Mémoire présenté le :

pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA

et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Benjamin Châtaigner

Titre : Ajustements financiers dans un cadre ORSA

Confidentialité : ☒ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de l'IA | *Signature*

Lionel LAURENT

Ambre VIGNY

Pierre PETAUTON

Membres présents du jury de l'ISFA

Stéphane LOISEL

Entreprise

Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise

Nom : David MARIUZZA

Signature :

Invité

Nom : HAGUET Eléonore, MARTIAL Anne-Claire

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat :

Mme Christine DRIGUZZI

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Mémoire d'actuariat

Les ajustements financiers dans un cadre ORSA

CHATAIGNER Benjamin

09/02/2016

Résumé

Le nouveau référentiel réglementaire $Solvabilité\ II$, qui entrera en vigueur le 1er janvier 2016, impose différentes exigences aux assureurs, réparties selon trois piliers. Dans le cadre du pilier 2, il est demandé aux compagnies d'assurance de mettre en place un processus *Own Risk and Solvency Assessment* ($ORSA$), visant à une meilleure gestion des risques. Il est nécessaire pour les assureurs de déterminer leur Besoin Global de Solvabilité (BGS) sur la durée du plan stratégique. L'évaluation du BGS est souvent inspirée de celle du *Solvency Capital Requirement* (SCR), à laquelle sont ajoutés des risques supplémentaires, tels que le risque souverain, le risque d'inflation ou le risque de réputation. Par souci de simplification, dans ce mémoire, le BGS est choisi comme équivalent du SCR à chaque pas de temps, évalué selon la Formule Standard.

L'évolution de la situation de l'assureur au cours du plan stratégique est déterminée, dans notre cas, par la projection d'un unique scénario économique en univers Monde Réel. Les engagements de l'assureur sont ensuite valorisés à chaque pas de temps à l'aide de jeux de scénarios économiques Risque Neutre, dépendant de l'évolution Monde Réel au cours du plan stratégique. La dépendance signifie ici que les trajectoires représentées par les scénarios Risque Neutre sont corrélées à celle du scénario Monde Réel.

Cette notion de dépendance très importante pour l'évaluation du BGS nécessite la constitution de jeux de simulations Risque Neutre à chaque pas de temps, ce qui peut s'avérer relativement fastidieux à mettre en œuvre. Ce mémoire s'est attaché à faciliter la prise en compte de ce conditionnement des jeux de simulations Risque Neutre par rapport au scénario Monde Réel, en utilisant la technique des ajustements financiers. Cette dernière permet en effet de prendre en compte de manière artificielle la dépendance recherchée, et ainsi de réduire le nombre de jeux de simulations Risque Neutre à construire. Le modèle utilisé pour calculer le SCR prospectif ne nécessiterait alors plus que l'utilisation d'un scénario Monde Réel et d'un jeu de scénarios Risque Neutre. L'application d'un coefficient stochastique aux scénarios Risque Neutre introduirait la dépendance recherchée. Les déflateurs ajustés prenant en compte l'information disponible au cours du plan stratégique sont ainsi obtenus.

En conclusion, la technique ainsi développée est relativement accessible, puisqu'elle facilite la génération des jeux de scénarios économiques utilisés dans le cadre d'un modèle $ORSA$. Elle permet également une prise en compte de l'information de projection sur l'ensemble du plan stratégique.

Mots-clefs : $Solvabilité\ II$, Pilier 2, *Own Risk and Solvency Assessment*, Besoin Global de Solvabilité, Assurance Vie, *Solvency Capital Requirement*, Générateur de Scénarios Economiques, Ajustements financiers, Déflateurs, Smith Wilson.

Abstract

The new $Solvency\ II$ set of rules, which will be applied on January 1st 2016, compels insurance companies to abide by various requirements, divided among three pillars. Within the pillar 2, insurers are asked to create an Own Risk and Solvency Assessment ($ORSA$) framework, in order to deal more efficiently with one's risks. It is thus needed to assess an Overall Solvency Need (OSN) over the strategic horizon for them to comply with the new rules. It is mostly inspired by the assessment of the Solvency Capital Requirement (SCR) within the pillar 1, to which some other risks are added. In this thesis, the OSN is chosen equivalent to the prospective SCR.

For this assessment, insurance companies could then use the standard formula at every time step. This formula is a method granted by the $EIOPA$ making one able to compute the SCR at time 0 within the pillar 1 framework. However, within the $ORSA$ framework, the insurer's status will evolve through the strategic plan, and this is, in our case, determined by the projection of a unique Real World economic scenario. The insurer's liabilities are then computed at every time step thanks to Risk Neutral economic scenarios, correlated to the Real World scenario.

This correlation can artificially be introduced thanks to the "financial adjustments" method. In this case, the model used in order to compute the prospective SCR would only necessitate one Real World scenario and one set of Risk Neutral scenarios in order to work. The application of a stochastic factor to the Risk Neutral scenarios would create the wanted dependency. The adjusted deflators, taking the available information over the strategic horizon into account, would thus be obtained.

This thesis will first introduce the theory of the financial adjustments, so as an improvement of this method based on the Smith Wilson algorithm. We will then use this improvement in order to compute the prospective SCR of an insurance company within the $ORSA$ framework. The results thus obtained will be then compared to those given by a kind of $ORSA$ models currently used, based on Risk Neutral scenarios generated at time 0 in order to assess one's liabilities.

In the end, the method we developed is quite accessible and facilitate the generation of economic scenarios within the $ORSA$ framework. It also enables the dependency to the available information until the strategic horizon.

Key words : $Solvency\ II$, Pillar 2, *Own Risk and Solvency Assessment*, Overall Solvency Needs, Life insurance, *Solvency Capital Requirement*, Economic Scenarios Generator, Financial adjustments, Deflators, Smith Wilson.

Note de synthèse

Introduction

La directive $Solvabilité\ II$, qui entrera en vigueur le 1er janvier 2016, concerne toutes les compagnies d'assurance en Europe, en leur fixant de nouvelles exigences déclinées selon trois piliers. En particulier, le deuxième pilier demande aux assureurs d'être en mesure de gérer leur politique de risque et leur besoin en capital tout au long de la durée d'un plan stratégique, allant généralement jusqu'à 5 ans. De cette manière, le régulateur peut contrôler la solvabilité des assureurs à moyen terme.

Ce pilier sera le cadre principal de ce mémoire qui s'inscrit dans une démarche $ORSA$ (*Own Risk and Solvency Assessment)*. Pour satisfaire aux réglementations propres à cette dernière, les assureurs sont tenus d'évaluer leur Besoin Global de Solvabilité (BGS), qui permet de contrôler leur solvabilité à moyen terme. L'évaluation du BGS peut s'inspirer de celle du *Solvency Capital Requirement* (SCR) dans le cadre du pilier 1, à laquelle sont ajoutés des risques supplémentaires, tels que le risque souverain par exemple. Le SCR est une quantité de capital que l'entreprise doit conserver afin d'éviter quasi-certainement une ruine économique à horizon un an.

Partie I : Contexte réglementaire

Depuis 2002, l'ensemble des compagnies d'assurance en Europe était soumis à la Directive $Solvabilité\ I$, leur fixant des exigences quantitatives afin d'être en mesure de juger de leur caractère solvable ou non. Cependant, cet ensemble de règles montrait de nombreuses faiblesses, tant d'un point de vue quantitatif que par le fait que les exigences n'étaient pas harmonisées au niveau européen, ce qui pouvait présenter des problèmes concurrentiels entre les pays.

Le régulateur européen a ainsi entériné la création de nouvelles règles uniformisées à travers l'Europe, ce qui a donné lieu à la publication du rapport Omnibus 2 (EIOPA, 2009).

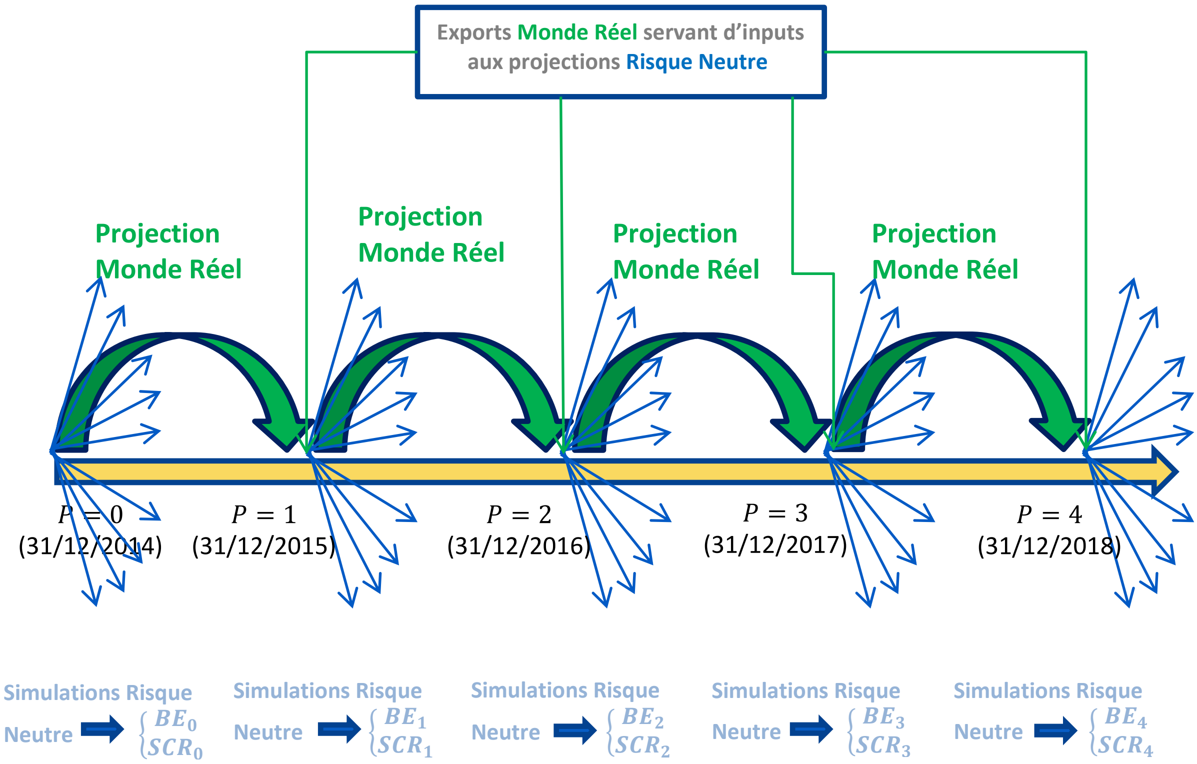
Cette Directive, baptisée $Solvabilité\ II$ en continuité avec la précédente, se compose de 3 piliers. Le pilier 2 notamment, divisé entre exigences qualitatives et quantitatives, impose aux assureurs de mettre en place une politique interne de gestion des risques ($ORSA$), mais aussi de contrôler leur BGS à moyen terme.

Dans ce mémoire, le BGS a été choisi équivalent au SCR prospectif. Le SCR prospectif est le SCR calculé à chaque pas de temps de l'horizon stratégique à l'aide d'un modèle $ORSA$.

Pour les compagnies d'assurance vie, l'évaluation des engagements de l'assureur nécessite l'utilisation de jeux de scénarios économiques. Ces scénarios traduisent l'évolution de certains facteurs de risque (taux, rendements des actions…) au cours du temps, et sont issus d'un Générateur de Scénarios Economiques (ESG).

Le calcul d'un SCR prospectif, lié à celui des engagements, est donc dépendant des scénarios économiques utilisés.

Dans le modèle $ORSA$ utilisé, un unique scénario Monde Réel est utilisé pour vieillir les portefeuilles de la compagnie au cours du plan stratégique. Des scénarios Risque Neutre sont ensuite utilisés pour valoriser les engagements de la compagnie et déterminer son *Best Estimate of Liabilities* (BEL) à chaque année de projection, comme l'illustre le schéma suivant :



Le modèle $ORSA$ considéré utilise la Formule Standard à chaque pas de temps afin de déterminer le SCR prospectif de la compagnie.

Nous étudierons ici une technique permettant de prendre en compte à chaque pas de temps l'information apportée par l'utilisation du scénario Monde Réel, en vue de réaliser un calcul de SCR prospectif. Le but serait en effet de réaliser un calcul stochastique à chaque pas de temps, afin de déterminer les engagements de la compagnie, en reproduisant la méthode utilisée dans le cadre du Pilier 1, à l'aide de scénarios impactés par l'information de projection sur le plan stratégique.

Partie II : Les techniques d'ajustement

Afin de tenir compte de l'information générée par la projection Monde Réel dans les scénarios Risque Neutre, une solution est d'utiliser une technique connue sous le nom d'ajustements financiers.

Cette méthode vise à éviter la construction potentiellement fastidieuse de multiples jeux de simulations Risque Neutre conditionnés par le scénario Monde Réel à chaque pas de temps. Pour cela, un unique jeu de scénarios Risque Neutre est généré, et va être artificiellement conditionné à l'unique scénario Monde Réel utilisé.

La table de scénarios Risque Neutre, dite « table de base », est déformée par l'application d'un coefficient stochastique dépendant du scénario Monde Réel et de la simulation Risque Neutre à modifier. La formule d'ajustement utilisée est la suivante :

$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}$$

Avec :

- $P(H,n)$ un prix de Zéro-coupon de date de départ H et de maturité n
- $\hat{P}$ les prix de Zéro-coupons ajustés
- P^{RN} les prix issus de la table de base
- P^{MR} les prix issus des simulations Monde Réel.

Cette méthode injecte directement l'information issue du scénario Monde Réel, par le biais des prix de Zéro-coupons, et l'applique à la table de base dans le but de conditionner les scénarios Risque Neutre. En effet, le prix d'un Zéro-coupon de date de départ t et de maturité m peut également s'écrire $P(t,m) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^{t+m} r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t\right)$ avec $\mathcal{F}_t$ l'information disponible en t. C'est pourquoi l'information Monde Réel est implicitement contenue dans les prix de Zéro-coupons issus du scénario Monde Réel.

Des formules similaires sont employées pour ajuster les indices action et immobilier.

L'intérêt de ces formules d'ajustement est qu'elles permettent de vérifier la martingalité et la réconciliation des indices ajustés avec les indices de première période. La propriété de martingalité, dans le cas de l'ajustement de taux, se traduit par l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{P}(H+m,1) \times \hat{D}(H,m) \middle| \mathcal{F}_H\right) = P^{MR}(H,m+1)$$

Avec $\hat{D}(H,m)$ le déflateur ajusté de date de départ H et de maturité m défini par :

$$D(H,m) = \prod_{i=0}^{m-1} P(H+i,1)$$

La courbe Monde Réel est, dans notre cas, la courbe des taux de marché. La courbe Risque Neutre est elle-même créée à partir de cette courbe de marché à l'aide de la méthode de Smith Wilson. Cette méthode est utilisée par l'$EIOPA$, le régulateur européen, afin de délivrer annuellement une courbe des taux permettant aux assureurs de valoriser leurs actifs et passifs dans le cadre du pilier 1. Le but de cette technique est de faire converger la courbe des taux *forwards* ainsi créée vers l'*Ultimate Forward Rate* (UFR), qui représente le taux *forward* à long terme. Il est actuellement fixé à 4,2% et se décompose comme la somme du taux futur espéré des obligations sans risque et du taux d'inflation à long terme (actuellement choisis à 2,2% et 2% respectivement).

Les courbes de taux ajustées perdent donc cette convergence, puisqu'elles sont martingales avec les courbes de marché. Il serait ainsi possible de regretter une inconsistance avec les calculs réalisés en 0 dans le cadre du pilier 1 si l'on se servait de ces scénarios ajustés afin d'évaluer le SCR prospectif de l'assureur. C'est pourquoi une nouvelle technique d'ajustements a été étudiée.

L'idée principale derrière ces nouveaux ajustements, est d'appliquer la méthode de Smith Wilson à la courbe des taux de marché, projetée à l'aide du scénario Monde Réel à chaque pas de temps. Ce sont les prix de Zéro-coupons issus de cette courbe de Smith Wilson qui seront alors utilisés dans la formule d'ajustement classique, pour donner :

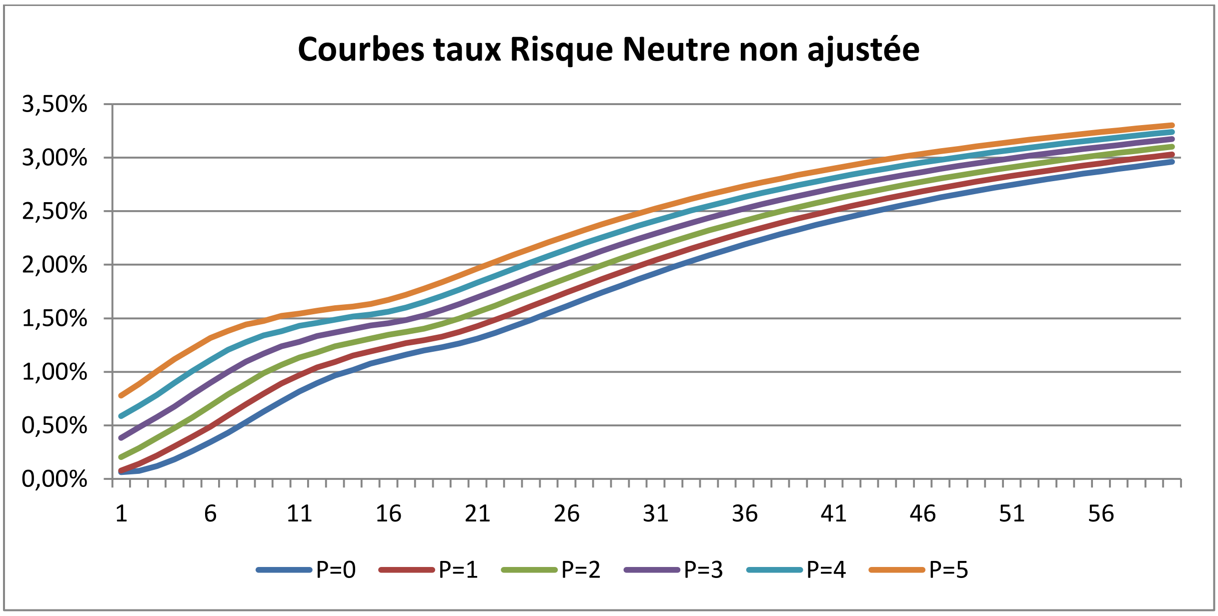
$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{SW}(H,m+n)}{P^{SW}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}$$

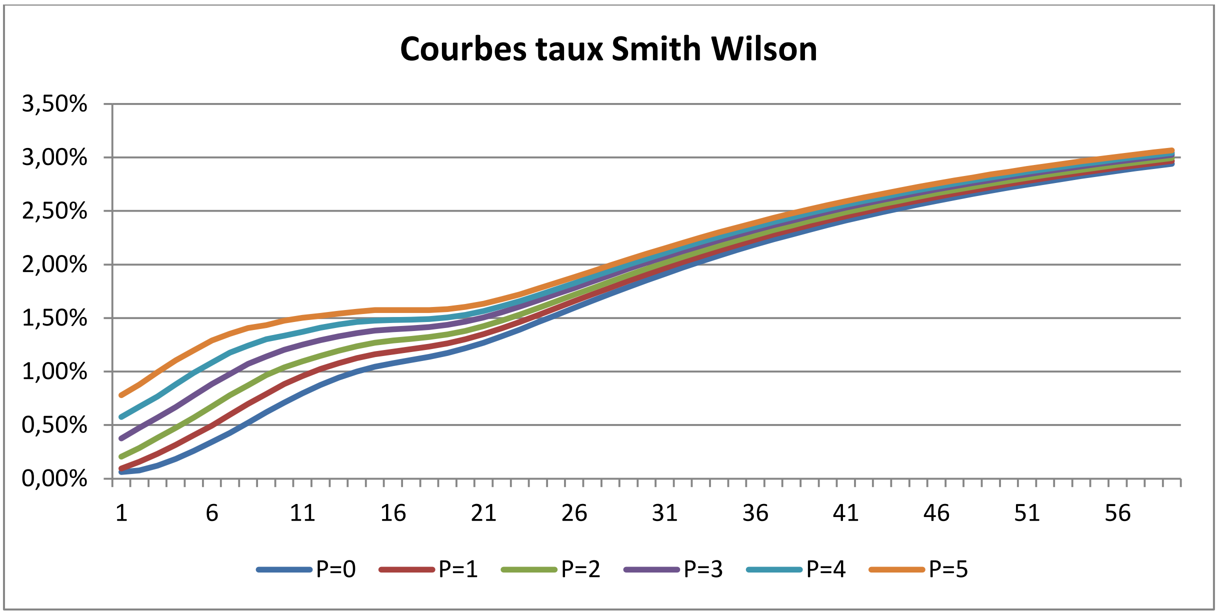
Les mêmes propriétés mathématiques que précédemment sont vérifiées, et la volonté de remplacer l'information de période précédente est toujours présente. Cette information est simplement retraitée par la méthode de Smith Wilson. La courbe ajustée conserve donc la convergence vers le taux *forward* à long terme.

Il convient d'analyser l'impact de ce conditionnement, obtenu à l'aide du second ajustement, sur un calcul de SCR prospectif effectué à l'aide du modèle $ORSA$ présenté précédemment.

Partie III : Mise en place des ajustements dans un cadre ORSA

L'algorithme de Smith Wilson doit ainsi être utilisé à chaque pas de temps afin de générer les courbes associées permettant l'utilisation des ajustements « Smith Wilson improved » sur l'ensemble de la durée du plan stratégique. Il est donc intéressant de comparer ces courbes aux courbes Risque Neutre traditionnellement utilisées afin de valoriser les engagements de l'assureur à chaque pas de temps.





Malgré des allures analogues, dues principalement à la convergence vers l'UFR, les courbes se distinguent nettement après une vingtaine d'années, où le faisceau des courbes de Smith Wilson est beaucoup plus concentré que celui des courbes Risque Neutre. Les courbes de Smith Wilson mettent en exergue le fait qu'il est difficile pour un assureur de prévoir l'évolution des taux au-delà d'une vingtaine d'années en effectuant une transformation de la courbe des taux de marché.

Certains paramètres inhérents à la méthode de Smith Wilson ont cependant été fixés pour cette utilisation dans un cadre $ORSA$. L'UFR, défini précédemment, et la Durée de convergence vers l'UFR, représentant la durée en années que met la courbe des taux *forwards* pour converger vers l'UFR depuis la dernière maturité liquide constatée sur le marché (actuellement 20 ans), en font partie. Ces deux paramètres pourraient être amenés à changer dans les prochaines années. C'est pourquoi une étude de sensibilité sur ces deux paramètres a été menée.

Ces paramètres impactent directement la courbe ajustée *forward*, puisqu'ils en modifient la limite et la vitesse de convergence. L'impact sur le BEL est directement corrélé à la courbe *forward* dans notre cas, l'actualisation ayant un impact plus important que la revalorisation dans la formule suivante :

$$BEL = \frac{PM_{finale}}{\prod_{i=1}^{N}(1 + r_{i-1,i})} + \sum_{i=1}^{N} \frac{(Prestations\ revaloris\acute{e}es_i - Cotisations\ revaloris\acute{e}es_i)}{\prod_{k=1}^{i}(1 + r_{k-1,k})}$$

Avec $r_{i-1,i}$ le taux d'intérêt entre $i - 1$ et i.

Une diminution de la durée de convergence aura tendance à faire remonter la courbe des taux, et ainsi à diminuer le BEL et augmenter le ratio de couverture de l'assureur. Une diminution de l'UFR aura en revanche l'effet inverse.

Conclusion

Les techniques d'ajustements, qu'il s'agisse des ajustements financiers ou « Smith Wilson improved », ont donc un réel impact sur les résultats d'un assureur, par le biais de la modification des scénarios économiques (courbes de taux, indices actions…).

La méthode des ajustements est utilisable en pratique dans un cadre $ORSA$, puisqu'elle permet de tenir compte de l'information Monde Réel générée par l'évolution de la période précédant le pas de projection.

Elle procure également un gain de temps important vis-à-vis d'une situation où seraient générés en 0 des jeux de scénarios Risque Neutre visant à couvrir tout le plan stratégique. A l'aide des ajustements, un seul jeu de scénarios Risque Neutre est généré.

Les ajustements « Smith Wilson improved » ont de plus été créés pour avoir une méthode consistante avec ce qui est fait en 0 dans le cadre du pilier 1.

Bien que montrant certaines limites, notamment le fait de considérer fixés certains paramètres de la méthode de Smith Wilson, cette méthode permet le calcul d'un SCR prospectif à l'aide d'une seule table de scénarios Risque Neutre et d'un unique scénario Monde Réel. Cela permettrait ainsi un gain de temps considérable pour certains assureurs.

Summary note

Introduction

The new $Solvency\ II$ set of rules, which will officially be applied on January 1st 2016, affects every insurance company in Europe, by making them comply with new requirements divided among three pillars. The second pillar forces the insurers to develop their own risk policy and to control their solvency needs throughout the whole strategic plan, which usually lasts 5 years. Thus, they can be determined solvent or not until an average extent by the European controller (the $EIOPA$).

This pillar will be the main focus of this thesis, which is set within an $ORSA$ (*Own Risk and Solvency Assessment*) framework. In order to comply with the rules of this kind of frameworks, insurers must compute their OSN (*Overall Solvency Needs*) to make sure they are solvent until an average extent. This computation can be inspired by the way the SCR is computed within the pillar 1, to which a few more risks are added, such as the sovereign risk. The SCR is the amount of capital a company must keep at any time so that they can avoid an economic bankrupt with almost certainty until a one year horizon.

Part I : The regulation context of this study

Since 2002, every insurance company in Europe has been complying with the $Solvency\ I$ set of rules, forcing them into quantitative requirements in order to determine whether they are solvent or not. However, these rules show some crucial weaknesses, as the fact that they are not standardized throughout Europe for instance, which may improve economic activity in some countries rather than some others.

Thus, once the (EIOPA, 2009) paper was released, it has been decided that a new European and equally applied set of rules would replace the previous one. This is the new $Solvency\ II$ regulation context, which will officially be applied on January 1st 2016.

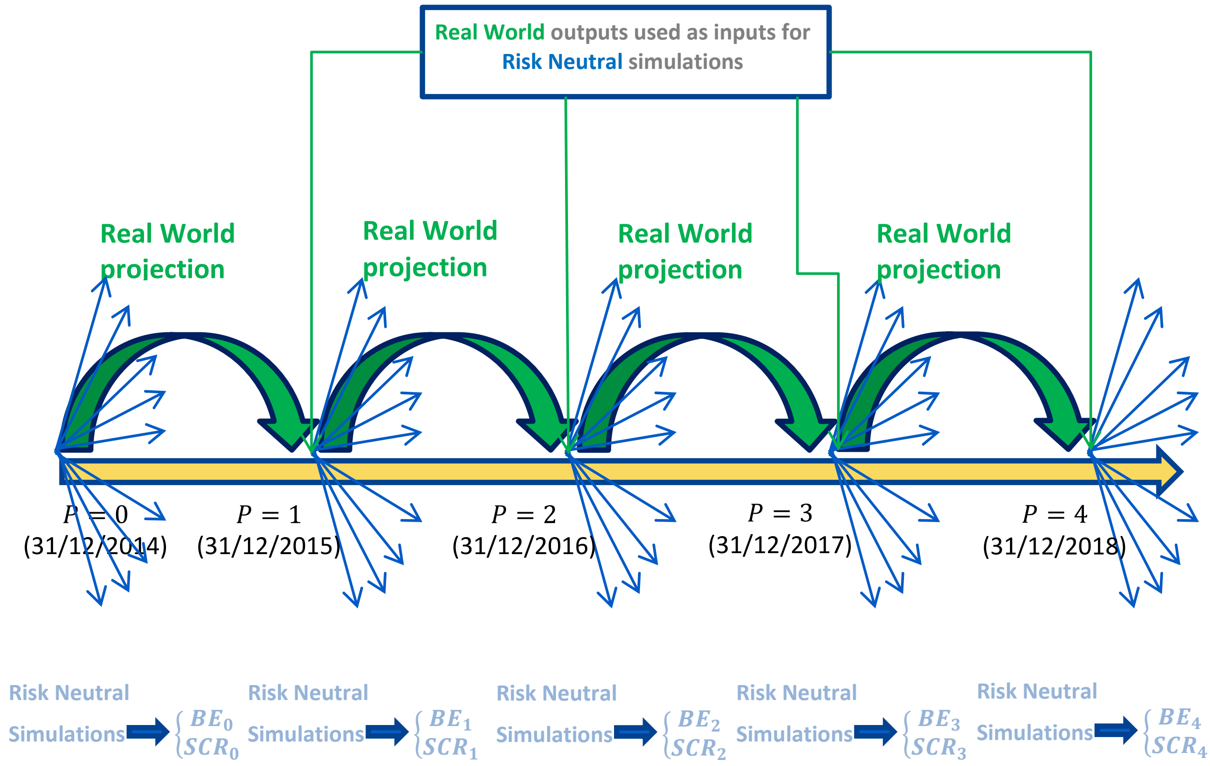
This set of rules is divided among three pillars, each one dealing with specific requirements. The pillar 2,for instance, split between quantitative and qualitative requirements, compels insurance companies to settle their own risk policy, and to control the evolution of their OSN until an average extent

In this thesis, the OSN has been considered equal to the prospective SCR. The prospective SCR is the SCR computed at every time step over the strategic horizon, using an $ORSA$ model.

Regarding life insurance companies, their liabilities require economic scenarios in order to be assessed. These scenarios represent the evolution of some economic factors, such as yield rates or stock values, throughout the time. They come from an Economic Scenarios Generator (ESG).

The computation of a prospective SCR, linked to the computation of liabilities, thus depends on the chosen scenarios.

The considered $ORSA$ model uses a unique Real World scenario in order to olden the company portfolios throughout the strategic plan. Risk Neutral scenarios are then used in order to assess the insurer's liabilities and to compute his Best Estimate of Liabilities (BEL) at every time step, as shown in the following picture :



Our $ORSA$ model will use the Standard Formula at every time step in order to assess the prospective SCR.

It would be interesting to find a method making one able to take into account the information given by the Real World scenario at every time step. The aim would indeed be to make a stochastic computation at every time step, in order to determine the insurer's liabilities, by reproducing the method used within the Pillar 1 framework, and with economic scenarios depending on the Real World projection information.

Part II : The adjustment methods

A way to take into account the information brought by the Real World scenarios in the Risk Neutral scenarios is to use the method known as the financial adjustments.

This method aims at simulating only two sets of economic scenarios at time $t = 0$ with the : a Real World one and a Risk Neutral one. Though, the second one would be depending on the first one at every time step.

The Risk Neutral set of scenarios, called "base set", is distorted by the use of a stochastic factor conditioned by the Real World scenario and the Risk Neutral simulation to be adjusted. The used formula is the following :

$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}$$

With :

- $P(H,n)$ a Zero-coupon price starting at time H with a maturity n
- $\hat{P}$ the adjusted Zero-coupon prices
- P^{RN} the prices coming from the base set
- P^{MR} the prices coming from the Real World simulation.

This method directly inject the Real World information, through the Zero-coupon prices, into the base set. Indeed, a Zero-coupon price starting at time t with a maturity m can also be written as $P(t,m) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^{t+m} r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right)$ with $\mathcal{F}_t$ the available information at time t. That is why the Real World information is implicitly carried by the Real World Zero-coupon prices. Alike formulas are used for the equity and property adjustments.

The interest of this formula is that it abides by numerous mathematical properties, such as the martingality or the reconciliation between adjusted and primary factors. The martingale property, in the yield rates case, is given by the following :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{P}(H+m,1) \times \widehat{D}(H,m)\middle|\mathcal{F}_H\right) = P^{MR}(H,m+1)$$

Where $\widehat{D}(H,m)$ is the adjusted deflator starting at time H and with a maturity m defined as :

$$D(H,m) = \prod_{i=0}^{m-1} P(H+i,1)$$

However, this method can have too much of an impact over the Risk Neutral curve to be adjusted. The Real World curve is, in our case, the market yield rates curve. The Risk Neutral yield curve is created starting from this market curve and using the Smith Wilson algorithm. This method is used by the $EIOPA$, the European regulator, in order to yearly produce the yield rates curve enabling insurers to assess their liabilities within the pillar 1 framelwork. This method aims at making the forwards rate curve converge to the Ultimate Forward Rate (UFR), which represents the long term forward rate. Its current value is 4.2% and is split between the expected future rate of the risk free bonds and the long term inflation rate.

The adjusted yield rates curves thus lose this convergence given their martingality with the market curves. Using them would then be inconsistent with the calculation made at time 0 within the pillar 1 framework. That is why another adjustment method had to be developed.

The main concern lying behind these new adjustments, is to apply the Smith Wilson algorithm to the market curve, forecast thanks to the Real World scenario at every time step. Zero-coupon prices coming from this Smith Wilson curve are then to be used in the classical adjustment formula, resulting in the following :

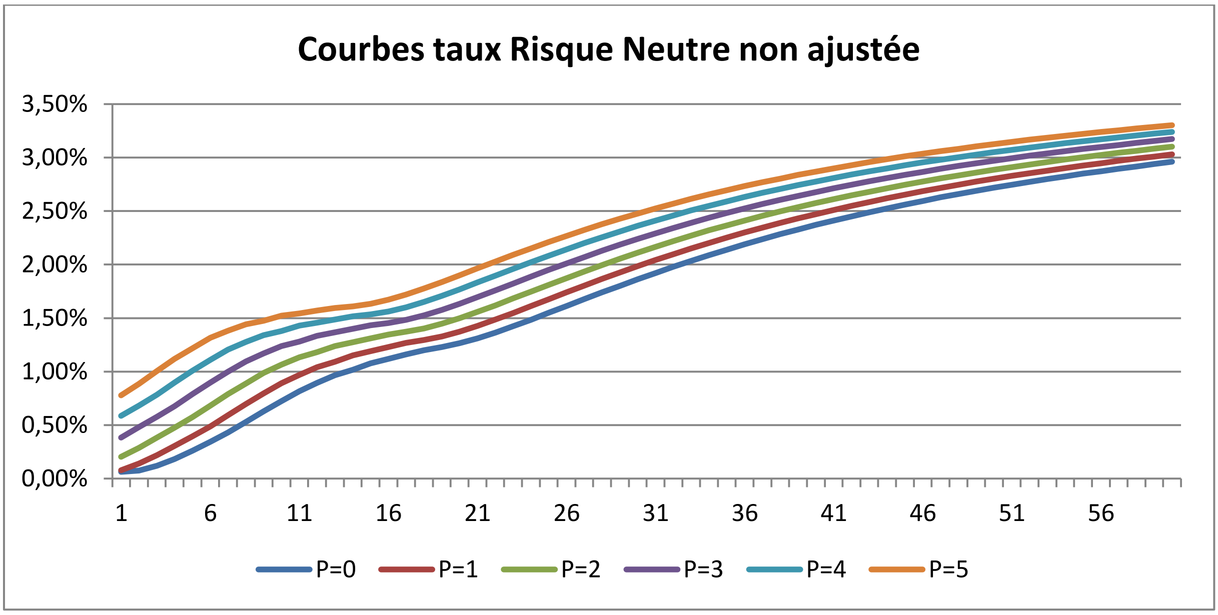
$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{SW}(H,m+n)}{P^{SW}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}$$

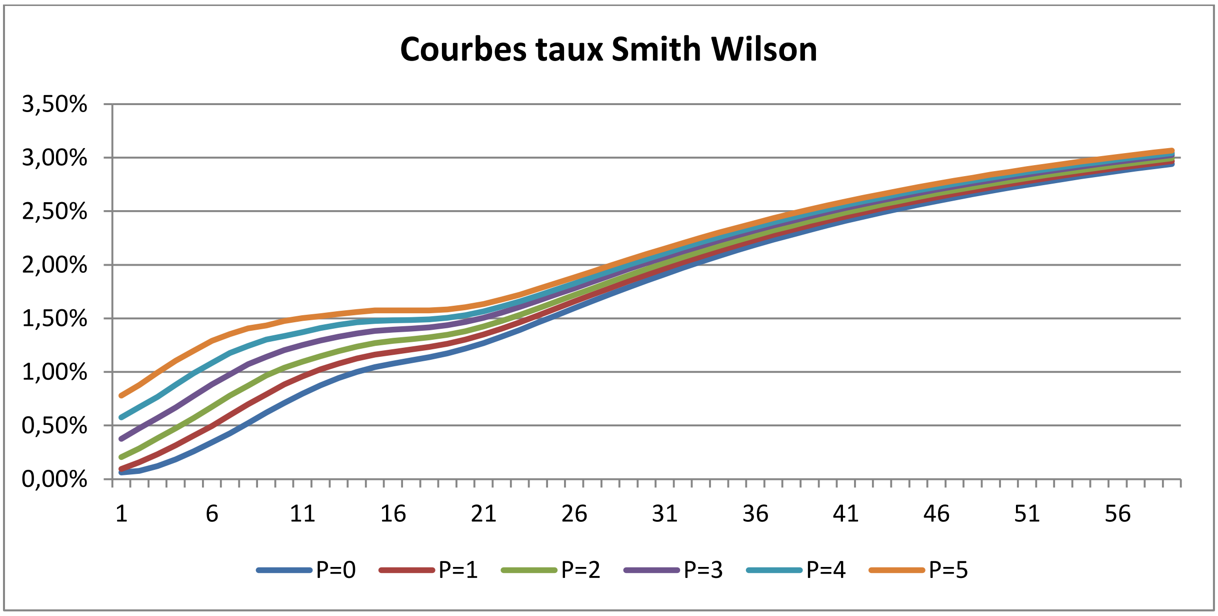
The same mathematical properties than before are verified. The information to be replaced is modified by the Smith Wilson algorithm before being injected in the Risk Neutral simulations. The adjusted curve thus keeps its convergence to the UFR.

It is now interesting to analyze the impact of this introduced dependency thanks to the new adjustments over the computation of the prospective SCR, made by the $ORSA$ model presented earlier.

Part III : Setting the adjustments within an ORSA framework

The Smith Wilson algorithm must then be used at every time step in order to produce the curves enabling us to use the “Smith Wilson improved” adjustments over the whole strategic plan. It would be quite interesting to compare the Smith Wilson curves to the Risk Neutral ones, usually used to assess the liabilities of the insurer.





Despite close shapes, mostly due to their shared limit (UFR), the curves can be easily distinguished after around 20 years, when the Smith Wilson curves tend to take the same values while the Risk Neutral ones do not. The Smith Wilson curves show that it is hard for an insurance company to forecast the evolution of the yield rates further than a couple of years.

However, some parameters of the Smith Wilson algorithm had to be fixed such as the previously defined UFR, or the Convergence Duration to the UFR (CD), which is the duration in years for the forwards rates curve to converge to the UFR (currently 20 years). These two parameters might be changed in a couple of years though, which is why sensitivity tests related to these parameters have been conducted.

These parameters directly modify the forward rates curve, by modifying either its limit or its convergence speed. The BEL is immediately correlated to this forward rates curve, according to the following formula :

$$BEL = \frac{PM_{finale}}{\prod_{i=1}^{N}(1+r_{i-1,i})} + \sum_{i=1}^{N} \frac{(Prestations\ revaloris\acute{e}es_{\,i} - Cotisations\ revaloris\acute{e}es_{\,i})}{\prod_{k=1}^{i}(1+r_{k-1,k})}$$

With $r_{i-1,i}$ the interest rate between $i-1$ and i.

Reducing the convergence duration will make the yield rates curve take higher values, and thus will diminish the BEL and increase the insurer’s solvency ratio. Otherwise, reducing the UFR will have the opposite result.

<u>Conclusion</u>

The adjustment methods, whether the financial or « Smith Wilson improved », have a noticeable impact over the results of an insurance company, through the modification of the economic scenarios (yield rates curves, equity simulations…).

The adjustments methods can be used within an $ORSA$ framework, and are mostly meant to be used this way, given that they make one able to inject the information obtained through the Real World projection in the Risk Neutral simulations used in order to assess the liabilities of the insurance company. These methods are also really time saving compared to a situation where all the economic scenarios would be generated at time 0. The adjustments only need to generate two sets of economic scenarios.

Furthermore, the « Smith Wilson improved » adjustment has been developed in order to be consistent with the method used at time 0 within the pillar 1 framework, through the whole strategic plan.

Even if some limits of these adjustments can be exposed, they still remain reliant and flexible compared to most of the methods currently employed.

Remerciements

Je tiens dans un premier temps à remercier le pôle Vie d'Actuaris, tant pour l'accueil chaleureux que ses membres m'ont réservé que pour la disponibilité dont ils ont su faire preuve afin de m'aider lorsque j'en montrais le besoin.

Je tiens à remercier particulièrement Eléonore HAGUET et Anne-Claire MARTIAL qui m'ont encadré et m'ont consacré énormément de leur temps, souvent au-delà du cadre du travail, afin de m'aider et de me faire grandir au sein de l'équipe. Leurs conseils avisés et leur expérience m'ont énormément appris et je suis très heureux qu'elles m'aient supervisé durant mon année de mémoire. Je ne peux que les remercier du fond du cœur pour tout ce qu'elles m'ont apporté, et leur garantir toute ma gratitude.

Je remercie également David MARIUZZA d'avoir été mon tuteur au sein d'Actuaris et de m'avoir aidé à m'intégrer facilement lors de mon arrivée. Je le remercie également de m'avoir fait partager à de nombreuses reprises sa connaissance du monde de l'assurance et son avis éclairé sur diverses problématiques.

Je remercie Virak NOU de m'avoir accueilli dans son équipe et d'avoir contribué à mon intégration en faisant fi du clivage entre un associé et un stagiaire.

Je remercie Stéphane LOISEL d'avoir été mon tuteur académique à l'ISFA, et pour ses conseils sur les pistes de développement du sujet de mémoire.

Je remercie également ma famille, qui m'a permis d'en arriver là en me soutenant quelle que soit la situation et dans tous les moments difficiles.

Introduction

Le pilier 2 de la nouvelle directive $Solvabilité\ II$ requiert que les assureurs mettent en place un processus $ORSA$ visant à les aider à gérer leurs risques afin de prendre des décisions stratégiques pouvant améliorer la santé économique de l'entreprise. En effet, comme le définit l'article 45 de $Solvabilité\ II$, le processus $ORSA$ doit permettre d'évaluer les risques et la solvabilité de la compagnie à moyen terme, à savoir sur la durée du plan stratégique (généralement 3 à 5 ans).

Les exigences du pilier 2 de la directive ont donc un aspect qualitatif avec la mise en place de ce processus. Elles revêtent également un caractère quantitatif, puisque l'assureur doit être en mesure de calculer son Besoin Global de Solvabilité (BGS) sur toute la durée du plan stratégique. Il s'agit du capital requis à moyen terme, afin de s'assurer de la solvabilité de l'entreprise.

Il est possible de considérer que le BGS est équivalent au *Solvency Capital Requirement* (SCR) prospectif, c'est-à-dire au SCR sur l'ensemble de la durée du plan stratégique. Une méthode de calcul de ce BGS, qui a été choisie dans le cadre de ce mémoire, est d'utiliser la formule standard à chaque pas de temps.

Cependant, le BGS peut être calculé de différentes manières. Par exemple, d'autres risques que ceux préconisés par la Formule Standard auraient pu être pris en compte pour ce calcul. En effet, des risques tels que le risque souverain, le risque d'inflation ou le risque de réputation sont omis de la Formule Standard, mais sont parfois considérés dans la détermination du BGS. La modélisation et la quantification de ces risques impacteraient ainsi la valeur finale du Besoin Global de Solvabilité de la compagnie. Il aurait également été envisageable de relâcher certaines contraintes liées à la Formule Standard, comme par exemple le seuil de probabilité de ruine à 1 an de $0{,}5\%$. Ce seuil pourrait, sous réserve de justification, être moins « contraignant » sur un horizon de plusieurs années. De même, certains assureurs choisissent, dans leur calcul de BGS, de modifier les corrélations utilisées dans la Formule Standard lorsqu'ils les jugent peu en accord avec leurs portefeuilles. Enfin, d'autres méthodes indépendantes de la Formule Standard pourraient être utilisées à condition que leur emploi soit justifié.

Ce ne sont pas les choix qui ont été faits dans ce mémoire, puisque le BGS a été assimilé au SCR prospectif calculé par la Formule Standard, comme cela a été mentionné précédemment. En effet, dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéresserons à l'évolution des indices économiques, c'est pourquoi nous conserverons une métrique identique au cas du pilier 1 sur toute la durée du plan stratégique.

Le modèle $ORSA$ utilisé appliquera donc la Formule Standard à chaque pas de projection. Pour cela, dans un premier temps, les portefeuilles de l'entreprise sont vieillis à l'aide d'une unique simulation Monde Réel. Un jeu de simulations Risque Neutre est ensuite utilisé à chaque pas de temps, afin de valoriser les engagements de la compagnie et de calculer un *Best Estimate of Liabilities* (BEL). Le SCR prospectif peut alors être déduit de ce qui précède, en obtenant les Fonds Propres de la compagnie dans les situations choquées et non choquées à l'aide de la différence entre la valeur de marché des actifs et le BEL.

Il faudrait cependant conditionner les scénarios Risque Neutre par le scénario Monde Réel utilisé, afin d'avoir une approche cohérente vis-à-vis de l'évolution des facteurs de risque. En effet, l'hypothèse est faite de supposer l'évolution du marché identique à celle de la simulation Monde Réel. Nous savons qu'en 0, la courbe des taux utilisées permettant la valorisation des engagements de l'assureur et ainsi, la détermination du BEL, dépend des données de marché (transformées à l'aide de la méthode de Smith Wilson). Il faudrait donc que cette dépendance soit répliquée aux pas de projections suivants afin d'assurer une cohérence avec les calculs menés en 0.

L'enjeu de ce mémoire est donc d'étudier une méthode permettant d'introduire ce conditionnement. Ce mémoire s'inscrit ainsi dans un cadre $ORSA$, et vise à utiliser la technique dite des ajustements SdS financiers dans un premier temps, afin de créer des jeux de simulations Risque Neutre conditionnés par la simulation Monde Réel à chaque pas de temps.

Une méthode complémentaire est ensuite introduite afin de pallier l'impact trop important de la technique des ajustements SdS financiers sur les facteurs économiques (taux, rendements des actions...). Cette méthode des ajustements « Smith Wilson improved » se base sur l'algorithme de Smith Wilson que l'$EIOPA$ utilise afin de délivrer la courbe des taux annuelle permettant aux assureurs de valoriser leurs engagements.

La première partie présentera ainsi le cadre réglementaire de $Solvabilité\ II$ dans lequel s'inscrit ce mémoire, et sa transition depuis $Solvabilité\ I$ actuellement en vigueur.

Puis, la deuxième partie présentera les fondements théoriques des méthodes d'ajustement évoquées précédemment, ainsi que les propriétés mathématiques qui y sont associées.

La troisième partie se concentrera sur les modèles utilisés au sein de ce mémoire (modèle $ORSA$ et ESG). Elle comprendra également l'étude de l'impact de l'utilisation des ajustements « Smith Wilson improved » sur les résultats économiques de la compagnie d'assurance modélisée, ainsi que des tests de sensibilité sur les hypothèses considérées.

I. Cadre réglementaire

Les thématiques abordées dans ce mémoire ont pour visée principale le calcul d'un *Solvency Capital Requirement* (SCR) à horizon variable. Cette grandeur est définie dans le pilier 1 du nouveau cadre réglementaire $Solvabilité\ II$, qui sera mis en application le 1[e] janvier 2016. Il est donc fondamental, dans un premier temps, de présenter cette directive de manière générale, ce qui aboutira notamment à la définition du capital économique.

A. Solvabilité I et transition vers le cadre Solvabilité II

La notion de solvabilité d'une compagnie d'assurance représente la capacité de la société à respecter ses engagements envers les assurés. La volonté de protection de l'assuré est très largement prônée au niveau des réglementations délivrées par l'$EIOPA$ (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*), le législateur européen.

Les réglementations définissant la solvabilité requise d'une compagnie d'assurance sont actuellement appliquées en accord avec le référentiel $Solvabilité\ I$, jusqu'au 1[e] janvier 2016 où $Solvabilité\ II$ entrera officiellement en vigueur. Il convient de s'intéresser brièvement au cadre actuel afin d'en définir les limites qui ont amené à la création de $Solvabilité\ II$.

1. Solvabilité I

La réglementation actuelle $Solvabilité\ I$ impose aux assureurs de produire un bilan contenant des données clés permettant d'évaluer la santé financière de l'entreprise.

Le bilan d'une entreprise symbolise son patrimoine à un instant donné, et est décomposé en deux postes principaux :

- L'actif, qui représente l'ensemble des biens détenus par la compagnie (placements financiers, immobiliers, créances …)
- Le passif, qui est divisé en Fonds Propres (FP) et Provisions Techniques (PT).

Les fonds propres représentent la richesse de la compagnie, c'est-à-dire la somme du capital initial et des résultats comptables non distribués. Les provisions techniques, quant à elles, sont la représentation de la dette contractée par l'assureur afin d'honorer ses engagements.

L'égalité comptable classique entre l'actif et le passif se traduit par l'équation :

$$\boxed{Actifs\ comptables = Fonds\ Propres + Provisions\ Techniques}$$

Dans le référentiel $Solvabilité\ I$, les postes du bilan sont évalués prudemment, en accord avec les principes de comptabilité générale français.

Les actifs sont valorisés en coût historique c'est-à-dire au prix d'achat du titre qui correspond à la valeur comptable, contrairement à la valorisation sous $Solvabilité\ II$ qui est effectuée en valeur de marché, sous la probabilité Risque Neutre. La probabilité Risque Neutre considère que l'espérance des actifs actualisés sous cette probabilité est égale au rendement de l'actif sans risque. Ces notions seront détaillées dans la partie III.A.1.a) Univers Monde Réel et Risque Neutre.

Le régulateur européen, l'$EIOPA$, impose un niveau minimum de fonds propres, appelé l'exigence de marge de solvabilité. L'insolvabilité sous $Solvabilité\ I$ veut donc dire que les fonds propres de la compagnie sont inférieurs à cette exigence.

La marge de solvabilité est définie de manière différente selon qu'il s'agisse d'assurance vie ou non-vie.

- En assurance vie, il s'agit de la somme d'un pourcentage des provisions mathématiques (4% pour les contrats à support euro et 1% pour ceux à support en unités de compte) et d'un pourcentage des capitaux sous risque variant entre $0{,}1\%$ et $0{,}3\%$ suivant la durée de l'engagement.
- En assurance non-vie, il s'agit du maximum entre une fonction du montant annuel des primes et une fonction de la charge annuelle de sinistres.

La marge de solvabilité dépend également du système de réassurance mis en place.

Un bilan comptable sous $Solvabilité\ I$ a donc la forme suivante :

Actif	Passif
Actifs en valeur comptable	Excédent de marge
	Exigence de marge de solvabilité
	Provisions techniques

Tableau I-1 - Bilan comptable assureur sous $Solvabilité\ I$

Bien que $Solvabilité\ I$ permette un calcul et un audit simples des normes quantitatives, certaines limites majeures peuvent être mises en évidence :

- Les exigences règlementaires de solvabilité ne tiennent pas compte de la spécificité des risques portés par l'assureur.

- Le calcul de la marge de solvabilité se base sur l'hypothèse que ce qui s'est produit dans le passé permet d'évaluer le futur. Ceci ne permet pas de refléter la réalité économique.
- Les interactions entre l'actif et le passif ne sont pas considérées.
- Le référentiel $Solvabilité\ I$ est censé être appliqué en tant que directive européenne, ce qui n'est en pratique pas le cas étant donné qu'elle est transposée pour satisfaire aux normes de chaque pays.

Le Parlement Européen a donc décidé qu'un nouveau cadre de régulation uniforme devait être mis en place pour qu'il puisse y avoir une concurrence équitable, une politique de gestion des risques intégrée aux compagnies et une meilleure modélisation des contrats d'assurance, qui sont des objets généralement complexes.

2. Solvabilité II

L'objectif principal de $Solvabilité\ II$ est la correction des limites de la réglementation actuellement en vigueur, évoquées auparavant, toujours dans un esprit de protection optimale de l'assuré. Cela passe donc par une meilleure prise en compte des risques auxquels les compagnies d'assurance peuvent être confrontées, par une équité entre les divers acteurs du marché européen, quel que soit leur pays d'origine, et par une responsabilisation des assureurs, notamment via l'*Entreprise Risk Management* (ERM) que l'on évoquera par la suite.

Cette nouvelle directive s'articule autour de trois piliers, correspondant chacun à des exigences particulières, auxquels les assureurs sont tenus de se conformer. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter la Directive Omnibus 2 (EIOPA, 2009) et l'acte délégué la mettant à jour (EIOPA, 2014).

a) Le pilier 1 : les exigences quantitatives

Le pilier 1 a pour visée principale le calcul des provisions techniques, la définition du *Solvency Capital Requirement* (SCR), qui est l'exigence règlementaire en capital de l'assureur, et la production du bilan économique.

En effet, l'introduction d'un bilan économique est un des fondements de $Solvabilité\ II$, en opposition avec la norme précédente. Celui-ci se construit avec l'évaluation de l'actif et du passif à leur juste valeur (*Fair Value)* et non plus en coût historique. Les actifs seront valorisés en valeur de marché et les passifs à l'aide de la méthode *Best Estimate* (la meilleure estimation des passifs).

Pour faire le lien avec la définition du bilan $Solvabilité\ I$ présentée précédemment, il convient de s'intéresser à la répartition entre les provisions techniques et les exigences en capital.

➢ *Provisions techniques*

Dans le référentiel $Solvabilité\ II$, les provisions techniques correspondent à la somme du *Best Estimate of Liabilities* (BEL) et de la marge pour risque (MR).

Le BEL est défini comme la meilleure estimation des passifs, et correspond à la moyenne des flux futurs de passifs (prestations, frais …) pondérés par leurs probabilités d'occurrence et actualisés à l'aide de la courbe des taux sans risques. Cela correspond à la formule suivante :

$$BEL = \mathbb{E}^{\mathbb{P}\times\mathbb{Q}}\left[\sum_{i\geq 1} FluxPassifs_i \delta_i\right] \tag{1}$$

Avec δ_i le facteur d'actualisation de la période i, $\mathbb{P}$ la probabilité historique et $\mathbb{Q}$ la probabilité Risque Neutre. Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter (Planchet et al., 2012)

La notation $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ est utilisée pour symboliser la répartition du portefeuille de l'assureur entre les risques couvrables et non couvrables.

Les flux pris en compte sont ceux générés par les contrats en cours (le new-business n'est pas considéré).

Le BEL englobe l'ensemble des risques couvrables, dont les flux sont réplicables par des instruments financiers. En fixant les hypothèses de complétude et de liquidité du marché, ainsi que d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA), le portefeuille constitué peut être valorisé sous la probabilité Risque Neutre $\mathbb{Q}$, et ainsi définir la provision à constituer pour ces risques. La mesure $\mathbb{Q}$ est définie comme étant la probabilité sous laquelle tous les actifs ont le rendement de l'actif sans risque.

Il est cependant nécessaire d'ajouter une marge pour risque afin de se protéger contre les risques non couvrables (rachats, longévité …) valorisés sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. Afin de les quantifier, il convient de mesurer le coût de transfert de ces risques à un tiers. Ce coût équivaut à celui de l'immobilisation des fonds propres induite par ces passifs. Cette marge pour risque est explicitement définie par :

$$MR = CoC \times \sum_{i\geq 0} \frac{\mathbb{E}[SCR_t]}{(1+r_{t+1})^{t+1}} \tag{2}$$

En notant :

- SCR_t : le besoin de fonds propres associé aux risques non couvrables en t,
- r_t : le taux d'intérêt de maturité t,
- CoC : le *Cost of Capital,* ou Coût d'immobilisation du Capital, actuellement fixé à 6% par l'$EIOPA$.

➢ *Exigences en capital*

A l'instar de $Solvabilité\ I$, la directive $Solvabilité\ II$ demande aux assureurs de constituer des réserves de capitaux afin de couvrir leurs engagements.

Les fonds propres économiques (FP) sont définis par la différence entre la valeur de marché de l'actif et la valeur économique des passifs (VEP). Il existe donc la relation :

$$FP = VM - (BE + MR) \tag{3}$$

L'entreprise doit donc détenir un montant de fonds propres réglementaire pour être en mesure d'assumer ses engagements à horizon 1 an sans faire faillite. La ruine économique est définie par la négativité des fonds propres économiques.

$Solvabilité\ II$ définit explicitement deux niveaux d'exigence en capital :

- Le *Minimum Capital Requirement* (MCR), qui est le niveau de fonds propres en dessous duquel l'assureur n'aurait plus la capacité de respecter les engagements contractés auprès de ses assurés. Le non-respect de cette exigence peut résulter en un retrait de l'agrément d'assurance.
- Le *Solvency Capital Requirement* (SCR) est le montant de fonds propres dont doit disposer l'assureur pour avoir une probabilité d'éviter la ruine économique de 99,5% à horizon 1 an comme défini dans l'article 101 de la directive (EIOPA, 2009). Il est interprétable par la formule suivante, en notant FP_t la quantité de fonds propres détenus par l'entreprise en t :

$$\mathbb{P}(FP_1 \leq 0 | FP_0 = SCR) = 0{,}5\% \tag{4}$$

La nouvelle législation de l'$EIOPA$ impose aux assureurs de détenir des fonds propres en quantité supérieure aux deux seuils définis précédemment. En comparaison avec le bilan représenté précédemment, le bilan économique sous $Solvabilité\ II$ a la forme suivante :

Actif	Passif
Actifs en valeur de marché	Excédent
	SCR
	MCR
	Marge pour risques
	Best Estimate

Tableau I-2 Bilan économique assureur Solvabilité II

La présentation du calcul du SCR selon les approches dites « formule standard » et « modèle interne » sera présentée de manière plus détaillée dans la partie I.B) Focus pilier 1 : les différentes méthodes de calcul du SCR à horizon 1 an.

b) Le pilier 2 : Mise en place d'une politique interne de gestion des risques

Le pilier 2 s'inscrit dans la continuité du pilier 1 mais présente des différences fondamentales avec celui-ci. La démarche de création d'une politique de gestion des risques a en effet des aspects aussi bien qualitatifs que quantitatifs, en opposition par rapport au pilier 1 purement quantitatif.

Un des buts de ce pilier est de mettre en place une gestion interne des risques, permettant à la compagnie de contrôler l'évolution de ses risques sur tout le plan stratégique. L'horizon est alors généralement de 3 à 5 ans contrairement à celui d'un an du pilier 1.

La visée est donc l'instauration d'une politique ERM (*Entreprise Risk Management*) et d'un processus $ORSA$ (*Own Risk Solvency Assessment*) qui permettront à la compagnie, au travers de différentes exigences et de contrôles de l'$EIOPA$, d'être cohérente avec la logique de protection de l'assuré déjà instaurée à court terme par le pilier 1.

L'$ORSA$ a réellement pour vocation d'être une aide à la décision pour les compagnies, en fonction de leurs risques. Il ne s'agit pas simplement de nouvelles exigences quantitatives visant à s'assurer de la solvabilité de l'entreprise à moyen terme, bien que cela fasse partie de la directive.

Une présentation plus approfondie de ce pilier sera réalisée dans la partie I.C) Focus pilier 2 : les exigences qualitatives et quantitatives dans un cadre ORSA.

c) Le pilier 3 : Reporting et communication

Ce troisième et dernier pilier de $Solvabilité\ II$ vise à instaurer une transparence du marché aux yeux du public, en imposant des communications d'information suffisamment importantes et régulières pour que les assurés et les acteurs financiers puissent avoir une vision claire de la situation de chaque compagnie d'assurance.

Ce pilier impose également de fournir aux régulateurs locaux (l'$ACPR$ pour la France) un *reporting* détaillé doté de données clés permettant d'évaluer le respect des consignes imposées par la directive européenne.

Bien que la problématique de ce mémoire se situe au niveau du pilier 2 de la nouvelle directive, il convient de s'intéresser aux différentes méthodes de calcul du SCR en pilier 1 car elles seront utilisées de manière adaptée dans le cadre de l'$ORSA$.

B. Focus pilier 1 : les différentes méthodes de calcul du SCR à horizon 1 an

Le calcul du capital économique requis (SCR) sous $Solvabilité\ II$ remplace les exigences de marge de solvabilité que définissait $Solvabilité\ I$. Comme cela a été évoqué précédemment, le SCR est le montant de fonds propres dont doit disposer l'assureur en 0 afin d'éviter une ruine économique à horizon 1 an avec un niveau de certitude de 99,5%.

Si cette contrainte est satisfaite, la relation suivante existe alors :

$$\mathbb{P}(FP_1 \geq 0) \geq 99{,}5\%$$

Il est possible d'approximer ce capital économique requis par la formule suivante (voir (Devineau & Loisel, 2009) pour la preuve détaillée) :

$$SCR = FP_0 - VaR_{0,5\%}\left(FP_1 \times e^{-\int_0^1 r(u)du}\right)$$

Où FP_1 représente la distribution des fonds propres en $t = 1$ et r le taux de rendement de l'actif. En supposant que l'actif évolue au taux zéro-coupon, la simplification suivante apparaît :

$$SCR \approx FP_0 - P(0{,}1) \times VaR^{\mathbb{P}}_{0,5\%}(FP_1) \quad (5)$$

En notant $P(0{,}1)$ la valeur actuelle d'une obligation zéro-coupon de maturité 1 an.

En pratique, la détermination de la distribution des fonds propres à 1 an peut s'avérer complexe. C'est pourquoi l'$EIOPA$ propose deux méthodes de calcul du capital économique :

- La méthode « formule standard », fournie par l'$EIOPA$, permet un calcul « simple » du SCR. Le but est de fournir une démarche générale pouvant s'appliquer à tout portefeuille d'assurance.
- La méthode « modèle interne », doit être développée par chaque compagnie l'employant. Les modèles ainsi construits sont soumis à l'approbation du régulateur afin d'être retenus, et doivent apporter une plus-value par rapport à la formule standard (une meilleure définition du profil de risque de la compagnie…)

Ces deux méthodes vont maintenant être détaillées.

1. La formule standard

L'$EIOPA$ propose l'utilisation de la formule standard pour permettre aux assureurs, quelle que soit leur taille, de calculer leur exigence de solvabilité en prenant en compte les risques les plus « classiques » auxquels ils sont exposés et leur interdépendance. En effet, leur modélisation étant particulièrement complexe, le régulateur a décidé de fournir une méthode générale de calcul, simplifiée, et surtout adaptée à la plupart des assureurs européens. Cette méthode est présentée dans le Règlement Délégué 2015/35.

Cette approche est modulaire, c'est-à-dire que le calcul du SCR sera dans un premier temps décomposé en un calcul pour chaque risque, qui seront par la suite agrégés à l'aide des matrices de corrélation fournies.

Il convient pour l'assureur de savoir, dans un premier temps, quels sont les risques auxquels il est exposé selon la segmentation ci-après, afin de calculer un capital économique pour chacun des modules concernés :

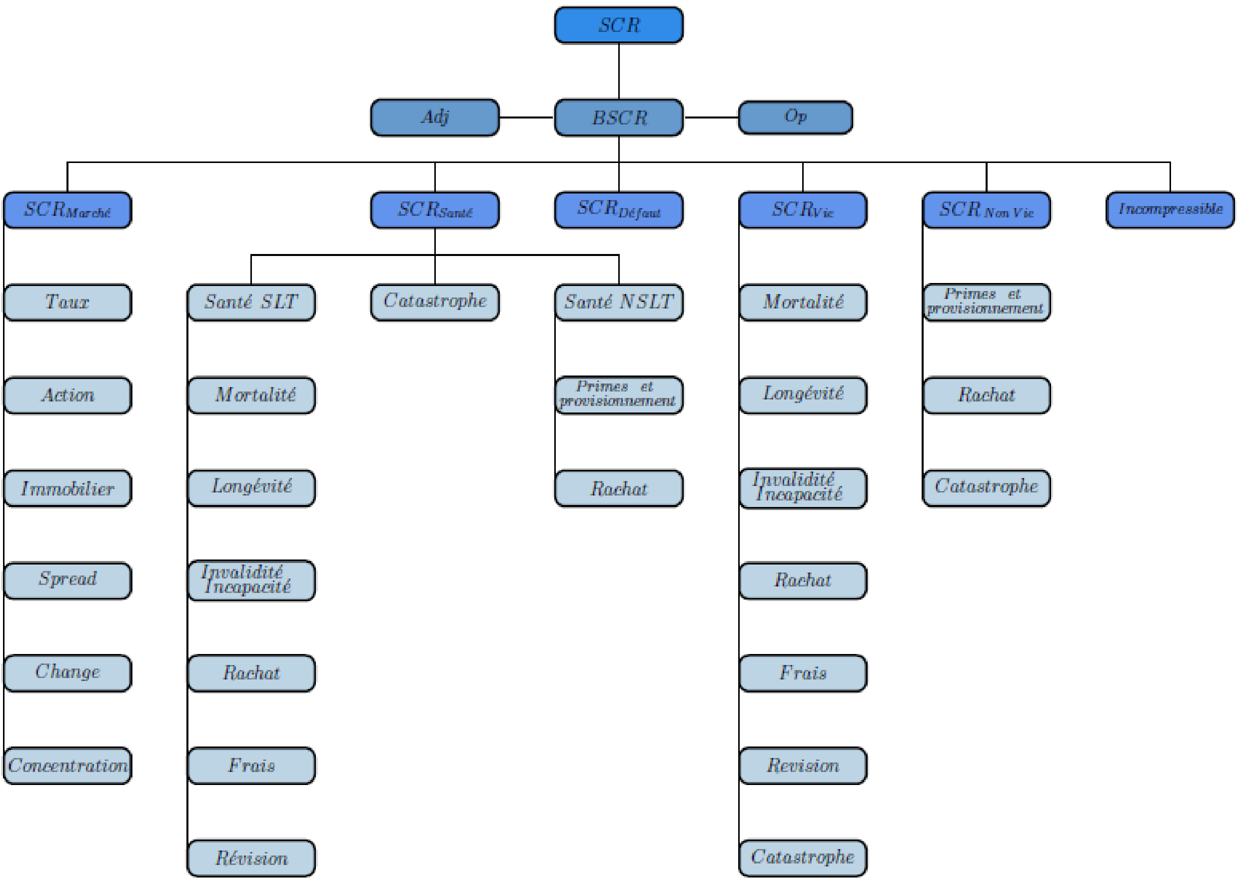


Figure I-1 - Diagramme modulaire de segmentation des risques en formule standard

Pour chacun des risques précédemment identifiés, il va falloir déterminer un capital économique qui correspond à la différence en $t = 0$ entre les fonds propres issus du scénario central et ceux issus du scénario choqué :

$$C = FP_0^{central} - FP_0^{choqué} \tag{6}$$

Le scénario central est défini dans ce cadre théorique, comme le scénario basé sur la courbe des taux $EIOPA$ délivrée annuellement.

Les chocs sont définis par l'$EIOPA$ et peuvent concerner différents risques. Il pourrait s'agir, par exemple, d'un choc de baisse des actions pour le module « Action » ou d'une mortalité extrême pour la brique « Mortalité ». Certains risques ne font cependant pas l'objet d'un choc de scénario, comme le risque opérationnel par exemple, et sont quantifiés de manière forfaitaire.

Il convient ensuite d'effectuer une agrégation intra-modulaire des capitaux pour chaque module de risque m (Marché, Vie, Non-Vie …) :

$$SCR_m = \sqrt{\sum_{(i,j)\in R_m^2} \rho_{i,j}^{R_m} \, C_i C_j}$$

Avec SCR_m le capital économique requis associé au module de risque m, C_i le capital économique associé au risque élémentaire « i » et $\rho_{i,j}$ la corrélation entre les risques élémentaires au sein d'un même module.

Enfin, l'agrégation inter-modulaire selon les différentes catégories de risques (Marché, Vie…) permet d'obtenir le $BSCR$ (*Basic Solvency Capital Requirement*) :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{(i,j)\in M^2} \rho_{i,j}^{M} SCR_i SCR_j} \tag{7}$$

Cependant, la formule standard montre certaines limites. En effet, elle sous-tend des hypothèses fortes notamment sur la linéarité des coefficients de corrélation entre les risques économiques, et sur la linéarité de la distribution de perte du portefeuille d'assurance en fonction des facteurs de risque.

2. L'approche modèle interne

L'$EIOPA$ propose une alternative aux assureurs, sous réserve de justifications de sa nécessité et de l'approbation du régulateur. Il leur est permis de construire un modèle interne par leurs propres moyens, visant au calcul du capital économique.

Il s'agit pour l'assureur d'avoir un modèle captant mieux son profil de risques que ne pourrait le faire la formule standard. L'approche modèle interne se base généralement sur l'obtention de la distribution des fonds propres en $t = 1$ afin de déterminer la probabilité de ruine de l'assureur en trouvant le quantile empirique de la distribution.

Il existe une méthode dite des « Simulations dans les Simulations » (SdS) qui semble être parmi les plus conformes à la législation imposée par $Solvabilité\ II$ vis-à-vis du calcul du SCR. Elle se décompose en deux étapes :

- 1e étape : La ruine économique est définie par l'évènement $\{FP_1 < 0\}$ ce qui signifie qu'il faut s'intéresser à la distribution de fonds propres en $t = 1$ pour déterminer le SCR. Il est nécessaire d'imposer un conditionnement de 1e période en univers Monde Réel pour obtenir cette distribution. Pour cela, les différents facteurs de risque retenus (courbes des taux, indices action, indices immobiliers…) sont projetés à horizon 1 an en univers Monde Réel, c'est-à-dire en se basant sur la réalité historique des dernières années. Des définitions plus détaillées des univers Monde Réel et Risque Neutre seront données dans la partie III.A.1.a) Univers Monde Réel et Risque Neutre.

Les différents scénarios de projections des facteurs de risque créent un jeu de situations économiques différentes qui pourraient être observées en $t = 1$. Ces simulations sont dites « primaires ».

- 2^e^ étape : La situation en $t = 1$ est ainsi conditionnée par l'évolution Monde Réelle de première période (les projections « primaires »). Ce conditionnement est nécessaire pour le calcul d'un BE en $t = 1$ permettant l'obtention d'une distribution de fonds propres. Les différents postes du bilan sont alors calculés de manière *Market consistent*, c'est-à-dire que des jeux de scénarios économiques Risque Neutre seront utilisés pour valoriser les différentes variables économiques recherchées (les actifs actualisés sous la probabilité risque neutre sont des martingales et ont le même rendement que l'actif sans risque). En se servant de ce nouveau jeu de simulations, dites « secondaires », à conditionnement Monde Réel fixé, une valeur de fonds propres économiques est obtenue pour chaque simulation primaire.

La distribution des fonds propres en $t = 1$ est ainsi obtenue, donnant le quantile empirique qui permettra le calcul de : $SCR \approx FP_0 - P(0,1) \times VaR^{\mathbb{P}}_{0,5\%}(FP_1)$.

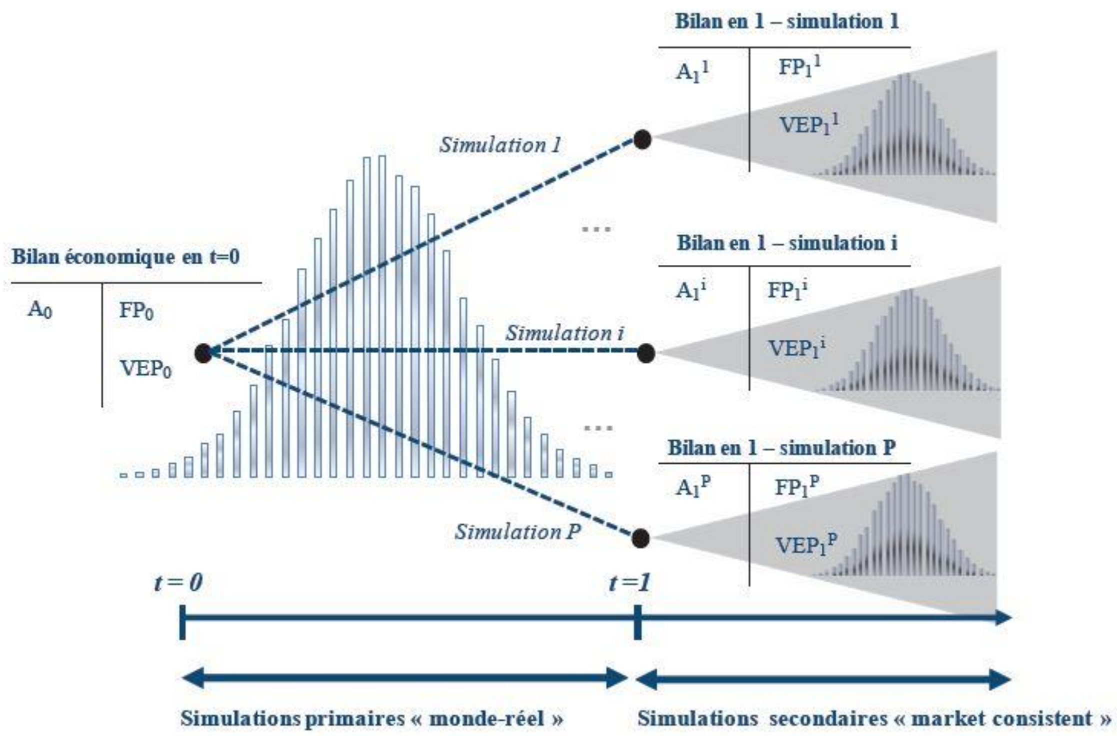


Figure I-2 - Schéma de fonctionnement de la méthode SdS (Source Devineau et Loisel, 2009)

Le schéma précédent illustre le fonctionnement d'une méthode SdS en pratique.

Le pilier 1 n'est cependant pas le seul lot d'exigences quantitatives imposées par le régulateur. En effet, à celles-ci viennent s'ajouter les exigences du pilier 2. Cependant, le pilier 2 n'est pas constitué uniquement d'exigences quantitatives. En effet, certaines exigences qualitatives doivent également être respectées.

C. Focus pilier 2 : les exigences qualitatives et quantitatives dans un cadre ORSA

La Directive $Solvabilité\ II$ impose aux assureurs des exigences de solvabilité purement quantitatives à horizon 1 an au sein du pilier 1. Cependant, toujours dans une logique de protection de l'assuré, il est important de souligner qu'être protégé d'une ruine économique à horizon 1 an avec un degré de confiance fixé, peut ne pas suffire. Il est en effet fondamental pour une compagnie d'assurance de savoir évaluer et gérer ses propres risques, comme cela est défini dans l'article 45 de la directive (EIOPA, 2009).

La mise en place d'une entité ERM et d'un processus $ORSA$ est donc fondamentale, et doit être réalisée par l'entreprise (sous le contrôle et sous réserve d'approbation du régulateur). Ce processus doit être au cœur des décisions stratégiques de la compagnie, et doit lui permettre d'avoir une approche claire quant à sa politique de gestion des risques.

1. L'ERM et l'ORSA

a) L'Entreprise Risk Management (ERM)

L'$ORSA$ ayant des exigences tout aussi qualitatives que quantitatives, il est fondamental de définir correctement les premières pour montrer que cet aspect ne doit pas être écarté au profit de la production de résultats numériques.

Il convient dans un premier temps de rappeler que l'$ORSA$ s'inscrit avant tout dans une démarche de gestion des risques ERM, définie par le $COSO\ II$ (*Committe Of Sponsoring Organizations of the Treadway Commission)* en collaboration avec Deloitte en 2012 (cf *Risk assessment in practice*, 2012). Le $COSO$ a pour objectif de réactualiser les principes généraux de l'ERM pour s'accorder avec les besoins du marché. Actuellement, trois catégories regroupant six étapes au total se dégagent de ces directives : l'identification des risques, l'évaluation des risques et la gestion des risques.

Les six étapes s'inscrivant dans les trois catégories explicitées précédemment sont les suivantes :

- *Identify risks* (ou *Identification des risques)*
  L'identification des risques précède leur évaluation et génère une liste de risques et d'opportunités regroupés par catégories (risques de marché, risques opérationnels…). L'idée est alors de capter l'ensemble des risques auxquels est soumise la compagnie, et de les prioriser par la suite par le biais d'une cartographie des risques.

- *Develop assessment criteria* (ou *Définition des critères d'évaluation*)
  Le premier prérequis pour une évaluation des risques saine est de définir des critères d'évaluation permettant de comparer les risques indépendamment de leurs différences. Généralement ces critères sont basés sur la probabilité de survenance du risque couplée à son impact sur la santé financière de la compagnie. Certaines entreprises peuvent cependant décider d'utiliser des critères additionnels tels que la vulnérabilité au risque et la résilience face à un risque.

- *Assess risks* (ou *Evaluation des risques*)
  L'évaluation des risques est l'attribution de valeurs numériques aux critères d'évaluation définis précédemment. Ce processus peut se décomposer en deux étapes, une première qualitative afin de jauger les différents risques, puis une seconde plus quantitative permettant de les évaluer numériquement.

- *Assess risk interactions* (ou *Evaluation de la corrélation entre les risques*)
  Les risques ne surviennent jamais de manière unique. L'importance de leurs corrélations a été remarquée par les entreprises au cours des dernières années, c'est pourquoi même des risques qui peuvent sembler insignifiants ne sont pas obligatoirement dénués d'importance. Ils pourraient en effet avoir des impacts importants sur d'autres risques. Il est donc nécessaire d'être conscient de ces interactions.

- *Prioritize risks* (ou *Priorisation des risques*)
  Une fois les étapes précédentes menées à bien, il est nécessaire de classer les risques par ordre d'importance afin de déterminer les priorités pour le département du *Risk Management* selon les critères définis précédemment.

- *Respond to risks* (ou *Gestion des risques*)
  Une fois le processus d'évaluation des risques abouti, l'entreprise doit alors définir sa manière de gérer les risques ainsi déterminés au travers de différents plans d'action.

Le diagramme suivant peut résumer toutes les étapes évoquées ci-dessus :

Figure I-3 Diagramme ERM

La démarche ERM fait également intervenir les notions fondamentales d'appétence et de tolérance au risque. Ces définitions varient largement d'un acteur du marché à l'autre comme cela peut être constaté dans l'article suivant : (Milliman, 2012). Certains traits reviennent cependant chez chacun des acteurs :

- Appétence au risque : Il s'agit du niveau de risque agrégé qu'un organisme accepte de prendre en vue de la poursuite de son activité ou de son développement. Il s'agit d'une appréciation qualitative et quantitative du niveau cible de risque de l'organisme. La quantification de l'appétence au risque est réalisée au travers de métriques choisies par chaque organisme.
- Tolérance au risque : Elle représente les limites à ne pas dépasser pour chacun des risques concernant l'entreprise. Pour vérifier que l'exposition de la compagnie est bien inférieure aux seuils ainsi définis, les risques sont évalués de la manière décrite précédemment (selon certains critères).

Ces deux composantes sont fondamentales dans le cadre ERM et se retrouvent au sein de l'$ORSA$.

L'$ORSA$ s'inscrit dans cette démarche ERM. Certains principes fondamentaux viennent compléter les précédents, dans une logique d'imposer des bases législatives saines afin de faciliter les contrôles du régulateur.

b) L'ORSA

Conformément à l'article 45 de la directive (EIOPA, 2009), l'$ORSA$ doit comporter une **dimension prospective** et s'intégrer dans un cadre à **moyen terme**. L'horizon du plan stratégique variant généralement de 3 à 5 ans, le processus permet ainsi d'avoir une vision de l'activité et des besoins en fonds propres futurs de l'assureur.

L'entreprise concernée met en place des procédures qui sont proportionnées à la nature, à l'ampleur et à la complexité des risques inhérents à son activité. Il s'agit du **principe de proportionnalité**, qui lui permet d'identifier et d'évaluer de manière adéquate les risques auxquels elle est exposée à court et long terme, ainsi que ceux auxquels elle pourrait être exposée. L'entreprise démontre la pertinence des méthodes qu'elle utilise pour cette évaluation.

La direction doit notamment être en mesure de prouver aux autorités de contrôle sa parfaite compréhension des risques auxquels son entreprise est exposée, de leurs interactions, et du besoin en fonds propres nécessaire pour faire face à des événements futurs.

L'$ORSA$ n'est pas une 3ème exigence de capital. Néanmoins, ce processus peut être un facteur clé dans la détermination du capital *add-on*. Le capital *add*-on est divisé en deux types :

- Le capital *add-on* dit « de pilier 1 », lié à l'exigence quantitative, permettant de corriger le montant de l'exigence de capital lorsque le profil de risque s'écarte des hypothèses de calcul utilisées.
- Le capital *add-on* dit « de pilier 2 », lié à la gouvernance, permettant d'ajuster l'exigence de capital lorsque la qualité de la gouvernance se détériore.

Pour plus de détails, le lecteur intéressé pourra consulter la conférence de l'$ACPR$ sur le sujet (ACPR, 2011).

Il est important de souligner que l'$ORSA$ a avant tout une visée d'aide à la décision, c'est pourquoi il doit être utilisé afin de réaliser des choix stratégiques de gestion des risques. Pour cela, il doit être lisible et compréhensible par les différents rôles d'une compagnie, et pas seulement par des actuaires.

Dans le cadre de son système de gestion des risques, chaque entreprise d'assurance et de réassurance procède à une évaluation interne des risques et de la solvabilité. Cette évaluation porte au moins sur les éléments suivants :

- Le besoin global de solvabilité (BGS), compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise.
- Le respect permanent des exigences de capital (prévues au chapitre VI, sections 4 et 5), et des exigences concernant les provisions techniques (prévues au chapitre VI, section 2).
- La mesure dans laquelle le profil de risque de l'entreprise s'écarte des hypothèses qui sous-tendent le capital de solvabilité requis calculé à l'aide de la formule standard ou avec un modèle interne partiel ou intégral.

(1) Le Besoin Global de Solvabilité (BGS)

L'objectif est d'évaluer le besoin de capital global nécessaire à un organisme pour déployer et financer sa stratégie en restant solvable. L'assureur doit également faire face à l'évolution des risques susceptibles d'impacter sa solvabilité et qui ne sont pas captés par le pilier 1.

Ceci permet de démontrer, qu'en plus d'être solvable aujourd'hui, la compagnie est également capable de mobiliser, sans obligatoirement le détenir aujourd'hui, le capital nécessaire pour couvrir son BGS sur l'horizon de projection et ce, aussi bien pour le scénario retenu dans son plan stratégique que dans des scénarios adverses.

En accord avec l'Article 44 de la Directive $Solvabilité\ II$, l'$ORSA$, pour être complet, doit couvrir l'ensemble des risques significatifs pouvant avoir une incidence sur le niveau actuel des fonds propres ou des garanties offertes aux assurés.

Sur la base d'une première évaluation quantitative des risques déjà identifiés par l'organisme dans sa cartographie des risques, il conviendra de déterminer ceux dont l'impact est significatif. Ils devront alors être modélisés dans l'$ORSA$.

Afin d'anticiper les situations adverses et de tester la robustesse de la solvabilité, il est nécessaire d'introduire des stress-tests et des scénarios d'analyse de la sensibilité du profil de risque. Les scénarios de stress ainsi analysés doivent porter sur l'ensemble des risques pouvant impacter significativement la solvabilité.

Des scénarios de stress ont récemment été imposés par l'$EIOPA$ pour l'exercice $ORSA$ 2015, en vue de compléter ceux déjà définis par les compagnies. Il s'agit de scénarios concernant le contexte de taux bas et de l'impact potentiel de la stagnation de cette situation. Il s'agit de risques pouvant impacter la solvabilité de l'entreprise et n'entrant pas dans le cadre du pilier 1, car l'horizon d'application de ces risques est supérieur à celui du pilier 1. Ils impactent donc le calcul du BGS.

Des méthodes mathématiques de détermination du BGS seront abordées dans la partie I.C.2) Les exigences quantitatives.

(2) Respect permanent des exigences

L'objectif consiste à veiller au respect permanent des exigences de SCR et MCR dans un premier temps, puis à démontrer que les surplus de couverture ne sont pas susceptibles d'être absorbés par l'évolution de l'activité.

Pour cela, l'organisme doit prendre en compte les changements potentiels importants du profil de risque, dus par exemple à une situation adverse, des décisions stratégiques ou la qualité des fonds propres.

Cette évaluation, permanente, doit conduire les organismes à :

- Définir et mettre en œuvre des indicateurs de risque permettant d'apprécier la progression d'un risque donné et l'évolution des fonds propres dans le cadre infra-annuel

- Identifier des situations de crise pertinentes (stress-tests), anticiper les opérations stratégiques planifiées et l'évolution du contexte économique (scénarios) dans le cadre pluriannuel

Comme pour le BGS, cette évaluation doit être menée sur un horizon au moins égal à celui du plan d'activité de l'organisme et comporter des stress-tests. Ceci permettra de tester la robustesse du respect permanent et d'anticiper les actions correctrices qui pourraient s'avérer nécessaires.

Concernant le calcul des provisions techniques, l'organisme doit justifier l'adéquation du niveau des provisions techniques et la conformité permanente de leur calcul aux règles de $Solvabilité\ II$. Pour cela elle doit mettre en place une revue du calcul des provisions techniques et de leurs hypothèses et évaluer les risques potentiels émanant des incertitudes liées au calcul des provisions.

(3) Ecart entre le profil de risque et la formule standard

L'objectif est d'évaluer l'adéquation du profil de risque de l'organisme avec les hypothèses qui sous-tendent le calcul de son SCR afin de justifier la pertinence de ce SCR. Pour cela, l'organisme doit identifier les déviations éventuelles du profil de risque par rapport aux hypothèses sous-jacentes et vérifier la conformité du calcul de son SCR vis-à-vis de ce profil. Nous pourrions imaginer une entreprise justifiant qu'elle n'a pas à appliquer de choc action, dans son modèle interne par exemple, étant donné la part dérisoire des actions dans son portefeuille. Celle-ci devrait alors vérifier régulièrement qu'une nouvelle stratégie d'allocation d'actifs n'aurait pas remis cette hypothèse en cause en augmentant la proportion d'actions détenue, invalidant ainsi le calcul du SCR.

Les exigences du pilier 2 ne sont cependant pas complètes sans une évaluation quantitative qui va maintenant être détaillée.

2. Les exigences quantitatives de l'ORSA

Le régulateur impose aux assureurs de contrôler leur Besoin Global de Solvabilité (BGS) sur l'ensemble de la durée du plan stratégique (qui varie généralement de 3 à 5 ans). Une contrainte de solvabilité doit donc être définie par l'entité ERM de l'assureur, et non plus par le régulateur comme c'est le cas dans le pilier 1. Le régulateur se réserve cependant le droit de ne pas valider les choix de la compagnie si ceux-ci ne sont pas justifiés.

Rappelons que dans ce mémoire, le choix a été fait de considérer que le BGS était équivalent au SCR prospectif. Comme nous l'avons mentionné précédemment, il s'agit bien d'un choix fait par souci de simplification. En effet, d'autres approches auraient pu être retenues. Par exemple, d'autres risques que ceux préconisés par la Formule Standard, tels que le risque de souverain, d'inflation ou de réputation, auraient pu être pris en compte. On pourrait également imaginer modifier les corrélations entre les facteurs de risque à chaque pas de temps, au lieu de garder celles proposées en 0 par la Formule Standard.

Il existe également d'autres définitions théoriques du BGS dont voici une liste non exhaustive extraite de (Vedani & Devineau, 2012) :

- Une première méthode consiste à adapter la contrainte de solvabilité du pilier 1 sur l'ensemble du plan stratégique.

  La contrainte à horizon un an ne peut être reprise telle quelle, car elle serait beaucoup trop contraignante vis-à-vis de la durée du plan stratégique. Le seuil de solvabilité p devrait donc être inférieur au seuil pilier 1 de 99,5%. En notant p_t le seuil de probabilité de l'année t, la relation suivante est obtenue :

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{t=1}^{T}\{FP_t \geq 0\}\right] \geq p_t \Leftrightarrow \mathbb{P}\left[\min_{t\in[\![1;T]\!]}\{FP_t\} \geq 0\right] \geq p_t$$

  Il est important de noter que la contrainte de solvabilité doit être respectée sur l'**ensemble du plan stratégique** pour être validée.
  En émettant l'hypothèse que le capital minimum à immobiliser est investi en actifs monétaires, la relation suivante existe :

$$BGS = FP_0 + argmin_X \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{T} \left\{ FP_t + \frac{X}{\delta_i} \geq 0 \right\} \right) \geq p_t \right] \quad (8)$$

- Une seconde méthode consiste à projeter le ratio de solvabilité sur la durée du plan stratégique, et à contrôler son évolution pour qu'il ne devienne pas inférieur à un seuil particulier.

  En reprenant la définition précédente du SCR, on peut définir le montant de fonds propres dont doit disposer l'assureur en t pour faire face à une ruine économique en $t+1$ avec une certaine probabilité :

  $$SCR_t = FP_t - VaR_{t;0,5\%}^{\mathbb{P}} \left(FP_{t+1} \times e^{-\int_t^{t+1} r(u)du} \right)$$

  Le ratio de solvabilité est définie de la même façon que pour le pilier 1 par $\left(\frac{FP_t}{SCR_t}\right)_{t \in [\![1;T]\!]}$.

  La contrainte associée à cette méthode sur l'ensemble du plan stratégique est donc la suivante :

  $$\mathbb{P}\left[\bigcap_{t=1}^{T} \left\{ \frac{FP_t}{SCR_t} \geq \alpha_t \right\} \right] \geq p_t$$

  α_t et p_t sont définis par l'assureur. En faisant une fois encore l'hypothèse d'investissement du capital en actifs monétaires, la relation devient :

  $$BGS = FP_0 + argmin_X \left[\mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{T} \left\{ \frac{FP_t + \frac{X}{\delta_i}}{SCR_t(X)} \geq \alpha_t \right\} \right) \geq p_t \right] \quad (9)$$

Ces méthodes étant particulièrement lourdes à implémenter numériquement, la création d'un dispositif $ORSA$ peut s'avérer ardue, puisqu'elle nécessitera la connaissance des distributions de (FP_t) et (SCR_t) sur la durée du plan stratégique.

Concernant la mise en place effective d'un calcul de BGS, certaines méthodes peuvent être présentées :

- Une méthode strictement simulatoire, où l'algorithme SdS décrit précédemment sera utilisé à chaque pas de temps pour déterminer les distributions de fonds propres FP_t. Il faudra déterminer à chaque pas de temps la distribution de SCR_t afin d'avoir accès au ratio de solvabilité et pour cela, la distribution de FP_{t+1} conditionnellement à la distribution de FP_t doit être obtenue. Une démultiplication du nombre de simulation primaires sera donc nécessaire. Il faudrait par exemple avoir 1000 jeux de 1000 simulations primaires, chacune donnant lieu à 1000 simulations secondaires.

- Des méthodes « paramétriques », dont le but sera d'obtenir une fonctionnelle reproduisant la distribution de fonds propres à horizon multiple. Il est alors aisé de calculer le SCR chaque année et d'en déduire le ratio de couverture. Parmi ces méthodes on peut citer :

- Les *Replicating Portfolios* (Milliman, 2009), dont le but est de déterminer un portefeuille d'actifs financiers afin de répliquer la VEP : il est en effet extrêmement complexe de déterminer l'évolution du Passif d'une compagnie, contrairement à la partie Actif qui dépend directement des scénarios économiques utilisés.
  Il est ainsi intéressant de trouver un moyen de représenter les passifs comme un portefeuille de titres financiers dont il est plus aisé de déterminer l'évolution, et donc d'en déduire un capital économique. L'essence de cette méthode repose donc sur la réplication de flux de passifs par des titres financiers. Il est par exemple possible de répliquer une participation aux bénéfices par une option *Call*.
  En effet, si 85% des résultats de l'entreprise sont supérieurs au Taux Minimum Garanti (TMG), alors l'assureur est tenu de verser la différence en supplément du TMG, analogue du strike dans ce cas. Dans le cas contraire, il paie juste le TMG.
  Il sera par la suite plus aisé de projeter la valeur de cette option *Call* que celle du flux de la participation aux bénéfices. Cette méthode, bien que permettant un gain de temps considérable, est complexe à mettre en place et repose sur de fortes hypothèses. Elle se base notamment sur des avis d'experts afin de déterminer les produits répliquant les flux de passifs.

- Le *Curve fitting,* qui consiste à calibrer une forme paramétrique exprimant les fonds propres comme une fonction des facteurs de risque : pour cela, un « faible » nombre N' de simulations primaires est sélectionné. L'algorithme SdS classique leur est alors appliqué afin d'en déduire N' valeurs de fonds propres.
  La fonction *proxy* est alors calibrée en minimisant l'écart quadratique entre les fonds propres donnés par l'algorithme SdS sur les N' simulations primaires, et ceux obtenus à l'aide du *proxy*. La distribution totale des fonds propres est alors obtenue en utilisant non plus un nombre restreint de simulations primaires, mais toutes celles disponibles et en les injectant dans le *proxy* précédemment calibré.

- Le *Least Square Monte Carlo* ($LSMC$), qui vise également à obtenir un *proxy* de la distribution des passifs : cette méthode se base cependant sur l'utilisation d'un grand nombre de simulations primaires et d'une unique simulation secondaire. Le *proxy* est alors calibré à l'aide d'une minimisation de l'écart quadratique. Il est cependant nécessaire de disposer d'une distribution de fonds propres afin de vérifier la pertinence de la forme paramétrique ainsi calibrée, ce qui implique de disposer des résultats d'un algorithme SdS **complet**. Un recalibrage de la forme paramétrique peut s'avérer alors complexe.

➢ Une méthode simulatoire couplée à la formule standard. Le SCR_t n'est plus, dans ce cas, calculé de façon empirique mais à l'aide de la formule standard. L'algorithme SdS permet l'obtention de la distribution des fonds propres à chaque pas de temps. Les chocs économiques de la formule standard sont alors appliqués à l'issue de chaque simulation primaire et pour chaque pas de projection, afin de déterminer les fonds propres en situations choquées. Le montant SCR_t est alors obtenu ainsi que le ratio de solvabilité.

Cette méthode, bien que permettant d'éviter un 3e jeu de simulations ou le calibrage d'une forme paramétrique, reste très lourde du fait de la présence d'algorithme SdS à chaque pas de temps.

Les méthodes de calcul du SCR prospectif proposées précédemment sont difficiles à utiliser en pratique, c'est pourquoi le choix a été fait d'utiliser la formule standard à chaque pas de temps. Cette méthode peut nécessiter l'utilisation de scénarios économiques suivant le profil de la compagnie modélisée.

C'est pourquoi il convient de décrire succinctement le fonctionnement d'un Générateur de Scénarios Economiques (ESG), afin de disposer des éléments nécessaires à la compréhension des enjeux et des difficultés sous-jacentes à la problématique qui sera exposée par la suite. Cependant, une présentation détaillée de l'ESG utilisé dans ce mémoire sera réalisé dans la partie III.A.1) Modèle ESG (génération des inputs).

Le lecteur intéressé pourra tout de même consulter la présentation (Planchet, 2015) afin de saisir les enjeux liés à la création d'un ESG.

3. Présentation d'un Générateur de Scénarios Economiques (ESG)

L'ESG est nécessaire, ou tout au moins les jeux de scénarios qui en sont issus, afin d'effectuer des calculs stochastiques, dans le cadre d'un $ORSA$ par exemple. Dans la pratique, les assureurs peuvent choisir de développer leur propre ESG ou simplement se procurer des jeux de scénarios économiques. Les bases de l'ESG et des scénarios économiques ayant été posées, exposons à présent la problématique du mémoire concernant le calcul du SCR prospectif dans un modèle $ORSA$.

Il convient de définir les scénarios économiques. Il s'agit de la projection simultanée d'un ensemble de grandeurs économiques et financières, telles que des taux d'intérêts, des rendements d'indices action… sur un horizon de temps défini. L'ESG permet d'obtenir une multitude de trajectoires pour ces variables.

Les projections de ces diverses grandeurs financières et économiques se font par le biais de modèles de diffusion connus. Dans le cas de la courbe des taux par exemple, la dynamique d'un modèle de Hull & White à un facteur pourrait être utilisée afin d'obtenir l'évolution du taux au cours du temps. Ce sera le cas dans ce mémoire. Les chroniques d'autres indices économiques (action, immobilier…) peuvent également être obtenues à l'aide de l'ESG. Dans notre cas, les indices action et immobilier seront simulés à l'aide d'un modèle de Black & Scholes.

Pour son fonctionnement, l'ESG nécessite cependant le calibrage des paramètres des modèles financiers choisis. Dans le cas du modèle Hull & White à 1 facteur par exemple, la vitesse de retour à la moyenne et la volatilité des taux devront être déterminés au préalable. C'est ce qu'on appelle le calibrage des modèles. Il se base sur les données de marché, récupérées à l'aide d'outils tels que Bloomberg.

Une chronique initiale de l'indice économique à projeter peut également être nécessaire. Dans le cas de la courbe des taux, il sera possible d'utiliser la courbe $EIOPA$ en input de l'ESG.

Les sorties de l'ESG sont alors un ensemble de simulations selon un format défini à l'avance. Par exemple, il s'agira dans notre cas de 1000 simulations de courbes de taux différentes, sur un horizon de temps de 105 ans et à des pas de projections allant jusqu'à 55 ans. Le générateur est souvent externalisé par rapport aux modèles de calcul du SCR ou du BGS.

4. Problématique quant au calcul du SCR prospectif

Dans le modèle qui sera considéré, une unique simulation Monde Réel est utilisée afin de faire évoluer la situation économique de l'assureur (prise en compte de nouvelles affaires, liquidation de certains contrats, vieillissement des portefeuilles…). Les scénarios de stress récemment publiés par l'$EIOPA$ confortent ce choix de la simulation primaire unique dans un cadre $ORSA$. A chaque pas de temps, un nombre important de simulations Risque Neutre est utilisé afin de valoriser les engagements de cette compagnie (dans notre cas 1000 simulations Risque Neutre). La figure suivante illustre de ce fonctionnement :

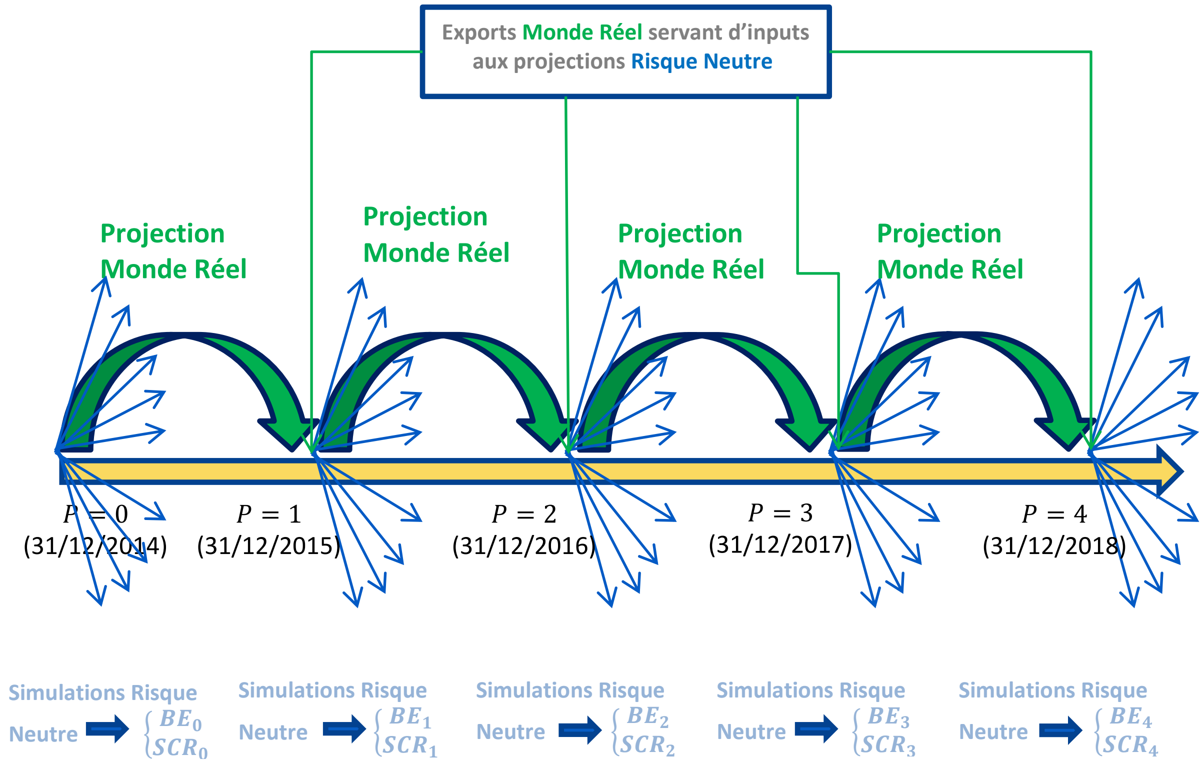


Figure I-4 Fonctionnement du modèle ORSA

Les simulations Risque Neutre utilisées devraient ainsi dépendre de l'information apportée par la simulation Monde Réel.

Le modèle actuel utilise un jeu de simulations Risque Neutre projetées jusqu'à 55 ans généré en 0. A chaque pas de temps du plan stratégique, un jeu de simulations projetées jusqu'à 50 ans est utilisé, en décalant la courbe initiale. En $P = 1$ par exemple, les scénarios utilisés seront issus de la table créée en 0 et iront de $P = 1$ à $P = 51$. Cette méthode, inhérente au modèle utilisé, ne tient cependant pas compte de l'évolution Monde Réel qu'il pourrait y avoir entre chaque pas de projection. Elle constituerait pourtant déjà une amélioration en comparaison de la situation où l'on utiliserait les mêmes courbes des taux Risque Neutre à chaque pas de temps. Cette méthode pourrait cependant s'avérer inadaptée dans le cas où le scénario Monde Réel considéré ne connaîtrait pas une remontée des taux à partir de $P = 1$, présente dans nos scénarios Risque Neutre.

Une autre méthode pourrait être de générer en 0, 5 jeux de scénarios Risque Neutre qui seraient utilisés à chaque pas de temps.

Il convient donc de trouver des méthodes permettant d'introduire ce conditionnement. Ce mémoire se concentrera sur l'utilisation de techniques d'ajustement, qui vont être présentées par la suite, en vue de calculer le SCR prospectif pour une compagnie d'assurance. Le but est de mener des calculs stochastiques sur l'ensemble du plan stratégique afin de déterminer les engagements de l'assureur et d'être en mesure d'utiliser la formule standard à chaque pas de temps.

Il conviendra également d'étudier l'impact des méthodes présentées sur les résultats et d'avoir un esprit critique vis-à-vis de ces derniers pour juger de l'efficacité et de la justesse des méthodes présentées. Cette démarche s'inscrit dans un cadre $ORSA$ et se veut volontairement compréhensible et flexible afin de respecter les préconisations de l'$EIOPA$ sur le sujet.

II. Les techniques d'ajustement

A. Les ajustements SdS financiers

Comme cela a été évoqué précédemment, dans le cas du modèle $ORSA$ considéré, les scénarios Risque Neutre sont utilisés à chaque pas de temps afin de calculer notamment le *Best Estimate of Liabilities* (BEL). Il convient de faire en sorte qu'ils tiennent compte de l'information issue du scénario Monde Réel permettant de projeter la situation économique de la compagnie d'assurance, afin de rester cohérents avec l'évolution des facteurs de risques.

Il existe pour cela une technique appelée les « ajustements financiers », permettant de « déformer » une table de scénarios Risque Neutre afin de tenir compte de la simulation Monde Réel, selon une formule fermée.

1. Définitions financières nécessaires

Cette technique d'ajustement faisant appel à des définitions de produits financiers classiques, nous allons les lister dans cette partie.

a) Les Zéro-coupons

Une obligation Zéro-coupon (ZC) de date de départ t et de maturité m est un instrument financier qui, pour le paiement d'un « Prix de Zéro-coupon » en t, rapportera en $t+m$ un flux unitaire. Nous pouvons illustrer cela à l'aide de l'échéancier suivant :

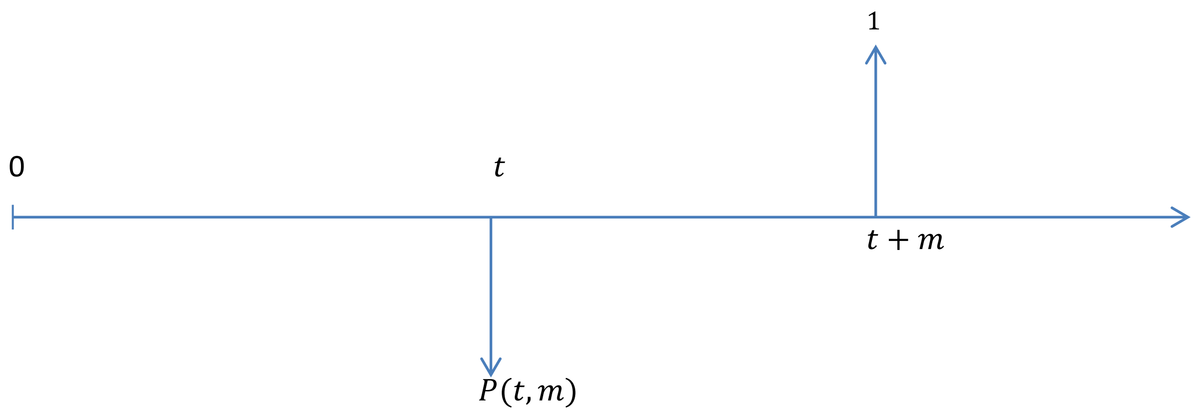


Figure II-1 - Echéancier Zéro-coupon

Le Zéro-coupon de date de départ t dépend directement de l'information disponible en t. En effet, le prix du Zéro-coupon de date de départ t et de maturité m peut s'écrire ainsi, pour un taux d'intérêt instantané r_s :

$$P(t,m) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^{t+m} r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) \tag{10}$$

Les prix de Zéro-coupons sont également utilisés pour actualiser des flux. En effet, si l'on veut actualiser un flux certain N, de $t+m$ à t, on utilisera :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(Ne^{-\int_t^{t+m} r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) = N \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^{t+m} r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) = N \times P(t,m)$$

Ainsi, pour recevoir un flux N en $t+m$, il faudra payer $N \times P(t,m)$ en t.

b) *Les forwards*

Un *forward* en t, de date de départ $t+m$ et de maturité n, est un instrument financier qui vise à acheter en t un Zéro-coupon de date de départ $t+m$ et de maturité n, pour le paiement d'un « Prix Forward » en t. L'échéancier de flux suivant illustre ces opérations :

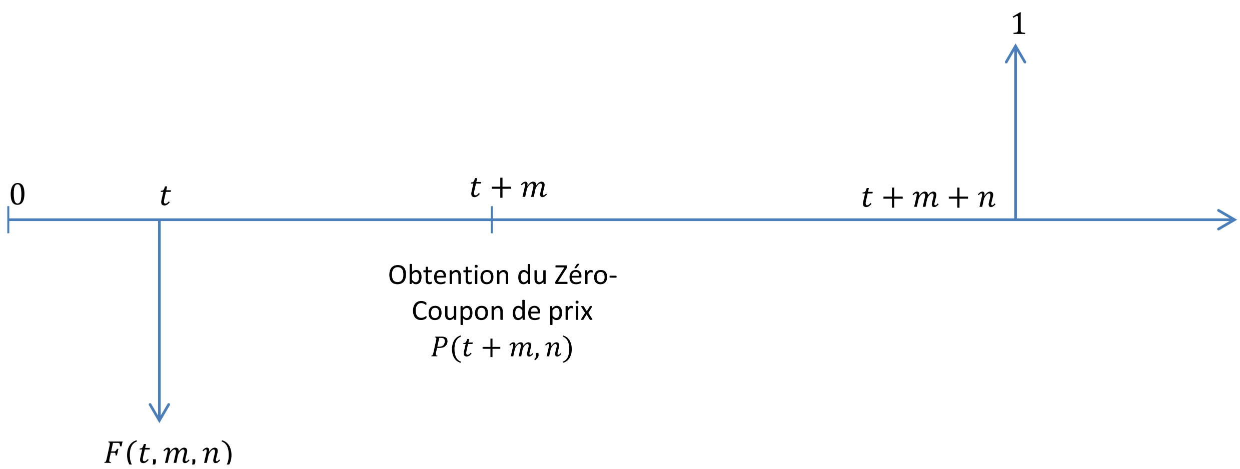


Figure II-2 - Echéancier *forward*

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) nous permet d'avoir la formule suivante pour le prix *forward*, après réplication des flux par un autre portefeuille :

$$F(t,m,n) = \frac{P(t,m+n)}{P(t,m)} \tag{11}$$

Pour plus de précisions, voir la démonstration en Annexe 1.

Le prix *forward* étant une fonction de prix de Zéro-coupons, il est également porteur de l'information connue à sa date d'achat, ici en t.

c) Déflateurs

On définit le déflateur de départ H et de maturité n de la manière suivante :

$$D(H,n) = \prod_{i=0}^{n-1} P(H+i,1) \tag{12}$$

Le déflateur représente le « facteur d'actualisation » basé sur les prix de Zéro-coupons de maturité 1 an. En effet, on a en théorie :

$$P(H,n) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\prod_{i=0}^{n-1} P(H+i,1) \middle| \mathcal{F}_H\right)$$

$\mathbb{Q}$ représente la probabilité Risque Neutre, c'est-à-dire la probabilité sous laquelle tous les actifs ont le même rendement, celui de l'actif sans risque.

Le déflateur pourrait ainsi être qualifié d'« actualisation par morceaux ». L'amalgame est donc généralement réalisé en disant que le déflateur $D(H,n)$ représente l'actualisation en H pour un flux en $H+n$.

Ainsi

$$P(H,n) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(D(H,n)|\mathcal{F}_H) \tag{13}$$

Cela définit la propriété de martingalité du déflateur.

2. La technique des ajustements financiers

Cette technique a été introduite par Milliman lors du Séminaire SEPIA en 2010. Pour plus d'informations, le lecteur pourra consulter la présentation (Milliman, 2010).

Ces ajustements seront applicables dans le cas des chroniques de taux et d'actions (adaptables à l'immobilier).

a) Fondements des ajustements

L'objectif est de déformer la table de base Risque Neutre pour tenir compte du scénario Monde Réel, dans le but de prendre en compte l'information générée par celui-ci. La technique se veut simple et maniable, l'application d'un coefficient stochastique à cette table de base est donc conforme à cette volonté. Il convient de préciser qu'une volatilité déterministe est utilisée dans les modèles sous-jacents. C'est l'hypothèse fondamentale de cette technique.

Les notations utilisées seront les suivantes :

- $\hat{P}$ représente le prix de Zéro-coupon ajusté par la technique des ajustements SdS.
- P^{MR} et P^{RN} représentent les prix de Zéro-coupons respectivement issus du scénario Monde Réel et de la table Risque Neutre.
- La « table de base » est la table de scénarios Risque Neutre qui va être ajustée.

Le but est de trouver un prix de Zéro-coupon $\hat{P}(H+m,n)$ ajusté, à partir de $P^{RN}(H+m,n)$. C'est-à-dire que l'objectif est d'ajuster un prix de Zéro-coupon de date de départ $H+m$ et de maturité n à partir de la « table de base » (la table des scénarios RN).

Le prix du zéro-coupon ajusté $\hat{P}$ peut se calculer comme ceci :

$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}$$

Avant de clarifier la provenance de cette formule, il est important de comprendre la démarche dans laquelle elle sera utilisée.

Supposons la date d'issue du scénario Monde Réel en H, ce qui pourrait correspondre à chacun des pas de temps du plan stratégique dans un cadre $ORSA$.

Le coefficient de déformation doit ainsi être appliqué pour chaque simulation primaire. Il doit dépendre d'un paramètre contenant l'information Monde Réel disponible en H afin de transcrire le conditionnement cherché. Par souci de simplicité, les prix de Zéro-coupons seront choisis comme porteurs de l'information disponible.

b) Provenance de la formule d'ajustement

Pour exposer une preuve plus technique, commençons tout d'abord avec un échéancier de flux :

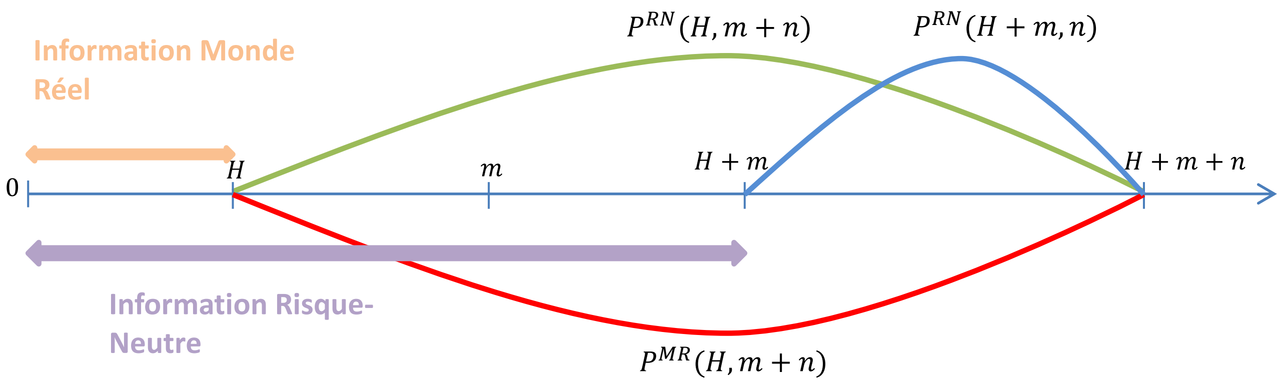


Figure II-3 Echéancier de flux et d'informations

Il convient de rappeler que l'ajustement de ce prix a pour visée le « conditionnement » des scénarios Risque Neutre par les scénarios Monde Réel. Il s'agit donc de tenir compte de l'information Monde Réel à l'issue des simulations primaires dans les simulations secondaires.

Sur le schéma ci-dessus, il apparaît que le prix de base $P^{RN}(H+m,n)$, issu de la table RN, suppose l'information connue en $H+m$. Cette information sur la période $[0,H+m]$ est exclusivement Risque Neutre hors ajustement. Or à l'issue des simulations primaires, la projection en H a généré de l'information Monde Réel dont il est nécessaire de tenir compte dans le prix de zéro-coupon, autrement qu'en recalibrant l'ESG pour générer une nouvelle table Risque Neutre.

Le remplacement de l'information Risque-Neutre de 0 à H dans le calcul de $P^{RN}(H+m,n)$ par l'information Monde Réel nouvellement obtenue est donc l'idée fondamentale qui a motivé la proposition de cet ajustement.

Pour cela, il convient de multiplier le prix de base $P^{RN}(H+m,n)$ par le coefficient $\frac{F^{MR}(H,m,n)}{F^{RN}(H,m,n)}$. Ce quotient de prix *forwards* représente le rapport entre les prix de *forward* Monde Réel et Risque Neutre, de dates de départ $H+m$ et de maturité n, vus de H.

Sachant de plus que sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) on a la relation classique vue précédemment :

$$F^{MR}(H,m,n) = \frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}$$

La formule d'ajustement évoquée auparavant est alors obtenue :

$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}} \tag{14}$$

c) *Déflateurs et tests martingales*

Une fois le prix de Zéro-coupon ajusté, il est possible de définir le déflateur ajusté de la façon suivante :

$$\widehat{D}(H,n) = \prod_{i=0}^{n-1} \hat{P}(H+i,1) \tag{15}$$

Il est cependant nécessaire de montrer que le déflateur ajusté vérifie le test martingale, c'est-à-dire que le déflateur doit être une martingale sous la probabilité Risque Neutre. Si cette propriété est vérifiée, elle se traduit par l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{D}(H,n)\middle|\mathcal{F}_H\right) = P^{MR}(H,n)$$

En effet, en H l'information Monde Réel est connue, c'est donc pour cela que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\mathbf{1} \times \widehat{D}(H,n)\middle|\mathcal{F}_H\right) = P^{MR}(H,n)$. Ici, $\mathbf{1}$ représente le flux unitaire que fournit le Zéro-coupon de prix $P^{MR}(H,n)$ en $H+n$.

Il est important que la propriété de martingalité soit conservée, car l'ensemble des modélisations utilisées se base sur un travail en univers Risque Neutre. Si le rendement d'un actif actualisé n'est pas celui de l'actif sans risque, c'est que l'univers n'est plus Risque Neutre. La démonstration de la martingalité du déflateur ajusté est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{D}(H,n)\middle|\mathcal{F}_H\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\prod_{i=0}^{n-1} \hat{P}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\prod_{i=0}^{n-1} P^{RN}(H+i,1) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,i+1)}{P^{MR}(H,i)}}{\frac{P^{RN}(H,i+1)}{P^{RN}(H,i)}}\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\prod_{i=0}^{n-1} P^{RN}(H+i,1)\right) \times \frac{P^{MR}(H,n)}{P^{RN}(H,n)}\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \frac{P^{MR}(H,n)}{P^{RN}(H,n)} \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(D^{RN}(H,n)|\mathcal{F}_H\right) \\
&= P^{MR}(H,n)
\end{aligned}$$

En effet, le déflateur D^{RN} vérifiant la propriété de martingalité, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(D^{RN}(H,n)|\mathcal{F}_H\right) = P^{RN}(H,n)$$

Il convient de se demander également si le prix de Zéro-coupon ajusté vérifie lui aussi le test martingale. Si cette propriété est vérifiée, elle se traduit par l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{P}(H+m,n) \times \widehat{D}(H,m)\middle|\mathcal{F}_H\right) = P^{MR}(H,m+n)$$

En effet, l'idée est encore une fois de rester sous la probabilité Risque Neutre. Ainsi l'actif ajusté actualisé à l'aide du déflateur ajusté doit avoir le même rendement que l'actif sans risque, c'est-à-dire l'actif Monde Réel en H (en effet l'information disponible en H est Monde Réel). La démonstration de la martingalité des prix de Zéro-coupons ajustés est la suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\hat{P}(H+m,n)\times\widehat{D}(H,m)|\mathcal{F}_H) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(P^{RN}(H+m,n)\times\frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}\times\prod_{i=0}^{m-1}\hat{P}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right)\\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(P^{RN}(H+m,n)\times\frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}\times\frac{P^{MR}(H,m)}{P^{RN}(H,m)}\times\prod_{i=0}^{m-1}P^{RN}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right)\\
&= \frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m+n)}\times\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(P^{RN}(H+m,n)\times\prod_{i=0}^{m-1}P^{RN}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right)\\
&= \frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m+n)}\times\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(P^{RN}(H+m,n)\times D(H,m)|\mathcal{F}_H)\\
&= \frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m+n)}\times P^{RN}(H,m+n)\\
&= P^{MR}(H,m+n)
\end{aligned}$$

Le prix de Zéro-coupon ajusté conserve donc bien le caractère martingale du prix Zéro-coupon Risque Neutre.

Cet ajustement concernera les courbes de taux, puisqu'il est possible de passer aisément du prix de Zéro-coupon aux taux Zéro-coupons. En effet, la relation suivante existe :

$$P(t,U)=\frac{1}{\left[1+r_{t,t+U}\right]^U} \tag{16}$$

d) *Ajustement indice action*

Maintenant que les prix de Zéro-coupons ont été ajustés, et donc indirectement la courbe des taux, il convient de s'intéresser à l'ajustement de l'indice action. Il s'agit en effet de l'un des facteurs de risque retenus dans le modèle qui sera présenté par la suite.

Une formule « similaire » à l'ajustement de taux peut être utilisée :

$$\hat{S}(H+n)=S^{RN}(H+n)\times\frac{D^{RN}(H,n)}{\widehat{D}(H,n)} \tag{17}$$

La motivation de cette formule est la même que précédemment, c'est-à-dire le remplacement de l'information Risque Neutre sur la période $[0,H]$ par l'information générée par le scénario Monde Réel.

Encore une fois, il convient de vérifier la martingalité de l'indice action ajusté ainsi introduit pour ne pas sortir du cadre Risque Neutre. Si cette propriété est vérifiée, elle se traduit par l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{S}(H+n) \times \widehat{D}(H,n) \middle| \mathcal{F}_H\right) = S^{MR}(H)$$

En définissant $S(t)$ comme la valeur de l'indice action à l'instant t. L'indice action ajusté actualisé sous la probabilité Risque Neutre (à l'aide du déflateur ajusté) doit avoir le même rendement que l'indice action en H, où l'information est Monde Réel. Vérifions la martingalité de l'indice action :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{S}(H+n) \times \widehat{D}(H,n) \middle| \mathcal{F}_H\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{D}(H,n) \times S^{RN}(H+n) \times \frac{D^{RN}(H,n)}{\widehat{D}(H,n)} \middle| \mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S^{RN}(H+n) \times D^{RN}(H,n) | \mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(S^{RN}(H+n) \times \prod_{i=0}^{n-1} P^{RN}(H+i,1) \middle| \mathcal{F}_H\right) \\
&= S^{RN}(H) \\
&= S^{MR}(H)
\end{aligned}$$

En effet, en H, date d'issue de la projection Monde Réel, il y a réconciliation des indices actions Risque Neutre et Monde Réel, d'où la dernière égalité. La même formule d'ajustement sera utilisée dans le cadre de l'ajustement immobilier.

e) Propriétés de réconciliation des ajustements

Les propriétés de martingalité des ajustements ont déjà été vérifiées précédemment. Il est également intéressant de s'interroger sur la réconciliation des courbes ajustées initiales avec les courbes de marché. Cela signifie qu'en $P = H$, les courbes ajustées doivent coïncider avec les courbes de marché.

- **Ajustements de taux**

Rappelons la formule des ajustements financiers pour les taux Zéro-coupons :

$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}$$

La situation $P = H$ correspond à un m nul. Les prix ajustés deviennent alors :

$$\begin{aligned}
\hat{P}(H,n) &= P^{RN}(H,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,n)}{P^{MR}(H,0)}}{\frac{P^{RN}(H,n)}{P^{RN}(H,0)}} \\
&= P^{RN}(H,n) \times \frac{P^{MR}(H,n)}{P^{RN}(H,n)} \\
&= P^{MR}(H,n)
\end{aligned}$$

Il y a donc bien réconciliation de la courbe ajustée initiale avec la courbe de marché.

- **Ajustements action (et immobilier)**

Rappelons la formule des ajustements SdS pour l'indice action :

$$\hat{S}(H+n) = S^{RN}(H+n) \times \frac{D^{RN}(H,n)}{\widehat{D}(H,n)}$$

La situation $P = H$ correspond à un n nul. Les indices ajustés deviennent alors :

$$\begin{aligned}\hat{S}(H) &= S^{RN}(H) \times \frac{D^{RN}(H,0)}{\widehat{D}(H,0)} \\ &= S^{RN}(H) \\ &= S^{MR}(H)\end{aligned}$$

Nous avons en effet $D(H,0) = 1$ ainsi que la réconciliation de la courbe de l'indice action Risque Neutre avec la courbe de marché en H, c'est-à-dire $S^{RN}(H) = S^{MR}(H)$. C'est donc également le cas de l'indice ajusté.

La même propriété est vérifiée dans le cadre de l'indice immobilier.

f) Vérification de la stabilité des volatilités

L'hypothèse fondamentale permettant d'utiliser les ajustements financiers suppose que les volatilités des modèles sous-jacents sont déterministes. C'est bien le cas au vu des modèles utilisés.

Il convient cependant de vérifier que les ajustements effectués sur les prix de Zéro-coupons et sur l'indice action n'altèrent pas les volatilités, afin de prouver qu'il s'agit bien d'ajustements de niveau. L'intérêt des ajustements de niveau est justement de ne pas avoir d'impact sur la volatilité des facteurs ajustés. Ils garderont ainsi la même composante aléatoire et seul le niveau sera modifié.

- **Prix de Zéro-coupon**

Le modèle utilisé dans l'ESG pour produire la table de base contenant les courbes de taux, est un modèle de Hull & White à un facteur. Le prix de Zéro-coupon vérifie la dynamique suivante :

$$P^{RN}(H+m,n) = \frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)} e^{-\frac{A(m,n)\sigma_n^2}{2} + B(m,n)X_m}$$

Avec A, B et X des fonctions qui sont explicitées en Annexe 2.

En utilisant le prix ajusté elle devient :

$$\begin{aligned}\hat{P}(H+m,n) &= P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}} \\ &= \frac{P^{MR}(H,m+n)}{P^{MR}(H,m)} e^{-\frac{A(m,n)\sigma_n^2}{2} + B(m,n)X_m}\end{aligned}$$

Les volatilités restent donc stables par application des ajustements.

- **Indice action**

La table de base est obtenue à l'aide de l'ESG mentionné précédemment. Le modèle utilisé pour l'indice action étant un modèle de Black Scholes, l'indice action peut être exprimé ainsi :

$$S^{RN}(H+n) = \frac{S^{MR}(H)}{D^{RN}(H,n)} e^{-\frac{n\sigma^2}{2}+\sigma\sqrt{n}\times W_t}$$

Avec $W_t \sim \mathcal{N}(0,1)$.

En utilisant l'indice ajusté cette relation devient :

$$\begin{aligned}\hat{S}(H+n) &= S^{RN}(H+n) \times \frac{D^{RN}(H,n)}{\widehat{D}(H,n)} \\ &= \frac{D^{RN}(H,n)}{\widehat{D}(H,n)} \times \frac{1}{D^{RN}(H,n)} e^{-\frac{n\sigma^2}{2}+\sigma\sqrt{n}\times W_t} \\ &= \frac{S(H)}{\widehat{D}(H,n)} e^{-\frac{n\sigma^2}{2}+\sigma\sqrt{n}W_t}\end{aligned}$$

Les volatilités restent donc inchangées, il y a bien stabilité par application des ajustements. Cela reste vrai dans le cadre de l'immobilier.

Les ajustements utilisés sont bien des ajustements de niveau, étant donné qu'ils n'affectent pas la volatilité.

3. Les avantages des ajustements

Concernant le calcul du SCR prospectif à l'aide d'un modèle $ORSA$, il a été mentionné qu'il serait important de trouver une méthode permettant de conditionner les jeux de scénarios Risque Neutre utilisés par le scénario Monde Réel permettant l'évolution sur la durée du plan stratégique.

Les ajustements financiers fournissent donc une solution pratique à ce problème, en appliquant une « déformation » dépendant de la simulation Monde Réel, à une unique table de scénarios Risque Neutre. Cette déformation se traduisant par l'application d'un coefficient stochastique, cela rend la méthode relativement aisée à implémenter.

Le conditionnement peut ainsi être introduit. L'opacité de la technique actuellement utilisée dans le modèle $ORSA$ considéré s'en trouve également allégée, étant donné qu'il n'est plus nécessaire de générer plusieurs tables de scénarios Risque Neutre en 0 afin de calculer un SCR prospectif, ou bien une table d'un format différent.

Cependant, les ajustements financiers ne fonctionnent que lorsque seuls les risques de niveau sont modélisés, c'est-à-dire lorsque les volatilités utilisées dans les modèles restent déterministes.

Il existe en revanche, une autre méthode d'ajustement portant sur des volatilités stochastiques qui pourrait remédier à ce problème, mais qui est plus complexe à mettre en œuvre, ce qui ferait perdre le bénéfice de la lisibilité invoqué précédemment.

Les ajustements financiers peuvent cependant montrer certaines limites qu'il est intéressant d'analyser en vue de proposer une amélioration de cette technique.

4. Résultats et limites des ajustements financiers

Nous avons pour cela choisi d'étudier les résultats à horizon 1 an dans un premier temps, en scénario déterministe Risque Neutre.

Le scénario Risque Neutre déterministe est construit à partir de la courbe $EIOPA$, et à l'aide de la formule fondamentale suivante :

$$P(0,2) = P(0,1) \times P(1,2)$$

Cette relation est démontrée en Annexe 1. Elle permet de construire la courbe des taux à différents pas de projections.

Il est tout d'abord intéressant de comparer les courbes des taux Monde Réel et Risque Neutre en $t = 1$, puisque le principe des ajustements est de remplacer l'information Risque Neutre de première période par l'information Monde Réel disponible :

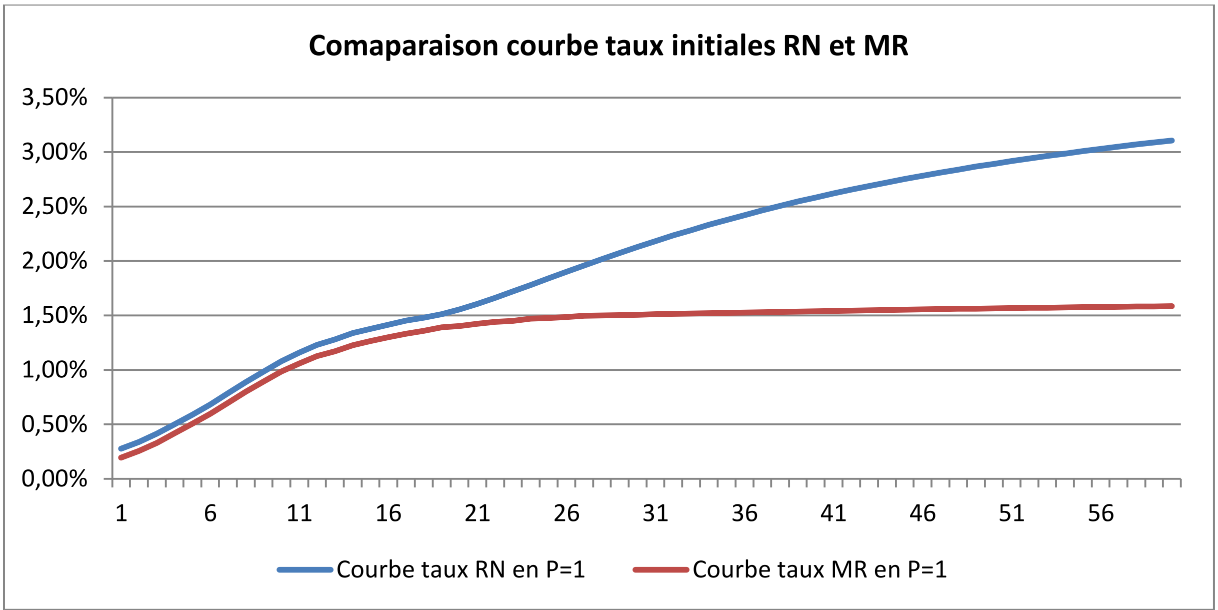


Figure II-4 Comparaison des courbes de taux MR et RN en P=1

La courbe Monde Réel, créée à partir de la courbe des taux de marché, et la courbe Risque Neutre, créée à partir de la courbe $EIOPA$, sont très différentes. En effet, pour les acteurs du marché, il est complexe de prévoir une évolution importante des taux au-delà d'une quinzaine d'années, c'est pourquoi la courbe Monde Réel évolue peu à partir de cet instant. La courbe Risque Neutre en revanche, est fabriquée en se basant sur la courbe délivrée annuellement par l'$EIOPA$. Cette courbe a pour but de tendre vers le taux *forward* à long terme (actuellement $4,2\%$). C'est pourquoi les deux courbes diffèrent au bout d'un certain moment.

Il est maintenant intéressant de se pencher sur l'effet des ajustements en comparant les courbes de taux *forwards* RN ajustée et non ajustée :

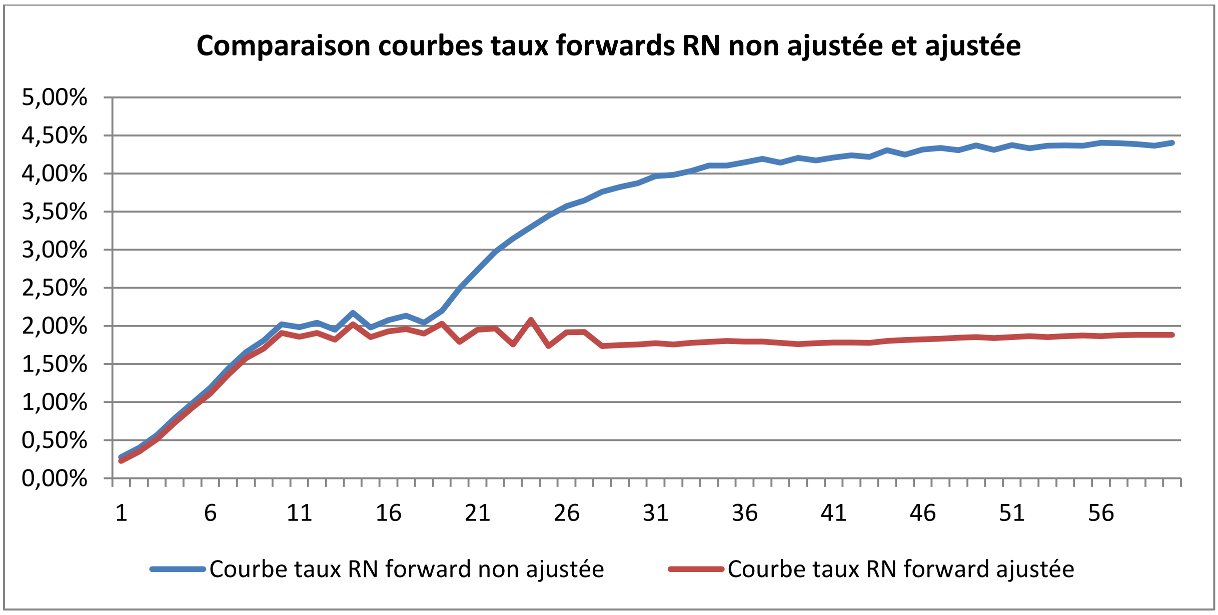


Figure II-5 Comparaison des courbes de taux en P=1 avec et sans ajustements

Un « aplatissement » de la courbe est observé pour des maturités supérieures à 20 ans, occasionné par les ajustements, la forme s'adaptant à celle de la courbe Monde Réel.

Cet écart provient du fait que la méthode des ajustements se traduit par une mitigation de l'information Risque Neutre disponible sur la période $[0,1]$ dans cette situation (mais $[0, H]$ en général), afin de prendre en compte l'information générée lors de l'utilisation du scénario Monde Réel. Le changement de forme de la courbe ajustée s'explique donc par le fait que nos déflateurs vérifient la martingalité en la courbe Monde Réel initiale, qui prend des valeurs plus faibles que la courbe Risque Neutre à partir du dernier point liquide (qui sera défini par la suite).

Il est également intéressant de voir l'impact des ajustements sur l'indice action :

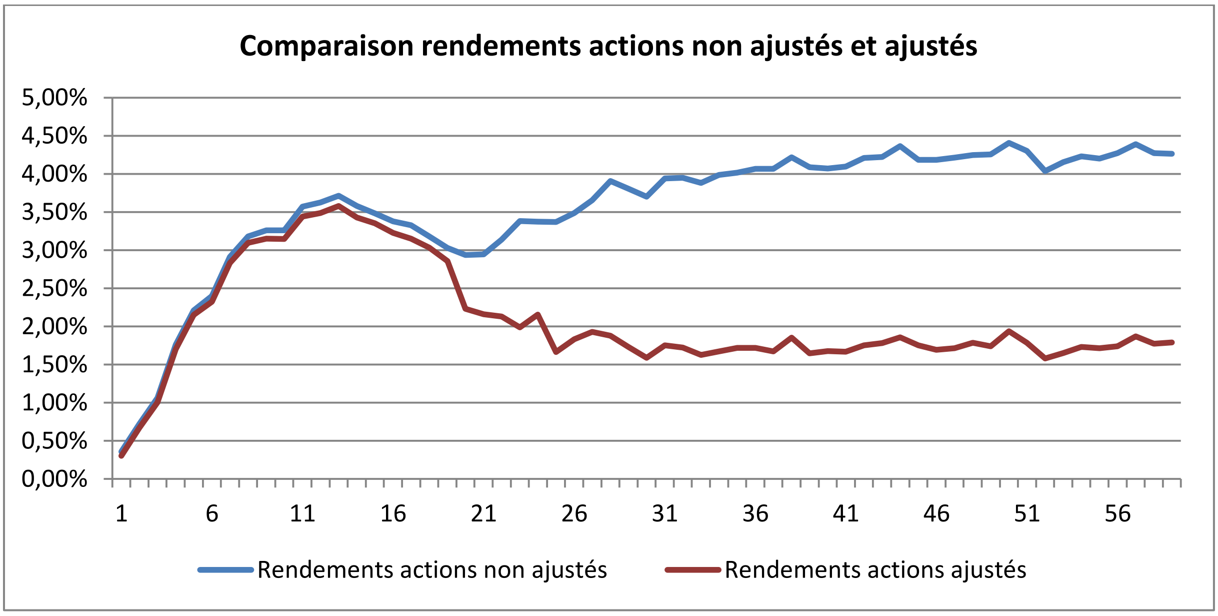


Figure II-6 - Comparaison des rendements actions avec et sans ajustements

Le même aplatissement peut être constaté à partir du dernier point liquide de 20 ans pour des raisons identiques. Ce comportement est également observable dans le cas des indices immobiliers.

Il a été constaté, au travers de cette étude que les ajustements avaient une tendance significative à rapprocher les courbes ajustées de la courbe Monde Réel. Cet effet provient de l'objectif même des ajustements, consistant à remplacer un fragment d'information Risque Neutre par de l'information Monde Réel. La courbe des taux ajustée est alors similaire à la courbe des taux Monde Réel utilisée du fait de la réconciliation de l'indice ajusté avec l'indice Monde Réel à chaque pas de temps. Le même phénomène est observable pour l'ajustement des indices action et immobilier.

Les ajustements ont donc pour effet de créer une nouvelle courbe « Risque Neutre » qui est martingale avec la courbe Monde Réel de première période. C'est pourquoi nos résultats ont montré une claire similarité entre la forme des courbes ajustées et des courbes Monde Réel.

Il est cependant légitime de déplorer une perte de la convergence vers le taux *forward* à long terme. La courbe des taux ajustée n'a ainsi plus réellement de rapport avec la courbe Risque Neutre de base, dont le poids est trop faible par rapport au Monde Réel. Ceci ne remet pas en cause la justesse de l'implémentation des ajustements, mais bien les fondements théoriques des ajustements financiers. Il serait donc sensé de réfléchir à un moyen plus élaboré d'exploiter les ajustements financiers et de profiter de leurs avantages (gain de temps, simplicité …) tout en conservant un caractère plus proche des courbes convergeant vers le taux *forward* à long terme. Il est en effet souhaitable que cette nouvelle technique permette de reproduire au mieux les méthodes utilisées pour les calculs faits en 0 dans le cadre du pilier 1 sur un horizon de 5 ans.

B. Les ajustements « Smith Wilson improved »

Cette volonté de rester consistants avec les calculs préconisés par l'$EIOPA$ en 0 invite à s'intéresser plus précisément à la méthode de Smith Wilson permettant de construire la courbe des taux utilisées en 0 pour valoriser les engagements de la compagnie.

1. Description théorique de la méthode de Smith Wilson

La méthode de Smith Wilson est une méthode d'interpolation et d'extrapolation des prix de Zéro-coupons, qui est utilisée par l'$EIOPA$ afin de déterminer la courbe des taux qu'elle fournira aux assureurs pour réaliser leurs calculs réglementaires $Solvabilité\ II$. L'organisme de contrôle européen donne annuellement la courbe des taux ainsi déterminée et la valeur des paramètres utilisés dans la méthode.

Cette courbe dite « $EIOPA$ » est utilisée en tant que courbe initiale dans l'ESG lors de la génération de scénarios Risque Neutre. Il peut donc s'avérer intéressant d'être capable d'en déterminer une approximation avant l'échéance annuelle du régulateur, afin d'adapter les politiques de gestion des risques. L'algorithme de Smith Wilson permet d'avoir, à l'aide des données de marché du moment, une approximation fiable de cette courbe.

Le but de la méthode de Smith Wilson est, à partir de données de marché, de construire une courbe des taux satisfaisant au critère de convergence des taux *forward* vers l'UFR en un temps donné (vitesse de convergence déterminée par un paramètre α). Cette courbe doit également prendre en compte le *Credit Risk Adjustment* (CRA), et être similaire à la courbe des taux Zéro-coupons de marché en les points liquides.

Les paramètres qui vont nous intéresser lors de l'utilisation de la méthode de Smith Wilson sont les suivants :

- Le Last Liquid Point (LLP) est le dernier « point liquide » comme son nom l'indique, c'est-à-dire le dernier instant où le marché est considéré comme liquide. Un marché est dit « liquide » s'il est aisé et rapide d'y effectuer des transactions. Les produits financiers « classiques » sont présents sur des marchés liquides puisqu'il est simple d'en acquérir ou de s'en défaire. Les produits financiers classiques génèrent ainsi des flux en les points liquides. La méthode de Smith Wilson va servir à interpoler et extrapoler les valeurs des prix de Zéro-Coupons sur les points non-liquides du marché.

  Le terme d'interpolation pour les prix de ZC est utilisé, car pour les maturités comprises entre 10 et 20 ans, seulement trois correspondent à des produits disponibles sur le marché, et ces trois points sont donc les seuls à être liquides (12, 15 et 20 ans). Au-delà de 20 ans, il s'agit d'une extrapolation, plus aucun point n'étant liquide. Le LLP est donc de 20 ans dans ce cas (valable dans toute la zone euro).

- L'Ultimate Forward Rate (UFR) est le taux vers lequel sont supposés converger les taux *forwards* à maturité élevée. C'est le paramètre qui va donner un caractère « macroéconomique » à la méthode. En effet, cette valeur devrait être déterminée pour chaque monnaie et il peut être délicat de prévoir l'état de diverses économies dans le futur. En pratique cependant, il est possible de s'attendre à une forte convergence des taux *forwards* en extrapolant à des horizons importants (100 ans).

  Ce paramètre est déterminé par l'estimation de deux facteurs, que sont le taux futur espéré des obligations sans risque et le taux d'inflation à long terme. Ces deux facteurs sont sommés (actuellement choisis à 2,2% et 2% respectivement). Le $QIS5$ avait établi ces valeurs en 2009, et l'UFR de 4,2% n'a pas changé depuis.

- La durée de convergence vers l'UFR à partir du LLP, actuellement fixée à 40 ans.

- Le Credit Risk Adjustment (CRA) représente le correctif à appliquer aux taux que l'on récupère sur le marché, pour les rendre "nets" de risque de crédit. En effet, le prix des instruments récupérés sur le marché (*swaps* en l'occurrence), comprend une part due au risque de crédit (c'est-à-dire au risque que le sous-jacent fasse défaut). Pour avoir une courbe des taux corrigée de cette partie due au risque de crédit, risque généralement modélisé par ailleurs ou choisi constant (la solution retenue dans ce mémoire), il convient alors de corriger la courbe des taux swaps du CRA. Cette correction est actuellement fixée à 0,1% par l'$EIOPA$.

- La vitesse de convergence vers l'UFR que l'on veut imposer à la courbe des taux *forward* voulue à l'aide de Smith Wilson est représentée par un paramètre α. On rappelle que dans les faits on cherche une courbe de taux Zéro-coupons, mais une relation immédiate existe entre les taux Zéro-coupons et les taux *forward*. Le délai de convergence étant fixé à 40 ans depuis le LLP le taux *forward* de maturité 60 ans (extrapolé, donc directement dépendant de α) doit différer de l'UFR d'au maximum 1bp.

Une nécessité pour l'application de cette méthode, est d'avoir à disposition des instruments financiers dont nous connaissons les caractéristiques (prix de marché à la date d'évaluation, maturités, valeurs des coupons…). Il peut s'agir de *swaps*, d'obligations diverses (Zéro-coupons ou non)…

La méthode de Smith Wilson permettant d'extrapoler les prix de Zéro-coupons et non les taux, une transformation finale est nécessaire afin de récupérer la courbe $EIOPA$.

Supposons que l'on dispose de N instruments financiers de taux qui interviendront sur la partie liquide de la courbe, et de dates de paiements $u_1, \dots, u_J$ pour les instruments, c'est-à-dire qu'au moins un instrument engendrera un flux à chacune de ces dates.

Les *cash flows* $c_{i,1}, \dots, c_{i,J}$ associés aux dates $u_1, \dots, u_J$ pour l'instrument financier i sont connus, et on note m_i la valeur de marché de l'instrument i. On a alors la relation suivante liant ces différentes grandeurs en 0:

$$m_i = \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} P(0, u_j)$$

Dans la méthode de Smith Wilson, le prix de Zéro-coupon $P(0,t)$ est défini comme la somme d'un terme asymptotique traduisant la convergence vers l'UFR et d'une combinaison linéaire de fonctions dites « noyaux » $K_i(t), i \in [\![1; N]\!]$. Cela se traduit par l'équation suivante :

$$P(0,t) = e^{-UFR \times t} + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \times K_i(t)$$

UFR est l'$Ultimate\ Forward\ Rate$ défini précédemment, N le nombre d'instruments financiers de taux considérés et ζ un vecteur de paramètres permettant de s'approcher au mieux de la courbe des taux.

Les fonctions noyaux sont définies de la manière suivante, pour $i \in [\![1; N]\!], t > 0$:

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} \times W(t, u_j)$$

Avec $c_{i,j}$ les *cash flows* définis précédemment et $W(t, u_j)$ les fonctions symétriques de Wilson que l'on définit ainsi :

$$W(t, u_j) = e^{-UFR \times (t + u_j)} \times \left\{ \alpha \times min(t, u_j) - \frac{1}{2} \times e^{-\alpha \times max(t, u_j)} \times \left(e^{\alpha \times min(t, u_j)} - e^{-\alpha \times min(t, u_j)} \right) \right\}$$

Le paramètre α représente la vitesse de convergence des taux *forward* vers l'UFR.

Une fonction noyau est associée à chaque instrument de taux utilisé. Si l'on injecte les formules précédentes dans l'équation des prix de marché ci-dessus, on obtient un système d'équations linéaires qui nous permettra de déterminer les $\zeta_i, i \in [\![1; N]\!]$:

$$\begin{aligned} m_i &= \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} \times P(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} \times \left(e^{-UFR \times u_j} + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \times \sum_{j=1}^{J} c_{i,j} \times W(t, u_j) \right) \end{aligned}$$

Il peut être intéressant d'écrire ce système d'équations linéaires sous forme matricielle en définissant :

$$m = (m_i)_{i \in [\![1;N]\!]};\ p = \left(P(u_i)\right)_{i \in [\![1;N]\!]}; \mu = (e^{-UFR \times u_i})_{i \in [\![1;N]\!]}; \zeta = (\zeta_i)_{i \in [\![1;N]\!]}$$

Ainsi que :

- La matrice carrée $J \times J$ des fonctions symétriques de Wilson : $W = \left(W(u_i, u_j)\right)_{i \in [\![1;J]\!], j \in [\![1;J]\!]}$
- La matrice $N \times J$ des *cash flows* : $C = \left(c_{i,j}\right)_{i \in [\![1;N]\!], j \in [\![1;J]\!]}$

L'équation précédente devient alors :

$$m = Cp = C\mu + (CWC^T)\zeta$$

En pratique, la matrice CWC^T est inversible. Le but étant d'obtenir les ζ, il est ainsi possible d'inverser le système :

$$\zeta = (CWC^T)^{-1}(m - C\mu)$$

On rappelle maintenant la formule des prix de Zéro-coupons donnée précédemment :

$$P(0,t) = e^{-UFR\times t} + \sum_{i=1}^{N} \zeta_i \times K_i(t)$$

Connaissant maintenant les ζ_i, on a également $P(0,t), \forall t > 0$.

Pour plus de détails sur la méthode de Smith Wilson, le lecteur intéressé pourra consulter la note introductive du régulateur financier de Norvège (Financial Supervisory Authority of Norway, 2010).

2. Avantages et inconvénients de la méthode de Smith Wilson

Une force de la méthode de Smith Wilson est de se baser sur la résolution analytique d'un système d'équations linéaires. Cela permet une estimation exacte de la structure par terme des taux d'intérêts, puisqu'on prend en entrée toutes les données de marché nécessaires à la résolution du système. Les autres méthodes d'extrapolation se basent généralement sur la minimisation d'écarts quadratiques entre les prix de marché et les prix obtenus par une fonction paramétrique.

Certains points peuvent cependant être soulevés. Tout d'abord le paramètre α doit être choisi **avant** d'utiliser le modèle. Il est alors nécessaire de faire appel à un jugement d'expert pour le déterminer, ou alors d'implémenter une méthode de calcul spécifique à l'obtention de ce paramètre. C'est cette dernière solution qui a été choisie dans l'exemple d'implémentation que l'on abordera par la suite, avec le choix d'une dichotomie pour déterminer le α. L'ACPR préconise de démarrer toute méthode itérative avec un $\alpha = 0{,}1$.

Le fait que la décroissance de la fonction $P(0,t)$ ne soit pas contrainte, impliquant que les prix puissent devenir négatifs, peut également poser problème. Ceci est possible lorsque la partie liquide de la courbe des taux *forward*, donc la partie à partir de laquelle nous allons extrapoler grâce à Smith Wilson, est trop éloignée de la somme de l'UFR et de α. Les autres méthodes évoquées plus haut ne présentent pas cette possible négativité des prix, ce qui désavantage la méthode de Smith Wilson. Pour plus d'informations, le lecteur intéressé pourra consulter (Haguet, 2012).

L'algorithme de Smith Wilson présente ainsi certains avantages, mais quelques réserves quant à son utilisation peuvent cependant être émises.

3. Les ajustements « Smith Wilson improved »

Pour en revenir aux ajustements, nous avons précédemment constaté que le problème principal était que la courbe ajustée perdait sa convergence vers l'UFR, du fait de la martingalité avec la courbe Monde Réel à chaque pas de temps. Les calculs menés avec les courbes ajustées n'étaient alors plus consistants avec ceux menés en 0 dans le cadre du pilier 1. Il faudrait ainsi remplacer les coefficients Monde Réel de notre formule d'ajustement afin de préserver cette consistance.

Pour ce faire, utiliser les prix de Zéro-coupons issus de la courbe de Smith Wilson créée à chaque pas de projection est une solution, sous réserve de certaines hypothèses sur les paramètres. Si l'on note $P^{SW}(m,n)$ le prix de Zéro-Coupon de date de départ m et de maturité n issu de la courbe de Smith Wilson, alors on a la formule d'ajustements « Smith Wilson improved » suivante :

$$\hat{P}(H+m,n) = P^{RN}(H+m,n) \times \frac{\frac{P^{SW}(H,m+n)}{P^{SW}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}} \tag{18}$$

La forme des ajustements restant strictement identique à la précédente, les démonstrations des propriétés de martingalité sont toujours effectives (*cf* Annexe 6), et on a ainsi une martingalité en la courbe de Smith Wilson et non plus en la courbe Monde Réel.

Les nouveaux ajustements ainsi définis vont donc devoir être implémentés au sein du modèle $ORSA$ utilisé, au même titre que les ajustements SdS.

Plusieurs étapes vont pour cela être nécessaires :

- **L'algorithme de Smith Wilson**

Dans un premier temps, l'implémentation de l'algorithme de Smith Wilson, afin d'obtenir les courbes de Smith Wilson à chaque pas de projection, est nécessaire. Elles représentent en effet le cœur de la méthode, et permettront d'obtenir les $P^{SW}(m,n)$ nécessaires à l'application des nouveaux ajustements. Cet algorithme est appliqué à la courbe Mondée Réel à chaque pas de temps afin d'en déduire les courbe de Smith Wilson.

Une comparaison des courbes Monde Réel et des courbes de Smith Wilson sera présentée dans la partie suivante afin de constater la transformation engendrée par l'application de l'algorithme.

- **Application du CRA**

Il est ensuite nécessaire de travailler sur l'interaction entre les courbes de taux Zéro-coupons Monde Réel, qui sont issues de l'ESG, et les courbes de taux *swaps*, afin de prendre en compte la correction par le CRA.

Pour cela, la courbe des taux *swaps* est déduite des prix de Zéro-coupons à l'aide de la formule suivante :

$$S_{n,N}(t) = \frac{P(t,T_n) - P(t,T_N)}{\sum_{i=n+1}^{N} P(t,T_i)} \tag{19}$$

Cette courbe peut alors être corrigée du CRA, dont la valeur actuelle est $0{,}1\%$ et qui est constante au cours des projections.

Il est par la suite nécessaire de revenir aux prix de Zéro-coupons, étant donné que ce sont eux qui sont utilisés dans la méthode Smith Wilson. La formule suivante est pour cela utilisée :

$$P(t,T_N) = \frac{1 - S_{0,N} \times \sum_{i=1}^{N-1} P(t,T_i)}{1 + S_{0,N}(t)} \tag{20}$$

- **Détermination de la vitesse de convergence α**

Le paramètre α fait l'objet d'un algorithme pour sa détermination. Il s'agit de la vitesse de convergence vers l'UFR de la courbe *forward* associée à la courbe extrapolée. Comme cela a été défini précédemment, le taux *forward* doit, au bout de 60 ans, différer d'au maximum 1bp de l'UFR. Le paramètre α va ainsi être déterminé par dichotomie.

Cette dichotomie va se dérouler de la manière suivante :

Tant que le taux *forward* à 60 ans est inférieur à $UFR - 1bp$, α est incrémenté d'1 bp et l'algorithme de Smith Wilson est utilisé afin de déterminer le nouveau taux *forward* à 60 ans. Ce taux est alors comparé à $UFR - 1bp$ et les étapes précédentes sont effectuées de nouveau si nécessaire.

Une fois ces implémentations terminées, les algorithmes ainsi définis fournissent la courbe de Smith Wilson à chaque pas de projection. Par ailleurs, en $P = 0$, la courbe de Smith Wilson équivaut à la courbe $EIOPA$.

Il convient maintenant de s'intéresser à une application pratique de cette méthode au sein du modèle $ORSA$ considéré dans ce mémoire. Nous allons tout d'abord présenter les modèles ESG et $ORSA$ utilisés avant de présenter l'impact des ajustements « Smith Wilson improved » sur les résultats économiques de l'assureur.

III. Mise en place des ajustements dans un cadre ORSA

Nous allons donc étudier l'impact des ajustements sur un calcul de SCR prospectif dans un modèle $ORSA$. Pour cela, il convient dans un premier temps de décrire de manière plus approfondie que cela n'a été fait les deux modèles sur lesquels s'appuie ce mémoire : un Générateur de Scénarios Economiques (ESG), et un modèle $ORSA$.

A. Modèles

1. Modèle ESG (génération des inputs)

Une première définition des enjeux liés à l'ESG a été donnée précédemment (*cf* I.C.3) Présentation d'un Générateur de Scénarios Economiques (ESG)). Il convient cependant de présenter de manière plus détaillée le modèle ESG qui sera utilisé ainsi que les modèles de taux, d'action et d'immobilier sélectionnés permettant de générer les jeux de scénarios.

a) Univers Monde Réel et Risque Neutre

Dans un premier temps, il est important de définir intégralement les univers Monde Réel et Risque Neutre. En effet, cette notion est fondamentale tant au niveau de l'ESG que pour le fonctionnement d'un modèle $ORSA$ de manière générale.

L'univers Monde Réel et les scénarios qui lui sont associés ont pour objectif de représenter le plus fidèlement possible le comportement statistique et historique des grandeurs financières considérées. Les projections s'appuient sur des historiques de marché.

Cet univers permet également la projection du bilan de la compagnie, avec d'une part le vieillissement des engagements de l'assureur (passif) et d'autre part la projection des valeurs financières de la compagnie (actif).

Les scénarios générés en univers Monde Réel sont extrêmement dépendants de la vision de la compagnie quant au marché. En effet, il est légitime (sous réserves de justification) d'insérer sa propre prédiction de l'évolution du marché afin de produire des scénarios qui s'y conforment. Par exemple, si un expert de la compagnie prévoit une évolution des taux jusqu'à 2,5% d'ici 10 ans, il est possible de traduire cet avis sous forme de paramètre au sein du modèle ESG et de générer des jeux de scénarios conformément à cette hypothèse.

La notion d'historique, c'est-à-dire de se servir du passé afin de déterminer un comportement futur, est fondamentale en univers Monde Réel.

L'univers Risque Neutre induit des simulations cohérentes avec les prix observés sur le marché (*Market Consistent*) à une date donnée. Dans ce cas les agents sont considérés comme neutres face au risque.

L'univers Risque Neutre est basé sur la propriété fondamentale de la probabilité Risque Neutre. Cette propriété fixe les rendements moyens de tous les actifs actualisés égaux à celui de l'actif sans risque, et est une traduction financière de la neutralité des agents.

Il se base sur des données de marché à un instant précis et non pas sur un historique. Au niveau de l'ESG, et pour satisfaire aux réglementations imposées par l'$EIOPA$, cela se traduit par l'utilisation de la courbe $EIOPA$ en paramètre pour la génération des scénarios économiques Risque Neutre. Celle-ci est en effet déduite de la courbe des taux de marché à un instant donné.

Au sein de l'ESG, certains modèles financiers sont adaptés à des générations de scénarios en univers Monde Réel, d'autres en univers Risque Neutre. Les modèles utilisés au sein de ce mémoire peuvent être utilisés dans les deux univers par souci de praticité.

b) Modèle de Taux

(1) Dynamique du modèle

Pour simuler des taux en univers Risque Neutre et Monde Réel, nous utilisons un modèle de Hull White à 1 Facteur. Le modèle de Hull White à 1 Facteur (HW1F) est un modèle de taux court, fondé sur la dynamique suivante :

$$dr_t = (\theta_t - ar_t)dt + \sigma dW_t \tag{21}$$

Le paramètre σ représente la volatilité du modèle de taux, supposée constante, et W_t est un mouvement brownien.

Dans ce modèle, la fonction θ_t est choisie de manière à ce que la structure des taux en $t = 0$ soit exactement la même que la courbe des taux réels. Le paramètre a représente la vitesse de retour à la moyenne et θ_t la moyenne à long terme.

Ceci permet de disposer d'un modèle complètement cohérent avec les prix de marché. Pour que cette condition soit respectée, il faut que la fonction θ_t vérifie la relation suivante :

$$\theta_t = \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + a \times f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \tag{22}$$

Où $f(0,t)$ est le taux *forward* instantané associé au prix Zéro coupon de maturité t, $P(0,t)$.

Le processus $X_t = r_t - f(0,t)$ sera utilisé et simulé par la suite. Pour plus d'information sur ce processus, le lecteur intéressé pourra consulter (Antoine & Auneau, 2011).

Ce modèle s'inscrit dans le cadre HJM (Heath, Jarrow and Morton (1992)). Pour plus de précisions sur la théorie du modèle de Hull White à 1 Facteur, le lecteur intéressé pourra consulter (Brigo & Mercurio, 2006).

(2) Calibrage du modèle

- **Calibrage Risque Neutre**

Le calibrage du modèle Hull White à 1 Facteur en univers Risque Neutre est effectué sur les *caplets* dont les prix peuvent être observés sur le marché financier à un instant donné, le 31/12/2014 dans ce mémoire.

Un *caplet* est un produit dérivé basé sur un taux d'intérêt. Il s'agit d'une option d'achat permettant à son détenteur de percevoir un flux si le taux de référence excède un taux d'exercice fixé à l'avance. Ce produit permet ainsi de se protéger contre une hausse des taux d'intérêt en cas d'achat du *caplet*. Le *caplet* de nominal N, de strike K (taux d'exercice) et pour le taux observé R produit à maturité le flux suivant :

$$N \times (R - K)_+$$

Le calibrage permet de trouver les valeurs des paramètres a et σ minimisant les écarts quadratiques entre les prix de marché des *caplets* considérés et les prix de modèle obtenus à l'aide d'une fonctionnelle (définie en Annexe 3). Les *caplets* utilisés en input ont des maturités allant de 1 an à 15 ans pour des strikes de 1%.

La courbe des taux utilisée pour le calibrage du modèle HW1F en univers Risque Neutre est la courbe des taux marché.

Il s'agit de la courbe suivante :

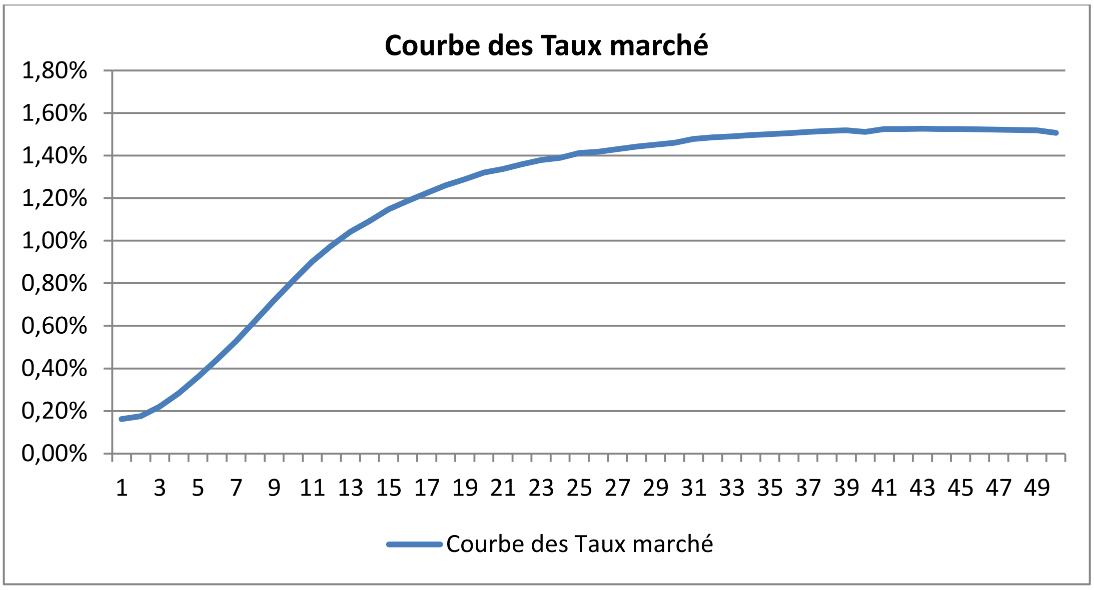


Figure III-1 Courbe des taux de marché au 31/12/2014 (origine Bloomberg)

Une fonction objectif de la forme suivante est minimisée, pour déterminer la valeur des deux paramètres a et σ :

$$\sum_i \left\| \frac{PrixMarchéCaplet(i) - PrixModèleCaplet(i, a, \sigma)}{PrixMarchéCaplet(i)} \right\|^2$$

Avec $PrixModèleCaplet$ une formule fermée donnée en Annexe 3 exprimant le prix d'un *caplet* dans le modèle HW1F. Les paramètres suivants sont obtenus :

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\sigma}$
0,10	0,57%

Tableau III-1 - Paramètres calibrés du modèle HW1F

Le modèle de Hull & White à 1 facteur est un modèle Risque Neutre. Le choix a cependant été fait de l'utiliser afin de générer également des scénarios Monde Réel.

Rappelons que les paramètres en entrée de l'ESG peuvent être divisés en deux catégories : les paramètres issus du calibrage et la courbe initiale de diffusion.

Cette dernière est, dans le cadre Risque Neutre, la courbe $EIOPA$ imposée par le régulateur. Dans le cadre Monde Réel, son choix est « libre » sous réserves de justifications, puisque cet univers permet de prendre en compte les anticipations de l'assureur, comme cela a été évoqué précédemment. La courbe des taux Zéro-coupons de marché a été choisie pour ce modèle.

Concernant le calibrage Monde Réel, le lecteur intéressé pourra se référer à l'Annexe 9 : Génération ESG Monde Réel

(3) Génération des jeux de scénarios

Intéressons-nous à présent à la manière pratique de générer les scénarios, c'est-à-dire à exprimer la relation entre le processus à simuler et une loi aléatoire. Il est possible de déduire de la définition du processus X_t et des équations (21) et (22) la dynamique de X_t :

$$dX_t = \left(\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) - aX_t\right)dt + \sigma dW_t$$

En intégrant cette équation entre t et s, il est alors possible d'obtenir une formule permettant de simuler X_t à partir de X_s :

$$X_t = e^{-a(t-s)} X_s + \frac{\sigma^2}{a^2} e^{-a(t)} [\mathrm{ch}(at) - \mathrm{ch}(as)] + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2a(t-s)}}{2a}} N(0,1) \qquad (23)$$

Pour la démonstration de cette discrétisation, le lecteur pourra se référer à (Antoine & Auneau, 2011).

Concernant la simulation, la loi normale a été simulée avec un générateur de nombres aléatoires informatique « classique » (aléatoire calqué sur l'horloge du processeur).

(4) Validation des jeux de scénarios

Pour vérifier que les taux obtenus ont été correctement simulés, les tests suivants ont été réalisés :

<u>Tests Risque Neutre :</u>

- **<u>Comparaison des prix de marché avec les prix de modèle obtenus par formule fermée, et les prix de modèle simulé par Monte-Carlo</u>**

Ce test a pour but de valider l'étape de calibrage permettant de déterminer la valeur des paramètres a et σ et l'étape de diffusion. Le prix d'un *caplet* est calculé par la formule fermée du modèle HW1F et comparé au prix de ce même *caplet* après diffusion du modèle par la méthode de Monte-Carlo. La comparaison avec le prix de marché est également effectuée.

Les différents prix des *caplets* de maturité allant de 1 an à 15 ans et de strike 1%, sont présentés dans des tableaux en Annexe 4.

Ces résultats sont représentés par le graphique suivant :

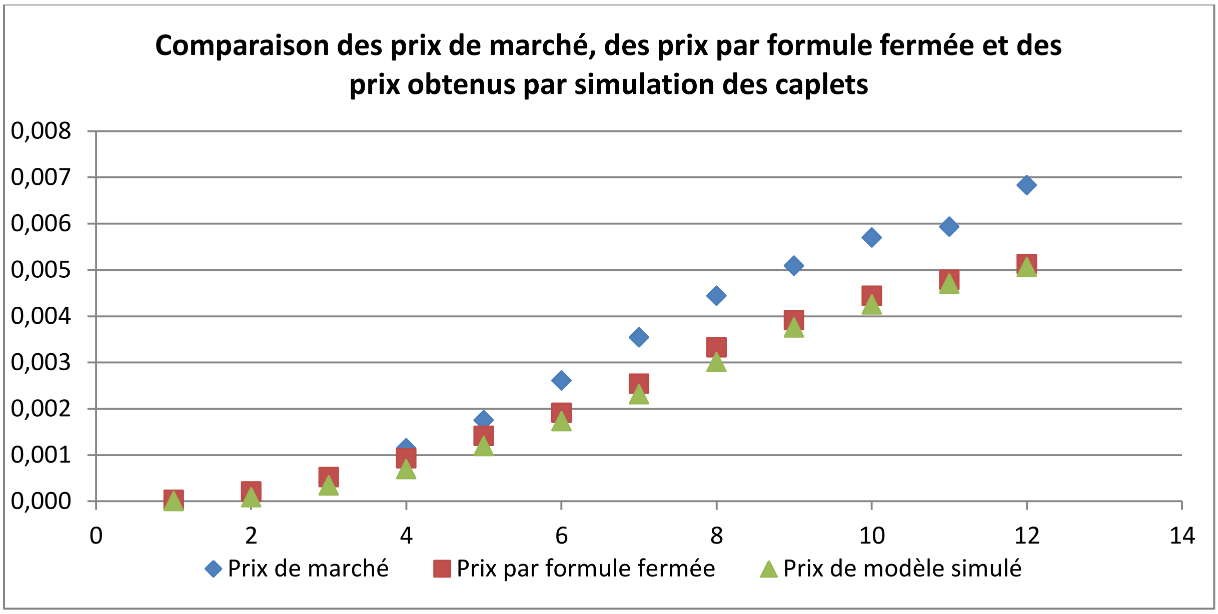


Figure III-2 Comparaison graphique des prix de marché, de modèle et simulés pour un strike de 1%

Le graphique présenté ci-dessus permet de valider le calibrage effectué pour le modèle HW1F car les prix de modèle rejoignent les prix de marché sur les horizons courts. Ce calibrage n'est néanmoins pas parfait pour des maturités longues puisque les différences relatives entre les prix de marché et les prix de modèle sont alors supérieures à 20%.

La figure présentant également deux nuages de points presque superposés pour ce qui est des prix par formule fermée et des prix simulés, le test est donc validé. Le modèle diffusé permet de retrouver les mêmes prix de *caplets* que la formule fermée, ce qui permet d'en déduire que la diffusion du modèle HW1F a été correctement implémentée.

- **<u>Comparaison de la courbe des taux initiale avec la courbe des taux de sortie</u>**

Afin de valider la courbe des taux obtenue après simulation, nous avons comparé les taux à 1 an obtenus après la simulation avec les taux à 1 an recalculés à partir de la courbe des taux initiale.

Le graphique suivant présente les résultats obtenus :

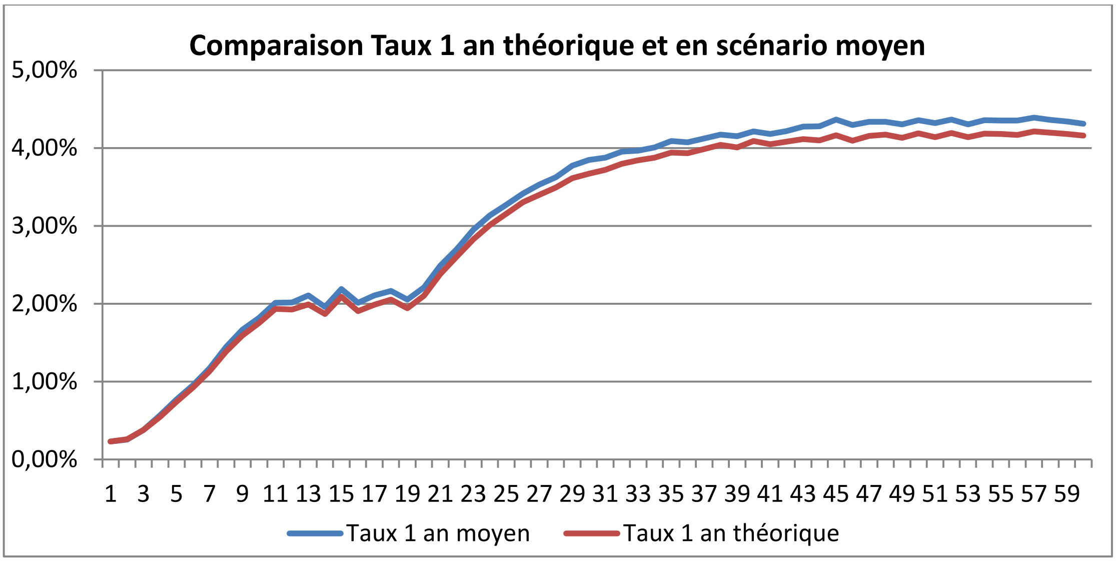


Figure III-3 Comparaison taux à 1 an recalculés à partir de la courbe des taux initiale et après simulation

Les deux courbes présentées par la figure précédente valident ce test car les deux éléments comparés sont bien proches. Un léger biais apparaît entre les deux courbes. Néanmoins, ce biais peut s'expliquer de manière théorique. Ces tests permettent de valider la génération des jeux en univers Risque Neutre.

Les étapes de calibrage et de validation pour les scénarios Monde Réel peuvent être trouvées en Annexe 9 : Génération ESG Monde Réel. Le scénario de taux Monde Réel choisi a été construit comme la moyenne des 1000 scénarios générés par l'ESG.

Le modèle de taux ainsi défini, et les courbes de taux ainsi validées, il convient maintenant de s'intéresser au modèle utilisé afin de générer les chroniques d'indices actions.

c) Modèle action

(1) Dynamique du modèle

Le modèle de Black-Scholes est un modèle de marché très répandu. Cette universalité provient de sa simplicité, permettant aux acteurs du marché de gérer rapidement leur risque action et de maîtriser les paramètres d'entrée du modèle.

Il modélise les log-rendements des indices action à l'aide d'un processus gaussien. La dynamique du modèle est ainsi régie par l'équation suivante :

$$dS_t = (r - q)\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t \qquad (24)$$

Avec :

- S_t : le prix de l'action sous-jacente
- r : le taux de rendement espéré instantané de l'action
- q : le taux de dividende espéré de l'action
- σ : la volatilité constante du rendement action
- W_t : un mouvement Brownien sous la probabilité risque-neutre

Pour une présentation plus détaillée du modèle de Black-Scholes, le lecteur intéressé pourra consulter l'article originel *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, F. Black & M. Scholes, 1973.

En univers Risque Neutre, les indices actions sont simulés de proche en proche grâce à la discrétisation de la dynamique précédente :

$$S_{t+s} = S_t e^{\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)s+\sigma\sqrt{s}\times N(0,1)} \tag{25}$$

Avec :

- r : le taux sans risque annuel, considéré constant entre t et $t+s$

En univers Monde Réel cependant, la forme suivante sera adoptée :

$$S_{t+s} = S_t e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)s+\sigma\sqrt{s}\times N(0,1)} \tag{26}$$

Avec :

- μ : le logarithme du rendement moyen,
- σ : la volatilité du log-rendement.

La différence entre ces formules provient du fait qu'en Risque Neutre, les actions, dividendes inclus, évoluent au taux sans risque, comme tous les actifs. En univers Monde Réel, le choix a été fait d'inclure les dividendes dans le rendement moyen.

Dans les deux cas, les taux de rendements sont ensuite déduits des indices actions, à l'aide de la formule suivante :

$$\eta_{t,t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t} - 1 \tag{27}$$

Avec $\eta_{t,t+1}$ le taux de rendement de l'indice action entre t et $t+1$.

(2) Calibrage du modèle

- **Calibrage Risque Neutre**

Le calibrage du modèle de Black-Scholes en Risque Neutre consiste à déterminer la valeur de σ permettant de retrouver les prix d'instruments financiers, ici les *calls*, observés sur le marché à une date donnée, ici au 31/12/2014. Pour rappel le *call,* ou option d'achat, est un contrat donnant à son détenteur la possibilité d'acheter un sous-jacent à une date ultérieure, à un prix fixé à l'avance.

Il faut donc optimiser une fonction objectif de la forme suivante :

$$Argmin\left[\sum_{i}\left(\frac{PrixCallMarché(i) - PrixCallModèle(i,\sigma)}{PrixCallMarché(i)}\right)^2\right]$$

Dans le modèle de Black Scholes, la formule classique du prix d'un call de strike K, de maturité T, sur un sous-jacent d'indice initial S_0 et pour un taux sans risque r est la suivante :

$$PrixCallModèle(t,\sigma) = S_0 N(d_1) - Ke^{(-rT)}N(d_2) \quad (28)$$

Avec :

- N la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite
- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Pour la démonstration le lecteur intéressé pourra consulter (Black & Scholes, 1973).

Les valeurs de "$PrixCallMarché$" sont récupérées sur Bloomberg pour l'indice EuroStoxx 50 (SX5E), tandis que les variables "$PrixCallModèle$" sont calculées à partir des paramètres du modèle de Black-Scholes.
Ces prix sont calculés pour une maturité de 1 an, un dividende moyen de 3,319%, un taux sans risque de 0,164 % et pour des strikes allant de 80% à 120%.

Le paramètre obtenu est le suivant :

$\boldsymbol{\sigma}$
20,641%

Tableau III-2 Paramètre calibré du modèle de Black-Scholes Risque Neutre

(3) Validation des jeux de scénarios

La cohérence des rendements action obtenus a été vérifiée à l'aide des tests suivants :

<u>Tests Risque Neutre :</u>

➢ **<u>Test de Martingalité</u>**

Afin d'assurer la validité du modèle, les prix projetés actualisés doivent être martingales sous la probabilité Risque Neutre. Cela signifie que l'espérance de la valeur future des indices actions actualisée, sachant l'information disponible en $t = 0$, est égale à la valeur actuelle de l'indice action.

Ce test peut être synthétisé ainsi :

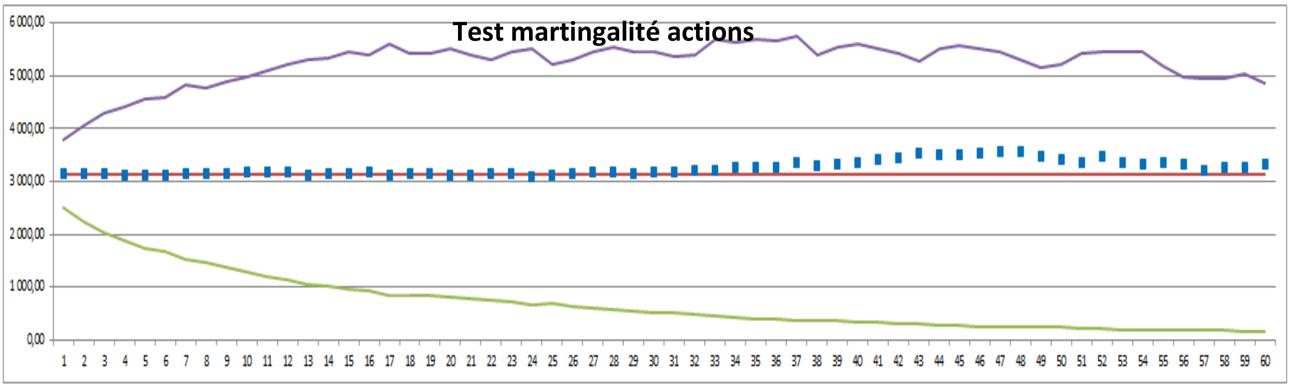


Figure III-4 Test de Martingalité

<u>Légende</u> :

- <u>Courbe rouge</u> : valeur de l'action en $t = 0$
- <u>Pointillé bleu</u> : valeur de l'action actualisée au taux sans risque pour le scénario central (moyenne des 1 000 scénarios)
- <u>Courbe violette</u> : quantile à 85 % de la valeur de l'action actualisée au taux sans risque sur les 1 000 scénarios
- <u>Courbe verte</u> : quantile à 15 % de la valeur de l'action actualisée au taux sans risque sur les 1 000 scénarios

Le graphique précédent permet de valider le test martingale car la valeur de l'action actualisée au taux sans risque pour le scénario central reste proche de la valeur de l'action en 0. Par ailleurs, les quantiles s'éloignent peu de la valeur centrale.

➢ <u>Test de Market Consistency</u>

Le test de *Market Consitency* consiste à vérifier que les actions ont des taux de rendement cohérents avec le marché, c'est-à-dire que les prix des instruments financiers observés sur les marchés et obtenus à l'issue des simulations sont proches.

Afin de valider ce test, les prix de marché des calls sont comparés avec les prix de modèle calculés à partir de l'indice action simulé. Les prix obtenus par formule fermée à partir de l'équation de diffusion sont également intégrés, afin de pouvoir distinguer les erreurs de calibrage et de simulation :

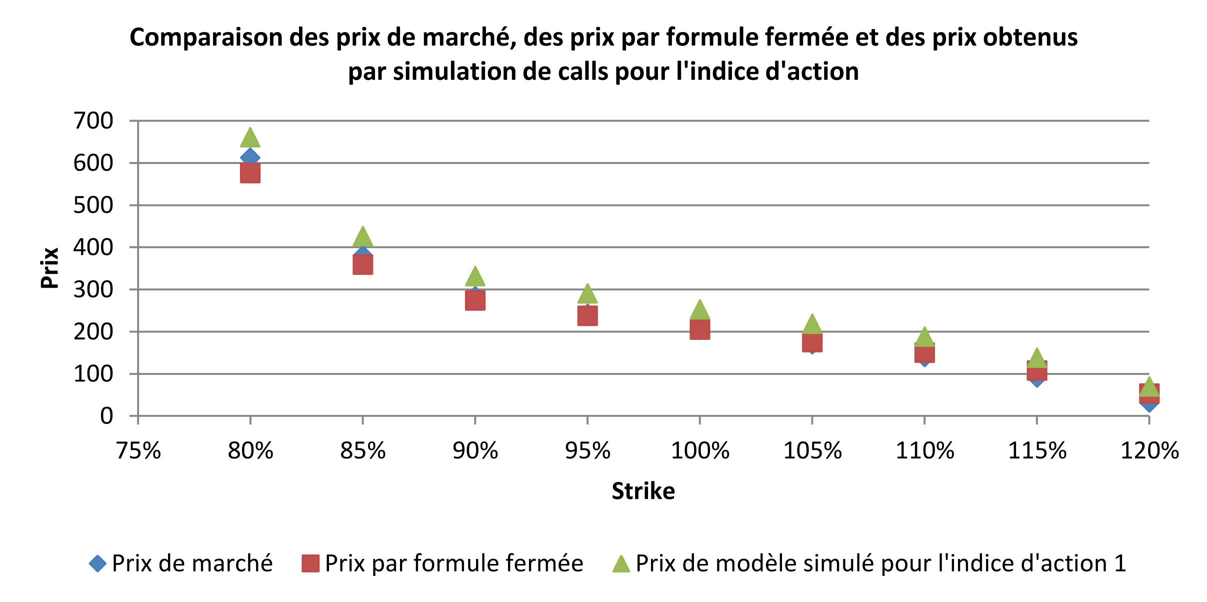


Figure III-5 Test de Market Consistency

L'analyse graphique permet de remarquer que les prix de marché et les prix simulés sont proches. De plus la convergence des 1000 scénarios vers la valeur donnée par formule fermée est acceptable, bien qu'elle soit meilleure pour des strikes plus élevés.

Ces tests permettent de valider les scénarios générés en univers Risque Neutre. Les étapes de calibrage et de validation des scénarios Monde Réel sont disponibles en Annexe 9 : Génération ESG Monde Réel.

(4) Modèle immobilier

Le même modèle (Black-Scholes) est utilisé pour la génération des chroniques de l'indice immobilier. Les indices de référence utilisés pour le calibrage sont les suivants :
- Indice relatif au loyer : Indice IPD Bureaux Loyer en pas annuel
- Indice relatif au capital : Indice IPD Bureaux Capital en pas annuel

Nous avons considérés 3 cycles économiques.

Les calibrages Risque Neutre et Monde Réel s'effectuent de la même manière et les paramètres suivants sont obtenus :

- **Risque Neutre**

Indice	σ
Capital	6,5387%
Loyer	0,3928%

Tableau III-3 Paramètres calibrés du modèle Black-Scholes immobilier Risque Neutre

La corrélation présente entre les indices Capital et Loyer est de 81,201%.

Le calibrage Monde Réel est disponible en Annexe 9 : Génération ESG Monde Réel.

Les tests effectués sont les mêmes que pour l'indice action et permettent de valider les jeux de scénarios ainsi générés.

d) Corrélation entre les indices

Dans le cadre de la construction des jeux de simulations Risque Neutre et Monde Réel, les aléas (les mouvements browniens) des processus stochastiques sont liés entre eux par le biais d'une matrice de corrélation.

Le tableau ci-dessous présente les corrélations retenues entre les différents indices économiques :

	Action	Immobilier	Taux	Inflation
Action	1	75%	50%	20%
Immobilier	75%	1	50%	20%
Taux	50%	50%	1	50%
Inflation	20%	20%	50%	1

Tableau III-4 Corrélations entre les différents actifs

Le modèle ainsi décrit servira à fournir les jeux de scénario, Monde Réel et Risque Neutre, qui seront utilisés tout au long de ce mémoire.

e) Scénarios utilisés par la suite

La génération de scénarios a été présentée de manière générale. Les scénarios qui seront utilisés dans le modèle décrit dans la partie suivante, sont un jeu de 1000 scénarios Risque Neutre, construits de la manière décrite précédemment, et un scénario Monde Réel moyen.

Le scénario Monde Réel est en effet construit comme la moyenne des 1000 scénarios Monde Réel générés à l'aide des modèles présentés auparavant.

2. Modèle ORSA (calcul du SCR prospectif)

Il convient maintenant de présenter le modèle de calcul du SCR prospectif qui a été utilisé comme référence au cours de ce mémoire. Pour cela, les données utilisées dans le modèle seront abordées dans un premier temps.

a) *Données et hypothèses du modèle*

Tout d'abord, la définition du profil de l'entreprise est une étape essentielle au bon fonctionnement du modèle. En effet, il est fondamental de bien préciser sur quel type de données, même s'il s'agit de données fictives, le modèle se base pour fournir les résultats qui seront analysés par la suite.

- **Profil de la compagnie modélisée**

L'assureur modélisé est un assureur Vie. Son activité n'inclut pas de portefeuille de rente ou d'épargne mais se constitue exclusivement de cash flows de passifs dans un souci de simplification. Par cash flows, il est entendu que les sinistres peuvent être modélisés par des flux annuels uniques d'un certain montant. Le calcul du BEL notamment s'en trouve simplifié. Les provisions techniques brutes initiales s'élèvent à 1 530 208 K€ et les fonds propres à 96 188 K€.

Le portefeuille d'actifs est constitué d'actions, d'obligations (OAT et OTF), d'immobilier de placement, d'actifs monétaires, d'$OPCVM$ (UC et obligataires) et d'actions stratégiques. La valeur comptable de l'actif est de 1 590 025 K€ à laquelle viennent se greffer 36 371 K€ d'intérêts et loyers acquis non échus.

Le total du bilan est équilibré entre l'actif et le passif et vaut 1 626 396 K€. Le bilan est représenté sur le tableau suivant :

Actif (en K€)	Passif (en K€)
1 626 396	96 188
	1 530 208

Tableau III-5 Bilan initial de l'assureur

Les inputs sont composés du portefeuille d'actifs et des cash flows de passif de la compagnie, ainsi que son bilan initial (en $t = 0$).

- **Scénarios économiques**

Les scénarios ont été générées sans Volatility Adjustment (VA) car le recalcul du VA à chaque pas de temps a été jugé trop complexe, et source d'erreurs potentielles. En effet ce calcul est basé sur des portefeuilles fournis chaque année par l'$EIOPA$ et dépend du *spread* présent entre ces portefeuilles et les données de marché. Les documentations explicites sur ce sujet sont rares et la projection du VA provient d'une modélisation fine et complexe qui n'est pas l'objet de ce mémoire.

Les courbes $EIOPA$ et de marché seront également utilisées en inputs.

- **Hypothèses formule standard**

Les hypothèses nécessaires à la bonne application de la formule standard constituent également un input du modèle. En effet la formule standard sera utilisée à chaque pas de projection afin de déterminer le SCR prospectif de la compagnie.

Les hypothèses concernées sont donc les matrices de corrélation dans un premier temps. En effet l'agrégation des risques intra-modulaire et inter-modulaire nécessite des coefficients de corrélations entre les différents risques (*cf* I.B.1) La formule standard).

Les différents chocs de la formule standard doivent également être renseignés. Pour l'indice action par exemple, on peut avoir un choc de 39% à la baisse (si l'action n'est pas stratégique). Ces chocs permettent d'obtenir la valeur du capital économique choqué (*cf* Equation (6)).

Une fois les inputs correctement renseignés, il convient alors de s'intéresser au fonctionnement du modèle en lui-même.

b) Fonctionnement du modèle

Rappelons que le modèle $ORSA$ a pour but de calculer un SCR prospectif jusqu'à l'horizon du plan stratégique. Le schéma suivant illustre son fonctionnement :

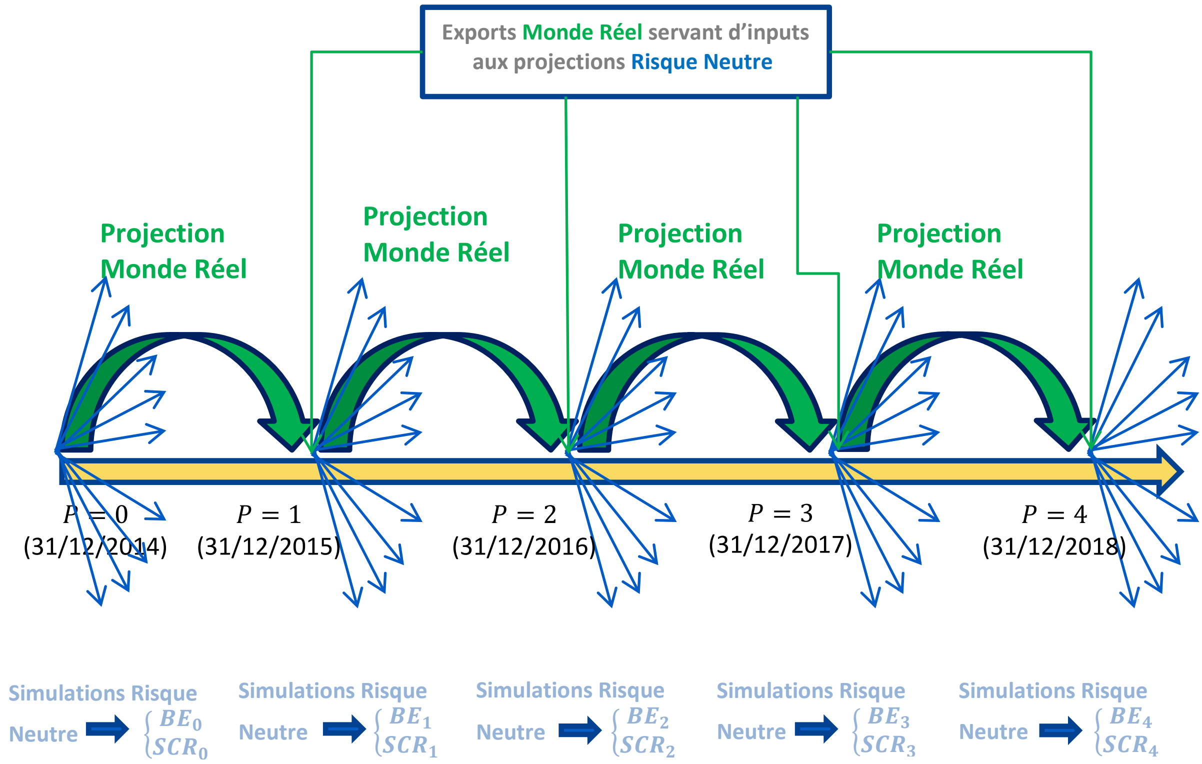


Figure III-6 Fonctionnement du modèle ORSA

Deux cadres de projection distincts sont utilisés dans le modèle :

- Un cadre **Monde Réel** permettant la projection de l'activité sur l'horizon du plan stratégique
- Un cadre **Risque Neutre** permettant le calcul des BEL à chaque pas de projection Monde Réel

La projection **Monde Réel** permet de déterminer l'évolution de l'activité de l'organisme selon des hypothèses réalistes. Elle tient notamment compte des anticipations de l'assureur (anticipations de marché, *new-business*, rachats dynamiques…).

Les projections **Risque Neutre** s'appuient sur les données précédemment projetées, et ont pour but de permettre la détermination du bilan prudentiel, notamment via le calcul des BEL. Elles supposent une absence d'affaires nouvelles (*new-business*), celles-ci étant traitées dans la projection **Monde Réel**.

Le modèle $ORSA$ considéré emploie la formule standard à chaque pas de temps afin de déterminer le SCR prospectif de la compagnie d'assurance. Le but de l'application est donc d'implémenter les ajustements au sein du modèle $ORSA$ afin d'en constater l'impact sur les résultats économiques de la compagnie.

c) Implémentation des ajustements

Les différents types d'ajustements ont été implémentés successivement au sein du modèle. Nous allons aborder les spécificités de chaque implémentation.

(1) Ajustements de taux

L'ESG génère des courbes de taux Zéro-coupons et la formule des ajustements porte sur les prix de Zéro-coupons. Il n'est donc pas possible de travailler directement avec les sorties de l'ESG.

La formule permettant de passer des taux aux prix de l'instrument a déjà été évoquée précédemment :

$$P(H,m) = \frac{1}{\left[1 + r_{H,H+m}\right]^m}$$

Il conviendra en outre, à l'issue de l'ajustement, de retrouver la courbe des taux correspondant aux prix ajustés. La formule réciproque est alors utilisée :

$$\hat{r}_{H+m,H+m+n} = \left(\frac{1}{\hat{P}(H+m,n)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

(2) Ajustements actions

Les courbes d'indices actions en sortie de l'ESG fournissent une chronique des rendements actions annuels. Ces rendements obéissent à la relation suivante, présentée précédemment, en notant $S(t)$ la valeur de l'indice action à l'instant t et $\eta_{t,t+1}$ le taux de rendement de l'action entre t et $t+1$:

$$S(t+1) = S(t) \times \left(1 + \eta_{t,t+1}\right) \tag{29}$$

La formule d'ajustement de l'indice action, donnée précédemment (*cf* II.A.2.d) Ajustement indice action) porte sur les valeurs de l'indice action. Il conviendra cependant d'obtenir les tables de rendement correspondantes afin de se rapprocher des sorties de l'ESG. Le but de cette partie est de proposer une formule permettant l'obtention des rendements action ajustés.

Rappelons la définition des déflateurs, utilisés dans l'ajustement :

$$D(H,n) = \prod_{i=0}^{n-1} P(H+i,1)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\widehat{D}(H,n) &= \prod_{i=0}^{n-1} \widehat{P}(H+i,1) \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} P^{RN}(H+i,1) \times \frac{\frac{P^{MR}(H,i+1)}{P^{MR}(H,i)}}{\frac{P^{RN}(H,i+1)}{P^{RN}(H,i)}} \\
&= \frac{P^{MR}(H,n)}{P^{RN}(H,n)} \times \left(\prod_{i=0}^{n-1} P^{RN}(H+i,1)\right) \\
&= \frac{P^{MR}(H,n)}{P^{RN}(H,n)} \times D^{RN}(H,n)
\end{aligned}$$

La formule d'ajustement de l'indice action est ainsi simplifiable :

$$\begin{aligned}
\hat{S}(H+n) &= S^{RN}(H+n) \times \frac{D^{RN}(H,n)}{\widehat{D}(H,n)} \\
&= S^{RN}(H+n) \times \frac{P^{RN}(H,n)}{P^{MR}(H,n)}
\end{aligned}$$

Posons $A(n) = \frac{P^{RN}(H,n)}{P^{MR}(H,n)}$ par souci de clarification.

Il est alors possible d'obtenir la relation suivante (voir la démonstration en Annexe 5) :

$$\hat{\eta}_{H+n-1,H+n} = \frac{A(n)}{A(n-1)} \times \left(1 + \eta^{RN}{}_{H+n-1,H+n}\right) - 1 \tag{30}$$

L'équation (27) peut ainsi être implémentée dans le modèle afin d'obtenir directement les rendements action ajustés sans nécessiter d'étape intermédiaire de calcul des indices action.

Les ajustements immobiliers utilisés sont les mêmes que pour l'indice action, la même formule leur sera donc applicable.

Nous pouvons à présent nous intéresser à l'impact des ajustements « Smith Wilson improved », qui ont été créés pour reproduire le plus fidèlement possible les calculs réalisés en 0 pour le pilier 1, sur les résultats économiques de l'assureur considéré.

B. Résultats et impacts économiques des ajustements « Smith Wilson improved »

Les résultats qui seront présentés dans cette partie ont été obtenus dans un cadre de projection stochastique.

Rappelons que le choix a été fait de considérer une unique simulation Monde Réel déterministe et 1000 simulations Risque Neutre effectuées à chaque pas de projection. Il convient de s'intéresser, dans un premier temps, aux courbes des taux qui seront utilisées dans le cadre de cette nouvelle technique d'ajustement.

1. Comparaison des courbes de taux utilisées

Comparons tout d'abord les graphiques des courbes de Smith Wilson à chaque pas de projection, qui sont nécessaires à l'utilisation de la nouvelle technique d'ajustement, avec les courbes Monde Réel et Risque Neutre.

Intéressons-nous tout d'abord aux courbes Monde Réel. Il s'agit des courbes issues du scénario moyen (moyenne des 1000 simulations effectuées) à chaque pas de projection.

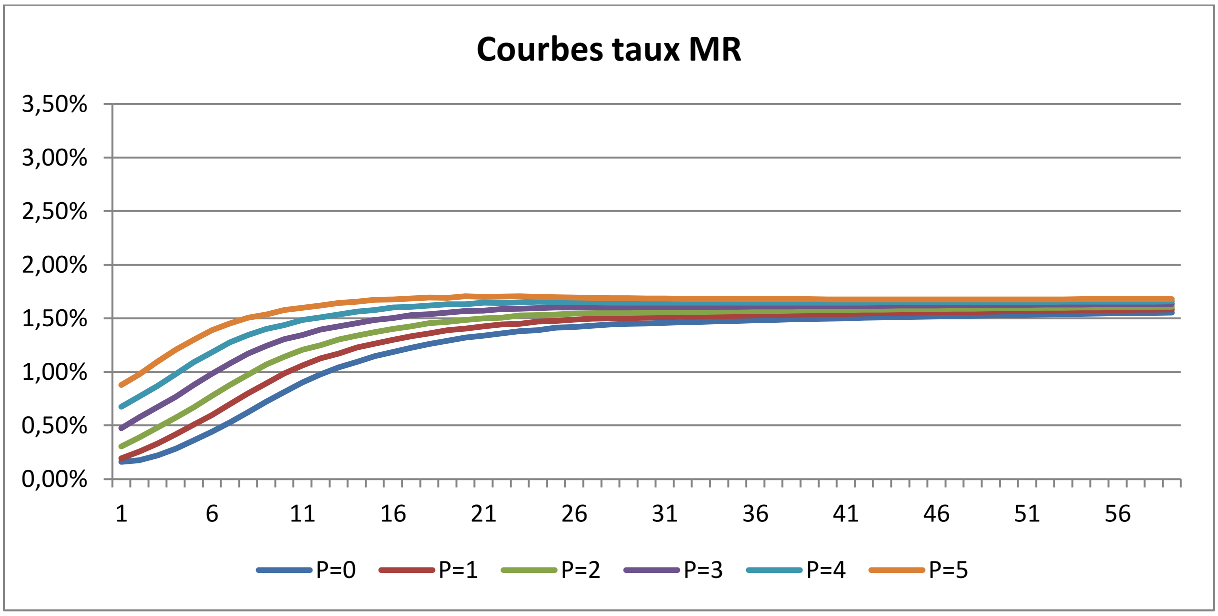


Figure III-7 Courbes de taux Monde Réel sur le plan stratégique

Lors de l'utilisation des ajustements financiers, les courbes ajustées se réconciliaient avec ces courbes à chaque pas de temps et étaient martingales en ces courbes. C'était ce point qui posait problème vis-à-vis de la pertinence des calculs menés par rapport à ceux préconisés par l'$EIOPA$ dans le cadre du pilier 1. Elles servent cependant à créer les courbes de Smith Wilson à chaque pas de temps.

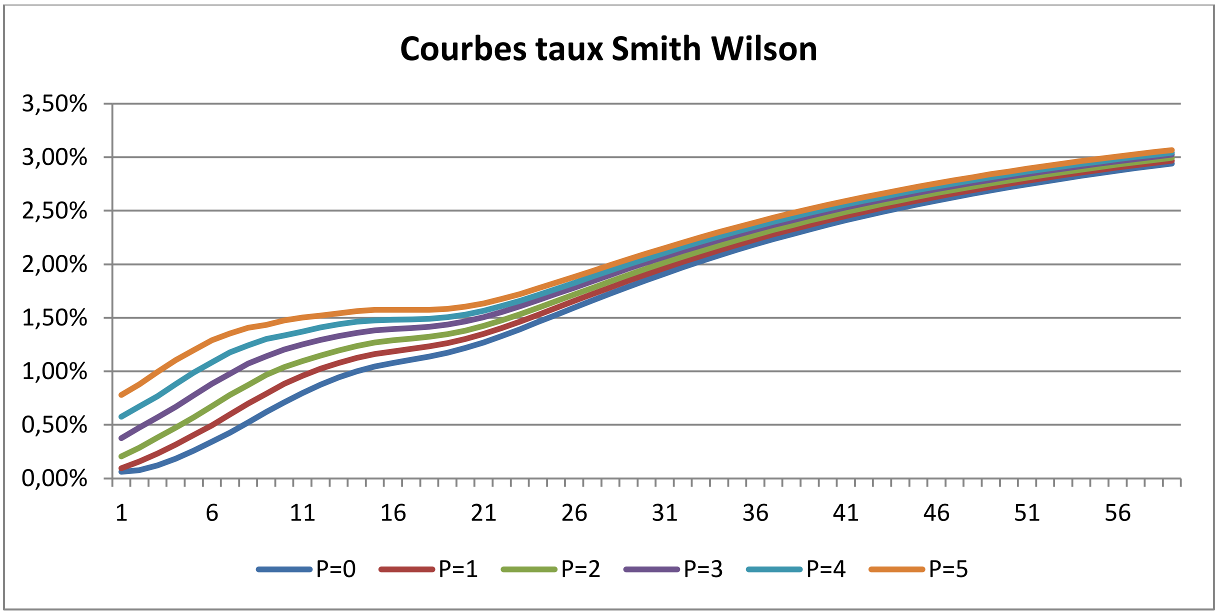


Figure III-8 Courbes de taux Smith Wilson sur le plan stratégique

Les courbes de Smith Wilson ainsi créées seront utilisées dans les ajustements « Smith Wilson improved ». L'assureur ne peut correctement prédire à long terme la valeur des taux, comme c'était déjà le cas pour les courbes Monde Réel, ce qui se traduit par le rapprochement des courbes après 20 ans. La courbe des taux ajustée se réconciliant avec une courbe de Smith Wilson à chaque pas de projection, il est intéressant de comparer leur aspect à celui des courbes Risque Neutre non ajustées.

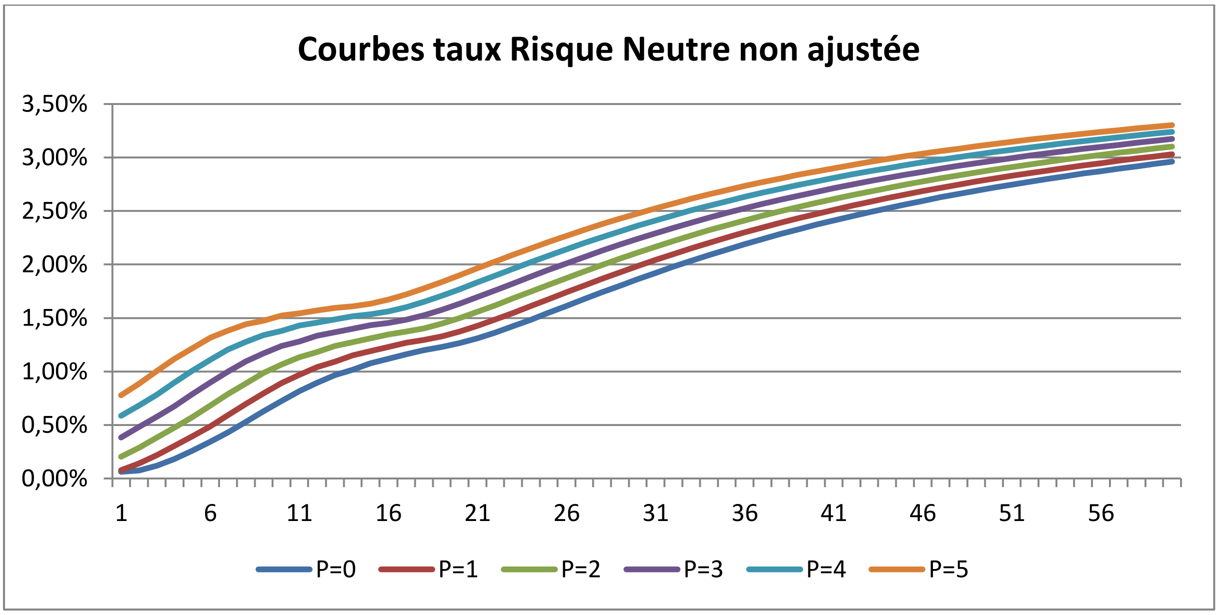


Figure III-9 Courbes de taux Risque Neutre sur le plan stratégique

L’étude de ces courbes montre ainsi une ressemblance entre les courbes Risque Neutre et les courbes de Smith Wilson. En effet, elles convergent toutes vers l’$\boldsymbol{UFR}$. Les courbes ajustées étant martingales en les courbes de Smith Wilson, elles devraient donc conserver cette convergence vers l’$\boldsymbol{UFR}$.

Le graphique suivant compare les courbes des taux Risque Neutre et ajustée en $P = 1$, afin d’analyser plus en détail l’impact de l’ajustement :

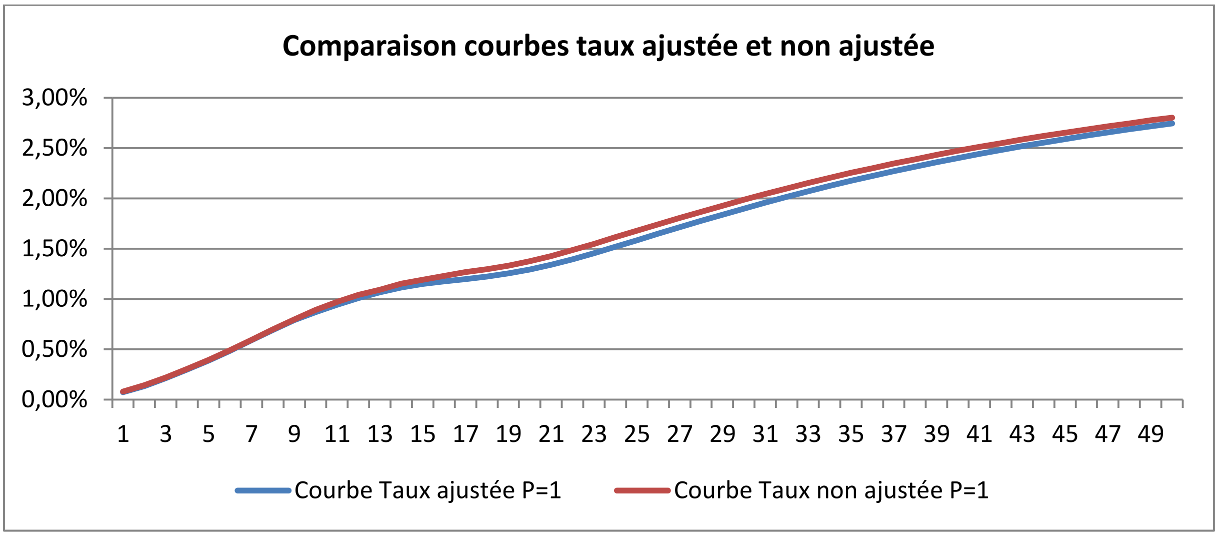


Figure III-10 Courbes des taux Risque Neutre et ajustée modèle stochastique

Ce graphique montre qu’il existe des similitudes entre les deux courbes, celles-ci partageant notamment la même limite. Elles restent malgré tout distinctes.

En effet, la courbe Risque Neutre en $P = 1$ est issue de la diffusion basée sur la courbe $EIOPA$ en $P = 0$. La courbe ajustée en revanche est, en $P = 1$, équivalente à la courbe de Smith Wilson à la même date par propriété de réconciliation démontrée en II.A.2.e) Propriétés de réconciliation des ajustements. Cette courbe de Smith Wilson n’est pas une courbe Risque Neutre, puisqu’elle est extrapolée à partir de la courbe Monde Réel, disposant de son propre processus de diffusion, différent du processus de diffusion Risque Neutre. C’est pourquoi les deux courbes ont une allure proche mais demeurent distinctes.

2. Vérification de la propriété théorique de martingalité

Afin de vérifier la justesse de l’implémentation des ajustements « Smith Wilson improved » il convient de s’intéresser dans un premier temps à la vérification de la propriété de martingalité. Cela permettra ainsi de valider le travail d’implémentation des ajustements.

En pratique, montrer que la courbe des taux ajustée est martingale sous la probabilité Risque Neutre signifie que :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\hat{P}(H+m,1) \times \widehat{D}(H,m) \middle| \mathcal{F}_H\right) = P^{SW}(H,m+1) \tag{31}$$

Avec le déflateur $\widehat{D}(H,m)$ défini comme suit :

$$\widehat{D}(H,n) = \prod_{i=0}^{n-1} \hat{P}(H+i,1)$$

Il est ainsi nécessaire de vérifier pour chaque maturité que la moyenne du produit des prix de Zéro-coupons ajustés *forwards* (de maturité 1 an) jusqu'au pas $H+m$ converge vers $P^{SW}(H,m+1)$, issu de la courbe de Smith Wilson.

Deux courbes de prix de Zéro-coupons sont ainsi obtenues, et sont comparées sur le graphique suivant :

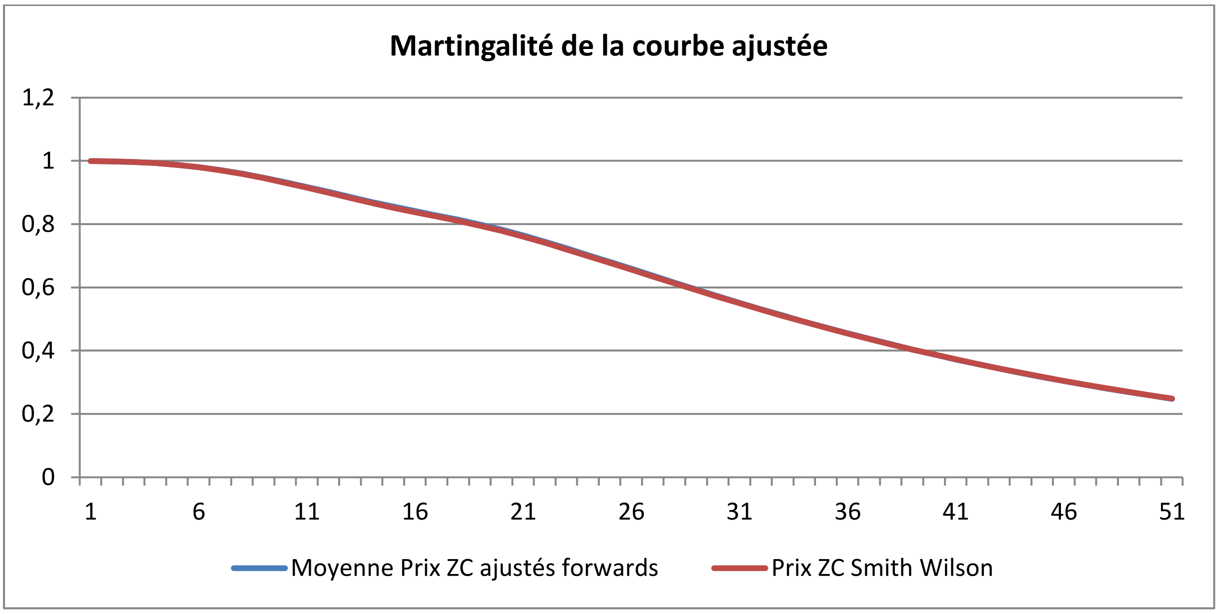


Figure III-11 Test de martingalité des ajustements "Smith Wilson improved" en P=1

Ces courbes étant quasiment confondues, il est possible de valider le test de martingalité des ajustements « Smith Wilson improved ».

La propriété théorique fondamentale de martingalité des ajustements, précédemment démontrée en II.A.2.c) Déflateurs et tests martingales, est ainsi respectée.

Il convient maintenant de s'intéresser aux résultats numériques fournis par la méthode des ajustements « Smith Wilson improved » et de les comparer au cas où les résultats ne sont pas ajustés.

3. Impact des ajustements « Smith Wilson improved »

Rappelons que l'objectif ayant motivé l'introduction des ajustements « Smith Wilson improved » est la reproduction à chaque pas de temps des méthodes utilisées en 0 pour les calculs du pilier 1. Il va ainsi falloir utiliser la méthode de Smith Wilson à chaque pas de temps afin de créer une courbe à partir « des données de marché », qui sont ici représentées par la diffusion Monde Réel. Cette courbe servira alors de base à la « diffusion » qui permettra de valoriser les engagements de l'assureur à chaque pas de temps. Cette diffusion est dans notre cas remplacée par la méthode des ajustements.

Rappelons aussi que dans le cas non ajusté, cette diffusion a également été évitée en décalant la courbe des taux Risque Neutre utilisée, ce qui donne des résultats cohérents dans notre cas, mais qui pourrait potentiellement être source d'erreurs importantes autrement (si les taux Monde Réel ne remontaient pas).

Les résultats du modèle ont été obtenus de deux manières distinctes :

- Dans un premier temps, un couple d'une simulation Monde Réel et d'une simulation Risque Neutre déterministes a été utilisé à chaque pas de projection. Le modèle déterministe ainsi défini est utilisé en tant que référence, et permet d'éviter des temps de calcul trop importants.
- Dans un second temps, un couple d'une simulation Monde Réel et de 1000 simulations Risque Neutre a été utilisé à chaque pas de projection. Ce modèle stochastique converge, en fonction du nombre de simulations Risque Neutre, vers le modèle déterministe évoqué précédemment. Le temps de calcul est beaucoup plus important dans ce cas. Ce sont généralement les résultats présentés dans un rapport $ORSA$.

La différence entre les BEL déterministes et stochastiques représente le coût des options et garanties financières ($FOGs$ en anglais). Il sera intéressant d'analyser ce coût, ainsi que son évolution au cours du temps.

Il est important de préciser la situation de l'assureur en $P = 0$ avant de présenter l'impact des ajustements « Smith Wilson improved » sur ses résultats économiques. En effet, les ajustements n'ont pas d'impact en $P = 0$, étant donné que la courbe de Smith Wilson est alors exactement la courbe $EIOPA$.

D'après la formule d'ajustement dans le cas présenté en II.A.2.e) Propriétés de réconciliation des ajustements, on a donc :

$$\hat{P}(0,n) = P^{SW}(0,n) = P^{EIOPA}(0,n)$$

Avec P^{EIOPA} les prix de Zéro-coupons issus de la courbe $EIOPA$.

Ainsi, les résultats économiques initiaux de l'assureur sont présentés dans le tableau suivant :

Résultats 12/2014 (N+0)	Déterministe	Stochastique
FP Economiques	92 889	85 839
SCR	60 720	58 550
Ratio Couverture	153%	147%
VM	1 822 475	1 822 475
BEL	1 706 177	1 714 660

Tableau III-6 Résultats économiques initiaux

Nous pouvons remarquer que les $FOGs$ valent environ 8,5 M€, d'après la formule $FOGs = BEL_{Dét} - BEL_{(Sto)}$, ce qui représente environ 0,5% du BEL.

Il convient à présent de s'intéresser aux résultats fournis par le modèle sur la durée du plan stratégique, et de s'intéresser à l'impact des ajustements à partir de $P = 1$.

a) Modèle non ajusté

Nous allons dans un premier temps analyser la situation financière de l'assureur à l'aide de résultats économiques caractéristiques dans le cas du scénario central non choqué : le BEL et la Valeur de Marché des actifs (VM).

Résultats non ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
VM	1 743 332 247	1 665 904 146	1 597 070 803	1 535 931 023	1 478 208 788
BEL	1 623 881 757	1 542 846 803	1 469 243 733	1 402 362 999	1 338 801 909

Tableau III-7 BEL et VM non ajustés déterministes

La VM et le BEL évoluent ainsi de manière décroissante au cours du temps. En effet, la courbe des taux en $t + 1$ prend des valeurs plus importantes que la courbe des taux en t. Cet effet peut être constaté sur le graphique suivant :

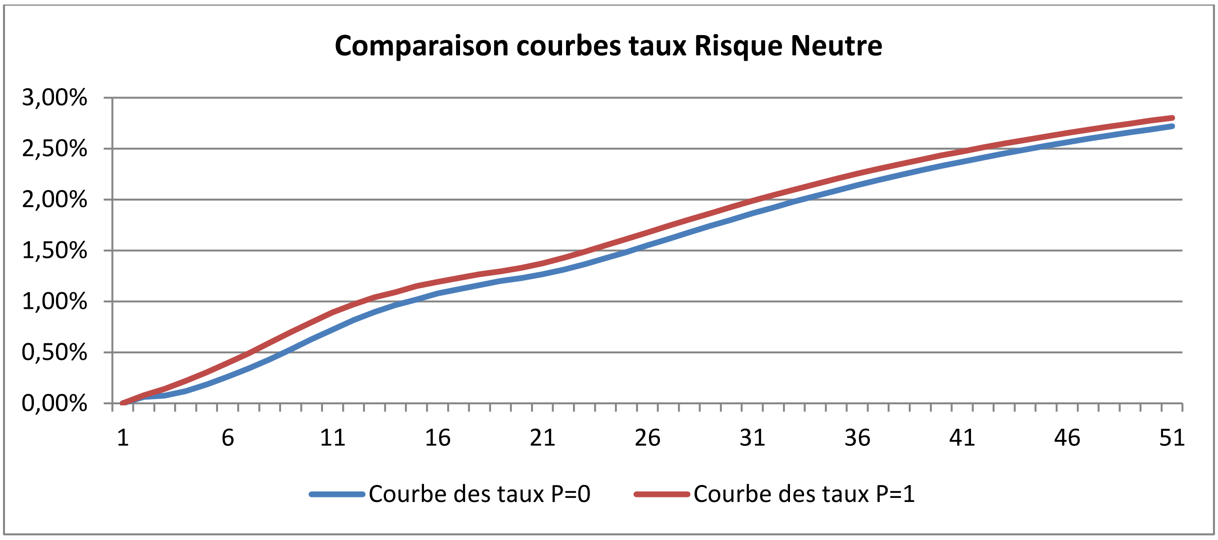


Figure III-5 Comparaison courbes des taux non ajustées Risque Neutre entre 0 et 1

Les valeurs de la courbe des taux en 1 sont ainsi distinctement supérieures à celles de la courbe en 0.

Cette hausse des taux entre t et $t + 1$ a un impact sur la valeur des obligations. En effet, une hausse des taux provoque une baisse de la valeur de marché des obligations. Le portefeuille de la compagnie modélisée étant majoritairement composé d'obligations (environ 70%), la VM totale va également connaître une baisse significative. Cette baisse est d'environ 4% sur la valeur totale du portefeuille entre 0 et 1 à titre d'exemple. C'est cette diminution qui expliquera principalement la baisse du SCR Marché.

La hausse de la courbe des taux va également avoir un effet sur la partie passif de l'assureur, et plus particulièrement sur son BEL. En effet, le BEL est calculé d'après la formule suivante :

$$BEL = \frac{PM_{finale}}{\prod_{i=1}^{N}(1 + r_{i-1,i})} + \sum_{i=1}^{N} \frac{(Prestations\ revaloris\acute{e}es_{\,i} - Cotisations\ revaloris\acute{e}es_{\,i})}{\prod_{k=1}^{i}(1 + r_{k-1,k})}$$

Il est possible de constater, pour le portefeuille considéré, que l'impact de l'actualisation est prédominant sur l'évolution du BEL, en opposition par rapport à la revalorisation des prestations et des cotisations. En effet, l'augmentation des taux va avoir tendance à le faire diminuer au cours du temps, ce qui est visible dans le tableau précédent où une baisse d'environ 2% du BEL peut être constatée entre 0 et 1.

Notre attention se portera maintenant sur les Fonds Propres économiques, le SCR et le ratio de couverture. Le modèle non ajusté fournit les résultats **déterministes** suivants :

Résultats non ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
FP Economiques	97 177 425	101 308 195	106 915 625	114 009 694	121 041 689
SCR	59 967 126	60 123 330	58 615 901	53 503 187	48 569 255
Ratio Couverture	162%	169%	182%	213%	249%

Tableau III-8 Résultats économiques non ajustés déterministes

Les Fonds Propres (FP) augmentent graduellement au cours du temps alors que le SCR va légèrement augmenter dans un premier temps, puis diminuer par la suite. Le ratio de couverture augmente ainsi au cours du temps. Rappelons en effet que ce ratio est déterminé par la formule $\frac{FP}{SCR}$.

Il convient de comparer ces résultats à ceux obtenus à l'aide du modèle **stochastique** afin de déterminer l'impact du coût des options et garanties sur les résultats économiques de l'assureur. Intéressons-nous tout d'abord au cas du BEL et de la VM comme précédemment :

Résultats non ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
VM	1 743 332 247	1 665 904 146	1 597 070 803	1 535 931 023	1 478 208 788
BEL	1 632 586 316	1 550 631 902	1 476 272 466	1 408 944 819	1 344 384 429

Tableau III-9 BEL et VM non ajustés stochastiques

Dans un premier temps, nous pouvons remarquer la constance de la VM. Cela s'explique par le fait que la VM considérée est issue de l'unique simulation Monde Réel de période précédente, identique dans le cas stochastique et déterministe Risque Neutre.

Le BEL en revanche permet de confirmer que les $FOGs$ sont très faibles, puisque ce coût représente environ 0,5% du BEL (fluctuant entre 7 et 9M€ sur les 5 années de projection). Les valeurs des $FOGs$ restent donc relativement constantes au cours du temps.

Intéressons-nous à présent au cas des FP du SCR et du Ratio de couverture dans le cas **stochastique** du scénario non choqué :

Résultats non ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
FP Economiques	89 464 995	94 231 358	100 418 149	106 969 592	114 206 586
SCR	59 619 840	60 200 329	59 207 712	57 493 716	55 847 528
Ratio Couverture	150%	157%	170%	186%	204%

Tableau III-10 Résultats économiques non ajustés stochastiques

Le profil d'évolution de ces grandeurs économiques n'est ainsi pas altéré par le passage Déterministe/Stochastique.

Ces résultats économiques apparaissent de manière plus intuitive sur la figure suivante :

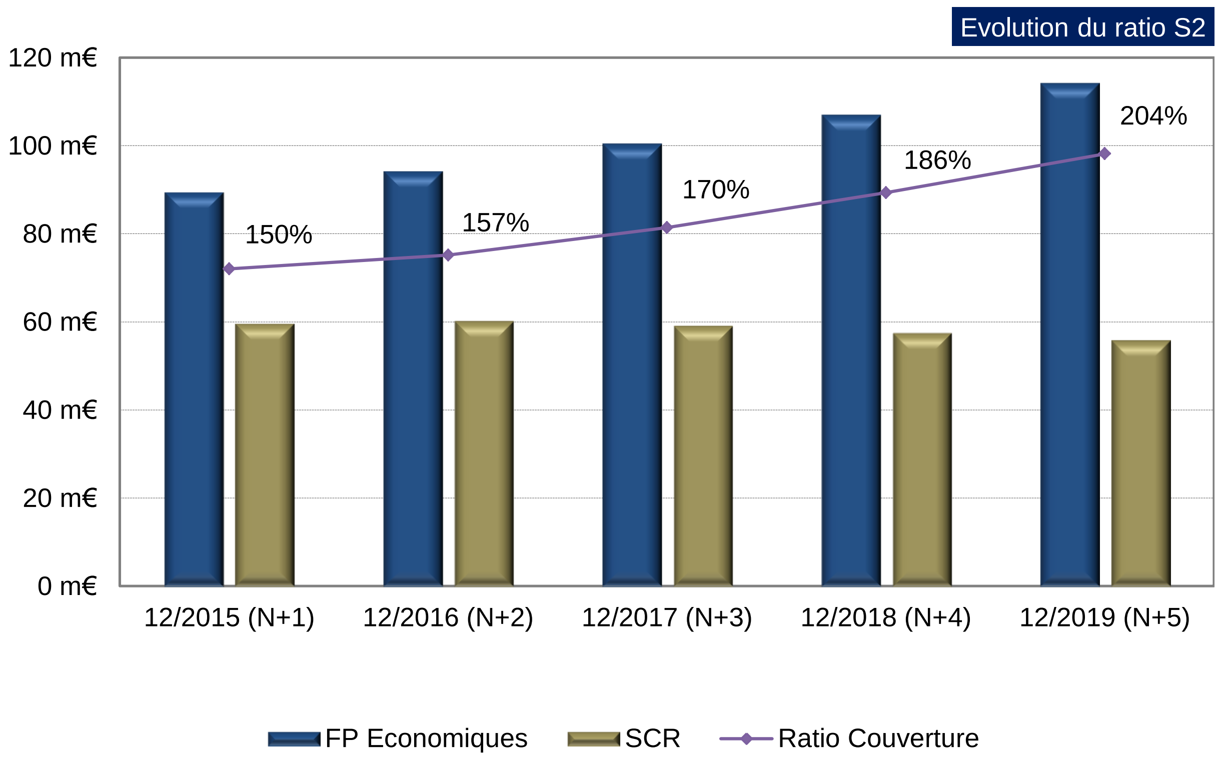


Figure III-12 Représentation des FP et du SCR non ajustés

L'évolution du ratio de couverture au cours du temps peut être constatée visuellement, et s'explique par l'augmentation des FP principalement. Il est également intéressant d'analyser la décomposition du SCR par module, afin de déterminer leurs évolutions respectives au cours du temps.

Evolution SCR	12/2014 (N+0)	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
SCR Total	**58 550 408**	**59 619 840**	**60 200 329**	**59 207 712**	**57 493 716**	**55 847 528**
SCR Marché Net	74 205 925	75 451 917	76 513 026	74 423 423	70 768 935	67 139 617
SCR Vie Net	19 327 966	21 038 709	21 533 733	23 264 933	25 573 447	27 797 789
SCR Opérationnel	7 453 182	7 089 467	6 735 614	6 407 827	6 111 814	5 826 439
SCR Défaut	2 064 022	1 974 389	1 886 349	1 807 527	1 737 286	1 672 059

Tableau III-11 Décomposition modulaire du SCR non ajusté

Il est ainsi possible de remarquer l'effet de la diversification sur le SCR, étant donné que le SCR total est plus faible que le SCR Marché.

Ces évolutions peuvent être représentées graphiquement par la figure suivante :

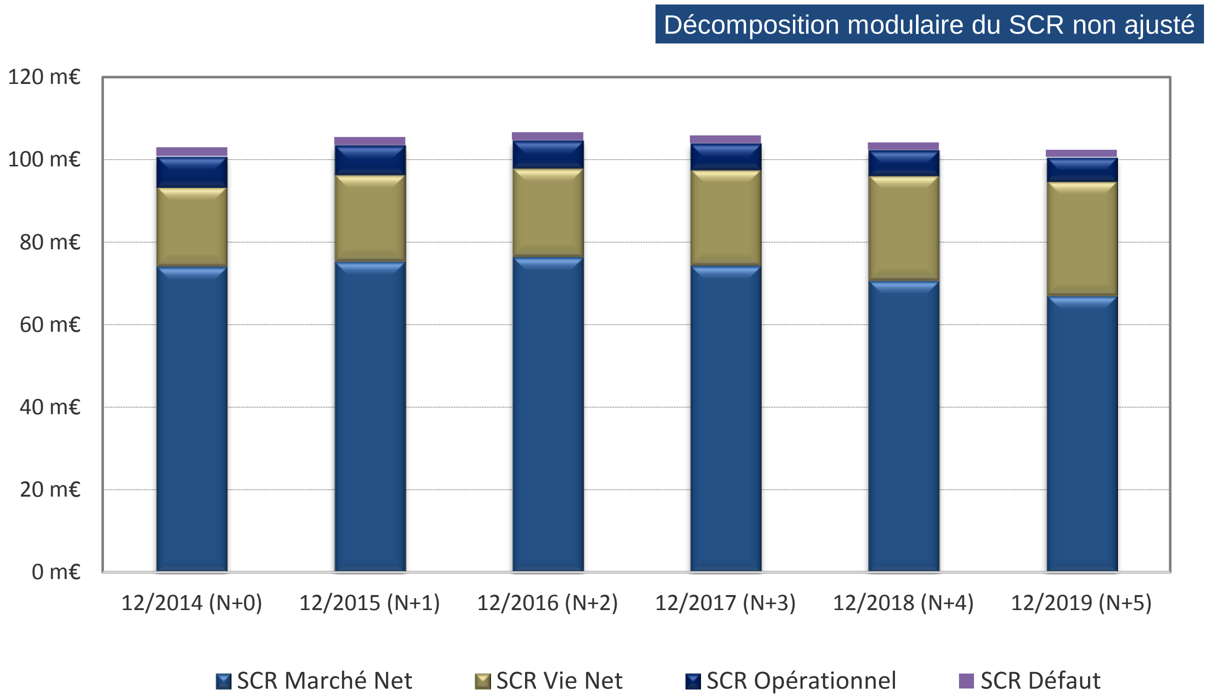


Figure III-13 Décomposition modulaire du SCR non ajusté

Il est intéressant de remarquer que la répartition modulaire du SCR au cours du temps est quasiment constante. La diminution du SCR total s'explique par la baisse du SCR de marché.

Il convient à présent de s'intéresser aux résultats fournis par le modèle ajusté « Smith Wilson improved », qui utilisera les courbes ajustées à chaque pas de projection afin de calculer le BEL.

b) Modèle ajusté

La situation initiale est identique dans le cas ajusté et non ajusté, elle n'a donc pas été retranscrite.

Les conclusions quant à la différence entre les résultats obtenus à l'aide du modèle déterministe et du modèle stochastique ajustés sont identiques au cas non ajusté. Les résultats stochastiques seront ainsi les résultats de référence fournis par la suite. Le lecteur intéressé pourra consulter en Annexe 7 les résultats déterministes ajustés.

Comme pour le modèle non ajusté, nous nous concentrerons dans un premier temps sur le BEL et la Valeur de Marché des actifs (VM), donnés dans le tableau suivant :

Résultats ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
VM	1 743 332 247	1 665 904 146	1 597 070 803	1 535 931 023	1 478 208 788
BEL	1 641 121 330	1 558 610 111	1 484 056 082	1 417 076 099	1 352 555 354

Tableau III-12 BEL et VM ajustés

Concernant la VM, la même explication que dans le cas non ajusté est valable. En effet, l'importante proportion d'obligations dans le portefeuille (plus de 70%) implique que l'impact d'une hausse des taux se traduit par une baisse de la valeur de marché des obligations, et donc de la valeur de marché totale du portefeuille de la compagnie.

Il est intéressant de noter que la VM reste identique dans le cas ajusté et dans le cas non ajusté. C'est parce qu'elle est issue de la projection Monde Réel et que les ajustements ont un impact sur les scénarios Risque Neutre utilisés.

La courbe ajustée évolue également en prenant des valeurs plus importantes au fil des pas de projection. Ainsi, la courbe des taux ajustée en $t+1$ prendra des valeurs supérieures à la courbe des taux ajustée en t. Cet effet peut se constater sur le graphique suivant :

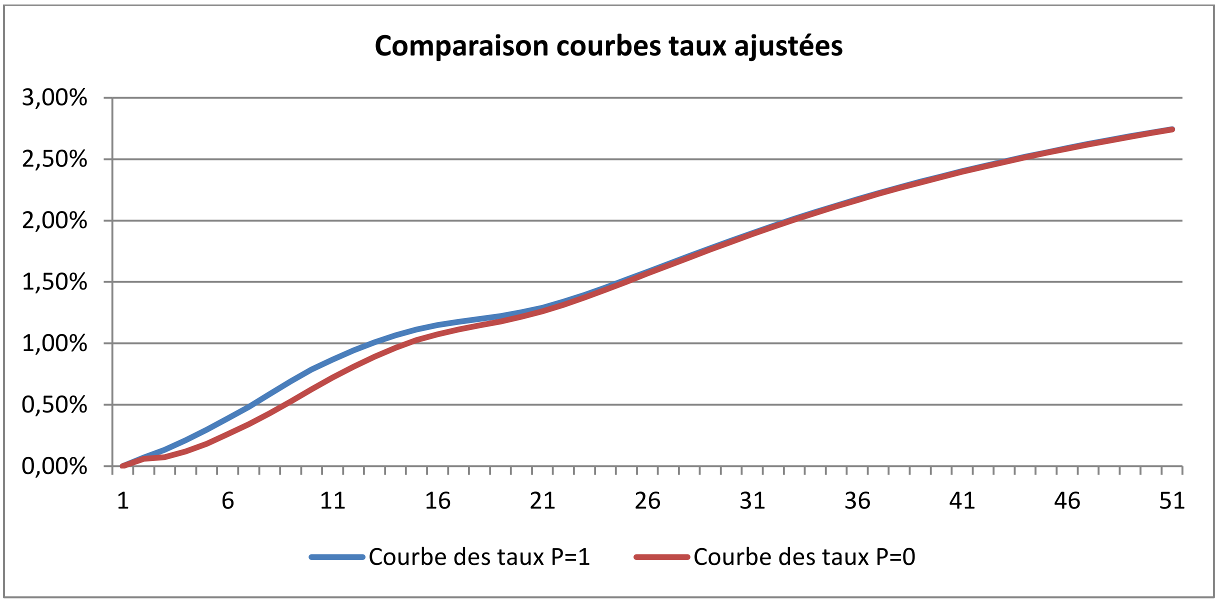


Figure III-14 Comparaison courbes des taux ajustées entre 0 et 1

La courbe des taux en $P=1$ prend bien des valeurs plus élevées que la courbe en $P=0$, bien que les deux courbes aient tendance à se confondre pour des maturités supérieures à 20 ans.

Comme cela a été rappelé précédemment, dans le cas de l'assureur modélisé (portefeuille de passifs uniquement constitué de *cash flows*) l'impact de l'actualisation dans le calcul du BEL est plus important que celui de la revalorisation. C'est pourquoi une diminution du BEL au cours du temps est encore une fois observable. Elle est également d'environ 2% entre 0 et 1.

L'actualisation dans le calcul de BEL se fait à l'aide des taux *forwards*, c'est-à-dire les taux associés aux prix de Zéro-coupons de maturité 1 an. Il est alors intéressant de comparer les courbes des taux *forwards* ajustée et non ajustée en 1 par exemple :

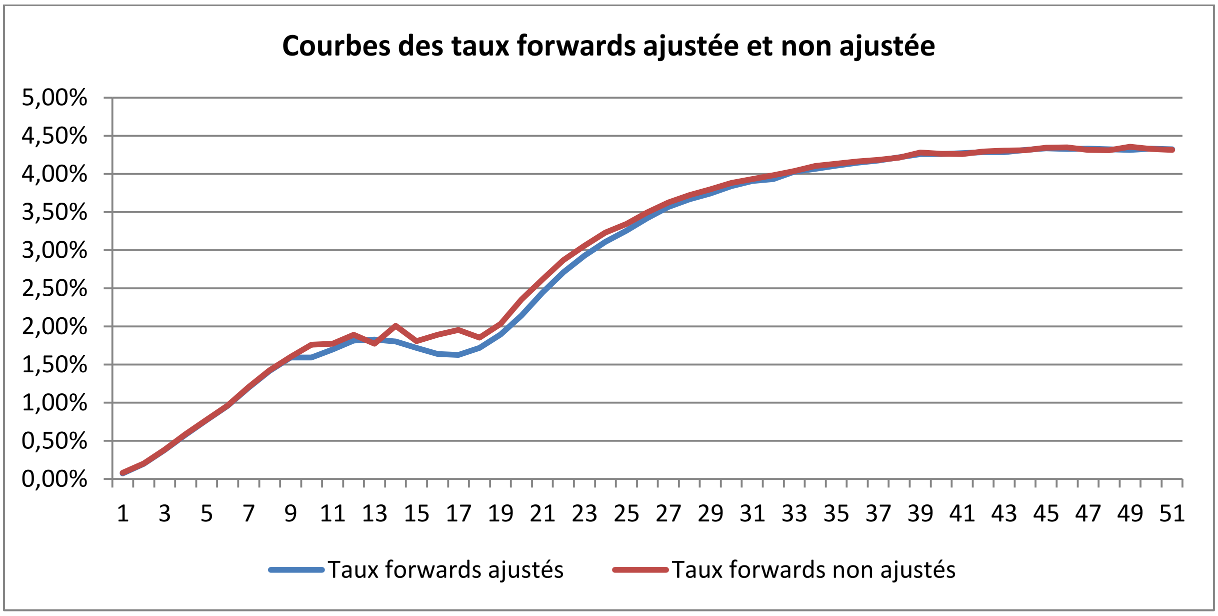


Figure III-15 Comparaison courbes des taux forwards en P=1

Ce graphique met en exergue un effet de lissage dû aux ajustements sur la courbe des taux *forwards*. L'interpolation de Smith Wilson va en effet avoir un impact sur les points non liquides présents entre 10 et 20 ans.

La méthode des ajustements « Smith Wilson improved » permet ainsi d'obtenir des courbes homogènes dans le temps avec les courbes Risque Neutre non ajustées. La courbe non ajustée est cependant au-dessus de la courbe ajustée. Pour voir l'impact de l'ajustement sur les courbes *forwards* à des pas de projection plus importants, le lecteur intéressé pourra se référer à l'Annexe 8.

La courbe *forward* non ajustée étant légèrement au-dessus de la courbe *forward* ajustée, et dans le cas d'un impact de l'actualisation supérieur à celui de la revalorisation, il est possible de s'attendre à une hausse du BEL dans le cas ajusté. C'est ce qui est observable dans les résultats obtenus.

De plus, le fait de décaler la courbe à chaque pas de temps dans le cas non ajusté, va entraîner un début de la convergence vers l'UFR anticipé d'une année à chaque fois (comme cela peut être constaté sur la Figure III-9 Courbes de taux Risque Neutre sur le plan stratégique). Cela implique que la courbe non ajustée sera plus haute à chaque pas de temps que la courbe ajustée, dont la date de début de convergence vers l'UFR reste toujours égale au *Last Liquid Point* (20 ans).

Cette hausse du BEL, cumulée à la constance de la VM, devrait se traduire par une diminution des FP, ce qui entraînerait une légère baisse du ratio de couverture lorsque le cas ajusté est comparé au cas non ajusté. Nous allons le vérifier en nous intéressant à l'évolution de la valeur des FP, du SCR et du ratio de couverture, présentée dans le tableau suivant :

Résultats ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
FP Economiques	81 238 301	86 696 342	93 187 470	99 035 506	105 876 904
SCR	59 216 392	58 496 403	56 180 763	55 312 376	54 636 136
Ratio Couverture	137%	148%	166%	179%	194%

Tableau III-13 Résultats économiques ajustés

De la même manière que précédemment, les Fonds Propres (FP) augmentent graduellement au cours du temps alors que le SCR diminue légèrement plus rapidement dans le cas ajusté.

Les ajustements « Smith Wilson improved » n'introduisent qu'une légère modification de la courbe des taux sans modifier sa structure par rapport à la situation hors ajustement (*cf* Figure III-10 Courbes des taux Risque Neutre et ajustée). Ainsi, les profils de progression des FP et du SCR sont peu impactés par la situation ajustée. Le changement se situe principalement au niveau des valeurs que prennent ces grandeurs économiques.

La situation ajustée est légèrement moins « favorable » que la situation non ajustée. Il est en effet possible de remarquer une diminution des FP, comme nous nous y attendions après l'analyse du BEL et de la VM, et du ratio de couverture (d'environ 10% pour ce dernier).

Il convient cependant de nuancer cette notion de résultats « favorables » étant donné que, rappelons-le, le modèle ajusté permet de prendre en compte l'évolution Monde Réel au cours du plan stratégique.

Les résultats du modèle ajusté peuvent être présentés de manière graphique par la figure suivante :

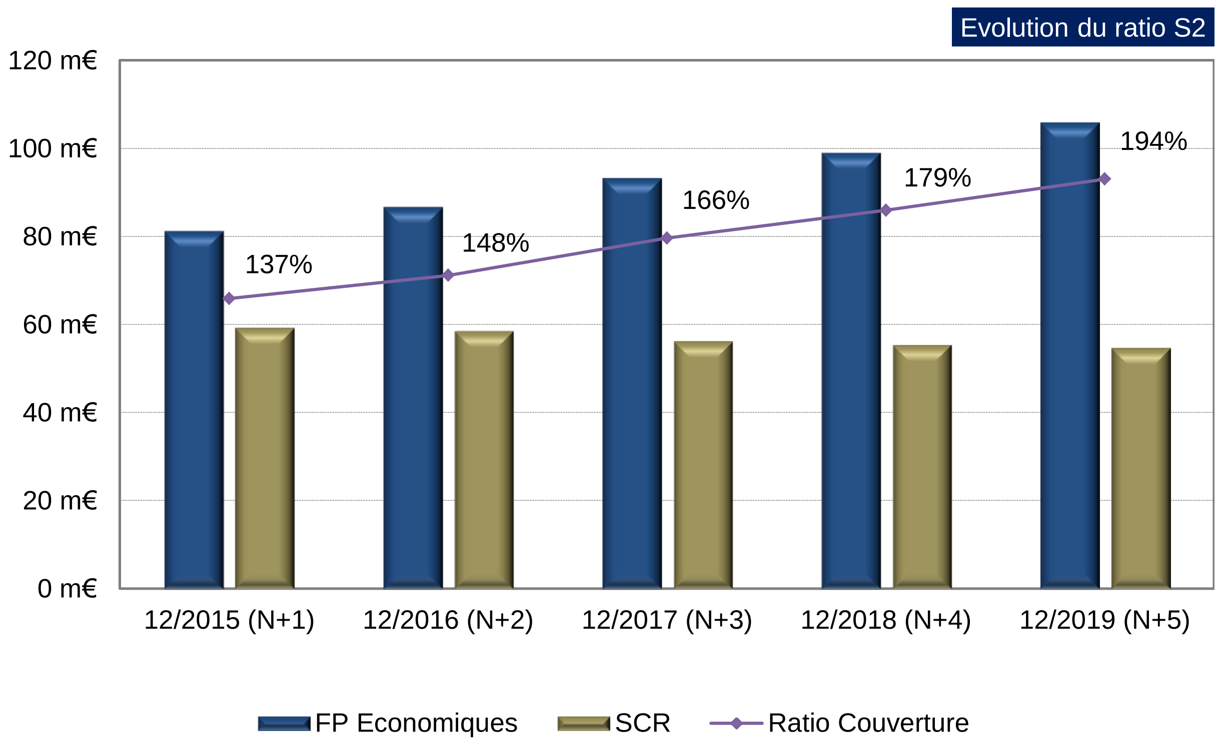


Figure III-16 Représentations des FP et du SCR ajustés

L'augmentation des FP ainsi que la diminution du SCR au cours du temps, impliquant une augmentation du ratio de couverture, sont ainsi aisément visibles. La décomposition du SCR au cours du temps est une donnée intéressante pour comprendre ces phénomènes :

Evolution SCR	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
SCR Total	**59 216 392**	**58 496 403**	**56 180 763**	**55 312 376**	**54 636 136**
SCR Marché Net	74 345 135	73 888 622	70 117 853	67 386 310	64 834 177
SCR Vie Net	21 860 455	21 304 496	22 221 165	25 262 447	28 245 846
SCR Opérationnel	7 144 334	6 787 439	6 458 981	6 165 595	5 880 984
SCR Défaut	1 974 389	1 886 349	1 807 527	1 737 286	1 672 059

Tableau III-14 Décomposition modulaire du SCR ajusté

Ces évolutions peuvent être représentées graphiquement par la figure suivante :

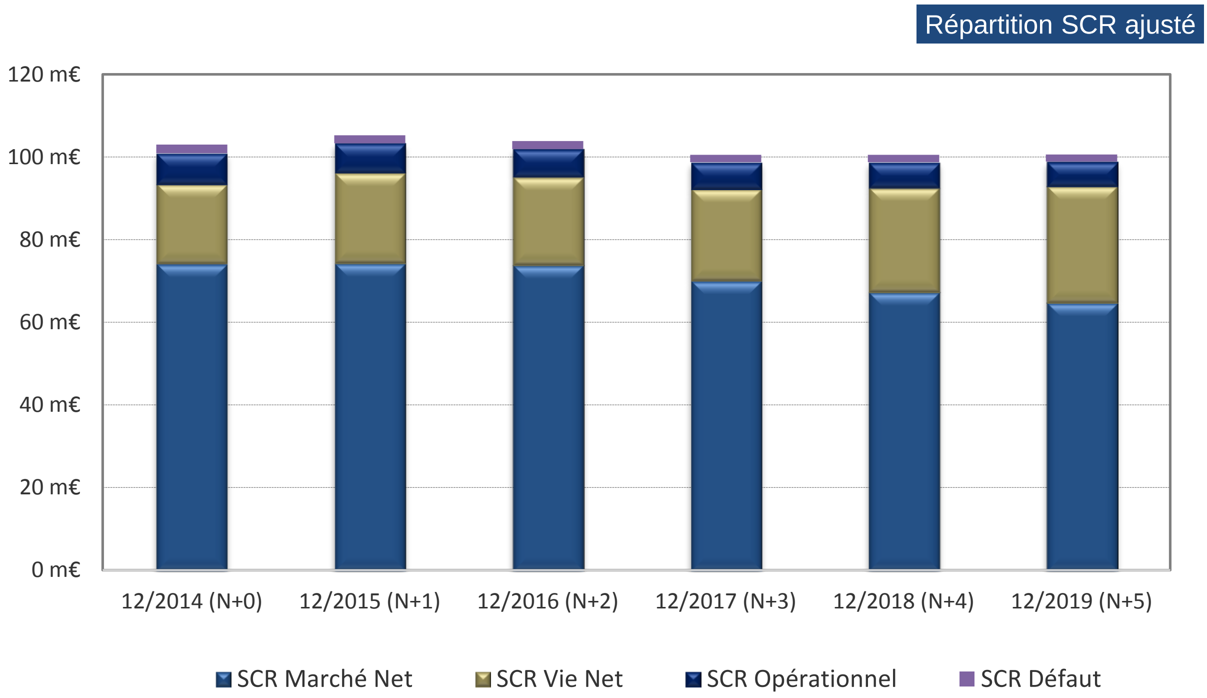


Figure III-17 Décomposition du SCR ajusté

Le SCR Marché diminue presque constamment au cours du temps (avec une exception en $P = 1$) ce qui explique la diminution du SCR global au cours du temps.

La technique des ajustements « Smith Wilson improved » ainsi présentée dépend cependant d'une hypothèse forte sur les paramètres utilisés dans la méthode de Smith Wilson, présentés dans la partie II.B.1) Description théorique de la méthode de Smith Wilson. En effet, ces paramètres ont été supposés constants au cours du plan stratégique. Cette hypothèse est justifiable pour le LLP ou le CRA, mais est plus discutable pour ce qui est de la durée de convergence vers l'UFR et l'UFR.

C'est pourquoi il est intéressant de voir l'impact de la modification de ces paramètres sur les résultats économiques de l'assureur.

C. Tests de sensibilité

Les paramètres à tester sont l'UFR et la durée de convergence vers celui-ci. L'hypothèse de fixer le CRA et le LLP semble, par ailleurs, raisonnable. En effet, le CRA est constant depuis plusieurs années et, sauf évènement contraire, il paraît cohérent de conserver le même correctif de risque de crédit d'une année sur l'autre. Pour le LLP actuel, il s'agit effectivement du dernier point liquide sur le marché. Il est peu probable qu'un nouveau point de liquidité à horizon plus important apparaisse. La détermination du paramètre α dépendant de l'UFR et de la durée de convergence vers l'UFR, il ne peut pas faire l'objet d'un test de sensibilité à part entière.

La sensibilité des résultats économiques (SCR, FP…) de l'assureur à la durée de convergence et à l'UFR va maintenant être étudiée. Ces tests ont été effectués dans le cadre d'un modèle stochastique, utilisant une unique simulation Monde Réel et 1000 simulations Risque Neutre.

1. Durée de convergence

Le test de sensibilité effectué sur la durée de convergence (DDC) vers l'UFR a été une réduction à 20 ans à partir du LLP au lieu de 40 actuellement.

Il est intéressant de comparer les courbes des taux *forwards* afin de bien jauger l'impact de ce test de sensibilité. Les courbes *forwards* avec des durées de convergence respectives de 20 et 40 ans vers l'UFR sont ainsi présentées dans le graphique suivant :

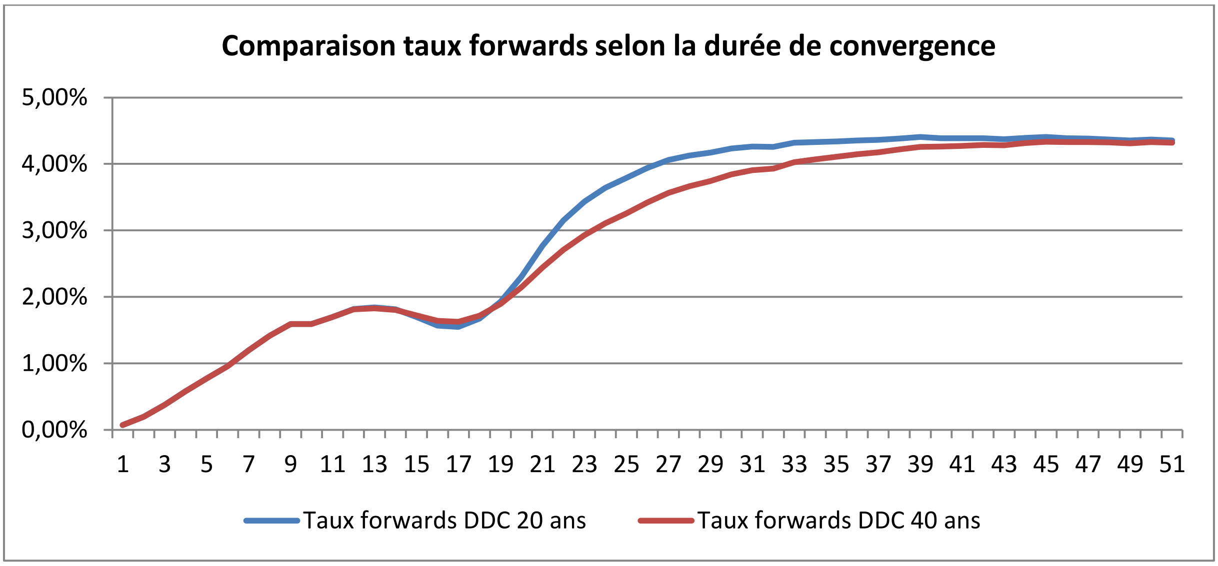


Figure III-18 Comparaison des courbes de taux forwards DDC en P=1

L'effet du changement de la durée de convergence peut ainsi aisément être constaté. En effet, la convergence vers l'UFR est beaucoup plus rapide et la valeur de 4,2% recherchée est bien atteinte au bout d'une quarantaine d'années, à savoir 20 ans après le LLP.

Afin d'analyser plus en détail l'impact de ce test de sensibilité, il est intéressant d'étudier le cas du scénario non choqué. Le BEL et la Valeur de Marché de ses actifs (VM) vont maintenant être analysés dans le cas ajusté :

Résultats DDC 20 ans	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
VM	1 743 332 247	1 665 904 146	1 597 070 803	1 535 931 023	1 478 208 788
BEL	1 640 250 828	1 557 837 979	1 483 436 562	1 416 491 318	1 351 942 243

Tableau III-15 BEL et VM avec durée de convergence 20 ans

Résultats DDC 40 ans	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
VM	1 743 332 247	1 665 904 146	1 597 070 803	1 535 931 023	1 478 208 788
BEL	1 641 121 330	1 558 610 111	1 484 056 082	1 417 076 099	1 352 555 354

Tableau III-16 BEL et VM avec durée de convergence 40 ans

La VM, après diminution de la durée de convergence, identique à celle dans le cadre initial. En effet, les ajustements n'ont pas d'impact sur la projection Monde Réel de période précédente, avec ou sans modification de la DDC.

Le BEL en revanche diminue, étant donné que la courbe des taux *forwards* dans le cadre du test de sensibilité, est quasiment confondue avec la courbe dans le cadre initial jusqu'au LLP, puis au-dessus par la suite comme cela peut être constaté sur la Figure III-18 Comparaison des courbes de taux forwards DDC en P=1. Cela influe sur le facteur d'actualisation de la formule du BEL en le faisant diminuer.

Il convient de s'intéresser maintenant aux résultats économiques de l'assureur dans ce cadre, présentés dans le tableau suivant :

Résultats DDC 20 ans	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
FP Economiques	82 552 547	87 893 957	94 158 464	99 977 284	106 856 399
SCR	58 105 806	57 397 429	55 234 655	54 374 252	53 621 910
Ratio Couverture	142%	153%	170%	184%	199%

Tableau III-17 Résultats économiques avec durée de convergence 20 ans

Les résultats ainsi obtenus sont à comparer avec ceux présentés dans le tableau Tableau III-18 Résultats économiques avec durée de convergence 40 ans. En effet, le but du test de sensibilité est de voir l'impact de la modification d'un paramètre par rapport à la situation initiale.

Résultats DDC 40 ans	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
FP Economiques	81 238 301	86 696 342	93 187 470	99 035 506	105 876 904
SCR	59 216 392	58 496 403	56 180 763	55 312 376	54 636 136
Ratio Couverture	137%	148%	166%	179%	194%

Tableau III-18 Résultats économiques avec durée de convergence 40 ans

L'évolution qualitative des FP et du SCR au fur et à mesure du plan stratégique est du même type que précédemment (respectivement croissante et décroissante au cours du temps). Ces effets ayant déjà été analysés, ils ne seront pas détaillés de nouveau dans les tests de sensibilité.

Vis-à-vis du cadre initial d'une durée de convergence vers l'UFR fixée à 40 ans à partir du LLP, une baisse du SCR ainsi qu'une augmentation des FP sur la durée du plan stratégique peuvent être remarquées. Cela provoque une amélioration du ratio de couverture tout au long du plan stratégique.

Une modification de la durée de convergence a donc un impact réel sur les FP et le SCR, et donc le ratio de solvabilité, de l'assureur. Il est en effet possible de constater un effet d'échelle. Bien que l'écart sur le BEL semble relativement faible au vu de la valeur totale ($< 0{,}1\%$), son influence est bien plus grande sur les FP par exemple (environ 1,3%).

Il convient maintenant de s'intéresser au cas de l'autre paramètre fondamental, c'est-à-dire l'UFR.

2. UFR

La sensibilité des résultats économiques à l'UFR a été testée en le fixant à 3,2%. Cette valeur a été déterminée afin d'être plus cohérente avec l'état actuel du marché. En effet, le choix d'un UFR à 4,2% dans le contexte de taux bas est très discutable, c'est pourquoi il est très important d'analyser la sensibilité à ce paramètre qui pourrait rapidement être amené à évoluer. Le choix de 3,2% a été fait car il consiste en une diminution significative de la valeur (1%) tout en n'étant pas une baisse trop brutale.

Il est intéressant de comparer les courbes des taux *forwards* afin de bien jauger l'impact de ce test de sensibilité sur l'UFR ($Ultimate$ $\boldsymbol{Forward}$ $Rate$). Les courbes *forwards* avec des UFR de 3,2% et 4,2% respectivement sont ainsi présentées dans le graphique suivant :

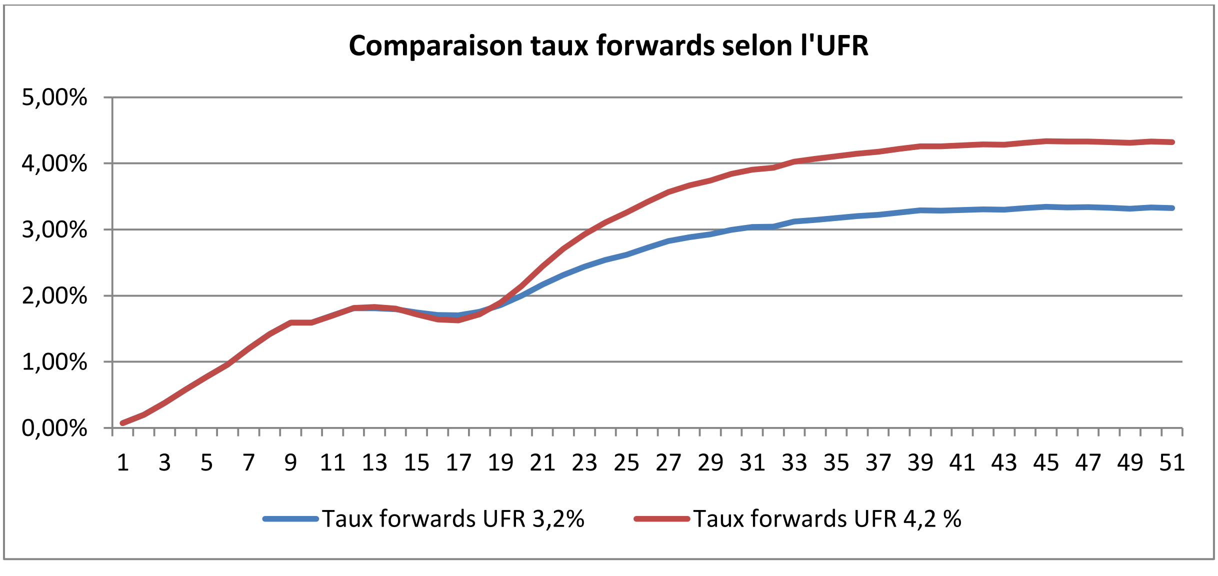


Figure III-19 Comparaison des courbes de taux forwards UFR en P=1

L'effet de la diminution de l'UFR est bien visible entre les courbes précédentes. La courbe bleue tend en effet vers une valeur plus faible que la courbe rouge.

Intéressons-nous à présent aux résultats économiques de l'assureur sur la durée du plan stratégique :

Résultats UFR 3,2%	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
BEL	1 642 619 842	1 559 948 704	1 485 190 243	1 418 096 328	1 353 552 319
SCR	61 185 715	60 382 137	57 798 231	56 833 052	56 028 358
Ratio Couverture	129%	140%	158%	172%	186%
FP Economiques	79 088 730	84 769 429	91 556 390	97 554 704	104 446 560

Tableau III-19 Résultats économiques avec UFR 3,2%

Résultats UFR 4,2%	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
BEL	1 641 121 330	1 558 610 111	1 484 056 082	1 417 076 099	1 352 555 354
FP Economiques	81 238 301	86 696 342	93 187 470	99 035 506	105 876 904
SCR	59 216 392	58 496 403	56 180 763	55 312 376	54 636 136
Ratio Couverture	137%	148%	166%	179%	194%

Tableau III-20 Résultats économiques avec UFR 4,2%

Le BEL est plus élevé à présent. En effet, la courbe des taux *forwards* avec un UFR de 3,2% est sous la courbe d'UFR 4,2% à partir du LLP comme cela peut être constaté sur la Figure III-19 Comparaison des courbes de taux forwards UFR en P=1. Cette augmentation du BEL provient ainsi de celle du facteur d'actualisation, la courbe ayant des valeurs plus confondues dans un premier temps, et plus faibles par la suite. Bien que cette augmentation du BEL semble faible, une fois encore l'effet d'échelle implique un impact plus significatif sur le ratio de solvabilité par exemple.

Ainsi, une augmentation du SCR et une baisse des FP sur la durée du plan stratégique peuvent être remarquées dans le cas d'un UFR à 3,2%, provoquant ainsi une diminution du ratio de couverture tout au long du plan stratégique.

Une modification de l'UFR a donc également un réel impact sur les résultats économiques de l'assureur. Cette situation est fréquemment discutée lors des conférences de l'$ACPR$.

En effet le choix d'un UFR à 4,2% actuellement, qui n'a pas été modifié depuis 2009, ne reflète pas le contexte de taux bas du marché. Cela induit ainsi un biais dans toutes les courbes Risque Neutre produites par des ESG qui se basent sur la courbe $EIOPA$.

La stabilité de cette hypothèse étant régulièrement remise en cause, ce test de sensibilité permet d'éclairer la situation dans laquelle se trouverait un assureur dans le cas où l'UFR devrait être modifié.

Conclusion

Les méthodes d'ajustement décrites au cours de ce mémoire sont utilisées dans un cadre $ORSA$. Elles permettent de conditionner les simulations Risque Neutre utilisées lors des calculs de valorisation de l'assureur, par la simulation Monde Réel permettant de faire progresser la situation économique de la compagnie au cours du plan stratégique. L'utilisation de ces techniques d'ajustement permet ainsi de rendre plus flexible le modèle $ORSA$ utilisé afin de calculer le SCR prospectif de la compagnie, qui a pour objectif de contrôler son ratio de solvabilité au cours du temps. En effet, il n'est notamment plus nécessaire que de générer deux jeux de simulations dans le cas ajusté, ce qui engendre un gain de temps considérable.

La provenance des techniques des ajustements est empiriquement liée à cette notion d'information disponible et d'univers. En effet, rappelons que l'information Monde Réel doit être intégrée aux scénarios Risque Neutre sur toute la durée du plan stratégique. Ceci est fait par le biais d'un coefficient stochastique, dépendant de la simulation Monde Réel choisie et de la simulation Risque Neutre à ajuster.

L'ajustement des facteurs de risque ainsi réalisé a été comparé à une situation où la compagnie n'ajusterait pas ses scénarios Risque Neutre, c'est-à-dire qu'elle utiliserait à chaque pas de temps des jeux de simulations générés en 0. Cette dernière méthode n'est cependant pas justifiable étant donné qu'elle ne tient pas compte de l'information Monde Réel de projection sur l'ensemble du plan stratégique. Les ajustements financiers n'ont pas fourni des résultats satisfaisants quant à l'allure des courbe ajustées, du fait de la martingalité en les courbes des facteurs de risque Monde Réel. En effet, la convergence vers l'UFR était alors perdue, trahissant ainsi une inconsistance avec les calculs menés en 0 dans le cadre du pilier 1.

C'est pourquoi une autre technique d'ajustements a alors été développée, la technique des ajustements « Smith Wilson improved », ayant pour but d'obtenir des courbes ajustées permettant de rester cohérents avec ces calculs en 0. L'utilisation de la méthode de Smith Wilson permet d'obtenir des courbes de taux dites de Smith Wilson, qui serviront à l'ajustement au lieu des courbes Monde Réel. Les résultats obtenus sont bien conformes aux attentes, avec des courbes conservant une convergence vers l'UFR, mais tenant compte de l'information Monde Réel de période précédente.

Il est cependant important de préciser que pour l'utilisation de cette méthode, des hypothèses de stabilité ont dû être formulées sur les paramètres utilisés dans la méthode de Smith Wilson. Certaines d'entre elles sont cohérentes avec le contexte économique actuel (valeurs du CRA ou du LLP), mais d'autres sont plus discutables (UFR et Durée de convergence vers l'UFR). Ces derniers pourraient éventuellement être amenés à changer dans un futur proche, étant donné qu'ils ne reflètent pas le contexte actuel de taux bas et induit artificiellement un biais dans les calculs de solvabilité réglementaires. Ainsi, bien que les ajustements « Smith Wilson improved » semblent constituer une méthode efficace il convient de rester prudent vis-à-vis des hypothèses formulées.

Annexes

Annexe 1 : Démonstration de l'expression d'un prix forward

Démonstration de l'expression $F(t,m,n) = \frac{P(t,m+n)}{P(t,m)}$ utilisée en II.A.1.b) Les forwards

Supposons par l'absurde que :

$$F(t,m,n) - \frac{P(t,m+n)}{P(t,m)} > 0$$

Diverses opérations financières vont être réalisées afin de prouver que pour respecter l'hypothèse d'AOA, cette supposition est fausse.

En t :

Le *forward* de prix $F(t,m,n)$ est vendu à découvert, et le Zéro-coupon de prix $P(t,m+n)$ est acheté. D'après l'hypothèse, et sachant qu'un prix de Zéro-coupon est strictement inférieur à 1 (si sa maturité est strictement positive), alors le portefeuille a une richesse $F(t,m,n) - P(t,m+n)$ en t. En effet, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(t,m,n) > \frac{P(t,m+n)}{P(t,m)} > P(t,m+n)$$

En $t+m$:

Le Zéro-coupon acheté en t vaut maintenant $P(t+m,n)$, et il peut être donné pour honorer la dette contractée en vendant le *forward* à découvert.

La richesse du portefeuille en t a de plus été capitalisée, pour devenir :

$$\frac{F(t,m,n) - P(t,m+n)}{P(t,m)}$$

Or $P(t,m) < 1$ car $m > 0$, donc :

$$\frac{F(t,m,n) - P(t,m+n)}{P(t,m)} > F(t,m,n) - \frac{P(t,m+n)}{P(t,m)}$$
$$> 0 \ (d'après \ l'hypothèse)$$

Le portefeuille ainsi créé résulte donc en une richesse strictement positive en $t+m$ avec un investissement nul en t, ce qui ne satisfait pas la condition d'AOA. L'hypothèse est donc fausse.

Ainsi :

$$F(t,m,n) - \frac{P(t,m+n)}{P(t,m)} \leq 0$$

En répétant la démonstration pour une hypothèse de stricte négativité et avec des opérations de transaction opposées, l'égalité cherchée est finalement obtenue.

Démonstration de l'expression $P(0,2) = P(0,1) \times P(1,2)$

L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), contraint l'échéancier de flux suivant à être respecté :

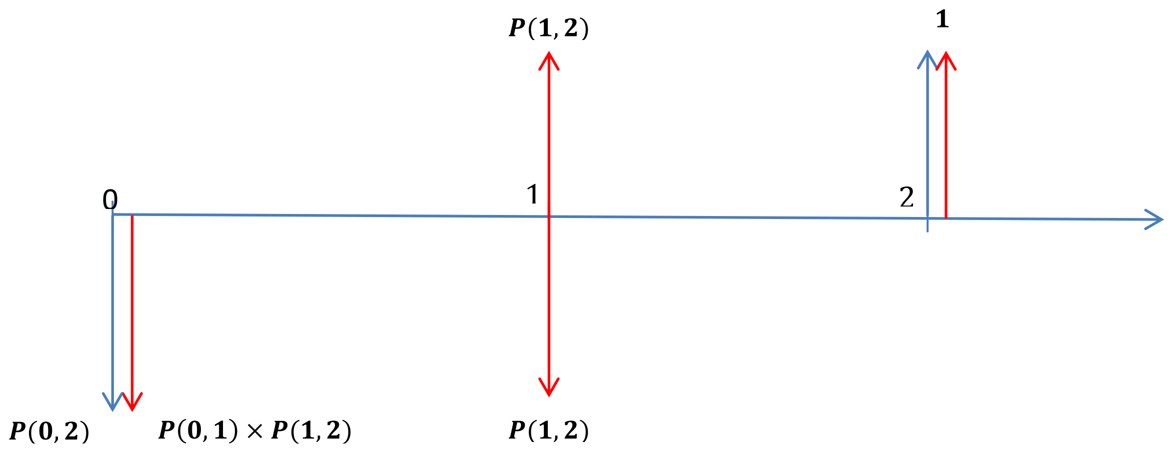


Figure - Echéancier de flux

En effet, l'achat en 0 du Zéro-coupon de prix $P(0,2)$ donne en 2 un flux unitaire. Cette stratégie peut être répliquée en achetant $P(1,2)$ Zéro-coupons de prix $P(0,1)$ en 0.

Ainsi, la relation suivante est bien obtenue :

$$P(0,2) = P(0,1) \times P(1,2)$$

Annexe 2 : Prix de Zéro-coupon dans le modèle HW1F

Expressions des fonctions A, B et X dans le prix de Zéro-coupon en « II.A.2.f) Vérification de la stabilité des volatilités », défini par :

$$P^{RN}(H+m,n) = \frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)} e^{-\frac{A(m,n)\sigma_n^2}{2}+B(m,n)X_m}$$

Le choix a été fait, dans le modèle HW1F, de s'appuyer sur la diffusion d'un nouveau processus noté X_t, défini par : $X_t = r_t - f(0,t)$.

La dynamique de X_t peut être déterminée à partir de l'équation de diffusion du modèle HW1F vue précédemment :

$$dX_t = \left(\frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at}) - aX_t\right)dt + \sigma dW_t$$

En intégrant l'équation précédente entre t et s, nous obtenons une formule nous permettant de simuler X_t à partir de X_s :

$$X_t = e^{-a(t-s)}\ X_s + \frac{\sigma^2}{a^2}\ e^{-a(t)}\ [\text{ch}(at) - \text{ch}(as)] + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2a(t-s)}}{2a}}N(0,1)$$

Le prix des obligations Zéro-coupon peut alors être calculé à partir des simulations du processus X_t, des prix des obligations Zéro-coupon observés sur le marché, et des paramètres, en appliquant la formule donnée précédemment :

$$P^{RN}(H+m,n) = \frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)} e^{-\frac{A(m,n)\sigma_n^2}{2}+B(m,n)X_m}$$

Avec :

$$\begin{cases} \mathrm{A}(m,n) = -\frac{1}{2a}(1-e^{-2at})B(m,n)^2 \\ B(m,n) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} \end{cases}$$

Pour plus d'informations, le lecteur intéressé pourra consulter (Antoine & Auneau, 2011).

Annexe 3 : Prix d'un caplet dans le modèle HW1F

Prix d'un *caplet* dans le modèle HW1F utilisé dans la partie III.A.1.b)(2) Calibrage du modèle :

Pour le détail de l'obtention de la formule, le lecteur intéressé pourra consulter (Brigo & Mercurio, 2006).

Nous définissions la fonction ZBP, correspondant à la formule de Black appliquée en date t à un put sur un Zéro-coupon, de strike K et de maturité Δ, dans le modèle de Hull White à un facteur par :

$$ZBP(t, t+\Delta, K) = KP(0,t)N(d_1) - P(0,t+\Delta)N(d_2),$$

Avec :

- $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(0,t)}{P(0,t+\Delta)(1+K\times\Delta)}\right)}{\sqrt{V(t,t+\Delta)\times B(t,t+\Delta)^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{V(t,t+\Delta)\times B(t,t+\Delta)^2}$
- $d_2 = d_1 - \frac{1}{2}\sqrt{V(t,t+\Delta)\times B(t,t+\Delta)^2}$
- $V(t,t+\Delta) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda\Delta}\right)$
- $B(t,t+\Delta) = \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda\Delta}\right)$
- N la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite
- Δ fixée à 6 mois dans notre cas

Le prix en 0 d'un *caplet* de maturité T_1, de tenor $T_2 - T_1$, de strike K et de nominal 1 peut s'exprimer à l'aide de la fonction ZBP dans le modèle de Hull White à un facteur :

$$Caplet\ (T_1, T_2, K) = \left(1 + K\times(T_2 - T_1)\right) \times ZBP\left(T_1, T_2, \frac{1}{\left(1 + K\times(T_2 - T_1)\right)}\right)$$

Dans notre cas, cette formule devient :

$$Caplet\ (t, t+\Delta, K) = (1 + K\times\Delta) \times ZBP\left(t, t+\Delta, \frac{1}{(1 + K\times\Delta)}\right)$$

Annexe 4 : Comparaison des prix de caplets

Les prix de marché et les prix calculés à partir du modèle calibré, pour des *caplets* de maturité allant de 1 an à 15 ans et un strike de 1%, sont présentés dans le tableau suivant :

Maturité	Prix de marché (PM)	Prix par formule fermée du modèle HW1F calibré (PF)	Prix de modèle simulé (PS)	Différence absolue (PS-PM)	Différence absolue (PF-PS)
1Y	0,0000	0,0000	0,0000	0,00%	0,00%
2Y	0,0002	0,0002	0,0001	-0,01%	0,01%
3Y	0,0004	0,0005	0,0003	-0,01%	0,02%
4Y	0,0011	0,0009	0,0007	-0,05%	0,02%
5Y	0,0018	0,0014	0,0012	-0,06%	0,02%
6Y	0,0026	0,0019	0,0017	-0,09%	0,02%
7Y	0,0035	0,0025	0,0023	-0,12%	0,02%
8Y	0,0044	0,0033	0,0030	-0,14%	0,03%
9Y	0,0051	0,0039	0,0038	-0,13%	0,02%
10Y	0,0057	0,0044	0,0043	-0,14%	0,02%
12Y	0,0059	0,0048	0,0047	-0,12%	0,01%
15Y	0,0068	0,0051	0,0051	-0,18%	0,01%

Comparaison des prix de marché, du modèle calibré et du modèle simulé des caplets pour un strike de 1%

Annexe 5 : Expression du rendement action ajusté

<u>Démonstration de l'expression du rendement action ajusté donnée en III.A.2.c)(2) Ajustements actions :</u>

Pour rappel, il a été démontré que $\hat{S}(H+n) = S^{RN}(H+n) \times A(n)$ en notant $A(n) = \frac{P^{RN}(H,n)}{P^{MR}(H,n)}$.

Or, il est également vrai que :

$$S(H+n) = S(H+n-1) \times \left(1 + \eta_{H+n-1,H+n}\right)$$

Et donc :

$$\hat{S}(H+n) = \hat{S}(H+n-1) \times \left(1 + \hat{\eta}_{H+n-1,H+n}\right)$$

Ainsi :

$$\hat{S}(H+n-1) \times \left(1 + \hat{\eta}_{H+n-1,H+n}\right) = S^{RN}(H+n-1) \times \left(1 + {\eta^{RN}}_{H+n-1,H+n}\right) \times A(n)$$

D'où :

$$\hat{\eta}_{H+n-1,H+n} = \frac{S^{RN}(H+n-1) \times \left(1 + {\eta^{RN}}_{H+n-1,H+n}\right) \times A(n)}{\hat{S}(H+n-1)} - 1$$

Mais :

$$\hat{S}(H+n-1) = S^{RN}(H+n-1) \times A(n-1)$$

Ainsi, l'expression finale est obtenue :

$$\hat{\eta}_{H+n-1,H+n} = \frac{A(n)}{A(n-1)} \times \left(1 + {\eta^{RN}}_{H+n-1,H+n}\right) - 1$$

Annexe 6 : Martingalité dans l'ajustement « Smith Wilson improved »

Démonstration de la martingalité des déflateurs et indices ajustés par la méthode « Smith Wilson improved » :

Les mêmes notations qu'auparavant sont utilisées.

Il est nécessaire de vérifier l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{D}(H,n)\middle|\mathcal{F}_H\right) = P^{SW}(H,n)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{D}(H,n)\middle|\mathcal{F}_H\right) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\prod_{i=0}^{n-1}\widehat{P}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\prod_{i=0}^{n-1}P^{RN}(H+i,1)\times\frac{\frac{P^{SW}(H,i+1)}{P^{SW}(H,i)}}{\frac{P^{RN}(H,i+1)}{P^{RN}(H,i)}}\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\left(\prod_{i=0}^{n-1}P^{RN}(H+i,1)\right)\times\frac{P^{SW}(H,n)}{P^{RN}(H,n)}\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \frac{P^{SW}(H,n)}{P^{RN}(H,n)}\times\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(D^{RN}(H,n)|\mathcal{F}_H) \\
&= P^{SW}(H,n)
\end{aligned}$$

Le déflateur D^{RN} vérifiant la propriété de martingalité, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(D^{RN}(H,n)|\mathcal{F}_H) = P^{RN}(H,n)$$

Il convient également de vérifier la propriété suivante :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\widehat{P}(H+m,n)\times\widehat{D}(H,m)\middle|\mathcal{F}_H\right) = P^{SW}(H,m+n)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\widehat{P}(H+m,n)\times\widehat{D}(H,m)|\mathcal{F}_H) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(P^{RN}(H+m,n)\times\frac{\frac{P^{SW}(H,m+n)}{P^{SW}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}\times\prod_{i=0}^{m-1}\widehat{P}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(P^{RN}(H+m,n)\times\frac{\frac{P^{SW}(H,m+n)}{P^{SW}(H,m)}}{\frac{P^{RN}(H,m+n)}{P^{RN}(H,m)}}\times\frac{P^{SW}(H,m)}{P^{RN}(H,m)}\times\prod_{i=0}^{m-1}P^{RN}(H+i,1)\middle|\mathcal{F}_H\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{P^{SW}(H, m+n)}{P^{RN}(H, m+n)} \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(P^{RN}(H+m, n) \times \prod_{i=0}^{m-1} P^{RN}(H+i, 1) \middle| \mathcal{F}_H \right) \\
&= \frac{P^{SW}(H, m+n)}{P^{RN}(H, m+n)} \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(P^{RN}(H+m, n) \times D(H, m) | \mathcal{F}_H) \\
&= \frac{P^{SW}(H, m+n)}{P^{RN}(H, m+n)} \times P^{RN}(H, m+n) \\
&= P^{SW}(H, m+n)
\end{aligned}
$$

Le prix de Zéro-coupon ajusté vérifie donc bien le test martingale.

Il a bien été question de se pencher sur l’éventuel changement de probabilité qu’aurait pu induire le passage en univers « Smith Wilson » si l’on avait utilisé la probabilité historique, et des problèmes qui en auraient résulté, mais le fait de travailler en probabilité Risque neutre nous permet de passer outre ces questions.

Annexe 7 : Résultats ajustés déterministes

Résultats déterministe du modèle $ORSA$ dans le cas ajusté :

Résultats ajustés	12/2015 (N+1)	12/2016 (N+2)	12/2017 (N+3)	12/2018 (N+4)	12/2019 (N+5)
FP Economiques	90 132 493	94 122 379	99 522 224	106 084 488	113 032 129
SCR	58 544 966	59 077 119	58 241 309	55 120 011	51 074 516
Ratio Couverture	154%	159%	171%	192%	221%
VM	1 743 332 247	1 665 904 146	1 597 070 803	1 535 931 023	1 478 208 788
BEL	1 630 929 691	1 549 881 147	1 476 285 450	1 409 437 368	1 345 745 539

Tableau - Résultats économiques modèle ajusté déterministe

Annexe 8 : Courbes forwards

<u>Courbes de taux *forwards* de $P = 2$ à $P = 5$ en situation ajustée et non ajustée :</u>

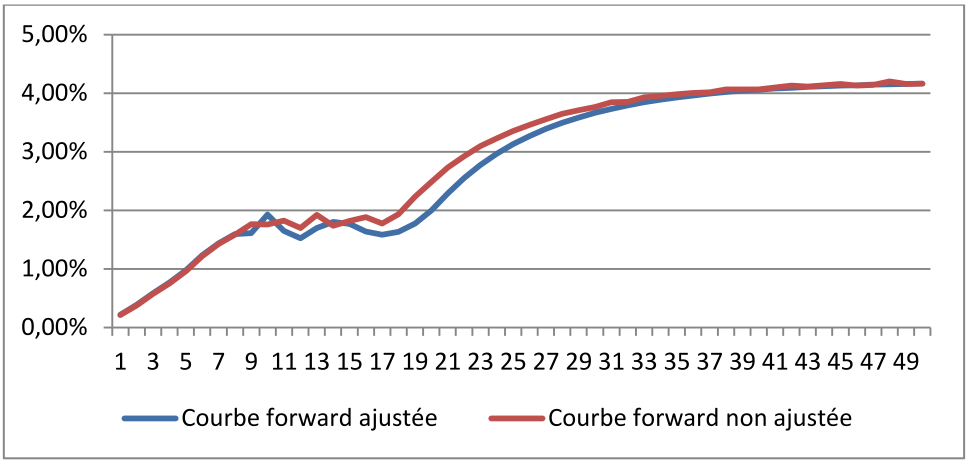


Figure 1 - Courbes *forwards* en P=2

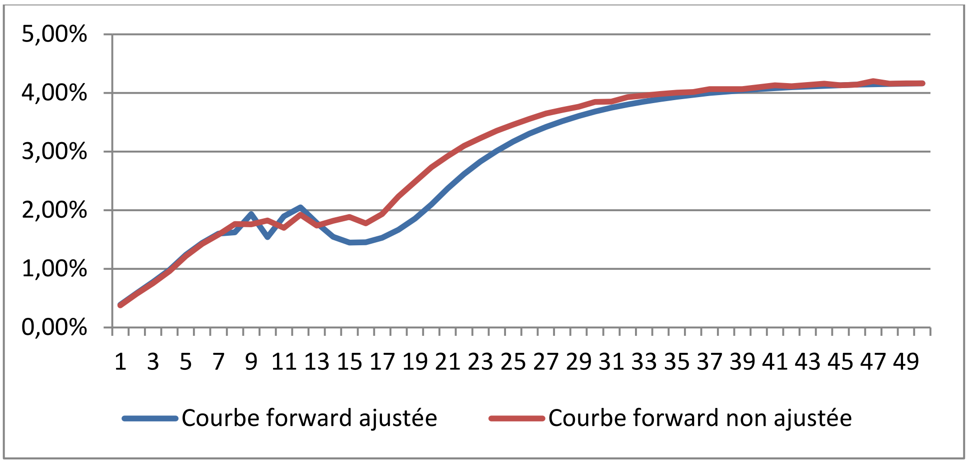


Figure 2 - Courbes *forwards* en P=3

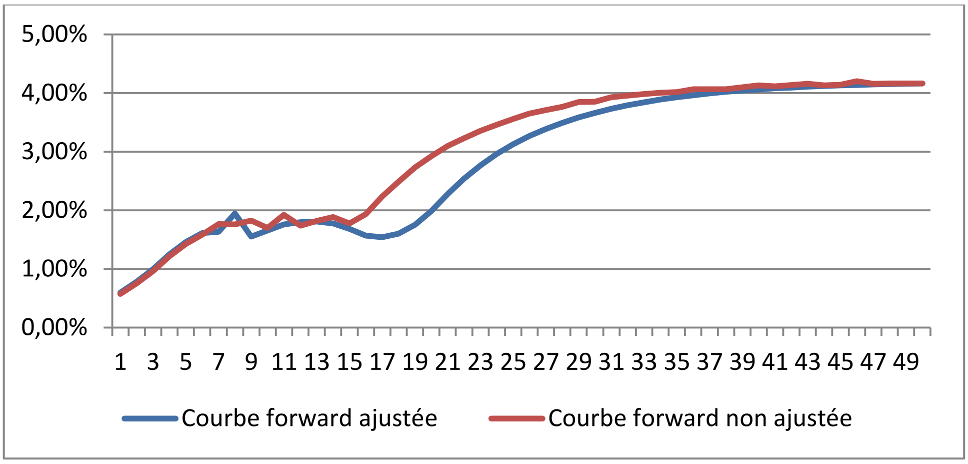


Figure 3 - Courbes *forwards* en P=4

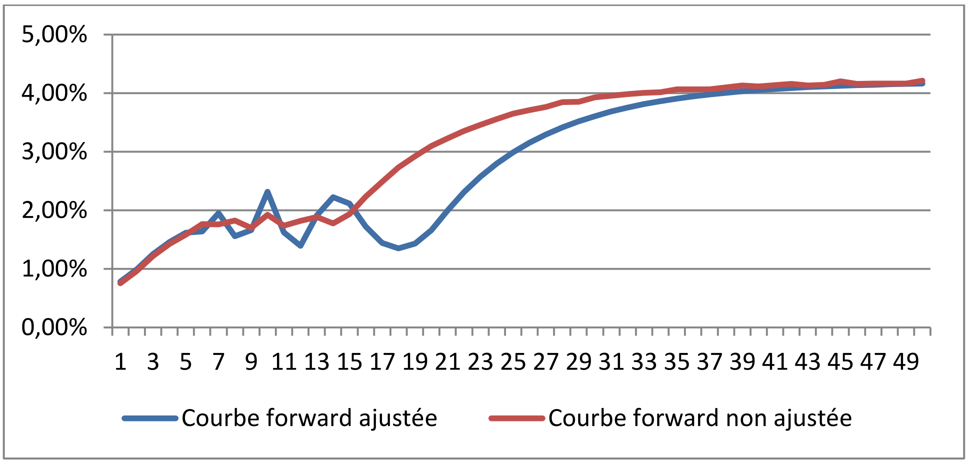


Figure 4 - Courbes *forwards* en P=5

Ces courbes sont de plus en plus éloignées l'une de l'autre. Cet effet est justifiable par la forme des courbes de Smith Wilson vis-à-vis des courbes Risque Neutre.

Annexe 9 : Génération ESG Monde Réel

Modèle de taux :

- **Calibrage Monde Réel**

Dans notre cas, le choix a été fait de garder le même calibrage qu'en Risque Neutre. Cela signifie qu'il est considéré que la meilleure anticipation du futur peut se faire à partir du marché actuel.

La courbe des taux utilisée pour le calibrage est donc la même que précédemment, et les valeurs de a et σ sont également identiques. La courbe utilisée pour la génération des jeux de scénarios est la courbe des taux de marché au 31/12/2014, contrairement à l'univers Risque Neutre se basant sur la courbe $EIOPA$.

- **Validation scénarios Monde Réel :**

Afin de valider la courbe des taux obtenus après simulation, l'allure des courbes de taux à différents horizons de projection a été analysée dans le graphique suivant :

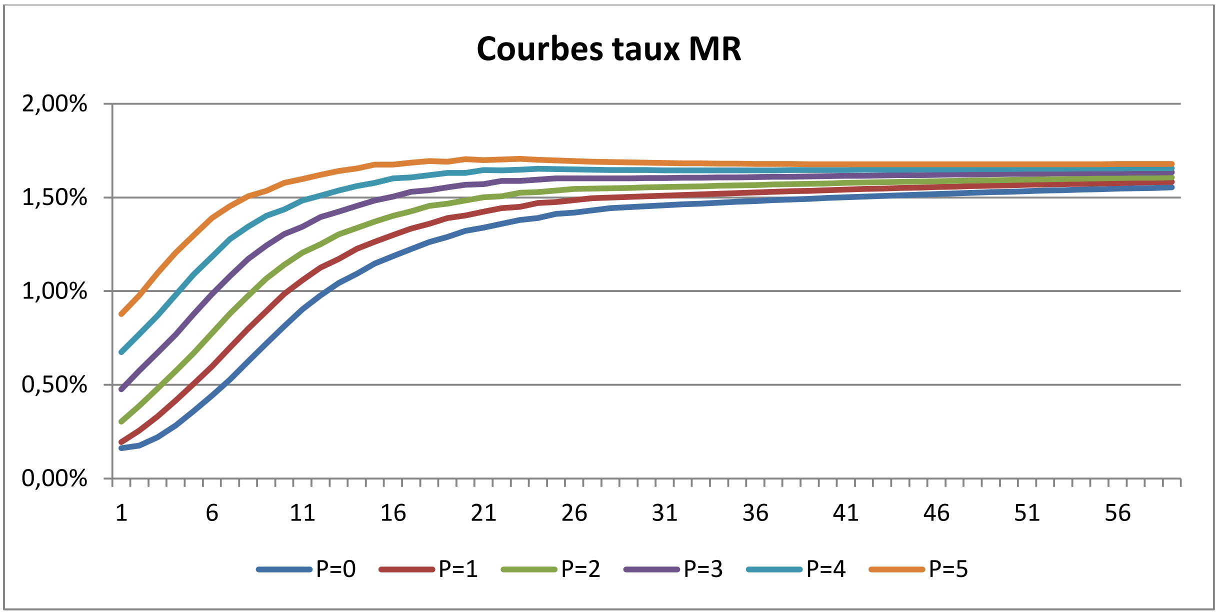


Figure 0-1 Courbes taux MR simulées

Les courbes présentées dans la figure précédente permettent de valider le résultat des simulations en univers Monde Réel. En effet, leur allure se rapproche de celui de la courbe de marché (en bleu foncé sur la figure) qui a permis de générer ces simulations.

Modèle action :

- **Calibrage Monde Réel**

En univers Monde Réel en revanche, le calibrage doit être effectué de manière à pouvoir reproduire les comportements observés sur les marchés. Le calibrage va donc s'appuyer sur des historiques d'indices action. La technique de calibrage alors utilisée diffère selon la nature de la variable :

dividende, indice action net de dividendes ou indice action avec dividendes réinvestis. Nous nous concentrerons ici sur ce dernier type de calibrage.

Pour les paramètres relatifs aux indices actions, la méthode des moments est utilisée. En effet, les deux paramètres μ et σ sont entièrement déterminés par l'espérance des rendements actions et par la variance des log-rendements :

$$ln\left(E\left[\frac{S_{t+1}}{S_t}\right]\right) = ln\left(E\left[e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\sigma\varepsilon_a}\right]\right) = ln\left(e^{\mu-\frac{1}{2}\sigma^2+\frac{1}{2}\sigma^2}\right) = ln(e^{\mu}) = \mu$$

$$Var\left[ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)\right] = Var\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \sigma\,\varepsilon_a\right] = \sigma^2$$

Le calibrage du modèle a été effectué sur des indices EuroStoxx 50 (SX5E), avec dividende réinvesti, pris suivant un pas de temps mensuel à des dates comprises entre le 31/12/2004 et le 31/12/2014, ce qui correspond à 2 cycles économiques.

Nous obtenons ainsi les paramètres suivants :

S_0	σ	μ
100	21,7%	3,2%

Paramètres calibrés du modèle de Black-Scholes Monde Réel

- **Validation scénarios Monde Réel :**

Afin de valider la génération des chroniques d'indice action en Monde Réel, il est possible de s'intéresser aux écarts statistiques (moyenne et volatilité) entre les données simulées et le calibrage renseigné en paramètre.

Le tableau suivant présente ces écarts :

	Grandeur théorique	Grandeur simulée	Ecart absolu
Moyenne	3,17%	2,92%	0,2%
Volatilité	21,68%	22,21%	-0,5%

Ecarts statistiques univers MR

Les écarts statistiques présents entre les simulations générées et les objectifs définis lors du calibrage sont faibles (inférieurs à 0,5%). Les scénarios générés sont ainsi cohérents avec l'historique des données de marché.

<u>Modèle immobilier</u> :

- **Calibrage Monde Réel**

Indice	σ	μ
Capital	5,6845%	3,4383%
Loyer	0,4675%	1,3367%

Paramètres calibrés du modèle Black-Scholes immobilier Monde Réel

La corrélation présente entre les indices Capital et Loyer est de $97{,}257\%$.

Bibliographie

ACPR, 2011. *Conférence de l'ACPR*. Available at: https://acpr.banque-france.fr/fileadmin/user_upload/acp/Communication/20110427-Solva-II-pilier-2.pdf.

Antoine, T. & Auneau, P., 2011. *Techniques avancées de modélisation du risque de marché : Portefeuille répliquant et Stochastique dans le stochastique*.

Black, F. & Scholes, M., 1973. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. 3rd ed. The Journal of Political Economy, vol. 81, pp 637-654.

Brigo, D. & Mercurio, F., 2006. *Interest Rate Models - Theory and Practice - Second Edition*. 2nd ed. Springer Finance, pp 71-80.

Devineau, L. & Loisel, S., 2009. *Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des "simulations dans les simulations" pour le calcul du capital économique Solvabilité II*. Bulletin Français d'Actuariat 10, vol. 17, pp 188-221.

EIOPA, 2009. *Omnibus 2*. Available at: http://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=FR.

EIOPA, 2014. *Règlement délégué complétant la directive Omnibus 2*. Available at: http://eur-lex.europa.eu/legal-content/FR/TXT/PDF/?uri=CELEX:32015R0035&from=FR.

Financial Supervisory Authority of Norway, 2010. *A technical note on the Smith-Wilson method*. FINANSTILSYNET.

Haguet, E., 2012. *Calibrage d'un modèle de taux Gaussien à 2 facteurs,* pp 18-21.

Haguet, E., 2013. *Mémoire d'actuariat - Mise en place d'indicateurs de suivi du risque dans un cadre d'ORSA Epargne*.

Milliman, 2009. *Replicating Portfolios*. Available at: https://web.actuaries.ie/sites/default/files/erm-resources/replicating_portfolios_rr.pdf.

Milliman, 2010. *La méthode des Simulations dans les Simulations*. Available at: http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/IA/sitesepia.nsf/0/FAB96EE86564DF5CC12576E10073EB04/$FILE/SEPIA20100416_LD.pdf?OpenElement.

Milliman, 2012. *L'appétence au risque*.

Milliman, 2012. *Les générateurs de scénarios économiques*. Available at: http://isfa.univ-lyon1.fr/sites/default/files/files/Milliman%20-%20presentation%20ESG%20-%2029032012.pdf.

Morgana, D., 2013. *Mémoire d'actuariat - Impact du choix des modèles de génération de scénarios économiques sur la valorisation des passifs économiques d'une compagnie d'assurance-vie*.

Niedzwiedz, M., 2014. *Mémoire d'actuariat - Utilisation des supports vecteurs machines pour l'accélération du calcul du capital économique*.

Planchet, F., 2015. *Construire un générateur de scénarios économiques en assurance*.

Planchet, F., Bonnin, F. & Juillard, M., 2012. *Best Estimate Calculations of Savings Contracts by Closed Formulas - Application to the ORSA*. Cahiers de recherche de l'ISFA, vol. 2012.5.

Vedani, J. & Devineau, L., 2012. *Solvency assessment within the ORSA framework : issues and quantitative methodologies*.