le 24 septembre 2014. Dans l'ensemble, le taux d'avancement moyen sur l'*ORSA* est évalué à 62 %, avec 47 % des organismes se déclarant en phase intermédiaire.

1.2.1 L'*ORSA*, pourquoi faire ?

L'*ORSA* est d'une utilité stratégique avant tout. Il s'agit d'un outil d'aide à la décision destiné au management des entreprises. Ce processus permet de répondre à des problématiques que le Pilier 1 n'intègre pas.

En effet, le processus *ORSA* intègre une vision prospective, incluant les affaires nouvelles, complètement différente par rapport à la vision en *Run-off* des calculs Pilier 1. Cela suppose la définition d'un "plan stratégique" sur une période de deux à cinq ans. Ces objectifs étant fixés, l'entreprise doit se poser la question de savoir quels moyens financiers mettre en œuvre afin de les atteindre.

L'*ORSA* est aussi utile dans le sens où les principaux risques ne sont pas forcément ceux du Pilier 1 (ex : risque commercial, risque de réputation, réglementation et jurisprudence, nouveaux concurrents, évolutions sociales et démographiques, etc.).

Force est de constater donc que le processus *ORSA* a une vision réaliste et rejoint la réflexion de l'entreprise. Il s'agit d'une évaluation, par l'entreprise **elle-même**, de sa solvabilité. Il se doit d'être le plus compréhensible possible afin de pouvoir le communiquer au top management et aux membres du personnel pour lesquels cela est pertinent ses résultats et ses conclusions.

1.2.2 Résumé des textes traitant l'*ORSA*

Cette partie reprend les principaux points cités dans les enseignements de l'exercice d'*ORSA* pilote de l'ACPR [2013] [ACP13] et le document d'orientation *ORSA* [IA14] adopté le 20 juin 2014 par l'institut des actuaires.

L'*ORSA* est un processus **essentiellement prospectif** qui s'articule autour de trois points :

1. l'évaluation du besoin global de solvabilité (politique en matière de capital noté BGS), compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ;

2. l'évaluation du respect permanent des obligations réglementaires concernant la couverture du capital réglementaire (*SCR*) du minimum de capital requis (*MCR*) et des exigences concernant le calcul des provisions techniques ;
3. l'évaluation de la mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses de calcul du *SCR* conformément à la formule standard. Ce point suppose la vérification du caractère adapté des modèles et hypothèses du Pilier 1.

Le point 7 de l'article 45 précise qu'un processus *ORSA* ne sert pas à calculer un montant de capital requis. Il ne s'agit pas, en effet, d'une 3^{ème} exigence de capital.

Quelques points importants à souligner :

- En termes de fréquence de l'exercice *ORSA*, le processus doit être mené de manière "régulière" (au moins annuellement) et dès lors que le profil de risque de l'organisme subit une évolution notable ;
- Le processus *ORSA* fait partie de la stratégie commerciale de l'entreprise et doit être pris en compte lors de la prise de décisions stratégiques de l'organisme. Il est à noter aussi que la mise en place de ce processus suppose l'existence d'un organe d'Administration, de Gestion et de Contrôle (AMSB) qui définit l'organisation de la gestion des risques et les rôles et responsabilités. Le rôle de l'AMSB doit être central dans le dispositif ;
- L'*ORSA* a deux aspects, un quantitatif et l'autre **qualitatif**.

1.2.3 Mise en place d'un processus *ORSA*

L'article 45 de la directive 2009/138/CE ne propose pas une démarche claire afin de mettre en pratique un processus *ORSA*. L'assureur est donc libre de choisir les méthodes pour mener les trois évaluations, dès lors qu'elles sont proportionnées à la nature, l'ampleur et la complexité des risques considérés et que l'organisme démontre la pertinence des méthodes utilisées.

L'institut des actuaires [2014][IA14] rappelle dans son document d'orientation *ORSA* que les principales étapes d'une mise en place d'un processus *ORSA* s'articulent de la façon suivante :



FIGURE 1.2 – Étapes de la mise en place d'un processus *ORSA*

Définition d'un plan stratégique de l'entreprise

Le plan stratégique définit la stratégie de l'entreprise le plus souvent sur un horizon de temps prédéfini : chaque année et sur une période allant de deux à cinq ans, dans la plupart des cas. De manière concrète, le plan stratégique contient en général :

- le business plan de l'entreprise dans le cadre d'un scénario central puis de scénarios stressés sur un horizon de temps cohérent avec un plan stratégique ;
- les politiques de risques et les métriques associées ;
- les scénarios de stress adaptés à la structure des risques ou les méthodes de prise en compte de stress (méthodes stochastiques, analyses historiques, formules fermées...) ;
- l'appétence aux risques de l'entreprise, visant à fixer les limites de risque agrégé qu'accepte de prendre l'entreprise, compte tenu de ses contraintes de solvabilité et exigences propres ;
- les budgets de risques et leur mode de gestion le cas échéant.

Risk Management

Le plan stratégique étant défini, l'une des premières étapes de l'*ORSA* consiste à identifier le **profil de risque** de l'entreprise. Le sens général de la notion de profil de risque correspond à la "réalité" des risques de l'organisme, et de leur interdépendance par opposition à sa modélisation ou son calcul ou sa description. Ce point comprend aussi les risques qui n'ont pas été pris en compte lors du calcul du *SCR* Pilier I. L'entreprise se doit de cartographier ses risques. La cartographie des risques dans le cadre de l'*ORSA* consiste à répertorier l'ensemble des risques significatifs auxquels l'entreprise est exposée dans l'exercice de son activité.

Ce point doit mener normalement à un des trois objectifs de l'*ORSA*. En effet, en connaissant sa propre cartographie des risques, l'entreprise doit être en mesure d'analyser la cohérence avec le Pilier I et d'évaluer dans quelle mesure le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le calcul du *SCR*. Pour les entreprises qui ont choisi une formule standard il y a lieu d'identifier les risques qui sont connus de l'entreprise et non pris en compte dans le Pilier 1, que l'entreprise soit soumise à ces risques à la date de référence ou qu'elle le soit potentiellement dans le futur.

Il reste ensuite à savoir comment l'entreprise mesure les risques auxquels elle s'expose. le choix et la définition d'une **métrique de risque** sont deux points essentiels pour le processus. Les mesures de risque et l'horizon sont à déterminer par l'entreprise et peuvent, lorsque cela est pertinent, différer des mesures de l'horizon fixées dans le cadre du Pilier I. Des exemples de métriques sont : un niveau de *VaR* (*value at risk*), de *MCEV* (*Market Consistent Embedded Value*) , de valeur de portefeuille (*VIF*) ou encore de résultats, de fonds propres mais aussi un niveau d'atteinte de critères qualitatifs et bien sûr le taux de couverture des exigences de capital réglementaire (*SCR*, *MCR*).

L'objectif de la mesure de risque est d'évaluer les risques sous-jacents, qui découlent des décisions stratégiques. Dans ce sens, deux points peuvent être définis :

- Le niveau de risque maximal qu'un organisme assureur est capable d'absorber ;
- Le champ des notions complémentaires en termes de prise de risque qui s'offre à lui.

L'**appétence aux risques** d'un organisme assureur correspond au niveau de risque maximal que l'organisme accepte de prendre pour atteindre ces objectifs stratégiques. Elle peut être définie comme le niveau de risque agrégé qu'une entreprise accepte de prendre en vue de la poursuite de son activité et de son développement. Elle est déterminée par les instances de gouvernance de l'entreprise, et elle s'exprime sous la forme de mesures de risque et de limites. Un exemple de formulation de l'appétence aux risques qui rejoint les calculs dans le mémoire peut être défini de la manière suivante :

"La probabilité de rester à un taux de couverture du capital réglementaire de $X\%$ ($X > 100$, pouvant dépendre de l'objectif de rating de l'entreprise) doit être supérieure à $Y\%$ à horizon du Business Plan"

Les calculs devront intégrer la sensibilité de ce taux de couverture à l'ensemble des facteurs de risque propres à l'assureur, à la fois sur les ressources éligibles et sur la mesure de capital retenue, que ces risques soient directement pris en compte dans le capital économique, ou que la référence reste le *SCR* réglementaire.

Gestion du capital

En termes de gestion du capital, l'entreprise doit évaluer le **besoin global de solvabilité** (BGS). Ce montant représente pour l'organisme assureur, le besoin en fonds propres pour assurer sa solvabilité ainsi que l'ensemble des moyens nécessaires compte tenu de la spécificité de son profil de risque, de son appétence aux risques et du plan stratégique qu'il s'est fixé. Ainsi le besoin global de solvabilité se différencie du *SCR* réglementaire défini par le Pilier 1. Les principales caractéristiques du BGS sont :

- la dimension prospective qui peut inclure, si nécessaire, une perspective de moyen ou même de long terme ;
- le caractère propre au profil de risque de l'entreprise incluant les risques non pris en compte dans le calcul du *SCR*

Il est à noter que, contrairement à l'exigence de devoir couvrir le *SCR* en permanence, le BGS peut n'être couvert que partiellement par les fonds propres à la date de réalisation de l'*ORSA*. Les actions du management doivent dans ce cas expliquer les actions à mettre en œuvre pour couvrir les exigences induites par le BGS, en cas de chocs notamment.

Monitoring et Stress-test des résultats

L'implémentation d'un processus *ORSA* doit considérer le suivi régulier des indicateurs de risque. Il est donc important de prendre en compte la possibilité de pouvoir contrôler en permanence et refaire les calculs à chaque instant, ou au moins d'avoir un processus suffisamment performant pour détecter les situations de risque et prendre des décisions de réorientation.

1.3 Les aspects quantitatifs de l'ORSA vie

La mise en place d'un modèle *ORSA* ajoute un degré de complexité supplémentaire, puisqu'il s'agit de projeter les distributions du *SCR* et du taux de couverture (ou du moins certains points bien choisis de ces distributions) sur l'horizon du plan stratégique.

Ce modèle doit fonctionner selon le besoin, soit en déterministe, soit en stochastique. Dans le cas d'un modèle stochastique, la complexité est plus importante en assurance vie à cause de la présence d'une interaction *Actif/Passif*. Il devient nécessaire de développer de nouvelles classes de modèles afin de procéder à ces projections.

Dans le cadre d'un modèle interne, l'estimation du *SCR* pour un contrat d'épargne est une problématique complexe. Techniquement, elle est souvent abordée en ajoutant une "couche" de simulations en probabilité historique à un modèle de calcul de *Best Estimate*³ (utilisant lui-même des simulations en probabilité risque neutre). Cela conduit aux approches dites "simulation dans la simulation" (noté **SdS** par la suite).

3. Ce point est traité en détail dans le chapitre 2

Pour A_n la valeur de l'actif pour l'année n , FP_n les fonds propres et VEP_n la valeur économique du passif, la figure de Devineau et Loisel [2009] [DL09] qui suit illustre le principe des Sds :

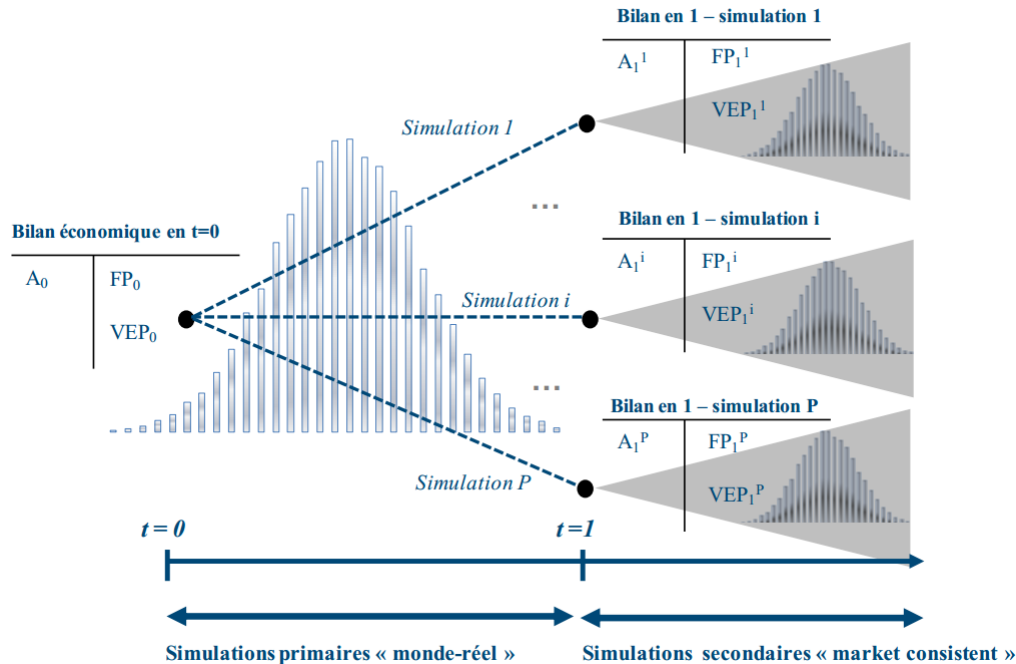


FIGURE 1.3 – Illustration du principe des Sds

La complexité d'un modèle *ORSA* est plus importante car il s'agit de projeter le *SCR* en probabilité historique et d'avoir une distribution du ratio de couverture de l'entreprise.

Toutefois, les approches Sds “brutes” présentent l'inconvénient d'être assez chronophages. La société *Barrie & Hibbert* (une des références à l'heure actuelle sur le marché) qui commercialise des outils modèle interne pour le calcul du *SCR* note que “le calcul du *SCR* pour un passif complexe d'un assureur vie nécessite le recours aux approches Sds, mais le temps de calcul considérable associé aux divers modèles ALM peut signifier que cette technique n'est pas toujours pratique. Les assureurs sont donc à la recherche de nouveaux modèles qui produisent des résultats précis et qui prennent moins de temps...”

Dès lors il convient de proposer des approches alternatives ou complémentaires. Nous présentons dans cette section une vue d'ensemble sur ces approches tout en insistant sur le cadre dans lequel s'inscrit la contribution du mémoire.

1.3.1 Contexte

Différentes simulations sont nécessaires dans la prise en compte des problématiques actuarielles de l'*ORSA*, le rapport de l'institut des actuaires [2014][IA14] fait la différence entre deux types de simulations : simulations infra-annuelles et pluri-annuelles.

Étude infra-annuelle Suppose la nécessité de s'assurer en permanence de la couverture des exigences de capital réglementaire. Cela suppose d'évaluer ses fonds propres Sovabilité II et son *SCR* à tout instant, en fonction de l'évolution des différents facteurs de risque. Une approche simplifiée par *proxy*⁴ dérivant d'une situation connue est parfois nécessaire.

Étude pluriannuelle Il s'agit ici de simuler dans le temps l'évolution des fonds propres et du *SCR*, sur la base de scénarios multi-annuels des facteurs de risque. Cette démarche doit intégrer le facteur temporel qui

4. Nous appelons *proxy* par la suite toute méthode servant à approximer le calcul de la quantité voulue, souvent par des simplifications

suppose la prise en compte des nouveaux contrats souscrits (appelés *New Business*), les réinvestissements, la politique de Participation aux bénéfices, la politique de distribution de dividendes, etc.

1.3.2 Un modèle *ALM* classique pour l'*ORSA*, pourquoi pas ?

Une première méthode qui peut sembler naturelle pour répondre au besoin des projections *ORSA* est l'utilisation d'un modèle *ALM* classique. En effet, les assureurs ont fait le choix de projeter leurs comptes sociaux en se basant sur des *générateurs de scénarios économiques* (cf. Planchet et al.[2009] [PF09]) pour estimer *in fine* une valeur économique de leurs engagements.

Si nous supposons dans un premier temps que l'entreprise a fait le choix d'une formule standard pour le calcul du *SCR*, et souhaite, pour simplifier, procéder à 100 simulations par année de projection sur un horizon de cinq années du plan stratégique ; cela suppose que l'entreprise utilisera le modèle *ALM* en 500 noeuds de projection. En prenant en compte toute la complexité du modèle *ALM* de par ses paramètres et son temps conséquent de calcul, la solution devient très vite inenvisageable. Nous rajoutons à cela qu'il y a deux contraintes majeures pour un exercice *ORSA*, à savoir la nécessité d'estimer rapidement la déformation du ratio de couverture et le fait que seule une estimation est requise. Dans ce sens un modèle *ALM* classique ne peut pas répondre à ce besoin.

1.3.3 Diminuer le nombre de simulations Vs recours à des formules fermées

L'ensemble des modèles qui existe à l'heure actuelle aborde la problématique de deux façons différentes. Une première classe de modèles vise à diminuer le nombre de simulations nécessaires : optimisation des simulations secondaires par Nteukam et Planchet [2010] [NO10] et l'accélération de l'approche SdS de Devineau et Loisel [2009] [DL09]. La deuxième classe préfère avoir recours à des formules fermées : les approches basées sur des formules fermées analytiques par Bonnin, Combes, Planchet et Tammar [2014][BF14a] , l'algorithme de *Least-Squares Monte Carlo* par Bauer et al.[2010][BD08] et les approches par portefeuilles de réplication Revelen [2009][Jul09].

En termes de différence d'approche aussi, nous notons que la méthode *Least-Squares Monte Carlo* présente la particularité de s'intéresser directement à construire une distribution des fonds propres économiques à une date donnée sans valoriser le *Best Estimate*.

L'approche choisie dans ce mémoire s'inscrit dans le prolongement des méthodes analytiques de Bonnin et al.[2014][BF14a]

L'objectif de ce mémoire n'étant pas de comparer les résultats issus de chacune des approches, nous avons toutefois choisi de faire une brève présentation de ces méthodes en mettant en avant les avantages et inconvénients cités dans la littérature.

Optimisation des simulations secondaires par Nteukam et Planchet [2010][NO10] : Cette méthode s'intéresse à l'optimisation du temps de calcul de la valeur des options présentes au passif. Après une première étape de discrétisation, l'idée est de regrouper les faisceaux des trajectoires du processus initial en fonction des quantiles. Ces faisceaux étant regroupés, une probabilité d'occurrence peut être estimée pour chaque scénario discrétisé. En termes de résultats, l'erreur d'évaluation peut être réduite à moins de 5 % lorsque les scénarios secondaires sont remplacés par quelques scénarios composites bien choisis.

Accélération de l'approche SdS de Devineau et Loisel [2009] [DL09] : La méthode permet de tirer profit de la précision d'une méthode SdS "brute" tout en garantissant une réduction significative du nombre de simulations. L'algorithme repose sur une localisation des situations les plus adverses au moyen de facteurs véhiculant l'intensité des risques de chaque scénario primaire. Le principe sous-jacent est de parcourir les simulations primaires en allant des plus extrêmes aux plus centrales jusqu'à stabiliser les valeurs de la queue de distribution. Cette méthode reste difficilement utilisable dans la mécanique des gestion des risques et de valorisation du portefeuille.

Approches basées sur des formules fermées analytiques par Bonnin et al.[2014][BF14a] : Méthodes de calcul des provisions techniques "économiques" efficaces à partir de formules fermées ou "semi-fermées", calculables rapidement. Deux approches de cette méthode sont présentées en détail dans ce mémoire. Ces formules sont toujours en cours de développement et ne sont pas encore applicables à l'ensemble des options de la garantie.

Least-Squares Monte Carlo (noté LSMC) par Bauer et al.[2010][BD08] : Cette méthode part du principe qu'il est possible d'expliquer la dynamique des fonds propres économiques en choisissant un ensemble de facteurs de risques. Le point fondamental de cette méthode repose sur le choix des régresseurs. Ce point peut être vu comme un avantage car il permet d'avoir une information précieuse sur la structure du passif, et en même temps comme un inconvénient car toute la précision du modèle repose sur le choix de ces régresseurs. Les auteurs soulèvent quelques difficultés de convergence de l'estimateur *Least-Squares Monte Carlo*, un récent article de Nteukam et al.[2014] [NO14] revient sur les propriétés de convergence de l'estimateur *LSMC* et montre des exemples pratiques d'utilisation de cette méthode. Nous notons aussi l'utilisation de la méthode du *curve fitting* qui est un cas particulier de la méthode de *LSMC* consistant à générer un nombre moins important de scénarios secondaires et à les interpoler. Koursari [2011][Kou11] compare ces deux méthodes et note qu'il est préférable d'utiliser un *LSMC* au risque de perdre quelques propriétés intéressantes.

Portefeuilles de réplication Revelen [2009][Jul09] : Le principe essentiel de cette méthode est de construire un portefeuille d'actifs financiers ayant la même valeur que le portefeuille de passif, ainsi que les mêmes sensibilités aux chocs financiers. Ces actifs financiers "fictifs" doivent pouvoir être valorisés simplement (par des formules fermées ou par des approches numériques peu chronophages), ce qui permet de ne pas avoir recours à l'étape (stochastique) de valorisation du passif et donc de réduire les temps de calcul. Cette technique est confrontée à la complexité des contrats d'assurance vie (Duration longue, Option de rachat, clause de participations aux bénéfices...).

1.4 Approche par formules fermées pour les projections *ORSA*

Le modèle de projection par formules fermées est basé sur une approximation analytique de l'évaluation des engagements. Il part du constat qu'un modèle complexe pour la projection n'est pas forcément plus précis et adapté à la gestion des risques⁵.

L'idée est de pouvoir estimer la valeur de deux options majeures présentes dans le passif de l'assureur, à savoir le rachat et la revalorisation. Le premier article de Bonnin et al.[2014][BF14a] concerne un modèle d'épargne général, il suppose que l'objectif de revalorisation rejoint en général un taux court, puis en déduit une forme du *spread* par rapport au taux sans risque. L'assuré sera sensible à ce *spread* et son comportement en termes de rachat dépendra de la valeur de cette différence. Bonnin et al.[2014] [BF14a] montrent qu'il est possible d'avoir des formules fermées pour le calcul du *Best Estimate* et du *SCR* instantanés modulo une modélisation présentée dans le chapitre 2. De ce fait, il devient facile de projeter le bilan économique et de construire des distributions du *Best Estimate* et du *SCR*.

Le deuxième article de Bonnin et al. [2014] [BF14b] est une application dans le cas particulier de l'épargne retraite. L'objectif de la revalorisation est supposé relatif à l'inflation. La valorisation de l'option de rachat est fait d'une manière différente dans ce cas et, comme nous le verrons dans le chapitre 2, le calcul du *Best Estimate* repose sur des facteurs déflateurs. Le *SCR* est calculé à l'aide de la formule standard après projection des taux et calcul des facteurs déflateurs choqués.

Le modèle proposé dans ce mémoire peut se voir comme une extension du modèle retraite en prenant en compte quelques caractéristiques intéressantes du premier modèle général de l'épargne. Nous allons utiliser l'expression de la valorisation de l'option de rachat du modèle de l'épargne tout en introduisant un objectif de revalorisation différent de l'inflation. La formule des déflateurs est modélisée ici en temps continu alors que les rachats sont constatés annuellement (après distribution de la participation aux bénéfices). Les deux objectifs de revalorisation introduits sont le rendement du taux court et le rendement d'un actif de

5. voir Bakshi [1997] [BG97] pour un exemple d'étude empirique concernant ce point

type *Black & Scholes* [1973][FB73]. Nous montrons en basant sur des travaux de Lindset [2001][Lin01] et de *Persson et Aase* [1996][KKA96] qu'il est possible d'avoir des formules fermées des facteurs déflateurs.

Chapitre 2

Cadre général du calcul d'un *Best Estimate* pour un contrat d'épargne

L'une des difficultés majeures en assurance vie est le calcul d'un *Best Estimate* dans le cadre de solvabilité II. En effet, la forte interaction Actif/Passif rend l'estimation d'une *fair value* des engagements de l'assureur très complexe. Les assureurs ont adopté une approche rustique consistant globalement à injecter dans un modèle *ALM* de production de comptes sociaux des trajectoires issues d'un *générateur de scénarios économiques* "risque neutre" pour construire in fine un estimateur empirique du *Best Estimate*. Le schéma repris de Leroy et Planchet [2011][LG11] rappelle les différentes étapes de la méthode classique :

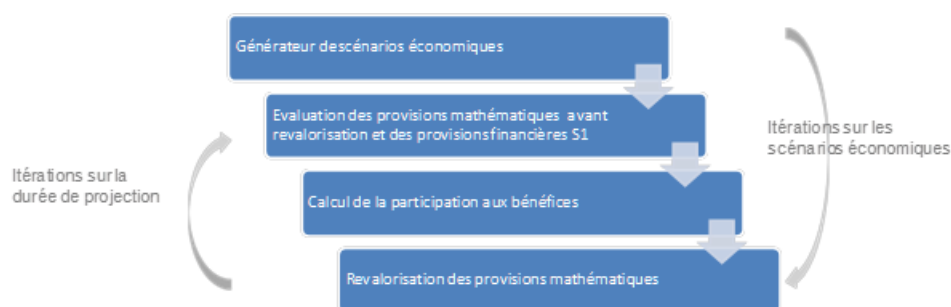


FIGURE 2.1 – Illustration calcul *Best Estimate* dans un cadre classique

Indépendamment des difficultés conceptuelles que soulève une telle approche, elle s'avère très mal adaptée au cadre de l'*ORSA*, qui nécessite d'obtenir une information sur la distribution du taux de couverture des engagements sur un horizon de quelques années. Dès lors, la capacité à pouvoir calculer les provisions et, partant, à projeter le bilan économique de manière efficace devient un enjeu central auquel la structure "Pilier 1" ne permet pas de répondre.

Si des solutions simples peuvent être proposées en assurance non-vie (cf. Planchet et al. [2010][PF10]), la complexité des interactions actif-passif rend la tâche a priori plus complexe en assurance vie et notamment en épargne.

Des efforts ont alors été portés sur la conception de modèles de calcul des provisions techniques "économiques" efficaces à partir de formules fermées ou "semi-fermées", calculables rapidement numériquement. Le cadre de ce mémoire concerne, dans une première mesure, l'article de Bonnin et al. [2014][BF14a] qui présente un cadre général du calcul d'un *Best Estimate* pour des contrats d'épargne en utilisant des formules fermées. Dans une seconde mesure, une application récente dans le cadre de contrats d'épargne retraite de Bonnin et al. [2014][BF14b].

Nous exposerons dans cette partie le cadre général d'un calcul du *Best Estimate* tel qu'il a été proposé par Bonnin et al. [2014][BF14a] pour un contrat d'épargne général. Ces principes de modélisation seront ensuite repris pour proposer un modèle plus simple. En effet, nous nous baserons sur le modèle d'épargne retraite de Bonnin et al. [2014][BF14b] pour ensuite l'étendre à un cadre qui prend en compte deux formes particulières d'objectifs de revalorisation différentes de l'inflation.

2.1 Contexte

Solvabilité II impose une évaluation “économique” des engagements. Ce cadre d’évaluation imposé par le régulateur est associé à une logique financière de gestion et de mesure des risques. Les dernières spécifications techniques de l’EIOPA [2014][IE14] rappellent que le *Best estimate* est :

“La meilleure estimation (qui) est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l’argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente.

Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates “

En d’autres termes, les provisions *Best Estimate* sont l’espérance des flux futurs des prestations actualisées. Pour réaliser ce calcul, les méthodes utilisées sont stochastiques et impliquent l’évaluation de la distribution des flux futurs, dont la moyenne actualisée conduit à la définition du *Best Estimate*.

Dans le cadre de contrats d’épargne, la structure de modélisation utilisée suppose le recours à un générateur de scénarios économiques “risque neutre” qui alimente un modèle de projection de flux *ALM*. Cela permet d’avoir une approximation par simulation de la valeur du *Best Estimate*.

2.2 Méthodologie du calcul

Nous reprenons dans cette section les notations de Bonnin et al.[2014][BF14b]. Un calcul d’un *Best Estimate* fait intervenir trois éléments : les flux, le processus d’actualisation et la probabilisation

— Les flux aléatoires de trésorerie $(F(t))_{t \geq 0}$ avec :

$$F(t) = Prestation(t) - Cotisation(t) + Frais(t) - Chargement(t)$$

— Un processus de déflation adapté $(\delta(t))_{t \geq 0}$, pour $r(u)$ taux sans risque à l’instant u nous avons :

$$\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right) \quad (2.1)$$

— Deux espaces de probabilité filtrés $\left(\Omega^a, (\mathcal{F}_t^a)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^a\right)$ et $\left(\Omega^f, (\mathcal{F}_t^f)_{t \geq 0}, \mathbb{Q}^f\right)$ pour le risque assurance et le risque financier respectivement.

Nous distinguons alors deux situations, selon que l’aléa sur le flux est d’origine financière ou non. La provision *Best Estimate* à l’instant initial s’exprime alors :

$$BE(0) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{t \geq 1} \delta(t) \times F(t) \right] \quad (2.2)$$

$\mathbb{P}^a$ est la probabilité décrivant les aléas non financiers (mortalité, rachat structurel, etc.) et $\mathbb{Q}^f$ probabilité pour les risques financiers supposés couvrables (*hedgeable*). Il est à noter que le passage de la probabilité historique à la probabilité risque neutre consiste à augmenter les probabilités des événements défavorables pour l’investisseur de telle manière à refléter son aversion pour le risque. Pour plus de détails concernant ces deux mesures de probabilité voir Wuthrich et Merz [2013][MVW13].

Lorsque $(F(t))_{t \geq 0}$ ne dépend pas de l’état du monde financier, il y a donc absence d’interaction Actif/-Passif, nous retrouvons une expression simple faisant intervenir les prix zéro coupon initiaux :

$$\begin{aligned} BE(0) &= \sum_{t \geq 1} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} [\delta(t)] \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [F(t)] \right] \\ &= \sum_{t \geq 1} \left[P_n(0, t) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [F(t)] \right] \end{aligned}$$

où $P_n(0, t)$ est le prix nominal d’un zéro coupon de maturité t à l’instant initial.

Dans le cas général, le calcul de la formule 2.2 se fait à l'aide de simulations :

$$BE(0)_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{t=1}^T \sum_{a=1}^A \frac{F(t)_{n,a}}{(1 + R_n(0, t))^t} \right) \quad (2.3)$$

$$\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{t \geq 1} \delta(t) \times F(t) \right]$$

où N est le nombre de simulations, A le nombre de contrats, $R_n(0, t)$ le taux sans risque initial de maturité t relatif à la simulation n et T la durée du contrat.

Toutefois, l'utilisation de la formule 2.3 s'avère très mal adaptée dans le cadre d'un modèle *ORSA*¹ à cause de son excès de paramétrisation. De nouvelles approches ont été alors développées pour répondre dans de bonnes conditions aux exigences de l'*ORSA*. Nous verrons dans la suite deux modèles analytiques permettant de faire ces projections.

2.3 Best Estimate dans le cas général d'un contrat d'épargne

La cadre de travail proposé par Bonnin et al .[2014][BF14a] expose une manière analytique pour l'approximation du *Best Estimate* d'un contrat d'épargne. L'idée ici est de pouvoir obtenir des formules fermées pour un calcul robuste et justifiable dans le cadre de modèles *ORSA*.

Si un modèle de projection classique permet d'avoir un calcul du *Best Estimate* à l'instant initial, son "excès de paramétrisation" le rend incapable de fournir une projection à hauteur du plan stratégique de la compagnie. Il faut donc avoir recours à d'autres classes de modèles capables de prendre en compte à la fois la complexité des contrats et en même temps les besoins de projection.

L'idée de Bonnin et al .[2014][BF14a] est de se baser sur un modèle *ALM* classique pour le calcul de la provision mathématique, puis de trouver une expression d'un coefficient qui s'applique sur la provision mathématique pour donner un *Best Estimate*. Ce calcul se base sur le constat que la valeur *Best Estimate* des engagements d'un contrat d'épargne se situe en général dans une fourchette de 95% à 105% de la valeur de la provision mathématique.

2.3.1 Modèles de durée appliqués au rachat

Ce rappel s'inspire de support du cours de Planchet [2014] [Fré14].

Soit X la durée de vie d'un contrat. Nous définissons les variables suivantes :

Fonction de survie du contrat S : Il s'agit de la probabilité pour que le contrat soit toujours en vigueur après l'instant t

$$S(t) = \mathbb{P}(X > t)$$

Densité de la durée de vie du contrat : Lorsque la densité de X existe, nous la noterons

$$f(t) = -\frac{dS(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(t \leq X < t + h)}{h}$$

1. voir chapitre 1

fonction de hasard μ : Elle présente la densité de probabilité de rachat du contrat d'un assuré entre deux instants t et $t + dt$ sachant qu'il est en vigueur en t :

$$\mu(t)dt = \mathbb{P}(t \leq X < t + dt \mid X \geq t)$$

Cette paramétrisation par le temps est réaliste car elle permet de décrire à la fois les comportements de rachat à court terme (tel le rachat conjoncturel) et en même temps les phénomènes long terme comme la dérive de longévité.

La relation entre fonction de hasard et fonction de survie du contrat est donnée par :

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = -\frac{S'(t)}{S(t)}$$

Cette relation permet d'avoir que $S(t) = \exp(-M(t))$ où $M(t) = \int_0^t \mu(u)du$ fonction de hasard cumulative.

2.3.2 Expressions générales

Soit un contrat dont la valeur de rachat évolue de la manière suivante :

$$VR(t) = VR(0) \times \exp\left(\int_0^t r_s(u)du\right)$$

où $r_s(u)$ est le taux de revalorisation du contrat à l'instant u . En considérant $\mu(t)$ la fonction de hasard de la durée de vie du contrat à l'instant t , la provision mathématique à l'instant t est alors $PM(t) = VR(t) \times S(t)$, et $S(t) = \exp(-\int_0^t \mu(u)du)$ la fonction de survie du contrat à l'instant t . Il s'agit ici de considérer une prime initiale $VR(0)$ qui sera capitalisée au taux de revalorisation servi.

Nous associons une variable aléatoire τ temps d'arrêt pour la filtration naturelle² du processus $(VR(t))_{t \geq 0}$, τ correspond en pratique au temps de sortie du contrat, soit par rachat ou par décès. Le flux à payer par l'assureur dans ce cas est :

$$\Lambda = VR(\tau \wedge T) \times \delta(\tau \wedge T)$$

où $(\delta(t))_{t \geq 0}$ est le processus de déflation défini dans 2.1.

L'idée majeure de Bonnin et al .[2014][BF14a] est de supposer que le taux de revalorisation du contrat peut se décomposer en un taux sans risque ($r(t)$ couvrable) et un autre taux $\omega(t)$ relatif aux risques non couvrables. Nous écrivons dans ce cas :

$$r_s(t) = r(t) + \omega(t) \tag{2.4}$$

$\omega(t)$ peut être vu ici comme un *spread* de revalorisation par rapport au taux sans risque. L'assuré est sensible à cet élément et son comportement dépendra de la valeur de ce *spread*.

La deuxième hypothèse du modèle consiste à considérer que la probabilité des risques non couvrables $\mathbb{P}^{nc}$ peut se décomposer en deux probabilités $\mathbb{P}^{nc} = \mathbb{P}^i \otimes \mathbb{P}^\omega$. $\mathbb{P}^i$ est associée aux risques assurentiels mutualisables et $\mathbb{P}^\omega$ associée au *spread* ω .

2.3.2.1 Cas d'un rachat déterministe

Nous supposons dans cette partie que les rachats sont déterministes. $(\mu(t))_{t \geq 0}$ et à fortiori $(S(t))_{t \geq 0}$ ne dépendront pas des réalisations aléatoires. Bonnin et al .[2014][BF14a] montrent que dans ces cas :

$$BE(0, T) = VR(0) \times \left(\int_0^T S(t)\mu(t)\theta(t)dt + S(T)\theta(T) \right) \tag{2.5}$$

où $\theta(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\omega} \left(\exp \left(\int_0^t \omega(u)du \right) \right)$. En pratique, une approximation est faite en se basant sur une discrétisation du temps et sur les valeurs des probabilités de sorties du contrat dans ces intervalles.

2. voir Bladi et al.[1998] [BP98] pour les définitions d'un temps d'arrêt et d'une filtration naturelle

Il s'agit à ce stade de modéliser le processus du *spread* $(\omega(t))_{t \geq 0}$. Pour cela, l'article part d'un constat que d'assureur choisit en général un taux de revalorisation proche du taux sans risque. Nous modélisons alors ce processus par un *Vasicek* [1977][VAS77] sous la probabilité $\mathbb{P}^\omega$:

$$d\omega(t) = k \times (\omega_\infty - \omega(t))dt + \sigma_\omega dB^\omega(t) \quad (2.6)$$

avec k, σ_ω deux constantes positive, ω_∞ le taux long terme et $(B(t))_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^\omega$.

Dans ce cas, la variable aléatoire $z(t) = \int_0^t \omega(u)du$ est gaussienne sous $\mathbb{P}^\omega$ avec $z(t) \sim \mathcal{N}(m(t), \nu(t))$ où $m(t) = \omega_\infty \times t + (\omega_0 - \omega_\infty) \frac{(1 - e^{-kt})}{k}$ et $\nu(t) = \frac{\sigma_\omega^2}{2k^3} (1 - e^{-kt})^2 + \frac{\sigma_\omega^2}{k^2} (t - \frac{1 - e^{-kt}}{k})$.

Donc

$$\theta(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\omega} (\exp(z(t))) = \exp\left(m(t) + \frac{\nu(t)}{2}\right) \quad (2.7)$$

2.3.2.2 Cas d'un rachat stochastique

Le taux de rachat dans cette partie est décomposé en un taux de rachat structurel et un autre conjoncturel. Les assurés rachètent soit en cas de besoin de liquidité (rachat structurel), soit en réponse à l'écart constaté entre le taux qu'ils se sont vu servir par l'assureur et les taux offerts sur marché (rachat conjoncturel fonction du *spread* $(\omega(t))_{t \geq 0}$) :

$$\mu(u) = \mu_s(u) + \mu_c(\omega(u)) \quad (2.8)$$

$(\mu_s(t))_{t \geq 0}$ est supposé déterministe alors que $(\mu_c(\omega(t)))_{t \geq 0}$ est aléatoire dépendant de $(\omega(t))_{t \geq 0}$. Un cas simple est considéré en prenant $\mu_c(\omega(t)) = -\eta \times \omega(t)$ où $\eta > 0$. En effet, plus le taux servi s'écarte du taux sans risque, les assurés auront tendance à garder leur contrat, et si le taux servi est proche du taux sans risque, les assurés rachètent leurs contrats.

$(\omega(t))_{t \geq 0}$ suit le même processus défini dans 2.6.

Dans ce cadre, Bonnin et al .[2014][BF14a] montrent que :

$$BE(0, T) = VR(0) \times \left(\int_0^T S_s(t) (\mu_s(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)) dt + S_s(T)\theta_1(T) \right) \quad (2.9)$$

- $S_s(t) = \exp(-\int_0^t \mu_s(u)du)$,
- $\theta_1(t) = \exp\left((1 + \eta) \times m(t) + (1 + \eta)^2 \times \frac{\nu(t)}{2}\right)$,
- $\theta_2(t) = -\eta \times \theta_1(t) \times \left(m_2(t) + \frac{\nu_2(t)}{2}\right)$.

Les deux variables $m_2(t)$ et $\nu_2(t)$ sont définies par :

- $m_2(t) = \frac{d}{dt} m(t) = (\omega_\infty + (\omega_0 - \omega_\infty) \times \varphi(kt)) + ((\omega_0 - \omega_\infty) \times k \times \psi(kt)) \times t$
- $\nu_2(t) = (1 + \eta) \times \frac{\sigma_\omega^2}{2k} \times (t\varphi(kt)^2 + \frac{2}{k} (1 - \varphi(kt))) + (1 + \eta) \times \frac{\sigma_\omega^2}{2k} \times (\varphi(kt)^2 + \psi(kt) (kt\varphi(kt) - 2))$

Où $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ et $\psi(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x)$

2.3.2.3 Projection du *Best Estimate*

Reprenons la formule 2.9 en notant $\rho(0, T) = \int_0^T S_s(t) (\mu_s(t)\theta_1(t) + \theta_2(t)) dt + S_s(T)\theta_1(T)$, avec $PM(0) = VR(0)$ nous avons donc

$$BE(0, T) = \rho(0, T) \times PM(0)$$

Le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* est un processus markovien car il s'agit d'une diffusion brownienne. Pour plus de détails sur les processus markoviens en temps continu (dits processus de diffusion) voir Itô

[1961][Kiy61] et Gikhman et Skorokhod [1969][GL69]. Ce caractère est utilisé pour le processus $(\omega(t))_{t \geq 0}$ 2.6 afin de projeter le *Best Estimate* $BE(t, T) = \rho(t, T) \times PM(t)$ où :

$$\rho(t, T) = \int_t^T S_{s,t}(t) (\mu_s(t) \theta_1(\omega(t), u - t) + \theta_2(\omega(t), u - t)) dt + S_{s,t}(T) \theta_1(\omega(t), T - t) \quad (2.10)$$

Remarque : Le caractère markovien de $(\omega(t))_{t \geq 0}$ implique que le processus $u \rightarrow \omega(u + t)$ est complètement déterminé par la valeur de $\omega(t)$. Notons alors $\theta_j(\omega(t), u)$ la valeur du coefficient $\theta_j(u)$ calculée en conditionnant par rapport à la valeur de $\omega(t)$.

2.4 *Best Estimate* dans le cadre d'un contrat d'épargne incluant un taux minimum garanti

Nous adoptons dans cette partie les mêmes notations que Bonnin et al. [2014] [BF14b] tout en généralisant le cadre des calculs. En effet, nous nous plaçons dans un cadre de contrat d'épargne incluant un taux minimum garanti et une clause de revalorisation relative à un rendement d'un actif.

Nous considérons dans ces calculs un pas de discrétisation annuel. Notons alors $(F_j, j \geq 1)$ les flux de prestations relatifs aux années de projections. Nous écrivons pour j entier naturel :

$$F_j = (1 + \tau_p) \times P_j^R - C_j$$

Avec $(P_j^R, j \geq 1)$ les prestations revalorisées, $(C_j, j \geq 1)$ les cotisations et τ_p le taux de frais (sous l'hypothèse que les frais sont proportionnels aux prestations). Il s'agit ensuite de discrétiser le processus de déflation $(\delta(t))_{t \geq 0}$ défini dans 2.1 selon la partition du temps annuelle $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ où

$$\delta(j) = \prod_{k=1}^j e^{-\int_{t_{k-1}}^{t_k} r(u) du} = \prod_{k=1}^j e^{-\rho(k)} \text{ et } \rho(k) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} r(u) du.$$

La valeur économique des engagements à l'instant initial en suivant 2.2 est :

$$\begin{aligned} BE(0, T) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times F_j \right] \\ &= (1 + \tau_p) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times P_j \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times C_j \right] \end{aligned}$$

Le montant des cotisations ne dépendant pas de l'environnement financier, la formule se simplifie en considérant les prix zéro coupon nominaux $(P_n(0, j), j \geq 1)$:

$$BE(0, T) = (1 + \tau_p) \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times P_j^R \right] - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [C_j] \quad (2.11)$$

Toutefois, la valeur des prestations dépend de l'environnement financier à travers les clauses de revalorisation. Ce point rend le calcul du terme $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times P_j^R \right]$ assez délicat et des méthodes calculatoires sont considérées afin de faire ce calcul. Nous exposons ci-après une méthodes de calcul de ce terme.

2.4.1 Calcul avant prise en compte des rachats conjoncturels

Nous définissons un processus $(\beta(t))_{t \geq 0}$ du rendement de l'actif avec un pas annuel. Le taux minimum garanti est supposé fixé pour chaque année de projection, et il sera noté g_j pour une année de projection j et sera supposé déterministe.

Le modèle s'attache à valoriser l'option selon laquelle l'épargne a une revalorisation basée sur le rendement annuel de l'actif et au moins égale au taux technique. En d'autres termes, si le rendement de l'actif $\beta(j)$ durant l'année j dépasse le taux minimum garanti g_j , l'épargne sera revalorisée à ce taux. Sinon, l'épargne

se revalorise au taux minimum garanti annuel g_j . Le terme de revalorisation pour une année j aura donc la forme $e^{g_j \vee \beta(j)}$.

L'épargne revalorisée pour une année j est :

$$P_j^R = P_j \times \prod_{k=1}^j e^{g_j \vee \beta(k)}$$

où $(P_j, j \geq 1)$ sont les prestations non revalorisées. Le calcul du terme $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} \left[\sum_{j \geq 1} \delta(j) \times P_j^R \right]$ donne alors pour un flux quelconque j :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f} [\delta(j) \times P_j^R] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [P_j] \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[\delta(j) \times \prod_{k=1}^j e^{g_k \vee \beta(k)} \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [P_j] \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[\prod_{k=1}^j e^{(g_k - \rho(k)) \vee (\beta(k) - \rho(k))} \right] \end{aligned}$$

Nous appelons ensuite les facteurs déflateurs des prestations notés $\Omega(0, j)$ définis par :

$$\Omega(0, j) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[\prod_{k=1}^j e^{(g_k - \rho(k)) \vee (\beta(k) - \rho(k))} \right] \quad (2.12)$$

Motivation

À ce stade, nous notons la principale différence par rapport au modèle proposé par Bonnin et al. [2014][BF14b]. En effet, la prise en compte du rendement de l'actif dans le modèle de retraite de Bonnin et al. [2014][BF14b] a été modélisée par un paramètre multiplicatif λ constant lors de la projection :

$$\Omega(0, j) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f} \left[\prod_{k=1}^j \frac{(1 + g + [\lambda \times i_k - g]^+)}{1 + r_k} \right]$$

Dans ce cas λ reflète à la fois l'objectif de revalorisation lié à l'inflation et en même temps le rendement de l'actif. Tammar [2014] [Tam14] montre que ce paramètre peut être choisi de telle manière à refléter toute politique de participation aux bénéfices possible de l'assureur.

Limites du modèle Bonnin et al. [2014][BF14b] : L'approche du modèle Bonnin et al. [2014][BF14b] présente les limites suivantes :

- Le modèle propose de calculer l'option de revalorisation en se basant sur la simplification que l'objectif de revalorisation de prestations de retraite est en général très fortement lié à l'inflation des prix. Cette simplification, propre au cadre de l'épargne retraite, ne peut pas être considérée dans le cadre de l'épargne générale où l'objectif de revalorisation rejoint en général une partie du rendement annuel de l'actif de l'assureur.
- Le modèle propose le calcul des facteurs $\Omega(0, j)$ par des méthodes de *Monte Carlo* en adoptant une discrétisation annuelle. L'erreur de cette approche de calcul n'a pas été estimée et l'optimisation de sa convergence n'a pas été étudiée.

Il est possible d'étendre le modèle pour prendre en compte un rendement gaussien de l'actif selon 2.12 tout en restant dans un cadre de projection simple.

La valeur finale du *Best Estimate* est la suivante :

$$BE(0, T) = (1 + \tau_p) \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [P_j] - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [C_j] \quad (2.13)$$

En conclusion, la capacité à estimer une “*fair value*” des engagements dépend intimement de l’efficacité des méthodes de calcul des facteurs déflateurs $\Omega(0, j)$.

Par la suite nous notons $\mathbb{Q}^f = \mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}^a = \mathbb{P}$ afin d’alléger les notations

2.4.2 Prise en compte des rachats conjoncturels

Soient des coefficients $(\Delta_j, j \geq 0)$ définis par $1 - \Delta_j = e^{(g_j - \rho(j)) \vee (\beta(j) - \rho(j))} = \frac{e^{g_j \vee \beta(j)}}{e^{\rho(j)}}$ pour refléter l’écart relatif de performance du contrat par rapport au taux sans risque.

$\Delta_j = -\frac{e^{g_j \vee \beta(j)} - e^{\rho(j)}}{e^{\rho(j)}}$ est la sous-performance instantanée actualisée. L’assuré sera sensible à cet écart de revalorisation et son comportement dépendra de la valeur des paramètres Δ_j . Une hypothèse est faite à ce stade en considérant que les variables aléatoires Δ_j sont, sous la probabilité risque neutre, normales et indépendantes. Ce qui conduit à écrire $\Delta_j = \Delta + \sigma_\Delta \varepsilon_j$ où $(\varepsilon_j)_{j \geq 1}$ est un bruit blanc gaussien sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.

En suivant le même raisonnement que Bonnin et al .[2014][BF14a] dans la relation 2.8 pour le rachat, nous supposons que :

$$\mu_j = \mu + \beta \times (\Delta_j - \Delta) = \mu + \beta \times \sigma_\Delta \varepsilon_j$$

où μ est le rachat structurel supposé constant et $\beta \geq 0$ la sensibilité à la variation de la sous-performance pour le rachat conjoncturel.

En se basant sur un flux unitaire payé sans limite (rente perpétuelle) nous cherchons à mesurer l’impact de l’existence de ce mécanisme de rachats conjoncturels. La valeur économique des flux rachetés peut s’écrire

$$VR(\beta) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\sum_{j \geq 1} \mu_j \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \mu_k) (1 - \Delta_k) \right)$$

L’indépendance des termes de ce produit permet de calculer cette valeur comme suit :

$$VR(\beta) = \mu \times \sum_{j \geq 0} [(1 - \mu) (1 - \Delta) + \beta \times \sigma_\Delta^2]^j = \frac{\mu}{1 - ((1 - \mu) (1 - \Delta) + \beta \times \sigma_\Delta^2)} \quad (2.14)$$

Pour $\beta = 0$, nous pouvons noter que $VR(0) = \frac{\mu}{1 - ((1 - \mu) (1 - \Delta))}$, ce qui conduit à réécrire la formule 2.14 comme suivant :

$$VR(\beta) = \frac{VR(0)}{1 - VR(0) \frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu}} \quad (2.15)$$

Au premier ordre nous pouvons faire l’approximation

$$VR(\beta) \approx VR(0) \times (1 + VR(0) \frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu})$$

Donc, en présence d’une sensibilité au *spread* β , le rachat augmente la valeur des flux rachetés d’une proportion $\frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu}$. Par ailleurs, pour cet exemple, la provision mathématique du contrat est $PM = \sum_{j \geq 1} \mu \prod_{k=1}^{j-1} (1 - \mu) = 1$. Le correctif obtenu est donc entendu pour **un Euro de PM**.

Afin de prendre en compte le rachat dans la valeur du *Best Estimate* 2.13, un terme de correction est introduit à ce stade en se basant sur 2.15 :

$$BE_P(\beta) = \frac{1}{1 - \gamma \frac{\beta \times \sigma_\Delta^2}{\mu}} BE_P(0)$$

où $BE_P(0) = \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [F_j]$ et $\gamma = \frac{BE_P(0)}{PM}$ supposé constant.

Remarque : Le choix a été fait de prendre un terme γ constant afin d'éviter un grand volume de calcul. Cette simplification peut ne pas être considérée en recalculant les PM à chaque date de projection.

Enfin, la marge pour risque est ajoutée au *Best Estimate* des prestations ; cette marge est supposée simplement proportionnelle à $BE_P(0)$ avec τ_{RM} le coefficient de proportionnalité. Là encore, le paramètre τ_{RM} est issu des calculs menés dans le cadre du Pilier 1 avec un modèle *ALM* complet. Au final, les provisions techniques ont l'expression suivante :

$$BE(0) = \frac{(1 + \tau_{RM}) \times (1 + \tau_P)}{1 - \gamma \frac{\beta \times \sigma_{\Delta}^2}{\mu}} \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [P_j] - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [C_j] \quad (2.16)$$

2.4.3 Projection du *Best Estimate*

À partir de la formule du calcul du *Best Estimate* initial 2.16, il est clair qu'une projection de cette quantité dans un horizon correspondant au plan stratégique dépend de la capacité à projeter les deux facteurs $\Omega(0, j)$ et $P_n(0, j)$.

Pour un instant de projection t nous aurons :

$$BE(t, n) = \frac{(1 + \tau_{RM}) \times (1 + \tau_P)}{1 - \gamma \frac{\beta \times \sigma_{\Delta}^2}{\mu}} \sum_{j \geq 1} \Omega(t, n, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [P_j] - \sum_{j \geq 1} P_n(t, n, j) \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a} [C_j] \quad (2.17)$$

où n est l'indice du scénario de projection considérée. Il est donc possible de construire une distribution de la projection du *Best Estimate* en fonction des différents scénarios de déformation des courbes.

Nous décrirons dans le chapitre 4 le modèle global de projection, la manière de considérer les déformations des facteurs de risque qui nous permettent de procéder à cette projection.

Chapitre 3

Formules fermées pour le calcul des facteurs déflateurs des prestations

Ce paragraphe a comme objectif de proposer des formules fermées pour le calcul des facteurs déflateurs des prestations définis dans la formule 2.12.

Cette approche se base sur le travail de Lindset [2001][Lin01] dans une première mesure, et sur l'article fondateur de Persson et Aase [1996][KKA96] dans une seconde mesure. l'idée est de pouvoir obtenir une formule fermée exprimée en fonction de la fonction de répartition de la loi normale multivariée. Lindset [2001] propose un cadre de travail Heath, Jarrow et Morton [1992][DH92] pour les taux. Toutefois, et afin de rester cohérent avec le modèle de projection du mémoire, nous nous proposons de prendre comme modèle de taux, le processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* repris par *Vasicek* [1977][VAS77] par la suite.

Dans un premier temps, nous étudions le cas d'un contrat d'épargne incluant une revalorisation à hauteur du Taux minimum garanti. De surcroît, ce contrat prévoit une revalorisation annuelle à hauteur du rendement d'un actif, si ce dernier dépasse le taux minimum garanti. Afin d'illustrer le comportement des facteurs déflateurs 2.12 cités supra, l'actif aura un rendement égal au taux sans risque utilisé pour le calcul du *Best Estimate*. Cela suppose qu'en terme de revalorisation, l'assureur a pour objectif de revaloriser l'épargne au taux sans risque.

Dans un deuxième temps, un cas plus général est étudié pour considérer un actif avec un rendement gaussien.

3.1 Présentation des contrats

Nous considérons un contrat avec une clause de participation. L'épargne est revalorisée à hauteur du maximum entre un taux minium garanti et le rendement réalisé. Afin d'illustrer le comportement des facteurs déflateurs 2.12, deux types de contrats sont étudiés en fonction du moment de constatation (ou de revalorisation).

Le premier cas concerne un contrat revalorisé à terme ; en fonction du rendement constaté durant toute la durée du contrat. La valeur de rachat pour une unité de cotisation sera donc égale à :

$$VR_t^1 = \exp\left(\int_0^t r_s(u)du\right) \vee \exp(gt)$$

- r_s est le taux de revalorisation
- g est le taux minimum garanti

Le deuxième contrat prévoit une revalorisation durant chaque sous-période. Le rendement est constaté à la fin de chaque sous-période, et le contrat est revalorisé au maximum entre le rendement durant cette période et le taux minimum garanti **annuel**. Nous considérons alors la partition du temps $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ avec T la durée du contrat. Pour $t \in (0, T]$ nous définissons $m_t = \min(i : t_i \geq t)$ ainsi que $t_{m_t} = t$.

La valeur de rachat à l'instant t est :

$$VR_t^2 = \exp\left(\sum_{i=1}^{m_t} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} r_s(u) du \right] \vee g_i(t_i - t_{i-1})\right)$$

Dans le cas où les g_j sont constants et valent tous g , l'assuré a plus de possibilité que son épargne soit revalorisée dans ce deuxième cas. La valeur de ce contrat est alors supérieure à celle du premier contrat dans ce cas.

Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, les prix de ces deux contrats à l'instant initial sont :

$$\pi_1(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \times VR_t^1 \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(g t - \int_0^t r_s ds\right) \vee 0 \right] \quad (3.1)$$

$$\pi_2(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \times VR_t^2 \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(\sum_{i=1}^{m_t} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} r_s(u) du \right] - g_j(t_i - t_{i-1}) \right) \vee 0 \right] \quad (3.2)$$

3.2 Modèle de taux

Nous considérons dans un premier temps un cadre de travail continu pour la valorisation. Rappelons quelques résultats concernant le modèle de taux de Vasicek [1977][VAS77]. Pour une étude détaillée de ce modèle incluant l'estimation des paramètres voir Thérond et Planchet [2005][TP05].

La dynamique en probabilité historique du taux court dans ce modèle est la suivante :

$$dr_t = a(r_\infty - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}} \quad (3.3)$$

où a, r_∞ et σ sont des constantes positives qui présentent respectivement, la vitesse de retour à la moyenne, le taux long terme et la volatilité. $W_t^{\mathbb{P}}$ est un mouvement brownien défini sous la probabilité historique.

En supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage, une prime de risque notée $\lambda(r_t, t)$ est considérée afin de pouvoir passer en probabilité risque neutre. En considérant λ constant, et en utilisant le théorème de Girsanov, le changement de probabilité sur la dynamique du processus permet d'avoir :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (3.4)$$

avec $b = r_\infty - \frac{\sigma\lambda}{a}$. $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ définie à l'aide du théorème de Radon-Nikodym par :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\int_t^T \lambda(u) dW^{\mathbb{P}}(u) - \frac{1}{2} \int_t^T \lambda(u)^2 du\right)$$

La solution de l'équation différentielle stochastique 3.4 est la suivante :

$$r_t = b + (r_0 - b) e^{-at} + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (3.5)$$

Dans ce cas, $r_t \sim \mathcal{N}\left(b + (r_0 - b) e^{-at}, \frac{\sigma^2}{2a} [1 - e^{-2at}]\right)$ sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

Nous définissons ensuite le facteur d'actualisation calculable sous la probabilité risque neutre :

$$R_t = \int_0^t r_s ds = dt + \frac{1}{a} (r_0 - b) (1 - e^{-at}) + \int_0^t \frac{\sigma}{a} \left(1 - e^{-a(t-s)}\right) dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (3.6)$$

1. Cette prime de risque peut être vue de manière plus claire en passant au prix zéro coupon $B^{\mathbb{Q}}(t, T)$. En effet, nous pouvons montrer que $\mu_B - r = \sigma_B \times \lambda$. avec r taux sans risque et μ_B, σ_B les paramètres de diffusion du prix zéro coupon. nous avons donc que plus la volatilité de l'obligation est élevée autrement dit plus le risque pris est grand, plus l'excès de rendement au delà du taux sans risque est important.

R_t suit une loi normale sous cette probabilité $\mathbb{Q}$. En effet, $R_t \sim \mathcal{N}(\Lambda_t, \Gamma_t)$ avec $\Lambda_t = dt + \frac{1}{a}(r_0 - b)(1 - e^{-at})$ et $\Gamma_t = \frac{\sigma^2}{2a^3}(2at - 3 + 4e^{-at} - e^{-2at})$

3.3 Calcul à l'aide d'une formule fermée

Persson et Aase [1996][KKA96] montrent qu'il est possible d'obtenir une formule fermée pour le calcul de $\pi_1(0, t)$, ils proposent dans le même article une approximation du prix $\pi_2(0, t)$ en considérant des rendements R_t décorrélés. Toutefois, cette approximation a pour conséquence de surestimer les valeurs de $\pi_2(0, t)$. Persson et Aase [1997][PSA97] proposent juste après une formule fermée dans le cas où l'horizon de projection T est égal à 2. Lindset [2001][Lin01] généralise ces formules dans le cas d'un horizon quelconque de projection et se heurte à la problématique du calcul d'une fonction de répartition d'une loi normale multivariée. Genz et Bretz [2009][GA09] proposent différentes méthodes de calcul d'une loi normale multivariée dont certaines sont implémentées sous le logiciel *R*.

Afin de démontrer ce résultat, nous rappelons une propriété de la loi normale multidimensionnelle.

Propriété : Soit une loi normale multidimensionnelle X de moyenne μ , de matrice variance covariance V et de densité de probabilité $f(X; \mu, V)$. Nous avons donc :

$$f(X; \mu, V) \exp(-{}^t m X) = f(X; \mu - Vm, V) \exp\left(-{}^t m \mu + \frac{{}^t m V m}{2}\right) \quad (3.7)$$

où m est un vecteur colonne quelconque de même dimension que X .

Démonstration : Soit k la dimension du vecteur X , en utilisant la symétrie de V :

$$\begin{aligned} f(X; \mu, V) \exp(-{}^t m X) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2k}} |V|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{{}^t (X - \mu) V^{-1} (X - \mu)}{2} - {}^t m X\right) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2k}} |V|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{{}^t (X - \mu + Vm) V^{-1} (X - \mu + Vm)}{2} - {}^t m X + \frac{{}^t m V m}{2}\right) \\ &= f(X; \mu - Vm, V) \exp\left(-{}^t m X + \frac{{}^t m V m}{2}\right) \end{aligned}$$

Reprenons le cas du premier contrat :

$$\begin{aligned} \pi_1(0, t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(gt - \int_0^t r_s ds\right) \bigvee 0 \right] \\ &= \int_{-\infty}^{gt} e^{gt - R_t} f(R_t; \Lambda_t, \Gamma_t) dR_t + \int_{gt}^{\infty} f(R_t; \Lambda_t, \Gamma_t) dR_t \\ &= e^{gt} \int_{-\infty}^{gt} e^{-R_t} f(R_t; \Lambda_t, \Gamma_t) dR_t + \int_{gt}^{\infty} f(R_t; \Lambda_t, \Gamma_t) dR_t \end{aligned}$$

En considérant la propriété de la loi normale multidimensionnelle dans le cas particulier où $m = 1$, nous avons :

$$e^{-R_t} f(R_t; \Lambda_t, \Gamma_t) = e^{-\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t} f(R_t; \Lambda_t - \Gamma_t, \Gamma_t)$$

Donc en notant Φ la fonction de répartition de la loi normale multidimensionnelle.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{gt} e^{-R_t} f(R_t; \Lambda_t, \Gamma_t) dR_t &= \int_{-\infty}^{gt} e^{-\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t} f(R_t; \Lambda_t - \Gamma_t, \Gamma_t) dR_t \\
&= e^{-\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t} \int_{-\infty}^{gt} f(R_t; \Lambda_t - \Gamma_t, \Gamma_t) dR_t \\
&= e^{-\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t} \Phi\left(\frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}}\right)
\end{aligned}$$

La dernière ligne a été obtenue en considérant le changement de variable $Y_t = \frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}}$ et en se basant sur la symétrie de la loi normale nous retrouvons le résultat voulu.

En conclusion nous avons :

$$\pi_1(0, t) = e^{-gt + \Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t} \Phi\left(\frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}}\right) + \Phi\left(\frac{\Lambda_t - gt}{\sqrt{\Gamma_t}}\right) \quad (3.8)$$

où Φ fonction de répartition de la loi normale

3.4 Lien avec la formule classique de Black & Scholes [1973][FB73]

Nous reprenons dans cette partie la formule du prix de $\pi_1(0, t)$ 3.8 afin de lui donner un sens en lien avec le *pricing* de Black & Scholes [1973][FB73].

Pour rappel, dans le cas d'un modèle de Vasicek [1977][VAS77] $R_t = \int_0^t r_s ds$ suit une loi normale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, avec $R_t \sim \mathcal{N}(\Lambda_t, \Gamma_t)$ selon 3.6. $\exp(-R_t) = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ suit donc une loi log-normale de moyenne $-\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t$. Il en découle que le prix zéro coupon nominal vaut :

$$B(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \right] = -\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t$$

Nous supposons lors du raisonnement que la garantie de l'option est le taux minimum garanti. Le détenteur du contrat a une option de revaloriser le contrat au rendement gt dans le cas où cela lui convient. Si le rendement R_t est inférieur à gt , l'assuré exerce sa garantie et l'option est dans ce cas dite *in the money*. Dans le cas contraire, l'assuré voit son épargne se revaloriser au taux R_t et n'a aucun intérêt à exercer sa garantie. L'option est dite *out of the money* dans ce dernier cas.

En revenant à la formule 3.8, le terme $\exp(-\Lambda_t + \frac{1}{2}\Gamma_t) \Phi\left(\frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}}\right)$ reflète le prix du marché de l'évènement $\mathbb{I}\left\{gt > \int_0^t r_s ds\right\}$. L'assuré reçoit une unité de prix si le rendement ne dépasse pas la garantie. Le terme $\Phi\left(\frac{\Lambda_t - gt}{\sqrt{\Gamma_t}}\right)$ présente quant à lui l'ajustement du prix en probabilité risque neutre pour le cas où le rendement dépasse la garantie.

Réécrivons ensuite le prix de l'option de telle manière à ce qu'il se rapproche le plus de la formule fermée classique de Black & Scholes [1973][FB73] :

$$\pi_1(0, t) = \exp(gt) B(0, t) \Phi(\beta_1) + \Phi(\beta_2) \quad (3.9)$$

$$\text{où } \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_t}} \left[gt + \ln(B(0, t)) + \frac{1}{2}\Gamma_t \right] \text{ et } \beta_2 = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_t}} \left[-gt - \ln(B(0, t)) + \frac{1}{2}\Gamma_t \right]$$

L'expression classique de Black & Scholes [1973][FB73] a la particularité de montrer la composition du portefeuille de couverture. C'est aussi le cas ici, car l'expression 3.9 nous renseigne sur les deux types d'actifs qui permettent de répliquer la valeur finale du *payoff* de l'option. À l'instant initial, la quantité $\Phi(\beta_2)$ doit être investie dans le taux spot (actif risqué dans ce cas) et $\exp(gt)\Phi(\beta_1)$ est la quantité à investir dans un zéro coupon $B(0, t)$ de maturité t .

Ces résultats peuvent être liés à la valeur d'une option Européenne d'achat dont le *strike* est la partie garantie e^{gt} et le sous-jacent le rendement $\int_0^t r_s ds$. En effet, $C_t = \exp(\int_0^t r_s(u) du) \vee \exp(gt)$ est le *payoff* de

la garantie considérée alors que le *payoff* d'un *Call* Européen est de $\hat{C}_t = \left[\left(\exp\left(\int_0^t r_s(u) du\right) - K \right) \vee 0 \right]$ où K est le prix de l'exercice de l'option. En prenant $K = e^{gt}$, il est possible d'écrire que $\hat{C}_t = C_t - K$. Le prix à l'instant initial du *Call* est donc :

$$\pi_{Call}(0, t) = \Phi(\beta_2) - KB(0, t)\Phi(-\beta_1)$$

L'avantage d'avoir une formule fermée est de pouvoir étudier la sensibilité de ses termes aux différents paramètres du modèle. Nous proposons par la suite une étude de sensibilité du prix $\pi_1(0, t)$ 3.8 aux facteurs les plus importants pour l'assureur.

3.4.1 Étude de sensibilité du prix $\pi_1(0, t)$:

Sensibilité au taux nominal initial r_0 : Nous nous intéressons à la sensibilité des deux termes $\exp(gt)\Phi(\beta_1)$ et $\Phi(\beta_2)$ à la valeur initiale du taux nominal r_0 . En effet, étant donné que ces deux termes reflètent la composition du portefeuille de couverture, il est intéressant de savoir comment ils réagissent face à des valeurs extrêmes du taux initial.

Pour de grandes valeurs de r_0 , la valeur du zéro coupon $B(0, t)$ est faible; afin de compenser β_1 qui tend vers moins l'infini, β_2 tend vers plus l'infini. Dans ce cas $\exp(gt)\Phi(\beta_1)$ tend vers zéro alors que $\Phi(\beta_2)$ tend vers 1. En termes de composition du portefeuille, il faudra investir en grande partie dans le taux spot et éviter les zéros coupon. Autrement, dans le cas où le taux initial est faible, une grande partie du portefeuille de couverture doit être investie dans les zéro coupons. La figure qui suit montre l'évolution de la composition du portefeuille en fonction du taux initial :

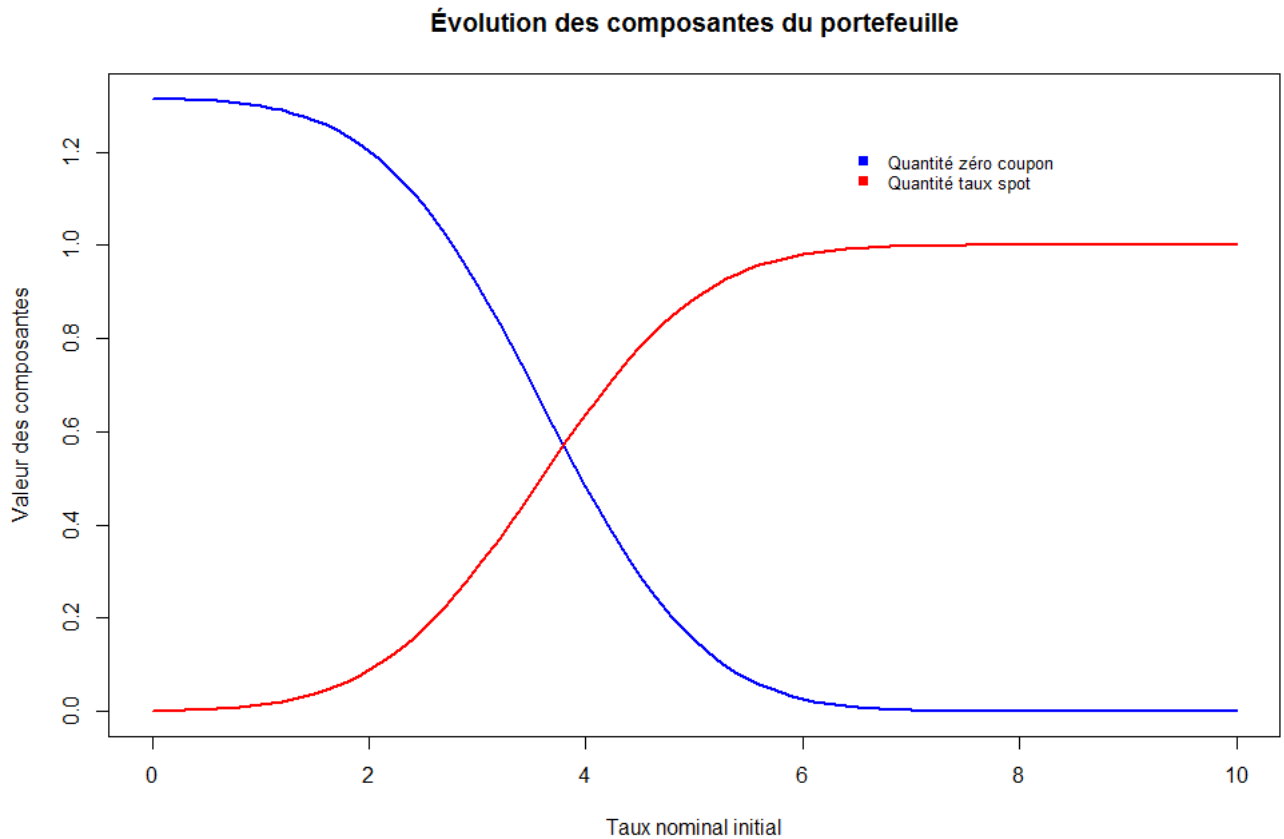


FIGURE 3.1 – Évolution des composantes du portefeuille en fonction du taux nominal initial

Les paramètres pris pour cette étude sont ceux ajustés pour la courbe *EIOPA* au 31/12/2013 :

Paramètre	Valeur
Maturité du contrat	1 an
taux technique	$\log(1 + 2\%)$
Paramètre a	0.12856975
Paramètre b	0.03994681
Volatilité du taux	0.00011229

TABLE 3.1 – Tableau des paramètres de l'étude de la sensibilité au taux nominal

À noter que le dernier graphe reflète la composition du portefeuille à l'instant initial. Il est donc nécessaire de faire des rebalancements durant la période $[0, t]$ afin de garder la couverture.

Afin d'étudier la sensibilité du prix $\pi_1(0, t)$ 3.8 au taux initial, il est possible d'avoir la forme exacte de la dérivée de $\pi_1(0, t)$ par rapport à r_0 . En effet :

$$\frac{\partial \pi_1(0, t)}{\partial r_0} = -\exp(gt)B(0, t)\Phi\left(\frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}}\right)\frac{1 - e^{-at}}{a}$$

Il est clair que $\frac{\partial \pi_1(0, t)}{\partial r_0} < 0$ et donc le prix du contrat est décroissant en fonction du taux nominal initial :

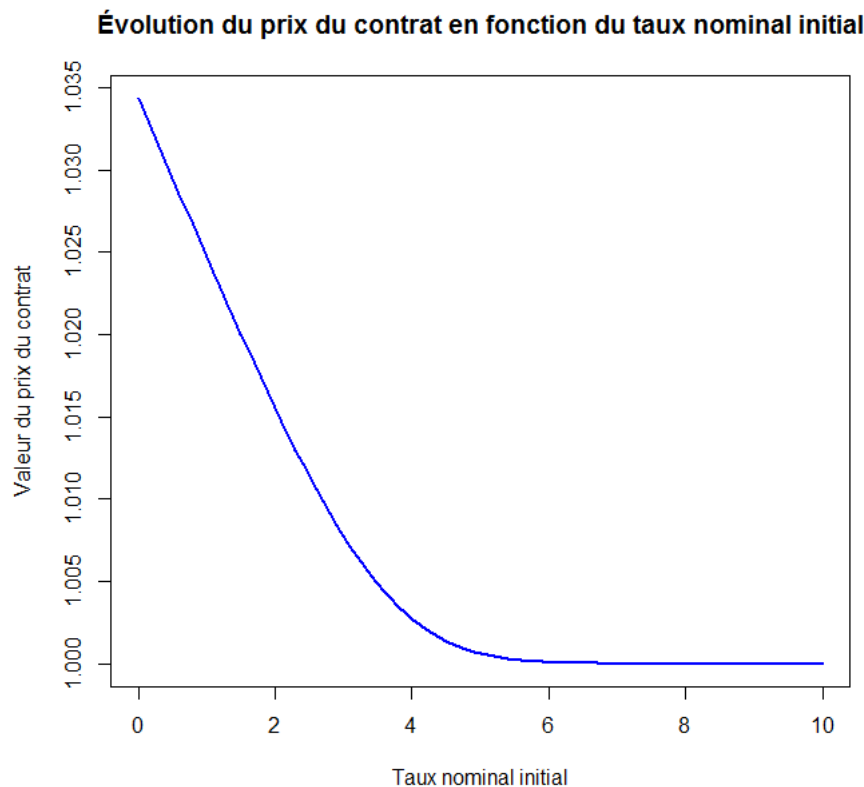


FIGURE 3.2 – Évolution du prix du contrat en fonction du taux nominal initial

Dans un environnement de taux bas comme celui que nous constatons au moment de la rédaction du mémoire, le taux nominal initial viendra donc augmenter le *Best Estimate*.

Sensibilité au taux garanti g : L'assureur a intérêt à connaître l'évolution du niveau des prestations en fonction du taux minimum qu'il propose. Afin de montrer cette sensibilité à travers le prix $\pi_1(0, t)$, il est possible d'avoir une formule explicite de dérivation comme suit :

$$\frac{\partial \pi_1(0, t)}{\partial g} = \exp(gt) B(0, t) \Phi \left(\frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}} \right)$$

Il est donc clair que le prix du contrat est une fonction croissante du niveau du taux minimum garanti proposé. Pour l'illustration, nous prenons un taux nominal initial à 3% et les paramètres du tableau 3.1 . Le prix du contrat évolue comme suivant :

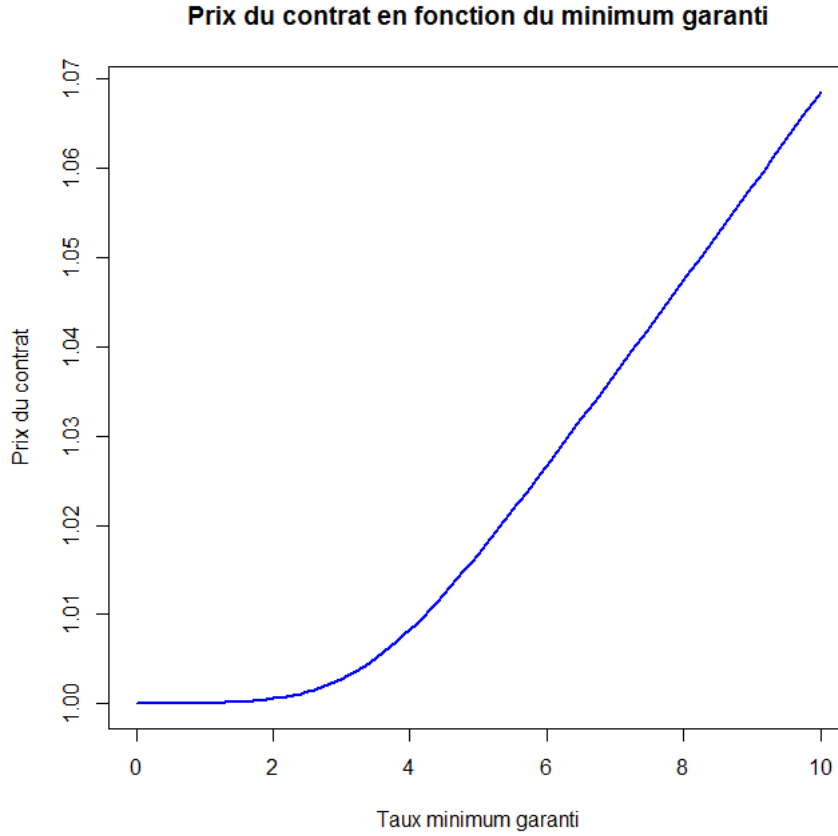


FIGURE 3.3 – Prix du contrat en fonction du taux minimum garanti

Nous remarquons que le prix du contrat n'est pas très sensible aux variations du taux minimum garanti autour du taux nominal initial. Toutefois, la sensibilité augmente à partir du moment où le TMG s'éloigne du taux nominal initial. À titre d'exemple, le prix subit une augmentation de 0.77% entre les TMG [2%, 4%] alors que l'augmentation dans l'intervalle [4%, 6%] est de 1.82%.

Sensibilité du prix à la maturité du contrat :

$$\frac{\partial \pi_1(0, t)}{\partial t} = \gamma_1 \exp(gt) B(0, t) \Phi \left(\frac{gt - \Lambda_t + \Gamma_t}{\sqrt{\Gamma_t}} \right) + \gamma_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$$

où

$$\gamma_1 = \left(\frac{\sigma^2}{2a^2} + g - b \right) - \left(\frac{\sigma^2}{2a^2} + r_0 - b \right) e^{-at} + \frac{\sigma^2}{2a^2} e^{-2at}$$

et

$$\gamma_2 = \frac{\sigma^2}{2\sqrt{\Gamma_t} a^2} (1 - 2e^{-at} + e^{-2qt})$$

Cette dérivée peut être positive ou négative.

Nous présentons l'évolution du prix en fonction de la maturité avec taux nominal initial à 0.3% et les mêmes paramètres du tableau 3.1 :

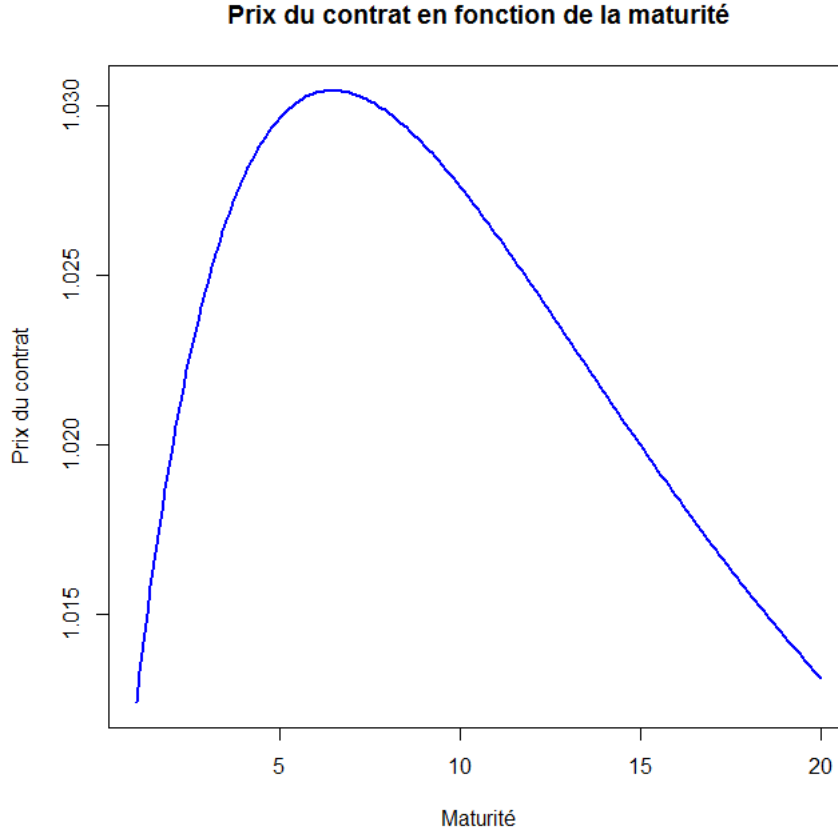


FIGURE 3.4 – Prix du contrat en fonction de la maturité

3.5 Calcul et discrétisation

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la valorisation du prix

$$\pi_2(0, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{m_t} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} r_s(u) du \right] - g_i(t_i - t_{i-1}) \right) \vee 0 \right]$$

Soit la partition du temps $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$ avec T la durée du contrat. Pour $t \in (0, T]$ nous considérons $m_t = \min(i : t_i \geq t)$ ainsi que $t_{m_t} = t$.

$$\rho_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} r_s ds = \int_{t_{n-1}}^{t_n} [b + (r_0 - b) e^{-as}] ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_0^t \frac{\sigma}{a} (1 - e^{-a(t-s)}) dt dW_s^{\mathbb{Q}} \quad (3.10)$$

R_n suit une loi normale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. En effet, $\rho_n \sim \mathcal{N}(\Lambda_n, \Gamma_n)$ avec :

$$\Lambda_n = b(t_n - t_{n-1}) + (r_0 - b) \frac{1}{a} (e^{-at_{n-1}} - e^{-at_n}), n = 1, \dots, m_t \quad (3.11)$$

$$\Gamma_n = \frac{\sigma^2}{2a^3} \left[2a(t_n - t_{n-1}) - 2 + 2e^{-a(t_n - t_{n-1})} + e^{-2at_n} (e^{2a(t_n - t_{n-1})} - 1)^2 \right], n = 1, \dots, m_t \quad (3.12)$$

Les rendements ont comme fonction de covariance sous la probabilité $\mathbb{Q}$:

$$\text{cov}(\rho_i, \rho_j) = c_{i,j} = \frac{\sigma^2}{2a^3} (e^{a(t_n - t_{n-1})} - 1)^2 (e^{-a(t_n - t_{n-1})(j-i+1)} - e^{-a(t_n - t_{n-1})(i+j)}) \quad (3.13)$$

Persson et Aase [1996][[KKA96](#)] proposent une première approximation en considérant que $cov(\rho_i, \rho_j) = 0$ pour $i \neq j$. Cela suppose, au vu de la propriété gaussienne des rendements, de considérer des rendements indépendants. Une formule fermée est directement retrouvée à l'aide de celle démontrée précédemment 3.8. Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_2(0, t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{m_t} \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} r_s(u) du \right] - g_i(t_i - t_{i-1}) \right) \vee 0 \right] \\ &= \prod_{i=0}^{t_m} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\sum_{i=1}^{m_t} \rho_i - g_i(t_i - t_{i-1}) \right) \vee 0 \right] \\ &= \prod_{i=0}^{t_m} \left[e^{-g(t_i - t_{i-1}) - \Lambda_i + \frac{1}{2} \Gamma_i} \Phi \left(\frac{g_i(t_i - t_{i-1}) - \Lambda_i + \Gamma_i}{\sqrt{\Gamma_i}} \right) + \Phi \left(\frac{\Lambda_i - g_i(t_i - t_{i-1})}{\sqrt{\Gamma_i}} \right) \right] \quad (3.14)\end{aligned}$$

3.6 Formule fermée matricielle avec rendement égal au taux court

Nous suivons dans cette section l'approche utilisée par Lindset [2001][[Lin01](#)], appliquée dans un cadre de modèle de taux *Vasicek* [1977][[VAS77](#)], afin d'avoir une formule fermée matricielle pour le calcul de $\pi_2(0, t)$ sans approximation.

Réécrivons la formule 3.2 comme suit :

$$\pi_2(0, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{(g_1 - \rho_1) \vee 0} e^{(g_2 - \rho_2) \vee 0} \dots e^{(g_{m_t} - \rho_{m_t}) \vee 0} \right] \quad (3.15)$$

Pour chaque période du calcul, il existe deux possibilités. Si le taux de rendement dépasse le taux minimum garanti ($\rho_i > g_i$) l'état i prend la valeur 0, sinon l'état i prend la valeur 1. Nous avons donc 2^{m_t} états possibles du monde entre 0 et t_m .

Soit alors un vecteur colonne c_j qui représente un état du monde. En effet, c_j est un vecteur de taille $m_t \times 1$ dont la $i^{ème}$ valeur prend la valeur 0 si $\rho_i > g_i$:

0	$(c_j)_1$	$\rho_1 > g_1$
1	$(c_j)_2$	$\rho_2 \leq g_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$(c_j)_{m_t-1}$	$\rho_{m_t-1} > g_{m_t-1}$
0	$(c_j)_{m_t}$	$\rho_{m_t} > g_{m_t}$

Table 3.2 – Exemple du vecteur c_j des états de revalorisation

Cela conduit à avoir 2^{m_t} uniques vecteurs c_j .

Soit aussi des matrices carrées $\hat{c}_j$ de taille $2^{m_t} \times 2^{m_t}$ relatives aux vecteurs c_j . Il existe aussi 2^{m_t} uniques matrices $\hat{c}_j$. Nous construisons ces matrices de la manière suivante :

- Les éléments non diagonaux sont tous nuls
- Les éléments de la diagonale ont pour valeurs $2 \times c_j - \mathbb{1}_1$. Avec $\mathbb{1}_1$ le vecteur colonne unité. Il s'agit de centrer le vecteur c_j .

$$\begin{pmatrix} 2 \times (c_j)_1 - 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2 \times (c_j)_2 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \times (c_j)_{m_t} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Table 3.3 – Exemple de la matrice $\hat{c}_j$

De même nous considérons un vecteur $G = {}^t(g_1, g_2 \dots g_{m_t})$ pour les taux minimums garantis annuels. Il s'agit d'un vecteur uni colonne de taille $m_t \times 1$.

Le rendement moyen du taux sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ est donné par une matrice uni colonne Λ de taille $m_t \times 1$. Avec $\Lambda_i = b(t_i - t_{i-1}) + (r_0 - b)\frac{1}{a}(e^{-at_{i-1}} - e^{-at_i})$ pour $i = 1, \dots, m_t$.

Le vecteur des rendements $R = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m_t})$ est un vecteur de loi normale multivariée. Sa matrice de variance covariance Σ de taille $m_t \times m_t$ est définie de la manière suivante :

- $\Sigma_{i,i} = \Gamma_i$ selon la formule 3.10
- $\Sigma_{i,j} = \text{cov}(\rho_i, \rho_j)$ pour $i \neq j$ défini selon la formule 3.13.

Est considérée en plus, la version standard de la matrice de variance covariance notée $\underline{\Sigma}$.

En se basant sur la propriété 3.7 d'un vecteur normal multivarié, nous introduisons des vecteurs colonnes $\hat{\alpha}_j$ de taille $m_t \times 1$ relatifs à chaque état du monde c_j . Pour j élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2^{m_t}\}$, le $i^{\text{ème}}$ élément de $\hat{\alpha}_j$ est donné par :

$$(\hat{\alpha}_j)_i = \frac{g - \Lambda_i - (\Sigma c_j)_i}{\sqrt{\Gamma_i}} \quad (3.16)$$

où $(\Sigma c_j)_i$ est le $i^{\text{ème}}$ élément du vecteur colonne (Σc_j) .

En introduisant une dernière variable $\alpha_j = \hat{c}_j \times \hat{\alpha}_j$ uni colonne de taille $m_t \times 1$, Lindset [2001][Lin01] montre que :

$$\pi_2(0, t) = \sum_{j=1}^{2^{m_t}} e^{t c_j G - t c_j \Lambda + \frac{1}{2} t c_j \Sigma c_j} \Phi(\alpha_j, \hat{c}_j \underline{\Sigma} \hat{c}_j) \quad (3.17)$$

$\Phi(x, V)$ est la fonction de répartition d'une loi normale multivariée de matrice de variance covariance V , évaluée au point x .

3.6.1 Application numérique et comparaison

repreons les mêmes paramètres pour le calcul du prix $\pi_1(0, t)$ à savoir

Paramètre	Valeur
Maturité du contrat	1 an
taux minimum garanti annuel	$\log(1 + 2\%)$
Paramètre a	0.12856975
Paramètre b	0.03994681
Volatilité du taux	0.00011229

TABLE 3.4 – Tableau des paramètres de l'étude de la sensibilité au taux nominal

Nous allons comparer la valeur des prix $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\hat{\pi}_2(0, t)$. Le tableau ci-après donne les résultats pour des maturités allant de 1 à 10 ans :

Maturité	$\pi_1(0, t)$	$\pi_2(0, t)$	$\hat{\pi}_2(0, t)$
1	1.014604	1.014604	1.014604
2	1.025127	1.025127	1.025127
3	1.031960	1.031960	1.031960
4	1.035486	1.035486	1.035486
5	1.036076	1.036076	1.036076
6	1.034079	1.036076	1.036076
7	1.029820	1.036076	1.036077
8	1.023599	1.036076	1.036081
9	1.015688	1.036076	1.036089
10	1.006333	1.036076	1.036098

TABLE 3.5 – Prix des trois contrats $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\hat{\pi}_2(0, t)$

Nous remarquons donc que le prix $\pi_1(0, t)$ est inférieur à $\pi_2(0, t)$ comme prévu car le deuxième contrat présente plus de garantie pour l'assuré. Pour un besoin de couverture, l'assureur va demander une prime

supérieure. Nous notons aussi quand dans le cas où les corrélations entre les rendements sont négligées (approximation $\hat{\pi}_2(0, t)$) le prix du contrat est supérieur au prix $\pi_2(0, t)$. Cette différence de prix n'est pas très conséquente car la volatilité considérée pour le taux est basse. Afin d'illustrer le comportement du prix $\hat{\pi}_2(0, t)$ nous allons augmenter la volatilité σ du taux et nous constatons l'effet sur le prix. Le graphe qui suit illustre l'évolution de ces trois prix en fonction de la maturité :

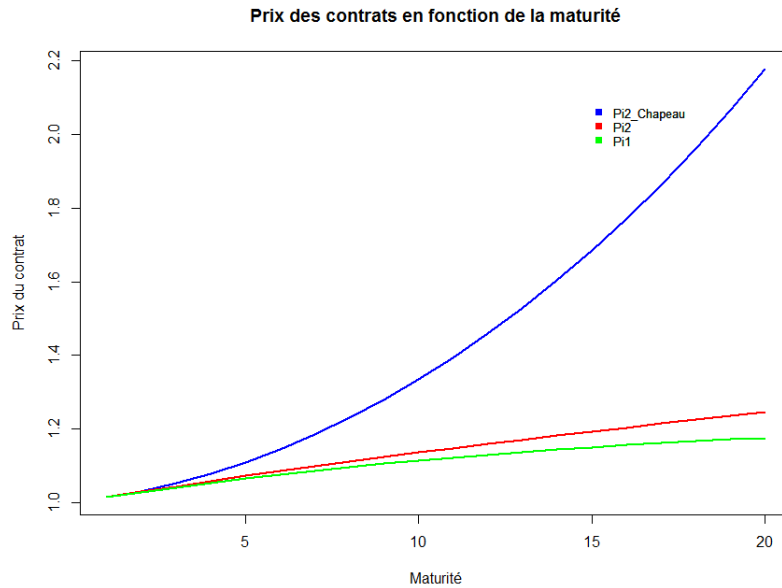


FIGURE 3.5 – Comparaison des prix $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\hat{\pi}_2(0, t)$

La structure du modèle de *Vasicek* fait en sorte que la corrélation entre deux rendements différents du taux est toujours positive. La formule des covariances 3.13 illustre ce propos. En se basant la définition standard de la formule de covariance $cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et sur l'inégalité de *Jensen* nous pouvons déduire que l'estimation $\hat{\pi}_2(0, t)$ est une borne supérieur pour $\pi_2(0, t)$.

3.6.2 Étude de sensibilité du prix $\pi_2(0, t)$:

En l'absence de formules fermées pour étudier la sensibilité du prix $\pi_2(0, t)$, nous allons procéder à des illustrations graphiques, tout en perdant pas de vue les résultats de sensibilité trouvés pour $\pi_1(0, t)$.

Nous considérons pour un besoin de comparaison les mêmes paramètres que ceux du tableau 3.4.

Sensibilité au taux nominal initial r_0 : Nous présentons ci-après le prix $\pi_2(0, t)$ à l'instant initial pour un taux nominal initial entre 0.1% et 10%. L'effet de ce taux est constaté sur des contrats ayant une maturité entre 1 et 30 ans.

Prix π_2 en fonction du taux nominal initial pour différentes maturités

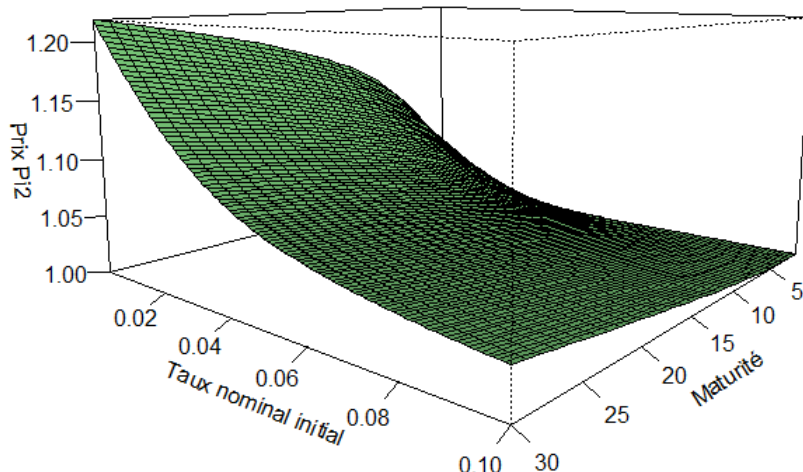


FIGURE 3.6 – Prix $\pi_2(0, t)$ en fonction du taux nominal initial pour différentes maturités

Nous constatons qu'en général le prix $\pi_2(0, t)$ est décroissant en fonction du taux nominal initial. Il s'agit d'un comportement similaire à celui constaté pour le prix $\pi_1(0, t)$. Toutefois, il est important ici de noter que les prix des contrats ayant des maturités plus longues sont plus sensibles à la valeur initiale du taux nominal. En effet, pour un contrat de maturité 30 ans par exemple, si le taux nominal initial est nul, l'assureur devra garantir le taux minimum garanti pendant longtemps avant que le taux sans risque puisse atteindre le taux minimum garanti. À taux nominal initial constant, le prix du contrat est croissant en fonction de la maturité.

Sensibilité au taux minimum garanti g : Nous présentons ci-après le prix $\pi_2(0, t)$ à l'instant initial pour un taux minimum garanti entre 0.1% et 10%. L'effet de ce taux est constaté sur des contrats ayant une maturité entre 1 et 30 ans.

Prix π_2 en fonction du taux minimum garanti pour différentes maturités

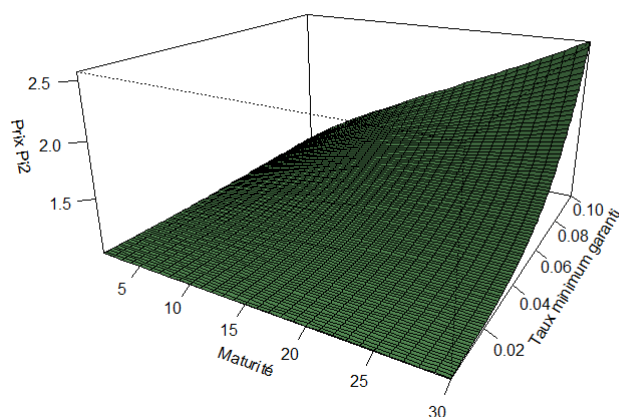


FIGURE 3.7 – Prix $\pi_2(0, t)$ en fonction du taux minimum garanti pour différentes maturités

Nous constatons dans un premier temps que le prix $\pi_2(0, t)$ est croissant en fonction du taux minimum garanti. Il s'agit d'un comportement similaire à celui constaté pour $\pi_1(0, t)$. Dans un deuxième temps, nous remarquons que les prix des contrats ayant une plus grande maturité sont plus sensibles au taux minimum garanti. En effet, pour une grande maturité, l'assureur doit garantir un taux minimum élevé pendant très longtemps ; il s'expose de ce fait à un risque assez important. À taux minimum garanti constant, le prix du contrat est croissant en fonction de la maturité. Nous notons aussi que le fait de passer à un taux minimum garanti plus élevé charge le contrat d'une manière plus importante qu'un chargement dû à un taux nominal initial élevé. En effet, un contrat de maturité 30 ans avec un taux minimum garanti à 10% vaut 2.5 unités (pour un taux nominal initial à 3%) alors qu'un contrat de même maturité avec un taux nominal initial à 10% (et un taux minimum garanti de $\log(1 + 2\%)$) vaut 1.2 unités.

Sensibilité à la volatilité σ du taux : Nous présentons ci-après le prix $\pi_2(0, t)$ à l'instant initial pour une volatilité des taux entre 0.1% et 20%. L'effet de ce taux est constaté sur des contrats ayant une maturité entre 1 et 30 ans.

Prix Pi2 en fonction de la volatilité du taux pour différentes maturités

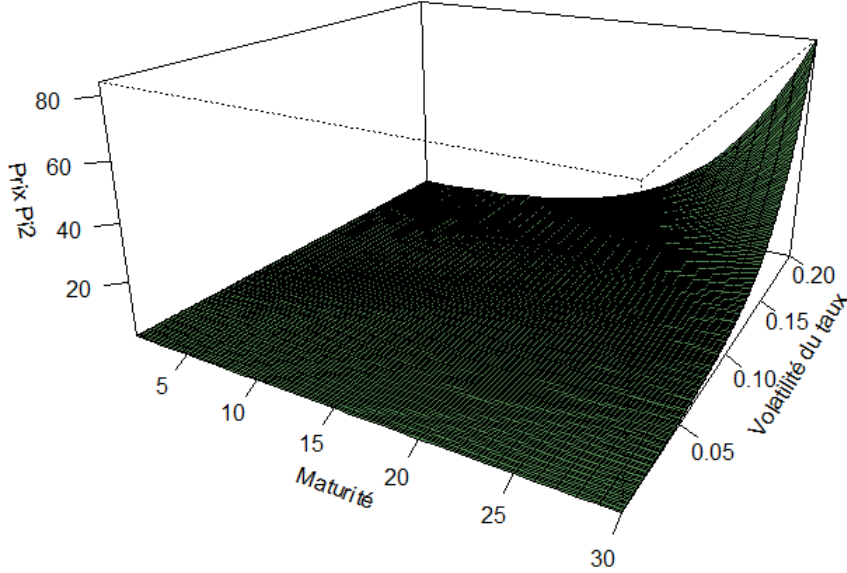


FIGURE 3.8 – Prix $\pi_2(0, t)$ en fonction de la volatilité du taux pour différentes maturités

Nous constatons à travers ce graphe que le prix $\pi_2(0, t)$ est relativement plus sensible au paramètre de volatilité par rapport aux autres paramètres étudiés précédemment. En effet, ce prix peut même atteindre 80 unités pour une volatilité à 20% du taux. Les maturités plus longues sont plus sensibles à ces variations de volatilité. Une grande importance doit donc être accordée à ce paramètre lors de la calibration afin de bien valoriser le contrat.

3.7 Formule fermée matricielle avec rendement gaussien de l'actif

Dans cette partie, nous considérons un rendement de l'actif quelconque, sous condition qu'il soit gaussien. Nous nous plaçons dans un cadre général de Black et Scholes [1973][FB73]. Soit alors sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ la valeur de marché de l'action S_t qui est donnée par la relation suivante :

$$S_t = S_0 + \int_0^t r_\nu S_\nu d\nu + \int_0^t \sigma_S(\nu) S_\nu dB_\nu^{\mathbb{Q}}$$

— r_ν est le taux sans risque à l'instant ν . Il est à noter que le taux est stochastique dans ce modèle.

— $\sigma_S(\nu)$ est la volatilité locale du processus $(S_t)_{t \geq 0}$ à l'instant ν .

Pour les conditions d'intégrabilité des processus $\left(\int_0^t r_\nu S_\nu d\nu\right)_{t \geq 0}$ et $\left(\int_0^t (\sigma_S(\nu) S_\nu)^2 d\nu\right)_{t \geq 0}$, nous renvoyons le lecteur à l'article de Duffie [1999][Duf99] pour plus de détails concernant ce point.

Un taux de rendement est ensuite défini à l'aide de ce processus. Pour le même schéma de discrétisation défini dans le paragraphe précédent, nous considérons :

$$\beta_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (r_\nu - \frac{1}{2} \sigma_S(\nu)^2) d\nu + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_S(\nu) dB_\nu^\mathbb{Q}$$

De telle manière à avoir :

$$S_{t_n} = S_{t_{n-1}} e^{\beta_n}$$

Le contrat considéré dans cette section, est un contrat d'épargne avec un taux de revalorisation égal au maximum entre le taux minimum garanti et le rendement de l'actif. La revalorisation est périodique comme dans les cas précédents 3.15. Le contrat a pour valeur l'expression suivante :

$$\pi_3(0, t) = \mathbb{E}^\mathbb{Q} \left[e^{(g_1 - \rho_1) \vee (\beta_1 - \rho_1)} e^{(g_2 - \rho_2) \vee (\beta_2 - \rho_2)} \dots e^{(g_{m_t} - \rho_{m_t}) \vee (\beta_{m_t} - \rho_{m_t})} \right] \quad (3.18)$$

Soit le vecteur colonne $\bar{c}_j$, $j \in \{1, 2, 3, \dots, 2m_t\}$ où cette fois $\bar{c}_j$ est de taille $2m_t \times 1$. Les premiers m_t éléments ont pour valeur 1, et les m_t autres éléments ont pour valeurs $c_j - 1$.

$$\text{Donc} \begin{cases} (\bar{c}_j)_i = 1 & \text{pour } i \in \{1, 2, 3, \dots, m_t\}, \\ (\bar{c}_j)_i = (c_j)_i - 1 & \text{pour } i \in \{m_t + 1, m_t + 2, \dots, 2m_t\} \end{cases}$$

1	$(\bar{c}_j)_1$	
1	$(\bar{c}_j)_2$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$(\bar{c}_j)_{m_t}$	
-1	$(\bar{c}_j)_{m_t+1}$	$\beta_1 > g_1$
0	$(\bar{c}_j)_{m_t+1}$	$\beta_2 \leq g_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-1	$(\bar{c}_j)_{2m_t-1}$	$\beta_{m_t-1} > g_{m_t-1}$
-1	$(\bar{c}_j)_{2m_t}$	$\beta_{m_t} > g_{m_t}$

Table 3.6 – Exemple du vecteur $\bar{c}_j$ des états de revalorisation

Le vecteur taux minimum garanti est défini comme précédemment $\bar{G} = {}^t (g_1, g_2, \dots, g_{m_t})$, où $\mathbb{I}_1$ est le vecteur colonne unité de taille $m_t \times 1$. $\bar{R} = {}^t (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{m_t}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_t})$ est le vecteur normal multidimensionnel des rendements de taille $2m_t \times 1$, et $\bar{\Lambda}$ le vecteur des rendements moyens relatifs à $\bar{R}$. Soit aussi la matrice de variance-covariance relative à $\bar{R}$ que nous notons $\bar{\Sigma}$. De même $\bar{\Sigma}_\beta$ est la matrice de variance-covariance relative aux taux de rendements des actions ${}^t(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_t})$.

Des vecteurs colonnes $\bar{\alpha}_j = \hat{c}_j \times \bar{\tilde{\alpha}}_j$ de taille $2m_t \times 1$ sont ensuite considérés où $(\bar{\tilde{\alpha}}_j)_i$ est défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} (\bar{\tilde{\alpha}}_j)_i = \infty & \text{pour } i \in \{1, 2, 3, \dots, m_t\}, \\ (\bar{\tilde{\alpha}}_j)_i = \frac{g_i - \bar{\Lambda}_i - (\bar{\Sigma} \bar{c}_j)_i}{\sqrt{(\Gamma_\beta)_i}} & \text{pour } i \in \{m_t + 1, m_t + 2, \dots, 2m_t\} \end{cases}$$

où $(\Gamma_\beta)_i$ est la variance du rendement des actions à l'instant t_i .

Remarque : Il est à noter, qu'à la différence de ce qui est fait dans l'article d'origine, nous avons considéré ici les matrices $\hat{c}_j$ relatives aux vecteurs $\bar{c}_j$. En effet, le produit $\bar{c}_j \bar{\alpha}_j$ de l'article ne peut pas être évalué. $\bar{c}_j$ est de taille $2m_t \times 1$ de même que $(\bar{\alpha}_j)$. Il est donc indispensable de passer à la transformation qui permet d'avoir une matrice $\hat{c}_j$ de taille $2m_t \times 2m_t$ afin de pouvoir évaluer le produit.

Finalement, $\bar{\alpha}_j^\beta$ est un vecteur colonne de taille $m_t \times 1$ où pour $i \in \{1, 2, 3, \dots, m_t\}$, $(\bar{\alpha}_j^\beta)_i = (\bar{\alpha}_j)_{i+m_t}$. Lindset [2001][Lin01] établit que :

$$\pi_3(0, t) = \sum_{j=1}^{2^{m_t}} e^{t \bar{c}_j \bar{G} - t \bar{c}_j \bar{\Lambda} + \frac{1}{2} t \bar{c}_j \bar{\Sigma} \bar{c}_j} \Phi \left(\bar{\alpha}_j^\beta, \hat{c}_j \bar{\Sigma}_\beta \hat{c}_j \right) \quad (3.19)$$

3.7.1 Calcul des corrélations

La principale difficulté à ce stade est de pouvoir calculer les termes de la matrice de variance-covariance $\bar{\Sigma}$. Nous allons donc établir ces formules pour un modèle de *Black & Scholes* [1973][FB73] avec un taux stochastique de *Vasicek* [1977][VAS77] et une volatilité des actions constante. La dynamique du prix des actions sous la probabilité risque neutre est la suivante :

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_S S_t dW_t^S \quad (3.20)$$

Nous omettons l'écriture avec $\mathbb{Q}$ probabilité risque neutre par souci de simplification.

Nous partons du constat qu'entre un *Vasicek* standard et un *Vasicek* généralisé (*Hull & White* [1990][JH90]) les deux paramètres qui entrent dans les calculs des corrélations sont les mêmes.

En effet, soient les deux dynamiques risque neutre d'un *Vasicek* standard et un généralisé :

$$\begin{cases} dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t^r & \text{Vasicek Standard} \\ dr_t = a(b_t - r_t)dt + \sigma dW_t^r & \text{Vasicek généralisé} \end{cases}$$

La seule différence entre les deux modèles est le paramètre b_t qui est défini à partir des taux *forward* dans le cas d'un *Vasicek* généralisé.

Le modèle de *Vasicek* généralisé est vu comme un cas particulier du cadre de Heath, Jarrow et Morton [1992][DH92] pour les taux *forward* en risque neutre :

$$f(t, s) = f(0, s) + \int_0^t \sigma_f(\nu, s) \int_\nu^s \sigma_f(\nu, u) d\nu du + \int_0^t \sigma_f(\nu, s) dW_\nu$$

Dans le cas d'un modèle de *Vasicek* généralisé

$$\sigma_f(t, T) = \sigma e^{-a(T-t)}$$

Nous allons établir des formules qui s'appliquent à la fois pour un *Vasicek* généralisé et en même temps pour un *Vasicek* standard.

Nous supposons par la suite que les deux processus $(r_t)_{t \geq 0}$ et $(S_t)_{t \geq 0}$ sont corrélés avec un coefficient de corrélation noté φ ($|\varphi| \leq 1$). Cela revient à écrire que pour deux browniens indépendants ε_1 et ε_2 :

$$\begin{cases} W^S &= \varepsilon_1 \\ W^r &= \varphi \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \varphi^2} \varepsilon_2 \end{cases}$$

En suivant ces définitions, la variance du rendement du taux est :

$$\sigma_{\rho_n}^2 = \int_0^{t_{n-1}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_f(v, u) du \right)^2 dv + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\int_v^{t_n} \sigma_f(v, u) du \right)^2 dv$$

En suivant 3.12 et 3.13 :

$$\sigma_{\rho_n}^2 = \frac{\sigma^2}{2a^3} \left[2a - 2 + 2e^{-a} + e^{-2an} (e^{2a} - 1)^2 \right], n = 1, \dots, m_t$$

$$\text{cov}(\rho_i, \rho_j) = \frac{\sigma^2}{2a^3} (e^a - 1)^2 \left(e^{-a(j-i+1)} - e^{-a(i+j)} \right)$$

Pour $i < j$.

La variance du rendement des actions est :

$$\sigma_{\beta_n}^2 = \sigma_{\rho_n}^2 + \frac{2\sigma\sigma_S\varphi}{a^2} (a - 1 + e^{-a}) + \sigma_S^2$$

Et la corrélation rendement taux, rendement actions est donnée par :

$$\text{cov}(\rho_i, \beta_j) = \begin{cases} \text{cov}(\rho_i, \rho_j) + \frac{\sigma\sigma_S\varphi}{a^2} (e^{-a(j-i-1)} - 2e^{-a(j-i)} + e^{-a(j-i+1)}) & \text{pour } j > i \\ \sigma_{\rho_n}^2 + \frac{2\sigma\sigma_S\varphi}{a^2} (a - 1 + e^{-a}) & \text{pour } i = j \\ \text{cov}(\rho_j, \rho_i) & \text{pour } j < i \end{cases}$$

La covariance du rendement des actions est :

$$\text{cov}(\beta_i, \beta_j) = \text{cov}(\rho_j, \rho_i) + \frac{\sigma\sigma_S\varphi}{a^2} (e^{-a(j-i-1)} - 2e^{-a(j-i)} + e^{-a(j-i+1)})$$

3.8 Applications et comparaisons

Reprenons les mêmes valeurs pour le taux que pour le calcul de $\pi_1(0, t)$ et $\pi_2(0, t)$ afin de pouvoir comparer. Nous considérons aussi deux paramètres supplémentaires σ_S volatilité des actions et φ la corrélation taux/actions :

Paramètre	Valeur
taux minimum garanti	$\log(1 + 2\%)$
Paramètre a	0.12856975
Paramètre b	0.03994681
Volatilité du taux	0.00011229
Volatilité des actions	20%
Corrélation taux/actions	-0.2

TABLE 3.7 – Paramètres de la simulation pour le calcul de $\pi_3(0, t)$

Le tableau ci-après illustre les résultats des valorisations pour des contrats de maturité allant de 2 à 10 ans :

Maturité	$\pi_1(0, t)$	$\pi_2(0, t)$	$\pi_3(0, t)$
1	1.014604	1.014604	1.080652
2	1.025127	1.025127	1.180592
3	1.031960	1.031960	1.27893
4	1.035486	1.035486	1.383176
5	1.036076	1.036076	1.493779
6	1.034079	1.036076	1.611218
7	1.029820	1.036076	1.736007
8	1.023599	1.036076	1.868693
9	1.015688	1.036076	2.009862
10	1.006333	1.036076	2.16014

TABLE 3.8 – Valeurs des prix $\pi_1(0, t)$, $\pi_2(0, t)$ et $\pi_3(0, t)$ pour différentes maturités

Il est clair d'après ce tableau que le prix du troisième contrat est supérieur aux deux autres comme nous l'avons prévu. En effet, les actions ont volatilité supérieure à celle du taux court, l'assureur demande donc une prime plus importante pour un besoin de couverture.

3.8.1 Étude de sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$:

Nous allons étudier dans cette section la sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$ aux différents paramètres introduits dans le paragraphe précédent. Toutefois, il s'avère que le calcul des sensibilités est assez chronophage dans ce cas. Ce point sera détaillé dans le chapitre 6. Nous allons donc réduire le nombre de séquences utilisées pour la simulation et considérer des maturités variant de 1 à 15 ans.

Sensibilité au taux nominal initial r_0 : La figure ci-après illustre la sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$ au paramètre taux nominal initial

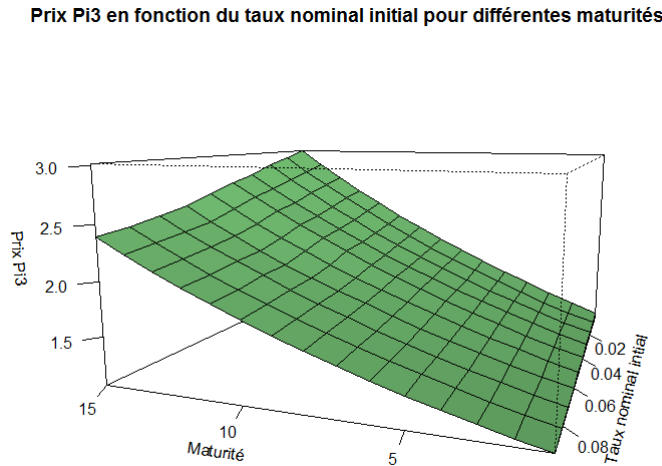


FIGURE 3.9 – Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction du taux nominal initial pour différentes maturités

Nous remarquons que le comportement du prix $\pi_3(0, t)$ est assez différent par rapport à celui de $\pi_2(0, t)$. Le niveau du taux nominal initial pour des maturités faibles n'a pas d'influence sur le prix du contrat. Cela peut être compris dans le sens où la corrélation négative entre les taux et les actions suppose que le rendement des actions va compenser le niveau faible des taux et vice versa. Cette corrélation négative fait en sorte que le prix du contrat pour une maturité de 15 ans n'est différent que de 0.6 unités entre un taux nominal initial nul et un taux nominal initial à 10%. Nous pouvons en conclure que le taux nominal initial n'a pas beaucoup d'influence sur le prix du contrat relativement au prix $\pi_2(0, t)$.

Sensibilité au taux minimum garanti g : La figure ci-après illustre la sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$ au paramètre taux minimum garanti

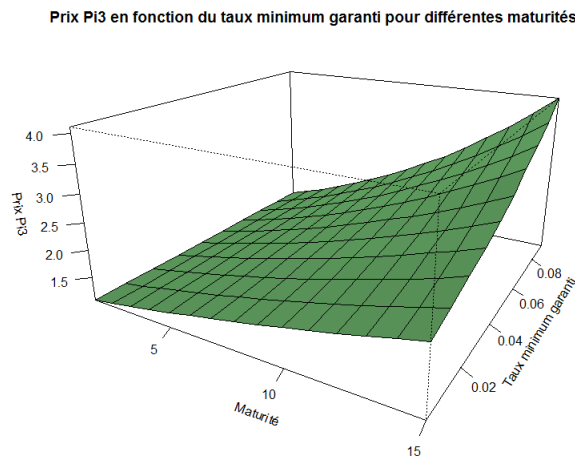


FIGURE 3.10 – Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction du taux minimum garanti pour différentes maturités

Nous remarquons que cette sensibilité a une forme similaire à celle observée dans le cas de la sensibilité du prix $\pi_2(0, t)$ au taux minimum garanti. Toutefois, nous notons que pour un taux minimum garanti assez faible, le prix $\pi_3(0, t)$ reste croissant en fonction de la maturité. Ce dernier point peut se voir dans le sens où le rendement des actions charge le contrat même en l'absence d'un taux minimum garanti.

En comparaison avec l'effet du taux nominal initial, nous pouvons dire que le prix $\pi_3(0, t)$ est plus sensible à une variation du taux minimum garanti qu'à une variation du taux nominal initial.

Remarque : Nous avons été obligés de passer par une approximation par méthode de Monte Carlo. En effet, la formule fermée est assez chronophage quand il s'agit de calculer les prix des contrats des maturités entre 10 et 15 ans pour une séquence de paramètres.

Sensibilité à la volatilité σ du taux : la sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$ au paramètre volatilité du taux σ :

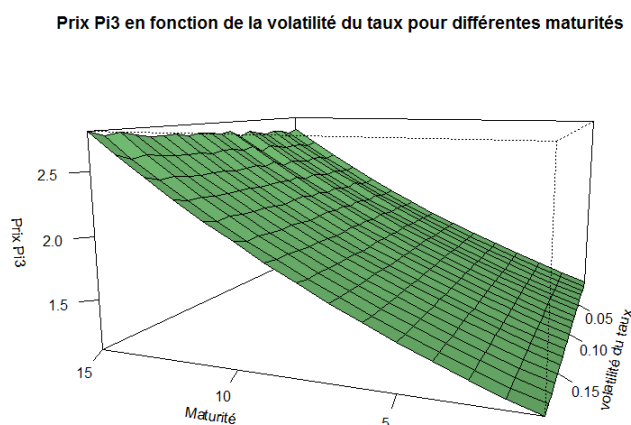


FIGURE 3.11 – Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction de la volatilité du taux pour différentes maturités

La figure montre que l'effet de la volatilité du taux n'est pas assez important relativement à celui constaté sur $\pi_2(0, t)$. Toutefois, nous notons que $\pi_3(0, t)$ dépend doublement de ce paramètre ; dans un premier temps à travers le processus d'actualisation (le taux) et dans un deuxième temps à travers la valeur des actions qui dépend du taux. À maturité constante, l'écart constaté en augmentant la volatilité du taux n'est pas très significatif (relativement à celui constaté pour $\pi_2(0, t)$).

Sensibilité à la volatilité σ_S des actions : La figure qui suit illustre la sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$ au paramètre volatilité des actions σ_S :

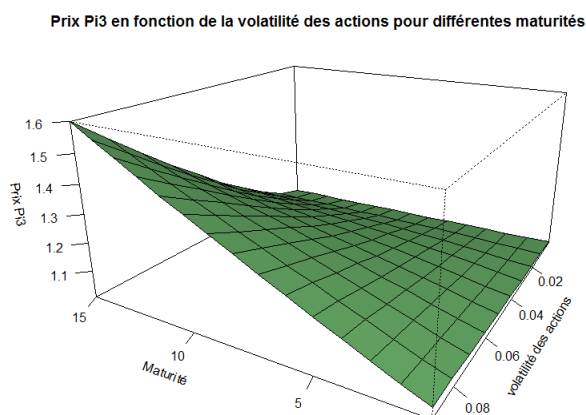


FIGURE 3.12 – Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction de la volatilité des actions pour différentes maturités

Nous remarquons dans ce cas qu'il s'agit d'une figure similaire à celle constatée pour la sensibilité du prix $\pi_2(0, t)$ à la volatilité du taux. En effet, le prix $\pi_3(0, t)$ est croissant en fonction des deux paramètres maturité et volatilité des actions. Le point important ici est qu'à maturité constante, le prix est sensible à la variation de la volatilité des actions. De même, à volatilité constante, le prix $\pi_3(0, t)$ est sensible au paramètre maturité.

Sensibilité à la corrélation φ taux/actions : La figure qui suit illustre la sensibilité du prix $\pi_3(0, t)$ au paramètre corrélation taux/actions :

Prix Pi3 en fonction de la corrélation taux/actions pour différentes maturités

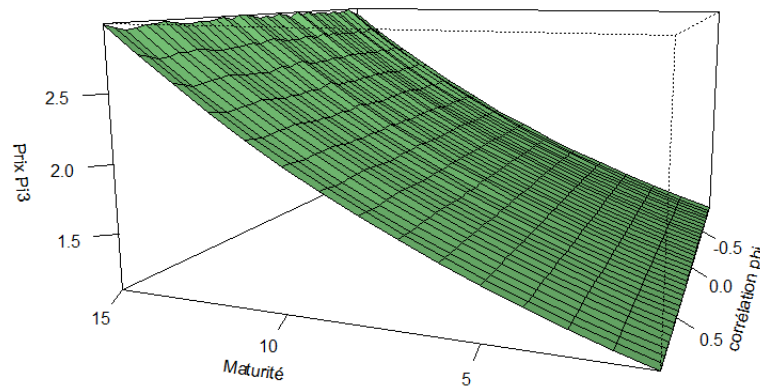


FIGURE 3.13 – Prix $\pi_3(0, t)$ en fonction de la corrélation taux/Actions pour différentes maturités

Nous notons à travers ce graphe que la corrélation n'a pas beaucoup d'impact sur le prix $\pi_3(0, t)$. À maturité constante, le prix $\pi_3(0, t)$ est quasiment identique pour des corrélations variant de -1 à 1 .

Chapitre 4

Mesures d'erreurs associées au calcul du *Best Estimate*

Motivation : Cette étape est motivée par trois raisons majeures. La première est que le modèle de Bonnin et al. [2014][BF14b] estime ces facteurs par une méthode de *Monte Carlo* et nous souhaitons donc avoir une idée sur l'erreur commise en choisissant cette démarche. La deuxième raison est qu'en implémentant cette deuxième classe de méthodes de *pricing*, nous pouvons confirmer l'exactitude des résultats obtenus par formules fermées. La troisième raison est d'ordre informatique et concerne le temps de calcul des facteurs Ω qui s'avère assez chronophage en passant par une formule fermée.

De nombreuses variables financières sont généralement modélisées par des processus continus. L'implémentation informatique de tels modèles passe par trois points essentiels : la discrétisation des trajectoires, l'estimation des paramètres et la génération des nombres aléatoires.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons en particulier à l'impact des méthodes de discrétisation et de calcul d'intégrale car ils sont à l'origine de biais non négligeables.

La formule 2.16 fait intervenir deux quantités qui peuvent être sources d'erreur. En effet, il s'agit des facteurs déflateurs $\Omega(0, t)$ ainsi que les prix des zéro-coupon nominaux $P_n(0, t)$.

Nous introduirons dans un premier temps les principales méthodes de discrétisation du taux. Ensuite, nous exposerons des méthodes d'approximation de l'intégrale pour le calcul d'un rendement sur une période donnée.

Nous verrons que l'erreur de l'approximation peut être décomposée en deux erreurs. La première est dite systématique ; elle est relative au choix de la méthode d'échantillonnage et à l'approximation du calcul de l'intégrale ; l'autre est purement statistique et dépend du nombre de simulations.

Dans certains cas, il est possible d'annuler l'erreur statistique. Nous exposerons deux formules fermées de l'erreur systématiques pour l'approximation du prix zéro-coupon.

Dans la plupart des cas pratiques, l'erreur statistique ne peut pas être annulée. Il est donc légitime de penser à une méthode de choix d'un compromis entre nombre de discrétisations et nombre de simulations. Dans ce cadre, nous présenterons les résultats de Duffie et Glynn [1995][DD95] qui donnent un moyen pour le choix du compromis entre le nombre de discrétisations et le nombre de simulations.

4.1 Discrétisation du modèle de taux

Nous reprenons dans cette partie les notations de Planchet et Thérond [2005][TP05]. Le cadre de ce paragraphe concerne les variables aléatoires modélisées par des processus de diffusion. Lorsque l'équation différentielle stochastique (EDS) relative à la diffusion du processus admet une discrétisation exacte, le cas du modèle de Vasicek [1977][VAS77] utilisé ici, la discrétisation s'impose. Lorsqu'elle n'est pas disponible, une approximation selon le schéma d'Euler ou de Milstein sont utilisées. Il convient de préciser que ces deux discrétisations correspondent à des développements d'Itô-Taylor de l'ordre 1 et 2 de l'EDS. Les méthodes

d'approximation sont classifiées selon leurs différentes propriétés. Deux critères sont utilisés en général pour estimer la qualité de la discrétisation : le critère de la convergence forte et celui de la convergence faible.

Prenons le cas d'un processus défini par l'*EDS* suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la probabilité considérée pour la diffusion.

Afin de discrétiser ce processus nous passons à la forme intégrale suivante :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s \quad (4.1)$$

Si l'équation 4.1 n'admet pas de discrétisation exacte, le développement d'*Itô-Taylor* permet d'avoir une version discrétisée approximative de l'*EDS*. La discrétisation dépend de l'ordre de développement *Itô-Taylor* de l'*EDS*. Nous définissons en suivant Kloeden et Platen [1992][KP92] les deux critères de convergence des discrétisations comme suit :

Définition 1 : Critère de convergence forte Une version discrétisée $\tilde{X}_\delta$ d'un processus en temps continu X , avec δ le pas de discrétisation choisi, est dite convergente fortement à l'ordre γ vers le processus X pour un horizon de temps donné T si :

$$\mathbb{E} \left[|\tilde{X}_\delta(T) - X(T)| \right] \leq C\delta^\gamma, \quad \forall \delta < \delta_0 \quad (4.2)$$

où $\delta_0 > 0$ et C sont deux constantes ne dépendant pas du paramètre δ .

En d'autres termes, ce critère reflète la vitesse de convergence de $\tilde{X}_\delta(T)$ vers $X(T)$ quand le pas de discrétisation tend vers 0. La fonction choisie pour caractériser cette vitesse est la fonction exponentielle δ^γ ayant comme paramètre la constante γ dite "ordre de convergence" de la discrétisation.

Définition 2 : Critère de convergence faible de même que pour la convergence forte, Une version discrétisée $\tilde{X}_\delta$ converge faiblement vers le processus X à l'ordre β pour un horizon de temps T si pour chaque fonction g de classe $\mathcal{C}^{2(\beta+1)}$ à croissance polynomiale nous avons :

$$|\mathbb{E} \left[g(\tilde{X}_\delta(T)) \right] - \mathbb{E} \left[g(X(T)) \right]| \leq C\delta^\beta, \quad \forall \delta < \delta_0$$

où $\delta_0 > 0$ et C sont deux constantes ne dépendant pas du paramètre δ .

4.1.1 Discrétisation exacte

La simulation d'un processus continu peut être faite sans erreur de discrétisation à partir du moment où le processus admet une discrétisation exacte. La définition d'une discrétisation exacte est la suivante :

Définition : Un processus $(\tilde{X}_{k\delta})_{k \in [1; \frac{T}{\delta}]}$ est une discrétisation exacte du processus X si $\forall \delta > 0, \forall k \in [1; \frac{T}{\delta}]$ $\tilde{X}_{k\delta} \stackrel{Loi}{\sim} X_{k\delta}$.

Dans le cas des processus régis par des *EDS*, ils admettent une discrétisation exacte à partir du moment où l'*EDS* admet une solution explicite. C'est le cas des deux modèles de Black et Scholes [1973][FB73] et Vasicek [1977][VAS77] utilisés dans le cadre du mémoire.

Dans le cadre du modèle de taux de Vasicek [1977][VAS77], l'*EDS* admet une solution sous la probabilité risque neutre :

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dW_s^{\mathbb{Q}}$$

En utilisant les propriétés de l'intégrale d'une fonction déterministe par rapport à un mouvement brownien nous avons la discrétisation exacte suivante :

$$r_{t+\delta} = r_t e^{-a\delta} + b(1 - e^{-a\delta}) + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a\delta}}{2a}} z \quad (4.3)$$

où z est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et δ le pas de temps considéré pour la discrétisation.

4.1.2 Discrétisation d'*Euler*

Définition : Le procédé de discrétisation d'*Euler* consiste en l'approximation du processus continu X par le processus discret $\tilde{X}$ défini, avec les mêmes notations que l'équation 4.1, par :

$$\tilde{X}_{t+\delta} = \tilde{X}_t + \mu(\tilde{X}_t, t)\delta + \sigma(\tilde{X}_t, t)\sqrt{\delta}z \quad (4.4)$$

où ε est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et δ le pas de temps considéré pour la discrétisation.

Kloeden et Platen [1992][KP92] montrent que sous certaines conditions de régularité, le schéma d'*Euler* présente un ordre de convergence forte de 0,5.

En appliquant ce schéma au modèle de *Vasicek*, nous avons l'équation :

$$r_{t+\delta} = r_t + a(b - r_t)\delta + \sigma\sqrt{\delta}z \quad (4.5)$$

4.2 Méthode de calcul de l'intégrale du taux court

Comme nous l'avons vu lors du calcul du *Best Estimate*, nous sommes amenés à calculer le prix d'un produit financier dépendant de l'intégrale du taux court nominal. À défaut de l'existence d'une formule fermée qui explicite la solution finale, le recours aux méthodes de simulations de *Monte Carlo* est dans ce cas indispensable. Une raison supplémentaire de l'utilisation de ces méthodes est que le calcul par formule fermée est assez chronophage ce qui le rend inadapté pour les projections ¹

Dès lors, il s'avère que la capacité à estimer l'intégrale du taux court dépend fortement de la méthode utilisée. Il est nous est donc indispensable de rappeler la méthode utilisée, tout en insistant sur l'erreur commise lors de l'estimation.

Le rappel qui suit est fortement inspiré du chapitre 4 de Press et al.[1992] [KP92].

4.2.1 Contexte

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, le calcul de l'intégrale a souvent été une problématique majeure que les scientifiques ont essayé de résoudre. Nous parlons dans ce cadre de formules de quadrature qui donnent une expression linéaire dont l'évaluation fournit une valeur approchée de l'intégrale sur un morceau typique. La formule de quadrature fait intervenir des valeurs pondérées de la fonction (et parfois également celles de sa dérivée) en certains nœuds : les coefficients de pondération et les nœuds dépendent de la méthode utilisée.

Avec l'invention du calcul automatique, la quadrature est devenue un problème numérique pur. Il s'agira donc de trouver des approches numériques afin d'approximer la quantité :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Ce rappel concerne spécialement les deux méthodes de quadrature les plus utilisées, à savoir la méthode des trapèzes et celle de *Simpson*.

Il existe plusieurs autres méthodes d'intégration. la littérature est assez abondante dans ce cadre. Néanmoins, la lourdeur des calculs pour avoir une formule fermée pour l'estimation de l'erreur nous impose de choisir la méthode des trapèzes. Nous verrons par la suite que la formule fermée de l'erreur est assez fastidieuse à retrouver dans le cas de cette méthode.

1. Nous détaillons les problématiques relatives aux temps de calcul dans le paragraphe 6

4.2.2 Méthodes d'intégration des trapèzes et de *Simpson*

Notations : Nous considérons une suite d'abscisses notées $x_0, x_1, \dots, x_N, x_N+1$ espacées par une constante h appelée pas de la discrétisation :

$$x_i = x_0 + ih \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, N+1$$

Une fonction f dont les valeurs sont connues aux abscisses x_i $0 \leq i \leq N+1$ avec

$$f(x_i) = f_i$$

Formule des trapèzes : Pour f fonction deux fois continument différentiable sur le segment $[x_1, x_2]$, la formule des trapèzes pour le calcul de l'intégrale est la suivante :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \mathcal{O}(h^3 f^{(2)}) \quad (4.6)$$

où $f^{(2)}$ est la dérivée seconde de la fonction f .

Le terme d'erreur $\mathcal{O}()$ signifie que la vraie valeur de l'intégrale diffère de l'approximation par un coefficient multiplié par h^3 que multiplie la valeur de la dérivée seconde de f en un point de l'intervalle $[x_1, x_2]$. Le coefficient est égal à $\frac{1}{12}$. Toutefois, le point d'évaluation de la dérivée seconde est inconnu.

Il est à noter que la formule 4.6 donne une approximation exacte pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 1. Par exemple pour $f(x) = x$ nous avons

$$\int_{x_1}^{x_2} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{2} (x_1 + x_2)$$

Extension de la formule des trapèzes : Si nous utilisons la formule 4.6 $N-1$ fois tout en sommant les termes obtenus sur les intervalles $[x_1; x_2], [x_2; x_3] \dots [x_{N-1}; x_N]$, nous obtenons une formule "composite" pour estimer l'intégrale entre x_1 et x_N :

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right) + \mathcal{O} \left(\frac{(x_N - x_1)^3 f^{(2)}}{N^2} \right) \quad (4.7)$$

Ici, l'erreur d'estimation a été écrite en fonction de l'intervalle considéré et le nombre d'échantillons à la place du pas de discrétisation. Il s'agit d'une présentation plus claire dans le sens où pour un intervalle donné, l'erreur d'estimation diminuera en fonction de la valeur du terme $\frac{1}{N^2}$.

Formule de Simpson : En prenant en compte trois points d'évaluation de la fonction f , Simpson étend la formule d'approximation de l'intégrale pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2. Il est même possible d'avoir le résultat exact pour des fonctions polynomiales de degré 3 en enlevant un coefficient de symétrie à la formule. La formule est la suivante :

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = h \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{1}{3} f_3 \right) + \mathcal{O}(h^5 f^{(4)}) \quad (4.8)$$

f doit être dans ce cas une fonction quatre fois continument différentiable sur le segment $[x_1, x_3]$ et $f^{(4)}$ est la dérivée d'ordre 4 de la fonction f . à noter aussi que la formule donne une approximation de l'intégrale sur un intervalle de longueur $2h$. Donc le coefficient multiplicatif de h sera à son tour multiplié par deux.

Extension de la formule de Simpson : De même que pour l'extension de la formule des trapèzes, si nous appliquons l'approximation 4.8 sur la suite des intervalles $[x_1; x_2], [x_2; x_3] \dots [x_{N-1}; x_N]$, nous avons la formule suivante sur l'intervalle $[x_1; x_N]$:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x)dx = h \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{2}{3} f_3 + \frac{4}{3} f_4 \dots + \frac{2}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{N^4} \right) \quad (4.9)$$

à noter que la suite des coefficients $\frac{4}{3}, \frac{2}{3}$ continue à l'intérieur de l'approximation.

4.3 Biais de la discrétisation et du choix de la formule intégrale

Le *Best Estimate* des cotisations fait intervenir les prix zéro-coupon nominaux. Dans cette section, nous nous intéresserons à l'estimation de l'erreur de l'approximation des prix zéro-coupon nominaux. Nous décrivons comment les méthodes de Monte Carlo peuvent être utilisées dans ce cas et dans quelle mesure le choix des paramètres de la simulation impacte la précision des estimations. Cette partie s'inspire du chapitre 13 Monte Carlo Methods for the Valuation of Interest Rate Securities de Narasimhan et Tuckman [2000][NJ00].

4.3.1 Contexte et notations :

Nous considérons par la suite le prix à l'instant t d'un zéro-coupon nominal de maturité $T + t$ défini comme suit :

$$B(t, t + T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_t^{t+T} r_s ds \right) | \mathcal{F}_t \right]$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre utilisée pour la valorisation, r_s le taux court à l'instant s et $\mathcal{F}_t$ l'ensemble des informations disponibles à l'instant t .

Intéressons-nous à l'évaluation de ce prix dans un intervalle $[0, T]$. Nous divisons cet intervalle en N intervalles disjoints, chacun de longueur h . En utilisant la discrétisation d'*Euler* 4.5 nous avons :

$$\tilde{r}_{k+1} = \tilde{r}_k + a(b - \tilde{r}_k)h + \sigma\sqrt{h}z$$

Où

$$k = 0, 1, \dots, (N-1) \quad t_0 = 0, \dots, t_k = T \quad \tilde{r}_0 = r(0)$$

La formule composite des trapèzes 4.7 appliquée à l'expression $\exp(-\int_0^T r_s ds)$ nous donne l'estimation suivante :

$$\exp \left(-h \left(\frac{1}{2} \tilde{r}_0 + \tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 + \dots + \tilde{r}_{N-1} + \frac{1}{2} \tilde{r}_N \right) \right) = \exp \left[- \left(\frac{\tilde{r}_0 + \tilde{r}_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{r}_j \right) h \right] \quad (4.10)$$

Comme dans la formule 4.7, la méthode des trapèzes converge en $\mathcal{O}(h^2) = \mathcal{O}(\frac{1}{N^2})$. L'erreur est donc divisée par quatre en doublant le nombre de pas de discrétisations par exemple.

Supposons maintenant que nous simulons M réalisations de la fonction 4.10 afin de pouvoir utiliser la loi des grands nombre pour approximer l'espérance $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$. L'estimation du prix zéro-coupon sur l'intervalle $[0, T]$ sera donc égale à

$$\hat{B}_{N,M}(0, T) = \frac{\sum_{n=1}^M f(h, n)}{M}$$

où $f(h, n)$ est une réalisation de la fonction $\exp \left[- \left(\frac{\tilde{r}_0 + \tilde{r}_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{r}_j \right) h \right]$.

Nous appelons par la suite ε le biais de l'approximation, qui est par définition la différence entre le prix réel et $\hat{B}_{N,M}(0, T)$:

$$\varepsilon = \hat{B}_{N,M}(0, T) - B(0, T)$$

L'idée ensuite est de voir la contribution de chacun des paramètres N et M dans cette erreur. Nous décomposons alors ε en deux valeurs comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \hat{B}_{N,M}(0, T) - B(0, T) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right] - B(0, T) + \hat{B}_{N,M}(0, T) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right] \\ &= \varepsilon_{sys} + \hat{\varepsilon}_{stat} \end{aligned}$$

Avec

$$\varepsilon_{sys} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right] - B(0, T) \quad (4.11)$$

et

$$\hat{\varepsilon}_{stat} = \hat{B}_{N,M}(0, T) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right]$$

L'erreur ε_{sys} est dite systématique car elle ne dépend pas du nombre d'échantillons choisi M , elle est commise à partir du moment où le choix de la méthode d'échantillonnage est fait. Ce n'est pas une variable aléatoire. C'est une erreur qui caractérise le schéma de discrétisation, la méthode numérique pour approximer l'intégrale et le nombre de pas de discrétisations. Comme le schéma d'*Euler* a un ordre de convergence forte de 1 et la formule des trapèzes a un ordre de 2, nous en concluons que la valeur de l'erreur systématique totale a un ordre de convergence de 1 :

$$|\varepsilon_{sys}| \leq C_1 h \quad (4.12)$$

où C_1 est une constante positive et h le pas de la discrétisation. Cela traduit que l'erreur systématique est linéaire en fonction de h . En effet, en doublant le pas de discrétisation, l'erreur sera divisée par deux.

Pour un N fixé, $\hat{\varepsilon}_{stat}$ est de nature purement statistique car elle ne dépend que du nombre de simulations. typiquement pour un nombre élevé de simulations M , la loi des grands nombre nous assure que la variance de $\hat{\varepsilon}_{stat}$ tend vers zéro avec un ordre de convergence en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$. Pour pouvoir diviser la variance de l'erreur statistique par deux, il faut multiplier le nombre de simulations par quatre.

Dans le cas où une formule fermée peut être obtenue pour $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right]$, l'erreur statistique est annulée. Seule reste l'erreur systématique ε_{sys} .

Nous allons donc montrer deux formules fermées pour le calcul de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right]$. La première concernera une discrétisation par la méthode d'*Euler* et la deuxième est une discrétisation exacte. Dans les deux cas, la méthode d'approximation de l'intégrale choisie et la méthode des trapèzes. Ce choix est justifié par la lourdeur des calculs dans le cas d'une approximation d'ordre plus élevé, à l'exemple de l'approximation de *Simpson* 4.9.

Afin de pouvoir trouver une formule fermée pour l'erreur ε_{sys} , nous allons montrer une formule explicite de $\hat{r}_k$ définie à l'aide des valeurs précédentes du processus z pour $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$:

Formule explicite de $\hat{r}_k$: Nous reprenons les notations de la discrétisation d'*Euler* 4.5 tout en indiquant le processus z :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{k+1} &= \tilde{r}_k + a(b - \tilde{r}_k)h + \sigma\sqrt{h}z_{k+1} \\ &= \hat{r}_k + abh - \hat{r}_k ah + \sigma\sqrt{h}z_{k+1} \\ &= \hat{r}_k(1 - ah) + abh + \sigma\sqrt{h}z_{k+1} \end{aligned}$$

Nous posons $\theta = (1 - ah)$, ce qui donne en remplaçant dans la formule :

$$\tilde{r}_{k+1} = \hat{r}_k \theta + abh + \sigma\sqrt{h}z_{k+1}$$

Nous allons utiliser cette dernière équation pour les termes allant de 1 à N . Pour $k = 0$:

$$\tilde{r}_1 = \hat{r}_0 \theta + abh + \sigma\sqrt{h}z_1$$

L'idée ensuite est d'écrire le différentiel de taux entre deux instants successifs comme suit :

$$\tilde{r}_{k+1} = \hat{r}_k + \Delta \hat{r}_k$$

Donc pour $k = 2$:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_2 &= \hat{r}_1 + \Delta \hat{r}_1 \\
&= \hat{r}_1 \theta + abh + \sigma \sqrt{h} z_2 \\
&= \left[\hat{r}_0 \theta + abh + \sigma \sqrt{h} z_1 \right] \theta + abh + \sigma \sqrt{h} z_2 \\
&= \hat{r}_0 \theta^2 + abh + abh \theta + \sigma \sqrt{h} z_2 + \sigma \sqrt{h} z_1 \theta
\end{aligned}$$

Afin de clarifier la formule finale, réécrivons le cas $k = 3$:

$$\begin{aligned}
\hat{r}_3 &= \hat{r}_2 + \Delta \hat{r}_2 \\
&= \hat{r}_2 \theta + abh + \sigma \sqrt{h} z_3 \\
&= \left[\hat{r}_0 \theta^2 + abh + abh \theta + \sigma \sqrt{h} z_2 + \sigma \sqrt{h} z_1 \theta \right] \theta + abh + \sigma \sqrt{h} z_3 \\
&= \hat{r}_0 \theta^3 + abh + abh \theta + abh \theta^2 + \sigma \sqrt{h} z_3 + \sigma \sqrt{h} z_2 \theta + \sigma \sqrt{h} z_1 \theta^2
\end{aligned}$$

à ce stade, nous pouvons généraliser la formule par récurrence pour un $k = 1, \dots, N$:

$$\hat{r}_k = \hat{r}_0 \theta^k + abh \sum_{i=1}^{k-1} \theta^i + \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{k-1} \theta^i z_{k-i} \quad (4.13)$$

Les variables aléatoires z_i pour $i = 0, \dots, N - 1$ étant normales et indépendantes, alors $\hat{r}_k$ suit une loi normale. Calculons son espérance et sa variance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{r}_k] &= \hat{r}_0 \theta^k + abh \sum_{i=1}^{k-1} \theta^i \\
&= \hat{r}_0 \theta^k + abh \frac{1 - \theta^k}{1 - \theta} \\
&= \hat{r}_0 \theta^k + b(1 - \theta^k) \\
&= b + (r_0 - b) \theta^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
var^{\mathbb{Q}}[\hat{r}_k] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{r}_k^2] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{r}_k]^2 \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left\{ \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{k-1} \theta^i z_{k-i} \right\}^2 \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sigma \sqrt{h} \sum_{m=1}^{k-1} \theta^m z_{k-m} \times \sigma \sqrt{h} \sum_{n=1}^{k-1} \theta^n z_{k-n} \right] \\
&= \sigma^2 h \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\sum_{m=1}^{k-1} \theta^m z_{k-m} \times \sum_{n=1}^{k-1} \theta^n z_{k-n} \right] \\
&= \sigma^2 h \sum_{i=1}^{k-1} \theta^{2i} \\
&= \sigma^2 h \frac{1 - \theta^{2k}}{1 - \theta^2}
\end{aligned}$$

Formule pour le facteur d'actualisation En reprenant la formule explicite de $\hat{r}_k$ 4.13 que nous remplaçons dans la méthode des trapèzes pour l'approximation de l'intégrale $\int_0^T r_s ds$, il en découle que :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right) &= \left(\frac{\tilde{r}_0 + \tilde{r}_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{r}_j \right) h \\
&= \frac{1}{2} \tilde{r}_0 h + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{r}_j h + \frac{1}{2} \tilde{r}_N h \\
&= \frac{1}{2} \tilde{r}_0 h + \sum_{j=1}^{N-1} \left[\hat{r}_0 \theta^j + abh \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i + \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} \right] h + \frac{1}{2} \tilde{r}_N h \\
&= \frac{1}{2} \tilde{r}_0 h + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{r}_0 \theta^j h + \sum_{j=1}^{N-1} abh \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i h + \sum_{j=1}^{N-1} \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} h + \frac{1}{2} \tilde{r}_N h \\
&= \frac{1}{2} \tilde{r}_0 h + \frac{\hat{r}_0 h}{a} (1 - \theta^{N-1}) + b(k-1)h - \frac{b\theta}{a} (1 - \theta^{N-1}) + \sigma h^{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} + \\
&\quad \frac{\tilde{r}_0 h}{2} \theta^N + \frac{1}{2} bh (1 - \theta^N) + \frac{1}{2} \sigma h^{\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{N-1} \theta^i z_{N-i}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

En introduisant un facteur $\phi = 1 - \frac{ah}{2}$, la formule de dérivation décrite dans l'annexe 1 permet d'avoir le résultat final :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right) &= \tilde{r}_0 h \left[\frac{1}{2} + \frac{\theta(1 - \theta^{N-1})}{ah} + \frac{1}{2} \theta^N \right] + bh \left[(N-1) - \frac{\theta(1 - \theta^{N-1})}{ah} + \frac{1}{2} (1 - \theta^N) \right] \\
&\quad + \sigma h^{\frac{3}{2}} \frac{1}{ah} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \phi \theta^i) \theta^i z_{N-i}
\end{aligned}$$

à noter finalement que $\left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right)$ suit une loi normale de moyenne $\mu(\hat{I}(r))$ et de variance $\sigma^2(\hat{I}(r))$ sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, avec

$$\mu(\hat{I}(r)) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right) \right] = \tilde{r}_0 h \left[\frac{1}{2} + \frac{\theta(1 - \theta^{N-1})}{ah} + \frac{1}{2} \theta^N \right] \tag{4.15}$$

$$+ bh \left[(N-1) - \frac{\theta(1 - \theta^{N-1})}{ah} + \frac{1}{2} (1 - \theta^N) \right] \tag{4.16}$$

Et

$$\sigma^2(\hat{I}(r)) = VAR^{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right) \right] = \sigma^2 h^3 \frac{1}{(ah)^2} \left[N - 2\phi \frac{1 - \theta^N}{ah} + \phi^2 \frac{1 - \theta^{2N}}{1 - \theta^2} \right] \tag{4.17}$$

4.3.2 Formule fermée dans le cas d'une discrétisation d'Euler et d'une méthode échantillonnage des trapèzes

Nous avons pu dans les formules 4.15 et 4.17 avoir une formule fermée pour l'approximation de l'intégrale $\int_0^T r_s ds$. Il nous est donc possible à ce stade de remplacer les formules obtenues dans l'expression du prix zéro-coupon afin d'avoir un résultat final. Le but ici est de pouvoir exprimer de façon explicite la valeur de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\hat{B}_{N,M}(0, T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^T \hat{r}_s ds \right) \right]$.

Étant donné que $\left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right) \sim \mathcal{N} \left(\mu(\hat{I}(r)), \sigma^2(\hat{I}(r)) \right)$, alors $\exp \left(\int_0^T \hat{r}_s ds \right)$ suit une loi log-normale de moyenne $\exp \left(-\mu(\hat{I}(r)) + \frac{\sigma^2(\hat{I}(r))}{2} \right)$.

Nous avons donc

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right] = \exp \left(-\mu(\hat{I}(r)) + \frac{\sigma^2(\hat{I}(r))}{2} \right)$$

où $\mu(\hat{I}(r))$ et $\sigma^2(\hat{I}(r))$ sont définis dans 4.15 et 4.17 .

Le modèle de Vasicek [1977][VAS77] permet d'avoir une formule fermée pour le prix zéro-coupon de maturité T :

$$B(0, T) = \exp \left(-T \left[b - \frac{\sigma^2}{2a} - \frac{1}{aT} \left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2a} - r_0 \right) (1 - e^{-aT}) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-aT})^2 \right) \right] \right) \quad (4.18)$$

Il est donc possible de conclure une formule finale pour l'erreur systématique dans le cas d'une discrétisation d'*Euler* avec une méthode des trapèzes pour l'approximation de l'intégrale :

$$\varepsilon_{sys} = \exp \left(\mu(\hat{I}(r)) + \frac{\sigma^2(\hat{I}(r))}{2} \right) - B(0, T)$$

4.3.3 Formule fermée dans le cas d'une discrétisation exacte et d'une méthode d'échantillonnage des trapèzes

Nous avons vu dans le paragraphe précédent l'impact du choix d'une méthode de discrétisation d'*Euler* sur l'erreur d'approximation d'un prix zéro-coupon. Pour rappel les deux sources d'erreurs ont été décomposées en une erreur systématique ε_{sys} et une erreur statistique $\hat{\varepsilon}_{stat}$. L'erreur systématique caractérise le schéma de discrétisation, la méthode numérique pour approximer l'intégrale et le nombre de pas de discrétisations. Toutefois, le modèle de Vasicek [1977][VAS77] présente la particularité d'avoir une formule de discrétisation exacte. Cette dernière nous permet d'annuler les erreurs dues à l'échantillonnage. Il reste donc l'erreur de l'approximation de l'intégrale.

Nous donnons dans ce paragraphe la valeur de ε_{sys} Dans le cas d'une approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes.

L'expression de $\hat{r}_k$ en fonction du taux initial dans ce cas est :

$$\hat{r}_k = \hat{r}_0 e^{-ahk} + b(1 - e^{-ah}) \sum_{i=0}^{k-1} (e^{-ah})^i + \sigma_1 \sum_{i=0}^{k-1} (e^{-ah})^i z_{k-i}$$

où $\sigma_1^2 = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ah}}{2a}$

Dans ce cadre, l'approximation de l'intégrale est la suivante :

$$\begin{aligned} \exp \left(- \int_0^{\hat{T}} r_s ds \right) &= \exp \left(- \left(\frac{\tilde{r}_0 + \tilde{r}_N}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} \tilde{r}_j \right) h \right) \\ &= \exp(\phi_1(\tilde{r}, h, a, N) + \phi_2(b, h, a, N) + \phi_3(\sigma_1, h, a, N)) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_1(\tilde{r}_0, h, a, N) &= -\tilde{r}_0 h \left\{ \frac{1}{2} + e^{-ah} \frac{1 - e^{-ah(N-1)}}{1 - e^{-ah}} + \frac{1}{2} e^{-ahN} \right\} \\ \phi_2(b, h, a, N) &= -bh \left\{ N - 1 + \frac{1}{2} (1 - e^{-ahN}) - e^{-ah} \frac{1 - e^{-ah(N-1)}}{1 - e^{-ah}} \right\} \\ \phi_3(\sigma_1, h, a, N) &= \frac{\sigma_1^2 h^2}{2[1 - e^{-ah}]^2} \left\{ N - (1 + e^{-ah}) \frac{1 - e^{-ahN}}{1 - e^{-ah}} + \frac{1}{4} (1 + e^{-ah})^2 \frac{1 - e^{-2ahN}}{1 - e^{-2ah}} \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\varepsilon_{sys} = \exp(\phi_1(\tilde{r}, h, a, N) + \phi_2(b, h, a, N) + \phi_3(\sigma_1, h, a, N)) - B(0, T)$$

4.3.4 Application et comparaison :

Afin de comparer l'erreur systématique pour les deux méthodes exposées précédemment, prenons les paramètres suivants pour le modèle :

Paramètre	Valeur
Maturité du zéro-coupon	7
Paramètre a du modèle de <i>Vasicek</i>	0.12856975
Paramètre b du modèle de <i>Vasicek</i>	0.03994681
Volatilité dans le modèle de <i>Vasicek</i>	0.00011229
Taux nominal initial	0.003

TABLE 4.1 – Paramètres de simulation pour la comparaison des erreurs

Le schéma ci-après illustre l'évolution des deux erreurs en fonction du nombre de discrétisations :

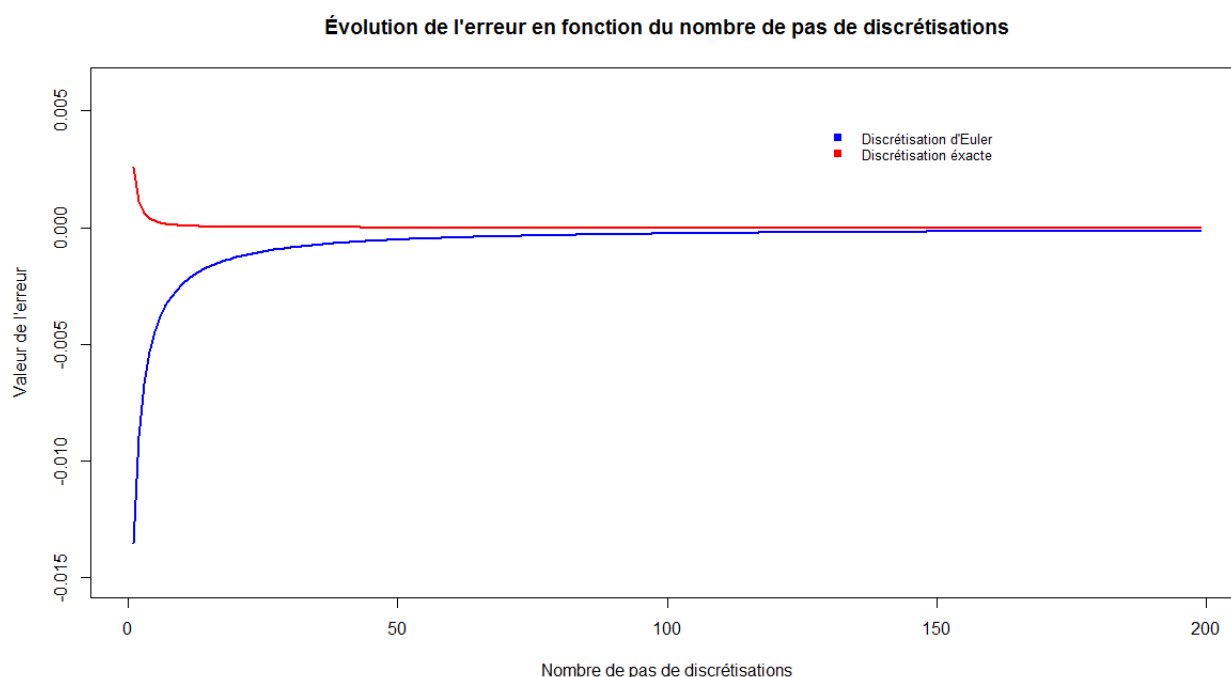


FIGURE 4.1 – Évolution de l'erreur en fonction du nombre de pas de discrétisations

Nous remarquons que le signe des erreurs n'est pas le même pour les deux approximations. En effet, pour un taux initial inférieur au taux limite la méthode d'*Euler* a tendance à sous-estimer le prix zéro-coupon alors que la méthode de discrétisation exacte le surestime.

Le graphique illustre aussi que l'erreur systématique est moins importante dans le cas d'une discrétisation exacte. Dans ce dernier cas, l'erreur converge plus rapidement vers 0. Afin d'illustrer ce propos et vérifier le résultat de la relation 4.12 pour l'erreur systématique dans le cas d'une discrétisation d'*Euler*, reprenons les valeurs de l'erreur avec des pas de discrétisation N qui doublent à chaque fois :

N	$\varepsilon_{sys} (D_Euler)$	Rapport erreur D_Euler	$\varepsilon_{sys} (D_exacte)$	Rapport erreur D_exacte
2	-0.01351	2.018109	2.5752×10^{-3}	3.994218
4	-0.00669	2.014641	6.4473×10^{-3}	3.998549
8	-0.00332	2.008135	1.6124×10^{-4}	3.999637
16	-0.00165	2.004225	4.03143×10^{-5}	3.999909
32	-0.00082	2.002147	1.0078×10^{-5}	3.999977
64	-0.00041	2.001082	2.5197×10^{-6}	3.999994
128	-0.00020		6.2992×10^{-6}	
		Moyenne =2.005477		Moyenne =3.999142

TABLE 4.2 – Tableau des valeurs de l’erreur en fonction du nombre de pas de discrétisations

Quand le nombre de pas de discrétisations est multiplié par deux, l’erreur est divisée par deux aussi. Cela confirme l’ordre de convergence 1 pour la méthode d’Euler 4.12.

Concernant la discrétisation exacte, l’erreur de discrétisation est annulée. Seule la méthode d’approximation de l’intégrale des trapèzes dans notre cas est source d’erreur. L’ordre de convergence 4 remarqué est en accord avec l’ordre en $\mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$ de définition 4.7. En effet, si le nombre de discrétisations est multiplié par deux, l’erreur doit être divisée par $4 = 2^2$.

4.4 Compromis entre nombre de simulations et nombre de discrétisations

Dans la plupart des cas, une formule fermée pour $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\hat{B}_{N,M}(0, T) \right]$ est très fastidieuse à retrouver. Il est donc naturel de se tourner vers des méthodes de simulations directes pour estimer les deux erreurs ε_{sys} et $\hat{\varepsilon}_{stat}$. Une problématique importante se pose à ce stade, à savoir le lien entre le nombre de simulations et le nombre de discrétisations et leurs effets sur l’erreur totale. Afin de répondre à cette problématique, Duffie et Glynn [1995][DD95] proposent un algorithme efficace de l’allocation des ressources informatiques lors de la simulation. Le compromis entre l’accroissement du nombre de pas de discrétisation et l’accroissement du nombre de simulations, étant donné un budget limité pour le temps de calcul, est résolu. L’article propose une solution optimale de ce compromis pour des schémas de discrétisation d’ordre 1 (Comme celui d’Euler) et même d’ordre supérieur.

Nous reprenons les notations précédentes, M pour le nombre de simulations et h pour le pas de discrétisation ($h = \frac{T}{N}$ où T la maturité et N le nombre d’échantillons). Le but ici est de montrer un compromis entre l’augmentation du nombre de simulations M et la diminution du pas h pour un schéma de discrétisation donné. Le but sera donc de donner un ordre de grandeur de $\frac{M}{h}$ étant donné un budget pour le temps de calcul.

Reprenons le cas d’une EDS suivante pour le processus $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$\begin{cases} dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

Soit aussi la discrétisation d’Euler sur l’intervalle $[0, T]$ suivante pour $k = 0, 1, \dots, (N - 1)$:

$$\tilde{X}_{k+1}^h = \tilde{X}_k^h + \mu(\tilde{X}_k^h, kh)h + \sigma(\tilde{X}_k^h, kh)\sqrt{h}z_{k+1} \quad \text{et} \quad \tilde{X}_0^h = x$$

Définition : Une séquence $\{y_k\}$ est dite convergente vers zéro, quand h tend vers 0, avec ordre de convergence k si la fonction $h \rightarrow |y_k \times \left(\frac{1}{h}\right)^k|$ est bornée.

Condition A : Soit une fonction f de $\mathcal{C}^\infty$ à croissance polynomiale : il existe un s entier naturel tel que

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|^s) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.19)$$

Étant donnée une probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, le but est d'avoir une estimation de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(X_T)]$ par la moyenne des réalisations du processus $f(\hat{X}_T^h)$.

En effet, soient $(Y_i)_{1 \leq i \leq M}$ M réalisations du processus $f(\hat{X}_T^h)$. l'approximation obtenue pour une discrétisation h et un nombre de simulations M sera notée $f(n, M)$ telle que :

$$f(n, M) = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_M}{M} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(\hat{X}_T^h)] \quad \mathbb{Q}p.s$$

Un autre point important est la capacité à quantifier l'erreur $e(n, M) = |f(n, M) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[f(X_T)]|$ pour un rapport $\frac{M}{h}$ donné.

Hypothèses : Nous considérons les notations suivantes $Z = f(X_T)$, $Z(h) = f(\hat{X}_T^h)$, $\alpha = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z)$ et $\alpha(h) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z(h))$.

- h1. $Z(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} Z$
- h2. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z^2(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(Z^2)$
- h3. $\alpha(h) = \alpha + \beta^p + o(h^p)$ pour $h \rightarrow 0$, et $\beta \neq 0$ et $p > 0$
- h4. Le temps de calcul requis pour générer $Z(h)$ est donné par une variable déterministe $\tau(h)$ vérifiant $\tau(h) = \gamma h^{-q} + o(h^{-q})$ pour $h \rightarrow 0$ et $\gamma > 0$ et $q > 0$.

Pour t unités de temps disponibles, nous pouvons générer $n(t, h)$ réalisations de $f(\hat{X}_T^h)$ telles que : $n(t, h) = \left\lfloor \frac{t}{\tau(h)} \right\rfloor$. L'estimation de la moyenne relative au nombre $n(t, h)$ vaut donc :

$$\alpha(t, h) = \frac{1}{n(t, h)} \sum_{i=1}^{n(t, h)} Z_i(h)$$

où $Z_i(h), i = 0, 1, \dots, n(t, h)$ sont des réalisations i.i.d de $f(\hat{X}_T^h)$.

Théorème : Si les hypothèses h1-h4 sont vérifiées et sous la condition A, les deux résultats suivants sont démontrés :

— a) si $h_t \times t^{\frac{1}{q+2p}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ ou si $h_t \times t^{\frac{1}{q+2p}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ alors :

$$\text{Résultat(1)} \quad t^{\frac{p}{q+2p}} |\alpha(t, h) - \alpha| \rightarrow +\infty \quad (4.20)$$

— b) si $h_t \times t^{\frac{1}{q+2p}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c$ avec $0 < c < \infty$ alors

$$\text{Résultat(2)} \quad t^{\frac{p}{q+2p}} (\alpha(t, h) - \alpha) \rightarrow \sigma \left(\frac{\gamma}{c^q} \right)^{\frac{1}{2}} z + \beta c^p \quad (4.21)$$

où $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ est une loi normale standard et $\sigma = \text{var}(Z)$

Le théorème montre que quand le budget t alloué à la simulation devient grand, la pas de la discrétisation doit converger vers zéro avec un ordre de $\frac{1}{q+2p}$ selon la définition précédente. Si cette règle est vérifiée alors le résultat (2) implique que l'erreur d'estimation converge (en distribution) en t vers 0 avec un ordre de $\frac{p}{p+2q}$. Si autrement la règle n'est pas respectée le résultat (1) implique que l'erreur d'estimation ne converge pas (en distribution) vers 0 avec l'ordre $\frac{p}{p+2q}$. Il s'agit donc d'une règle optimale dans le sens asymptotique de la distribution. Un schéma $\{h_t\}$ peut être dit optimal asymptotiquement selon les résultats précédents si $h_t \times t^{\frac{1}{q+2p}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} c$ avec $0 < c < \infty$.

Le lien avec le nombre de simulations $n(t, h)$ peut être vu de la façon suivante avec quelques approximations :

$$\begin{aligned}
h_t \times t^{\frac{1}{q+2p}} &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} c \\
h_t \times \tau(h)^{\frac{1}{q+2p}} \times n(t, h)^{\frac{1}{q+2p}} &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} c_1 \\
h_t \times [\gamma \times h_t^{-q}]^{\frac{1}{q+2p}} \times n(t, h)^{\frac{1}{q+2p}} &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} c_2 \\
h_t^{\frac{2p}{q+2p}} \times n(t, h)^{\frac{1}{q+2p}} &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} c_3
\end{aligned}$$

Donc asymptotiquement, le nombre de simulation $n(t, h)$ doit augmenter avec un ordre de h_t^{-2p} .

Application pour une discrétisation d'Euler : Selon Kloeden et Platen [KP92] les quatres hypothèses h1-h4 sont vérifiées avec $p = 1$ et $q = 1$. Nous en concluons que dans le cas d'une discrétisation avec la méthode d'Euler, le nombre de simulations doit être quadruplé à chaque fois que le nombre de discrétisations est doublé. Et avec un schéma d'Euler optimal, d'une manière asymptotique, l'erreur quadratique moyenne est divisée par deux quand le nombre pas de discrétisations h est divisé par deux.

4.4.1 Application au calcul du prix $\pi_1(0, t)$ 3.8 :

Nous avons vu dans 3.3 qu'il est possible d'avoir une formule fermée pour le prix $\pi_1(0, t)$, nous allons donc nous servir de cette formule afin de quantifier l'erreur commise lors des simulations.

Rappelons que $\pi_1(0, t)$ a la forme suivante :

$$\pi_1(0, t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(\left[gt - \int_0^t r_s ds \right] \bigvee 0 \right) \right]$$

Étant données une méthode de discrétisation et une méthode d'approximation de l'intégrale, notons $f(h, n)$ la $n^{ème}$ réalisation du processus $\exp \left(\left[gt - \int_0^t \hat{r}_s ds \right] \bigvee 0 \right)$ pour le pas de discrétisation h choisi. Nous nous intéressons à la quantité :

$$F_{N,M}(0, t) = \frac{\sum_{n=1}^M f(h, n)}{M}$$

où N est le nombre de discrétisations total et M le nombre de simulations.

Dans ce cas l'erreur a la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= F_{N,M}(0, t) - \pi_1(0, t) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [F_{N,M}(0, t)] - \pi_1(0, t) + F_{N,M}(0, t) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [F_{N,M}(0, t)] \\
&= \varepsilon_{sys} + \hat{\varepsilon}_{stat}
\end{aligned}$$

Toutefois, il n'est pas possible dans ce cas d'annuler l'erreur statistique car nous n'avons pas une formule fermée pour $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [F_{N,M}(0, t)]$. Il est donc indispensable de procéder aux simulations des diffusions afin de pouvoir quantifier l'erreur ε .

Nous considérons par la suite les paramètres suivants pour le calcul du prix $\pi_1(0, t)$:

Paramètre	Valeur
Maturité	1an
Taux nominal initial	1%
Taux minimum garanti	$\log(1 + 2\%)$
Paramètre a du modèle de Vasicek	0.12856975
Paramètre b du modèle de Vasicek	0.03994681
Volatilité dans le modèle de Vasicek	0.00011229

TABLE 4.3 – Paramètres pour le calcul de $\pi_1(0, t)$

La formule fermée établie dans 3.8 donne un prix de 1.014604 pour le contrat.

Nous voudrions à ce stade voir l'impact des deux paramètres N et M sur l'erreur totale commise lors de la simulation. Nous considérons dans un premier temps une méthode des trapèzes 4.7 pour le calcul de l'intégrale et une discrétisation d'*Euler* pour le processus du taux.

En suivant Duffie et Glynn [1995][DD95], la quantité considérée pour l'erreur est une valeur qui prend en compte plusieurs réalisations de l'erreur. En effet, en considérant un pas de discrétisation et un nombre de simulation donnés, une valeur de l'erreur $\varepsilon(N, M)$ est retrouvée. Toutefois, une seule valeur de $\varepsilon(N, M)$ n'a pas de sens dans la mesure où nous ne connaissons pas la valeur qu'elle prend en refaisant une nouvelle simulation. Afin de donner un sens à l'erreur il est judicieux de prendre une moyenne des valeurs retrouvées lors des simulations. $\varepsilon(N, M)$ est alors calculée plusieurs fois et nous prenons comme indicateur l'erreur quadratique moyenne (**EQM**) à travers les échantillons $\varepsilon^i(N, M)$ pour $i = 1 \dots L$:

$$EQM(N, M) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^L (\varepsilon^i(N, M))^2}{L}}$$

où $\varepsilon^i(N, M)$ est la $i^{ème}$ réalisation de l'erreur $\varepsilon(N, M)$. Et L le nombre d'échantillons de l'erreur considéré.

Pour $L = 50$ et pour les paramètres du tableau 4.3, nous présentons dans la figure qui suit l'*EQM* en fonction des deux paramètres N et M pour des valeurs entre 1 et 100 :

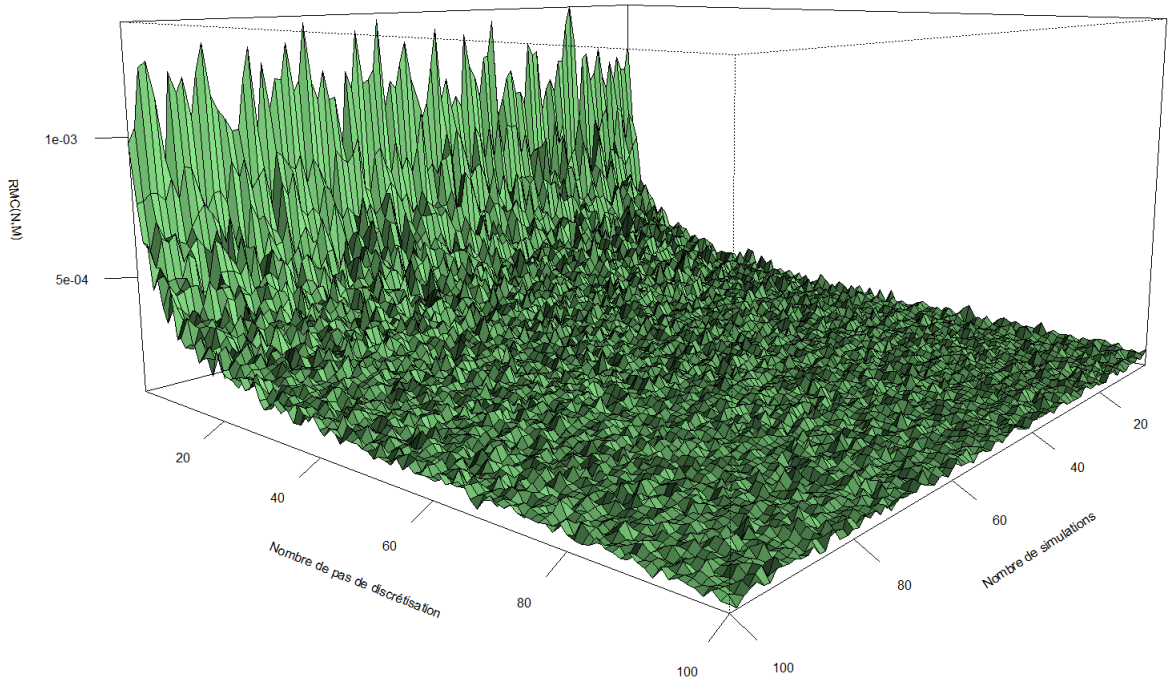


FIGURE 4.2 – EQM en fonction du nombre de pas de discrétisations et du nombre de simulations

Nous remarquons que la valeur de l'EQM est décroissante en fonction des deux paramètres N et M comme prévu. Toutefois, si le nombre de discrétisations n'est pas important, augmenter le nombre de simulations ne réduit pas forcément l'erreur totale d'estimation.

Nous notons aussi que ce graphe ne permet pas de voir une relation entre N et M pour réduire la valeur de l'erreur. Nous allons donc calculer les erreurs pour des valeurs de N et M liées afin de voir si le résultat de Duffie et Glynn [1995][DD95] est vérifié. Dans le tableau qui suit nous calculons l'*EQM* pour des valeurs de N qui doublent à chaque fois et un nombre de simulations M quadruplé :

N	M	$EQM(N, M)$	Rapport des EQM
4	16	2.909×10^{-4}	2.741988
8	256	1.0611×10^{-4}	1.185394
32	1024	8.9515×10^{-5}	2.92254
64	4096	3.0629×10^{-5}	1.541343
128	16 384	1.9871×10^{-5}	1.617454
256	65 536	1.2285×10^{-5}	3.119486
512	262 144	3.9384×10^{-6}	
			Moyenne = 2.188035

TABLE 4.4 – Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N

Nous concluons à travers ce tableau qu'afin de pouvoir diviser l'erreur par deux, il est indispensable qu'à chaque fois que le nombre de pas de discrétisations est doublé, le nombre de simulation doit être quadruplé. Ce résultat confirme le théorème de Duffie et Glynn [1995][DD95] pour une discrétisation d'*Euler*.

Afin d'annuler l'effet de la discrétisation d'*Euler*, et garder le biais dû à l'approximation de l'intégrale, nous voudrions vérifier si le théorème est aussi vérifié pour le cas d'une discrétisation exacte :

N	M	$EQM(N, M)$	Rapport des EQM
4	16	3.9278×10^{-5}	2.521813
8	256	1.5575×10^{-5}	2.081766
32	1024	7.4818×10^{-6}	1.587985
64	4096	4.7115×10^{-6}	1.452522
128	16 384	3.2437×10^{-6}	2.285227
256	65 536	1.4194×10^{-6}	2.027602
512	262 144	7.0005×10^{-7}	
			Moyenne = 1.992819

TABLE 4.5 – Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N pour une discrétisation exacte

Nous notons premièrement que l'erreur est divisée par 7 en moyenne en passant à une discrétisation exacte. Deuxièmement, le rapport des EQM est en moyenne égal à 2 ce qui vérifie le théorème.

À ce stade, il s'avère aussi intéressant de voir l'impact du choix de la méthode d'intégration. Nous appliquons la méthode de *Simpson* 4.9 pour l'approximation de l'intégrale pour les deux discrétisations, *Euler* et exacte :

N	M	$EQM(N, M)$ D-exacte	Rapport des EQM	$EQM(N, M)$ D-Euler	Rapport des EQM
4	16	3.1787×10^{-5}	2.299738	2.7033×10^{-4}	2.076511
8	256	1.3822×10^{-5}	1.986146	1.3018×10^{-4}	1.516804
32	1024	6.9593×10^{-6}	1.143627	8.5829×10^{-5}	1.949118
64	4096	6.0853×10^{-6}	3.343045	4.4035×10^{-5}	3.160721
128	16 384	1.8202×10^{-6}	1.360934	1.3931×10^{-5}	1.171842
256	65 536	1.3375×10^{-6}	1.758413	1.1888×10^{-6}	3.3272
512	262 144	7.6064×10^{-7}		3.5732×10^{-6}	
			Moyenne = 1.981984		Moyenne = 2.200369

TABLE 4.6 – Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N pour une discrétisation exacte

Nous remarquons que l'erreur est réduite en moyenne de 10% en passant à une méthode d'intégrale de *Simpson*. Le lien entre nombre de simulations et nombre de pas de discrétisations est toujours respecté pour diviser l'erreur par deux.

Conclusion : D'après l'ensemble des simulations. Il s'avère que la méthode d'approximation de l'intégrale de *Simspon* combinée à une discrétisation exacte est celle qui donne un résultat meilleur pour l'erreur

d'approximation. Nous avons pu quantifier l'erreur de la méthode d'*Euler* tout en mettant en avant à chaque fois la relation entre nombre de simulations et nombre de discrétisations afin de pouvoir diviser l'erreur totale par deux.

4.4.2 Application au calcul du prix $\pi_3(0, t)$ 3.18 :

L'idée de cette partie est de voir comment se comporte l'erreur d'approximation du prix $\pi_3(0, t)$ 3.18 dans le cadre d'un modèle d'actions de *Black & Scholes* [1973][FB73] avec un taux stochastique et une volatilité constante.

Nous notons ici que le prix $\pi_3(0, t)$ dépend de deux sous-jacents :

1. Le rendement annuel des actions

$$\beta_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (r_\nu - \frac{1}{2}\sigma_S(\nu)^2)d\nu + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_S(\nu)dB_\nu^Q$$

2. Le rendement annuel du taux

$$\rho_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} r_\nu d\nu$$

Par souci de simplification et afin de réduire les temps de calcul, nous considérons un contrat de maturité **deux ans** avec les propriétés suivantes :

Paramètre	Valeur
taux technique	$\log(1 + 2\%)$
Paramètre a	0.12856975
Paramètre b	0.03994681
Volatilité du taux	0.00011229
Volatilité des actions	20%
Corrélation taux/actions	-0.2

TABLE 4.7 – Paramètres de la simulation pour le calcul de $\pi_3(0, t)$

Pour rappel, nous avons vu que le prix de ce contrat est de $\pi_3(0, 2) = 1.180592$.

La méthode d'approximation de l'intégrale est la méthode des trapèzes. Le tableau ci-après illustre les résultats obtenus :

N	M	$EQM(N, M)$ D_exacte	Rapport des EQM	$EQM(N, M)$ D_Euler	Rapport des EQM
4	16	0.008431492	1.313800	0.009191329	1.2944081
8	256	0.006417637	1.200456	0.007100797	1.3410598
32	1024	0.005346001	1.032106	0.005294914	1.0304881
64	4096	0.005179701	1.009738	0.005138259	0.9959076
128	16384	0.005129747	1.260234	0.005159373	1.2626684
256	65536	0.004070472		0.004086087	
			Moyenne =1.163267		Moyenne =1.184906

TABLE 4.8 – Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N

La méthode de discrétisation exacte réduit l'erreur en moyenne de trois points. Nous remarquons que l'erreur de cette simulation est plus importante que celle obtenue pour le prix $\pi_1(0, 1)$. Nous notons ici que la source de l'erreur est double car elle dépend de deux sous-jacents corrélés. La capacité à générer deux browniens parfaitement corrélés est aussi une source d'erreur dans ce cas. Toutefois, le point principal que nous notons à travers ces résultats est que le théorème de Duffie et Glynn [1995][DD95] n'est pas vérifié. En effet, la fonctionnelle considérée ici (définie selon 4.19) a la forme

$$f(X_T, Y_T) = e^{(g - \int_0^T X_t dt) \vee (g - \int_0^T Y_t dt)} \quad (4.22)$$

et ne vérifie pas forcément les hypothèses *h1-h4*. Ce point a comme conséquence que la relation entre nombre de simulations et nombre de discrétisations ne pourra pas être explicitée en termes d'impact sur l'erreur

totale. À ce stade, nous manquons de plus d'arguments mathématiques afin de quantifier cette erreur ; cela sort du cadre du mémoire car il nécessite une étude assez détaillée du cas particulier de la fonctionnelle 4.22 . Toutefois, nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 de Gobert [2003][Gob03] pour un exemple d'étude dans un cas particulier d'une fonctionnelle f .

Chapitre 5

Application dans le cadre d'un modèle *ORSA*

5.1 Contexte

Le cadre d'application proposé s'inspire d'une situation réelle.

Un organisme d'assurance noté *Assurance A* souscrit des contrats d'épargne en euros. *Assurance A* doit mettre en place des outils de projection du taux de couverture des engagements associés dans le cadre de l'*ORSA* et construire un système de limites, notamment pour le choix des supports d'investissement. Le choix a été fait sur la construction d'un modèle *ad hoc* pour la projection de la déformation du taux de couverture dans le cadre de l'*ORSA*. Ce modèle prendra en compte le risque financier uniquement (taux, *spread* et actions). Toutefois, les risques de souscription vie, qui sont aussi des risques majeurs pour ce type de contrat, ne seront pas traités lors des projections. L'exigence du capital réglementaire relative à ces risques sera projetée au prorata du *Best Estimate*. Le lecteur pourra se référer à Fauvel et Le Prévédic [2007][FS07] pour une analyse sur les rachats, à Juillard et al. [2008] [JM08] pour le risque de longévité, et à Guibert et al. [2012] [GQ12] pour le risque commercial pour les détails concernant les risques de souscription vie.

Pour rappel, l'hypothèse principale de modélisation de l'article, sur laquelle ces travaux sont basés, de Bonnin et al.[2014][BF14b] est que l'objectif de revalorisation des contrats d'épargne retraite est très fortement lié à l'inflation. Toutefois, l'hypothèse **principale** de l'illustration de ce chapitre est que la revalorisation du contrat est au maximum entre un taux minimum garanti et le taux court sans risque. En effet, ce choix permet de voir dans quelle mesure un processus *ORSA* peut aider pour le pilotage d'un organisme ayant fait ce choix et les risques pouvant l'impacter. Autrement, une récente analyse de l'ACPR [2014][ACP14] sur les taux de revalorisation des contrats individuels d'assurances vie montre que 24% des assureurs vie en France ont servi un taux de revalorisation inférieur à 2.5% en 2013. L'hypothèse d'objectif de revalorisation au taux court sans risque semble réaliste dans ce sens. Nous rajoutons que le contexte actuel des taux historiquement bas nous donne une motivation supplémentaire pour l'application.

Cette hypothèse nous permet d'utiliser les formules fermées 3.17 qui donnent un calcul direct du *Best Estimate*. Nous nous baserons sur les chiffres du Pilier I de solvabilité II fournis par Assurance A et constatons l'impact de cette politique à travers une vision *ORSA*. Cette hypothèse peut sembler réaliste pour un assureur qui a encore dans son portefeuille des contrats avec des taux minimums garantis et a comme objectif de les revaloriser au maximum entre ce taux et le taux court sans risque. Il s'agit certes d'une illustration simpliste, mais l'objectif reste d'avoir un exemple clair.

Un cas plus général sera de considérer une revalorisation au maximum entre le taux minimum garanti et un rendement gaussien d'un actif. Nous pouvons dans ce cas utiliser la formule 3.19 qui donne un calcul direct des facteurs déflateurs et ainsi du *Best Estimate*. Le point à noter ici est qu'il faudrait ajuster une loi normale qui approxime le rendement total de l'actif. Cela suppose d'approximer une somme de lois log-normales par une loi log-normale. Nous renvoyons le lecteur au document de Dufresne [2009] [Duf09] qui donne un récapitulatif de ces méthodes. Il est à noter que ce point pourra être étudié en détail dans des travaux futurs et constituera une extension intéressante du mémoire.

5.2 Description des données

Les données fournies par *Assurance A* sont les prestations et les cotisations **décapitalisées** par maturité et par taux minimum garanti. De surcroît, Assurance A a fourni l'ensemble des valeurs obtenues dans le cadre de l'étude Pilier 1 de solvabilité II.

Par souci de confidentialité, nous n'allons pas utiliser les mêmes valeurs fournies par le client de *Prim'Act*. Pour simplifier, nous considérons des primes normalisées et appliquons des coefficients de proportionnalité afin de garder une cohérence avec les chiffres Pilier 1 de solvabilité II fournis par assurance A.

Nous nous plaçons au début de 2014 juste après l'encaissement des cotisations. Nous supposons qu'en fin d'année, Assurance A doit payer des prestations. Le raisonnement est pareil pour chaque année de projection, à savoir que les cotisations sont perçues en début d'année et les prestations sont payées à la fin de chaque année. considérons les données suivantes :

Année	Prestations			Cotisations
	2%	1.5%	1.2%	
2014	1	1	1	0
2015	1	1	1	-2
2016	1	1	1	-2
2017	1	1	1	-2
2018	1	1	1	-2
2019	1	1	1	-2
2020	1	1	1	0
2021	1	1	1	0
2022	1	1	1	0
2023	1	1	1	0
2024	1	1	1	0

TABLE 5.1 – Prestations et cotisations fournies par Assurance A

Ces prestations intègrent les risques mutualisables, il reste donc à quantifier l'impact de la revalorisation et le coût des options relatives au taux minimum garanti et au rachat.

Il est à noter que le vrai portefeuille d'assurance A contient encore des prestations relatives à des taux minimums garantis assez élevés (4.5%, 3.5% et 2.5%). Nous avons choisi par souci de cohérence avec le contexte actuel de limiter les calculs aux trois taux minimums garantis les plus bas. Le cadre de projection *ORSA* suppose la prise en compte des affaires futures entre 2015 et 2019.

5.3 Étapes de projection

La première étape du modèle consiste à produire une évaluation du *Best Estimate* à l'instant initial en se basant sur les formules fermées démontrées dans ce mémoire, à savoir 2.16 pour la formule globale et 3.17 pour le calcul des facteurs déflateurs. En pratique, cette première évaluation nous permet de vérifier si la valeur obtenue du *Best Estimate*¹ est en accord avec celle fournie dans le cadre des calculs Pilier I de l'assurance A.

La deuxième étape consiste à projeter les facteurs de risques (Taux, actions, *spread*) en probabilité historique et déduire pour chaque nœud de projection les valeurs d'intérêts pour l'exercice *ORSA* : *SCR*, taux de couverture, *Best Estimate*, Valeur de l'actif, capital libre etc ...

1. à noter que le calcul du *Best Estimate* dans le cadre du modèle *ORSA* n'a pas vocation à remplacer les calculs Pilier I mais de les approximer avec des formules simples et facilement "projetables"

Le tableau qui suit résume l'ensemble des étapes de calcul :

1	Ajustement des différentes courbes de taux (dont les courbes choquées)
2	Projection des facteurs de déformation des courbes de taux
3	Calcul des facteurs déflateurs Ω et des prix zéro-coupon
4	Calcul des <i>Best Estimate</i> initial et projetés
5	Projection de l'actif
6	Calcul des <i>SCR</i> en fonction des réalisations du <i>Best Estimate</i> et de l'actif
7	Calcul des autres variables d'intérêt

TABLE 5.2 – Étapes de projection modèle *ORSA*

Nous détaillons par la suite chaque étape de projection. Dans un premier temps, nous nous focalisons sur le modèle de taux utilisé car il est au centre de nos calculs, et ensuite nous expliquerons les méthodes de projections de l'actif et du passif.

5.4 Projection des taux

La littérature sur le risque de taux est abondante et de nombreux modèles ont été proposés. Roncalli [1998] [Thi98] présente une étude détaillée de la modélisation de la courbe des taux. Dans le contexte de ce mémoire, nous retenons une démarche qui consiste à s'appuyer sur la dernière courbe publiée par l'*EIOPA* le 30 avril 2014 dans le cadre des *stress tests* (sans *Volatility Adjustment*) et à lui faire subir des chocs réglementaires.

Le besoin en termes de structure de taux est double. En effet, dans un premier temps il s'agit de trouver un modèle qui puisse reconstituer de manière réaliste (au sens des propriétés statistiques constatées historiquement) la courbe initiale des taux, ainsi que ses déformations en probabilité historique. Dans un deuxième temps, il s'agit de trouver un modèle de taux pour un besoin de valorisation en probabilité risque neutre dans le cadre du calcul des facteurs déflateurs Ω 2.12.

Pour l'ajustement de la forme paramétrique, le modèle retenu est le modèle de référence à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par *Nelson et Siegel* [1987] [NC87]. En effet, ce modèle présente une grande souplesse d'utilisation et une facilité relative de l'estimation des paramètres. Ricart et Sicsic [1995] [RR95] présentent une étude comparative des différents modèles pour l'estimation d'une structure par terme des taux d'intérêt sur des données françaises; leur étude propose de chercher une fonction dont le nombre de paramètres à estimer reste raisonnable et dont la forme est suffisamment souple pour pouvoir s'adapter à des configurations de marché très différentes. Le modèle de *Nelson et Siegel* [1987] [NC87] répond à ces deux critères et s'avère être un modèle dont les paramètres peuvent être interprétés facilement sans rajouter plus de complexité.

Pour le besoin de la valorisation, le modèle de *Vasicek* [1977] [VAS77] a été choisi pour la projection des taux courts. En effet, ce modèle présente l'avantage d'être simple d'utilisation et d'avoir des caractéristiques souvent constatées sur les marchés des taux d'intérêt. L'effet de retour à la moyenne et la disponibilité de plusieurs formules fermées sont les deux principaux atouts de ce modèle. Toutefois, nous ne perdons pas de vue la conséquence du caractère gaussien des taux dans ce modèle qui fait en sorte que la probabilité qu'ils soient négatifs n'est pas nulle. Cette propriété n'est pas pénalisante pour notre modélisation et nous avons préféré un gain en termes de simplicité et de précision au regard d'une perte associée à l'augmentation de complexité du modèle.

Les interactions entre ces représentations sont les suivantes :

- La courbe initiale fournie par l'*EIOPA* est utilisée pour calibrer l'ajustement de la forme paramétrique de *Nelson et Siegel*;
- Cette forme paramétrique est utilisée à chaque pas de projection pour calibrer le modèle de *Vasicek* à partir duquel sont projetés les taux courts utilisés pour le calcul des coefficients d'actualisation Ω 2.12.

5.4.1 Description du modèle de *Nelson et Siegel* [1987] [NC87]

Les notations et définitions qui suivent sont reprises de Bonnin et al .[2011] [BF11].

Dans le cadre d'un modèle *Nelson et Siegel* [1987] [NC87], le taux *forward* instantané s'écrit en notant la maturité résiduelle du contrat $\tau = T - t$:

$$f_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \frac{\tau}{\tau_1} \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

Il en découle que le taux zéro-coupon $R_t(\tau)$ se calcule à partir de $R_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f_t(u) du$ comme suit :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right)$$

En notant $\varphi(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ et $\psi(x) = \varphi(x) - e^{-x}$, nous avons une expression plus simple :

$$R_t(\tau) = \mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

μ_1 , μ_2 , μ_3 et τ_1 sont calibrés à partir de la courbe des taux sans risque *EIOPA* par un estimateur des moindres carrés (**EMC**) . De telle manière à avoir :

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \tau_1) = \underset{\tau=1}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{\tau=1}^M \left(R^{EIOPA}(0, \tau) - \left(\mu_1 + \mu_2 \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + \mu_3 \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right) \right)^2 \right\} \quad (5.1)$$

où $R^{EIOPA}(0, \tau)$ est le taux zéro-coupon initial de maturité τ et M la plus grande maturité des taux fournie dans la courbe *EIOPA* (pratiquement $M = 150$).

Nous supposons comme dans Bonnin et al .[2011] [BF11] que les paramètres de forme dépendent du temps et que le paramètre d'échelle τ_1 est constant. Nous notons $\mu_1 = l(t)$, $\mu_2 = -s(t)$ et $\mu_3 = c(t)$ pour faire référence à l'interprétation de ces valeurs dans le modèle, soit respectivement le taux long, le *spread* et la convexité. La représentation retenue pour choquer la courbe est la suivante :

$$R_t(\tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

où $r_0(t) = l(t) - s(t)$ est le taux court instantané. Cette équation présente l'avantage de faire apparaître des facteurs de détermination du taux zéro-coupon facilement interprétables : le taux court, le taux long et la convexité. Les dynamiques de ces trois facteurs suivent un modèle classique de *Vasicek* [1977][VAS77] :

$$\begin{aligned} dr_0(t) &= \mu_r (r_\infty - r_t) dt + \sigma_r dW_r(t) \\ dl(t) &= \mu_l (l_\infty - l_t) dt + \sigma_l dW_l(t) \\ dc(t) &= \mu_c (c_\infty - c_t) dt + \sigma_c dW_c(t) \end{aligned}$$

Les corrélations constatées historiquement sont compatibles avec une hypothèse d'indépendance des Browniens de ces trois dynamiques.

Application à la courbe de l'*EIOPA* du 30 avril 2014 : Nous ajustons les paramètres selon 5.1 :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
μ_1	4.075586×10^{-2}	$r_0(0)$	1.35496×10^{-3}
μ_2	-3.940090×10^{-2}	$l(0)$	4.075586×10^{-2}
μ_3	1.657960×10^{-3}	$c(0)$	1.657960×10^{-10}
τ_1	7.432859		

TABLE 5.3 – Paramètres du modèle de *Nelson et Siegel*

La figure qui suit illustre la forme de la courbe ajustée :

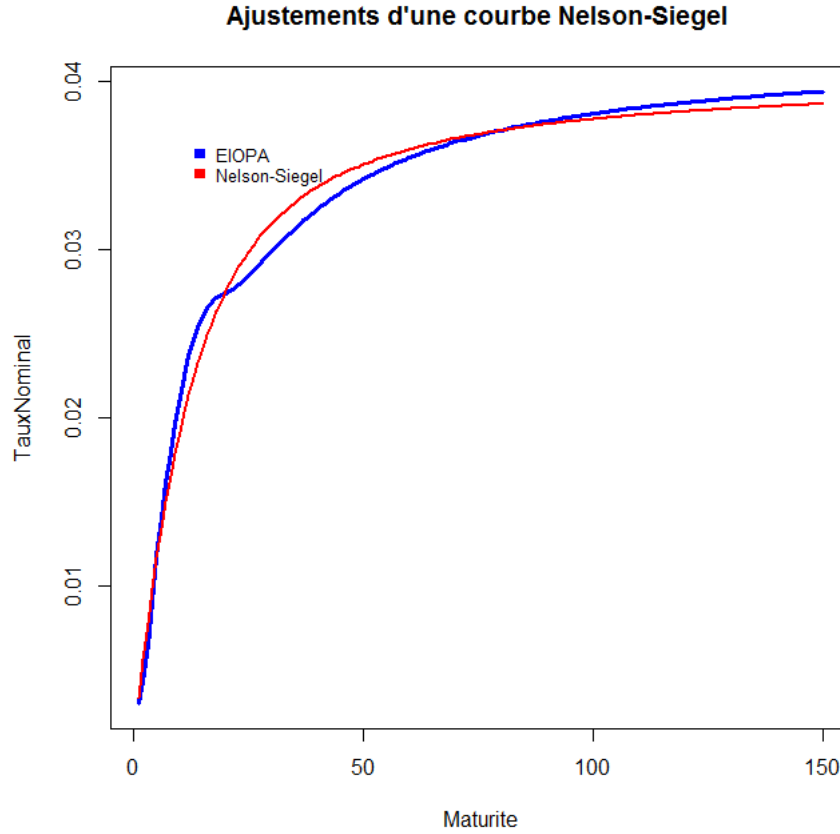


FIGURE 5.1 – Courbes des taux *EIOPA* et *Nelson et Siegel*

Bonnin et al .[2011] [BF11] proposent une méthode d'estimation des paramètres de diffusion des trois facteurs r_0 , l et c . Cette méthode s'appuie sur l'historique de la déformation de la structure par termes des taux d'intérêt. Un exemple d'ajustement est aussi fourni dans Le Maistre et Planchet [2013][LMA13]. Toutefois, dans le cadre la mission, il a été convenu avec *Assurance A* de prendre les paramètres suivants :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
μ_r	2×10^{-1}	μ_l	1.6×10^{-1}	μ_c	1.46
r_∞	1.27×10^{-3}	l_∞	3.37×10^{-3}	c_∞	0.09×10^{-3}
σ_r	1.17×10^{-3}	σ_l	0.69×10^{-3}	σ_c	2.4×10^{-3}

TABLE 5.4 – Paramètres de diffusion des trois facteurs de forme

5.4.2 Ajustement d'un *Vasicek* à partir d'un *Nelson et Siegel*

L'étape suivante consiste à ajuster les paramètres d'un *Vasicek* à partir de la courbe de *Nelson et Siegel*. La méthode d'ajustement se base sur la formule fermée 4.18 pour avoir les taux zéro-coupon d'un *Vasicek*. En effet, Planchet et Thérond [2005] [PF05] montrent qu'il est plus efficace de se baser sur une courbe des taux afin d'estimer les paramètres de la diffusion du taux. Ce point peut être compris dans le sens où nous pouvons être tentés de passer à une courbe des prix zéro-coupon pour estimer ces paramètres.

Dans ce sens, et selon la formule 4.18 le taux nominal zéro-coupon à l'instant t d'une maturité T , en notant τ la maturité résiduelle, est :

$$R_n^{Vasicek}(t, \tau) = \left[b - \frac{\sigma^2}{2a} - \frac{1}{a\tau} \left(\left(b - \frac{\sigma^2}{2a} - r(t) \right) (1 - e^{-a\tau}) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-a\tau})^2 \right) \right]$$

Ainsi les paramètres a, b et σ peuvent être estimés par la méthode des moindres carrés :

$$(a, b, \sigma) = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{\tau=1}^M (R_n^{Vasicek}(t, \tau) - R_n^{NS}(t, \tau))^2 \right\}$$

où $R_n^{NS}(t, \tau)$ est le taux nominal à l'instant t de maturité résiduelle τ calculé à partir de la courbe ajustée de *Nelson et Siegel*. M la plus grande maturité des taux fournie dans la courbe *EIOPA* (pratiquement $M = 150$).

Application à la courbe ajustée de *Nelson et Siegel* : Les paramètres ajustés à partir de la courbe *Nelson et Siegel* sont les suivants :

Paramètre	Valeur
a	0.12856975
b	0.03994681
σ	0.00011229

TABLE 5.5 – Paramètres du modèle de *Vasicek*

La figure qui suit illustre la structure par terme obtenue grâce au modèle de *Vasicek* :

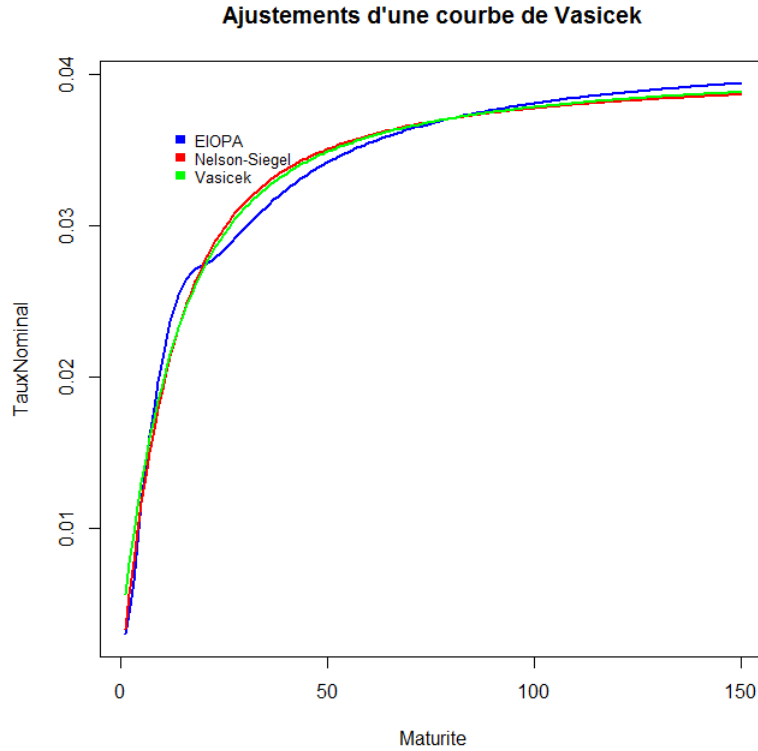


FIGURE 5.2 – Courbe des taux *Vasicek*

5.4.3 Cohérence entre le *Vasicek* et la courbe *EIOPA* :

Afin d'assurer une cohérence entre la courbe de *Vasicek* et la courbe *EIOPA* initiale, Bonnin et al.[2014] [BF14b] proposent de corriger les prix zéro-coupon issus du modèle de *Vasicek*. Cette correction est faite de telle manière à assurer qu'*in fine* la valeur des prestations actualisées avec les prix zéro-coupon corrigés correspond exactement à la valeur de ces mêmes prestations actualisées avec les zéro-coupon *EIOPA*. En d'autres termes :

$$\sum_{j=1}^{10} P_n^{Vasicek\text{ Corrigé}}(0, j) \mathbb{E}^{P^a}(P_j) = \sum_{j=1}^{10} P_n^{EIOPA}(0, j) \mathbb{E}^{P^a}(P_j) \quad (5.2)$$

où $P_n^{Vasicek\ Corrigé}(0, j)$ le prix corrigé du zéro-coupon *Vasicek* nominal de maturité j à l'instant initial, $P_n^{EIOPA}(0, j)$ le prix zéro-coupon nominal issu de la courbe EIOPA et $\mathbb{E}^{P^a}(P_j)$ la valeur des prestations après mutualisation des risques mutualisables.

Pratiquement, cela suppose de rajouter un *spread* au taux *Vasicek* et de résoudre l'équation 5.2 par dichotomie. Le résultat obtenu dans ce cas est de -9.6035×10^{-4} . Ce *spread* ainsi calculé à l'instant initial est supposé constant lors des projections.

La figure qui suit compare les trois courbes obtenues :

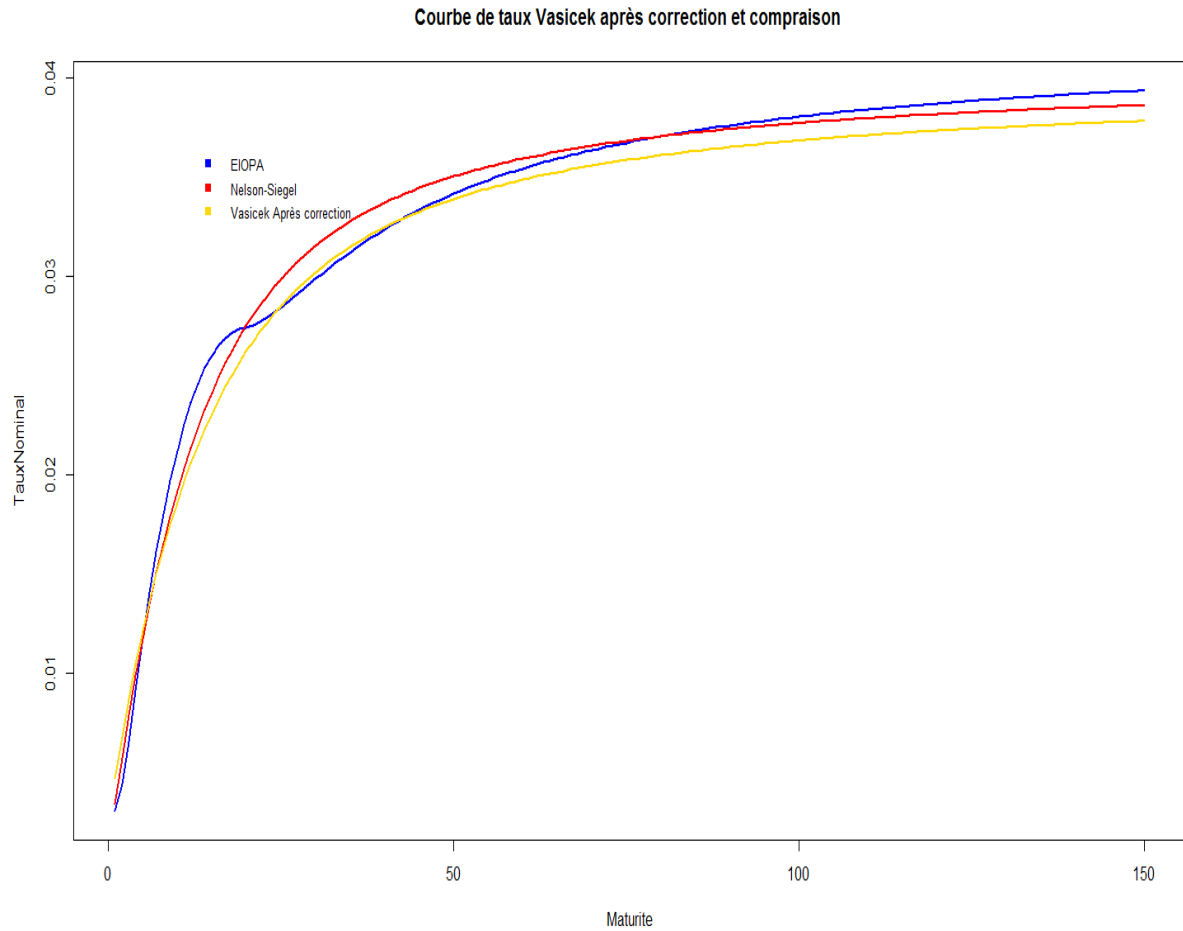


FIGURE 5.3 – Comparaison des courbes finales

5.5 Projection du passif

5.5.1 Projection du *Best Estimate*

L'ajustement des deux courbes de taux de Vasicek et de *Nelson et Siegel* s'articule de la façon suivante pour le calcul d'un facteur $\Omega(n, j)$ 2.12 (pour un scénario n et une maturité j) :

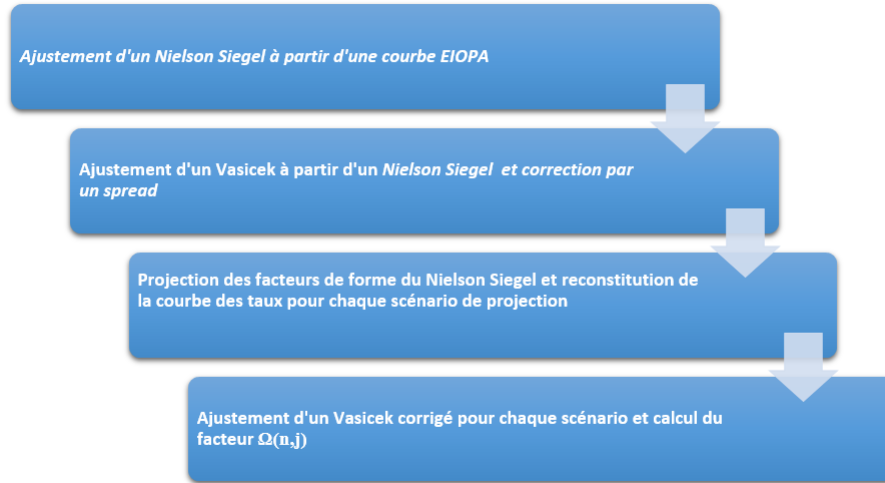


FIGURE 5.4 – Calcul des facteurs $\Omega(n, j)$

Le calcul des prix zéro-coupon est ensuite fait ce qui permet d'avoir la valeur du *Best Estimate* pour chaque année de projection et chaque scénario selon la relation 2.17.

5.5.2 Projection de l'exigence du capital règlementaire

Le calcul de l'exigence du capital règlementaire (*SCR*) est fait selon la formule standard qui s'appuie sur les spécifications techniques du *LTGA* 30/04/2014[IE14]. les *SCR* taux, *spread* et actions, sont calculés de la manière suivante pour chaque pas de projection :

1. *SCR* taux : pour chaque couple (année de projection, scénario), les coefficients déflateurs Ω et les prix des zéro-coupon sont calculés avec la courbe de taux nominaux choquée vers le haut puis vers le bas. Le choc est appliqué sur l'actif et le passif pour déterminer *in fine* l'impact sur les fonds propres et utiliser la formule standard ;
2. *SCR spread* : évaluation à partir des caractéristiques moyennes du portefeuille de l'actif obligataire (maturité et *rating* moyen), il s'agit d'un choc sur la valeur de marché des obligations en fonction de la notation (supposée constante) et de la duration : Ce choc est calibré à l'instant initial.
3. *SCR actions* : Un abattement de 22% est appliqué sur la valeur de marché des actions.

Concernant les autres composantes du *SCR*, elles seront exprimées en fonction d'un pourcentage du *Best estimate* de prestations. Le *SCR* calculé pour chaque scénario permet la détermination du ratio de couverture et sa distribution.

5.6 Projection de l'actif

La composition de l'actif est supposée stable durant toute la durée de projection. En termes de réinvestissement, une allocation cible stable est définie au début de la projection, et sera respectée lors de chaque réinvestissement. L'actif total est vu d'une manière agrégée sous forme d'un **fonds commun de placement**. Cet actif synthétique est constitué de trois classes : "actions", "taux nominaux" et "crédit".

Modélisation des actions : Les actions sont modélisées par un brownien géométrique pour la dynamique des prix, ce qui donne en probabilité historique :

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A W_A(t) \right)$$

où $\mu_A = \frac{d\mathbb{E}^\mathbb{P}[S(t)]}{\mathbb{E}^\mathbb{P}[S(t)]}$ taux moyen du rendement et paramètre de la dérive du modèle de *Black & Scholes* [1973][FB73] ajusté sur des données historiques. Nous prenons $\mu_A = 0.02$.

$\sigma_A = 2\%$ volatilité du prix de l'action et W_A mouvement brownien sous la probabilité historique.

Actif obligataire : L'actif obligataire est constitué de deux classes d'obligations :

1. Obligations nominales
2. Obligations *Corporate*

Les maturités considérées pour les obligations sont de 5 et 10 ans.

Le prix à l'instant t des obligations nominales est de la forme :

$$O_n(t, \tau) = N \times \left(\rho \sum_{i=t+1}^{t+\tau} P_n(t, i) + P_n(t, t + \tau) \right)$$

où N le nombre d'obligations dans le portefeuille, ρ taux de coupon et pour un instant t nous avons $P_n(t, i)$ est le prix zéro-coupon nominal de maturité i .

Les obligations *Corporate* intègrent un *spread* reflétant le risque de crédit du portefeuille noté δ et calibré sur des données réelles :

$$O_D(D, \gamma, N, t, \tau) = D(t) \times O_n(t, \tau)$$

où $D(t) = D(s(t), s_0, \delta) = D_0 \times \exp(-\delta \times (s(t) - s_0))$, avec $s(t)$ le *spread* à l'instant t qui suit un processus d'*Ornstein-Uhlenbeck* en probabilité historique :

$$ds(t) = k \times (s_\infty - s(t)) dt + \sigma_s dW_s(t)$$

W_s est supposé corrélé à W_A uniquement en suivant la formule standard d'agrégation des risques (cf. EIOPA [2014][IE14]).

L'ensemble des paramètres considérés pour la simulation sont dans le tableau suivant :

Paramètre	Valeur
δ	0.2
s_0	0.01
σ_s	0.2
s_∞	0.03
k	0.2
$D_0(15 \text{ ans})$	0.9
$D_0(8 \text{ ans})$	0.8

TABLE 5.6 – Paramètres de l'actif obligataire

composition du portefeuille : L'allocation cible du portefeuille est la suivante :

Allocation	
Actions	20%
Obligations nominales	45%
Obligations <i>Corporate</i>	35%

TABLE 5.7 – Allocation de l'actif

En termes d'allocation par maturité pour les obligations, nous prenons des parts égales d'obligations de maturité 5 et 10 ans.

5.7 Résultats de la projection

Nous avons choisi de prendre 1000 réalisations par année de projection en probabilité historique des facteurs de risques.

Les paramètres de la projection sont présentés dans le tableau ci-après :

Paramètre	Valeur
taux des frais des prestations τ_P	0.065
taux de la marge pour risque τ_{RM}	0.026
taux de rachat structurel μ	0.02
la sensibilité des rachats à la variation de la sous-performance β	0.1
la volatilité de la sous-performance σ_Δ	0.02
le rapport entre le <i>best estimate</i> et la provision mathématique γ	0.8413

TABLE 5.8 – Paramètres de la projection

Les valeurs d'intérêt obtenues à l'instant initial :

Actif		Passif	
Variable d'intérêt	Valeur	Variable d'intérêt	Valeur
Obligations <i>Corporate</i>	9.534336	Fonds propres	3.612511
Obligations nominales	12.25843	Impôts différés passif	0.4431718
Actions	5.448192	Marge pour risque	0.6070847
		<i>Best Estimate</i>	22.57819
Total	27.24096	Total	27.24096

<i>SCR</i> de marché	<i>SCR</i> Taux	2.436516
	<i>SCR</i> Actions	1.171361
	<i>SCR Spread</i>	0.8361898
	<i>SCR</i> immobilier	0.07626723
	<i>SCR</i> de change	0.6482715
<i>SCR</i> de souscription vie		1.855836
<i>SCR</i> opérationnel		0.1525345
Ajustement PB et impôts		-2.218892
<i>SCR</i> total		2.819657

Taux de couverture	128.1188%
capital libre	0.7928536

TABLE 5.9 – Variables d'intérêt de la première année

À l'instant initial, Assurance A présente un taux de couverture à 128.1188%. En termes d'exposition, le *SCR* taux est l'exigence la plus importante au vue de la composition du portefeuille (80% obligataire). Le risque de taux du côté du passif est un risque à la baisse, car Assurance A doit garantir un taux minimum garanti et la valeur de cette option aura comme impact le chargement du *Best Estimate*.

Lors des projections, nous nous attendons à ce que la valeur du *Best Estimate* diminue chaque année d'une valeur proche de l'unité. En effet, si nous nous plaçons en 2016 par exemple, la valeur du *Best Estimate* des prestations n'inclura pas les prestations de 2015 (3 unités) et les cotisations 2015 (−2 unités). Le graphe qui suit illustre la densité du *Best Estimate* par année de projection :

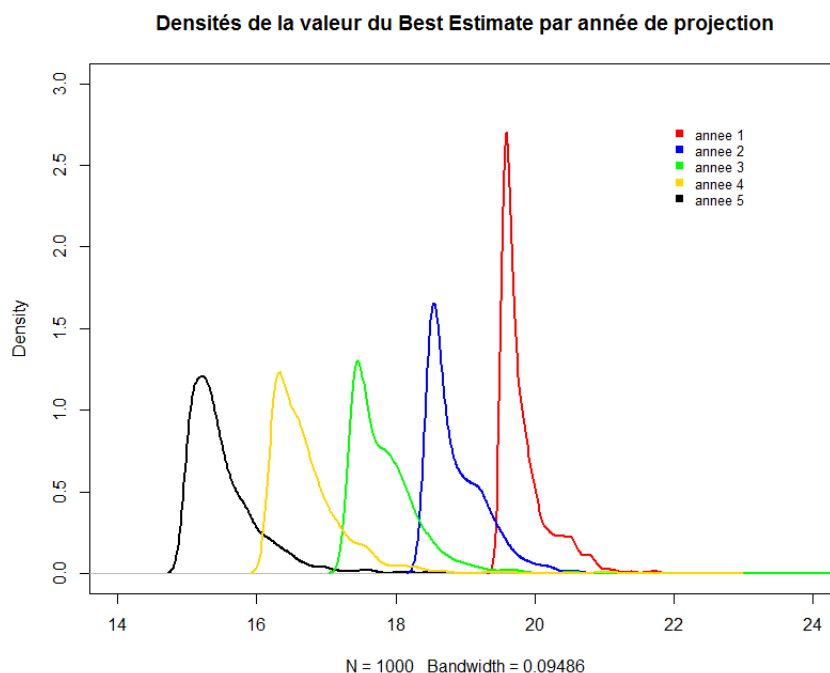


FIGURE 5.5 – Densité du *Best Estimate* par année de projection

Nous remarquons qu'en général le *Best Estimate* est diminué d'une unité en avançant dans le temps. Un autre effet est aussi à noter, est que la projection a comme effet de rendre les distributions moins centrées. Afin de montrer ces deux points, nous calculons les valeurs moyennes et les écarts type de la distribution du *Best Estimate* par année de projection :

Année de projection	Moyenne	Écart type
1	19.8301	0.4040447
2	18.87523	0.4295567
3	17.87242	0.61232
4	16.74535	0.6174509
5	15.54002	0.5669954

TABLE 5.10 – Moyenne et écart type de la distribution du *Best Estimate*

Nous notons que pour la première année de projection, la valeur du *Best Estimate* n'inclut pas les 3 unités de prestations de l'année 2014. Il est aussi clair que la moyenne est diminuée d'une valeur proche de l'unité en avançant dans le temps, et finalement que l'écart type de la distribution augmente avec l'effet de la projection.

Distribution de l'actif : Nous nous attendons aussi à ce que la valeur de l'actif diminue dans le temps. Cette diminution sera moins importante que celle constatée pour le *Best Estimate* grâce aux produits financiers qui viennent augmenter la valeur de l'actif à chaque étape d'investissement. La figure qui suit illustre ce point :

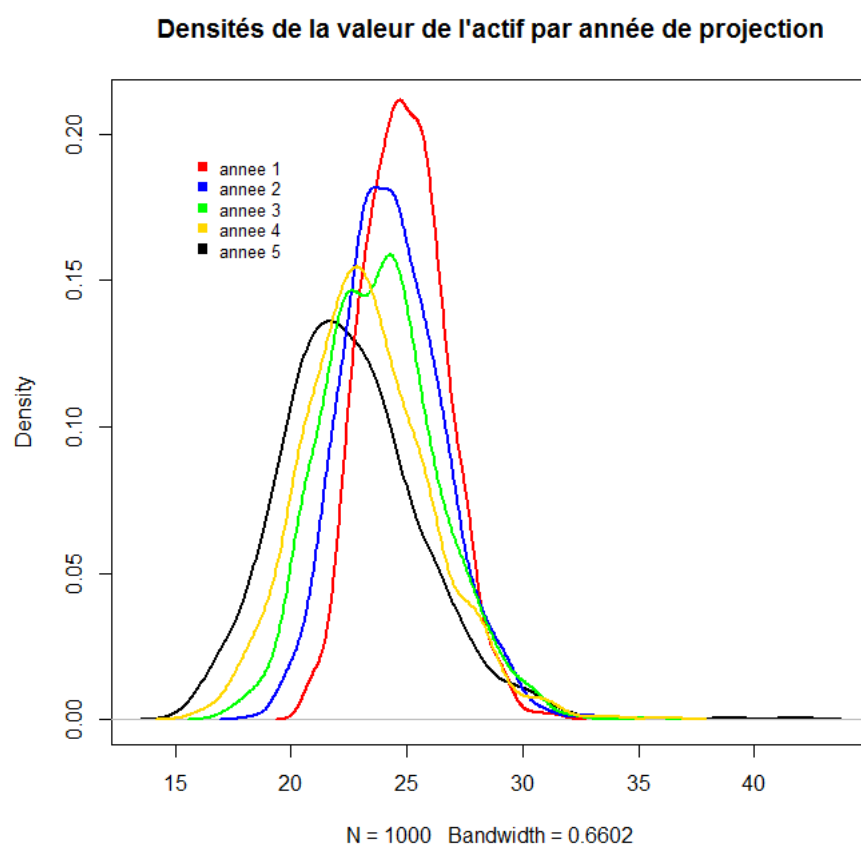


FIGURE 5.6 – Densité de la valeur de l'actif par année de projection

Nous illustrons pour plus de clarté les données dans le tableau suivant :

Année de projection	Moyenne	Écart type
1	24.924	1.754294
2	24.43357	2.157229
3	23.89671	2.517398
4	23.27876	2.761893
5	22.55431	3.094494

TABLE 5.11 – Moyenne et écart type de la distribution de la valeur de l'actif

Il est clair d'après ce tableau que la moyenne annuelle de la distribution de l'actif diminue chaque année, mais relativement d'une manière moins importante que celle constatée pour le *Best Estimate*. La projection a pour effet d'augmenter l'écart type des distributions.

Distribution du SCR et des fonds propres : À ce stade il est intéressant de voir la distribution de la variable centrale de l'exercice *ORSA* à savoir le *SCR*. Afin d'illustrer le comportement du taux de couverture par la suite, nous avons choisi de traiter les variables *SCR* et fonds propres en même temps pour voir la vitesse d'évolution de chacune, étant donné que le taux de couverture est par définition le rapport de ces deux variables.

La figure qui suit illustre l'évolution de ces deux variables :

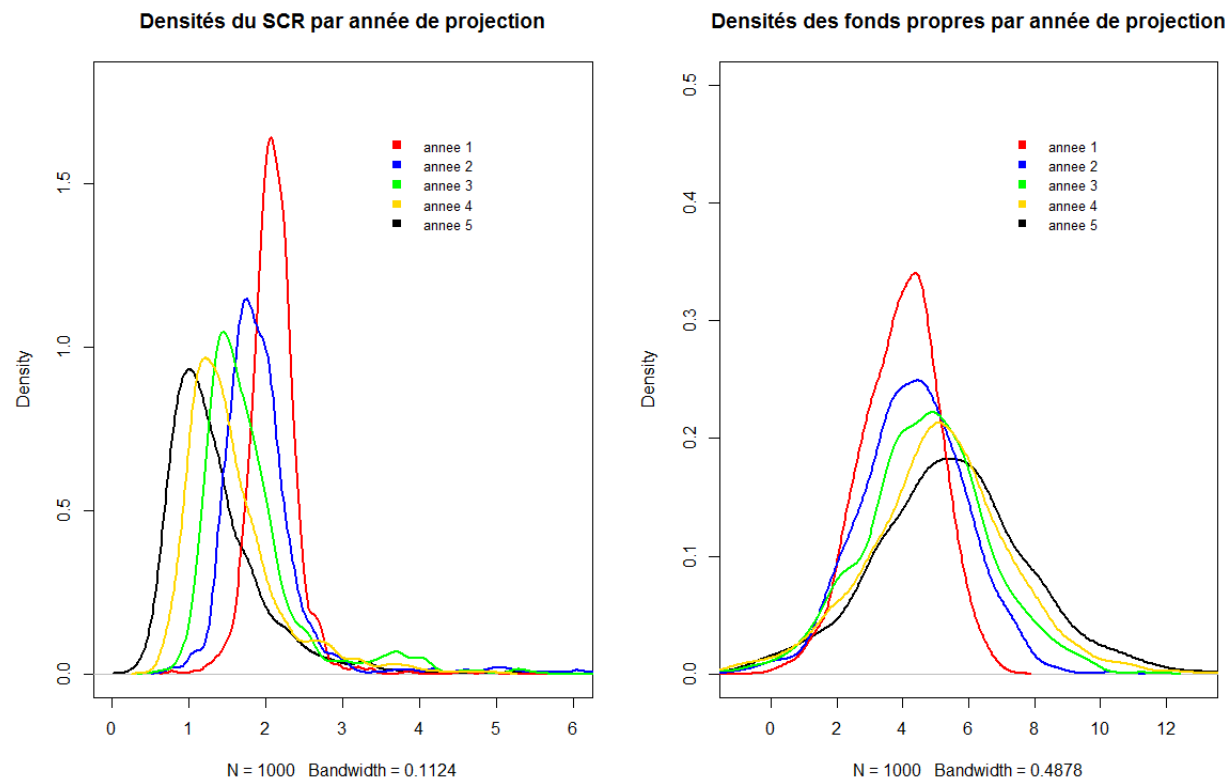


FIGURE 5.7 – Densité des variables *SCR* et fonds propres par année de projection

<i>SCR</i>			<i>Fonds Propres</i>		
Année de projection	Moyenne	Écart type	Année de projection	Moyenne	Écart type
1	2.118986	0.4415971	1	3.923952	1.190994
2	1.97749	0.7534289	2	4.317409	1.58125
3	1.794586	0.6790338	3	4.676302	1.923087
4	1.556006	0.6111333	4	5.084123	2.150113
5	1.326408	0.5906378	5	5.471285	2.417881

TABLE 5.12 – Moyenne et écart type des variables *SCR* et Fonds propres

Nous remarquons qu'alors que le *SCR* baisse en moyenne, les fonds propres augmentent. La baisse du *SCR* est due à la diminution des valeurs de l'actif et du *Best Estimate*. Toutefois, les résultats après impôts viennent augmenter les fonds propres ce qui améliore la situation d'Assurance A.

Distribution du taux de couverture : La distribution des ratios de couverture est un résultat direct des deux distributions précédentes :

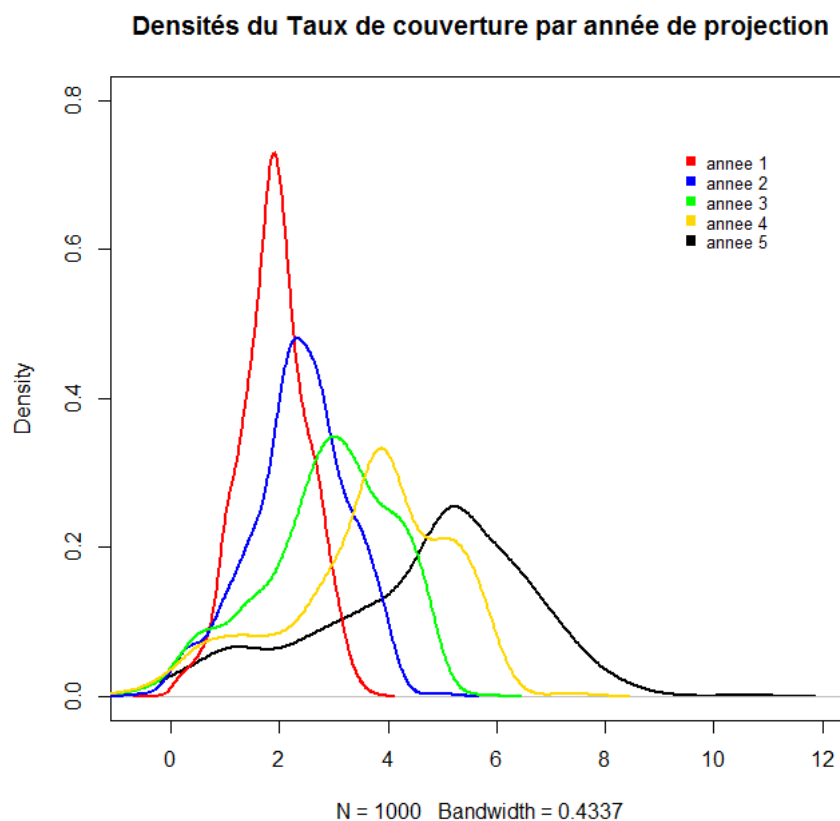


FIGURE 5.8 – Densité du taux de couverture par année de projection

Année de projection	Moyenne	Écart type
1	190.71%	0.6237919
2	235.26%	0.9043821
3	287.19%	1.213589
4	362.17%	1.509536
5	461.82%	1.961235

TABLE 5.13 – Moyenne et écart type de la distribution du ratio de couverture

Nous remarquons que le taux de couverture s’améliore d’une façon notable grâce à la revalorisation des fonds propres par les résultats annuels.

Afin de voir le comportement des taux de couverture autour de certains points particuliers et voir comment ils évoluent, nous traçons les fonctions de répartition des taux de couverture pour chaque année de projection :

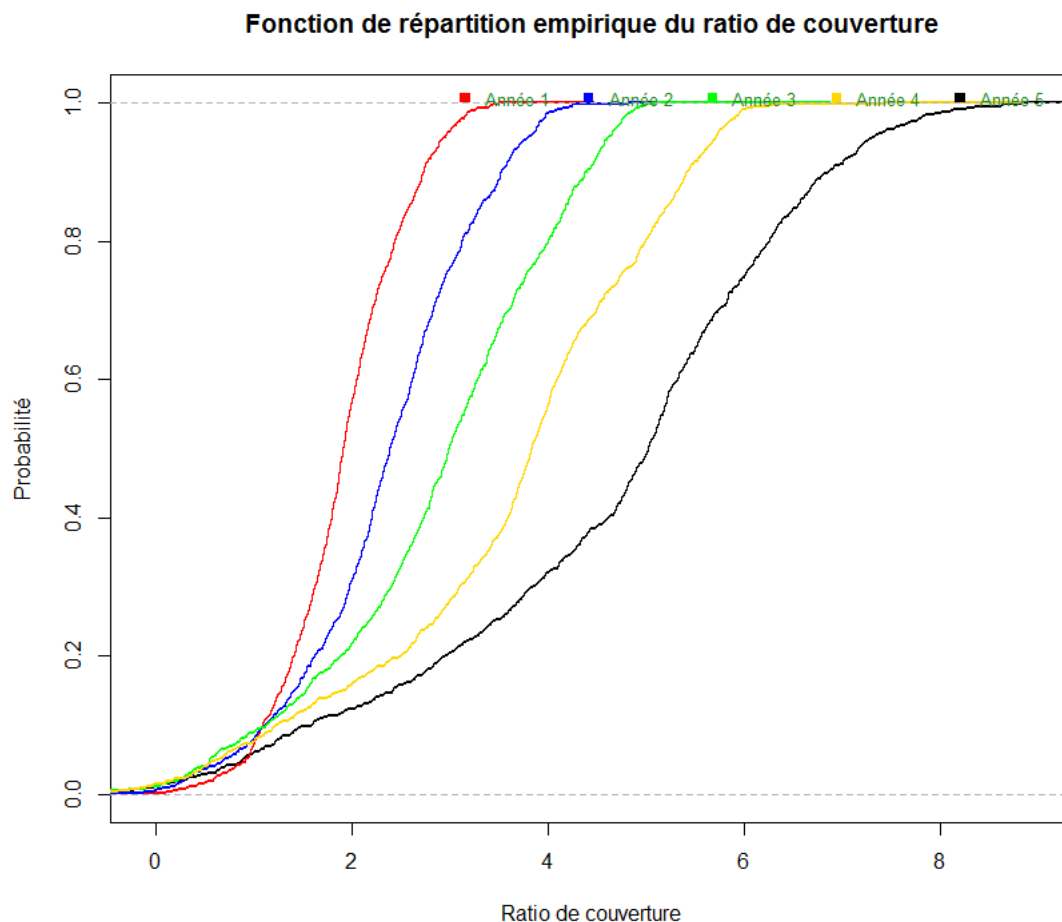


FIGURE 5.9 – Fonction de répartition empirique du taux de couverture par année de projection

Nous remarquons que pour la première année, la fonction de répartition empirique croît rapidement ; étant donné que l'ensemble de la répartition est centré autour de 200% avec un écart-type assez faible de 0.63, nous constatons que la probabilité que le ratio de couverture soit supérieur à 200% tend rapidement vers 1 dès que nous dépassons 200%. Pour les autres années, le ratio de couverture s'améliore d'une façon notable et la fonction de répartition empirique a tendance à croître plus lentement.

D'un point de vue stratégique, il est intéressant de changer la politique de distribution des dividendes, et voir l'impact sur le taux de couverture. L'outil permet de tester différentes politiques afin de respecter un ratio de couverture cible. L'objectif de l'*ORSA* étant de piloter les stratégies d'assurance A, nous allons supposer que l'entreprise a exprimé son appétence aux risques de la façon suivante :

Appétence aux risques : *“La probabilité de rester à un taux de couverture du capital réglementaire de 120% doit être supérieure à 90% pour chacune des 5 années du plan stratégique”*

Pour voir si la politique actuelle permet de respecter cette contrainte, nous allons calculer le quantile à 10% de la distribution du ratio de couverture pour chaque année de projection. Le tableau ci-après montre les résultats obtenus :

Année	Quantile à 10%
1	127.82%
2	131.18%
3	131.61%
4	151.35%
5	178.33%

TABLE 5.14 – Le quantile à 10% du taux de couverture

Nous constatons que la politique actuelle de distribution des dividendes permet de respecter l'appétence aux risques formulée par l'entreprise. Nous pouvons donc tester plusieurs politiques afin de voir dans quelle mesure elles peuvent correspondre à l'appétence d'Assurance A.

Nous supposons que l'entreprise a fait le choix de verser en dividendes une partie de ses résultats après impôts. Nous calculons par la suite le quantile à 10% des distributions du ratio de couverture pour des pourcentages des résultats affectés aux dividendes entre 2% et 10% :

% du résultat affecté aux dividendes	2%	4%	6%	7%	8%	10%
année 1	125.66%	123.51%	121.35%	120.27%	119.19%	117.04%
année 2	128.95%	126.73%	124.51%	123.39%	122.28%	120.06%
année 3	129.38%	127.15%	124.91%	123.80%	122.68%	120.45%
année 4	138.92%	136.49%	134.07%	132.85%	131.64%	129.21%
année 5	175.16%	172.00%	148.83%	147.25%	165.66%	162.50%

TABLE 5.15 – Quantile à 10% pour différentes politiques de distribution de dividendes

Nous remarquons que l'entreprise peut se permettre de verser jusqu'à 7% de son résultat annuel après impôts en dividendes tout en respectant son appétence aux risques.

Nous avons montré à travers cet exemple simple qu'il est possible d'avoir des résultats de projection facilement interprétables. Le point le plus chronophage du modèle est le calcul des facteurs déflateurs. Passé cette étape, les calculs se simplifient et différentes hypothèses peuvent être modifiées et testées pour voir l'impact sur les distributions des ratios de couverture.

Quels indicateurs de risque pour l'ORSA épargne ? Il est important de déterminer un ensemble d'indicateurs nous permettant d'analyser les scénarios les plus défavorables dans notre cas. Étant donné que l'étude porte sur les risques financiers, nous pouvons identifier les risques suivants :

- Hausse des taux : L'actif sera impacté par une hausse des taux qui aura comme impact la baisse de la valeur liquidative des obligations. L'assureur est exposé à ce risque à hauteur de 80% de son portefeuille d'actif. Toutefois, il convient de remarquer qu'en général il devient très vite difficile de voir l'impact direct d'une hausse des taux étant donné qu'il est lié à différents autres facteurs.

Une illustration de la présentation de Gildas et Henge [2012][GR12] montre la difficulté d'interprétation de l'impact d'une hausse des taux dans le cadre d'un exercice *ORSA*

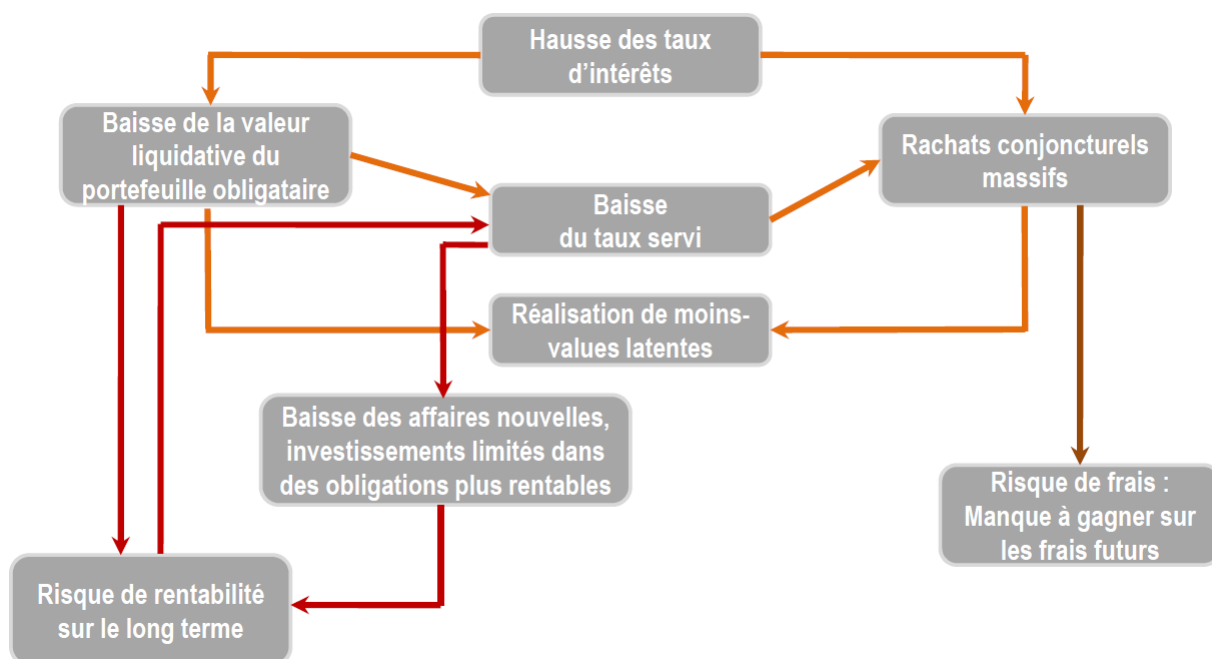


FIGURE 5.10 – Impact d'une hausse des taux dans le cadre d'un exercice *ORSA*

- Baisse des taux : ce risque impacte le passif dans notre cas. En effet Assurance A doit garantir un taux minimum garanti même en période de taux bas. Ce point aura comme impact le chargement du *Best Estimate* et des *SCR* qui sont proportionnels au *Best Estimate*. Le taux de couverture va donc baisser dans ce cas.
- Baisse du rendement des actions : ce risque impacte les 20% d'actions présentes dans l'actif d'Assurance A. Il a comme impact de diminuer la valeur de l'actif et les mêmes conséquences que la hausse des taux illustrés dans la figure 5.10.
- Hausse des *spread* : concerne le portefeuille obligataire présent dans l'actif d'Assurance A. Il a comme impact de diminuer la valeur liquidative de ces obligations et a les mêmes conséquences que la hausse des taux.

En réalité, ces différents scénarios vont être combinés. Par exemple, nous pouvons constater pour l'actif une baisse globale de rentabilité qui combine une hausse des taux et une baisse du rendement des actions. Il est intéressant de voir sur les scénarios les plus défavorables pour Assurance A comment se présentent ces risques.

Nous illustrons un exemple de scénario qui a impacté négativement le taux de couverture de la première année parmi les 1000 simulations réalisées :

Exemple de scénario défavorable :

Variable d'intérêt	Valeur
<i>Best Estimate</i>	20.83385
<i>SCR</i>	2.017025
Valeur de l'actif	21.05881

FIGURE 5.11 – Variables d'intérêt du scénario défavorable

Pour ce scénario, le taux de couverture est de 32%. Les taux ont baissé ce qui a engendré une augmentation de la valeur du *Best Estimate*. Il est dans ce cas supérieur de 5% par rapport à la moyenne. L'option du taux minimum garanti présente dans ce cas un réel chargement pour l'assureur. La figure qui suit illustre le prix de cette option pour une unité de prime payée pour les trois taux minimums garantis ² :

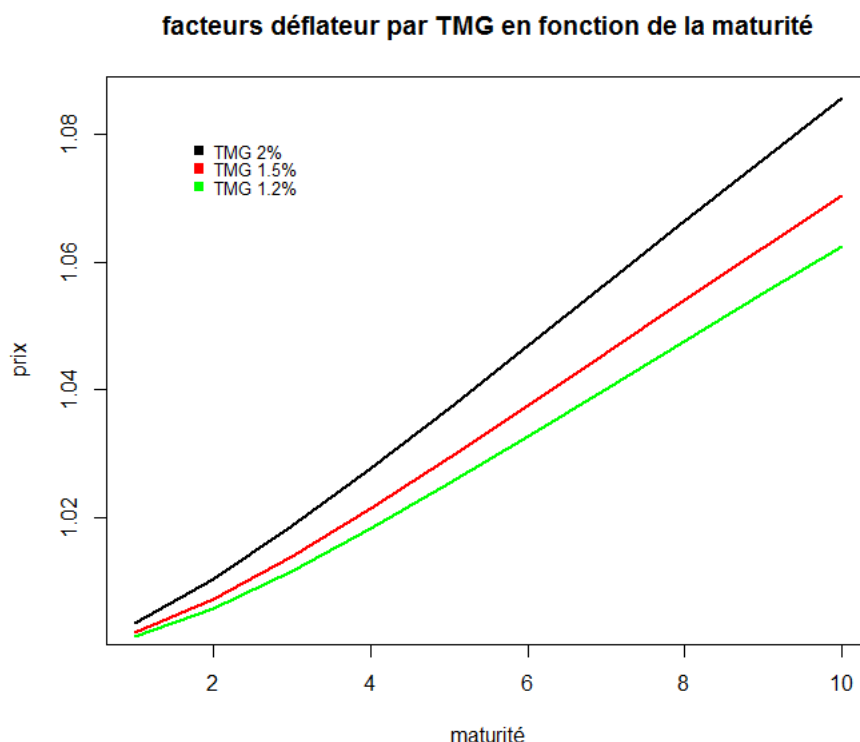


FIGURE 5.12 – Prix de l'option taux minimum garanti par maturité

La valeur de l'actif a aussi baissé, elle est inférieure de 18% par rapport à la moyenne constatée pour la première année. Cela est dû dans un premier temps à la baisse de 20% du rendement des actions et à l'augmentation des *spread* des obligations du portefeuille d'assurance A.

La valeur du *SCR* est quant à elle moins importante que la valeur moyenne de la première année. Toutefois, la combinaison de la diminution de la valeur de l'actif et l'augmentation du *Best Estimate* vient diminuer les fonds propres d'Assurance A et la baisse du *SCR* est relativement moins rapide.

2. Il s'agit ici de la valeur que va provisionner l'assureur ou la valeur des facteurs déflateurs Omega pour une unité de prime de cotisation

5.8 Erreurs d'estimation du *Best Estimate*

Nous allons voir dans cette partie dans quelle mesure l'utilisation des méthodes de *Monte Carlo* peut induire des erreurs d'estimation du *Best Estimate*. L'idée est d'estimer cette erreur et voir comment elle se comporte en fonction des deux paramètres : nombre de discrétisations et nombre de simulations. Les définitions et résultats du chapitre 4 sont utilisés dans cette section.

Supposons dans un premier temps qu'Assurance A a fait le choix d'une discrétisation annuelle pour le calcul du *Best Estimate*, et supposons aussi que la méthode du calcul de l'intégrale choisie ici est la méthode des trapèzes.

Nous allons estimer l'erreur du calcul du *Best Estimate* à l'instant initial. L'erreur calculée par la suite est notée ε avec :

$$\varepsilon = BE^{FF}(0) - \hat{BE}^{MC}(0)$$

Avec $BE^{FF}(0)$ le *Best Estimate* calculé à l'instant initial avec les formules fermées et $\hat{BE}^{MC}(0)$ son estimation à l'aide des méthodes de *Monte Carlo*.

La figure qui suit illustre l'évolution des erreurs d'estimation pour les deux discrétisations, et compare la valeur obtenue de l'erreur pour chaque méthode :

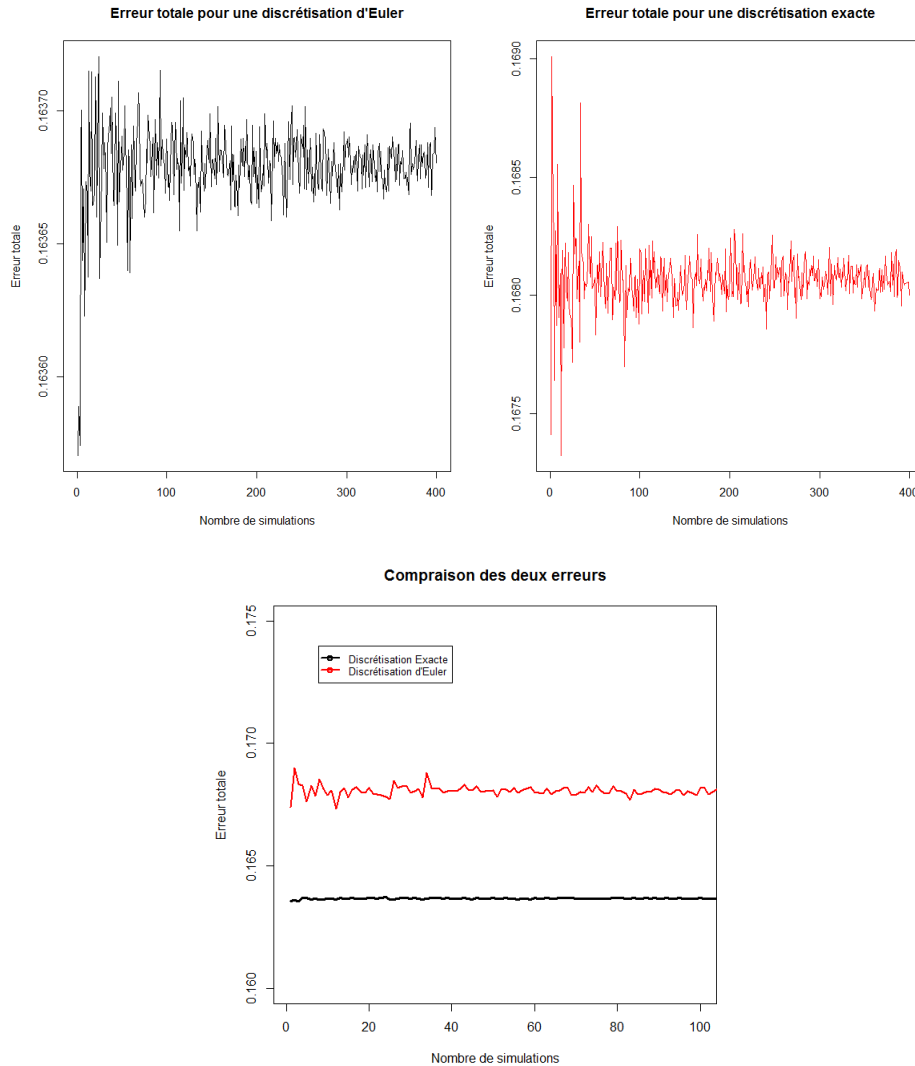


FIGURE 5.13 – Comparaison de l'erreur totale pour les deux discrétisation : *Euler* et exacte

Nous remarquons dans un premier temps que les deux méthodes sous-estiment la valeur du *Best Estimate* dans le cas d'une discrétisation annuelle du taux. La méthode d'*Euler* a une erreur d'estimation plus

importante que celle de la discrétisation exacte, comme prévu.

Toutefois, nous notons que pour un pas annuel de discrétisation, le fait d'augmenter le nombre de simulations ne réduit pas forcément l'erreur totale. Pour la méthode d'*Euler*, l'erreur converge vers une valeur proche de 0.168, alors que pour une discrétisation exacte, l'erreur converge vers 0.163. Dans le cas d'une discrétisation d'*Euler*, cette erreur présente 4.65% de la valeur des fonds propres alors qu'elle présente 4.53% des fonds propres pour une discrétisation exacte.

Ces deux limites correspondent à l'erreur systématique (définie selon 4.11) commise à partir du moment où nous avons fait le choix d'un pas annuel de discrétisation et d'une méthode d'intégration des trapèzes. Afin de pouvoir réduire cette erreur, il convient donc d'augmenter le nombre de discrétisations et de changer éventuellement la méthode d'approximation de l'intégrale.

En suivant le même raisonnement que 4.4 nous allons augmenter progressivement le nombre de simulations et le nombre de discrétisations pour voir l'impact sur l'erreur totale :

N	M	Discrétisation exacte		Discrétisation d' <i>Euler</i>	
		$EQM(N, M)$	Rapport des EQM	$EQM(N, M)$	Rapport des EQM
4	16	0.02271297	2.248617	0.02382604	2.275957
8	256	0.01010086	1.896785	0.01046858	1.907488
32	1024	0.005325253	1.753906	0.005488149	1.776621
64	4096	0.003036224	1.493892	0.003089093	1.490469
128	16 384	0.002032426	1.291092	0.002072564	1.324788
256	65 536	0.001574192		0.001564449	
			Moyenne =1.736858		Moyenne =1.755065

TABLE 5.16 – Évolution de la valeur de l'EQM en fonction de M et N

où N est le nombre de discrétisations, M le nombre de simulations et EQM l'erreur quadratique moyenne sur 50 échantillons d'erreur.

Nous constatons qu'en général, l' EQM est moins importante dans le cas d'une discrétisation exacte. En effet, elle est en moyenne inférieure de trois points par rapport à une discrétisation d'*Euler*. En augmentant le nombre de simulations et le nombre de discrétisations, cet écart est réduit car il passe de quatre points pour 4 discrétisations et 16 simulations à 1 point pour 256 pas de discrétisations et 65 536 simulations. Nous notons aussi que nous n'avons pas pu faire une simulation pour 512 discrétisations et 262 144 simulations, et ce pour une raison de limite de stockage dans R .

Nous remarquons aussi que le rapport des erreurs pour des N et M choisis est relativement constant et a une valeur moyenne proche de 2. Cela laisse penser que le théorème de *Duffie et Glynn* [1995][DD95]³ est vérifié pour le calcul des erreurs du *Best Estimate*.

3. Voir 4.4 pour plus de détails concernant ce théorème

Chapitre 6

Implémentation et optimisation des temps de calcul

L’une des contraintes majeures des implémentations réalisées dans le cadre de ce mémoire est le temps de calcul. Ce dernier chapitre expose la problématique rencontrée et les solutions mises en places afin de la résoudre.

6.1 Contexte

Le monde de la finance de marché a été précurseur dans l’optimisation des temps de calcul. En effet, les opérateurs de marché ont toujours été à la quête de plus de rapidité dans les calculs pour deux raisons : premièrement, il y a une volonté d’être plus rapide que la concurrence sur des produits standards. Deuxièmement, il y a un besoin d’implémentation de modèles très sophistiqués et de contrats exotiques nécessitant un temps de calcul plus important. Les méthodes de *Monte Carlo* sont souvent utilisées dès qu’il s’agit d’un problème complexe en grande dimension. Cependant, ces méthodes présentent l’inconvénient de la lenteur d’utilisation qui s’accroît avec la volonté d’avoir plus de précision.

Les méthodes proposées pour répondre à cette problématique sont diverses, nous citons par exemple la programmation stochastique (cf. Kall et Wallac [1994] [KP94] et Birge et Louveaux [BJ97]), le recours à la parallélisation des calculs (cf. Skillicorn et Talia [1996] [SD96]) et l’exploitation et la mise en œuvre de grilles (cf. Pommier [2007] [Pom07]). Le lecteur pourra se référer à Moritsch [2006] [Han06] pour plus de références concernant ces méthodes.

les assureurs commencent maintenant à prendre en compte le paramètre temps de calculs lors des choix des modèles, comme ils le témoignent les propos de *Barri & Hibbert* pour les approches SdS brutes :

“le calcul du SCR pour un passif complexe d’un assureur vie nécessite le recours aux approches Sds, mais le temps de calcul considérable associé aux divers modèles ALM peut signifier que cette technique n’est pas toujours pratique. Les assureurs sont donc à la recherche de nouveaux modèles qui produisent des résultats précis et qui prennent moins de temps...”

Une difficulté supplémentaire a été introduite par la cadre *ORSA* qui consiste à non seulement calculer les *SCR*, mais aussi à être capable de les projeter sur un horizon du plan stratégique de l’entreprise.

À l’heure actuelle, nous n’avons pas pu trouver des références traitant les problématiques des temps de calcul dans le cadre de solvabilité II en France. La seule référence, à notre connaissance, qui détaille la mise en place d’un système de calcul distribué est le travail de Castellani et Passalacqua [2010] [CG10]. Le cadre de ce travail concerne la valorisation sous Solvabilité II de contrats d’épargne italiens incluant des options de revalorisation en fonction du taux minimum garanti et un taux de rendement annuel¹.

1. Voir la présentation de Dang-Nguyen [2014] [DN14] pour plus de détails concernant ces contrats

Principe d'un *Dynamic Investment Strategy with Accounting Rules* (DISAR) : Le *DISAR* implémenté par Castellani et Passalacqua [2010] [CG10] est un système composé d'un outil de gestion de bases de données et de plusieurs serveurs de calcul. L'architecture du *DISAR* et l'interaction entre ses différentes composantes sont illustrées dans le graphique suivant :

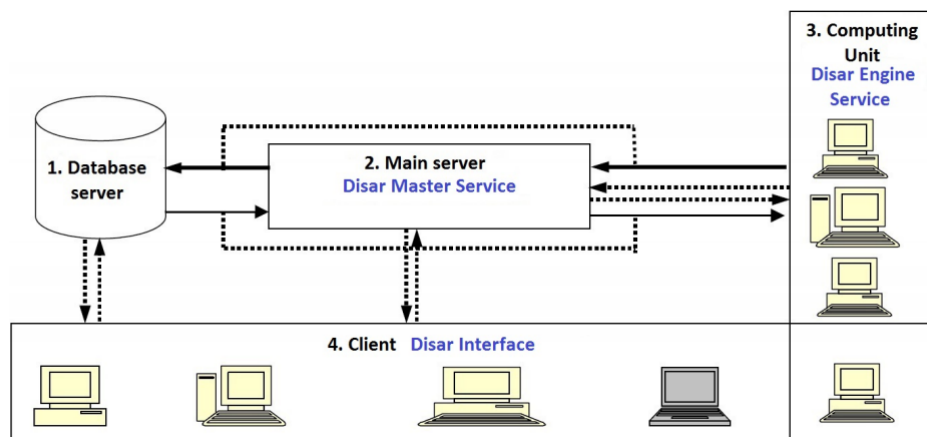


FIGURE 6.1 – Architecture d'un système DISAR

Le système est constitué des éléments suivants :

- une base de données (*Database server*) : Stocke l'information des actifs, passifs et marché ;
- un organisateur (*DISAR Master Server*) : Gère et ordonne les calculs ;
- des moteurs pour les calculs (*DISAR Engine Service*) : Moteur pour les calculs actuariels et financiers ;
- une interface (*DISAR Interface*) : Permet de lancer et d'accéder aux résultats des calculs.

Résultats du calcul distribué du DISAR Castellani et Passalacqua [2010] [CG10] considèrent dans leur illustration des temps de calcul de deux sociétés A et B :

- la société A a 5 millions de contrats agrégés pour avoir 0.35 millions *model point*. L'actif est supposé représenté par 30 fonds différents ;
- la société B a 1 million de contrats agrégés en 0.4 millions *model point* et un actif constitué de 30 fonds.

Les résultats des simulations sur 100 ans pour la valorisation des contrats des deux sociétés sont dans le tableau ci-après :

	Société A		Société B	
Type de calcul	distribué	série	distribué	série
Pas mensuel	1h14	34h28	2h12	53h33
Pas annuel	0h43	17h45	0h31	11h31

TABLE 6.1 – Performances du *DISAR*

Il est clair d'après ce dernier tableau que les temps de calcul sont réduits d'une façon notable en passant à un calcul distribué à l'aide d'un système *DISAR*.

6.2 Problématique du temps de calcul dans le modèle *ORSA*

Le choix a été fait de développer le modèle de projection sous *R* (cf. R Development Core Team [2013] [R13]). En effet, l'entreprise a voulu capitaliser sur des outils déjà implémentés.

R est un langage de programmation interprété qui présente l'avantage d'être performant pour les calculs matriciels. Il est entièrement gratuit, très complet et sa programmation est facile comparée à d'autres langages procéduraux ou orientés objet. Toutefois, les temps de calcul sous *R* deviennent rapidement assez importants pour les simulations de grands nombres d'échantillons, pour lesquelles nous cherchons à avoir plus de précision.

Il devient donc inéluctable de chercher des méthodes et des pratiques visant à réduire le temps de calcul des simulations.

Nous comparons dans cette partie les différentes méthodes de simulation utilisées dans le mémoire et la démarche adoptée pour réduire le temps de calcul. Il s'agit d'une approche *ad hoc* adaptée à la problématique et à la structure du code *ORSA* et ne prétend pas être valable pour toutes les problématiques des temps de calcul.

Les calculs ont été réalisés sur un ordinateur *Intel (R) Core (TM) i3-4310* de *CPU 3.40 GHz* et de mémoire *RAM 4.00 Go*.

Avant de commencer l'analyse, il convient de noter qu'il existe un ensemble de pratiques (décrites dans Guillet [2009] [Gui09] par exemple) qui permettent de gagner un temps considérable lors des simulations. Nous les citons ici pour rappel :

- la vectorisation : *R* étant un logiciel de calcul matriciel, il est plus efficace d'écrire du code qui sera exécuté de manière vectorielle ;
- éviter, quand cela est possible, l'utilisation des boucles **for** imbriquées. Le but est de passer à une version vectorielle des calculs sans boucles imbriquées. Une solution est d'appliquer les fonctions de la famille **.apply** ;
- quand il s'agit d'une boucle **for** doublement imbriquée, la fonction **outer()** permet de réduire considérablement le temps de calcul. Toutefois cette fonction peut prendre plus de temps qu'une seule boucle **for** (non imbriquée). Voir l'exemple du chapitre 3.3 de Robert et Casella [2010][RC10]
- l'utilisation des objets de type **list()** à la place des matrices dès que cela est possible.

Ce premier travail sur le code nous a permis d'avoir un gain de 20 % sur le temps total du calcul.

Nous avons constaté lors de l'implémentation du modèle que les deux étapes les plus chronophages sont la projection des facteurs de déformation des courbes de taux et le calcul des facteurs déflateurs Ω 2.12. Le tableau qui suit illustre le temps correspondant à chaque étape du calcul *ORSA* :

	Étape	Temps de calcul
1	Ajustement des différentes courbes de taux (dont les courbes choquées)	0.85 secondes
2	Projection des facteurs de déformation des courbes de taux	2h 8 minutes
3	Calcul des facteurs déflateurs Ω et des prix zéro-coupon	
4	Calcul des <i>Best Estimate</i> initial et projetés	6.21 secondes
5	Projection de l'actif	0.02 secondes
6	Calcul des variables d'intérêt et projection bilancielle	10 minutes 45 secondes

TABLE 6.2 – Étapes de projection modèle *ORSA*

Le but de l'optimisation est donc de réduire les temps de calcul des deux étapes 2 et 3. Une première solution consiste à introduire un processus de calcul par parallélisation. Le package *snowfall* a été utilisé pour cela et a permis un gain de 32 % de temps de calcul.

La deuxième étape consiste à analyser en détail les fonctions des deux étapes 2 et 3. Pour cela, nous avons utilisé les méthodes de *profiling* qui permettent de détailler les temps de calcul de chaque partie du code. Pratiquement le package *profr* a été utilisé.

Les deux étapes 2 et 3 s'articulent de la façon suivante pour chaque scénario de projection :

1	Projection des facteurs de déformation (taux court, taux long, convexité)
2	Reconstitution de la courbe <i>Nelson et Siegel</i> [1987] [NC87]
3	Ajustement d'une courbe <i>Vasicek</i> [1977][VAS77] risque neutre
4	Calcul du facteur Ω et des prix zéro-coupon correspondant à la projection

TABLE 6.3 – Articulation des deux étapes 2 et 3

Algorithme 6.1 Algorithme de l'articulation des étapes 2 et 3

for (i in (1 :Nombre de simulations probabilité historique))

TauxCourt (i) = simulation Taux Court

TauxLong (i) = simulation Taux Long

Convexité (i) = simulation convexité

Courbe *Nelson et Siegel* (i) = Reconstitution (TauxCourt (i), TauxLong (i), Convexité (i))

Courbe *Vasicek* (i) = Ajustement Vasicek (Courbe *Nelson et Siegel* (i))

for (j in (1 :Maturité maximale des cotisations))

Prix zéro-coupon (i , j) = Calcul prix zéro-coupon (Courbe *Vasicek* (i) , j)

end for

for (j in (1 :Maturité maximale des prestations))

for (k in (liste des taux minimums garantis))

$\Omega(i, j, k)$ =calcul par formule fermée (i , k , j)

end for

end for

end for

Nous notons dans un premier temps que les trois premières étapes sont faites une seule fois pour chaque scénario de simulation. Toutefois, le calcul des prix des zéro-coupon est fait pour chaque maturité de cotisation et celui du facteur omega Ω pour chaque maturité de prestation et chaque taux minimum garanti.

La première analyse concerne les calculs par formules fermées et la deuxième les performances des méthodes de *Monte Carlo*.

Calculs par formules fermées : Nous observons que l'étape la plus chronophage est le calcul des facteurs Ω . Elle concentre à elle seule 90 % du budget global du temps de calcul.

En effet, en revenant à 3.17 :

$$\pi_2(0, t) = \sum_{j=1}^{2^{m_t}} e^{t c_j G - t c_j \Lambda + \frac{1}{2} t c_j \Sigma c_j} \Phi(\alpha_j, \hat{c}_j \underline{\Sigma} \hat{c}_j)$$

nous constatons que la formule de récursivité doit être évaluée dans $2^{\text{maturité}}$ points. Pour une maturité de 10 ans par exemple, cela donne 1024 points d'évaluation et atteint 1 million de points pour une maturité de 20 ans. Toutefois, une analyse plus fine montre que le calcul de la fonction de répartition de la loi normale multivariée est l'étape qui prend le plus de temps.

profr donne l'illustration suivante pour une maturité de 10 ans :

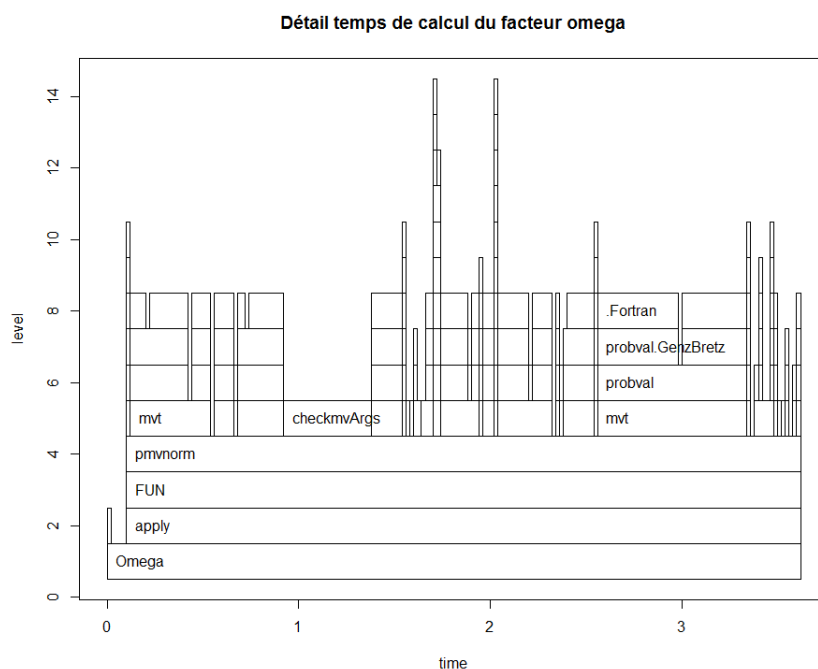


FIGURE 6.2 – *Profiling* des étapes de calcul de $\pi_2(0, 10)$

Nous constatons alors que l'application de la fonction `pmvnorm()` est l'étape la plus chronophage. En effet, elle prend 97.3 % du temps global pour l'évaluation de $\pi_2(0, 10)$. Il s'agit d'une fonction du package `mvtnorm` implémentée par Genz et Bretz [2009][GA09] sous *Fortran* pour le calcul de la fonction de répartition de la loi normale multivariée.

Le temps de calcul des facteurs omega est donc un enjeu crucial pour la projection. La figure qui suit illustre le temps de calcul de ce facteur par maturité du contrat :

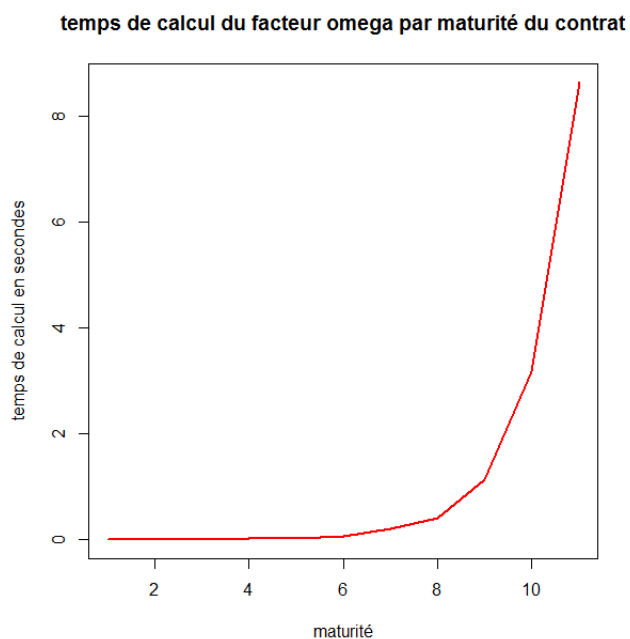


FIGURE 6.3 – Évolution du temps de calcul du facteur omega en fonction de la maturité du contrat

Nous notons alors le caractère exponentiel de la croissance des temps de calcul pour l'évaluation des facteurs omega.

Calculs par méthodes de Monte Carlo : L'erreur des méthodes de *Monte Carlo* étant estimée dans le chapitre 4, il s'agit à ce stade de prendre en compte le paramètre "temps de calcul" et de voir dans quelle mesure nous pouvons l'optimiser.

L'algorithme du calcul de Omega par méthode de *Monte Carlo* est le suivant :

Algorithme 6.2 algorithme du calcul de Omega par méthode de *Monte Carlo*

M = Nombre de simulations risque neutre

N = Nombre de discrétisation

```

for ( i in (1 :M))
    TauxCourt (i, N) = simulation Taux Court (N)
    RdmentTauxCourt(i, N) = EstimationIntegrale (TauxCourt (i, N))
    Réalisation(i,N) =  $\exp[(TMG - RdmentTauxCourt(i, N)) \bigvee 0]$ 
end for

```

$\Omega(N,M) = \text{moyenne} (\text{Réalisation}(i,N))$

L'analyse des temps de calcul montre que l'étape de simulation est la plus consommatrice en termes de temps de calcul. Elle consomme 96 % du budget global pour 10 discrétisations et 1000 simulations par exemple. Nous nous proposons alors de comparer les temps de simulations pour une discrétisation exacte et une discrétisation d'*Euler* pour une maturité de 5 ans :

		Temps de calcul en secondes	
N	M	Discrétisation exacte	Discrétisation d' <i>Euler</i>
4	16	≈ 0.00	≈ 0.00
8	256	≈ 0.00	≈ 0.00
32	1024	0.04	0.02
64	4096	0.19	0.2
128	16 384	2	1.94
256	65 536	26.51	24.60

TABLE 6.4 – Comparaison des temps de calcul des simulations

Nous remarquons qu'en général, la discrétisation d'*Euler* prend moins de temps que la discrétisation exacte. Par exemple, le temps est réduit de 7 points pour 65 536 simulations et 256 discrétisations. En effet, le nombre d'opérations élémentaire dans la discrétisation d'*Euler* est moins important que celui de la discrétisation exacte. Cela permet de réduire le temps de calcul.

Une méthode d'optimisation de ces temps de calcul consiste à implémenter les simulateurs sous *C/Fortran*. En effet, étant donné que le cœur du programme *R* est codé en *C*, il permet d'introduire des fonctions *C/Fortran* sous forme de bibliothèques dynamiques (*DLL*) et de les utiliser afin d'accélérer les calculs. Le lecteur pourra se référer à *R Extensions* [2009] [R09] pour les détails concernant l'implémentation et la compilation et à l'annexe 2 pour un exemple de code *C/Fortran*.

Le tableau qui suit illustre les résultats obtenus en passant par une *DLL C/Fortran* :

N	M	Temps de calcul <i>DLL C/Fortran</i> en secondes	
		Discrétisation exacte	Discrétisation d'Euler
4	16	≈ 0.00	≈ 0.00
8	256	≈ 0.00	≈ 0.00
32	1024	0.08	≈ 0.00
64	4096	0.33	0.09
128	16 384	3.03	1.11
256	65 536	27.26	12.09

TABLE 6.5 – Comparaison des temps de calcul des simulations *DLL*

Nous remarquons que le passage par une discrétisation d'*Euler* à l'aide d'une *DLL* réduit le temps de calcul. En effet, il est trois fois moins important qu'une discrétisation exacte avec *DLL* et deux fois moins important que les discrétisations sous *R*. Toutefois, nous notons aussi qu'une discrétisation exacte à l'aide d'une *DLL* ne permet pas forcément de réduire le temps de calcul ; *R* est plus performant pour la discrétisation exacte car *C/Fortran* est plus lent quand il s'agit d'évaluer la fonction exponentielle utilisée dans cette discrétisation.

Nous pouvons conclure qu'un passage par une discrétisation d'*Euler* avec une *DLL* permet de réduire de moitié le temps de calcul des facteurs omega à l'aide des méthodes de *Monte Carlo*.

Monte Carlo Vs Formules fermées Nous avons vu dans les résultats de l'application du chapitre 5 que l'erreur totale d'approximation du *Best Estimate* est de l'ordre de 0.2% pour 128 discrétisations et 16 384 simulations pour une discrétisation d'*Euler*. En introduisant le paramètre "temps de calcul", nous comparons les performances totales des deux étapes 2 et 3 du tableau 6.2, pour un calcul par formules fermées et un calcul par une discrétisation d'*Euler* accélérée par une *DLL* :

Méthode	Temps de calcul
Formules fermées	2h 8 minutes
Discrétisation d'Euler accélérée	1h 40 minutes

TABLE 6.6 – Comparaison des temps de calcul par formules fermées et discrétisation d'*Euler*

Au total, nous pouvons dire qu'un passage par des méthodes de *Monte carlo* permettent de réduire le temps de calcul pour une discrétisation d'*Euler* accélérée. En effet, ils permettent un gain total de 20 % du temps de calcul pour une erreur estimée de 0.2 %.

Chapitre 7

Conclusion

Le modèle exposé ici permet donc la projection stochastique du bilan économique d'un organisme assureur dans le cadre de contrats d'épargne en Euros.

Le choix de la prise en compte des options cachées par des formules fermées conduit à des performances compatibles aux exigences opérationnelles de l'*ORSA*. Le modèle décrit évite les complications de l'excès de paramétrisation et privilégie une meilleure intelligibilité des calculs et des résultats.

L'extension proposée dans ce travail entend prolonger les travaux de Bonnin et al. [2014][BF14a] et Bonnin et al. [2014] [BF14b]. Elle permet la prise en compte du rendement d'un actif ce qui la rend plus adaptée à la fois à la politique de participation aux bénéfices de l'assureur, et en même temps à la particularité de son actif. L'étude de sensibilité a permis une meilleure compréhension de la variation des prix des options taux minimum annuel garanti et participation aux bénéfices. Un passage par des méthodes de *Monte Carlo* peut être envisagé étant donné que son erreur a été estimée.

La prise en compte du temps de calcul est un enjeu majeur pour le processus *ORSA*. L'optimisation proposée dans le cadre de ce mémoire permet de mettre en avant quelques techniques utilisées pour contourner cette problématique.

Toutefois, nous notons que ce modèle ne prétend pas remplacer les calculs du Pillier 1 de solvabilité II. Il entend se baser sur les résultats établis pour ce Pillier et les utiliser afin de procéder aux projections pluriannuelles. Le calibrage est donc une étape importante de la mise en place de ce modèle ; il vise à vérifier que les résultats des calculs obtenus par formules analytiques se rapprochent de la valeur du *Best Estimate* calculée dans le cadre du Pillier 1.

L'approche présentée dans ce mémoire a plusieurs limites :

- Elle ne concerne que les risques financiers et ne prend pas en compte d'autres risques majeurs pour les contrats d'épargne : longévité (cf. Juillard et al. [2008] [JM08]) et risque commercial (cf. Guibert et al. [2012] [GQ12]) ;
- Le calibrage de certains paramètres du modèle peut être assez compliqué et peut nécessiter une étude détaillée du profil de l'assureur. Par exemple, le paramètre de la sensibilité de l'assuré à la variation de la sous-performance peut présenter une complexité d'estimation. Le paramétrage du modèle de *Nelson et Siegel* [1987] [NC87] est aussi un point important de la modélisation car il détermine les déformations futures de la courbe réelle.
- Les taux minimums annuels garantis sont supposés connus à l'avance ; cette hypothèse n'est pas réaliste dans la mesure où l'assureur propose pour chaque début d'année un taux minimum annuel garanti en fonction des paramètres du marché. Une solution peut consister à faire une étude en amont sur l'évolution de ces taux et puis de les intégrer dans le modèle. Toutefois, nous notons que pour un taux minimum garanti contractuel, les formules proposées répondent parfaitement au besoin de projection.
- La capacité à utiliser ces formules dépend intimement de la formule utilisée pour le taux servi. Il s'agit certes d'une formule générale fonction du rendement d'un actif de type *Black & Scholes* [1973][FB73] mais peut ne pas refléter la vraie politique prévue par l'assureur.

Néanmoins, cette classe de modèles est une voie de recherche prometteuse. Les limites citées *supra* peuvent présenter des axes intéressants d'amélioration de cette classe de modèles. Nous notons aussi d'autres applications de cette classe dans le cadre de l'agrégation de contrats d'assurance vie par exemple (cf. Goffard [2012] [Gof12])

Différents points peuvent être améliorés et des extensions peuvent être proposées. Nous citons par exemple la possibilité d'ajuster une loi normale sur le rendement total de l'actif de l'assureur ; cette étape passe par l'approximation d'une somme de lois log-normales par une loi log-normale (cf. Dufresne [2009] [Duf09]) et entend s'adapter au profil de l'actif de l'assureur. Une deuxième extension consiste à généraliser le calcul des facteurs Ω en prenant en compte une politique de taux servi correctement représentée par un nombre limité de variables. Une troisième étude peut se concentrer sur l'optimisation des calculs des facteurs Ω en passant par un outil de calcul matriciel différent de R et l'étude détaillée du calcul de la fonction de répartition d'une loi normale multivariée utilisée pour le calcul de Ω (cf. Genz et Bretz [2009][GA09]). En effet, le problème peut être transposé à la recherche d'une approximation analytique de la fonction de répartition d'une loi normale multivariée avec une contrainte de temps de calcul ; voir les travaux de Mi et al.[2009][MX09].

Bibliographie

- [AA14] Argus-Assurance. Dossier assurance vie produit du 11 juillet. 2014.
- [ACP13] ACPR. Enseignements de l'exercice d'orsa pilote 2013. 2013.
- [ACP14] ACPR. Étude sur les taux de revalorisation des contrats individuels d'assurance vie au titre de 2013. 2014.
- [BD08] Reuss Andreas Bauer Daniel, Bergmann Daniela. Solvency ii and nested simulations a least-squares monte carlo approach. 2008.
- [BF11] Planchet Frédéric Bonnin François, Juillard Marc. Application de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux : Exemple sur les frais financiers d'une dette obligataire complexe. 2011.
- [BF14a] Planchet Frédéric Bonnin François, Juillard Marc. Best estimate calculations of savings contracts by closed formulas - application to the orsa. 2014.
- [BF14b] Planchet Frédéric Tammar Montassar Bonnin François, Combes Florent. Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'orsa. 2014.
- [BG97] Chen Zhiwu Bakshi Gudirp, Cao Charles. Empirical performance of alternative option pricing models. *Journal of finance, Volume 52, Issue 5 (Dec. 1997)*, 1997.
- [BJ97] François Louveaux Birge John. *Introduction to Stochastic Programming*. 1997.
- [BP98] Priouret Pierre Baldi Paolo, Mazliak Laurent. *Martingales et chaînes de Markov*. 1998.
- [CG10] Passalacqua Luca Castellani Gilberto. Applications of distributed and parallel computing in the solvency ii framework : The disar system. *Euro-Par 2010 Workshops*, 2010.
- [DD95] Peter Glynn Darrell Duffie. Efficient monte carlo simulation of security prices. 1995.
- [Den12] Gérome Denis. Intérêt des contrats d'épargne euros diversifiés par rapport aux contrats multi-supports. *Mémoire d'actuariat*, 2012.
- [DH92] Andrew Morton David Heath, Robert Jarrow. Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation. 1992.
- [DL09] Loisel Stéphane Devineau Laurent. Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique solvabilité ii. 2009.
- [DN14] Stephane Dang-Nguyen. La valorisation des polices-vie italiennes de type gestione separata : Problèmes théoriques et pratiques. *Présentation dans le cadre du séminaire d'actuariat à l'EURIA*, 2014.
- [Duf99] Darrell Duffie. Dynamic asset pricing theory. 1999.
- [Duf09] Daniel Dufresne. Sums of lognormals. *Centre for Actuarial Studies University of Melbourne*, 2009.
- [FB73] Myron Scholes Fischer Black. The pricing of options and corporate liabilities. 1973.
- [FFS14] FFSA. L'assurance vie à fin juin 2014 : Estimations provisoires. 2014.
- [Fré14] Planchet Frédéric. Modèle de durée. *Support de cours de l'ISFA*, 2014.
- [FS07] Le Prévédic Maryse Fauvel Stéphanie. Analyse des rachats d'un portefeuille vie individuelle : Approche théorique et application pratique. *Mémoire d'actuariat*, 2007.
- [GA09] Bretz Frank Genz Alan. *Computation of Multivariate Normal and t Probabilities*. Springer-Verlag, 2009.
- [GL69] Skorokhod Anatoliy Gikhman Losif. Introduction to the theory of random processes. 1969.
- [Gob03] Emmanuel Gobet. Contributions à la simulation et à l'analyse de discrétisation et de processus, et applications. 2003.

- [Gof12] Pierre-Olivier Goffard. Optimisation de l'agrégation d'un portefeuille de contrat d'assurance vie. 2012.
- [GQ12] Planchet Frédéric Guibert Quentin, Juillard Marc. Measuring uncertainty of solvency coverage ratio in orsa for non-life insurance. *European Actuarial Journal*, 2 :205-226, doi : 10.1007/s13385-012-0051-7, 2012.
- [GR12] Frédéric Henge Gildas Robet. Comment intégrer les modèles prospectifs dans le pilotage de l'activité d'assurance. *Intervention à l'Université d'été de l'Institut des Actuaire*s, 2012.
- [Gui09] Alain Guillet. Toujours plus vite avec r! 2009.
- [Han06] Moritsch Hans. High performance computing in finance - on the parallel implementation of pricing and optimization models. 2006.
- [IA14] IA. Document d'orientation orsa. 2014.
- [IE14] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA). Technical specification for the preparatory phase. 2014.
- [JH90] Alan White John Hull. Pricing interest-rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 1990.
- [JM08] Théron Pierre Juillard Marc, Planchet Frédéric. Perturbations extrêmes sur la dérive de mortalité anticipée. *Assurances et gestion des risques*, Vol. 76 (3), 2008.
- [Jul09] Revelen Julien. Replicating portofflio et capital économique en assurance vie. *mémoire*, 2009.
- [Kiy61] Itô Kiyosi. Lectures on stochastic processes. 1961.
- [KKA96] Svein-Arne Persson Knut K. Aase. Valuation of the minimum ruaranteed return embedded in life insurance products. 1996.
- [Kou11] Adam Koursari. A comparison between curve fitting and least squares monte carlo techniques. *barrie+hibbert*, 2011.
- [KP92] Platen Eckhard Kloeden Peter. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations (Stochastic Modelling and Applied Probability)*. 1992.
- [KP94] Wallac Stein Kall Peter. *Stochastic Programming*. John Wiley & Sons, 1994.
- [LG11] Planchet Frédéric Leroy Guillaume. Solvabilité 2 : quels standards pour le risque de marché? *La tribune de l'assurance*, 2011.
- [Lin01] Snorre Lindset. Pricing of rate of return guarantees on multi-period assets. 2001.
- [LMA13] Planchet Frédéric Le Maistre Alexadre. A proposal of interest rate dampener for solvency ii. framework introducing a three factors mean reversion model. 2013.
- [MVW13] Michael Merz Mario V. Wüthrich. Financial modeling, actuarial valuation and solvency in insurance. 2013.
- [MX09] Torsten Hothorn Mi Xuefei, Tetsuhisa Miwa. mvtnorm : New numerical algorithm for multivariate normal probabilities. 2009.
- [NC87] Siegel Andrew Nelson Charles. Parsimonious modelling of yield curves. *Journal of Business*, 60, 473-489, 1987.
- [NJ00] Bruce Tuckman Narasimhan Jegadeesh. *Advanced Fixed-Income Valuation Tools*. 2000.
- [NO10] Planchet Frédéric NTEUKAM Oberlain. Stochastic evaluation of life insurance contract : Model point on asset trajectories & measurement of the error related to aggregation. *Les cahiers de recherche de l'ISFA*, 2010.
- [NO14] Planchet Frédéric Nteukam Oblain, Jian Ren. Modèle interne en assurance vie : application des least squares monte carlo dans l'évaluation des risques. *Cahier de recherche de l'ISFA n° 2014.12*, 2014.
- [PF05] Théron Pierre Planchet Frédéric. Simulation de trajectoires de processus continus. *Belgian Actuarial Bulletin* 5, 1-13, 2005.
- [PF09] Kamega Aymric Planchet Frédéric, Théron Pierre. Scénarios économiques en assurance - modélisation et simulation. 2009.
- [PF10] Juillard Marc Planchet Frédéric, Guibert Quentin. Mesure de l'incertitude sur le taux de couverture des engagements dans un cadre orsa : le cas de l'assurance non vie. 2010.
- [Pom07] David Pommier. Introduction aux méthodes de sparse grid. 2007.
- [PSA97] Aase Knut K Persson Svein-Arne. Valuation of the minimum guaranteed return embedded in life insurance products. *The journal of Risk and Insurance*, 1997.

- [PWC14] PWC(PricewaterhouseCoopers). Solvabilité 2 - enquête orsa : état d'avancement du marché et cas pratiques. 2014.
- [R09] R. Development core team. writing r extensions. 2009.
- [R13] R. Development core team. r : A language and environment for statistical computing. 2013.
- [RC10] Casella George Robert Christian. *Introducing Monte Carlo Methods with R*. Springer, 2010.
- [RR95] Sicsic Pierre Ricart Roland. Estimation d'une structure par terme des taux d'intérêt sur des données françaises. *BULLETIN DE LA BANQUE DE FRANCE N 22*, 1995.
- [SD96] Talia Domenico Skillicorn David. Models and languages for parallel computation. 1996.
- [Tam14] Montassar Tammar. Simplifications pour le calcul best estimate des engagements d'un régime de retraite. *Mémoire d'actuariat*, 2014.
- [Thi98] Roncalli Thierry. La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique, thèse de doctorat, université de bordeaux iv. 1998.
- [TP05] Planchet Frédéric Thérond Pierre. Simulation de trajectoires de processus continus. *Belgian Actuarial Bulletin*, 2005.
- [VAS77] Oldrich VASICEK. An equilibrium characterization of the term structure. 1977.

Annexe 1

Nous explicitions dans cette partie les différentes formes d'écritures qui mènent au résultat de la formule 4.14 .

Pour le terme $\sum_{j=1}^{N-1} [\hat{r}_0 \theta^j] h$ de la formule comme suite :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{N-1} [\hat{r}_0 \theta^j] h &= \hat{r}_0 h \sum_{j=1}^{N-1} \theta^j \\
 &= \hat{r}_0 h \left[\left\{ \sum_{j=0}^{N-1} \theta^j \right\} - 1 \right] \\
 &= \hat{r}_0 h \left[\frac{1 - \theta^N}{ah} - 1 \right] \\
 &= \hat{r}_0 h \left[\frac{\theta - \theta^N}{ah} \right] \\
 &= \frac{\hat{r}_0 \theta}{a} (1 - \theta^{N-1})
 \end{aligned}$$

Pour le terme $\sum_{j=1}^{N-1} abh \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i h$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{N-1} abh \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i h &= abh^2 \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i \\
 &= abh^2 \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1 - \theta^j}{ah} \\
 &= bh \sum_{j=1}^{N-1} (1 - \theta^j) \\
 &= bh \left[(N-1) - \left\{ \left[\sum_{j=0}^{N-1} \theta^j \right] - 1 \right\} \right] \\
 &= bh \left[(N-1) - \left\{ \frac{1 - \theta^N}{ah} - 1 \right\} \right] \\
 &= bh \left[(N-1) - \frac{\theta - \theta^N}{ah} \right] \\
 &= b(N-1)h - \frac{b\theta}{a} (1 - \theta^{N-1})
 \end{aligned}$$

Pour le terme $\sum_{j=1}^{N-1} \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} h$:

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} h = \sigma h^{\frac{3}{2}} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i}$$

Pour le terme $\frac{1}{2} \tilde{r}_N h$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tilde{r}_N h &= \frac{1}{2} \left[\tilde{r}_0 \theta^N + abh \sum_{i=1}^{N-1} \theta^i + \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{N-1} \theta^i z_{N-i} \right] h \\
&= \frac{1}{2} \left[\tilde{r}_0 \theta^N + abh \frac{1-\theta^N}{ah} + \sigma \sqrt{h} \sum_{i=1}^{N-1} \theta^i z_{N-i} \right] h \\
&= \frac{1}{2} \tilde{r}_0 \theta^N h + \frac{1}{2} bh (1-\theta^N) + \sigma h \sum_{i=1}^{\frac{3}{2}N-1} \theta^i z_{N-i}
\end{aligned}$$

Pour le terme $\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} + \sum_{i=0}^{N-1} \theta^i z_{N-i}$:

Prenons le cas de $N=4$ et regroupons les termes de la somme pour chaque z_i pour i de $1 \dots 4$:

Les termes de z_1 :

$$\left[\theta^0 + \theta^1 + \theta^2 + \frac{1}{2}\theta^3 \right] z_1 = \left[\frac{1-\theta^3}{ah} + \frac{1}{2}\theta^3 \right] z_1 = \left[1 - \theta^3 \left(1 - \frac{1}{2}ah \right) \right] z_1$$

Les termes de z_2 :

$$\left[\theta^0 + \theta^1 + \frac{1}{2}\theta^2 \right] z_2 = \left[\frac{1-\theta^2}{ah} + \frac{1}{2}\theta^2 \right] z_2 = \left[1 - \theta^2 \left(1 - \frac{1}{2}ah \right) \right] z_2$$

Les termes de z_3 :

$$\left[\theta^0 + \frac{1}{2}\theta^1 \right] z_3 = \left[\frac{1-\theta^1}{ah} + \frac{1}{2}\theta^1 \right] z_3 = \left[1 - \theta^1 \left(1 - \frac{1}{2}ah \right) \right] z_3$$

Les termes de z_4 :

$$\left[\frac{1}{2}\theta^0 \right] z_4 = \left[\frac{1-\theta^0}{ah} + \frac{1}{2}\theta^0 \right] z_4 = \left[1 - \theta^0 \left(1 - \frac{1}{2}ah \right) \right] z_4$$

En prenant $\phi = 1 - \frac{ah}{2}$ l'expression donne :

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{j-1} \theta^i z_{j-i} + \sum_{i=0}^{N-1} \theta^i z_{N-i} = \frac{1}{ah} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \phi \theta^i) z_{N-i}$$

Nous utilisons cette dernière expression pour le calcul de la variance $VAR^{\mathbb{Q}}[\hat{r}_k]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left\{ \frac{1}{ah} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \phi \theta^i) z_{N-i} \right\}^2 \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{(ah)^2} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \phi \theta^i) z_{N-i} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \phi \theta^i) z_{N-i} \right] \\
&= \frac{1}{(ah)^2} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - \phi \theta^i)^2 \\
&= \frac{1}{(ah)^2} \sum_{i=0}^{N-1} (1 - 2\phi \theta^i + \phi^2 \theta^{2i}) \\
&= \frac{1}{(ah)^2} \left[\sum_{i=0}^{N-1} 1 - 2\phi \sum_{i=0}^{N-1} \theta^i + \phi^2 \sum_{i=0}^{N-1} \theta^{2i} \right] \\
&= \frac{1}{(ah)^2} \left[N - 2\phi \frac{1-\theta^N}{ah} + \phi^2 \frac{1-\theta^{2N}}{1-\theta^2} \right]
\end{aligned}$$

Annexe 2

```
1 # Code C/Fortran
2
3
4 #Fonction permettant d'accéder aux éléments d'une liste
5 SEXP getListElement(SEXP list, const char *str){
6
7     SEXP elmt = R_NilValue, names = getAttrib(list, R_NamesSymbol);
8     int i;
9
10    for (i = 0; i < length(list); i++)
11        if(strcmp(CHAR(STRING_ELT(names, i)), str) == 0) {
12            elmt = VECTOR_ELT(list, i);
13            break;
14        }
15    return elmt;
16 }
17
18
19 # NbSim : nombre de simulations
20 # p : list() contenant les paramètres du modèle de Vasicek
21 # s : volatilité
22 # a : vitesse de retour à la moyenne
23 # b : le taux court limite
24 # T : maturité
25 # NbVal : nombre de discrétisations annuelles
26 # r0: le taux court initial
27
28 SEXP DiscrExacte(SEXP r0,SEXP p,SEXP T,SEXP NbSim, SEXP NbVal){
29
30     double a,b,s,*rResultat,*p_r0,delta,*p_T,temp;
31     int i, nCol, j, m,nLigne;
32     SEXP Resultat;
33
34     if(!isNumeric(r0)) error ("x0 doit être numérique");
35     if(!isNewList(p)) error (" p doit etre une liste");
36     if(!isNumeric(T)) error ("T doit être numérique");
37     if(!isNumeric(NbVal)) error ("NbVal doit être numérique");
38     if(!isNumeric(NbSim)) error ("NbSim doit être numérique");
39
40     PROTECT(r0=AS_NUMERIC(r0));
41     PROTECT(T=AS_NUMERIC(T));
42     PROTECT(NbSim=AS_INTEGER(NbSim));
43     PROTECT(NbVal=AS_INTEGER(NbVal));
44
45     nCol = *INTEGER(NbSim);
46     m = *INTEGER(NbVal);
47     p_T= REAL(T);
48     delta=pow(m,-1);
49     nLigne=m*p_T[0]+1;
50
51     a = REAL(getListElement(p, "a"))[0];
52     b = REAL(getListElement(p, "rlim"))[0];
53     s = REAL(getListElement(p, "sigma"))[0];
54
55     PROTECT(Resultat=allocMatrix(REALSXP,nLigne,nCol));
56     p_r0=REAL(r0);
57     rResultat = REAL(Resultat);
58
59     for(j=0; j<nCol; j++){
60         rResultat[0+j*(nLigne)] = p_r0[0];//;
61     }
62 }
```

```

63     GetRNGstate();
64     for(i=1; i< nLigne; i++){
65         for (j=0; j<nCol; j++) {
66             temp=b*(1-exp(-a*delta))+s*sqrt((1-exp(-2*a*delta))/2*a)*rnorm(0,1);
rResultat[i+j*nLigne]=rResultat[(i-1)+j*nLigne]*exp(-a*delta)+temp;
67         }
68     }
69     PutRNGstate();
70     UNPROTECT(5);
71     return Resultat;
72 }

```