



Mémoire d'actuariat – Promotion 2011

Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II

Sophie Decupère

MOTS-CLES : *capital économique, Formule Standard, Modèle Interne Partiel, agrégation des risques, mesure de risque, allocation de capital, méthode d'allocation d'Euler, RORAC compatibilité, ORSA.*

KEYWORDS : *economic capital, Standard Formula, Partial Internal Model, risk aggregation, risk measure, capital allocation, Euler principle, RORAC compatibility, ORSA.*

Directeur de mémoire : Laurent Devineau (Milliman France)

MEMOIRE NON CONFIDENTIEL

Mémoire d'actuariat – Promotion 2011

Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II

Sophie Decupère

MOTS-CLES : *capital économique, Formule Standard, Modèle Interne Partiel, agrégation des risques, mesure de risque, allocation de capital, méthode d'allocation d'Euler, RORAC compatibilité, ORSA.*

Dans le cadre du nouveau dispositif européen **Solvabilité II**, prenant effet le 1^{er} janvier 2013, les compagnies d'assurance sont amenées à déterminer leur **capital économique** ajusté aux risques qu'elles encourent. Ce montant de capital permet à la compagnie de faire face à une ruine économique dans un an, avec une probabilité de 99,5%. Deux types d'approches sont envisageables pour le calcul de ce capital : l'application de la **Formule Standard**, reposant sur l'agrégation de besoins en capital élémentaires à partir de matrices de corrélation, ou le recours à un **modèle interne**, mieux adapté au profil de risque de la compagnie. Par convention, nous distinguons les deux structures de modèle interne suivantes :

- la **Formule Standard Entity Specific**, reposant, comme la Formule Standard, sur une approche chocs/facteurs mais s'en distinguant au niveau des chocs appliqués et/ou des corrélations, ou encore à travers le changement d'architecture des risques retenue pour l'étape d'agrégation des risques (architecture des risques en « râteau » par exemple) ;
- le **Modèle Interne Partiel (MIP)**, reposant sur un usage conjoint des méthodologies simulateur et de type Formule Standard : certains risques sont projetés simultanément sur la première période, permettant ainsi d'obtenir une distribution de **Fonds Propres économiques** dans un an relative à ces risques, tandis que d'autres sont quantifiés par une méthodologie de type Formule Standard (Formule Standard « classique » ou Formule Standard Entity Specific).

Dans ce contexte, **l'agrégation des risques** mais aussi **l'allocation de capital** soulèvent différentes problématiques, identifiées et traitées dans ce mémoire, après avoir mené en premier lieu une analyse théorique des différentes méthodes d'agrégation et d'allocation.

Agrégation des risques

L'agrégation des risques permet de disposer d'un capital consolidé pour l'ensemble des risques auxquels la compagnie est exposée. Ce capital tient compte des phénomènes de dépendance entre les différents segments ; il est inférieur à la somme des capitaux élémentaires lorsque les risques se diversifient : nous parlerons alors de **bénéfices de diversification**.

L'agrégation des risques s'appréhende différemment selon qu'il s'agit :

- d'agréger des risques à proprement parler, à périmètre(s) de passifs fixé(s),
- d'agréger des capitaux de périmètres de passifs différents, à risque(s) fixé(s).

Après avoir mené une analyse théorique des méthodologies Formule Standard et simulateur, nous nous intéressons à l'articulation de ces deux méthodologies dans le cadre des Modèles Internes Partiels.

Lorsqu'un Modèle Interne Partiel est employé, l'agrégation des risques soulève différentes problématiques telles que l'agrégation des résultats issus du modèle interne et des résultats de type Formule Standard. Il paraît alors nécessaire de proposer des méthodologies y répondant.

Dans le Consultation Paper n°65 (CP 65), le CEIOPS présente des méthodologies permettant d'articuler les résultats issus du modèle interne et ceux de la Formule Standard. Nous nous intéressons en particulier à l'une d'entre elles, nommée « Consistent Standard Formula Replication » (CSFR) : cette méthode intègre à l'architecture des risques Formule Standard des sous-modules de risque regroupant, au sein de chaque module de risque, les risques élémentaires quantifiés par une méthodologie identique. Deux sous-modules de risque sont alors distingués : le sous-module « Hors-MIP », constitué des risques quantifiés par la Formule Standard - ou plus généralement par une approche chocs/facteurs - et le sous module MIP, regroupant les risques simulés.

En revanche, la méthodologie présentée dans le CP 65 ne semble pas traiter de l'aspect « multi-modules » et « multi-périmètres ». Plus précisément, pour un même périmètre de passifs, elle ne permet pas d'agréger aisément les résultats issus du modèle interne et ceux issus d'une approche chocs/facteurs, lorsque le modèle projette des risques appartenant à des modules différents (actions et mortalité par exemple). En revanche, il est dans ce cas possible de généraliser la méthodologie CSFR.

De plus, l'agrégation des risques entre périmètres de passifs utilisant des méthodologies d'agrégation différentes à partir de la méthode CSFR semble aisée lorsque les risques simulés appartiennent au même module, mais délicate lorsque les risques appartiennent à des modules différents.

Les points évoqués ci-dessus nous invitent à proposer, d'une part une méthodologie CSFR étendue à un ensemble de plusieurs modules dans le cas d'un périmètre de passifs, d'autre part une méthodologie alternative permettant d'agréger des risques de périmètres de passifs différents, lorsque le modèle interne couvre des risques de modules distincts. Ces méthodologies sont essentiellement fondées sur la technique de dé-modularisation/re-modularisation de l'architecture des risques¹.

¹ Dans son article « Multi-Level Aggregation » [7], Filipovic traite des problématiques d'agrégation multi-niveaux nous amenant à proposer cette technique de dé-modularisation/re-modularisation de l'architecture des risques.

Cette technique permet de faire apparaître, et rendre ainsi explicites, des corrélations non explicites dans l'architecture des risques Formule Standard (ou une autre architecture des risques à plusieurs niveaux). La substitution des corrélations Entity Specific aux corrélations Formule Standard (ou induites par une autre architecture des risques) puis la re-modularisation, rend alors possible l'agrégation des risques.

Notons que les méthodologies proposées permettent également de traiter les problématiques soulevées par les modèles internes de type Formule Standard Entity Specific.

Allocation de capital

Inversement, disposant du capital consolidé relatif à un agrégat de segments (périmètres de passifs, risques etc...), la compagnie peut souhaiter allouer ce capital afin de déterminer la consommation en capital réelle des différents segments, après avoir alloué les bénéfices de diversification. L'ensemble du capital sera ventilé entre les segments.

L'enjeu d'une telle démarche peut être le calcul d'**indicateurs de rentabilité**, aide à la prise de décision stratégique, mais aussi la détermination de limites de risque. L'allocation de capital joue notamment un rôle crucial dans le cadre du **dispositif ORSA**².

Nous cherchons à allouer le capital économique global Solvabilité II, défini à partir d'une mesure de risque *VaR* (*Value at Risk*). Néanmoins, il est tout à fait envisageable d'allouer un capital défini à partir d'autres mesures de risque. A ce propos, il est montré dans ce mémoire que la définition d'un capital à partir d'une mesure de risque *TVaR* (*TailVaR*) ou écart-type est plausible au regard du critère de solvabilité requis.

L'allocation de capital requiert, au préalable, le choix d'un couple (mesure de risque, méthode d'allocation).

Différentes méthodes d'allocation, présentées dans la littérature, sont décrites et étudiées dans ce mémoire, à savoir : la méthode proportionnelle, la méthode marginale, la méthode de **Shapley**, la méthode d'**Euler** et la méthode d'Aumann-Shapley.

Le principe est le suivant. Dans un premier temps, l'application d'une méthode d'allocation associée à une mesure de risque permet de calculer la **contribution au risque global** de chaque segment. Un ajustement est ensuite réalisé afin d'allouer le capital consolidé, tout en conservant le critère d'allocation totale. Dans le cadre de cette démarche, la variable considérée est une variable de risque correspondant à la variation des Fonds Propres économiques entre les dates $t = 0$ et $t = 1$.

Nous commençons par mener une analyse théorique de chacune des méthodes d'allocation et donnons des formules explicites dans le cas général mais également dans le cas gaussien. Cette analyse nous amène notamment à identifier une méthode cohérente, selon la définition fournie dans ce mémoire : il s'agit de la **méthode d'Euler** couplée à une **mesure de risque TVaR**. Cette méthode d'allocation vérifie, en l'occurrence, la propriété de **RORAC**³ **compatibilité** et rend alors possible l'analyse économique des capitaux alloués. Ceci permet de répondre efficacement à des problématiques de pilotage.

² *Own Risk and Solvency Assessment.*

³ *Return On Risk Adjusted Capital.*

Nous nous intéressons par la suite aux différentes problématiques rencontrées par une compagnie d'assurance souhaitant allouer son capital.

Tout d'abord, le recours à un Modèle Interne Partiel pose, comme pour l'agrégation des risques, certaines difficultés telles que l'allocation de capital sur des segments quantifiés par des méthodologies différentes (approche simulateur ou approche chocs/facteurs): nous proposons dans ce cas de construire une distribution pour les segments quantifiés par approche chocs/facteurs, en supposant une loi gaussienne, puis de recourir à la **théorie des copules** afin de modéliser la dépendance entre les différentes distributions.

De plus, dans le cadre d'une configuration « Formule Standard », disposant donc uniquement des valeurs de capitaux associées à chaque segment, l'application de certaines méthodes nécessite de postuler une loi, afin de calculer l'ensemble des éléments intervenant dans les formules d'allocation : covariances, *TVaR* etc... Se plaçant dans un cadre gaussien, nous disposons de formules explicites et l'allocation de capital est donc possible.

Notons que ce type d'approches est proposé dans le CP 65.

Par ailleurs, contrairement à l'allocation de capital sur des périmètres de passifs, allouer le capital sur des risques est délicat. En effet, la présence d'effets croisés entre facteurs de risque vient perturber l'hypothèse de décomposition de la variable de risque global comme somme de variables de risque individuelles, requise pour le calcul des contributions au risque. Nous proposons alors une méthodologie fondée sur le calibrage d'une forme paramétrique, intégrant un risque fictif représentatif des effets croisés entre facteurs de risque.

La problématique de la **stabilité de l'allocation dans le temps** est également abordée et traitée: il paraît en effet adéquat de conserver des capitaux alloués stables au fil du temps, afin de rester cohérent quant au pilotage de l'activité.

Enfin, les méthodologies d'agrégation et d'allocation proposées sont appliquées sur un cas pratique, décrit plus précisément ci-dessous.

Nous distinguons deux périmètres de passifs au sein d'une entité Vie : l'un d'entre eux utilise un modèle interne pour la modélisation des risques actions, taux d'intérêt et mortalité, et réalise des calculs Formule Standard pour les autres risques, tandis que le second emploie une méthodologie Formule Standard pour quantifier l'ensemble de ses risques. Ce cas pratique soulève donc l'ensemble des problématiques évoquées plus haut. Dans ce cadre, nous cherchons à agréger les risques puis allouer le capital relatif à chaque périmètre de passifs mais aussi au niveau consolidé. Le recours à la méthode d'Euler associée à une mesure de risque *TVaR* permet d'allouer le capital de manière adéquate et de construire des indicateurs de rentabilité.

Ainsi, ce mémoire intègre les aspects théoriques fondamentaux relatifs aux concepts d'agrégation des risques et d'allocation de capital, tout en veillant à se placer dans un cadre opérationnel, en s'intéressant aux problématiques rencontrées par les compagnies d'assurance lors d'une démarche d'agrégation des risques et d'allocation de capital.

Les méthodes proposées permettent d'agréger les risques et d'allouer le capital dans tous les cas de figures, sans pour autant s'éloigner des méthodes proposées par les autorités de contrôle.

Actuarial Thesis – Year 2011

Risk aggregation and capital allocation in Solvency II

Sophie Decupère

KEYWORDS: *economic capital, Standard Formula, Partial Internal Model, risk aggregation, risk measure, capital allocation, Euler principle, RORAC compatibility, ORSA.*

For the purpose of the new solvency framework of the European Union for the insurance industry, Solvency II, insurance companies are now required to determine the amount of their equity, adjusted to the risks that they incur. This amount of capital enables the company to face financial bankruptcy, with a one year horizon and a confidence level of 99,5%. Two types of approaches are possible for this calculation: the use of a Standard Formula or the use of an internal model. By convention, we distinguish these two structures of internal models:

- the **Entity Specific Standard Formula**, which consists, like the Standard Formula, in making instantaneous shocks, but differs from it by modifying the applied shocks or the correlations. The company may also change the risk architecture used for the risk aggregation step, by using a “one level aggregation” (all risks at the same level) , for instance;
- the **Partial Internal Model**, which consists in making a simultaneous projection of some of the risks incurred by the company, whereas the others are quantified by the Standard Formula method (or a close methodology, like the Entity Specific Standard Formula).

In such a context, **risk aggregation** and **capital allocation** raise some issues, identified and solved in this report, after having first carried out a theoretical analysis of the possible aggregation and allocation methods.

Risk aggregation

Risk aggregation enables to calculate an aggregated capital, by taking into account dependencies between some risk segments. This capital is smaller than the sum of the stand-alone capitals when there are some diversification benefits between risks.

We use different methodologies in order to aggregate stand-alone capitals, depending on the type of risk segments:

- risks (interest rates, mortality etc...) or
- liabilities (portfolios, entities, lines of business etc...).

After having carried out separately a theoretical analysis of the Standard Formula methodology and the internal model methodology, when it projects some risks on the first period, we deal with the joint approach in the context of Partial Internal Models.

The use of a Partial Internal Model may raise some issues like the aggregation of the result given by the internal model with other stand-alone capitals, calculated with the Standard Formula (or an Entity Specific Standard Formula). We therefore want to put forward some methodologies.

In the Consultation Paper n°65, the CEIOPS proposes three methods in order to aggregate the result given by the internal model and the Standard Formula result. One of these methods, called « Consistent Standard Formula Replication » (CSFR), considers into the Standard Formula's risk architecture two sub-modules: the first one is composed of stand-alone risks quantified by the Standard Formula - or more generally by a methodology using instantaneous shocks – the second one groups simulated risks jointly.

However, the methodology aforementioned does not solve directly the problem of an internal model which projects risks from different modules (market, life...) of one perimeter. But, in this first case, it is possible to generalise the CSFR method.

Suppose now that we want to aggregate economic capitals from several liabilities using different aggregation methodologies. The adaptation of the CSFR technique is easy when the simulated risks are in the same risk module, whereas it will not be an easy task if the risks belong to different modules.

The points mentioned above invite us to propose, first an extension of the CSFR method that deal with simulated risks from different modules of one perimeter, second an alternative methodology that enables to aggregate risks from several liabilities when the internal model covers stand-alone risks from different modules. These methodologies are mainly based on the de-modularization and re-modularization of the risk architecture⁴. This technique let appear some correlations which are not explicit in the standard architecture (or another risk architecture). For instance, the correlation between interest rates and mortality risk is embedded in the Standard Formula. Thanks to this technique, we have the ability to substitute some Entity Specific correlations for correlations given by the Standard Formula (or given by the step of de-modularization of another risk architecture) and then re-modularize, making possible risk aggregation.

Note that these methodologies solve also the issues raised by an Entity Specific Standard Formula.

Capital allocation

Reciprocally, given a consolidated economic capital, one may want to allocate the diversification benefits between different risks or between different liabilities of a company, in order to know the actual quantity of capital required by each segment. The aim here may be to analyze the profitability of a portfolio or to determine risk limits, in an **ORSA**⁵ framework for instance. The whole capital will be allocated between risk segments.

⁴ Damir Filipovic's working in his article "Multi-level risk aggregation" [7] gives a powerful tool to work on aggregation issues. The base level aggregation technique he develops allows building equivalence between multi-level aggregation (such as the Standard Formula) and one-level aggregation (all risks at the same level).

⁵ Own Risk and Solvency Assessment.

We allocate the global economic capital defined with the risk measure *VaR* (*Value at Risk*). However, it is possible to allocate a different capital, defined with the *TVaR* (*TailVaR*) risk measure for instance; in this report, it is by the way pointed out that the definition of the economic capital with the *TVaR* measure or the standard deviation measure is compliant according to the level of solvency required.

Capital allocation requires both an allocation method and a risk measure:

- We study some methods given in the academic literature: the proportional method, the marginal method, the **Shapley method**, the **Euler method** and the Aumann-Shapley method.
- A risk measure enables to quantify the risks endured by segments, depending on some criteria.

The different steps of capital allocation are described as follows. First, we choose an allocation method and a risk measure in order to calculate risk contributions to the global risk. An adjustment is then done in order to allocate the aggregated capital and keep the full allocation criterion. During such a procedure, our key risk variable is the difference between the equity value at time $t=1$ and the equity value at time $t=0$.

First, we focus on the theoretical aspects of allocation methodologies. We give explicit formulas in the general case but also in the Gaussian case. This analysis enables us to identify a coherent method, with regard to the definition given in this report: the Euler method combined with the *TVaR* risk measure. This method is indeed **RORAC⁶ compatible** and makes possible the economic analysis of allocated capitals, which allows the company to run efficiently its activity.

We then identify three main issues raised by capital allocation.

First, Partial Internal Models raise some issues: if we get a distribution of equity at time $t=1$ for a subset of risks without having distribution for the others, it can be difficult to allocate capital: we need to build a distribution for non-simulated risks by assuming a probability distribution. We can then use a copula in order to model dependencies between distributions.

Furthermore, when risks are quantified by the Standard Formula (or an Entity Specific Standard Formula), we do not have distributions and, as some methods require distributions, we need to assume a probability distribution in order to calculate risk contributions. By assuming Gaussian distributions, we are able to allocate capital thanks to the explicit allocation formulas obtained previously.

Note that these kinds of approaches are proposed in the CP 65.

And, contrary to capital allocation on liabilities, capital allocation on risks is delicate. Indeed, the decomposition of global risk as the sum of individual risks is not obvious because of crossed effects. Therefore, we propose a methodology based on a parametric form.

The third issue is linked to the **stability of capital allocation over time**. Stability of the allocation is needed so that the allocations are coherent in the time: we try to find some mathematical criteria to guarantee stability.

⁶ *Return On Risk Adjusted Capital.*

In a last part, we test numerically an example described below. A life entity is composed of two lines of business: the first one uses an internal model in order to simulate some risks from different modules and uses the Standard Formula to quantify the others, whereas the second one uses only the Standard Formula.

Thus, this example highlights the issues raised above. In this context, we intend to aggregate and allocate the economic capital related to each perimeter but also the consolidated capital related to both lines of business. The use of the Euler method, combined with a TVaR, enables to allocate the capital in a suitable manner and then build some profitability indicators.

This report intends to identify all the possible issues of risk aggregation and capital allocation and proposes solutions and tools to answer these issues, after having worked on theoretical aspects.

The methods enable to aggregate risks and allocate capital in all cases (Standard Formula, Entity Specific Standard Formula and Partial Internal Model) and are consistent with the methodologies proposed by the CEIOPS.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Jérôme Nebout et Eric Serant qui m'ont accueillie dans le cabinet de conseil en actuariat Milliman France et permis de réaliser mon projet de mémoire dans de très bonnes conditions.

Mon directeur de mémoire, Laurent Devineau, m'a encadrée tout au long de l'année sur le thème « Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II ». Je le remercie vivement pour son investissement et ses conseils précieux, ainsi que tout ce qu'il m'a appris sur le sujet.

Je remercie également les membres de l'équipe Recherche et Développement, en particulier Ghali El Boufkfaoui et Matthieu Chauvigny avec lesquels j'ai eu l'occasion d'avancer et réfléchir sur mon sujet de mémoire.

Sam Morgan et Fabien Ramaharobandro m'ont aussi beaucoup apporté sur le thème de l'allocation de capital ; je les remercie de m'avoir fait bénéficier de leurs larges compétences sur le sujet.

Je remercie aussi Dorothée Bary qui s'est rendue disponible pour échanger sur le thème de l'agrégation des risques et répondre précisément à mes questions.

J'adresse enfin mes remerciements à l'ensemble des membres du cabinet Milliman; ils m'ont soutenue et accompagnée tout au long de l'année.

Table des matières

I.	Dispositif Solvabilité II : construction du bilan économique et méthodologies de calcul du capital économique.....	17
A.	Présentation du dispositif Solvabilité II	17
B.	Construction du bilan économique Solvabilité II	19
1.	Les provisions techniques Solvabilité II	20
2.	Les Fonds Propres économiques Solvabilité II	21
C.	Méthodologies de calcul du capital économique	21
1.	Définition du capital économique et valorisation des postes du bilan	21
2.	L'approche de type Formule Standard	24
3.	Techniques d'obtention de la situation nette à un an	25
II.	Mesures de risque.....	30
A.	Cohérence des mesures de risque	30
B.	Mesures de distorsion	31
C.	Principales mesures de risque	32
1.	La mesure de risque écart-type	33
2.	La mesure de risque Value at Risk (VaR)	33
3.	La mesure de risque TailVaR (TVaR).....	34
D.	Redéfinition du capital économique	36
1.	Cas d'une mesure de risque écart-type.....	36
2.	Cas d'une mesure de risque TVaR.....	37
III.	Agrégation des risques	38
A.	Agrégation des risques de type Formule Standard.....	39
1.	Agrégation entre risques.....	39
2.	Agrégation entre périmètres de passifs	40
B.	Agrégation et phénomènes de dépendance dans un modèle interne	42
1.	Les différentes structures de modèles internes	42
2.	Notion de dépendance dans les modèle internes	43
3.	Eléments de théorie des copules.....	43
C.	Comparaison entre les approches de type Formule Standard et simulateur.....	44
1.	Le calcul du capital économique.....	44
2.	Agrégation des risques	46
D.	Problématiques d'agrégation des risques sous Solvabilité II	50
E.	Techniques d'agrégation des risques.....	51

1.	Vocabulaire et architectures des risques	51
2.	Techniques proposées par le CEIOPS	52
3.	Extension des méthodologies proposées par le CEIOPS	58
4.	Présentation d'une méthodologie d'agrégation alternative	65
IV.	Allocation de capital	70
A.	Allocation de capital : généralités	71
1.	Principes généraux d'allocation de capital	71
2.	Enjeux du processus d'allocation de capital	72
3.	Approche d'allocation retenue	73
4.	Indicateurs de risque	75
5.	Mise en place du problème d'allocation de capital	78
6.	Cohérence des méthodes d'allocation	78
B.	Les méthodes d'allocation de capital	80
1.	La méthode proportionnelle	80
2.	La méthode marginale	81
3.	La méthode de Shapley	82
4.	La méthode d'Euler	84
5.	La méthode d'Aumann-Shapley	91
C.	Les problématiques d'allocation de capital	92
1.	Allocation de capital sur des risques	92
2.	Allocation de capital et Modèle Interne Partiel	95
3.	Stabilité de l'allocation dans le temps	99
V.	Mise en œuvre des méthodes d'agrégation des risques et d'allocation de capital	101
A.	Présentation des modules de risque Marché et Souscription Vie	101
1.	Le module de risque Marché	101
2.	Le module de risque Souscription Vie	102
B.	Présentation des périmètres de passifs	103
C.	Modélisation des risques actions, taux et mortalité	104
1.	Modélisation de l'indice actions	104
2.	Modélisation des taux d'intérêt	105
3.	Modélisation des taux de mortalité	106
D.	Présentation des données	107
E.	Agrégation des risques	109
1.	Agrégation des risques du périmètre Prévoyance	109

2.	Agrégation des risques du périmètre Epargne	110
3.	Agrégation des risques des périmètres Epargne et Prévoyance	111
F.	Allocation du capital.....	112
1.	Allocation du capital consolidé Prévoyance	112
2.	Allocation du capital consolidé Epargne	113
3.	Allocation du capital consolidé (Epargne,Prévoyance) et calcul d'indicateurs de rentabilité 114	
VI.	Annexes	119
A.	Agrégation des risques	119
1.	Annexe 1 - Distributions elliptiques	119
2.	Annexe 2 - Démonstration de la formule d'agrégation	119
B.	Allocation de capital.....	121
1.	Annexe 1 - Méthode de Shapley	121
2.	Annexe 2 - Méthode d'Euler	123
3.	Annexe 3 - Calibrage et utilisation d'une forme paramétrique	132
VII.	Bibliographie.....	135

Introduction

Dans le cadre du nouveau dispositif européen **Solvabilité II**, prenant effet le 1^{er} janvier 2013, les compagnies d'assurance sont amenées à déterminer leur **capital économique** ajusté aux risques qu'elles encourent. Ce montant de capital permet à la compagnie de faire face à une ruine économique dans un an, avec une probabilité de 99,5%. Deux types d'approches sont envisageables pour le calcul de ce capital : l'application de la **Formule Standard**, reposant sur l'agrégation de besoins en capital élémentaires à partir de matrices de corrélation, ou le recours à un **modèle interne**, mieux adapté au profil de risque de la compagnie. Nous distinguerons dans la suite les deux structures de modèle interne suivantes :

- la **Formule Standard Entity Specific**, reposant, comme la Formule Standard, sur une approche chocs/facteurs mais s'en distinguant au niveau des chocs appliqués et/ou des corrélations, ou encore à travers le changement d'architecture des risques retenue pour l'étape d'agrégation des risques (architecture des risques en « râteau » par exemple) ;
- le **Modèle Interne Partiel (MIP)**, reposant sur un usage conjoint des méthodologies simulateur et de type Formule Standard: certains risques sont projetés simultanément sur la première période, permettant ainsi d'obtenir une distribution de **Fonds Propres économiques** dans un an relative à ces risques, tandis que d'autres sont quantifiés par une méthodologie de type Formule Standard (Formule Standard « classique » ou Formule Standard Entity Specific).

Dans ce contexte, **l'agrégation des risques** soulève certaines problématiques telles que l'agrégation des résultats fournis par le modèle interne et des résultats issus d'une approche chocs/facteurs, dans le cadre d'un Modèle Interne Partiel. Et notamment lorsque les risques simulés appartiennent à des modules de risque différents, problème également rencontré dans le cadre de certains types de Formule Standard Entity Specific.

Par ailleurs, après détermination de son capital économique consolidé, la compagnie cherchera à **allouer son capital**, afin de calculer des indicateurs de rentabilité et ainsi piloter son activité, dans le cadre d'un dispositif du type **ORSA**⁷ par exemple. Comme pour l'agrégation des risques, l'allocation du capital économique Solvabilité II pose certaines difficultés telles que l'allocation de capital sur des risques, ou encore l'allocation de capital sur des segments de risque pour lesquels nous ne disposons pas de distributions de Fonds Propres économiques. La problématique de la stabilité de l'allocation dans le temps paraît également cruciale pour une compagnie conservant un « Business Plan » stable sur une période donnée.

Ce mémoire sera structuré en cinq parties distinctes. La première présente le dispositif Solvabilité II et les méthodologies de calcul du capital économique. Une seconde partie est consacrée aux mesures de risque, concept mathématique essentiel à la compréhension des méthodologies d'agrégation des risques et d'allocation de capital.

⁷ *Own Risk and Solvency Assessment.*

La troisième partie traite de l'agrégation des risques sous Solvabilité II. Après avoir mené une analyse théorique des méthodologies de type Formule Standard et simulatoire, nous nous intéresserons à l'articulation de ces deux méthodologies dans le cadre des Modèles Internes Partiels. Nous identifierons alors les problématiques soulevées par ce type de modèle et proposerons des méthodologies d'agrégation adaptées, permettant également de traiter les problématiques soulevées par un modèle interne de type Formule Standard Entity Specific.

Nous nous intéresserons dans une quatrième partie à l'allocation de capital. Dans un premier temps, il s'agira de donner le principe et l'enjeu d'une démarche d'allocation, puis d'exposer et analyser les méthodes d'allocation de capital proposées dans la littérature. Cette partie nous permettra notamment d'identifier un cadre d'allocation cohérent, reposant sur la méthode d'allocation d'Euler et la mesure de risque *TVaR (Tail/VaR)*. Nous apporterons ensuite des solutions aux problématiques auxquelles une compagnie souhaitant allouer son capital peut être confrontée. En l'occurrence, l'allocation de capital sur des risques, ainsi que l'allocation de capital sur des segments quantifiés par une approche chocs/facteurs, posent certaines difficultés. Par ailleurs, la problématique de la stabilité de l'allocation dans le temps sera étudiée.

Les méthodologies d'agrégation des risques et d'allocation de capital mises en place dans ce mémoire s'adaptent à tous les cas de figures : Formule Standard, Formule Standard Entity Specific et Modèle Interne Partiel.

Enfin, nous proposons dans une dernière partie de mettre en œuvre les méthodologies d'agrégation et d'allocation étudiées, sur un cas pratique soulevant la plupart des problématiques identifiées. L'allocation de capital sera réalisée à partir de la **méthode cohérente « Euler-TVaR »**, ce qui permettra de construire des indicateurs de rentabilité de type **RORAC⁸** et ainsi répondre efficacement à des problématiques de pilotage.

Nous précisons que ce mémoire s'appuie, en règle générale, sur des notions et des exemples relatifs à des risques/portefeuilles d'assurance vie. Néanmoins, l'ensemble des méthodologies d'agrégation des risques et d'allocation de capital sont présentées de manière générique, et permettent d'agréger et d'allouer sur des risques/portefeuilles d'assurance non-vie sans difficultés supplémentaires.

⁸ *Return On Risk Adjusted Capital.*

I. Dispositif Solvabilité II : construction du bilan économique et méthodologies de calcul du capital économique

Nous proposons dans cette première partie une description générale du dispositif Solvabilité II, en insistant sur la construction du bilan économique et le mode de valorisation de ses différents postes. Néanmoins, nous retiendrons une vision simplifiée du bilan et spécifierons uniquement les modes de calculs des principaux postes du bilan, l'intérêt étant essentiellement porté sur la valorisation des Fonds Propres économiques Solvabilité II.

Ceci nous permettra ensuite de procéder au calcul du capital économique à partir d'une approche de type Formule Standard ou en construisant la distribution des Fonds Propres (encore appelés « situation nette ») à un an.

A. Présentation du dispositif Solvabilité II

La **solvabilité** se définit comme l'aptitude, pour une entreprise, à faire face à ses engagements. Une entreprise peut être considérée comme insolvable dès lors que la valeur de ses engagements est supérieure à la valeur de son actif.

Le dispositif **Solvabilité II** entrera en vigueur le 1^{er} janvier 2013 et viendra remplacer le dispositif actuel Solvabilité I.

A la différence du bilan économique Solvabilité I qui évalue les postes du bilan prudemment, en accord avec les principes de comptabilité générale français, le bilan Solvabilité II est économique. En effet, l'actif est inscrit au bilan à sa valeur de marché et les provisions techniques sont calculées selon une vision « Best Estimate », contrairement aux provisions Solvabilité I déterminées à partir d'hypothèses prudentes. La **marge pour risque** s'ajoute au **Best Estimate des passifs**, permettant ainsi d'intégrer une marge de prudence dans le calcul des **provisions techniques**, liée au fait que les risques techniques ne sont pas échangeables sur un marché complet et liquide.

Nous présentons ci-dessous une illustration de ces changements :

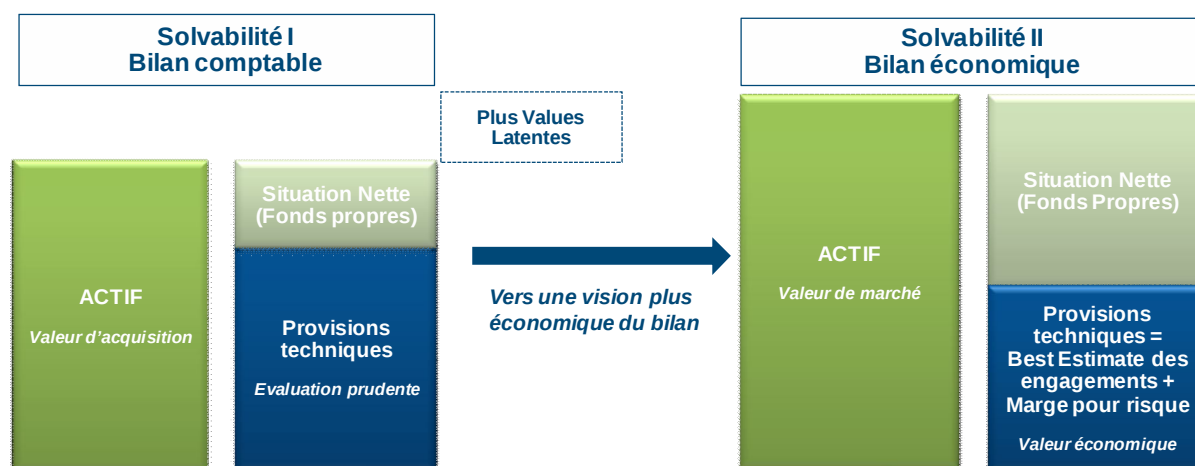


Figure 1.1 - Passage du dispositif Solvabilité I au dispositif Solvabilité II.

La démarche de l'Union Européenne retenue pour la conception de réglementations dans les domaines bancaires et assurantiels, et en particulier aujourd'hui pour Solvabilité II, correspond à un **processus dit de « Lamfalussy »**.

Ce processus s'articule autour de quatre niveaux, présentés à l'aide du schéma ci-dessous:

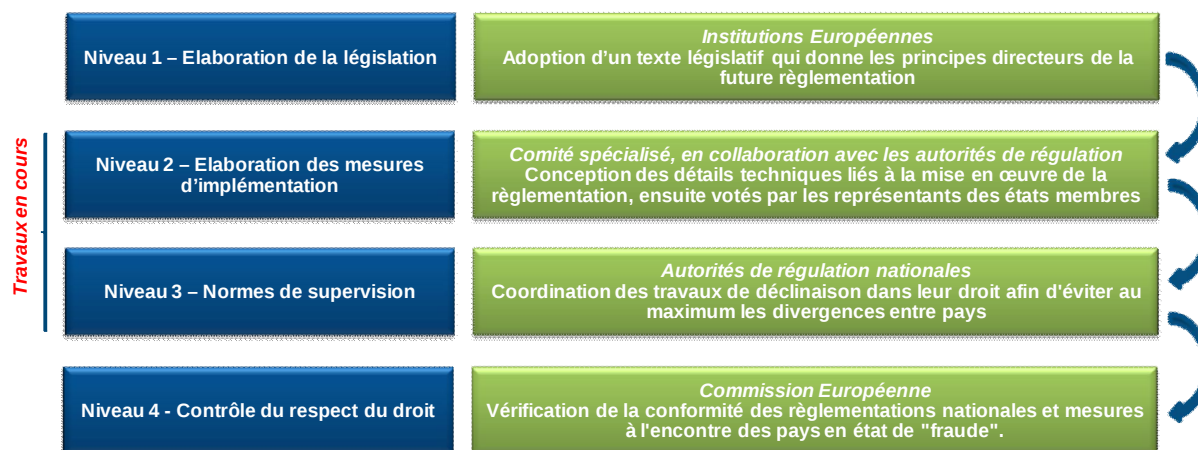


Figure 1.2 - Présentation du processus de mise en place du dispositif Solvabilité II.

Le dispositif Solvabilité II repose sur trois piliers :

- Le pilier 1 est relatif aux **exigences quantitatives** à travers l'évaluation économique du bilan, la détermination du besoin en capital et des capitaux propres disponibles.
- Le pilier 2 s'intéresse aux **exigences qualitatives** en mettant en place un système de gouvernance des risques et un contrôle prudentiel.
- Le pilier 3 concerne la **discipline de marché** à travers le reporting prudentiel et la communication au marché.

Nous nous intéressons par la suite aux exigences quantitatives du pilier 1 et notamment au calcul du besoin en capital.

Deux niveaux de seuils pour les Fonds Propres sont définis par la directive Solvabilité II :

- **Le MCR** (Minimum Capital Requirement) correspond au niveau minimum de Fonds Propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique.
- **Le SCR** (Solvency Capital Requirement) représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par des événements imprévus. Dans la suite du mémoire, nous appellerons indifféremment SCR ou **capital économique** ce capital cible.

Les **études quantitatives d'impact** (QIS) sont lancées par le CEIOPS pour répondre aux questions plus techniques soulevées par le projet de Directive Européenne. Nous donnons ci-dessous quelques éléments sur la mise en place de ces études.

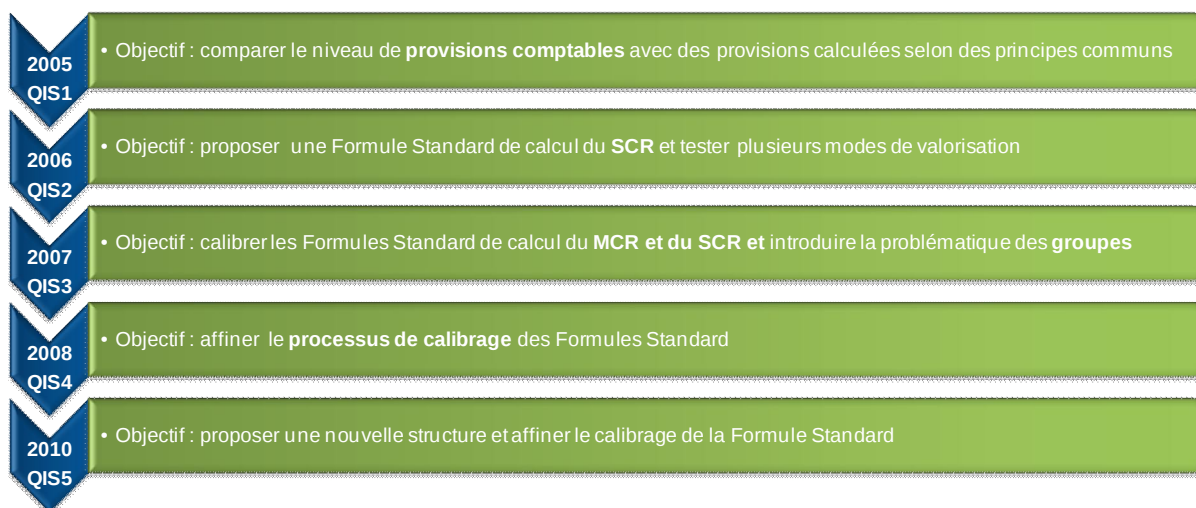


Figure 1.3 - Les études quantitatives d'impacts.

Sont notamment présentés dans ces études les chocs et les matrices de corrélation proposées par la Formule Standard afin de calculer le SCR global de la compagnie, nous y reviendrons.

B. Construction du bilan économique Solvabilité II

Plus précisément, le bilan économique Solvabilité II prend la forme suivante :

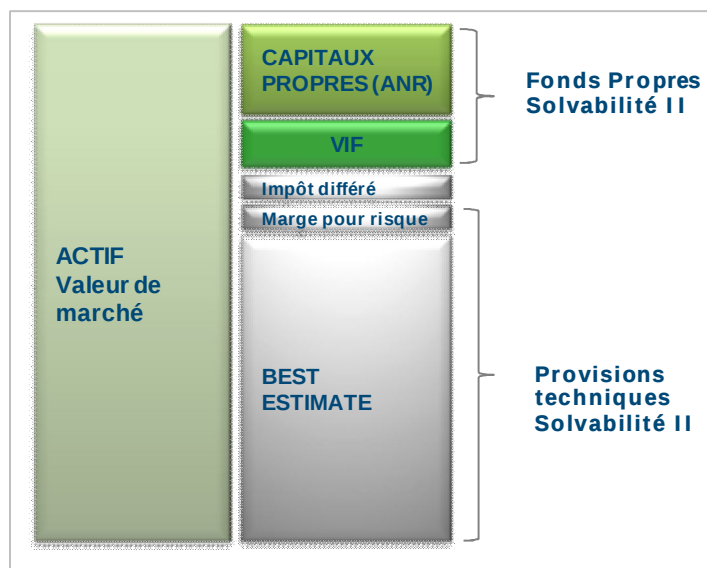


Figure 1.4 - Vision simplifiée du bilan économique Solvabilité II.

Nous définissons ci-dessous les postes **provisions techniques Solvabilité II** et **Fonds Propres économiques Solvabilité II** ainsi que leur mode de valorisation.

1. Les provisions techniques Solvabilité II

Sous Solvabilité II, les **provisions techniques** sont égales à la somme des éléments suivants :

- Le **Best Estimate** des passifs : celui-ci correspond à la valeur actuelle nette probable des flux futurs (prestations, frais, commissions, primes). Le calcul du Best Estimate doit inclure les flux futurs associés uniquement aux contrats existants à la date d'évaluation.
- La **marge pour risque** s'interprète comme le montant de provisions complémentaires au Best Estimate calculé de façon à ce que le montant total de provisions inscrit au bilan corresponde à celui qu'exigerait une entité de référence pour honorer les engagements à la charge de l'assureur.

Calcul de la marge pour risque

La marge pour risque est évaluée en actualisant le coût du capital annuel généré par l'immobilisation du SCR, estimé à 6% par an sur la durée de vie résiduelle des engagements utilisée pour le calcul du Best Estimate.

Le calcul est réalisé sur l'activité entière, permettant ainsi de tenir compte de la diversification entre branches. La marge pour risque est ensuite allouée entre les différentes branches, selon la contribution marginale de chacune au SCR.

Nous donnons plus précisément la formule de calcul de la marge pour risque, notée RM .

Après détermination du SCR par la méthodologie Formule Standard ou modèle interne, en date $t=0$, la marge pour risque est calculée à partir de l'estimation des SCR futurs. Cette estimation est réalisée à l'aide de proxys, par exemple en tenant compte du profil de liquidation des provisions mathématiques.

Nous avons :

$$RM = 6\% \cdot \sum_{t>0} \frac{SCR_t}{(1 + r_t)^{t'}}$$

en notant SCR_t le SCR en date t , et r_t le taux sans risque en date t .

Remarques :

- Les SCR pris en compte dans ce calcul sont ceux liés aux risques de souscription et de défaut des contreparties (au titre de la réassurance cédée), le SCR opérationnel, ainsi que le SCR au titre du risque de marché inévitable.
- La faculté d'absorption des pertes par les impôts différés, venant en réduction du SCR, n'est pas prise en compte pour le calcul de la marge pour risque.

2. Les Fonds Propres économiques Solvabilité II

Les Fonds Propres économiques Solvabilité II sont constitués des éléments suivants :

- La **VIF**⁹ : il s'agit de la valeur actuelle des profits futurs générés par le portefeuille de contrats, calculée dans un scénario déterministe sans prime de risque et tenant compte des options et garanties financières.
- **L'actif net réévalué** (ANR) : celui-ci correspond à l'actif net comptable après retraitements (prise en compte des plus ou moins values latentes etc...). L'ANR représente la **richesse accumulée dans le passé** par la compagnie.

Introduisons les notations suivantes :

- $A(t)$ la valeur de marché de l'actif en t ,
- $VEP(t)$ la valeur économique des passifs en t ,
- $ANR(t)$ la valeur de l'actif net réévalué en t ,
- $VIF(t)$ la valeur de portefeuille en t ,
- $FP(t)$ les Fonds Propres économiques en t .

De manière simplifiée, le bilan économique en date t peut être représenté comme cela :

Bilan économique en t	
$A(t)$	$FP(t)$ $VEP(t)$

Avec : $FP(t) = ANR(t) + VIF(t)$.

C. Méthodologies de calcul du capital économique

1. Définition du capital économique et valorisation des postes du bilan

Définition du capital économique

Le capital économique Solvabilité II s'appuie sur la valorisation du bilan économique de la compagnie en date $t = 0$ et en date $t = 1$. Il correspond au montant de Fonds Propres dont doit disposer la compagnie en date initiale, afin de ne pas être **ruinée** dans **un an**, avec une **probabilité de 99,5%**.

La définition mathématique du capital économique la plus conforme aux exigences de Solvabilité II est la suivante :

Définition du capital économique

$$C = FP(0) - D(1) \cdot q_{0,5\%}\{FP(1)\},$$

⁹ Value of In Force

où $D(1)$ correspond au facteur d'actualisation entre les dates 0 et 1 : il s'agit du prix en 0 d'un zéro-coupon de maturité un an¹⁰.

Le surplus $-D(1) \cdot q_{0,5\%}\{FP(1)\}$ apparaît comme un surplus algébrique qu'il est nécessaire d'injecter aux Fonds Propres initiaux ou possible de libérer, selon la situation :

- Si $q_{0,5\%}\{FP(1)\} > 0$, la compagnie a un niveau de Fonds Propres supérieur au capital requis et peut alors **libérer du capital**.
- Si $q_{0,5\%}\{FP(1)\} < 0$, la compagnie ne dispose pas du montant de Fonds Propres nécessaire en date 0 pour satisfaire la contrainte de solvabilité. Celle-ci doit donc **injecter du capital** pour un montant de : $-D(1) \cdot q_{0,5\%}\{FP(1)\}$.

Après injection (ou libération) de capital aux Fonds Propres initiaux, les Fonds Propres se décomposent donc entre **le capital économique** et un **surplus de capital**.

Remarque : le quantile à 0,5% de la variable $FP(1)$ correspond à la Value at Risk (VaR) à 0,5% de cette même variable. Nous avons donc :

$$C = FP(0) - D(1) \cdot VaR_{0,5\%}\{FP(1)\}.$$

Deux types d'approches, explicitées ensuite, sont envisageables pour le calcul du capital économique : l'approche de type Formule Standard, reposant sur des chocs instantanés en date initiale, ou alors, dans le cadre d'un Modèle Interne Partiel, la construction d'une distribution de Fonds Propres dans un an puis l'évaluation du quantile à partir de cette distribution. Nous commençons tout d'abord par donner le principe de valorisation des Fonds Propres économiques, requis pour le calcul du capital économique selon l'une de ces approches.

Scénarios économiques et modèle ALM

Un modèle ALM permet de valoriser les postes du bilan en tenant compte des interactions Actif-Passif : ces interactions se font exclusivement par l'intermédiaire de deux mécanismes :

- la participation aux bénéfices,
- les rachats dynamiques (ou conjectures).

Il est alors possible de valoriser le bilan, selon les conditions en vigueur à la date de calcul (bilan central) mais aussi suite à un choc instantané sur le bilan initial (bilan choqué).

Ce type de modèle est alimenté par des tables de scénarios économiques.

Valorisation du bilan économique en date t=0 et t=1

En date initiale, les valeurs de l'actif, des passifs et des Fonds Propres de la compagnie sont des grandeurs déterministes tandis qu'en $t = 1$, il s'agit de variables aléatoires dépendant des aléas (financiers, démographiques, ...) de première année.

¹⁰ Le facteur d'actualisation est ici supposé déterministe. En revanche, considérer un facteur d'actualisation stochastique ne pose pas davantage de difficultés.

Soient :

- $(F_t)_{t \geq 0}$ la filtration permettant de caractériser à chaque date l'information financière disponible,
- δ_u le facteur d'actualisation s'exprimant en fonction du taux sans risque instantané r_u :

$$\delta_u = e^{-\int_0^u r_h dh},$$
- P_t les cash-flows de passifs (prestations, commissions, frais,...) en période t ,
- R_t le résultat de la compagnie en période t .

La VIF et la valeur économique des passifs en date initiale se calculent en prenant l'espérance sous la probabilité risque-neutre des cash-flows futurs actualisés, c'est-à-dire :

$$VEP(0) = E_Q \left[\sum_{u \geq 1} \delta_u \cdot P_u \mid F_0 \right],$$

et,

$$VIF(0) = E_Q \left[\sum_{u \geq 1} \delta_u \cdot R_u \mid F_0 \right].$$

Les Fonds Propres économiques en $t = 0$ ont donc pour expression :

$$FP(0) = ANR(0) + E_Q \left[\sum_{u \geq 1} \delta_u \cdot R_u \mid F_0 \right]. \quad (1.1)$$

Afin de déterminer les variables $VIF(1)$ et $VEP(1)$, il est nécessaire d'introduire un conditionnement monde-réel. Ces variables correspondent à l'espérance sous la probabilité risque-neutre des cash-flows futurs actualisés, conditionnellement à l'information « monde-réel » de première année (notée F_1^{MR}). Autrement dit, nous avons :

- $VIF(1) = E_Q \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} R_u \mid F_1^{MR} \right],$
- $VEP(1) = E_Q \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} P_u \mid F_1^{MR} \right].$

Finalement, la variable aléatoire Fonds Propres en $t = 1$ s'écrit :

$$FP(1) = ANR(1) + E_Q \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} R_u \mid F_1^{MR} \right]. \quad (1.2)$$

Le recours à un modèle ALM permet d'estimer les grandeurs intervenant dans les expressions (1.1) et (1.2).

2. L'approche de type Formule Standard

Nous désignons dans la suite par **approche de type « Formule Standard »** toute approche reposant sur le calcul de besoins en capital élémentaires à partir de chocs instantanés (ou facteurs) puis à leur agrégation à l'aide de matrices de corrélation. Il peut donc s'agir d'une approche Formule Standard « classique » ou d'une Formule Standard Entity Specific, mieux adaptée au profil de risque de la compagnie ; ce dernier aspect est étudié dans la partie III-B-1.

Nous nous intéressons ici au calcul du capital économique élémentaire au titre du risque R. L'agrégation des risques de type Formule Standard sera décrite dans la partie III-A.

La Formule Standard propose une approche simplifiée pour le calcul du capital économique : celle-ci consiste à évaluer le **bilan central**, et à procéder à une réévaluation du bilan après **réalisation d'un choc instantané sur le risque R**. Le capital économique correspond alors à la variation entre les Fonds Propres associés au scénario central et les Fonds Propres associés au scénario choqué.

Notons que les chocs appliqués sont calibrés de telle sorte à engendrer une déviation extrême de Fonds Propres au niveau 0,5%.

Nous désignons par $FP_R(0)$, $A_R(0)$, $VEP_R(0)$, $ANR_R(0)$ et $VIF_R(0)$ les variables économiques après choc instantané sur le risque R.

Le calcul du capital économique au titre du risque R par une approche de type Formule Standard est illustré ci-dessous :

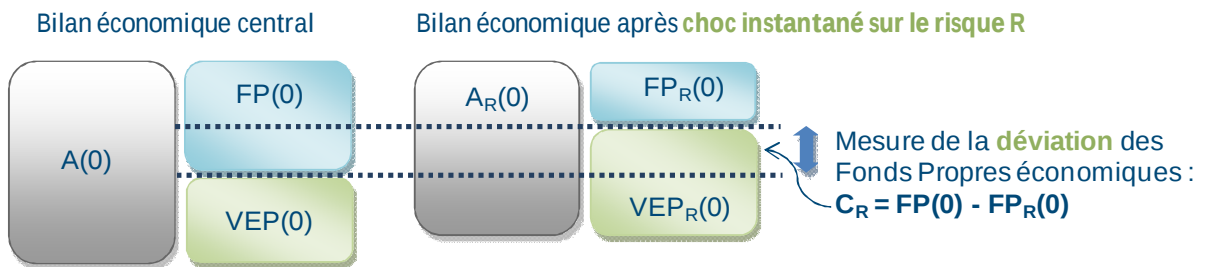


Figure 1.5 - Calcul du capital élémentaire au titre du risque R par une approche de type Formule Standard.

Nous introduisons la filtration $(F_t^R)_{t \geq 0}$, intégrant l'information liée au choc sur R, et notons Q_R la probabilité risque-neutre s'appliquant à cette filtration.

Les Fonds Propres après **choc instantané sur le bilan initial** s'écrivent :

$$FP_R(0) = ANR_R(0) + E_{Q_R} \left[\sum_{u \geq 1} \delta_u \cdot R_u \mid F_0^R \right].$$

Estimation du capital économique Formule Standard

Introduisons les notations suivantes :

- R_u^s (resp. R'_u^s) le résultat en période $u \geq 1$ pour la simulation $s \in \{1, \dots, S\}$ sous Q (resp. sous Q_R),
- δ_u^s (resp. δ'_u^s) le facteur d'actualisation en date $u \geq 1$ pour la simulation s sous Q (resp. sous Q_R),

Nous procédons par simulations de Monte-Carlo afin d'estimer les quantités $FP(0)$ et $FP_R(0)$. Le recours au modèle ALM permet d'effectuer les calculs suivants :

$$\widehat{FP(0)} = ANR(0) + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u \geq 1} \delta_u^s \cdot R_u^s,$$

et,

$$\widehat{FP_R(0)} = ANR_R(0) + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u \geq 1} \delta'_u^s \cdot R'_u^s.$$

Le capital économique élémentaire au titre du risque R est alors estimé par le biais de la relation :

$$\widehat{C_R} = \widehat{FP(0)} - \widehat{FP_R(0)}.$$

Rappelons que ces capitaux élémentaires sont ensuite agrégés afin de déterminer le capital économique global.

3. Techniques d'obtention de la situation nette à un an

Le recours au **Modèle Interne Partiel** est l'approche alternative à celle exposée ci-dessus ; celui-ci repose sur un usage conjoint des méthodologies simulatoire et de type Formule Standard. Nous étudions ici la méthodologie simulatoire.

Différentes techniques permettent, à partir de la projection d'un ensemble de risques sur la première période et d'un moteur de calcul, l'obtention d'une distribution de Fonds Propres dans un an associée à cet ensemble de risques, comme illustrée par la figure 1.6. Le capital économique relatif aux risques projetés est ensuite estimé à partir du quantile à 0,5% de la distribution de Fonds Propres.

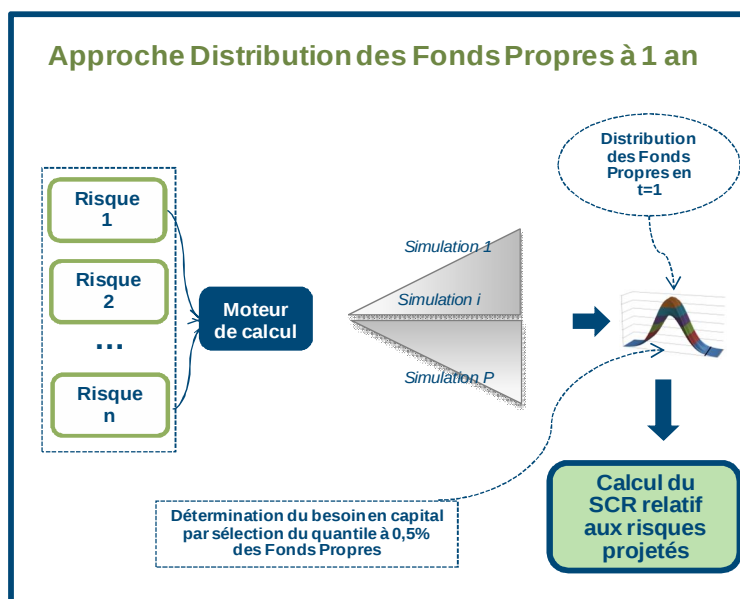


Figure 1.6 - Illustration de l'approche d'obtention d'une distribution de Fonds Propres à 1 an.

Le recours à ce type d'approche requiert l'évaluation du bilan en date 0 et en date 1 afin de déterminer le capital économique.

A la différence de la méthodologie de type Formule Standard, qui réalise un choc instantané sur le bilan initial, le choc est ici réalisé au cours de la première période. Un rapprochement plus détaillé entre ces deux méthodologies sera établi dans la partie III-C.

a) La méthodologie Simulations dans les Simulations (SdS)

La méthode SdS consiste à réaliser des simulations monde-réel sur la première période, puis, dans une deuxième étape, à effectuer pour chaque simulation primaire, des simulations secondaires « market consistent »¹¹ pour les périodes ultérieures. Ces derniers jeux de simulations sont effectués conditionnellement aux réalisés de première période. Cette technique permet donc de simuler les risques en univers monde-réel sur la première période, tout en étant en conformité avec le principe de valorisation.

Ainsi, la méthodologie SdS requiert, d'une part la génération d'une table de **scénarios économiques monde-réel**, d'autre part la génération d'une table de **scénarios économiques risque-neutre**, ajustée à la réalisation des variables économiques de fin de première période.

¹¹ Il s'agit généralement de simulations risque-neutre.

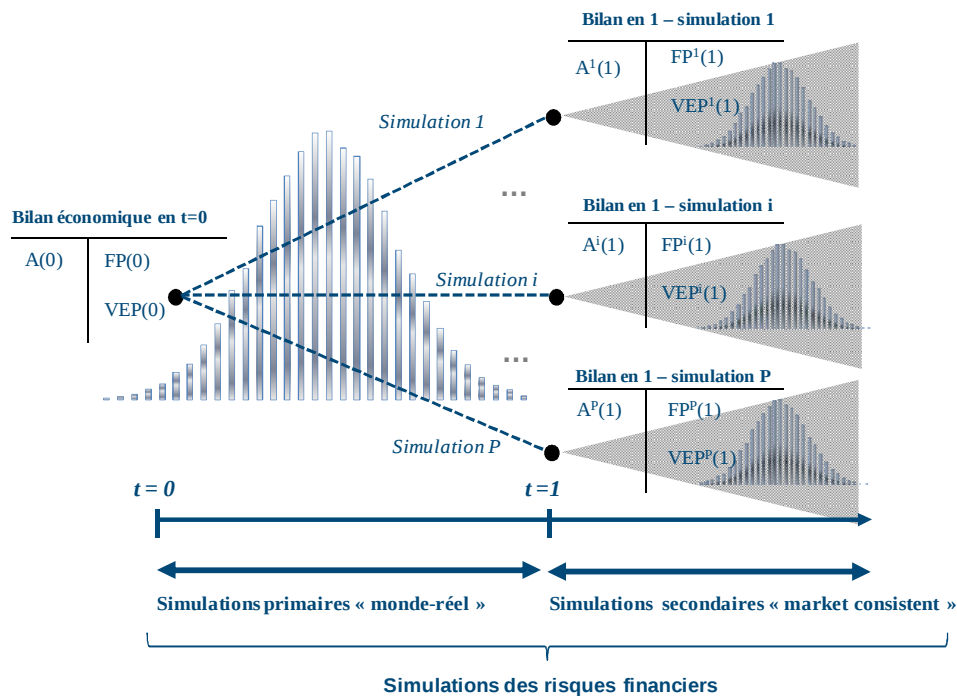


Figure 1.7 - Illustration de la méthode des Simulations dans les Simulations.

Les facteurs de risque

Les **facteurs de risque** permettent de synthétiser l'aléa relatif à chaque risque intervenant lors de la projection des risques sur la première période. A titre d'exemple, pensons au risque actions modélisé à partir d'un modèle de type brownien géométrique ; dans ce cas, le facteur de risque correspond à l'accroissement de browniens entre les dates 0 et 1.

Nous verrons qu'il est donc possible d'exprimer les Fonds Propres en $t=1$ selon ces facteurs de risque, et généralement à partir d'une relation simple.

Calcul du capital économique SdS

Introduisons les notations suivantes :

- $R_u^{p,s}$ le résultat en période $u > 1$ pour la simulation primaire $p \in \{1, \dots, P\}$ et secondaire $s \in \{1, \dots, S\}$,
- $\delta_u^{p,s}$ le facteur d'actualisation de la date $u > 1$ pour la simulation primaire p et secondaire s ,
- δ_1^p le facteur d'actualisation de la première période pour la simulation primaire p ,
- F_1^p l'information de première année contenue dans la simulation primaire p ,
- $ANR^p(1)$ l'actif net réévalué en fin de première période pour la simulation primaire p ,
- $FP^p(1)$ les Fonds Propres économiques en fin de première période pour la simulation primaire p .

Les Fonds Propres économiques en $t = 1$ associés à la simulation primaire p , s'écrivent :

$$FP^p(1) = ANR^p(1) + E \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} R_u \mid F_1^p \right],$$

et sont estimés au moyen de la relation :

$$\widehat{FP^p}(1) = ANR^p(1) + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u^{p,s}}{\delta_1^p} R_u^{p,s}. \quad (1.3)$$

A l'issue d'une projection de type SdS, nous disposons d'une distribution de Fonds Propres dans un an construite à partir de la relation (1.3).

Le capital économique est estimé naturellement à partir de la distribution comme suit :

$$\hat{C} = \widehat{FP}(0) - D(1), FP^{([0,5\% \times P])}(1),$$

où $FP^{([0,5\% \times P])}(1)$ correspond à l'estimateur du quantile à 0,5% de la variable $FP(1)$, en employant la notation $FP^p(1)$ pour désigner la p -ième valeur de l'échantillon de Fonds Propres ordonnés, et $[0,5\% \times P]$ la partie entière du nombre $0,5\% \times P$.

Projections SdS globale et marginale

Nous appellerons dans la suite **projection SdS globale**, la projection dont les scénarios primaires sont stochastiques pour l'ensemble des risques que la compagnie souhaite projeter sur la première période.

Nous désignerons par **projection SdS marginale au titre du risque R**, toute projection SdS dont les scénarios primaires sont des scénarios marginaux du risque R, c'est-à-dire un jeu de simulations primaires pour lesquelles l'ensemble des aléas sont neutralisés¹² excepté l'aléa relatif au risque R.

b) Méthodologies alternatives

Le recours à l'approche SdS nécessite l'évaluation des postes du bilan pour chaque simulation monde-réel de première période. Les temps de calculs induits peuvent être longs et il est souvent délicat, voire impossible, d'utiliser cette méthodologie opérationnellement. Certaines techniques alternatives permettent de réduire de manière conséquente les temps de calculs, tout en conservant une estimation robuste du capital économique. Ces techniques ne sont pas développées dans ce mémoire mais nous en donnons ci-après le principe général et des références bibliographiques.

¹² L'aléa au titre du risque R est neutralisé lorsque le risque évolue entre deux périodes en « valeur centrale ».

La méthode « SdS accéléré »

Un algorithme de calcul permettant de réduire significativement le nombre de simulations d'une projection SdS a récemment été développé (cf [3]). Le principe de cette méthode, désignée par «accélérateur SdS», consiste à localiser les scénarii les plus adverses en termes de solvabilité au moyen de facteurs de risques¹³. Seules les simulations secondaires associées à ces scénarii sont effectuées.

La technique des Replicating Portfolios

La technique dite des Replicating Portfolios est une approche d'obtention de la situation nette à un an, permettant de réduire fortement les temps de projections en estimant les Fonds Propres à l'aide d'un portefeuille d'actifs reproduisant la valeur économique des passifs de la compagnie.

Cependant, le calibrage du Replicating Portfolio soulève certaines difficultés pouvant conduire à des résultats parfois peu satisfaisants. Une méthode de calibrage cohérente avec la définition du capital économique Solvabilité II a récemment été développée (cf [5]). Cette méthode repose sur une analyse préliminaire de la relation entre les Fonds Propres économiques en $t=1$ et les risques financiers projetés, ce qui permet d'optimiser la sélection et le paramétrage des actifs composant le portefeuille répliquant. La construction du portefeuille par régression paramétrique permet ensuite d'utiliser celui-ci pour le calcul des Fonds Propres en $t=1$, et donc du capital économique.

Les méthodes fondées sur le calibrage d'une forme paramétrique

Nous avons évoqué plus haut l'idée que l'aléa contenu dans la variable Fonds Propres économiques en $t=1$ peut être synthétisé à l'aide des différents facteurs de risque intervenant dans la projection.

Les Fonds Propres s'expriment donc comme une fonction de ces facteurs de risque, et le calibrage d'une forme paramétrique (sur base d'un échantillon associé à des points extrêmes par exemple) permet ensuite de construire la distribution exhaustive des Fonds Propres.

Cette approche est décrite en annexe B-3 et sera employée dans ce mémoire, dans l'objectif de proposer des méthodes alternatives d'agrégation des risques et d'allocation de capital.

¹³ Les facteurs de risque situés en périphérie du nuage de points représentent ces situations adverses ; il est nécessaire de définir une norme pour localiser mathématiquement les n -uplets de facteurs de risque extrêmes.

II. Mesures de risque

Les mesures de risque jouent un rôle essentiel lors des phases d'agrégation des risques et allocation du capital. Les capitaux économiques élémentaires, requis pour agréger les risques, sont en effet définis à partir d'une mesure de risque. De plus, l'allocation du capital consolidé requiert la sélection d'une mesure de risque afin de quantifier le risque de chaque segment ; notons que cette mesure de risque peut être différente de celle utilisée pour définir les capitaux.

Nous avons évoqué dans la partie précédente la mesure de risque VaR , implicite au calcul du capital économique Solvabilité II. Nous présentons dans cette partie un cadre mathématique général et donnons quelques éléments fondamentaux sur les mesures de risque. Nous commençons par définir la notion de **mesure de risque cohérente** et de **mesure de distorsion**, pour ensuite étudier les spécificités de chacune des mesures de risque d'intérêt : la **mesure de risque écart-type**, la **mesure de risque VaR** et la **mesure de risque $TVaR$** .

A. Cohérence des mesures de risque

Introduisons l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et Γ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur cet espace.

Une application $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ est une mesure de risque.

Nous nous intéressons dans la suite à une variable aléatoire de risque X , de densité f_X supposée continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

La variable de risque X est définie ci-dessous.

Variable de risque considérée

$$X = FP(0) - D(1) \cdot FP(1).$$

X correspond donc à la variation des Fonds Propres entre les dates 0 et 1, avec prise en compte du facteur d'actualisation.

La grandeur $\rho(X)$, mesure du risque sur la variable X , représente un capital, défini à partir de la mesure de risque ρ .

Artzner, Delbaen, Eber et Heath [1] ont introduit une caractérisation axiomatique des mesures de risque, permettant de définir le concept de **mesure de risque cohérente**, présenté ci-dessous.

Définition 2.1 - Supposons que Γ contient les constantes et est stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire. Une mesure de risque ρ , définie sur Γ , est **cohérente** si elle est :

- **1) monotone** : $\forall X_1, X_2 \in \Gamma, X_1 \leq X_2 \text{ p.s.} \Rightarrow \rho(X_1) \leq \rho(X_2)$.
- **2) positivement homogène** : $\forall X \in \Gamma, \forall a > 0, \rho(aX) = a\rho(X)$.
- **3) invariante par translation** : $\forall X \in \Gamma, \forall h \in \mathbb{R}, \rho(X + h) = \rho(X) + h$.
- **4) sous-additive** : $\forall X_1, X_2 \in \Gamma, \rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

La monotonie traduit l'idée que le segment 2, plus risqué que le segment 1, a un besoin en capital plus élevé. En supposant le taux de change α déterministe, l'axiome 2) met en évidence le fait qu'un changement de numéraire n'induit pas de risque supplémentaire. De la même manière, la mesure du risque sur la variable $X + h$ ne crée pas de risque additionnel si ce n'est l'ajout du montant certain h , comme explicité par l'axiome 3). Enfin, une mesure de risque sous-additive diversifie nécessairement des risques agrégés ; autrement dit, le capital requis pour l'agrégat de segments (1,2) est inférieur à la somme des besoins en capital élémentaires.

Nous définissons ci-dessous la comonotonie puis introduisons l'axiome d'additivité pour les risques comonotones, axiome intervenant notamment lorsque nous souhaitons agréger des capitaux de périmètres de passifs différents, dans un cas monofactoriel (se référer à la partie III-A-2).

Définition 2.2 - Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont **comonotones** s'il existe des fonctions h_1 et h_2 monotones, de même monotonie, et Z une variable aléatoire telles que : $X_i = h_i(Z)$, $\forall i \in \{1,2\}$.

Des variables de risque comonotones évoluent donc simultanément, celles-ci s'écrivant comme une fonction monotone d'une même variable aléatoire.

Définition 2.3 - La mesure de risque ρ est **additive pour les risques comonotones** si l'implication suivante est vérifiée : X_1 et X_2 comonotones $\Rightarrow \rho(X_1 + X_2) = \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

Ainsi, en considérant une mesure de risque additive pour les risques comonotones, il n'y a pas de diversification¹⁴ possible lorsqu'on agrège des segments relatifs à des variables de risque comonotones.

B. Mesures de distorsion

Nous introduisons ici le concept de mesure de distorsion, permettant d'écrire certaines mesures de risque sous forme d'intégrale et ainsi démontrer certains résultats relatifs à la méthode d'allocation d'Euler (se référer à la partie IV-B-4).

Notons F_X la fonction de répartition de X et S_X la fonction de survie de X définie par :

$$S_X(t) = P(X > t).$$

Définition 2.4 - On appelle **mesure de distorsion** la quantité : $r(F_X, G) := \int_0^1 F_X^{-1}(u) dG(u)$, où G est une fonction de répartition sur $[0,1]$ appelée **fonction de distorsion**.

Une mesure de distorsion pondère donc les quantiles avec des poids donnés par la fonction G . En considérant cette définition, une fonction G convexe traduit une surpondération des risques extrêmes. A l'inverse, lorsque G est concave, les risques extrêmes sont peu pris en compte.¹⁵

¹⁴ Les mécanismes de diversification seront expliqués en début de partie III sur l'agrégation des risques. On parle de diversification lorsque le capital relatif à un agrégat de segments est inférieur à la somme des capitaux de chacun des segments.

¹⁵ Dans la littérature, les mesures de distorsion sont généralement définies par : $r(F_X, G) := \int_0^1 F_X^{-1}(1-u) dG(u)$. Une fonction G concave traduit alors une surpondération des risques extrêmes.

Si G admet une densité g , nous pouvons écrire :

$$r(F_X, G) = \int_0^1 F_X^{-1}(u) g(u) du.$$

Nous montrons ci-dessous que la quantité $r(F_X, G)$ s'interprète comme l'espérance sous la probabilité $\mathbb{P}$ de la variable aléatoire X^* de fonction de survie : $S_{X^*}(x) = H\{S_X(x)\}$, où la densité de H sur $[0,1]$ est donnée par : $h(v) = g(1 - v)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} r(F_X, G) &= \int_0^1 F_X^{-1}(1 - v) g(1 - v) dv \\ &= \int_0^1 F_X^{-1}(1 - v) h(v) dv. \end{aligned}$$

En observant que :

$$F_X^{-1}(1 - \alpha) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{x \leq F_X^{-1}(1 - \alpha)} \mathbb{1}_{F_X^{-1}(1 - \alpha) \geq 0} dx - \int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{x \geq F_X^{-1}(1 - \alpha)} \mathbb{1}_{F_X^{-1}(1 - \alpha) \leq 0} dx,$$

et en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$r(F_X, G) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{S_X(x)} h(v) dv \right) dx - \int_{-\infty}^0 \left(\int_{S_X(x)}^1 h(v) dv \right) dx.$$

Nous obtenons finalement :

$$r(F_X, G) = \int_0^{+\infty} H(S_X(x)) dx - \int_{-\infty}^0 [1 - H(S_X(x))] dx = E^{\mathbb{P}}[X^*].$$

Remarquons que si H est l'identité, $r(F_X, G)$ correspond à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X , sous $\mathbb{P}$.

C. Principales mesures de risque

Différentes mesures de risque peuvent être considérées pour quantifier le risque. Nous nous intéressons dans ce mémoire aux trois mesures de risque suivantes, couramment utilisées :

- La mesure de risque écart-type,
- La mesure de risque VaR ,
- La mesure de risque $TVaR$.

1. La mesure de risque écart-type

La mesure de risque écart-type s'appuie sur la volatilité de la variable de risque, une variable aléatoire volatile reflétant un risque élevé. Son expression est la suivante :

$$\sigma_\theta(X) := \theta \cdot \sigma_X.$$

Avec :

- θ un paramètre réel,
- σ_X (noté aussi $\sigma(X)$) l'écart-type de la variable X .

Le capital économique défini à partir d'une mesure de risque écart-type s'écrit :

$$C = \sigma_\theta(X). \quad (2.1)$$

Nous nous intéresserons au choix d'une valeur adéquate pour le paramètre θ (cf partie II-D-1).

Notons que la mesure de risque écart-type est utilisée pour définir le **scénario équivalent**, approche alternative à la Formule Standard proposée par le dispositif Solvabilité II¹⁶. Cette approche consiste à réaliser des chocs simultanés sur le bilan initial. Néanmoins, la mesure de risque écart-type ne tient pas compte du signe des écarts à la moyenne et ne vérifie pas les propriétés de monotonie et d'invariance par translation, propriétés de cohérence requises.

2. La mesure de risque Value at Risk (VaR)

Nous commençons par donner la définition générale de la mesure de risque VaR.

Définition 2.5 - On appelle VaR au niveau α le quantile d'ordre α de la distribution de X :

$$VaR_\alpha(X) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

Nous noterons indifféremment $q_\alpha(X)$ ou $VaR_\alpha(X)$ la VaR au niveau α .

La fonction de répartition de la variable X étant continue et strictement croissante, celle-ci est inversible et la VaR se réécrit : $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$

Remarquons que :

- Si f est croissante : $VaR_\alpha(f(X)) = f\{VaR_\alpha(X)\}$.
- Si f est décroissante : $VaR_\alpha(f(X)) = f\{VaR_{1-\alpha}(X)\}$.

Ainsi, en utilisant la remarque précédente, la VaR à 99,5% de la variable X correspond au capital économique Solvabilité II, soit :

$$C = VaR_{99,5\%}(X) = FP(0) - D(1) \cdot VaR_{0,5\%}\{FP(1)\}.$$

¹⁶ Plus précisément, l'approche scénario équivalent sous-entend une allocation par la méthode d'Euler couplée à une mesure de risque écart-type.

Lien avec les mesures de distorsion

La mesure de risque VaR_α est une mesure de distorsion, obtenue en prenant comme fonction de distorsion la masse de Dirac au point α . En considérant la fonction de répartition W définie sur $[0,1]$ par : $W(x) = \mathbb{1}_{x \leq \alpha}$, nous avons en effet :

$$r(F_X, W) = \int_0^1 F_X^{-1}(u) dW(u) = F_X^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(X).$$

La fonction de distorsion W affecte un poids nul à tous les points de l'intervalle $[0,1]$ sauf au point α .

Lorsque X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$, nous avons :

$VaR_\alpha(X) = \mu_X + \sigma_X \cdot \phi^{-1}(\alpha)$, où ϕ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

Nous spécifions ci-dessous les différentes propriétés vérifiées par la mesure de risque VaR .

Proposition 2.1 - La VaR est une mesure de risque monotone, positivement homogène, invariante par translation et additive pour les risques comonotones.

Ainsi, il n'y a pas de diversification possible lorsqu'on agrège des risques comonotones à l'aide de la mesure de risque VaR .

Par ailleurs, la VaR vérifie toutes les propriétés de cohérence à l'exception de celle de sous-additivité. Lorsque la mesure du risque est réalisée à l'aide de la VaR , le risque relatif à un agrégat de segments peut alors être supérieur à la somme des risques calculés pour chacun des segments. Néanmoins, la VaR est sous-additive dans le cas de variables de risque elliptiques.

Par ailleurs, la VaR ne donne pas d'information sur la structure de la queue de distribution.

La mesure de risque présentée ensuite permet de surmonter les différents inconvénients de la VaR , en s'intéressant à la perte moyenne encourue au-delà de la VaR .

3. La mesure de risque TailVaR (TVaR)

Définition 2.6 - On définit la $TVaR$ au niveau α par l'espérance conditionnelle de la variable de risque sachant que celle-ci dépasse la VaR , soit : $TVaR_\alpha(X) := E(X | X > VaR_\alpha(X))$.

Le capital économique calculé à partir d'une $TVaR$ s'écrit :

$$C = TVaR_{99,5\%}(X) = FP(0) - D(1) \cdot TVaR_{0,5\%}\{FP(1)\}. \quad (2.2)$$

Nous avons :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{E(X \mathbb{1}_{X > VaR_\alpha(X)})}{P(X > VaR_\alpha(X))} = \frac{1}{1 - \alpha} E(X \mathbb{1}_{X > VaR_\alpha(X)}).$$

En utilisant le théorème de transfert et en effectuant le changement de variable : $u = F_X(x)$, nous obtenons une caractérisation intégrale de la $TVaR$, comme montré ci-dessous :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} x dF_X(x) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(u) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du.$$

Cette caractérisation intégrale fait de la $TVaR$ une mesure de risque continue, quel que soit la nature des variables de risque (discrète ou continue).

Pour une **variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$** , nous pouvons déterminer une formule explicite pour l'expression de la $TVaR$, comme spécifié ci-dessous :

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \times \left\{ -\sigma_X^2 \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} \frac{-(x - \mu_X)}{\sigma_X^2} \cdot f_X(x) dx + \mu_X \times (1 - \alpha) \right\} \end{aligned}$$

Ainsi, dans le **cas gaussien** :

$$TVaR_\alpha(X) = \mu_X + \frac{1}{1-\alpha} \sigma_X^2 \times f_X(VaR_\alpha(X)).$$

Plus généralement, lorsque la variable X est elliptique (se référer à l'annexe A.1 pour une définition des variables elliptiques), il existe une formule fermée pour le calcul de la $TVaR$ de X . Le lecteur intéressé par cet aspect pourra se référer à l'article [8].

Lien avec les mesures de distorsion

Considérons la densité z de la loi uniforme sur $[\alpha, 1]$ donnée par $z(u) = \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{1}_{[\alpha, 1]}(u)$, et calculons la mesure de distorsion associée afin de montrer qu'il s'agit de la $TVaR$ au niveau α .

$$r(F_X, Z) = \int_0^1 F_X^{-1}(u) z(u) du = \int_0^1 F_X^{-1}(u) \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{1}_{[\alpha, 1]}(u) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(u) du = TVaR_\alpha(X).$$

La $TVaR$ pondère donc uniformément les valeurs de la queue de distribution extrême.

Proposition 2.2 - La $TVaR$ est une mesure de risque cohérente au sens de la définition 2.1 et additive pour les risques comonotones.

Ainsi, cette mesure de risque vérifie toutes les propriétés de cohérence. Dans une démarche d'allocation de capital où il est important d'avoir une vision « juste » du risque, cette mesure de risque paraît adaptée et nous lui attacherons une importance particulière.

D. Redéfinition du capital économique

Le capital économique Solvabilité II est défini à partir de la mesure de risque VaR. Nous montrons dans cette partie qu'il est envisageable de calculer le capital économique à partir d'autres mesures de risque, tout en satisfaisant le critère de solvabilité à un an.

1. Cas d'une mesure de risque écart-type

Nous aménageons dans cette rubrique II-D-1 légèrement la définition du capital économique (2.1). Plaçons nous dans un cadre monopériodique en date 1 et supposons que le capital économique vaut : $C = \theta \cdot \sigma_{FP(1)}$

Le surplus algébrique permettant de faire face à une ruine économique à horizon un an est donné par : $S = \theta \cdot \sigma_{FP(1)} - E\{FP(1)\}$.

Montrons que cette définition du capital économique satisfait la non ruine à horizon 1 an à un niveau de confiance de 99,5%, avec θ bien choisi.

En notant $FP'(1)$ la valeur des Fonds Propres en date 1 après injection du montant S (soit la valeur du capital économique en date 1), la probabilité de ruine s'écrit :

$$P_{ruine} = P(FP'(1) < 0) =^{(*)} P(FP(1) + S < 0) = P(E\{FP(1)\} - FP(1) > \theta \cdot \sigma_{FP(1)}).$$

Remarque : en réalité, l'égalité (*) est une approximation : pour un calcul exact, il faudrait raisonner par itérations successives afin de tenir compte des interactions entre l'actif et le passif.

En considérant la variable $-FP(1)$, il vient : $P_{ruine} = P(FP(1) - E\{FP(1)\} > \theta \cdot \sigma_{FP(1)})$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'obtenir la majoration suivante :

$$P_{ruine} \leq \frac{1}{1 + \frac{\theta^2 \cdot \sigma_{FP(1)}^2}{\sigma_{FP(1)}^2}}$$
$$P_{ruine} \leq \frac{1}{1 + \theta^2}.$$

En choisissant θ de telle sorte à ce que :

$$\frac{1}{1 + \theta^2} = 0,5\%,$$

l'inégalité visée est vérifiée, c'est à dire : $P_{ruine} \leq 0,5\%$.

Il est également possible de considérer pour θ la valeur permettant de répliquer le capital économique Solvabilité II calculé à partir de la $Var_{99,5\%}(X)$. En revanche, cette approche est moins conservatrice.

2. Cas d'une mesure de risque TVaR

Rappelons que le capital économique est défini dans ce cas par : $C = TVaR_{99,5\%}(X)$, soit : $C = FP(0) - D(1) \cdot TVaR_{0,5\%}\{FP(1)\}$.

Le surplus algébrique à ajouter en date initiale pour satisfaire la contrainte de non-ruine à un an correspond alors à : $S = -D(1) \cdot TVaR_{0,5\%}\{FP(1)\}$.

Calculons la probabilité de ruine, après ajout du surplus S aux Fonds Propres initiaux :

$$P_{ruine} = P(FP'(1) < 0) = P\left(FP(1) + \frac{S}{D(1)} < 0\right) = P(FP(1) < TVaR_{0,5\%}\{FP(1)\}).$$

Or : $P(FP(1) < TVaR_{0,5\%}\{FP(1)\}) \leq P(FP(1) < VaR_{0,5\%}\{FP(1)\})$,
puisque $TVaR_{0,5\%}\{FP(1)\} \leq VaR_{0,5\%}\{FP(1)\}$.

Ainsi : $P_{ruine} \leq 0,5\%$ et la contrainte de solvabilité à horizon 1 an est bien vérifiée.

Remarquons qu'il est donc plus conservateur de définir le capital économique à partir d'une mesure de risque $TVaR$ qu'à partir d'une mesure de risque VaR , en retenant un seuil α identique.

Nous avons montré dans cette partie que la redéfinition du capital économique à partir d'une mesure de risque écart-type ou $TVaR$ a un sens au regard du critère de solvabilité requis. Ceci nous amènera à déterminer des formules d'agrégation dans le cas de capitaux définis par (2.1) ou (2.2). Nous pourrions également calculer des contributions au risque (se référer à la partie IV-B) à partir des mesures de risque écart-type et $TVaR$.

III. Agrégation des risques

L'agrégation des risques permet de disposer d'un capital consolidé pour l'ensemble des risques auxquels la compagnie est exposée. Ce capital tient compte des phénomènes de dépendance entre les différents segments ; il est défini comme l'agrégat des capitaux relatifs à chaque segment et sera dénommé « **capital global** ».

Le terme « agrégation des risques » doit être compris au sens large : il s'agit d'agréger des capitaux économiques relatifs à des risques (actions, mortalité...) d'un même périmètre de passifs mais aussi d'agréger des capitaux économiques de périmètres de passifs différents. L'agrégation des risques s'appréhende donc selon ces deux dimensions et il conviendra d'adapter les méthodologies selon le type d'agrégation envisagée.

Nous parlerons de **bénéfice de diversification** lorsque le capital requis pour l'agrégat de segments considéré est inférieur à la somme des capitaux de chacun des segments.

Dans le cas contraire, il s'agit de **phénomènes de contagion** entre risques. Remarquons qu'il est possible, dans le cadre d'une approche simulatoire, de rencontrer ce type de phénomènes. En effet, la méthodologie de calcul du capital économique est fondée sur la mesure de risque VaR ; cette mesure de risque n'étant pas sous-additive, nous pouvons être confrontés à des cas de contagion.

La méthodologie d'agrégation employée est spécifique à l'approche retenue pour le calcul des capitaux élémentaires (méthodologie de type Formule Standard ou méthodologie simulatoire), comme explicité ci-dessous.

Dans le cas d'une approche de type Formule Standard, agréger les risques c'est corrélérer les risques *a posteriori* : les risques sont corrélés au moyen de coefficients de corrélation linéaire, après avoir été chacun quantifié à partir de chocs/facteurs. Cette approche assure donc une diversification entre risques.

Lorsque les risques sont projetés à partir d'une méthodologie d'obtention de la situation nette à un an, nous parlerons plutôt **d'intégration des risques** : en faisant évoluer conjointement les facteurs de risques dans une projection, nous obtenons en effet une distribution de Fonds Propres intégrant les phénomènes de diversification « mécaniquement » pris en compte. Le capital économique relatif aux risques projetés est alors simplement calculé à partir du quantile extrême de la distribution de Fonds Propres.

En réalité, la méthodologie d'agrégation des risques employée pour déterminer le capital économique global ne correspond pas toujours à l'application directe d'une de ces méthodes, dans la mesure où certains modèles reposent sur un usage conjoint des approches de type Formule Standard et simulatoire : il s'agit des Modèles Internes Partiels. L'étape d'agrégation des risques est alors rendue plus délicate.

Après avoir décrit puis rapproché les méthodologies d'agrégation de type Formule Standard et modèle interne, lorsque celui-ci intègre une projection des risques sur la première période, nous chercherons à les articuler dans le cadre des Modèles Internes Partiels. Les méthodologies proposées permettront de traiter l'ensemble des problématiques posées par les Modèles Internes Partiels envisageables par les compagnies d'assurance, mais également celles soulevées par les modèles internes de type Formule Standard Entity Specific.

A. Agrégation des risques de type Formule Standard

1. Agrégation entre risques

Nous avons présenté dans la partie I-C-2 la méthodologie de calcul des capitaux élémentaires de type Formule Standard. Nous nous intéressons à présent à leur agrégation, afin de déterminer le capital consolidé¹⁷.

Les différents risques, que nous appellerons **risques élémentaires** (actions, taux...), sont regroupés selon leur nature par **module de risque**.

La Formule Standard propose d'agréger les capitaux économiques élémentaires à partir de matrices de coefficients de corrélation linéaires, mettant ainsi en évidence la dépendance linéaire entre ces différents capitaux. Deux étapes d'agrégation sont réalisées : **l'agrégation intra-modulaire**, effectuée au sein de chaque module de risque, puis **l'agrégation inter-modulaire**. L'agrégation des risques de type Formule Standard est donc une **approche « bottom-up »** en deux étapes.

Le schéma ci-dessous présente l'architecture des risques Formule Standard :

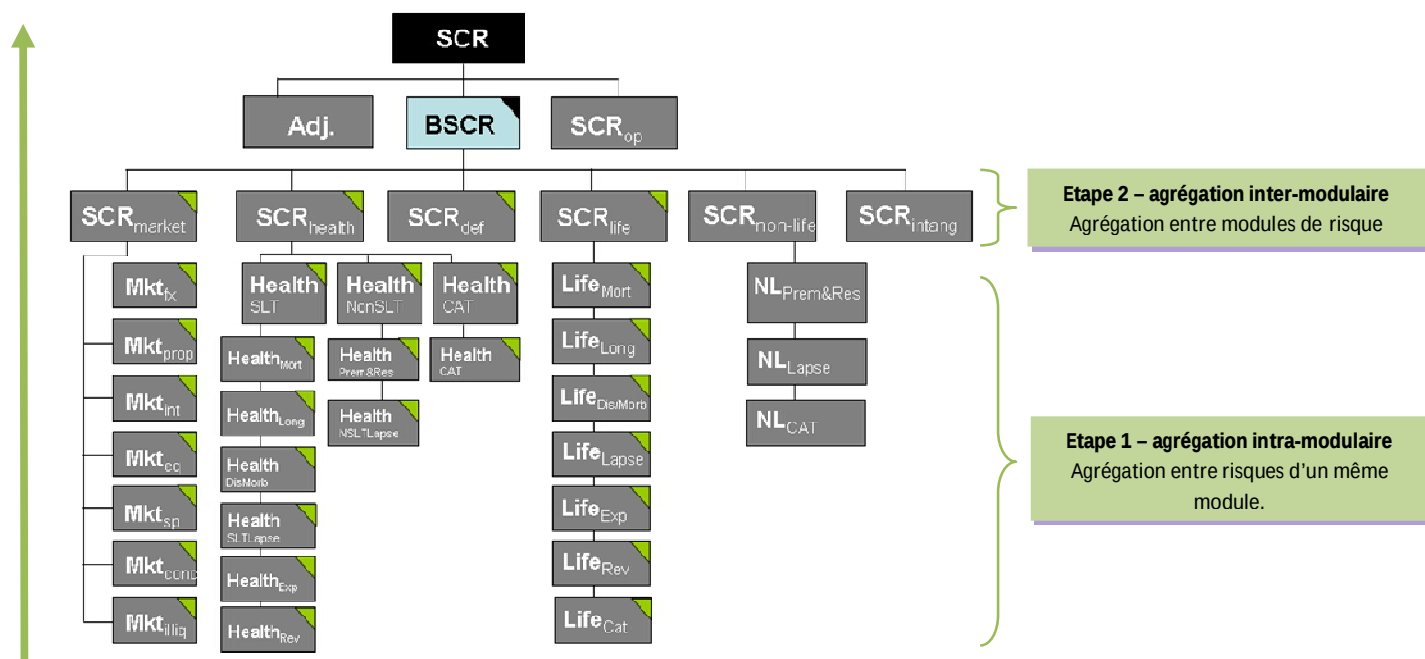


Figure 3.1 - Cartographie des risques QIS 5 – agrégation bottom-up des risques.

Introduisons les notations suivantes afin de formaliser les calculs Formule Standard :

- R_m l'ensemble des risques du module m ,
- C_i le capital au titre du risque i ,
- $\rho_{i,j}^{R_m}$ le coefficient de corrélation permettant d'agréger les capitaux au titre des risques i et j appartenant au module m ,
- SCR_m le capital économique du module m ,

¹⁷ L'approche décrite ici s'applique aux cas Formule Standard « classique » et « Formule Standard Entity Specific », sous réserve que l'architecture des risques ne soit pas modifiée dans ce dernier cas.

- M l'ensemble des modules,
- $\rho_{i,j}^M$ le coefficient de corrélation permettant d'agréger les capitaux des modules i et j ,
- $BSCR$ le capital économique global (dénommé Basic Solvency Capital Requirement) avant intégration du risque opérationnel et prise en compte des ajustements.

Nous détaillons ci-dessous les étapes de calculs permettant d'aboutir au capital économique global.

Etape 1 - Agrégation intra-modulaire

Les capitaux élémentaires d'un même module de risque sont agrégés, prenant ainsi en compte la diversification existante au sein d'un même module de risque.

Pour chaque module de risque m , le calcul du SCR_m par agrégation intra-modulaire des risques est réalisé comme suit :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_m^2} \rho_{i,j}^{R_m} \cdot C_i \cdot C_j}$$

Etape 2 - Agrégation inter-modulaire

Les sous-capitaux agrégés issus de l'étape 1 (les éléments SCR_m) sont ensuite agrégés entre eux afin d'obtenir le capital $BSCR$. Cette étape permet de tenir compte de la diversification entre modules de risque.

Le calcul suivant est effectué afin de déterminer le $BSCR$:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j) \in M^2} \rho_{i,j}^M \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

Le SCR est ensuite obtenu après intégration du risque opérationnel et prise en compte des ajustements.

2. Agrégation entre périmètres de passifs

Nous employons à présent le terme « périmètre de passifs » pour désigner aussi bien, selon le type d'agrégation souhaitée : un portefeuille, un canton, une entité, une compagnie, etc...

L'agrégation de type Formule Standard décrite infra correspond à une agrégation entre risques à périmètre(s) de passifs fixé(s) : il peut s'agir d'une agrégation entre risques d'un même périmètre de passifs ou entre risques de plusieurs périmètres de passifs, après consolidation préalable des capitaux de chaque périmètre.

Dans le cadre de ce mémoire, l'agrégation des capitaux entre périmètres de passifs sera réalisée au niveau le plus élémentaire possible, permettant ainsi de bénéficier d'une diversification maximale entre les différents périmètres. Une fois cette étape préalable effectuée, les risques sont agrégés entre eux à partir des corrélations Formule Standard (ou Entity Specific), dans le cadre d'une agrégation des risques de type Formule Standard.

Intéressons nous à un unique risque R et étudions la méthodologie de calcul du capital consolidé entre périmètres, au titre de ce risque.

Nous notons E l'ensemble des périmètres de passifs et supposons que nous sommes dans un cas mono-factoriel pour lequel un seul sens du risque prévaut pour l'ensemble des périmètres ; à titre d'exemple, les périmètres de passifs sont toujours exposés à la baisse du niveau des actions. Montrons alors, en utilisant la propriété de comonotonicité de la VaR , que le capital requis pour l'ensemble des périmètres au titre du risque R est calculé comme somme des capitaux de chaque périmètre, au titre de ce risque.

Supposons que la variable aléatoire Fonds Propres en date 0^+ du périmètre i , variable obtenue en neutralisant l'ensemble des risques excepté le risque R , s'exprime comme une fonction monotone f_i du facteur ε_R permettant de simuler R . En notant $\widetilde{FP}_R^i(0^+)$ cette variable, nous avons donc :

$$\widetilde{FP}_R^i(0^+) = f_i(\varepsilon_R).$$

Ainsi, nous pouvons écrire le capital au titre du risque R de chaque périmètre i , après choc instantané sur R , comme suit :

$$C_R^i = FP^i(0) - VaR_{0,5\%}(f_i(\varepsilon_R)),$$

où les fonctions f_i sont des fonctions monotones, de même monotonie.

Déterminons à présent le montant du capital économique C_R à constituer au titre du risque R , pour couvrir le risque de l'ensemble des périmètres :

$$C_R = \sum_{i \in E} FP^i(0) - VaR_{0,5\%}\left(\sum_{i \in E} f_i(\varepsilon_R)\right).$$

Les $(f_i(\varepsilon_R))_{i \in E}$ sont des risques **comonotones** car ils s'expriment comme une fonction monotone d'une même variable aléatoire. La propriété d'additivité de la VaR est alors vérifiée, nous permettant d'écrire :

$$C_R = \sum_{i \in E} FP^i(0) - \sum_{i \in E} VaR_{0,5\%}(f_i(\varepsilon_R)).$$

Nous obtenons finalement :

$$C_R = \sum_{i \in E} C_R^i.$$

Il s'agit d'un cas de **dépendance parfaite** puisque la valeur des variables Fonds Propres dépend d'un unique aléa, commun aux variables Fonds Propres de chaque périmètre de passifs. Nous sommes alors dans un cas très simplifié où le capital économique consolidé est obtenu par somme des capitaux élémentaires, soit une agrégation des capitaux avec un coefficient de corrélation égal à 1.

Néanmoins, certains risques, par exemple le risque de taux d'intérêt, peuvent être différemment adverses à la hausse ou à la baisse selon le périmètre de passifs ; il n'est alors pas possible de procéder comme ci-dessus. Dans ce cas, nous retiendrons comme capital consolidé entre périmètres, au titre du risque R , le capital le plus conservateur, selon le sens du risque qui prédomine au global, soit :

$$C_R = \text{Max} \left(\sum_{i \in E} C_{R,up}^i, \sum_{i \in E} C_{R,down}^i \right).$$

En notant :

- $C_{R,up}^i$ le capital obtenu après valorisation des Fonds Propres associés à un choc à la hausse sur le risque R ,
- $C_{R,down}^i$ le capital obtenu après valorisation des Fonds Propres associés à un choc à la baisse sur le risque R .

B. Agrégation et phénomènes de dépendance dans un modèle interne

1. Les différentes structures de modèles internes

Différentes structures de modèles internes sont envisageables. Par convention, nous distinguons les deux structures suivantes, décrites plus précisément ensuite :

- Le Modèle Interne de type Formule Standard « Entity Specific »,
- Le Modèle Interne Partiel (MIP).

Un **Modèle Interne de type Formule Standard Entity Specific** repose sur une méthodologie d'agrégation des risques « bottom-up ». Le calcul des capitaux élémentaires est réalisé à partir de coefficients de chocs, puis les capitaux sont agrégés au moyen de coefficients de corrélation linéaires. Plusieurs structures de Formule Standard Entity Specific sont envisageables.

D'une part, la compagnie peut souhaiter modifier la valeur des chocs ou des corrélations entre risques, en considérant des valeurs mieux ajustées à son profil de risque, tout en conservant l'architecture des risques proposée par le CEIOPS. Dans ce cas, le principe d'agrégation est similaire à celui de la Formule Standard, présenté dans la partie II-A, mais il est possible de modifier les paramètres (coefficients de chocs et/ou coefficients d'agrégation). La différence entre une Formule Standard Entity Specific et une Formule Standard « classique » est en effet, dans ce cas, uniquement due à des problématiques de paramétrage.

D'autre part, la compagnie peut choisir, dans le cadre d'une Formule Standard Entity Specific, une autre architecture des risques, par exemple l'architecture en « râteau », explicitée dans la partie III-E-1.

Dans ce mémoire, le modèle interne est qualifié de **Modèle Interne Partiel** lorsque qu'il permet de simuler qu'une partie des risques de la compagnie (à l'aide d'une technique d'obtention de la situation nette à un an pour les risques financiers), les autres calculs étant réalisés à partir d'une approche de type Formule Standard (Formule Standard « classique » ou Formule Standard Entity Specific)¹⁸.

Certains risques sont donc quantifiés par une méthodologie simulatoire, et d'autres par une méthodologie de type Formule Standard.

Deux dimensions d'agrégation des risques et leurs problématiques d'agrégation associées sont distinguées dans la suite :

- L'agrégation entre risques, à périmètre(s) de passifs fixé(s),
- L'agrégation entre périmètres de passifs à risque(s) fixé(s).

2. Notion de dépendance dans les modèles internes

Dans le cadre d'une approche de type Modèle Interne Partiel, le modèle interne doit, pour modéliser les risques le plus fidèlement possible, tenir compte des dépendances entre les facteurs de risque qui le composent.

Dans un modèle interne, les dépendances entre variables aléatoires s'observent à différents niveaux. D'une part, il existe des dépendances entre les éléments de l'actif, prises en compte en amont, avant intégration dans les modèles internes : par exemple, la corrélation entre les actions et les taux d'intérêt est prise en compte dans les tables de scénarios économiques.

D'autre part, le modèle ALM tient compte des dépendances entre les éléments de l'actif et ceux du passif : l'interaction entre ces éléments est due aux mécanismes de participations aux bénéfices et aux différentes options pouvant être exercées par les assurés (rachat du contrat par exemple).

Enfin, des dépendances s'observent entre les éléments du passif : par exemple, en assurance non-vie, certaines variables techniques sont simulées (réserves, primes, ...). La dépendance entre ces variables peut alors être mise en évidence, soit au cours de la phase simulatoire en effectuant des simulations conjointes, soit en insérant la dépendance après réalisation de simulations « stand alone ».

La théorie des copules est un outil mathématique puissant permettant de rendre compte de ces dépendances ; nous introduisons ci-après ce concept.

3. Éléments de théorie des copules

La littérature sur l'agrégation des risques fait souvent référence à la théorie des copules.

Nous donnons ici quelques éléments fondamentaux permettant de formaliser la notion de dépendance et de traiter les problématiques d'agrégation des risques dans la suite du mémoire.

La théorie des copules permet de modéliser la dépendance, concept plus large que celui de corrélation linéaire, entre différentes variables aléatoires, quelles que soient les lois marginales suivies par chacune d'entre elles. Dans un contexte d'agrégation des risques où persistent des dépendances entre risques, cette théorie peut être très utile.

¹⁸ Nous parlerons également de *Modèle Interne Partiel* lorsque le modèle permet de projeter certains périmètres de passifs uniquement.

Nous commençons par donner la définition d'une copule.

Définition 3.1 - Une copule est une fonction de répartition multivariée ayant des lois marginales uniformes sur $[0,1]$.

Le théorème de Sklar, cité ci-dessous, est un résultat fondamental de cette théorie.

Théorème (de Sklar) - Soit $F_{(X_1, \dots, X_n)}$ une fonction de répartition n-dimensionnelle ayant des marginales $F_{X_1} \dots F_{X_n}$, alors il existe une copule C telle que :

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = C(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_n}(x_n)).$$

Les copules permettent donc la création de distributions multivariées ayant des lois marginales quelconques. Le théorème de Sklar souligne l'idée de **séparation stricte entre la notion de loi et de dépendance**.

Dans ce mémoire, les dépendances seront modélisées à l'aide d'une **copule gaussienne**, prenant la forme suivante :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n)),$$

où ϕ_{Σ} désigne la fonction de répartition multivariée d'une $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$.

C. Comparaison entre les approches de type Formule Standard et simulateur

Pour traiter des problématiques d'agrégation dans les Modèles Internes Partiels, il est essentiel d'analyser les différences entre une démarche de type Formule Standard, consistant à agréger des capitaux quantifiés par approche chocs/facteurs à partir de matrices de corrélation, et une agrégation des risques dictée par le modèle interne, liée à une méthodologie simulateur. Ceci afin d'articuler ces méthodologies de manière adéquate.

Tout d'abord, nous comparons les méthodologies de calcul du capital économique. Nous rapprochons ensuite les méthodologies d'agrégation.

1. Le calcul du capital économique

Dans cette partie, nous nous intéressons au calcul du capital économique au titre du risque élémentaire R et rapprochons les méthodologies de calcul de type Formule Standard et SdS marginal.

Lorsqu'une approche de type Formule Standard est retenue pour le calcul de ce capital, le choc sur le bilan est instantané, tandis que l'approche SdS marginal sous-entend un choc réalisé au cours de la première période. La date de réalisation des chocs est donc différente selon l'approche retenue.

Par ailleurs, l'approche de type Formule Standard consiste à évaluer les Fonds Propres associés au scénario quantile en date initiale, tandis que l'approche simulatoire s'intéresse au calcul du quantile extrême des Fonds Propres, après projection du risque sur lequel l'intérêt est porté et neutralisation des autres risques dans la projection.

Ainsi, le calcul Formule Standard est fondé sur le calcul des Fonds Propres en un point quantile tandis que le calcul SdS marginal est basé sur le calcul d'un quantile sur Fonds Propres économiques.

Potentiellement, ces deux approches peuvent donc donner des résultats très différents.

Nous illustrons ci-dessous les différences énoncées entre les deux approches.

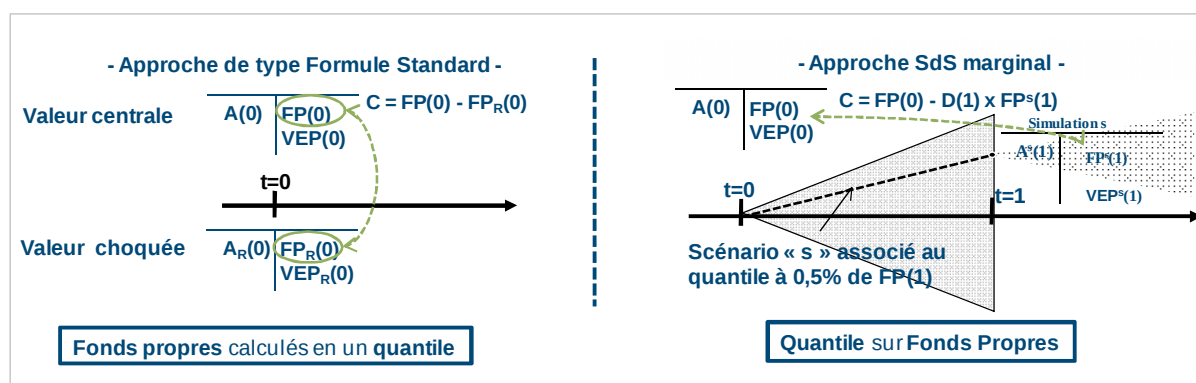


Figure 3.2 - Comparaison entre l'approche de type Formule Standard et l'approche SdS marginal.

Nous aménageons dans cette partie III-C-1 légèrement la définition du capital économique afin de rapprocher rigoureusement les deux approches de calculs et déterminer sous quelles hypothèses, un calcul de type Formule Standard coïncide avec un calcul de type SdS marginal.

Dans la suite :

- $FP_C(1)$ correspond au Fonds Propres centraux en date 1, autrement dit la valeur des Fonds Propres valorisés en date 1, lorsque tous les aléas de première période ont été neutralisés,
- $FP_R(1)$ la valeur des Fonds Propres en date 1 après projection du bilan associé au scénario quantile sur la première période puis valorisation.

Ceci nous amène à considérer temporairement, selon l'approche, les définitions suivantes pour le calcul du capital économique :

- $C_R^{SdS} = FP_C(1) - q_{0,5\%}(FP(1))$,
- $C_R^{FS} = FP_C(1) - FP_R(1)$.

Supposons que l'aléa relatif au risque R peut être entièrement caractérisé par un unique facteur de risque ε_R . Ainsi, nous avons :

- $C_R^{SdS} = FP_C(1) - q_{0,5\%}(f(\varepsilon_R))$,

- $C_R^{FS} = FP_c(1) - f(q_\alpha(\varepsilon_R))$, où $\alpha \in \{0,5\%, 99,5\%\}$ selon le sens du risque étudié.

La comparaison entre les deux approches se réduit donc à la comparaison des éléments $q_{0,5\%}\{f(\varepsilon_R)\}$ et $f\{q_\alpha(\varepsilon_R)\}$.

Introduisons l'hypothèse suivante :

H_0 : le montant de Fonds Propres économiques en $t = 1$ est une fonction monotone du facteur de risque ε_R .

Sous cette hypothèse, nous avons, en distinguant deux cas :

- Si la fonction f est croissante (le risque est à la baisse et $\alpha = 0,5\%$) :

$$C_R^{FS} = FP_c(1) - q_\alpha(f(\varepsilon_R)) = C_R^{SdS}.$$
- Si la fonction f est décroissante (le risque est à la hausse et $\alpha = 99,5\%$) :

$$C_R^{FS} = FP_c(1) - q_{1-\alpha}(f(\varepsilon_R)) = C_R^{SdS}.$$

Ainsi, sous l'hypothèse de monotonie de la fonction Fonds Propres économiques, les approches Formule Standard et SdS marginal coïncident.

En réalité, une hypothèse moins exigeante permet de satisfaire le critère d'équivalence entre les deux méthodologies ; il s'agit d'une hypothèse de prédominance. Nous ne développons pas cet aspect. Pour une analyse et un rapprochement détaillé des deux méthodologies évoquées, le lecteur intéressé pourra se référer à l'article [4].

2. Agrégation des risques

L'agrégation des risques de type Formule Standard consiste à corréliser les capitaux à partir de matrices de corrélation. Nous allons étudier dans quel contexte cette approche est adaptée.

Lorsqu'une méthodologie de type SdS est employée, les facteurs de risque sont corrélés dans les tables de scénarios économiques, puis, l'étape d'agrégation des risques est implicite via les règles ALM, ce qui rend différentes les deux approches.

a) Agrégation des risques de type Formule Standard dans le cas d'une VaR

Nous définissons dans cette partie III-C-2-a) le capital économique par :

$$C = E[FP(1)] - q_{0,5\%}[FP(1)].$$

Intéressons nous à un ensemble N de risques que l'on souhaite agréger.

L'agrégation Formule Standard sous-tend les hypothèses suivantes :

- (H) $\left\{ \begin{array}{l} - H_1 : \text{la variable aléatoire Fonds Propres économiques en } t = 1 \text{ est une fonction affine des} \\ \text{facteurs de risque, i.e. : } FP(1) = a_0 + \sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i. \\ - H_2 : \text{le vecteur } \varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in N} \text{ suit une loi elliptique (cf annexe A.1).} \end{array} \right.$

Devineau et Loisel [4] démontrent que sous ces hypothèses, l'agrégation des risques Formule Standard définie par (3.1) est légitime. Nous avons, sous (H) :

$$C = \sqrt{\sum_{(i,j) \in N^2} sg(a_i a_j) \rho_{i,j} C_i C_j} . \quad (3.1)$$

Remarquons que lorsque les éléments a_i sont tous de même signes, nous retrouvons la formule d'agrégation présentée dans les QIS 5 (cf CEIOPS QIS 5 Technical Specifications [15]) :

$$C = \sqrt{\sum_{(i,j) \in N^2} \rho_{i,j} C_i C_j} .$$

b) Obtention d'une formule d'agrégation Formule Standard selon la mesure de risque

Plus généralement, nous montrons que la formule d'agrégation des risques (3.1) est vraie, sous (H), pour n'importe quelle **mesure de risque invariante par translation et positivement homogène** définissant le capital économique.

Dans ce cadre, le capital économique s'écrit : $C = E[FP(1)] - \rho_\alpha[FP(1)]$, où $\alpha = 0,5\%$.

Proposition 3.1 - Sous les hypothèses (H), nous avons, pour toute mesure de risque homogène de degré 1 et invariante par translation définissant le capital économique :

$$C = \sqrt{\sum_{(i,j) \in N^2} sg(a_i a_j) \rho_{i,j} C_i C_j} .$$

Cette proposition est démontrée en annexe A-2 au présent mémoire.

Ainsi, la redéfinition du capital économique Sovabilité II à partir d'une TVaR ne modifie pas la formule d'agrégation Formule Standard obtenue sous les hypothèses (H).

La proposition suivante donne une formule d'agrégation lorsque le capital économique est défini à partir d'une mesure de risque écart-type.

Proposition 3.2 - Sous H_1 , en considérant la définition suivante du capital économique : $C = \sigma_{FP(1)}$, la formule d'agrégation des risques est :

$$C = \sqrt{\sum_{(i,j) \in N^2} a_i a_j \rho_{i,j} C_i C_j} .$$

Cette relation se démontre immédiatement dans la mesure où :

$$\sigma_{FP(1)}^2 = \sum_{(i,j) \in N^2} a_i a_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j.$$

c) Spécificités d'une agrégation entre périmètres de passifs dans le cadre d'une approche simulatoire

Dans le cas d'une agrégation entre périmètres de passifs, à risque(s) fixé(s), la décomposition suivante est assurée :

$$FP(1) = \sum_{i \in E} FP^i(1),$$

où :

- E est un ensemble de périmètres de passifs,
- $FP^i(1)$ désigne les Fonds Propres en t=1 du périmètre de passifs i ,
- $FP(1)$ correspond au Fonds Propres consolidés.

Ainsi, la variable Fonds Propres globaux $FP(1)$ peut être décomposée strictement à partir des Fonds Propres individuels $FP^i(1)$ (encore appelés Fonds Propres marginaux).

L'utilisation du modèle interne pour chaque périmètre de passifs i permet de caractériser le vecteur des variables Fonds Propres marginaux et nous pouvons envisager une méthodologie de type copule pour agréger les variables Fonds Propres marginaux.

Supposons que nous disposons, pour chaque périmètre, d'une distribution de Fonds Propres relative à un ensemble de risques projetés à l'aide du modèle interne. Nous pouvons sommer, scénario par scénario, les réalisations des variables Fonds Propres, afin d'obtenir une distribution agrégée intégrant la diversification entre périmètres. Les Fonds Propres des périmètres de passifs associés au scénario s sont en effet relatifs à un même état du monde (valeur des actions, des taux etc...) et la diversification est alors mécaniquement prise en compte.

Ceci nous permet d'écrire, pour un scénario s :

$$FP^s(1) = \sum_{i \in E} FP^{i,s}(1). \quad (3.2)$$

En notant :

- $FP^{i,s}(1)$ les Fonds Propres en t=1 du périmètre i associés au scénario primaire s ,
- $FP^s(1)$ les Fonds Propres consolidés associés au scénario primaire s .

Notons que la notion de copule est sous-jacente à l'égalité (3.2). Les Fonds Propres de chaque périmètre sont en effet implicitement agrégés via une copule.

d) Problématiques d'agrégation entre risques

Dans le cas d'une agrégation entre risques, à périmètre(s) de passifs fixé(s), la décomposition des Fonds Propres globaux mise en exergue dans la partie précédente est rarement assurée. En effet, l'apparition d'effets croisés entre facteurs de risque dans le profil de la fonction Fonds Propres économiques compromet cette stricte séparation.

Plus précisément, nous avons généralement, en considérant un ensemble N de risques :

$$X \neq \sum_{i \in N} X_i.$$

Avec :

- X la variable de risque global telle que : $X = FP(0) - D.FP(1)$.
- X_i la variable de risque associée au risque i telle que : $X_i = FP_i(0) - D.FP(1)$, en précisant que nous avons ici : $FP_i(0) = FP(0)$.

Nous pouvons mettre en évidence la présence d'effets croisés entre facteurs de risque à partir d'une forme paramétrique, calibrée sur base d'un échantillon de Fonds Propres économiques.

Supposons que nous disposons d'une distribution de Fonds Propres où les taux (notés « int ») et les actions (notées « eq ») sont stochastiques, les autres risques neutralisés. Après calibrage et validation de la forme paramétrique (cf annexe B.3), nous sommes amenés à écrire, schématiquement, les Fonds Propres comme suit :

$$FP(1) = \underbrace{A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \varepsilon_{eq} + A_{2,0} \cdot \varepsilon_{eq}^2}_{\text{Contribution marginale « actions »}} + \underbrace{A_{0,1} \cdot \varepsilon_{int} + A_{0,2} \cdot \varepsilon_{int}^2 + A_{0,3} \cdot \varepsilon_{int}^3}_{\text{Contribution marginale « taux »}} + \underbrace{A_{1,1} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int} + A_{1,2} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2}_{\text{Effets croisés}}$$

Éléments non pris en compte dans la FS

Dès lors, une composante au titre des effets croisés apparaît, rendant impossible une agrégation de type copule comme dans le cas de périmètres de passifs, étudié précédemment. Par ailleurs, ces éléments ne sont pas pris en compte dans l'agrégation Formule Standard, ce qui met en évidence les limites d'une telle agrégation.

Notons également que la forme paramétrique souligne le caractère non-affine des Fonds Propres économiques, hypothèse requise pour une agrégation des risques de type Formule Standard.

Nous pouvons comparer les approches d'agrégation SdS¹⁹ et Formule Standard en procédant comme suit :

- **Etape 1** - Calcul du besoin en capital (actions, taux), noté $C_{(eq,int)}$, en effectuant un SdS où les actions et les taux sont stochastiques.

¹⁹ Il est également possible de recourir à l'une des méthodes alternatives au SdS présentées dans la partie I-C-3-b).

- **Etape 2** - Calcul des besoins en capital au titre des risques actions et taux, notés respectivement C_{eq} et C_{int} .
- **Etape 3** - Extraction du coefficient de corrélation, permettant, à partir d'une agrégation de type Formule Standard des besoins en capital élémentaires d'obtenir le capital global issu de la projection SdS (actions, taux), c'est-à-dire :

$$\rho_{eq,int} = \frac{C_{(eq,int)} - C_{eq}^2 - C_{int}^2}{2C_{eq}C_{int}}.$$

La mise en œuvre de ces différents calculs permet de comparer les méthodologies d'agrégation. En pratique, nous observons que la corrélation extraite ci-dessus est très éloignée de celle insérée, en amont, dans le générateur de scénarios économiques, ce qui met en échec, en toute rigueur, l'agrégation Formule Standard, les hypothèses requises n'étant pas vérifiées.

Afin de mettre en évidence la présence des non-linéarités et des effets croisés entre facteurs de risque, Devineau et Loisel [4] proposent une méthodologie alternative d'agrégation, consistant, à l'aide d'une forme paramétrique, à distinguer trois composantes de risque :

- Le risque de taux d'intérêt,
- Le risque actions,
- Le risque au titre des effets croisés entre les facteurs de risque actions et taux.

Nous ne détaillons pas la méthodologie employée mais ce type de raisonnement sera repris pour traiter la problématique d'allocation du capital sur des risques.

Dans le cadre des Modèles Internes Partiels, les sections suivantes visent à articuler les méthodologies de type Formule Standard et simulateur.

D. Problématiques d'agrégation des risques sous Solvabilité II

Les modèles internes soulèvent différentes problématiques, notamment :

- Dans le cadre d'une Formule Standard Entity Specific, comment répercuter dans l'architecture des risques Formule Standard une corrélation Entity Specific entre des risques appartenant à des modules différents ?
- Dans le cadre des Modèles Internes Partiels, comment agréger des capitaux obtenus par des méthodologies différentes : approche chocs/facteurs vs approche simulateur ?
- Lorsque le modèle interne permet de simuler des risques appartenant à des modules de risque différents, comment tenir compte du caractère Entity Specific de l'agrégation entre les capitaux élémentaires de modules différents, non explicite dans la Formule Standard ?
- Comment agréger des risques relatifs à différents périmètres de passifs lorsque les méthodologies de calcul des capitaux et d'agrégation des risques diffèrent ?

Nous allons apporter des solutions à l'ensemble des problématiques évoquées ci-dessus. Il paraît délicat de proposer des méthodologies adaptées à chaque situation. Néanmoins, les méthodes mises à disposition permettent, en les combinant, de traiter l'ensemble des cas de figures.

Nous nous intéressons dans la suite au cas d'un modèle interne de type Modèle Interne Partiel. Les problématiques liées au cas Formule Standard Entity Specific sont aisément résolues à l'aide des méthodologies présentées.

E. Techniques d'agrégation des risques

Après avoir présenté les différentes architectures des risques possibles, nous décrirons les méthodes proposées par le CEIOPS, permettant d'articuler les résultats du modèle interne et ceux fournis par l'application d'une méthodologie de type Formule Standard. Afin de traiter les problématiques posées par les modèles internes projetant des risques de modules différents, une adaptation des méthodologies et la mise en place d'une démarche alternative seront nécessaires.

1. Vocabulaire et architectures des risques

Nous avons présenté l'architecture des risques Formule Standard, suggérant une agrégation des risques en deux étapes. D'autres architectures des risques sont envisageables et seront indispensables pour traiter certaines problématiques d'agrégation des risques.

Comme illustré par la figure 3.3, nous distinguons dans la suite les trois architectures suivantes :

- **L'architecture « râteau »** : les risques élémentaires sont placés en « râteau ». L'agrégation des risques est alors réalisée en une étape, à partir d'une matrice de corrélation globale.
- **L'architecture standard** : il s'agit de l'architecture de la Formule Standard donnée précédemment (cf figure 3.1), intégrant deux niveaux d'agrégation. Plus généralement, nous dénommons « architecture standard » toute architecture sous-entendant une agrégation des risques en deux étapes.
- **L'architecture à trois niveaux intégrant des sous-modules de risque** : il s'agit d'une architecture à trois niveaux d'agrégation, spécifique au cas Modèle Interne Partiel. Au sein de chaque module de risque, les risques quantifiés par une méthodologie identique sont regroupés en un sous-module de risque. Nous distinguons un sous-module regroupant les risques non-modélisés, nommés risques Hors-MIP, et un sous-module regroupant les risques modélisés, nommés risques MIP. Cette architecture ajoute un niveau d'agrégation à l'architecture standard.

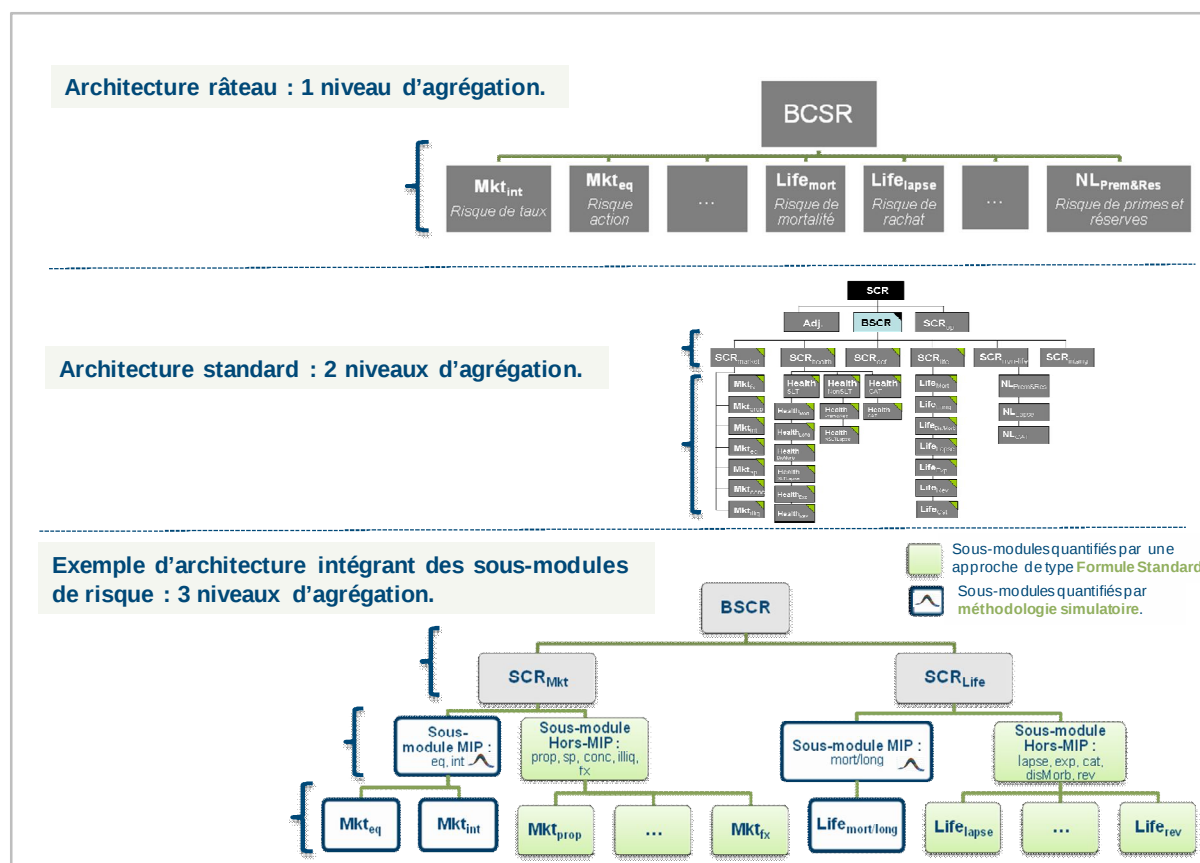


Figure 3.3 - Comparaison d'architectures des risques.

Nous avons clarifié précédemment ce qu'était une méthodologie de calcul des capitaux élémentaires de type Formule Standard et une agrégation des capitaux de type Formule Standard. Par souci de simplicité, nous employons dans la suite de cette partie III les termes « méthodologie Formule Standard » ou encore « agrégation des risques Formule Standard », en se souvenant qu'il peut s'agir de calculs de type Formule Standard Entity Specific pour les risques non modélisés.

2. Techniques proposées par le CEIOPS

Dans le Consultation Paper n° 65 (CP 65), le CEIOPS propose l'**arbre de décision** suivant, relatif au choix de techniques d'agrégation des risques :

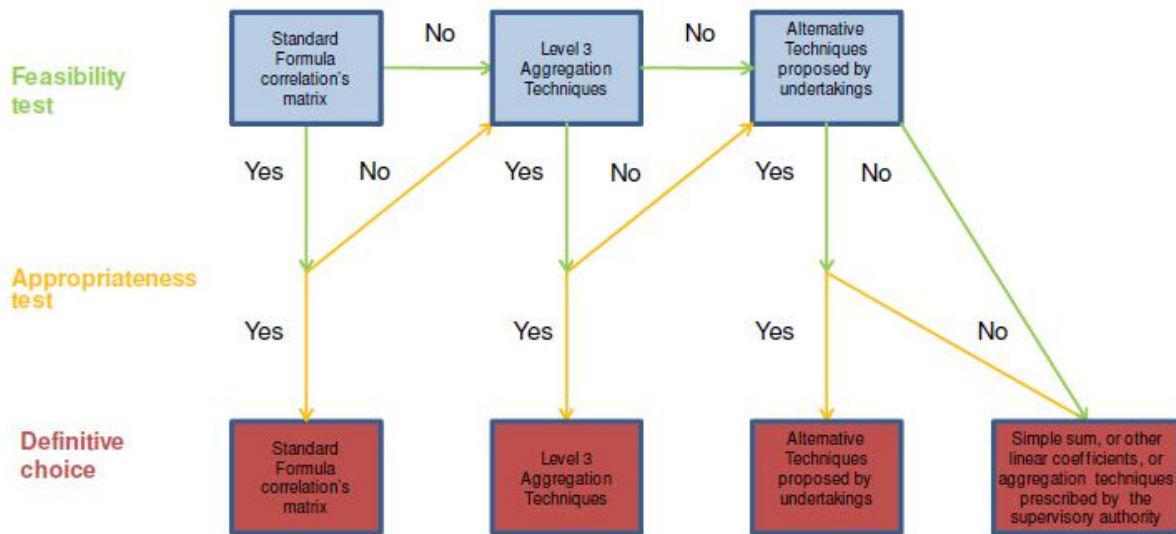


Figure 3.4 - arbre de décision.

Ainsi, lorsqu'un Modèle Interne Partiel est utilisé, le recours à l'une des méthodes d'agrégation proposées par le CEIOPS s'impose, sauf dans des cas très particuliers où ces méthodes ne sont pas applicables. La compagnie peut dans ce dernier cas utiliser sa propre technique d'agrégation, à condition qu'elle prouve que les techniques d'agrégation détaillées dans les mesures de niveau 3 ne sont pas applicables dans son cas.

Dans le CP 65, trois techniques permettant d'articuler les résultats fournis par le modèle interne et les résultats issus de la Formule Standard sont présentées :

- La méthode « Two world scenario » ,
- La méthode « Consistent Standard Formula Replication » (notée CSFR),
- La méthode « Indirect application of the Standard Formula Integration ».

Nous présentons chacune de ces méthodes et leur mise en application. Notons que les différentes méthodes proposées, employées telles quelles, permettent d'articuler les résultats du modèle interne et ceux de la Formule Standard au sein d'un même module de risque et pour un unique périmètre de passifs.

Introduisons les notations suivantes :

- $R_{m,MIP}$ l'ensemble des risques projetés du module de risque m ,
- $R_{m,HorsMIP}$ l'ensemble des risques du module de risque m quantifiés par la méthodologie Formule Standard,
- $C_{HorsMIP}^m$ le capital agrégé du sous-module Hors-MIP du module m ,
- C_{MIP}^m le capital agrégé du sous-module MIP du module m .

Nous allégeons les notations en désignant à présent par $\rho_{i,j}^m$ le coefficient de corrélation entre les capitaux i et j au sein du module m . Il peut s'agir d'une corrélation entre capitaux élémentaires, entre sous-capitaux agrégés, mais aussi entre un risque élémentaire et un sous-module de risque par exemple.

a) Méthode « Two world scenario »

La méthode « Two world scenario » fait l'hypothèse de corrélation parfaite entre le capital issu du modèle interne et le capital relatif aux risques quantifiés par la Formule Standard. Le capital consolidé correspond alors à la somme du capital Hors-MIP, calculé par agrégation Formule Standard des capitaux relatifs aux risques non modélisés, et du capital MIP, issu du modèle interne.

Cette méthode requiert donc le calcul du capital agrégé du sous-module Hors-MIP, réalisé comme suit :

$$C_{HorsMIP}^m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_{m,HorsMIP}^2} \rho_{i,j}^m \cdot C_i \cdot C_j}.$$

Le SCR du module m est alors calculé à partir de la relation : $SCR_m = C_{HorsMIP}^m + C_{MIP}^m$.

Cette technique est appropriée dans le cas d'une intégration de risques peu significatifs sur l'exigence de capital finale, lorsque l'un des résultats prédomine par rapport à l'autre.

Elle présente l'avantage d'être aisée à mettre en œuvre et s'applique à tous les types de Modèles Internes Partiels. En revanche, elle ne prend pas en compte les phénomènes de dépendance et peut donc s'avérer trop conservatrice lorsqu'il existe des bénéfices de diversification significatifs entre le sous-module MIP et le sous module Hors-MIP. Notons que cette méthode peut, au contraire, ne pas être suffisamment prudente dans le cas de phénomènes de contagion entre risques.

b) Méthode « Consistent Standard Formula Replication » (CSFR)

Présentation de la méthodologie

La méthodologie proposée repose sur une architecture des risques à trois niveaux. Elle permet de déduire de la Formule Standard un unique coefficient de corrélation permettant d'agréger le sous-module MIP et le sous-module Hors-MIP. Dans un premier temps, des calculs Formule Standard, aussi bien sur les risques Hors-MIP que sur les risques MIP, sont menés afin de déterminer le coefficient de corrélation entre le sous-module Hors-MIP et le sous-module MIP. L'application de cette méthode requiert donc le calcul Formule Standard des capitaux au titre de chaque risque modélisé. Le résultat du modèle interne (capital MIP) et le capital Hors-MIP sont ensuite agrégés au moyen du coefficient de corrélation évoqué.

Introduisons les notations suivantes :

- C_i^* le capital Formule Standard relatif au risque i ,
- C_{MIP}^{*m} le capital consolidé des risques MIP déterminé à partir d'une agrégation Formule Standard des éléments C_i^* ,
- SCR_m^* le SCR du module m , calculé à partir des capitaux Formule Standard.

Pour les risques quantifiés selon une approche Formule Standard, nous emploierons indifféremment la notation C_i^* ou C_i pour désigner les capitaux Formule Standard.

Nous détaillons ci-dessous les différentes étapes de calculs permettant d'obtenir le SCR du module m .

Etape 1 - Détermination du coefficient de corrélation permettant d'agréger C_{MIP}^{*m} et $C_{HorsMIP}^m$

- **Phase 1** : calcul Formule Standard du capital agrégé du sous-module MIP :

$$C_{MIP}^{*m} = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_{m,MIP}^2} \rho_{i,j}^m \cdot C_i^* \cdot C_j^*}.$$

- **Phase 2** : calcul du capital agrégé du sous-module $Hors-MIP$:

$$C_{HorsMIP}^m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_{m,HorsMIP}^2} \rho_{i,j}^m \cdot C_i^* \cdot C_j^*}.$$

- **Phase 3** : calcul Formule Standard du capital agrégé du module m :

$$SCR_m^* = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_m^2} \rho_{i,j}^m \cdot C_i^* \cdot C_j^*}.$$

- **Phase 4** : extraction du coefficient de corrélation permettant, à partir d'une agrégation de type Formule Standard entre C_{MIP}^{*m} et $C_{HorsMIP}^m$, de reproduire le capital consolidé SCR_m^* :

$$\rho_{MIP,HorsMIP}^m = \frac{SCR_m^{*2} - C_{HorsMIP}^m{}^2 - C_{MIP}^{*m}{}^2}{2C_{HorsMIP}^m C_{MIP}^{*m}}.$$

Etape 2 - Détermination du capital global du module m à partir du coefficient de corrélation déterminé en phase 4 de l'étape 1 et du résultat fourni par le modèle interne :

$$SCR_m = \sqrt{C_{HorsMIP}^m{}^2 + C_{MIP}^{*m}{}^2 + 2\rho_{MIP,HorsMIP}^m C_{HorsMIP}^m C_{MIP}^{*m}}.$$

Construction d'une distribution et mise en évidence de la dépendance

Il est possible d'obtenir une distribution de Fonds Propres pour le sous-module Hors-MIP en spécifiant une loi. Cela apparaîtra très utile lorsque nous chercherons par la suite à allouer le capital. Pour ce faire, nous pouvons construire la distribution des Fonds Propres du sous-module Hors-MIP en supposant, comme suggéré dans le CP 65, que :

$$FP_{HorsMIP}^m(1) \sim \mathcal{N}\left(\frac{FP(0)}{D(1)}, \frac{C_{HorsMIP}^m}{D(1) \cdot q_{99,5\%}\{N(0,1)\}}\right). \quad (3.3)$$

Nous pouvons ensuite mettre en évidence la dépendance entre les distributions de Fonds Propres des sous-modules MIP et Hors-MIP en ayant recours à une copule gaussienne. Dans cet objectif, nous retenons la corrélation déterminée en phase 4 de l'étape 1.

Les différents calculs à mettre en œuvre en pratique sont détaillés ci-dessous.

Etape 1 - Construction de la distribution de Fonds Propres relative au sous-module Hors-MIP à partir de l'hypothèse (3.3).

Etape 2 - Insertion de la dépendance entre les distributions de Fonds Propres MIP et Hors-MIP à l'aide d'une copule gaussienne.

- **Phase 1** : simulation de couples $(x_s, y_s)_s$ distribués selon un vecteur gaussien de lois marginales normales standards et de coefficient de corrélation $\rho_{MIP, HorsMIP}^m$.
- **Phase 2** : constitution des couples (u_s, v_s) de loi jointe la copule gaussienne par la relation : $(u_s, v_s) = (\phi(x_s), \phi(y_s))$ où ϕ est la fonction de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$.
- **Phase 3** : en omettant l'indice m pour alléger les notations, nous obtenons alors les couples Fonds Propres associés à chaque simulation s par le biais de relation : $(FP_{MIP}^s(1), FP_{HorsMIP}^s(1)) = (\hat{F}_{MIP}^{-1}(u_s), F_{HorsMIP}^{-1}(v_s))$, en notant $F_{HorsMIP}^{-1}$ la fonction de répartition inverse des Fonds Propres du sous-module Hors-MIP et $\hat{F}_{MIP}^{-1}$ la fonction de répartition inverse empirique des Fonds Propres du sous-module Hors-MIP.
- **Phase 4** : par somme des réalisations, simulation par simulation, nous disposons alors d'une distribution de Fonds Propres agrégés à partir de la relation : $FP^s(1) = FP_{HorsMIP}^s(1) + FP_{MIP}^s(1)$.

c) Méthode « Indirect application of the Standard Formula Integration »

Cette méthode vise à déduire de la Formule Standard des corrélations entre le capital Hors-MIP et les capitaux élémentaires au titre de chacun des risques projetés. Le calcul des capitaux marginaux à partir du modèle de projection et des capitaux Formule Standard relatifs aux risques modélisés est donc requis.

Nous détaillons ci-dessous les différentes étapes de calculs afin d'aboutir au SCR du module m .

Soit $\rho_{i, HorsMIP}^m$ la corrélation entre le risque i modélisé et le sous-module Hors-MIP.

Etape 1 - Dérivation des corrélations Formule Standard entre les capitaux marginaux issus du modèle interne et le capital du sous-module Hors-MIP.

- **Phase 1** : détermination des capitaux Formule Standard pour chacun des risques couverts par le modèle interne.
- **Phase 2** : calcul du capital Formule Standard du sous-module Hors-MIP $C_{HorsMIP}^m$:

$$C_{HorsMIP}^m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_{m, HorsMIP}^2} \rho_{i,j}^m \cdot C_i^* \cdot C_j^*}$$

- **Phase 3** : obtention des corrélations $(\rho_{i,HorsMIP}^m)_{i \in R_{m,MIP}}$ par résolution de l'équation suivante :

$$SCR_m^* = \sqrt{C_{HorsMIP}^m + \sum_{(i,j) \in R_{m,MIP}^2} \rho_{i,j}^m C_i^* C_j^* + 2 \sum_{i \in R_{m,MIP}} \rho_{i,HorsMIP}^m \cdot C_i^* \cdot C_{HorsMIP}^m}.$$

La solution de cette équation n'étant pas unique, le CP 65 propose de procéder comme suit :

- **Phase 3.1** : calculer des corrélations entre les risques projetés et le sous-module Hors-MIP par moyenne pondérée des coefficients de corrélation Formule Standard, soit :

$$\rho_{i,HorsMIP}^{*m} = \frac{\sum_{j \in R_{m,HorsMIP}} \rho_{i,j}^m C_j}{\sum_{j \in R_{m,HorsMIP}} C_j}, \forall i \in R_{m,MIP}.$$

- **Phase 3.2** : ajuster proportionnellement l'ensemble de ces corrélations par un unique coefficient k de façon à obtenir l'équation à une inconnue suivante :

$$SCR_m^* = \sqrt{C_{HorsMIP}^m{}^2 + \sum_{(i,j) \in R_{m,MIP}^2} \rho_{i,j}^m C_i^* C_j^* + 2k \sum_{i \in R_{m,MIP}} \rho_{i,HorsMIP}^{*m} \cdot C_i^* \cdot C_{HorsMIP}^m} \quad (3.4)$$

Etape 2 - Calcul du capital consolidé

- **Phase 1** : détermination des capitaux marginaux C_i , relatifs aux risques MIP. Rappelons que ces capitaux sont obtenus en projetant uniquement le risque d'intérêt et en neutralisant les autres risques.
- **Phase 2** : calcul du capital à l'aide de la corrélation obtenue en phase 3.2 de l'étape 1 :

$$SCR_m = \sqrt{C_{HorsMIP}^m{}^2 + C_{MIP}^m{}^2 + 2 \sum_{i \in R_{m,MIP}} \rho_{i,HorsMIP}^m \cdot C_{HorsMIP}^m \cdot C_i}$$

avec, en notant k^* la solution de l'équation (3.4) : $\rho_{i,HorsMIP}^m = k^* \rho_{i,HorsMIP}^{*m}$.

La méthode « Consistent Standard Formula Replication », comme la méthode « Indirect application of the Standard Formula Integration », présente l'avantage de tenir compte des effets de diversification entre les sous-modules MIP et Hors-MIP.

Adaptation de la méthodologie CSFR au cas « multi-périmètres » et « multi-modules »

Dans le cas d'une agrégation des risques entre périmètres de passifs, notons que la méthodologie CSFR permet d'obtenir le capital économique consolidé du module de risque m , après constitution préalable des **sous-modules de risque MIP et Hors-MIP consolidés**.

La mise en œuvre de cette méthodologie est réalisable uniquement lorsque les risques projetés appartiennent au même module de risque.

En revanche, la méthode CSFR ne semble pas s'appliquer telle quelle lorsque les risques simulés appartiennent à des modules de risque différents. Dans ce cas, l'adaptation de cette méthode est envisageable lorsque l'agrégation des risques est réalisée pour un unique périmètre de passifs, mais délicate lorsque l'agrégation est effectuée pour plusieurs périmètres.

Pour ces différentes raisons, nous proposons d'une part **une extension de la méthode CSFR** à un ensemble de plusieurs modules, dans le cas d'une agrégation des risques d'un même périmètre de passifs, et d'autre part une **méthodologie alternative** dans le cas d'une agrégation des risques de plusieurs périmètres de passifs.

3. Extension des méthodologies proposées par le CEIOPS

Nous commençons par présenter la technique de dé-modularisation/re-modularisation d'une architecture des risques à plusieurs niveaux, permettant de répondre aux problématiques d'agrégation des risques posées par les Modèles Internes Partiels projetant des risques de modules différents. Cette technique répond également aux problématiques soulevées par un modèle interne de type Formule Standard Entity Specific lorsque la compagnie souhaite faire apparaître des corrélations Entity Specific entre risques de modules distincts.

L'outil mathématique de dé-modularisation/re-modularisation nous permettra de généraliser la méthode CSFR mais aussi de proposer une méthode alternative d'agrégation, fondée également sur le calcul de coefficients d'agrégation Entity Specific.

a) La technique de dé-modularisation/re-modularisation

Limites de l'agrégation Formule Standard

Damir Filipovic, dans son article « Multi-Level Aggregation » [7], traite des problématiques d'agrégation des risques multi-niveaux. Son article est fondé sur le rapprochement entre une agrégation multi-niveaux, correspondant à une architecture standard des risques, et une technique d'agrégation fondée sur une matrice de corrélation globale ; l'agrégation est, dans ce dernier cas réalisée en une étape à partir d'une architecture des risques en râteau.

Filipovic montre qu'il est possible, à partir d'une agrégation des risques en râteau, de répliquer la valeur du capital économique obtenu à partir d'une agrégation Formule Standard. De plus, il précise que l'agrégation des risques en râteau est nécessairement réalisée selon les spécificités de la compagnie, dépendant entre autres des niveaux de capitaux élémentaires. Les coefficients de corrélation inter-modulaires sont donc Entity Specific. Ainsi, dans l'impossibilité d'utiliser une matrice de corrélation commune à tous les acteurs du marché, l'approche proposée par la Formule Standard perd, en toute rigueur, son caractère universel.

La dé-modularisation/re-modularisation

Les travaux de Fillipovic permettent de passer d'une architecture standard à une architecture des risques en réseau (dé-modularisation de la Formule Standard) et inversement d'une architecture en réseau à une architecture standard (re-modularisation de la Formule Standard). La figure 3.5 illustre ce principe.

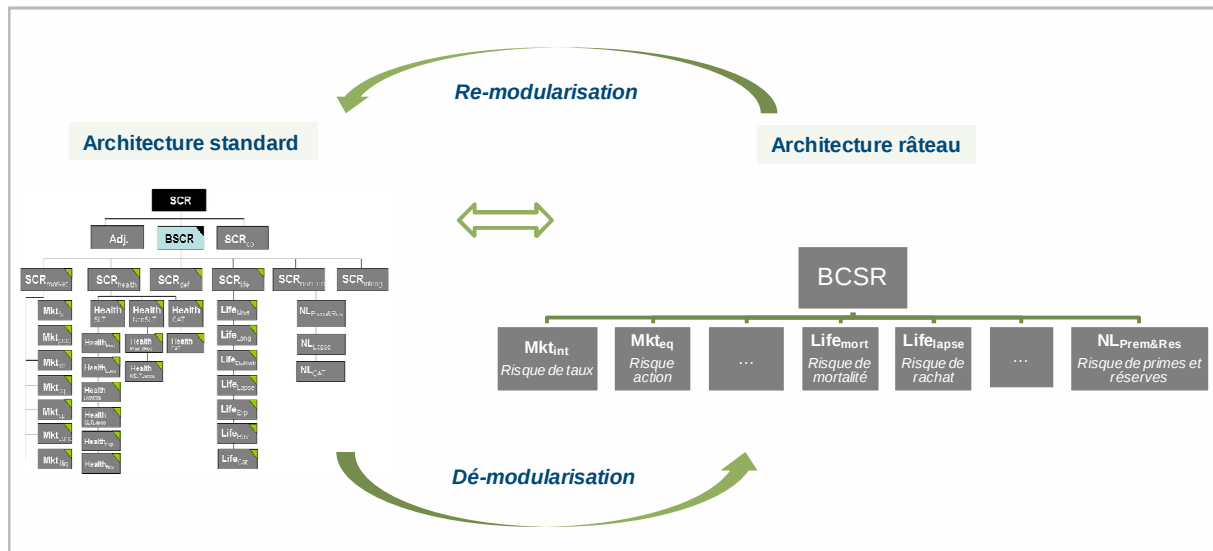


Figure 3.5 - Dé-modularisation/re-modularisation de la Formule Standard.

La technique de dé-modularisation/re-modularisation présente un intérêt particulier pour répondre à certaines problématiques posées par les modèles internes de type Modèles Internes Partiels ou Formule Standard Entity Specific.

Nous présentons dans un premier temps l'intérêt de cette technique ainsi que son cadre d'utilisation. La méthodologie sera exposée ensuite.

• Problématique

Une compagnie projetant des risques appartenant à des modules de risque différents souhaite faire apparaître des corrélations Entity Specific entre ces différents risques et est donc confrontée au problème suivant : l'architecture de la Formule Standard n'intègre pas de corrélations explicites entre risques appartenant à des modules différents. A partir d'une approche fondée sur la dé-modularisation/re-modularisation de la Formule Standard, il est possible de :

- dé-modulariser dans un premier temps la Formule Standard afin d'obtenir une unique matrice de corrélation globale, puis
- substituer les corrélations implicites au modèle interne (entre l'ensemble des risques modélisés) aux corrélations Formule Standard et enfin
- re-modulariser, permettant ainsi d'obtenir un coefficient de corrélation inter-modulaire Entity Specific.

La méthodologie d'obtention des coefficients d'agrégation Entity Specific est détaillée dans la partie III-E-4-a).

Plus généralement, après dé-modularisation, la compagnie peut substituer les corrélations Entity Specific souhaitées aux corrélations Formule Standard, puis re-modulariser l'architecture réseau dans une seconde étape.

- **Méthodologie de dé-modularisation/re-modularisation**

Introduisons les notations suivantes :

- $X_m = (C_i^m)_{i \in R_m}$ le vecteur des capitaux élémentaires du module m ,
- $\Sigma^m = (\rho_{i,j}^m)_{(i,j) \in R_m^2}$ **la matrice de corrélation Formule Standard** permettant d'agréger les risques élémentaires au sein du module m .

Nous présentons la méthodologie pour deux modules de risques A et B . La méthode permet, par technique de dé-modularisation/re-modularisation d'obtenir le coefficient de corrélation Entity Specific entre ces deux modules.

Tout d'abord, les capitaux agrégés des modules A et B sont calculés par agrégation des capitaux élémentaires comme suit :

$$SCR_m = \sqrt{X_m' \cdot \Sigma^m \cdot X_m}.$$

Le capital requis pour les modules A et B est ensuite obtenu par agrégat des sous-capitaux agrégés des modules A et B :

$$SCR_{(A,B)} = \sqrt{SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2 \cdot \rho_{A,B}^M \cdot SCR_A \cdot SCR_B},$$

en rappelant que $\rho_{A,B}^M$ correspond au coefficient de corrélation Formule Standard permettant de procéder à l'étape d'agrégation inter-modulaire.

Introduisons la matrice V , composé de quatre sous-matrices :

$$V = \begin{pmatrix} \Sigma^A & D \\ D' & \Sigma^B \end{pmatrix}.$$

La matrice D correspond à l'ensemble des corrélations permettant d'agréger les risques du module A et les risques du module B ; ces corrélations, implicites dans le cadre d'une architecture des risques standard, deviennent explicites, grâce à l'étape de dé-modularisation.

L'objectif est ici de réconcilier l'approche d'agrégation réseau avec l'approche d'agrégation Formule Standard afin d'obtenir un capital consolidé identique.

Nous cherchons donc à déterminer la matrice D , vérifiant :

$$\sqrt{(X'_A \ X'_B) \cdot V \cdot \begin{pmatrix} X_A \\ X_B \end{pmatrix}} = \sqrt{SCR_A^2 + SCR_B^2 + 2 \cdot \rho_{A,B}^M \cdot SCR_A \cdot SCR_B} \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) admet une infinité de solutions. Fillipovic montre qu'il est impossible de déterminer, en toutes généralités, une matrice D indépendante des niveaux de capitaux élémentaires. La matrice D est donc nécessairement Entity Specific.

Il propose la formule suivante pour le calcul de la matrice D :

$$D = \rho_{A,B}^M \frac{\sqrt{X'_A \cdot \Sigma^A \cdot X_A} \sqrt{X'_B \cdot \Sigma^B \cdot X_B}}{\|X_A\|^2 \|X_B\|^2} X_A X'_B, \quad (3.6)$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne.

Cette matrice est l'unique matrice satisfaisant le critère de minimisation de la norme euclidienne de la matrice D , définie par :

$$\|D\| = \sqrt{tr(DD')}.$$

Remarque : l'étape de dé-modularisation est réalisée à partir des **corrélations proposées par la Formule Standard**. Il est ensuite possible de substituer des corrélations Entity Specific aux corrélations Formule Standard.

Pour re-modulariser, il suffit d'inverser la relation (3.6), permettant ainsi de calculer la corrélation entre modules $\rho_{A,B}^{M,ES}$ (devenue alors Entity Specific), après substitution des corrélations souhaitées dans la matrice V . La relation obtenue est la suivante :

$$\rho_{A,B}^{M,ES} = \frac{X'_A \cdot D_{ES} \cdot X_B}{\sqrt{X'_A \cdot \Sigma_{ES}^A \cdot X_A} \sqrt{X'_B \cdot \Sigma_{ES}^B \cdot X_B}}$$

Nous illustrons ci-dessous la technique de dé-modularisation/re-modularisation à partir d'un exemple de Modèle Interne Partiel couvrant les risques actions, taux d'intérêt et mortalité/longévité. Les modules d'intérêt sont donc ici les modules de risque Marché et Souscription Vie.

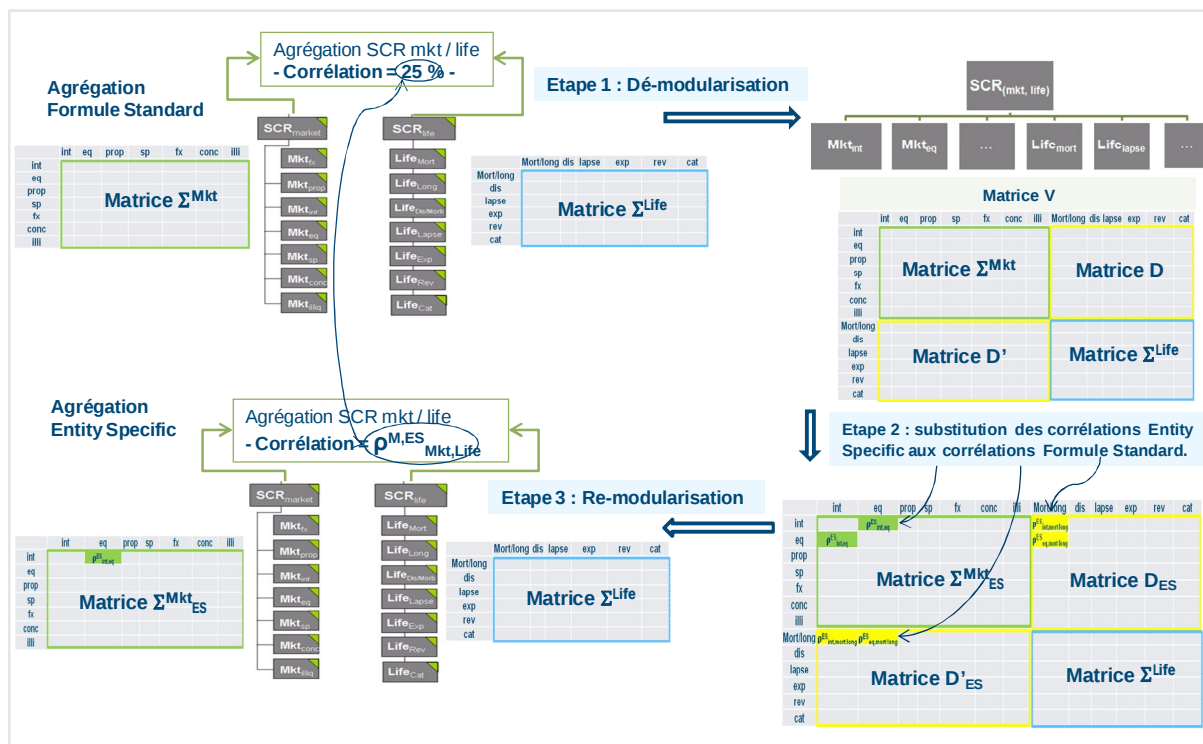


Figure 3.6 - Exemple illustratif de la méthodologie de dé-modularisation/re-modularisation.

Notons que les techniques de dé-modularisation/re-modularisation peuvent être appliquées sur une architecture des risques multi-niveaux autre que l'architecture standard. Il suffit de définir le socle élémentaire sur lequel la méthodologie est appliquée : par exemple, la partie suivante présente l'application de cette méthodologie à partir d'une architecture intégrant les sous-modules MIP et Hors-MIP.

b) Extension de la méthode « Consistent Standard Formula Replication »

Nous allons généraliser cette méthodologie à un ensemble de plusieurs modules, à partir d'une approche de dé-modularisation et re-modularisation.

Nous supposons ici que le modèle interne couvre des risques appartenant à des modules différents. Il apparaît alors indispensable d'intégrer l'aspect Entity Specific de l'agrégation entre les risques projetés de modules différents, ceci dans le cadre d'une architecture à trois niveaux d'agrégation.

A titre d'exemple, supposons que le modèle interne couvre les risques actions, taux et mortalité/longévité. Nous avons alors l'architecture suivante, après constitution des sous-modules :

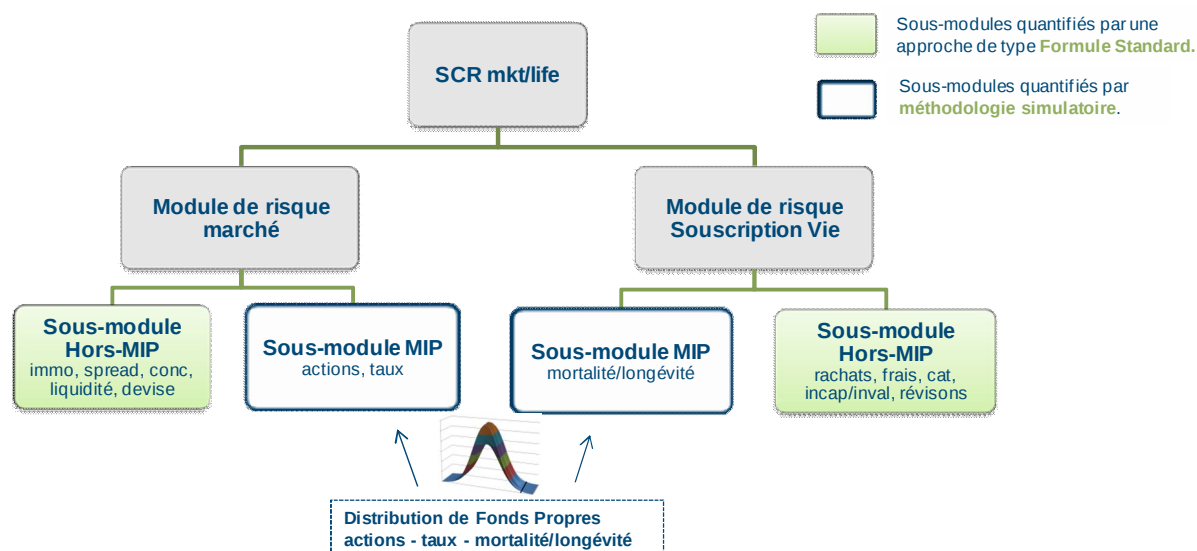


Figure 3.7 - Illustration de la méthode « Consistent Standard Formula Replication » étendue.

Notons que les risques de mortalité et longévité forment un unique risque, le facteur de risque sous-jacent étant identique²⁰ : l'intérêt est porté sur des valeurs faibles ou élevées du facteur de risque modélisant les taux de mortalité, selon le risque prédominant. Cet exemple sera repris et mis en application mais commençons par expliquer la méthodologie de manière générique, en listant les différentes étapes à suivre.

Etape 1 - Application de la méthodologie « Consistent Standard Formula Replication » pour chaque module de risque $m \in \{A, B\}$.

Pour ce faire, il est nécessaire de disposer :

- d'une distribution de Fonds Propres « marginale » relative aux risques modélisés du module de risque A ,²¹
- d'une distribution de Fonds Propres « marginale » relative aux risques modélisés du module de risque B .

Les capitaux C_{MIP}^A et C_{MIP}^B sont calculés à partir des deux distributions ci-dessus.

Nous considérons à présent que les sous-modules Hors-MIP et MIP définissent le socle élémentaire pour l'opération de dé-modularisation puis re-modularisation.

Etape 2 - Calcul du coefficient de corrélation inter-modulaire Entity Specific entre les modules A et B.

- **Phase 1** : calcul de la corrélation implicite entre le sous-module MIP du module A et le sous-module MIP du module B.

²⁰ Nous avons en effet retenu dans la suite une modélisation en accord avec cette remarque (se référer à la note de bas de page 46).

²¹ Il s'agit d'une distribution de Fonds Propres où l'ensemble des risques ont été neutralisés excepté les risques MIP du module A.

Nous désignons par $\rho_{MIP}^{A,B}$ le coefficient de corrélation implicite entre le sous-module MIP du module A et le sous-module MIP du module B, c'est-à-dire la corrélation permettant, à partir d'une agrégation Formule Standard, de reproduire le capital au titre de l'ensemble des risques modélisés, noté C_{MIP} , soit :

$$\rho_{MIP}^{A,B} = \frac{C_{MIP}^2 - C_{MIP}^A{}^2 - C_{MIP}^B{}^2}{2C_{MIP}^A C_{MIP}^B}.$$

- **Phase 2** : mise en évidence du caractère Entity Specific de l'agrégation entre le module A et le module B par dé-modularisation puis re-modularisation de l'architecture sous-modules.
- **Phase 2.1** : dé-modularisation

La méthode de calcul de la matrice D reste identique à celle présentée dans la partie III-E-3-a) mais la dé-modularisation est ici effectuée au niveau des sous-modules et non des capitaux élémentaires. Autrement dit, nous avons :

$$D = \rho_{A,B}^M \frac{\sqrt{X_A' \cdot \Sigma^A \cdot X_A} \sqrt{X_B' \cdot \Sigma^B \cdot X_B}}{\|X_A\|^2 \|X_B\|^2} X_A X_B'.$$

Avec, ici :

$$X_m = (C_{MIP}^m, C_{HorsMIP}^m)', \quad \forall m \in \{A, B\}.$$

$$\Sigma^m = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{MIP, HorsMIP}^m \\ \rho_{MIP, HorsMIP}^m & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall m \in \{A, B\}.$$

Σ^m correspond dans ce cas à la matrice de corrélation permettant d'agréger les sous-modules MIP et Hors-MIP au sein du module m . D s'interprète comme la matrice de corrélation entre les sous-modules du module A et les sous-modules du module B.

Dans la matrice D , nous substituons la corrélation Entity Specific calculée en phase 1 de l'étape 2 à la corrélation induite par la dé-modularisation, nous permettant ainsi d'obtenir la matrice D Entity Specific, notée D_{ES} .

- **Phase 2.2** : re-modularisation afin d'obtenir le coefficient de corrélation Entity Specific permettant d'agréger les modules A et B :

$$\rho_{A,B}^{M,ES} = \frac{X_A' \cdot D_{ES} \cdot X_B}{\sqrt{X_A' \cdot \Sigma_{ES}^A \cdot X_A} \sqrt{X_B' \cdot \Sigma_{ES}^B \cdot X_B}}$$

Nous proposons ci-dessous une illustration de cette mise en œuvre.

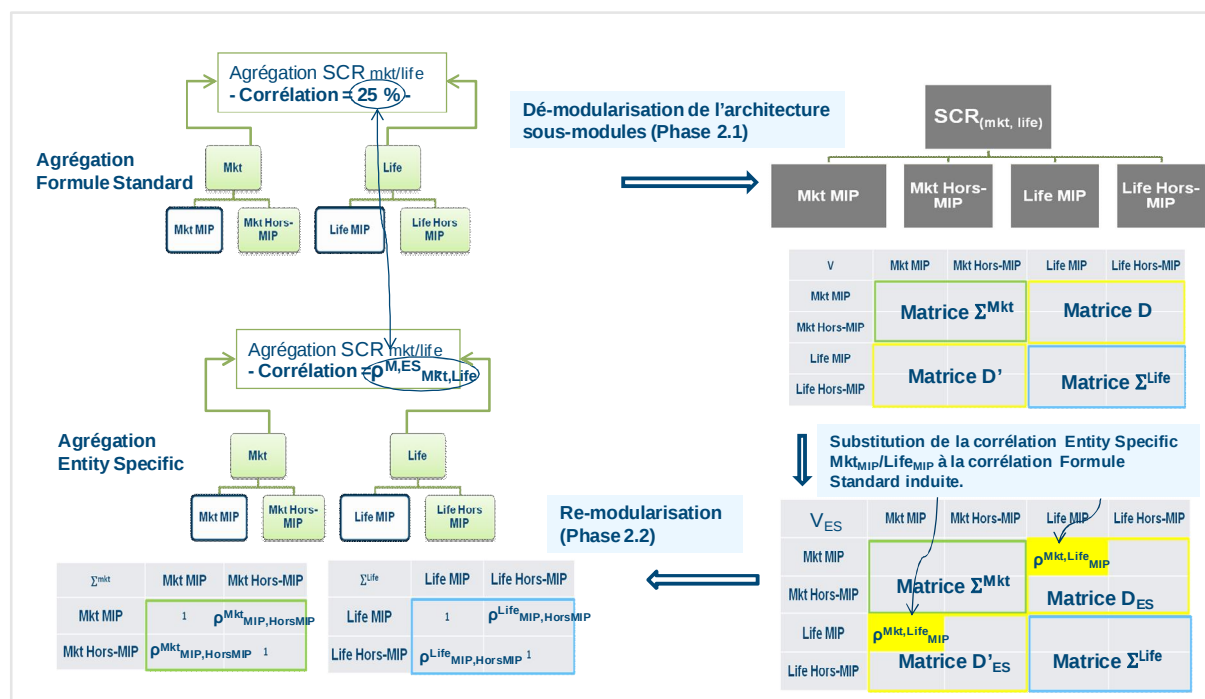


Figure 3.8 - Illustration des phases de dé-modularisation/re-modularisation - méthode CSFR étendue.

Ce type de calcul, mené pour tous les couples de modules contenant des risques projetés, permet d'obtenir l'ensemble des coefficients inter-modulaires Entity Specific requis pour le calcul du capital économique global.

Ainsi, au sein de chaque module de risque, la méthodologie proposée est conforme à la méthode CSFR. Par ailleurs, la méthodologie gère l'aspect Entity Specific de la corrélation entre les sous-module MIP des modules A et B, à l'aide de l'outil de dé-modularisation/re-modularisation.

Comme déjà évoqué, l'adaptation de la méthodologie CSFR paraît délicate pour gérer l'aspect « multi-périmètres », lorsque le modèle interne couvre des risques de modules différents.

Nous présentons donc une méthodologie d'agrégation alternative à celle exposée infra et surmontant la difficulté évoquée ci-dessus.

4. Présentation d'une méthodologie d'agrégation alternative

Nous proposons une méthodologie alternative fondée sur une architecture des risques en réseau. Cette méthodologie requiert le calcul de coefficients d'agrégation Entity Specific, correspondant aux corrélations implicites au modèle interne, et s'appuie sur la technique de dé-modularisation/re-modularisation.

a) **Détermination de coefficients d'agrégation Entity Specific**

Motivation et cadre d'utilisation

La Formule Standard repose sur des coefficients de corrélation permettant d'agréger les risques. Dans le cas où la compagnie utilise une méthodologie simulatoire pour quantifier certains de ses risques, le capital économique est calculé à partir du quantile de la distribution de Fonds Propres. Nous pouvons également disposer des capitaux marginaux en effectuant des projections marginales ou en projetant le bilan associé au scénario quantile, dans le cas où le profil des Fonds Propres marginaux est strictement monotone en le facteur de risque.

Plaçons-nous dans le cadre suivant : nous disposons d'une distribution de Fonds Propres économiques issue de la projection d'un ensemble de risques à un an et, pour chaque risque i , du capital élémentaire C_i .

L'objectif est de déterminer les coefficients d'agrégation qui, en agrégeant les capitaux marginaux issus du modèle par la Formule Standard, permettent d'obtenir le capital économique issu de la distribution de Fonds Propres.

Notons que ces coefficients d'agrégation ne correspondent pas à une corrélation linéaire entre facteurs de risque. Il s'agit uniquement des coefficients qui, utilisés pour l'agrégation des capitaux stand-alone par la méthodologie Formule Standard, reproduisent la valeur du capital économique issu du modèle interne. En l'occurrence, ces coefficients peuvent être supérieurs à un en valeur absolue : ceci s'explique principalement par la présence d'effets croisés et non-linéarités entre facteurs de risque, compromettant l'application d'une agrégation Formule Standard à partir des coefficients de corrélation linéaires. Cependant, nous parlerons indifféremment de **coefficients d'agrégation Entity Specific** ou de coefficients de corrélation Entity Specific.

Ces coefficients présentent l'avantage de répliquer la diversification non-affine entre risques.

Détaillons à présent la méthodologie de calcul des coefficients d'agrégation Entity Specific, implicites au modèle interne.

Méthodologie

Nous désignons par :

- R_{MIP} l'ensemble des risques élémentaires projetés à l'aide du modèle interne, quel que soit le module de risque,
- M_{MIP} l'ensemble des modules contenant au moins un risque modélisé,
- $\rho_{i,j}^{FS}$ le coefficient de corrélation standard entre les risques projetés i et j (noté indifféremment $\rho_{i,j}^m$ lorsque les risques appartiennent à un même module),
- $\rho_{i,j}^{M,ES}$ le coefficient de corrélation Entity Specific, entre les modules i et j , obtenu par dé-modularisation puis re-modularisation de l'architecture standard.

Nous proposons de résoudre le programme d'optimisation (P_1) suivant :

$$(\rho_{i,j}^{ES}) = \underset{(\rho_{i,j})}{\operatorname{Argmin}} \left\{ \sum_{(i,j), i \neq j, (i,j) \in R_{MIP}^2} (\rho_{i,j} - \rho_{i,j}^{FS})^2 + \sum_{(i,j), i \neq j, (i,j) \in M_{MIP}^2} (\rho_{i,j}^{M,ES} - \rho_{i,j}^M)^2 \right\}$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} C_{MIP} = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_{MIP}^2} \rho_{i,j} \cdot C_i \cdot C_j} \\ C_{MIP}^m = \sqrt{\sum_{(i,j) \in R_{m,MIP}^2} \rho_{i,j} \cdot C_i \cdot C_j}, \forall m \in M_{MIP}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Notons que $\rho_{A,B}^{M,ES}$ est fonction des éléments variables $\rho_{i,j}$.

Quelques remarques sur la forme du problème :

- Le critère de minimisation permet de garantir l'unicité de la solution et la convergence du problème. Remarquons qu'il est possible de spécifier d'autres programmes d'optimisation sous les mêmes contraintes mais ce type de problème d'optimisation paraît adapté pour résoudre des problématiques d'agrégation multi-périmètres. Celui-ci garantit en effet l'obtention de coefficients proches de ceux fournis par la Formule Standard.
- La première contrainte garantit l'équivalence entre le capital économique calculé à partir de la distribution de Fonds Propres et le capital qui serait calculé par méthodologie Formule Standard à partir de l'ensemble des capitaux élémentaires relatifs aux risques projetés.
- L'ensemble de contraintes (3.7) permet de reproduire le capital économique issu du modèle, au sein de chaque module de risque contenant des risques modélisés.

b) Présentation de la méthodologie alternative d'agrégation

Agrégation entre risques d'un même périmètre

Nous proposons dans un premier temps une méthodologie d'agrégation alternative à la méthodologie CSFR étendue, présentée précédemment. L'agrégation des risques est donc réalisée ici pour un périmètre de passifs.

Considérons deux modules de risque A et B et supposons que nous souhaitons agréger les risques d'un même périmètre de passifs.

Nous raisonnons en différentes étapes pour l'obtention du capital consolidé.

Etape 1 - Dé-modularisation de la Formule Standard

Cette étape permet d'obtenir la matrice globale V , contenant les corrélations entre risques d'un même module et **les corrélations implicites** entre l'ensemble des risques appartenant au module A et l'ensemble des risques appartenant au module B .

Cette dé-modularisation est Entity Specific et nécessite de connaître les **capitaux marginaux** issus du modèle interne.

Etape 2 - Détermination des corrélations implicites au modèle interne par résolution du programme d'optimisation (P_1).

Etape 3 - Substitution des corrélations implicites obtenues à l'étape 2 dans la matrice V , permettant ainsi d'obtenir la matrice de corrélation globale Entity Specific V_{ES} .

Etape 4 - Obtention du $SCR_{(A,B)}$ par re-modularisation de l'architecture réseau.

Agrégation entre périmètres de passifs

Il s'agit à présent de fournir une méthodologie permettant d'agréger les risques de plusieurs périmètres de passifs.

Nous avons fait en sorte lors de la détermination des coefficients Entity Specific que les corrélations « implicites MIP » obtenues soient les plus proches possibles de celles de la Formule Standard. Nous proposons alors d'agréger les risques de plusieurs périmètres, après consolidation des capitaux des périmètres, en retenant, par prudence, le coefficient de corrélation le plus élevé, pour chaque risque. Autrement dit, en notant N l'ensemble des risques élémentaires placés en réseau, nous retenons les corrélations suivantes pour l'étape d'agrégation entre risques :

$$\forall i, j \in N^2 / i \neq j, \rho_{i,j} = \max_k (\rho_{i,j}^{Lob_k}),$$

où :

- $\rho_{i,j}^{Lob_k}$ correspond au coefficient de corrélation permettant d'agréger les risques i et j du périmètre de passifs k . Il peut s'agir d'un coefficient de corrélation Formule Standard ou Entity Specific.
- $\rho_{i,j}$ correspond au coefficient de corrélation permettant d'agréger les capitaux consolidés au titre des risques i et j .

Pour l'étape d'agrégation inter-modulaire, nous retenons aussi le maximum entre les corrélations des différents périmètres de passifs.

Ainsi, cette méthode paraît simple à mettre en œuvre et adaptée dans le cas d'une problématique d'agrégation multi-périmètres dont les structures de modèles internes sont délicates.

Elle constitue aussi une alternative à la méthode « Consistent Standard Formula Replication » étendue.

Nous présentons ci-dessous une illustration de la méthodologie alternative, en considérant, à titre d'exemple, deux « lignes de business » et les modules de risque Marché et Souscription Vie.

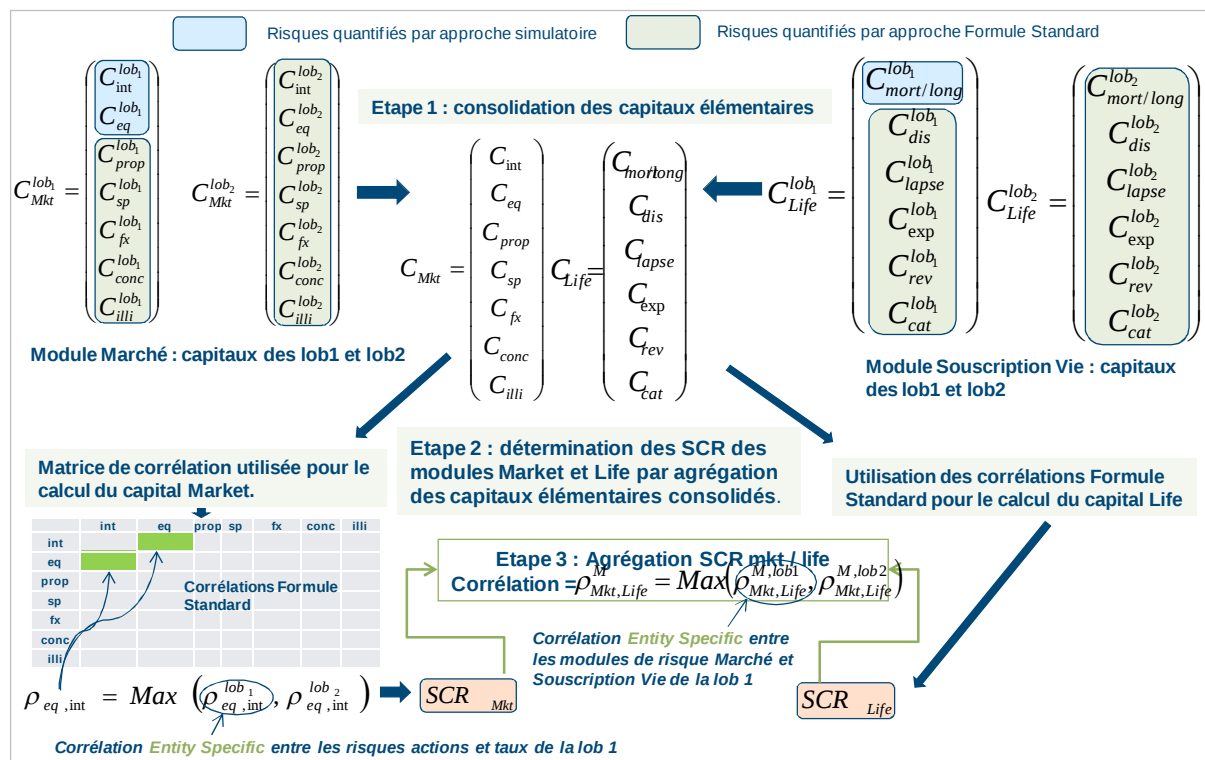


Figure 3.9 - Agrégation entre périmètres de passifs.

Maintenant que nous avons exposé les méthodologies d'agrégation permettant d'obtenir le capital consolidé, nous allons pouvoir allouer ce capital.

IV. Allocation de capital

Lorsqu'un capital économique est calculé à un niveau agrégé - pour plusieurs risques et pour une agrégation de périmètres de passifs par exemple - il intègre généralement un effet de diversification entre les différents risques d'une part, et entre les différents périmètres de passifs d'autre part, comme mis en évidence dans la partie précédente sur l'agrégation des risques.

Une **méthode d'allocation de capital** permet d'allouer les bénéfices de diversification et ainsi obtenir des capitaux individuels dont la somme est égale au capital économique global.

L'allocation de capital permet ainsi de déterminer le volume de capital consommé par un segment de risque, après avoir alloué les bénéfices de diversification. Le capital alloué est un bon indicateur de risque et présente un intérêt lors du pilotage de l'activité, ou encore la détermination de limites de risque dans un dispositif du type ORSA²², explicité ensuite.

Nous illustrons ci-dessous le principe général de l'allocation de capital, après agrégation des risques.

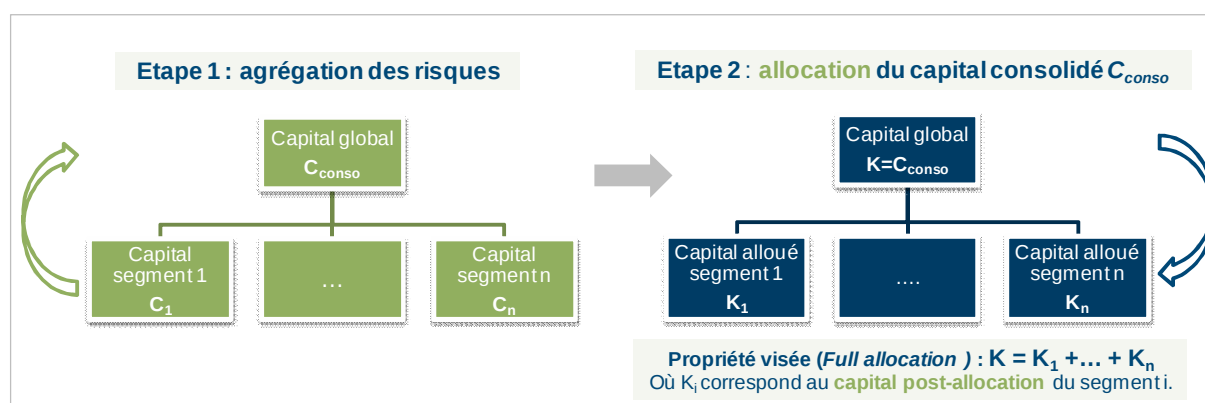


Figure 4.1 - Lien entre agrégation des risques et allocation du capital.

La première partie donne quelques généralités sur l'allocation de capital. Elle permet de spécifier le principe de l'allocation mais aussi son enjeu dans le cadre de l'ORSA et de la prise de décision stratégique. L'approche d'allocation retenue est ensuite décrite et le problème d'allocation mis en place. Nous définissons également la notion de **cohérence d'une méthode d'allocation**.

Nous exposons dans une seconde partie les différentes méthodes d'allocation possibles.

Enfin, les problématiques soulevées par l'allocation du capital sont décrites et étudiées, permettant ainsi de rendre l'ensemble des méthodes applicables et ce dans tous les cas de figures (Formule Standard, Formule Standard Entity Specific ou Modèle Interne Partiel). Cette partie traite également de la problématique d'allocation sur des risques et de la **stabilité de l'allocation dans le temps**.

²² Own Risk and Solvency Assessment.

A. Allocation de capital : généralités

1. Principes généraux d'allocation de capital

Dans le cadre de ce mémoire, nous cherchons à allouer le capital économique Solvabilité II, défini à partir de la mesure de risque VaR et calculé au préalable à l'aide des techniques d'agrégation des risques. L'allocation du capital sera réalisée selon les mêmes étapes que celles effectuées lors de la phase d'agrégation. Nous pourrions utiliser d'autres mesures de risque que le VaR comme critères de risque.

Le capital économique global, résultant de la phase d'agrégation des risques et tenant compte des effets de diversification, pourra être alloué selon le cas :

- Entre les différents risques,
- Entre les différents périmètres de passifs,
- Sur la maille périmètre x risque.

L'allocation de ce capital requiert généralement la mise en place de plusieurs étapes, selon l'architecture des risques.

Pour une étape d'allocation, nous nommons **segment** la maille sur laquelle le capital est alloué. Ainsi, Le terme « segment » désigne des éléments différents selon l'étape. Nous nous intéressons dans la suite de cette partie à une étape d'allocation particulière. Les différentes étapes permettant d'aboutir aux capitaux alloués sur la maille souhaitée seront spécifiées lors de la mise en application des méthodes (partie V).

Appuyons nous sur l'exemple ci-dessous afin de comprendre le principe d'allocation de capital.

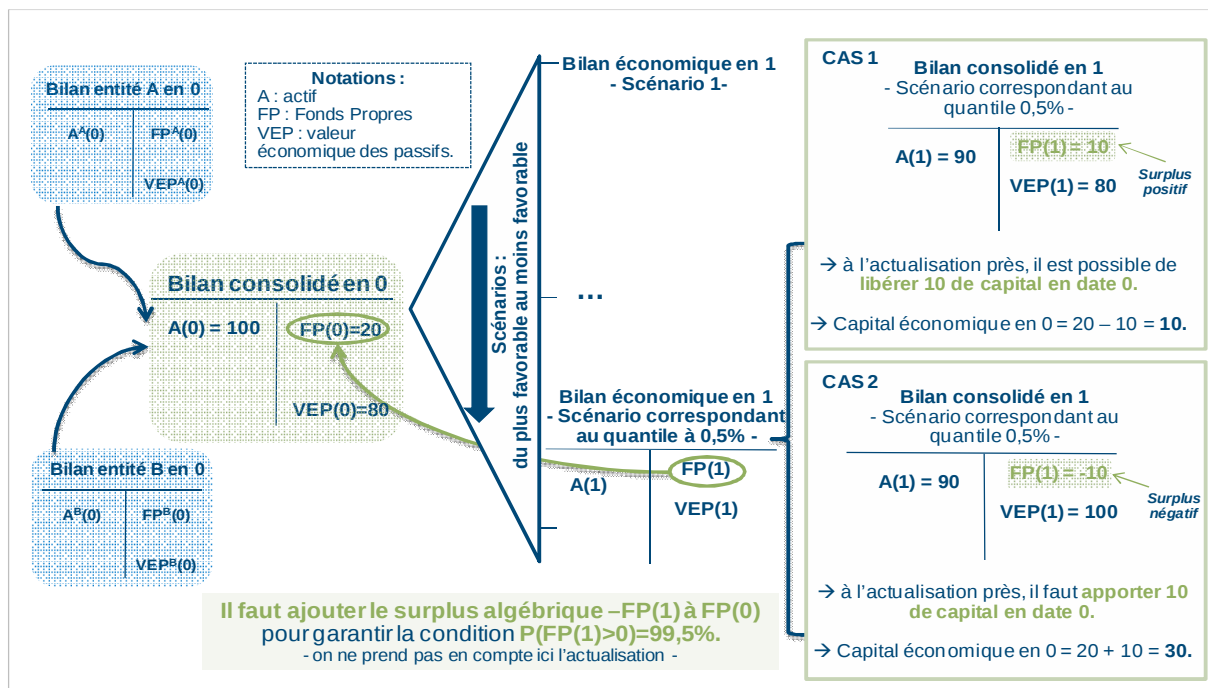


Figure 4.2 - Allocation du capital entre deux entités.

Nous nous intéressons à travers cet exemple à ventiler le capital consolidé (10 dans le cas 1, 30 dans le cas 2) entre les deux entités A et B. Intuitivement, si une entité contribue largement à la valeur du capital consolidé, il paraît adéquat de lui allouer un capital élevé, reflétant son niveau de risque.

Plus précisément, le processus d'allocation de capital nécessite de calculer la **contribution au risque global** de chaque segment (ici les entités A et B).

La contribution au risque sera définie à partir d'une **mesure de risque** et d'une **méthode d'allocation**.

2. Enjeux du processus d'allocation de capital

Il est crucial, pour une compagnie d'assurance, de parvenir à une répartition adéquate de son capital entre les différents périmètres de passifs qui la composent mais aussi entre les différents risques d'un même périmètre de passifs.

Le capital alloué doit permettre de mesurer la rentabilité des produits considérés, de manière réaliste, afin d'atteindre les objectifs de rentabilité fixés par la direction.

L'ORSA

L'Article 45 de la Directive Solvabilité II [17] impose à chaque entreprise d'assurance et de réassurance de procéder à une « évaluation interne des risques et de la solvabilité ». L'ORSA met donc en jeu une problématique de qualification et de quantification des risques, qui doit s'intégrer dans un processus stratégique plus large.

La question des besoins en capital est au cœur de l'ORSA, à travers deux exigences :

- **Le calcul d'un capital économique** : l'ORSA doit porter au moins sur « le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise ».
- **« Le respect permanent » des exigences du premier pilier** (minimum de capital requis, capital de solvabilité requis et provisions techniques).

Il est précisé dans l'Article 45 que l'évaluation interne des risques et de la solvabilité « fait partie intégrante de la stratégie commerciale et qu'il en est tenu systématiquement compte dans les décisions stratégiques de l'entreprise ».

Il conviendra donc de calculer, au-delà du MCR et du SCR, un nouveau niveau de capital, qui réponde à une exigence que la compagnie se fixe elle-même, compte tenu de ses risques. Il complètera éventuellement le SCR en termes de profil de risque, reposera sur les objectifs fixés par le management et permettra un pilotage de l'activité.

Le(s) modèle(s) permettant de calculer ce capital deviendra(ont) ainsi l'élément clé du processus ORSA. Celui-ci se déploiera à travers :

- La production d'indicateurs à destination du management, lui permettant une analyse sur laquelle asseoir un certain nombre de décisions stratégiques,
- La détermination par le management d'objectifs en termes de solvabilité, risques, politique commerciale et performance,

- La déclinaison opérationnelle de ces cibles et contraintes, les objectifs fixés à un niveau agrégé étant diffusés au sein de la compagnie.

Appétence et tolérance au risque

L'ORSA se donne pour objectif de piloter l'activité de la compagnie en fonction de son appétence et de sa tolérance au risque. Nous définissons ces notions ci-dessous.

L'appétence au risque correspond au niveau de risque que la compagnie est prête à prendre, en contrepartie d'un certain niveau de rendement. L'appétence au risque se définit généralement au niveau de la compagnie (niveau agrégé).

La tolérance au risque se définit comme le niveau de risque maximal que la compagnie se fixe, à différents niveaux de décision, en fonction de son appétence au risque.

L'allocation de capital joue donc un rôle fondamental dans le cadre de l'ORSA.

3. Approche d'allocation retenue

Introduisons certains concepts et notations associés à une étape d'allocation :

- $\rho(X)$ le **risque global** défini à partir de la mesure de risque ρ ,
- $\rho(X_i)$ le **risque associé au segment i** défini à partir de la mesure de risque ρ ,²³
- $\rho^\lambda(X_i | X)$ la **contribution au risque global du segment i** , déterminée à partir de la méthode d'allocation λ et de la mesure de risque ρ ,
- K le **capital consolidé à allouer**,
- K_i le **capital alloué au segment i** ,
- N l'ensemble des n segments sur lesquels le capital consolidé est alloué,
- $FP_i(t)$ les Fonds Propres du segment i , en date t ,
- $FP(t)$ les Fonds Propres globaux en date t .

Rappelons que la mesure de risque choisie pour définir les contributions au risque peut être différente de la VaR. De plus, l'allocation du capital économique global est réalisée en plusieurs étapes, selon l'architecture des risques considérée pour l'agrégation des risques. Pour ces différentes raisons, le risque global $\rho(X)$ peut différer du capital consolidé K que l'on souhaite allouer. Afin que l'ensemble du capital consolidé soit réparti, nous retenons une approche par clés de répartition pour ventiler le capital consolidé entre les différents segments²⁴.

Il est envisageable de mesurer le risque sur des **variables homogènes à un surplus** (variables correspondant aux Fonds Propres économiques) ou sur des **variables homogènes à un capital économique** (variables correspondant aux variations de Fonds Propres sur la première période). Nous décrivons ci-dessous ces deux approches d'allocation.

²³ Le risque associé au segment i sera parfois appelé risque individuel ou encore risque stand-alone.

²⁴ L'allocation totale du capital K est garantie par la propriété « full allocation », énoncée dans la définition 4.3, et par la forme des clés d'allocation (4.4).

Clés sur surplus algébrique

Dans ce cas, les variables d'intérêt (notées X et X_i) correspondent aux Fonds Propres en $t = 1$, soit :

$$\begin{aligned} X &= FP(1), \\ X_i &= FP_i(1). \end{aligned}$$

Cette approche consiste à allouer le surplus algébrique ; la clé d'allocation est donnée par :

$$v_i = \frac{\rho^\lambda(X_i/X)}{\rho(X)}.$$

Les capitaux alloués sont ensuite obtenus à partir de la relation : $K_i = FP_i(0) + v_i \cdot S$.

Clefs sur capitaux économiques

Il est également envisageable de calculer le risque sur des variables homogènes à un capital, du type :

$$X = FP(0) - D(1) \cdot FP(1), \quad (4.1)$$

$$X_i = FP_i(0) - D(1) \cdot FP_i(1). \quad (4.2)$$

Les clés d'allocation sont données par :

$$\omega_i = \frac{\rho^\lambda(X_i/X)}{\rho(X)}. \quad (4.3)$$

$$\text{Le capital alloué se calcule comme suit : } K_i = \omega_i \cdot K. \quad (4.4)$$

Dans la suite du mémoire, nous considérons des clés sur capitaux économiques. Nous supposons donc que les variables de risque sont données par (4.1) et (4.2). La mesure du risque sur ces variables correspond à la consommation en capital, définie à partir de la mesure de risque ρ , potentiellement différente de la VaR.

On note X_S la variable de risque associée au sous-ensemble S , contenu dans N . En particulier, X_N , notée aussi X , désigne la variable de risque global.

Nous supposons dans la suite que le risque associé à tout sous-ensemble S (en particulier l'ensemble N de tous les segments) est obtenu en sommant les risques individuels X_i , soit :

Hypothèse de décomposition du risque

$$X_S = \sum_{i \in S} X_i, \quad \forall S \subseteq N. \quad (4.5)$$

Notons que lorsqu'il s'agit de périmètres de passifs, la décomposition (4.5) est assurée. En revanche, dans le cas où les segments sont des risques, l'existence d'effets croisés entre facteurs de risque compromet une telle décomposition. Les problématiques spécifiques à une allocation entre risques seront traitées dans la partie IV-C-1.

Ainsi, la démarche générale associée à une étape d'allocation est la suivante : après sélection d'une mesure de risque et d'une méthode d'allocation de capital, nous calculons les contributions au risque à l'aide d'une méthode d'allocation de capital. Les capitaux alloués sont alors déduits à l'aide de la relation (4.4).

Approche d'allocation retenue

Etape 1 : calcul des contributions au risque à partir d'une méthode d'allocation de capital et d'une mesure de risque.

Etape 2 : allocation du capital d'intérêt à partir de la relation : $K_i = \omega_i \cdot K$.

Notons que dans le cadre de ce mémoire, nous allouons le capital économique Solvabilité II mais il est tout à fait possible d'allouer un autre capital²⁵, défini à partir d'une mesure de risque différente de la VaR. L'approche par clés nous offre une flexibilité quant au capital que l'on souhaite allouer mais aussi concernant la mesure de risque retenue pour allouer ce capital.

Nous nous concentrons dans la suite sur le calcul des contributions au risque, différent selon la méthode d'allocation retenue. Nous parlerons d'allocation du capital ou d'allocation du risque global. En réalité, on s'intéresse lors de l'étape 1 à l'allocation du risque global. L'allocation du capital d'intérêt est ensuite réalisée à l'aide des clés, en étape 2.

4. Indicateurs de risque

Nous introduisons ici deux indicateurs de risque :

- La notion **d'impact marginal** aura son importance pour définir les contributions au risque associées à certaines méthodes d'allocation.
- L'indicateur **Return On Risk Adjusted Capital (RORAC)** permet de mesurer la rentabilité : il interviendra dans la définition de la RORAC compatibilité, propriété de cohérence étudiée ensuite.

a) Impact marginal

Considérons un segment i et S un sous-ensemble de N contenant i .

Nous notons :

- $IM_i(h, S)$ l'impact marginal du segment i sur le risque associé à S , après cession d'une fraction h du segment i .

²⁵ A titre d'exemple, l'approche retenue pour allouer un capital défini à partir d'une TVaR est similaire à celle présentée dans ce mémoire.

L'impact marginal $IM_i(h, S)$ est défini par :

$$IM_i(h, S) = \frac{\rho(X_S) - \rho(X_S - hX_i)}{h}.$$

Il s'agit donc du taux d'accroissement mesurant la baisse obtenue sur le risque relatif à S , après cession d'une fraction h du segment i . L'impact marginal permet, par exemple, en considérant l'ensemble des segments N , d'évaluer la contribution au risque global d'un segment particulier.

Lorsque les segments sont fractionnables, h sera pris infiniment petit. Dans le cas de segments atomiques²⁶, nous considérerons : $h = 1$.

b) Indicateur RORAC

Le *RORAC* est un indicateur de rentabilité, défini comme le quotient d'un **indicateur de performance** et d'un **indicateur de risque**, explicités ci-dessous.

Supposons temporairement que les segments sont des périmètres de passifs, afin de comprendre l'intuition de l'indicateur *RORAC*, même si ce type d'indicateur peut être utilisé pour d'autres types de segments (des risques par exemple).

Introduisons les notations suivantes :

- $RORAC(X)$ le *RORAC* global,
- $RORAC(X_i)$ le *RORAC* du segment i avant allocation du capital,
- $RORAC(X_i/X)$ le *RORAC* du segment i post-allocation.

Nous nous intéressons par la suite à la *VIF* en $t = 1$, dans laquelle on a incorporé le résultat non-distribué de première période. Celle-ci est notée $VIF^*(1)$ pour faire référence à la *VIF* de l'ensemble des périmètres de passifs et $VIF_i^*(1)$ pour désigner la *VIF* du périmètre de passifs i .

En reprenant les notations employées dans la partie I, nous avons :

$$VIF^*(1) = R_1 + E_Q \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} R_u \mid F_1^{MR} \right],$$

$$VIF_i^*(1) = R_{i,1} + E_Q \left[\sum_{u \geq 2} \frac{\delta_u}{\delta_1} \cdot R_{i,u} \mid F_1^{MR} \right],$$

où :

- R_u correspond au résultat global en date u ,
- $R_{i,u}$ correspond au résultat du périmètre de passifs i en date u .

²⁶ Une allocation par la méthode d'Euler (partie IV-B-4) suppose des segments fractionnables tandis qu'une allocation par la méthode marginale ou la méthode de Shapley, méthodes discrètes, sous-entend que les segments sont atomiques (parties IV-B-2 et IV-B-3).

Nous spécifions ci-après le calcul des « risques futurs », décrits par les éléments $\rho(X)$, $\rho(X_i)$ et $\rho^\lambda(X_i/X)$, afin de calculer la VAN correspondante et ainsi définir les RORAC associés.

Introduisons les notations suivantes :

- PM_t la provision mathématique en date t , constituée pour l'ensemble des périmètres de passifs,
- $PM_{i,t}$ la provision mathématique en date t , constituée pour le périmètre de passifs i ,
- Le risque global $\rho(X)$, les risques individuels $\rho(X_i)$ et les contributions au risque $\rho^\lambda(X_i/X)$ sont temporairement indicés par t .

Afin de décrire l'évolution du risque global, des risques stand-alone et des contributions au risque au fil du temps, nous faisons les hypothèses suivantes, inspirées de la définition de la marge pour risque :

$$\begin{aligned}\rho_t(X) &= \frac{PM_t}{PM_0} \times \rho_0(X), \forall t > 0, \\ \rho_t(X_i) &= \frac{PM_{i,t}}{PM_{i,0}} \times \rho_0(X_i), \forall t > 0, \\ \rho_t^\lambda(X_i/X) &= \frac{PM_{i,t}}{PM_{i,0}} \times \rho_0^\lambda(X_i/X), \forall t > 0.\end{aligned}$$

Les VAN correspondantes, calculées en date initiale, s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}VAN_0\{\rho(X_i)\} &= \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \rho_t(X_i), \\ VAN_0\{\rho(X)\} &= \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \rho_t(X), \\ VAN_0\{\rho^\lambda(X_i/X)\} &= \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \rho_t^\lambda(X_i/X).\end{aligned}$$

Le RORAC global et le RORAC du segment i sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned}RORAC(X) &= \frac{E\{VIF^*(1)\}}{VAN_0\{\rho(X)\}}, \\ RORAC(X_i) &= \frac{E\{VIF_i^*(1)\}}{VAN_0\{\rho(X_i)\}}.\end{aligned}$$

Le RORAC post-allocation du segment i est défini à partir de la contribution au risque de ce segment, calculée selon la méthode d'allocation λ et la mesure de risque ρ^{27} , autrement dit:

$$RORAC(X_i/X) = \frac{E\{VIF_i^*(1)\}}{VAN_0\{\rho^\lambda(X_i/X)\}}.$$

²⁷ En réalité, il faudrait tenir compte de la date de souscription des contrats afin de comparer de manière pertinente des RORAC de périmètres de passifs différents.

Nous verrons qu'à travers l'analyse de l'indicateur *RORAC*, il est possible, lorsque la méthode d'allocation satisfait la propriété *RORAC* compatible, de piloter l'activité à partir de cet indicateur. Par ailleurs, le calcul de l'indicateur *RORAC* sera mis en œuvre et analysé dans le cadre d'une allocation cohérente.

Notons que d'autres indicateurs de rentabilité, non développés ici, peuvent être utilisés. Citons à titre d'exemple l'indicateur *Return On Equity (ROE)* : proche de l'indicateur *RORAC*, le *ROE* rapporte le résultat de la période au capital immobilisé pendant cette période. Ce type d'indicateur s'interprète comme le taux de rémunération du capital immobilisé, sur une année.

5. Mise en place du problème d'allocation de capital

Nous appelons problème d'allocation de capital le problème basé sur le calcul des contributions au risque. En réalité, nous rappelons qu'il s'agit dans un premier temps d'allouer le risque global, correspondant à un capital défini à partir d'une mesure de risque spécifique. Ensuite, l'allocation du capital K est réalisée à partir des clés d'allocation.

Rappelons que N désigne l'ensemble des segments sur lesquels le risque global est alloué.

Notons A l'ensemble des mesures de risque.

Définition 4.1 - Une technique d'allocation de capital est une fonction $\Lambda_{(N,\lambda)} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à chaque mesure de risque ρ l'allocation unique :

$$\Lambda_{(N,\lambda)} : \rho \mapsto \begin{bmatrix} \rho^\lambda(X_1/X) \\ \rho^\lambda(X_2/X) \\ \dots \\ \rho^\lambda(X_n/X) \end{bmatrix} \text{ vérifiant la propriété « full allocation » : } \sum_{i \in N} \rho^\lambda(X_i/X) = \rho(X_N).$$

Après sélection d'une mesure de risque et d'une méthode d'allocation, nous pouvons résoudre le problème d'allocation de capital ci-dessus.

6. Cohérence des méthodes d'allocation

Nous avons introduit dans la partie II la notion de cohérence des mesures de risque. Nous allons également spécifier certains axiomes traduisant une allocation de capital adéquate entre les différents segments.

Tout d'abord, nous définissons la notion de *RORAC* compatibilité, propriété très intéressante, notamment pour une aide au pilotage de l'activité. Nous spécifions ensuite d'autres critères de cohérence permettant de définir la cohérence des méthodes d'allocation.

Définition 4.2 - Les contributions au risque $\{\rho(X_i|X)\}_{i \in N}$ sont *RORAC* compatibles s'il existe des réels $\varepsilon_i > 0$ vérifiant l'implication, pour tout segment i :

$RORAC(X_i|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + hX_i) > RORAC(X)$, pour tout h tel que : $0 \leq h \leq \varepsilon_i$.

Une méthode d'allocation est dite *RORAC* compatible si elle fournit des contributions au risque *RORAC* compatibles.

Ainsi, lorsque la rentabilité définie post-allocation d'un segment i est supérieure à la rentabilité globale, il est possible d'améliorer de manière certaine la rentabilité globale en ajoutant une part h suffisamment petite du segment i .

L'allocation de capital réalisée à l'aide d'une méthode d'allocation *RORAC* compatible permet donc d'analyser les capitaux alloués en termes de profitabilité.

En regardant maintenant la contraposée, si après ajout d'une part h d'un segment i , la rentabilité se trouve être inférieure à la rentabilité globale, alors il ne paraît pas adapté de développer cette ligne de business.

Le graphique ci-dessous illustre la notion de *RORAC* compatibilité. Etant donné deux segments, la rentabilité globale est optimale lorsque les *RORAC* post-allocation des deux segments sont égaux. Dans le cas contraire, il est possible d'améliorer la rentabilité globale en ajoutant une part du segment le plus rentable.

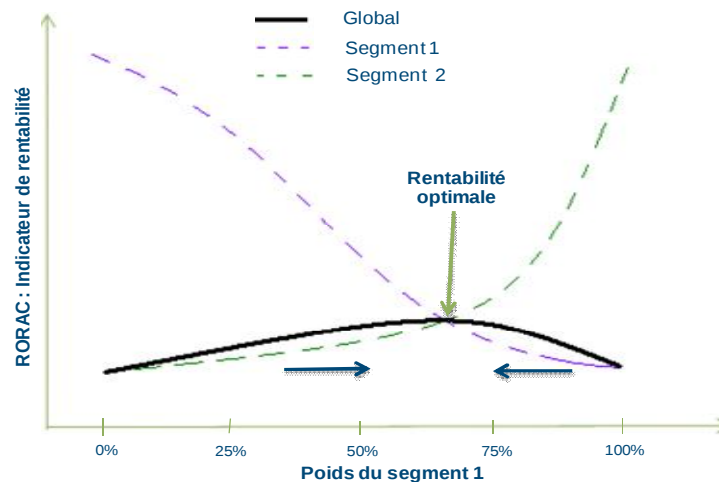


Figure 4.3 - Illustration de la *RORAC* compatibilité.

A titre d'exemple, si les segments sont des lignes de business, le *RORAC* nous fournit des informations quant au développement d'une ligne de business, selon la valeur de son *RORAC* comparée au *RORAC* global.

Une méthode d'allocation de capital doit satisfaire certaines propriétés souhaitables, définissant la cohérence d'une méthode d'allocation, comme spécifié ci-dessous.

Définition 4.3 - Une méthode d'allocation est cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :

- **1) "Full allocation"** : $\sum_{i \in N} \rho^\lambda(X_i/X) = \rho(X)$
- **2) *RORAC* compatibilité** (définie en 4.2)
- **3) Symétrie** : soient deux segments i et j : si $IM_i(h, S) = IM_j(h, S)$ pour tout $S \in D_i \cap D_j$ alors $\rho^\lambda(X_i/X) = \rho^\lambda(X_j/X)$.
- **4) "No undercut"** : $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} \rho^\lambda(X_i/X) \leq \rho(\sum_{i \in S} X_i)$.
- **5) "Riskless allocation"** : l'allocation de capital à un segment non risqué est nulle.

La propriété « **full allocation** » garantit une allocation totale du risque global entre les différents segments. Notons que l'introduction des clés d'allocation, après calcul des contributions, conserve la propriété « full allocation » : la totalité du capital consolidé est alloué aux différents segments. Nous considérons dans la suite cette propriété comme requise ; d'où l'introduction de la contrainte dans le problème d'allocation spécifié à l'aide de la définition 4.1. La méthode d'allocation utilisée devra donc permettre d'aboutir à des contributions au risque de somme égale au risque global, avec intégration d'un terme de normalisation si nécessaire.

La propriété de **symétrie** met en évidence le fait que deux segments ayant le même impact marginal par rapport à tout sous-ensemble doivent avoir la même contribution au risque.

Enfin, la propriété « **No undercut** » stipule que l'allocation tient compte d'un bénéfice de diversification pour tout sous-ensemble : la somme des capitaux alloués à un ensemble de segments est inférieure au risque global supporté par ces segments. En particulier, il sera alloué à un segment indépendant un capital plus faible que son capital stand-alone.

B. Les méthodes d'allocation de capital

Différentes méthodes d'allocation de capital sont envisageables afin d'allouer le capital sur la maille souhaitée.

Parmi les techniques d'allocation les plus classiques présentées dans la littérature, nous trouvons :

- La méthode proportionnelle,
- La méthode marginale,
- La méthode de **Shapley**,
- La méthode d'**Euler**,
- La méthode d'Aumann-Shapley.

Les méthodes proportionnelle et marginale reposent sur des approches d'allocation simplifiées. Les méthodes de Shapley et d'Aumann-Shapley sont inspirées de la théorie des jeux coopératifs. Nous verrons comment identifier un problème d'allocation de capital entre segments de risque à un problème d'allocation de coût entre joueurs.

La méthode d'Euler correspond quant à elle à une méthode « marginale continue » et met en exergue les différents inconvénients de la méthode marginale. L'intérêt sera porté sur cette méthode, couplée à une mesure de risque $TVaR$; cette méthode sera notamment mise en œuvre sur un cas pratique (se référer à la partie V).

Nous présentons dans cette partie chacune de ces méthodes.

1. La méthode proportionnelle

La méthode proportionnelle vise à allouer au segment i la proportion du risque global auquel il contribue, selon la valeur de son capital stand alone, défini à partir de la mesure de risque ρ .

La contribution au risque du segment i associée à la mesure de risque ρ est donnée ci-dessous.

Contribution au risque - méthode proportionnelle

$$\rho^{prop}(X_i/X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in N} \rho(X_j)} \rho(X).$$

Notons que la clé d'allocation appliquée au capital consolidé correspond à :

$$\omega_i = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j \in N} \rho(X_j)}.$$

Il s'agit donc bien d'une allocation proportionnelle du capital consolidé.

Cette méthode, bien qu'intuitive et aisée à mettre en œuvre, ne tient pas compte de l'impact marginal de chaque segment, contrairement à la méthode marginale présentée ci-dessous.

2. La méthode marginale

La méthode marginale, parfois appelée méthode incrémentale, permet d'allouer le risque global selon l'**impact marginal** de chacun des segments.

La formule des contributions au risque fournies par cette méthode est donnée ci-dessous.

Contribution au risque - méthode marginale

$$\rho^{marg}(X_i/X) = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}})}{\sum_{j \in N} \{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})\}} \rho(X_N) = \frac{IM_i(1, N)}{\sum_{j \in N} IM_j(1, N)}.$$

Remarquons que le terme de normalisation $\sum_{j \in N} \{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})\}$ permet de vérifier la propriété «full allocation». Nous ferons le lien entre les méthodes d'Euler et marginale dans la partie IV-B-4-c) et étudierons plus précisément cet aspect.

La clé appliquée au capital consolidé a donc pour expression :

$$\omega_i = \frac{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{i\}})}{\sum_{j \in N} \{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})\}}.$$

L'inconvénient de cette méthode tient du fait qu'elle s'intéresse à la contribution marginale de chaque segment à l'ensemble N uniquement. Il est envisageable d'examiner des contributions marginales par rapport à des sous-ensembles de N , motivation d'une l'allocation par la méthode de Shapley, étudiée ensuite.

Il apparait que les méthodes proportionnelle et marginale ne vérifient pas « naturellement » la « full allocation », les termes de normalisation étant essentiels à une allocation totale du risque global. Les méthodologies étudiées ensuite vérifient la propriété « full allocation », sans introduction de facteurs de normalisation.

3. La méthode de Shapley

La méthode de Shapley est une méthode discrète²⁸ reposant sur la théorie des jeux coopératifs ; elle est décrite précisément dans la thèse de Denault [2].

Cette méthode, initialement utilisée pour allouer le coût total entre joueurs, s'adapte aisément à la résolution d'un problème d'allocation du risque global entre segments.

a) *Fondement et principe de la méthode*

Un **jeu coopératif** consiste en la donnée :

- d'un ensemble N composé de n joueurs : $N = \{1, \dots, n\}$,
- d'une fonction de coût c qui associe à chaque sous-ensemble S de N , nommé **coalition**, un réel $c(S)$.

Nous notons C l'ensemble des fonctions de coût.

Afin d'allouer le coût total $c(N)$ entre les joueurs, nous introduisons le concept de fonction valeur.

Définition 4.4 - Une fonction valeur $\pi_N : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ fait correspondre à chaque fonction de coût une **unique allocation** :

$$\pi_N : c \mapsto \begin{bmatrix} c^a(1) \\ c^a(2) \\ \vdots \\ c^a(n) \end{bmatrix} \text{ avec } \sum_{i \in N} c^a(i) = c(N).$$

Les éléments $c^a(i)$ désignent les coûts alloués.

La fonction de coût c est dite **sous-additive** si : $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$ pour toutes coalitions S et T d'intersection vide.

En supposant la sous-additivité de la fonction de coût, les joueurs vont être incités à former des coalitions afin de bénéficier de la diversification.

Néanmoins, chaque joueur cherche à minimiser sa fonction de coût et adopte une stratégie en cohérence avec cet objectif. D'une part, le joueur refusera de participer à une coalition S si le coût qui lui est alloué est plus élevé que son coût s'il était indépendant (menace à l'échelle d'un individu). A l'échelle de la coalition, les joueurs menaceront de quitter la coalition lorsque le coût alloué à l'ensemble des joueurs est supérieur au coût global qu'ils auraient à supporter s'ils étaient en dehors de la coalition.

Définition 4.5 - L'ensemble des allocations qui évitent les contraintes évoquées ci-dessus, appelé **noyau**, sont telles que :

$$\sum_{i \in S} c^a(i) \leq c(S) \text{ pour toutes les coalitions } S \text{ incluses dans } N.$$

²⁸ Les joueurs sont supposés indivisibles.

Dans le cas où c représente une mesure de risque, remarquons que le noyau est constitué de l'ensemble des allocations satisfaisant la propriété « No undercut ».

Définition 4.6 - La valeur de Shapley $c^{Sh}(X_i/X)$ du jeu (N, c) est définie par :

$$c^a(i) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (c(S) - c(S \setminus \{i\})) \quad i \in N,$$

où s est le cardinal de S et D_i l'ensemble des coalitions de N contenant i .

Denault [2] donne une condition nécessaire sous laquelle la valeur de Shapley appartient au noyau du jeu. Cette condition paraît restrictive notamment lorsque la fonction de coût désigne une mesure de risque, comme explicité dans la partie suivante.

b) Lien avec le problème d'allocation de capital

La méthode de Shapley peut être appliquée à un problème d'allocation du capital dans le cadre suivant :

- Les segments de risque représentent les joueurs du jeu évoqué précédemment,
- La mesure de risque ρ est identifiée à la fonction de coût.

c est alors définie, pour toute coalition S incluse dans N , par :

$$c(S) = \rho \left(\sum_{i \in S} X_i \right). \quad (4.6)$$

Cette méthode permet d'améliorer la méthode marginale en se dotant d'une vision marginale par rapport à tous les sous-ensembles contenant le segment i , comme mis en évidence par la forme des contributions au risque donnée ci-dessous.

Contribution au risque – méthode de Shapley $\rho^{Sh}(X_i/X) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (\rho(S) - \rho(S \setminus \{i\})) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} IM_i(1, S).$
--

Proposition 4.1 - L'allocation par la méthode de Shapley vérifie la propriété « full allocation » suivante :

$$\sum_{i \in N} \rho^{Sh}(X_i/X) = \rho(X).$$

Nous démontrons cette proposition en annexe B-1.

Remarquons que la méthode de Shapley est également symétrique et « riskless allocation ». En revanche, elle n'est en générale pas RORAC compatible. De plus, la condition nécessaire citée dans la thèse de Denault ne semble pas induire, dans notre cadre, la propriété « No undercut ». En effet, cette condition est fondée sur la propriété de sous-additivité forte²⁹ de la fonction c définie par (4.6), propriété impliquant, pour une mesure de risque positivement homogène, la linéarité de la mesure de risque, ce qui exclut donc toute possibilité de diversification.

Notons que l'application de la méthode de Shapley nécessite l'évaluation du risque pour les $2^n - 1$ coalitions possibles entre segments. Les temps de calculs induits peuvent être importants, notamment lorsque nous allouons le capital à partir de distributions de Fonds Propres³⁰. Néanmoins, dans un cadre gaussien, nous disposons de formules explicites pour calculer l'ensemble des éléments intervenant dans la formule des contributions au risque et ce type de difficulté n'apparaît pas. Cet aspect est détaillé dans la partie IV-C-2.

4. La méthode d'Euler

a) Principe de la méthode

La méthode d'Euler permet d'allouer le risque global selon l'**impact marginal infinitésimal** de chaque segment. Les segments sont à présent fractionnables, contrairement aux méthodes explicitées infra. En ce sens, la méthode d'Euler est continue.

Un article de Dirk Tasche est consacré à cette méthode [13]. La notion de RORAC compatibilité y est notamment introduite et expliquée.

L'impact marginal infinitésimal correspond à la baisse obtenue sur le risque global, en cédant, pour le segment i , un incrément h infiniment petit. Formellement, il s'agit de : $\lim_{h \rightarrow 0} IM_i(h, N)$. La méthode d'Euler alloue à chaque segment son impact marginal infinitésimal.

Introduisons les notations suivantes :

- $X(u) = X(u_1, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n u_i X_i$,
- $C_\rho(u) = \rho(X(u))$, pouvant être interprétée comme une fonction de coût.

En supposant que la fonction C_ρ est continument différentiable, la contribution au risque calculée à partir de la méthode d'Euler est définie ci-dessous.

Contribution au risque – méthode d'Euler

$$\rho^{Euler}(X_i/X) = \frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(X) - \rho(X - hX_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} IM_i(h, N).$$

²⁹ Une fonction de coût fortement sous-additive est telle que : $c(S) + c(T) \geq c(S \cap T) + c(S \cup T)$, pour toutes coalitions S et T incluses dans N .

³⁰ Il peut s'agir de distributions réelles, issues de l'application d'une méthodologie d'obtention de la situation nette à un an, mais aussi de distributions « créées » à partir d'une hypothèse de loi.

Nous rappelons en annexe B.2.a) au présent mémoire certains résultats fondamentaux inhérents aux résultats de la méthode d'Euler, notamment le théorème d'Euler.

La fonction C_ρ étant homogène de degré 1, l'application du théorème d'Euler à cette fonction fournit l'égalité :

$$C_\rho(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(\mathbf{1}), \quad \text{avec } \mathbf{1} = (1, \dots, 1).$$

Ainsi :

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^n \rho^{Euler}(X_i/X),$$

et la propriété « full allocation » est bien vérifiée.

Nous étudions plus précisément dans la partie IV-B-4-d) les propriétés de cohérence vérifiées par la méthode d'Euler : nous verrons que cette méthode est RORAC compatible, ce qui la rend très intéressante au regard des motivations évoquées (aide à la décision, pilotage etc...).

b) Déclinaison de formules explicites selon la mesure de risque

Cette partie vise à fournir des formules explicites selon la mesure de risque définissant les contributions au risque d'Euler.

Mesure de risque écart-type

Dans le cas d'une mesure de risque écart-type, la proposition suivante énonce la formule des contributions au risque déterminées à partir de la méthode d'Euler.

Proposition 4.2 - Dans le cas d'une allocation par la méthode d'Euler et d'une mesure de risque écart-type, la contribution au risque associée au segment i est de la forme :

$$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \theta \frac{\text{cov}(X_i, X)}{\sigma_X}.$$

Cette proposition est démontrée en annexe B-2-b).

Méthode d'Euler - mesure de risque écart-type

$$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \theta \frac{\text{cov}(X_i, X)}{\sigma_X}.$$

Mesures de distorsion et fonction de coût

La partie II sur les mesures de risque nous a permis d'écrire les mesures de risque VaR et TVaR sous forme de mesures de distorsion. Ceci va nous permettre de calculer les contributions au risque obtenues par la méthode d'Euler combinée à une mesure VaR ou TVaR.

Nous commençons par énoncer un résultat fondamental donnant l'expression de la dérivée de la fonction quantile :

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial u_i}(X(u)) = E[X_i | X(u) = q_\alpha(X(u))]. \quad (4.7)$$

Pour une démonstration de ce résultat, le lecteur intéressé pourra se référer à l'article [12].

Nous rappelons que la fonction de coût est donnée par :

$$C_\rho(u) = \rho(X(u)), \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

Lorsque la mesure de risque peut s'écrire comme une mesure de distorsion, la fonction de coût associée à la mesure de risque ρ s'écrit :

$$C_\rho(u) = \int_0^1 F_{X(u)}^{-1}(t) dG(t).$$

Calculons, en utilisant le résultat (4.7), $\frac{\partial C_\rho(u)}{\partial u_i}$.

$$\frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(u) = \frac{\partial}{\partial u_i} \int_0^1 F_{X(u)}^{-1}(t) dG(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} F_{X(u)}^{-1}(t) dG(t) = \int_0^1 E[X_i | X(u) = F_{X(u)}^{-1}(t)] dG(t).$$

Mesure de risque VaR

Rappelons que la mesure de risque VaR est une mesure de distorsion obtenue en considérant pour G la fonction de répartition W telle que : $W(t) = \mathbb{1}_{t \leq \alpha}$. Nous avons donc :

$$\frac{\partial C_{VaR}}{\partial u_i}(u) = E[X_i | X(u) = F_{X(u)}^{-1}(\alpha)].$$

Finalement, la contribution d'Euler vaut :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) = \frac{\partial C_{VaR}}{\partial u_i}(\mathbf{1}) = E[X_i | X = F_X^{-1}(\alpha)].$$

Méthode d'Euler - mesure de risque VaR

$$VaR^{Euler}(X_i/X) = E[X_i | X = VaR_\alpha(X)].$$

En pratique, excepté dans le cas gaussien étudié ensuite, ce type de calcul est délicat à mettre en œuvre : concrètement, il faudrait réaliser autant de projections du risque i , conditionnelles au fait que X est égal à sa VaR , que nous souhaitons de réalisations de la variable X_i pour estimer l'espérance conditionnelle.

Nous avons donc plutôt recours à une **approximation linéaire**. La contribution au risque est alors approximée par :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) \simeq \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} \{VaR_\alpha(X) - \mu_X\},$$

où μ_i désigne l'espérance de X_i et μ_X l'espérance de X .

La valeur de la contribution au risque peut également être approchée en considérant le taux d'accroissement de la fonction VaR_α pour h petit :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) \simeq \frac{VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(X - hX_i)}{h}.$$

Introduisons l'hypothèse suivante :

(H_3) : $(X_1, \dots, X_n)$ est un **vecteur gaussien** de loi : $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)'$ et Σ est la matrice de variance-covariance des X_i .

Pour tout segment i , l'écart-type de X_i est donné par :

$$\sigma_i = \frac{C_i}{q_{99,5\%}\{\mathcal{N}(0,1)\}}.$$

Nous supposons dans la suite que³¹ : $\mu_i = 0, \forall i \in N$. (4.8)

Néanmoins, les résultats seront exposés et démontrés sous l'hypothèse générale (H_3) .

Proposition 4.3 - Sous l'hypothèse (H_3) , dans le cas d'une allocation par la méthode d'Euler et d'une mesure de risque VaR , la contribution au risque associée au segment i s'écrit :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} (VaR_\alpha(X) - \mu_X).$$

Cette proposition est démontrée en annexe B-2-c).

³¹ Cela revient à faire l'hypothèse suivante : $D(1).E\{FP_i(1)\} = FP_i(0), \forall i \in N$.

Mesure de risque TVaR

Rappelons que la mesure de risque $TVaR$ est une mesure de distorsion obtenue en considérant la fonction de répartition Z d'une loi uniforme sur $[\alpha, 1]$.

Dans ce cas, nous avons, en reprenant l'expression de la dérivée de la fonction C_ρ par rapport à u_i établie plus haut :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{TVaR}(u)}{\partial u_i} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u_i} F_{X(u)}^{-1}(t) dZ(t) \\ &= \int_0^1 E[X_i | X(u) = F_{X(u)}^{-1}(t)] dZ(t)\end{aligned}$$

En posant : $v = F_{X(u)}^{-1}(t)$, et en écrivant explicitement le terme $E[X_i | X(u) = v]$, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{TVaR}(u)}{\partial u_i} &= \int_{\mathbb{R}} E[X_i | X(u) = v] dZ(F_{X(u)}(v)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_{X_i, X(u)}(x, v)}{f_{X(u)}(v)} z(F_{X(u)}(v)) dx dF_{X(u)}(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x z(F_{X(u)}(v)) f_{X_i, X(u)}(x, v) dx dv \\ &= E[X_i z(F_{X(u)}(X(u)))].\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial C_{TVaR}}{\partial u_i}(\mathbf{1}) = E[X_i z(F_X(X))] = \frac{1}{1-\alpha} E[X_i \mathbb{1}_{F_X(X) > \alpha}].$$

Nous obtenons finalement le résultat :

$$\frac{\partial C_{TVaR}}{\partial u_i}(\mathbf{1}) = E[X_i | X > VaR_\alpha(X)].$$

Méthode d'Euler - mesure de risque TVaR

$$TVaR^{Euler}(X_i / X) = E[X_i | X > VaR_\alpha(X)].$$

Proposition 4.4 - Sous l'hypothèse (H_3) , dans le cas d'une allocation par la méthode d'Euler et d'une mesure de risque $TVaR$, la contribution au risque associée au segment i a pour expression :

$$TVaR^{Euler}(X_i / X) = \mu_i + \frac{1}{1-\alpha} \cdot cov(X_i, X) \cdot f_X(VaR_\alpha(X)).$$

Nous montrons cette proposition en annexe B-2-c).

Le tableau ci-dessous récapitule les formules générales des contributions au risque ainsi que les formules obtenues dans le cas gaussien, sous l'hypothèse (H_3).

Méthode d'Euler	Formule des contributions au risque	Formule explicite dans le cas gaussien
Mesure de risque Ecart-type	$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \theta \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X}$	
Mesure de risque VaR_α	$VaR^{Euler}(X_i/X) = E[X_i X = VaR_\alpha(X)]$	$VaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} (VaR_\alpha(X) - \mu_X)$
Mesure de risque $TVaR_\alpha$	$TVaR^{Euler}(X_i/X) = E[X_i X > VaR_\alpha(X)]$	$TVaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{1}{1-\alpha} \cdot cov(X_i, X) \cdot f_X(VaR_\alpha(X))$

Figure 4.4 – Tableau récapitulatif des formules d'allocation.

Lorsque nous disposons de distributions de Fonds Propres, notons que les éléments intervenant dans les formules d'allocation sont estimés aisément à partir des distributions.

c) **Rapprochement entre méthode marginale et méthode d'Euler**

La méthode d'Euler alloue le risque global selon l'**impact marginal infinitésimal** de chaque segment tandis que la méthode marginale alloue le risque global selon l'**impact marginal** de chaque segment, calculé pour $h = 1$, les segments étant atomiques.

Proposition 4.5 - Soit ρ une mesure de risque sous-additive et homogène de degré 1, alors : $IM_i(1, N) \leq \rho^{Euler}(X_i/X)$.

La méthode d'Euler vérifiant la propriété « full allocation », nous avons, en sommant les membres de l'inégalité :

$$\sum_{i \in N} IM_i(1, N) \leq \rho(X).$$

Ainsi, si l'on considérait l'allocation marginale $\rho^{marg}(X_i/X) = IM_i(1, N)$, l'allocation sous-estimerait le risque global ; autrement dit, il serait alloué moins que nécessaire aux différents segments.

La « full allocation » n'est donc pas vérifiée « naturellement » par la méthode marginale, d'où l'introduction du terme de normalisation $\sum_{j \in N} \{\rho(X_N) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})\}$.

Notons également que, contrairement à la méthode d'Euler, la méthode marginale n'est généralement pas RORAC compatible.

d) Cohérence de la méthode d'Euler

Nous nous intéressons ici aux propriétés de cohérence de la méthode d'Euler.

Introduisons l'hypothèse suivante, pour tout périmètre de passifs i ³² :

$$H_4 : \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \frac{PM_t}{PM_0} = \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \frac{PM_{i,t}}{PM_{i,0}}.$$

Proposition 4.6 - La méthode d'Euler est symétrique et « riskless allocation ». Cette méthode est RORAC compatible sous l'hypothèse H_4 .

Les propriétés de symétrie et « riskless allocation » sont évidentes³³. Nous montrons la propriété RORAC compatible en annexe B-2-d).

Proposition 4.7 - La méthode d'Euler associée à une mesure de risque TVaR est cohérente. ³⁴

Cette proposition nous fournit la dernière propriété de cohérence requise : la propriété « No undercut ». Ainsi, en particulier, pour chaque segment i , la contribution au risque n'excède pas son risque individuel. Nous montrons cette propriété en annexe B-2-d).

L'approche d'allocation « Euler-TVaR » présente donc un intérêt particulier et sera considérée lors de la mise en œuvre des méthodes d'agrégation et d'allocation dans la partie V.

e) Mesure de la diversification et de la concentration

La méthode d'Euler est particulièrement adaptée pour mesurer la diversification et la concentration d'un ensemble de segments de risque. Nous donnons ici certains indicateurs de diversification.

Définissons respectivement l'**indice de diversification** et l'**indice de diversification marginal** du segment i , relatifs à la mesure de risque ρ , par :

$$ID_{\rho}(X) = \frac{\rho(X)}{\sum_{i=1}^n \rho(X_i)},$$

$$ID_{\rho}(X_i/X) = \frac{\rho_{Euler}(X_i/X)}{\rho(X_i)}.$$

³² Cette hypothèse est vérifiée, par exemple, lorsque les profils de liquidation des provisions mathématiques global et individuels sont identiques.

³³ La propriété « riskless allocation » est vérifiée en supposant raisonnablement que la valeur déterministe des Fonds Propres en $t=1$ du segment i est : $\frac{1}{D(1)} FP_i(0)$.

³⁴ L'hypothèse H_4 est nécessaire pour démontrer la propriété de RORAC compatibilité.

Pour une mesure de risque cohérente, il est précisé dans l'article de Tasche [13] que :

- 1) Par la propriété de **sous-additivité** : $ID_\rho(X) \leq 1$.
- 2) Par la propriété « **No undercut** » : $ID_\rho(X_i/X) \leq 1$.
- 3) Si pour un segment i , $ID_\rho(X_i/X) < ID_\rho(X)$ alors il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que $ID_\rho(X + hX_i) < ID_\rho(X)$, pour tout h tel que $0 \leq h \leq \varepsilon_i$.

Un indicateur de diversification proche de 1 indique un risque de concentration élevé, tandis qu'un indice de diversification faible traduit une bonne diversification entre segments.

Les indices de diversification marginaux nous renseignent plutôt sur la diversification potentielle. Ainsi, si un segment i a un indice de diversification marginal plus faible que l'indice de diversification global, l'ajout d'une fraction du segment i permettra d'améliorer la diversification globale, comme explicité par 3).

5. La méthode d'Aumann-Shapley

La méthode d'Aumann-Shapley est une généralisation continue de la méthode de Shapley. Cette méthode envisage des coalitions entre fractions de segments.

Le calcul des contributions au risque est réalisé comme suit :

Contribution au risque - méthode d'Aumann-Shapley

$$\rho^{AS}(X_i/X) = \int_0^1 \frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(u, \dots, u) du.$$

Dans le cas d'une mesure de risque homogène de degré 1, nous avons, en utilisant le lemme A.1 de l'annexe B-2 :

$$\rho^{AS}(X_i/X) = \int_0^1 \frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(u, \dots, u) du = \int_0^1 \frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(\mathbf{1}) du = \frac{\partial C_\rho}{\partial u_i}(\mathbf{1}) = \rho^{Euler}(X_i/X).$$

Les mesures de risque présentées dans ce mémoire étant homogènes de degré 1, les méthodes d'Euler et d'Aumann-Shapley coïncident. Nous ne développons donc pas cette dernière ; celle-ci est décrite précisément dans l'article [2].

Remarques générales sur les méthodes d'allocation

Notons que le recours aux clés d'allocation, après calcul des contributions au risque, permet d'aboutir à des capitaux ne vérifiant pas nécessairement les mêmes propriétés de cohérence que celles vérifiées par les contributions au risque (RORAC compatibilité, symétrie, « No undercut » et « riskless allocation »). Il convient donc de prendre en compte cet aspect et de rester prudent lors de la phase d'analyse des capitaux alloués.

De plus, les formules d'allocation présentées n'excluent pas l'obtention de contributions au risque négatives, sauf lorsqu'une méthode proportionnelle est utilisée. Il est donc possible de rencontrer des cas où les capitaux alloués sont négatifs : il n'est alors pas raisonnable de donner un sens économique à ces capitaux.

Uniformisation des méthodes d'allocation

Les auteurs de l'article [6] proposent un cadre général permettant de comprendre les capitaux alloués comme solutions d'un programme d'optimisation.

Il est par exemple possible de voir les contributions au risque obtenues à partir d'une méthode proportionnelle ainsi que les contributions au risque d'Euler, comme solutions d'un programme d'optimisation du même type.

C. Les problématiques d'allocation de capital

L'allocation de capital sous Solvabilité II soulève différentes problématiques, notamment :

- Quelle méthodologie adopter pour allouer le capital sur des risques, l'existence d'effets croisés perturbant le cadre général d'application des méthodologies d'allocation présentées dans la partie IV-A-3³⁵ ?
- Comment ventiler le capital entre des segments quantifiés par des méthodologies différentes (méthodologie simulateur ou approche chocs/facteurs)? Comment appliquer des méthodologies type Euler/TVaR lorsque nous disposons uniquement des valeurs de capitaux associées à chaque segment ?
- Comment garantir la stabilité de l'allocation au fil du temps, afin de rester cohérent dans le pilotage de l'activité ?

Nous traitons dans cette partie l'ensemble des problématiques énoncées ci-dessus, l'objectif étant tout d'abord de rendre applicable toute méthodologie d'allocation et ce, quel que soit le type de segments envisagés (risque ou périmètre de passifs) et la méthodologie de calcul du capital économique considérée (simulateur ou chocs/facteurs).

Enfin, nous proposons de garantir la stabilité de l'allocation dans le temps en tenant compte des capitaux déterminés à la date de calcul à partir d'une méthode d'allocation, mais également des capitaux des années antérieures, en leur affectant éventuellement des pondérations moins élevées.

Cette partie se place dans un cadre opérationnel en fournissant les outils essentiels à la mise en œuvre des méthodes d'allocation. Nous verrons précisément comment appliquer les méthodologies sur un cas pratique, dans la partie V.

1. Allocation de capital sur des risques

Nous nous appuyons dans cette partie sur l'exemple des risques actions et taux d'intérêt et cherchons à allouer le capital consolidé au titre de ces deux risques, obtenu à partir d'une méthodologie simulateur. Les modèles mathématiques utilisés pour la modélisation de l'indice actions et des taux d'intérêt seront donnés dans la partie V.

³⁵ L'hypothèse de séparation stricte entre les variables de risques individuelles (hypothèse (4.5)) n'est en effet pas vérifiée.

Comme déjà évoqué, des termes croisés entre facteurs de risque apparaissent dans le profil de la fonction Fonds Propres économique ce qui induit :

$$X \neq X_{eq} + X_{int}.$$

Ainsi, l'hypothèse de séparation stricte entre variables de risque individuelles (4.5) requise pour allouer le capital par l'une des méthodes proposées, n'est pas vérifiée.

Théoriquement, afin d'allouer le capital de manière adéquate, il faudrait tenir compte des effets croisés et considérer le segment « actions x taux », bien que fictif.

Devineau et Loisel [4] ont proposé une méthodologie d'agrégation alternative à celle proposée par la Formule Standard, fondée sur le calibrage d'une forme paramétrique³⁶. Nous nous inspirons fortement de cette méthodologie afin de nous placer dans un cadre où l'hypothèse (3.5) est vérifiée. La même forme paramétrique est reprise. La méthodologie de calibrage de la forme paramétrique et son utilisation sont détaillées en annexe B-3 au présent mémoire.

Afin d'alléger les notations, nous omettons temporairement l'argument désignant la date à laquelle les Fonds Propres sont calculés. Il s'agit dans la suite des Fonds Propres en $t = 1$.

Supposons que nous disposons de réalisations de la variable Fonds Propres économiques où les actions et les taux sont stochastiques. Il peut s'agir d'une distribution de Fonds Propres exhaustive, obtenue à partir d'une méthodologie SdS, mais aussi de réalisations associées à des couples de facteurs de risques extrêmes, plus plausible opérationnellement.

Après avoir été calibrée sur base des réalisations évoquées ci-dessus, la forme paramétrique permet de disposer des Fonds Propres globaux :

$$FP^{param} = A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \varepsilon_{eq} + A_{2,0} \cdot \varepsilon_{eq}^2 + A_{0,1} \cdot \varepsilon_{int} + A_{0,2} \cdot \varepsilon_{int}^2 + A_{0,3} \cdot \varepsilon_{int}^3 + A_{1,1} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int} + A_{1,2} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2. \quad (4.9)$$

Il est également possible de disposer des variables Fonds Propres marginales³⁷, données ci-dessous :

$$FP_{eq}^{param} = A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \varepsilon_{eq} + A_{2,0} \cdot \varepsilon_{eq}^2, \quad (4.10)$$

$$FP_{int}^{param} = A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \mu_{eq} + A_{2,0} \cdot \mu_{eq}^2 + A_{0,1} \cdot \varepsilon_{int} + A_{0,2} \cdot \varepsilon_{int}^2 + A_{0,3} \cdot \varepsilon_{int}^3 + A_{1,1} \cdot \mu_{eq} \cdot \varepsilon_{int} + A_{1,2} \cdot \mu_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2, \quad (4.11)$$

où μ_{eq} représente le rendement historique de l'indice actions.

³⁶ Cette méthodologie est brièvement décrite dans la partie III-C-2

³⁷ Les Fonds Propres marginaux paramétriques actions (resp. taux d'intérêt) s'obtiennent en annulant l'aléa zéro-coupon (resp. en substituant le rendement historique μ_{eq} au facteur de risque ε_{eq}) dans la forme paramétrique introduite (expression (4.9)).

La composante Fonds Propres économiques au titre des effets croisés, correspondant aux Fonds Propres « résiduels », s'écrit :

$$FP_{prod}^{param} = -A_{0,0} - A_{1,0} \cdot \mu_{eq} - A_{2,0} \cdot \mu_{eq}^2 - A_{1,1} \cdot \mu_{eq} \cdot \varepsilon_{int} - A_{1,2} \cdot \mu_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2 + A_{1,1} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int} + A_{1,2} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2. \quad (4.12)$$

Nous avons alors :

$$X = X_{eq} + X_{int} + X_{prod},$$

relation autorisant l'allocation de capital entre les risques actions, taux d'intérêt et « actions x taux » par l'une des méthodes proposées, bien que le segment « actions x taux » n'ait pas de sens économique. Toutefois, cela nécessite d'aménager légèrement les définitions des variables de risque globale et marginales, comme spécifié ci-dessous :

$$X = A_{0,0} - FP^{param},$$

$$X_i = A_{0,0} - FP_i^{param}.$$

$A_{0,0}$ s'interprète comme la valeur des Fonds Propres centraux en $t = 1$, c'est-à-dire les Fonds Propres valorisés en $t = 1$, lorsque les facteurs de risque actions et taux ont été neutralisés sur la première période.

Connaissant la loi jointe des facteurs de risque actions et taux, la forme paramétrique permet de disposer, après simulation des facteurs de risques :

- d'une distribution exhaustive de Fonds Propres paramétriques globaux à partir de (4.9),
- d'une distribution marginale paramétrique actions en utilisant la relation (4.10),
- d'une distribution marginale paramétrique taux par le biais de la relation (4.11),
- et enfin d'une distribution marginale paramétrique « actions x taux » représentative des effets croisés entre facteurs de risque, en ayant recours à la relation (4.12).

A partir des distributions de Fonds Propres ainsi obtenues, nous pouvons déduire :

- Le capital paramétrique global C_{conso}^{param} ,
- Le capital au titre du risque actions, noté C_{eq}^{param} ,
- Le capital au titre du risque de taux d'intérêt, noté C_{int}^{param} ,
- Le capital au titre des effets croisés entre facteurs de risque actions et taux, noté C_{prod}^{param} .

Nous proposons d'allouer le capital global entre les risques actions, taux et « actions x taux » à partir des distributions de Fonds Propres issues de la forme paramétrique. Disposant de distributions pouvant être sommées pour l'obtention de distributions agrégées, toutes les méthodologies d'allocation sont envisageables. A titre d'exemple, dans le cadre d'une allocation par la méthode de Shapley, requérant le calcul de distributions agrégées deux à deux, la distribution de risque jointe (eq, prod) est obtenue en sommant les distributions marginales actions et « actions x taux ».

Nous présentons ci-dessous une illustration de cette mise en œuvre.

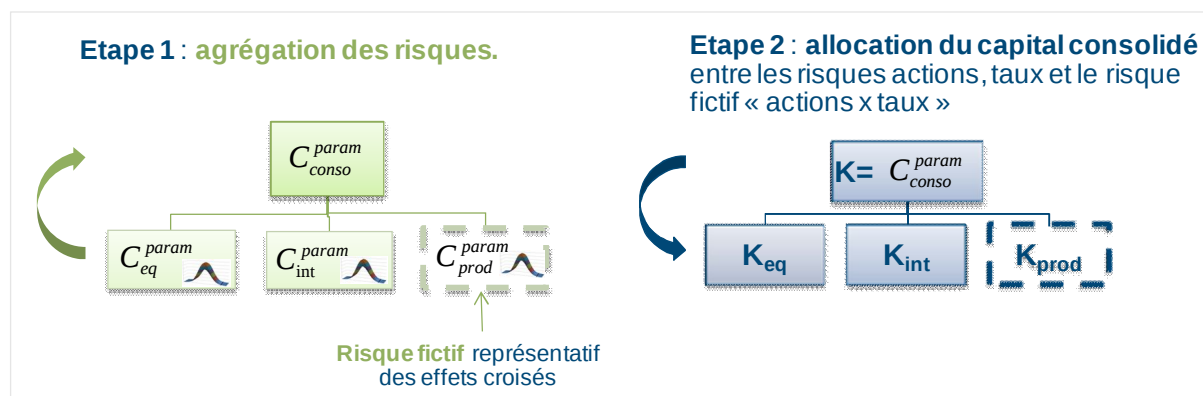


Figure 4.5 – Allocation de capital sur des risques, en présence d'effets croisés.

Le risque représentant les effets croisés étant fictif, il convient d'allouer dans une troisième étape le capital K_{prod} entre les risques « réels » actions et taux. Nous pouvons par exemple envisager une répartition proportionnelle de ce capital.

Une approche alternative consiste à calculer, à partir des capitaux marginaux actions et taux, le coefficient d'agrégation Entity Specific entre ces deux risques³⁸ puis à allouer le capital dans le cadre d'une configuration Formule Standard, configuration explicitée ci-dessous.³⁹

2. Allocation de capital et Modèle Interne Partiel

a) Configurations identifiées

Nous cherchons ici à ventiler le capital consolidé entre n segments : il peut s'agir de périmètres de passifs, de risques, de risques et périmètres de passifs simultanément etc...

Comme illustré ci-dessous dans le cas $n = 3$, nous distinguons trois types de configurations quant à la méthodologie retenue pour quantifier chacun des segments :

- La **configuration totalement simulatoire**,
- La **configuration mixte**, reposant sur un usage conjoint des méthodologies simulatoire et de type Formule Standard, dans le cadre d'un Modèle Interne Partiel,
- La **configuration Formule Standard**.

³⁸ Se référer à la partie III-E-4-a) pour le calcul de ces coefficients.

³⁹ Notons que cette méthodologie a un sens uniquement lorsque le coefficient d'agrégation Entity Specific est compris entre -1 et 1.

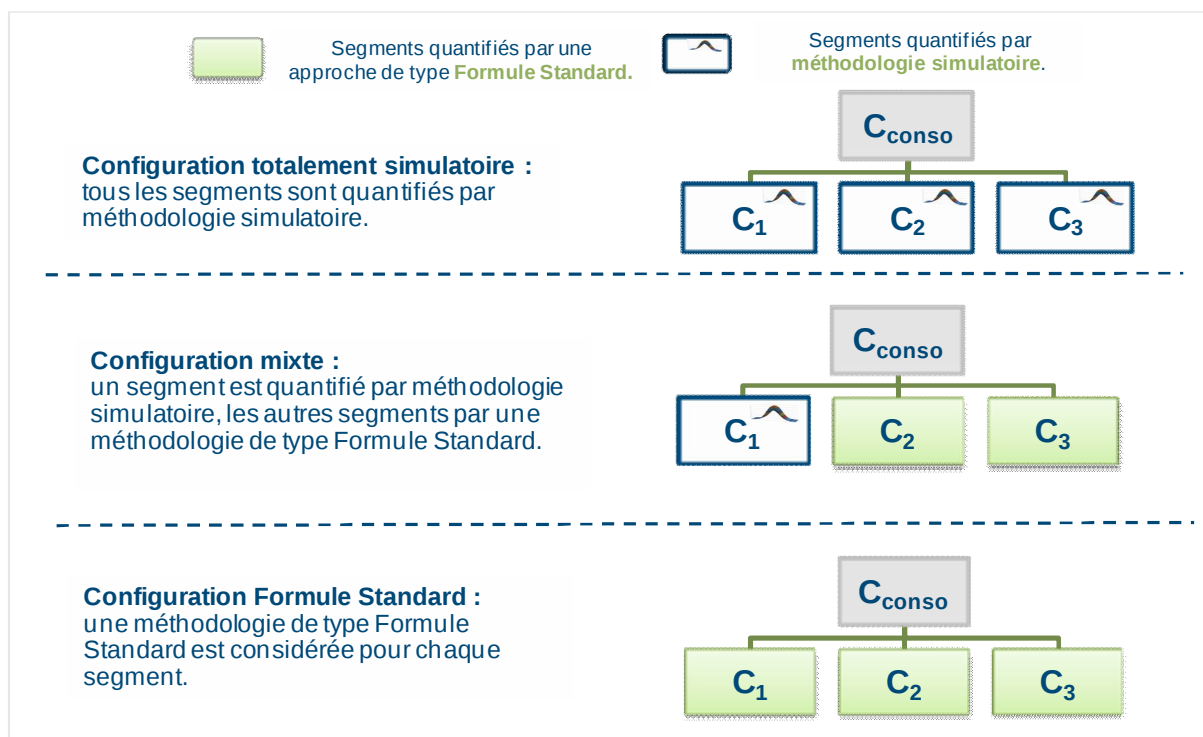


Figure 4.6 - Configurations identifiées.

Notons que le terme « Formule Standard » désigne tout type de segments pour lesquels nous ne disposons pas de distribution de Fonds Propres, autrement dit des segments quantifiés par une approche chocs/facteurs. Il peut s'agir de capitaux Formule Standard mais aussi de capitaux Entity Specific (chocs et/ou corrélations modifiés).

Selon la configuration, nous identifions ci-dessous les problématiques d'allocation rencontrées et les donnons les solutions envisagées.

Configuration totalement simulationnaire

Nous disposons d'une distribution de Fonds Propres économiques pour chacun des segments. En supposant l'additivité des variables de risque (hypothèse (4.5) vérifiée)⁴⁰, nous pouvons sommer les « distributions de risque » afin d'obtenir des distributions agrégées⁴¹.

A titre d'exemple, pensons à différents produits relatifs à un même ensemble de risques et quantifiés par une méthodologie simulationnaire. Il est dans ce cas possible d'agréger les produits en sommant les distributions.

⁴⁰ Problématique d'allocation sur des risques mise à part.

⁴¹ Les distributions de risque sont obtenues aisément à partir des distributions de Fonds Propres par le biais de la relation : $X_i = FP_i(0) - D(1)FP_i(1)$. Nous pouvons obtenir une distribution agrégée relative à l'ensemble des segments, pour le calcul du risque global, mais plus généralement des distributions relatives à tout sous-ensemble S de N , permettant ainsi l'application de la méthode de Shapley.

Considérons deux produits A et B exposés aux risques actions et baisse des taux d'intérêt. La distribution de risque agrégée au niveau produits relative aux risques actions et taux, notée $X_{(eq,int)}^{(A,B)}$, est obtenue par somme des distributions de risque individuelles des produits A et B , notées respectivement $X_{(eq,int)}^A$ et $X_{(eq,int)}^B$, soit :

$$X_{(eq,int)}^{(A,B)} = X_{(eq,int)}^A + X_{(eq,int)}^B.$$

Cette configuration permet donc d'envisager tout type de méthodologie et mesure de risque pour l'allocation du capital.

Configuration mixte

Nous disposons d'une distribution de Fonds Propres économiques pour certains segments. Les autres segments sont quantifiés par une méthodologie de type Formule Standard ; notons T_{FS} l'ensemble de ces segments.

A titre d'exemple, rappelons que lors de l'application d'une méthodologie d'agrégation intégrant des sous-modules de risque (MIP et Hors-MIP), nous disposons d'une distribution uniquement pour le sous-module de risque MIP.

L'application d'une méthodologie type Euler associée à une mesure de risque $TVaR$ pose alors des difficultés et il paraît nécessaire de « construire des distributions » pour les segments appartenant à T_{FS} . Le recours à la copule gaussienne permet ensuite de corrélérer les distributions.

La méthodologie proposée ci-dessous et illustrée par la figure 4.7 requiert la connaissance des corrélations entre segments. Selon le cas et la méthodologie d'agrégation envisagée, il peut s'agir :

- des corrélations Formule Standard ou Entity Specific, ou alors
- des corrélations obtenues à l'aide des méthodologies d'agrégation proposées par le CEIOPS (méthode Consistent Standard Formula Replication par exemple).⁴²

Nous proposons de mettre en place les étapes suivantes.

Etape 1 - Construction des distributions de Fonds Propres marginaux associées aux segments appartenant à T_{FS} . Pour ce faire, nous supposons que :

$$FP_i(1) \sim \mathcal{N}\left(FP_i(0), \frac{C_i}{D(1) \cdot q_{99,5\%}(\mathcal{N}(0,1))}\right), \forall i \in T_{FS}.$$

Etape 2 - Recours à la copule gaussienne afin de rendre dépendantes les distributions de Fonds Propres des différents segments. Soit S la taille des distributions de Fonds Propres. En répétant S fois les phases 1, 2 et 3 ci-dessous, associées à la simulation s , nous obtenons des distributions de Fonds Propres corrélées.

⁴² Lorsque les segments sont des périmètres de passifs, il est également envisageable d'estimer les corrélations entre variables, après réalisation de chocs conjoints sur les risques d'intérêt.

- **Phase 1** : simulation d'un vecteur gaussien Y_s de loi $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Psi)$ où Ψ désigne la matrice de corrélation entre les variables $FP_i(1)$, en rappelant que : $Y_s = CZ_s$, avec C la décomposition triangulaire inférieure de Cholesky qui vérifie : $CC' = \Psi$ et Z_s un vecteur gaussien issu d'une loi $\mathcal{N}(0, I)$. Nous désignons par $y_{i,s}$ les réalisations du vecteur Y_s .
- **Phase 2** : conversion des réalisations gaussiennes en réalisation uniformes comme suit : $u_{i,s} = \phi(y_{i,s}), \forall i \in N$.
- **Phase 3** : obtention du n-uplet $(FP_1^s(1), \dots, FP_n^s(1))$ par le biais de la relation : $(FP_1^s(1), \dots, FP_n^s(1)) = (F_1^{-1}(u_{1,s}), \dots, F_n^{-1}(u_{n,s}))$, où F_i^{-1} désigne l'inverse (empirique ou théorique) de la fonction de répartition du segment i .

Nous disposons à présent de distributions pour chacun des segments et pouvons appliquer les méthodologies d'allocation dans le cadre d'une configuration totalement simulatoire.

Notons que l'application de l'étape 2 ne modifie pas les lois marginales.

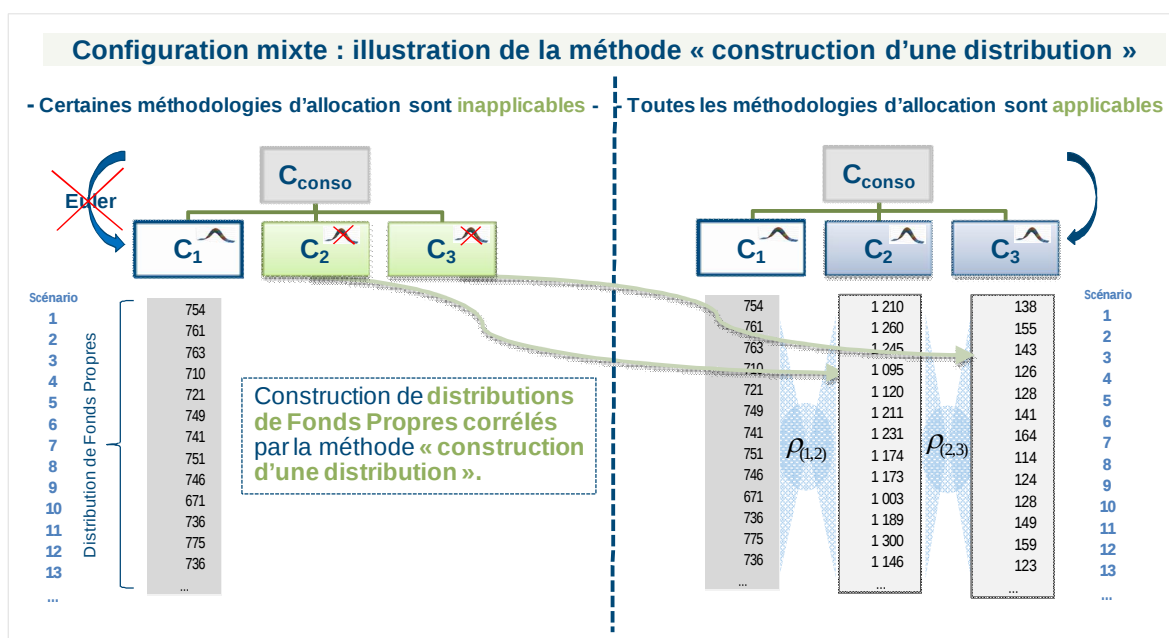


Figure 4.7 - Construction de distributions de Fonds Propres corrélés dans le cadre d'une configuration mixte.

Configuration Formule Standard

Nous disposons uniquement des capitaux stand-alone associés à chaque segment. Certaines méthodologies et mesure de risque sont donc inapplicables.

Comme suggéré à plusieurs reprises dans les documents du CEIOPS, nous nous plaçons dans un cadre gaussien en supposant que :

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma),$$

où pour chaque segment i , l'écart-type est donné par : $\frac{C_i}{q_{99,5\%}\{\mathcal{N}(0,1)\}}$.

Les corrélations permettant de caractériser la matrice de variance-covariance Σ correspondent aux coefficients de corrélation Formule Standard ou à des coefficients d'agrégation Entity Specific⁴³.

Nous disposons dans ce cadre de formules explicites pour le calcul des contributions au risque, quelles que soient la méthode et la mesure de risque envisagées.

3. Stabilité de l'allocation dans le temps

Le calcul des capitaux alloués est réalisé à un instant donné et reflète la consommation en capital des différents segments à cet instant. Pour des raisons de cohérence évidentes, il est souhaitable que l'allocation de capital satisfasse des propriétés de stabilité au cours du temps lorsque la compagnie désire conserver un « Business Model » stable sur une période.

Tout d'abord, il est nécessaire de fixer la maille sur laquelle la stabilité est souhaitée : dans le cadre d'une allocation entre périmètres de passifs et risques, il peut être souhaitable d'observer une stabilité au niveau de la granularité des passifs, mais aussi au niveau des risques ou encore sur la maille risque x périmètre de passifs.

Introduisons les notations suivantes :

- T l'année de calcul des capitaux alloués⁴⁴,
- N l'ensemble des segments sur lesquels la stabilité est souhaitée,
- M le nombre d'années sur lesquelles la stabilité est souhaitée,
- $^{brut}\omega_i^T$ le poids du capital post-allocation du segment i dans le capital global associé à l'année T , défini ensuite,
- $^{brut}K_i^T$ le capital associé au segment i , calculé l'année T à partir du couple (λ, ρ) ,
- ω_i^t le poids retenu l'année t , après prise en considération du critère de stabilité.

$^{brut}\omega_i^T$ est défini par :

$$^{brut}\omega_i^T = \frac{^{brut}K_i^T}{K}.$$

Nous proposons une méthode fondée sur la résolution d'un programme d'optimisation ; les poids obtenus tiennent compte de ceux fournis par la méthode d'allocation λ l'année T mais aussi des poids des années antérieures.

⁴³ Par exemple, supposons que nous disposons d'une distribution de Fonds Propres relative aux risques actions et taux d'intérêt. Il est dans ce cas nécessaire de calculer le coefficient d'agrégation Entity Specific entre les risques actions et taux afin de pouvoir allouer le capital entre ces deux risques (sauf si l'on considère la méthodologie proposée dans la section IV-C-1).

⁴⁴ On suppose que l'allocation du capital est réalisée chaque année.

Plus précisément, après avoir fixé les pondérations p_t telles que $\sum_{t=T-M}^T p_t = 1$, nous résolvons le programme d'optimisation (P₂) suivant :

$$(\omega_i^T)_i = \underset{(\omega_i^*)}{Argmin} \left\{ \sum_{t=T-M}^{T-1} \left[p_t \sum_{i \in N} (\omega_i^t - \omega_i^*)^2 \right] + p_T \sum_{i \in N} (brut \omega_i^T - \omega_i^*)^2 \right\}$$

sous contrainte :

$$\sum_{i \in N} \omega_i^* = 1 .$$

La contrainte permet de conserver la propriété « full allocation ».

L'introduction des pondérations p_t vise à accorder plus ou moins d'importance aux différentes années : il paraît judicieux de considérer des pondérations plus élevées pour les années récentes.

Nous notons K_i^T le capital effectivement alloué au segment i , après résolution préalable du programme (P₂).

La résolution du programme (P₂) nous fournit les éléments ω_i^T à partir desquels les capitaux retenus sont calculés comme spécifié ci-dessous :

$$K_i^T = \omega_i^T \cdot K .$$

V. Mise en œuvre des méthodes d'agrégation des risques et d'allocation de capital

Cette partie vise à mettre en œuvre les techniques d'agrégation des risques et d'allocation de capital présentées dans les parties précédentes, sur un exemple soulevant la plupart des problématiques évoquées.

Le cas pratique repose sur deux périmètres de passifs au sein d'une entité Vie ; ces périmètres sont exposés aux risques de Marché et de Souscription Vie.

Nous commençons par présenter brièvement les modules de risque Marché et Souscription Vie ainsi que les périmètres de passifs et donnons les modèles mathématiques considérés pour la projection de certains risques. Nous nous concentrons ensuite sur les étapes d'agrégation et d'allocation à mettre en œuvre pour chacun des périmètres de passifs, mais aussi au niveau de l'agrégat des périmètres de passifs.

A. Présentation des modules de risque Marché et Souscription Vie

Rappelons que la détermination du capital économique Formule Standard repose sur le calcul de besoins en capital élémentaires, puis à leur agrégation à l'aide de matrices de corrélation.

Nous décrivons ici les risques élémentaires des modules de risque Marché et Souscription Vie. Les différents calculs à réaliser pour l'obtention des capitaux (coefficients de chocs, méthodologie de calcul etc ...) sont précisés dans les Q/S5 (cf [15]).

1. Le module de risque Marché

Le module de risque Marché intègre les risques suivants :

- Le risque **actions** : il s'agit du risque à la baisse du niveau des actions.
- Le risque de **taux d'intérêt** : ce risque est engendré par la variation (à la hausse ou à la baisse) de la courbe des taux d'intérêt.
- Le risque **immobilier** : ce risque est dû à une chute des marchés immobiliers.
- Le risque de **devise** : ce risque est engendré par un changement du niveau des taux de change.
- Le risque de **spread** : ce risque provient d'un choc à la baisse de l'actif net suite à des variations de spread de crédit.
- Le risque de **concentration** : il s'agit du risque de défaut potentiellement aggravé du fait de la concentration des titres sur certains émetteurs.
- Le risque d'**illiquidité** : ce risque est engendré par la diminution de la prime d'illiquidité.

La Formule Standard propose d'agréger les besoins en capital élémentaires du module de risque Marché à partir de la matrice de corrélation suivante, en remarquant que les corrélations sont différentes selon le sens du risque de taux d'intérêt (à la baisse ou à la hausse des taux) :

Marché	Actions	Taux	Immobilier	Concentration	Illiquidité	Devise	Spread
Actions	100%	50%(down)/ 0%(up)	75%	0%	0%	25%	75%
Taux	50%(down)/ 0%(up)	100%	50%(down)/ 0%(up)	0%	0%	25%	50%(down)/ 0%(up)
Immobilier	75%	50%(down)/ 0%(up)	100%	0%	0%	25%	50%
Concentration	0%	0%	0%	100%	0%	0%	0%
Illiquidité	0%	0%	0%	0%	100%	0%	-50%
Devise	25%	25%	25%	0%	0%	100%	25%
Spread	75%	50%(down)/ 0%(up)	50%	0%	-50%	25%	100%

Figure 5.1 - Module de risque Marché : matrice de corrélation Formule Standard.

2. Le module de risque Souscription Vie

Le module de risque Souscription Vie regroupe l'ensemble des risques élémentaires provenant de la souscription des contrats d'assurance vie, c'est à dire :

- Le risque de **mortalité** : il s'agit du risque d'augmentation des provisions techniques dû à une augmentation des taux de mortalité.
- Le risque de **longévité** : il s'agit du risque d'augmentation des provisions techniques dû à une baisse des taux de mortalité.
- Le risque **invalidité** (noté ensuite Incap/Inval) : il s'agit du risque d'augmentation des provisions techniques dû à une détérioration de l'état de santé des assurés.
- Le risque de **rachats** : ce risque est engendré par la variation des taux de rachat, de résiliation et de réduction de couverture.
- Le risque de **frais** : ce risque est dû à la variation des frais de gestion des contrats d'assurance vie.
- Le risque de **révision** : ce risque provient de la révision du montant des rentes.
- Le risque **catastrophe** (noté ensuite Cat) : ce risque est engendré par les événements de mortalité extrêmes qui ne sont pas capturés dans le risque de mortalité. Il concerne uniquement les contrats exposés à la hausse des taux de mortalité.

Le tableau ci-dessous précise, dans le cadre d'une agrégation Formule Standard, la matrice de corrélation utilisée pour l'agrégation des besoins en capital élémentaires du module Souscription Vie.

Souscription Vie	Mortalité	Longévité	Incap/inval	Rachats	Frais	Révision	Cat
Mortalité	100%	-25%	25%	0%	25%	0%	25%
Longévité	-25%	100%	0%	25%	25%	25%	0%
Incap/inval	25%	0%	100%	0%	50%	0%	25%
Rachats	0%	25%	0%	100%	50%	0%	25%
Frais	25%	25%	50%	50%	100%	50%	25%
Révision	0%	25%	0%	0%	50%	100%	0%
Cat	25%	0%	25%	25%	25%	0%	100%

Figure 5.2 - Module de risque Souscription Vie : matrice de corrélation Formule Standard.

Le coefficient de corrélation inter-modulaire entre les modules Marché et Souscription Vie vaut **25%**.

B. Présentation des périmètres de passifs

Nous examinons dans la suite le cas d'une entité Vie ayant deux types d'activités :

- une activité d'**Epargne** : les contrats souscrits sont des contrats Epargne classiques, sans taux minimum garanti,
- une activité de **Prévoyance** : il s'agit de contrats temporaires décès⁴⁵.

Les méthodologies de calcul du capital économique diffèrent selon l'activité, comme précisé ci-dessous.

L'entité Vie utilise un **Modèle Interne Partiel** uniquement sur son activité d'Epargne. Ce modèle couvre les risques de **taux d'intérêt**, d'**actions** et de **mortalité/longévité**. Les risques de mortalité et longévité forment un unique risque pour le périmètre Epargne. Nous avons en effet choisi une modélisation intégrant un unique facteur de risque⁴⁶ ; les risques de mortalité et longévité reposent donc dans notre cas sur un même aléa. Les autres risques de l'Epargne ainsi que l'ensemble des risques de la Prévoyance sont calculés en Formule Standard, comme illustré ci-dessous.

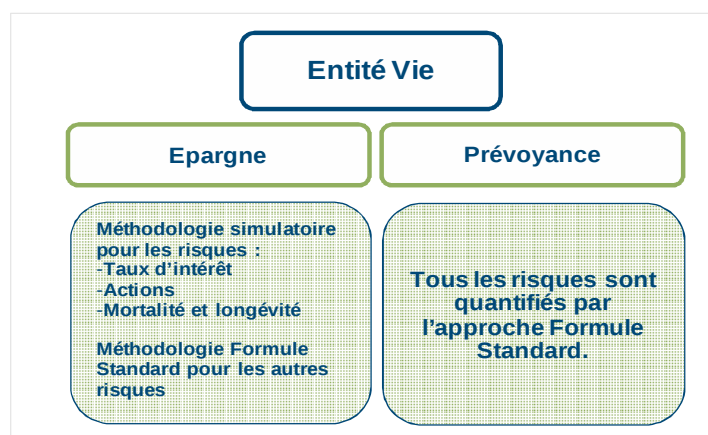


Figure 5.3 - Illustration du cas pratique.

Nous cherchons dans ce cadre à réaliser les calculs suivants :

- Calcul puis allocation du capital consolidé de l'activité Epargne,
- Calcul puis allocation du capital consolidé de l'activité Prévoyance,
- Calcul puis allocation du capital de l'entité Vie au niveau consolidé (Epargne, Prévoyance).

⁴⁵ Ce type de contrat assure, en cas de décès de l'assuré, le versement d'un capital décès aux ayants droits du contrat.

⁴⁶ Notons qu'il serait envisageable de considérer, en plus d'une composante nationale (mise en évidence par le modèle de Lee-Carter contraint), une composante idiosyncratique : le modèle de mortalité reposerait dans ce cas sur plusieurs aléas.

Dans un premier temps, il convient de donner quelques éléments sur les modèles mathématiques utilisés pour le périmètre Epargne, d'une part pour projeter les risques actions, taux d'intérêt et mortalité sur la première période en univers monde-réel, d'autre part pour valoriser les postes du bilan en $t = 1$, en univers risque-neutre.

C. Modélisation des risques actions, taux et mortalité

Nous notons dans cette partie P la probabilité historique et Q la probabilité risque neutre.

1. Modélisation de l'indice actions

Nous utilisons un mouvement brownien géométrique pour modéliser l'indice actions aussi bien en univers monde-réel qu'en univers risque-neutre.

Introduisons les notations suivantes :

- σ_E^{hist} la volatilité historique,
- σ_E^{imp} la volatilité implicite,
- r_t le taux sans risque instantané,
- q^E la prime de risque,
- $(B_t^E)_t$ un mouvement brownien standard sous P,
- $(\tilde{B}_t^E)_t$ un mouvement brownien standard sous Q.

La dynamique de l'indice actions en univers monde-réel est donnée ci-dessous.

Modèle actions – univers monde-réel (1^{ère} année de projection)

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r_t + q^E)dt + \sigma_E^{hist} dB_t^E.$$

En univers risque-neutre, l'indice actions est modélisé comme suit :

Modèle actions – univers risque-neutre ($t > 1$)

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_E^{imp} d\tilde{B}_t^E.$$

2. Modélisation des taux d'intérêt

Nous spécifions les modèles de taux utilisés afin de projeter les taux d'intérêt nominaux en univers monde-réel pendant la première période et en univers risque-neutre pour les horizons $t > 1$.

a) Diffusion des taux d'intérêt en univers monde-réel

Notons $P(t, T)$ le prix vu de la date t d'un zéro coupon de date de maturité T .

Les taux d'intérêt sont modélisés à partir du **modèle Heath-Jarrow-Morton (HJM)** à un facteur et volatilité linéaire. L'expression de la diffusion des prix zéros-coupons sous P est la suivante :

Modèle de taux d'intérêt – univers monde-réel (1^{ère} année de projection)

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = (r(t) - q(t) \cdot \sigma^{hist}(t, T)) dt + \sigma^{hist}(t, T) dB_t^I.$$

Où :

- $(B_t^I)_t$ est un mouvement brownien standard sous P .
- Le processus q est la prime de risque et est supposé borné,
- La volatilité historique $\sigma^{hist}(t, T)$ s'exprime comme suit : $\sigma^{hist}(t, T) = \sigma^{hist} \cdot (T - t)$.

Le lecteur intéressé par une présentation plus détaillée du modèle HJM pourra se référer à l'ouvrage [19].

b) Diffusion des taux d'intérêt en univers risque-neutre

En univers risque-neutre, les taux d'intérêt instantanés sont modélisés grâce au **modèle de Hull et White** à un facteur.

La diffusion prend la forme suivante, sous Q :

Modèle de taux d'intérêt – univers risque-neutre ($t > 1$)

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma^{imp} d\tilde{B}_t^I,$$

où

- le coefficient de retour à la moyenne a et la volatilité implicite σ^{imp} sont des constantes à estimer,
- $(\tilde{B}_t^I)_t$ est un mouvement brownien standard sous Q ,
- la fonction $\theta(t)$ est calculée à partir de la structure par termes des taux d'intérêt à la date de calcul.

Une présentation détaillée de ce modèle est faite dans l'ouvrage [18].

Corrélations entre variables économiques

Les générateurs de scénarios économiques permettent de corréliser les différentes variables économiques par le biais des mouvements browniens intervenant dans les équations de diffusion.

Nous tenons compte ici des corrélations suivantes :

- la corrélation entre les risques actions et taux d'intérêt en univers monde-réel, notée $\rho_{E,I}^{RW}$: celle-ci correspond à la corrélation entre les risques actions et taux proposée par la Formule Standard.
- la corrélation entre les risques actions et taux d'intérêt en univers risque-neutre, notée $\rho_{E,I}^{RN}$: cette corrélation est calibrée à partir d'historiques de données, conformément aux guidances MCEV⁴⁷.

Ces corrélations vérifient :

- $dB_t^I \cdot dB_t^E = \rho_{E,I}^{RW} dt.$
- $d\tilde{B}_t^I \cdot d\tilde{B}_t^E = \rho_{E,I}^{RN} dt.$

Remarque : les modèles considérés pour valoriser les postes du bilan du périmètre Prévoyance, en $t = 0$ sont similaires aux modèles risque-neutre employés pour le périmètre Epargne.

3. Modélisation des taux de mortalité

Le modèle de Lee-Carter est couramment utilisé pour la modélisation des taux de mortalité. Néanmoins, l'une de ses principales limites est qu'il ne permet pas de projeter des taux de mortalité suffisamment volatiles pour mener une analyse conservatrice du risque de mortalité relativement proche des exigences de la réglementation Solvabilité II.

Le **modèle de Lee-Carter contraint** permet d'améliorer le modèle de Lee-Carter par l'ajout d'une contrainte supplémentaire réconciliant les volatilités historiques et les « volatilités modèle » des taux d'évolution de la mortalité.⁴⁸

Nous donnons ci-dessous la dynamique des taux de mortalité instantanés sans s'attarder sur le processus de calibrage du modèle.

Modélisation des taux de mortalité instantanés

$$\begin{cases} \ln\{\mu(x, t)\} = \alpha_x + \beta_x k_t, \\ k_{t+1} = k_t + c + \sigma \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1). \end{cases}$$

Où :

- $\mu(x, t)$ désigne le taux de mortalité instantané à l'âge x et l'année t ,
- les éléments α_x , β_x , k_t , c et σ sont des paramètres à estimer.

⁴⁷ Market Consistent Embedded Value.

⁴⁸ Cette approche a été développée par la cellule Recherche et Développement du cabinet Milliman France et fera l'objet de publications ultérieures.

σ est calibré de telle sorte à reproduire l'écart-type des taux d'évolution de la mortalité historiques. La méthode d'estimation des autres paramètres est similaire à celle du modèle Lee Carter « standard », ce qui permet de conserver l'espérance des logarithmes des taux de mortalité instantanés donnée par le modèle de Lee Carter « standard ».

D. Présentation des données

Calcul du capital agrégé (spread,illiquidité) et extraction de corrélations

Nous considérons dans la suite que les risques spread et illiquidité forment un unique risque⁴⁹. Ces risques sont agrégés au préalable à partir du coefficient de corrélation Formule Standard. Le risque (spread,illiquidité) est ensuite agrégé avec les autres risques du module Marché à partir des corrélations induites par un calcul Formule Standard, en utilisant une méthode du type Consistent Standard Formula Replication. Pour le périmètre Epargne, certaines corrélations Formule Standard sont alors modifiées, comme spécifié ci-dessous.

Corrélation induite entre le risque actions et le risque (spread,illiquidité)	81%
Corrélation induite entre le risque immobilier et le risque (spread,illiquidité)	54%

Figure 5.4 - Extraction des corrélations entre le risque (spread,illiquidité) et les risques actions et immobilier.

Les autres corrélations permettant d'agréger les risques de Marché du périmètre Epargne ne sont pas modifiées.

Le capital au titre du risque illiquidité du périmètre Prévoyance étant initialement nul, les corrélations Formule Standard restent identiques pour ce périmètre.

Afin d'agréger les risques de Marché des périmètres Epargne et Prévoyance, nous considérons par prudence le maximum entre les corrélations des deux périmètres.

⁴⁹ En effet, afin d'interpréter les capitaux alloués, il paraît adéquat de regrouper ces deux risques. De plus, le capital illiquidité est très faible par rapport aux autres capitaux et donc très sujet à des variations au niveau du capital alloué.

Présentation des données

Les tableaux ci-dessous présentent les données utilisées dans la suite :

Périmètre Prévoyance							
Fonds Propres en t=0	149,45						
Module de risque Marché							
Risque	Actions	Taux up	Taux down	Immobilier	Concentration	Devise	Spread/illiquidité
Capitaux marginaux	34,27	24,90	0	9,04	0	0	11,09
Module de risque Souscription Vie							
Risque	Mortalité	Longévité	Incap/invalid	Rachats	Frais	Révision	Catastrophe
Capitaux marginaux	9,69	0	0	18,57	2,92	0	311,91

Figure 5.5 - Données relatives au périmètre de passifs Prévoyance (en M€).

Périmètre Epargne

Fonds Propres en t=0

63 700

Module de risque Marché

Risque	Actions	Taux up	Taux down	Immobilier	Concentration	Devise	Spread/illiquidité
Capitaux marginaux	14 143	1 749	0	3 575	0	0	9 137
Méthodologie considérée	MIP	MIP		FS	FS	FS	FS

Risque	Actions	Taux up	Taux down
Capitaux marginaux FS associés	15 367	2 369	0

Module de risque Souscription Vie

Risque	Mortalité	Longévité	Incap/invalid	Rachats	Frais	Révision	Catastrophe
Capitaux marginaux	1 371	0	0	9 539	411	0	0
Méthodologie considérée	MIP	MIP	FS	FS	FS	FS	FS

Risque	Mortalité	Longévité
Capitaux marginaux FS associés	920	0

Résultats du modèle interne

Capital MIP Marché	14 222
Capital MIP Souscription Vie	1 371
Capital MIP global	14 239

Figure 5.6 - Données relatives au périmètre de passifs Epargne (en M€).

Obtention de la distribution de Fonds Propres économiques (actions,taux,mortalité/longévité) du périmètre Epargne

Nous donnons le principe général de calcul de la distribution de Fonds Propres économiques relative aux risques actions, taux d'intérêt et mortalité/longévité du périmètre Epargne.

Dans un premier temps, des tables de scénarios de mortalité sont générées à partir du modèle de Lee-Carter contraint pour différentes valeurs de l'innovation. Pour chaque table de scénarios de mortalité⁵⁰, nous associons ensuite une table de scénarios économiques, ce qui permet de dynamiser, à l'aide d'un modèle ALM, les trois risques sur la première période, et ainsi obtenir une distribution de Fonds Propres jointe (actions, taux d'intérêt, mortalité/longévité).

Le calibrage d'une forme paramétrique polynomiale (comme présenté en annexe B-3) permet de disposer des deux distributions de Fonds Propres distinctes (actions,taux) et mortalité/longévité⁵¹ et ainsi déterminer les éléments suivants :

- le capital MIP Marché, calculé à partir de la distribution jointe (actions,taux),
- le capital MIP Souscription Vie, calculé à partir de la distribution mortalité/longévité.

Par soucis de clarté, nous adaptons légèrement certaines notations présentées dans les parties précédentes, en désignant par :

- C_i^j le capital avant allocation du risque (ou agrégat de risques, ou sous-module de risque, ou module de risque) i et du périmètre de passifs (ou agrégat de périmètres de passifs) j ,
- K_i^j le capital post-allocation du risque (ou agrégat de risques, ou sous-module de risque, ou module de risque) i et du périmètre de passifs (ou agrégat de périmètres de passifs) j .
- $\rho_{i,j}^{FS,k}$ (resp. $\rho_{i,j}^{ES,k}$) la corrélation Formule Standard (resp. Entity Specific) entre les risques (ou sous-modules de risque, ou modules de risque) i et j du périmètre de passifs k .

E. Agrégation des risques

1. Agrégation des risques du périmètre Prévoyance

Il s'agit de mener les deux étapes d'agrégation intra-modulaire puis inter-modulaire à partir des coefficients de corrélation proposés par la Formule Standard.

Les résultats obtenus à l'issue de l'étape d'agrégation sont données dans le tableau ci-dessous.

⁵⁰ Chaque table de mortalité contient les taux de mortalité par âge et par année de projection.

⁵¹ L'aléa relatif au risque de mortalité peut être résumé à l'aide d'un unique facteur de risque, comme spécifié dans la forme du modèle de Lee-Carter. Ainsi, en reprenant la forme paramétrique (6.8), les Fonds Propres économiques en date 1 s'écrivent en fonction des facteurs de risque actions, taux et mortalité comme suit :

$$f(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{int}, \varepsilon_{mort}) = \sum_{i_{eq}+i_{int}+i_{mort} \leq d} A_{i_{eq}, i_{int}, i_{mort}} \varepsilon_{eq}^{i_{eq}} \varepsilon_{int}^{i_{int}} \varepsilon_{mort}^{i_{mort}}.$$

Périmètre Prévoyance	Agrégation des risques Formule Standard
Capital Marché : C_{Mkt}^{prev}	55,98
Capital Souscription Vie : C_{Life}^{prev}	320,42
Capital Prévoyance : $C_{(Mkt,Life)}^{prev}$	338,78

Figure 5.7 - Résultats de l'étape d'agrégation des risques du périmètre Prévoyance (en M€).

2. Agrégation des risques du périmètre Epargne

Afin d'agréger les risques du périmètre Epargne, nous employons la méthodologie « Consistent Standard Formula Replication étendue » présentée dans la partie III-E-3. Cette méthodologie est appliquée aux modules de risque Marché et Souscription Vie.

Rappelons que les risques élémentaires d'un même module sont regroupés dans des sous-modules MIP et Hors-MIP selon la méthodologie de calcul du capital économique qui leur est associée.

La première étape d'agrégation permet le calcul des capitaux au titre des sous-modules MIP et Hors-MIP de Marché et Vie. L'étape suivante consiste à agréger, au sein d'un même module, les sous-modules MIP et Hors-MIP, et ainsi obtenir les capitaux agrégés des modules Marché et Souscription Vie. Ceux-ci sont ensuite agrégés à partir du coefficient de corrélation inter-modulaire Entity Specific obtenu à l'aide d'une approche de dé-modularisation puis re-modularisation de l'architecture des risques intégrant des sous-modules.

Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus :

Périmètre Epargne - méthode Consistent Standard Formula Replication étendue	
Capital sous-module MIP de Marché : C_{MktMIP}^{ep}	14 222
Capital sous-module Hors-MIP de Marché : $C_{MktHorsMIP}^{ep}$	11 472
Capital Marché : C_{Mkt}^{ep}	24 853
Capital sous-module MIP de Souscription Vie : $C_{LifeMIP}^{ep}$	1 371
Capital sous-module Hors-MIP de Souscription Vie : $C_{LifeHorsMIP}^{ep}$	9 751
Capital Souscription Vie : C_{Life}^{ep}	9 861
Capital Epargne : $C_{(Mkt,Life)}^{ep}$	28 890
Corrélation Entity Specific entre le sous-module MIP et le sous module Hors-MIP de Marché : $\rho_{MktMIP, MktHorsMIP}^{ES, ep}$	86,97%
Corrélation Entity Specific entre le sous-module MIP et le sous module Hors-MIP de Souscription Vie : $\rho_{LifeMIP, LifeHorsMIP}^{ES, ep}$	1,05%
Coefficient d'agrégation inter-modulaire Entity Specific : $\rho_{Mkt, Life}^{ES, ep}$	24,42% ⁵²

Figure 5.8 - Résultats de l'étape d'agrégation des risques du périmètre Epargne – méthode CSFR (en M€).

⁵² Ce coefficient d'agrégation est déterminé en phase 2.2 de l'étape 2 de la méthode CSFR étendue (cf partie III-E-3-b))

Nous présentons également les résultats obtenus à l'aide de la méthodologie d'agrégation alternative (Figure 5.9) ; ces résultats sont très proches de ceux issus de la méthode Consistent Standard Formula Replication. L'écart relatif entre les capitaux Epargne est en effet inférieur à **0,11%**, ce qui conforte l'adéquation de la méthode alternative, au vue des exigences réglementaires.

Périmètre Epargne - méthode alternative	
Capital Marché : C_{Mkt}^{ep}	24 889
Capital Souscription Vie : C_{Life}^{ep}	9 861
Capital Epargne : $C_{(Mkt,Life)}^{ep}$	28 921
Corrélation Entity Specific entre actions et taux : $\rho_{eq,int}^{ES,ep}$	-1,69%
Coefficient d'agrégation inter-modulaire Entity Specific : $\rho_{Mkt,Life}^{ES,ep}$	24,39%

Figure 5.9 - Résultats de l'étape d'agrégation des risques du périmètre Epargne – méthode alternative (en M€).

3. Agrégation des risques des périmètres Epargne et Prévoyance

L'agrégation des risques au niveau consolidé (Epargne, Prévoyance) est réalisée à partir de la méthodologie d'agrégation alternative présentée dans la partie III-E-4. La dé-modularisation de l'architecture standard puis la re-modularisation de l'architecture râteau sont appliquées au périmètre Epargne.

Après consolidation des capitaux, à risque fixé, (par somme des capitaux élémentaires des périmètres Epargne et Prévoyance), l'agrégation des risques est réalisée prudemment au sein de chaque module, en considérant pour chaque risque le maximum entre le coefficient Formule Standard et le coefficient d'agrégation du périmètre Epargne (Formule Standard ou Entity Specific selon les risques).

De la même manière, le coefficient retenu pour agréger les capitaux des modules de risque Marché et Souscription Vie est conservateur, celui-ci étant le maximum entre le coefficient proposé par la Formule Standard et le coefficient Entity Specific calculé sur le périmètre Epargne.

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Périmètres Epargne et Prévoyance - méthode alternative	
Capital Marché Consolidé : $C_{Mkt}^{(ep,prev)}$	24 958
Capital Souscription Vie Consolidé : $C_{Life}^{(ep,prev)}$	9 976
Capital (Epargne,Prévoyance) : $C_{(Mkt,Life)}^{(ep,prev)}$	29 102
Corrélation Entity Specific entre actions et taux : $\rho_{eq,int}^{ES} = \max(\rho_{eq,int}^{ES,ep}, \rho_{eq,int}^{FS,prev})$	0%
Coefficient d'agrégation intermodulaire Entity Specific : $\rho_{Mkt,Life}^{M,ES} = \max(\rho_{Mkt,Life}^{ES,ep}, \rho_{Mkt,Life}^{FS,prev})$	25%

Figure 5.10 - Résultats de l'étape d'agrégation des risques au niveau consolidé (Epargne,Prévoyance) (en M€).

F. Allocation du capital

Nous considérons la méthode d'Euler et la mesure de risque $TVaR$ pour l'allocation des capitaux consolidés obtenus lors de la phase d'agrégation des risques. Comme déjà évoqué, cette approche respecte certaines propriétés de cohérence et paraît donc adéquate.

Rappelons que chaque étape d'allocation requiert d'allouer, dans une première étape, le risque global relatif à l'agrégat de segments sur lesquels l'allocation est réalisée. Le recours aux clés d'allocation permet ensuite d'allouer le capital d'intérêt. Seuls les capitaux alloués seront stipulés.

Pour chaque périmètre de passifs, nous donnons dans les rubriques suivantes les étapes à mener afin d'allouer le capital sur la maille risque. Nous cherchons ensuite à allouer le capital consolidé (Epargne, Prévoyance), sur la maille « périmètre de passifs x risque ».

Nous rappelons ci-dessous les formules utiles pour l'allocation du capital à partir d'une approche Euler- $TVaR$:

Méthode d'allocation « Euler- $TVaR$ »	Formule générale	Cas gaussien
Calcul des contributions au risque	$TVaR^{Euler}(X_i/X) = E[X_i X > VaR_\alpha(X)]$	$TVaR^{Euler}(X_i/X) = \frac{1}{1-\alpha} cov(X_i, X) \cdot f_X(VaR_\alpha(X))$

Figure 5.11 - Formule des contributions au risque dans le cadre d'une allocation « Euler- $TVaR$ ».

1. Allocation du capital consolidé Prévoyance

Rappelons que l'ensemble des risques des modules Marché et Souscription Vie ont été quantifiés et agrégés par la Formule Standard.

Il s'agit d'une configuration Formule Standard, aussi bien pour l'allocation du capital entre modules (Etape 1) que pour l'allocation du capital au sein des modules (Etape 2). En se plaçant dans le cadre d'une configuration Formule Standard (cf partie IV-C-2), nous disposons de formules explicites pour le calcul du risque global et son allocation par la méthode d'Euler- $TVaR$, comme spécifié dans le tableau 5.11.

L'allocation du capital consolidé est réalisée en deux étapes :

- **Etape 1** - Allocation du capital consolidé Prévoyance entre les segments « risque de Marché » et « risque de Souscription Vie » à partir du coefficient de corrélation linéaire (25%) et des capitaux consolidés Marché et Souscription Vie.
- **Etape 2** - Allocation du capital Marché issu de l'étape 1 au sein du module de risque Marché, à partir des corrélations Formule Standard entre risques élémentaires de ce module, et allocation du capital Souscription Vie issu de l'étape 1 par une méthode analogue.

Les résultats obtenus sont donnés ci-dessous :

Périmètre Prévoyance - Capitaux alloués sur la maille risque - méthode d'Euler - mesure de risque TVaR							
Actions	Taux	Immobilier	Concentration	Devise	Spread/ illiquidité	Capital alloué au module de risque Marché : K_{Mkt}^{prev}	
12,14	4,45	2,61	0	0	3,29	22,49	
Mortalité	Longévité	Incap/invalid	Rachats	Frais	Révision	Catastrophe	Capital alloué au module de risque Souscription Vie : K_{Life}^{prev}
2,64	0	0	5,61	0,83	0	307,21	316,29

Figure 5.12 - Résultats issus de l'allocation du capital du périmètre Prévoyance (en M€).

2. Allocation du capital consolidé Epargne

Le capital Epargne est alloué en trois étapes, dans le cadre d'une architecture intégrant des sous-modules de risque :

- **Etape 1** - Allocation du capital consolidé Epargne entre les segments « risque de Marché » et « risque de Souscription Vie » - nous nous plaçons dans le cadre d'une **configuration Formule Standard** et considérons la corrélation Entity Specific entre les deux modules (24,42%).
- **Etape 2** - Allocation du capital Marché issu de l'étape 1 entre les sous-modules MIP et Hors-MIP, dans le cadre d'une **configuration mixte**. Nous disposons de la corrélation entre ces sous-modules et pouvons construire une distribution pour le sous-module Hors-MIP, puis corrélérer les distributions à l'aide d'une copule. La même démarche est menée pour l'allocation du capital Souscription Vie entre sous-modules.
- **Etape 3** - Allocation au sein des différents sous-modules de risque dans le cadre d'une **configuration Formule Standard**. Notons que l'allocation du capital du sous-module MIP de Marché requiert le calcul du coefficient d'agrégation Entity Specific entre les risques actions et taux d'intérêt.

Les résultats associés à chacune des étapes sont donnés ci-dessous :

Périmètres Epargne - Capitaux alloués sur la maille risque - méthode d'Euler - mesure de risque TVaR					
Capital alloué au module de risque Marché : K_{Mkt}^{ep}					
23 452					
Capital alloué au sous-module MIP de Marché : K_{MktMIP}^{ep}		Capital alloué au sous-module Hors-MIP de Marché : $K_{MktHorsMIP}^{ep}$			
14 642		8 810			
Actions	Taux	Immobilier	Concentration	Devise	Spread/illiquidité
14 451	191	2 039	0	0	6 772
Capital alloué au module de risque Souscription Vie : K_{Life}^{ep}					
5 437					
Capital alloué au sous-module MIP de Souscription Vie : $K_{LifeMIP}^{ep}$		Capital alloué au sous-module Hors-MIP de Souscription Vie : $K_{LifeHorsMIP}^{ep}$			
1 908		3 529			
Mortalité/Longévité	Incap/invalid	Rachats	Frais	Révision	Catastrophe
1 908	0	3 450	79	0	0

Figure 5.13 - Résultats issus de l'allocation du capital Epargne sur la maille risque (en M€).

3. Allocation du capital consolidé (Epargne,Prévoyance) et calcul d'indicateurs de rentabilité

L'allocation du capital consolidé (Epargne,Prévoyance) est réalisée en trois étapes, selon les mêmes étapes que celles retenues pour agréger les risques :

- **Etape 1** - Allocation du capital consolidé entre les segments « risque de Marché consolidé » et « risque de Souscription Vie consolidé » dans le cadre d'une **configuration Formule Standard**, en rappelant que le coefficient de corrélation considéré est Entity Specific. Cependant, notons que celui-ci est égal à 25%.
- **Etape 2** - Allocation au sein du module de risque Marché consolidé en considérant la matrice de corrélation Entity Specific⁵³ et allocation au sein du module Souscription Vie consolidé à partir des corrélations Formule Standard.
Nous disposons, à l'issue de cette étape des capitaux élémentaires consolidés (actions, mortalité...).

⁵³ En réalité, la corrélation actions/taux considérée vaut 0%, donc il s'agit de la matrice de corrélation Formule Standard.

- **Etape 3** - Pour chaque capital risque consolidé, nous proposons de recourir à des clés simples pour l'allocation du capital entre les périmètres de passifs Epargne et Prévoyance. Dans cet objectif, pour chaque risque élémentaire R des modules de risque Marché et Souscription Vie, nous effectuons les calculs suivants :

$$K_R^{ep} = \frac{C_R^{ep}}{C_R^{ep} + C_R^{prev}} \times C_R^{(ep,prev)},$$

$$K_R^{prev} = \frac{C_R^{prev}}{C_R^{ep} + C_R^{prev}} \times C_R^{(ep,prev)}.$$

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus.

Périmètres Epargne et Prévoyance - Capitaux alloués sur la maille périmètre x risque - méthode d'Euler - mesure de risque TVaR							
	Actions	Taux	Immobilier	Concentration	Devise	Spread/illiquidité	Capital alloué au module de risque Marché consolidé
Epargne	12 984	117	2 590	0	0	7 802	23 543
Prévoyance	31,46	1,67	6,55	0	0	9,47	
	Mortalité/Longévité	Incap/inval	Rachats	Frais	Révision	Catastrophe	Capital alloué au module de risque Souscription Vie consolidé
Epargne	120	0	5 244	129	0	0	5 559
Prévoyance	0,85	0	10,21	0,92	0	54,87	

Figure 5.14 - Résultats issus de l'allocation du capital consolidé (Epargne,Prévoyance) sur la maille périmètre x risque (en M€).

Nous pouvons nous intéresser au calcul du RORAC des périmètres Epargne et Prévoyance afin de comprendre l'enjeu d'une démarche d'allocation de capital. L'ensemble des définitions relatives à cet indicateur et à la propriété RORAC compatible sont présentées dans la partie IV-A-4.

Rappelons que le RORAC post-allocation rapporte la valeur actualisée des résultats futurs à la valeur actuelle des « risques alloués ». Cet indicateur s'interprète donc, d'une certaine manière, comme un taux de rendement moyen du capital défini à partir de la mesure de risque ρ , sur une période donnée.

Les résultats obtenus sont les suivants :

	Indicateur de rentabilité : RORAC
Périmètre Epargne	17%
Périmètre Prévoyance	9%

Figure 5.15 - Calcul des RORAC des périmètres Epargne et Prévoyance.

La méthode d'Euler associée à une mesure de risque *TVaR* étant *RORAC* compatible, les résultats obtenus peuvent être analysés de la façon suivante : n'étant pas à l'équilibre ($17\% > 9\%$), la rentabilité globale de l'entité Vie peut être améliorée en développant l'activité Epargne. Néanmoins, d'autres critères entrent en jeu pour la prise de décision stratégique. Cet indicateur reste tout de même robuste.

Conclusion

Tout d'abord, nous avons apporté dans ce mémoire des solutions aux problématiques d'agrégation des risques soulevées par les modèles internes.

D'une part, nous avons proposé une méthodologie généralisant la technique « Consistent Standard Formula Replication », mentionnée dans le Consultation Paper n° 65 du CEIOPS, et permettant d'articuler les résultats du modèle et ceux issus d'une approche de type Formule Standard. La méthodologie présentée permet en effet d'étendre l'approche du CEIOPS au cas d'un modèle interne projetant des risques appartenant à des modules différents, ceci pour un unique périmètre de passifs.

Par ailleurs, nous avons proposé une méthodologie d'agrégation alternative rendant possible l'agrégation des risques de plusieurs périmètres de passifs utilisant des méthodologies différentes, lorsque le modèle interne projette des risques de modules distincts.

L'ensemble des travaux menés s'appuient essentiellement sur l'outil mathématique de dé-modularisation/re-modularisation d'une architecture des risques à plusieurs niveaux, et également sur le calcul de coefficients d'agrégation Entity Specific, implicites au modèle interne.

De plus, nous avons mené une analyse théorique détaillée des méthodes d'allocation de capital présentées dans la littérature. Les travaux réalisés ont permis d'identifier une méthode paraissant particulièrement adaptée : il s'agit de la méthode d'Euler, associée à la mesure de risque $TVaR$. La méthode d'Euler est en effet cohérente, et vérifie donc, en particulier, la propriété de RORAC compatibilité. Allouer le capital à partir de cette méthode rend ainsi possible la construction d'indicateurs de rentabilité analysables en termes de profitabilité, ce qui permet de piloter l'activité d'assurance. Nous avons démontré les formules explicites de calcul des contributions au risque associées à cette méthode, et également dérivé des formules d'allocation dans un cadre gaussien, hypothèse fréquemment spécifiée dans les documents du CEIOPS.

Par ailleurs, comme pour l'agrégation des risques, l'allocation de capital sous Solvabilité II pose certaines difficultés telles que l'allocation de capital sur des risques, mais aussi l'allocation de capital sur des segments de risque (risques ou périmètres de passifs) pour lesquels nous ne disposons pas de distributions de Fonds Propres économiques.

Enfin, pour des raisons de cohérences évidentes, il est nécessaire de conserver des capitaux alloués stables au fil du temps.

Nous avons donc proposé dans ce mémoire des méthodologies adaptées répondant aux différentes problématiques évoquées ci-dessus.

Ainsi, l'ensemble des méthodologies fournies dans ce mémoire, permettent, dans le cadre du dispositif Solvabilité II, l'agrégation des risques et l'allocation de capital quelle que soit l'approche retenue pour le calcul du capital économique : Formule Standard, Formule Standard Entity Specific ou Modèle Interne Partiel.

Ces méthodologies ont été testées numériquement sur un cas pratique, en retenant la méthode d'Euler- $TVaR$ pour l'étape d'allocation de capital, ce qui a permis de construire des indicateurs de rentabilité robustes.

Nous avons évoqué l'importance de l'allocation de capital dans le cadre de l'ORSA, dispositif permettant l'évaluation interne des risques et de la solvabilité. L'allocation de capital s'intègre en effet dans le processus ORSA à travers la détermination de limites de risque et de budgets de risque. Dans ce contexte, nous avons présenté l'indicateur RORAC en tant qu'indicateur de rentabilité long terme et prospectif, celui-ci intégrant les résultats futurs et les capitaux futurs alloués jusqu'à extinction des passifs. Il serait souhaitable de généraliser la définition de cet indicateur afin de calculer des indicateurs RORAC à court et moyen terme. Ceci permettrait d'intégrer à l'analyse un suivi dans le temps des indicateurs et de s'assurer, *a posteriori*, de la propriété RORAC compatible par exemple.

Par ailleurs, les compagnies devront tester et analyser plusieurs méthodes d'allocation de capital afin de comprendre les différents risques auxquels elles sont exposées et la manière dont ils contribuent au risque global, ce qui leur permettra d'avoir une gestion efficace de leur capital.

VI. Annexes

A. Agrégation des risques

1. Annexe 1 - Distributions elliptiques

La famille des distributions elliptiques partage les propriétés essentielles des lois normales tout en permettant de modéliser la dépendance des extrêmes et d'autres formes de dépendances non gaussiennes.

Définition A.1 - Soit X un vecteur aléatoire de dimension n . S'il existe $\mu \in \mathbb{R}^n$ et Σ une matrice définie positive de dimension $n \times n$ tels que la fonction caractéristique $\varphi_{X-\mu}$ de $X - \mu$ est une fonction de la forme quadratique $t' \cdot \Sigma \cdot t$, i.e. $\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t' \cdot \Sigma \cdot t)$, alors on dit que X a une distribution elliptique.

On note alors $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.

La fonction ϕ est appelée générateur caractéristique de la distribution.

Propriétés :

- Les marginales $X_1, X_2, \dots, X_n$ d'un vecteur elliptique $X = (X_1, \dots, X_n)'$ sont elliptiques et de même générateur caractéristique.
- Toute combinaison affine, $Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cdot X_i$ des marginales d'un vecteur elliptique est elliptique de même générateur caractéristique.
- Notons $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ (resp. $\tilde{Y}$) les marginales (resp. la variable Y) centrées réduites. Les variables $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n$ et $\tilde{Y}$ sont elliptiques et de même générateur. Elles sont donc identiquement distribuées.
- En dimension 1, la famille des distributions elliptiques correspond exactement à celle des distributions symétriques.

2. Annexe 2 - Démonstration de la formule d'agrégation

Nous démontrons dans cette annexe la formule d'agrégation énoncée dans la partie III-C-2-b).

Proposition 3-1 - Supposons que le vecteur aléatoire $(\varepsilon_i)_{i \in N}$ soit elliptique et que la distribution de Fonds Propres économiques en $t=1$ soit affine en les ε_i i.e. de la forme $FP(1) = a_0 + \sum_{i \in N} a_i \varepsilon_i$, avec $a_i \in \mathbb{R}^*$, $\forall i \in N$.

Nous avons, pour toute mesure de risque homogène de degré 1 et invariante par translation ρ_α définissant le capital économique par : $C = E[FP(1)] - \rho_\alpha[FP(1)]$, la formule suivante d'agrégation :

$$C = \sqrt{\sum_{(i,j) \in N^2} sg(a_i, a_j) \rho_{i,j} C_i C_j}.$$

Preuve

Nous supposons que les variables $FP(1)$ et ε_i ont des moments d'ordre 2 finis. Calculons dans un premier temps la variance de $FP(1)$:

$$\sigma_{FP(1)}^2 = \sum_{(i,j) \in N^2} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{(i,j) \in N^2, i \neq j, i < j} \rho_{i,j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j.$$

Soit M une variable aléatoire d'espérance μ_M et d'écart-type σ_M . Nous désignerons dans cette annexe par $\tilde{M}$ la variable M centrée réduite, c'est-à-dire :

$$\tilde{M} = \frac{M - \mu_M}{\sigma_M}.$$

La mesure de risque ρ_α est **invariante par translation** et **positivement homogène** donc :

$$\rho_\alpha(M) = \mu_M + \sigma_M \cdot \rho(\tilde{M}).$$

Par conséquent :

$$\rho_\alpha[FP(1)] = \mu_{FP(1)} + \rho_\alpha(\widetilde{FP(1)}). \sqrt{\sum_{i \in N} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{(i,j) \in N^2, i \neq j, i < j} \rho_{i,j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j}. \quad (6.1)$$

Dans le cas d'une queue de distribution extrême ($\alpha = 0,5\%$), la valeur de $\rho_\alpha(\widetilde{FP(1)})$ de la distribution standardisée est négative. Ainsi :

$$\rho_\alpha[FP(1)] = \mu_{FP(1)} - \sqrt{\sum_{i \in N} a_i^2 \sigma_i^2 \{\rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}]\}^2 + 2 \sum_{(i,j) \in N^2, i \neq j, i < j} \rho_{i,j} a_i \sigma_i \{\rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}]\} a_j \sigma_j \{\rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}]\}}.$$

Sous les hypothèses de la proposition, les lois standardisées des variables $FP(1)$ et ε_i sont identiques, donc :

$$\rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}] = \rho_\alpha(\tilde{\varepsilon}_i).$$

Détaillons le calcul des capitaux marginaux. Nous avons :

$$C_i = E(a_0 + a_i \cdot \varepsilon_i) - \rho_\alpha(a_0 + a_i \cdot \varepsilon_i).$$

Le facteur ε_i **est centré** et ρ_α est **invariante par translation**, ce qui permet d'obtenir :

$$C_i = -\rho_\alpha(a_i \cdot \varepsilon_i).$$

Par conséquent, en utilisant la **symétrie de** ε_i et le fait que $\tilde{\varepsilon}_i$ a même loi que $\widetilde{FP(1)}$, il vient :

- si $a_i \leq 0$: $C_i = -\rho_\alpha(a_i, \varepsilon_i) = a_i \cdot \rho_{1-\alpha}(-\varepsilon_i) = a_i \cdot \rho_\alpha(\varepsilon_i) = a_i \cdot \sigma_i \cdot \rho_\alpha(\tilde{\varepsilon}_i) = a_i \sigma_i \cdot \rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}]$,
- si $a_i \geq 0$: $C_i = -\rho_\alpha(a_i, \varepsilon_i) = -a_i \cdot \rho_\alpha(\varepsilon_i) = -a_i \sigma_i \cdot \rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}]$.

Autrement dit :

$$C_i = -sg(a_i) \cdot a_i \cdot \sigma_i \cdot \rho_\alpha[\widetilde{FP(1)}].$$

Ainsi, en regardant l'expression de $\rho_\alpha[FP(1)]$ établie en (6.1), nous avons :

$$\rho_\alpha[FP(1)] = \mu_{FP(1)} - \sqrt{\sum_{i \in N} C_i^2 + 2 \sum_{(i,j) \in N^2, i \neq j, i < j} sg(a_i, a_j) \rho_{i,j} C_i C_j}.$$

Ce qui conduit au capital global C ci-dessous :

$$C = \sqrt{\sum_{(i,j) \in N^2} sg(a_i, a_j) \rho_{i,j} C_i C_j}.$$

B. Allocation de capital

1. Annexe 1 - Méthode de Shapley

Cette annexe vise à démontrer la proposition 4.1, énoncée dans la partie IV-B-3-b).

Proposition 4.1 - L'allocation par la méthode de Shapley vérifie la propriété « full allocation » suivante :

$$\sum_{i \in N} \rho^{Sh}(X_i/X) = \rho(X_N),$$

avec :

$$\rho^{Sh}(X_i/X) = \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (\rho(X_S) - \rho(X_{S \setminus \{i\}})).$$

Preuve

Nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \rho^{Sh}(X_i/X) &= \sum_{i \in N} \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (\rho(X_S) - \rho(X_{S \setminus \{i\}})) \\ &= \sum_{i \in N} \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \rho(X_S) - \sum_{i \in N} \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \rho(X_{S \setminus \{i\}}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Posons :

$$A = \sum_{i \in N} \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \rho(X_S),$$

et

$$B = \sum_{i \in N} \sum_{S \in D_i} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \rho(X_{S \setminus \{i\}}).$$

Pour une coalition S fixée, les termes $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \rho(X_S)$ dans l'expression de A apparaissent s fois.

Ainsi, il est possible de réécrire A comme suit, en rappelant que s correspond au cardinal de S :

$$A = \sum_{S \subseteq N / 1 \leq s \leq n} \frac{s(s-1)!(n-s)!}{n!} \rho(X_S) = \sum_{S \subseteq N / 1 \leq s \leq n} \frac{s!(n-s)!}{n!} \rho(X_S).$$

Soit $S' \subseteq N$ tel que $s' \leq n-1$, avec s' le cardinal de S' .

En notant ${}^c S'$ le complémentaire de S' dans l'ensemble N , nous pouvons écrire :

$$\forall j \in {}^c S', S' = (S' \cup \{j\}) \setminus \{j\}$$

Il y a donc $|{}^c S'| = (n-s')$ manières d'écrire S' à partir d'un sous-ensemble de N auquel on ôte un élément.

Effectuons le changement de variable $s' = s - 1$ puis utilisons les remarques ci-dessus. B s'écrit alors :

$$B = \sum_{S' \subseteq N / 1 \leq s' \leq n-1} \frac{(n-s')s'!(n-s'-1)!}{n!} \rho(X_{S'}).$$

Finalement :

$$B = \sum_{S' \subseteq N / 1 \leq s' \leq n-1} \frac{(n-s')!s'!}{n!} \rho(X_{S'}).$$

Ainsi, à partir des expressions de A et B substituées dans (6.2), il vient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in N} \rho^{Sh}(X_i / X) \\ &= \sum_{S \subseteq N / 1 \leq s \leq n} \frac{s!(n-s)!}{n!} \rho(X_S) - \sum_{S' \subseteq N / 1 \leq s' \leq n-1} \frac{(n-s')!s'!}{n!} \rho(X_{S'}) \\ &= \sum_{S \subseteq N / 1 \leq s \leq n-1} \frac{s!(n-s)!}{n!} \rho(X_S) + \frac{n!(n-n)!}{n!} \rho(X_N) - \sum_{S' \subseteq N / 1 \leq s' \leq n-1} \frac{(n-s')!s'!}{n!} \rho(X_{S'}). \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\sum_{i \in N} \rho^{Sh}(X_i / X) = \rho(X_N).$$

La propriété « full allocation » est donc vérifiée dans le cas d'une allocation par la méthode de Shapley.

2. Annexe 2 - Méthode d'Euler

a) Théorème d'Euler

Après avoir donné quelques éléments sur les mesures de risque homogènes, nous énonçons le théorème d'Euler.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et u un élément de U .

Définition A.2 - Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est homogène de degré τ si pour tout $h > 0$ tel que $hu \in U$ on a : $f(hu) = h^\tau f(u)$.

Lemme A.1 - Si f est homogène de degré τ alors $\frac{\partial f(u)}{\partial u_i}$ est homogène de degré $\tau - 1$.

Théorème (d'Euler) A.1 - Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continument différentiable, alors :
 f homogène de degré $\tau \Leftrightarrow \tau f(u) = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f(u)}{\partial u_i}$.

Nous définissons tout d'abord la sous-additivité d'une fonction, avant d'énoncer un corollaire utile pour démontrer la propriété « No undercut », dans le cas d'une allocation de type « Euler-TVaR ».

Définition A.3 - Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est sous-additive si elle vérifie :
 $f(u + v) \leq f(u) + f(v), \quad \forall u, v \in U \text{ avec } u + v \in U$.

Corollaire A.1 - Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable homogène de degré 1, alors :

f sous-additive $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f(u+v)}{\partial u_i} \leq f(u), \quad \forall u, v \in U \text{ avec } u + v \in U$.

b) Mesure de risque écart-type - démonstration de la formule des contributions au risque

Nous démontrons dans cette annexe la proposition 4.2 énoncée dans la partie IV-B-4-b).

Proposition 4.2 - Dans le cas d'une allocation par la méthode d'Euler et d'une mesure de risque écart-type, la contribution au risque associée au segment i est de la forme :

$$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \theta \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X}.$$

Preuve

Rappelons que la mesure de risque écart-type étant homogène, nous avons :

$$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \frac{\partial C_\sigma}{\partial u_i}(\mathbf{1}),$$

avec :

$$C_\sigma(u) = \sigma \left(\sum_{i \in N} u_i X_i \right).$$

Pour une variable aléatoire M , nous notons indifféremment $V(M)$ ou σ_M^2 sa variance. Raisononnons pour $i = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma \left(\sum_{i \in N} u_i X_i \right) &= \theta \sqrt{V \left(\sum_{i \in N} u_i X_i \right)} \\ &= \theta \sqrt{u_1^2 V(X_1) + V \left(\sum_{j \in N, j \neq 1} u_j X_j \right) + 2u_1 cov \left(X_1, \sum_{j \in N, j \neq 1} u_j X_j \right)}. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à u_1 , nous obtenons :

$$\frac{\partial C_\sigma}{\partial u_1}(u) = \theta \frac{2u_1 V(X_1) + 2cov(X_1, \sum_{j \in N, j \neq 1} u_j X_j)}{2 \sqrt{u_1^2 V(X_1) + V(\sum_{j \in N, j \neq 1} u_j X_j) + 2u_1 cov(X_1, \sum_{j \in N, j \neq 1} u_j X_j)}}.$$

Au point $(1, \dots, 1)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\sigma}{\partial u_1}(\mathbf{1}) &= \theta \frac{V(X_1) + \text{cov}(X_1, \sum_{j \in N, j \neq 1} X_j)}{\sqrt{V(X_1) + V(\sum_{j \in N, j \neq 1} X_j) + 2\text{cov}(X_1, \sum_{j \in N, j \neq 1} X_j)}} \\ &= \theta \frac{\text{cov}(X_1, \sum_{j \in N} X_j)}{\sqrt{V(\sum_{j \in N} X_j)}} = \theta \frac{\text{cov}(X_1, X)}{\sigma_X}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sigma^{Euler}(X_1/X) = \theta \frac{\text{cov}(X_1, X)}{\sigma_X}.$$

Par symétrie, nous avons pour tout segment i :

$$\sigma^{Euler}(X_i/X) = \theta \frac{\text{cov}(X_i, X)}{\sigma_X}.$$

c) Mesures de risque VaR et TVaR - démonstration des formules d'allocation dans le cas gaussien

Cette annexe vise à déterminer des formules explicites dans le cas gaussien lorsque les mesures de risque VaR ou TVaR sont considérées.

Cadre gaussien : hypothèses

(H₃) Supposons que $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, où l'écart-type de X_i est donné par :

$$\sigma_i = \frac{C_i}{q_{99,5\%}\{\mathcal{N}(0,1)\}}.$$

Notons $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij})_{i,j}$ la matrice des coefficients de corrélation linéaire entre les X_i .

Introduisons aussi la notation : $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)'$.

Rappelons que :

$$X = \sum_{i \in N} X_i.$$

Ainsi, l'espérance et la variance de X sont données par :

$$\mu_X = \sum_{i \in N} \mu_i,$$

$$\sigma_X^2 = \sigma' \cdot \rho \cdot \sigma.$$

Remarque : (X_i, X) est un vecteur gaussien. En effet, pour i fixé, étant donnés α et β des réels, $\alpha \cdot X_i + \beta \cdot X = (\alpha + \beta) \cdot X_i + \beta \cdot \sum_{j \neq i} X_j$ suit une loi normale en tant que combinaison linéaire d'éléments du vecteur gaussien $(X_1, \dots, X_n)$.

Mesure de risque VaR

Proposition 3.3 - Sous l'hypothèse (H_3) , dans le cas d'une allocation par la méthode d'Euler et d'une mesure de risque VaR, la contribution au risque associée au segment i s'écrit :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} (VaR_\alpha(X) - \mu_X).$$

Preuve

Rappelons que dans le cas d'une mesure de risque VaR, la contribution au risque obtenue par la méthode d'Euler prend la forme suivante :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) = E(X_i|X = VaR_\alpha(X)).$$

Etant dans le cas gaussien, l'espérance conditionnelle $E(X_i|X)$ coïncide avec la projection de X_i sur l'espace vectoriel engendré par $(\mathbf{1}, X)$, notée $\hat{X}$.

Ainsi :

$$E(X_i|X) = \hat{X} = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} (X - \mu_X).$$

Nous disposons alors de la formule explicite suivante :

$$VaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} (VaR_\alpha(X) - \mu_X).$$

Mesure de risque TVaR

Proposition 3.4 - Sous l'hypothèse (H₃), dans le cas d'une allocation par la méthode d'Euler et d'une mesure de risque TVaR, la contribution au risque associée au segment i a pour expression :

$$TVaR^{Euler}(X_i/X) = \mu_i + \frac{1}{1-\alpha} \cdot cov(X_i, X) \cdot f_X(VaR_\alpha(X)).$$

Preuve

Rappelons que dans le cas d'une mesure de risque TVaR, la contribution au risque obtenue par la méthode d'Euler s'écrit :

$$TVaR^{Euler}(X_i/X) = E(X_i|X > VaR_\alpha(X)).$$

Comme (X_i, X) est un vecteur gaussien, nous avons :

$$X_i|X \sim \mathcal{N}\left(\mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2}(X - \mu_X), \sigma_i^2 - \frac{(cov(X_i, X))^2}{\sigma_X^2}\right). \quad (6.3)$$

En effet, la densité conditionnelle s'écrit :

$$f_{X_i|X=x}(x_i) = \frac{f_{X_i, X}(x_i, x)}{f_X(x)} = \frac{(2\pi)^{-1} \det(K)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(y-m)'K^{-1}(y-m)}}{(\sigma_X \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}},$$

où :

- $y = (x_i, x)'$,
- $m = (\mu_i, \mu_X)'$,
- K est la matrice de variance-covariance du vecteur (X_i, X) .

Après simplifications, nous obtenons (6.3).

Posons :

$$M_X = \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2}(X - \mu_X)$$

, l'espérance conditionnelle de X .

Montrons tout d'abord que :

$$E[X_i|X > VaR_\alpha(X)] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} E[X_i|X = x] \cdot f_X(x) dx.$$

Nous avons :

$$E[X_i | X > VaR_\alpha(X)] = \frac{E[X_i \mathbb{1}_{X > VaR_\alpha(X)}]}{P(X > VaR_\alpha(X))}.$$

On utilise le théorème de transfert et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} E[X_i | X > VaR_\alpha(X)] &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x_i \mathbb{1}_{x > VaR_\alpha(X)} f_{(X_i, X)}(x_i, x) dx_i dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} x_i f_{(X_i | X=x)}(x_i) f_X(x) dx_i dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} f_X(x) \int_{\mathbb{R}} x_i f_{(X_i | X=x)}(x_i) dx_i dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} f_X(x) \cdot E[X_i | X = x] dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} M_x \cdot f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} \left\{ \mu_i + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} (x - \mu_X) \right\} \cdot f_X(x) dx \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E[X_i | X > VaR_\alpha(X)] &= \mu_i - \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} \mu_X + \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} \times \int_{VaR_\alpha(X)}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \right) \\ &= \mu_i - \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} \mu_X + \frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} \times TVaR_\alpha(X). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Or :

$$TVaR_\alpha(X) = \mu_X + \frac{1}{1-\alpha} \sigma_X^2 \times f_X(VaR_\alpha(X)). \quad (6.5)$$

(6.4) et (6.5) nous permettent donc d'obtenir, après simplification des termes $\frac{cov(X_i, X)}{\sigma_X^2} \mu_X$, la formule explicite suivante :

$$TVaR^{Euler}(X_i | X) = \mu_i + \frac{1}{1-\alpha} \cdot cov(X_i, X) \cdot f_X(VaR_\alpha(X)).$$

d) Cohérence de la méthode d'Euler

Propriété RORAC compatible

Nous montrons ici la proposition 4.6 énoncée dans la partie IV-B-4-d).

Rappelons l'hypothèse requise pour démontrer que la méthode d'Euler est RORAC compatible :

$$(H_4) : \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \frac{PM_t}{PM_0} = \sum_{t \geq 0} \delta_t \cdot \frac{PM_{i,t}}{PM_{i,0}}, \quad \text{pour tout périmètre de passifs } i.$$

Proposition 4.6 - La méthode d'Euler est symétrique et « riskless allocation ». Cette méthode est RORAC compatible sous l'hypothèse (H_4) .

Preuve de la RORAC compatibilité

Rappelons la définition de la RORAC compatibilité et l'expression des RORAC.

Définition 4.2 - Les contributions au risque $\{\rho(X_i|X)\}_{i \in N}$ sont RORAC compatibles s'il existe des réels $\varepsilon_i > 0$ vérifiant l'implication, pour tout segment i :

$RORAC(X_i|X) > RORAC(X) \Rightarrow RORAC(X + hX_i) > RORAC(X)$, pour tout h tel que : $0 \leq h \leq \varepsilon_i$.
(6.6)

Avec :

$$RORAC(X_i|X) = \frac{E(VIF_i^*)}{VAN_0\{\rho^\lambda(X_i|X)\}} = \frac{E(VIF_i^*)}{\rho_0^\lambda(X_i|X) \sum_{t \geq 0} \delta_t \frac{PM_{i,t}}{PM_{i,0}}},$$

$$RORAC(X) = \frac{E(VIF^*)}{VAN_0\{\rho(X)\}} = \frac{E(VIF^*)}{\rho_0(X) \sum_{t \geq 0} \delta_t \frac{PM_t}{PM_0}}.$$

Introduisons les notations :

$$\widetilde{RORAC}(X_i|X) = \frac{E(VIF_i^*)}{\rho^\lambda(X_i|X)},$$

$$\widetilde{RORAC}(X) = \frac{E(VIF^*)}{\rho(X)}.$$

En rappelant que nous retenons les notations : $\rho(X) = \rho_0(X)$ et $\rho^\lambda(X_i|X) = \rho_0^\lambda(X_i|X)$.

Sous l'hypothèse (H_4) , montrer l'implication (6.6) revient à montrer que :

$$\widetilde{RORAC}(X_i|X) > \widetilde{RORAC}(X) \Rightarrow \widetilde{RORAC}(X + hX_i) > \widetilde{RORAC}(X).$$

Nous montrons ci-dessous la contraposée.

Pour un segment i fixé, supposons que pour tout $\varepsilon_i > 0$, il existe h tel que :
 $\widetilde{RORAC}(X + hX_i) \leq \widetilde{RORAC}(X)$.

Montrons alors que : $\widetilde{RORAC}(X_i/X) \leq \widetilde{RORAC}(X)$.

Nous avons :

$$\widetilde{RORAC}(X + hX_i) = \frac{E(VIF^*) + hE(VIF_i^*)}{\rho(X + hX_i)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \widetilde{RORAC}(X + hX_i) \leq \widetilde{RORAC}(X) &\Leftrightarrow \rho(X + hX_i) \geq \frac{\rho(X)\{E(VIF^*) + hE(VIF_i^*)\}}{E(VIF^*)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\rho(X + hX_i) - \rho(X)}{h} \geq \frac{\rho(X) \cdot E(VIF_i^*)}{E(VIF^*)}. \quad (6.7) \end{aligned}$$

La méthode d'Euler fournit la contribution associée au segment i suivante :

$$\rho^{Euler}(X_i/X) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\rho(X + aX_i) - \rho(X)}{a}.$$

Comme l'inégalité (6.7) est vraie pour h aussi petit que souhaité, on a en particulier :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\rho(X + aX_i) - \rho(X)}{a} \geq \frac{\rho(X) \cdot E(VIF_i^*)}{E(VIF^*)}.$$

Etant donné que :

$$\widetilde{RORAC}(X_i/X) = \frac{E(VIF_i^*)}{\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\rho(X + aX_i) - \rho(X)}{a}},$$

on a :

$$\widetilde{RORAC}(X_i/X) \leq \frac{E(VIF_i^*)}{\frac{\rho(X) \cdot E(VIF_i^*)}{E(VIF^*)}}.$$

Donc : $\widetilde{RORAC}(X_i/X) \leq \widetilde{RORAC}(X)$.

Ainsi, la méthode d'Euler est RORAC compatible sous l'hypothèse H_4 .

Propriété « No undercut »

Démontrons la proposition 4.7 énoncée dans la partie IV-B-4-d).

Proposition 4.7 - La méthode d'Euler associée à une mesure de risque $TVaR$ est cohérente.

Preuve de la propriété « No undercut »

L'application du corollaire A.1 en considérant les vecteurs :

- $u = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 à la i -ème position) et
- v ayant comme composantes $v_i = 1 - u_i$,

nous donne, dans le cas d'une mesure de risque sous-additive et homogène de degré 1 (en particulier pour la $TVaR$) : $\rho^{Euler}(X_i/X) \leq \rho(X_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Si l'on considère maintenant, pour une coalition S fixée, la décomposition : $X_N = X_S + X_{N \setminus S}$, on obtient : $\rho^{Euler}(X_S/X) \leq \rho(X_S)$.

Et comme les contributions d'Euler- $TVaR$ sont « additives » (linéarité de l'espérance) dans le sens où :

$$\rho^{Euler}(X_S/X) = \sum_{i \in S} \rho^{Euler}(X_i/X),$$

alors,

$$\sum_{i \in S} \rho^{Euler}(X_i/X) \leq \rho(X_S).$$

La propriété « No undercut » est donc bien vérifiée.

3. Annexe 3 - Calibrage et utilisation d'une forme paramétrique

Cette annexe décrit la méthodologie de calibrage d'une forme paramétrique ainsi que son cadre d'utilisation.

a) Cadre et motivation

Disposant de réalisations de la variable Fonds Propres économiques en $t=1$, notée ici FP, il peut être utile de calibrer une **forme paramétrique** permettant d'exprimer les Fonds Propres globaux en fonction des facteurs de risques.

Notons n le nombre de risques projetés sur la première période.

Nous considérons dans la suite la forme paramétrique suivante, généralement adéquate pour répliquer la structure des Fonds Propres :

$$f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in E} A_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_n^{i_n}, \quad (6.8)$$

où l'ensemble E représente un sous-ensemble⁵⁴ de $\{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n / i_1 + \dots + i_n \leq d\}$.

Notons $FP^{param} = f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la variable « Fonds Propres estimés par la forme paramétrique ».

La forme paramétrique, une fois calibrée, peut être exploitée pour :

- simuler une distribution de Fonds Propres. Connaissant la loi jointe des facteurs de risques (loi du vecteur $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$) intervenant dans le polynôme, nous pouvons en effet « construire » la distribution exhaustive des Fonds Propres.
- mettre en évidence les **effets croisés et non-linéarités entre facteurs de risque** et ainsi proposer une méthode alternative d'agrégation ou d'allocation de capital.
- étudier la robustesse d'estimation du capital économique en « bootstrapant ».

Supposons que nous disposons de M réalisations de la variable Fonds Propres économiques relative à un ensemble de risques stochastiques (les autres risques sont neutralisés). Considérons par exemple les risques actions et taux afin d'expliquer la méthodologie. Les Fonds Propres en date 1 dépendent alors de deux aléas : l'aléa relatif au risque actions ε_{eq} et l'aléa relatif au risque de taux ε_{int} .

b) Méthodologie

Etape 1 - Choix des termes intervenant dans la forme paramétrique

Pour sélectionner les termes intervenant dans la forme paramétrique, nous pouvons :

- Etudier les profils marginaux et les effets croisés entre facteurs de risque.
- Réaliser des tests de **significativité des paramètres**.

⁵⁴ Le sous-ensemble E correspond à un choix de variables explicatives parmi les éléments $\varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_n^{i_n}$.

Supposons, à titre illustratif et pour plus de lisibilité, que cette étape nous conduise à retenir la forme paramétrique suivante :

$$FP^{param} = A_{0,0} + A_{1,0} \cdot \varepsilon_{eq} + A_{2,0} \cdot \varepsilon_{eq}^2 + A_{0,1} \cdot \varepsilon_{int} + A_{0,2} \cdot \varepsilon_{int}^2 + A_{0,3} \cdot \varepsilon_{int}^3 + A_{1,1} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int} + A_{1,2} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2$$

Etape 2 - Calibrage de la forme paramétrique

La résolution du programme d'optimisation ci-dessous permet d'estimer les paramètres de la forme paramétrique :

Résolution du programme d'optimisation :

$$Argmin_A \sum_{m=1}^M (FP^m - FP^{m,param})^2.$$

Avec :

- $A = (A_{i,j})$ le vecteur des paramètres,
- FP^m la valeur des Fonds Propres globaux issus du modèle de projection, associée au scénario m ,
- $FP^{m,param}$ la valeur des Fonds Propres paramétriques globaux associée au scénario m , fonction de A .

Notons $\hat{A} = (\hat{A}_{i,j})$ la solution du programme d'optimisation ci-dessus.

Etape 3 - Validation de la forme paramétrique

L'exploitation de la forme paramétrique requiert une étape de validation.

Dans cet objectif, il s'agit de mener les analyses suivantes :

- **Analyse graphique** : le tracé des QQ-plots entre Fonds Propres globaux issus du modèle de projection et Fonds Propres globaux paramétriques permet de visualiser la bonne ou mauvaise adéquation.
- **Analyse numérique** : réaliser des tests de Kolmogorov afin de valider l'adéquation des lois entre les Fonds Propres globaux et les Fonds Propres paramétriques globaux.
- **Analyse des écarts entre capitaux** : vérifier que les écarts entre les capitaux paramétriques globaux et marginaux et les capitaux issus du modèle de projection sont faibles.

Etape 4 - Création d'un échantillon de Fonds Propres à l'aide de la forme paramétrique

Après avoir calibré et validé la forme paramétrique, nous pouvons exprimer les Fonds Propres paramétriques explicitement en fonction des variables ε_{eq} et ε_{int} , comme spécifié ci-dessous:

$$FP^{param} = \hat{A}_{0,0} + \hat{A}_{1,0} \cdot \varepsilon_{eq} + \hat{A}_{2,0} \cdot \varepsilon_{eq}^2 + \hat{A}_{0,1} \cdot \varepsilon_{int} + \hat{A}_{0,2} \cdot \varepsilon_{int}^2 + \hat{A}_{0,3} \cdot \varepsilon_{int}^3 + \hat{A}_{1,1} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int} + \hat{A}_{1,2} \cdot \varepsilon_{eq} \cdot \varepsilon_{int}^2.$$

Il est alors possible de créer un échantillon de Fonds Propres économiques de taille S .

La valeur des Fonds Propres associée à la simulation s est obtenue, après simulation du couple $(\varepsilon_{s,eq}, \varepsilon_{s,int})$, à partir de la relation :

$$FP^{s,param} = \widehat{A}_{0,0} + \widehat{A}_{1,0} \cdot \varepsilon_{s,eq} + \widehat{A}_{2,0} \cdot \varepsilon_{s,eq}^2 + \widehat{A}_{0,1} \cdot \varepsilon_{s,int} + \widehat{A}_{0,2} \cdot \varepsilon_{s,int}^2 + \widehat{A}_{0,3} \cdot \varepsilon_{s,int}^3 + \widehat{A}_{1,1} \cdot \varepsilon_{s,eq} \cdot \varepsilon_{s,int} + \widehat{A}_{1,2} \cdot \varepsilon_{s,eq} \cdot \varepsilon_{s,int}^2.$$

VII. Bibliographie

- [1] Artzner P., Delbaen F., Eber J-M., Heath D. (1999), *Coherent measures of risk*, Mathematical Finance, Vol.9, No.3 (July1999), 203–228.
- [2] Denault M. (2001), *Coherent allocation of risk capital*.
- [3] Devineau L., Loisel S. (2009), *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des « simulations dans les simulations » pour le calcul du capital économique Solvabilité II*, Bulletin Français d'Actuariat (BFA), No. 17, Vol. 10, 188-221.
- [4] Devineau L., Loisel, S. (2009), *Agrégation des risques dans Solvabilité II : comment faire converger les approches des modèles internes et de la Formule Standard ?*
- [5] Devineau L., Chauvigny M. (2010), *Replicating portfolios : techniques de calibrage pour le calcul du capital économique Solvabilité II*.
- [6] Dhaene J., Tsanakas A., Valdez E., Vanduffel S. (2009), *Optimal capital allocation principles*.
- [7] Filipovic, D. (2008), *Multi-Level Aggregation*, Working Paper.
- [8] Landsman Z., Valdez E. (2002), *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions*, Technical report.
- [9] Maccheroni F. (2001), *Yaari dual theory without the completeness axiom*, Working Paper.
- [10] Panjer H. (2002), *Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital within financial conglomerates*.
- [11] Scor Papers (2008), *Allocation de capital : cap sur la rentabilité du portefeuille*, n° 1 (septembre 2008).
- [12] Tasche D. (2004), *Allocating Portfolio Economic Capital to Sub-Portfolios*.
- [13] Tasche D. (2008), *Capital Allocation to Business Units and Sub-Portfolios: the Euler Principle*.
- [14] Tsanakas A. Barnett C. (2003), *Risk capital allocation and cooperative pricing of insurance liabilities*, Insurance: Mathematics and Economics 33 (2003) 239–254.
- [15] QIS 5 Technical Specifications (2010).
<https://eiopa.europa.eu/>
- [16] Consultation paper n° 65 (2010) CEIOPS's advice for Level II Implementing Measures on Solvency.
<https://eiopa.europa.eu/>
- [17] Article 45 de la directive Solvabilité II.
<https://eiopa.europa.eu/>

[18] Brigo D., Mercurio F., *Interest Rate Models – Theory and Practice – With Smile, Inflation and Credit*, Second Edition, Springer Finance.

[19] Dana R.A, Jeanblanc-Picqué M., *Marchés Financiers en temps continu : valorisation et équilibre*, Economica.