

**Mémoire présenté devant
l'UFR de Mathématique et d'Informatique
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
et l'admission à l'Institut des Actuaire**

le 5 octobre 2012

Par : Marine LERQUIER

Titre: Evaluation de la provision globale de gestion pour des contrats d'épargne individuelle en univers Solvabilité 2.

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres du jury de l'Institut des Actuaire

signature

Entreprise : CNP Assurances

M. Nicolas Friederich
M. Xavier Le Minor
M. Alexandre You

Nom : M. Christian Gibot

Signature :

Membres du jury de l'UdS :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : M. William Nogaret

M. Philippe Artzner
M. Pierre Devolder
M. Karl-Théodor Eisele
Mme Armelle Guillou
M. Bernard Heinkel
Mme Magali Kelle-Vigon
M. Jean Modry
M. Jean-Luc Netzer
M. Patrick Roger
Mme Sandrine Spaeter-Loehrer

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de

diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat : Mme Marie-Line Vos

Signature du candidat

Bibliothèque : Mme Christine Didier

Sommaire

Sommaire	2
Remerciements	5
Résumé	6
Abstract	7
Synthèse	8
Executive summary	13
Introduction	18
Partie I : Le cadre d'étude	20
Chapitre 1 : Solvabilité 2	20
1. Les objectifs de Solvabilité 2	20
2. L'approche « Lamfalussy »	20
3. Les 3 piliers	21
1. Le pilier 1 : Exigences quantitatives	21
2. Le pilier 2 : Surveillance prudentielle / Exigences qualitatives	22
3. Le pilier 3 : Reporting et discipline de marché	23
4. QIS (Quantitative Impact Study)	23
5. Omnibus 2	23
Chapitre 2 : Formes d'épargne	24
1. Epargne à court terme	24
1. Les livrets d'épargne	24
2. Les Organismes de Placements Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM)	24
3. Les comptes à terme	25
2. Epargne à long terme	25
1. L'épargne logement	25
2. Le Plan Epargne en Actions (PEA)	26
3. L'assurance vie	26
Chapitre 3 : L'assurance vie épargne	27
1. Principe général	27
2. Les supports des contrats	27
1. Les contrats en euros	27
2. Les contrats en unités de compte (UC)	27
3. Les contrats multisupports	28
3. Les éléments des contrats	28
1. Les versements	28
2. Les frais	28
3. Les garanties	29
4. Les rachats et les avances	30
5. La fiscalité	30
6. Les provisions	31

Partie II : Le Best Estimate..... 34

Chapitre 1 : La provision globale de gestion 34

- 1. Méthode de calcul en Solvabilité 1 34
 - 1. Les frais et chargements pris en compte 34
 - 2. La loi de rachats 35
 - 3. La loi de mortalité 35
 - 4. Le réinvestissement des actifs 35
- 2. Extension à l'univers Solvabilité 2 36
 - 1. Le Best Estimate et la Risk Margin 36
 - 2. Les hypothèses retenues pour la provision globale de gestion 38

Chapitre 2 : Méthode de Calcul du Best Estimate 40

- 1. La modélisation de l'actif 40
 - 1. Le générateur de scénarios économiques 40
 - 2. Le portefeuille d'actifs 45
- 2. La modélisation du passif 49
 - 1. La loi de mortalité 49
 - 2. La loi de rachats 50
 - 3. Les étapes de la modélisation 52
- 3. Le Best Estimate 56

Partie III : La Risk Margin et la nouvelle provision globale de gestion 58

Chapitre 1 : La Risk Margin et les SCR (Solvency Capital Requirement) 58

- 1. Le calcul de la Risk Margin 58
- 2. Les différents modules SCR 61
 - 1. Le risque de marché 61
 - 2. Le risque de souscription santé 62
 - 3. Le risque de souscription vie 63
 - 4. Le risque de souscription non vie 64
 - 5. Le risque de défaut 64
 - 6. Le risque sur les actifs intangibles 64
 - 7. Le risque opérationnel 65
 - 8. L'ajustement 65
- 3. Méthode de calcul du SCR intervenant dans la Risk Margin 65
 - 1. Le risque de souscription vie 65
 - 2. Le risque de marché résiduel autre que le risque de taux 68
 - 3. Le risque de défaut des contreparties 68
 - 4. Le risque opérationnel 68
 - 5. L'obtention du SCR_{RM} 76

Chapitre 2 : Résultats 77

- 1. Analyse des résultats en comparaison avec ceux obtenus en univers Solvabilité 1 77
 - 1. Présentation des résultats 77
 - 2. Impact des changements de règles sur un produit 79
 - 3. La Risk Margin 85
- 2. Les limites de l'approche 88

Conclusion	90
Annexes	91
Annexe 1 : Article A331-1-1 du Code des assurances.....	91
Annexe 2 : Table de mortalité.	93
Annexe 3 : Quelques éléments de probabilité	94
Annexe 4 : Démonstration du Libor Market Model	96
Annexe 5 : Modèle Vasicek.....	99
Annexe 6 : Equation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton	101
Annexe 7 : Paramètres chocs SCR	103
Abréviations	105
Index	106
Bibliographie	107

Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier Thomas BEHAR, Directeur Technique Groupe de CNP Assurances, pour m'avoir permis d'effectuer mon stage de fin d'études au sein de sa direction.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon maître de stage, William NOGARET, Responsable du Service retraite collective, pour m'avoir encadrée et suivie tout au long de mon stage. Merci aussi pour sa confiance, son écoute et son soutien.

Je remercie également Samira KOURKDANE, Matthieu TARTUFFO, Babacar SOW et Serge AKAI, actuaires, pour les explications apportées ainsi que le temps accordé.

J'exprime ma gratitude à mes collègues ainsi qu'à toutes les personnes que j'ai rencontrées au cours de ce stage pour leur accueil.

Je souhaite remercier tous les membres de la formation d'actuariat de Strasbourg, pour m'avoir intégrée à la formation et pour les connaissances que j'ai pu acquérir, et en particulier mon tuteur universitaire, Philippe ARTZNER pour son suivi au cours de mon stage.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce mémoire.

Résumé

La future réglementation Solvabilité 2, qui devrait entrer en vigueur le 1^{er} janvier 2014, va totalement modifier les règles de solvabilité des assureurs. Elle imposera le provisionnement des engagements selon des normes maintenant assez précisément connues. Elle reste par contre muette sur le devenir de certaines provisions annexes dites « centrales », dont la provision globale de gestion.

Actuellement, en univers Solvabilité 1, la provision globale de gestion ainsi que les autres provisions « centrales » viennent s'ajouter à la provision mathématique dans le bilan des assureurs. La provision globale de gestion couvre les charges de gestion futures qui ne sont pas couvertes par des chargements sur primes ou des prélèvements sur produits financiers. Cette provision fait l'objet dans sa détermination de règles strictes imposées par le Code des assurances, qui sont peu compatibles avec les règles de Solvabilité 2 : actualisation au rendement financier projeté, référence au TME (taux moyen d'emprunt d'Etat), hypothèses de déroulé de passif en fonction de l'observation sur les derniers exercices... L'objet de ce mémoire est de proposer de nouvelles règles pour évaluer la provision globale de gestion en univers Solvabilité 2.

Nous ferons l'hypothèse forte que la provision globale de gestion peut être exprimée sous une forme classique Best Estimate + Risk Margin par analogie avec les provisions techniques. En outre, on introduira dans le cadre de ce mémoire la notion de Risk Margin spécifique à l'activité de gestion, qui pourrait être isolée.

Les résultats obtenus montrent que les besoins en provision globale de gestion seraient plus importants en univers Solvabilité 2, malgré des règles du Code des assurances déterminant la méthode de calcul de la provision globale de gestion généralement considérées comme extrêmement prudentes. Ces règles prennent peu en compte la conjoncture financière actuellement défavorable, contrairement à la réglementation Solvabilité 2. D'autres facteurs peuvent en outre devenir défavorables pour la solvabilité de l'assureur tels qu'une vague de rachats, ou une augmentation de la mortalité.

Mots clés : Best Estimate, Provision globale de gestion, Solvabilité 2, Risk Margin.

Abstract

The future Solvency 2 directive, which should come into effect on 1st January 2014, will completely change the rules regarding insurance companies' solvency. It will require the reserving of insurer's liabilities to standards which are now quite accurately known. Nevertheless, it does not provide information regarding the way to cope with some other reserves known as "central" such as the operating expenses reserve.

Nowadays, in Solvency I context, we consider the global operating expenses reserve as well as the other "central" reserves in addition to the mathematical provision in insurance companies' balance sheet. The operating expenses reserve covers the company's future expenses that are not included either in the premiums amount or charges on financial products. This reserve is specifically determined by precise rules imposed by the Insurance Code, which are barely compatible with Solvency II requirements: discount at the projected financial yield, reference to the TME (average rate of government bonds), assumptions regarding the liabilities according to its historical trend over the last financial years... This dissertation aims at suggesting new rules to compute the operating expenses reserve according to Solvency II.

We will hypothesize the fact that the operating expenses reserve can be considered as the sum of the Best estimate and the Risk Margin, thanks to an analogy with the technical provisions. Besides, we will discuss in this paper the concept of risk margin under the scope of management.

The results we get show that the requirements in terms of operating expenses reserve should be greater when considering the Solvency II context, despite very wide rules demanded by the Code of Insurances regarding the calculation of this reserve. Those rules barely take into account the current adverse financial context unlike the Solvency II directive. Other elements can become adverse for the insurance company's solvency such as a wave of repurchases or an increase of the mortality.

Keywords: Best Estimate, operating expenses reserves, Solvency II, Risk Margin.

Synthèse

Mots clés : Best Estimate, Provision globale de gestion, Solvabilité 2, Risk Margin.

L'entrée en vigueur de la réglementation Solvabilité 2, prévue pour le 1^{er} janvier 2014, implique une modification profonde des règles de détermination de la solvabilité des assureurs. Le but de cette réforme est de garantir au mieux la protection des assurés. A ce jour, la réglementation Solvabilité 2 reste muette sur le sort de certains éléments de provisionnement présents en Solvabilité 1 : c'est notamment le cas pour certaines provisions dites « centrales ». Les provisions centrales viennent augmenter la provision mathématique pour ajouter une marge de prudence au provisionnement de l'exposition de l'assureur à certains risques spécifiques. Elles ne sont théoriquement pas affectables à un contrat ou à un assuré spécifique, mais sont représentatives de groupes de contrats, voire de la totalité d'un portefeuille. On classe dans cette catégorie des provisions telles que la provision pour aléas financiers (PAF), la provision pour participation aux bénéfices, ou la provision globale de gestion (PGG).

L'objet du présent mémoire est l'évaluation de cette dernière provision en Solvabilité 2. L'évaluation va se faire à l'aide d'éléments déjà existants en univers Solvabilité 1, ainsi que d'hypothèses en cohérence avec l'univers Solvabilité 2. Il est indispensable de définir d'hypothétiques règles pour pouvoir évaluer ce que sera cette provision en univers Solvabilité 2.

1. La provision globale de gestion en univers Solvabilité 1

Cette provision couvre les charges de gestion futures qui ne sont pas couvertes par des chargements sur primes ou des prélèvements sur produits financiers. Sa méthode d'évaluation est réglementée par le Code des assurances à l'article A331-1-1.

- Le calcul se fait sur « chaque ensemble homogène de contrats » en méthode déterministe et run-off pur.
- Le taux de rendement est calculé tous les ans et suit des règles de réinvestissement des actifs strictement définies. Le taux de rendement servira également de taux d'actualisation.
- Le taux de rachats ne peut pas dépasser 80% de la moyenne des taux de rachats constatés sur les deux derniers exercices clos et sur celui en cours.

Les produits qui constituent la provision globale de gestion dans cette étude sont les chargements sur encours et les chargements sur produits financiers. Les charges sont les frais de sorties (rachats et décès) et les commissions. Les commissions sont liées à la présence d'un réseau de distribution.

2. Les hypothèses pour évaluer la provision globale de gestion en univers Solvabilité 2

Un des objectifs de la réforme Solvabilité 2 est de considérer le risque réellement porté par l'assureur. Les règles qui régissent actuellement le calcul de la provision globale de gestion ne sont pas toujours les plus proches de la réalité. Il a été décidé de conserver la notion « d'ensemble homogène de

contrats » déjà présente en Solvabilité 1, considérée comme un groupe de contrats ou produits présentant des caractéristiques techniques similaires, sans que les éventuels gains procurés par un « ensemble homogène » puissent venir compenser les pertes générées par un autre.

Par contre, les méthodes d'évaluation étant remises à plat par la réforme Solvabilité 2, d'autres hypothèses de projection sont à revoir :

- La provision globale de gestion est calculée sous forme de Best Estimate + Risk Margin par analogie avec les provisions techniques retrouvées au bilan de Solvabilité 2. Ici, le Best Estimate est la meilleure estimation de la provision globale de gestion calculée avec nos hypothèses.
- La Risk Margin est calculée au global sous l'hypothèse que l'activité de l'entreprise se limite à la gestion des contrats d'épargne étudiés (l'entreprise ne supporte pas le risque direct d'assurance lié aux contrats eux-mêmes).
- La loi de rachats totaux est calculée à partir d'un historique de 10 ans et ne fait pas l'objet d'un abattement. Une loi de rachats conjoncturels est ajoutée à la loi de rachat structurel.
- Le modèle utilisé est en actif-passif et utilise des scénarios de marché stochastiques.
- Les rendements financiers sont obtenus à partir du générateur de scénarios économiques Barrie & Hibbert.

Avec ces hypothèses il va être possible de proposer une évaluation de la provision globale de gestion.

3. La mise en œuvre

Les scénarios de marché financier sont obtenus à partir du générateur de scénarios économique Barrie & Hibbert. Ce générateur utilise le Libor Market Model pour modéliser les taux d'intérêts nominaux. Ce modèle est implémenté par simulation de Monte Carlo. Pour la modélisation du taux réel, c'est le modèle Vasicek à deux facteurs qui est utilisé. Le modèle Black Scholes permet de modéliser les actions.

La détermination du résultat financier projeté est un préalable au calcul de la provision globale de gestion pour chaque ensemble homogène de contrats. En effet, si le résultat financier est négatif ou nul, la totalité des chargements ne sera pas prélevée par l'entreprise. Les produits intervenant dans le calcul de la provision globale de gestion sont obtenus comme suit :

$$Produits_t = \max[\min(Résultat_Fi_t; 0) + ChgtEncours_t + ChgtProdFi_t; 0]$$

Cette formule permet de prendre en compte uniquement les chargements qu'il sera possible de prélever en cas de résultat financier négatif.

Le calcul des charges est quant à lui le suivant :

$$Charges_t = FraisSorties_t + FraisGestion_t + CommEncours_t + CommProdFi_t$$

Le résultat qui intervient dans le calcul de la provision globale de gestion est déterminé à partir de ces charges et de ces produits.

$$Résultat_t = Produits_t - Charges_t$$

Le résultat pour l'année t est ainsi obtenu, et permet de calculer la provision globale de gestion. Le calcul s'effectue de proche en proche en utilisant le résultat de l'année suivante. Seuls les résultats négatifs viennent impacter le montant de la provision globale de gestion. Un résultat globalement positif à la fin de la période de projection génère une provision globale de gestion nulle pour la période.

$$PGG_t = \frac{[\min(Résultat_t + PGG_{t+1}; 0)]}{(1 + r_t)}$$

Avec : $PGG_{51} = 0$

r_t est le taux d'actualisation.

C'est cette méthode qui est utilisée pour calculer le Best Estimate (BE), ainsi que l'impact des chocs qui interviennent dans le calcul de la Risk Margin.

D'après les préconisations du QIS 5, la Risk Margin se calcule comme suit :

$$RM = CoC \times \sum_{t \geq 0}^T SCR_{RM}(t) \times (1 + r_{t+1})^{-(t+1)}$$

Avec : CoC est le taux annuel du coût du capital (Cost of Capital)

r_t est le taux sans risque de l'année t

T est le nombre d'années de projection

$SCR_{RM}(t)$ est le SCR global de l'année t utilisé pour la Risk Margin

Le SCR global qui est utilisé dans la formule pour la Risk Margin couvre :

- le risque de souscription,
- le risque de marché résiduel autre que le risque de taux,
- le risque de défaut des contreparties,
- le risque opérationnel.

C'est cette définition qui est utilisée pour le calcul de la Risk Margin.

4. Les résultats

Les résultats obtenus ont montré l'apparition de provision globale de gestion (PGG) sur des ensembles de contrats qui n'en généraient pas avant. Voici les résultats obtenus en comparaison avec les résultats obtenus en décembre sous Solvabilité 1 (montants rapportés à une base 1000) :

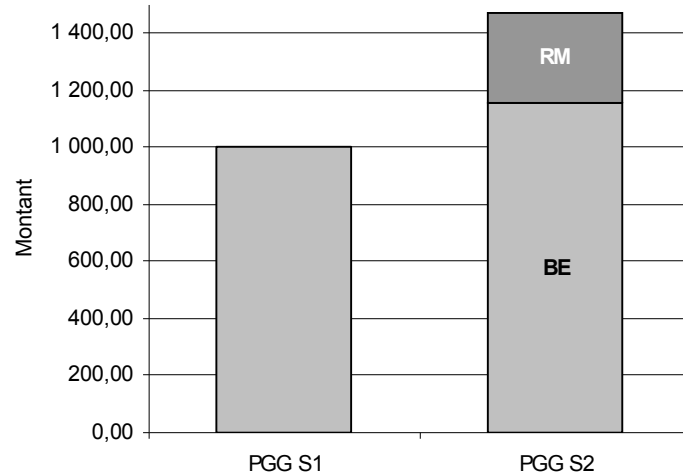


Fig n°1 : Montant de la PGG sur le périmètre entier

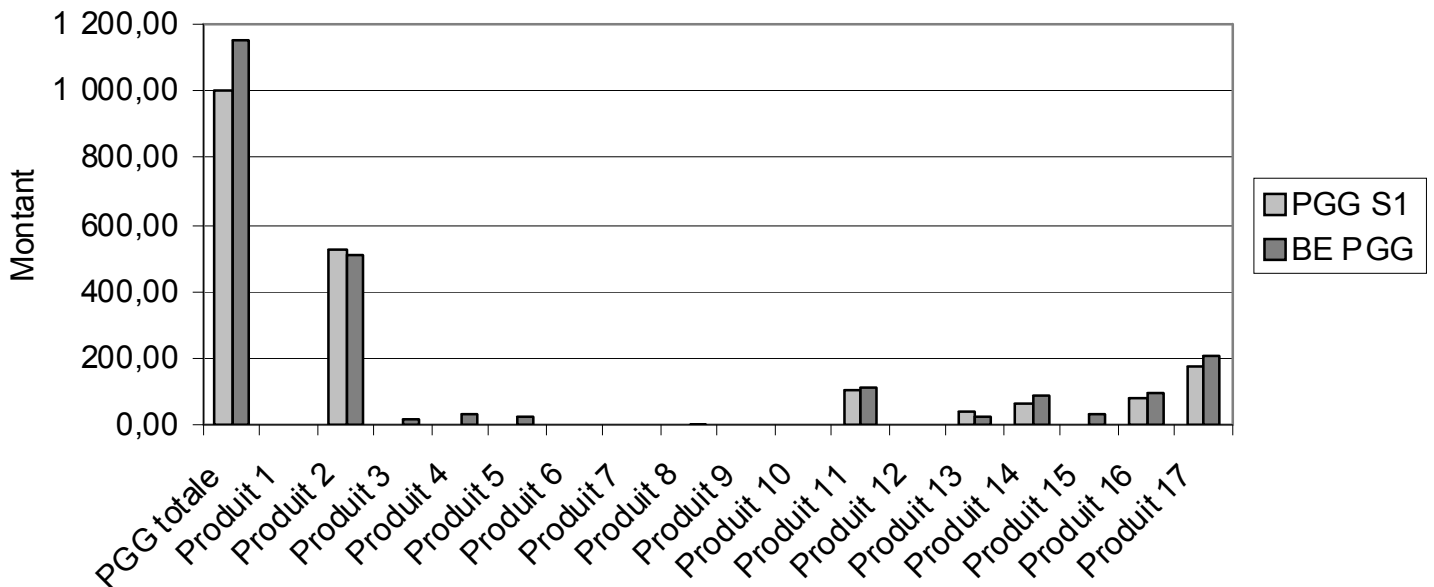


Fig n° 2 : La provision globale de gestion par produit

Le premier graphique montre une nette augmentation de la provision globale de gestion avec le passage en univers Solvabilité 2. Cette augmentation est liée en grande partie à la présence de la Risk Margin, mais ce n'est pas le seul facteur de cette augmentation. En effet, sur le deuxième graphique qui ne présente que le Best Estimate de chaque produit en comparaison à la provision obtenue en Solvabilité 1, il est possible de constater l'apparition de provision globale de gestion sur certain produit. La principale source d'écart provient des courbes de rendement utilisées dans chaque univers, présentant des profils opposés.

On trouvera ci-dessous un graphique représentant la courbe utilisée en Solvabilité 1, celle qui représente le rendement moyen des scénarios en Solvabilité 2, ainsi que les taux minimum garantis (TMG) minimum et maximum présent sur les produits ayant un taux minimum garanti.

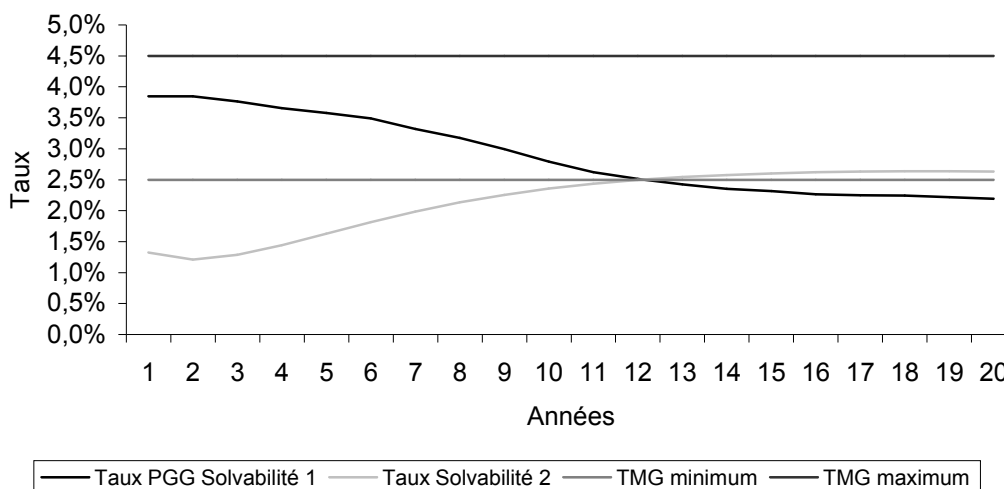


Fig n° 3 : Les courbes de rendement

On remarque que la courbe utilisée en Solvabilité 2 est en dessous du taux minimum garanti le plus faible. Cela explique l'apparition de provision globale de gestion, étant donné que le rendement ne permettra pas de verser les intérêts dus. Ce phénomène est amplifié par le fait que les premiers exercices « pèsent » plus dans le calcul global, de par la taille du portefeuille et l'absence d'amortissement des années antérieures. Au contraire la courbe utilisée en Solvabilité 1 est très élevée les premières années de par les contraintes imposées par le Code des assurances.

Les spécifications techniques liées à Solvabilité 2 étant à ce jour muettes quant au devenir de la provision globale de gestion, il est nécessaire, si l'on souhaite mesurer le risque lié à l'activité de gestionnaire, de formuler certaines hypothèses. Le présent mémoire propose une méthode de détermination de la provision globale de gestion conforme aux principes de Solvabilité 2. Elle conduit à des montants supérieurs à ceux que l'on obtient aujourd'hui, du fait notamment que la détermination de la marge pour risque est limitée à l'activité de gestion.

Références :

Code des assurances, (2012).
 EUROPEAN COMMISSION. (31 October 2011), *Draft Implementing measures Solvency II*, Brussels.
 EUROPEAN COMMISSION. (5 July 2010), *QIS 5 Technical Specifications*, Brussels.

Executive summary

Keywords : Best Estimate, operating expenses reserves, Solvency 2, Risk Margin.

The solvency II directive, which is scheduled to come into effect on 1st January 2014 implies important changes concerning the computation rules of the insurance companies' solvency. This reform aims at better underwriting the insured's protection. The Solvency II directive has not provided information so far regarding some elements mentioned with Solvency I. In particular, it regards some reserves, known as "central". Central reserves increase the mathematical reserve in order to add a security margin to the reserve concerning the insurer's exposure to some specific risks. Basically, those reserves are not imputable to a particular contract or a specific insured. However they represent some categories of contracts or even the entire portfolio. This category includes reserves such as the reserve for financial risks, the reserve for profit sharing, or the operating expenses reserves.

This dissertation aims at valuing operating expenses reserves under Solvency II framework. The valuation will be done with some elements that are already mentioned with Solvency I directive, as well as other assumptions linked to solvency II framework. It is essential to define hypothetical rules so as to be able to value this provision under the scope of Solvency II.

1. Operating expenses reserve in the universe Solvency 1

This reserve covers the expenses due to future management costs that are not included either in the premiums amount or charges on financial products. Its calculation method is regulated by the Insurance Code, article A331-1-1.

- The calculation is based on each homogeneous group of contracts with deterministic methods and a run-off approach.
- The yield is computed every year and follows reinvestment rules regarding the assets that are accurately defined. The yield will be also used as discount rate.
- Repurchase rates cannot exceed 80% of the observed repurchase rates over the past two financial years and the current one.

The products included in the operating expenses reserve in this study are the following: earns fees and charges on financial products. The costs are the charges such as repurchases, deaths and commissions. Commissions are linked to the existence of an allocation network.

2. The assumptions made for the valuation of the operating expenses with Solvency II

One of the objectives of Solvency II directive is to consider accurately the risk that is effectively hold by the insurer. The rules that are currently used to compute the operating expenses reserve are at some points far from the reality. We decided to keep considering the concept of homogeneous group of contracts or products that show similarities in terms of technical characteristics; without considering that the potential earnings generated by a homogeneous group can compensate the losses generated by another group.

However, as the valuation approaches are considered differently with Solvency II reform, other hypotheses are to be considered again for the projection:

- The operating expenses reserve is calculated as follow: Best estimate + Risk margin thanks to the analogy with technical reserves in the balance sheet according to Solvency II directive. The Best estimate is the best estimate of the operating expenses reserve calculated with our hypotheses.
- The risk margin is calculated under the assumption that the company only deals with the management of the studied savings contract (the company does not support the risk due to the contracts themselves).
- The total redemption option is computed from a 10-year historic and does not include any abatement. A conjectural redemption option is added to a structural redemption option.
- The model we use is linked to assets and liabilities and uses market stochastic scenarios.
- The financial yields are obtained from the Barrie & Hibbert's economic scenarios generator.

With these hypotheses, we will be able to propose a valuation of the operating expense reserve.

3. The implementation

We obtain the financial market scenarios from the Barrie & Hibbert's economic scenarios generator. This generator uses a Libor Market Model in order to model the nominal interest rates. This model is implemented with Monte Carlo simulations. Regarding the modeling of the actual rate, we use the two-factor Vasicek model. The Black & Scholes model is used in order to model the market shares.

Prior to calculating the operating expenses reserve for a homogeneous group of contract, we have to determine the financial profit. Indeed, if the financial profit is negative or null, the total amount of the operating expenses reserve will not be charged by the company. The products involved in the computation of the operating expenses reserve are obtained as follow:

$$Pr\ oduits_t = \max[\min(Fin_Pr\ ofit_t; 0) + ChgtEncours_t + Chgt\ Pr\ odFi_t; 0]$$

This formula enables to take into account the reserves that would exclusively be charged in case of a negative financial profit.

As for the computation of the expenses, we do as follow:

$$Charg\ es_t = FraisSorties_t + FraisGestion_t + CommEncours_t + Comm\ Pr\ odFi_t$$

The result that is mentioned in the computation of the operating expenses reserve is determined with the expenses and incomes.

$$R\acute{e}sultat_t = Pr\acute{o}duits_t - Ch\acute{a}rges_t$$

The financial profit for the year t is obtained with the above formula. It enables to compute the operating expenses reserve. The calculation is done step by step using the result of the following year at each stage. Negative results only impact the amount of the operating expenses reserve. A globally positive result at the end of the projected period implies a null operating expenses reserve.

$$PGG_t = \frac{[\min(R\acute{e}sultat_t + PGG_{t+1}; 0)]}{(1 + r_t)}$$

Where: $PGG_{51} = 0$

r_t is the discount rate.

This method is the one we use to compute the Best Estimate (BE), as well as the impacts of the shocks that intervenes in the Risk Margin's computation.

According to the QIS 5's recommendations, the risk margin is calculated as follow:

$$RM = CoC \times \sum_{t \geq 0}^T SCR_{RM}(t) \times (1 + r_{t+1})^{-(t+1)}$$

Where: CoC is the annual cost of capital

r_t is the risk-free rate at year t

T is the number of projected years

$SCR_{RM}(t)$ is the global SCR of the year t used to compute the risk margin

The global SCR used in the Risk margin's formula includes:

- The underwriting risk
- The residual market risk that is not part of the rate risk
- The counterparty risk of default
- The operationnal risk

We use the above definition to compute the risk margin.

4. The results

The results we obtained showed that some global management reserves are generated for contracts that did not require it before. Here are the obtained results compared with the December's figures we have for Solvency I (the amounts are given following a 1000 basis):

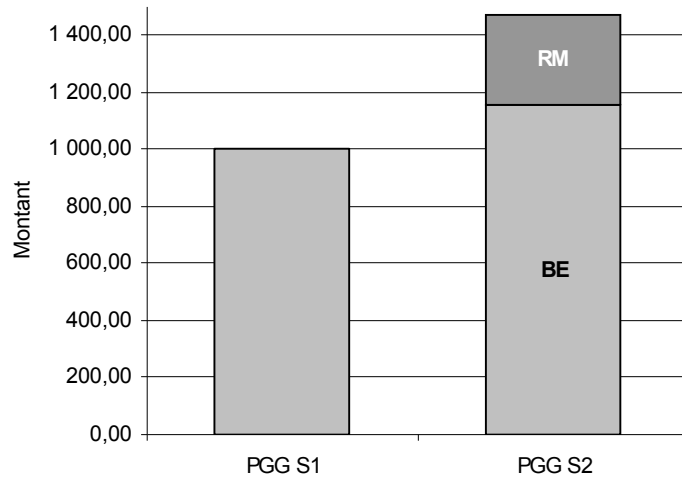


Figure 1: Amount of operating expenses reserve referring to the entire perimeter

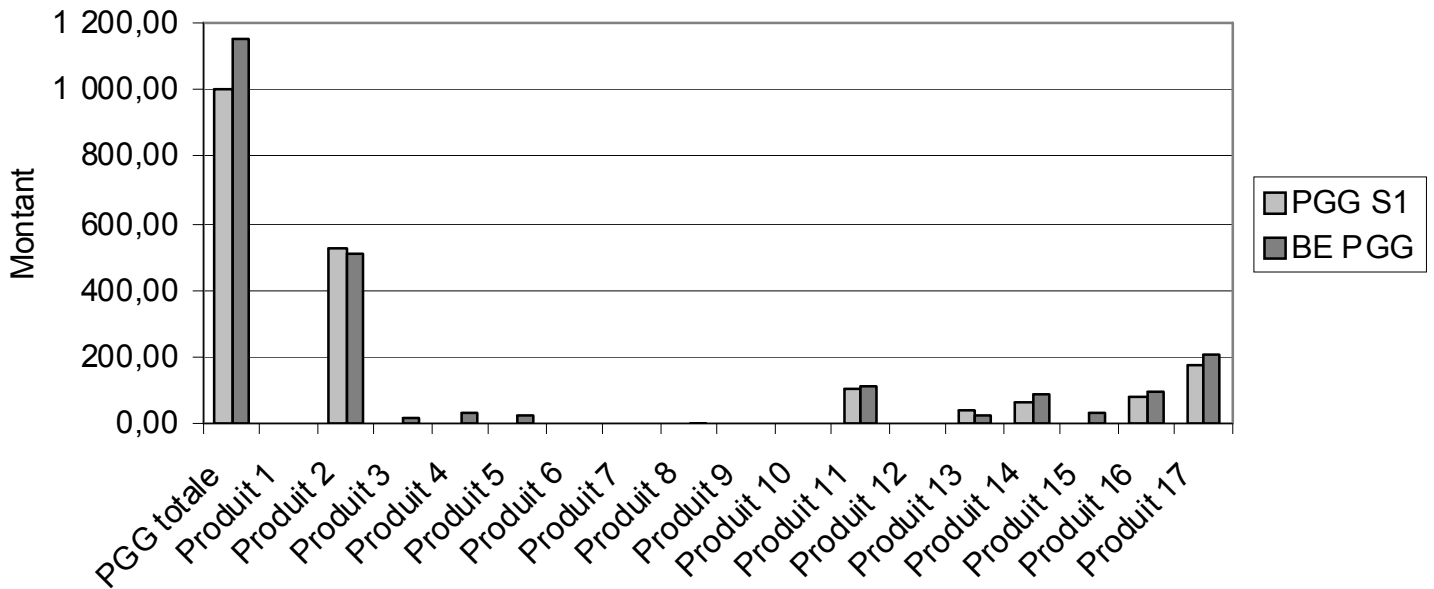


Figure 2: The operating expenses reserve split by product

The first graph shows an outstanding increase of the global management reserve with the transition to Solvency II. This increase is mainly linked to the Risk Margin, though it is not the only reason that explains the increase. Indeed, on the second graph that displays only the Best Estimate of each product compared to the reserve obtained with Solvency I, we can notice that an operating expenses provision is created for several products. The main reason of this gap is due to the different yield curves used in each approach: that shows opposite trends.

The above graph shows the curve used with Solvency I approach that represents the average yield of the scenarios with Solvency II as well as the guaranteed minimum and maximum rates for the products that have got a guaranteed minimum rate.

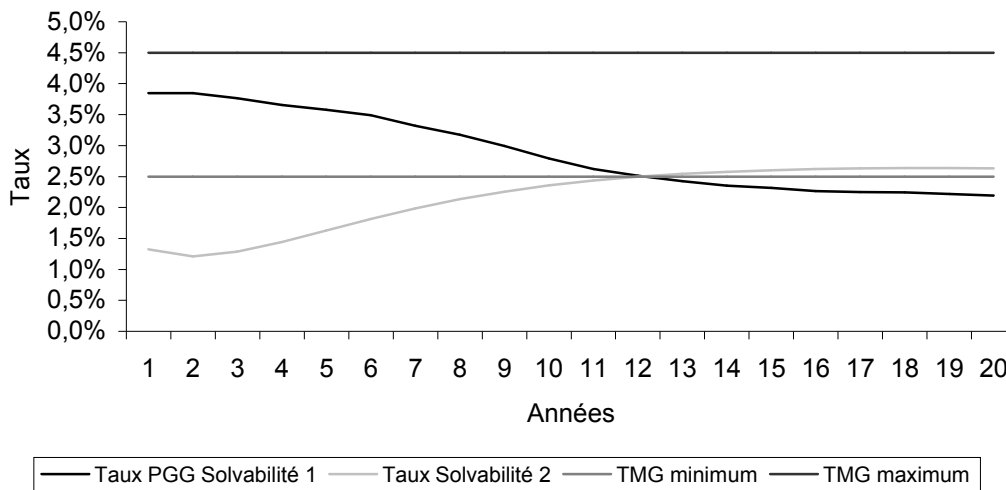


Figure 3: Yield curves

We notice that the curve used for Solvency II is under the lowest guaranteed minimum rate. This explains why we can observe the operating expenses reserve associated with other products. Indeed, the yield will not enable to distribute the owed interests.

This trend is intensified by the greater influence of the first financial years in the computation, due to the portfolio's size and the fact that we do not amortize the previous years. On the contrary, the curve used for Solvency I is very high the first years due to the constraints demanded by the Code of Insurance.

The technical specifications linked to Solvency II do not suggest anything regarding the operating expenses reserve. Therefore, if we want to assess the risk linked to the management activity, we have to make some assumptions. This paper sets a method to determine the operating expenses reserve according to Solvency II principles. It leads to compute amounts that are greater than those we currently have, notably due to the fact that the risk margin is cut back on the management activity.

References :

- Code des assurances, (2012).
- EUROPEAN COMMISSION. (31 October 2011), *Draft Implementing measures Solvency II*, Brussels.
- EUROPEAN COMMISSION. (5 July 2010), *QIS 5 Technical Specifications*, Brussels.

Introduction

La réforme Solvabilité 2, qui est au cœur de beaucoup de discussions actuellement, aura l'avantage d'harmoniser les principes de solvabilité au sein de l'Union européenne. Elle imposera notamment aux sociétés d'assurance l'adoption d'une approche en cohérence avec leurs profils de risque. Cette réforme vient modifier tous les éléments qui constituaient les règles de solvabilité aujourd'hui. L'intégralité des provisions actuellement inscrites aux bilans des assureurs, verront leurs modalités de calcul remises à plat.

Les provisions sont essentielles dans la notion de solvabilité. La provision mathématique représente l'estimation des prestations futures de l'assureur envers l'assuré. En solvabilité 1, des provisions dites « centrales » viennent augmenter la provision mathématique pour ajouter une marge de prudence au provisionnement de l'exposition de l'assureur à certains risques spécifiques. Elles ne sont théoriquement pas affectables à un contrat ou à un assuré spécifique, mais sont représentatives de groupes de contrats, voire de la totalité d'un portefeuille. On classe dans cette catégorie des provisions telles que la provision pour aléas financiers (PAF), la provision pour participation aux bénéfices, ou la provision globale de gestion (PGG).

La vision traditionnelle du suivi d'un produit ou d'une activité (marge technique / marge financière / marge administrative) sera à redéfinir avec l'adoption de Solvabilité 2. Cette dernière impose en effet une vision globale et agrégée des risques qui, *in fine*, permet peu de différencier les trois composantes du métier d'assureur.

L'objet du présent mémoire est l'évaluation de cette dernière provision en Solvabilité 2. L'évaluation va se faire à l'aide d'éléments déjà existants en univers Solvabilité 1, ainsi que d'hypothèses en cohérence avec l'univers Solvabilité 2. Il est indispensable de définir ces hypothèses pour pouvoir évaluer ce que sera cette provision en univers Solvabilité 2.

Le présent mémoire a pour objet l'appréhension des risques liés à l'activité de gestion de contrats d'épargne en univers Solvabilité 2, via la détermination de la provision globale de gestion selon des méthodes conformes aux spécifications techniques. Ces dernières étant muettes quant au devenir de cette provision aujourd'hui imposée par le Code des assurances, un ensemble de règles et hypothèses alternatives doit être bâti.

Dans un premier temps, le contexte du mémoire sera présenté en décrivant la réforme de Solvabilité 2 et l'assurance vie épargne.

On détaillera par la suite la méthode de calcul de la provision globale de gestion en univers Solvabilité 1, puis on précisera les règles choisies pour l'extension de ce calcul à l'univers Solvabilité 2.

La méthode de modélisation est ensuite exposée avec la méthode de calcul du Best Estimate. La dernière partie comporte quant à elle la présentation du calcul de la Risk Margin.

Les principaux résultats seront également présentés et analysés. Pour finir, on exposera les limites des choix opérés dans le cadre de cette étude.

Chapitre 1 : Solvabilité 2

La solvabilité de l'assureur est une notion fondamentale dans le secteur de l'assurance. Elle permet aux assureurs de répondre à leurs engagements vis-à-vis des assurés. Le passage de Solvabilité 1 à Solvabilité 2 est à cet égard un événement majeur dans le secteur.

1. Les objectifs de Solvabilité 2

Solvabilité 2 va remplacer la réglementation Solvabilité 1, considérée comme une approche trop simpliste du risque. Des critiques sont adressées à Solvabilité 1, comme une discrimination insuffisante en fonction du profil de risque, une prise en compte partielle de la réalité des groupes ou une harmonisation européenne limitée. L'objectif de Solvabilité 2 est de répondre à ces critiques. En effet, les assureurs devront développer une approche qui intègre les risques pesant réellement sur la société afin de mieux garantir leur solvabilité.

2. L'approche « Lamfalussy »

Le processus Lamfalussy a été mis au point en 2001 par Alexandre Lamfalussy, pour concevoir les réglementations du secteur bancaire. La Commission européenne a décidé d'étendre ce processus au secteur de l'assurance en 2002.

Cette méthode repose sur quatre niveaux :

- Niveau 1 : Elaboration de la législation

Les textes de niveau 1 sont des directives ou des règlements (une directive doit être transposée avant de pouvoir s'appliquer en droit national, ce qui n'est pas le cas d'un règlement). La Commission européenne adopte une proposition de directive ou de règlement. Ensuite, par un principe de codécision entre le Parlement européen et le Conseil, cette proposition aboutit à la directive qui fixe les principes de Solvabilité 2.

- Niveau 2 : Elaboration des mesures d'exécution

La Commission européenne adopte des mesures qui viennent détailler les textes de niveau 1. Les mesures sont rédigées par la Commission européenne sur proposition de l'EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority ou Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles). Ce sont le Parlement européen et le Conseil qui adoptent les mesures.

- Niveau 3 : Coopération des régulateurs

Les textes de niveau 3 sont des recommandations, qui visent à harmoniser la mise en œuvre de Solvabilité 2 dans les différents Etats membres. Ces textes sont décidés par l'EIOPA puis adoptés par la Commission européenne.

- Niveau 4 : Contrôle du respect du droit

La Commission européenne vérifie le respect de la réglementation par les Etats membres, et prend les mesures nécessaires à l'encontre de ceux qui sont soupçonnés de non-respect de la réglementation.

3. Les 3 piliers

Solvabilité 2 est une réglementation qui repose sur 3 piliers comme le modèle Bâle 2 qui s'applique aux banques.

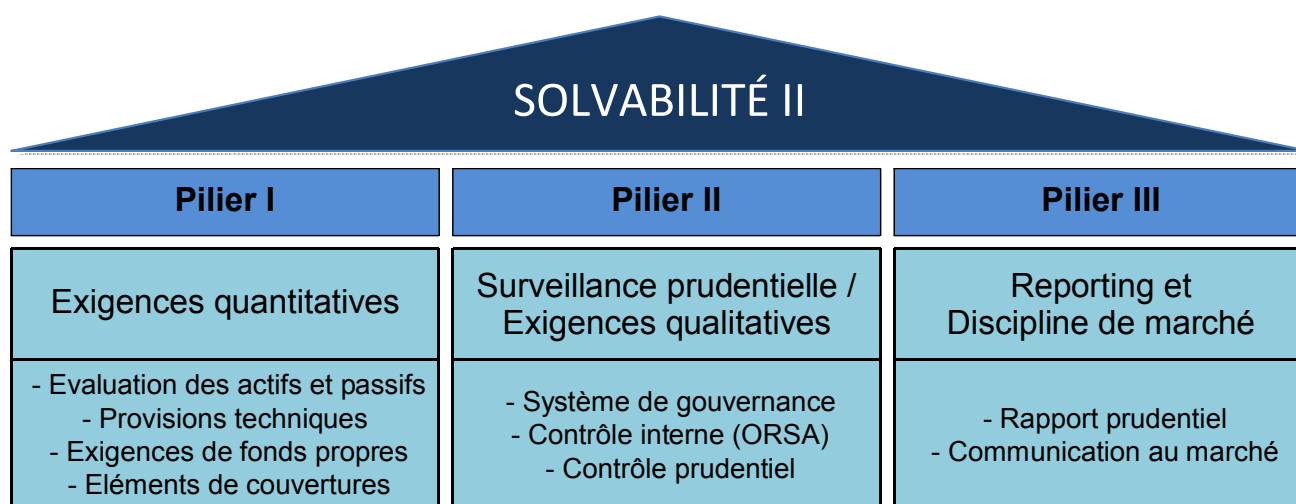


Fig n°1 : Les piliers de solvabilité 2

1. Le pilier 1 : Exigences quantitatives

Ce pilier détermine les provisions techniques et le niveau des fonds propres exigés. Solvabilité 2 se base sur un nouveau bilan, dans lequel les actifs sont exprimés en valeur de marché.

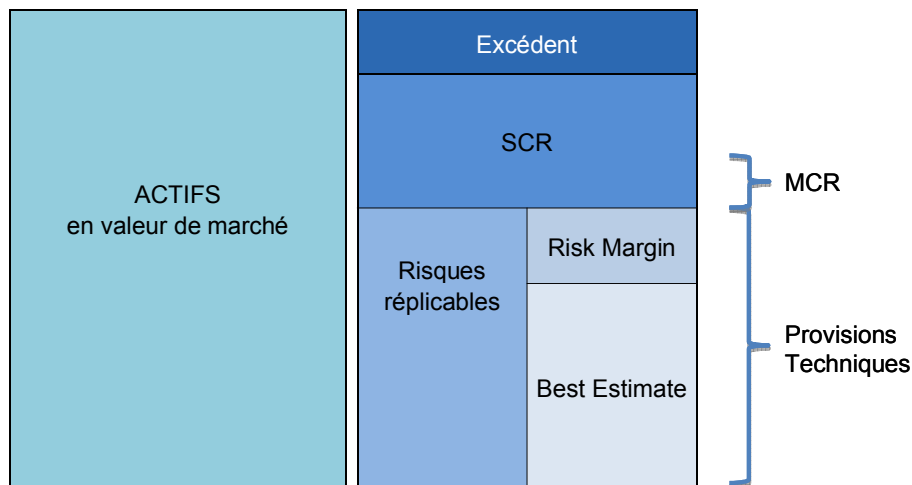


Fig n° 2 : Bilan simplifié d'un assureur sous Solvabilité 2

En France, il n'existe pas de contrat pour lesquels les risques sont répliquables (hedgeable), c'est-à-dire qui peuvent être répliqués par des actifs financiers. Le Best Estimate et la Risk Margin sont une alternative permettant de déterminer les provisions techniques dans le cas de contrats non répliquables. Ces notions seront détaillées dans la suite du mémoire.

Il existe deux niveaux d'exigence de fonds propres qui sont le MCR (Minimum Capital Requirement ou capital minimum requis) et le SCR (Solvency Capital Requirement ou capital de solvabilité requis).

- Le MCR est le seuil minimum que doit détenir un organisme d'assurance, si ce seuil n'est pas respecté cela peut conduire à un retrait d'agrément. Le retrait d'agrément empêche de faire des affaires nouvelles mais les engagements vis-à-vis des contrats souscrits avant le retrait sont conservés.
- Le SCR est le capital requis pour absorber les pertes. Il est calculé dans une hypothèse de continuité d'exercice de l'entreprise et prend en compte les risques quantifiables auxquels elle est exposée. Le SCR est le niveau de fonds propres permettant de répondre aux engagements de l'organisme durant l'exercice suivant avec un niveau de confiance de 99,5%. L'assureur peut choisir de le calculer à partir de la formule standard ou d'un modèle interne qui doit être validé par l'autorité de contrôle.

Le pilier 1 précise les éléments de couvertures éligibles, c'est-à-dire les fonds propres permettant de couvrir le MCR et le SCR. Les éléments éligibles sont divisés en trois catégories en fonction de critères de qualité.

2. Le pilier 2 : Surveillance prudentielle / Exigences qualitatives

Le pilier 2 concerne le système de contrôle interne ainsi que le contrôle de la part des autorités de contrôle. L'entreprise doit mettre en place un système de gouvernance efficace

permettant une gestion saine de l'activité. Le système de contrôle interne est réalisé notamment via le processus ORSA (Own Risk and Solvency Assessment ou évaluation interne des risques et de la solvabilité). L'entreprise doit réaliser un ORSA au moins une fois par an et avant toute décision stratégique. L'ORSA concerne au minimum les besoins de financement à court et long terme, le respect permanent du MCR, SCR et des provisions techniques ainsi que l'adéquation des hypothèses retenues avec le profil de risque. Les autorités de contrôle pourront imposer aux entreprises d'avoir un capital add-on c'est-à-dire un capital supplémentaire pour la marge de solvabilité. Ce capital est imposé si l'autorité de contrôle juge que les risques ont été mal évalués par l'entreprise.

3. Le pilier 3 : Reporting et discipline de marché

Le pilier 3 concerne les informations transmises au public et aux autorités de contrôle. Les entreprises doivent effectuer un rapport annuel sur la solvabilité et la situation financière qui sera rendu public. Ce rapport permet d'informer les assurés, les intermédiaires ainsi que les concurrents. Un autre rapport plus détaillé est à réaliser, celui-ci est adressé à l'autorité de contrôle.

4. QIS (Quantitative Impact Study)

Les QIS ou études quantitatives d'impacts permettent d'avoir une première vision de l'impact de Solvabilité 2 et ainsi de fixer les méthodes et de calibrer les paramètres des calculs. Jusqu'à présent cinq études ont été effectuées. Ce mémoire se base sur un certain nombre d'éléments issus des spécifications techniques du QIS 5. L'objectif du QIS 5 était de définir l'impact sur le bilan des assureurs.

5. Omnibus 2

La directive Omnibus 2 vient modifier la directive Solvabilité 2 qui a été votée le 22 avril 2009 par le Parlement Européen. Omnibus 2 va repousser l'entrée en vigueur de Solvabilité 2 d'un an, ce qui conduit son entrée au 1^{er} janvier 2014. Omnibus 2 devrait adopter des mesures de transition pour la mise en place de Solvabilité 2. Cela va permettre aux entreprises d'effectuer un passage progressif à Solvabilité 2. Omnibus 2 va également préciser le rôle de l'EIOPA dans l'adoption des textes de Solvabilité 2 (rédaction du niveau 2 et des lignes directrices du niveau 3).

Chapitre 2 : Formes d'épargne

L'épargne est la renonciation à la consommation immédiate, elle est rémunérée par un taux d'intérêt. Comme il existe différentes raisons d'épargner, par exemple pour la réalisation d'un projet, pour préparer sa retraite..., il existe également diverses formes d'épargne.

1. Epargne à court terme

L'épargne à court terme peut se faire à l'aide de plusieurs moyens.

1. Les livrets d'épargne

Un livret d'épargne permet de placer de l'argent de manière sécurisée tout en le laissant disponible. Il peut être réglementé ou non. S'il n'est pas réglementé alors les établissements financiers sont libres de proposer leur propre livret avec un taux qu'ils déterminent eux-mêmes. Pour les livrets réglementés, les taux sont fixés par un décret et par conséquent on retrouve les mêmes taux d'un établissement à un autre.

Concernant les livrets réglementés, voici les caractéristiques principales des différents livrets:

- Le Livret A avec un taux de rémunération fixé à 2,25% et un plafond¹ de 13500€.
- Le Livret Jeune est réservé aux personnes ayant entre 12 et 25 ans, son plafond est de 1600€, son taux est variable entre 2,25% et 4% selon les établissements.
- Le Livret de Développement Durable (LDD), anciennement CODEVI, propose un taux de 2,25%, son plafond est de 6000€.
- Le Livret d'Epargne Populaire (LEP), est réservé aux personnes non imposables ou dont le niveau d'impôt ne dépasse pas un certain montant (769€ en 2012). Le taux de rémunération est de 2,75% et le plafond est de 7700€.

Ces caractéristiques sont celles en vigueur à ce jour, elles peuvent être amenées à évoluer.

2. Les Organismes de Placements Collectif en Valeurs Mobilières (OPCVM)

Les OPCVM permettent à l'épargnant de confier la gestion de ses capitaux à un professionnel qui se charge de les investir sur les marchés financiers. Les OPCVM sont composés de deux familles de produits qui sont les Sociétés d'Investissement à Capital Variable (SICAV) et les Fonds Commun de Placement (FCP). La principale différence entre les SICAV et les FCP est le statut juridique. Il est possible d'acheter des actions de SICAV ou des parts de FCP, dans ce cas ce qui est détenu est une partie d'un portefeuille commun à plusieurs épargnants. Ce type d'épargne permet d'investir dans un portefeuille plus diversifié que dans le

¹ Tous les plafonds sont exprimés hors intérêts et hors plus values

cas de la construction d'un portefeuille seul et les risques sont diminués du fait que le portefeuille est plus diversifié. Les OPCVM peuvent être à court ou à long terme, il est possible de les vendre à tout moment. Les OPCVM peuvent être composés d'actions, d'obligations et/ou de bons du Trésor. Selon leurs compositions, les OPCVM seront plus ou moins sensibles aux variations de taux du marché. Contrairement aux gérants des SICAV, ceux des FCP n'ont pas l'obligation de publier leurs résultats, donc ils peuvent prendre plus de risques dans leurs gestions. Lors de la cession, les plus-values sont imposées.

3. Les comptes à terme

Dans le cas des comptes à terme, il est question de prêter de l'argent à la banque via un versement unique à l'ouverture contre une rémunération. Ce type de compte est ouvert à tous, le montant minimum va varier d'une banque à l'autre, tout comme le plafond et le taux. Le taux peut être fixe ou progressif. La durée peut être déterminée (de 1 mois à 5 ans) ou renouvelable. En cas de sortie avant le terme, il y aura une pénalité, sauf dans le cas de taux progressif si la sortie est faite au moment d'un passage de palier de taux.

2. Epargne à long terme

Tout comme pour l'épargne à court terme, il existe plusieurs moyens d'épargner à long terme.

1. L'épargne logement

Il existe deux types d'épargnes, le Compte Epargne Logement (CEL) et le Plan Epargne Logement (PEL). Les deux permettent d'épargner pendant une certaine durée pour ensuite donner lieu à un emprunt avec un taux préférentiel, mais leurs conditions diffèrent.

Le Compte Epargne Logement doit être conservé au minimum 18 mois pour ensuite pouvoir bénéficier d'un prêt, plus le CEL est conservé longtemps plus le taux d'emprunt proposé sera intéressant. En cas d'obtention d'un prêt suite au CEL, une prime d'Etat sera versée par la banque au moment de la réalisation du prêt. Le taux d'intérêt pour ce placement est de 1,5%, les intérêts sont soumis aux prélèvements sociaux. Le plafond du CEL est de 15300€.

Le Plan Epargne Logement doit lui être conservé au minimum 4 ans pour aboutir à un emprunt à taux préférentiel et au maximum 15 ans, mais après 10 ans il n'est plus possible d'effectuer des versements sur le PEL. Pour les PEL ouverts à partir de mars 2011, une prime d'Etat représentant $2/5^{\text{ème}}$ des intérêts acquis sera versée à la réalisation d'un prêt d'un minimum de 5000€. Le taux d'intérêt du PEL est de 2,5%, les intérêts sont soumis aux prélèvements sociaux, et à partir de 12 ans à l'impôt sur le revenu. Le PEL a un plafond de 61200€, et nécessite un versement annuel minimum de 540€.

2. Le Plan Epargne en Actions (PEA)

Le Plan Epargne en Actions permet d'investir en actions de sociétés de la Communauté Européenne, en SICAV et FCP éligibles au PEA ou en titres assimilés. Ce type de placement va suivre les performances du marché, il est risqué car ni le capital ni les performances ne sont garantis. Le PEA est constitué de deux comptes, qui sont un compte titres spécial et un compte chèque. Les valeurs mobilières sont investies sur le compte titres spécial, c'est ce compte qui va gagner ou perdre en valeur. Le compte chèque permet uniquement de recevoir les dividendes et de payer les frais, ce compte sert d'intermédiaire. Un PEA peut être conservé aussi longtemps qu'on le souhaite, son plafond est fixé à 132000€. Tout retrait avant les 8 ans du PEA entraîne la clôture, après il est possible d'effectuer des retraits partiels sans entraîner la clôture mais les versements ne seront plus possibles. Les plus values du PEA sont soumises aux prélèvements sociaux, et si le PEA est clôturé moins de 5 ans après l'ouverture alors les plus values seront également soumises à l'impôt sur le revenu. Quand le PEA a plus de 8 ans, il est également possible de le transformer en rente viagère exonérée d'impôt sur le revenu.

3. L'assurance vie

L'assurance vie est une autre forme d'épargne. Il existe plusieurs types de contrat d'épargne dans le cadre de l'assurance vie, c'est ce qui va être détaillé dans la partie suivante.

Chapitre 3 : L'assurance vie épargne

Les contrats d'épargne souscrits dans le cadre d'une assurance vie restent des contrats d'assurance, et doivent en tant que tel être soumis à un ou plusieurs aléas. L'aléa principal attaché à un contrat d'épargne est la durée de vie résiduelle.

1. Principe général

Tous les contrats d'assurance vie ne garantissent pas les mêmes événements. Certains contrats garantissent la vie de l'assuré, ces contrats donnent droit à l'assuré de bénéficier d'un capital ou d'une rente viagère s'il est encore en vie à un âge défini par le contrat. Par ailleurs, d'autres contrats garantissent le décès de l'assuré, ce type de contrat donne lieu à un capital ou une rente pour les bénéficiaires désignés par l'assuré décédé. Il existe également des contrats d'assurance vie mixte, qui couvrent la vie et le décès de l'assuré. Si l'assuré est toujours en vie à la date prévue par le contrat il touchera un capital ou une rente viagère sinon ce sont les bénéficiaires qui recevront le capital. Les contrats d'épargne peuvent avoir une durée déterminée dans les conditions du contrat, ou une durée viagère c'est-à-dire pour la durée de vie de l'assuré.

Les versements du souscripteur peuvent être des versements libres, des primes périodiques fixes ou encore une prime unique. Ces versements sont investis dans des supports financiers tels que des obligations, des actions...

2. Les supports des contrats

1. Les contrats en euros

Les contrats en euros sont peu risqués pour l'assuré. L'assureur peut garantir un taux minimum, mais ce n'est pas obligatoire. L'assureur doit distribuer à ses assurés tout ou une partie des bénéfices générés par les supports financiers. Dans le cas des contrats en euros, le risque financier est porté par l'assureur : les montants qui ont été versés sur un contrat en euros ne peuvent en effet pas diminuer, ce qui correspond à une garantie implicite d'un taux minimum de 0%.

2. Les contrats en unités de compte (UC)

Les contrats en unités de compte sont beaucoup plus risqués pour l'assuré car c'est lui qui porte le risque et non plus l'assureur. Il n'existe pas de garantie de capital sauf en cas de souscription d'une garantie spécifique. Le capital ou la rente garantis sont exprimés en fonction d'UC. Les actifs sous-jacents aux UC peuvent être constitués d'actions, d'obligations, de valeurs mobilières, de parts d'OPCVM... Ce type de contrats offre l'avantage d'avoir la plupart du temps une espérance de gain plus importante que les contrats en euros mais comporte plus de risques étant donné que ces contrats sont sensibles aux fluctuations des marchés sous-jacents.

3. Les contrats multisupports

Les contrats multisupports sont exprimés en fonction de plusieurs supports. Les supports peuvent être des fonds en euros et/ou des unités de comptes. A chaque versement, l'assuré peut choisir sur quel support il souhaite l'effectuer, sauf en cas de clauses contractuelles imposant une répartition des versements. Ces contrats sont plus ou moins sensibles aux variations du marché selon les supports. En cas de baisse du support, il peut y avoir une perte d'une partie de l'épargne, mais cette perte n'est réalisée qu'en cas de rachat, avant un rachat la perte est virtuelle.

3. Les éléments des contrats

1. Les versements

Il existe plusieurs types de versements en assurance vie épargne, ils peuvent être libres, périodiques ou unique.

Les contrats à versements libres permettent au souscripteur d'alimenter son contrat quand il le souhaite. En général, il existe un montant minimum de versements, permettant d'éviter qu'il y ait trop de petits versements qui augmenteraient les frais de gestion pour l'assureur.

Les contrats à primes périodiques fixes engagent le souscripteur à effectuer un versement d'un montant défini de façon régulière. Les modalités de versements sont déterminées dans le contrat au moment de la souscription. Ces contrats sont souvent assortis de garanties spécifiques (en taux notamment) déclenchées si le souscripteur a respecté les engagements de versements définis à la souscription du contrat.

Pour les contrats à prime unique, le souscripteur effectue un seul versement au moment de la souscription. Le versement est investi par l'assureur et permet ainsi de valoriser l'épargne du souscripteur.

Le type de versement le plus courant est le versement libre, il permet plus de souplesse pour le souscripteur.

2. Les frais

Les frais sont propres à chaque entreprise d'assurance. Voici une liste de frais les plus courants :

- Les frais de dossier sont des frais qui peuvent intervenir à l'ouverture du contrat.
- Les frais d'acquisition, ou de versements sont généralement un pourcentage des versements effectués, mais ils ont tendance à devenir nuls.
- Les frais de gestion sont prélevés durant toute la durée du contrat pour la gestion des contrats. Pour les contrats en euros le taux de rendement est exprimé net de frais de gestion et pour les contrats en UC les frais de gestion sont prélevés sur le nombre de part.

- Les frais d'arbitrage interviennent pour les contrats multisupports lors d'un transfert d'un support à un autre. Les frais seront un pourcentage du montant transféré.
- Les frais de commercialisation ou commissions sont présents lorsqu'il y a un réseau de distribution.

3. Les garanties

Tous les contrats d'épargne n'ont pas les mêmes garanties en fonction du support notamment.

Le taux de rendement minimum existe uniquement pour les contrats en euros, plus souvent appelé taux minimum garanti (TMG). L'assureur n'est pas obligé de garantir un taux de rendement minimum. Si l'assureur garanti un taux minimum, ce taux ne doit pas dépasser le taux prévu par la réglementation. Ce taux va dépendre du type de versements. Pour les contrats à prime unique, le TMG est plafonné à 75% du taux moyen d'emprunt d'Etat (TME) les huit premières années, ensuite le TMG sera au maximum 60% du TME, sans pouvoir dépasser 3,50%. Pour les contrats à versements libres, le taux peut varier pour chaque versement qui sera considéré comme une prime unique. Le plafond se calcule comme pour la prime unique, mais il sera défini pour chaque versement. Pour les contrats à primes périodiques, le TMG va être le minimum entre 60% du TME et 3,5%, quelle que soit la durée du contrat.

Pour les contrats en euros, l'assureur est tenu de distribuer à ses assurés une partie de ses bénéfices, c'est ce qui est appelé la participation aux bénéfices. Le Code des assurances impose à l'entreprise de distribuer au minimum 90% de ses bénéfices techniques et 85% de ses bénéfices financiers.

Pour les contrats en unités de compte, il existe plusieurs garanties en cas de décès pour éviter que tout le risque soit porté par l'assuré, ce ne sont pas des garanties obligatoires. Ces garanties sont la garantie plancher simple, la garantie plancher indexée, la garantie cliquet et la garantie majorée. Cela permet d'assurer un seuil minimum aux bénéficiaires, en cas de décès de l'assuré dans une conjoncture financière défavorable.

La garantie plancher simple permet d'assurer aux bénéficiaires de toucher au minimum la totalité des versements effectués nets de rachats.

La garantie plancher indexée fonctionne comme la garantie plancher simple, à la différence que les versements seront revalorisés sur la base d'un taux annuel contractuellement défini.

La garantie cliquet permet de toucher le montant maximum que l'épargne a atteint durant la vie du contrat.

Pour la garantie majorée, l'assuré fixe un capital minimum au moment de la souscription. Au décès de l'assuré, les bénéficiaires toucheront au moins ce capital.

4. Les rachats et les avances

Les rachats et les avances sont rendus possibles grâce à l'existence de la provision mathématique qui sera définie par la suite. Les rachats et avances, ne sont possibles que s'ils sont contractuellement prévus.

Il existe deux types de rachats, le rachat partiel et le rachat total. Le rachat total d'un contrat met fin à celui-ci, le souscripteur va recevoir ce qu'on appelle la valeur de rachat. La valeur de rachat est définie à l'article L331-2 du Code des assurances, elle est égale à la provision mathématique. Pour les contrats d'assurance vie épargne cela correspond à l'épargne acquise au moment du rachat. La valeur de rachat peut être diminuée d'une pénalité si prévue par le contrat. La pénalité ne peut pas dépasser 5% de la provision mathématique et doit être nulle au bout des 10 ans. Pour les rachats partiels, seule une partie de la valeur de rachat est restituée à l'assuré. Les rachats partiels peuvent être ponctuels ou programmés. Dans le cas de rachats partiels programmés, cela permet à l'assuré de percevoir un revenu régulier. Le rachat partiel au contraire du rachat total ne met pas fin au contrat.

L'avance est un prêt qui ne peut pas dépasser la valeur de rachat du contrat. L'avance au contraire d'un rachat partiel ne diminue pas l'épargne. L'assuré doit rembourser l'avance avant de pouvoir augmenter son épargne, il doit également payer des intérêts à l'assureur. Le taux d'intérêts est précisé dans les conditions du contrat. Si l'assuré n'a pas remboursé l'avance avant le terme du contrat, le reste à rembourser sera considéré comme un rachat partiel.

5. La fiscalité

L'assurance vie bénéficie d'un cadre fiscal spécifique, aujourd'hui considéré comme avantageux. La fiscalité va dépendre de la durée du contrat et de la date de souscription. Voici un tableau récapitulatif de la fiscalité pour l'assurance vie hors prélèvements sociaux.

		Dates des versements			
		Avant le 01/01/1983	Entre le 01/01/1983 et le 31/12/1989	Entre le 01/01/1990 et le 25/09/1997	Depuis le 25/09/1997
Date de souscription aux contrats	Avant le 01/01/1983	Exonération des intérêts en cas de rachat quelque soit la durée et la date des versements			
	Entre le 01/01/1983 et le 31/12/1989		Exonération des intérêts en cas de rachat après 6 ans.	Rachat après 8 ans: Prélèvement libératoire de 7,5% au delà de la franchise annuelle de 4600€ ou de 9200€.	
	Entre le 01/01/1990 et le 25/09/1997		Rachat: réintégration dans l'impôt sur le revenu ou: Prélèvement libératoire de 35% les 4 premières années, de 15% les 4 années suivantes. Après 8 ans, les intérêts sont exonérés d'impôt sur le revenu.	Rachat: réintégration dans l'impôt sur le revenu ou: Prélèvement libératoire de 35% les 4 premières années, de 15% les 4 années suivantes. Après 8 ans, prélèvement libératoire de 7,5% au delà de la franchise annuelle de 4600€ ou de 9200€.	
	Depuis le 25/09/1997			Rachat: réintégration dans l'impôt sur le revenu ou: Prélèvement libératoire de 35% les 4 premières années, de 15% les 4 années suivantes. Après 8 ans, prélèvement libératoire de 7,5% au delà de la franchise annuelle de 4600€ ou de 9200€.	

Fig n°3 : Tableau de la fiscalité des assurances vie hors prélèvements sociaux

Le prélèvement libératoire est un prélèvement à taux forfaitaire que l'assuré peut choisir au lieu de payer des impôts sur le revenu pour ses intérêts

Les prélèvements sociaux pour les intérêts des contrats d'assurance vie qui comprennent la CSG (Contribution Sociale Généralisée) et la CRDS (Contribution pour le Remboursement de la Dette Sociale), s'élèvent depuis le 1^{er} juillet 2012 à 15,5%.

6. Les provisions

Les assureurs doivent faire apparaître des provisions techniques au passif de leurs bilans. Elles permettront d'honorer leurs engagements futurs vis-à-vis des assurés. Il en existe plusieurs types.

- Provision mathématique

Le Code des assurances définit la provision mathématique comme la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés¹. C'est la

¹ Article R331-3 du Code des Assurances

provision représentant la plus grande part des provisions constituées par les assureurs. La provision mathématique est une dette de l'assureur envers l'assuré.

- Provision pour participation aux bénéfices

Cette provision est parfois appelée provision pour participation aux excédents. Elle permet de différer la distribution d'une partie de la participation aux bénéfices lorsqu'elle n'est pas payable en totalité immédiatement à la fin de l'exercice.

- Réserve de capitalisation

Le Code des assurances définit la réserve de capitalisation comme une réserve destinée à parer à la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu¹. Elle intervient lors de la cession de certains titres (essentiellement de type obligataires) : si l'assureur réalise une moins-value, celle-ci sera compensée par une diminution de la réserve de capitalisation, dans la limite du montant de celle-ci. A l'inverse, si l'assureur réalise une plus-value lors de la cession, alors la réserve de capitalisation sera dotée. Elle permet de neutraliser les plus ou moins-values réalisées lors de la cession de titres, cela permet de stabiliser le rendement du portefeuille d'obligation.

- Provision pour aléas financiers

C'est une provision qui permet de compenser la baisse de rendement de l'actif¹. Même en cas de baisse du rendement de l'actif, l'assureur doit être en mesure de servir le taux d'intérêt technique qu'il garantit.

- Provision pour égalisation

Cette provision est destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurance de groupe contre le risque décès¹. Elle permet de lisser les résultats techniques et par conséquent de stabiliser les tarifs.

- Provision pour risque d'exigibilité

C'est une provision qui permet à l'assureur de faire face à ses engagements en cas de réalisation de moins-values de certains actifs suite à des vagues de rachats massifs. Elle est dotée lorsque certains placements (essentiellement actions) se trouvent en situation de moins-values latentes.

- Provision pour frais d'acquisition reportés

C'est la provision permettant de couvrir les charges résultant du report des frais d'acquisition constaté¹. Le montant de cette provision est au maximum égal à la différence entre le montant des provisions mathématiques inscrites au bilan et le montant des provisions mathématiques qui serait inscrit si les frais d'acquisition n'étaient pas pris en compte dans les engagements des assurés.²

¹ Article R331-3 du Code des assurances

² Article R332-35 du Code des assurances

- Provision de diversification

Cette provision concerne les contrats d'assurance vie diversifiés, elle permet d'absorber les fluctuations des actifs du contrat¹. Elle est dotée grâce à une partie des cotisations des assurés. En cas de perte ou de prélèvements au titre de prestations servies, cela viendra diminuer la provision.

- Provision de gestion

C'est une provision qui couvre les charges de gestion futures qui ne sont pas couvertes par des chargements sur primes ou des prélèvements sur produits financiers. L'étude de cette provision fait l'objet du présent mémoire.

¹ Article R332-35 du Code des assurances

Chapitre 1 : La provision globale de gestion

Lorsque les charges de gestion anticipées ne sont pas couvertes par les prélèvements sur primes ou par les chargements sur les produits financiers, l'assureur doit constituer une provision globale de gestion (PGG). C'est une provision prudente puisque les pertes futures doivent être prises en compte dans la PGG dès qu'elles sont observées sur les années futures. Elle est rendue encore plus prudente avec les éléments imposés par le Code des assurances.

1. Méthode de calcul en Solvabilité 1

L'article A331-1-1 du Code des assurances impose plusieurs éléments de calcul pour la détermination de la provision globale de gestion. Cet article précise qu'elle doit être calculée pour « chaque ensemble homogène de contrats ». La notion d'ensembles homogènes de contrats n'est pas clairement définie dans la littérature juridique, et a tendance à varier suivant la problématique à laquelle elle s'applique. Comme la provision sert à financer des charges futures de la gestion des contrats, un ensemble homogène de contrats pourra avoir le même taux minimum garanti, ainsi que les mêmes charges de gestion. C'est cette définition qui a été retenue par CNP assurances.

Le calcul se fait actuellement de façon déterministe conformément au code des assurances. La durée de projection est de 20 ans. Si au terme de ces 20 ans, il reste des contrats, ceux-ci sont considérés comme rachetés pour que la totalité des coûts futurs soit pris en compte. Les frais de gestion et de sorties sont augmentés de l'inflation, c'est une inflation fixe qui est utilisée et qui augmentera les frais tous les ans.

La PGG est calculée sur la base d'un déroulé du portefeuille en run off pur (pas de nouvelles adhésions ni de primes versées).

1. Les frais et chargements pris en compte

Les produits futurs pris en compte pour le calcul de la PGG sont :

- les chargements assis sur l'encours moyen du passif (l'encours moyen du passif représente la provision mathématique de l'ensemble des contrats y compris les contrats sortis en milieu de période).
- les chargements sur produits financiers, prélevés si le taux minimum garanti a pu être servi auparavant. Si le résultat financier pour un des produits est négatif, les chargements ne pourront être prélevés. C'est généralement ce phénomène qui fait apparaître de la PGG. La PGG est présente notamment lorsqu'il y a un TMG important : dans ce cas, les intérêts à créditer peuvent être supérieurs à la production financière générée par l'actif sous-jacent, générant un résultat financier négatif.

Les charges futures considérées sont les frais liés à la gestion des sinistres (rachats et décès), les frais d'administration et les commissions. Les commissions forment une partie de la rémunération des réseaux de distribution de CNP Assurances.

2. La loi de rachats

Le Code des assurances impose un plafond pour la loi de rachats (article A331-1-1). Le taux de rachats, pour les rachats totaux ou partiels, doit être inférieur à la moyenne des taux rachats des deux derniers exercices clos et de celui en cours, diminué de 20%. CNP Assurances utilise cette règle de calcul pour ces rachats. De plus, la dernière année de projection tous les contrats sont rachetés pour tenir compte de la totalité des coûts.

3. La loi de mortalité

Concernant la loi de mortalité, rien n'est précisé dans le Code des assurances. La loi retenue par CNP Assurances est la TF00-02 abattue de 15% pour les produits d'épargne euros étudiés. (Détail de la table en annexe 2)

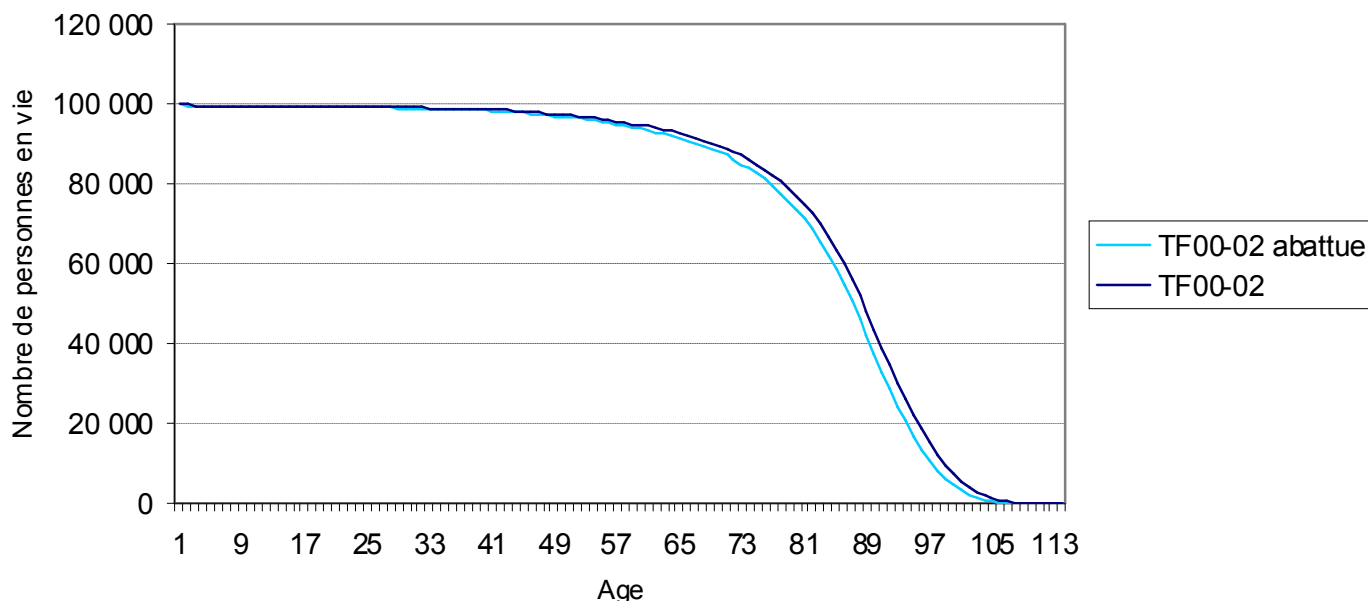


Fig n° 4 : Loi de mortalité

4. Le réinvestissement des actifs

Le Code des assurances donne des règles strictes concernant le taux de rendement projeté à retenir pour le calcul de PGG. Il se calcule à chaque exercice et de façon différente selon le type d'actifs. Pour les obligations ou titres assimilés hors plus values, ces actifs sont détenus jusqu'à leurs échéances. Les cinq premières années qui suivent l'exercice considéré, le réemploi des coupons et des obligations à échoir se fait à 75% du taux moyen semestriel des

emprunts d'Etat. Au-delà des cinq années, le réinvestissement se fait à 60% du taux moyen semestriel des emprunts d'Etat. Pour les autres actifs, le rendement est calculé comme étant 70% du rendement constaté en moyenne, sur l'exercice en cours et les deux précédents, les rendements utilisés sont hors plus values du portefeuille obligataire. Deux compagnies n'auront pas la même courbe de taux de rendement qui est fonction du portefeuille d'actif. Un taux moyen d'emprunt d'état futur est calculé pour pouvoir évaluer le rendement à prendre en compte pour le calcul de la PGG. Il est calculé à partir du taux OAT 10 ans couponné auquel est ajouté 5 points de base (bp).

L'actualisation des flux est faite avec la courbe des taux de rendement financier obtenu en appliquant les règles du Codes des assurances.

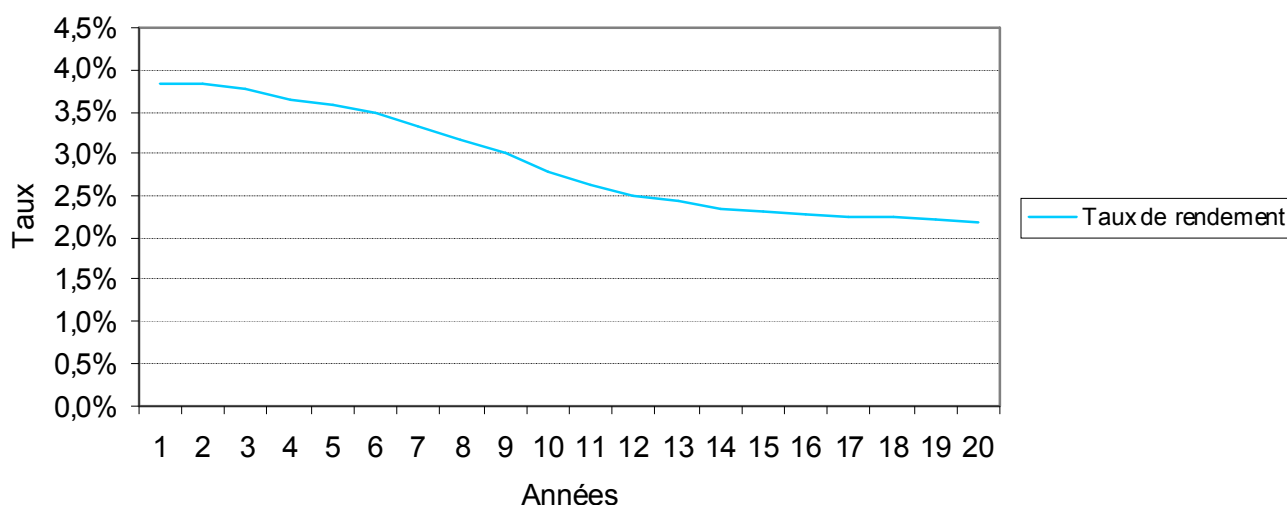


Fig n°5 : Courbe des taux de rendement utilisée pour la PGG en Solvabilité 1.

Les différents éléments qui permettent de calculer la PGG en univers Solvabilité 1, doivent être revus en Solvabilité 2.

2. Extension à l'univers Solvabilité 2

Pour pouvoir traduire la provision globale de gestion en univers Solvabilité 2, il faut au préalable définir certaines notions telles que le Best Estimate et la Risk Margin.

1. Le Best Estimate et la Risk Margin

Dans Solvabilité 2, les provisions techniques sont évaluées à partir du Best Estimate et de la Risk Margin :

$$\text{Provisions techniques} = \text{Best Estimate} + \text{Risk Margin}$$

Les provisions techniques doivent être calculées au minimum par ligne d'activité.¹ Les contrats d'épargne forment une ligne d'activité d'après la segmentation des engagements d'assurance vie définie dans les spécifications techniques du QIS 5.

Le Best Estimate est une moyenne pondérée des flux futurs probables actualisés, en tenant compte de la valeur temporelle de l'argent². Le Best Estimate est calculé en run off, seul les contrats déjà existants sont pris en compte dans l'évaluation. Il doit être calculé en prenant en compte les flux d'entrées et de sorties sur toute la durée de vie des contrats. L'incertitude des flux de trésorerie doit être prise en compte dans l'évaluation du Best Estimate, par exemple à l'aide d'une méthode stochastique, ce qui est le cas dans ce mémoire.

Dans les textes du QIS 5, l'actualisation des flux doit se faire avec la courbe fournie par l'EIOPA à laquelle est ajouté 75% de la prime d'illiquidité. La courbe de l'EIOPA est fournie par le marché, toutes les compagnies l'ont utilisée pour le QIS 5. Elle a toutefois été fournie lors des études sur le QIS 5. Elle ne peut donc pas être utilisée car elle ne correspond plus aux données de marché de décembre 2011. La courbe utilisée sera donc issue du générateur de scénarios économiques Barrie & Hibbert, c'est la courbe qui sera appelée « courbe de référence » par la suite. Il sera nécessaire d'ajouter une prime d'illiquidité à cette courbe de référence pour l'actualisation, comme indiquée dans les spécifications du QIS 5.

La prime d'illiquidité est introduite pour traduire l'illiquidité des passifs, elle est appliquée sur la courbe d'actualisation uniquement. Le taux de prise en compte peut être de 100%, 75% ou 50% suivant le type de passif concerné. D'après les spécifications techniques du QIS 5³, la proportion de la prime d'illiquidité correspondant aux contrats d'assurance vie avec participation aux bénéficiaires et qui supportent des risques de rachats est de 75%. La prime d'illiquidité est ajoutée sur la durée totale de projection. La prime est déterminée comme suit :

$$\text{Prime} = \max (0 ; 50\% * (\text{Spread des obligations corporate} - 40 \text{ bp})) + 10\text{bp}$$

Le spread des obligations corporate étant déterminé comme la marge par rapport au taux swap de l'indice obligataire iBoxx € Corporates. La prime d'illiquidité à ajouter à la courbe, ainsi calculée et en prenant compte du taux de prise en compte, est de 79 points de base (bp) dans le cadre de cette étude.

L'étude est faite en stochastique à l'aide du générateur de scénarios économiques Barrie & Hibbert, qui permet de générer 1000 scénarios de marché. Les modèles utilisés par ce générateur seront présentés plus loin, dans la sous partie modélisation de l'actif. La courbe de référence représente la moyenne des courbes de taux de rendement de l'actif des 1000 scénarios. Cette courbe est issue de la courbe des taux swaps découpnée et lissée fournie par le générateur de scénarios économiques au 31/12/2011. Elle est retraitée de 10 bp au titre du risque de crédit.

¹ TP.1.7. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² TP.2.1. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

³ TP.3.5. et TP.3.6. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

La courbe de référence retenue pour le présent mémoire, arrêtée au 31/12/2011, est la suivante :

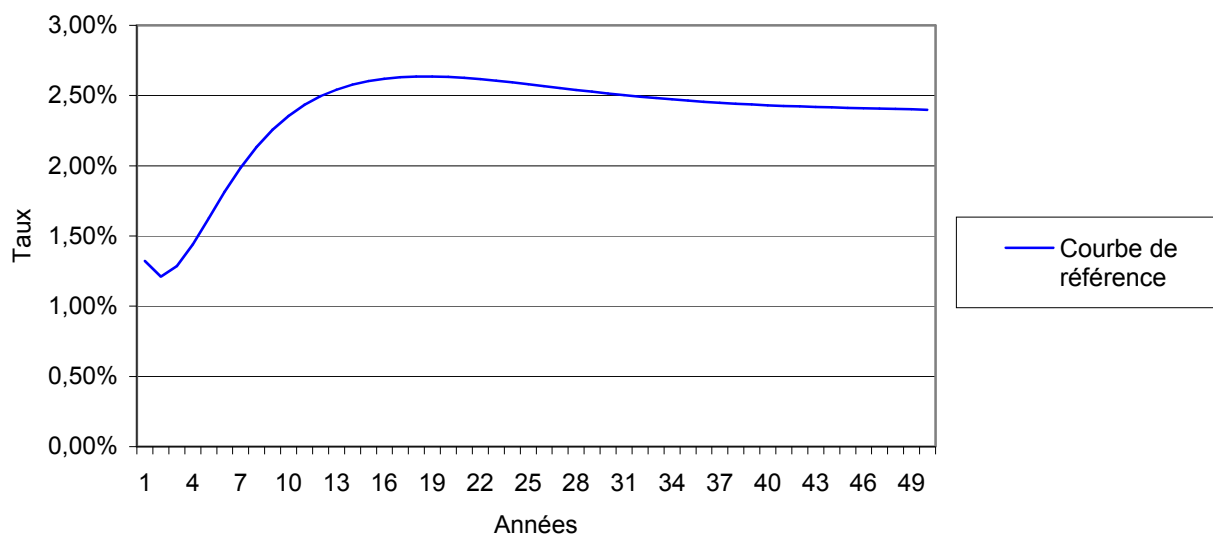


Fig n°6 : Courbe de référence

Cette courbe correspond au rendement moyen des 1000 scénarios. Elle servira pour l'analyse des résultats en partie III.

On constate l'inversion de la courbe de rendement entre Solvabilité 1 et Solvabilité 2, cette dernière correspondant à une vision de marché.

La Risk Margin est calculée de façon à obtenir des provisions techniques qui correspondent à la valeur de transfert des engagements de l'assureur à un autre assureur dont les actifs minimisent le SCR de marché. Elle est calculée au global puis réallouée par ligne d'activité. Le calcul de la RM est détaillé dans la Partie III.

2. Les hypothèses retenues pour la provision globale de gestion

Le calcul de la provision globale de gestion est actuellement strictement encadré par la réglementation. L'objet du présent mémoire est de proposer une détermination de cette provision spécifique en appliquant les principales règles régissant Solvabilité 2. Dans la suite de ce mémoire, on appellera « best estimate » la meilleure estimation possible de cette provision calculée avec ces règles.

En univers Solvabilité 1, la PGG est constituée pour prendre en compte l'ensemble des frais qui résulte de la gestion. Le calcul des provisions techniques en norme Solvabilité 2 comprend les frais de gestion¹, en intégrant une mutualisation entre les différents produits. Cette approche ne peut être retenue dans le cadre de ce mémoire, dont l'objectif est de déterminer en univers Solvabilité 2 la meilleure estimation possible d'une provision de gestion pour les produits

¹ TP.2.26. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

qui y sont soumis. L'approche en « groupe homogène de contrats » sera donc également retenue pour les calculs de Best Estimate, sans mutualisation des frais.

Aujourd'hui, il n'est pas certain que la PGG, ainsi que les autres provisions techniques de type « central », existeront en Solvabilité 2, le choc opéré sur les frais faisant office de marge de prudence (chocs des SCR présentés dans la 2^{ème} partie du Chapitre 1 de la Partie III). Toutefois, il est supposé dans le cadre de ce mémoire que la PGG reste une provision calculée sous forme de Best Estimate + Risk Margin par analogie avec les provisions techniques « classiques ».

Le calcul de la Risk Margin (RM) est fait au niveau global sous l'hypothèse que CNP Assurances gère uniquement les contrats d'épargne limités au périmètre d'étude. Pour isoler le montant spécifique d'une provision liée à la gestion, il est nécessaire de considérer que le risque lié à l'activité de gestion des contrats et celui correspondant aux engagements proprement dits, correspondent à deux activités distinctes. Déterminer une « marge pour risque de gestion » revient à considérer la possibilité pour un assureur de vendre à un tiers l'activité de gestion de son portefeuille.

Traditionnellement cette approche n'est pas retenue en univers Solvabilité 2, la notion de « marge pour risque de gestion » ne faisant pas l'objet d'un calcul spécifique. Le calcul de RM se fait au global, puis est réalloué aux lignes d'activités. Les calculs effectués dans le cadre du présent mémoire sont donc plus prudents qu'une approche Solvabilité 2 classique, puisqu'ils n'intègrent pas un effet global de diversification. De plus, les lignes d'activité sont définies en rapport avec le type d'engagements d'assurance (vie, non vie, santé...) plutôt qu'en fonction du type d'activité (administration, gestion...), cette hypothèse n'est donc pas forcément en contradiction des spécifications techniques du QIS 5.

Chapitre 2 : Méthode de Calcul du Best Estimate

La modélisation s'appuie sur un modèle actif-passif, qui sera décrit dans cette partie. Le générateur de scénarios économiques sera présenté au travers des modèles qu'il utilise. La stratégie financière concernant les actifs va également être développée. Et enfin, les méthodes de calculs des éléments de passif vont être détaillées.

1. La modélisation de l'actif

La modélisation de l'actif fait appel à des processus stochastiques. Un processus stochastique est une fonction aléatoire indexée par le temps. Nous nous plaçons sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, la modélisation est effectuée dans un univers risque-neutre.

1. Le générateur de scénarios économiques

Le générateur de scénarios économiques utilisé par CNP Assurances est Barrie & Hibbert. Il crée des scénarios de marchés financiers dans lesquels la valeur du portefeuille va évoluer. Dans Barrie & Hibbert, les taux d'intérêt nominaux sont modélisés par le Libor Market Model (LMM), pour le taux réel c'est le modèle Vasicek à deux facteurs qui est utilisé. Le modèle Black-Scholes permet de modéliser les actions.

- Libor Market Model (LMM)

Il permet de modéliser les taux d'intérêts nominaux. Le taux d'intérêt nominal est le taux effectivement payé. Ce modèle a été mis en place par Brace, Gatarek et Musiela en 1997, il est également appelé modèle BGM. L'objectif de ce modèle était de répondre aux critiques du modèle de Heath, Jarrow et Morton (HJM). Contrairement au modèle HJM, le Libor Market Model présente l'avantage d'être construit à partir de taux forward qui ne sont pas instantanés et il est facile à calibrer. Le Libor Market Model est fondé sur les taux forward accessibles sur le marché tel que des taux Libor. Le taux forward est une martingale¹ :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dZ(t)$$

Avec : $F_k(t)$ est le taux forward entre les dates t_k et t_{k+1} vu de la date t ,

t_k et t_{k+1} sont des dates de réajustement des taux caps négociés sur le marché aujourd'hui,

$\sigma_k(t)$ est la volatilité de $F_k(t)$ à la date t ,

Z est un processus de Wiener.

Dans le générateur de scénarios économiques, c'est le modèle LMM à plusieurs facteurs qui est utilisé. (En annexe, le modèle à un facteur et à plusieurs facteurs seront démontrés pour une

¹ Chapitre 31, Hull J. Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition, Pearson, 2011

meilleure compréhension.) Le processus suivi par $F_k(t)$ lorsque le modèle a p facteurs est le suivant¹ :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \sum_{q=1}^p \sigma_{i,q}(t) \sigma_{k,q}(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \sum_{q=1}^p \sigma_{k,q}(t) dZ_q(t)$$

Avec : $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ est la période entre deux réajustements,

$\sigma_{k,q}(t)$ est la composante de la volatilité attribuable au q -ième facteur.

Les paramètres de volatilité du modèle LMM sont déterminés en référence aux volatilités implicites des swaptions échangés sur le marché à la date de calibrage, de telle façon que la somme de l'écart quadratique entre les volatilités implicites des swaptions et les volatilités empiriques des taux zéro coupon associés soit la plus faible possible.

Pour l'utilisation du modèle LMM, il est nécessaire de l'implémenter par simulation de Monte Carlo. Une simulation Monte Carlo d'un processus stochastique permet de créer un échantillon aléatoire pour ce processus. A l'aide de cet échantillon, il est possible de faire des estimations, plus il y aura de trajectoires simulées plus les estimations seront justes. Dans le modèle de CNP Assurances, ce sont 1000 simulations sur 50 ans avec un pas annuel qui sont utilisées.

- Principe de la simulation de Monte Carlo en univers risque neutre.

La méthode de Monte Carlo s'appuie sur la loi forte des grands nombres² :

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq N} f(X_k) \xrightarrow{P.S.} E(X_1)$$

Avec : $f \in L^1$ c'est-à-dire $f: E(|f(X_1)|) < +\infty$,

$(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Un actif dérivé a pour support la variable de marché S et délivre un payoff à la date T . En supposant que la variable de marché sous-jacente S suit le processus suivant³ :

$$dS(t) = \mu \times S(t) \times dt + \sigma \times S(t) \times dZ(t)$$

Avec : μ la rentabilité espérée,

σ la volatilité,

Z est un processus de Wiener.

¹ Chapitre 31, Hull J. *Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition*, Pearson, 2011

² Chapitre 8, Lambertson D., Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipse, 1997

³ Chapitre 20, Hull J. *Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition*, Pearson, 2011

La vie de l'option est divisée en N intervalles de durée Δt , ce qui permet de simuler la trajectoire suivie par S^1 :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \times \Delta t + \sigma \times \varepsilon \times \sqrt{\Delta t} \right]$$

Avec : $S(t)$ est la valeur du sous jacent à la date t ,
 ε est une variable normale centrée-réduite.

Ainsi, il est possible de simuler la valeur de S à chaque date. La valeur de S à la date Δt ($S(\Delta t)$) est déterminée à partir de la valeur d'origine de S , la valeur de $S(2\Delta t)$ est déterminée à partir de la valeur de $S(\Delta t)$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une trajectoire complète. Le modèle LMM est appliqué aux trajectoires obtenues de cette manière.

- Le modèle de Vasicek à deux facteurs

C'est le modèle qui permet d'obtenir les taux réels dans le générateur de scénarios économiques. Le taux réel est la différence entre le taux d'intérêt nominal et l'inflation, c'est le taux d'intérêt après élimination de l'inflation. Ce modèle permet d'avoir un taux réel négatif alors que le taux d'intérêt nominal est toujours positif. Le modèle de Vasicek à deux facteurs est caractérisé par deux équations différentielles stochastiques.

Le processus risque neutre pour le taux d'intérêt court terme est le suivant ²:

$$dr_t = \alpha_1 (m_t - r_t) dt + \sigma_1 dZ_1(t)$$

Le niveau de retour à la moyenne m suit le processus stochastique :

$$dm_t = \alpha_2 (\mu_t - m_t) dt + \sigma_2 dZ_2(t)$$

Avec : r_t est le taux d'intérêt court terme en t ,
 α_1 et α_2 sont les vitesses de retour vers la moyenne,
 m_t est le taux moyen à moyen terme,
 μ_t est le taux moyen à long terme,
 σ_1 et σ_2 sont les volatilités du taux court terme et du taux moyen terme,
 Z_1 et Z_2 sont deux mouvements browniens indépendants.

Pour ce modèle il existe une formule explicite permettant de retrouver le prix des zéro-coupon de maturité T à la date t^3 :

¹ Chapitre 20, Hull J. Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition, Pearson, 2011

² Formules issues du guide du générateur de scénarios économiques

³ Formules issues du guide du générateur de scénarios économiques

$$P(t,T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t)r_t - B_2(T-t)m_t]$$

$$\text{Avec : } B_1(s) = \left[\frac{1 - \exp(-\alpha_1 s)}{\alpha_1} \right]$$

$$B_2(s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{1 - \exp(-\alpha_2 s)}{\alpha_2} - \frac{1 - \exp(-\alpha_1 s)}{\alpha_1} \right]$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \times \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2\alpha_1^2} \right) + B_2(s)\mu - \frac{\sigma_1^2 B_1(s)^2}{4\alpha_1}$$

$$+ \frac{\sigma_2^2}{2} \left[\frac{s}{\alpha_2^2} - 2 \frac{(B_2(s) + B_1(s))}{\alpha_2^2} + \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \times \frac{(1 - \exp(-2\alpha_1 s))}{2\alpha_1} \right. \\ \left. - \frac{2\alpha_1}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \times \frac{(1 - \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2)s))}{(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \times \frac{(1 - \exp(-2\alpha_2 s))}{2\alpha_2} \right]$$

Le taux zéro-coupon pour chaque scénario dans t années de maturité T-t années est déterminée par :

$$R(t,T) = - \frac{\ln(P(t,T))}{T-t}$$

Ainsi, pour déterminer le taux zéro-coupon de maturité T-t ans dans t années, il suffit de connaître le taux court et le taux d'intérêt moyen terme dans t années. Grâce aux projections des taux court et moyen terme réalisé à l'aide du Libor Market Model, nous pouvons calculer la courbe des taux pour chaque scénario et pour chaque instant t.

Pour calibrer le modèle de Vasicek, les paramètres de moyenne de taux long et moyen terme ainsi que les paramètres de vitesse de retour à la moyenne sont ceux qui minimisent la somme des écarts quadratiques entre la courbe des taux réels de référence publiée par l'EIOPA et celle produite par le Libor Market Model.

Quand le taux réel et le taux nominal sont obtenus, il est possible de déterminer également l'inflation :

$$1 + R = \frac{1 + T}{1 + I}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1 + T}{1 + R} - 1$$

Avec : I est le taux d'inflation,
R est le taux réel,
T est le taux nominal.

Les coûts unitaires seront annuellement frappés du taux d'inflation.

- Le modèle de Black-Scholes

Concernant la modélisation des actions, c'est le modèle Black-Scholes qui est utilisé, c'est un modèle de référence mis en place en 1973. Ce modèle repose sur plusieurs hypothèses dont les suivantes :

- Le marché fonctionne en temps continu
- Absence d'opportunité d'arbitrage
- L'évolution du prix suit un mouvement brownien.

L'évolution du prix suit le processus suivant¹ :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dB(t)$$

Avec : S(t) le prix de l'action à l'instant t,

μ et σ sont deux constantes représentant respectivement l'espérance de rentabilité de l'action et la volatilité du cours de l'action,

B(t) est un mouvement brownien standard.

La solution explicite à cette équation est la suivante² :

$$S(t) = S(0) \times \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times t + \sigma \times B(t)\right\}$$

Où : S(0) est le cours de l'action observé à la date 0.

Le cours de l'action S(t) se détermine à l'aide de la fonction d'accroissement suivante :

$$S(t + dt) = S(t) \times \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times dt + \sigma \times \sqrt{dt} \times Z\right\}$$

Avec : Z est une loi normale N(0,1).

Selon ce modèle, S(t) suit une loi log-normale, c'est-à-dire que ln(S(t)) suit une loi normale :

$$\ln(S(t)) \sim \mathcal{N}\left[\ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times t; \sigma^2 \times t\right]$$

¹ Chapitre 2, Planchet F., Thérond P.E., Juillard M. *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition*, Economica, 2011.

² Chapitre 4, Lambertson D., Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipse, 1997

La volatilité σ des actions est déterminée à partir des volatilités implicites des calls sur l'Euro Stoxx 50 (indice boursier au niveau européen regroupant 50 sociétés de la zone Euro), et l'espérance de rentabilité est issue du modèle des taux nominaux. Le taux des dividendes des actions est fixe et égal à 2,5%.

- Scénarios de marché

Le générateur de scénarios économiques permet d'obtenir 1000 scénarios de marché. Un scénario de marché est composé :

- d'une courbe des taux nominaux (générée par le modèle LMM) qui donne le paramètre de l'espérance de rendement des actions utilisé dans le modèle Black-Scholes permettant d'obtenir l'indice croissance des actions ; cet indice sert à calculer la valeur boursière des actions
- d'une courbe des taux réels (générée par le modèle Vasicek) qui avec celle des taux nominaux permettent de déduire l'inflation.

Lorsque ces données d'actifs sont connues, elles sont appliquées au portefeuille pour le faire évoluer avec les données du passif et ainsi déterminer les résultats futurs.

2. Le portefeuille d'actifs

Dans le modèle retenu dans le cadre du mémoire, une méthode d'achat-vente d'actifs est modélisée tout comme la revalorisation des contrats. Dans cette sous-partie, ces méthodes vont être présentées, ainsi que la méthode d'obtention de la production financière.

- La méthode d'achat vente d'actifs

L'achat et la vente d'actifs se fait en deux étapes, la première se déroule en milieu d'année et la deuxième en fin d'année.

Pour la première étape, le modèle évalue le montant à investir. Ce montant correspond à la trésorerie de début d'année à laquelle viennent s'ajouter les flux des actifs (dividendes, coupons...) et les prestations (rachats et décès) viennent diminuer ce montant. Si ce montant est positif alors le modèle effectue des achats d'actifs. Dans cette phase, ce sont des obligations de maturité 3 ans qui sont achetées. Au contraire, si ce montant est négatif, alors il sera nécessaire de vendre une partie des actifs. Les actifs vendus en priorité sont les actifs monétaires et les obligations de maturité 1 an. Si la vente de ces actifs n'est pas suffisante, alors il faudra céder les autres types d'actifs sauf les actifs immobiliers et les caps. Les actifs immobiliers seront cédés en dernier recours, mais les caps sont vendus seulement pour neutraliser la réalisation de moins values sur la Réserve de Capitalisation.

La deuxième étape consiste à un réajustement de la quantité d'actions, en effet si le montant des actions dépasse la valeur cible de la stratégie financière alors le modèle procédera à une vente du surplus d'actions.

- Les produits financiers

Le modèle calcule la production financière, celle-ci est obtenue à partir des différents revenus. Les revenus pourront être des dividendes ou des coupons du fait des actifs investis sur les marchés financiers, des loyers en cas de biens immobiliers ainsi que des plus values réalisées non affectables à la réserve de capitalisation, nettes des moins-values réalisées. La production financière se calcule comme suit :

$$Prod_fi_min = Prod_fi_hors\ plus\ values\ réalisées + Plus-values\ réalisées$$

Avec : Prod_fi_min est la production financière minimum,

Plus-values réalisées sont les plus-values réalisées automatiquement sur SICAV et actions,

Prod_fi_hors plus values réalisées est la production financière hors plus-values, elle se calcule comme suit :

$$Prod_fi_hors\ plus\ values\ réalisées = Revenus\ (loyers + dividendes + coupons) + \\ Delta_amortissement\ actuariel + Delta_ICNE$$

Avec : Revenus qui sont les revenus des différentes sources,

Delta_amortissement actuariel est la variation de l'amortissement actuariel,

Delta_ICNE est la variation des intérêts courus non échus.

Les revenus provenant des loyers viennent des biens immobiliers possédés par CNP Assurances au titre de ses portefeuilles assurés, et qui sont mis en locations. Les coupons sont les revenus qui viennent de la détention d'obligation. Une obligation versera chaque année un coupon, sauf dans le cas des obligations zéro coupon. Pour les obligations zéro coupon, les intérêts seront capitalisés jusqu'à l'échéance, la rémunération d'une obligation de ce type vient de l'écart entre la valeur d'achat et la valeur de remboursement. Un coupon se calcule comme suit :

$$C = k \times Vn \times N$$

Avec : C est la valeur du coupon annuel,

k est le taux d'intérêts nominal annuel,

Vn est la valeur du nominal de l'obligation,

N est le nombre d'obligations.

Les actions et les OPCVM ne versent pas de coupon mais des dividendes. Voici la méthode de calcul d'un dividende :

$$D_t = IndiceDiv_t * VBours_{t-1}$$

Avec : D_t la valeur du dividende versé à la date t,

$IndiceDiv_t$ correspondant à l'indice de marché auquel est associé le titre à l'instant t,

$VBours_{t-1}$ est la valeur boursière du titre à la date t-1.

Pour calculer la variation de l'amortissement actuariel, il faut déterminer au préalable la valeur d'amortissement :

$$VAmor_t = \left(\sum_{i=1}^N \frac{F_i}{(1+r)^{T_i}} \right) * VRemb_t$$

Où : $VRemb_t$ est la valeur de remboursement en t,

r est le taux actuariel à l'achat,

F_t est le flux de l'année t, ce flux ne se calcule pas de la même manière suivant que le taux est fixe ou variable.

Dans le cas d'un taux fixe le flux se calcule de la façon suivante :

$$\begin{cases} F_i = (1+C)^{\frac{1}{p}} - 1 & \forall i = 1, \dots, N-1 \\ F_N = (1+C)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Avec : C le montant du coupon,

N la maturité du titre,

p la périodicité (p=1 pour une périodicité annuelle, p=2 pour une périodicité semestrielle...).

Dans le cas d'un taux variable le flux se calcule de la façon suivante :

$$\begin{cases} \tilde{F}(T_i) = (1 + R_s(T_i, \theta) + a)^{\frac{1}{p}} - 1 & \forall i = 1, \dots, N-1 \\ \tilde{F}(T_N) = (1 + R_s(T_N, \theta) + a)^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

Avec : $R_s(T_i, \theta)$ est le taux correspondant au sous-jacent (S) de maturité θ_i du taux variable,

a correspond à la marge additive,

$\tilde{F}(T_i)$ est le flux qui sera touché à la date T_i .

Le flux est dit variable, car en t, la valeur de $R_s(T_i, \theta)$ est inconnue, ce sont les taux forwards issus de la courbe à laquelle $R_s(T_i, \theta)$ appartient qui sont utilisés. Le taux forward correspondant au sous-jacent S de maturité θ_i se calcule comme suit pour chaque date de flux T_i :

$$f(t, T_i, T_i + \theta) = \left(\frac{(1 + R_s(t, T_i + \theta))^{T_i + \theta}}{(1 + R_s(t, T_i))^{T_i}} \right)^{\frac{1}{\theta}} - 1$$

Le calcul des flux variables en t, se calcule de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_i = (1 + f(t, T_i, T_i + \theta) + a)^{\frac{1}{P}} - 1 \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \\ F_N = (1 + f(t, T_N, T_N + \theta) + a)^{\frac{1}{P}} \end{cases}$$

La variation de l'amortissement actuariel est la suivante :

$$\text{Delta_amortissement actuariel} = V\text{Amor}_t - V\text{amor}_{t-1}$$

Pour déterminer la variation des intérêts courus non échus (ICNE) d'un titre, il faut au préalable calculer les ICNE :

$$ICNE_t = \left[\left(1 + \frac{C_t}{V\text{Remb}_t} \right)^{T-t} - 1 \right] * V\text{Remb}_t$$

Où : C_t est la valeur du coupon de l'année t ,
 $V\text{Remb}_t$ est la valeur de remboursement de l'année t ,
 T est la maturité du titre.

La variation des ICNE est la suivante :

$$\text{Delta_ICNE} = ICNE_t - ICNE_{t-1}$$

Ceci a permis de déterminer la production financière minimum, si des plus-values latentes subsistent sur les actifs non-obligataires, celles-ci pourront être réalisées en fonction des contraintes portant sur le passif. La production financière maximum qui pourra être dégagée sur le portefeuille d'actif est la suivante :

$$\text{Prod_fi_max} = \text{Prod_fi_min} + \text{Plus_values_latentes (sur actifs non-obligataires)}$$

La production financière distribuée sera comprise entre Prod_fi_min et Prod_fi_max .

- La revalorisation des contrats

Le modèle retenu permet de modéliser la revalorisation attribuée aux contrats et son impact sur le niveau des rachats en fonction de l'environnement économiques, c'est-à-dire en fonction de chaque scénario. Pour les rachats conjoncturels, le fonctionnement sera présenté dans la partie suivante « La modélisation du passif ».

Comme la méthode d'achat-vente, la revalorisation des contrats est faite en deux phases. Une première phase a lieu en milieu d'année et une autre en fin d'année.

La première phase a lieu en milieu d'année car les sorties (rachats et décès) sont supposées s'effectuer à ce moment là. Les sorties sont revalorisées d'un pourcentage du taux servi aux contrats présents au 31/12 de l'exercice précédent.

La phase de fin d'année nécessite plus de calculs. Dans un premier temps, les produits financiers sont calculés nets des intérêts crédités au taux minimum garanti (TMG) et de la participation aux bénéfices pour les contrats sortis en milieu d'année et uniquement net des intérêts crédités aux TMG pour les contrats encore en stock en fin d'année. Ensuite, les chargements minimums sur encours et sur produits financiers sont calculés. Puis c'est la charge de participation aux bénéfices au-delà du TMG qui est calculée. La cible de revalorisation pour le calcul de la participation aux bénéfices est de 90% de la moyenne sur quatre ans du taux moyen d'emprunt d'Etat (TME), ce sont les trois derniers exercices et l'exercice en cours qui sont utilisés pour la moyenne. Lorsque ces éléments sont obtenus, le modèle compare le montant des produits financiers nets aux chargements et à la participation aux bénéfices. Dans le cas où les produits financiers sont suffisants, la participation aux bénéfices cible est servie et au lieu de verser des chargements minimums c'est les chargements cibles qui seront versés. Les taux de chargement cibles sont ceux qu'on souhaite prélever s'il y a assez de richesse, alors que les taux minimums correspondent aux chargements qu'on souhaite absolument prélever. Le taux de chargement minimum peut être nul. Si après ces versements, il reste de la richesse alors la provision pour excédent est dotée. A l'inverse, si les produits financiers sont insuffisants pour satisfaire les contraintes des contrats, des réalisations de plus values latentes sur les actions, l'immobilier et les SICAV sont mises en œuvres. Si cette opération ne suffit pas, il y aura une réduction de la participation aux bénéfices. Et dans le cas où cette réduction de la participation aux bénéfices ne suffit toujours pas, alors une perte est constatée, impactée sur la provision globale de gestion étudiée.

2. La modélisation du passif

Pour effectuer la modélisation du passif, il est nécessaire d'utiliser des lois de mortalité et de rachats afin d'avoir une estimation des sorties qui vont se réaliser au cours des années de projections. Avant de présenter les différents mécanismes de la modélisation du passif, ce sont les lois de mortalité et de rachats qui vont être détaillées.

1. La loi de mortalité

En l'absence d'une table d'expérience spécifique au périmètre étudié (contrats d'épargne en phase de constitution), la meilleure estimation de la loi de mortalité est la même que celle utilisée actuellement pour le calcul de PGG en Solvabilité 1. C'est la table de référence TF 00-02, avec un abattement des taux de 15% et sans décalage d'âge (cf fig n°4).

2. La loi de rachats

Dans la modélisation du passif, plusieurs types de rachats existent. Il y a les rachats structurels qui sont indépendants de l'évolution des marchés financiers et les rachats conjoncturels qui en sont dépendants. La loi de rachats sera composée de ces deux types de rachats :

$$\text{Total des rachats} = \text{Rachats structurels} + \text{Rachats conjoncturels}$$

- Les rachats structurels

Les rachats structurels sont composés des rachats totaux et des rachats partiels. Les lois de rachats utilisées dans ce modèle s'expriment en fonction de l'ancienneté du contrat. Ce n'est donc pas la même loi que celle utilisée pour le calcul de la PGG en Solvabilité 1, en effet la loi utilisée en Solvabilité 1 est celle qui imposée par le Code des assurances, considérée comme moins représentative de la réalité pour un calcul en Best Estimate.

La loi de rachats totaux est construite sur 10 ans d'historique, les données extraites sont le nombre de polices en début d'année ainsi que le nombre de rachats par génération de souscription. Les données des différents exercices comptables sont agrégées par ancienneté du contrat. Ainsi, il est possible d'obtenir un taux de rachat à partir de la formule suivante :

$$\text{Taux de rachat} = \frac{\text{Nombre de rachats}}{\text{Nombre de contrats en début d'année}}$$

Si l'historique ne permet pas d'estimer le taux de rachats pour certaines anciennetés, alors le produit se voit attribuer la loi de rachat du portefeuille global, ou du portefeuille restreint pour conserver des contrats d'épargne comportant des caractéristiques similaires.

Voici un graphique avec des lois de rachats de certains produits, toutes les lois ne sont pas représentées sur ce graphique pour permettre une meilleure lecture.

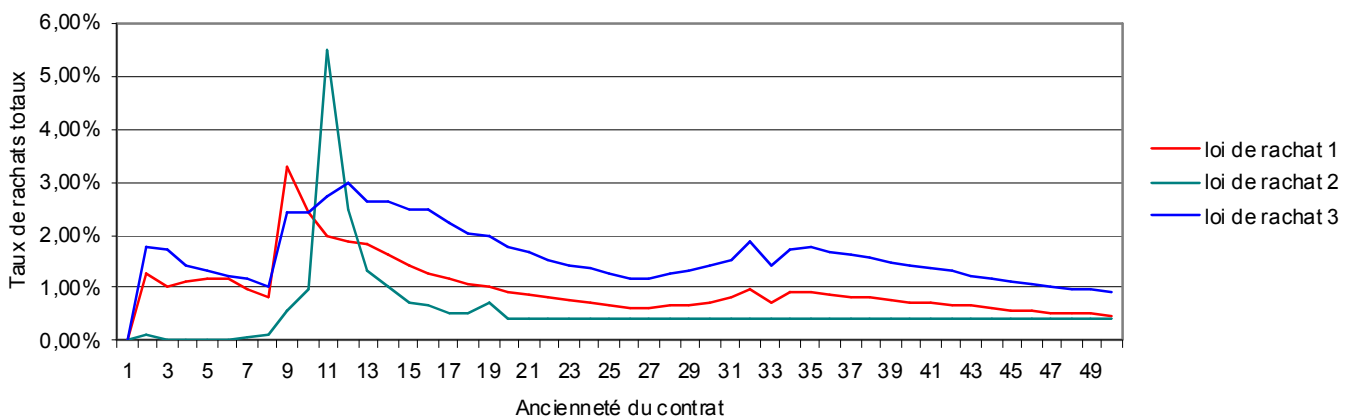


Fig n°7 : Loi de rachats totaux de trois produits

Sur ce graphique, il est possible de constater une augmentation des taux de rachats à partir de la huitième année d'ancienneté, ce qui correspond à la défiscalisation partielle des produits générés par les contrats d'assurance-vie, puis une diminution constante à l'exception d'une augmentation vers 30 et 35 années d'ancienneté qui pourrait correspondre avec le départ en retraite des assurés. Au bout de 50 ans d'ancienneté, le taux de rachat passe à 100%, pour prendre en compte la totalité des frais de sorties. Les flux intervenant au-delà de cette durée représentent environ 5% du total des flux corrigé de l'effet de bord lié au dérapage de la production financière de certains scénarios sur les dernières années de projection.

La loi des rachats partiels est construite en se basant sur un historique de trois ans et demi. Seules les données réellement significatives vont être retenues, c'est-à-dire lorsque l'assiette de calcul (la somme des encours sur l'historique de trois ans et demi) du taux de rachat partiel est supérieure au seuil de 100 000€. Lorsqu'il y a des données manquantes il est nécessaire de prolonger la loi, cela s'effectue de la manière suivante : pour les valeurs manquantes « à gauche », le taux de rachat partiel sera celui calculé sur la totalité du portefeuille. Pour les valeurs manquantes « à droite », il faut procéder à l'évolution du dernier taux de rachat partiel connu selon le même profil d'évolution du taux de rachat partiel du portefeuille. Si les taux estimés sont non significatifs, alors le produit se verra attribuer la loi du portefeuille global.

Voici un graphique avec des lois de rachats de certains produits, toutes les lois ne sont pas représentées sur ce graphique pour permettre une meilleure lecture.

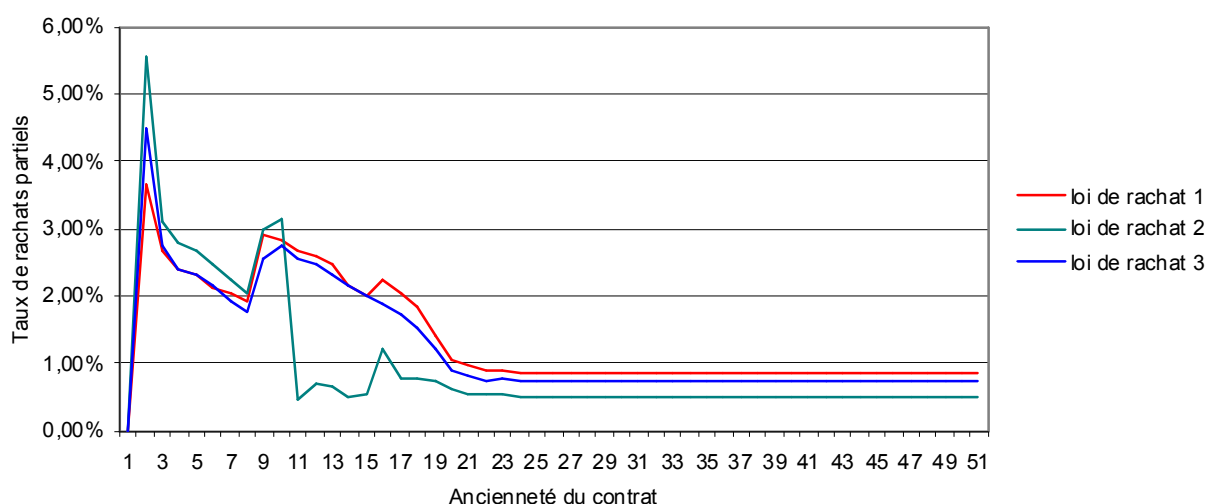


Fig n°8 : Loi de rachats partiels de trois produits

Les rachats partiels interviennent principalement durant les premières années du contrat.

- Les rachats conjoncturels ou « dynamiques »

Les actifs mis en représentation des engagements de l'assureur, de par leur taille et leur ancienneté, présentent une relative inertie par rapport aux variations du marché. Il peut donc

arriver en cas d'évolution défavorable de ceux-ci, que les taux de rendement fournis par les contrats soient inférieurs à ceux procurés par des supports trouvés ailleurs sur le marché.

La loi de rachat conjoncturel modélise le fait pour un assuré, si certaines conditions liées aux marchés financiers sont vérifiées, de résilier son contrat et de réinvestir ses avoirs « à l'extérieur ».

Le principe est d'appliquer un coefficient à l'écart entre le TGR de l'année précédente et la moyenne des derniers TME qui vont définir ce coefficient. Le taux de rachat conjoncturel est plafonné.

$$RC = \text{Min}(RC_{\text{max}}, a \times \text{Max}(0, \text{Ecart}_{t,n}))$$

Avec : RC_{max} est le taux de rachat maximum,
 a est un coefficient multiplicateur,
 Ecart est fonction du TGR et du TME :

$$\text{Ecart}_{t,n} = c \times \frac{\sum_{j=1}^n TME_{t-j}}{n} - b - TGR_{t-1}$$

Avec : TME_{t-j} le taux moyen d'emprunt d'Etat de l'année t-j,
 TGR_{t-j} est le taux global de rendement de l'année t-j,
 b est le seuil de déclenchement des rachats conjoncturels (écart entre TGR et moyenne des TME est compris entre 0% et 5%)
 c est la part du TME à prendre en compte,
 n est le nombre d'année d'historique pris en compte pour la moyenne du TME

Cette loi présente l'avantage de rester simple et de ne pas déformer la structure initiale de la loi de taux de rachat.

3. Les étapes de la modélisation

La modélisation se fait en trois grandes étapes, qui ont lieu en début de période, en milieu de période et en fin de période. Dans cette étude la période est de un an, ces trois étapes sont donc réalisées pour chaque année de projection. Les différents éléments calculés au moment de ces trois périodes feront l'objet de cette sous-partie. La notation se basera sur une année de projection qui sera notée t, dans la modélisation elle correspond à l'année en cours, le modèle va tourner de la même manière pour toute les années projetées.

- En début d'année

En début d'année, le modèle calcule plusieurs éléments qui permettent ensuite de dérouler l'année de projection. L'âge des assurés va être calculé pour permettre au modèle d'appliquer sa loi de mortalité par exemple.

$$Age_t = Date_Début_Période_t - Date_Naissance$$

L'ancienneté du contrat permet de savoir si le taux minimum garanti (TMG) s'applique toujours ou non, et permet également d'appliquer la loi de rachat structurel. Le calcul est fait en début de période bien que ce soit la date de fin de période qui est utilisée, ainsi c'est l'ancienneté que va acquérir le contrat au cours de l'année qui est utilisée.

$$Ancienneté_t = Date_fin_Période_t - Date_Souscription$$

$$TMG_t = \begin{cases} TMG & Si \quad Durée_TMG \geq Ancienneté_t \\ 0 & Sinon \end{cases}$$

Pour faire diminuer le nombre de contrats (NbContrats) tout au long de la projection, il faut le calculer en chaque début d'année à partir du nombre de contrats de fin d'année. Il en est de même pour les provisions mathématiques (PM).

$$NbContrats_{début,t} = \begin{cases} NbContrats_{fin,t-1} & Si \quad t \neq 1 \\ NbContrats & Sinon \end{cases}$$

$$PM_{début,t} = \begin{cases} PM_{fin,t-1} & Si \quad t \neq 1 \\ PM_0 & Sinon \end{cases}$$

Avec ces éléments, il est possible de passer aux traitements effectués en milieu d'année.

- En milieu d'année

C'est en milieu d'année que les sorties sont modélisées, il y a donc un certain nombre d'éléments à calculer. Il faut calculer une PM avant les sorties, pour cela il faut déterminer les intérêts crédités (IC) liés au TMG :

$$IC_{1/2,t} = PM_{début,t} \times ((1 + TMG_t)^{\frac{1}{2}} - 1)$$

D'où :

$$PM_{1/2,t} = PM_{début,t} + IC_{1/2,t}$$

Le fait d'avoir la PM de demi-période permet de connaître le montant des décès et des rachats effectués au cours de l'année t. Les décès sont obtenus à partir de la loi de mortalité décrite supra. (cette table est disponible en annexe 2.)

$$q_x = 15\% \times \left(1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}\right)$$

Avec : q_x le taux de mortalité de la table TF00-02 abattue de 15%,
 l_x le nombre de survivants à l'âge x pour la table TF00-02 non abattue.

Avec ces éléments, il est possible de calculer le montant de la prestation associée aux décès et le nombre de décès (NbDécès) de l'année t:

$$\text{Décès}_t = q_x \times PM_{1/2t}$$

$$\text{NbDécès}_t = \text{NbContrat}_{\text{debut},t} \times \frac{\text{Décès}_t}{PM_{1/2,t}}$$

Les rachats totaux se calculent à partir de la loi de rachat structurel auxquels s'ajoutent les rachats conjoncturels. Le taux de rachat pour l'année est :

$$Tx_Rac_Tot_t = \max(Tx_Rac_Tot_Struc + Tx_Rac_Dyn ; 1)$$

Avec : $Tx_Rac_Tot_Struc$ est le taux de rachat total structurel,
 Tx_Rac_Dyn est le taux de rachat conjoncturel.

Le montant des rachats totaux ($RachatsTotaux_t$) ne peut pas excéder le montant de la PM diminuée des prestations de décès.

$$RachatsTotaux_t = \min(Tx_Rac_Tot_t \times PM_{1/2,t}; PM_{1/2,t} - Deces_t)$$

$$NbRachatsTotaux_t = (\text{NbContrat}_{\text{debut},t} - \text{NbDécès}_t) \times \frac{RachatsTotaux_t}{PM_{1/2,t} - Deces_t}$$

Avec le nombre de rachats totaux et le nombre de décès, cela permet d'avoir le nombre de sorties de l'année ($NbSorties_t$).

$$NbSorties_t = \text{NbDécès}_t + \text{NbRachatsTotaux}_t$$

Les rachats partiels sont calculés à partir de la PM de demi-période, le montant des prestations de rachats partiels ne peut pas dépasser le montant de la PM de demi-période diminuée des sorties.

$$RachatsPartiels_t = \min(Tx_Rac_Par_t \times PM_{1/2,t}; PM_{1/2,t} - Sorties_t)$$

Où : $RachatsPartiels_t$ est le montant des rachats partiels de l'année t,
 $Tx_Rac_Par_t$ est le taux de rachat partiel de l'année t.

Ces éléments permettent d'obtenir le montant des sorties et de mettre à jour la PM de demi-période.

$$Sorties = Décès_t + RachatsTotaux_t + RachatsPartiels_t$$

$$PM_{1/2,t} = PM_{1/2,t-1} - Sorties_t$$

Dans ce modèle, il n'y a pas d'entrée car l'étude se fait en run-off, donc il n'y a pas de nouveaux contrats ni de versements sur un contrat.

- En fin d'année

En fin d'année, il est nécessaire de calculer les intérêts crédités au cours de la deuxième demi-période, pour déterminer les intérêts crédités sur toute l'année.

$$IC_{2/2,t} = PM_{1/2,t} \times ((1 + TMG_t)^{\frac{1}{2}} - 1)$$

$$IC_t = IC_{1/2,t} + IC_{2/2,t}$$

C'est en fin d'année que les frais de sorties et de gestion sont calculés à l'aide de coûts unitaires déterminés à partir d'un historique de trois ans.

$$FraisSorties_t = (NbDécès_t + NbRachatsTotaux_t) \times CU_Sortie \times Inflation$$

$$FraisGestion_t = NbContrat_{fin,t} \times CU_Gestion \times Inflation$$

Avec : CU_Sortie est le coût unitaire des sorties,
 CU_Gestion est le coût unitaire de gestion des contrats,
 Inflation est l'inflation pris en compte pour le calcul des frais :

$$Inflation = \prod_{k=Année(1)}^{Année(t)} (1 + Tx_Inflation_k)$$

Où : Année(t) est l'année de la période courante t,
 Année(1) correspond à l'année de la date de début de la simulation (t = 1),
 Tx_Inflation_k est le taux d'inflation de l'année k.

Les chargements et commissions sont également calculés en fin d'année. Les taux de chargement et de commission sur encours sont définis contractuellement. Pour les chargements et commissions sur encours, il faut au préalable calculer l'encours moyen (*EncoursMoyenPassif_t*):

$$EncoursMoyenPassif_t = \frac{IC_{fin,t}}{TMG_t}$$

$$ChgtEncours_t = Tx_ChgtEncours \times EncoursMoyenPassif_t$$

Avec : *ChgtEncours_t* est le montant des chargements sur encours de l'année t,
TxChgtEncours est le taux de chargements sur encours.

$$CommEncours_t = Tx_CommEncours \times EncoursMoyenPassif_t$$

Avec : *CommEncours_t* est le montant des commissions sur encours de l'année t,
TxCommEncours est le taux de commissions sur encours.

Pour les chargements et commissions sur production financière, les taux sont également contractuels ; la méthode de calcul de la production financière a été décrite dans la partie modélisation de l'actif.

$$ChgtProdFi_t = Tx_ChgtPr odFi \times ProdFi_t$$

Avec : *ChgtProdFi_t* est le montant des chargements sur les produits financiers de l'année t,
TxChgtProdFi est le taux de chargements sur les produits financiers,
ProdFi_t sont les produits financiers de l'année t.

$$CommProdFi_t = Tx_CommProdFi \times ChgtProdFi_t$$

Avec : *CommProdFi_t* est le montant des commissions sur les produits financiers de l'année t,
TxCommProdFi est le taux de commissions sur les produits financiers.

La dernière étape de la modélisation du passif est le calcul de la PM de fin d'année, dans lequel interviennent les intérêts crédités au cours de l'année et la PB qui ont été calculés à l'aide de la stratégie de revalorisation.

$$PM_{fin,t} = PM_{1/2,t} + IC_t + PB_t$$

3. Le Best Estimate

Les éléments calculés dans la modélisation vont permettre d'obtenir le Best Estimate de la PGG. Un résultat est calculé pour chaque année de projection, puis, par un calcul de proche en proche, on obtient le Best Estimate de la PGG.

Il est nécessaire de calculer le résultat financier pour obtenir la PGG :

$$Résultat_Fi_t = ProdFi_t - (IC_t + ChgtEncours_t + ChgtProdFi_t + PB_t)$$

Si le résultat financier est négatif alors les chargements ne pourront pas être prélevés en totalité, ou pas prélevés du tout.

Dans la PGG, les produits qui interviennent sont les chargements sur encours et sur produits financiers. Pour le calcul des produits, il faut tenir compte du résultat financier mais uniquement si celui ci est négatif étant donné que dans ce cas le montant de chargements sera inférieur à celui calculé par le modèle :

$$Produits_t = \max[\min(Résultat_Fi_t; 0) + ChgtEncours_t + ChgtProdFi_t; 0]$$

Les charges seront les commissions ainsi que les frais de sorties et de gestion.

$$Charges_t = FraisSorties_t + FraisGestion_t + CommEncours_t + CommProdFi_t$$

Le résultat de l'année t intervenant dans le calcul de PGG, sera donc :

$$Résultat_t = Produits_t - Charges_t$$

Le résultat pour l'année t est ainsi obtenu, et permet de calculer la PGG. Pour le calcul de proche en proche de la PGG, c'est le résultat de l'année suivante qui est utilisé. Seuls les résultats négatifs viennent impacter le montant de PGG ; les résultats positifs amortissent la PGG générée les années suivantes.

$$PGG_t = \frac{[\min(Résultat_t + PGG_{t+1}; 0)]}{(1 + r_t)}$$

Avec : $PGG_{51} = 0$

r_t est le taux d'actualisation.

Le Best Estimate de la PGG est obtenu à partir des 1000 scénarios :

$$BE_t = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} PGG_{t,i}$$

C'est la moyenne des 1000 scénarios de PGG, un scénario de PGG étant déterminé à partir des flux futurs actualisés.

Partie III : La Risk Margin et la nouvelle provision globale de gestion

Chapitre 1 : La Risk Margin et les SCR (Solvency Capital Requirement)

La Risk Margin est ajoutée au Best Estimate pour l'évaluation des provisions techniques. C'est la composante qui assure une valeur « suffisante » des provisions techniques afin d'honorer les engagements d'assurances et/ou réassurances.

1. Le calcul de la Risk Margin

La Risk Margin (RM) vient en complément du Best Estimate pour la détermination de la provision globale de gestion. Le calcul de la Risk Margin se base sur la méthode Cost of Capital (coût du capital), avec un coût du capital uniforme pour toutes les entreprises, ce taux est révisé périodiquement.

La Risk Margin¹ se calcule à partir du SCR global :

$$RM = CoC \times \sum_{t \geq 0}^T SCR_{RM}(t) \times (1 + r_{t+1})^{-(t+1)}$$

Avec : CoC est le taux annuel du coût du capital (Cost of Capital)

r_t est le taux sans risque de l'année t

T est le nombre d'années de projection

$SCR_{RM}(t)$ est le SCR global de l'année t utilisé pour la Risk Margin

Le SCR global qui est utilisé dans la formule pour la Risk Margin couvre² :

- le risque de souscription,
- le risque de marché résiduel autre que le risque de taux,
- le risque de défaut des contreparties,
- le risque opérationnel.

Ces différents risques ainsi que leurs déterminations seront détaillés par la suite. Voici la formule du SCR pour la Risk Margin³ :

¹ Formule issue de: TP.5.9. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² Draft Implementing measures Solvency II. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 31 October 2011, Article 31 TP 18

³ Formule issue de: SCR1.27. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

Notations : $BSCR_{RM}$ est le Basic Solvency Capital Requirement (capital de solvabilité de base) pour le calcul de la Risk Margin. Il prend en compte le risque de souscription, de marché inévitable et de défaut des réassureurs,
 $nBSCR_{RM}$ est le Basic Solvency Capital Requirement net pour le calcul de la Risk Margin,
 SCR_{Op} est le risque opérationnel,
 Adj est l'ajustement lié au mécanisme d'absorption des pertes des provisions techniques,
 FDB (Future Discretionary Benefits) est le montant de la participation aux bénéfices Futurs.

$$SCR_{RM}(0) = BSCR_{RM}(0) + SCR_{Op}(0) + Adj(0)$$

Avec¹ :

$$Adj(0) = -\min(BSCR_{RM}(0) - nBSCR_{RM}(0))$$

Cela donne:

$$SCR_{RM}(0) = BSCR_{RM}(0) + SCR_{Op}(0) - \min(BSCR_{RM}(0) - nBSCR_{RM}(0); FDB)$$

En supposant que :

$$BSCR(0) - nBSCR(0) < FDB$$

On obtient :

$$SCR_{RM}(0) = BSCR_{RM}(0) + SCR_{Op}(0) - BSCR_{RM}(0) + nBSCR_{RM}(0)$$

$$SCR_{RM}(0) = nBSCR_{RM}(0) + SCR_{Op}(0)$$

Ce sont les SCR nets qui permettent de déterminer le nBSCR. Les SCR nets tiennent compte de la possibilité de modifier la distribution participations aux bénéfices selon les scénarios. Les SCR bruts permettront de calculer le BSCR qui intervient dans le SCR opérationnel.

Les mesures d'application fixent le taux du coût du capital à 6%².

Le taux d'actualisation des SCR futurs, est un taux sans risque qui ne doit pas comprendre de prime d'illiquidité³. En effet, l'entreprise qui souhaiterait reprendre les engagements d'assurances, ne pourra peut être pas acquérir cette prime.

¹ Formule issue de: SCR2.13. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² Draft Implementing measures Solvency II. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 31 October 2011, Article 32 TP 19

³ TP.5.10 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

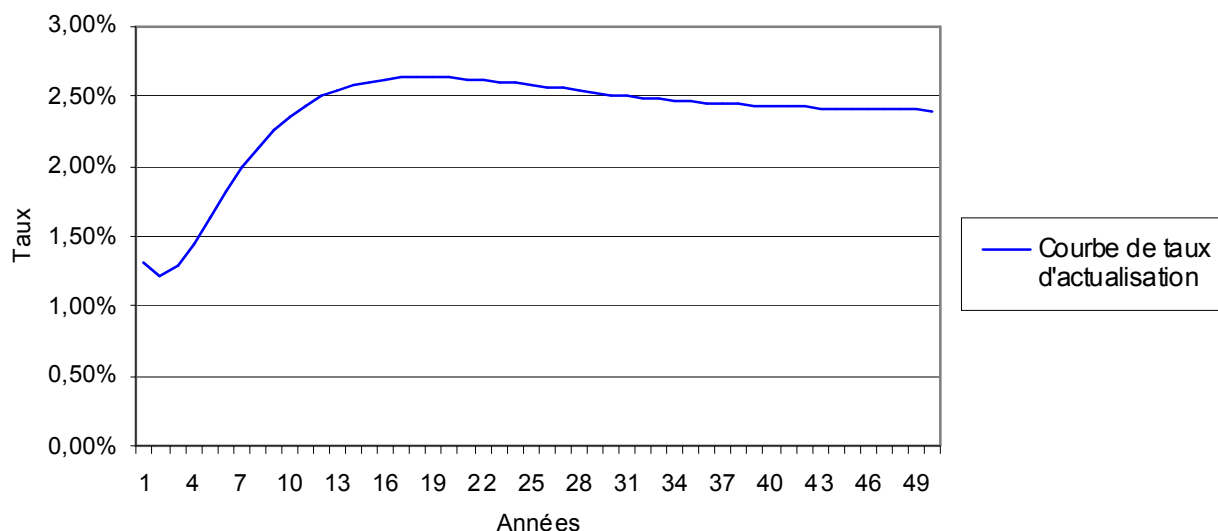


Fig n°10 : Courbe de taux d'actualisation des SCR futurs

Le calcul de la Risk Margin nécessite de projeter le SCR sur la durée de vie maximale des contrats. Cela implique la mise en œuvre de calculs complexes du type stochastique dans le stochastique, étant difficile à mettre en œuvre, l'EIOPA propose une hiérarchie des simplifications qu'il est possible d'appliquer. La hiérarchie¹ suivante donne des calculs de plus en plus simples :

- calcul de tous les SCR futurs sans l'utilisation d'une simplification,
- les SCR futurs sont approximés par un module ou sous-module de risque,
- approximation du SCR global pour chaque année future, par exemple en appliquant une technique proportionnelle,
- estimation de la totalité des SCR futurs « en une fois », par exemple en utilisant une approximation basée sur l'approche de la duration,
- approximation de la Risk Margin en la calculant comme un pourcentage du Best Estimate.

La méthode retenue pour la provision globale de gestion est l'approximation du SCR global en appliquant une technique proportionnelle, en supposant que le ratio $\frac{SCR}{BE}$ est constant toute la durée de projection. La formule pour le $SCR_{RM}(t)$ qui sera utilisée est la suivante² :

$$SCR_{RM}(t) = \frac{SCR_{RM}(0)}{BE(0)} \times BE(t) \quad \forall t = 1, 2, 3, \dots$$

En utilisant cette formule, on obtient les SCR futurs, il est alors possible d'appliquer la formule de la Risk Margin. Il faut dans un premier temps déterminer le $SCR(0)$.

¹ TP.5.32 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² TP.5.41 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

2. Les différents modules SCR

Le SCR est composé de plusieurs modules et sous modules de risque. Voici le schéma des modules de la formule standard¹ :

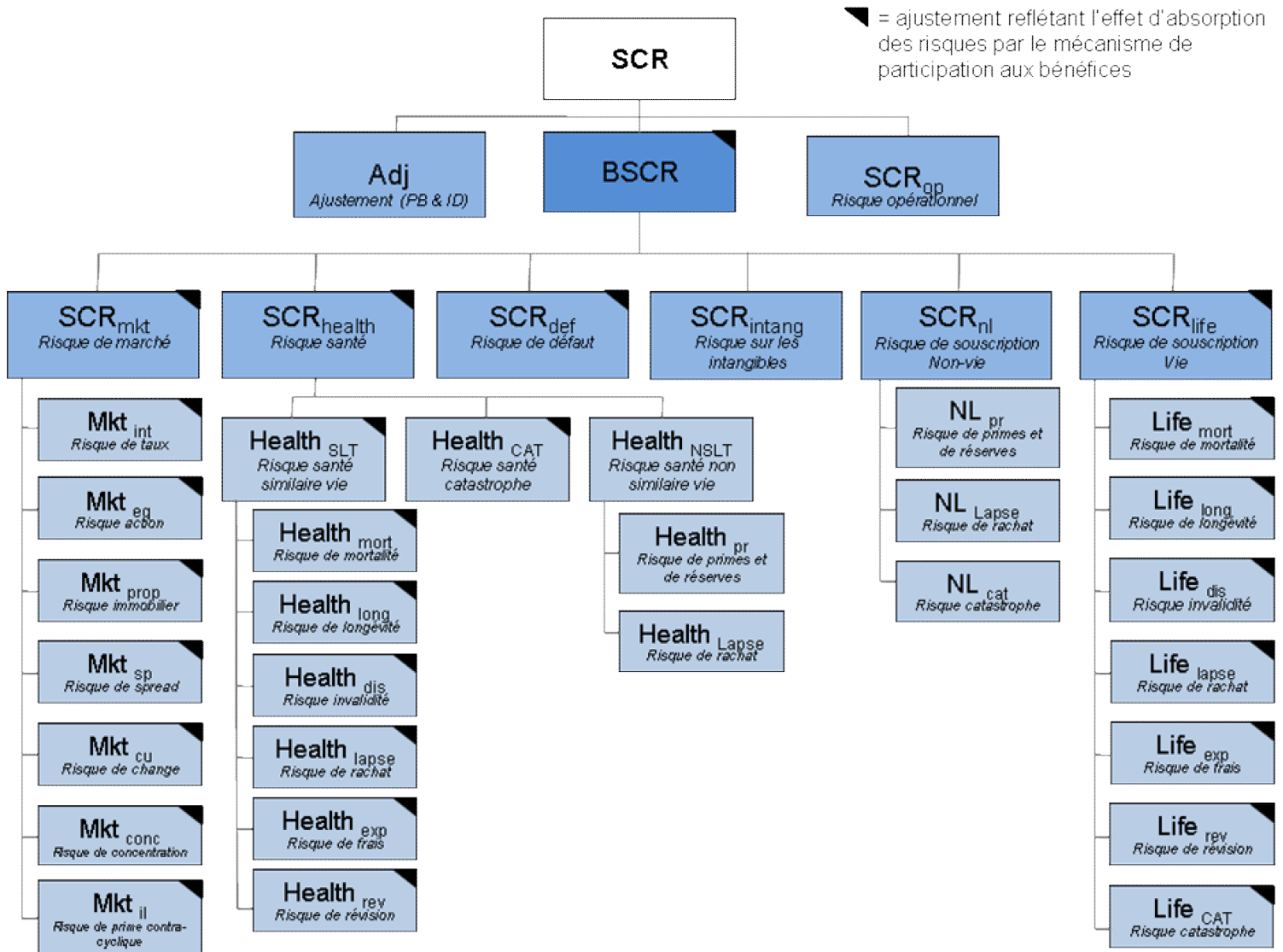


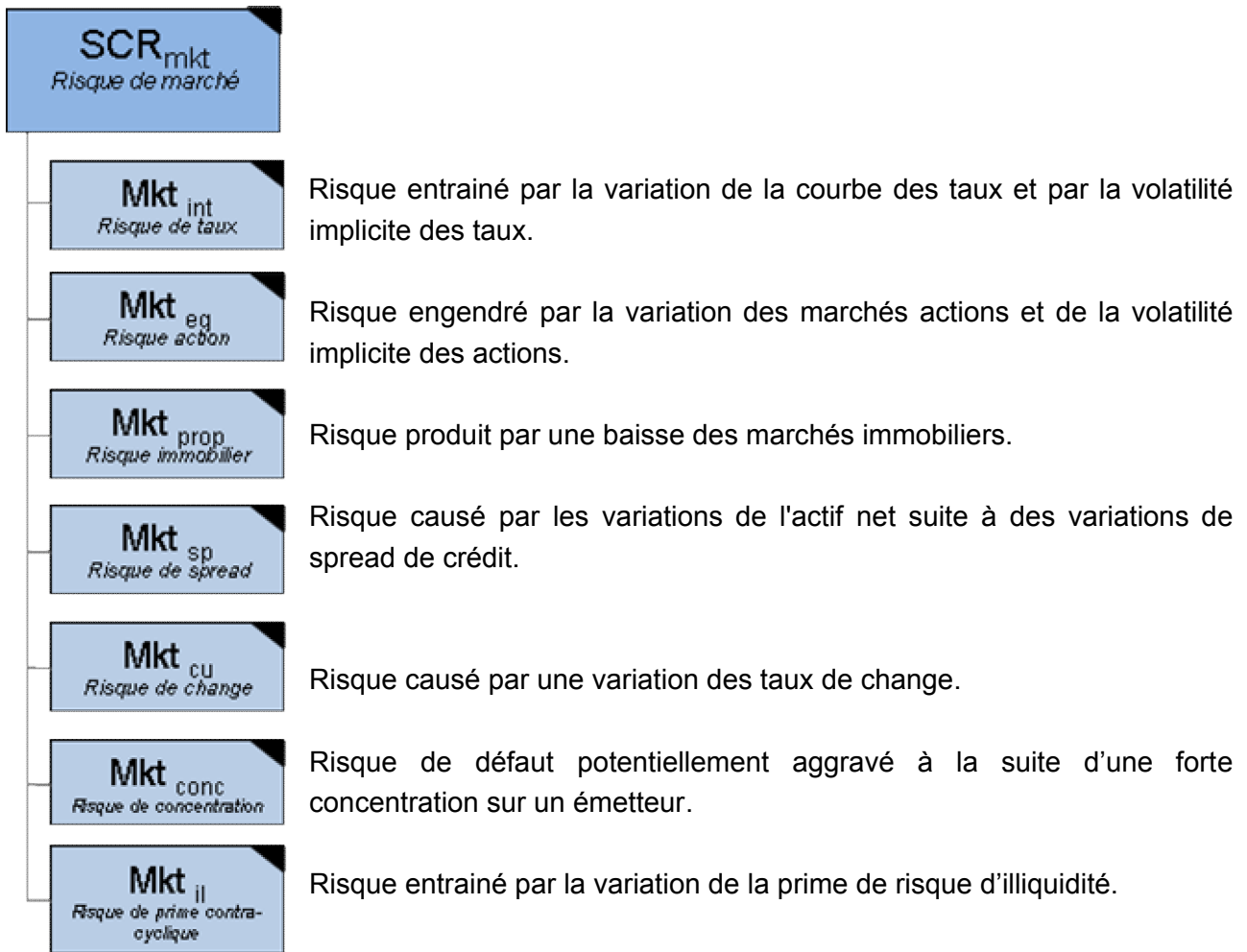
Fig n°11 : Schéma des modules compris dans la formule standard du SCR

Tous les risques couverts par ces modules vont être définis, il sera précisé ceux qui interviennent spécifiquement dans la détermination de la PGG.

1. Le risque de marché

Le besoin en capital au titre du risque de marché (SCR_{mkt}) est obtenu par agrégation, à l'aide d'une matrice de corrélation, des besoins en capitaux relatifs aux sous-modules de marché suivants :

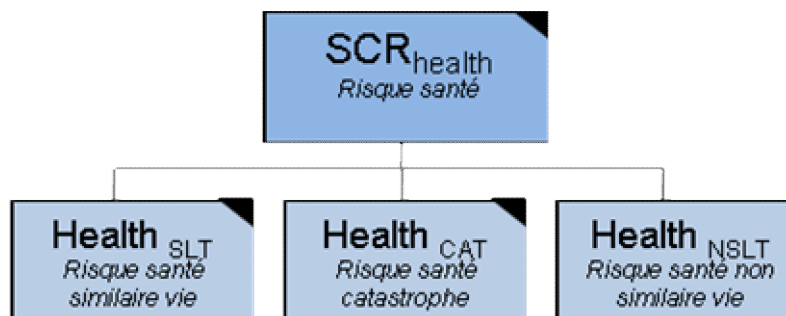
¹ SCR.1.1, QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010



Le risque de marché intervient dans le besoin de capital pour toutes les branches d'activité étant donné que ce risque concerne l'actif.

2. Le risque de souscription santé

Le risque de santé va couvrir des événements couvrant l'intégrité physique ou mentale de l'assuré. Le risque de santé est divisé en 3 catégories, distinction des obligations de santé de type vie, de type non-vie et le risque de catastrophe santé.

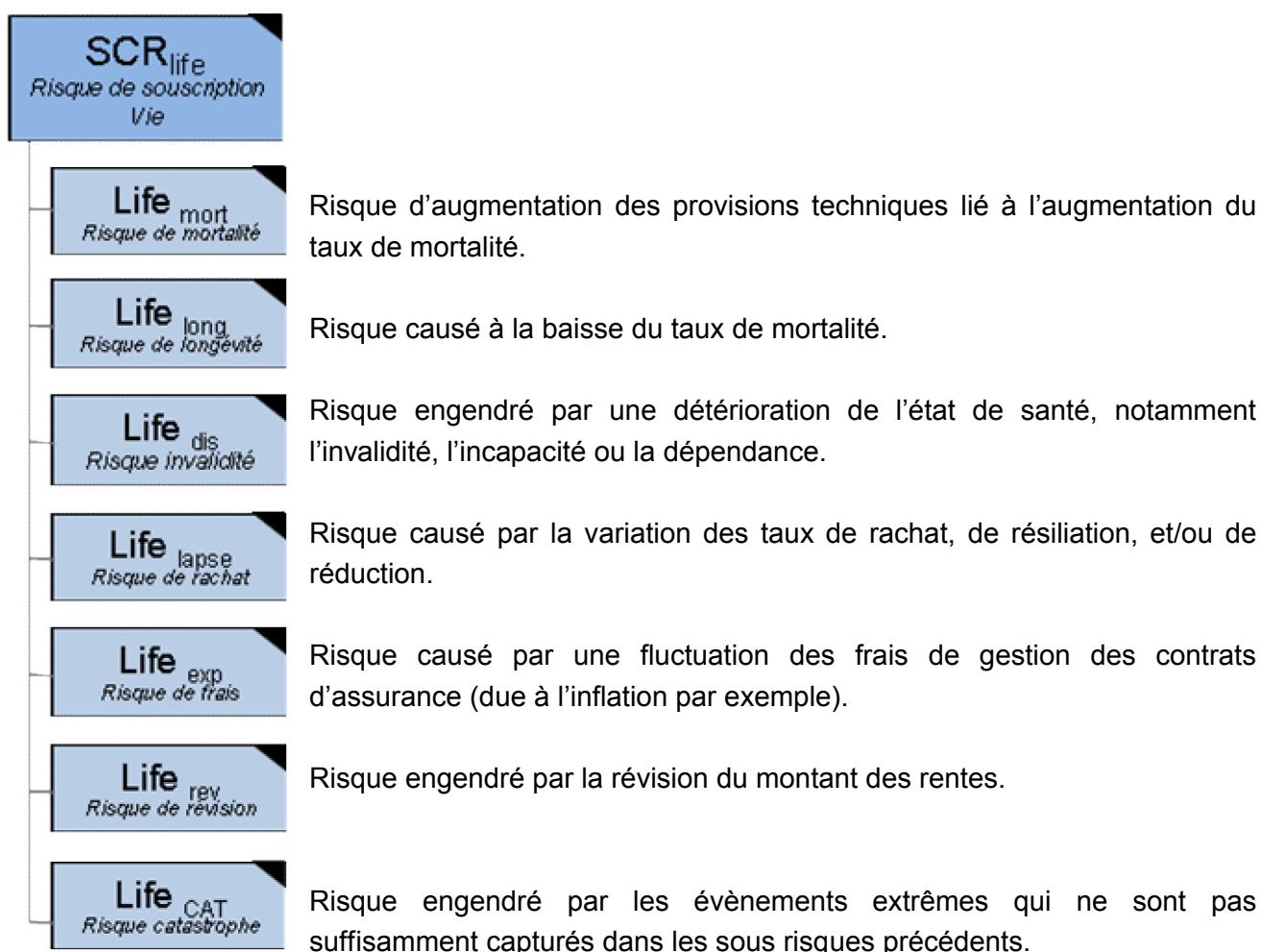


Le sous module de risque des obligations de santé de type vie va couvrir les risques, les méthodes de provisionnement et/ou les méthodes de tarification similaires aux obligations d'assurance vie. Les risques qui ne rentrent pas dans ce sous module vont être dans le module de risque des obligations de santé de type non-vie. Le sous module de risque de catastrophe va couvrir des événements extrêmes et exceptionnels pouvant impacter le risque de santé, tels que le risque de pandémie.

Le module de risque de souscription santé n'intervient pas dans le cadre des contrats épargne.

3. Le risque de souscription vie

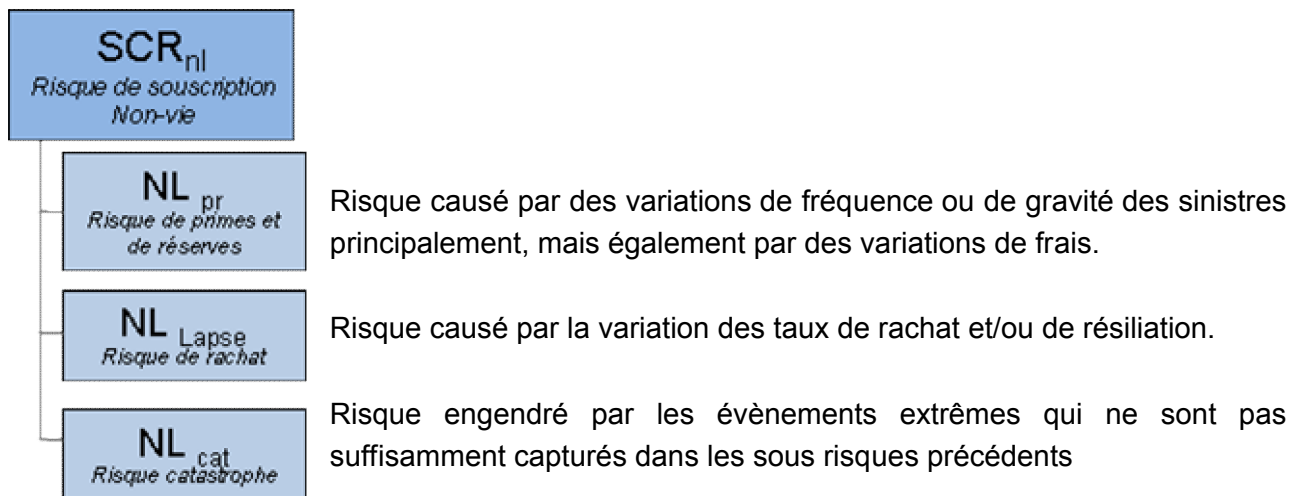
Ce module permet de couvrir les risques de souscription des contrats d'assurance vie. Les risques couverts sont les suivants :



Dans le cas des contrats d'épargne, la détérioration de l'état de santé ne va pas rentrer en compte, les seules sorties possibles sont le rachat et le décès. Le risque engendré par la révision du montant des rentes n'interviendra pas non plus dans le calcul de PGG. En effet seule la sortie des contrats est prise en compte, le fait que ce soit un capital ou une rente qui va être versé ne rentre pas en considération.

4. Le risque de souscription non vie

Ce module permet de couvrir les risques de souscription des contrats d'assurance non-vie. Les risques couverts sont les suivants :



Le risque de souscription non-vie n'intervient pas pour les contrats d'assurances vie épargne, étant donné qu'il n'existe pas d'engagement d'assurance non vie.

5. Le risque de défaut

Le module de risque de défaut permet de couvrir les pertes éventuelles liées au défaut ou à la détérioration du rating d'une contrepartie sur un horizon de 1 an. Ce module couvre les contrats de transferts de risques, les créances sur intermédiaires et toute autre exposition à l'origine d'un risque de crédit non couvert dans le sous-module de risque de spread¹.

6. Le risque sur les actifs intangibles

Ce module de risque a été mis en place pour s'assurer que la totalité des actifs sont choqués. Les actifs intangibles visés sont les brevets, les marques, les logiciels. Le module couvre le risque de marché lié aux actifs intangibles mais également des risques internes, associés à la nature de ces actifs comme le risque d'image par exemple. Dans le cadre des portefeuilles épargne étudiés, CNP Assurances ne possède aucun actif répondant à cette définition, ce module de risque n'a donc pas d'impact sur l'évaluation de la PGG.

¹ SCR.6.1 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

7. Le risque opérationnel

C'est le module qui permet de couvrir le risque d'observer une perte due à une erreur humaine, à un processus interne inadéquat ou à des systèmes informatiques. Ce module inclut les risques juridiques mais exclut les risques stratégiques et les risques de réputation.

8. L'ajustement

L'ajustement permet de prendre en compte l'effet d'absorption des risques par les mécanismes de participation aux bénéfices et d'impôts différés. L'ajustement pour les impôts différés n'est pas pris en compte dans le calcul de la Risk Margin, il est supposé qu'il n'y a pas imposition pour le calcul de la RM.

3. Méthode de calcul du SCR intervenant dans la Risk Margin

Pour les risques intervenants dans la détermination de la Risk Margin, les différents chocs, les méthodes d'agrégation nécessitent d'être détaillés.

1. Le risque de souscription vie

Tous les sous modules de souscription vie n'ont pas forcément un impact pour les contrats d'épargne, par exemple le risque lié à l'invalidité et à l'incapacité n'intervient pas. Voici les chocs¹ des sous modules pris en compte :

- Sous module risque de mortalité :

Le choc à appliquer est une hausse des taux de mortalité de 15%, pendant toute la durée de vie des contrats.

- Sous module risque de longévité :

Le choc à appliquer est une baisse des taux de mortalité de 20%, pendant toute la durée de vie des contrats

- Sous module risque de rachats :

Ce sous module nécessite d'appliquer plusieurs chocs, c'est le choc qui aura l'impact le plus négatif qui sera retenu. Les chocs à appliquer sont une augmentation du taux de rachat de 50%, une baisse du taux de rachat de 50% et une vague massive de rachats de 40% la première année.

¹ Draft Implementing measures Solvency II. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 31 October 2011, Section 3.

- Sous module de risque de frais :

Le choc à appliquer est une augmentation des frais de 10% et une augmentation de l'inflation de 1 point par an

- Sous module de risque de catastrophe :

Le choc à appliquer est une hausse du taux de mortalité de 0,15 % la première année de projection. Normalement, dans ce sous module on a également une hausse du taux d'invalidité, mais dans le cas des contrats épargne cela n'a pas d'impact.

Pour chaque sous module, la valeur du besoin en capital correspond à la différence entre l'actif net (Net Asset Value) avant le choc et l'actif net après le choc. La Net Asset Value (NAV) c'est la différence entre la valeur des actifs et celles des passifs.

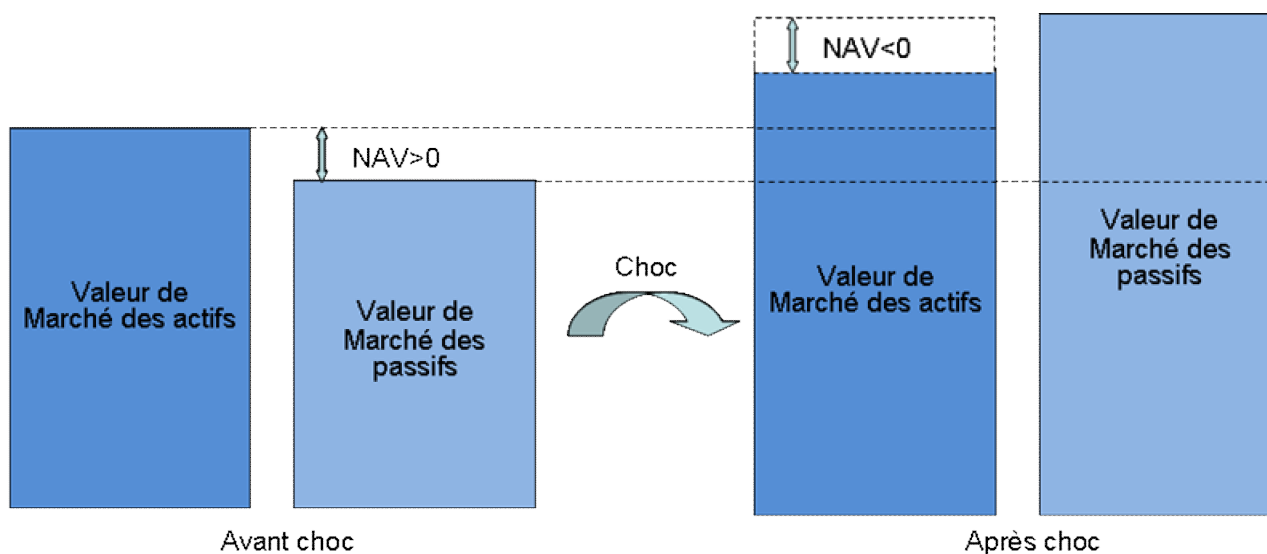


Fig n°12 : Schéma explicatif de la détermination de la Net Asset Value (NAV)

Dans le calcul de la NAV, pour le passif il est toléré qu'il y ait absence de prise en compte de la Risk Margin et des passifs subordonnés¹, pour éviter la récurrence. Dans l'étude, le problème est que la valeur des passifs correspond au Best Estimate calculé uniquement avec les éléments composants la PGG et les actifs sont ceux du portefeuille global (éléments techniques et éléments de gestion). Il y a un écart très important entre l'actif et le passif. Au moment des chocs, l'impact sur l'actif va être beaucoup plus important que sur le passif, ce qui va donner un SCR avec une valeur inadaptée à l'étude. Dans le scénario non choqué, l'actif est supposé être rapporté à la valeur du Best Estimate en scénario central pour éviter que les chocs impactent plus l'actif que le passif.

¹ SCR.1.6. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

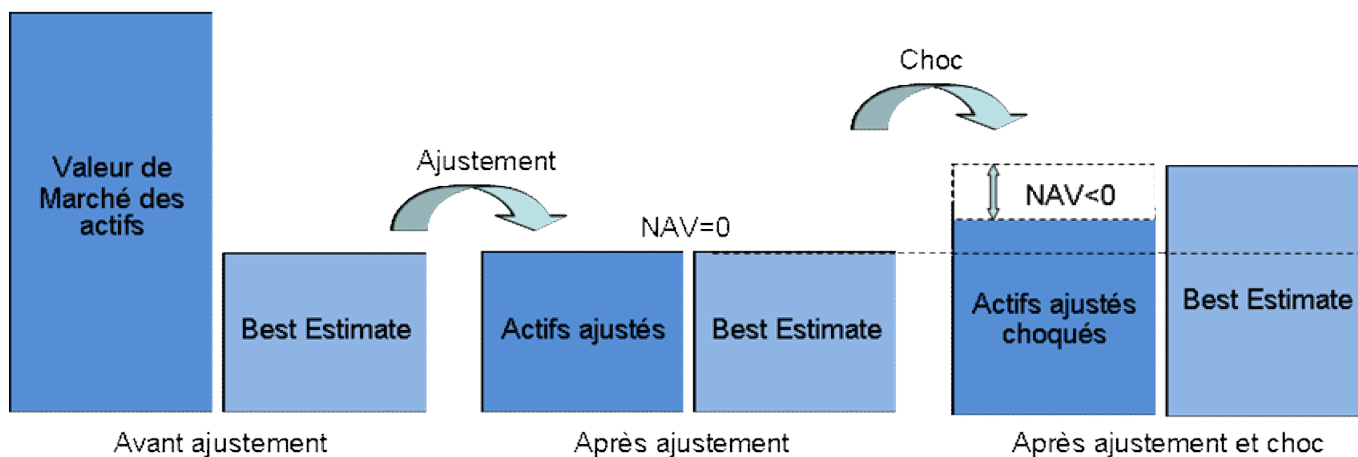


Fig n°13 : Schéma explicatif de l'ajustement

La valeur d'une sous module de risque dans le risque de souscription vie se calcule de la manière suivante :

$$nLife_r = \max(NAV_{AvantChoc} - NAV_{AprèsChoc}, 0)$$

Pour déterminer la valeur du module de risque de souscription vie, il est nécessaire d'agréger les sous modules. Voici la formule d'agrégation :

$$nSCR_{Life} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrLife_{r,c} \cdot nLife_r \cdot nLife_c}$$

Où : $nLife_r$, le capital requis pour le risque r, y compris la capacité d'absorption par le mécanisme de la PB,

$CorrLife_{r,c}$ la matrice de corrélation¹ suivante :

	Mortalité	Longévité	Rachats	Frais	Catastrophe
Mortalité	1	-0.25	0	0.25	0.25
Longévité	-0.25	1	0.25	0.25	0
Rachats	0	0.25	1	0.5	0.25
Frais	0.25	0.25	0.5	1	0.25
Catastrophe	0.25	0	0.25	0.25	1

Fig n°14 : Matrice de corrélation pour le risque de souscription vie
(Uniquement avec les modules de risque retenus)

¹ SCR.1.32, QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

La valeur du module de risque de souscription vie pour la Risk Margin est le $nSCR_{Life}$.

2. Le risque de marché résiduel autre que le risque de taux

Ce risque est lié au fait que le scénario de transfert suppose que la compagnie qui reprend les activités acquiert des actifs qui minimisent le SCR de marché. Ce risque est à prendre en compte normalement. L'institut des actuaires s'oppose à la prise en compte de ce risque¹, étant donné qu'il apparaît comme non justifié et compliqué à mettre en place. De ce fait à CNP Assurances, il est considéré comme nul.

3. Le risque de défaut des contreparties

Dans le cas de la Risk Margin, le risque de défaut des contreparties est uniquement sur les réassureurs. Les portefeuilles étudiés ne font l'objet d'aucune cession, ce risque va donc être nul dans cette étude.

4. Le risque opérationnel

C'est le module qui va couvrir le risque d'observer une perte due à une erreur humaine, à un processus interne inadéquat ou à des systèmes informatiques défaillants. La formule du module de risque opérationnel pour les contrats d'épargne euros est la suivante :

$$SCR_{op} = \min[0.3 \times BSCR; \max(Op_{primes}; Op_{provisions})]$$

Avec :

$$Op_{primes} = 4\% \times Primes\ acquises_n + \max(0; 4\% \times (Primes\ acquises_n - 1.2 \times Primes\ acquises_{n-1}))$$

$$Op_{provisions} = 0.45\% \times \max(0; Provisions\ techniques)$$

Où : $Primes\ acquises_n$ désignent les primes qui ont été versées durant l'année n,
 $Provisions\ techniques$ est le Best Estimate.

Cette formule fait intervenir le Basic SCR (BSCR). Le BSCR couvre les risques de marché, de défaut des contreparties, de souscription et le risque lié aux actifs intangibles. Les risques intervenant dans le BSCR ne sont pas les mêmes que ceux qui interviennent dans le $nBSCR_{RM}$. En effet, on va prendre en compte la totalité du risque de marché et non uniquement le risque de marché inévitable, il en est de même pour le risque de défaut qui ne se limitera pas au seul risque lié aux réassureurs. Dans le cadre de l'étude de la PGG, comme il a été précisé auparavant, tous les modules de risque n'ont pas un impact ; voici les modules qui interviennent :

¹ Institut des Actuaires, Conférence Solvabilité 2, Paris, 1^{er} juillet 2011

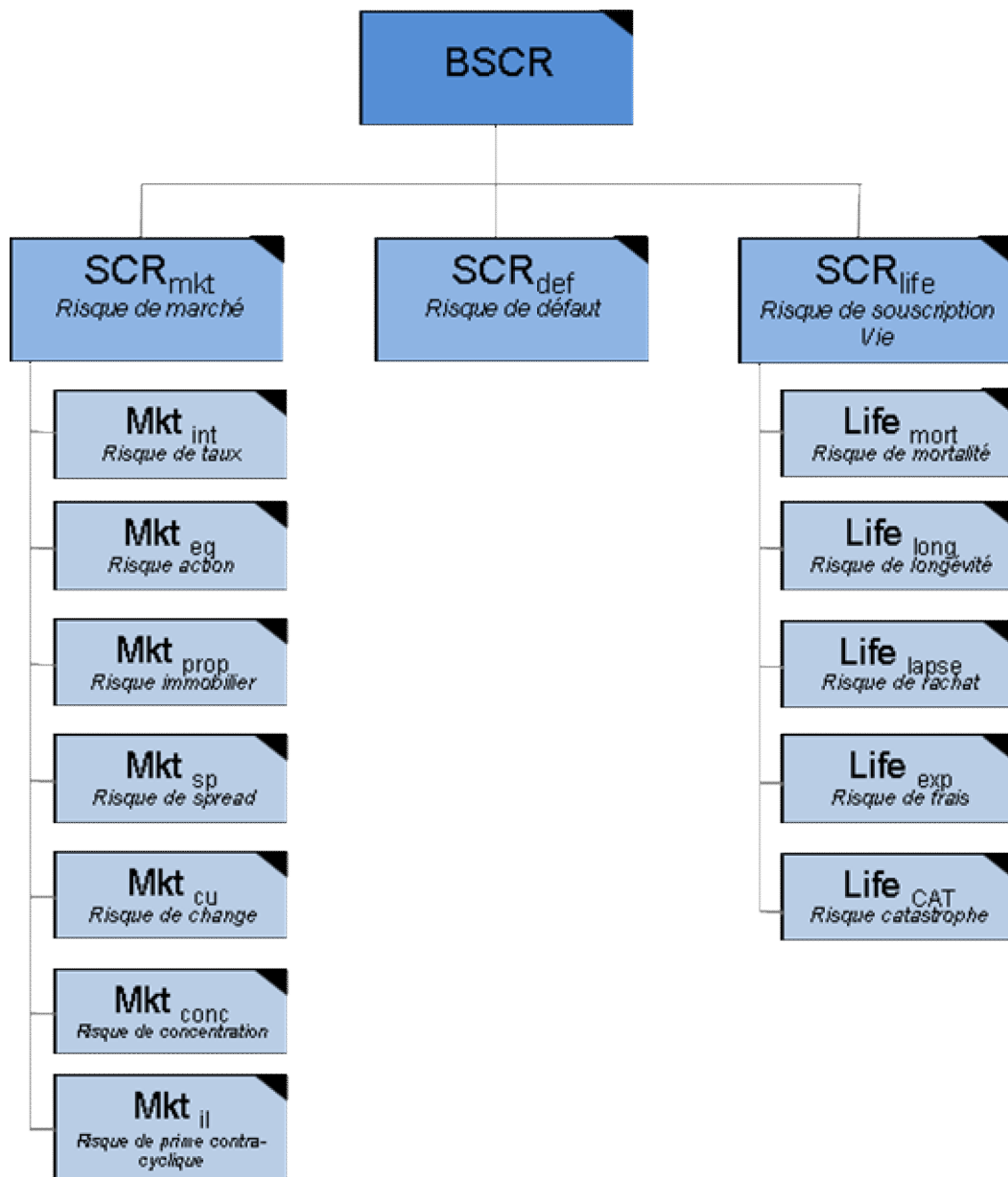


Fig n° 15: Schéma des modules intervenants dans le BSCR dans le cas des contrats d'épargne

Ces sous modules de risque seront agrégés pour obtenir le BSCR. Concernant la détermination du module de risque de souscription vie, son détail a été exposé plus haut, la seule différence étant que le raisonnement se fait avec le SCR brut et non le SCR net. Voici la formule utilisée :

$$SCR_{Life} = \sqrt{\sum_{r,c} CorrLife_{r,c} \cdot Life_r \cdot Life_c}$$

Avec : $Life_r$, le capital requis pour le risque r ,

$CorrLife_{r,c}$ la matrice de corrélation présentée auparavant.

Il reste à détailler la détermination du module de risque de marché ainsi que du module de risque de défaut qui interviennent dans le BSCR dans le cadre des contrats d'épargne.

- Le risque de marché :
 - Sous module risque de taux :

Ce sous module nécessite d'appliquer deux chocs. Les chocs à appliquer sont une variation à la hausse du taux d'intérêts et une variation à la baisse du taux d'intérêts. Les chocs s'expriment en pourcentage du taux initial selon la maturité, ils sont appliqués à la courbe de taux sans la prime d'illiquidité, la prime est rajoutée après le choc. Pour obtenir les courbes de taux modifiées on multiplie la courbe initiale par $(1 + s^{up}(t))$ et $(1 + s^{down}(t))$ où $s^{up}(t)$ et $s^{down}(t)$ sont respectivement les chocs haussiers et baissiers pour les différentes échéances t .

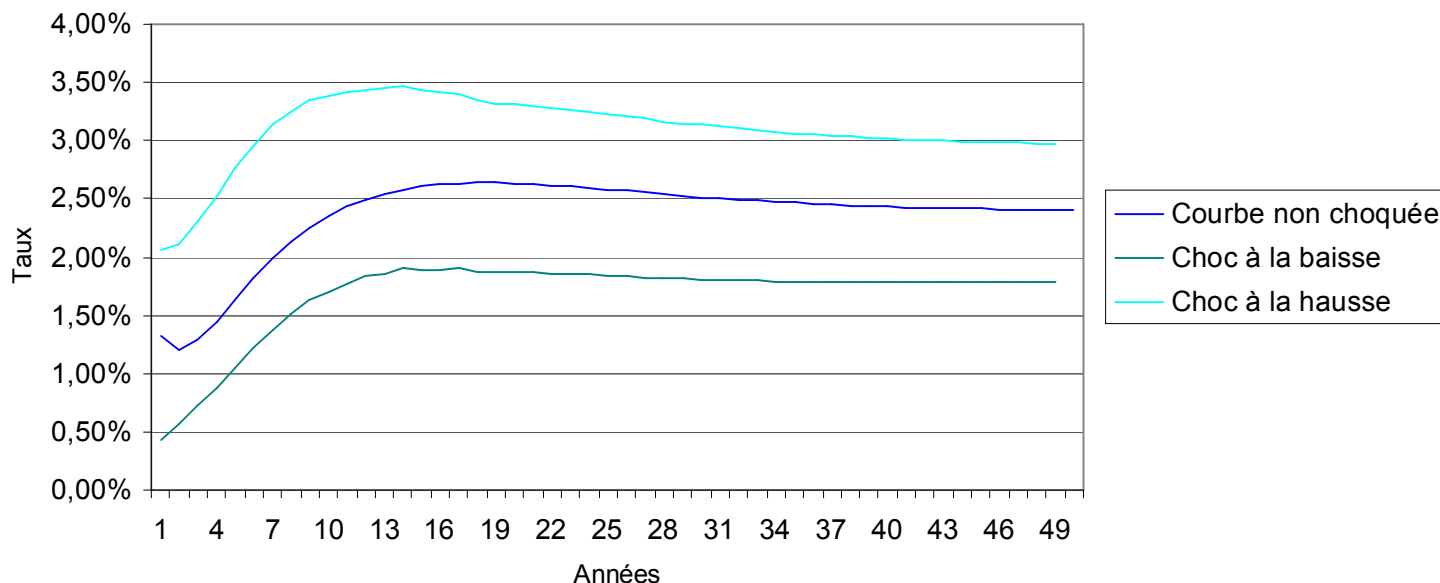


Fig n°16 : Graphique des courbes de taux d'intérêts (sans les primes d'illiquidité)

Le sous module de risque donne deux valeurs, une en cas de hausse (Up) et l'autre en cas de baisse (down), ces valeurs permettront de calculer les SCR marché en état Up et en état Down.

- Sous module risque action :

Les actions sont séparées en deux groupes, les actions de type 1 correspondent aux actions des pays de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Economiques) ou de l'EEA (European Environment Agency ou Agence européenne pour l'environnement) et celles type 2 correspondent aux autres actions. Le choc s'applique sur le niveau des actions, c'est une baisse de 39% pour les actions de type 1 et de 49% pour celles de type 2. Ces chocs peuvent varier de +/- 10% selon le facteur d'ajustement, également appelé Symetric Adjustment (SA). Ce facteur d'ajustement va dépendre du niveau des actions au moment de l'évaluation du SCR par rapport au niveau moyen des actions sur 3 ans. La formule permettant de déterminer le facteur d'ajustement est la suivante¹ :

¹ Article 153 SA, Draft Implementing measures Solvency II. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 31 October 2011.¹

$$SA = \frac{1}{2} \times \left(\frac{CI - AI}{AI} - 8\% \right)$$

Avec : CI est le niveau de l'indice boursier à la date d'évaluation

AI est la moyenne des niveaux quotidien de l'indice boursier sur les 3 dernières années

La NAV est calculée en cas de choc sur les actions de type 1 et en cas de choc sur les actions de type 2. Le coefficient de corrélation entre les deux types d'action étant de 0,75, on a la formule suivante¹ :

$$Mkt_{Equity} = \sqrt{Mkt_{EquityType1}^2 + 2 \times 0.75 \times Mkt_{EquityType1} \times Mkt_{EquityType2} + Mkt_{EquityType2}^2}$$

- Sous module risque immobilier :

Le choc à appliquer est une diminution immédiate de la valeur de l'immobilier de 25%.

- Sous module risque de spread :

Ce sous module permet d'évaluer le risque lié à une baisse ou à une hausse des spreads de crédit (un spread de crédit est l'écart entre le taux de rentabilité actuariel de l'obligation et celui d'un emprunt au taux sans risque de durée identique). Il se décompose en trois parties² :

$$Mkt_{Sp} = Mkt_{Sp}^{Bonds} + Mkt_{SP}^{Struct} + Mkt_{Sp}^{Cd}$$

Avec : Mkt_{Sp}^{Bonds} le besoin de capital concernant le risque de spread lié aux obligations (hors obligation d'Etat),

Mkt_{SP}^{Struct} le besoin de capital concernant le risque de spread lié aux produits structurés de crédit,

Mkt_{Sp}^{Cd} le besoin de capital concernant le risque de spread lié aux produits dérivés de crédit.

Pour les obligations³ :

$$Mkt_{Sp}^{Bonds} = \sum_i MV_i \times duration_i \times F^{Up}(rating_i)$$

Avec : MV_i la valeur de marché de l'exposition au risque de crédit de l'obligation i ,

$Duration_i$ est la durée d'exposition au risque de crédit de l'obligation i ,

$F^{Up}(rating_i)$ est la valeur du choc à appliquer en fonction du rating (valeurs en annexe 7).

¹ Article 149 ER1, Draft Implementing measures Solvency II. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 31 October 2011.

² SCR.5.80. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

³ SCR.5.82 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

Pour les produits structurés :

Pour ces produits, deux types de chocs sont appliqués, un choc direct et un choc indirect. Voici la formule pour le choc direct¹ :

$$Mkt_{Sp,Direct}^{Struct} = \sum_i MV_i \times duration_i \times F^{Up}(rating_i)$$

Avec : MV_i la valeur de marché de l'exposition au risque de crédit,

$Duration_i$ est la durée d'exposition au risque de crédit,

$F^{Up}(rating_i)$ est la valeur du choc à appliquer en fonction du rating (valeurs en annexe 7).

Formule pour le choc indirect² :

$$Mkt_{Sp,Underlying}^{Struct} = \sum_i MV_i \times \frac{(G(rating_i, tenure_i) - attach_i)}{det ach_i - attach_i}$$

Avec : MV_i la valeur de marché de l'exposition au risque de crédit de i,

$G(rating_i, tenure_i)$ est la valeur du choc à appliquer en fonction du rating et de la durée de i (valeurs en annexe 7),

$Attach_i$ est le point d'attachement de la tranche du produit structuré i,

$Detach_i$ est le point détachement de la tranche du produit structuré i.

Le besoin de capital concernant les produits structurés est :

$$Mkt_{Sp}^{Struct} = \max(Mkt_{Sp,Direct}^{Struct}; Mkt_{Sp,Underlying}^{Struct})$$

Pour les produits dérivés de crédit :

$$Mkt_{Sp}^{Cd} = \max(Mkt_{Sp,Up}^{Cd}; Mkt_{Sp,Down}^{Cd})$$

Avec : $Mkt_{Sp,Up}^{Cd}$ la variation de NAV suite à un choc à la hausse,

$Mkt_{Sp,Down}^{Cd}$ la variation de NAV suite à un choc à la baisse.

Les chocs appliqués dépendent du rating, ce sont des hausses ou baisses instantanées. Seules les variations de NAV positives sont retenues, le résultat ne peut pas être négatif.

- Sous module risque de change :

Pour chaque devise étrangère, deux chocs immédiats sont appliqués, un choc de 25% à la hausse et un choc de 25% à la baisse. La valeur retenue pour le besoin en capital sera le choc qui demande le plus de fonds propres pour chaque devise étrangère. Le sous module de risque sera égale à la somme des besoins de capital de chaque devise.

¹ SCR.5.94 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² SCR.5.92. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

- Sous module risque de concentration :

Dans un premier temps on regarde s'il y a un excès de concentration sur chaque émetteur selon la formule suivante¹ :

$$XS_i = \max\left(0; \frac{E_i}{Assets} - CT_i\right)$$

Avec : E_i l'exposition au défaut de la contrepartie i

$Assets$ le montant des actifs considérés dans ce sous module

CT_i (concentration threshold) est le seuil de concentration défini en fonction du rating de la contrepartie (valeurs en annexe 7).

Cette formule permet ensuite de déterminer le risque de concentration par contrepartie² :

$$Conc_i = XS_i \times g_i$$

Avec : g_i le facteur de risque exprimé en fonction du rating de la contrepartie.

Une fois, que le risque est déterminé pour chaque contrepartie on peut déterminer le sous module de risque à l'aide de la formule suivante³ :

$$Mkt_{Conc} = \sqrt{\sum_i (Conc_i^2)}$$

- Sous module risque de prime contra-cyclique:

Le choc appliqué est une diminution instantanée de la prime contra-cyclique (ou prime d'illiquidité) de 100%.

- Obtention du module risque de marché :

Pour les sous module où la formule n'est pas définie auparavant, la valeur du besoin en capital correspond à la différence entre l'actif net (NAV) avant le choc et l'actif net après le choc, qu'on soit en cas de hausse ou de baisse.

$$Mkt_r = \max(NAV_{AvantChoc} - NAV_{AprèsChoc}; 0)$$

Pour déterminer la valeur du module de risque de marché, il est nécessaire d'agrèger les sous modules. Voici la formule d'agrégation :

$$SCR_{Mkt} = \max\left(\sqrt{\sum_{r,c} CorrMktUp_{r,c} \cdot Mkt_{up,r} \cdot Mkt_{up,c}}; \sqrt{\sum_{r,c} CorrMktDown_{r,c} \cdot Mkt_{Down,r} \cdot Mkt_{Down,c}}\right)$$

¹ SCR.5.115. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² SCR.5.116. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

³ SCR.5.117. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

Avec : $Mkt_{up,r}$ la valeur du sous module r en cas de choc à la hausse,

$Mkt_{Down,r}$ la valeur du sous module r en cas de choc à la baisse,

$CorrMktUp_{r,c}$ la matrice de corrélation¹ suivante :

Mkt _{up}	Taux	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Prime Contra-cyclique
Taux	1	0	0	0	0.25	0	0
Action	0	1	0.75	0.75	0.25	0	0
Immobilier	0	0.75	1	0.5	0.25	0	0
Spread	0	0.75	0.5	1	0.25	0	0
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1	0	0
Concentration	0	0	0	0	0	1	0
Prime Contra-cyclique	0	0	0	0	0	0	1

Fig n° 17: Matrice de corrélation pour le risque de marché en cas de choc à la hausse

$CorrMktDown_{r,c}$ la matrice de corrélation² suivante :

Mkt _{down}	Taux	Action	Immobilier	Spread	Change	Concentration	Prime Contra-cyclique
Taux	1	0.5	0.5	0.5	0.25	0	0
Action	0.5	1	0.75	0.75	0.25	0	0
Immobilier	0.5	0.75	1	0.5	0.25	0	0
Spread	0.5	0.75	0.5	1	0.25	0	0
Change	0.25	0.25	0.25	0.25	1	0	0
Concentration	0	0	0	0	0	1	0
Prime Contra-cyclique	0	0	0	0	0	0	1

Fig n° 18: Matrice de corrélation pour le risque de marché en cas de choc à la hausse

La valeur du module de risque de marché est le SCR_{Mkt} .

¹ SCR.1.32 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² SCR.1.32 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

- Le risque de défaut

Dans le QIS 5, deux types d'exposition sont couvertes par le risque de défaut des contreparties. Les expositions de type 1 concernent les contreparties non diversifiables tels que les contrats de réassurances ou des produits dérivés par exemple. Les expositions de type 2 concernent les contreparties diversifiables et souvent sans rating, comme par exemple les dettes des intermédiaires. La formule du sous module de risque est la suivante¹ :

$$SCR_{Def} = \sqrt{SCR_{Def,1}^2 + 2 \times 0.75 \times SCR_{Def,1} \times SCR_{Def,2} + SCR_{Def,2}^2}$$

Avec pour les expositions de type 1² :

$$SCR_{Def,1} = \begin{cases} 3\sqrt{V} & \text{si } \sqrt{V} \leq 5 \cdot \sum_i LGD_i \\ \min(\sum_i LGD_i, 5\sqrt{V}) & \text{sinon} \end{cases}$$

où : V représente la variance de la distribution des pertes en cas de défaut des contreparties
 LGD_i (Loss Given Default) est la perte en cas de défaut de la contrepartie i .

Et les expositions de type 3² :

$$SCR_{Def,2} = 15\% \times E + 90\% \times E_{past-due}$$

Où : E est la valeur des montants recouvrables relevant des expositions de type 2 et qui sont dus depuis moins de 3 mois

$E_{past-due}$ est la valeur des montants recouvrables relevant des expositions de type 2 et qui sont dus depuis plus de 3 mois

Nota : dans cette étude l'effet du risque de défaut retenu est issu de celui calculé par CNP Assurances en décembre 2011, car toutes les données n'étaient pas disponibles au niveau portefeuille.

- L'obtention du BSQR

Les modules de risque sont agrégés pour obtenir le BSQR à l'aide de la formule suivante :

$$BSQR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

¹ SCR.6.11. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² SCR.6.13. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

³ SCR.6.35. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

Avec : SCR_i la valeur du sous module i,
 $Corr_{i,j}$ la matrice de corrélation¹ suivante :

	Marché	Défaut	Vie
Marché	1	0.25	0.25
Défaut	0.25	1	0.25
Vie	0.25	0.25	1

Fig n° 19: Matrice de corrélation des différents modules de risque

Lorsque le BSCR est obtenu, il est facile d'obtenir le SCR_{Op} avec les primes acquises et le Best Estimate.

5. L'obtention du SCR_{RM}

Tous les éléments pris en compte dans le calcul de la RM ont été défini, il ne reste plus qu'à les agréger pour obtenir le SCR_{RM} .

Dans le cadre de l'étude, on a :

$$nBSCR_{RM} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot nSCR_i \cdot nSCR_j}$$

Avec : $Corr_{i,j}$ la matrice précédente,

$nSCR_i$ est le besoin de capital net du risques i.

Etant donné que le risque de marché inévitable et le risque de défaut des réassureurs sont nuls, le $nBSCR_{RM}$ est égal au $nSCR_{Life}$. Avec le SCR_{Op} , la formule est la suivante :

$$SCR_{RM}(0) = nBSCR_{RM}(0) + SCR_{Op}(0)$$

Avec cette formule, il est possible de calculer la RM, avec la formule définie dans la première sous partie de ce chapitre.

¹ SCR.1.32. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

Chapitre 2 : Résultats

Dans cette partie, les résultats vont être présentés, principalement en comparaison avec ceux obtenus en décembre 2011 avec la réglementation de Solvabilité 1. Les limites de cette étude vont également être exposées.

1. Analyse des résultats en comparaison avec ceux obtenus en univers Solvabilité 1

Tous les résultats qui vont être présentés dans cette partie ont été rapportés à une base forfaitaire pour garantir la confidentialité des données. Dans un premier temps, une présentation globale de la PGG va être faite, puis les écarts entre la PGG en Solvabilité 1 et celle obtenue dans cette étude vont être expliqués. La PGG en Solvabilité 1 n'est pas considéré comme un Best Estimate étant donné qu'il n'y a pas de notion d'espérance dans sa définition, de plus certaines règles ne sont pas le reflet de la réalité mais vont être prudentes.

1. Présentation des résultats

L'étude a été faite sur une partie du portefeuille qui génère la majeure partie de la PGG supportée par CNP Assurances. Le périmètre correspond à 83% de ce portefeuille, en retenant les produits présentant les encours les plus élevés, ainsi que ceux garantissant un TMG. Les données utilisées sont celles de décembre 2011, pour établir une comparaison avec la PGG réelle 2011 passée en méthode Solvabilité 1. Rappelons les principales modifications : nous avons utilisé un modèle stochastique sur 50 ans au lieu d'un modèle déterministe sur 20 ans ; le rendement financier n'est plus celui imposé par le Code des assurances mais issu du générateur de scénarios économiques, les rachats ne font plus l'objet d'un abattement, et le modèle ajoute des rachats conjoncturels au déclenchement conditionné par certains contextes de marché.

Dans un premier temps, voici le graphique avec le Best Estimate et la Risk Margin pour le périmètre mis en comparaison avec la PGG en Solvabilité 1 sur ce même périmètre.

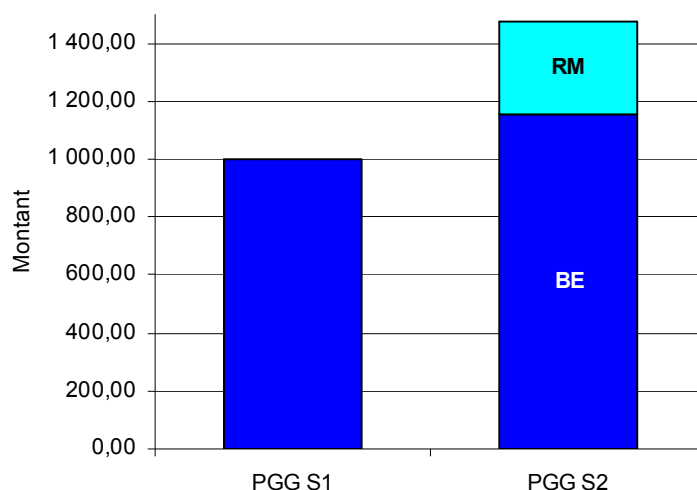


Fig n°20 : Montant de la PGG

Il est possible d'observer une augmentation sensible du montant de la PGG, avant même la prise en compte de la marge pour risque.

Les éléments actuellement imposés par le Code des assurances sont considérés comme excessivement prudents : il était plutôt attendu une diminution de la PGG. Il est donc nécessaire d'expliquer cette augmentation.

Sur le périmètre, on constate une hausse de la PGG, regardons au niveau des produits pour mieux comprendre l'origine de cette évolution. Pour les produits, nous faisons une comparaison uniquement du Best Estimate avec la PGG en Solvabilité 1 étant donnée que la Risk Margin est calculée au global sur le périmètre.

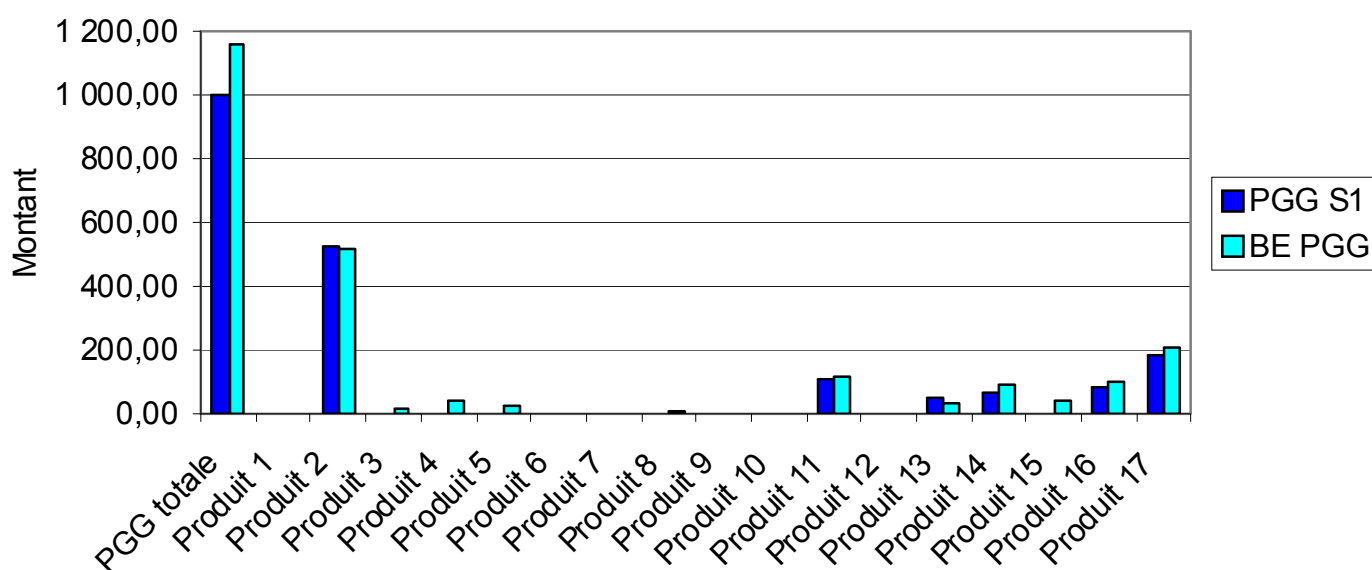


Fig n° 21 : La PGG par produit

Il est possible de constater l'apparition de PGG sur certains produits qui n'en génèrent pas en Solvabilité 1. Les produits pour lesquels une PGG apparait sont des produits comportant un TMG. Cette apparition de PGG vient du fait de la différence entre les courbes de rendement utilisées pendant la durée de projection. Il faut rappeler que la courbe utilisée en Solvabilité 1 est différente d'une compagnie à une autre étant donné qu'elle dépend du portefeuille détenu. En effet, pour les obligations ou titres assimilés hors plus values, ces actifs sont détenus jusqu'à leurs échéances. Les cinq premières années qui suivent l'exercice considéré, le réemploi des coupons et des obligations à échoir se fait à 75% du taux moyen semestriel des emprunts d'Etat. Au-delà des cinq années, le réinvestissement se fait à 60% du taux moyen semestriel des emprunts d'Etat. Pour les autres actifs, le rendement est calculé comme étant 70% du rendement constaté en moyenne, sur l'exercice en cours et les deux précédents, les rendements sont hors plus values du portefeuille obligataire (application stricte de la réglementation). La courbe pour Solvabilité 2 est la moyenne des 1000 courbes de taux de rendements fournie par le générateur de scénarios économiques. Comparons graphiquement la courbe utilisée en Solvabilité 1 avec celle utilisée en solvabilité 2.

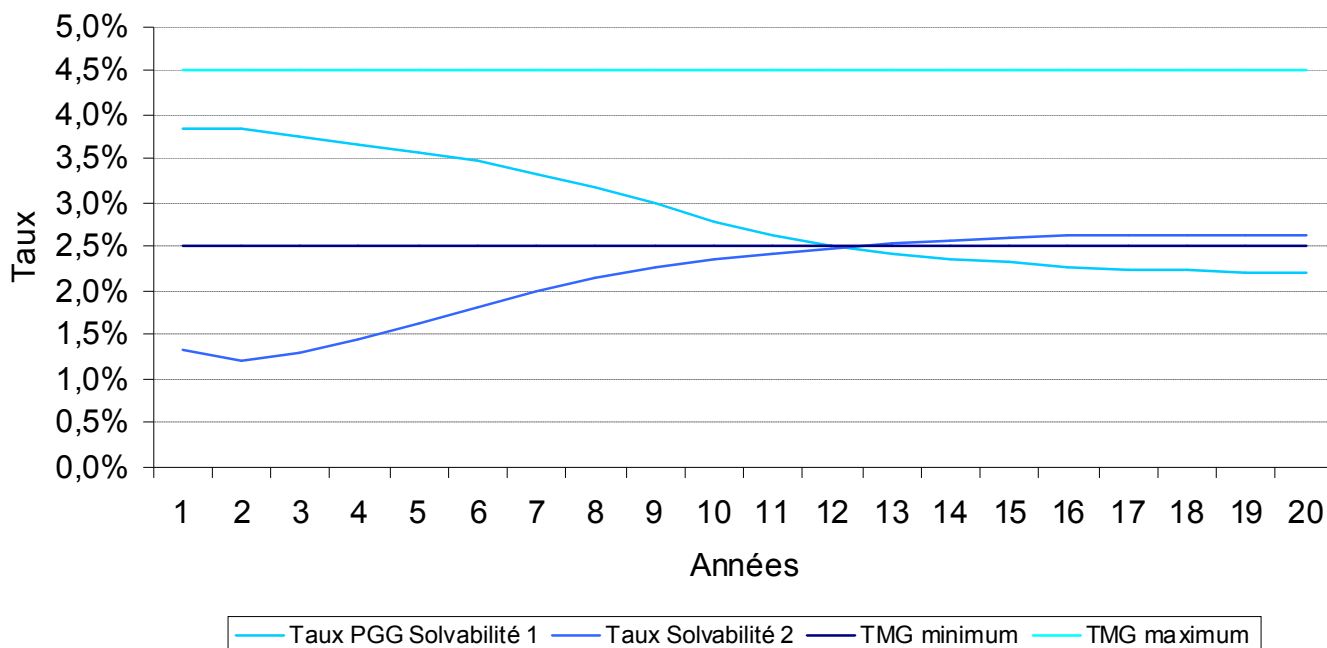


Fig n°22 : Les courbes de taux de rendement

Les TMG sur les produits étudiés sont au minimum de 2,5% et au maximum de 4,5%. Les produits ayant un TMG à 4,5% sont les produits 2, 11 et 17, ils génèrent de la PGG en Solvabilité 1 et en Solvabilité 2. Les 12 premières années de projection, la courbe de taux utilisée pour la PGG Solvabilité 1 est au dessus du TMG minimum, ce qui n'est pas le cas de la courbe utilisée en Solvabilité 2. Pour le Best Estimate de PGG ce sont les premières années de projections qui impactent le plus son montant. En Solvabilité 2, la courbe de rendement ne génère pas assez de produits financiers pour payer les intérêts liés au TMG. Dans ce cas, CNP Assurances ne peut pas prélever les chargements qui constituent les produits dans le calcul de PGG. Les frais non couverts par les chargements non prélevés impactent directement le montant de PGG. Solvabilité 2 apparait comme plus sévère que Solvabilité 1 pour les petits TMG, Solvabilité 1 l'étant déjà pour les TMG élevés.

2. Impact des changements de règles sur un produit

Dans cette partie, quatre produits ont été isolés, ayant chacun, du fait de leurs caractéristiques techniques, des comportements différents face aux modifications d'hypothèses opérées pour effectuer les calculs en univers Solvabilité 2.

Les produits qui font l'objet de cette analyse sont :

- le produit 2 qui génère le plus de PGG, dont le TMG est de 4,5% et qui est plus faible en Solvabilité 2 qu'en Solvabilité 1,
- le produit 4 dont le TMG est de 2,5% et qui ne générerait pas de PGG en Solvabilité 1 mais en génère en Solvabilité 2,

- le produit 14 qui ne comporte pas de TMG et qui fait l'objet d'une augmentation de PGG avec le passage en Solvabilité 2,
- le produit 17 qui est le deuxième à générer le plus de PGG, son TMG est de 4,5% et lui aussi fait l'objet d'une augmentation de PGG.

Ces quatre produits ont des TMG différents et l'impact du changement d'univers n'a pas eu les mêmes effets sur ces produits. Il est intéressant d'étudier ces produits pour bien comprendre les impacts des changements d'hypothèses. L'analyse va être présentée produit par produit, avec d'une part l'évolution sur 20 ans de la PGG projetée au 31 décembre 2011 et d'autre part la mesure des impacts des changements d'hypothèses. Avant cela il est nécessaire de présenter les étapes des changements de ces dernières.

- Les étapes de changements d'hypothèses

L'étude des effets des changements d'hypothèses est effectuée étape par étape, de manière cumulative.

Le premier changement est de passer d'un modèle déterministe, et en passif seul avec une courbe imposée par le Code des assurances à un modèle stochastique et en actif-passif avec la courbe utilisée pour Solvabilité 2. Ce changement est le changement le plus déterminant.

Le deuxième changement est de passer d'un modèle projeté sur 20 ans à un modèle projeté sur 50 ans.

Le troisième changement concerne la table de rachat. A partir de là, ce sont la table de rachat total calculée sur une moyenne de 10 ans et sans abattement et la nouvelle table de rachat partiel qui sont utilisées.

Le dernier changement est de faire racheter les contrats au bout de 50 ans d'ancienneté, cette hypothèse est supposée prendre en compte tous les frais.

- Le produit 2

Le produit 2 a un TMG de 4,5%. Voici l'évolution de la PGG de ce produit sur 20 ans :

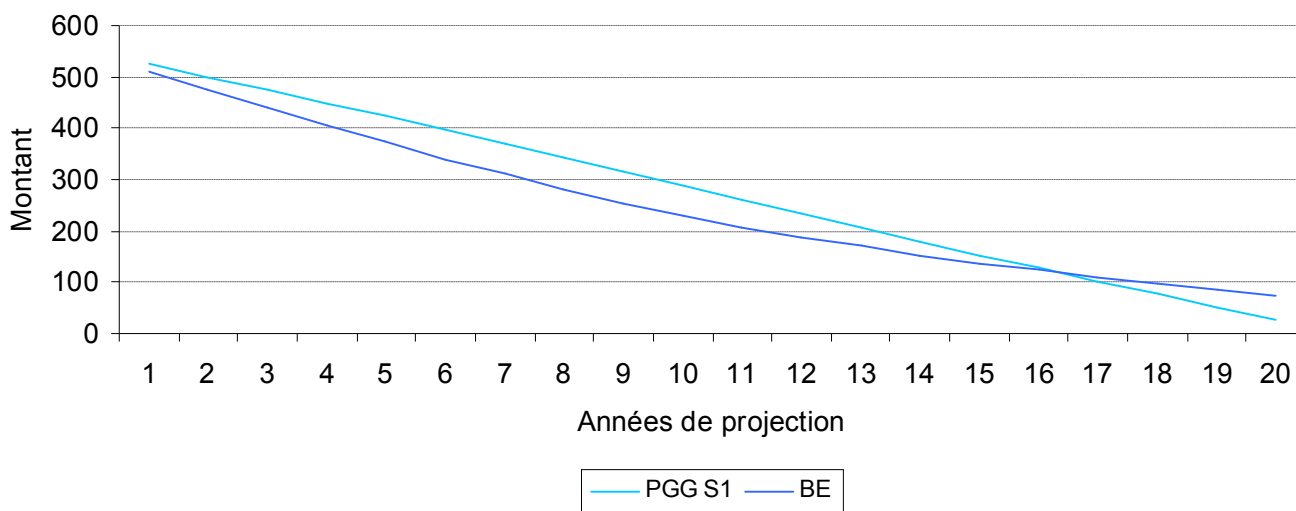


Fig n° 23 : L'évolution de la PGG pour le produit 2

Il est possible de remarquer que les deux courbes sont assez similaires dans le sens où leur décroissance va à la même vitesse bien que la PGG en Solvabilité 1 soit supérieure au BE sauf pour les 3 dernières années. Concernant la courbe de Solvabilité 2, elle représente l'évolution des 1000 scénarios du 31 décembre 2011, en date 2 ce sont les mêmes scénarios 1 an après et non 1000 nouveaux scénarios. Pour comprendre quel élément donne un BE inférieur à la PGG en Solvabilité 1, il est plus intéressant de regarder les impacts des hypothèses.

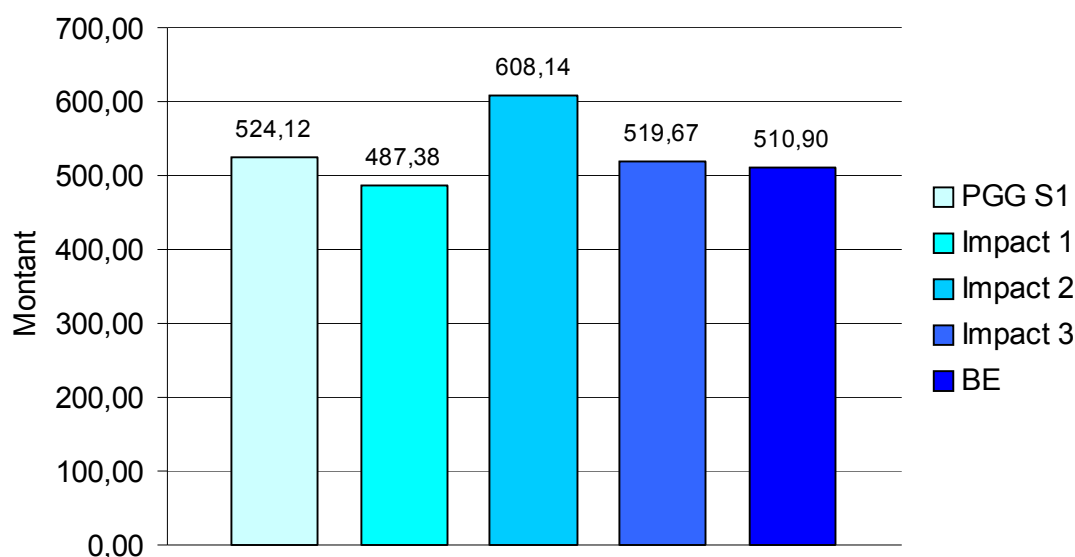


Fig n° 24 : L'impact des changements d'hypothèses sur le produit 2

Le premier constat qu'il est possible de faire pour ce produit est que le changement de modèle va diminuer la PGG, le fait d'avoir un rendement moins important les premières années ne va pas augmenter la PGG, étant donné que les chargements ne pouvaient déjà pas être prélevés en Solvabilité 1. Pour ce produit, c'est l'augmentation du nombre d'années de projection qui va avoir pour impact de produire une PGG plus élevée, cela signifie que ce contrat coûte cher dans le temps. La table de rachat prise pour l'étude en Solvabilité 2 ne fait pas l'objet d'abattement de 20%, et avec cette table on diminue la PGG par rapport au résultat obtenu avec la table de rachat imposée par le Code des assurances. Lorsqu'on fait racheter tous les contrats à 50 ans

d'ancienneté on constate que la PGG diminue. Ces deux derniers constats montrent que pour ce contrat, le fait qu'il perdure dans le temps coûte plus cher à CNP Assurances que s'il était racheté.

- Le produit 4

Le produit 4 a un TMG de 2,5%, et ne génère pas de PGG en Solvabilité 1. Voici l'évolution de la PGG de ce produit sur 20 ans :

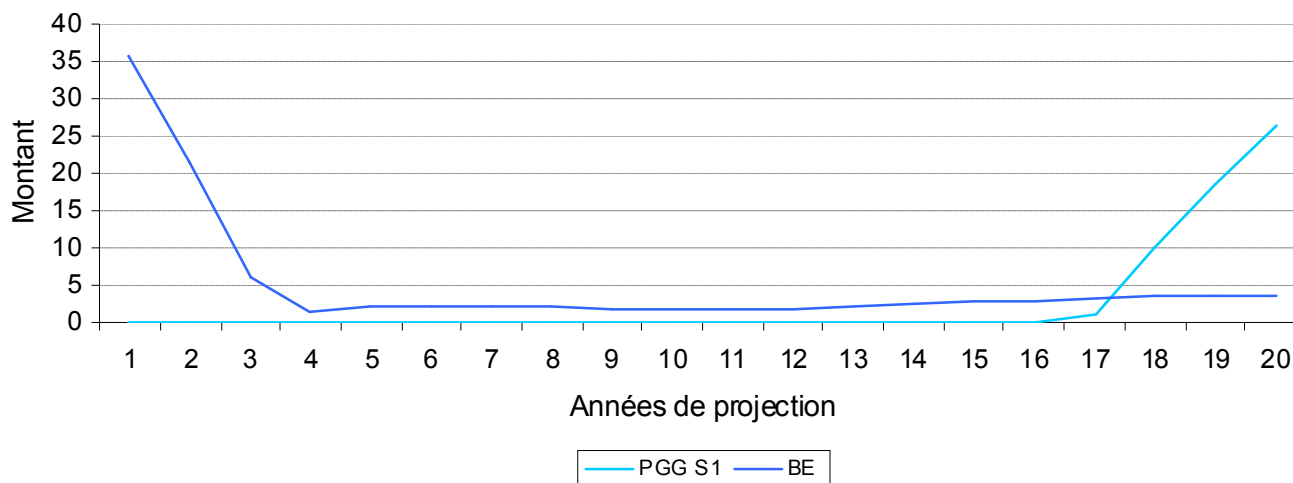


Fig n° 25 : L'évolution de la PGG pour le produit 4

Cette fois, les deux courbes sont très différentes. En Solvabilité 1, de la PGG apparaît les dernières années de projection, c'est le fait de faire racheter tous les contrats la dernière année qui crée de la PGG, mais cette PGG est amortie par les années précédentes où il y a un résultat positif. Alors qu'en Solvabilité 2, la PGG est présente les premières années du fait que la courbe de rendement les premières années est plus faible que le TMG de ce produit. L'étude sur les impacts des changements d'hypothèses va nous montrer si c'est bien le changement de courbe de rendement qui crée de la PGG.

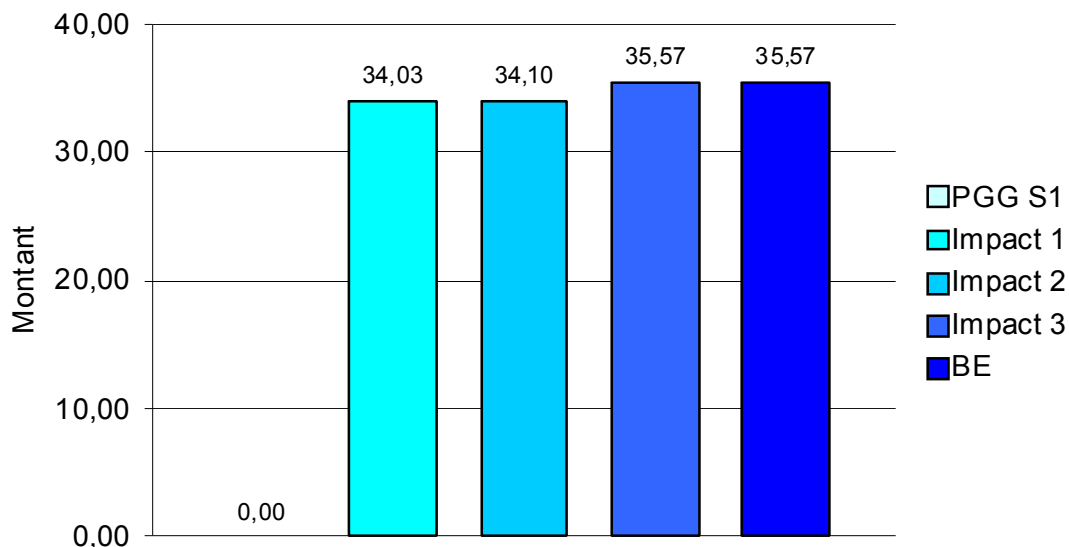


Fig n° 26 : L'impact des changements d'hypothèses sur le produit 4

En effet, il est possible de voir que c'est bien le passage en stochastique avec le changement de courbe de rendement qui crée de la PGG. Les autres hypothèses ont peu d'impact sur ce produit.

- Le produit 14

Ce produit ne comporte pas de TMG, voici son évolution sur les 20 premières années de projection :

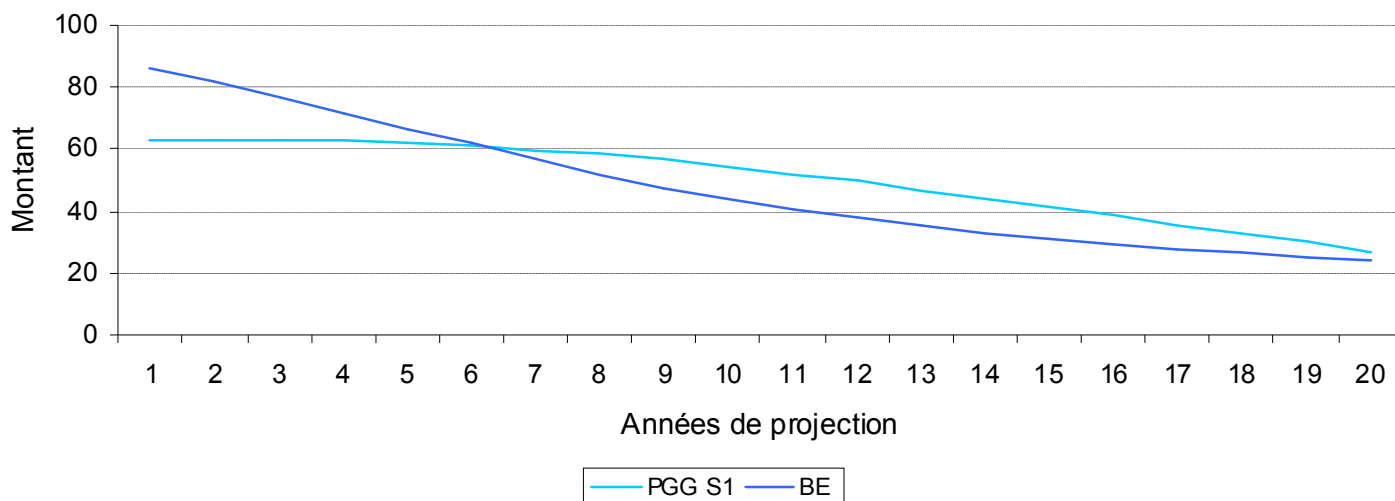


Fig n° 27 : L'évolution de la PGG pour le produit 14

Ce qu'il est possible d'observer est une baisse des deux courbes au fil du temps et les deux courbes se croisent au bout de 6 années, lorsque les taux de rendement se rapprochent, mais avant que le taux de rendement en Solvabilité 2 passe au dessus de la courbe de Solvabilité 1. Analysons les impacts des hypothèses sur ce produit.

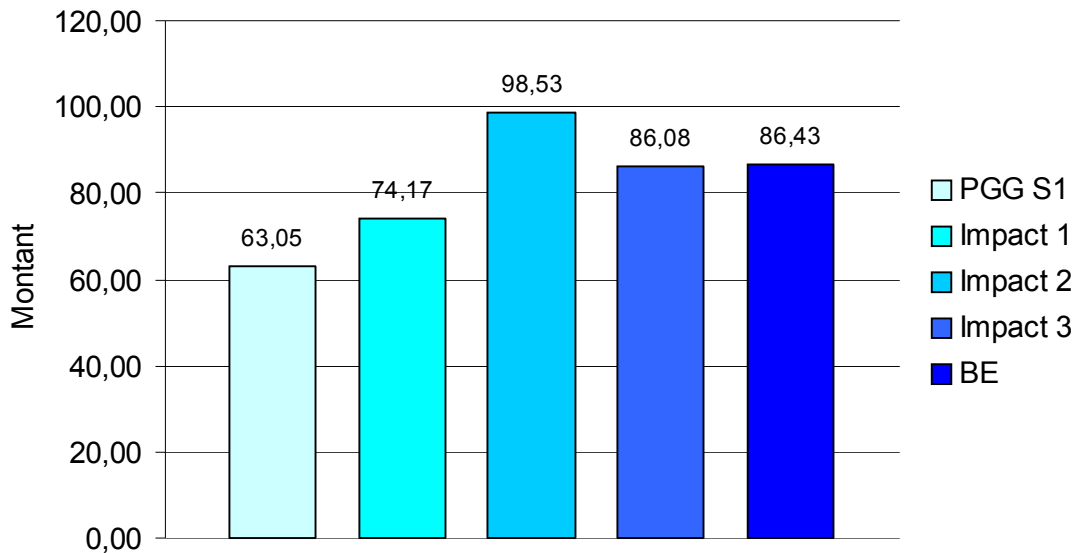


Fig n° 28 : L'impact des changements d'hypothèses sur le produit 14

Le changement de modèle va augmenter la PGG, mais moins que le fait de projeter sur 50 ans. La vie de ce contrat coûte cher. Lorsqu'on change la table de rachat, donc que l'on passe à un taux de rachat utilisé en Solvabilité 2, on constate une baisse alors que les rachats au bout de 50 ans d'ancienneté augmentent légèrement la PGG.

- Le produit 17

Le produit 17 a un TMG de 4,5%, voici l'évolution de la PGG sur les 20 prochaines années :

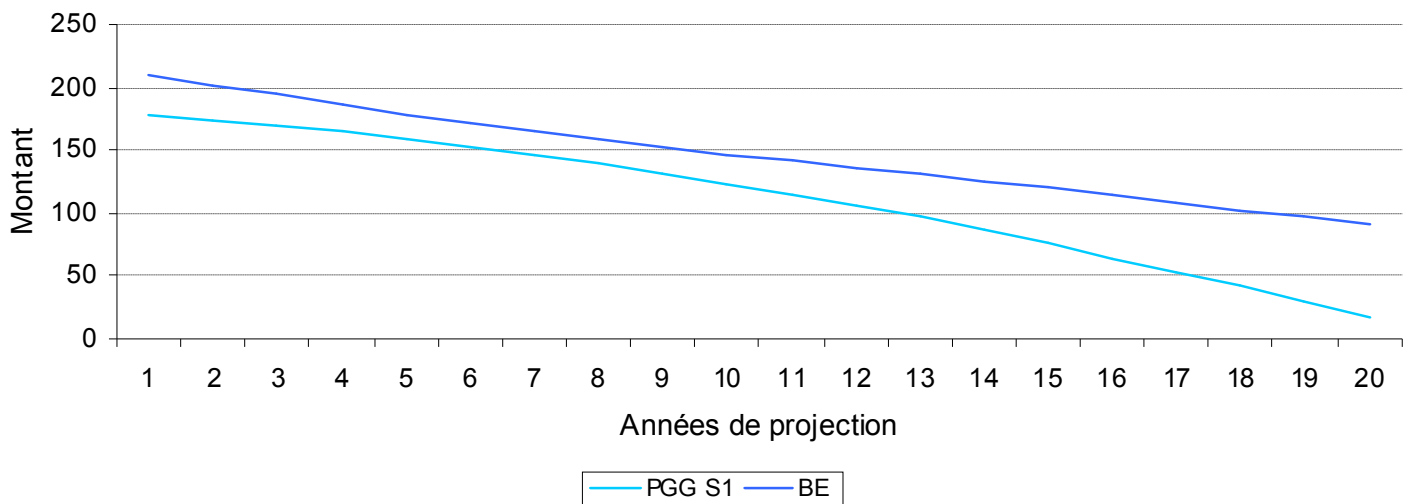


Fig n° 29 : L'évolution de la PGG pour le produit 17

La PGG de ce produit évolue de façon similaire dans les deux univers, la diminution des courbes est quasiment la même, mais la PGG en Solvabilité 2 est plus élevée. Regardons quelle hypothèse a pour effet d'augmenter la PGG.

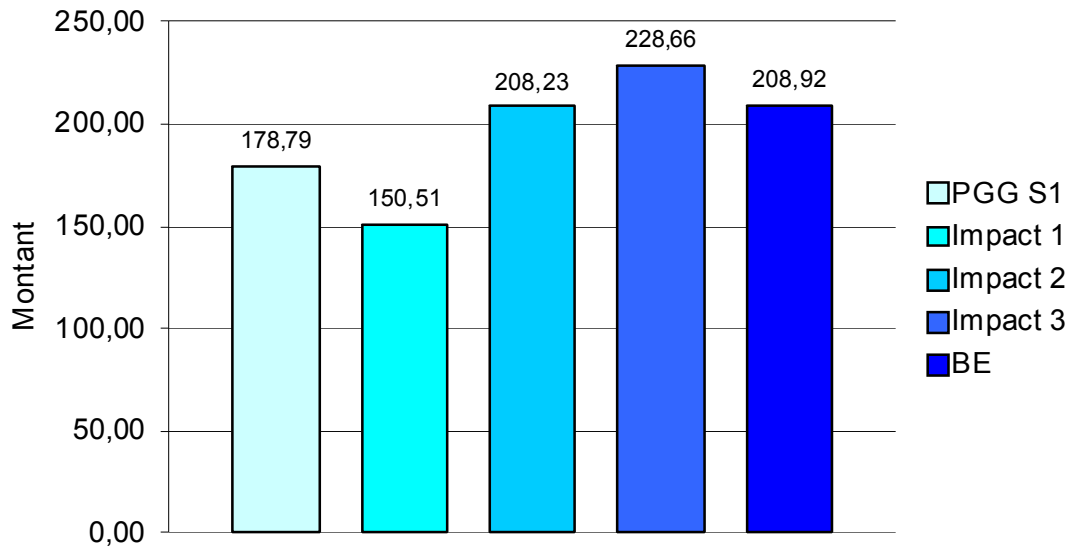


Fig n° 30 : L'impact des changements d'hypothèses sur le produit 17

Sur ce produit, le changement de modèle a pour effet de diminuer la PGG, par contre la projection sur 50 ans elle va l'augmenter. La vie de ce contrat coûte cher, ceci est d'autant plus justifié que lors du passage aux rachats au bout de 50 ans d'ancienneté la PGG diminue. Le changement de table de rachat va aussi augmenter le montant de la PGG.

- Ce qu'il est possible d'en déduire

Lorsqu'il existe déjà de la PGG, à la date de l'arrêté le changement de modèle va diminuer le montant de cette dernière pour les contrats ayant un TMG supérieur aux deux courbes de rendement. Par contre pour les produits qui ont un TMG inférieur à la courbe de rendement de Solvabilité 1, le passage à la nouvelle courbe de rendement va avoir tendance à augmenter la PGG les premières années de projection, et donc l'augmenter à la date de l'arrêté. Le fait de projeter sur 50 ans plutôt que sur 20 ans va créer de la PGG pour certains produits. Le changement de loi de rachat va vraiment dépendre du produit analysé étant donné que les taux de rachats sont différents et va dépendre également du frais lié à ces rachats. L'impact des changements va dépendre des produits, étant donné qu'ils n'ont pas les mêmes frais, mais au global on a une augmentation de la PGG.

3. La Risk Margin

Dans cette partie, ce sont les risques qui ont un impact sur la PGG qui vont être présentés. La formule de la Risk Margin dépend du nBSCR et du SCR_{Op} , voici l'influence de ces deux éléments sur la Risk Margin :

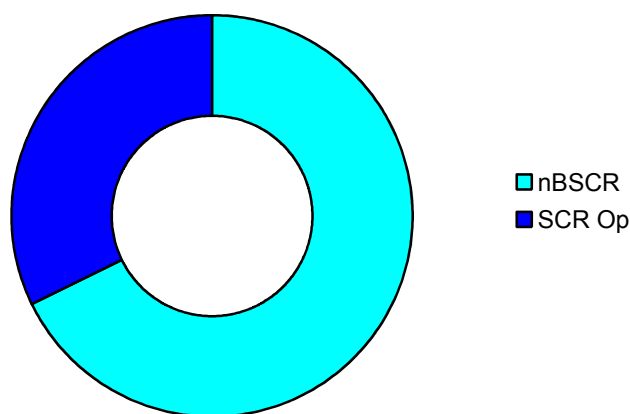


Fig n° 31 : Influence du SCR_{Op} et du nBSCR dans la risk Margin

C'est le nBscr qui influence le plus la Risk Margin. Le nBSCR qui est normalement composé du risque de marché inévitable, du risque de souscription vie et du risque de défaut de réassurance, ici est uniquement composé du risque de souscription vie étant donné que les deux autres risques sont nuls sur le périmètre. Ce risque de souscription vie est influencé par les différents sous modules de risque de la manière suivante :

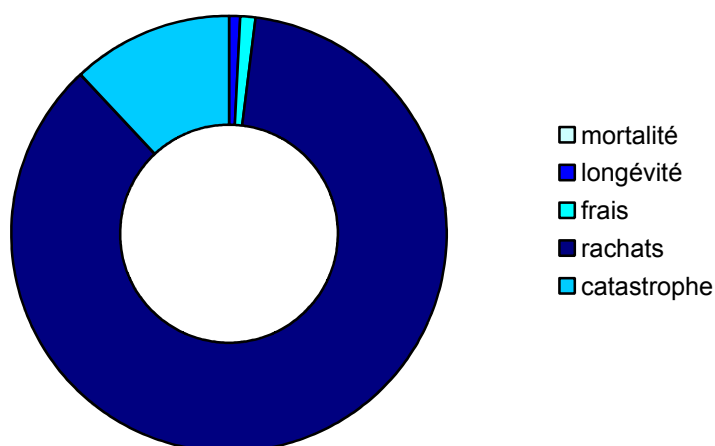


Fig n° 32 : Influence des sous-modules dans le risque de souscription vie

Ce sont les rachats qui influencent le plus le risque de souscription vie pour la PGG. Concernant le risque de rachat, soit c'est la hausse des rachats, la baisse ou bien les rachats massifs qui constituent le risque, dans cette étude c'est l'impact des rachats massifs qui fait augmenter de façon importante le SCR vie. Les rachats impactent la PGG principalement par les frais de rachats. La vague de rachats massif a lieu la première année, qui est l'année qui influence le plus la PGG, c'est cette raison qui fait que ce sont les rachats massifs qui augmentent davantage la PGG plutôt que la simple hausse ou baisse du taux de rachat.

Le risque de catastrophe est le deuxième plus important dans le risque de souscription vie. Tout comme le risque de rachats massifs, la catastrophe intervient la première année de projection, d'où l'importance de son influence sur le risque de souscription vie.

La longévité et la mortalité sont des risques inverses. La PGG est globalement plus influencée par le risque de longévité que par le risque de mortalité : pour un produit structurellement générateur de PGG, il est plus rentable pour l'assureur de bénéficier d'une mortalité aggravée.

De manière inattendue, l'augmentation des frais à beaucoup moins d'impact que d'autres risques. Etant donné que cette étude concerne les frais de gestion, il était logique de s'attendre un impact plus important de la part de ce sous-module de risque. Cela montre que les rachats ont bien plus d'impact sur la PGG que le montant des frais.

Bien que ce soit le nBSCR qui impacte plus la Risk Margin, le SCR opérationnel n'est pas négligeable, il est donc important de regarder les risques qui influencent sa valeur. Le SCR_{Op} est déterminé à partir des SCR vie, marché et défaut.

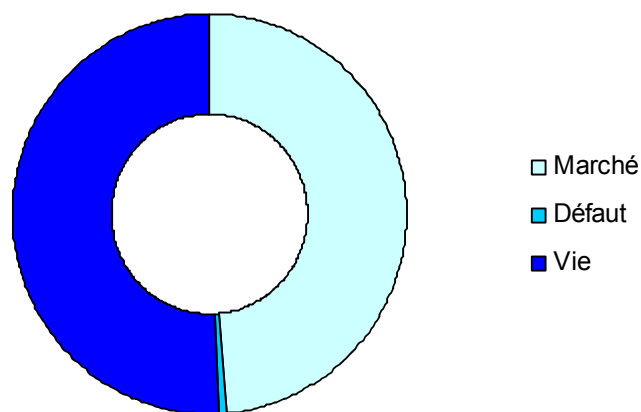


Fig n° 33 : Les risques impactant le SCR opérationnel.

Il est possible de constater que ce sont les risques de marché et de souscription vie qui impactent fortement le risque opérationnel, et que le risque de défaut l'influence très peu. Pour le risque de souscription vie, il a déjà été montré que ce sont les rachats massifs qui représentent la plus grande partie de ce risque. Regardons maintenant ce qui impacte le plus le risque de marché.

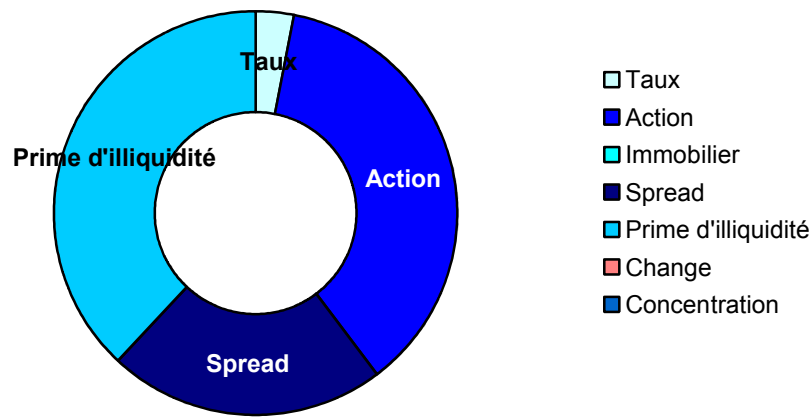


Fig n° 34 : Influence des sous-modules dans le risque de marché

Bien qu'il y ait sept risques qui peuvent influencer le risque de marché, seulement quatre ont comme effet d'augmenter la PGG. En effet, le risque d'immobilier, de change et de concentration n'augmente pas le montant de la PGG. Pour le risque de concentration et de change, CNP Assurances choisit ses actions, obligations de façon à éviter ces risques. Le risque action et le risque de prime d'illiquidité ont un impact important sur le risque de marché. Concernant le risque de taux, ici c'est la baisse du taux qui influence le montant de la PGG, en effet en cas de baisse de taux il y aura moins de produits financiers pour payer les intérêts crédités et dans une mesure moins importante il y aura également moins de PB distribuée donc les assurés vont avoir tendance à plus racheter leurs contrats.

2. Les limites de l'approche

Aucun texte à ce jour ne traitant de ce type de provisions en univers Solvabilité 2, il a été nécessaire de supposer un certain nombre de règles pour évaluer ce que serait la PGG. Ces hypothèses ne seront peut être pas celles qui seront retenues par l'EIOPA et le Code des assurances pour Solvabilité 2. Une des hypothèses fortes de cette étude est qu'il est considéré uniquement l'acte de gestion pour la détermination de la Risk Margin. En effet la diversification n'est pas totalement prise en compte mais cela donne un résultat plus prudent.

Les calculs ne se font pas directement sur un portefeuille mais produit par produit, pour pouvoir faire une étude de ce type, le modèle réajuste les actifs du portefeuille. En effet, du côté actif il n'est pas possible d'avoir les actifs d'un produit mais uniquement ceux d'un portefeuille. Au début, le modèle va ajuster la valeur des actifs sur la valeur des PM du produit. D'un point de vue purement actif ce type d'ajustement n'est pas correct car un portefeuille d'actif ne se divise pas si facilement, mais c'est la meilleure façon d'avoir une estimation correcte au niveau produit.

Il a été considéré dans le cadre de cette étude que la marge pour risque de gestion pouvait être isolée au sein du calcul de la marge pour risque telle qu'elle est aujourd'hui envisagée en Solvabilité 2. Cette approche faite a priori suppose qu'il existerait une marge pour

risques techniques et financiers, adossée aux engagements de l'assureur, qui viendrait s'ajouter à la marge pour risque de gestion pour donner la marge pour risque globale actuelle. L'avantage d'une telle approche permet de mesurer l'exposition spécifique de l'assureur aux risques liés à son activité de gestionnaire, mais rien n'indique à ce jour qu'elle sera retenue dans les futurs développements de la mise en place de Solvabilité 2.

Conclusion

La refonte du système de mesure de la solvabilité des compagnies d'assurance s'inspire de la réforme appliquée au secteur bancaire Bâle 2. Cette refonte a pour but d'appréhender au mieux les risques portés par les compagnies d'assurance selon leurs activités (vie, non vie, réassurance). La réforme Solvabilité 2 va venir modifier considérablement les méthodes de calcul des provisions. Aujourd'hui encore nous ne savons pas si toutes les provisions seront conservées. Dans ce mémoire nous avons considéré que les provisions « centrales » seront conservées mais que leur méthode de calcul sera remise à plat pour être adaptée à l'univers Solvabilité 2.

Le présent mémoire a pour objet l'appréhension des risques liés à l'activité de gestion de contrats d'épargne en univers Solvabilité 2. L'étude a donc porté sur la provision globale de gestion (PGG), aujourd'hui passée « en central » et calculée pour chaque ensemble homogène de contrats. La réglementation actuelle liée à la détermination de cette provision semble prudente au regard du risque considéré, et pousse à ce titre CNP Assurances à provisionner des sommes importantes.

Contrairement à ce qui était généralement attendu, nous avons constaté que les règles adoptées augmentaient sensiblement le montant de la provision.

Le Best Estimate de la provision au sens Solvabilité 2, arrêté avec les hypothèses au 31/12/2011, pâtit d'une conjoncture financière peu favorable, générant des courbes d'actualisation et des prévisions de rendement financiers insuffisants au regard des garanties offertes par certains produits. Des produits non générateurs de PGG selon la réglementation actuelle deviendraient générateurs de PGG.

L'ajout d'une marge pour risque spécifique à l'activité de gestion aggrave ce résultat, même si la solution proposée dans le cadre du mémoire fait preuve d'une prudence supérieure aux règles actuellement arrêtées (cantonement de l'activité de gestion du périmètre étudié).

Le suivi traditionnel des activités d'assurance (marge technique / marge financière / marge administrative) sera remis à plat après le 1^{er} janvier 2014, pour être vraisemblablement remplacé par une vision plus agrégée des risques. L'avenir d'une provision « centrale » telle que la provision globale de gestion étudiée dans le cadre de ce mémoire, est donc loin d'être assuré. Toutefois, les règles que nous avons adoptées nous mènent à ce constat : l'activité de gestion de contrats d'épargne serait plus onéreuse en termes de provisionnement.

Annexes

Annexe 1 : Article A331-1-1 du Code des assurances.

Modifié par Arrêté 2006-08-01 art. 1 8° JORF 26 août 2006

1° Les provisions mathématiques des contrats de capitalisation, d'assurance nuptialité-natalité, d'acquisition d'immeubles au moyen de la constitution de rentes viagères, d'assurance sur la vie, doivent être calculées d'après des taux d'intérêt au plus égaux à ceux retenus pour l'établissement du tarif et, s'ils comportent un élément viager et sous réserve du premier alinéa de l'article A. 331-1-2, d'après les tables de mortalité appropriées mentionnées à l'article A. 335-1 en vigueur à l'époque de l'application du tarif.

2° La provision globale de gestion mentionnée au 4° de l'article R. 331-3 est dotée, à due concurrence, de l'ensemble des charges de gestion future des contrats non couvertes par des chargements sur primes ou par des prélèvements sur produits financiers prévus par ceux-ci.

Elle est déterminée dans les conditions suivantes.

Pour chaque ensemble homogène de contrats, il est établi, au titre de chacun des exercices clos pendant la durée de ceux-ci, un compte prévisionnel des charges et des produits futurs de gestion. Pour l'établissement de ces comptes prévisionnels, sont pris en compte :

a) Les produits correspondant aux chargements sur primes pour les primes périodiques, aux commissions de réassurance perçues pour couvrir les frais de gestion, et aux produits financiers disponibles après prise en compte des charges techniques et financières découlant de la réglementation et des clauses contractuelles. Les produits financiers sont calculés en appliquant le taux de rendement, ci-après défini, au montant moyen des provisions mathématiques de l'exercice.

Ce taux de rendement est calculé, au titre de chaque exercice, sur la base :

- d'une part, du rendement hors plus-values des obligations et titres assimilés en portefeuille et présumés détenus jusqu'à leur échéance et, pour le réemploi des coupons et des obligations à échoir pendant les cinq premières années suivant l'exercice considéré, de 75 % du taux moyen semestriel des emprunts d'Etat, et, au-delà, de 60 % du taux moyen semestriel des emprunts d'Etat ;

- d'autre part, pour les autres actifs, de 70 % du rendement hors plus-values du portefeuille obligataire constaté en moyenne sur l'exercice considéré et les deux exercices précédents ;

b) Les charges correspondant aux frais d'administration, aux frais de gestion des sinistres et aux frais internes et externes de gestion des placements retenus pour l'évaluation de produits, dans la limite des charges moyennes unitaires observées au titre de l'exercice considéré et des deux exercices précédents.

Pour chaque ensemble homogène de contrats, le taux estimé des rachats totaux ou partiels et des réductions ne pourra excéder 80 % de la moyenne des sorties anticipées de contrats constatées sur les deux derniers exercices clos et sur l'exercice en cours.

Pour chaque ensemble homogène de contrats, le montant de la provision est égal à la valeur actuelle des charges de gestion futures diminuée de la valeur actuelle des ressources futures issues des contrats, telles que définies ci-dessus. Le taux d'actualisation est, pour chaque exercice, le même que celui retenu pour le taux de rendement précédemment défini.

La provision globale de gestion est la somme des provisions ainsi calculées.

3° Les entreprises peuvent calculer les provisions mathématiques de tous leurs contrats en cours, en appliquant lors de tous les inventaires annuels ultérieurs les taux mentionnés au premier alinéa et les tables de mortalité appropriées en vigueur à la date de l'inventaire.

Cette possibilité n'est pas ouverte pour les contrats, pour lesquels l'actif représentatif des engagements correspondants est isolé dans la comptabilité de l'entreprise et a été déterminé de manière à pouvoir procurer un taux de rendement supérieur d'au moins un tiers au taux d'intérêt du tarif.

Pour l'application du présent 3°, les entreprises peuvent répartir sur une période de huit ans au plus les effets de la modification des bases de calcul des provisions mathématiques.

Annexe 2 : Table de mortalité.

TF00-02

Age	Lx	qx	Age	Lx	qx
0	100 000	0.00384	57	94 501	0.00392
1	99 616	0.00033	58	94 131	0.00414
2	99 583	0.00021	59	93 741	0.00440
3	99 562	0.00017	60	93 329	0.00468
4	99 545	0.00014	61	92 892	0.00503
5	99 531	0.00012	62	92 425	0.00543
6	99 519	0.00011	63	91 923	0.00589
7	99 508	0.00010	64	91 382	0.00640
8	99 498	0.00010	65	90 797	0.00697
9	99 488	0.00010	66	90 164	0.00763
10	99 478	0.00011	67	89 476	0.00838
11	99 467	0.00011	68	88 726	0.00923
12	99 456	0.00012	69	87 907	0.01020
13	99 444	0.00013	70	87 010	0.01133
14	99 431	0.00016	71	86 024	0.01259
15	99 415	0.00020	72	84 941	0.01401
16	99 395	0.00024	73	83 751	0.01563
17	99 371	0.00029	74	82 442	0.01752
18	99 342	0.00033	75	80 998	0.01970
19	99 309	0.00035	76	79 402	0.02228
20	99 274	0.00035	77	77 633	0.02527
21	99 239	0.00034	78	75 671	0.02874
22	99 205	0.00034	79	73 496	0.03276
23	99 171	0.00034	80	71 088	0.03749
24	99 137	0.00034	81	68 423	0.04304
25	99 103	0.00035	82	65 478	0.04956
26	99 068	0.00035	83	62 233	0.05709
27	99 033	0.00036	84	58 680	0.06564
28	98 997	0.00037	85	54 828	0.07518
29	98 960	0.00039	86	50 706	0.08567
30	98 921	0.00042	87	46 362	0.09693
31	98 879	0.00047	88	41 868	0.10865
32	98 833	0.00052	89	37 319	0.12053
33	98 782	0.00058	90	32 821	0.13260
34	98 725	0.00064	91	28 469	0.14546
35	98 662	0.00070	92	24 328	0.15965
36	98 593	0.00076	93	20 444	0.17531
37	98 518	0.00084	94	16 860	0.19229
38	98 435	0.00093	95	13 618	0.21060
39	98 343	0.00103	96	10 750	0.23005
40	98 242	0.00114	97	8 277	0.25045
41	98 130	0.00125	98	6 204	0.27208
42	98 007	0.00138	99	4 516	0.29473
43	97 872	0.00151	100	3 185	0.31837
44	97 724	0.00165	101	2 171	0.34316
45	97 563	0.00180	102	1 426	0.36886
46	97 387	0.00195	103	900	0.39556
47	97 197	0.00210	104	544	0.42279
48	96 993	0.00224	105	314	0.45223
49	96 776	0.00238	106	172	0.48256
50	96 546	0.00251	107	89	0.50562
51	96 304	0.00265	108	44	0.54545
52	96 049	0.00282	109	20	0.55000
53	95 778	0.00302	110	9	0.55556
54	95 489	0.00324	111	4	0.75000
55	95 180	0.00346	112	1	1.00000
56	94 851	0.00369	113	0	

TF00-02 abbatue de 15%

Age	Lx	qx	Age	Lx	qx
0	100000	0.00326	57	95307	0.00333
1	99674	0.00028	58	94990	0.00352
2	99646	0.00018	59	94655	0.00374
3	99628	0.00015	60	94302	0.00398
4	99613	0.00012	61	93926	0.00427
5	99601	0.00010	62	93525	0.00462
6	99591	0.00009	63	93093	0.00500
7	99582	0.00009	64	92627	0.00544
8	99573	0.00009	65	92123	0.00593
9	99565	0.00009	66	91577	0.00649
10	99556	0.00009	67	90983	0.00712
11	99547	0.00009	68	90335	0.00785
12	99538	0.00010	69	89626	0.00867
13	99527	0.00011	70	88849	0.00963
14	99516	0.00014	71	87993	0.01070
15	99503	0.00017	72	87052	0.01191
16	99486	0.00021	73	86015	0.01329
17	99465	0.00025	74	84872	0.01489
18	99441	0.00028	75	83609	0.01675
19	99412	0.00030	76	82208	0.01894
20	99383	0.00030	77	80652	0.02148
21	99353	0.00029	78	78919	0.02443
22	99324	0.00029	79	76991	0.02785
23	99295	0.00029	80	74847	0.03187
24	99266	0.00029	81	72462	0.03658
25	99237	0.00030	82	69811	0.04212
26	99207	0.00030	83	66870	0.04853
27	99178	0.00031	84	63625	0.05580
28	99147	0.00032	85	60075	0.06390
29	99115	0.00033	86	56236	0.07282
30	99082	0.00036	87	52141	0.08239
31	99046	0.00040	88	47845	0.09235
32	99007	0.00044	89	43426	0.10245
33	98964	0.00049	90	38977	0.11271
34	98915	0.00054	91	34584	0.12364
35	98862	0.00059	92	30308	0.13570
36	98803	0.00065	93	26195	0.14901
37	98739	0.00072	94	22292	0.16345
38	98668	0.00079	95	18648	0.17901
39	98590	0.00087	96	15310	0.19554
40	98504	0.00097	97	12316	0.21289
41	98408	0.00107	98	9694	0.23127
42	98304	0.00117	99	7452	0.25052
43	98188	0.00129	100	5585	0.27061
44	98062	0.00140	101	4074	0.29169
45	97925	0.00153	102	2886	0.31353
46	97775	0.00166	103	1981	0.33622
47	97613	0.00178	104	1315	0.35938
48	97438	0.00190	105	842	0.38439
49	97253	0.00202	106	519	0.41017
50	97057	0.00213	107	306	0.42978
51	96850	0.00225	108	174	0.46364
52	96632	0.00240	109	94	0.46750
53	96400	0.00256	110	50	0.47222
54	96153	0.00275	111	26	0.63750
55	95888	0.00294	112	10	1.00000
56	95607	0.00314	113	0	

Annexe 3 : Quelques éléments de probabilité ¹

Cette annexe présente quelques éléments qui sont utiles pour une meilleure compréhension des démonstrations présentes dans les annexes suivantes.

Filtration : Soit un espace de probabilité (Ω, F, IP) . Cet espace est muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de sous tribus F . F_n est l'information connue à l'instant n .

Martingale : Une suite $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variables aléatoires réelles intégrables, avec X_n de F_n -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$ est :

- Une martingale si $IE(X_{n+1} \mid F_n) = X_n$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Une surmartingale si $IE(X_{n+1} \mid F_n) \leq X_n$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Une sousmartingale si $IE(X_{n+1} \mid F_n) \geq X_n$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$

Mouvement brownien : Le processus $(X_t \mid t \in \mathbb{R}_+)$ est un mouvement brownien si :

- Les accroissements de ce processus sont indépendants : pour toute subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < \infty$, les N variable aléatoire $(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})$ sont indépendantes ;
- Les accroissements sont stationnaires : pour tous $0 < s < t$, $(X_t - X_s)$ est une variable gaussienne centrée et de variance $t-s$;
- Les trajectoires de ce processus sont continues : $\lim_{s \rightarrow t} B_s = B_t$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$;
- Le processus est issu de 0 : $B_0 = 0$.

Lemme d'Itô (1951): Supposons que la valeur de la variable x suive un processus d'Itô :

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

Avec : z est un mouvement brownien (ou processus de Wiener),
 a et b sont des fonction de x et de t .

Le lemme d'Itô montre qu'une fonction G de paramètres x et t est caractérisée par la processus :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

G suit également un processus d'Itô avec pour paramètre de tendance centrale :

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

¹ Réalisé à partir de : Franchi J. : *Calcul Stochastique*, 2011

Et de : Chapitre 13, Hull J. Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition, Pearson, 2011

Et pour paramètre de variance :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

Annexe 4 : Démonstration du Libor Market Model¹

Sous la mesure forward-neutre de numéraire $P(t, t_{k+1})$, le taux forward est une martingale :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t)dZ(t)$$

Avec : $F_k(t)$ est le taux forward entre les dates t_k et t_{k+1} vu de la date t ,

t_k et t_{k+1} sont des dates de réajustement des taux caps négociés sur le marché aujourd'hui,

$\sigma_k(t)$ est la volatilité de $F_k(t)$ à la date t ,

Z est un processus de Wiener.

Si nous changeons de numéraire, c'est-à-dire qu'au lieu de prendre l'univers forward-neutre de numéraire $P(t, t_{k+1})$, nous prenons la mesure forward-neutre de numéraire $P(t, t_{m(t)})$, où $m(t)$ est la prochaine date de réajustement, alors nous obtenons :

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)[v_{m(t)}(t) - v_{k+1}(t)]F_k(t)dt + \sigma_k(t)F_k(t)dZ(t)$$

Où : $v_{k(t)}$ est la volatilité à la date t du prix zéro coupon d'échéance t_k , noté $P(t, t_k)$.

Le prix forward des zéro coupon pour une période $[t_i, t_{i+1}]$ vu de la date t , peut s'écrire :

$$P(t, t_i, t_{i+1}) = \frac{P(t, t_{i+1})}{P(t, t_i)}$$

Le prix forward peut également s'exprimer en fonction du flux forward correspondant :

$$P(t, t_i, t_{i+1}) = \frac{1}{1 + \delta_i F_i(t)}$$

Avec : $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ est la période entre deux réajustements.

Ces deux relations permettent de déduire la suivante :

$$\frac{P(t, t_i)}{P(t, t_{i+1})} = 1 + \delta_i F_i(t)$$

En passant au logarithme, elle devient :

$$\ln P(t, t_i) - \ln P(t, t_{i+1}) = \ln(1 + \delta_i F_i(t))$$

En appliquant le lemme d'Itô, et en égalisant les coefficients de $dZ(t)$ obtenu, on obtient :

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i F_i(t) \sigma_i(t)}{1 + \delta_i F_i(t)}$$

Le processus suivi par $F_k(t)$ lorsque le modèle a 1facteur peut se réécrire de la façon suivante :

¹ Annexe réalisée à partir de : Chapitre 31, Hull J. Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition, Pearson, 2011

$$dF_k(t) = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \sigma_i(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} \sigma_k(t) F_k(t) dt + \sigma_k(t) F_k(t) dZ(t)$$

Ce qui peut se réécrire :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \sigma_i(t) \sigma_k(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \sigma_k(t) dZ(t)$$

Dans le cas du modèle à p facteurs, le processus devient :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \sum_{q=1}^p \sigma_{i,q}(t) \sigma_{k,q}(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \sum_{q=1}^p \sigma_{k,q}(t) dZ_q(t)$$

Avec : $\sigma_{k,q}(t)$ est la composante de la volatilité attribuable au q-ième facteur.

Revenons au modèle à un facteur.

Par simplification du modèle, il est supposé que la volatilité de $F_k(t)$ notée $\sigma_k(t)$ dépend uniquement du nombre de période entière entre la date t_k et la date de prochain réajustement. La valeur de $\sigma_k(t)$ lorsque le nombre de périodes est i sera notée Λ_i . La prochaine date de réajustement étant $m(t)$, on a :

$$\sigma_k(t) = \Lambda_{k-m(t)}$$

Cela nous donne une fonction en escalier.

Ainsi l'équation peut s'écrire :

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \Lambda_{k-m(t)} dz$$

Nous faisons l'approximation suivante : $F_i(t) = F_i(t_j)$ quand $t_j < t < t_{j+1}$.

Alors on peut obtenir une forme récursive :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[\left(\sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \Lambda_{i-j-1} \Lambda_{k-j-1}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{(\Lambda_{k-m(t)})^2}{2} \right) \delta_j + \Lambda_{k-j-1} \varepsilon \sqrt{\delta_j} \right]$$

Avec ε suit une loi normale centrée réduite.

De la même façon, dans le cas du modèle à plusieurs facteurs, on a :

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[\left(\sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \sum_{q=1}^p \lambda_{i-j-1,q} \lambda_{k-j-1,q}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\sum_{q=1}^p \lambda_{k-j-1,q}^2}{2} \right) \delta_j + \sum_{q=1}^p \lambda_{k-j-1,q} \varepsilon_q \sqrt{\delta_j} \right]$$

Avec $\lambda_{i,q}$ la q-ième composante de la volatilité quand il y a i périodes.

Dans le générateur de scénarios économiques, le Libor Market Model est implémenté par simulation de Monte Carlo. Cette dernière équation permet de calculer les taux forward de date 1 à partir de ceux de date 0, et les taux de date 2 sont calculés avec ceux de date 1.

Annexe 5 : Modèle Vasicek ¹

Le modèle de Vasicek à deux facteurs est caractérisé par deux équations différentielles stochastiques.

Le processus risque neutre pour le taux d'intérêt court terme est le suivant :

$$dr_t = \alpha_1(m_t - r_t)dt + \sigma_1 dZ_1(t)$$

Le niveau de retour à la moyenne m suit le processus stochastique :

$$dm_t = \alpha_2(\mu_t - m_t)dt + \sigma_2 dZ_2(t)$$

Avec : r_t est le taux d'intérêt court terme en t ,

α_1 et α_2 sont les vitesses de retour vers la moyenne,

m_t est le taux moyen à moyen terme,

μ_t est le taux moyen à long terme,

σ_1 et σ_2 sont les volatilités du taux court terme et du taux moyen terme,

Z_1 et Z_2 sont deux mouvements browniens indépendants.

On pose :

$$X_t = (r_t - m_t) \exp(\alpha_1 t)$$

$$y_t = (m_t - \mu) \exp(\alpha_2 t)$$

On applique le lemme d'Ito à ces deux équations :

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha_1(r_t - m_t) \exp(\alpha_1 t)dt + \exp(\alpha_1 t)dr_t \\ &= \alpha_1(r_t - m_t) \exp(\alpha_1 t)dt + \exp(\alpha_1 t)[\alpha_1(m_t - r_t)dt + \sigma_1 dZ_1(t)] \\ &= \exp(\alpha_1 t)[\sigma_1 dZ_1(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy_t &= \alpha_2(m_t - \mu) \exp(\alpha_2 t)dt + \exp(\alpha_2 t)dm_t \\ &= \alpha_2(m_t - \mu) \exp(\alpha_2 t)dt + \exp(\alpha_2 t)[\alpha_2(\mu - m_t)dt + \sigma_2 dZ_2(t)] \\ &= \exp(\alpha_2 t)[\sigma_2 dZ_2(t)] \end{aligned}$$

En intégrant ces résultats, on arrive à :

¹ Réalisé à l'aide de : Gauthier T. *Développement d'un Générateur de Scénarii Economiques au sein d'une compagnie d'assurance vie*, mémoire ISFA, 2011

Et de : Pham H., *Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers*, Université Paris 7, 2007.

$$X_t = (r_t - m_t) \exp(\alpha_1 t) = r_0 + \sigma_1 \int_0^t \exp(\alpha_1 u) dZ_1(u)$$

$$\Leftrightarrow r_t \exp(\alpha_1 t) = r_0 + m_t \exp(\alpha_1 t) + \sigma_1 \int_0^t \exp(\alpha_1 u) dZ_1(u)$$

$$\Leftrightarrow r_t = r_0 + m_t + \exp(-\alpha_1 t) \sigma_1 \int_0^t \exp(\alpha_1 u) dZ_1(u)$$

$$y_t = (m_t - \mu) \exp(\alpha_2 t) = m_0 + \sigma_2 \int_0^t \exp(\alpha_2 u) dZ_2(u)$$

$$\Leftrightarrow m_t \exp(\alpha_2 t) = r_0 + \mu \exp(\alpha_2 t) + \sigma_2 \int_0^t \exp(\alpha_2 u) dZ_2(u)$$

$$\Leftrightarrow m_t = m_0 + \mu + \exp(-\alpha_2 t) \sigma_2 \int_0^t \exp(\alpha_2 u) dZ_2(u) + \mu$$

Nous avons ainsi obtenu des relations de récurrence.

Pour ce modèle il existe une formule explicite permettant de retrouver le prix des zéro-coupon de maturité T à la date t, ce résultat est admis :

$$P(t, T) = \exp[A(T-t) - B_1(T-t)r_t - B_2(T-t)m_t]$$

$$\text{Avec : } B_1(s) = \left[\frac{1 - \exp(-\alpha_1 s)}{\alpha_1} \right]$$

$$B_2(s) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \left[\frac{1 - \exp(-\alpha_2 s)}{\alpha_2} - \frac{1 - \exp(-\alpha_1 s)}{\alpha_1} \right]$$

$$A(s) = (B_1(s) - s) \times \left(\mu - \frac{\sigma_1^2}{2\alpha_1^2} \right) + B_2(s) \mu - \frac{\sigma_1^2 B_1(s)^2}{4\alpha_1}$$

$$+ \frac{\sigma_2^2}{2} \left[\frac{s}{\alpha_2^2} - 2 \frac{(B_2(s) + B_1(s))}{\alpha_2^2} + \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \times \frac{(1 - \exp(-2\alpha_1 s))}{2\alpha_1} \right. \\ \left. - \frac{2\alpha_1}{\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \times \frac{(1 - \exp(-(\alpha_1 + \alpha_2)s))}{(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \times \frac{(1 - \exp(-2\alpha_2 s))}{2\alpha_2} \right]$$

Le taux zéro-coupon pour chaque scénario dans t années de maturité T-t années est déterminée par :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T-t}$$

Annexe 6 : Equation aux dérivées partielles de Black-Scholes-Merton

En repartant du processus présenté dans la partie II ¹ :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dZ(t)$$

Avec : $S(t)$ le prix de l'action à l'instant t

μ et σ sont deux constantes représentant respectivement l'espérance de rentabilité de l'action et la volatilité du cours de l'action

$Z(t)$ est un mouvement brownien standard

- Si $\sigma = 0$, alors c'est une équation différentielle ordinaire qu'il faut résoudre :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt$$

A pour solution :

$$S(t) = S(0) \exp(\mu t)$$

Preuve :

Vérifions que la solution vérifie bien l'équation différentielle.

On commence par dériver la solution.

$$dS(t) = S(0) \times \mu \times dt \times \exp(\mu t)$$

$$\Leftrightarrow dS(t) = S(0) \exp(\mu t) \times \mu dt$$

$$\Leftrightarrow dS(t) = S(t) \times \mu dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt$$

- Si $\sigma \neq 0$, la solution est la suivante :

$$S(t) = S(0) \times \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z(t)\right\}$$

Preuve² :

Pour commencer posons :

$$S(t) = f(t, Z(t))$$

¹ Chapitre 2, Planchet F., Thérond P.E., Juillard M., *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques - seconde édition*, Economica, 2011.

² Réalisé à l'aide : Chapitre 3, Lamberton D., Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipse, 1997

Où :

$$f(t, x) = x_0 \times \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right\} \quad \text{avec : } x_0 = S(0)$$

La formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} dS(t) &= df(t, Z(t)) \\ &= f_x(t, Z_t)dZ_t + f_t(t, Z_t)dt + \frac{1}{2}f_{xx}(t, Z_t)d\langle Z, Z \rangle_t \end{aligned}$$

Puisque Z est un mouvement brownien, on a :

$$\langle Z, Z \rangle_t = t$$

On obtient :

$$\begin{aligned} dS(t) &= \sigma f(t, Z_t)dZ_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)f(t, Z_t)dt + \frac{\sigma^2}{2}f(t, Z_t)dt \\ &= \sigma S(t)dZ_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)S(t)dt + \frac{\sigma^2}{2}S(t)dt \\ &= S(t) \times \left(\sigma dZ_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \frac{\sigma^2}{2}dt\right) \end{aligned}$$

Et au final, on a bien :

$$dS(t) = S(t) \times (\sigma dZ_t + \mu dt)$$

Annexe 7 : Paramètres chocs SCR

SCR de spread :

Pour les obligations¹ :

Rating _i	F ^{Up}
AAA	0.9%
AA	1.1%
A	1.4%
BBB	2.5%
BB	4.5%
B et moins	7.5%
Sans rating	3%

Pour les produits structurés :

Choc direct

Rating _i	F ^{Up}
AAA	0.9%
AA	1.1%
A	1.4%
BBB	2.5%
BB	6.75%
B et moins	11.25%
Sans rating	3%

choc indirect² :

G	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC et moins	Sans rating
[0 - 2 ans[0.4%	0.9%	2.8%	5.3%	14.6%	31.1%	52.7%	6.3%
[2 - 4 ans[0.8%	1.7%	4.9%	9.6%	23.9%	44.8%	66.6%	11.4%
[4 - 6 ans[1.2%	2.8%	6.5%	13.1%	30.1%	51.2%	70.7%	15.7%
[6 - 8 ans[1.8%	4.1%	8.4%	16.4%	35.3%	55.0%	72.6%	19.6%
8 ans et plus	2.4%	5.3%	10.3%	19.6%	39.3%	57.8%	73.5%	23.5%

¹ SCR.5.82 QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

² SCR.5.92. QIS 5 Technical Specifications. EUROPEAN COMMISSION, Brussels, 5 July 2010

Pour les produits dérivés de crédit :

Rating _i	Choc à la hausse	Choc à la baisse
AAA	+130 bp	-75%
AA	+150 bp	-75%
A	+260 bp	-75%
BBB	+450 bp	-75%
BB	+840 bp	-75%
B et moins	+1620 bp	-75%
Sans rating	+500 bp	-75%

SCR de concentration :

Rating _i	CT _i
AAA - AA	3%
A	3%
BBB	1.5%
BB et moins	1.5%

Rating _i	g _i (Pour les entités privées et titres souverains en devise étrangère)	g _i (Pour les titres souverains en devise locale)
AAA	0.12	0
AA	0.12	0
A	0.21	0.12
BBB	0.27	0.21
BB	0.73	0.27
B et moins	0.73	0.73

Abréviations

BE : Best Estimate

CEL : Compte Epargne Logement

EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority (Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles)

FCP : Fonds Commun de Placement

LDD : Livret de Développement Durable

LEP : Livret d'Epargne Populaire

LMM : Libor Market Model (modèle de marché Libor)

MCR : Minimum Capital Requirement (capital minimum requis)

NAV : Net Asset Value (Valeur de l'actif net)

OPCVM : Organismes de Placements Collectif en Valeurs Mobilières

ORSA : Own Risk and Solvency Assessment (évaluation interne des risques et de la solvabilité)

PEA : Plan Epargne en Actions

PEL : Plan Epargne Logement

PGG : Provision Globale de Gestion

QIS : Quantitative Impact Study (étude quantitative d'impacts)

RM : Risk Margin (marge de risque)

SCR : Solvency Capital Requirement (capital de solvabilité requis)

SICAV : Société d'Investissement à Capital Variable

TME : Taux Moyen d'Emprunt d'Etat

TMG : Taux Minimum Garanti

UC : Unité de Compte

Index

- Actualisation : 36, 37, 59
- Avances : 30

- Best Estimate : 22, 36, 39, 56

- Chargements : 34, 56
- Contrat
 - en euros : 27
 - en UC : 27
 - multisupport : 28

- Epargne
 - court terme : 24
 - long terme : 25

- Fiscalité : 30
- Frais : 28, 34, 55

- Garanties : 29
- Générateur de scénarios économiques : 37, 40

- Inflation : 34, 43, 55

- Loi de mortalité : 35, 49, 54

- MCR : 22
- Modèle
 - de Black-Scholes : 44, 45
 - de Vasicek à deux facteurs : 42, 45
 - LMM : 40, 45

- Omnibus 2 : 23
- ORSA : 22

- Prime d'illiquidité : 37
- Processus Lamsfalussy : 20
- Produits financiers : 46
- Provision
 - de diversification : 33
 - globale de gestion : 33, 34, 38, 57, 77
 - mathématique : 31
 - pour aléas financiers : 32
 - pour égalisation : 32
 - pour frais d'acquisition reportés : 32
 - pour participation aux bénéfices : 32
 - pour risque d'exigibilité : 32
 - technique : 22, 36

- QIS : 23

- Rachats
 - conjuncturels : 51
 - généralités : 30, 35
 - partiels : 51, 54
 - totaux : 50, 54
- Rendement : 35, 37, 79
- Réserve de capitalisation
- Risk Margin : 22, 36, 39, 58, 65, 85

- SCR : 22, 58, 85
- Simulation de Monte Carlo : 41
- Solvabilité 2 : 20, 36

- TMG : 29, 53

- Versement : 28

Bibliographie

Ouvrages :

Couilbault F. *Assurances de personnes 2012-2013* ; L'Argus Editions, 2012.

Hull J. *Options, futures et autres actifs dérivés – 8^{ème} édition*, Pearson, 2011.

Lamberton D., Lapeyre B. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipse, 1997.

Planchet F., Thérond P.E., Juillard M. *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques – 2^{nde} édition*, Economica, 2011.

Code des assurances, 2012.

Publications :

EUROPEAN COMMISSION, *Draft Implementing measures Solvency II*, Brussels, 31 October 2011.

Institut des Actuaires, *Conférence Solvabilité 2*, Paris, 1^{er} juillet 2011.

Pham H., *Introduction aux Mathématiques et Modèles Stochastiques des Marchés Financiers*, Université Paris 7, 2007.

EUROPEAN COMMISSION, *QIS 5 Technical Specifications*, Brussels, 5 July 2010.

Mémoires :

Henge F. *Rapprochement des concepts de la Valeur Intrinsèque et du Capital Economique en Assurance Vie*, mémoire ULP, 2006.

Gauthier T. *Développement d'un Générateur de Scénarii Economiques au sein d'une compagnie d'assurance vie*, mémoire ISFA, 2011.

Cours de la formation de Strasbourg :

Heinrich F. : *Les exigences prudentielles en assurance – de Solvabilité I à Solvabilité II*, 2012.

Franchi J. : *Calcul Stochastique*, 2011.

Site internet :

www.legifrance.gouv.fr

www.lesclesdelabanque.com

www.ffsa.fr

www.institutdesactuaires.com

www.ressources-actuarielles.net