

**Mémoire présenté
pour l'obtention
du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
« DUAS »
et du Diplôme du Master mention Finance
spécialité « Actuariat et Gestion du Risque »**

le **04/10/2010**

par : **Tom LEURENT**

Titre : **Construction de tables d'expérience des risques
incapacité et invalidité**

Confidentialité : **2 ans**

Membres du jury de l'institut des Actuares :

Entreprise :

Assurances du Crédit Mutuel

Directeur de mémoire en entreprise :

Julie ROHFRTSCH

Membres du jury de l'université de Strasbourg :

Invité :

Mme Armelle GUILLOU
M. Jean-Luc NETZER
M. Hansjoerg ALBRECHER
M. Philippe ARTZNER
M. Frédéric BERTRAND
Mme Marie-Hélène BROIHANNE
M. Karl-Théodor EISELE
M. Jacques FRANCHI
M. Christophe GODLEWSKI

**Autorisation de mise en ligne sur un s
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)**

Signature du responsable entreprise :

M. Bernard HEINKEL
M. Nicolas KLUTCHNIKOFF
M. Bertrand KOEBEL
M. Maxime MERLI
M. Patrick ROGER

Signature du candidat :

Secrétariat : Mme Pierrette XIMENEZ

61 avenue de la Forêt Noire

67085 STRASBOURG

Tél : 03 68 85 20 54

Bibliothèque du PEGE : Tél : 03 68 85 22 23

Sommaire

REMERCIEMENTS	4
RESUME	5
ABSTRACT	6
INTRODUCTION.....	7
CHAPITRE 1 : PRESENTATION DE L'ETUDE	8
1.1 PRESENTATION DE L'ENTREPRISE.....	8
1.1.1. <i>Le Groupe Crédit Mutuel- CIC</i>	8
1.1.2. <i>Les ACM et son périmètre d'activité</i>	8
1.1.3. <i>Les fédérations</i>	8
1.2 VOCABULAIRE.....	9
1.3 L'ASSURANCE EMPRUNTEUR.....	9
1.3.1. <i>Les principes</i>	9
1.3.2. <i>Les primes et les prestations du produit étudié</i>	10
1.3.3. <i>Le marché français</i>	11
1.3.4. <i>Le marché des ACM</i>	13
1.4 LA PREVOYANCE INDIVIDUELLE	13
1.4.1. <i>Les principes</i>	13
1.4.2. <i>Les primes et prestations du produit étudié</i>	14
1.4.3. <i>Le marché français</i>	15
1.4.4. <i>Le marché des ACM</i>	16
1.5 LES GARANTIES EN CAS D'INCAPACITE ET D'INVALIDITE.....	16
1.5.1. <i>La prise en charge de la Sécurité sociale</i>	16
1.5.2. <i>La prise en charge des ACM dans le cas des produits emprunteurs</i>	19
1.5.3. <i>La prise en charge des ACM dans le cas des produits de prévoyance individuel</i>	21
1.6 RAPPEL DE LA PROBLEMATIQUE	23
1.6.1. <i>Les tables règlementaires du BCAC et leur utilité</i>	23
1.6.2. <i>L'intérêt des tables d'expérience</i>	25
CHAPITRE 2 : LES DONNEES UTILISEES	27
2.1 LA GESTION DES DONNEES.....	27
2.1.1. <i>Les tables de données et les variables sélectionnées</i>	27
2.1.2. <i>Le périmètre d'observation</i>	28
2.1.3. <i>Les problèmes rencontrés sur la qualité des données</i>	30
2.2 ANALYSES DESCRIPTIVES DES PORTEFEUILLES ETUDIES	33
2.2.1. <i>Composition des portefeuilles</i>	33
2.2.2. <i>Descriptifs des sinistres</i>	37
CHAPITRE 3 : ESTIMATION DU TAUX D'ENTREE EN INCAPACITE	40
3.1 REMARQUES PRELIMINAIRES.....	40
3.2 LES ESTIMATEURS	41
3.2.1. <i>Introduction des variables de survie et du taux de hasard</i>	41
3.2.2. <i>L'estimateur de Kaplan-Meier</i>	42
3.2.3. <i>L'estimateur des moments de Hoem</i>	47
3.2.4. <i>Adaptation des données à notre estimateur</i>	49
3.3 LES RESULTATS.....	50
3.3.1. <i>Les franchises</i>	50
3.3.2. <i>Taux globaux par sexe</i>	53
3.3.3. <i>Les catégories socioprofessionnelles</i>	53
3.3.4. <i>Taux par ancienneté</i>	55
3.3.5. <i>Taux globaux annuels</i>	56

3.3.6. Evolution âge par âge	59
3.3.7. Conclusion	60
3.4 INTERVALLE DE CONFIANCE DES RESULTATS BRUTS OBTENUS	61
3.5 LISSAGE DES TAUX BRUTS ET EXTRAPOLATION	63
3.5.1. Généralités	63
3.5.2. Lissage paramétrique par les splines cubiques	65
3.5.3. Lissage par Whittaker-Henderson	67
3.5.4. Validation et choix des lissages	69
3.5.5. Extrapolation	70
3.5.6. Résultats	70
CHAPITRE 4 : TABLE DE MAINTIEN EN INCAPACITE.....	72
4.1 PREAMBULE	72
4.2 L'ESTIMATION DES TAUX BRUTS	75
4.3 LE PORTEFEUILLE EMPRUNTEUR	77
4.3.1. Test d'homogénéité des durées de maintien	78
4.3.2. Statistiques descriptives	81
4.3.3. Résultats et fiabilité	82
4.3.4. Lissage	85
4.3.5. Extrapolation	92
4.4 LE PORTEFEUILLE DE PREVOYANCE INDIVIDUELLE	96
4.4.1. Données des sinistres du portefeuille	96
4.4.2. Construction de la table	97
4.4.3. Résultats bruts	97
4.4.4. Interpolation et extrapolation	98
4.4.5. Résultats finaux	99
CHAPITRE 5 : TABLE DE PASSAGE EN INVALIDITE.....	100
5.1 L'ESTIMATEUR	100
5.2 LE PORTEFEUILLE EMPRUNTEUR	101
5.2.1. Les résultats bruts	101
5.2.2. Lissage et extrapolation	102
5.3 LE PORTEFEUILLE DE PREVOYANCE INDIVIDUELLE	105
CHAPITRE 6 : COMPARAISON DES PORTEFEUILLES ET DES TABLES DU BCAC	107
6.1 LES TABLES D'ENTREE EN INCAPACITE	107
6.2 LES TABLES DE MAINTIEN EN INCAPACITE	108
6.3 LES TABLES DE PASSAGE EN INVALIDITE	111
CONCLUSION.....	114
ANNEXES.....	115
BIBLIOGRAPHIE	119
TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	120

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Monsieur Germain GEIN pour m'avoir accueilli au sein de son service et de m'avoir confié cette mission de stage.

Ensuite, je tiens particulièrement à remercier ma maître de stage, Julie ROHFRITSCH, qui, de par sa disponibilité, ses conseils et sa bonne humeur, m'a grandement aidé tout au long du stage.

Je remercie également Katarzyna KOSEK et Jean-Louis GANTZER, ainsi que Frédéric PLANCHET et Karl-Theodor EISELE qui ont su apporter des réponses avisées à mes différentes interrogations.

Enfin, je remercie l'ensemble du service des « assurances de personnes » pour leur disponibilité et leur bonne humeur qui ont été un atout considérable pour le bon déroulement de mon stage.

Résumé

La tarification et le provisionnement des risques incapacité et invalidité des portefeuilles emprunteur et de prévoyance individuelle du groupe des Assurances du Crédit Mutuel sont actuellement effectués à l'aide des tables réglementaires fournies par le BCAC en 1996.

Ces tables n'étant pas toujours adaptées aux comportements des populations assurées, le groupe a souhaité construire des tables d'expérience basées sur l'étude des portefeuilles concernés pour connaître l'impact engendré par leurs éventuelles utilisations sur le niveau de tarification et de provisionnement.

L'objectif de cette étude était donc de construire trois types de table: une table d'entrée en incapacité, une table de maintien en incapacité et une table de passage en invalidité.

Les lois d'entrée ont été modélisées grâce à l'estimateur des moments de Hoem qui combine facilement le nombre de sinistres observés et la durée d'exposition au risque de chaque assuré. Puis les lissages des différentes courbes ont été effectués par la méthode non-paramétrique de Whittaker-Henderson. Les résultats ont montré que la constitution du portefeuille joue énormément sur les résultats obtenus et que deux types de segmentation s'avèrent indispensables, selon l'âge d'une part et la durée de franchise souscrite d'autre part.

La construction des tables de maintien en incapacité et de passage en invalidité a été un peu plus délicate dans la mesure où le nombre de données observées s'est considérablement réduit. Nous avons ainsi construit une table unique pour chaque portefeuille étudié en utilisant l'estimateur de Kaplan-Meier et la technique de lissage de Whittaker-Henderson adaptée à la double dimension. En s'aidant de la table du BCAC, nous avons ensuite pu extrapoler nos résultats aux âges extrêmes.

Enfin, nous avons effectué une étude comparative des tables que nous avons à disposition. Il s'est avéré que les fréquences d'entrée du portefeuille de prévoyance individuelle étaient beaucoup plus importantes que celles du portefeuille emprunteur. L'explication vient tout d'abord du fait qu'en prévoyance individuelle, l'assureur est confronté au phénomène d'anti-sélection et ensuite du fait qu'en emprunteur, le banquier effectue une première sélection au moment d'accorder un prêt.

Quant aux tables de maintien et de passage, nous avons constaté qu'elles n'étaient pas très similaires à celles proposée par le BCAC pour le calcul des provisions et que, par l'utilisation de cette dernière, l'assureur était souvent amené à sous provisionner ou sur provisionner selon les cas.

Abstract

Quoting and reserving disability of the loan insurance portfolio and the life insurance portfolio of Insurance Group Credit Mutuel are currently made by using regulatory tables supplied by the BCAC in 1996.

These tables being not always suited to the behavior of the insured population, the group wanted to build experience tables based on the study of the relevant portfolio in order to know the impact caused by their possible uses on the tariffs and reserving. The objective of this study was to build three types of tables: a temporary disablement entry table, a temporary disablement recovery table and a transition table to permanent disablement.

The disability entry laws were modeled with the Hoem estimator that combines easily the number of claims reported and the duration of risk exposure of each insured. Then the smoothing of the different curves has been made by the nonparametric method of Whittaker-Henderson. The results showed that the characteristics of the portfolio have a big influence on the results and two types of segmentation are thus essential, according to the age on one hand and waiting period purchased on the other hand.

The construction of temporary disablement recovery tables and transition to permanent disablement was a little more complicated as far as the number of observed data was considerably reduced. So, we built a unique table for every studied portfolio by using the Kaplan-Meier estimator and the method of graduation of Whittaker-Henderson adapted to the double dimension. By using the table of the BCAC, we were then able to extrapolate our results at the extreme ages.

Finally, we conducted a comparative study of the available tables. It turned out that the entry frequencies of life insurance portfolio were much higher than those of the loan insurance portfolio. The explanation comes firstly by the fact that in life insurance, the insurer is faced with the phenomenon of adverse-selection and secondly by the banker selection at the time to grant the credit.

As for recovery and transition tables, we found that they were not very similar to those proposed by the BCAC for the calculation of reserves and that, by the use of the latter, the insurer was often forced to a not adapted reserving, not less or too much as appropriate.

INTRODUCTION

Les garanties couvrants le risque "arrêt de travail" en cas d'incapacité et d'invalidité et proposées à travers les contrats d'assurance de personnes, sont des éléments majeurs que se doit de gérer une compagnie d'assurance, dans la mesure où les niveaux de cotisations gérées et de prestations versées sont en perpétuelles augmentations.

À ce titre, dès 1996, la législation a imposé aux assureurs l'utilisation de tables réglementaires pour les différents calculs de provisionnement relatifs à ce risque. Ces tables proviennent d'études réalisées par le Bureau Commun des Assurances Collectives (BCAC) sur une population particulière d'assurés collectifs des principales compagnies françaises d'assurance.

Malheureusement, ces tables ne sont pas toujours adaptées aux portefeuilles gérés par les assureurs dans la mesure où la sinistralité observée peut, d'une part, s'avérer très différente selon la population assurée, et d'autre part, avoir beaucoup évolué depuis les années d'observation ayant servies à leur conception.

De ce fait, l'*article A 331-22* du code des assurances permet aux assureurs d'utiliser après certification leurs propres tables d'expérience construites sur la base de données propres au portefeuille. Le processus de certification étant cependant long et complexe, l'assureur préfère souvent utiliser ses tables d'expériences pour connaître l'écart entre le provisionnement par les tables du BCAC et celui qui résulterait des nouvelles tables. De plus, pour les contrats collectifs, les tables servant à la tarification n'ont pas besoin d'être certifiées et les tables d'expérience peuvent alors permettre la tarification de nouveaux contrats.

Les Assurances du Crédit Mutuel ayant eu le besoin de construire de telles tables pour leurs portefeuilles d'assurance emprunteur et de prévoyance individuelle, nous avons ainsi procédé à leurs constructions au moyen de différentes étapes que nous détaillerons à travers ce document.

Nous débuterons ainsi par une présentation générale des contextes étudiés tels que l'entreprise, les garanties offertes sur les différents portefeuilles et les définitions des risques incapacité et invalidité. Nous décrirons ensuite les données utilisées en évoquant notamment les difficultés de traitement rencontrées et les caractéristiques des portefeuilles étudiés.

L'étude se poursuivra avec trois parties correspondant aux démarches entreprises pour les constructions respectives de la table d'entrée en incapacité, de la table de maintien en incapacité et de la table de passage en invalidité. Enfin, nous analyserons les résultats obtenus en comparant les différentes tables construites et celles du BCAC, permettant ainsi de faire ressortir les différences entre les caractéristiques des portefeuilles et les écarts de provisionnement ou de tarification entre l'utilisation de tables d'expérience et celles du BCAC.

1.1 Présentation de l'entreprise

1.1.1. Le Groupe Crédit Mutuel- CIC

Le Crédit Mutuel, est depuis plus de 100 ans une banque coopérative et mutualiste conçue par et pour ses sociétaires. Ces derniers sont à la fois les copropriétaires et les clients (une part sociale est souscrite lors de l'adhésion à la caisse).

Après l'acquisition du CIC par le biais de sa holding la Banque Fédérale du Crédit Mutuel (BFCM), le groupe a fait place au groupe CM-CIC. Celui-ci est devenu un acteur majeur de la banque en France.

1.1.2. Les ACM et son périmètre d'activité

L'une des filiales du Crédit Mutuel, le groupe ACM (Assurances du Crédit Mutuel, créé à l'origine par le Crédit Mutuel en 1971), rassemble les métiers de l'assurance tels que : l'assurance dommages, l'assurance vie, le courtage d'assurance, la réassurance. L'activité a débuté avec les assurances de prêts, suivies par les assurances automobiles et habitations. La gamme s'est progressivement enrichie des contrats de santé, de prévoyance et d'assurance vie destinés aux particuliers, aux professionnels, aux entreprises et aux associations.

Aujourd'hui les contrats sont diffusés sur la totalité du territoire. A fin 2009, le chiffre d'affaire du groupe s'élève à 8 Md€, en progression de 20% par rapport à 2008.

Avant de présenter plus en détails le cadre des assurances emprunteurs et de prévoyance individuelle dans lequel s'est déroulée cette étude, nous allons évoquer la spécificité du groupe Crédit Mutuel à travers la gestion de ses différentes fédérations.

1.1.3. Les fédérations

Le Crédit Mutuel et le CIC sont répartis en 21 fédérations qui sont chacune assurées par les ACM. Les différentes caisses se rattachent à elles selon leur région. Les fédérations sont des entités politiques et mutualistes qui décident et mettent en place des stratégies, déterminent les grandes orientations et exercent un contrôle sur les Caisses adhérentes. Chacune adhère à une Caisse Fédérale qui gère la trésorerie des Caisses.

Même si la tendance est aujourd'hui au regroupement des Caisses pour dégager des synergies et des moyens pour le développement, toutes les spécificités des fédérations d'origine ne peuvent être regroupées en une seule.

Cela a donc été un point important dans le choix du périmètre de notre étude car il existe des fédérations qui ne sont pas assurées par les ACM. De plus, chaque fédération pouvait

façonner un contrat d'assurance à sa manière, et il est donc normal de retrouver des conditions générales différentes d'une fédération à une autre. Nous verrons durant l'étude qui suit certains exemples concrets.

1.2 Vocabulaire

Nous consacrons une petite partie de ce chapitre aux deux définitions importantes qui reviendront constamment dans cette étude.

- **Franchise**

La franchise est la période suivant la survenance de l'événement, pendant laquelle la prise en charge n'est pas activée. Pour donner lieu à indemnisation, le sinistre doit être continu et supérieur à la franchise.

- **Délai de carence**

Période pendant laquelle les garanties ne sont pas en vigueur. La garantie est acquise après le délai de carence. En cas d'accident, certains contrats ne prévoient pas l'application du délai de carence.

Nous pouvons résumer les 2 définitions par le schéma suivant :

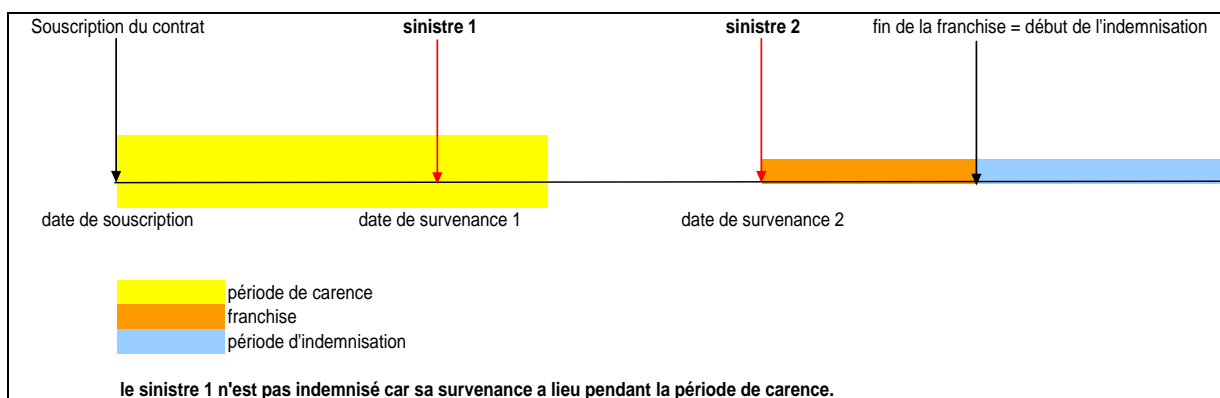


Figure 1 : Définitions de la franchise et du délai de carence

1.3 L'assurance Emprunteur

1.3.1. Les principes

L'assurance emprunteur, aussi dénommée assurance en couverture de prêt, est une assurance de risques dont l'objectif est de sécuriser les crédits. Elle est avant tout une

assurance en cas de décès souscrite sur la tête des emprunteurs et est souvent accompagnée par des garanties d'assurances de personnes complémentaires couvrant également les risques d'incapacité temporaire, d'invalidité et de perte d'emploi. Cette assurance est une sorte de garant, elle se substitue à l'emprunteur dans le cas où un sinistre prévu au contrat devait se réaliser : l'assureur s'engage alors à couvrir le non-paiement, temporaire ou définitif, des échéances à l'établissement prêteur. L'organisme créancier est donc le bénéficiaire du contrat d'assurance et perçoit directement les prestations.

L'assurance emprunteur permet d'une part, au souscripteur du contrat de se protéger contre les aléas de la vie en préservant son bien, et d'autre part, de fiabiliser le montage financier en permettant de continuer à rembourser l'organisme prêteur en cas de défaillance de l'emprunteur, en garantissant sa solvabilité (uniquement par rapport aux garanties souscrites).

Nous distinguons trois types de prêt sur le marché :

- Les prêts **immobiliers** pour financer l'achat d'un bien immobilier (appartement ou maison)
- Les prêts **professionnels** pour financer tout investissement corporel ou incorporel (terrain, construction, travaux, matériel, fonds de commerce) à vocation professionnelle
- Les prêts à la **consommation** pour financer des achats moins onéreux : (Voiture, aménagement de la maison,...)

A l'occasion d'une demande de crédit immobilier, les banques ne peuvent plus imposer au consommateur d'adhérer au contrat d'assurance emprunteur qu'elles commercialisent. En effet, la loi Lagarde du 25 novembre 2008 (à effet du 1er Janvier 2009,) obligent les établissements bancaires et les assureurs à fournir à leurs clients une fiche d'information standardisée sur l'assurance de prêt. Cette réforme permet d'améliorer l'accès à l'information des emprunteurs pour pouvoir comparer les offres d'assurance avec celle proposée par la banque.

De plus, depuis le premier semestre 2010, le consommateur peut librement choisir son assurance emprunteur à condition que l'assurance de son choix présente des garanties équivalentes à celles proposées par la banque.

1.3.2. Les primes et les prestations du produit étudié

Les souscripteurs de contrats d'assurance emprunteur vont payer une prime périodique (mensuelle, trimestrielle, semestrielle ou annuelle). En contrepartie, l'assureur s'engage à les aider dans le remboursement de leur crédit s'ils sont confrontés à un sinistre.

Le tarif proposé dépend ainsi de plusieurs paramètres:

- Le montant du prêt
- Les risques couverts
- Le nombre de têtes assurées sur le contrat
- L'âge des assurés
- La quotité choisie
- La durée de franchise : un supplément de prime peut être exigé par l'assureur lorsque la sélection médicale décèle l'existence d'un risque aggravé.
- La hauteur de garantie
- La profession de l'assuré
- Fumeur/ Non Fumeur

Les prestations versées par l'assureur vont alors varier selon le risque survenu:

- En cas de décès, l'assureur va rembourser l'intégralité du prêt en proportion de la quotité choisie à la souscription
- En cas d'incapacité ou de chômage, l'indemnisation est calculée selon la perte de revenu de l'assuré suite au sinistre, et débute après la durée de franchise.
- En cas d'invalidité, le montant indemnisé va dépendre du degré d'invalidité du sinistré qui entraînera le choix d'une indemnisation par rente ou d'un remboursement total du prêt.

Nous noterons que les garanties chômage, incapacité et invalidité sont soumis à un délai de carence durant lequel le risque peut ne pas être assuré.

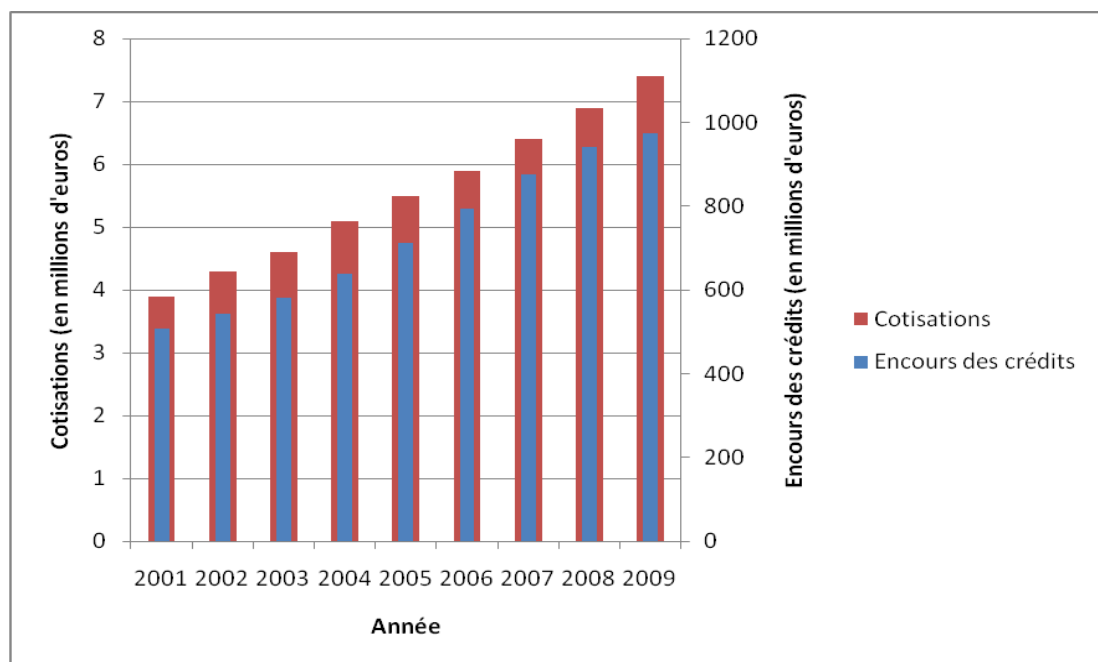
Nous développerons plus en détails les prestations liées à l'incapacité et l'invalidité dans un prochain paragraphe.

Intéressons nous à présent au marché des assurances emprunteurs en donnant quelques chiffres.

1.3.3. *Le marché français*

- **Les cotisations**

Le marché de l'assurance emprunteur est, bien entendu, très lié à celui des crédits. Nous constatons donc, à travers les deux graphiques suivants, que l'évolution des cotisations suit fortement celle de l'encours des prêts accordés en France par les établissements de crédit.



Graphique 1 : Evolution des cotisations d'assurance et des encours de crédit de 2001 à 2009
 Source : FFSA-GEMA, [Juillet 2010], Les contrats d'assurance emprunteur en 2009

Ainsi, les cotisations sont en constantes hausses et représentaient en 2009, 0,8% de l'encours des crédits en France.

- **La répartition des cotisations**

Pour l'année 2009, les cotisations d'assurance emprunteur selon le type de prêts se répartissaient de la façon suivante:

- 66% pour les prêts immobiliers (4 896 millions d'euros)
- 26% pour les prêts à la consommation (1 922 millions d'euros)
- 8% pour les prêts professionnels (552 millions d'euros)

En ce qui concerne le type de garantie, la répartition en 2009 était la suivante:

- 69% pour les garanties décès (5 018 millions d'euros)
- 28% pour les garanties incapacité-invalidité (2 042 millions d'euros)
- 3% pour les garanties perte d'emploi (220 millions d'euros)

La part des garanties incapacité-invalidité est plus importante pour les prêts professionnels (32%) que pour les prêts immobiliers (29%) et les prêts à la consommation (24%). A l'inverse, la part des garanties perte d'emploi est plus importante pour les prêts à la consommation (6%) que pour les prêts immobiliers et professionnels (respectivement 2% et 1%).

1.3.4. Le marché des ACM

Les assurances emprunteurs, avec 780 millions d'euros de chiffre d'affaire en 2009, représentent 9,3% du chiffre d'affaire du groupe ACM et 47% du chiffre d'affaire relatif aux assurances de personnes. L'année 2009, encore touchée par la mauvaise conjoncture économique, a été marquée par une courte progression de 2,5% et le nombre de contrats en cours à la fin d'année s'élevait à 3,9 millions.

1.4 La prévoyance individuelle

1.4.1. Les principes

Les contrats de prévoyance individuelle ont pour but de permettre aux assurés de faire face aux difficultés financières rencontrées lors de la survenance d'un dommage corporel tel que :

- Le décès
- L'incapacité
- L'invalidité
- La dépendance

A l'instar des assurances emprunteur, l'assuré va donc être indemnisé au moment du sinistre. Cependant, cette somme n'est pas destinée à rembourser une dette mais à se prémunir contre des problèmes financiers futurs auxquels seront confrontés l'assuré lui-même ou ses proches.

Nous noterons que la plupart du temps, les contrats dépendance sont vendus séparément des autres garanties, car ils viennent souvent en relais de la garantie invalidité. Le produit que nous étudierons garantit ainsi les trois premiers risques énoncés.

De tels contrats d'assurance sont destinés aux personnes qui n'ont pas encore eu la possibilité de souscrire à de telles couvertures. Ainsi, celles qui sont déjà couvertes par les contrats à adhésion collective obligatoire de leur entreprise n'ont aucune raison de s'y intéresser. Nous retrouverons donc des personnes qui n'ont pas souscrits aux régimes facultatifs de leur entreprise et qui ont préféré chercher leur propre couverture ou des personnes qui n'ont aucune possibilité de couverture à travers leur entreprise et qui sont principalement des salariés de petites entreprises ou des patrons TNS (Travailleur Non Salarié).

Il est important de noter que le mode de souscription, et par conséquent le profil des assurés, diffèrent beaucoup de ceux du portefeuille emprunteur. En assurance emprunteur, l'assuré est souvent obligé par le banquier à contracter une assurance qui le couvrirait en cas de problèmes. La motivation principale du souscripteur n'est donc pas la souscription du

contrat d'assurance mais celle de l'emprunt. En revanche, en prévoyance individuelle, la souscription des produits est une démarche individuelle où l'assuré estime avoir un besoin de s'assurer contre des soucis de santé futurs. S'il n'en a jamais connus mais sent qu'il peut y être prochainement exposé, il va choisir de souscrire une telle assurance. L'assureur ne peut alors savoir avec exactitude quels sont les risques auxquels il est exposé à travers la couverture de cette personne. C'est ce qu'on appelle le phénomène d'**anti-sélection**.

1.4.2. Les primes et prestations du produit étudié

L'adhésion à un tel contrat est conclue pour une durée d'un an; elle se renouvelle par tacite reconduction d'année en année jusqu'à l'âge limite fixée pour chaque garantie.

- **Les primes**

Le montant de la cotisation est déterminé en fonction de plusieurs paramètres:

- Le montant garanti, choisi par le souscripteur du contrat
- L'âge de l'assuré
- La profession de l'assuré
- Les garanties souscrites (détaillées ci-dessous dans les prestations)
- L'état de santé
- La durée de franchise
- La durée de paiement garantie
- L'option invalidité (au choix de l'assuré)

- **Les prestations**

Quant aux prestations versées par l'assureur, elles varient selon les garanties:

La garantie décès/ PTIA (Perte totale et irréversible d'autonomie)

En cas de décès de l'assuré ou de PTIA, avant l'échéance principale suivant le 75^e anniversaire de l'assuré, l'assureur verse au bénéficiaire du contrat le capital défini au moment de l'adhésion.

Le paiement de ce capital met alors fin au contrat.

La garantie doublement du capital décès/PTIA en cas d'accident

L'assureur verse un capital supplémentaire égal au capital décès/PTIA en cas de décès ou PTIA survenu à la suite d'un accident et dans les 12 mois qui suivent cet accident.

La garantie rente éducation en cas de décès/PTIA

En cas de décès/PTIA, l'assureur verse à chacun des enfants désignés la rente mensuelle choisie par le souscripteur au moment de l'adhésion.

La garantie rente au conjoint en cas de décès/PTIA

En cas de décès/PTIA, l'assureur verse au conjoint la rente mensuelle choisie par le souscripteur au moment de l'adhésion.

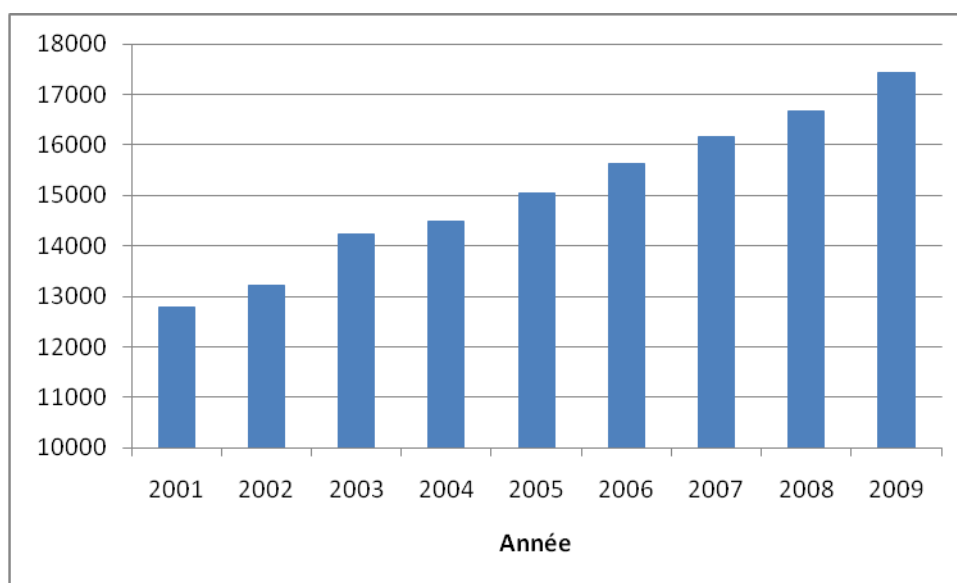
Les garanties incapacité et invalidité

Comme elles font l'objet de notre étude, nous définirons en détail ces garanties dans un prochain paragraphe.

A l'image de ce que nous avons présenté dans la partie emprunteur, nous allons donner quelques chiffres sur le marché national et le marché des ACM dans le domaine de la prévoyance individuelle.

1.4.3. Le marché français

Pour résumer l'évolution du marché français, nous donnerons des chiffres sur le nombre de contrats décès à adhésion individuelle car ils s'allient souvent à des garanties incapacité/invalidité. Ils sont résumés sur le graphique suivant :



Graphique 2: Evolution du nombre de contrats décès en France
Source : FFSA-GEMA, [2010], Rapport annuel 2009

Nous voyons clairement que le marché est en constante progression.

1.4.4. Le marché des ACM

La prévoyance individuelle, avec 263 millions d'euros de chiffre d'affaire en 2009, représente 3,2% du groupe et 16% du secteur des assurances de personnes. Sa progression est constante chaque année (+6,8% en 2009) et elle comptait à la fin d'année plus de 4 millions de contrats en cours.

1.5 Les garanties en cas d'incapacité et d'invalidité

Notre étude portant sur ces deux types de garantie, il est important de définir avec précision comment elles sont gérées en termes de prestations. Les conditions générales rédigées par les assureurs font très souvent références aux définitions des risques et aux prestations versées par les différents régimes de sécurité sociale. Il nous a ainsi paru important de commencer cette section par une revue générale de la prise en charge de la Sécurité Sociale, avant de décrire la prise en charge des ACM à travers les contrats emprunteurs et les contrats de prévoyance individuelle.

1.5.1. La prise en charge de la Sécurité sociale

- **L'incapacité temporaire de travail**

Définition

Est défini en incapacité de travail, l'assuré qui, par suite de maladie, ou accident, est contraint d'interrompre totalement ou partiellement son activité professionnelle.

Prestations

L'article R323-1 du Code de la Sécurité Sociale nous donne les précisions sur les prestations versées en cas d'incapacité par l'assurance Maladie et qui ont pour but de compenser la perte de salaire pendant l'arrêt de travail.

Une personne salariée en incapacité temporaire peut ainsi percevoir des indemnités journalières après un délai de franchise de trois jours. Cependant, en cas d'accident du travail, l'article L433-1 précise que cette durée de franchise est supprimée.

L'assuré peut bénéficier d'un nombre maximum d'indemnités journalières, sur une période maximale de trois ans.

Cette indemnité journalière de travail est égale à 50 % du salaire journalier de base qui est calculé sur la moyenne des salaires bruts des trois derniers mois travaillés précédant l'arrêt

de travail, plafonnée à 2885 euros (montant du plafond mensuel de la sécurité sociale au 1er janvier 2010).

Si l'assuré est salarié intérimaire ou saisonnier, le montant de ses indemnités journalières sera calculé sur la moyenne des salaires des douze mois précédant son arrêt, toujours dans la limite du plafond mensuel de la sécurité sociale.

Le montant maximum accordé au titre de l'indemnité journalière par l'Assurance Maladie est donc de 48,08 euros par jour (au 1er janvier 2010).

Les prélèvements sociaux

Les indemnités journalières sont soumises aux prélèvements sociaux :

- 0,5 % déduit au titre de la contribution au remboursement de la dette sociale (CRDS)
- 6,2 % au titre de la contribution sociale généralisée (CSG)

Les indemnités journalières sont également soumises à l'impôt sur le revenu, sauf si elles sont en lien avec une affection de longue durée.

• **L'invalidité**

Les conditions d'attribution de la pension d'invalidité

Si une personne est dans l'incapacité de reprendre son travail après un accident ou une maladie invalidante d'origine non professionnelle, il peut percevoir une pension d'invalidité en remplissant les conditions suivantes :

- Il a moins de 60 ans.
- Sa capacité de travail ou de revenus est réduite d'au moins 2/3.
- Il est immatriculé depuis au moins 12 mois au moment de l'arrêt de son travail suite à son invalidité ou au moment de la constatation de son invalidité par le médecin conseil de sa caisse d'Assurance Maladie.
- Il a effectué au cours des 12 mois qui précèdent son arrêt de travail pour invalidité ou constatation d'invalidité au moins 800 heures de travail salarié, ou s'il a perçu un salaire au moins égal à 2 030 fois le SMIC horaire (dont au moins 1 015 fois le SMIC horaire au cours des 6 premiers mois).

L'état d'invalidité est constaté :

- Trois ans maximum après avoir perçu des indemnités journalières maladie sans interruption, à condition que son état soit stabilisé.
- Ou dès la constatation de la stabilisation de son état avant l'expiration de ces trois ans.
- Ou au moment de la constatation médicale de l'invalidité lorsqu'elle résulte de l'usure prématurée de l'organisme.

C'est le service médical de la caisse d'Assurance Maladie qui effectue un examen médical pour évaluer le degré d'invalidité.

Montant et versement de la pension d'invalidité

Il existe trois catégories de pension d'invalidité, selon la capacité à exercer une activité professionnelle. Elles sont décrites dans l'article L341-4 du Code de la Sécurité Sociale.

- **1^{ère} catégorie** : Invalides capables d'exercer une activité professionnelle rémunérée.
- **2^{ème} catégorie** : Invalides absolument incapables d'exercer une activité professionnelle quelconque
- **3^{ème} catégorie** : invalides qui, étant absolument incapables d'exercer une profession, sont, en outre, dans l'obligation d'avoir recours à l'assistance d'une tierce personne pour effectuer les actes ordinaires de la vie.

Pour calculer la pension d'invalidité, l'Assurance Maladie prend en compte le salaire annuel moyen à partir des dix meilleures années d'activité (salaires soumis à cotisations dans la limite du plafond annuel de la sécurité sociale). Les différents montants sont résumés dans le tableau suivant :

Montants des pensions d'invalidité au 1er avril 2010	Calcul de la pension en % sur la base du salaire annuel moyen perçu pendant les dix meilleures années d'activité	Montant mensuel minimum	Montant mensuel maximum
Pension d'invalidité de 1^{ère} catégorie	30%	265,14 euros	865,50 euros
Pension d'invalidité de 2^e catégorie	50%	265,14 euros	1 442,50 euros
Pension d'invalidité de 3^e catégorie	50% + majoration pour tierce personne + majoration pour tierce personne	265,14 euros + 1 038,36 euros	1 442,50 euros + 1 038,36 euros

Tableau 1 : Montants perçus par la Sécurité Sociale en cas d'invalidité

Les prélèvements fiscaux et sociaux

La pension d'invalidité est soumise à l'impôt sur le revenu, sauf pour la « majoration forfaitaire pour tierce personne ».

Le montant de la pension est également soumis aux prélèvements sociaux :

- 0,5 % au titre de la Contribution au remboursement de la dette sociale (CRDS).
- 6,6 % au titre de la Contribution sociale généralisée (CSG).

L'assuré peut cependant payer moins ou être exonéré d'imposition dans les situations suivantes :

- Il n'est pas redevable de la taxe d'habitation : il est exonéré de la CRDS et de la CSG.
- Il est redevable de la taxe d'habitation et sa cotisation d'impôt est inférieure à 61 euros : la CSG ne sera prélevée sur sa pension qu'au taux de 3,8 %.
- Sa pension d'invalidité est complétée par l'allocation supplémentaire d'invalidité (ASI) : il est exonéré d'imposition et de prélèvements sociaux.
- Il ne réside pas fiscalement en France : il est également exonéré d'imposition et de prélèvements sociaux.

Après ces précisions sur la prise en charge de la Sécurité Sociale, nous allons voir que les définitions utilisées par les ACM dans les différents contrats ne sont pas tout à fait équivalentes. Nous commencerons par détailler les garanties dans le cadre des produits emprunteurs puis dans celui de la prévoyance individuelle.

1.5.2. La prise en charge des ACM dans le cas des produits emprunteurs

- **L'incapacité**

Définition

Le risque incapacité pris en charge par les ACM est le risque incapacité temporaire totale de travail (ITT). Il est défini de la manière suivante:

"Est considéré en état d'ITT, l'emprunteur qui se trouve, par suite de maladie ou d'accident, avant le 31 décembre de son 65^e anniversaire ou avant liquidation de sa retraite si celle-ci intervient avant 65 ans, dans l'impossibilité physique constatée médicalement, d'exercer son activité professionnelle ou contraint d'observer un repos complet pour les emprunteurs n'exerçant pas d'activité professionnelle au jour du sinistre."

La constatation de l'incapacité se base donc sur les termes de la Sécurité Sociale.

Les prestations

L'assuré se verra indemnisé après une durée de franchise pouvant être égale à 90 et 180 jours, durée qui diffère selon les fédérations et les choix de l'assuré. Cependant, cette durée peut être ramenée à 15 ou 30 jours si l'emprunteur exerce une activité médicale ou paramédicale à titre libéral. Nous noterons que la durée de franchise ne varie pas selon la nature du sinistre (Accident, Maladie, Hospitalisation).

L'indemnisation correspond à l'échéance garantie du prêt et intervient sous forme d'indemnités journalières calculées au prorata des jours d'arrêt de travail et selon le rythme de versement des échéances (1/30^e si mensuel, ..., 1/360^e si annuel).

Toutefois, ce montant ne peut être supérieur à la perte de revenu subie par l'emprunteur qui est la différence entre le revenu de référence de l'assuré avant l'arrêt de travail et son revenu de remplacement, avec néanmoins un montant minimum versé par l'assureur fixé à 50% de l'échéance garantie.

Le revenu de référence est ici égal à la moyenne des salaires ou traitements nets perçus au cours des douze derniers mois précédant l'arrêt de travail. Les primes, frais de mission et autres avantages financiers imposables faisant partie intégrante de la rémunération entrent dans le calcul du salaire.

Le revenu de remplacement est égal au montant mensuel des revenus perçus pendant la période d'incapacité de travail (rémunérations, traitements ou indemnités versés par l'employeur, indemnités journalières de la Sécurité Sociale, prestations versées par des organismes de prévoyance complémentaire obligatoires).

Le versement s'arrête soit en cas de reprise d'une activité par l'emprunteur et/ou en cas d'interruption du paiement des prestations par la Sécurité Sociale, soit si la durée d'indemnisation a atteint 1095 jours, soit si la personne a atteint 65 ans ou a liquidé sa retraite. Il existe toutefois des cas spéciaux (Reprise à mi temps, congé longue durée) où ce règlement ne s'applique pas.

- **L'invalidité**

Le risque invalidité diffère quelque peu par rapport à celui de la Sécurité Sociale et les définitions varient selon les générations de contrats.

La première génération prenait pour définition de l'invalidité celle de la 2^{ème} catégorie de la Sécurité Sociale vue plus haut, ou correspondant à une invalidité fonctionnelle supérieure à 66% pour les non salariés.

Dans un tel cas, l'assureur garantissait le paiement des échéances restant dues à partir de la date de reconnaissance de l'invalidité.

La deuxième génération de contrat modifiait la définition de l'invalidité en introduisant la notion d'invalidité permanente et partielle (**IPP**) qui se distingue complètement des catégories d'invalides de la Sécurité Sociale

La définition est la suivante: "L'IPP est la perte définitive d'une part significative ou totale de la capacité d'exercer toute activité rémunérée suite à une atteinte corporelle, par maladie ou par accident survenant avant le 31 décembre de l'année du 65^e anniversaire ou avant la liquidation de la retraite. »

Dans ce cas, l'assureur ne garantit plus le paiement de toutes les échéances restant dues, mais verse une rente (avec fin au décès ou au 65^e anniversaire) dont le montant va dépendre de la base de remboursement décrite pour l'ITT auquel est appliqué un taux de prise en charge. Ce dernier va être évalué par un médecin expert désigné par l'assureur, qui, en combinant le taux d'incapacité fonctionnelle physique ou mentale avec le taux d'incapacité professionnelle de l'assuré, déterminera le taux de prise en charge. Il est résumé dans le tableau suivant:

Taux de prise en charge	Taux d'incapacité fonctionnelle										
	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%	
Taux d'incapacité professionnelle	10%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	11%	21%	31%	41%
20%	0%	0%	0%	0%	12%	26%	40%	53%	65%	77%	
30%	0%	0%	0%	10%	18%	44%	60%	75%	89%	100%	
40%	0%	0%	0%	21%	41%	59%	76%	92%	100%	100%	
50%	0%	0%	8%	31%	52%	71%	90%	100%	100%	100%	
60%	0%	0%	15%	39%	61%	82%	100	100%	100%	100%	
70%	0%	0%	21%	46%	69%	91%	100%	100%	100%	100%	
80%	0%	0%	26%	53%	77%	100%	100%	100%	100%	100%	
90%	0%	0%	31%	59%	84%	100%	100%	100%	100%	100%	
100%	0%	4%	36%	65%	91%	100%	100%	100%	100%	100%	

Tableau 2 : Taux de prise en charge du risque IPP

Remarque :

Ce tableau a récemment été modifiée pour ne faire apparaître que des valeurs égales à 0, 50 ou 100%.

Les décisions prises par la Sécurité Sociale ou tout autre organisme similaire ne s'appliquent donc pas à l'assureur.

1.5.3. La prise en charge des ACM dans le cas des produits de prévoyance individuel

- L'incapacité

Définition

La définition de l'incapacité est la même que celle vue précédemment dans le cadre des contrats emprunteurs, seule la date de terme est changée et n'est pas le 31/12 du 65^e anniversaire mais l'échéance principale suivant le 65^e anniversaire.

Prestations

➤ **Montant indemnisé**

Le souscripteur choisit à l'adhésion le montant d'indemnités journalières qu'il souhaite recevoir en cas d'incapacité. Ce montant s'échelonne de 10 à 150€ avec une limite fixée à 0,10% du capital décès souscrit.

A la survenance du sinistre, l'assureur lui verse donc ses indemnités. Toutefois, le montant versé, cumulé à celui de tout autre organisme, ne peut excéder le revenu imposable de l'assuré de l'année précédant l'arrêt de travail.

➤ **Période indemnisée**

Selon les différentes générations de contrats, l'assuré a plus ou moins le choix sur la durée de franchise et la durée d'indemnisation maximale.

Ainsi, la première génération avait une offre de base avec une franchise de 30 ou 90 jours, qui se réduisait en cas d'hospitalisation de plus de 3 jours à la durée séparant l'arrêt de travail au premier jour d'hospitalisation. La durée d'indemnisation était de 1095 jours au maximum.

La deuxième génération donnait la possibilité de choisir une durée de franchise entre 15, 30 et 90 jours, ramenée respectivement à 0, 30 et 90 jours en cas d'accident, et une durée d'indemnisation maximale de 365, 730 ou 1095 jours.

Enfin la troisième génération donne la possibilité d'une durée de franchise égale à 15, 30 ou 90 jours ramenée à chaque fois à 3 jours en cas d'accident.

La répartition entre les différentes franchises sera présentée au *paragraphe 2.2.1*.

Nous verrons plus tard que ces différences entre les contrats viennent compliquer notre étude.

• **L'invalidité**

Définition

Elle ne varie pas selon les générations de contrats et est identique à la définition de l'IPP, le taux de prise en charge étant égale à celui du

Tableau 2.

Prestations

Une fois le taux d'invalidité défini par expertise médicale, l'assureur verse une rente dont le montant annuel est égal à 365 fois le montant de l'indemnité journalière multiplié par le taux de prise en charge.

Cette rente prend fin au 60^è ou 65^è anniversaire de l'assuré selon la génération de contrat concernée.

Remarque

Alors que cette garantie est toujours couplée à celle de l'incapacité dans les produits emprunteurs, ce n'est ici pas le cas. Les souscripteurs ont donc la possibilité de se garantir contre l'incapacité sans avoir l'obligation de se garantir contre l'invalidité.

1.6 Rappel de la problématique

Le but premier des différentes autorités de contrôle des assureurs européens, et donc celui du projet de loi européen Solvabilité 2, est de protéger les assurés contre les risques de faillite des entreprises d'assurance.

Ceci passe par une gestion adaptée des risques financiers, et donc une tarification et un provisionnement prudents des contrats d'assurance.

A ce titre, la réglementation impose de nombreuses contraintes quant aux modes de calculs à appliquer sur les risques d'incapacité et d'invalidité.

Nous verrons dans cette partie quelles sont les différentes tables réglementaires concernant ces deux risques et quelle est leur utilité. Puis, nous expliquerons l'intérêt de construire des tables d'expérience propres aux portefeuilles étudiés.

1.6.1. Les tables règlementaires du BCAC et leur utilité

- **La législation**

Avant le 31 décembre 1989 et la loi Evin, les assureurs n'étaient soumis à aucune obligation en matière de provisions et le principe de répartition imposait simplement que les primes de l'année couvrent les sinistres de l'année. L'*article 7* de cette loi introduisait alors une obligation de provisionnement mais qui n'était que provisoire en attendant la mise au point de tables de provisions précises.

L'arrêté du 28 mars 1996 a ainsi créé l'*article A 331-22* du Code des Assurances qui précise le mode de calcul à appliquer pour les différentes provisions concernées et les possibilités néanmoins laissées à l'assureur. Un extrait de cet article est consultable dans l'[Annexe 1](#).

Nous y constatons que les tables « en annexe » indiquées dans cet article sont celles qui ont été mises à disposition par le BCAC dès 1993.

Nous décrivons donc plus en détails ces tables ainsi que la nature des provisions à constituer.

- **Les différentes tables**

Table de maintien en incapacité

Cette table permet de connaître la probabilité qu'une personne tombée incapable à l'âge x , reste au moins t mois dans cet état.

Table de passage en invalidité

Elle donne la probabilité qu'une personne tombée incapable à l'âge x , bascule dans l'état d'invalidité au bout de t mois.

Ces deux premières tables sont segmentées par âge à l'entrée (de 20 à 64 ans) et par ancienneté en mois d'incapacité (de 0 à 36 mois). La limite a été fixée à 36 mois car cela correspond à la durée maximale pendant laquelle l'assuré peut recevoir des prestations de la Sécurité Sociale.

Table de maintien en invalidité

Elle donne la probabilité qu'une personne rentrée en invalidité à l'âge x reste au moins t années dans cet état.

Cette table est déclinée selon l'âge à l'entrée (20 à 59 ans) et l'ancienneté dans l'état (de 0 à 10 ans). Elle s'arrête à 59 ans car les garanties pour invalidité ont longtemps pris fin à cet âge et est discrétisée annuellement selon l'ancienneté car l'invalidité est un risque long et une discrétisation mensuelle n'était pas adaptée.

- **Les provisions concernées**

Ces tables permettent donc de calculer différentes provisions relatives aux risques incapacité/invalidité.

Provision pour risques croissants (PRC)

En assurance emprunteur, les primes versées par l'assuré sont nivelées, c'est-à-dire qu'elles sont constantes pendant toute la période d'emprunt. L'engagement de l'assuré est donc stable alors que le risque qu'il fait supporter à l'assureur est croissant avec l'âge. La différence entre l'engagement de l'assuré et celui de l'assureur va alors, au fur et à mesure, passer du positif au négatif. La PRC a donc ici pour objet de prendre en compte l'augmentation du risque de morbidité avec l'âge de l'assuré lorsque la prime ne peut être ajustée.

Provisions pour sinistres à payer (PSAP)

Pour les assurés bénéficiaires au 31 décembre de l'exercice de prestations d'incapacité temporaire, l'assureur doit constituer des PSAP qui sont de deux natures différentes :

- Une provision correspondant aux prestations d'incapacité temporaire à verser après l'expiration de l'exercice au titre des sinistres en cours au 31 décembre ; il s'agit de la **provision pour rentes d'incapacité en cours de service**
- Une provision relative aux rentes d'invalidité susceptibles d'intervenir ultérieurement sur les sinistres d'incapacité en cours au 31 décembre ; il s'agit de la **provisions pour rentes d'invalidité en attente.**

Il existe également une provision pour rentes d'invalidités en cours de service mais nous ne nous y intéresserons pas ici car, faute de données suffisantes, nous ne pourrions établir de table de maintien en invalidité.

1.6.2. L'intérêt des tables d'expérience

Les tables du BCAC ont été construites à partir d'observations menées sur une population particulière (assurés collectifs des principales compagnies françaises d'assurance). Comme les populations assurées peuvent énormément varier d'un type de contrat à un autre, il est logique de penser que la table de maintien n'est pas du tout adapté au risque étudié. De plus, les tables datant de 1993, la sinistralité observée sur les risques incapacité/invalidité a certainement beaucoup évolué depuis.

Les tables d'expérience construites à partir des observations menées sur le portefeuille de l'assureur vont donc permettre d'apprécier de manière plus adaptée les risques supportés.

Ces tables sont d'autant plus utiles qu'il est mentionnée dans l'*article A. 331-22* du Code des assurances (voir *annexe n°1*) qu' "*il est possible pour les entreprises d'assurances d'utiliser une loi de maintien établie par ses soins et certifiée par un actuair e indépendant de cette entreprise, ...* ".

Dans notre cas, ces tables n'ont pas pour but d'être certifiées mais devraient permettre de savoir si les provisions calculées sur les portefeuilles étudiés sont sur ou sous-estimées. De plus, pour les contrats collectifs, les tables servant à la tarification n'ont pas besoin d'être certifiées, les tables d'expérience pourront donc permettre la tarification de nouveaux contrats.

Remarque

Le BCAC n'a pas publié de table d'entrée en incapacité. Ces tables, qui renseignent la probabilité qu'une personne tombe incapable à un âge x doivent donc être établies par les assureurs qui ont la possibilité de les segmenter comme ils le veulent.

Notre étude s'intéressera à la construction et l'analyse des tables d'entrée et de maintien en incapacité, ainsi qu'aux tables de passage en invalidité.

Le schéma suivant permet de bien comprendre les différents états et de voir à quels moments interviennent les différentes tables :

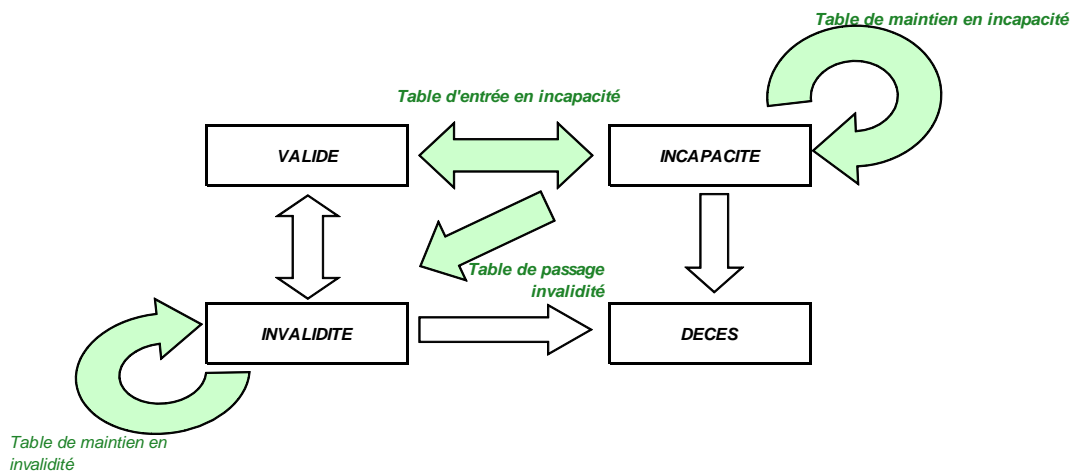


Figure 2: Schéma de passage des différents états

Chapitre 2 : LES DONNEES UTILISEES

La construction de tables d'expérience passe tout d'abord par une bonne manipulation et une bonne qualité des données que l'on a à disposition. Nous verrons donc dans ce chapitre comment ont été sélectionnées et triées les différentes variables afin de nous permettre d'en ressortir des résultats de bonne qualité. Les différents thèmes évoqués seront souvent communs aux deux portefeuilles étudiés, cependant, lorsque cela ne sera pas le cas, nous ferons la distinction entre les deux.

Nous finirons ce chapitre par une analyse descriptive des données manipulées.

Remarque : Pour une meilleure différenciation entre les portefeuilles, nous accorderons la couleur bleue pour les tableaux et graphiques du portefeuille emprunteur et la couleur verte pour les contrats de prévoyance individuelle. Nous reprendrons ce code dans chacun des chapitres.

2.1 La gestion des données

2.1.1. Les tables de données et les variables sélectionnées

- **Les tables utilisées**

Emprunteur

La base de données dont nous allons nous servir pour estimer les différentes lois relatives au contrat emprunteur contient quatre types de table distincts que nous allons définir:

- Cotie : Table répertoriant tous les contrats payant une prime d'assurance, et détaillant les cotisations relatives aux deux premières têtes du contrat
- Pretty5 : Table répertoriant toutes les données bancaires relatives à un prêt assuré
- Pretass : Table définissant toutes les données assurantielles de chaque tête pour chaque prêt

Ces trois premières tables sont en fait scindées par année calendaire. Il en existera donc autant que le nombre d'années étudiées.

- Sini1 : Table unique répertoriant tous les sinistres de toutes sortes sur le portefeuille assuré (date d'inventaire = 01/06/2010)

Prévoyance Individuelle

Nous nous servons uniquement de deux tables sur ce portefeuille:

- TawiDP3: regroupement de table répertoriant toutes les informations sur les contrats et les assurés des 8 dernières années
- Tawbsin: Table des sinistres (date d'inventaire: 31/07/2010)

- **Les variables sélectionnées**

Ces tables vont nous permettre de faire ressortir les variables importantes pour notre étude qui sont les suivantes:

Emprunteur

- Numéro de prêt
- Date de début et de fin du prêt
- Date de naissance de l'assuré
- Sexe
- Date d'entrée et de sortie d'incapacité
- Catégorie Socioprofessionnelle
- Garanties souscrites
- Franchise
- Fédération
- Type de prêt
- Numéro de la tête assurée

Prévoyance individuelle

- Numéro du contrat
- Date d'effet et de fin de l'avenant
- Date de naissance de l'assuré
- Sexe
- Date d'entrée et de sortie d'incapacité
- Catégorie Socioprofessionnelle
- Garanties souscrites
- Franchise

Nous pouvons à présent énoncer les différentes sélections effectuées sur ces variables qui nous ont permis d'ajuster le périmètre d'observation de l'étude.

2.1.2. Le périmètre d'observation

- **Les années sélectionnées**

Table d'entrée

Pour l'étude des taux d'entrée en incapacité, nous allons baser notre étude sur une période d'observation de 5 ans (01/01/2004 → 31/12/2008). En effet, une période trop courte pourrait biaiser les résultats globaux en cas de sinistralité extrême lors d'une année et une période trop longue pourrait biaiser les résultats en prenant en compte un taux de sinistralité trop ancien par rapport aux évolutions récentes du comportement des assurés du portefeuille.

Le fait que la durée d'observation soit un multiple de 12 mois est également préférable car le taux d'entrée en incapacité est différent selon le mois étudié comme nous pourrions le voir à travers les résultats.

Enfin, nous pourrions penser qu'il aurait été judicieux d'intégrer l'année 2009 dans nos études, car elle est la plus récente. Cependant, de nombreux sinistres déclarés tardivement pourraient ne pas figurer dans la table des sinistres actuelle et nous préférons donc ne pas l'analyser.

Tables de maintien en incapacité et de passage en invalidité

Il est important d'avoir une période d'observation qui s'étend sur une durée minimale de 3 ans correspondante à la durée maximale en incapacité. L'idéale serait d'avoir environ deux cycles entiers d'incapacité. Comme pour les taux d'entrée, nous avons choisi comme début de période le 1er Janvier 2004. Nous n'intégrerons dans notre étude que les sinistres survenus après cette date. La fin d'observation sera fixée à la date d'inventaire des fichiers et nous aurons ainsi une durée d'observation de 6 ans et demie.

- **Le type de prêts**

Comme nous l'avons vu dans la présentation des contrats emprunteur, il existe trois types de prêts: immobilier, professionnels et consommation. Du fait que les prêts à la consommation n'aient pas de sélection médicale à la souscription, le risque d'une entrée en incapacité y est forcément plus important. Nous avons donc choisi de ne pas les prendre en compte dans notre étude, les résultats trouvés reflèteront ainsi les taux d'entrée en incapacité de personnes ayant été soumises à une sélection médicale à la souscription du prêt.

- **Le nombre de tête par contrat**

Notre étude portera sur les deux premières têtes assurées du contrat. En effet, la table 'Cotie' ne répertorie que ces deux têtes et par conséquent, nous ne pouvons pas savoir si les têtes supplémentaires sont assurées contre le risque incapacité. Cela n'est pas une grande contrainte car nous pouvons voir ci-dessous que la tête 1 et 2 représentent environ 99.50% des tous les assurés.

Année	Pourcentage des têtes 1 et 2	Pourcentage de têtes supplémentaires
2004	99.58%	0.42%
2005	99.57%	0.43%
2006	99.52%	0.48%
2007	99.50%	0.50%
2008	99.46%	0.54%

Tableau 3 : Répartition des têtes des contrats emprunteurs

- **Les fédérations concernées**

Emprunteur – Table d'entrée

Des problèmes sur les données nous ont poussés à supprimer du champ d'observation certaines fédérations. Les raisons sont les suivantes:

- Les fédérations (13, 23, 45, 46) n'ont vu leurs contrats informatisés qu'en 2004 ou 2009. Bien que les contrats de ces fédérations fussent déjà assurés auparavant par les ACM, il existe tout de même un problème de qualité sur ces données.
- Deux fédérations (49, 52) n'ont été assurées par les ACM qu'à partir de 2001 ou 1999. Le portefeuille n'est donc composé que d'affaires nouvelles où les sinistres sont moins nombreux du fait des sélections très récentes faites sur les contrats (sélection médicale, âge). Nous ne prenons pas en compte ces fédérations qui pourraient fortement biaiser l'étude.
- Une fédération (17) n'est pas assurée aux ACM et les sinistres qui y sont accrochés ne figurent pas dans la table des sinistres.
- La fédération 34 est passée sous un nouveau système informatique ('IDW') en 2007. Ainsi, les sinistres survenus en 2007 et 2008 n'ont pas de correspondance de contrat dans les autres tables et nous ne retrouvons dans nos données que les personnes sinistrées. Pour cette fédération, nous décidons donc de ne garder que les années 2004, 2005 et 2006.

Emprunteur – Table de maintien et de passage

Nous choisissons ici de réintégrer certaines fédérations laissées de côté pour l'estimation des taux d'entrée.

- Les fédérations 13, 23, 45 et 46 ont vu leurs contrats informatisés tardivement. Cependant, les sinistres ont toujours été informatisés et la qualité de ces données n'est ainsi pas remise en question.
- Les fédérations 49 et 52 qui n'ont été assurées que depuis 1999 ou 2001 par les ACM ne composaient que des affaires nouvelles. La sélection médicale récente ne pose aucun problème pour le maintien en incapacité car l'assuré étudié est déjà sinistré.

Prévoyance individuelle

Il n'existe aucun problème de fédérations sur le portefeuille de prévoyance individuelle.

2.1.3. Les problèmes rencontrés sur la qualité des données

A travers la préparation des données, nous avons rencontré de nombreux problèmes d'incohérences ou de valeurs aberrantes. Nous allons les décrire et expliquer comment nous les avons plus ou moins résolus.

- **Les problèmes de date**

Date de naissance vide

La date de naissance de l'assuré est primordiale pour pouvoir calculer son âge. Lorsqu'elle n'est renseignée dans aucune des tables, nous sommes obligés de supprimer l'assuré du périmètre d'observation.

Date de début de prêt

Elle n'est pas toujours bien renseignée dans le portefeuille emprunteur : il existe une date de création dans le fichier des assurés (Pretass) correspondant à la date d'effet de l'assurance et une date d'effet du prêt, censée définir le début du contrat, qui se trouve dans la table Prettyp. Après vérification des données, nous avons remarqué qu'il fallait choisir le minimum entre ces 2 dates pour définir la date de début de prêt.

Date de contentieux et date de fin de prêt

Un prêt 'en contentieux' signifie que l'assuré ne paye plus ses mensualités de crédit. Les échéances sont ainsi repoussées et la nouvelle date de fin de prêt n'est pas déterminée. Lorsque cette situation dure jusqu'à la date de constitution du fichier de données, il est alors impossible d'obtenir des informations sur cette date de fin.

Lors d'une période de contentieux, il est ainsi défini dans les conditions générales que contrairement à la garantie décès, le risque Incapacité/Invalidité n'est plus assuré. Le tiers n'est donc plus sous risque et donc plus observable à partir de la date de contentieux. Il faut noter que la base de données ne nous permet pas d'identifier les prêts ayant été en contentieux en cours d'année et ne l'étant plus à la date d'inventaire. Une partie de l'information est donc manquante.

- **Le problème des franchises inconnues**

Lorsque nous ne pouvons pas déterminer la franchise en vigueur sur un des contrats étudiés, nous sommes obligés de le supprimer des observations. En effet, nous verrons par la suite que les résultats peuvent beaucoup varier d'une franchise à l'autre et nous ne souhaitons mélanger les observations.

- **Les problèmes sur la durée de maintien**

Age de fin d'incapacité inférieur à 18 ans ou supérieur à 65 ans

Nous retrouvons certains sinistrés dont l'âge d'indemnisation ne rentre plus dans les tranches d'âge indemnisable et sommes donc contraints de les retirer des observations.

Durée de maintien supérieure à 1095 jours

Certains sinistres ont une durée d'indemnisation très longue car l'incapacité a fait suite à des congés longue durée, des congés maladie ou une reprise du travail à mi temps. Dans de tels cas, l'indemnisation, même si elle est d'un montant moindre, continue et nous considérons alors l'assuré toujours en incapacité.

Pour ne pas dépasser la durée maximale en incapacité de 1095 jours donnée par la table de maintien, nous serons obligés de forcer la durée de ces sinistres à 1095 jours.

Rechute

Les indemnités reçues au titre d'une rechute font partie des indemnités du sinistre initial. Ainsi, lorsque nous calculons une durée sur un sinistre avec rechute, nous intégrons automatiquement la durée relative à la période de reprise d'activité du sinistré. La durée est donc quelque peu majorée mais cela n'a pas une conséquence majeure sur notre table de maintien.

- **Les problèmes liés aux doublons**

Doublons des assurés

Nous observons souvent certaines personnes qui sont assurés sur plusieurs contrats emprunteurs ou plusieurs contrats de prévoyance et nous aimerions ne pas compter en double leur présence et leurs éventuels sinistres ; cela est difficilement possible dans la construction des tables d'entrée et nous choisissons de ne pas le faire car le biais engendré est très faible ; autant un assuré qui entre en incapacité peut être comptabilisé deux fois s'il a souscrit deux contrats et donc augmenter le taux d'entrée (même avec une exposition au risque doublée), autant un assuré qui n'entre pas en incapacité et qui a deux contrats va descendre le taux du fait d'un doublement de sa durée d'exposition au risque.

Dans le cas d'un taux commun à tous les âges et si le nombre de prêts par personne était corrélé à l'âge de la personne, il serait important de prendre en compte les doublons car le taux d'incapacité de certains âges pèserait plus que d'autres.

La suppression des doublons est en revanche assez facile dans la construction des lois de maintien et nous les supprimons pour ne garder qu'une seule observation. La période d'indemnisation relative à chaque contrat peut varier selon différents paramètres : la franchise souscrite, la durée maximale d'indemnisation souscrite... Nous choisissons donc de garder l'observation qui couvre le maximum de durée possible. Ainsi, nous sélectionnons la date de premier jour d'indemnisation la plus petite et la date de dernier jour d'indemnisation la plus récente.

Date de survenance différente pour un même sinistre

Il arrive que certains sinistres aient deux dates de survenance différentes selon le numéro du contrat. Comme nous regroupons les sinistres selon leur date de survenance, ceux là seraient donc comptés en double. Ainsi, nous choisissons de corriger directement ces 28 cas dans la base, en sélectionnant celui qui a la durée la plus longue.

- **Le calcul de l'âge exact pour les taux d'entrée en incapacité**

Les données renseignent les dates exactes de naissance et de survenance. Nous avons donc choisi de calculer l'âge en prenant le nombre entier de l'âge à la survenance du sinistre.

2.2 Analyses descriptives des portefeuilles étudiés

Avant de décrire les démarches entreprises pour construire les tables d'expérience, nous allons analyser la composition des portefeuilles dans un premier temps puis la décrire les sinistres étudiés dans un deuxième temps. Ceci nous permettra de rajouter quelques commentaires sur la difficulté rencontrée à travers la manipulation des données.

2.2.1. Composition des portefeuilles

- **Nombres de contrats observés et de personnes observées**

Emprunteur

Année	Nombre de contrats observés	Nombre de personnes observées	Evolution
2004	1 025 413	1 287 571	
2005	1 071 622	1 339 390	+ 4,51%
2006	1 132 269	1 419 226	+ 5,66%
2007	1 156 767	1 454 076	+ 2,16%
2008	1 171 286	1 470 958	+ 1,26%
Ensemble	1 783 273	2 262 575	

Tableau 4 : Nombre de contrats et de personnes observés sur le portefeuille emprunteur

Prévoyance individuelle

Année	Nombre de contrats observés	Nombre de personnes observées	Evolution
2004	59 157	58 490	
2005	73 080	71 989	+ 23,54%
2006	84 929	83 495	+ 16,21%
2007	92 693	91 318	+ 9,14%
2008	99 801	98 366	+ 7,67%
Ensemble	132 911	126 384	

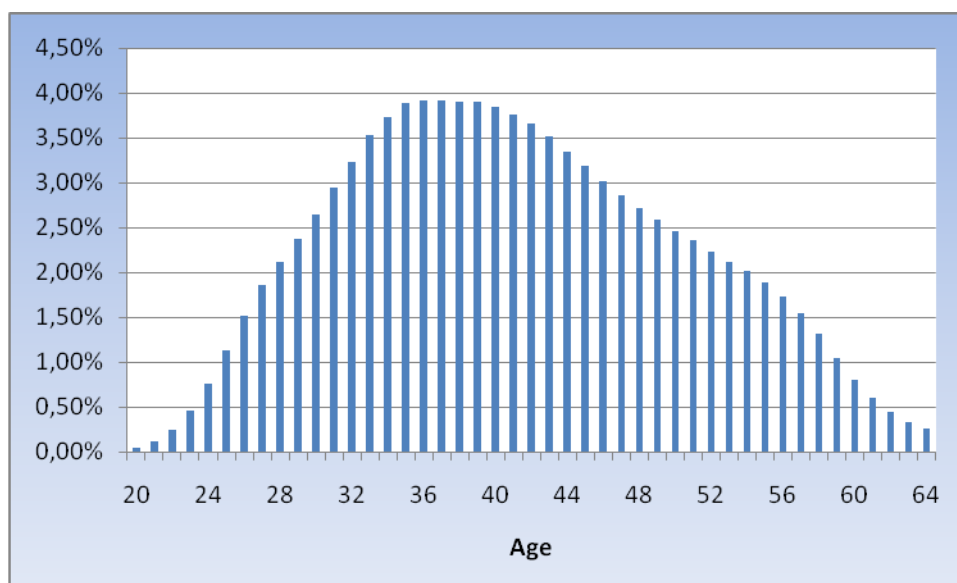
Tableau 5 : Nombre de contrats et de personnes observés sur le portefeuille PI

Il est clair ici que le nombre de données à disposition dans le portefeuille emprunteur est énorme comparé à celui de la prévoyance individuelle.

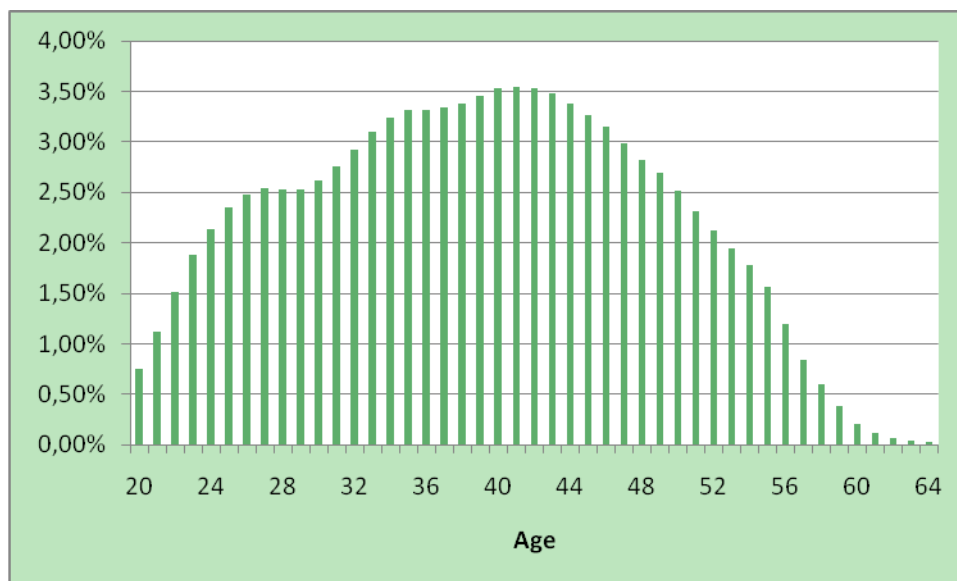
- **Répartition des sexes**

La répartition est la même dans les deux portefeuilles avec 38% de femmes et 62% d'hommes.

- **Répartition des âges**



Graphique 3 : Répartition des âges du portefeuille emprunteur



Graphique 4 : Répartition des âges du portefeuille P.I

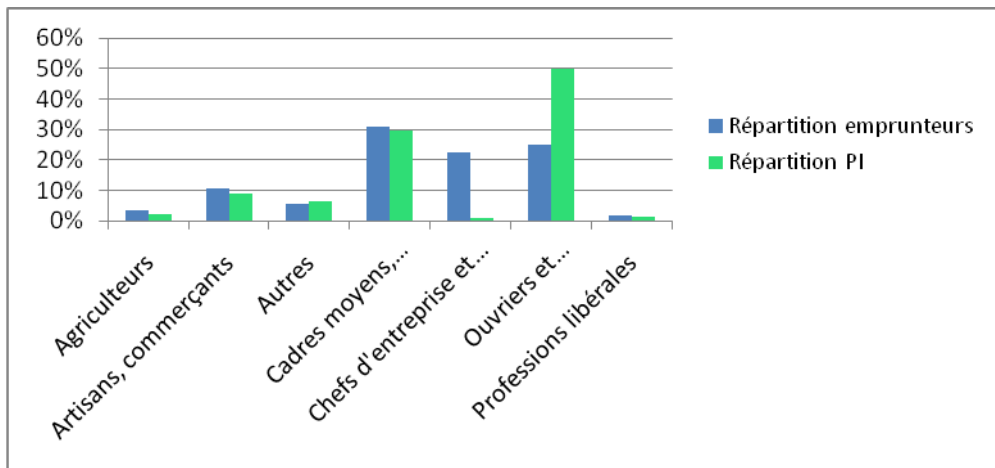
Nous remarquons que la répartition est légèrement différente selon les portefeuilles et les contrats de PI ont tendance à être souscrits beaucoup plus tôt. Cela est logique car une personne ne rentrera dans le portefeuille emprunteur qu'à partir du moment où il aura souscrit un prêt, et cela se passera généralement après quelques années de travail pendant lesquelles la personne se sera déjà assuré pour ses risques personnels. Nous pouvons aussi remarquer que le pic de consommation est atteint entre 34 et 39 ans en emprunteur et entre 40 et 43 ans en prévoyance individuelle.

- **Les catégories socioprofessionnelles**

Nous avons classé les professions selon sept catégories socioprofessionnelles, suivant le degré de risque associé à celle-ci. Les catégories retenues sont les suivantes :

- Agriculteurs
- Artisans, commerçants
- Chefs d'entreprise et cadres supérieurs
- Ouvriers et personnels de services
- Professions libérales
- Cadres moyens, professeurs et employés
- Autres

Nous noterons qu'en assurance emprunteur, la profession n'est indiquée que pour la première tête du contrat. La répartition des portefeuilles se présente comme suit :



Graphique 5 : Répartition des assurés selon leur catégorie socioprofessionnelle

Nous remarquons que la proportion d'ouvriers double du portefeuille emprunteur à celui de la prévoyance individuelle, alors que la proportion de chefs d'entreprise et cadres supérieurs diminue considérablement.

- **Franchise**

Il existe trois types de franchise selon la nature du sinistre:

- La maladie
- L'accident
- L'hospitalisation

Les contrats proposent en général une combinaison entre la maladie et l'accident ou entre la maladie et l'hospitalisation. Ainsi, la durée qui sépare le sinistre et le premier jour d'indemnisation va souvent être diminuée en cas de sinistre dû à un accident ou en cas d'hospitalisation faisant suite à un sinistre. De ce fait, les taux d'entrée en incapacité vont augmenter quand la franchise va diminuer. Il conviendra donc par la suite de segmenter les résultats obtenus par type et durée de franchise.

Nous présentons ici la répartition de chacun des portefeuilles étudiés selon les types et les durées de franchise :

Emprunteur

Franchise	Pourcentage d'observations
15 jours	2,69%
30 jours	1,14%
90 jours	90,48%
120 jours	0,70%
180 jours	4,99%

Tableau 6 : Répartition des durées de franchise du portefeuille emprunteur

Prévoyance individuelle

Franchise maladie	Pourcentage d'observations
15 jours	31,50%
30 jours	21%
60 jours	1%
90 jours	46%

Tableau 7 : Répartition des franchises Maladies en PI

Franchise accident	Pourcentage d'observations
0 jour	22%
3 jours	36%
15 jours	2%
30 jours	16%
60 jours	1%
90 jours	23%

Tableau 8 : Répartition des franchises accident en PI

2.2.2. Descriptifs des sinistres

Nous donnerons ici quelques statistiques décrivant les sinistres observés.

- **Nombre de sinistres observés**

Nos observations sont constituées de respectivement 47.660 et 19.179 sinistres pour les portefeuilles emprunteur et de prévoyance individuelle.

- **Durée moyenne des sinistres observés (segmentation par franchise)**

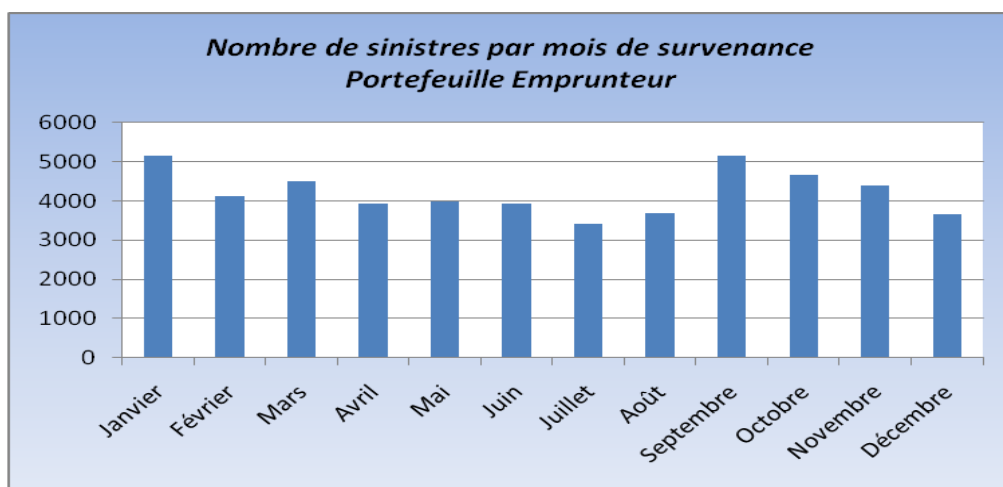
Le portefeuille emprunteur a une durée moyenne de sinistre de 282 jours après franchise (273 pour les hommes et 296 pour les femmes).

Sans censure (voir définition au *paragraphe 4.1*), cela tombe à 273 jours mais cela n'est pas interprétable car les longs sinistres sont en général les plus censurés.

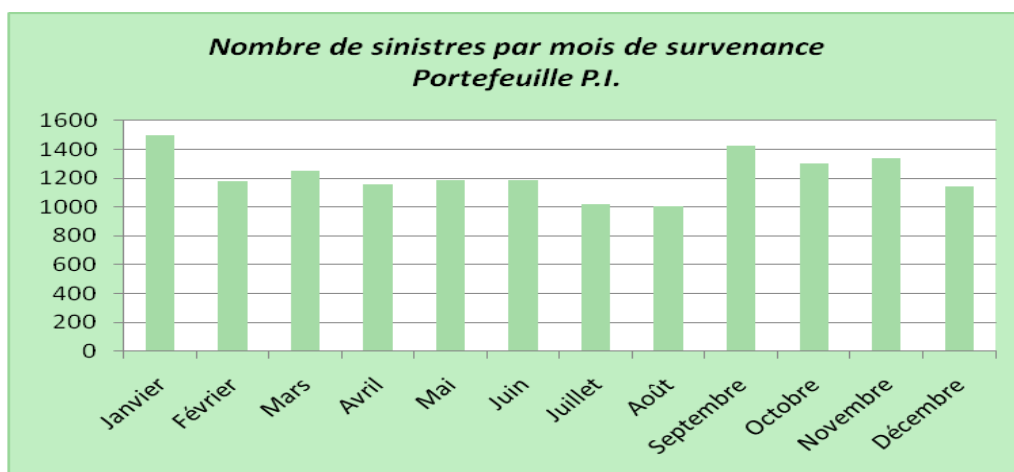
Pour le portefeuille PI, la durée moyenne des sinistres indemnisés dès le 1^{er} jour est de 101 jours (femme : 108, homme : 98). Celle des sinistres ayant dépassés 15 jours est de 126 jours dont la franchise. Pour les sinistres ayant dépassés 90 jours, elle est égale à 297 jours dont la franchise (femme : 298, homme : 296), ce qui équivaut à 207 jours après franchise. La durée des sinistres PI est donc plus faible qu'en emprunteur.

- **Saisonnalité des sinistres**

Nous présentons à travers les deux graphiques suivants l'étude du nombre d'entrée en incapacité selon le mois de survenance.



Graphique 6 : Saisonnalité des entrées en incapacité du portefeuille emprunteur

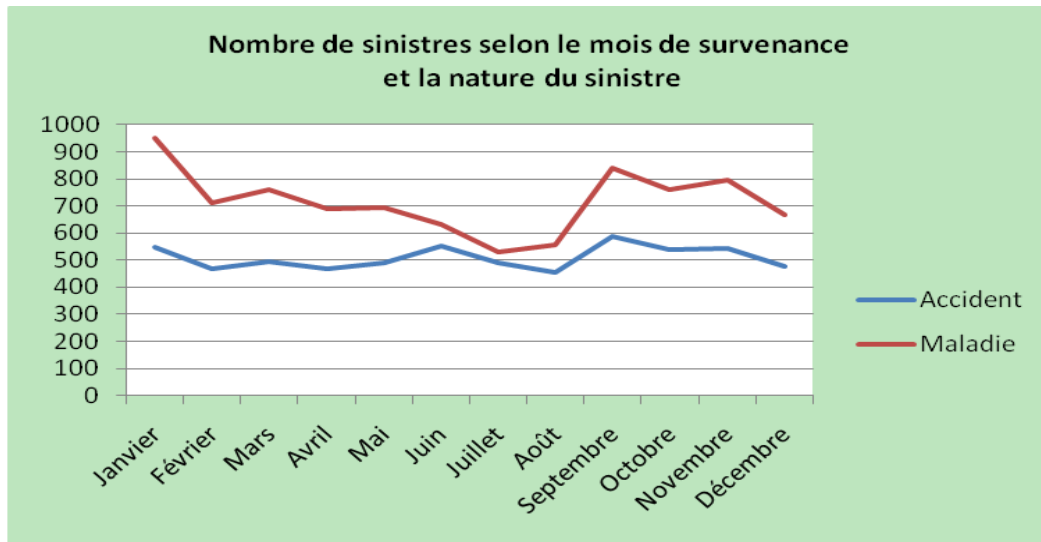


Graphique 7: Saisonnalité des entrées en incapacité du portefeuille PI

Le nombre d'entrées en incapacité n'est pas stable selon le mois de survenance et la tendance est la même sur les deux portefeuilles. Ainsi, les mois les moins touchés par les

sinistres sont ceux d'été, tandis que les plus touchés sont ceux de la période hivernale ainsi que celui de septembre, au retour des vacances.

Nous allons voir si la tendance reste la même lorsque nous segmentons par nature du sinistre.



Graphique 8: Saisonnalité des entrées en incapacité du portefeuille PI selon la nature du sinistre

Même si nous observons un petit pic en septembre, les sinistres accidentels ne sont pas plus fréquents à une certaine période de l'année. En revanche, les sinistres déclenchés par une maladie sont bien plus fréquents lors des périodes d'automne ou d'hiver, et nous remarquons que les mois suivants les périodes de vacances et de festivités (Septembre, Janvier) sont bien plus propices aux arrêts de travail.

Remarque : Cela confirme qu'il est primordial de choisir une période d'observation avec une durée en mois multiple de 12 pour bien prendre en compte les comportements différents selon les mois de survenance.

Nous donnerons des informations descriptives supplémentaires lors de l'étude des différentes sections.

Chapitre 3 : ESTIMATION DU TAUX D'ENTREE EN INCAPACITE

Nous allons à présent estimer les différents taux d'entrée en incapacité. Pour cela, il va tout d'abord falloir donner quelques informations préalables, telles que le rôle possible de la franchise. Nous présenterons ensuite les estimateurs pouvant être utilisés, puis nous présenterons les différentes étapes de calcul.

3.1 Remarques préliminaires

- **La durée de franchise**

Nous ne préservons dans nos données que les sinistres qui sont ou vont être indemnisés, plus exactement les sinistres validés et payés.

La période de franchise joue un rôle important dans ces sinistres car l'assureur n'intervient qu'une fois celle-ci terminée. Ainsi, les sinistres d'une durée inférieure à la durée de la franchise ne seront pas pris en compte dans l'étude car ils ne figurent pas dans la base de données. Les taux reflèteront donc la probabilité de rester en incapacité sur une durée au moins égale à la celle de la franchise.

- **Les rechutes**

Nous pourrions nous demander si les taux d'entrée représentent la probabilité de tomber une fois en incapacité à un âge donné ou au moins une fois. Lorsque deux sinistres surviennent pour la même raison avec moins de 2 mois d'écart entre les deux périodes d'incapacité, les conditions générales du contrat assimilent cela à une rechute et nous ne comptabilisons donc pas une nouvelle survenance d'incapacité.

En revanche, lorsque la raison est différente, nous pouvons comptabiliser le sinistre comme une nouvelle survenance d'incapacité.

Le besoin de l'assureur est de connaître le taux espéré d'indemnisation des assurés. Pour le taux d'entrée en incapacité, l'assureur va donc devoir prendre en compte toutes les survenances distinctes de sinistres. Bien sûr, il devra également connaître la durée d'indemnisation, mais nous verrons cela plus tard à travers les lois de maintien en incapacité des personnes sinistrées.

La probabilité d'être en incapacité ne dépend pas ici du fait que l'individu soit peut être déjà tombé en incapacité mais seulement de son âge à la date d'étude. Mises à part les rechutes, notre étude se base donc sur l'hypothèse que l'entrée en incapacité est un évènement indépendant des évènements passés.

3.2 Les estimateurs

Nous distinguons deux types d'estimateur : les estimateurs **paramétriques** qui sont basés sur une hypothèse à priori de la fonction de survie et les estimateurs **non-paramétriques** qui permettent de ne pas faire d'hypothèse à priori sur la forme de la loi de survie et d'estimer directement cette fonction à partir de données en quantités suffisantes.

Nous allons ici étudier deux estimateurs et choisir le plus approprié et le plus adapté à notre étude. Mais auparavant, nous devons introduire quelques fonctions et notations relatives à ces estimateurs.

3.2.1. Introduction des variables de survie et du taux de hasard

- **Les notations des taux d'entrée**

Pour ne pas reprendre la lettre q qui est souvent assimilée à un taux de sortie, nous privilégions la lettre i pour définir notre taux d'entrée, i faisant référence aux taux d'incidence qui est l'autre terme utilisée pour parler du taux d'entrée. Nous noterons ainsi:

- I_x la probabilité de tomber en incapacité entre l'âge x et $x+1$, avec $x \in \mathbb{N}$
- $S_x(t)$, la probabilité à l'âge x de ne pas tomber en incapacité avant l'âge $x+t$, avec $t < 1$

Remarque: le i majuscule I_x représentera donc bien le taux que nous cherchons à estimer pour l'âge x . Dans les deux estimateurs que nous présenterons, nous introduirons à chaque fois un i minuscule qui représentera également la probabilité de tomber en incapacité mais sur une durée inférieure à 1 an, et entre deux âges appartenant à $[x; x+1[$.

- **La fonction de survie**

Comme définie dans les notations, la fonction de survie $S_x(t)$ utilisée dans le cadre de l'entrée en incapacité sera propre à chaque intervalle d'âge entier $[x; x+1[$. En effet, nous ne pouvons pas parler d'une même fonction de survie sur plusieurs âges car nous cherchons ici à estimer le taux de probabilité d'un phénomène pouvant se produire plusieurs fois à plusieurs âges différents pour un même assuré. Après la survenance d'un sinistre, l'assuré se trouve donc toujours sous risque et sa fonction de survie ne peut bien sûr pas être nulle. Le problème est donc complètement différent d'une estimation d'un taux de mortalité où un seul sinistre par assuré est alors possible.

Nous pourrions définir à chaque sinistre une nouvelle fonction de survie prenant en compte le nombre d'incapacité observé jusqu'ici sur l'assuré. Cependant, les observations ne témoignent que d'un nombre très réduit de personnes ayant eu plusieurs sinistres. Nous nous contenterons ainsi d'utiliser une fonction de survie distincte pour chaque âge, en ne

prenant en compte que l'état de vie ou de mort de l'assuré au début de cet âge. Nous aurons ainsi pour chaque intervalle d'âge $[x; x + 1[$ la fonction de survie suivante:

$S_x = S_x(1)$, la probabilité à l'âge x de ne pas tomber en incapacité avant l'âge $x + 1$

- **La fonction de hasard d'entrée en incapacité**

Nous définissons ici la fonction de hasard qui peut être interprétée dans le cas de l'entrée en incapacité comme un taux de risque instantané. Dans le cas de la mortalité, nous parlerions de force de mortalité. Nous notons ainsi :

$$h(x+t) = -\ln S_x(t), \quad \text{le taux instantané d'entrée en incapacité à l'âge } x+t$$

3.2.2. L'estimateur de Kaplan-Meier

En 1958, E. Kaplan et P.Meier définissent l'estimateur « Product Limit » de la fonction de survie. Nous allons décrire cet estimateur pour voir s'il est applicable à nos données dans la recherche des taux d'entrée. Mais auparavant, il est primordial de définir les différents types de censures et troncatures qu'il est habituellement commun de rencontrer dans les données.

- **Définition des troncatures et censures**

L'évaluation de taux d'entrée en incapacité segmentés par âge nécessite que les observations se fassent sur des assurés présents tout au long de l'âge étudié. Bien entendu, cela n'est pas toujours le cas et l'on parle alors de troncature ou de censure selon que l'observation est manquante en début d'âge ou en fin d'âge.

Les troncatures

Nous parlons de troncature lorsqu'un individu n'entre dans le champ d'observation qu'au milieu d'une classe d'âge. Voici les différents cas que nous pouvons rencontrer:

- A la date de début d'observation (1^{er} janvier), les personnes entrant dans le champ d'observation sont celles ayant déjà contracté une assurance. A moins d'être nées un 1^{er} Janvier, elles entrent donc dans le champ d'observation de leur classe d'âge à un âge non entier.
- Les personnes qui souscrivent une assurance pendant la période d'observation entrent de ce fait dans le champ d'observation à un âge qui n'est à priori pas entier.
- Les personnes qui reviennent dans le champ d'observation du fait d'une fin de contentieux ou d'un passage de l'état d'incapable à capable et qui n'ont pas un âge entier à cette date.

Les censures

Nous parlons de censure lorsqu'un individu sort du champ d'observation au milieu d'une classe d'âge. Voici les différents cas que nous pouvons rencontrer:

- A la date de fin d'observation (31 décembre), les personnes encore assurées sortent du champ d'observation à un âge à priori pas entier (sauf si nées le 31 décembre).
- Si l'assuré a un sinistre (décès) pendant la période d'observation, il sort définitivement du champ d'observation à un âge à priori pas entier.
- Pendant la période d'observation, si le prêt vient à échéance ou si le contrat de prévoyance est résilié, l'assuré sort du champ d'observation.
- Lorsque l'assuré liquide sa retraite, il n'est plus assuré et sort donc du champ d'observation.
- Lorsqu'un prêt est en contentieux, l'emprunteur n'est plus assuré contre le risque incapacité et sort donc momentanément du champ d'observation à un âge à priori pas entier.

Exemples

Pour mieux comprendre le phénomène de censures et troncatures, voici trois exemples: Nous supposons que l'assuré est né le 01/04/1960.

- **Exemple 1** : L'assuré souscrit son contrat avant le début de l'observation et le contrat prend fin après la période d'observation.

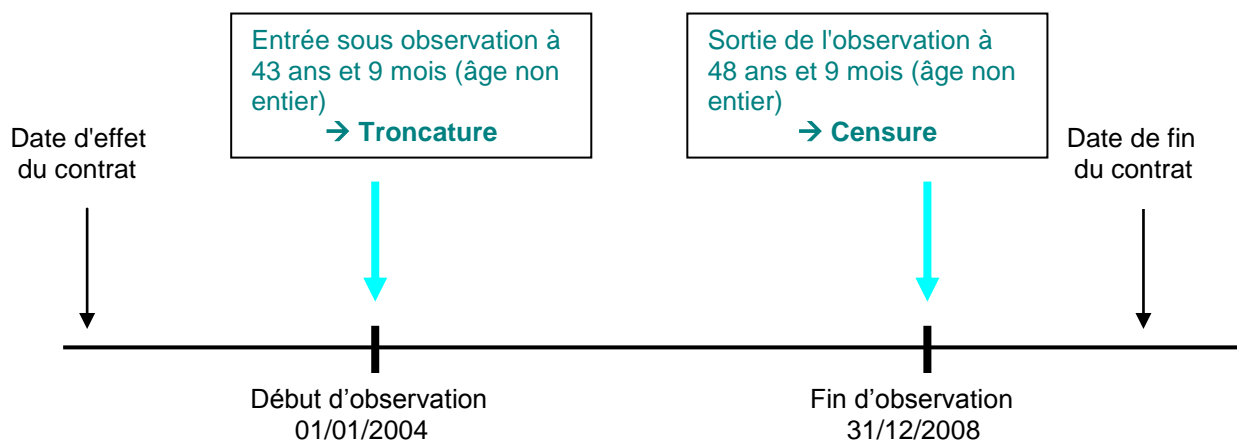


Figure 3 : Exemple de troncature et censure (1)

- Exemple 2 : L'assuré souscrit son contrat après le début de l'observation et le contrat prend fin avant la fin de la période d'observation.

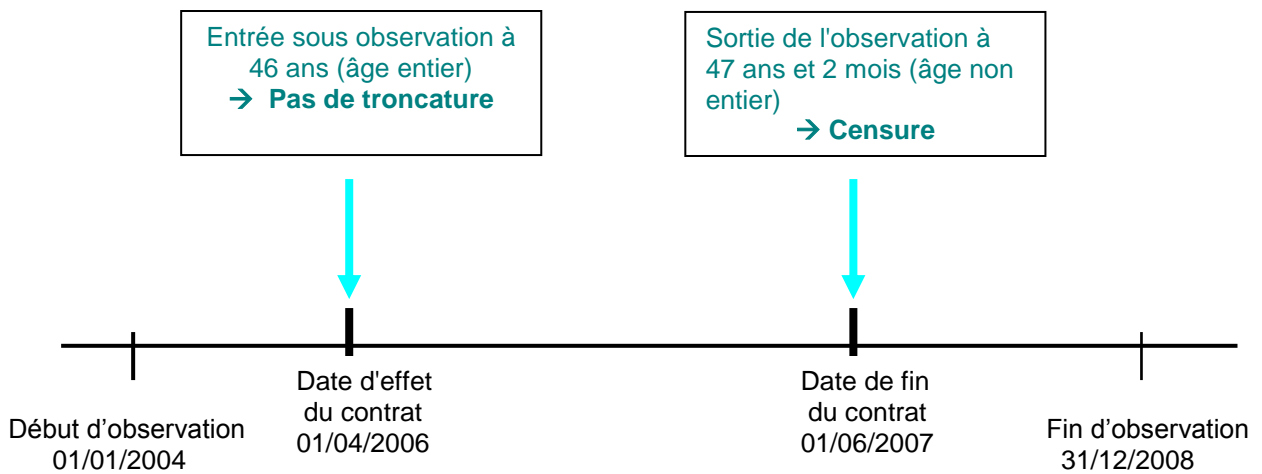


Figure 4 : Exemple de troncature et censure (2)

- Exemple 3 : L'assuré entre en incapacité pendant la période d'observation et reprend une activité un an après.

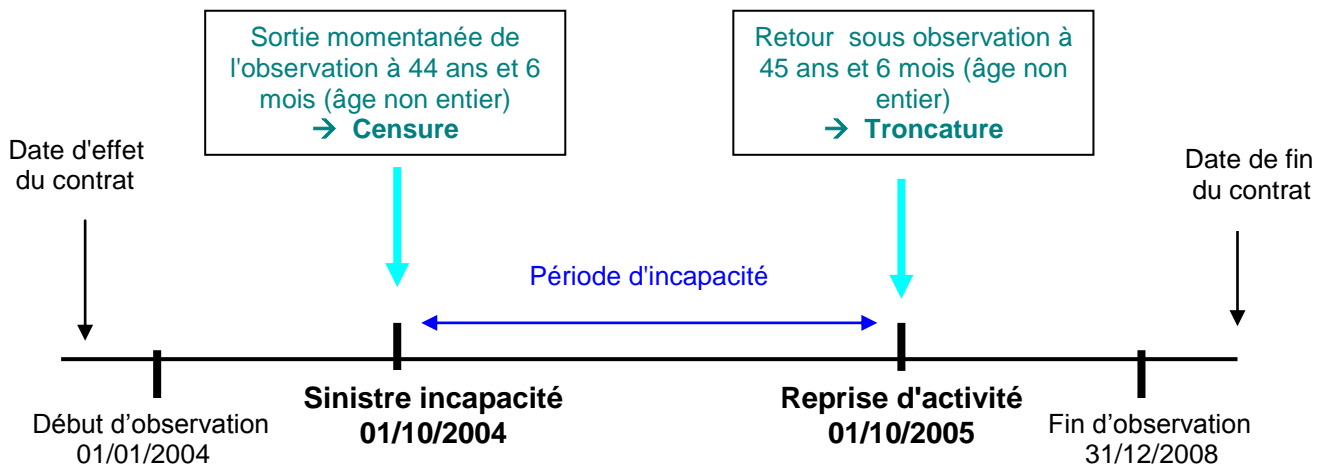


Figure 5 : Exemple de troncature et censure (3)

Nous pouvons à présent expliquer le principe de cet estimateur et les calculs requis pour l'appliquer.

- **Le principe**

L'estimateur s'appuie sur la remarque suivante : dans l'intervalle d'âge $[x; x+1[$, la probabilité de ne pas tomber en incapacité pendant un temps $t > s$ peut s'écrire :

$$S_x(t) = P(T > x+t / T > x+s) \times P(T > x+s) = P(T > x+t / T > x+s) \times S_x(s),$$

où T est l'âge à la survenance du sinistre.

En renouvelant l'opération, nous faisons apparaître des produits de termes en $P(T > x+t / T > x+s)$; si nous choisissons comme instants de conditionnement les âges $T_{(j)} \in [x; x+1[$ où se produisent des événements (incapacité, troncature, censure), avec $T_{(0)} = x$, nous nous ramenons à estimer des probabilités de la forme :

$$p_j = P(T \geq T_{(j+1)} / T > T_{(j)}) \quad \text{et} \quad i_j = P(T < T_{(j+1)} / T > T_{(j)})$$

p_j (respectivement i_j), étant la probabilité de ne pas tomber incapable (resp. de tomber incapable) sur l'intervalle d'âge $[T_{(j)}; T_{(j+1)}[$ sachant qu'on est capable à l'âge $T_{(j)}$.

Nous avons alors :
$$S_x(t) = p_0 p_1 \cdots p_{t-1} = \prod_{j/T_{(j)} < x+t} (1 - i_j) \quad (1)$$

Par cette formule, nous pourrions alors estimer I_x par $1 - S_x(1)$.

- **Les calculs**

Il faut tout d'abord estimer $i_j = 1 - p_j$ par la méthode du maximum de vraisemblance à partir de l'observation d'un n-échantillon.

Notons :

- d_j : le nombre d'entrées en incapacité à l'âge $T_{(j)}$
- r_j : le nombre d'individu sous risque à l'âge $T_{(j)}$

A priori, le nombre d'entrées en incapacité à chaque âge $T_{(j)}$ suit une loi binomiale $B(r_j, i_j)$

Nous avons ainsi la fonction de vraisemblance suivante :

$$L(d_0, \dots, d_{t-1}; i_0, \dots, i_{t-1}) = \prod_{j=0}^{t-1} C_{r_j}^{d_j} i_j^{d_j} (1 - i_j)^{r_j - d_j}$$

Nous maximisons L par l'annulation des dérivées partielles :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial i_j} = \frac{d_j}{i_j} - \frac{r_j - d_j}{1 - i_j} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, t-1$$

Nous obtenons :

$$\hat{i}_j = \frac{d_j}{r_j}, \quad j = 0, 1, \dots, t-1$$

En remplaçant les estimateurs \hat{i}_j dans **(1)**, nous obtenons l'expression de $\hat{S}_x(t)$:

$$\hat{S}_x(t) = \prod_{j/T_{(j)} < x+t} \left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right)$$

Ainsi, nous obtenons l'estimateur de Kaplan-Meier :

$$\hat{I}_x = 1 - \hat{S}_x(1) = 1 - \prod_{j/T_{(j)} < x+1} \left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right)$$

Remarque

- Si nous considérons les âges $T_{(j)}$ où il n'y a pas d'entrée en incapacité, nous remarquons que $d_j = 0$ et ainsi $1 - \frac{d_j}{r_j} = 1$. Ce facteur disparaît donc du produit et nous pouvons ne prendre en compte lors de l'estimation du taux d'entrée que les âges où il se produit une entrée en incapacité.
- Le nombre r_j d'individu sous risque à l'âge $T_{(j)}$ varie en fonction des individus présents à la date $T_{(j-1)}$ et de ceux tronqués ou censurés dans l'intervalle d'âge $[T_{(j-1)}; T_{(j)}]$. Nous allons donc définir ce nombre r_j de la façon suivante:

Soient:

- t_j le nombre d'individus tronqués entre les âges $T_{(j-1)}$ et $T_{(j)}$
- c_j le nombre d'individus censurés entre les âges $T_{(j-1)}$ et $T_{(j)}$

Nous avons alors: $r_j = r_{j-1} - d_{j-1} - c_{j-1} + t_{j-1}, j = 1, \dots, t$

• Conclusion

Bien que cet estimateur possède de bonnes propriétés, il nécessite un processus de gestion simple des troncatures et censures. De par la complexité de mise en œuvre de ce processus dans nos tables de données, nous avons préféré ne pas retenir cet estimateur. Cependant, nous verrons par la suite que cet estimateur s'adapte très bien aux lois de maintien, et nous pourrons alors développer les quelques notions que nous venons de voir.

3.2.3. L'estimateur des moments de Hoem

Cet estimateur est paramétrique. Il généralise en fait l'estimateur binomial en introduisant les contraintes de censures et troncatures. Son étude repose sur une hypothèse de distribution de la table d'entrée en incapacité.

- **Principe**

Il s'agit de considérer que l'assuré j n'est exposé au risque d'incapacité dans la classe d'âge considérée $[x; x+1[$ qu'entre les âges $x + \alpha_j$ et $x + \beta_j$ où il est sous observation.

C'est à dire que nous ne prendrons en compte, pendant l'observation des assurés, que les périodes où il y avait effectivement un risque supporté par l'assureur.

- **Notations**

- n_x : nombre d'individus sous observation à l'âge $[x; x+1[$
- D_x : Variable aléatoire représentant le nombre d'entrée en incapacité observé parmi les n_x individus
- d_x : Réalisation de D_x
- $[x + \alpha_j; x + \beta_j]$: intervalle d'âge inclus dans $[x; x+1[$ pour lequel l'assuré j est sous observation.
- ${}_{\beta_j - \alpha_j} i_{x + \alpha_j}$: probabilité pour l'assuré j de tomber incapable dans l'intervalle d'âge $[x + \alpha_j; x + \beta_j]$
- X_1, \dots, X_{n_x} : n_x variables de Bernoulli de paramètre ${}_{\beta_j - \alpha_j} i_{x + \alpha_j}$ indépendantes

- **Hypothèses**

- Chaque entrée en incapacité est indépendante.
- La probabilité pour un individu d'âge x de tomber en incapacité entre l'âge x et $x+t$ est une fonction linéaire du temps, c'est-à-dire que : ${}_t i_x = t \cdot I_x$ pour $t \in [0; 1[$
- La probabilité de tomber en incapacité dans l'année pour chaque assuré d'âge $x + \alpha_j$ est ${}_{\beta_j - \alpha_j} i_{x + \alpha_j}$, donc $D_x = \sum_{k=1}^{n_x} X_k$ suit une loi binomiale $B(n_x, {}_{\beta_j - \alpha_j} i_{x + \alpha_j})$.

- **Approximation**

L'hypothèse de linéarité définit pour $0 < t < s \leq 1$:

$${}_t i_x = t \cdot I_x \text{ et donc } {}_t S_x = 1 - t \cdot I_x$$

Par approximation, nous définissons ${}_{s-t} i_{x+t}$ par : ${}_{s-t} i_{x+t} = {}_t P_x - {}_s P_x$

Nous obtenons ainsi :

$$\boxed{{}_{s-t}i_{x+t} \approx (s-t) \cdot I_x}$$

- **Calculs**

Nous posons $Z_j = \frac{X_j}{\beta_j - \alpha_j}$, donc $E[Z_j] = E\left[\frac{X_j}{\beta_j - \alpha_j}\right]$

Comme X_j suit une loi de Bernoulli, et par l'approximation faite auparavant, nous obtenons que :

$$E[X_j] = \beta_j - \alpha_j i_{x+\alpha_j} \approx (\beta_j - \alpha_j) \cdot I_x$$

En appliquant la loi des grands nombres aux variables aléatoires Z_j indépendantes et identiquement distribuées, nous obtenons l'estimateur de Hoem qui est le suivant :

$$\boxed{\hat{I}_x = \frac{d_x}{\sum_j (\beta_j - \alpha_j)}}$$

Nous pouvons voir que cet estimateur s'obtient en comptant le nombre de sinistres observés à chaque âge (d_x) et en calculant une durée d'exposition au risque de chaque assuré à chaque âge ($\beta_j - \alpha_j$).

- **Propriété de l'estimateur de Hoem**

Espérance

$$E\left[\hat{I}_x\right] = \frac{E[D_x]}{\sum_{j=1}^{n_x} (\beta_j - \alpha_j)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_x} \beta_j - \alpha_j i_{x+\alpha_j}}{\sum_{j=1}^{n_x} (\beta_j - \alpha_j)} = \frac{\sum_{j=1}^{n_x} (\beta_j - \alpha_j) \times I_x}{\sum_{j=1}^{n_x} (\beta_j - \alpha_j)} = I_x$$

C'est donc un estimateur sans biais.

- **Conclusion**

Cet estimateur est nettement plus simple à mettre en place que celui de Kaplan-Meier et est basé sur un principe simple d'observation des personnes sous risque. Nous l'avons donc choisi pour calculer nos taux bruts d'entrée en incapacité.

3.2.4. Adaptation des données à notre estimateur

Nous allons décrire ici la manière dont nous avons adapté nos données à la construction de notre estimateur. Nous y décrivons ainsi les choix effectués dans la sélection des variables utilisées et les biais pouvant résulter de certains facteurs.

- **Des calculs effectués par année calendaire**

Comme nous l'avons déjà signalé, les tables utilisées font chacune référence à une année calendaire. Ainsi, nous calculerons des périodes d'observation et des taux d'entrée relatifs à chaque année, et nous regrouperons les résultats à la fin.

- **Le calcul de l'âge exact pour les taux d'entrée en incapacité**

Les données renseignent les dates exactes de naissance et de survenance. Comme les données que nous utilisons pour les lois d'entrée correspondent aux sinistres survenus pendant une année calendaire, il est clair que l'assuré ne sera pas touché par l'incapacité au même âge selon que la survenance se passe avant ou après sa date anniversaire. Nous allons donc définir deux âges différents pour un même assuré et calculer deux périodes d'exposition au risque différentes.

- **Le calcul de l'exposition au risque**

Il y a donc deux périodes à définir selon l'âge pendant l'année de l'assuré. La date de début et fin de chaque période d'exposition va donc être déterminée en fonction des dates anniversaires des assurés, des dates de début et fin d'année, des dates de début et fin de prêt et des dates de contentieux si elles existent.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la base de données ne nous permet pas d'identifier les prêts ayant été en contentieux en cours d'année et qui ne le sont plus à la date d'inventaire. Pour de tels prêts, nous ne pourrions donc pas soustraire la durée du contentieux à la durée d'exposition du tiers, celle-ci sera ainsi légèrement supérieure à la normale.

Ce problème n'interviendra pas dans le cas de la prévoyance.

Voici donc les formules des différentes durées d'exposition, en considérant que l'année étudiée est 2008 et que l'assuré est né JJ/MM/YYYY.

- Si le prêt n'est pas en contentieux :

Début 1^{er} Age = max (min (date d'effet, JJ/MM/2008), 01/01/2008)

Fin 1^{er} Age = min (date de fin de prêt, JJ/MM/2008)

Début 2^e Age = max (date d'effet, JJ/MM/2008)

Fin 2^e Age = min (max (date de fin de prêt, JJ/MM/2008), 31/12/2008)

- Si le prêt est en contentieux :

Début 1^{er} Age = max (min (date d'effet, JJ/MM/2008), 01/01/2008)

Fin 1^{er} Age = min (max (date du contentieux, 01/01/2008), JJ/MM/2008)

Début 2^e Age= max (date d'effet, JJ/MM/2008)

Fin 2^e Age=min (max (date du contentieux, JJ/MM/2008), 31/12/2008)

Nous calculons alors la durée d'exposition sur chaque âge de la façon suivante :

Année_risque_1erage = (Fin 1^{er} Age – Début 1^{er} Age)/365; (366 si bissextile)

Année_risque_2eage = (Fin 2^e Age - Début 2^e Age)/365;

Remarque: si l'année d'étude n'est pas bissextile et que l'assuré est né un 29 Février, je définis la date d'anniversaire au 28 Février.

- **Les années sous risque des personnes en incapacité**

Lorsque la personne est en incapacité, nous la considérons tout de même sous risque. Cela n'est bien sûr pas exact mais le nombre d'années sous risque de personne en incapacité est très minime par rapport au nombre total.

3.3 Les résultats

Nous pouvons à présent présenter les résultats obtenus. Avant de s'intéresser aux résultats segmentés selon l'âge qui est le facteur de segmentation le plus évident et celui pour lequel nous avons construit nos estimateurs, nous nous pencherons sur les autres facteurs pouvant également jouer un rôle majeur dans la variation des taux d'entrée en incapacité. Nous essayerons de faire en permanence un parallèle entre les résultats du portefeuille emprunteur et celui de prévoyance individuelle.

3.3.1. Les franchises

Nous avons déjà évoqué que la période et le type de franchise pouvaient jouer un rôle important dans l'étude et qu'il est tout à fait logique de penser que les taux d'entrée en incapacité augmentent quand la durée de franchise diminue. Regardons les résultats obtenus.

- **Les contrats emprunteurs**

Il n'y a pas de distinction faite selon la nature du sinistre (maladie, accident, hospitalisation). Cependant, la durée de franchise varie et nous obtenons les résultats suivants:

Durée de franchise	Taux d'entrée en incapacité
15 jours	1,02%
90 jours	0,83%
180 jours	0,34%

Tableau 9 : Taux d'entrée en incapacité du portefeuille emprunteur segmenté selon la franchise souscrite

Les taux diffèrent selon la durée de franchise souscrite, et il paraît normal de segmenter notre étude selon ces durées. Comme seules les données de la franchise 90 jours sont en quantité suffisante pour en ressortir des taux fiables et que la franchise 15 jours est réservée aux professions médicales, nous axerons notre étude du portefeuille emprunteur sur celle de 90 jours.

- **Les contrats de prévoyance individuelle**

La plupart des contrats ayant une distinction selon la nature du sinistre, nous analyserons ici les résultats par nature du sinistre.

Franchise Hospitalisation

La franchise hospitalisation n'est présente que sur la première génération de contrats. Les données ne sont donc pas très nombreuses. De plus, la majorité des sinistres qui entraîne une réduction de la durée de franchise suite à une hospitalisation ont une durée totale en incapacité supérieure à la franchise de base souscrite. Nous pouvons donc considérer que sans une franchise spécifique à l'hospitalisation, leur incapacité aurait duré assez longtemps pour qu'elle soit présente dans nos données et ainsi la compter dans les sinistres payés.

Nous regroupons ainsi ce type de contrat avec ceux n'ayant pas de conditions sur une éventuelle hospitalisation.

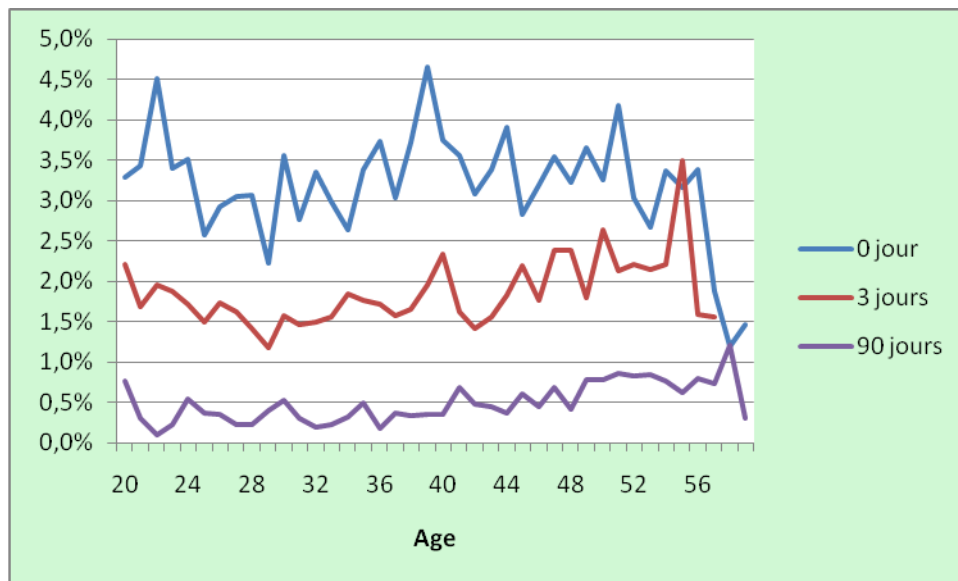
Franchise Accident

Nous avons tout d'abord analysé le taux global d'entrée en incapacité, suite à un accident, selon la durée de franchise associée souscrite.

Durée de franchise accident	Taux d'entrée
0 jour	3,3%
3 jours	1,8%
90 jours	0,5%

Tableau 10 : Taux d'entrée en incapacité suite à un accident selon la franchise

Nous avons également calculé le taux d'entrée selon l'âge et la durée de franchise.



Graphique 9 : Taux d'entrée suite à un accident selon l'âge à l'entrée et la franchise souscrite

Selon les trois durées de franchise, il n'y a pas de tendance marquante quant à l'évolution des taux d'entrée en incapacité par accident selon l'âge à l'entrée.

Nous décidons donc de garder pour chaque durée de franchise un taux identique pour tous les âges.

Franchise maladie

Analysons maintenant le taux d'entrée en maladie, segmenté selon la durée de franchise.

Durée de franchise maladie	Taux
15 jours	3,9%
30 jours	3,3%
42 jours	2,8%
60 jours	1,9%
90 jours	1,0%

Tableau 11 : Taux d'entrée suite à une maladie selon la franchise souscrite

A l'image des contrats emprunteurs, nous constatons fort logiquement que le taux d'entrée dépend de la durée de franchise. Il paraît donc normal de segmenter notre étude selon les durées de franchise, et selon l'âge à l'entrée qui bien évidemment est un facteur important en termes de maladie.

Au final, le taux d'entrée que nous calculerons sera le taux selon l'âge de l'assuré et la franchise maladie souscrite que nous translaterons ensuite d'un taux égal à celui de la franchise accident souscrite.

3.3.2. Taux globaux par sexe

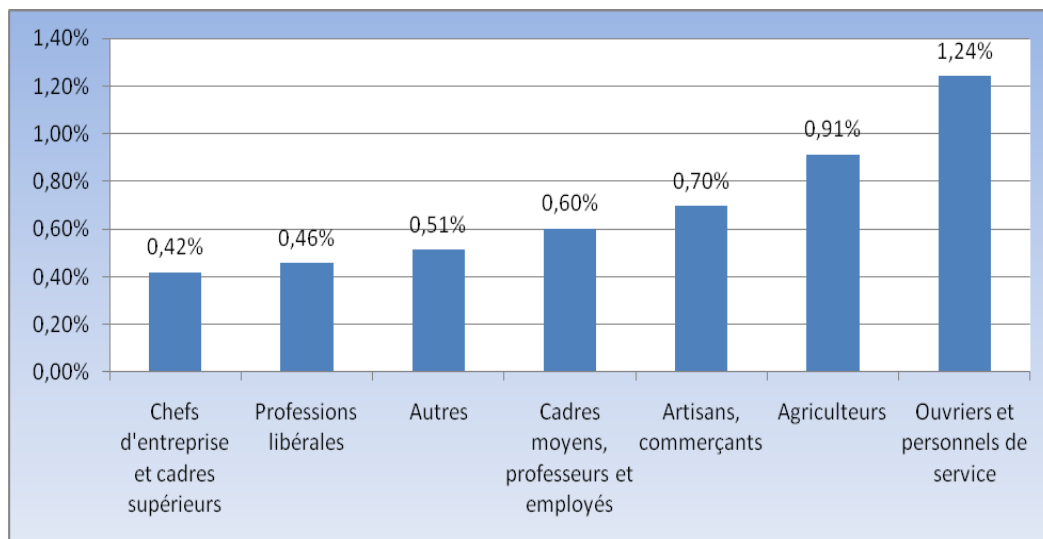
Emprunteur	Femme	0,87%
	Homme	0,81%
Prévoyance individuelle	Femme	4,24%
	Homme	4,36%

Tableau 12 : Taux d'entrée par sexe

L'écart n'est pas dans le même sens selon les deux portefeuilles, et il est plus important en emprunteur. Ce revirement peut être expliqué par le fait que 50% des contrats PI (25% en emprunteur) sont souscrits par des ouvriers qui sont représentés à 75% par des hommes et qui du coup augmentent le taux global du sexe.

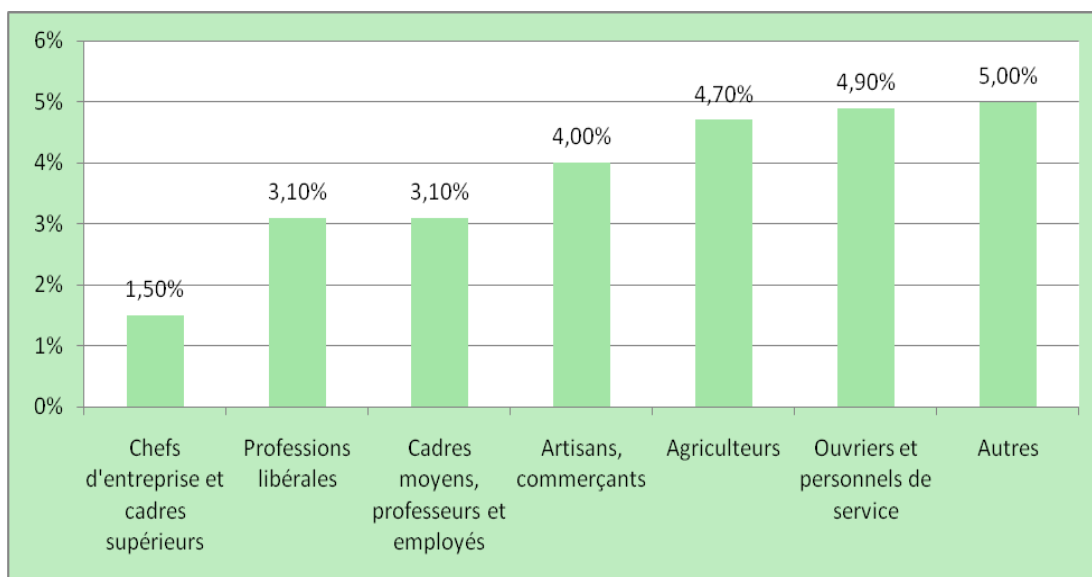
3.3.3. Les catégories socioprofessionnelles

- **Emprunteurs**



Graphique 10 : Taux d'entrée par catégorie socioprofessionnelle sur le portefeuille emprunteur

- **Prévoyance individuelle**



Graphique 11 : Taux d'entrée par catégorie socioprofessionnelle sur le portefeuille emprunteur

A partir des taux globaux donnés de chaque portefeuille (0.83% et 4.22%) qui vont nous servir de base 100, nous allons donner les taux relatifs à chaque catégorie dans le tableau suivant :

Catégorie Socioprofessionnelle	Prévoyance individuelle	Emprunteur
Chefs d'entreprise et cadres supérieurs	50%	36%
Professions libérales	55%	73%
Cadres moyens, professeurs et employés	72%	73%
Artisans, commerçants	84%	95%
Agriculteurs	110%	111%
Ouvriers et personnels de service	149%	116%
Autres	62%	118%

Tableau 13 : Rapport entre le taux de chaque catégorie et le taux global

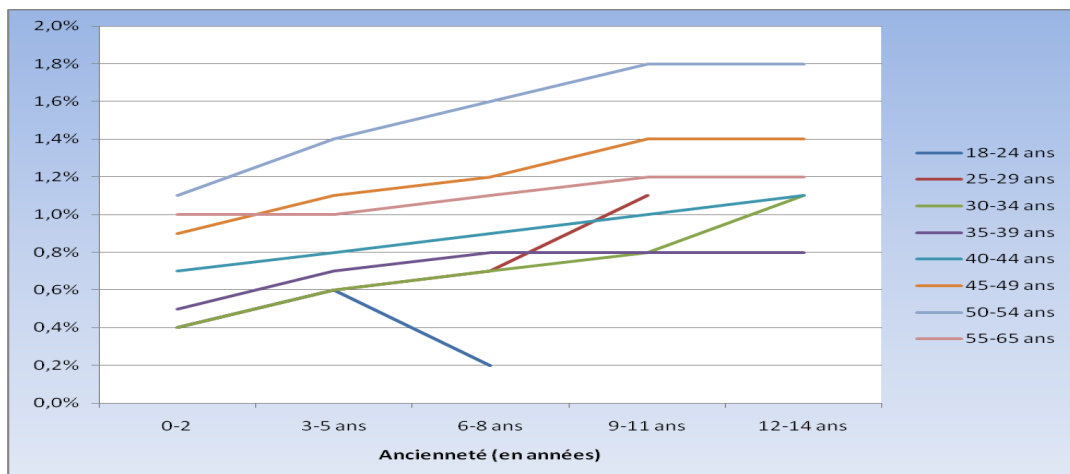
Les changements dans les taux donnés par rapport à la base 100 ont pour origine la répartition des catégories socioprofessionnelles dans chaque portefeuille. Nous voyons donc que les ouvriers qui sont nettement plus présents dans le portefeuille de prévoyance vont rehausser le taux moyen du portefeuille, et par conséquent l'écart entre le taux de cette

catégorie et le taux global va diminuer. A l'inverse, l'écart constaté entre le taux global et celui des chefs d'entreprise et cadres supérieurs va fortement augmenter.

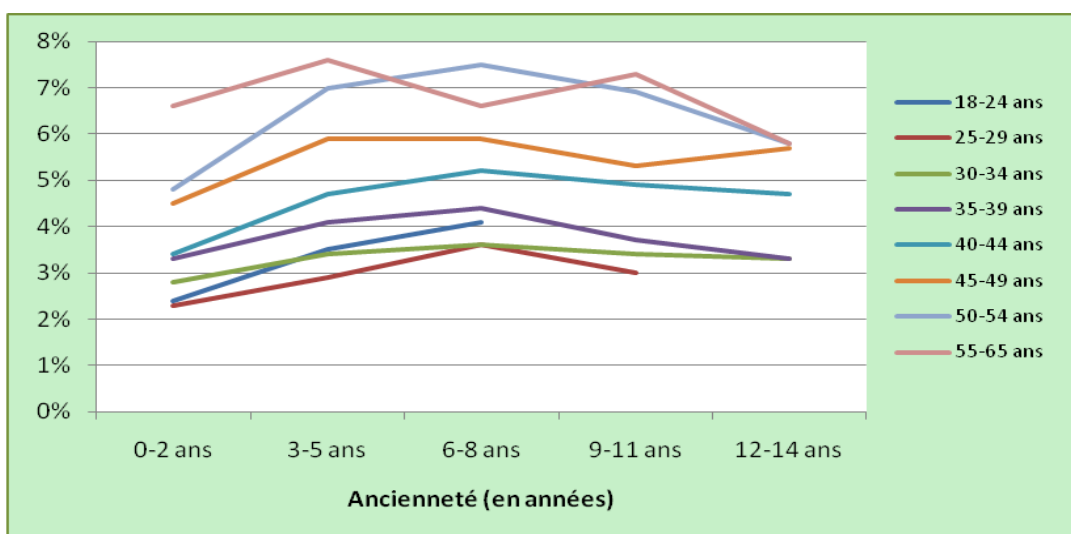
3.3.4. Taux par ancienneté

L'étude du taux d'entrée selon l'ancienneté peut s'avérer intéressante. Comme il est à priori normal que le taux augmente avec l'âge, nous ne pouvons pas analyser l'impact de l'ancienneté sur l'unique classe d'âge 20 à 64 ans, l'âge et par conséquent le risque augmentant avec l'ancienneté. Pour que l'analyse soit significative, nous avons donc été obligés de constituer plusieurs classes d'âge, et afin qu'elle soit plus lisible nous avons également constitué des classes d'ancienneté de trois ans.

Voici les résultats des deux portefeuilles sur les graphiques suivants :



Graphique 12 : Evolution du taux d'entrée selon l'ancienneté du contrat dans le portefeuille emprunteur



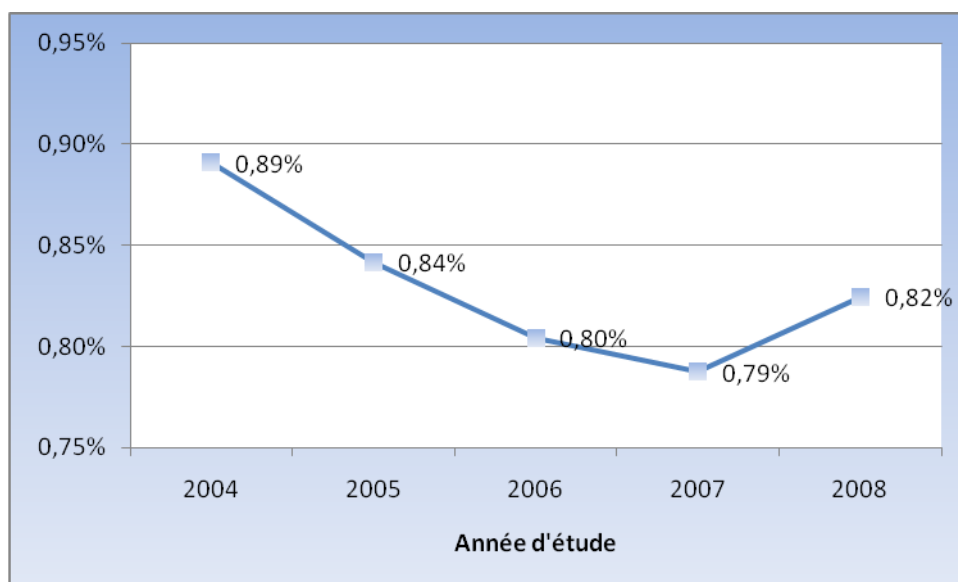
Graphique 13 : Evolution du taux d'entrée selon l'ancienneté du contrat dans le portefeuille de prévoyance individuelle

Alors que le risque paraît constamment croissant avec l'ancienneté sur le portefeuille emprunteur, il donne l'impression de décroître au bout de 6-8 ans sur le portefeuille de prévoyance.

3.3.5. Taux globaux annuels

Afin d'analyser l'évolution du taux d'entrée en incapacité, nous avons calculé le taux d'entrée global du portefeuille (sans aucune segmentation) selon les différentes années étudiées.

- **Le portefeuille emprunteur**



Graphique 14 : Evolution du taux global du portefeuille emprunteur année par année

L'évolution constatée des taux d'entrée peut avoir deux sources d'explication. La première peut être due à la conjoncture et le fait que le taux d'entrée varie de la même manière sur l'échelon national. La deuxième peut provenir des changements des caractéristiques du portefeuille selon les années. Nous allons essayer d'étudier plus en profondeur ces deux possibles causes :

La conjoncture nationale

Une étude menée en 2009 par la Caisse Nationale d'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés (CNAMTS) nous donne quelques réponses. Elle porte sur les indemnités journalières versées au titre des arrêts de travail faisant suite à une maladie. Nous y apprenons que les prescriptions d'indemnités journalières ont connu un net infléchissement

entre la mi-20003 et le début de l'année 2006 (-1,5% en moyenne chaque année) et qu'elles sont reparties à la hausse en 2007 et 2008 avec une croissance respective de 2,9% et 5,8%. L'infléchissement a surtout été dû aux actions de contrôle des caisses d'assurance maladie qui ont nettement augmenté entre 2003 et 2005 et à la convention médicale signée en 2005 engageant les médecins libéraux à réduire le volume des prescriptions dans le cadre des objectifs de maîtrise médicalisée des dépenses.

Nous constatons que nos données suivent la tendance de la conjoncture nationale. Regardons à présent si les caractéristiques du portefeuille tiennent aussi une partie des explications des différentes évolutions.

Les caractéristiques du portefeuille

L'offre relative aux contrats emprunteur n'a pas connu de réels changements depuis de longues années et il n'y a donc pas de raison pour que les caractéristiques des contrats selon les franchises, le sexe ou les catégories socioprofessionnelles aient évolué. En revanche, comme nous avons vu l'impact non négligeable de l'ancienneté et celui bien connu de l'âge sur le taux d'entrée, il nous a paru intéressant d'analyser les évolutions de l'ancienneté et de l'âge moyens du portefeuille selon les années. Elles sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Année	Age moyen	Ancienneté moyenne
2004	41,43	4,22
2005	41,34	4,31
2006	41,12	4,30
2007	40,78	4,29
2008	40,55	4,43

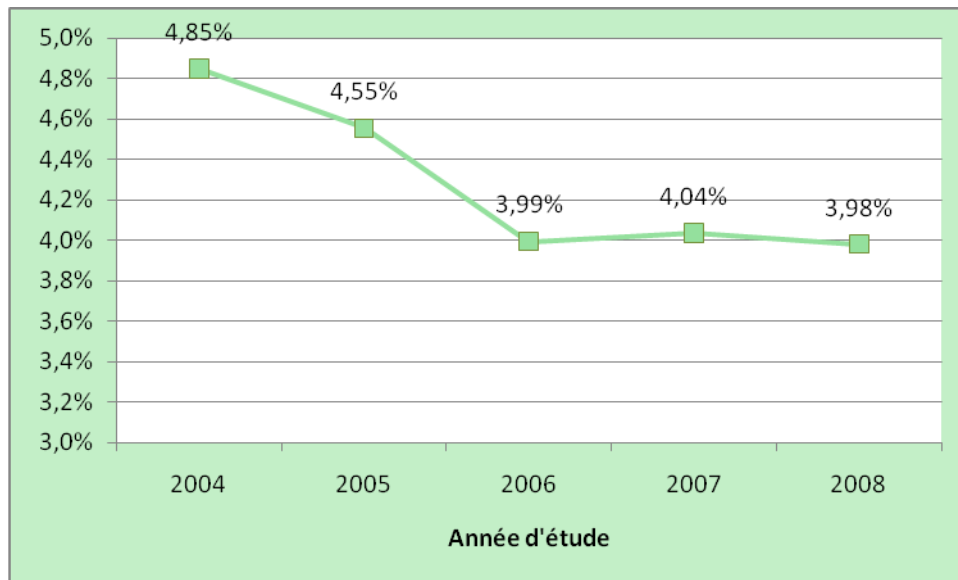
Tableau 14 : Evolution de l'âge moyen et de l'ancienneté moyenne du portefeuille emprunteur

La décroissance de l'âge moyen couplée à une stabilité de l'ancienneté moyenne les 4 premières années peut également expliquer en partie la chute du taux pendant ces années. En revanche, de 2007 à 2008, bien que l'âge moyen décroisse toujours, il semblerait que la hausse de l'ancienneté moyenne joue un rôle non négligeable dans la légère hausse constatée du taux. Cette augmentation de l'ancienneté est directement liée à la crise des subprimes qui a complètement bloqué le marché du crédit à partir de 2008

Même si certaines constatations peuvent en partie expliquer la variation des taux chaque année, il est très difficile d'en tirer des conclusions très significatives et de savoir quels facteurs sont les plus influents.

Nous allons voir si les paramètres étudiés ont aussi un rôle sur l'évolution du portefeuille de prévoyance individuelle.

- **La Prévoyance individuelle**



Graphique 15 : Evolution du taux global du portefeuille PI année par année

Contrairement au portefeuille précédent, celui-ci a connu beaucoup d'évolution ces dernières années. Ainsi, une analyse de la conjoncture ainsi que de l'âge et de l'ancienneté moyens ne pourraient apporter une unique explication de l'évolution des taux et nous devrions également tenir compte du pourcentage des types et durées de franchise souscrites selon les années étudiées. Nous nous restreindrons cependant à l'analyse du tableau suivant :

Année	Age moyen	Ancienneté moyenne
2004	38,33	5,45
2005	38,33	5,32
2006	38,16	4,99
2007	38,22	5,00
2008	38,40	5,17

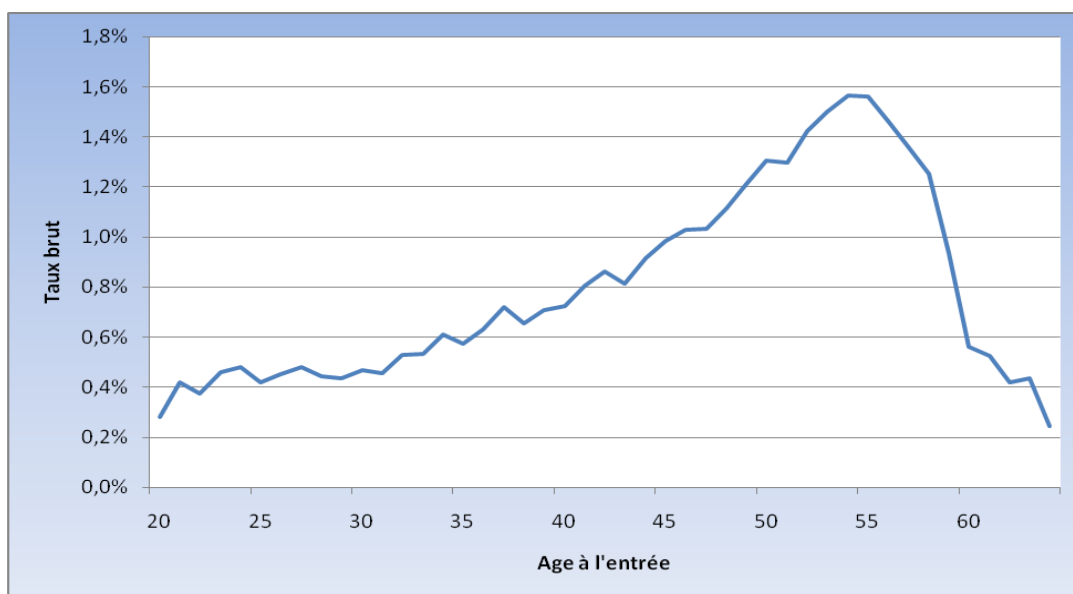
Tableau 15 : Evolution de l'âge moyen et de l'ancienneté moyenne du portefeuille de prévoyance individuelle

Nous constatons que le gonflement du nombre de contrats entre 2004 et 2007 a considérablement fait diminuer l'ancienneté moyenne et nous pouvons supposer que nous

tenons, avec l'effet de la conjoncture, une grande partie de l'explication de la baisse des taux. Mais l'impact de ces variables ne reste néanmoins pas très clair au vu de la stagnation du taux de 2007 à 2008 couplée à l'augmentation de l'âge et de l'ancienneté moyens.

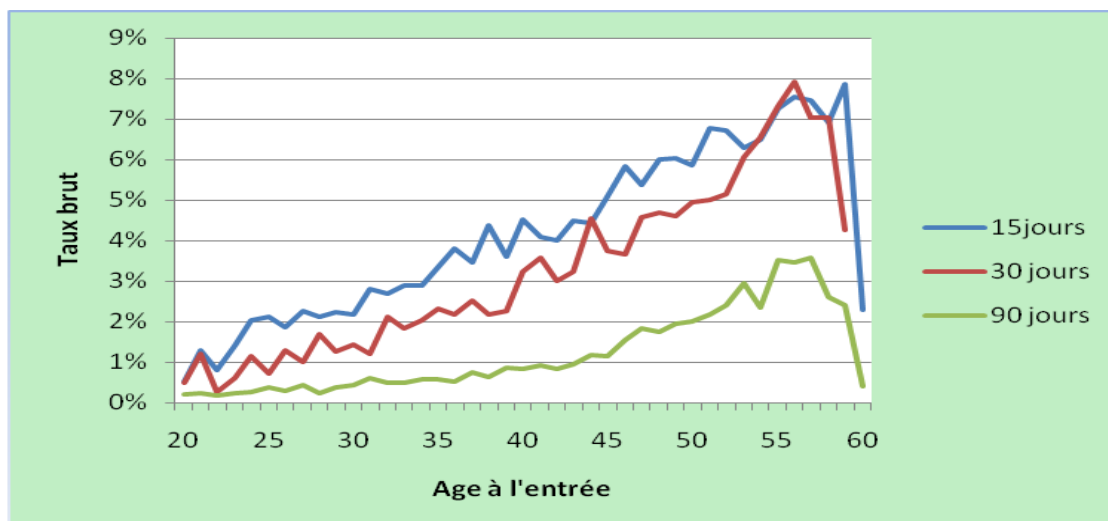
3.3.6. Evolution âge par âge

Nous présentons ici l'évolution des taux selon l'âge des assurés du portefeuille emprunteur.



Graphique 16 : Evolution du taux d'entrée selon l'âge des assurés sur le portefeuille emprunteur

Le graphique suivant illustre les taux d'entrée en incapacité faisant suite à une maladie du portefeuille de prévoyance individuelle. En effet, nous avons précédemment expliqué que nous n'intégrerons la sinistralité par accident que par une translation des taux obtenus sur les sinistres de nature « maladie ». Nous pouvons donc analyser l'évolution des taux d'entrée uniquement par ces courbes.



Graphique 17 : Evolution du taux d'entrée selon l'âge des assurés et la franchise maladie souscrite sur le portefeuille PI

Nous remarquons tout de suite que contrairement à ce que nous pouvions attendre, les taux ne sont pas toujours croissants avec l'âge. En effet, à partir de 54-56 ans, le taux commence à baisser constamment jusqu'à l'âge maximal de garantie, c'est à dire 65 ans. (Nous noterons que nos taux s'arrêtent à 60 ans pour les contrats de prévoyance individuelle, car la plupart des contrats observables avait pour fin de garantie cet âge ci).

Cette soudaine baisse s'explique par le fait qu'une bonne partie des souscripteurs prend sa retraite bien avant la fin de la garantie et continue tout de même à payer une prime alors même qu'elle n'est plus sous le risque d'un arrêt de travail. Ce phénomène est intéressant et il paraît important de le considérer dans des optiques de tarification et de provisionnement.

3.3.7. Conclusion

Nous avons ainsi présenté les résultats selon différentes segmentations. Comme déjà énoncés, les deux segmentations principales à considérer sont ici l'âge et la franchise alors que les résultats obtenus sur d'autres types de segmentation pourront servir à appliquer un correctif dans le cadre d'une tarification d'un nouveau contrat. Ces derniers ne peuvent malheureusement pas être à l'origine d'une nouvelle segmentation car, dans ce cas, les données se réduiraient considérablement et il ne serait plus possible de calculer des taux fiables.

Nous continuerons notre étude en calculant des intervalles de confiance sur l'évolution des taux selon l'âge à l'entrée.

3.4 Intervalle de confiance des résultats bruts obtenus

A partir des taux bruts obtenus, nous allons définir un intervalle de confiance pour donner un certain degré de confiance de la valeur que nous avons estimée. Nous choisirons ici un intervalle de confiance à 95%, c'est-à-dire que la probabilité que le vrai taux se trouve dans l'intervalle défini est de 95%.

Ainsi, plus l'intervalle de confiance est de taille petite, plus l'incertitude sur la valeur estimée est petite.

- **Calculs**

A un âge fixé, une proportion p des individus sous risque possède un certain caractère, celui de tomber en incapacité. Nous devons donc chercher un intervalle de confiance pour p , à partir de \hat{I} , le taux que nous avons estimé dans notre population de taille n .

La probabilité d'incapacité de chaque personne suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Ainsi, la loi du nombre d'incapacité parmi la population de taille n soumise au risque, $n\hat{I}$, suit une loi binomiale $B(n, p)$.

De plus, comme n est grand, nous pouvons approximer $n\hat{I}$ par une loi normale :

$$n\hat{I} \approx N(np; \sqrt{np(1-p)})$$

$$\text{Et donc : } \hat{I} \approx N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \Leftrightarrow \frac{\hat{I} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

Pour une loi normale Z , de moyenne 0 et de variance 1, nous avons : $P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$. La valeur 1,96 étant le quantile d'ordre (1-2,5%) de la loi normale.

Nous avons ainsi :

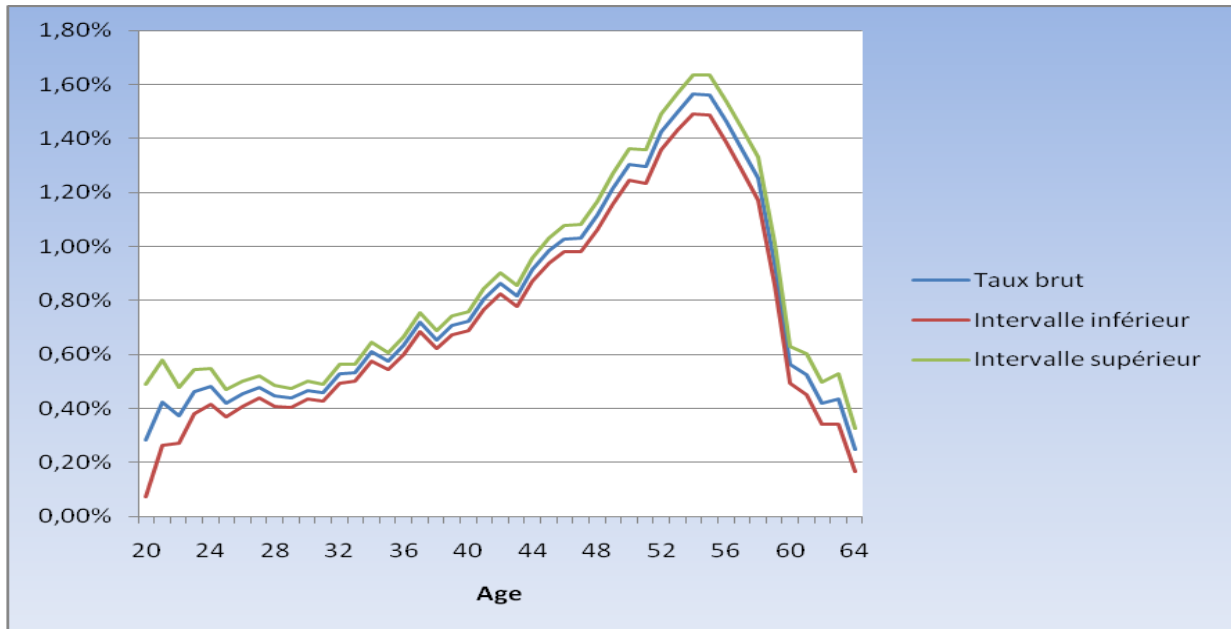
$$P\left(-1,96 < \frac{\hat{I} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < 1,96\right) = 0,95 \Leftrightarrow P\left(\hat{I} - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{I} + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 0,95$$

En estimant $p(1-p)$ par $\hat{I}(1-\hat{I})$ nous pouvons alors encadrer p :

$$\boxed{P\left(\hat{I} - 1,96\sqrt{\frac{\hat{I}(1-\hat{I})}{n}} < p < \hat{I} + 1,96\sqrt{\frac{\hat{I}(1-\hat{I})}{n}}\right) = 0,95}$$

Nous remarquons que plus le nombre d'observation est grand, plus l'intervalle de confiance est petit et plus l'estimation du taux correct.

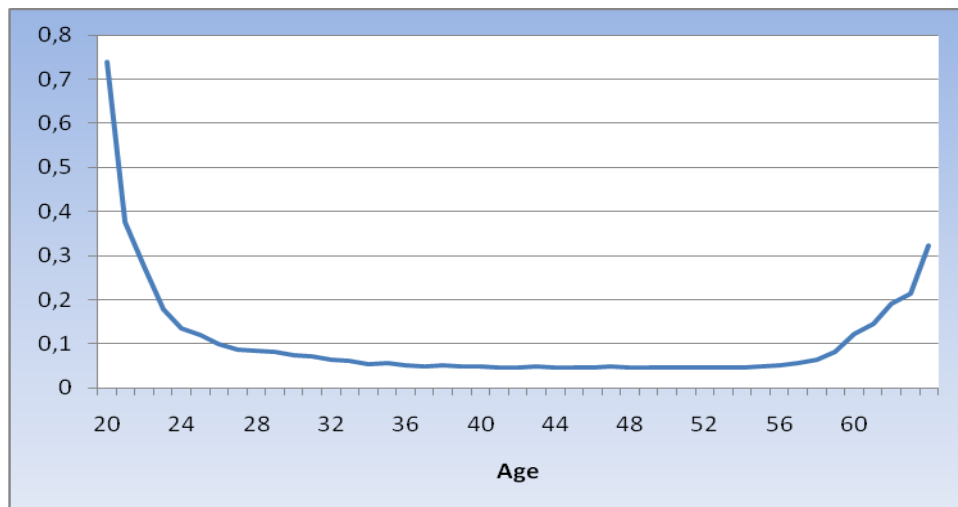
Voici les différents intervalles de confiance que nous obtenons :



Graphique 18 : intervalles de confiance des taux bruts d'entrée en incapacité du portefeuille emprunteur

Nous remarquons que les intervalles de confiance aux âges extrêmes sont plus grands, signifiant que les taux bruts sont quelque peu moins fiables. Pour en avoir la certitude, nous allons mesurer le rapport entre l'écart du taux brut par rapport à la borne sup ou inf. et le taux brut :

$\frac{I_x - I_{x-}}{I_x} = \frac{I_{x+} - I_x}{I_x}$, où I_{x-} et I_{x+} sont les bornes inférieures et supérieures des intervalles de confiance.



Graphique 19 : Rapport entre les intervalles de confiance et les taux bruts

- **Les âges sélectionnés**

Nous constatons encore que les taux bruts des âges extrêmes sont légèrement moins fiables. Cependant, nous estimons qu'au vu du nombre de données observées sur le portefeuille emprunteur, nous pouvons juger ces taux fiables. Ainsi, nous constituerons une classe d'âge seulement pour les âges 20 à 22 et nous garderons toutes les autres valeurs brutes telles quelles pour le lissage de la courbe.

Le phénomène est le même pour le portefeuille de prévoyance individuelle et nous décidons ainsi de ne garder dans un premier temps que les âges où les données peuvent être jugées comme significatives. Le lissage des taux bruts sera donc effectué sur les âges 20 à 58 et nous extrapolerons ensuite aux âges supérieurs. Ces deux étapes seront détaillées ci-dessous.

3.5 Lissage des taux bruts et extrapolation

Nous avons obtenu des taux bruts qui présentent certaines irrégularités du fait d'imperfection des conditions de l'étude. En effet, les fluctuations d'échantillonnages induisent une variabilité "parasite" dans les valeurs estimées. Pour rectifier ces imprécisions et retrouver une courbe régulière, nous devons lisser les taux bruts obtenus grâce à différentes méthodes qui sont en général appelées lissages dans le cas non paramétrique et ajustements dans le cas paramétrique. Nous utiliserons souvent les deux termes.

Comme nous l'avons signalé plus haut, certains âges du portefeuille de prévoyance individuelle ne comportent que trop peu ou pas d'observations pour pouvoir en ressortir un taux fiable. Nous devons alors les estimer à l'aide d'une extrapolation des taux déjà lissés.

Nous continuons ainsi notre étude en présentant les différentes méthodes de lissage envisageables.

3.5.1. Généralités

Les techniques de lissage ont toutes le même but : gommer les irrégularités et les possibles incohérences provenant des taux bruts. En effet, le processus d'estimation des taux bruts ne tient pas compte des relations qui existent entre les âges, et il est tout à fait légitime de penser que le taux théorique d'entrée en incapacité augmente avec l'âge sur des intervalles bien déterminés (nous avons vu dans notre cas que la retraite approchant, une baisse des taux peut s'avérer normale). Nous allons donc devoir nous appuyer sur différentes techniques qui vont permettre de retrouver une courbe lisse tout en faisant attention à ne pas trop s'écarter des taux bruts (en minimisant autant que possible l'écart du nouveau taux et celui de \hat{I}_x).

Nous distinguons ainsi les techniques dites paramétriques et celle non paramétriques. Les premières s'appuient sur la recherche d'une fonction et des paramètres associés permettant de s'approcher au mieux de la forme de la courbe brute alors que les secondes définissent simplement un certain nombre de traitement à appliquer aux données initiales pour les rendre plus lisses.

➤ Deux exemples

Modèle de Makeham

Un exemple de lissage paramétrique est souvent donné par le modèle de Makeham.

En complétant la formule de Gompertz(1825), Makeham(1960) propose un modèle paramétrique de la force de mortalité qui est la suivante :

$$\mu_x = a + bc^x, \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ 3 paramètres à estimer.}$$

bc^x traduit l'accroissement de la mortalité ($b > 0, c > 1$) avec l'âge et a est censé devoir prendre en compte la mortalité environnementale, indépendante de l'âge, c'est-à-dire la mortalité accidentelle.

Ce modèle pourrait être adapté à une loi d'entrée en incapacité, car les taux bruts sont à priori croissants avec l'âge, et l'incapacité peut résulter d'un accident.

Cependant, nous n'utiliserons pas cet ajustement. La fonction de Makeham étant croissante, elle ne prendrait pas en compte la forme décroissante de la courbe brute après 57 ans que nous souhaitons garder.

Moyennes mobiles

La technique des moyennes mobiles est sûrement la plus connue, du fait de sa simplicité de mise en œuvre. Ce lissage consiste à ajuster les taux bruts de chaque âge grâce aux taux des âges environnants. Il faut donc choisir le nombre d'âges environnants à prendre en compte ainsi que le poids à attribuer à chacun d'eux.

Cependant, cette technique n'est que rarement utilisée car elle présente une forte sensibilité de la moyenne arithmétique aux valeurs extrêmes. Ainsi, elle pourra quelquefois être utilisée pour une régularisation préalable mais elle ne pourra que rarement fait figure de lissage terminal.

Nous allons maintenant présenter les deux types de lissage que nous avons testé pour notre étude.

3.5.2. Lissage paramétrique par les splines cubiques

L'idée du lissage par splines est de découper l'intervalle à lisser en plusieurs sous-morceaux qui seront lissés grâce à plusieurs fonctions polynomiales qui se raccordent à des points de jonctions (aussi appelés nœuds).

Il faut donc en pratique bien choisir les sous-intervalles et imposer des conditions aux polynômes au niveau des nœuds.

La résolution

Supposons que nous disposons de p observations de \hat{I}_x aux points $x = a, \dots, b$. Nous découpons notre intervalle en n morceaux. Nous avons donc choisi $n-1$ nœuds, notés x_i avec $i = 1, \dots, n-1$. Les nœuds sont en fait définis par les âges à l'entrée x_i .

Il va falloir trouver n polynômes de degré 3, et donc différentiables deux fois, $P_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$, $i = 0, \dots, n-1$, tels que les nouveaux taux soient donnés par :

$$I_x^* = \begin{cases} P_0(x), & a \leq x \leq x_1 \\ P_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots \\ P_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq b \end{cases}$$

Ceci conduit donc à $4n$ inconnues.

Pour résoudre ce problème, nous devons ajouter des contraintes aux polynômes aux différents points de jonction.

Les deux premières contraintes, qui s'ajoutent à celle du raccordement aux nœuds, sont l'égalité des pentes et des courbures aux $n-1$ nœuds qui se caractérisent par :

$$\begin{cases} p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}), \forall i = 0, \dots, n-1 \\ p_i'(x_{i+1}) = p_{i+1}'(x_{i+1}), \forall i = 0, \dots, n-1 \\ p_i''(x_{i+1}) = p_{i+1}''(x_{i+1}), \forall i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Cela nous conduit à poser :

$$\begin{cases} P_0(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \\ P_1(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 (x - x_1)^3 \\ \vdots \\ P_i(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 (x - x_1)^3 + \dots + c_{i+4} (x - x_i)^3 \end{cases}$$

Il reste donc $n-1+4 = n+3$ inconnues à retrouver. Pour cela, nous utilisons un critère de moindres carrés qui consiste à rechercher les paramètres qui minimisent F , la somme des erreurs au carré pondérée par w_x le poids accordé à l'âge x .

$$F = \sum_{x=a}^{x_1} w_x \left(P_0(x) - \hat{I}_x \right)^2 + \dots + \sum_{x=x_{n-1}}^b w_x \left(P_{n-1}(x) - \hat{I}_x \right)^2,$$

Il faut ensuite prendre les dérivées partielles de cette équation par rapport aux coefficients recherchés : $\frac{\partial F}{\partial c_i}$, $i = 1, \dots, n+3$, puis les résoudre.

La résolution peut se mettre sous forme matricielle suivante :

$$\boxed{{}^t X W X C = {}^t X W \hat{I}}$$

Avec X , W , C et \hat{I} , les matrices suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+3} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{a+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} \hat{I}_a \\ \vdots \\ \hat{I}_b \end{pmatrix}$$

Nous donnons un exemple de la matrice X , de taille $(p,6)$ dans le cas de deux nœuds :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 \\ 1 & x_1+1 & (x_1+1)^2 & (x_1+1)^3 & (x_1+1-x_1)^3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & (x_2-x_1)^3 & 0 \\ 1 & x_2+1 & (x_2+1)^2 & (x_2+1)^3 & (x_2+1-x_1)^3 & (x_2+1-x_2)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & b^2 & b^3 & (b-x_1)^3 & (b-x_2)^3 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons les coefficients de nos polynômes qui nous permettent de calculer I^* en n'importe qu'elle point.

Le choix des nœuds

Plus nous augmenterons le nombre de nœuds, plus la fonction ajustée sera proche de la courbe d'origine mais moins la courbe sera lissée. De plus, il ne faut pas choisir des intervalles trop petits entre deux nœuds car le polynôme étant de degré 3, si nous ne disposons que de 4 valeurs de \hat{I}_x dans l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, les valeurs ajustées seront égales aux valeurs brutes.

Dans la pratique, nous choisirons les nœuds en tenant compte des changements de forme de la courbe brute.

Remarque

Ce type de lissage est souvent utilisé pour interpoler des valeurs manquantes. Ainsi, il n'est pas obligatoire d'avoir des valeurs brutes sur tout l'intervalle étudié. Dans notre cas, ce problème n'existe pas car nous avons bien obtenu une valeur brute pour chaque âge de l'intervalle auquel nous nous sommes restreints.

3.5.3. Lissage par Whittaker-Henderson

Le principe de cette méthode est de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité et de rechercher les valeurs ajustées qui minimisent une combinaison linéaire des deux critères.

Nous notons p le nombre de termes à ajuster.

Nous nous fixons des poids ($w_x, 25 \leq x \leq 60$) et nous posons F et S deux expressions explicitant respectivement la fidélité et la régularité:

$$F = \sum_{x=1}^p w_x \left(I_x^* - \hat{I}_x \right)^2 \qquad S = \sum_{x=1}^p w_x \left(\Delta^z I_x^* \right)^2$$

Avec :

- z un paramètre du modèle permettant d'augmenter la régularité des taux

- Δ^z défini par:

$$\Delta^z u(x) = \Delta^{z-1} u(x+1) - \Delta^{z-1} u(x) \qquad \Delta^1 u(x) = u(x+1) - u(x)$$

Le critère à minimiser est alors une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité, le poids de chacun des deux termes étant contrôlé par un second paramètre h :

$$M = F + h \times S$$

La solution de ce problème d'optimisation satisfait aux conditions $\frac{\partial M}{\partial I_x^*} = 0, 1 \leq x \leq p$

La résolution de ce système d'équations peut être effectuée au moyen de quelques manipulations matricielles. A cet effet, nous posons :

$$I = \left(I_x^* \right)_{1 \leq x \leq p}, \quad \hat{I} = \left(\hat{I}_x \right)_{1 \leq x \leq p}, \quad w = \text{diag}(w_x)_{1 \leq x \leq p}, \quad \Delta^z I = \left(\Delta^z I_x^* \right)_{1 \leq x \leq p}$$

Nous pouvons alors réécrire F et S de la façon suivante:

$$F = {}^t \left(I - \hat{I} \right) w \left(I - \hat{I} \right) \quad S = {}^t \left(\Delta^z I \right) \left(\Delta^z I \right)$$

Pour détailler l'écriture de S , nous introduisons la matrice K_z de taille $(p-z, p)$, dont les termes sont les coefficients binomiaux d'ordre z dont le signe alterne et commence positivement pour z pair. Par exemple, pour $z=2$ et $p=5$, et $z=3$ $p=6$, nous avons respectivement les matrices K_2 et K_3 suivantes:

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad K_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

En vérifiant aisément que $\Delta^z I = K_z I$, nous écrivons finalement M comme suit:

$$M = {}^t \left(I - \hat{I} \right) w \left(I - \hat{I} \right) + h {}^t I {}^t K_z K_z I = {}^t I w I - 2 {}^t I w \hat{I} + {}^t \hat{I} w \hat{I} + h {}^t I {}^t K_z K_z I$$

Cela conduit à :

$$\frac{\partial M}{\partial I} = 2 w I - 2 w \hat{I} + h {}^t K_z K_z I$$

La résolution de $\frac{\partial M}{\partial I} = 0$ conduit alors à l'expression des taux ajustés:

$$I = \left(w + h {}^t K_z K_z \right)^{-1} w \hat{I}$$

Remarque

En pratique, nous sommes plutôt amené à utiliser des valeurs de z égales à 2 ou 3, car $z=1$ ne lisse pas assez les données et $z=4$ tend à représenter une droite. Les résultats sont assez similaires entre l'utilisation de z égale à 2 ou 3 et nous nous sommes donc restreints à une valeur de 2 car la fidélité aux données était un peu plus satisfaisante et la régularité perdue pas si contraignante. Ainsi, ce sera le choix de h qui permettra de jouer directement sur une maximisation de la régularité ou de la fidélité des données.

3.5.4. Validation et choix des lissages

Pour choisir notre méthode de lissage et s'assurer qu'elle est de bonne qualité, il est nécessaire de réaliser quelques tests. En effet, l'ajustement crée des écarts par rapport aux taux bruts observés, et nous devons vérifier que ces écarts ne sont pas trop importants. Les différents résultats obtenus pourront nous aider dans le choix de notre lissage.

- **Les critères de choix**

Fidélité et régularité

Le premier test consiste à vérifier les critères de régularité et de fidélité de chaque lissage. Les formules sont les suivantes :

➤ Fidélité : $\sum_{x=25}^{60} (\hat{I}_x - I_x^*)^2$, où I_x^* sont les taux lissés

➤ Régularité : $\sum_{x=25}^{60-z} (\Delta^z I_x^*)^2$

C'est-à-dire pour $z=1$: $\sum_{x=25}^{59} (I_x^* - I_{x+1}^*)^2$ et pour $z=2$: $\sum_{x=25}^{58} (I_x^* - 2I_{x+1}^* + I_{x+2}^*)^2$

Ainsi, plus ces valeurs tendront vers 0, plus le lissage sera de bonne qualité.

Les intervalles de confiance

Les intervalles de confiance décrits précédemment sont également un moyen de voir si le lissage est de bonne qualité. Ainsi, lorsqu'un nombre trop important de valeurs sort des intervalles de confiance, nous ne pouvons pas juger les taux fiables.

- **Le choix effectué**

Le lissage par splines permet de trouver des valeurs très faibles de régularité, synonyme de bons résultats dans ce critère. Malheureusement, même s'il est possible d'augmenter le nombre de nœuds pour augmenter la fidélité des données, celle-ci n'est jamais très satisfaisante. De plus, l'avantage de cet ajustement provient en grande partie de sa forme paramétrique qui permet de prolonger les différentes valeurs aux âges où les données sont faibles voir inexistantes. Mais là encore, les paramètres obtenus ne permettent pas un bon prolongement ; soit ils amplifient de manière trop importante la décroissance de la courbe après 57 ans et, quelque soit le choix des nœuds, nous nous retrouvons souvent avec des

taux négatifs après 62 ans, soit la courbe paramétrique est constamment croissante et nous perdons l'aspect décroissant de la courbe à l'approche de la retraite.

Nous avons donc choisi la méthode de Whittaker-Henderson qui permet de pondérer très facilement les critères de régularité et fidélité par le choix du paramètre h . Nous avons retenu une valeur de h égale à 1 pour le portefeuille emprunteur et égale à 2 pour la prévoyance individuelle qui avait une volumétrie de données plus faible et par conséquent des valeurs brutes moins régulières, nécessitant ainsi un critère de régularité plus important. Chaque pondération w_x a été choisie en tenant compte du volume d'observations à l'âge x et a donc été calculée par le rapport entre le nombre d'observation à l'âge x et la moyenne des observations à chaque âge.

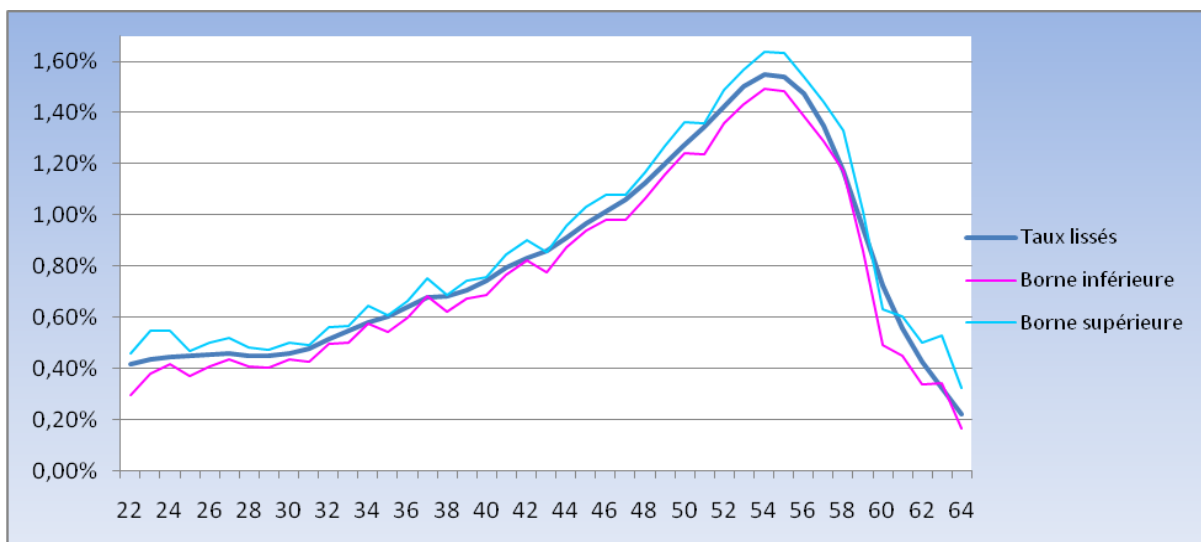
Les intervalles de confiance ont alors permis de voir que plus de 90% des valeurs lissées s'y trouvaient bien à l'intérieur.

3.5.5. Extrapolation

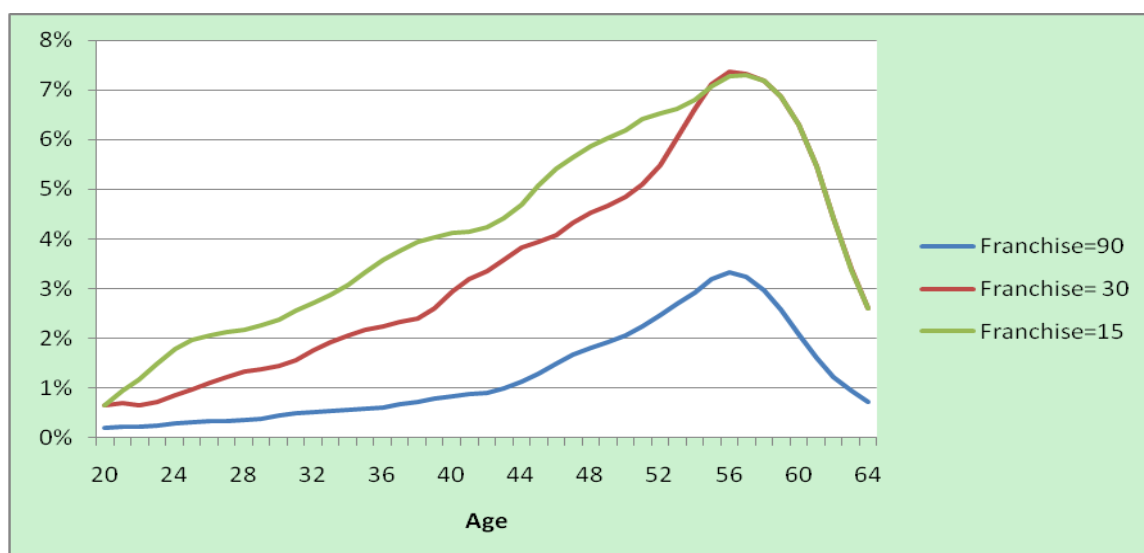
Pour prolonger les taux des tables de prévoyance individuelle, nous nous sommes servis des taux lissés du portefeuille emprunteur. La décroissance des taux s'y observent à partir de 54 ans contrairement à la prévoyance individuelle où ce n'est qu'après 56 ans. Nous avons donc simulé la décroissance des taux après 56 ans en appliquant, proportionnellement à la valeur des taux observés, la même décroissance constatée dès 54 ans sur le portefeuille emprunteur.

3.5.6. Résultats

Les résultats sont donnés sur le graphique suivant où nous retrouvons la courbe des taux lissés et les bornes inférieures et supérieures des intervalles de confiance.



Graphique 20 : Taux d'entrée en incapacité lissé du portefeuille emprunteur



Graphique 21 : Courbes lissés des franchises maladie du portefeuille PI

Nous remarquons que la croissance de la courbe 90 jours est beaucoup plus lente que les deux autres. Comme observées sur les taux bruts, les courbes relatives aux franchises 30 et 15 jours se rejoignent à partir de 54 ans et le lissage des courbes a même entraîné une évolution similaire au-delà de ce point.

La comparaison entre les deux portefeuilles sera effectuée lors du dernier chapitre.

Nous avons ainsi terminé la construction de nos tables d'entrée en incapacité et allons poursuivre notre étude en construisant les tables de maintien associés.

Chapitre 4 : TABLE DE MAINTIEN EN INCAPACITE

Après avoir déterminé les taux d'entrée en incapacité, nous suivons les étapes de tarification et de provisionnement en estimant des tables de maintien en incapacité. Ces tables vont fournir des probabilités de durée de maintien par rapport à l'âge à l'entrée en incapacité. Nous donnerons tout d'abord quelques généralités sur les tables de maintien et sur certaines conventions utilisées. Nous présenterons ensuite l'estimateur de Kaplan Meier adapté à la construction de la table de maintien. Contrairement aux sections précédentes, nous présenterons séparément les étapes de calcul des deux portefeuilles. En effet, du fait d'un volume de données différent et de complication due aux différentes franchises dans le portefeuille de prévoyance individuelle, les techniques de calcul vont quelque peu diverger.

4.1 Préambule

Contrairement à la table d'entrée où les taux dépendaient des âges à l'entrée, nous avons ici des tables à double entrée dépendant de l'âge à l'entrée en incapacité et de la durée de maintien dans cet état.

- **La table réglementaire**

Les méthodes de tarification et de provisionnement actuelles se basent sur la table réglementaire fournie par le BCAC (Année 1996, voir *Annexe 2*). Cette table est déclinée sur tous les âges de 20 à 64 ans et les durées de maintien mensuelles de 0 à 36 mois. Ainsi, notre table sera aussi construite avec des durées de maintien discrétisées en mois et les âges dépendront des volumes d'observation à notre disposition.

- **Les troncatures et censures**

Comme nous l'avons déjà fait remarquer pour l'entrée en incapacité, les données ne nous fournissent pas toute l'information voulue. C'est ainsi que la durée de maintien en incapacité des différentes personnes sinistrés n'est pas toujours observable dans sa totalité. Nous pourrions donc faire face à des troncatures ou des censures selon les situations rencontrées.

Les troncatures

Si au début de la période d'observation (01/01/2004), une personne est déjà dans un état d'incapacité, nous parlons de troncature car nous n'avons pu observer les premiers moments de cette incapacité. Bien que la structure de nos fichiers nous permette de retrouver le nombre de jours déjà indemnisés, nous décidons de ne pas intégrer de tels

sinistres dans notre étude car la date de survenance du sinistre serait lointaine et nous souhaitons ne pas intégrer de sinistres trop anciens afin d'étudier la conjoncture la plus récente possible.

La durée de franchise peut aussi être considérée comme une troncature. En effet, nous n'observons les sinistres qu'à partir du moment où ils sont indemnisés, c'est-à-dire après la période de franchise. Dans l'étude du portefeuille emprunteur, nous ferons abstraction de ce point car nous n'étudions uniquement les sinistres des contrats avec une franchise de 90 jours et la table construite sera alors une table de maintien au-delà de cette période de franchise.

En revanche, les franchises étudiées dans le cadre du portefeuille de prévoyance individuelle sont multiples et pour construire une unique table de maintien, nous devons introduire les données par troncature au fur et à mesure du temps écoulé.

Les censures

Si, à partir d'une certaine durée, nous ne pouvons plus observer la durée restante en incapacité d'une personne sinistrée, nous parlerons de censure. Elle est beaucoup plus problématique car elle nous empêche de connaître la valeur exacte de la durée en incapacité. Nous la rencontrons dans les situations suivantes :

- Fin de la période d'observation : Toutes les personnes qui sont encore en incapacité à cet instant ont une durée de maintien censurée car pas observable dans sa totalité.
- Fin des garanties en incapacité : la garantie s'arrêtant au moment où la personne liquide sa retraite ou au 31/12 du 65^e anniversaire de l'assuré (60 dans certaines générations), ce dernier n'est pas observable après cette date et sa durée de maintien est donc censurée.
- Fin du prêt : En assurance emprunteur, lorsque la personne sinistrée est encore en incapacité au moment où son emprunt est complètement remboursé, l'indemnisation du risque s'arrête et la personne n'est plus observable car ne présente plus un risque pour l'assureur.

Exemple

Nous considérons l'exemple où l'assuré tombe en incapacité à l'âge de 50 ans et son indemnisation débute après une franchise de 30 jours. Sa période d'incapacité est observable jusqu'à la fin de son prêt.

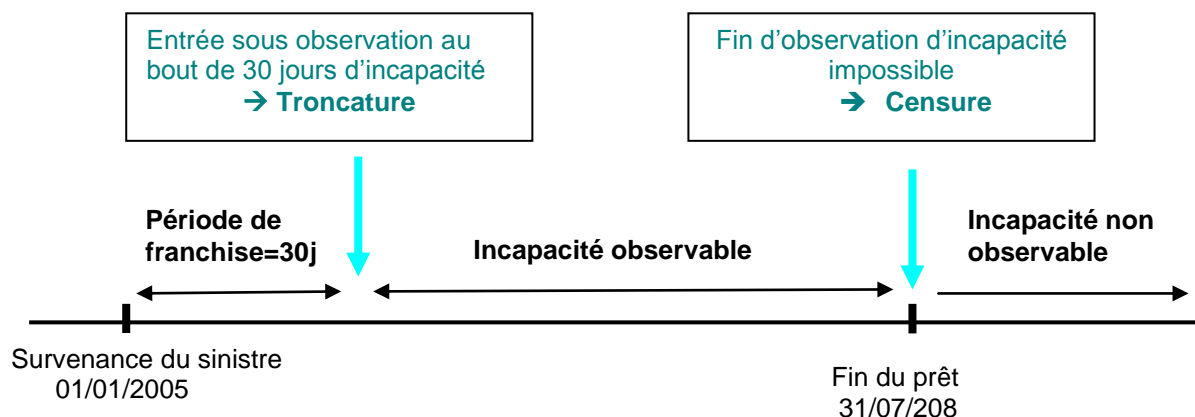


Figure 6 : Exemple de troncature et censure dans le cas du maintien en incapacité

- **Les différentes sorties possibles**

Lorsque la durée en incapacité n'est pas censurée, il existe différentes sorties d'incapacité possibles :

- La reprise d'activité : l'assuré est guéri et reprend son activité professionnelle
- L'invalidité : la santé de l'assuré s'est dégradée et son état d'incapacité bascule en invalidité. Cette sortie nous servira à construire la table de passage en invalidité.
- Le décès : l'assuré décède suite à l'incapacité

- **La gestion des sinistres non clos**

Lorsqu'aucun paiement n'a été effectué au titre d'une incapacité depuis 120 jours, l'assureur considère que la personne est sortie de son état d'incapable et clôt alors la gestion du sinistre. Cela signifie que chaque sinistre comportant une indemnisation datant de moins de 120 jours à la date d'étude et pour lequel il ne s'est produit ni passage en invalidité ni décès, sera considéré comme une donnée censurée car nous ne pouvons pas connaître sa durée exacte.

Cette remarque souligne le fait qu'il peut y avoir un grand nombre de données censurées et nous verrons par la suite comment ce problème doit être traité par notre estimateur.

- **La prise en compte des sinistres invalidités directes**

Il existe un nombre non négligeable de sinistres où l'assuré tombe en invalidité pendant la période de franchise et, par conséquent, avant d'avoir été indemnisé au titre de l'incapacité. Nous appellerons ces sinistres « invalidités directes ».

Nous avons choisi de les intégrer dans les lois d'entrée en incapacité car même s'il n'y a aucun paiement relatif à une période d'incapacité, nous devons tout de même considérer qu'il tombe incapable à un moment donné. Concernant les lois de maintien, nous décidons par mesure de prudence de ne pas les intégrer car dans le cas contraire nous devrions leur associer une durée de maintien de 0 jour qui réduirait la durée de maintien globale. En revanche, et toujours par mesure de prudence, de tels sinistres seront intégrés dans les tables de passage en invalidité avec un passage à 0 jour.

Après la présentation de ces quelques généralités sur les tables de maintien, nous pouvons introduire l'estimateur que nous utiliserons pour le calcul des taux bruts.

4.2 L'estimation des taux bruts

Une table de maintien a la particularité d'être en deux dimensions. Nous pourrions donc penser qu'il serait intéressant de calculer des taux bruts grâce à une méthode prenant en compte simultanément les deux dimensions. Cependant, des travaux sur ce sujet ont déjà été effectués et ne présentent pas des résultats très convaincants. C'est pourquoi nous estimerons les taux bruts en calculant une fonction de survie pour chaque âge à l'entrée par la méthode de Kaplan-Meier déjà présentée dans la construction de la table d'entrée. En assemblant chaque âge, nous obtiendrons notre table brute. La dépendance des taux de sortie entre les différents âges pourra ensuite être prise en compte par des méthodes de lissage bidimensionnel.

Nous débuterons ainsi cette partie par un bref rappel de l'estimateur de Kaplan-Meier et un aperçu des ses propriétés, en utilisant les notations propres à la loi de maintien et en adaptant l'estimateur à la durée mensuelle des tables par une version discrétisée. Enfin, nous verrons l'importance des conventions utilisées dans les estimations.

- **Discrétisation de l'estimateur**

Nous avons déjà évoqué le fait que les tables de maintien proposées par le BCAC étaient des tables mensuelles. Ainsi, pour les comparer à nos tables, nous sommes obligés de discrétiser nos données journalières en données mensuelles. Les instants de sortie considérés seront alors des mois, et notre estimateur sera défini par les notations et la forme suivantes :

- **Notations**

Soient :

- T la durée de présence en incapacité
- x l'âge à l'entrée en incapacité
- t l'ancienneté en nombre de mois en incapacité

- S est la fonction de survie avec $S_x(t) = P(T \geq t / \hat{\text{age}} \text{ d'entrée} = x)$
- $q_{x,t}$ est la probabilité de sortie de l'état d'incapacité entre le mois t et $t+1$
- d_j le nombre de sortie entre l'ancienneté j et $j+1$
- r_j le nombre de personnes encore présentes en incapacité après j mois
- c_j le nombre de personnes censurées avec une durée de maintien entre j et $j+1$ mois
- R_0 , le nombre de personnes sinistrées et observées dès le mois 0

Nous obtenons l'estimateur suivant :

$$\hat{S}_x(t) = \prod_{j/j < t} \left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right) = \prod_{j/j < t} (1 - q_{x,j})$$

• Les conventions

Lorsqu'il y a des censures, la discrétisation en mois donne une grande importance au choix de la convention. Celle-ci permet de donner un ordre entre les sorties et les censures afin de pouvoir définir le dénominateur r_j . Cette convention ne jouera pas sur le nombre de sortie.

1ère convention

Si nous supposons que les sorties précèdent les censures (nous supposons en fait que les personnes censurées au mois j seront toujours en incapacité après $j+1$ mois), nous obtenons :

$$r_0 = R_0$$

$$r_1 = r_0 - d_0 - c_0$$

$$r_j = r_{j-1} - d_{j-1} - c_{j-1}$$

Avec une telle convention, nous estimons en fait que les personnes censurées font partie de la population sous risque durant toute l'ancienneté j à $j+1$ sans qu'une probable sortie soit comptabilisée, alors qu'en réalité, une personne censurée entre le mois j et $j+1$ a très bien pu sortir d'incapacité avant $j+1$ sans que nous en soyons informés. Nous pouvons donc considérer que la probabilité de sortie est minorée et par conséquent la fonction de survie quelque peu majorée.

2e convention

Si nous supposons en revanche que les censures précèdent les sorties, la population sous risque ne tiendra pas compte des personnes censurées entre le mois j et $j+1$ et sur lesquelles nous ne pouvons observer des sorties. La fonction de survie sera donc plus exacte. Le dénominateur est alors défini de la manière suivante:

$$r_0 = R_0 - c_0$$

$$r_1 = r_0 - d_0 - c_1$$

$$r_j = r_{j-1} - d_{j-1} - c_j$$

Notre choix

Avec une discrétisation journalière (voir hebdomadaire), il peut paraître plus juste de choisir la 1^{ère} convention car nous pouvons supposer avec une forte probabilité qu'une personne censurée ne sera pas sortie d'incapacité le jour suivant (ou la semaine suivante). En revanche, avec notre discrétisation mensuelle, il est plus compliqué de supposer qu'une personne censurée soit toujours en incapacité le mois suivant (donc de 1 à 30 jours après). Il vaudrait mieux dans ce cas là ne plus compter ces personnes sous risque en choisissant la 2^e convention.

Cependant, **par mesure de prudence**, nous choisirons la 1^{ère} convention qui maximise la fonction de survie.

• Remarques

1) Lorsque nous avons choisi notre période d'observation, nous nous sommes demandé si le fait qu'un nombre non négligeable de données soit censuré à cause de la gestion des sinistres non clos ne biaiserait pas trop nos résultats (voir 4.1 - *sinistres non clos*). Si tel avait été le cas, il aurait fallu remonter trois ans plus tôt pour fixer la date de fin d'observation. Mais comme nous avons vu que la convention choisie était une mesure de prudence dans le cas de données censurées, nous avons pu fixer notre fin de période au 1^{er} Juin 2010.

2) Nous n'avons pas parlé de troncature dans la construction de l'estimateur car nous considérerons toujours que les personnes tronquées entrent dans la population sous risque après les sorties et viennent seulement augmenter le nombre d'observations pour le mois d'observation qui suit leur entrée. Cela n'a pas d'incidence sur l'estimateur.

4.3 Le portefeuille emprunteur

Après cette brève présentation de l'estimateur utilisé, nous allons pouvoir décrire les différentes étapes qui nous ont permis de construire la table du portefeuille emprunteur. Nous commencerons par analyser l'éventuel impact du mélange des contrats selon leur définition du risque invalidité. Puis nous délivrerons quelques données intéressantes du portefeuille avant de donner les résultats bruts. Enfin, nous lisserons et extrapolerons ces valeurs.

4.3.1. Test d'homogénéité des durées de maintien

Nous avons vu dans la présentation des produits emprunteur qu'il existe deux types de garantie invalidité selon les différentes générations de notice. Les versions les plus récentes proposent une garantie IPP et une garantie IPT contrairement aux plus anciennes qui ne présentent qu'une garantie IPT.

Pour pouvoir fusionner les deux types de contrat dans notre étude, nous devons nous assurer que la durée de maintien de chaque groupe est sensiblement la même.

Après le regroupement des données en classes (pour satisfaire un critère de volumétrie d'observation), nous comparerons les deux échantillons en procédant à un test d'homogénéité du Chi-deux.

- **La construction du test**

Il sera effectué pour chaque classe d'âge que nous avons construite. Ces classes d'âge sont les suivantes :

[20 ;29], [30 ;34], [35 ;39], [40 ;44], [45 ;49], [50 ;54], [55 ;59], [60 ;65]

Nous décrivons ici la démarche pour une seule classe d'âge.

Après avoir divisées les durées de maintien en k classes, nous allons comparer les probabilités p_1, p_2, \dots, p_k pour qu'une durée de maintien en incapacité se trouve dans chacune des classes.

Les probabilités sont ici données par la proportion de sinistre trouvé dans chaque classe de durée.

Nous déterminons ces sinistres séparément sur chaque groupe ainsi que lorsque les deux groupes sont assemblés. A noter que lorsque nous regroupons les deux groupes, nous supprimons les doublons provenant d'un même sinistre où deux prêts assurés ne sont pas de la même génération de notice IPP.

Nous noterons ainsi :

n_1 : le nombre d'observations du premier groupe

n_2 : le nombre d'observations du deuxième groupe

n : le nombre d'observations des deux groupes assemblés

p_1^i : la proportion de sinistre du groupe 1 dans la $i^{\text{ème}}$ classe de durée

p_2^i : la proportion de sinistre du groupe 2 dans la $i^{\text{ème}}$ classe de durée

p^i : la proportion de sinistre des deux groupes dans la $i^{\text{ème}}$ classe de durée

La statistique du Chi-deux associée est alors :
$$D^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(p_1^i - p^i)^2}{p^i} + \frac{(p_2^i - p^i)^2}{p^i}$$

Nous voyons clairement que cette statistique est une mesure de l'écart entre les différentes proportions des durées de maintien.

Elle tend vers une loi du Chi-deux à $k - 1$ degrés de liberté.

Pour vérifier si le test est valide, plusieurs auteurs ont proposé des critères mais le plus utilisé reste celui de Cochran (1954) qui est le suivant :

Le test est valide si pour 80% des classes de durée i , $n_j p^i$, $j = 1, 2$ est supérieur à 5 et si toutes les classes ont une valeur non nulle.

Nous allons tester l'hypothèse H_0 suivante contre l'hypothèse H_1 :

$\left\{ \begin{array}{l} H_0 : \text{Notre table de maintien est homogène selon la génération de sinistre} \\ H_1 : \text{Notre table de maintien n'est pas homogène selon la génération de sinistre} \end{array} \right.$

Pour ce faire, nous comparons D^2 à une valeur $\chi_{k-1, \alpha}^2$ issue de la table du Chi-deux à $k-1$ degrés de liberté et un seuil de tolérance de α .

On rejettera H_0 si D^2 est trop grand, c'est-à-dire supérieur à la valeur $\chi_{k-1, \alpha}^2$ qui n'a qu'une probabilité α d'être dépassée.

- **Les données**

Pour satisfaire le critère de Cochran, nous avons donc regroupé les différentes durées de maintien en 15 classes que nous verrons dans le tableau de résultat. Nous présentons ici les résultats de la classe d'âge 30-34 ans :

Classe de durée	2 groupes assemblés	Sans notice (857 observations)			Avec notice (3856 observations)		
	Proportion p	Fréquence	Proportion p1	Critère de Cochran n1*p	Fréquence	Proportion p2	Critère de Cochran n2*p
1 mois	12,05%	108	12,60%	103	459	11,90%	465
2 mois	16,57%	157	18,32%	142	625	16,21%	639
3 mois	13,38%	112	13,07%	115	521	13,51%	516
4 mois	10,13%	81	9,45%	87	395	10,24%	391
5 mois	6,18%	50	5,83%	53	241	6,25%	238
6 mois	4,76%	35	4,08%	41	191	4,95%	184
7-9 mois	11,16%	85	9,92%	96	438	11,36%	430
10-12 mois	6,83%	58	6,77%	59	262	6,79%	264
13-15 mois	4,78%	39	4,55%	41	185	4,80%	184
16-18 mois	3,32%	32	3,73%	28	124	3,22%	128
19-21 mois	2,40%	18	2,10%	21	96	2,49%	93
22-24 mois	2,27%	31	3,62%	19	76	1,97%	88
25-27 mois	1,55%	18	2,10%	13	57	1,48%	60
28-30 mois	1,31%	7	0,82%	11	55	1,43%	51
31-33 mois	3,30%	26	3,03%	28	131	3,40%	127

Tableau 16 : Test du Chi-deux

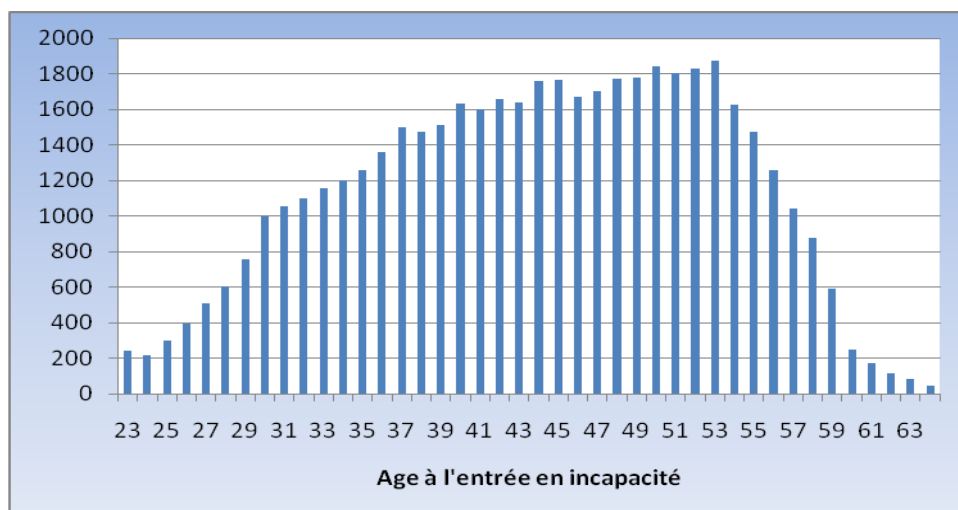
Nous obtenons une valeur du Chi-deux égale à $D^2 = 1.90$ alors que la table du Chi-deux à 14 degrés de liberté nous donne une valeur de $\chi^2_{k-1,\alpha}$ égale à 23,69 pour $\alpha = 0.05$. Nous pouvons donc accepter H_0 et conclure à l'homogénéité des deux générations de notice sur cette classe d'âge.

Ces résultats se répètent sur toutes les classes d'âge et nous pouvons donc regrouper nos données pour n'avoir au final qu'une unique table de maintien.

4.3.2. Statistiques descriptives

Nous allons donner quelques renseignements supplémentaires sur les sinistres observés sur ce portefeuille.

- **Nombre d'observations par âge**



Graphique 22 : Nombre de sinistres observés à chaque âge

Nous avons observé que la loi de maintien pour les âges 20 à 23 était la même dans la table réglementaire donnée par le BCAC. Nous avons donc décidé, de par ce paramètre et de par le nombre d'observations très faible dans ces classes d'âges de faire d'ores et déjà un premier regroupement pour ces différents âges.

- **Durée moyenne**

Nous avons déjà donné la durée moyenne en incapacité qui était de 282 jours après franchise.

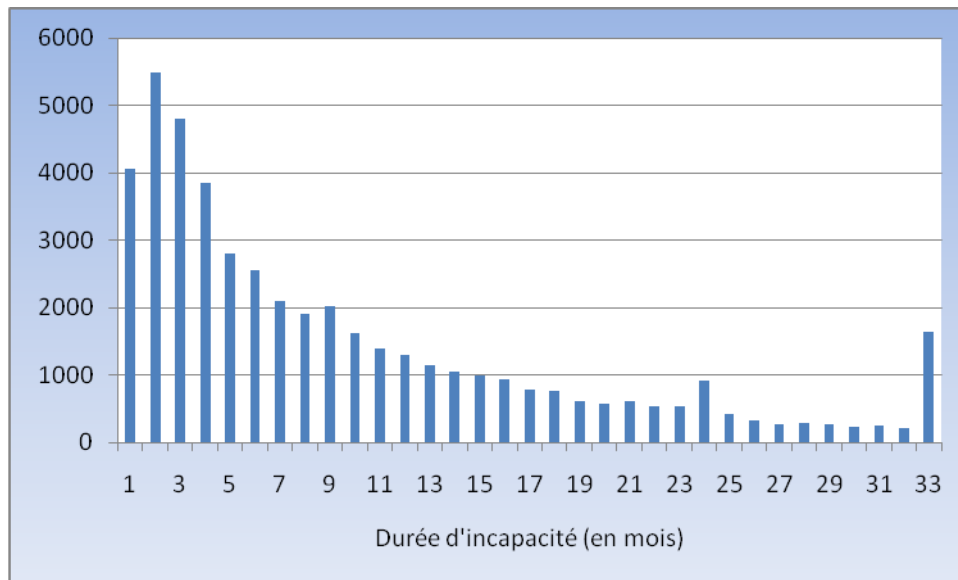
Donnons à présent les durées moyennes selon les catégories socioprofessionnelles :

CSP	Durée moyenne en incapacité
Agriculteurs	253
Artisans, commerçants	297
Autres	280
Cadres moyens, professeurs et employés	294
Chefs d'entreprises et cadres supérieurs	319
Ouvriers et personnels de service	267
Professions libérales	259

Tableau 17 : Durée moyenne en incapacité selon la catégorie socioprofessionnelle

Nous constatons que les agriculteurs et les professions libérales ont une durée de maintien beaucoup plus courte, tandis que les chefs d'entreprises et cadres supérieurs ont une durée nettement au-dessus de la moyenne.

- **Nombre d'observations selon la durée en incapacité**

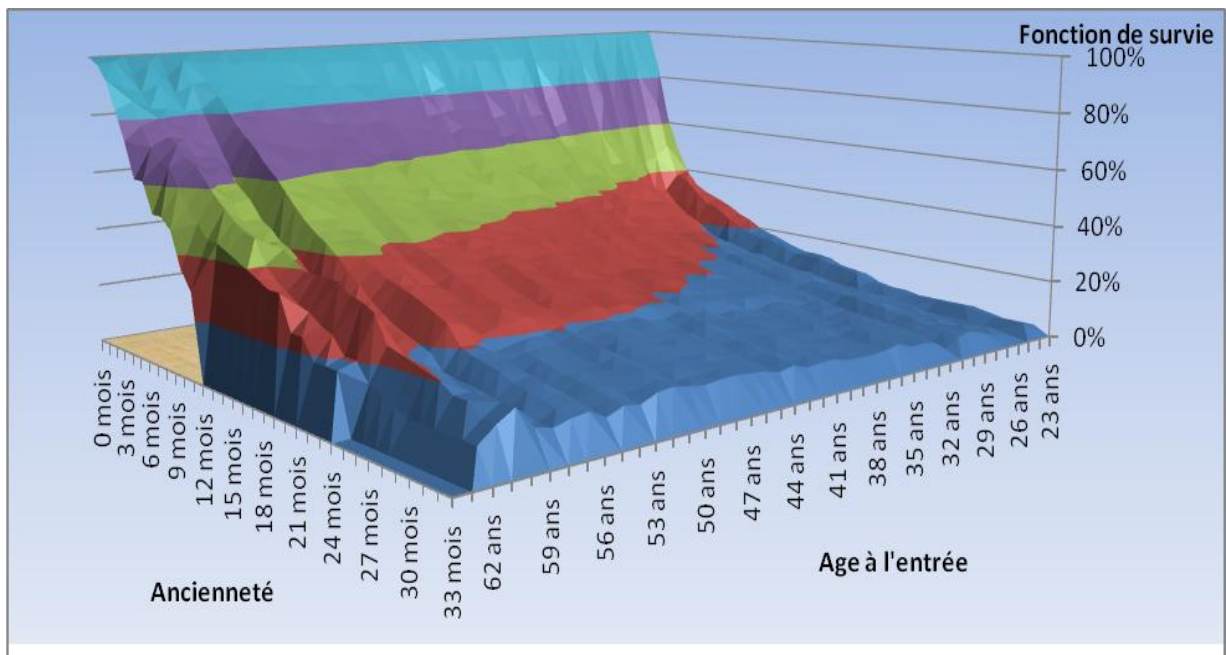


Graphique 23 : Répartition des durées de sinistres du portefeuille emprunteur

Nous observons que la majorité des sorties s'effectue dans les 4 premiers mois suivant la durée de franchise. La légère hausse constatée au 24^e mois est due au fait que certaines fédérations limitent leur durée d'indemnisation à deux ans. De tels sinistres seront considérés comme censurés car ils ne sont pas totalement observables. Enfin, comme nous considérons qu'au bout de 3 ans d'incapacité la personne sort de cet état, nous constatons un nombre important de sortie au dernier mois d'ancienneté étudié.

4.3.3. Résultats et fiabilité

Contraints par la durée de franchise, la table brute que nous présentons ici par sa fonction de survie est bien une table qui débute à 3 mois d'ancienneté.



Graphique 24 : Fonction de survie issue de la table de maintien brute du portefeuille emprunteur

A l'image des lois d'entrée, les résultats bruts obtenus présentent certaines irrégularités que nous allons devoir lisser. Mais auparavant, nous devons nous assurer qu'ils peuvent être considérés comme fiables par rapport au nombre de sinistres observés à chaque âge. Pour cela, la variance de Greenwood, qui est l'estimateur de la variance de l'estimateur de Kaplan Meier va nous apporter un bon indice. Nous le présentons ici :

- **Variance de Greenwood**

L'estimation de la variance va faire intervenir la « delta-méthode » qui suppose que pour une fonction $f(X)$ d'une variable aléatoire X , et un nombre c proche de $E(X)$, nous avons :

$$f(X) \approx f(c) + f'(c)(X - c)$$

Et ceci implique alors :

$$E[f(X)] \approx f(c) + f'(c)(E(X) - c)$$

$$Var[f(X)] \approx f'(c)^2 + Var(X)$$

Regardons son application pour l'estimation de la variance de l'estimateur de Kaplan Meier :

L'expression $\hat{S}_x(t) = \prod_{j \leq t} (1 - \frac{d_j}{r_j})$ de l'estimateur permet d'écrire :

$$\ln\left(\hat{S}_x(t)\right) = \sum_{j \leq t} \ln\left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right) = \sum_{j \leq t} \ln(1 - q_{xj})$$

Si on suppose l'indépendance des variables $\ln(1 - q_{xj})$, comme la loi de $r_j \hat{p}_j$ est binomiale de paramètres (r_j, \hat{p}_j) , nous avons par la delta-méthode :

$$V(\ln \hat{p}_j) \approx V(\hat{p}_j) \left[\frac{d}{dp} \ln(\hat{p}_j) \right]^2 = \frac{\hat{q}_{x,j}}{r_j(1 - \hat{q}_{x,j})}$$

Ce qui conduit à proposer comme estimateur de la variance de $\ln \hat{S}(t)$:

$$V\left(\ln \hat{S}(t)\right) = \sum_{j \leq t} \frac{\hat{q}_{x,j}}{r_j(1 - \hat{q}_{x,j})} = \sum_{j \leq t} \frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)}$$

En appliquant encore une fois la méthode delta à la fonction logarithme, nous obtenons finalement :

$$\hat{V}\left(\hat{S}_x(t)\right) = \hat{S}_x(t)^2 \sum_{j \leq t} \frac{d_j}{r_j(r_j - d_j)}$$

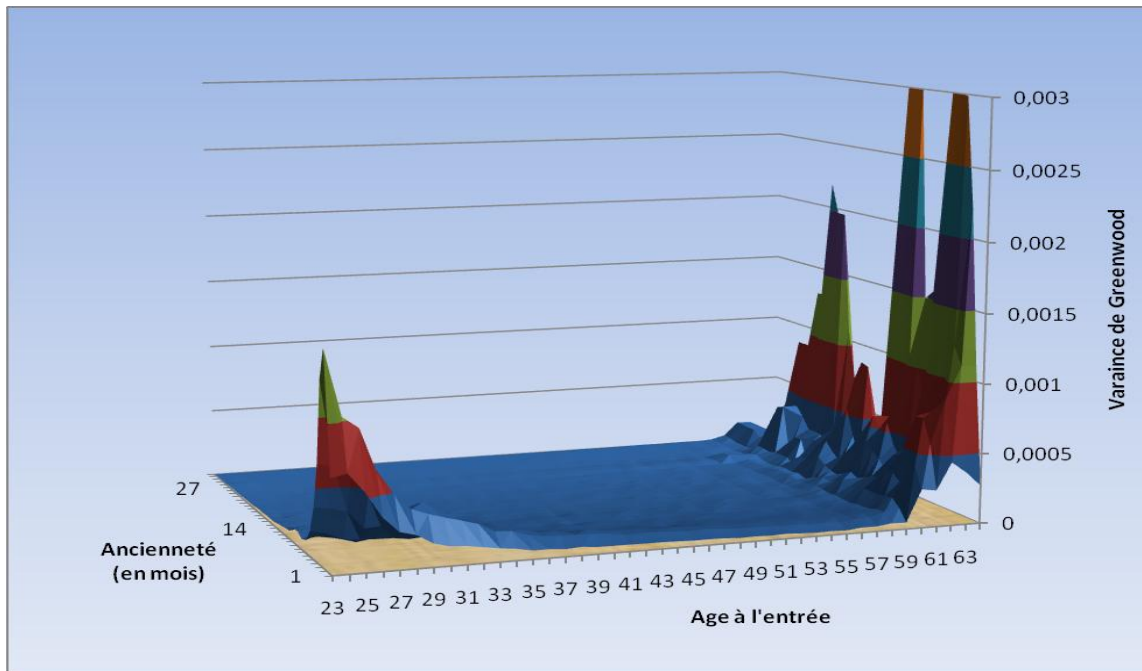
Cet estimateur de la variance est l'**estimateur de Greenwood** (1926).

Il nous permettra également, grâce à la normalité asymptotique de l'estimateur de Kaplan Meier, de calculer des intervalles de confiance afin de vérifier que les taux lissés s'y trouvent bien à l'intérieur.

Remarque

Kalbfleisch et Prentice (1980) proposent de calculer des intervalles de confiance en se basant sur une transformation logarithmique de la fonction de survie, ceci permettant d'éviter que les intervalles de confiance aux points extrêmes ne sortent de l'intervalle $[0,1]$. Cependant, nous ne les utiliserons pas ici car ce problème ne se pose pas.

Voici le graphique présentant cette variance selon les dimensions âge à l'entrée et durée en incapacité :



Graphique 25 : Variance de Greenwood du portefeuille Emprunteur

Concernant les âges élevés, nous voyons qu'à partir de 58 ans, les âges présentent une variance très forte et qu'ils devront faire l'objet de technique d'extrapolation. Les âges inférieurs paraissent fournir un taux fiable.

Quant aux jeunes âges, le critère de la variance est plus difficile à analyser. Nous allons donc devoir définir grâce à la quantité d'information disponible quels sont les âges qui vont faire objet d'une extrapolation. Aurélie Gaumet [2000] estime que 1000 observations sont nécessaires à la bonne réalisation d'une table de maintien en incapacité. Nous garderons ainsi les taux bruts des âges comportant au moins 1000 observations, ce qui est le cas à partir de 30 ans. Les âges 23 à 29 vont donc également devoir faire l'objet d'une extrapolation.

Avant d'extrapoler nos valeurs aux âges extrêmes, nous allons lisser notre table sur l'intervalle [30 ans ; 57 ans]. Comme pour la construction des taux d'entrée, nous sommes confrontés à des fluctuations plus ou moins grandes sur nos taux bruts (voir *Graphique 24* des résultats bruts) et nous devons par conséquent appliquer des techniques de lissages pour gommer ces irrégularités. Ceci fera l'objet de la prochaine section.

4.3.4. Lissage

Nous avons choisi deux méthodes distinctes pour tenter un lissage de la table brute. Ce sont en fait les deux méthodes étudiées pour les taux d'entrée que nous avons adapté à la problématique de la double dimension de la table.

- **Lissage par Whittaker-Henderson**

La première technique de lissage est celle déjà présentée en 3.5.3. Cependant, du fait du modèle bidimensionnel de la table de maintien, nous devons étendre la méthode en dimension 2.

Nous allons tout d'abord faire un rapide rappel sur la dimension 1 adaptée aux notations utilisées pour notre loi de maintien.

Lors du lissage sur une seule dimension, nous avons deux critères sur lesquels travailler:

Le critère de fidélité aux données:
$$F = \sum_{j=1}^p w_j \left(I_j^* - \hat{I}_j \right)^2$$

Le critère de régularité des taux lissés:
$$S = \sum_{j=1}^p w_j \left(\Delta^z I_j^* \right)^2$$

En deux dimensions, le problème est légèrement différent. p sera ici le nombre d'âges à lisser et q le nombre d'anciennetés.

Le critère de fidélité se généralise facilement:
$$F = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_{ij} \left(q_{ij}^* - \hat{q}_{ij} \right)^2$$

En ce qui concerne le critère de régularité, c'est un plus compliqué car deux critères sont utilisés selon la régularité verticale ou horizontale.

La régularité verticale se distingue via l'opérateur Δ_v^z (qui agit sur q_{ij} à j fixé vu comme une série indicée par i) et permet de calculer l'indice de régularité suivant:

$$S_v = \sum_{j=1}^q \sum_{i=1}^{p-z} \left(\Delta_v^z \hat{q}_{ij} \right)^2$$

De la même manière, nous calculons le critère de régularité horizontale suivant:

$$S_h = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{q-z} \left(\Delta_h^z \hat{q}_{ij} \right)^2$$

Nous posons alors la fonction à minimiser:

$$M = (1 - \alpha - \beta)F + \alpha \times S_v + \beta \times S_h,$$

les coefficients α et β mesurant le degré de régularités verticale et horizontale par rapport à la fidélité.

La résolution du problème d'optimisation s'effectue en réarrangeant les éléments pour se ramener au cas unidimensionnel. Pour cela, nous définissons le vecteur u de taille $p \times q$, tel

que: $u_{q(i-1)+j} = \hat{q}_{ij}$; cela revient à prendre pour les q premiers éléments du vecteur u la première ligne de la matrice à lisser, puis ensuite les éléments de la seconde ligne, et ainsi

de suite. De même, nous fabriquons une matrice de poids de dimension $p \times q$ en copiant sur la diagonale les lignes de la matrice (w_{ij}) . Nous posons donc $w_{q(i-1)+j, q(i-1)+j}^* = w_{ij}$.

Nous procédons de la même manière pour définir les matrices K_v^z de dimensions $(q(p-z), p \times q)$ et K_h^y de dimensions $(p(q-y), p \times q)$, qui comme en dimension 1 contiennent les coefficients binomiaux respectivement, d'ordre z et y .

Pour mieux comprendre la construction des matrices K, regardons l'exemple suivant.

Exemple

Les taux bruts forment une matrice $p \times q$ avec $p=4$ et $q=3$. On choisit $z=2$ (resp. $y=1$) comme degré de régularité verticale (resp. horizontale). Nous aurons K_v^z de dimensions $(q(p-z), p \times q)=(6,12)$ et K_h^y de dimensions $(p(q-y), p \times q)=(8,12)$. La ventilation de chacune de ces matrices donnera alors:

$$K_v^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_h^1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Lissage par splines cubiques**

La deuxième technique de lissage, les splines cubiques, est aussi une de celles étudiées pour les lois d'entrée et étendue à la problématique des deux dimensions. Cette extension est un peu plus délicate et nécessite le minimum de formalisme, détaillé ci-après.

Nous pouvons retenir que l'idée est de fixer arbitrairement des nœuds pour subdiviser la surface à ajuster en zones. Ensuite, nous ajustons un polynôme de degré 3 (en dimension 2) à chaque subdivision, en utilisant un critère de type moindres carrés. Enfin, pour des raisons évidentes de continuité et de régularité, ces polynômes de degré 3 sont contraints à être de classe $C2$ (ou $C1$).

Formalisation

Soit $P(t,x)$ un polynôme de degré n en t et x . Il est entièrement défini par la donnée de $(n+1)^2$ paramètres :

$$P(t,x) = \sum_{(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2} a_{ij} t^i x^j$$

Notons $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \{0,\dots,n\}^2}$ la matrice des coefficients du polynôme $P(t,x)$ et notons également

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t^n \end{pmatrix}, X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}, X_n' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ nx^{n-1} \end{pmatrix},$$

le vecteur dérivé terme à terme. Nous obtenons ainsi la représentation matricielle du polynôme :

$${}^t T_n A X_n = P(t,x)$$

Les conditions de régularité nécessitent le calcul des dérivées partielles premières et secondes de $P(t,x)$. Nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}(t,x) &= \sum_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{0,\dots,n\}} i a_{ij} t^{i-1} x^j \\ \frac{\partial P}{\partial x}(t,x) &= \sum_{(i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}} j a_{ij} t^i x^{j-1} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}(t,x) &= \sum_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}} j i a_{ij} t^{i-1} x^{j-1} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,x) &= \sum_{(i,j) \in \{0,\dots,n\} \times \{2,\dots,n\}} j(j-1) a_{ij} t^i x^{j-2} \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(t,x) &= \sum_{(i,j) \in \{2,\dots,n\} \times \{0,\dots,n\}} i(i-1) a_{ij} t^{i-2} x^j \end{aligned}$$

Les deux premières sommes comportent $n(n+1)$ termes, les deux suivantes $(n+1)(n+1)$ et la dernière n^2 termes. Ces expressions s'écrivent simplement sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t}(t, x) &= {}^t T_n' A X_n, & \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) &= {}^t T_n A X_n' \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}(t, x) &= {}^t T_n'' A X_n, & \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t, x) &= {}^t T_n A X_n'' \\ & & \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial x}(t, x) &= {}^t T_n' A X_n' \end{aligned}$$

Noeuds

A l'image de la dimension 1, nous appelons nœuds les points intérieurs de la table choisis pour définir les zones sur lesquelles un unique polynôme va être appliqué et nous les choisissons en fonction des formes de la surface brute obtenue. Si nous définissons h droites horizontales et v droites verticales, nous découpons notre surface brute en $(h+1)(v+1)$ parties. Nous indiquons alors ces parties avec $k = 0, \dots, h$ et $l = 0, \dots, v$, ce qui conduit à $(h+1)(v+1)$ polynômes à estimer et recoller.

Conditions limites

Pour des raisons de continuité, le raccordement entre les splines est soumis à des contraintes sur les dérivés des polynômes. Rappelons que dans la représentation matricielle du problème, chaque ligne représente une ancienneté, chaque colonne un âge.

Contraintes horizontales ; ancienneté fixe

Si les polynômes P^1 et P^2 sont adjacents horizontalement, alors leurs valeurs et leurs dérivées partielles premières et secondes en fonction de t doivent être égales, ceci pour tout âge variant sur l'ensemble de définition induit par le spline. En notant $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ les paramètres des splines adjacents, ces contraintes s'écrivent :

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n a_{ij} t^i x^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n b_{ij} t^i x^j \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^n i a_{ij} t^{i-1} x^j = \sum_{j=0}^n \sum_{i=1}^n i b_{ij} t^{i-1} x^j$$

avec t fixé et pour tout x variant dans l'ensemble de définition du spline. Cela conduit à écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=0}^n (a_{ij} - b_{ij}) t^i = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (a_{ij} - b_{ij}) t^i = 0 \quad \forall j = 0, \dots, n \\ &\Leftrightarrow {}^t T_n (A - B) = (0, \dots, 0) \\ \sum_{j=0}^n x^j \sum_{i=0}^n (a_{ij} - b_{ij}) i t^{i-1} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n (a_{ij} - b_{ij}) i t^{i-1} = 0 \quad \forall j = 0, \dots, n \\ &\Leftrightarrow {}^t T_n (A - B) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Si $t \neq 0$, ces équations forment un système libre de $2(n+1)$ équations avec $2(n+1)^2$ paramètres.

Contraintes verticales : âge fixe

De même, si les polynômes P^1 et P^2 sont adjacents verticalement, alors leurs valeurs et leurs dérivées partielles premières et secondes en fonction de x doivent être égales, ceci pour toute ancienneté variant sur l'ensemble de définition induit par le spline. Avec un raisonnement similaire à celui décrit plus haut, nous obtenons le système :

$$\sum_{j=0}^n (a_{ij} - b_{ij}) x^j = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \Leftrightarrow (A - B)X_n = {}^t(0, \dots, 0)$$
$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij}) j t^j = 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \Leftrightarrow (A - B)X_n^{\odot} = {}^t(0, \dots, 0)$$

Contraintes aux nœuds : âge et ancienneté fixes

On cumule les deux contraintes précédentes. Par ailleurs, en un nœud, il se trouve non plus deux mais quatre polynômes adjacents.

Nous combinons maintenant un critère de fidélité et un critère de régularité.

Critère de fidélité

Ici, SP représente la surface des splines raccordés. Les polynômes ajustés doivent être le plus fidèles possible à la surface brute. Pour ceci, nous utilisons un critère des moindres carrés pour chaque spline :

$$\sum_x \sum_t \omega_{x,t} (SP(t, x) - \hat{q}_{x,t})^2$$

où $\omega_{x,t}$ est le poids associé au point $\hat{q}_{x,t}$. Notons que la sommation doit inclure les bornes, c'est-à-dire les points se trouvant sur les droites définissant l'emplacement des nœuds.

Critère de régularité

Comme dans le lissage de Whittaker-Henderson, nous introduisons un critère permettant de contrôler la régularité du spline. Le meilleur moyen de contrôler la régularité est de minimiser la dérivée seconde des polynômes. Cette contrainte s'écrit :

$$\iint \lambda(s, y) |D^2 P(s, y)|^2 ds dy$$

où $\lambda(x, t)$ est une fonction continue par morceaux, valant le poids associé au point $\hat{q}_{x,t}$ pour la régularité et $D^2 P(s, y)$ la matrice Hessienne de la fonction polynomiale par morceaux calculée au point (s, y) .

Résolution

Le système à résoudre combine finalement la fidélité aux données brutes, la régularité de la surface ajustée et les contraintes aux nœuds. Nous combinons les deux premières contraintes pour former la fonction à minimiser. La troisième constituera les contraintes du problème d'optimisation. nous obtenons alors le critère d'optimisation suivant :

$$\alpha \sum_x \sum_t \omega_{x,t} \left(SP(t, x) - \hat{q}_{x,t} \right)^2 + (1 - \alpha) \iint \lambda(s, y) |D^2 P(s, y)|^2 ds dy$$

Le paramètre $\alpha \in [0,1]$ permet de privilégier soit la régularité, soit la fidélité. Les contraintes aux nœuds s'expriment sous la forme du système linéaire suivant :

$$\forall (k, l) \in [1, h] \times [1, v], \left\{ \begin{array}{l} {}^t T_n(t_{k,l}^*) (P_{k,l} - P_{k-1,l}) = (0, \dots, 0) \\ {}^t T_n'(t_{k,l}^*) (P_{k,l} - P_{k-1,l}) = (0, \dots, 0) \\ (P_{k,l} - P_{k,l-1}) X_n(x_{k,l}^*) = {}^t (0, \dots, 0) \\ (P_{k,l} - P_{k,l-1}) X_n'(x_{k,l}^*) = {}^t (0, \dots, 0) \end{array} \right.$$

Où $P_{k,l}$ représente la matrice des coefficients du polynôme $P_{k,l}$. Les points $t_{k,l}^*$ et $x_{k,l}^*$ représentent les abscisses et ordonnées du nœud correspondant à l'intersection de la $(k-1)^{\text{ième}}$ droite verticale et de la $(l-1)^{\text{ième}}$ droite horizontale (rappelons que les droites sont indicées de 1 à k (resp. 1 à l), et qu'elles sont distinctes des bords ; on a donc $(h+2)(v+2)$ nœuds).

- **Le choix effectué**

Le lissage par splines n'est pas implémentable sur des logiciels tels qu'Excel. Nous avons donc besoin de passer par le logiciel SAS pour lisser de cette manière. Cependant, introduire les pondérations $\omega_{x,t}$ n'était pas possible.

Nous avons donc choisi la méthode de Whittaker-Henderson qui, en plus d'être plus facile à implémenter sous Excel, permettait de contrôler les degrés de régularité verticale et horizontale.

Pour vérifier la fiabilité des taux lissés, nous nous sommes servis des intervalles de confiance calculés à partir de la variance de Greenwood. Comme nos échantillons sont grands, nous pouvons supposer que la fonction de survie $\hat{S}_x(t)$ suit une loi normale. Ainsi, pour un seuil

de 5%, l'intervalle de confiance à 95% est donné par : $\hat{S}_x(t) \pm 1,96 \sqrt{\hat{V}(\hat{S}_x(t))}$

Plusieurs lissages par Whittaker-Henderson ont donc été effectués et nous avons retenu celui qui s'adaptait le mieux à nos données, c'est-à-dire avec les paramètres suivants :

$$z = 2, y = 2, \alpha = \beta = 0,5$$

Il s'avérait en outre que 99,25% des nouveaux taux se trouvaient bien à l'intérieur des intervalles de confiance.

4.3.5. Extrapolation

Nous avons restreint notre lissage aux âges où les données étaient en quantité suffisante. Il est maintenant nécessaire de pouvoir extrapoler ces valeurs aux âges extrêmes (20-29 ans et 58-64 ans). Nous avons pensé à constituer des classes d'âge mais les données étaient trop peu nombreuses de 58 à 64 ans, et de plus nous voulions garder la forme croissante de la fonction de survie avec l'âge. Nous nous sommes donc aidés de la table du BCAC, en essayant de calculer des relations de proportionnalité entre les valeurs lissées et celles de la table du BCAC des âges 30 à 59.

Nous allons décrire ci-dessous le processus utilisé, puis nous le réadapterons pour qu'il colle mieux à nos données.

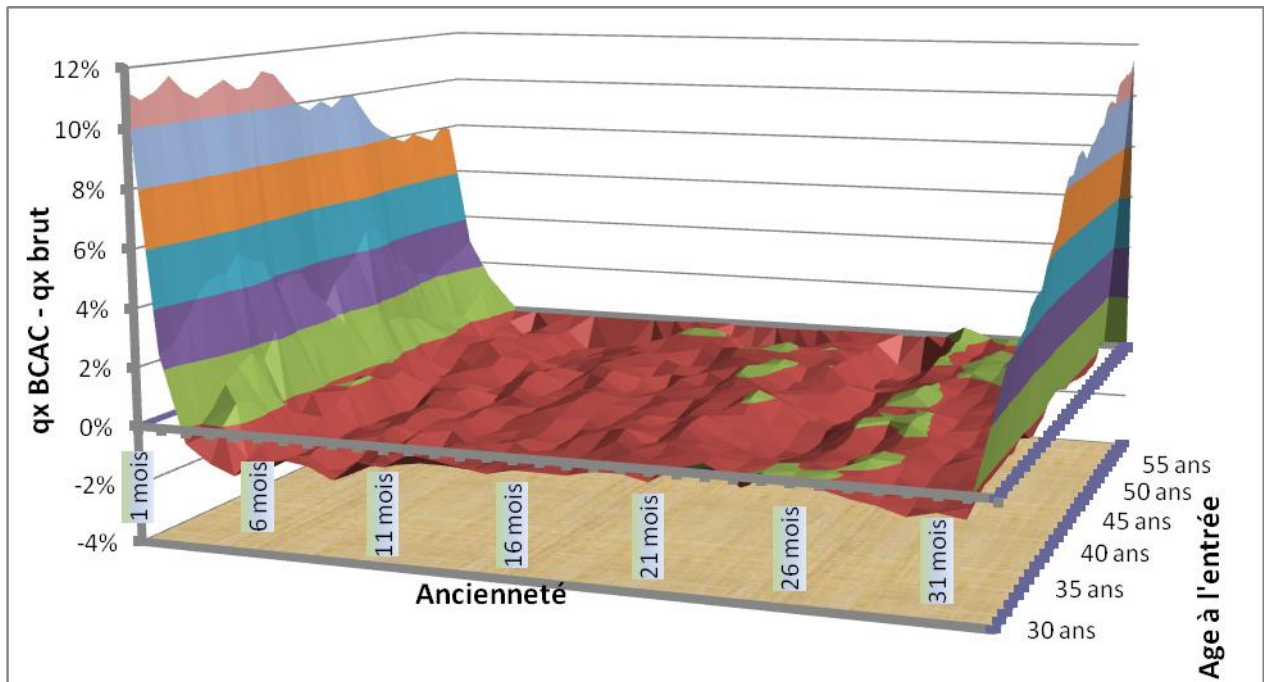
- **Recherche d'un coefficient de proportionnalité**

L'idée

Afin de trouver des taux aux âges extrêmes, nous avons pensé judicieux le fait de comparer les taux des âges 30-57 à ceux de la table du BCAC. Nous pourrions alors déduire des coefficients permettant de modifier d'une façon additive et multiplicative les probabilités de la table du BCAC pour obtenir à chaque âge ceux de la table d'expérience.

Nous avons décidé de travailler sur les probabilités de sortie et afin de déterminer sur quelle dimension nous allions segmenter nos tables pour les comparer, nous avons étudié la différence entre les probabilités de sortie $q_{x,t}$ des 2 tables à tous âges et toutes anciennetés.

Nous noterons que pour comparer les 2 tables, il a d'abord fallu décaler le début de la table du BCAC à 3 mois d'ancienneté en recréant les fonctions de survie par le ratio du nombre de personnes présentes à chaque ancienneté sur le nombre de personnes présentes après 3 mois d'incapacité.



Graphique 26 : Différences des probabilités de sortie entre la table du BCAC et la table brute du portefeuille emprunteur

Nous pouvons voir qu'à âge fixe, les différences des probabilités de sortie varient très fortement selon les anciennetés. En revanche, à ancienneté fixe, nous remarquons que les différences selon l'âge sont toujours du même ordre de grandeur. Nous avons ainsi décidé de chercher des coefficients propres à chaque ancienneté.

Le modèle

Soient :

- $q_t(x)$: la probabilité de sortie au bout de t mois pour un âge à l'entrée de x de la table brute
- $q_t^{BCAC}(x)$: la probabilité de sortie au bout de t mois pour un âge à l'entrée de x de la table du BCAC
- $q_t^*(x)$: la probabilité de sortie au bout de t mois pour un âge à l'entrée de x déduite des coefficients

Pour chaque ancienneté $i=1, \dots, 33$ nous déterminons les coefficients α_i et β_i par le critère suivant :

$$\sum_{x=30}^{59} (\alpha_i + \beta_i \times q_i^{BCAC}(x) - q_i(x))^2 \rightarrow \min!$$

Enfin, nous avons reconstitué la table des probabilités de sortie par la formule suivante :

$$q_i^*(x) = \alpha_i + \beta_i \times q_i^{BCAC}(x)$$

Les résultats

Les résultats obtenus n'étaient pas satisfaisants du fait qu'un bon nombre de valeur ne se trouve plus à l'intérieur des intervalles de confiance définis précédemment, et principalement aux âges extrêmes. Ceci s'explique par la chose suivante.

Le graphique ci-dessus montre que pour une durée de maintien de 1 mois, l'écart entre la table du BCAC et la table brute diminue fortement des âges 30 à 57, passant de 11% à 6%, ce qui représente une grande différence pour des probabilités de sortie étalée sur 33 mois. Les coefficients recherchés sur la première ancienneté vont donc être le résultat d'un compromis entre une grande et petite différence de taux. Le calcul des nouvelles probabilités de sortie des âges extrêmes va donc provoquer un trop grand saut entre les âges 29 et 30 ans et les âges 57 et 58 ans. Ces sauts se prolongeront ainsi jusqu'aux dernières anciennetés.

- **Alternative**

Pour pallier à cette non-uniformité des écarts entre les deux tables, nous avons décidé de nous restreindre à des plages d'âges plus réduites pour calculer les coefficients. Ainsi, pour déterminer les taux des âges 23 à 29 (respectivement 59 à 64), nous avons appliqué à la table du BCAC des coefficients calculés sur les âges 30 à 32 (respectivement 55 à 57). Nous avons également modifié légèrement le modèle.

Le modèle

Tout d'abord, nous ne travaillons plus sur les probabilités de sortie mais sur la fonction de survie. En effet, comme les probabilités de sorties sont d'un ordre de grandeur beaucoup plus petits que la fonction de survie, le moindre écart va énormément faire varier le coefficient recherché et il en résultera des incohérences et des sauts importants entre l'âge 30 et 29 ou 57 et 58. C'est ce que nous avons pu vérifier en le testant.

Ensuite, nous ne travaillons qu'avec un unique coefficient multiplicatif, car après quelques tests du modèle précédent, nous avons remarqué que ce coefficient β_i s'avèrait souvent nul et les nouveaux taux une unique constante alors que la fonction de survie est censée augmenter du fait d'un risque croissant avec l'âge. Nous pouvions ajouter une contrainte sur ce coefficient ($\beta_i > \text{une certaine valeur}$) mais nous ne voulions pas faire d'hypothèse sur la vitesse d'évolution de la fonction de survie suivant l'âge à l'entrée. Nous avons ainsi déterminé l'unique coefficient $\beta_{i,j}$, $\forall i=1, \dots, 33, \forall j=1 \text{ ou } 2$, $j=1$ indiquant le groupe des « petits » âges, $j=2$ le groupe des « grands » âges, par le critère de moindre carré suivant:

$$\sum_{x=30}^{32} \left(\beta_{i,1} \times S_i^{BCAC}(x) - S_i(x) \right)^2 \rightarrow \min!$$

$$\sum_{x=55}^{57} \left(\beta_{i,2} \times S_i^{BCAC}(x) - S_i(x) \right)^2 \rightarrow \min!$$

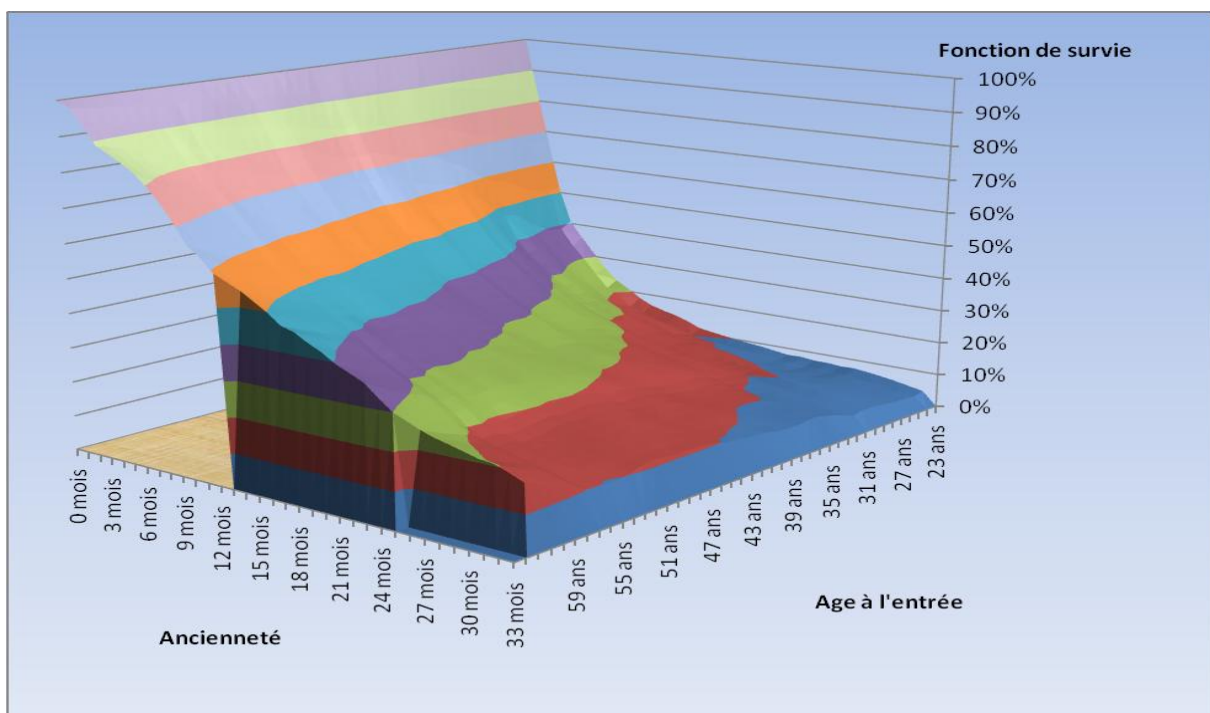
Enfin, nous avons calculé les nouveaux taux pour les âges 23 à 29 ans (respectivement 60 à 64 ans) :

$$S_i^*(x) = \beta_{i,1} \times S_i^{BCAC}(x) , \left(resp \quad S_i^*(x) = \beta_{i,1} \times S_i^{BCAC}(x) \right)$$

- **Les résultats**

Cette fois-ci, les résultats sont très satisfaisants dans la mesure où nous n’observons quasiment aucun saut. Néanmoins, nous observons un petit « trou » dans la fonction de survie à 58 ans à partir de 24 mois d’ancienneté. Ceci est dû aux valeurs brutes observées sur cet âge. Nous avons essayé de corriger ce saut lors du lissage par Whittaker-Henderson en attribuant un poids plus élevé à la régularité verticale mais les résultats n’étaient pas très concluants. Nous garderons cependant cette fonction de survie car nous avons estimé les données de l’âge 58 comme suffisantes à la construction de taux fiables.

La fonction de survie présentée ci-dessous est celle déduite de la table de maintien lissée.



Graphique 27 : Fonction de survie lissée de la loi de maintien du portefeuille emprunteur

Remarque

Nous avons construit ici une table de maintien après franchise de 90 jours. Elle n'est donc applicable qu'aux seuls contrats ayant une telle franchise. Lorsque nous devons tarifer ou provisionner des contrats ayant des durées de franchise différentes, nous ferons comme suit:

- Pour une durée de franchise supérieure à 90 jours, nous modifierons la table d'expérience 90 jours en ramenant le point de départ à 180 jours. Cela est identique à la manière dont nous avons ramené le point de départ de table du BCAC à trois mois.
- Pour une durée de franchise inférieure à 90 jours, nous calculerons un ratio de proportionnalité entre la table d'expérience 90 jours et la table du BCAC 90 jours, pour ensuite appliquer ce ratio à la table du BCAC.

4.4 Le portefeuille de Prévoyance individuelle

La construction de la table de maintien est ici un légèrement différente dans la mesure où le nombre d'observations est beaucoup plus faible et où de nombreux types de franchise cohabitent. Nous expliquerons cependant les étapes de calcul un peu plus rapidement car nous en avons déjà présenté une grande partie dans la partie précédente.

Pour commencer, nous allons redonner quelques statistiques du portefeuille.

4.4.1. Données des sinistres du portefeuille

La répartition des 19179 sinistres observés selon la durée de franchise appliquée est la suivante:

Durée de franchise	Nombre de sinistres observés
0 jour	3786
3 jours	3272
15 jours	5793
30 jours	3865
90 jours	2349

Tableau 18: Nombre de sinistres observés selon la franchise en PI

Remarque

Nous avons constaté que plus de 98% des sinistres indemnisés dès le premier jour d'incapacité avaient une durée supérieure à 3 jours. Pour la suite de l'étude et pour simplifier les données, nous assimilerons donc les sinistres indemnisés après une franchise de 3 jours à des sinistres indemnisés dès le premier jour.

4.4.2. Construction de la table

Au contraire du portefeuille emprunteur, nous ne pouvons pas nous contenter de construire une table de maintien avec uniquement les sinistres indemnisés après une durée de franchise de 90 jours car, premièrement, la majorité des sinistres est prise en charge après une durée de franchise bien plus courte, et deuxièmement, la volumétrie du nombre de sinistres observés après une franchise de 90 jours est bien trop faible.

Nous devons donc construire une table en étudiant tous les sinistres. Pour ce faire, nous chercherons les fonctions de survie en tenant compte des effectifs observés à chaque ancienneté.

Par exemple, de 0 à 15 jours, notre fonction de survie sera construite grâce aux sinistres indemnisés avec une durée de franchise de 0 ou 3 jours. A partir de 15 jours, le nombre de personnes sous risques sera modifié avec la suppression des sorties et censures ayant eu lieu les 15 premiers jours et l'ajout par troncature des sinistres indemnisés après 15 jours de franchise. Nous ajouterons ainsi des sinistres par troncature aux anciennetés 1 mois, 2 mois et 3 mois.

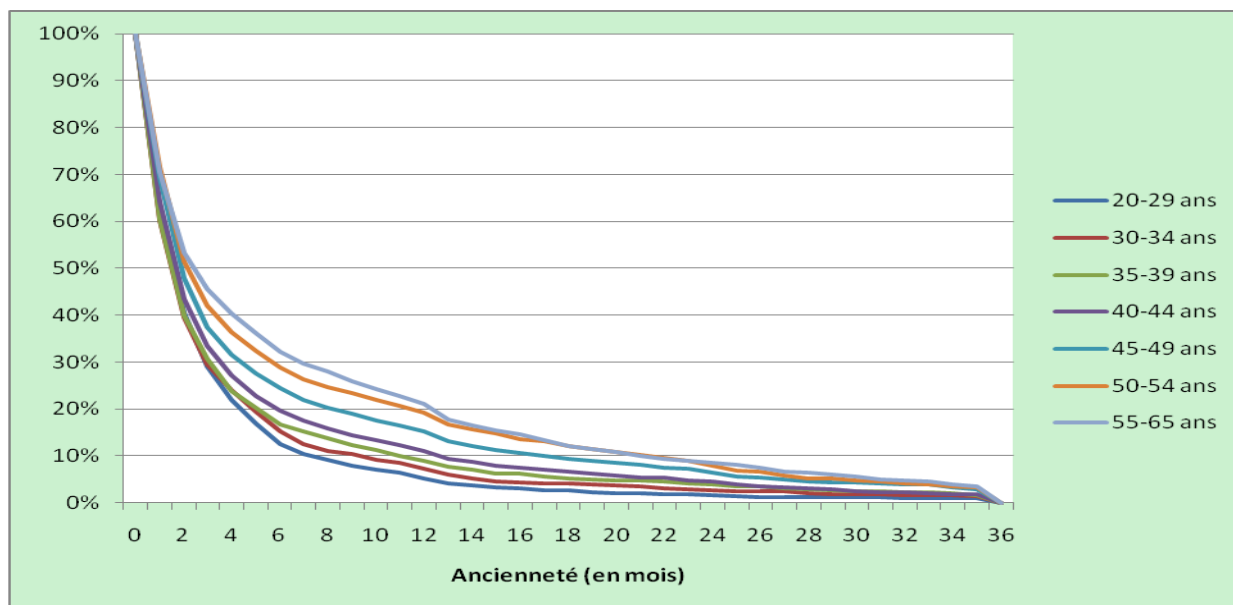
Même si nous calculons une fonction de survie dès le 15^e jour, permettant ainsi d'introduire les sinistres tronqués associés, notre fonction de survie sera bien mensuelle.

Pour pallier au manque de données, nous sommes obligés de former des classes d'âge. Nous les constituons en prenant garde qu'il y ait toujours un minimum de 1000 observations à l'ancienneté 0 et 3 mois. Ces classes d'âge sont les suivantes :

[20 ;29], [30 ;34], [35 ;39], [40 ;44], [45 ;49], [50 ;54], [55 ;65]

4.4.3. Résultats bruts

Les courbes des taux bruts sont données par le graphique suivant :



Graphique 28 : Fonction de survie de la loi de maintien brute du portefeuille PI

La volumétrie d'information de chaque classe d'âge est largement suffisante pour estimer que les taux sont fiables. Les variances de Greenwood sont donc faibles et nous n'avons pas jugé primordial de les présenter ici.

Néanmoins, les fonctions de survie comportent quelques irrégularités. Et même si elles paraissent croissantes avec l'âge, il existe certaines incohérences où la fonction de survie d'une classe d'âge se trouve en dessous de la classe d'âge inférieure. Pour pallier à ces problèmes, nous effectuons un lissage par Whittaker-Henderson où nous privilégions la régularité verticale (selon l'âge, à ancienneté fixée) à la régularité horizontale avec des coefficients respectifs de 0,7 et 0,4.

A présent, afin d'obtenir une fonction par âge à l'entrée, nous devons passer à des méthodes d'interpolation et d'extrapolation.

4.4.4. Interpolation et extrapolation

Nous avons calculé la moyenne d'âge des classes effectuées auparavant. Nous considérons donc que les fonctions de survie déjà lissées sont celles des âges 25, 32, 37, 42, 47, 52 et 56. Pour déterminer les fonctions de survie des âges compris dans les différents intervalles, nous allons procéder par interpolation.

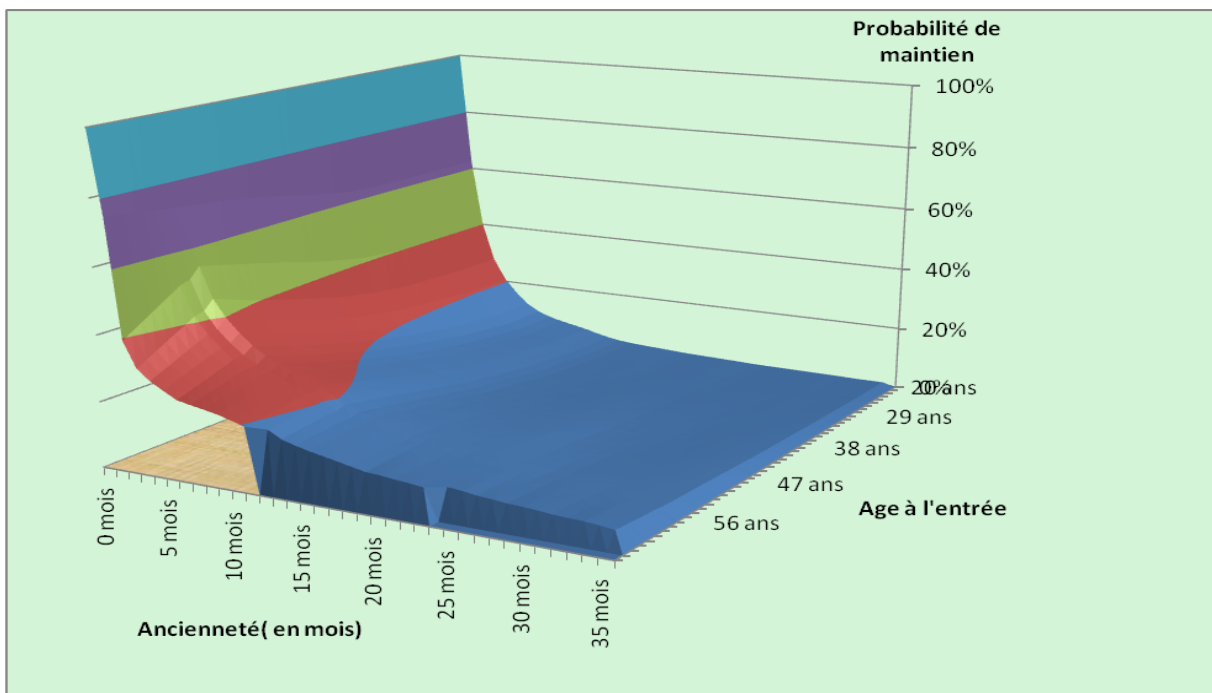
Afin de ne pas faire d'hypothèse sur la croissance de la fonction de survie à ancienneté fixée entre 2 âges déjà déterminés, nous avons d'abord appliqué, proportionnellement à nos valeurs, les variations de la table du BCAC. Malheureusement, aux âges extrêmes, les fonctions de survie interpolées comportaient certaines irrégularités. Nous avons donc été contraints de procéder à une interpolation linéaire et ce n'est finalement pas trop gênant car

la vitesse de croissance de la fonction de survie avec l'âge était déjà bien prise en compte dans les classes d'âge constituées qui n'était distantes que de 4 ou 5 ans.

Quant à l'extrapolation aux âges extrêmes (57 à 65 ans), elle a été effectuée par la même méthode que celle présentée dans le portefeuille emprunteur au paragraphe 4.3.5.

4.4.5. Résultats finaux

Nous présentons la table de maintien obtenue par le graphique de la fonction de survie associée.



Graphique 29 : Fonction de survie de la table de maintien lissée du portefeuille PI

Chapitre 5 : Table de passage en invalidité

La dernière étape de l'étude repose sur la construction des tables de passage en invalidité. A l'image de la table de maintien, nous allons ici estimer la probabilité de sortie de l'état d'incapacité pour chaque âge à l'entrée et chaque ancienneté. Cependant, nous ne nous intéresserons qu'aux sorties pour cause d'invalidité que nous appelons plutôt « passage en invalidité ».

La table actuellement utilisée pour le provisionnement et la tarification des contrats est celle déjà présentée du BCAC. Nous rappelons qu'elle donne, pour chaque âge à l'entrée et une population initiale de 10000 personnes, le nombre de personnes passées invalides au bout de t mois d'ancienneté.

Dans ce chapitre, nous présenterons l'estimateur choisi et nous l'appliquerons tour à tour aux deux portefeuilles étudiés.

5.1 L'estimateur

L'estimateur partira de celui de Kaplan Meier construit pour les lois de maintien.

Les taux conditionnels de sortie q_{ij} vus dans les lois de maintien, avec i l'âge à l'entrée et j l'ancienneté dans l'état d'incapacité, peuvent être exprimés comme la somme d'un taux conditionnel de passage en invalidité d'une part et d'un taux conditionnel de sortie pour autre motif d'autre part :

$$q_{ij} = q_{ij}^{inv} + q_{ij}^{\neq inv} \text{ avec } q_{ij}^{inv} = P(T = j \cap \text{motif de sortie} = inv / T \geq j)$$

L'estimateur binomial nous conduit à l'estimation suivante :

$$\hat{q}_{ij}^{inv} = \frac{d_{ij}^{inv}}{r_{ij}}$$

Où d_{ij}^{inv} représente le nombre de sorties pour invalidité entre l'ancienneté j et $j+1$, et r_{ij} le nombre de personnes sous risque au début de l'ancienneté j . Nous noterons que par prudence r_{ij} ne comportera que les personnes non censurées entre le mois j et $j+1$, car il est impossible de connaître la cause de sortie d'une personne censurée.

Nous cherchons à estimer les probabilités de passage :

$$s_{ij}^{inv} = P(T = j \cap \text{motif de sortie} = inv).$$

En utilisant la relation suivante : $s_{ij}^{inv} = q_{ij}^{inv} \times S_i(j-1)$, nous obtenons l'estimateur suivant :

$$\hat{s}_{ij}^{inv} = q_{ij}^{inv} \times \hat{S}_i(j-1)$$

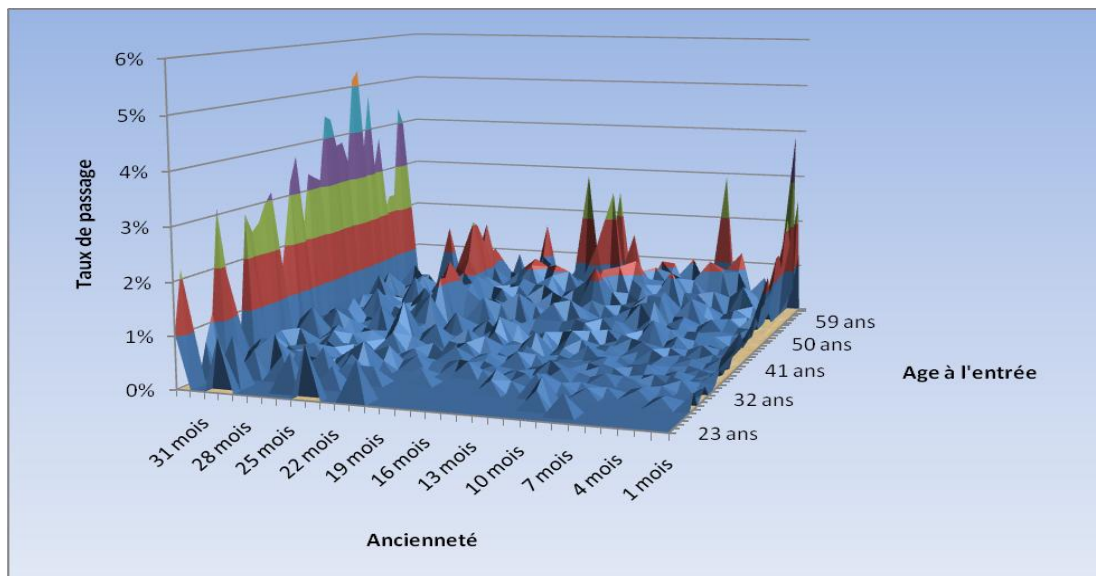
Pour calculer, les taux bruts, nous nous sommes donc aidés de la table brute de maintien en incapacité à laquelle nous avons multiplié pour chaque âge et chaque ancienneté le rapport

$$\frac{d_{ij}^{inv}}{r_{ij}}$$

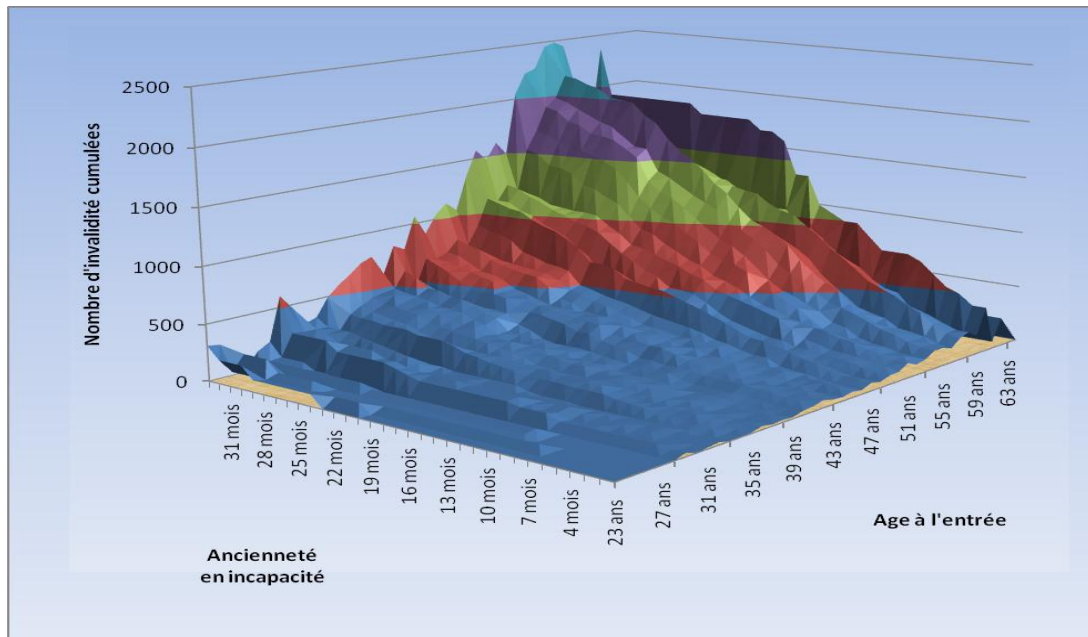
5.2 Le portefeuille emprunteur

5.2.1. Les résultats bruts

Notre estimateur s'appuie sur l'estimateur des taux d'entrée qui, nous l'avons déjà vu, ne fournissent pas des valeurs très régulières. A cela s'ajoute le fait que les sorties en incapacité ne sont pas toujours bien réparties selon les anciennetés et, par conséquent, nous retrouvons souvent des taux nuls aux bas âges. Pour bien s'en rendre compte, nous présentons le graphique des taux de passage \hat{s}_{ij}^{inv} , ainsi que le graphique du nombre d'invalidités cumulées à chaque âge à l'entrée (pour un effectif initial de 10.000) qui permet également de se rendre compte de l'irrégularité des taux de sortie.



Graphique 30 : Taux de passage en invalidité issue de la table brute du portefeuille emprunteur



Graphique 31 : Nombre de passages en invalidité cumulés du portefeuille emprunteur

Ce qui ressort le plus de ces graphiques est, premièrement, le nombre élevé d'invalidités constatées au cours du premier mois, ce qui est en fait dû aux invalidités dites directes. Deuxièmement, le nombre d'invalidités survenant à la dernière ancienneté est le plus élevé et d'un tout autre ordre de grandeur que les autres anciennetés. Ceci est bien évidemment dû au fait qu'au bout de 1095 jours d'incapacité (90 jours de franchise + 1095 jours d'indemnisation), une grande partie des assurés bascule en invalidité après consolidation de leur état. Enfin, l'irrégularité des passages en invalidité est évidente et nous devons donc appliquer une technique de lissage ainsi qu'effectuer une extrapolation.

5.2.2. Lissage et extrapolation

Les données étant les mêmes que celles utilisées pour la construction de la table de maintien (mis à part la réintégration des invalidités directes), nous devons pour être cohérent ne sélectionner que les âges qui avaient précédemment été jugés fiables. Nous liserons donc notre table sur l'intervalle d'âge [30,57] puis nous extrapolerons aux âges extrêmes.

- **Lissage par Whittaker-Henderson**

Ce type de lissage (voir *paragraphe 5.2.2*) permettait d'affecter des poids aux différents âges selon le nombre d'observations et de combiner assez facilement les critères de fidélité et de régularité (suivant l'âge ou l'ancienneté). Comme nous l'avons retenu pour la table de maintien, nous avons donc fait le même choix en l'appliquant sur les probabilités de sortie

en invalidité s_{ij}^{inv} .

Nous avons effectué plusieurs tests selon la pondération du critère de régularité verticale ou horizontale. Le problème que nous rencontrions souvent était que le lissage horizontal, c'est-à-dire sur l'ancienneté, était trop important et sous-estimait trop le nombre de passage en invalidité aux anciennetés extrêmes. Nous avons ainsi choisi un critère de régularité horizontale très petit de 0,005 et un critère de régularité verticale de 0,5.

Nous présenterons les résultats après l'étape d'extrapolation.

- **Extrapolation**

Comme pour la table de maintien, nous nous aiderons de la table du BCAC.

Cependant, la méthode sera différente car les coefficients de proportionnalité utilisés ne dépendront ici que de la table du BCAC et nous ne l'appliquerons non plus aux valeurs de la table du BCAC mais aux valeurs de notre table lissée de 30 à 57 ans. En effet, la répartition des passages en invalidité selon l'ancienneté de la table du BCAC n'est pas vraiment la même que la notre, et nous risquerions donc de perdre la forme lissée que nous avons mise en place.

Pour comparer la table avec celle du BCAC, nous devons d'abord reconstruire la table du BCAC en ne prenant que les données relatives aux passages survenus après la durée de franchise. Nous utilisons donc la formule suivante :

$$\text{Modifié } N_{x,t} = \frac{N_{x,t} * 10000}{L_{x,3}}$$

Où

- $L_{x,3}$ est le nombre de personnes restant en incapacité après 3 mois dans la table du BCAC pour un effectif initial de 10000, et à un âge d'entrée x
- $N_{x,t}$ est le nombre de passages en invalidité entre le mois t et $t + 1$ observés dans la table du BCAC

Le modèle

Pour un âge x compris entre 20 et 29 ans, nous calculons grâce à la table du BCAC un ratio entre le nombre cumulé de passages en invalidité à l'âge x et le nombre cumulé d'invalidités à 30 ans. Il ne nous reste plus qu'à utiliser nos valeurs lissées à 30 ans et appliquer le ratio obtenu précédemment.

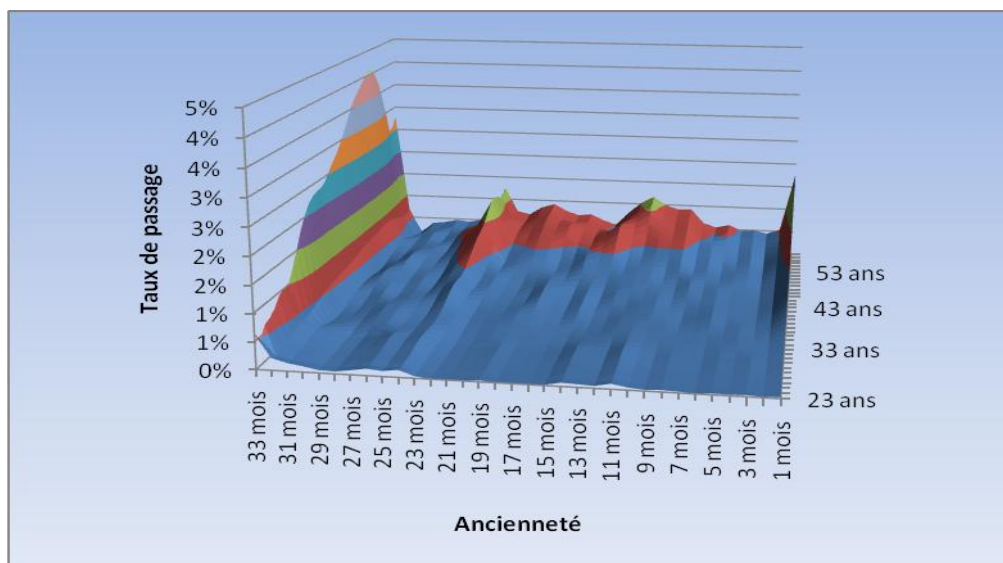
Nous faisons de même pour l'âge 58 (respectivement 59) en utilisant le ratio entre les âges 57 et 58 (respectivement 57 et 59) de la table du BCAC.

Cette technique permet de conserver un lissage horizontal et vertical.

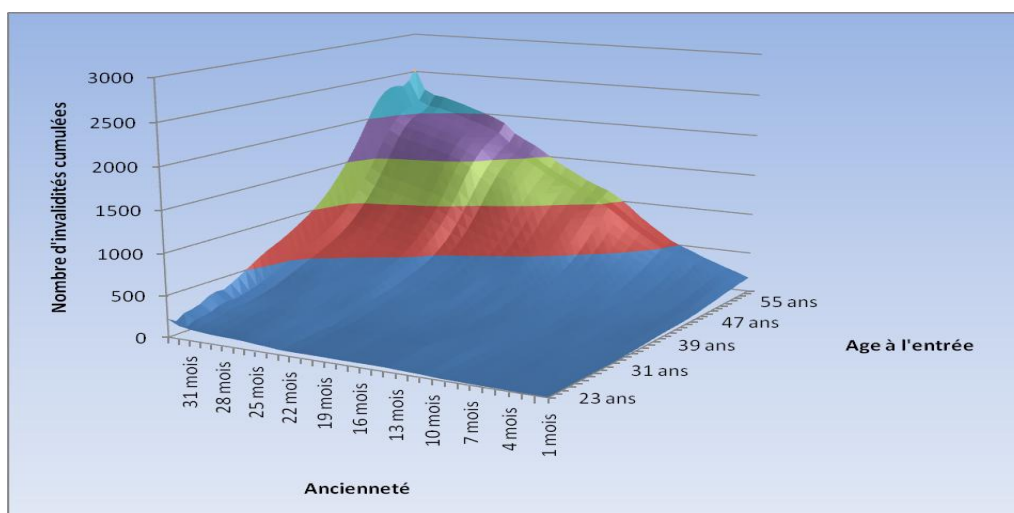
La table du BCAC s'arrêtant à 59 ans, nous serons obligés de prendre des valeurs égales à l'âge 59 pour construire les probabilités de passage en invalidité de l'intervalle d'âge 60 à 64 ans.

Les résultats finaux

Nous présentons ici les graphiques du nombre de passages à chaque ancienneté et du nombre de passages cumulés.



Graphique 32 : Taux de passage lissé



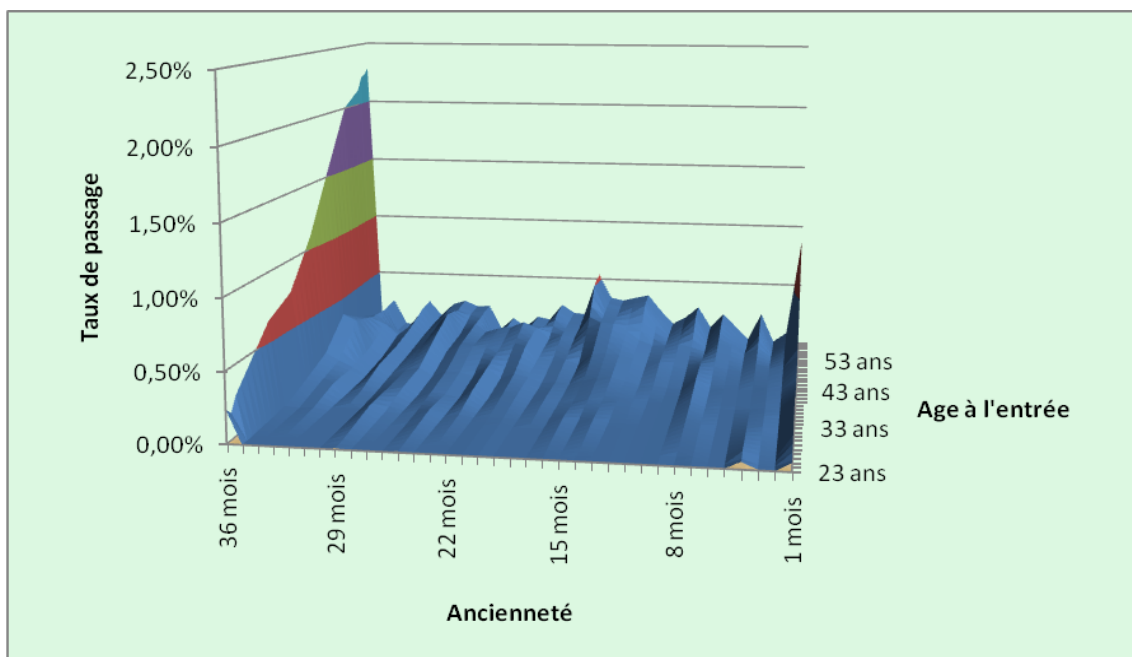
Graphique 33 : Nombre de passage cumulés à chaque âge

5.3 Le portefeuille de prévoyance individuelle

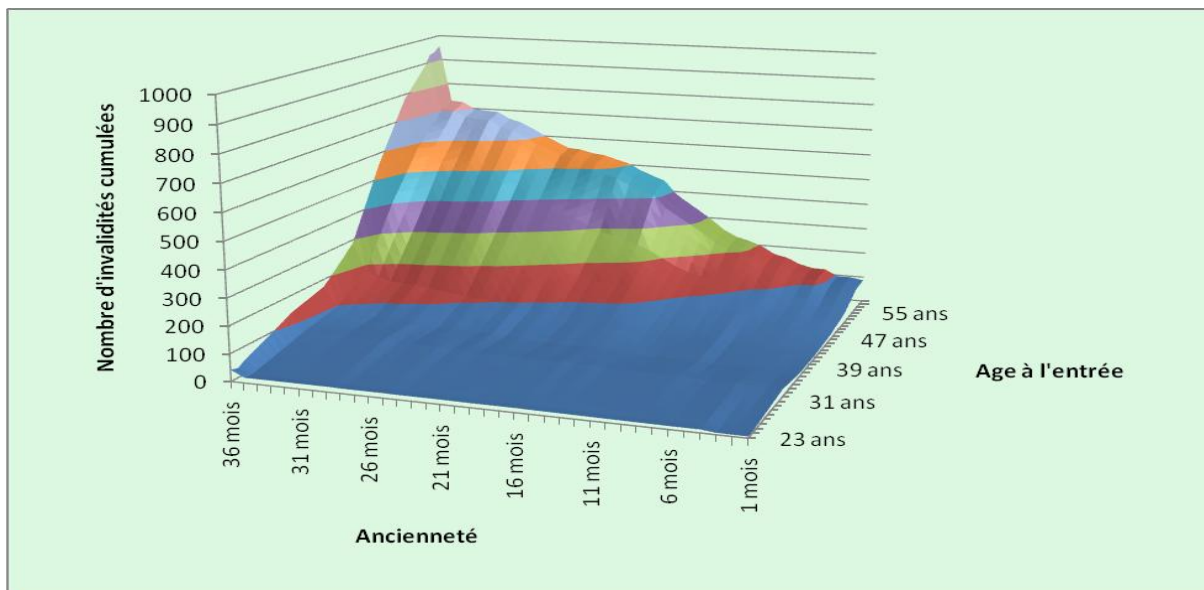
Comme la construction de la table allie les méthodes utilisées dans la construction de la table de maintien et dans la construction de la table de passage du portefeuille emprunteur, nous décrivons les étapes de calculs très succinctement.

- Toujours contraints par le nombre d'observations, nous constituons les mêmes classes d'âge que pour la table de maintien.
- Nous lisons ensuite les classes par la technique de Whittaker-Henderson en privilégiant toujours la fidélité horizontale (selon les anciennetés) et la régularité verticale (selon les âges).
- Pour compléter la table, nous interpolons linéairement les valeurs obtenues puis nous les extrapolons en appliquant le ratio obtenu dans la table du BCAC sur les nombres de passages cumulés en invalidité.

Les résultats finaux sont résumés par les deux graphiques suivants :



Graphique 34 : Taux de passage lissés du portefeuille PI



Graphique 35 : Nombre de passages cumulés du portefeuille PI

Nous rappellerons que contrairement au portefeuille emprunteur la table est construite sur un intervalle de 36 mois. Par conséquent, les chiffres obtenus ne sont pas directement comparables au portefeuille emprunteur. Pour ce faire, il faudra ramener cette table à un point de départ de 3 mois, mais nous verrons cela dans le chapitre suivant consacré à la comparaison des tables obtenues et celles du BCAC.

Chapitre 6 : Comparaison des portefeuilles et des tables du BCAC

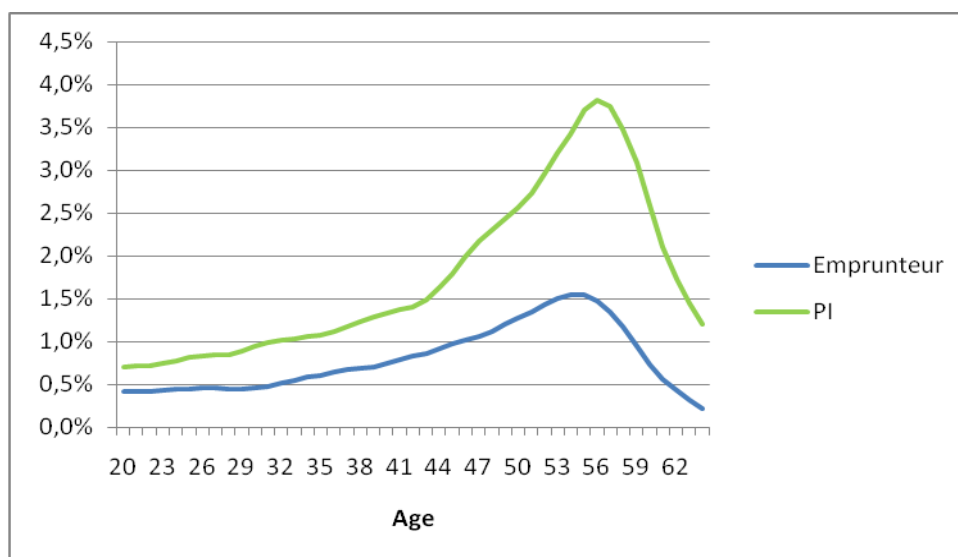
Les tables de passage et de maintien utilisées actuellement pour la tarification et le provisionnement sont celles du BCAC. Il est donc logique de terminer cette étude par une comparaison entre les différentes tables. Cela nous permettra en premier lieu de savoir si à travers l'utilisation de tables réglementaires, l'assureur a plutôt tendance à sur-provisionner ou sous-provisionner ses contrats. En deuxième lieu, nous pourrions analyser les différences de comportement observées entre les deux portefeuilles.

Ce chapitre sera donc construit de la même manière que l'étude globale, à savoir la comparaison des tables d'entrée, de maintien puis de passage.

6.1 Les tables d'entrée en incapacité

Comme nous l'avons déjà précisé, le BCAC ne fournit pas de table d'entrée en incapacité selon l'âge. La tarification actuelle et le calcul des PRC utilisent donc déjà des tables d'expérience. Nous serons réduits ici à comparer le comportement des deux portefeuilles étudiés.

Pour ce faire, nous devons étudier les chiffres issus d'une même segmentation. Comme la table emprunteur est construite à partir d'une même franchise de 90 jours sur le risque accident et maladie, nous utiliserons donc pour la prévoyance individuelle la courbe obtenue en combinant le taux global d'entrée en incapacité après accident avec durée de franchise 90 jours et la courbe par âge des taux d'entrée après maladie et durée de franchise de 90 jours.



Graphique 36 : Comparaison des taux d'entrée des deux portefeuilles sur la franchise de 90 jours

Nous nous attendions à avoir un tel écart entre les deux courbes. Nous avons déjà évoqué les différences de composition des portefeuilles qui pouvaient conduire à ce résultat mais nous allons les rappeler.

La raison principale est le mode de souscription des contrats qui est une démarche personnelle qu'on pourrait assimiler à un besoin dans le cas de la prévoyance individuelle tandis que c'est quasiment imposé par le banquier dans le cas des emprunts. L'individu qui souscrit le premier type de contrat est donc plus risqué et l'assureur doit faire face au phénomène d'anti-sélection. De plus, lors de l'attribution d'un prêt, le banquier effectue déjà une sélection préalable en n'acceptant que les clients capables de rembourser leur emprunt, le risque d'un potentiel sinistre est donc encore plus limité. Concernant la sélection médicale, elle est quasiment équivalente sur les deux portefeuilles.

D'autres raisons peuvent être évoquées mais elles découlent toutes de celle déjà décrite. Par exemple, les compositions du portefeuille selon les catégories socioprofessionnelles sont très différentes et nous retrouvons un pourcentage d'ouvriers qui double du portefeuille emprunteur à celui de PI (*voir Graphique 5*). Ceci vient du fait que cette catégorie présente des risques plus élevés et les personnes la composant sont alors plus incitées à souscrire un contrat de prévoyance individuelle. Les taux vont donc naturellement augmenter sur le portefeuille PI.

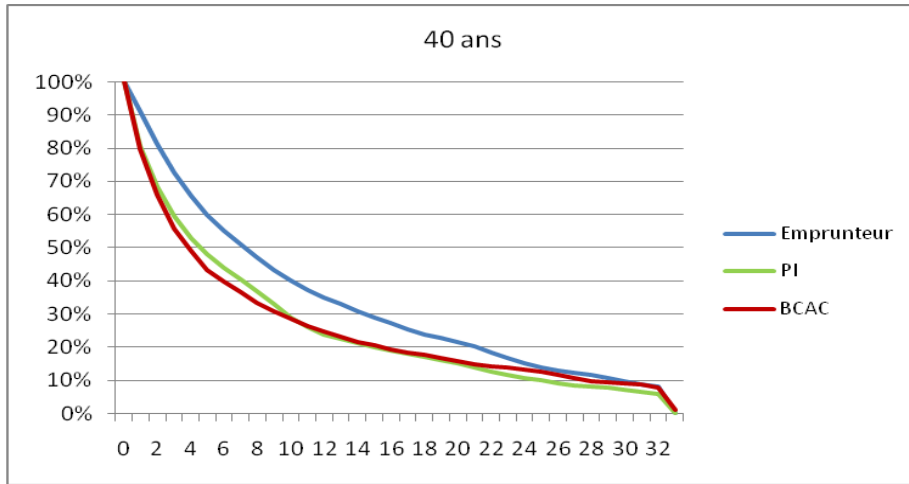
6.2 Les tables de maintien en incapacité

Nous comparerons nos tables grâce aux fonctions de survie issues des tables ainsi qu'aux espérances de survie déduites de ces tables. Ces espérances sont définies de la façon suivante :

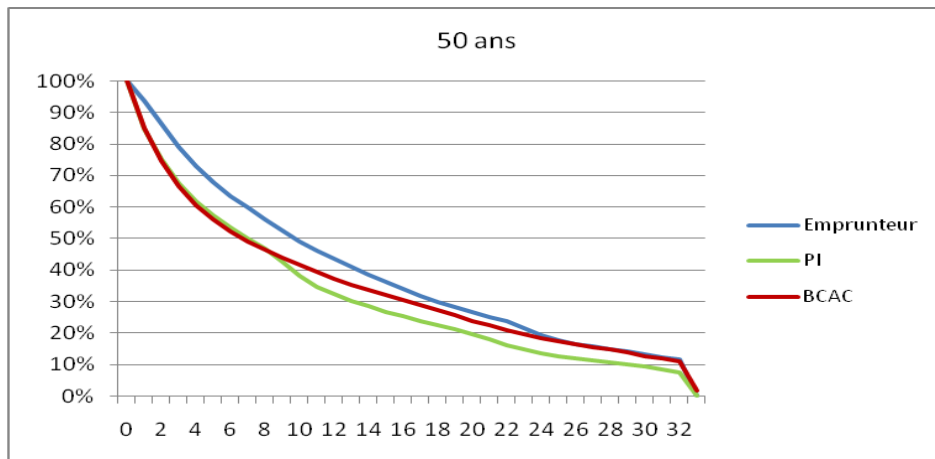
$$e_x = \sum_{t=1}^{33} S_x(t),$$

avec x l'âge à l'entrée, t l'ancienneté dans l'état d'incapacité et $S_x(t)$ la fonction de survie.

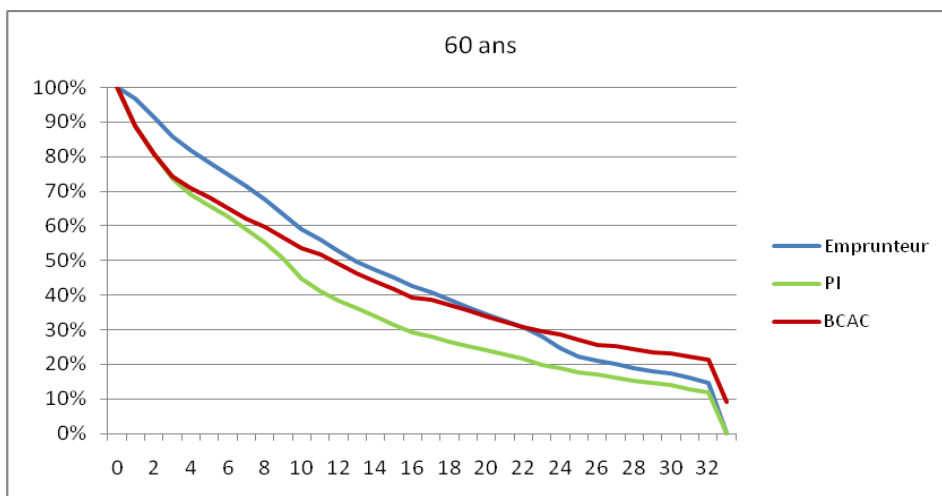
Comme notre table de maintien en emprunteur débute après 3 mois de franchise, nous sommes obligés de décaler le début des tables de prévoyance individuelle et du BCAC à 3 mois. Nos premières constatations porteront donc seulement sur la cadence de sorties après 3 mois déjà passés en incapacité.



Graphique 37: Comparaison des fonctions de survie à 40 ans



Graphique 38: Comparaison des fonctions de survie à 50 ans



Graphique 39: Comparaison des fonctions de survie à 60 ans

Comparaison Emprunteur- BCAC

La fonction de survie emprunteur est quasiment toujours plus élevée que celle du BCAC et l'espérance de maintien après franchise est en moyenne supérieure de 1 mois et demi. Ceci montre clairement que l'utilisation de la table du BCAC amène une sous tarification et un sous provisionnement des contrats emprunteurs.

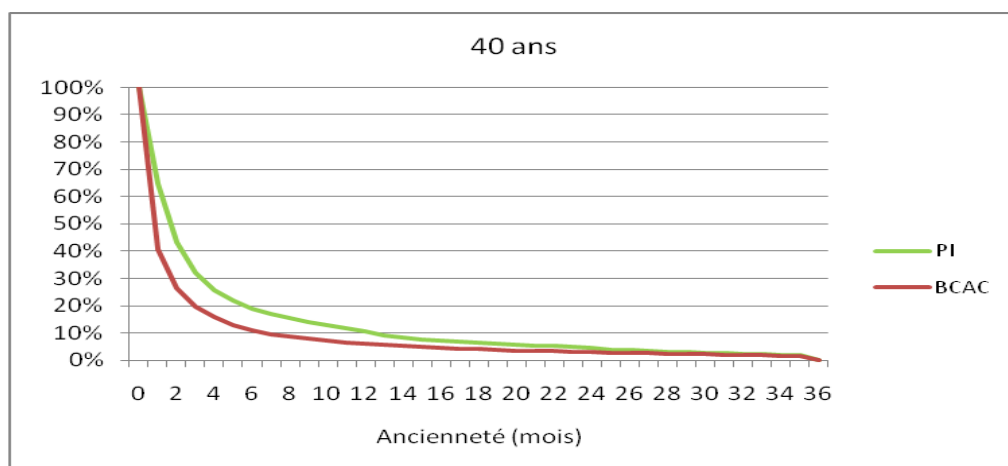
Comparaison Emprunteur-PI

L'écart avec la fonction de survie de la prévoyance individuelle est encore plus flagrant. Il est cependant difficile à analyser car il n'y a pas de lien direct entre la composition du portefeuille et la baisse de la durée moyenne du portefeuille emprunteur au portefeuille PI.

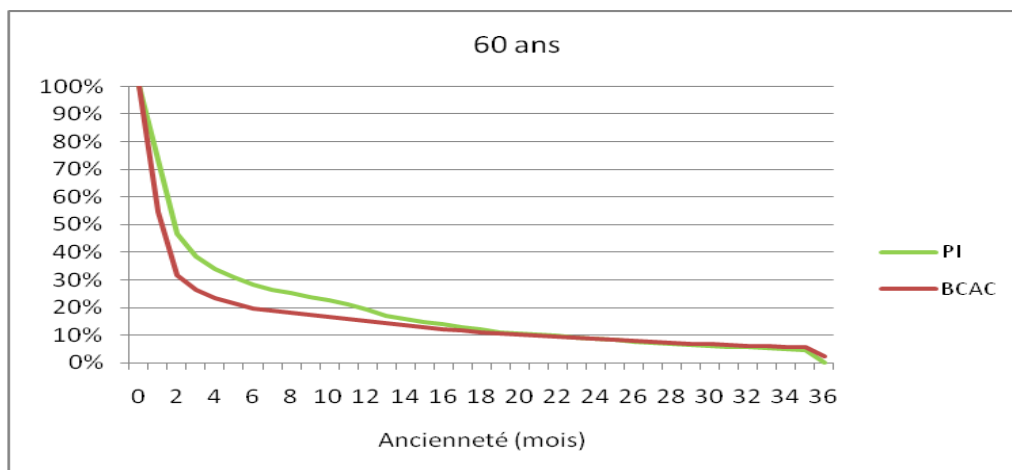
Nous pouvons néanmoins constater que l'écart entre les espérances de survie restent le même que celui de la durée moyenne des sinistres observés. En effet, nous avons calculé une durée moyenne respective de 282 jours et 207 jours après franchise pour les sinistres emprunteurs et les sinistres PI, ce qui équivalait à un écart de 75 jours, soit 2 mois et demi. Ici, les espérances de survie moyennes sont respectivement de 10,39 mois et 8,24 mois, équivalent à un écart de 2,25 mois.

Comparaison PI-BCAC

Pour une comparaison plus précise des courbes de PI et du BCAC, nous allons d'abord exposer les graphiques des fonctions de survie dès le premier mois.



Graphique 40: Comparaison BCAC-PI de la fonction de survie à 40 ans



Graphique 41: Comparaison BCAC-PI de la fonction de survie à 60 ans

Sur les graphiques illustrant les 36 mois d'observation, la courbe de la prévoyance individuelle est toujours au-dessus de celle du BCAC, contrairement aux graphiques où nous avons décalé le début de la table à 3 mois d'ancienneté. Ceci s'explique par le fait que le pourcentage de sorties est beaucoup moins important pendant les 3 premiers mois sur la table de la PI, les sorties étant mieux étalées dans le temps que celles du BCAC. Lorsque nous décalons le début de la table à 3 mois, il est donc normal de retrouver la courbe PI au dessus car les sorties se feront plus nombreuses par la suite.

En conclusion, nous pouvons dire qu'avec une franchise nulle, l'indemnisation d'une personne sinistrée en prévoyance individuelle sera certainement plus longue que celle prévue actuellement par l'utilisation de la table du BCAC qui n'est du coup pas adaptée. En revanche, lorsque l'indemnisation débute après une franchise de 90 jours, nous constatons que l'utilisation de cette dernière table est une mesure de prudence, du fait d'une durée espérée en incapacité plus importante.

6.3 Les tables de passage en invalidité

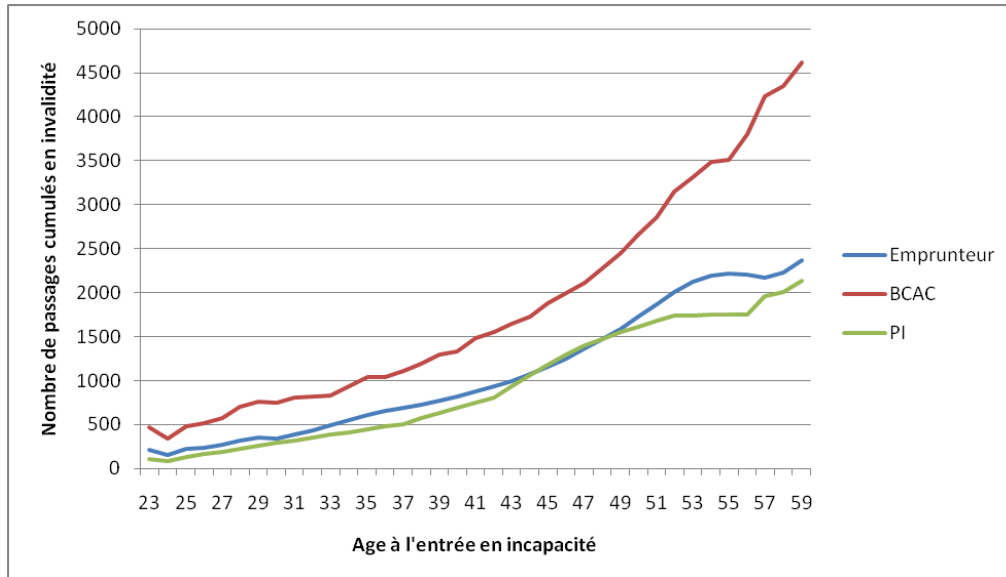
Comme pour le maintien, nous comparerons d'abord les passages en invalidité après 3 mois des trois tables puis les invalidités dès le 1er mois pour la PI et le BCAC.

Pour que cela soit le plus significatif possible, nous avons dû reconstruire la table de passage du portefeuille emprunteur en supprimant cette fois-ci les invalidités directes (mais avec exactement la même procédure de construction).

En effet, lorsque nous décalons le début de la table de passage du BCAC à 3 mois, nous pourrions considérer que sur les 10000 observations de départ, les passages survenus les trois premiers mois sont des invalidités directes. Cependant, celles intégrées dans la table emprunteur l'ont été sur un effectif de départ inconnu car les personnes sinistrées durant moins de trois mois ne rentrent pas dans les tables de données de l'assureur. Il est donc

impossible d'appliquer un quelconque ratio sur la table du BCAC qui pourrait permettre d'intégrer un nombre d'invalidité directe.

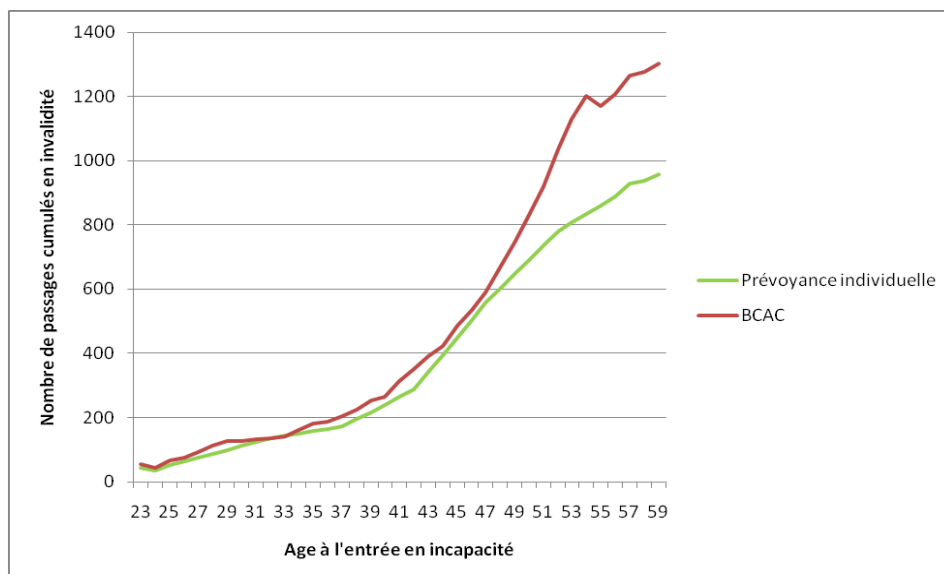
Nous comparerons les tables en fonction du nombre total de passages à chaque âge, une comparaison des passages à chaque ancienneté étant inintéressante.



Graphique 42 : comparaison du nombre de passages cumulés entre les trois tables

La différence entre le nombre de sorties donné par la table du BCAC et celui donné par les notre est importante, avec un ratio moyen de 59% pour l'emprunteur et 51% pour la prévoyance individuelle. L'utilisation de la table du BCAC n'est donc pas du tout appropriée et paraît être un gage de prudence excessif.

Cependant le graphique ci-dessous qui compare le nombre de passage dès le 1^{er} mois entre le BCAC et la prévoyance individuelle nous amène à faire une autre constatation.



Graphique 43 : comparaison du nombre de passages cumulés à chaque âge entre la PI et le BCAC

En effet, le ratio moyen entre le nombre cumulé de passages est ici de 80%. Cette augmentation a une explication.

Lorsque nous décalons le début de la table à 3 mois, nous modifions le nombre de passage proportionnellement aux effectifs toujours sous risque 3 mois après l'entrée en incapacité. Or, nous avons remarqué sur les tables de maintien que le nombre de sorties observé sur celle du BCAC était beaucoup plus important les 3 premiers mois.

Cela signifie que proportionnellement au nombre de sorties observées les 3 premiers mois, le nombre de passage en invalidité est nettement plus important en prévoyance individuelle, cette tendance s'inversant les mois suivants.

Ce chapitre a donc permis de constater que les tables construites ainsi que celles du BCAC n'étaient pas équivalentes. La principale information que nous pouvons en tirer est que la composition de chaque portefeuille influe grandement sur la sinistralité observée et qu'il est important de construire des tables d'expérience propres à chacun.

Conclusion

Cette étude a tout d'abord pu mettre en évidence les difficultés rencontrées pour obtenir une table d'expérience fiable. En effet, en pratique, le premier obstacle auquel est confronté l'assureur est la qualité des données, parfois médiocre, qui demande alors des retraitements préalables. Ensuite, les conditions générales des contrats d'un même portefeuille peuvent varier selon la date de souscription et contraignent l'assureur à regrouper dans la même étude des assurés dont les garanties diffèrent légèrement.

L'assureur doit donc effectuer des choix opportuns sur les différentes techniques de construction et les segmentations à considérer au sein d'un même portefeuille.

Nous avons d'ailleurs vu dans la construction des tables d'entrée que même si la quantité des données à disposition était limitée, certaines segmentations s'imposaient naturellement, ce qui est le cas de l'âge et de la franchise souscrite. Si le volume de données le permet et la fiabilité des résultats y est améliorée, l'assureur peut bien évidemment procéder à de nouvelles segmentations.

L'étude a ensuite mise en évidence des disparités intéressantes entre les tables de chaque portefeuille. Nous avons ainsi pu constater des résultats très éloignés qui témoignent de comportements très différents dans les populations qui composent chaque portefeuille. C'est tout logiquement que nous avons également pu voir que les tables du BCAC ne pouvaient être adaptées à chaque portefeuille et que leur utilisation n'était pas toujours un bon gage de fiabilité pour l'assureur.

L'établissement de tables d'expérience ne doit cependant pas s'arrêter là et demande un suivi permanent de plusieurs paramètres. Premièrement, le recul de l'âge de départ à la retraite va peu à peu impacter les résultats, en particulier les taux d'entrée dont le pic devrait se décaler d'année en année. Deuxièmement, les résultats mettent souvent en évidence une conjoncture nationale qui évoluent constamment et qu'il est nécessaire de prendre en compte dans l'utilisation des tables. Dernièrement, la composition des portefeuilles non clos varie en permanence et certains paramètres, comme l'ancienneté moyenne ou l'âge moyen qui sont très sensibles à l'évolution du nombre de contrats au sein d'un portefeuille, peuvent jouer un rôle majeur sur la sinistralité observée.

L'assureur devra donc réaliser des études régulières sur les risques concernés qui devront permettre d'en anticiper les éventuelles dérives.

Annexes

Annexe 1: Arrêté du 28 mars 1996 fixant les règles de provisionnement des garanties d'invalidité et d'incapacité	116
Annexe 2: Table de maintien du BCAC	117
Annexe 3 : Table de passage en invalidité du BCAC	118

Annexe 1: Arrêté du 28 mars 1996 fixant les règles de provisionnement des garanties d'invalidité et d'incapacité

Art. 1^{er} – L'article A. 331-22 du Code des assurances est ainsi rédigé :

Les provisions techniques de prestations d'incapacité et d'invalidité sont la somme :

1° des provisions correspondant aux prestations d'incapacité de travail à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres en cours à cette date majorées des provisions dites pour rentes en attentes relatives aux rentes d'invalidité susceptible d'intervenir ultérieurement au titre des sinistres d'incapacité en cours du 31 décembre de l'exercice.

2° des provisions correspondant aux prestations d'invalidité à verser après le 31 décembre de l'exercice au titre des sinistres d'invalidité en cours à cette date.

Le calcul des provisions techniques de prestations d'incapacité de travail et d'invalidité est effectué à partir des éléments suivants :

1° les lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité indiquées en annexe. Toutefois, il est possible pour l'entreprise d'assurances d'utiliser une loi de maintien établie par ses soins et certifiée par un actuair indépendant de cette entreprise ; agréé à l'une des associations d'actuaire reconnues par la commission de contrôle des assurances.

2° un taux d'actualisation qui ne peut excéder 75% du taux moyen des emprunts de l'Etat français calculé sur base semestrielle sans pouvoir dépasser 4,5%.

Ces dispositions ne s'appliquent pas aux prestations issues de contrats d'assurance de groupe souscrits par un établissement de crédit, ayant pour objet la garantie du remboursement d'un emprunt ni à celles issues de contrat d'assurance couvrant des risques visés au 3° de l'article L. 310-I.

Annexe 2: Table de maintien du BCAC

l'entrée en incapacité	ancienneté en mois en incapacité										ancienneté en mois en incapacité										ancienneté en mois en incapacité																	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
20	10000	2842	1743	1144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98	94	91	87	84	80	76	74	72	68	68	65	63	62	58	55	15		
21	10000	2842	1743	1144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98	94	91	87	84	80	76	74	72	68	68	65	63	62	58	55	15		
22	10000	2842	1743	1144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98	94	91	87	84	80	76	74	72	68	68	65	63	62	58	55	15		
23	10000	2842	1743	1144	838	625	455	339	291	253	215	187	173	152	138	129	123	114	102	98	94	91	87	84	80	76	74	72	68	68	65	63	62	58	55	15		
24	10000	2831	1848	1215	894	657	478	343	291	256	217	188	173	152	138	129	123	114	105	95	91	88	87	84	82	79	74	72	68	67	62	58	57	55	52	46	14	
25	10000	3080	2001	1345	997	739	536	382	327	289	251	216	195	172	159	149	140	129	116	110	106	102	97	92	87	83	78	76	73	70	67	66	63	63	58	16		
26	10000	3177	2112	1461	1087	812	591	431	372	325	285	249	226	201	186	171	161	150	137	123	114	110	106	102	95	91	89	87	82	81	78	76	73	69	63	23		
27	10000	3251	2180	1540	1156	869	643	476	407	360	320	285	263	237	222	207	192	179	168	159	151	144	140	134	128	118	111	108	104	97	93	90	88	85	81	74	28	
28	10000	3298	2243	1600	1209	915	688	524	448	400	359	322	297	270	255	238	222	210	199	189	180	172	167	160	153	143	132	128	120	112	105	103	99	96	90	82	33	
29	10000	3348	2273	1640	1246	956	726	559	476	425	384	352	327	298	280	262	247	233	220	208	199	190	184	175	168	159	147	143	133	125	118	110	109	106	96	91	35	
30	10000	3386	2275	1659	1264	964	744	583	494	439	396	363	338	308	287	267	252	240	227	214	202	193	185	177	171	161	149	143	134	125	117	111	108	105	97	89	34	
31	10000	3388	2228	1618	1249	965	756	595	501	449	406	375	347	318	295	276	261	250	236	223	212	204	194	186	179	172	163	154	141	131	121	114	111	108	101	93	30	
32	10000	3433	2238	1617	1254	975	772	612	522	468	421	388	357	325	302	279	264	252	235	222	211	202	192	183	176	170	163	153	137	127	118	110	106	102	96	89	25	
33	10000	3466	2235	1627	1260	983	782	628	540	484	431	395	364	332	310	286	270	256	238	223	212	202	191	181	172	162	154	146	134	126	117	105	100	98	94	88	18	
34	10000	3567	2298	1684	1321	1033	828	684	597	535	477	436	401	366	344	319	298	282	265	247	233	220	207	197	186	175	167	158	146	134	126	117	110	106	101	96	21	
35	10000	3645	2331	1705	1357	1082	876	732	647	586	528	481	443	402	377	351	331	309	294	275	261	246	234	220	207	199	191	179	166	153	146	135	126	121	115	109	24	
36	10000	3701	2390	1747	1390	1106	905	771	682	617	560	508	469	428	397	370	347	323	308	287	273	255	246	230	217	208	199	186	174	160	153	142	132	128	120	114	23	
37	10000	3822	2458	1804	1430	1148	932	801	704	635	579	526	487	443	406	379	357	335	319	298	279	263	252	235	222	212	204	191	181	167	161	149	135	130	123	114	19	
38	10000	3958	2526	1851	1479	1193	980	841	739	671	616	564	521	477	439	411	384	368	340	319	299	282	270	252	242	235	229	217	203	188	180	167	154	148	141	131	21	
39	10000	4035	2600	1923	1541	1266	1055	915	807	739	680	623	572	530	486	455	427	400	381	364	343	329	314	294	279	268	260	246	234	215	207	189	177	170	162	146	24	
40	10000	4073	2652	1973	1575	1303	1097	965	853	783	719	659	607	565	521	480	458	438	404	384	362	349	332	313	295	281	272	263	246	238	214	195	184	178	171	156	21	
41	10000	4214	2776	2096	1680	1408	1194	1034	937	866	798	731	676	628	582	552	519	493	455	433	407	393	372	352	330	314	304	295	276	260	244	224	213	205	194	182	19	
42	10000	4364	2930	2237	1814	1540	1314	1162	1039	971	895	825	764	706	668	630	593	563	521	499	477	452	431	401	384	364	352	330	320	280	257	247	236	223	213	20	26	
43	10000	4473	3046	2341	1907	1633	1400	1243	1120	1045	965	892	830	774	726	681	654	614	582	558	532	510	488	464	432	409	396	378	362	337	311	290	278	263	244	231	35	
44	10000	4621	3155	2417	1974	1676	1441	1282	1158	1077	1000	928	872	809	760	725	682	643	608	581	555	531	503	479	453	431	417	396	379	363	323	302	287	273	254	241	26	
45	10000	4780	3318	2557	2097	1776	1529	1361	1240	1168	1089	1001	938	872	825	791	745	705	675	642	614	588	563	536	509	488	466	442	421	383	363	344	328	310	286	264	33	
46	10000	4895	3392	2641	2190	1860	1609	1437	1319	1248	1168	1099	1029	962	892	843	793	756	728	690	658	632	602	573	547	520	492	463	441	412	380	360	343	320	297	273	45	
47	10000	5015	3498	2742	2284	1933	1696	1527	1403	1294	1207	1138	1067	994	947	904	854	818	786	741	705	675	636	601	574	543	509	483	462	435	404	387	369	347	321	292	46	
48	10000	5161	3662	2911	2441	2076	1836	1659	1534	1418	1328	1259	1179	1099	1047	991	937	898	864	813	779	744	697	655	623	588	549	520	494	470	438	414	389	359	338	311	45	
49	10000	5245	3801	3093	2637	2305	2057	1875	1736	1618	1518	1440	1358	1295	1220	1148	1087	1037	988	945	898	847	794	739	687	629	586	557	525	497	470	448	419	384	358	334	51	
50	10000	5310	3904	3188	2746	2414	2175	1984	1838	1716	1614	1527	1447	1374	1302	1226	1168	1106	1046	995	943	893	827	776	732	685	646	607	572	536	514	482	451	414	389	366	42	
51	10000	5297	3931	3260	2828	2506	2276	2082	1941	1815	1709	1623	1543	1467	1391	1318	1239	1185	1121	1063	1009	950	895	843	796	741	705	662	615	572	543	512	480	432	404	383	49	
52	10000	5336	3992	3361	2939	2618	2384	2198	2055	1920	1813	1724	1643	1568	1491	1407	1324	1241	1176	1121	1068	994	932	879	829	771	735	672	632	582	556	521	490	443	412	387	48	
53	10000	5316	3998	3395	2976	2673	2440	2252	2120	1987	1882	1793	1706	1631	1550	1467	1388	1328	1268	1145	1080	1023	966	903	840	779	739	677	638	591	565	532	504	463	439	414	59	
54	10000	5336	3875	3271	2878	2582	2357	2202	2075	1947	1842	1758	1671	1592	1514	1426	1332	1246	1175	1111	1062	1001	939	885	830	776	737	685	637	589	564	535	506	470	439	414	59	
55	10000	5375	3714	3123	2753	2474	2265	2115	2003	1890	1791	1701	1627	1546	1478	1396	134	1236	1171	1112	1071	1013	957	902	852	798	762	711	670	622	600	569	540	508	475	450	107	
56	10000	5422	3802	3230	2881	2622	2422	2225	2091	1989	1889	1788	1700	1636	1558	1476	1416	1339	1263	1191	1131	1071	1010	939	882	839	795	762	722	682	642	624	595	571	547	520	496	174
57	10000	5426	3437	2876	2544	2297	2108	1988	1894	1798	1701	1636	1558	1476	1416	1339	1263	1191	1131	1071	1010	939	882	839	795	762	722	682	642	624	595	571	547	520	496	174		
58	10000	5449																																				

Annexe 3 : Table de passage en invalidité du BCAC

Âge à l'entrée en incapacité	ancienneté en mois en incapacité												ancienneté en mois en incapacité												ancienneté en mois en incapacité													
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35		
20	1	0	0	0	0	2	0	0	1	1	2	1	1	0	1	0	1	2	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2	2	1	2	2	97	
21	1	0	0	0	0	2	0	0	1	1	2	1	1	0	1	2	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2	1	2	2	97	
22	1	0	0	0	0	2	0	0	1	1	2	1	1	0	1	2	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2	1	2	2	97	
23	1	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2	0	0	1	39	
24	1	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	2	0	0	1	28
25	1	0	0	0	0	0	0	0	1	3	1	0	1	1	2	1	2	1	2	0	0	1	0	2	1	2	2	1	1	0	0	1	0	0	1	2	39	
26	1	0	1	0	0	0	1	1	2	2	1	0	2	2	2	2	1	2	1	2	1	0	3	2	3	2	3	2	1	1	1	0	1	0	0	2	1	37
27	1	0	1	0	0	1	0	1	2	3	0	1	1	1	5	3	2	1	2	2	0	2	2	3	2	4	2	3	2	1	1	0	0	2	1	0	0	43
28	1	0	1	0	0	1	0	2	2	3	1	1	3	6	2	2	2	4	1	2	2	4	1	2	3	2	5	3	5	3	3	1	1	1	3	1	45	
29	1	0	1	0	0	1	3	0	2	1	2	1	1	4	6	3	2	1	4	2	1	4	2	1	3	2	3	6	3	3	3	0	2	5	1	51		
30	1	0	2	0	1	0	3	1	2	2	1	1	1	3	6	3	1	3	4	1	2	2	2	1	6	3	6	4	3	3	1	2	3	2	5	1	50	
31	1	0	1	1	0	4	0	1	1	2	1	1	1	4	5	3	1	1	3	2	2	2	2	1	1	5	3	6	6	4	3	1	2	3	3	57		
32	1	1	1	0	1	1	3	1	1	1	1	2	1	5	3	2	1	2	3	1	2	3	1	2	6	2	7	5	4	4	1	2	4	4	55			
33	2	1	1	1	1	4	1	1	2	1	2	1	3	2	2	1	3	2	3	3	1	4	1	4	4	4	4	4	6	1	6	1	1	2	3	59		
34	2	1	1	1	3	1	2	1	2	1	2	5	3	3	2	2	2	2	3	5	3	3	3	4	4	4	4	4	6	3	4	3	2	3	2	64		
35	2	1	1	0	1	3	2	1	2	1	4	6	3	2	2	5	4	1	3	7	2	8	4	3	4	4	4	4	7	3	5	3	4	3	69			
36	2	1	1	0	3	3	2	2	3	2	2	6	4	2	4	5	5	0	3	7	2	7	4	3	4	4	5	5	6	2	5	2	5	5	68			
37	2	1	1	1	3	2	2	2	4	2	4	6	6	2	4	6	5	2	4	6	2	8	4	1	3	4	4	7	2	5	9	3	5	6	76			
38	1	1	0	1	1	3	2	1	2	3	2	4	5	7	2	4	8	5	3	2	6	3	8	3	1	2	4	3	9	1	6	9	4	7	93			
39	1	1	0	1	1	3	2	1	1	6	2	4	5	6	4	4	8	5	4	3	3	2	9	7	3	1	5	4	12	1	10	9	3	6	103			
40	1	2	0	1	1	3	1	1	1	5	3	4	5	8	2	6	8	7	4	4	3	1	7	9	2	3	5	3	12	3	11	7	3	6	114			
41	1	2	0	0	1	4	3	0	1	5	3	4	8	7	2	8	9	5	5	4	3	6	11	4	3	6	6	12	5	13	7	5	8	8	137			
42	1	2	0	1	3	3	3	2	2	5	2	4	9	5	4	7	9	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6	17	8	14	3	6	9	153		
43	1	4	0	3	2	4	4	4	4	5	2	4	11	4	4	9	7	13	6	6	5	6	6	14	11	4	12	7	21	12	14	2	7	13	4	155		
44	1	3	0	3	3	4	7	4	8	3	3	7	11	5	6	13	9	13	5	7	7	8	4	9	12	5	12	8	18	15	12	5	7	12	4	169		
45	3	2	1	4	2	4	7	6	10	5	4	8	11	5	6	12	9	8	14	10	8	11	6	10	12	8	13	11	21	19	11	7	12	15	13	179		
46	5	3	1	4	2	4	6	7	12	5	6	11	7	10	10	9	10	19	13	8	11	9	16	13	15	12	21	20	12	7	14	14	15	182				
47	6	2	1	4	0	6	8	6	12	5	8	13	11	10	14	10	10	24	16	10	17	17	13	15	20	12	11	16	20	12	9	13	17	17	196			
48	6	1	1	3	2	6	7	7	15	6	9	14	14	12	18	13	10	9	23	15	13	20	21	17	19	22	16	13	12	23	19	17	18	11	215			
49	6	2	4	2	5	5	10	12	10	16	12	10	16	13	20	15	17	11	26	22	19	22	29	16	19	26	17	20	19	20	21	18	23	14	18	223		
50	4	1	4	5	2	9	9	12	12	15	16	15	16	15	25	18	20	17	20	26	23	26	32	25	25	26	24	21	21	15	26	17	22	13	17	243		
51	4	1	4	5	3	11	10	15	17	14	13	17	17	26	28	24	20	29	28	29	33	27	23	26	25	26	22	14	29	16	18	17	17	268				
52	4	1	5	6	3	12	11	18	20	16	14	21	22	17	25	40	36	27	32	30	32	33	26	29	23	37	28	29	18	30	21	27	19	18	283			
53	8	4	5	5	4	13	14	20	20	17	19	25	22	18	31	44	43	33	29	40	28	41	33	31	31	25	38	34	37	16	27	20	28	20	21	286		
54	8	7	4	5	3	15	17	16	22	15	22	28	25	20	38	48	49	39	38	31	31	46	33	40	36	29	39	30	34	15	25	19	24	20	21	310		
55	11	8	3	5	4	12	14	16	25	16	22	27	28	21	39	57	53	41	38	26	32	41	35	33	33	26	34	38	32	15	22	16	21	19	16	292		
56	10	8	4	5	4	14	16	18	23	18	24	30	28	21	40	57	56	41	37	29	32	44	34	36	36	24	40	38	36	35	14	22	16	23	21	17	298	
57	11	9	4	6	3	15	18	18	25	19	26	32	30	22	42	63	61	46	39	29	32	47	35	38	38	24	40	38	38	12	22	16	23	21	17	306		
58	12	11	3	6	3	15	18	17	26	19	27	33	32	23	45	68	65	48	42	34	47	35	39	39	23	39	39	38	12	20	14	20	21	15	307			
59	14	11	4	6	3	15	18	18	27	21	29	35	34	24	46	72	69	50	41	24	35	47	36	38	40	21	40	42	38	11	19	13	21	22	14	305		

Bibliographie

Ouvrages

PLANCHET F., THEROND P. [2006], *Modèles de durée – Applications actuarielles*, Economica
SAPORTA G. [1990], *Probabilités – Analyses des données et statistique*, Editions Technip
PETAUTON P. [2004], *Théorie et pratique de l'assurance vie*, Editions Dunod
BCAC [2002], *Guide de l'assurance groupe*

Enquêtes

FFSA-GEMA, [2010], *Les contrats d'assurance emprunteur en 2009*
FFSA-GEMA, [2010], *Rapport annuel 2009*

Cours

EISELE K.T. [2009], *Analyses de Survie*, Université de Strasbourg
HENGE F. [2008], *Assurance Vie*, Université de Strasbourg

Internet

www.legifrance.gouv.fr
www.ameli.fr
www.securite-sociale.fr

Mémoires

GAUMET A. [2001], *Construction de tables d'expérience pour l'entrée et le maintien en incapacité*, ISFA
MARILLET S. [2004], *Etude du risqué arrêt de travail: construction de tables de maintien en incapacité, invalidité et probabilités de passage en invalidité*, ISFA
LANGMEIER R. [2000], *Etude de différentes méthodes d'ajustement de tables de mortalité: application aux données d'une compagnie d'assurance*, Ecole des HEC, Université de Lausanne
TERRIER S. [2001], *Les rentes viagères: mortalité d'expérience et réassurance*, CNAM

Articles

PLANCHET F., WINTER P., « *L'utilisation des splines bidimensionnels pour l'estimation des lois de maintien en arrêt de travail* », Bulletin Français d'actuariat n° 13, 83-106
PLANCHET F. [2007], « *Les tables d'expérience* », La Tribune de l'assurance, n°117-novembre 2007, 32

Table des illustrations

Graphiques

Graphique 1 : Evolution des cotisations d'assurance et des encours de crédit de 2001 à 2009	12
Graphique 2: Evolution du nombre de contrats décès en France	15
Graphique 3 : Répartition des âges du portefeuille emprunteur	34
Graphique 4 : Répartition des âges du portefeuille P.I	35
Graphique 5 : Répartition des assurés selon leur catégorie socioprofessionnelle	36
Graphique 6 : Saisonnalité des entrées en incapacité du portefeuille emprunteur	38
Graphique 7: Saisonnalité des entrées en incapacité du portefeuille PI	38
Graphique 8: Saisonnalité des entrées en incapacité du portefeuille PI selon la nature du sinistre	39
Graphique 9 : Taux d'entrée suite à un accident selon l'âge à l'entrée et la franchise souscrite	52
Graphique 10 : Taux d'entrée par catégorie socioprofessionnelle	53
Graphique 11 : Taux d'entrée par catégorie socioprofessionnelle	54
Graphique 12 : Evolution du taux d'entrée selon	55
Graphique 13 : Evolution du taux d'entrée selon	55
Graphique 14 : Evolution du taux global du portefeuille emprunteur année par année	56
Graphique 15 : Evolution du taux global du portefeuille PI année par année	58
Graphique 16 : Evolution du taux d'entrée selon	59
Graphique 17 : Evolution du taux d'entrée selon l'âge des assurés	60
Graphique 18 : intervalles de confiance des taux bruts d'entrée en incapacité du portefeuille emprunteur ..	62
Graphique 19 : Rapport entre les intervalles de confiance et les taux bruts	62
Graphique 20 : Taux d'entrée en incapacité lissé du portefeuille emprunteur	71
Graphique 21 : Courbes lissés des franchises maladie du portefeuille PI	71
Graphique 22 : Nombre de sinistres observés à chaque âge	81
Graphique 23 : Répartition des durées de sinistres du portefeuille emprunteur	82
Graphique 24 : Fonction de survie issue de la table de maintien brute du portefeuille emprunteur	83
Graphique 25 : Variances de Greenwood du portefeuille Emprunteur	85
Graphique 26 : Différences des probabilités de sortie entre la table du BCAC et la table brute du portefeuille emprunteur	93
Graphique 27 : Fonction de survie lissée de la loi de maintien du portefeuille emprunteur	95
Graphique 28 : Fonction de survie de la loi de maintien brute du portefeuille PI	98
Graphique 29 : Fonction de survie de la table de maintien lissée du portefeuille PI	99
Graphique 30 : Taux de passage en invalidité issue de la table brute du portefeuille emprunteur	101
Graphique 31 : Nombre de passages en invalidité cumulés du portefeuille emprunteur	102
Graphique 32 : Taux de passage lissé	104
Graphique 33 : Nombre de passage cumulés à chaque âge	104
Graphique 34 : Taux de passage lissés du portefeuille PI	105
Graphique 35 : Nombre de passages cumulés du portefeuille PI	106
Graphique 36 : Comparaison des taux d'entrée des deux portefeuilles sur la franchise de 90 jours	107
Graphique 37: Comparaison des fonctions de survie à 40 ans	109
Graphique 38: Comparaison des fonctions de survie à 50 ans	109
Graphique 39: Comparaison des fonctions de survie à 60 ans	109
Graphique 40: Comparaison BCAC-PI de la fonction de survie à 40 ans	110
Graphique 41: Comparaison BCAC-PI de la fonction de survie à 60 ans	111
Graphique 42 : comparaison du nombre de passages cumulés entre les trois tables	112
Graphique 43 : comparaison du nombre de passages cumulés à chaque âge entre la PI et le BCAC	112

Tableaux

Tableau 1 : Montants perçus par la Sécurité Sociale en cas d'invalidité	18
Tableau 2 : Taux de prise en charge du risque IPP	21
Tableau 3 : Répartition des têtes des contrats emprunteurs	29
Tableau 4 : Nombre de contrats et de personnes observés sur le portefeuille emprunteur	33
Tableau 5 : Nombre de contrats et de personnes observés sur le portefeuille PI	34

Tableau 6 : Répartition des durées de franchise du portefeuille emprunteur	36
Tableau 7 : Répartition des franchises Maladies	37
Tableau 8 : Répartition des franchises accident en PI	37
Tableau 9 : Taux d'entrée en incapacité du portefeuille emprunteur segmenté selon la franchise souscrite .	51
Tableau 10 : Taux d'entrée en incapacité	51
Tableau 11 : Taux d'entrée suite à une maladie selon	52
Tableau 12 : Taux d'entrée par sexe	53
Tableau 13 : Rapport entre le taux de chaque catégorie	54
Tableau 14 : Evolution de l'âge moyen et de l'ancienneté moyenne	57
Tableau 15 : Evolution de l'âge moyen et de l'ancienneté moyenne	58
Tableau 16 : Test du Chi-deux	80
Tableau 17 : Durée moyenne en incapacité selon la catégorie socioprofessionnelle	81
Tableau 18: Nombre de sinistres observés	96

Figures

Figure 1 : Définitions de la franchise et du délai de carence	9
Figure 2: Schéma de passage des différents états.....	26
Figure 3 : Exemple de troncature et censure (1)	43
Figure 4 : Exemple de troncature et censure (2)	44
Figure 5 : Exemple de troncature et censure (3)	44
Figure 6 : Exemple de troncature et censure dans le cas du maintien en incapacité	74