

Léa FARGEON
Ketty NISSAN

ensae
année 2003

GROUPE DE TRAVAIL:

**RECHERCHE D'UN MODELE ACTUARIEL
D'ANALYSE DYNAMIQUE DE LA
SOLVABILITE D'UN PORTEFEUILLE DE
RENTES VIAGERES**

Animateurs :

Norbert GAUTRON, Actuaire Associé
Marie-France CABANIS, Actuaire ENSAE
(Joël Winter & Associés – Actuaires)

Correspondant ENSAE : Arthur charpentier,

Assistant ENSAE

Table des matières

Introduction

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Présentation générale | 1 |
| 1 | Une typologie des risques | 1 |
| 1.1 | Les risques à l'actif | 1 |
| 1.2 | Les risques au passif | 2 |
| 1.3 | Les autres risques | 2 |
| 2 | Règlementation relative à la marge de solvabilité | 2 |
| 2.1 | Approche européenne : le Ratio fixe ou formule "européenne" | 2 |
| 2.2 | Approche américaine : le Risk Based Capital | 3 |
| 2.3 | Approche par scénario | 4 |
| 2.4 | Approche probabiliste | 4 |
| 2.5 | Le comité de Bâle sur le contrôle bancaire | 4 |
| II | Modélisation des outils de base | 5 |
| 1 | Modélisation de la courbe des taux | 5 |
| 1.1 | Introduction | 5 |
| 1.2 | Modèle de Vasicek | 6 |
| 2 | Modélisation de l'inflation | 8 |
| 2.1 | Modélisation de l'indice à la consommation | |
| | Le modèle de Wilkie | 9 |
| 2.2 | Complexification du modèle de Wilkie | |
| | par un processus AR(1)-GARCH(1,1) | 11 |
| III | Un modèle d'évaluation de solvabilité | 12 |
| 1 | Modélisation des actifs | 12 |
| 1.1 | Présentation des actifs considérés | 12 |
| 1.2 | Modélisation du prix de l'obligation synthétique | 13 |
| 1.3 | Modélisation du prix de l'OATi | 13 |
| 1.4 | Modélisation du rendement du titre non-obligataire synthétique | 16 |
| 2 | Modélisation du passif | 19 |
| 2.1 | Méthode classique | 20 |
| 2.2 | Méthode alternative | 20 |
| 3 | Modélisation de la marge actif / passif | 21 |
| 3.1 | La gestion actif- passif | 21 |
| 3.2 | La Value at Risk | 21 |
| 3.3 | Analyse de la marge actif/passif | 22 |
| IV | Application à un portefeuille de rentes viagères | 23 |

| | |
|---|-----------|
| <i>TABLE DES MATIÈRES</i> | 3 |
| 1 Présentation du portefeuille | 23 |
| 1.1 Généralités et problématique | 23 |
| 1.2 Etude statistique du portefeuille | 23 |
| 1.3 La table de mortalité utilisée | 24 |
| 1.4 Hypothèses simplificatrices | 24 |
| 2 Du T3 à notre modèle | 25 |
| 3 Plan de la démarche utilisée | 26 |
| 4 Résultats sur l'ensemble du portefeuille | 27 |
| 4.1 Sensibilité à la proportion de titre synthétique obligataire au sein du portefeuille d'actifs | 27 |
| 4.2 Sensibilité de la probabilité de ruine aux fonds propres | 28 |
| Conclusion | 30 |
| Annexes | 32 |

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

A Norbert GAUTRON et Marie-France CABANIS, respectivement Associé et Actuaire Sénior du Cabinet de conseils JWA-Actuaires pour nous avoir donné les moyens de mener à bien ce projet.

A Arthur Charpentier, Assistant ENSAE pour sa disponibilité et ses précieux conseils.

Introduction

La solvabilité est un outil de gestion de base des entreprises. Elle peut revêtir différents aspects : actuariel, financier, comptable et réglementaire. Les changements récents ou à venir sur la marge de solvabilité en font un sujet d'actualité en perpétuelle évolution.

Nous nous sommes intéressées à un calcul dynamique de la marge de solvabilité en vue de l'appliquer à un portefeuille de prévoyance collective. Nous poursuivons les objectifs suivants:

- adosser dynamiquement l'actif et le passif;
- rechercher l'allocation optimale entre obligations et actions;
- déterminer, pour un portefeuille de rentes viagères, les fonds propres à mobiliser de sorte que la probabilité de ruine soit inférieure ou égale à $x\%$ donné;
- bâtir un outil de type T3. (Cependant, le T3 permet un calcul déterministe de la marge actif/passif et nous proposons une approche stochastique).

Cette étude permettra en outre d'analyser les résultats découlant de différents taux techniques (de 2.5% à 0.5%) par une approche stochastique.

Ainsi, nous avons adapté l'approche VaR à notre portefeuille de rentes conjoints survivants. Pour se faire, nous plaçons le portefeuille en actions et en obligations indexées sur l'inflation. L'originalité de notre démarche repose sur une analyse stochastique de la solvabilité et sur la réflexion que nous avons menée concernant l'indexation des obligations sur l'inflation.

Nous commençons par présenter les risques auxquels s'expose une compagnie d'assurance et la réglementation française relative à la marge de la solvabilité. En outre, nous comparons les réglementations en vigueur dans d'autres pays en détaillant la démarche et les motivations adoptés par chacun. Par ailleurs, nous présentons le point de vue bancaire concernant la problématique de la marge de la solvabilité.

Puis, nous explicitons la base théorique nécessaire à la modélisation de la courbe des taux que l'on applique ensuite au portefeuille. La modélisation retenue se fonde sur le modèle de Vasicek qui est propice à une extension au modèle de Vasicek-Fong. Par ailleurs, nous modélisons l'inflation à l'aide du modèle de Wilkie qui considère l'indice des prix à la consommation de façon stochastique. Une alternative possible est l'utilisation des modèles AR-GARCH.

Ensuite, nous déterminons l'actif du bilan qui est composé d'actions et d'obligations indexées sur l'inflation ainsi que le passif du bilan pour lequel nous avons choisi une méthode d'évaluation originale. Tout ceci nous permettant de conclure sur la marge de solvabilité.

La dernière partie est consacrée à l'application du modèle au portefeuille de rentes viagères. Enfin, nous confrontons le modèle avec et sans inflation.

Première partie

Présentation générale

1 Une typologie des risques

Le contrôle des risques est essentiel en assurance puisque le but même de l'assurance est de réduire contractuellement le risque du détenteur d'une police, en échange d'une prime versée par ce dernier. La réduction du risque de chaque assuré est en effet rendue possible par la mutualisation des risques de l'ensemble de la population d'assurés d'une compagnie. Cependant, l'assurance est exposée à un certain nombre de risques qui, s'ils sont mal gérés peuvent entraîner la faillite de la compagnie. **Or, pour gérer les risques encourant par l'entreprise, il faut dans un premier temps les identifier.** Nous allons distinguer deux types de risques : les risques inhérents à l'actif et les risques du passif.

1.1 Les risques à l'actif

Ces risques sont liés à la structure du bilan de l'assurance et à l'évolution des marchés financiers. Ce sont les risques de taux, le risque de liquidité et le risque de contrepartie. Ils peuvent être limités par une diversification des actifs, une évaluation prudente de leur valeur et une gestion actif passif appropriée.

Le risque de taux

Le risque de taux est directement lié à des variations brusques des taux d'intérêt. Une hausse des taux peut provoquer une baisse des rendements sur investissement et une dépréciation des valeurs investies antérieurement à la hausse des taux. Si elle est contrainte de vendre des obligations, l'assurance risque de réaliser des moins values latentes. Par ailleurs, le taux proposé par l'assurance devenant moins compétitif que le taux proposé par le marché, l'assurance est alors confrontée à des rachats massifs des contrats des assurés.

A l'inverse, une baisse des taux d'intérêt a un impact sur les provisions qui sont calculées par actualisation des projections des paiements futurs. Par ailleurs, en période de baisse des taux, le réinvestissement des coupons est moins lucratif, il en est de même du remplacement des obligations arrivées à échéance par des obligations de fait moins rentables. Ainsi, le réinvestissement à court terme, aussi bien qu'à long terme, se voit affecté par une baisse des taux.

Finalement, une brusque variation des taux, quelqu'en soit le sens, peut contraindre l'assurance à diminuer le rendement offert aux assurés ou à puiser dans ses fonds propres pour compenser la perte de rentabilité à laquelle elle doit faire face dans des délais courts. En revanche, si les taux varient lentement, l'assureur peut s'adapter en modifiant ses produits.

Le risque de liquidité

Ce risque est dû au degré de difficulté à échanger certains actifs sur le marché et aux délais dans le processus de vente. Il menace la capacité de l'assureur à liquider ses actifs pour faire face à ses obligations financières (i.e. aux flux sortants du passif). Ainsi, il s'agit du risque d'un mauvais ajustement entre les maturités respectives des créances et des dettes.

Pour cerner ce risque, on peut comparer la duration (c'est à dire la durée moyenne des flux actualisés générés par un bien) des biens constituant l'actif à la duration du passif, la situation défavorable à la compagnie d'assurance étant une duration du passif supérieure à celle de l'actif.

Le risque de contrepartie

C'est le risque que les débiteurs n'honorent pas leurs engagements. Ce risque justifie l'existence de primes de risque qui diminuent avec la fiabilité de l'emprunteur. La compagnie d'assurance est soumise à ce risque car elle détient des titres de toutes sortes, émis par des emprunteurs plus ou moins fiables.

1.2 Les risques au passif

Certains risques au passif sont engendrés par les options cachées des polices d'assurance, telles que les options de rachat, de versements libres ou encore les options de prolongation, que sous-tend chaque contrat mais qui ne sont pas enregistrées comptablement dans le bilan. Ces risques, inhérents à l'activités d'assurance et modifiant sensiblement les engagements de la compagnie, sont difficiles à gérer et à évaluer.

Par ailleurs, il existe des risques techniques, liés au passif. Ce sont les risques associés aux bases techniques et actuarielles de calcul des primes et des provisions techniques. Par exemple, le risque de provisions consiste en l'éventualité d'un calcul erroné des provisions. Sous-estimer les provisions techniques pourrait mener l'assureur à effectuer une mauvaise tarification ou encore, à accepter des polices risquées qui nécessitent un capital qu'il pense avoir mais qu'il n'a pas. Bien que ces risques dépendent en partie de facteurs externes tels que des facteurs démographiques (hausse de mortalité par exemple) ou macroéconomiques (la courbe des taux influence le volume de rachat par exemple), l'assureur peut se prémunir de ces risques en intervenant dans le domaine de la tarification et du provisionnement. De plus, la réassurance reste un moyen de prévision essentiel de ces risques.

1.3 Les autres risques

Il s'agit des risques non techniques, que l'on ne peut classer dans les deux catégories précédentes. Il s'agit notamment des risques opérationnels (erreur humaine, procédure de gestion inadéquate, fraude des dirigeants etc.) et les risques légaux et fiscaux. Ces risques sont difficilement modélisables.

2 Règlementation relative à la marge de solvabilité

La marge de solvabilité est l'un des principaux éléments de la surveillance des sociétés d'assurance. **Elle permet de s'assurer de la solidité financière des entreprises et par conséquent de leur aptitude à supporter une dégradation de leurs engagements techniques.** La marge de solvabilité doit être respectée de manière permanente. Cela requiert une surveillance interne permettant de vérifier que la marge est bien respectée et de prendre sans délai les mesures qui s'imposent pour ne pas se trouver, à la suite d'un mauvais résultat par exemple, en situation d'insuffisance de marge.

2.1 Approche européenne : le Ratio fixe ou formule "européenne"

L'approche dite par "ratio fixe" impose que les capitaux propres de la compagnie soient supérieurs à une certaine fraction d'un élément du bilan considéré comme une bonne approximation de l'exposition au risque (par exemple le montant total des provisions en assurance vie, ou le montant total des primes en assurance non-vie).

Plus précisément, la marge de solvabilité minimale est exprimée en fraction d'une certaine mesure de l'exposition au risque: les primes et les charges des sinistres en assurance non-vie, les provisions mathématiques et les capitaux sous risque en assurance-vie. Cette

fraction peut également être interprétée comme un niveau d'endettement maximum limitant le ratio " fonds propres sur dettes probables ".

En assurance vie, la marge de solvabilité [1] doit être supérieure à 1% (contrats en unités de compte dans lesquels l'entreprise d'assurance n'assume pas le risque de placement) ou 4% (contrats classiques en euros) des provisions mathématiques, corrigé d'un taux de réassurance des capitaux sous risque, égal au maximum à 85%. On y ajoute 0.3% des capitaux sous risque (i.e. la différence entre le montant maximum des sommes dues au titre des contrats souscrits et des provisions mathématiques) s'ils sont positifs, corrigés là encore du taux de réassurance des capitaux sous risque, plafonné à 50%. Le coefficient de 0.3% est ramené à des valeurs inférieures pour les assurances temporaires en cas de décès. Si la marge de solvabilité disponible devient inférieure à la marge minimale requise, un plan d'assainissement financier doit être soumis aux autorités de supervision pour approbation.

$$MS = PMb \cdot \max(0,85; \frac{PMn}{PMb}) \cdot 0,04$$

où:

PMb: Provisions mathématiques brutes de réassurance.

PMn: Provisions mathématiques nettes de réassurance.

L'avantage de cette méthode est qu'elle est simple à appliquer et à comprendre. Cependant elle présente également quelques inconvénients, notamment le capital requis découlant de cette méthode peut être considéré comme arbitraire. Aussi, la nature différente des risques auxquels sont exposées les compagnies n'est pas explicitement prise en compte. En outre, ce type de méthode est très sensible à la variation de l'unique quantité choisie comme mesure d'exposition au risque.

Outre la marge de solvabilité, le rapport de la Commission européenne [8] étudie l'ensemble des risques encourus par les compagnies d'assurance et expose les modèles de risque retenus dans différents pays. Nous présentons à présent les principaux résultats de ce rapport.

2.2 Approche américaine : le Risk Based Capital

L'Union Européenne préfère un calcul simple de minimum réglementaire à une norme sophistiquée identifiant séparément les risques qu'encourt l'assureur. La norme de Risk Based Capital (RBC) peut apparaître plus complète. **L'activité de la compagnie d'assurance est découpée en six classes de risques; pour chaque classe i un montant de fonds propres minimal R_i est calculé.** (cf annexes page 32)

Cette technique est plus complète que la norme européenne puisqu'elle repose sur la nature de souscription, c'est à dire sur son degré de risque. Cependant, des critiques sont émises à l'égard du RBC, notamment:

- Il dépend trop des moyennes de l'industrie sans prendre en compte les spécificités de chaque compagnie.
- Cette technique est rétrospective et non prospective.
- Le risque de taux n'est pas pris en compte.
- La formule du RBC ne tient pas compte des risques de non-congruence entre les différentes monnaies ou de l'exposition supplémentaire apportée par des positions qui seraient prises sur les marchés dérivés.

Finalement, le calcul du RBC ne tient pas encore suffisamment compte de la complexité de l'activité d'assurance, ce qui pourrait entraîner une marge de solvabilité inadaptée et notamment trop élevée, pénalisant dès lors le client dans la mesure où l'actionnaire est en droit d'attendre une rentabilité supérieure.

Projet Comptable
des risques
de 2007

2.3 Approche par scénario

L'approche par scénario tente d'analyser l'impact des variables de risque sur l'exposition au risque de la compagnie. Le capital requis est calculé de façon déterministe en considérant le pire cas parmi un certain nombre de scénarii auxquels on applique le modèle financier des compagnies d'assurance. Le modèle financier est typiquement dynamique mais peut être statique et les scénarii consistent en la variation d'éléments futurs tels que les pertes occasionnées ou les primes encaissées. Cette approche est en pratique utilisée, conjointement aux recommandations de l'approche par "Ratio fixe" ou de l'approche RBC, par **le Canada, le Royaume-Uni et les États-Unis**.

L'avantage de cette approche est qu'elle permet une interprétation des résultats et une définition de la notion de capital requis beaucoup plus intuitive que les précédentes méthodes. De plus, elle fournit un outil satisfaisant du point de vue du risk management. L'inconvénient majeur est que la définition du capital dépend fortement du scénario considéré. En outre, la sophistication du modèle le rend complexe et impose la connaissance d'un certain nombre de données.

2.4 Approche probabiliste

L'approche probabiliste a pour but de couvrir un grand nombre de types de risques modélisés par leur fonction de répartition. Les sorties ne consistent pas seulement en la détermination du résultat associé à un scénario, mais fournissent également la distribution de tous les résultats possibles.

L'avantage de cette approche est qu'elle offre une plus grande flexibilité dans le sens où elle permet de combiner plusieurs risques distincts. Par contre, cette approche est difficile à appréhender et la complexité des données requises sous-entend une mise en place onéreuse.

2.5 Le comité de Bâle sur le contrôle bancaire

La marge de solvabilité est également une problématique bancaire qui fait l'objet d'une réglementation spécifique. Le comité de Bâle sur le contrôle bancaire, institué en 1975 par les gouverneurs des banques centrales des pays du Groupe des Dix, rassemble les autorités de contrôle des banques.

Le premier accord de Bâle dit "Bâle I" date de juillet 1988. Cet accord s'applique aux banques et maisons de titres exerçant une activité au sein de l'Union Européenne et a été adopté par plus de 100 pays. Malgré sa large application, Bâle I présente quelques faiblesses, notamment concernant :

- Les degrés de pondération du risque de crédit ne sont pas assez calibrés pour déterminer et différencier adéquatement les emprunteurs.
- Les capacités d'arbitrage des exigences de capital réglementaires ne sont pas considérées (titrisation, engagements à moins d'un an).

De plus, certains problèmes ne sont pas pris en compte, comme :

- Le traitement particulier des techniques de réduction des risques (dérivés de crédit, collatéralisation, accords de compensation).
- La mesure de risque de taux sur le portefeuille bancaire
- Les risques opérationnels

L'accord de "Bâle II" constitue le nouvel accord sur la structure des règles d'adéquation des fonds propres dont le but est "d'aligner les exigences réglementaires en matière de niveau

de fonds propres avec les risques sous-jacents, et de fournir aux banques et leurs autorités de supervision plusieurs alternatives pour l'évaluation de l'adéquation des fonds propres" (William J. McDonough Président du Comité de Bâle). Cet accord devrait être mis en place au plus tard en 2005.

Plus précisément, cet accord vise à :

- Affiner la mesure du risque de crédit en fonction du profil de risque de l'établissement et à promouvoir les systèmes de notations internes.
- Encourager le développement d'outils de mesure et de gestion des risques afin d'améliorer les options d'allocation du capital et de produire des exigences de capital plus fines.
- Introduire une réflexion quant à une approche plus complète et plus articulée en matière de la gestion des risques (incluant le risque opérationnel, les expositions du hors-bilan ...)
- Adresser l'information asymétrique entre les autorités de supervision et les banques en mettant l'accent sur les modèles internes des banques quand ils sont jugés robustes.
- Améliorer l'égalité concurrentielle en créant un marché cohérent et accessible à tous en matière de règles bancaires internationales, et de transparence des risques au niveau des banques.

Finalement, la réforme du comité de Bâle porte sur trois piliers :

Pilier 1 : Exigence minimale de fonds propres

Pilier 2 : Processus de surveillance prudentielle

Pilier 3 : Discipline de marché.

Deuxième partie

Modélisation des outils de base

1 Modélisation de la courbe des taux

1.1 Introduction

Modéliser la courbe des taux nous est nécessaire pour l'actualisation des flux. C'est le premier outil de base dont nous avons besoin, avant même d'envisager un calcul de la solvabilité. Nous commencerons donc par exposer les modèles de courbe des taux.

Depuis plus de 25 ans, la modélisation de l'évolution de la courbe des taux est l'objet d'une multitude d'articles dans la littérature financière.

Modèles à un facteur

Les premiers modèles envisagés sont **des modèles à un facteur**, qui considèrent la courbe des taux dans sa totalité comme une fonction d'une seule variable d'état markovienne: le taux court. Ce sont alors les variations du taux court, que l'on assimile en pratique au taux de rendement d'une obligation courte sans défaut, qui influencent les prix d'obligation de différentes maturités. Depuis le processus théorique proposé par Merton en 1973, des études empiriques ont permis d'apprécier plus justement la courbe des taux. On trouve en premier lieu parmi les modèles uni-factoriels **le modèle de Vasicek** (1977) [11], qui postule que la dynamique du taux court est celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce modèle est assez satisfaisant pour l'évolution à court terme du taux instantané. Cependant, la fonctionnelle des taux zéro-coupon de Vasicek ne permet pas d'exhiber les courbes inversées sur le court terme. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck peut prendre des valeurs négatives, ce qui parasite

la modélisation de taux nominaux. En outre, la volatilité des taux dépend uniquement des maturités. Ces défauts sont corrigés dans le **modèle de Cox, Ingersoll et Ross (1985)**, qui incorpore la caractéristique de volatilité stochastique (elle est proportionnelle à la racine carré du niveau des taux courts) et l'impossibilité pour les taux nominaux de devenir négatifs.

Néanmoins, ces modèles présentent plusieurs inconvénients et imperfections. Il ne permettent pas de rendre compte de toute la panoplie de courbes de taux et de leurs déformations telles qu'elles existent sur le marché. Par exemple, la fonctionnelle des taux zéro-coupon de ces modèles ne permet pas d'exhiber les courbes à un creux et une bosse. De plus, ces modèles se valent mal sur les prix des marchés. Notons enfin un défaut découlant des hypothèses mêmes: les variations de tous les taux zéro-coupon sont parfaitement corrélées, ce qui ne se vérifie pas sur le marché. Finalement, si l'objectif d'une société est de couvrir des produits de taux court, un modèle à un facteur peut suffire. Par contre, si l'objectif d'une société est de couvrir toute la palette de courbe de taux, **les modèles multi-factoriels** sont plus appropriés. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux modèles à deux facteurs.

Modèles à deux facteurs

Des modèles à deux facteurs ont été développés par **Fong et Vasicek (1991)**, **Longstaff et Schwartz (1992)**. Ils font apparaître deux variables d'état:

1. $r(t)$ le taux court, qui s'apparente au facteur de niveau;
2. $\nu(t)$ la variance du taux court, qui est le facteur classique de la courbure.

Cependant, si les modèles multi-factoriels permettent de reproduire plus fidèlement les corrélations observées entre les variations des taux et les prix de marché au comptant des obligations, leur mise en oeuvre s'avère parfois complexe: absence de solution analytique pour les prix des zéro-coupon, nécessité d'utiliser des méthodes numériques.

1.2 Modèle de Vasicek

Rappel du modèle

Après une première tentative échouée de modélisation du taux zéro-coupon par la méthode à deux facteurs Vasicek-CIR (conférer annexes page 33), nous sommes revenues à un modèle plus simple, quitte à le complexifier par la suite. Nous avons en effet repris le modèle de Vasicek pour déterminer la courbe des taux. Le taux "spot", qui est dans ce modèle la seule variable d'état expliquant la déformation de la structure des taux d'intérêt, **suit une diffusion de type Ornstein-Uhlenbeck**:

$$dr_t = k \cdot (\mu - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dZ_t$$

avec:

- k : intensité de la force de rappel sur la tendance,
- μ : tendance autour de laquelle oscille le taux spot,
- σ : volatilité instantanée supposée constante et
- Z_t : mouvement brownien standard.

La solution est donnée par:

$$r_t = r_0 e^{-kt} + \mu(1 - e^{-kt}) - \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dZ_s$$

c'est donc un processus brownien et la variable $\left(\int_t^T r_s ds \right)_t$ est gaussienne, de moyenne

$$m(t, T) = \mu(T - t) + (r_t - \mu) \frac{1 - e^{-k(T-t)}}{k(T - t)}$$

et de variance

$$\sigma^2(t,T) = \frac{\sigma^2}{2k^3} \left(1 - e^{-k(T-t)}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{k^3} (T-t) \left(1 - e^{-k(T-t)}\right)$$

On montre ensuite que le prix d'un zéro-coupon d'échéance T et déterminé en t est:

$$B(t,T) = e^{-m(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)}$$

On utilise enfin la relation entre le taux zéro-coupon $R(0,T)$ et le prix zéro-coupon $B(0,T) = e^{-TR(0,T)}$ pour obtenir:

$$R(0,T) = R_\infty - S \underbrace{\frac{1 - e^{-kT}}{kT}}_{G_1(T)} + \gamma \underbrace{\frac{(1 - e^{-kT})^2}{4kT}}_{G_2(T)}$$

avec:

k est un paramètre d'échelle,

$R_\infty = \mu - \frac{\sigma^2}{2k}$ correspond au taux long supposé constant,

S est le spread entre le taux long et le taux court et

$\gamma = \frac{\sigma^2}{k^2}$ correspond à une courbure.

Calage du modèle

Pour estimer le modèle de Vasicek plusieurs méthodes sont possibles. Les plus courantes consistent à estimer la dynamique du taux court qui est l'unique facteur du modèle (par exemple par des méthodes de moindres carrés généralisés). D'autres utilisent des historiques assez longs (20 ans) de taux courts à 1, 3 ou 9 mois (avec le maximum de vraisemblance...). Cependant, ces méthodes aboutissent à des valeurs des paramètres correctes pour modéliser la partie courte de la courbe des taux. Or notre objectif est de donner un prix à des obligations de maturité 10 ans. Par ailleurs, nous ne disposons pas d'historiques assez longs et sur les périodes assez récentes qui nous permettraient de mettre en oeuvre ces méthodes.

Nous nous proposons donc plutôt de caler les paramètres du modèle en approchant au mieux le prix des OAT actuelles par notre modèle de taux comme le propose l'étude de Dutey & Leflaive (mai 2000) [19]. C'est une méthode à la fois pragmatique, qui modélise correctement la partie longue de la courbe des taux, et qui nécessite peu de données : le prix actuel d'un panier d'OAT françaises. L'idée de la méthode est de minimiser l'écart quadratique entre les prix théoriques de l'actif calculé par le modèle de taux et les prix de marché. Le programme d'optimisation s'écrit :

$$\min_{R_\infty, S, \gamma, a} \sum_i (P_i - \hat{P}_i)^2$$

où P_i est le prix coté de l'obligation i et \hat{P}_i est le prix donné par le modèle :

$$\sum_{t=1}^{N_i} C_i \cdot e^{-t(R_\infty - SG_1(t) + \gamma G_2(t))} + 1 \cdot e^{-N_i(R_\infty - SG_1(N_i) + \gamma G_2(N_i))}$$

avec

N_i la maturité de l'obligation i et

C_i le taux de coupon de l'obligation i (en pourcentage).

Les obligations retenues sont celles dont l'échéance est fixée au 25 avril. En effet, il s'agit d'une date d'échéance assez courante pour les obligations d'état OAT. De plus cela correspond à la date d'échéance la plus proche. Les prix cotés sont observés juste après le 25 avril 2003. Ainsi les dates à échéance des prochains coupons sont entières : on ne prend pas en compte le coupon couru et surtout, les calculs sont plus simples.

Les valeurs relevées au 25 avril sont les suivantes:

| OAT | Cotation P_i | Coupon C_i | Maturité N_i au 25 avril 2003 |
|-----|----------------|--------------|------------------------------------|
| 1 | 101,30% | 7,75% | 2 |
| 2 | 104,50% | 6,50% | 3 |
| 3 | 112,85% | 5,50% | 7 |
| 4 | 102,10% | 5,00% | 8 |
| 5 | 107,85% | 4,75% | 8 |
| 6 | 100,70% | 4,00% | 10 |

La minimisation est réalisée à l'aide de l'outil Solver d'Excel. Si l'on conduit l'optimisation sur l'ensemble des paramètres, les paramètres obtenus conduisent à une courbe des taux très réaliste pour la date d'aujourd'hui, mais pratiquement déterministe : σ est très faible. L'objectif reste cependant de simuler une courbe des taux chaque année dans le futur grâce à la dynamique suivie par l'unique facteur qui est le taux spot. Dès lors pour obtenir un modèle qui permet à la fois d'être cohérent avec la courbe actuelle des taux longs mais qui garde une dynamique acceptable pour le facteur, nous avons décidé de fixer le paramètre σ à la valeur que lui donnent plusieurs études : 7 ou 8% .

Le même processus de calage du modèle avec σ fixé à 8% aboutit à des valeurs plus acceptables des paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{R}_\infty = 0,04215 \\ \hat{S} = 0,03500 \\ \hat{k} = 0,91950 \\ \hat{\gamma} = 0,00853 \end{array} \right. \quad \text{Soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{k} = 0,91950 \\ \hat{\mu} = 4,64\% \\ \sigma = 8\% \end{array} \right.$$

avec:

$$\sum_{i=1}^6 (P_i - \hat{P}_i)^2 = 0,02301$$

Nous avons ainsi estimé les paramètres d'un modèle très simple de courbe des taux, dont les désavantages ont été mis en exergue en introduction. Nous avons gardé - pour un premier temps du moins - cette modélisation par simple faute de temps. Cependant, nous envisageons d'approfondir notre étude et de nous intéresser au modèle à deux facteurs de Vasicek- Fong (1991). Ce modèle met en avant, outre le taux court, sa volatilité qui suit un processus de type CIR :

$$\begin{aligned} dr_t &= k_1(\mu_1 - r_t)dt + \sqrt{\nu_t}dZ_{1,t} \\ d\nu_t &= k_2(\mu_2 - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dZ_{2,t} \end{aligned}$$

D'après l'étude menée par D.B Nelson et D.P Foster (Asymptotic filtering theory for univariate ARCH models), il est possible d'estimer les paramètres de ce modèle en se ramenant à un processus AR-GARCH (à condition de vérifier la stationnarité de la série).

2 Modélisation de l'inflation

Le deuxième outil de base dont nous aurons besoin pour le calcul de la marge actif-passif est l'évolution de l'inflation. En effet, les flux seront indexés à l'inflation par souci de réalisme. Parmi les modélisations de l'inflation, nous nous sommes plus particulièrement concentrées sur le travail effectué par Wilkie en 1995 [12].

2.1 Modélisation de l'indice à la consommation

Le modèle de Wilkie

Le modèle de Wilkie : modélisation de l'inflation par un processus AR(1)

Le modèle de Wilkie est un modèle stochastique qui détermine le comportement aléatoire de séries au cours du temps: comprenant les prix, les hausses inflationnistes des salaires, les taux courts, les taux long, les rendements des actions et des dividendes et les taux de change.

Sous l'hypothèse d'une modélisation de l'inflation et des taux d'intérêt par une marche aléatoire, on obtient des résultats peu réalistes dans la mesure où les niveaux des taux d'intérêt et d'inflation sont très élevés ou très bas à long terme. Or historiquement, on voit que les taux d'inflation et d'intérêt présentent des comportements autorégressifs avec des niveaux moyens (de l'ordre de 7% pour le long terme et de 4% pour les taux d'inflation) autour desquels les niveaux fluctuent.

Wilkie intègre un modèle autorégressif. Par conséquent, si l'inflation présente un pic (par exemple 30%) on constatera probablement dans le futur un retour à la moyenne, c'est à dire une diminution de l'inflation. Tandis qu'avec le modèle de marche aléatoire, les taux peuvent augmenter alors qu'ils ont déjà un niveau élevé.

De ce fait, le modèle de Wilkie est devenu un modèle très largement utilisé en actuariat. De plus, il présente l'avantage d'avoir un champ d'application relativement vaste, notamment en ALM pour aider à évaluer les risques financiers de fonds de pension et des compagnies d'assurance.

Plus précisément, Wilkie propose un modèle stochastique en cascade. Le modèle repose sur l'indice des prix à la consommation dont découleront le rendement des actions, le taux de dividende et le taux d'intérêt obligataire, en se fondant sur des observations antérieures.

Nous définissons la variable autour de laquelle s'articule le modèle de Wilkie, à savoir l'indice des prix à la consommation de l'année t , $Q(t)$.

La modélisation est la suivante:

$$\Delta \ln Q(t) = \mu + \alpha(\Delta \ln Q(t-1) - \mu) + \sigma z(t)$$

avec

- $\Delta \ln Q(t) = \ln Q(t) - \ln Q(t-1)$
- μ modélise le retour à la moyenne
- $(z(t))_t$ suit une loi normale centrée réduite.

On note $X(t)$ l'inflation donnée par:

$$X(t) = \ln \left(\frac{Q(t)}{Q(t-1)} \right)$$

Ainsi, $X(t)$ est assimilé à un processus autorégressif d'ordre 1 déterminé par:

$$(1 - \alpha L)(X(t) - \mu) = \sigma z(t)$$

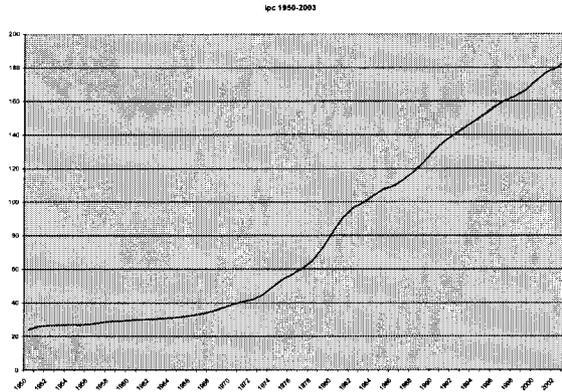
avec L opérateur retard.

En 1995, Wilkie [12] trouvait, pour des données IPC annuelles sur une période de 15 ans, les valeurs suivantes: $\alpha = 0.6$; $\mu = 0.05$ (En fait n'importe quelle valeur entre 0.04 et 0.1 peut convenir) et $\sigma = 0.05$.

Estimation des paramètres du modèle

(Se référer à l'annexe page 35.)

1) Nous nous proposons de recalculer ces valeurs à l'aide de données fournies par l'INSEE regroupant **les indices des prix à la consommation annuels sur une période de 1950 à 2003**.



Nous vérifions tout d'abord la stationnarité de la série : l'allure de la courbe de $(X_t)_{t=1950\dots 2003}$ et le test de Dickey-Fuller Augmenté confirment la stationnarité de la série¹.

Sous l'hypothèse d'homoscédasticité des résidus, nous obtenons (*Les nombres entre parenthèses désignent la p-value du test de Student*):

$$(1 - \underbrace{0,7436 L}_{(3,64)})(X_t - \underbrace{0,0557}_{(-7,82)}) = 0,0295.z_t$$

| Paramètres annuels | Valeurs estimées |
|--------------------|------------------|
| α_1 | 0,7436 |
| μ_1 | 0,0557 |
| σ_1 | 0,0295 |

Nous constatons que ces valeurs sont du même ordre que celles trouvées par Wilkie. Cependant, il serait difficile de retenir des paramètres estimés sur un historique aussi long : le comportement de l'inflation des années 60 est radicalement différent de celui d'aujourd'hui.

2) Nous avons donc effectué d'autres estimations à partir **des données mensuelles de l'IPC français de janvier 1990 à avril 2003**.

Sous l'hypothèse simplificatrice (que nous remettons en cause par la suite) de résidus homoscédastiques et non-corrélés, le modèle AR(1) s'écrit :

$$(1 - \underbrace{0,2631 L}_{(3,40)})(X_t - \underbrace{0,0023}_{(13,27)}) = 0,0016.z_t$$

où t désigne le mois. Les paramètres d'un modèle annuel se déduisent du modèle mensuel :

1. **Test de racine unité**: Les tests de Dickey Fuller (1979 et 1981) sont les tests de racines unité les plus fréquemment utilisés en raison de la simplicité de leur application. Ils consistent à confronter l'hypothèse nulle de non-stationnarité contre l'hypothèse alternative de stationnarité. Selon la nature de la stationnarité (présence d'une tendance, d'une constante), l'hypothèse H_0 change de formulation. Par exemple, dans le cas d'une série sans tendance ni constante, le modèle testé est $x_t = \rho.x_{t-1} + \varepsilon_t$ H_0 est $\rho = 1$ (marche aléatoire sans dérive) contre l'hypothèse alternative $\rho < 1$ (processus stationnaire). La statistique de ce test est la statistique de Student usuelle avec des valeurs critiques calculées par Dickey Fuller.

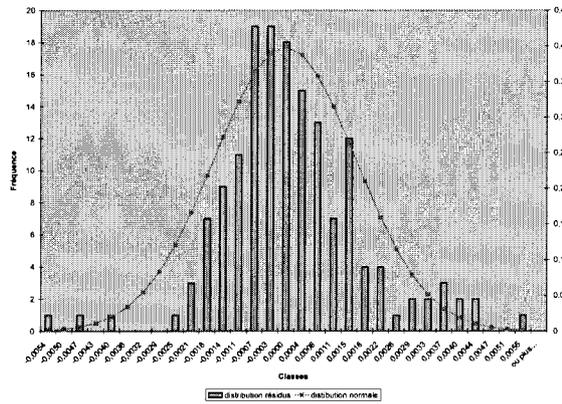
Afin de palier à une éventuelle autocorrélation des résidus, on utilisera plutôt le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF). Par exemple, dans le cas d'un modèle sans constante ni tendance, il consiste à tester l'hypothèse $\phi = 1$ du modèle: $\Delta X_t = \phi.X_{t-1} + \sum_{i=1}^p \varphi_i \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t$

| Paramètres annuels | Valeurs estimées |
|--------------------------------------|------------------|
| $\alpha_2 = \alpha_{mois}$ | 0,2631 |
| $\mu_2 = 12 \mu_{mois}$ | 0,0279 |
| $\sigma_2 = \sqrt{12} \sigma_{mois}$ | 0,0056 |

Nous remarquons que l'inflation moyenne de la dernière décennie est plus faible (réduite de moitié) que l'inflation moyenne de la deuxième moitié de 20ème siècle ; il en est de même pour la volatilité. C'est le second modèle que nous retenons pour les simulations, il s'écrit :

$$(1 - 0,2631L)(X_t - 0,0279) = 0,0056.z_t$$

Nous avons représenté la distribution des résidus théorique en comparaison avec la distribution d'une loi normale $N(0,1)$. Nous pouvons valider l'hypothèse de normalité des résidus.



2.2 Complexification du modèle de Wilkie par un processus AR(1)-GARCH(1,1)

Généralités : les modèles GARCH

Les modèles ARCH (autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques) ont été introduits par Engle en 1982 et leur extension GARCH (ARCH généralisés) est due à Bollerslev en 1986. Leur caractérisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle. Dans ces modèles, celle-ci s'écrit comme une fonction affine des valeurs passées du carré de la série. Cette spécification particulière se révèle très riche car elle permet une étude complète des propriétés des solutions tout en étant assez générale.

Pour tout processus (ϵ_t) , nous notons $\underline{\epsilon}_{t-1} =: \sigma(\epsilon_s; -\infty < s < t)$ la tribu engendrée par le passé de (ϵ_t) . Nous donnons une définition d'un processus GARCH fondée sur les deux premiers moments de (ϵ_t) conditionnels à son passé.

On dit que (ϵ_t) est un processus $GARCH(p,q)$ si ses deux premiers moments conditionnels existent et vérifient:

- $E(\epsilon_t / \underline{\epsilon}_{t-1}) = 0, t \in Z$
- Il existe des constantes $w, \alpha_i, i=1, \dots, q$ et $\beta_j, j=1, \dots, p$ telles que

$$\sigma_t^2 = V(\epsilon_t / \underline{\epsilon}_{t-1}) = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, t \in Z$$

L'innovation du processus ϵ_t^2 est par définition la variable $\nu_t = \epsilon_t^2 - \sigma_t^2$. En remplaçant dans l'équation précédente les variables σ_{t-j}^2 par $\epsilon_{t-j}^2 - \nu_{t-j}^2$ on obtient la représentation:

$$\epsilon_t^2 = w + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) \epsilon_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_{t-j}, t \in Z$$

où $r = \max(p, q)$, avec la convention $\alpha_i = 0$ (resp. $\beta_j = 0$) si $i > q$ (resp. $j > p$). On retrouve ainsi dans cette équation la structure linéaire des modèles ARMA, permettant par exemple un calcul très simple de prévisions linéaires.

De plus, par rapport aux modèles usuels de séries temporelles (ARMA), la structure des trajectoires d'un GARCH permet au bruit ε_t d'avoir un ordre de grandeur fonction des variables passées. Ainsi, vont se succéder des périodes à forte volatilité (grandes valeurs en module des ε_{t-i} et donc de σ_t^2) et d'autres où les fluctuations sont de plus faible amplitude.

Estimation des paramètres

Les p-values des tests Q et LM de SAS sont toutes inférieures à 5%, ce qui nous indique une hétéroscédasticité des résidus. Le test de Durbin-Watson appuie ce résultat : la valeur du test est égale à 1,5, soit une valeur proche de 2. **Un modèle AR-ARCH, voire même un modèle AR-GARCH, est donc plus adapté à l'évolution de l'inflation qu'un simple modèle AR que nous avons estimé en première approximation.** Le modèle s'écrit alors :

$$(1 - \underbrace{0,2416 L}_{(-2,58)})(X_t - \underbrace{0,0023}_{(14,15)}) = \sigma_t \cdot z_t$$

$$z_t^2 = \underbrace{0,1289}_{(2,20)} z_{t-1}^2 + \underbrace{0,8018}_{(8,85)} \sigma_{t-1}^2$$

Troisième partie

Un modèle d'évaluation de solvabilité

1 Modélisation des actifs

1.1 Présentation des actifs considérés

Selon le Code des Assurances [2], "les engagements réglementés doivent à toute époque être représentés par des actifs équivalents" (art. R 332-1). Il s'agit du principe de représentation, qui a pour but de permettre aux sociétés d'assurance le respect de ses engagements et de leur assurer l'équilibre financier.

Les "engagements réglementés" sont certains éléments du passif, en particulier les provisions techniques.

Les "actifs équivalents" encore appelés "actifs admis à titre de couverture" sont constitués :

- des actifs réglementés (art. R 332-2) : ensemble des valeurs mobilières et titres assimilés, actifs immobiliers, prêts et dépôts;
- d'autres créances de l'actif (art. R 332-3/10 et art. R 332-35), telles que les créances garanties sur les réassureurs.

Le Code des Assurances classe les actifs réglementés en deux catégories :

- les titres obligataires (art. R 332-19) : ensemble des obligations en direct;
- les autres titres (art. R 332-20) appelés "titres non obligataires" ou encore, par abus de langage "actions" constitués par les actions, les parts d'OPCVM (obligataires, monétaires ou de type actions), les liquidités, l'immobilier et autres titres assimilés.

Nous reprenons cette distinction pour la détermination de la composition du portefeuille étudié.

1.2 Modélisation du prix de l'obligation synthétique

Le prix de l'obligation se déduit directement de la courbe des taux zéro-coupon. Ainsi pour une obligation de nominal N , arrivant à maturité en T et de taux facial y , le prix actuariel en t est :

$$O_t = N \cdot \left(y \cdot \sum_{t+1}^T B(t,i) + B(t,T) \right)$$

Remarque: le prix est généralement exprimé en pourcentage du nominal. C'est pourquoi nous avons choisi de considérer des obligations synthétiques de nominal arbitrairement fixé à 100.

On peut calculer la duration résiduelle en t de cette obligation à l'aide de la formule suivante :

$$Dur_t = \frac{y \cdot \sum_{t+1}^T (i-t) B(t,i) + (T-t) B(t,T)}{y \cdot \sum_{t+1}^T B(t,i) + B(t,T)}$$

Pour une obligation émise au pair, on a par hypothèse $O_t = N$. Compte-tenu de la courbe des taux à la date actuelle et pour une maturité donnée, on en déduit donc le taux auquel une obligation doit être émise pour être au pair :

$$y = \frac{1 - B(t,T)}{\sum_{t+1}^T B(t,i)}$$

1.3 Modélisation du prix de l'OATi

Le lancement des OATi (obligations indexées sur l'inflation) s'inscrit dans un contexte de besoin de protection contre l'inflation et de tendances démographiques défavorables en Europe continentale favorisant un déplacement de l'épargne vers des produits à long terme. Avant le lancement des OATi, peu d'actifs offraient à la fois une protection efficace contre l'inflation (immobilier, actions,..) et une garantie sur le capital. Ceci explique leur succès de plus en plus important auprès des investisseurs. Aujourd'hui, les OATi représentent 20% du montant total d'OAT distribué. Il s'agit d'une structure simple, d'obligation couponnée à principal indexé sur les prix.

Cette classe d'actifs est intéressante, non seulement en ce qui concerne ses caractéristiques intrinsèques (moindre sensibilité, protection à la hausse de l'inflation), mais également dans le cadre d'une allocation d'actifs au sein d'un portefeuille composé d'actions et d'obligations indexées et obligations classiques permet d'atteindre des portefeuilles de meilleur profil rendement/risque.

Caractéristiques générales

L'OAT indexée sur l'inflation est une obligation à taux réel fixe dont le principal est à la fois garanti au pair et protégé contre l'inflation, grâce à une indexation sur une référence quotidienne d'inflation calculée en fonction de l'indice INSEE des prix à la consommation.

Cela signifie que le principal de l'OAT indexée est ajusté sur un indice d'inflation pour tenir compte de l'évolution des prix. Cet ajustement peut être calculé chaque jour en fonction d'une référence quotidienne d'inflation, mais il n'est payé par le Trésor qu'à l'occasion du remboursement de l'obligation, selon la formule suivante :

$$R = \frac{Rf_T}{Rfb_{t_0}} * N$$

où

– R est le remboursement

- Rf est la référence
- Rfb est la référence de base
- T est la date de maturité
- t_0 est la date de jouissance initiale
- N est le nominal.

On appelle référence de base, la référence quotidienne d'inflation à partir de laquelle est calculée l'évolution de l'indice des prix. Il existe donc une référence de base pour chaque souche d'OATi qui correspond à la référence quotidienne d'inflation de la date de jouissance initiale de chaque émission. Ainsi, la référence de base de l'OATi 25 juillet 2009 est la référence quotidienne d'inflation du 25 juillet 1998 et la référence de base de l'OATi 25 juillet 2029 est la référence quotidienne d'inflation du 25 juillet 1999.

L'OAT indexée bénéficie également d'une garantie de remboursement au pair: la formule ci-dessus ne s'applique en effet que si la référence quotidienne d'inflation à maturité est supérieure à la référence de base. Dans le cas contraire (en cas de déflation), le remboursement est égal au nominal initial: l'obligation est alors remboursée au pair.

Le coupon annuel est un taux fixe sur le principal indexé: l'OAT indexée verse un coupon annuel calculé comme un pourcentage fixe du principal indexé. Ce pourcentage fixe, appelé également coupon réel, est déterminé lors de l'émission et reste fixé pour la durée de vie du titre. Le coupon reçu par le porteur dépend donc de ce coupon réel, ainsi que du rapport entre la référence quotidienne d'inflation à la date de paiement du coupon et la référence quotidienne d'inflation à la date de jouissance initiale du titre, selon la formule suivante:

$$Coupon_{payé} = Coupon_{réel} * \frac{Rfi_{t_1}}{Rfb_{t_0}} * N$$

où

- Rfi est la référence quotidienne d'inflation
- Rfb est la référence de base
- t_0 est la date de jouissance initiale
- t_1 est la date de paiement
- N est le nominal

Le rapport entre ces deux références quotidiennes d'inflation est défini comme le coefficient d'indexation (CI). On voit que ce coefficient s'applique de la même manière au coupon et au principal, les protégeant ainsi tous les deux contre l'inflation.

$$CI = \frac{Rfi_{t_1}}{Rfb_{t_0}}$$

où

- CI est le coefficient d'indexation
- Rfb est la référence de base
- t_0 est la date de jouissance initiale
- t_1 est la date de paiement

Enfin, on note que les OATi, comme l'ensemble des titres de la dette publique, sont dénommées en titres de 1 euro. De plus, les OAT indexées sur l'inflation seront éligibles au démembrement le moment venu, en fonction de la demande sur ces produits.

Méthode de calcul

Les OATi paient annuellement un taux fixe, le taux de coupon, auquel s'applique le coefficient d'indexation. Le calcul du coupon unitaire en euros ne peut être déterminé qu'une fois le coefficient d'indexation applicable à la date de paiement du coupon publié. Dans la pratique, les OATi payant un coupon le 25 juillet, l'indice quotidien d'indexation permettant le calcul du coefficient d'indexation applicable au coupon plein est connu un mois avant la date de paiement du coupon. Le coupon plein unitaire à payer (CF_d) à une date d'échéance d , est déterminé de la manière suivante:

$$CF_d = C * NOM * Ci_d$$

où

- C est le taux facial exprimé en pourcentage,
- NOM est la valeur nominale du titre égale à 1 euro,
- Ci_d est le coefficient d'indexation de la date d , d'échéance du coupon.

Exemple

Un investisseur détient 10 000 titres d'OATi 3,00%, 25 juillet 2009.

Le coefficient d'indexation applicable au 25 juillet 1999 vaut 1.00425.

*Alors, le calcul du coupon plein unitaire payé donne $1 * 3\% * 1,00425 = 0,03013$*

*et le montant total de coupon payé est de $0,03013 * 10000 = EUR 301,30$.*

Dans le cadre de notre étude, nous considérons l'évolution du prix d'une OAT selon le modèle de Vasicek, puis nous indexons les coupons à l'inflation. Cette méthode présente l'inconvénient de considérer l'évolution des prix d'une part et la courbe de l'inflation d'autre part comme étant indépendantes. Ce n'est évidemment pas le cas dans la réalité et des générations de macroéconomistes s'efforcent d'associer ces deux phénomènes.

Toutefois, une modélisation tenant compte simultanément des prix des OATi et de l'inflation serait complexe, comme par exemple le modèle proposé par Brennan et Xia que nous présentons rapidement.

En effet, **Brennan et Xia [6] proposent une modélisation du prix d'une obligation indexée sur l'inflation** dans leur article Dynamic Assset Allocation under Inflation (2001) qui repose sur quatre mouvements browniens.

Le niveau des prix suit un processus de diffusion suivant:

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + \sigma_P dz_P = \Pi dt + \xi_s dz_s + \xi_r dz_r + \xi_\Pi dz_\Pi + \xi_u dz_u$$

Le taux d'intérêt réel et le taux d'inflation anticipé sont modélisés par des processus stochastiques d'Orstein-Uhlenbeck de la façon suivante :

$$dr = \kappa(\bar{r} - r)dt + \sigma_r dz_r$$

$$d\Pi = \alpha(\bar{\Pi} - \Pi)dt + \sigma_\Pi dz_\Pi$$

Le prix nominal de l'action suit un mouvement brownien géométrique:

$$\frac{dS}{S} = (R_f + \sigma_s \lambda_s)dt + \sigma_s dz_s$$

La dynamique du prix zéro-coupon en t d'une obligation indexée sur l'inflation de maturité T est donné par:

$$\frac{dP^*}{P^*} = [r + \Pi - B(t,T)\sigma_r \lambda_r]dt + \left(\frac{\xi_s}{\sigma_s}\right)\sigma_s dz_s + \left(\frac{\xi_r}{\sigma_r} - B(t,T)\right)\sigma_r dz_r + \left(\frac{\xi_\Pi}{\sigma_\Pi}\right)\sigma_\Pi dz_\Pi + \xi_u dz_u$$

avec une matrice de corrélation du vecteur $dz = (dz_s, dz_r, dz_\Pi)'$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{sr} & \rho_{s\Pi} \\ \rho_{sr} & 1 & \rho_{r\Pi} \\ \rho_{s\Pi} & \rho_{r\Pi} & 1 \end{pmatrix}$$

où

- P est le niveau des prix
- r est le taux d'intérêt réel
- Π est le taux d'inflation anticipé
- S est le prix nominal de l'action
- P^* est le prix nominal d'une obligation indexée de maturité T
- κ et α désignent la vitesse de retour à la moyenne respective du taux d'intérêt et de l'inflation
- \bar{r} et $\bar{\Pi}$ désignent la tendance respective du taux d'intérêt et de l'inflation anticipée
- σ désigne la volatilité
- R_f est le taux d'intérêt nominal
- ξ est le poids de l'innovation stochastique
- λ est la prime de risque
- dz est le vecteur des innovations relative au taux d'inflation anticipée, au taux d'intérêt réel et au prix de l'action. Il est à la base de la composante de l'innovation du taux d'inflation qui ne peut pas être couverte avec des actifs nominaux.
- dz_u est la composante de l'innovation du taux d'inflation qui est orthogonale à dz
- $B(t, T) = (\frac{1}{K})(1 - \exp(K(t - T)))$

L'inconvénient d'un tel modèle, outre sa grande complexité, réside dans la multitude des paramètres à estimer ce qui rend difficile sa mise en oeuvre pratique.

1.4 Modélisation du rendement du titre non-obligataire synthétique

Présentation du titre non-obligataire

Nous avons par ailleurs modélisé un titre synthétique obligataire constitué de type décrit dans l'article "R 332-20" (actions, parts d'OPCVM,...). **Nous ferons l'hypothèse que la répartition des différents actifs au sein de l'actif synthétique de type "R.332-20" est constante**, en ignorant délibérément les phénomènes de dérives de l'allocation liées aux performances hétérogènes des différentes composantes. Cela revient en fait à faire l'hypothèse simplificatrice d'une réallocation annuelle "invisible". Nous faisons également l'hypothèse que P_t prend en compte les éventuels dividendes, coupons réinvestis. Ainsi, ce ne sont pas des prix qui sont modélisés mais plutôt la valeur du portefeuille de titre synthétique.

Nous avons réparti les actifs synthétiques de type "R.332-20" détenus par la compagnie de la façon suivante :

- actions et parts d'OPCVM actions françaises, 50 % ;
- actions et parts d'OPCVM actions européennes, 30 % ;
- actions et parts d'OPCVM actions mondiales, 20 % .

Ainsi, dans le cadre de notre modèle, le titre synthétique non-obligataire est lui-même constitué de trois titres synthétiques représentant ces trois types d'actifs ce qui permet **une diversification du risque**. De plus, l'allocation étant statique une amélioration intéressante serait de la rendre dynamique.

Modèle de diffusion empilé

Nous modélisons le rendement de chaque titre i par un modèle de diffusion simple à paramètres constants, analogue à celui utilisé pour déterminer l'évolution du prix du sous-jacent dans le modèle de Black & Scholes:

$$\frac{dP_t^i}{P_t^i} = \mu^i dt + \sigma^i dZ_t^i$$

où $(Z_t^i)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien standard.

La forme intégrale de l'équation est:

$$P_t^i = P_0^i \cdot \exp \left\{ \left(\mu^i - \frac{(\sigma^i)^2}{2} \right) t + \sigma^i Z_t^i \right\}$$

Les évolutions des prix des titres sur le marché ne sont pas indépendantes. Il faut donc tenir compte des corrélations entre les différents placements. Nous utilisons alors un modèle empilé dans lequel les mouvements browniens sont corrélés :

$$\frac{dP_t^{France}}{P_t^{France}} = \mu^{France} dt + \sigma^{France} dZ_t^{France}$$

$$\frac{dP_t^{Europe}}{P_t^{Europe}} = \mu^{Europe} dt + \sigma^{Europe} dZ_t^{Europe}$$

$$\frac{dP_t^{Monde}}{P_t^{Monde}} = \mu^{Monde} dt + \sigma^{Monde} dZ_t^{Monde}$$

Estimation du modèle de diffusion

L'estimation des équations de diffusion est fondée sur divers indices **MSCI** (Morgan Stanley Capital International Inc). Ces indices constituent une mesure de l'évolution des valeurs sur les marchés d'actions, largement utilisée comme référence par les gestionnaires de portefeuilles internationaux. Ils sont construits sur un panier d'actions représentant 90 % du marché aux Etats-Unis², 90 % de marché sur le territoire asiatique et 60 % du marché européen³ et ayant une liquidité et un flottant suffisant. Il existe un grand nombre d'indices MSCI; dans le cadre des placements de la compagnie considérée, nous retenons les indices MSCI France, MSCI Europe et MSCI World. Les indices MSCI existent depuis décembre 1969 si bien que l'historique étudié s'étend sur 34 années. N'ayant pas de contrainte particulière sur le choix des éléments constituant l'actif synthétique non-obligataire, c'est précisément cette durée relativement longue (l'historique des indices et des actifs ne sont généralement pas disponibles sur des périodes de plus de 15 ans) et la nécessité d'estimer des paramètres sur des séries annuelles qui ont orienté notre choix sur ce type d'indices.

Nous discrétisons les équations de diffusion de la manière suivante :

à l'année t , $\ln \left(\frac{P_{t+1}^i}{P_t^i} \right) = r_t^i = \mu^i + \sigma^i \eta_t^i$ où r_t^i est un rendement, et où η_t^i suit une loi normale centrée réduite.

2. d'après une étude conduite par Pensions & Investments

3. d'après des études menées par Merrill Lynch / Gallup

Si

$$X_t = \begin{pmatrix} \ln \left(\frac{P_{t+1}^{MSCI Fr}}{P_t^{MSCI Fr}} \right) \\ \ln \left(\frac{P_{t+1}^{MSCI Eur}}{P_t^{MSCI Eur}} \right) \\ \ln \left(\frac{P_{t+1}^{MSCI World}}{P_t^{MSCI World}} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_t^{MSCI Fr} \\ r_t^{MSCI Eur} \\ r_t^{MSCI World} \end{pmatrix}$$

est le *vecteur des rendements*, alors X_t suit une loi normale d'espérance :

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{Fr} \\ \mu^{Eur} \\ \mu^{World} \end{pmatrix}$$

et de matrice de variance covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{Fr}^2 & \sigma_{Fr, Eur} & \sigma_{Fr, World} \\ \sigma_{Eur, Fr} & \sigma_{Eur}^2 & \sigma_{Eur, World} \\ \sigma_{World, Fr} & \sigma_{World, Eur} & \sigma_{World}^2 \end{pmatrix}$$

avec $t = 1 \dots T$, où T est le nombre d'observations.

Il s'agit d'un simple modèle gaussien : la méthode du **maximum de vraisemblance** conduit à des estimateurs simples. $\hat{\mu}$ est la moyenne empirique des rendements $(r_t^i)_{t=1..T}$ de chaque actif i . L'estimateur de la matrice de variance-covariance Σ est :

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{Fr}^2 & \hat{\sigma}_{Fr, Eur} & \hat{\sigma}_{Fr, World} \\ \hat{\sigma}_{Eur, Fr} & \hat{\sigma}_{MSCI Eur}^2 & \hat{\sigma}_{Eur, World} \\ \hat{\sigma}_{World, Fr} & \hat{\sigma}_{World, Eur} & \hat{\sigma}_{World}^2 \end{pmatrix}$$

où $\hat{\sigma}_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t^i - \hat{\mu}^i)(r_t^j - \hat{\mu}^j)$ en notant $\hat{\sigma}_{k,k} = \hat{\sigma}_k^2$.

Nous disposons des indices MSCI au 31 du mois de janvier 1990 à juillet 2001. Nous obtenons finalement les paramètres suivants, après application de la méthode d'estimation :

| μ | |
|-------------|---------|
| MSCI France | 12.226% |
| MSCI Europe | 12.413% |
| MSCI World | 13.277% |

| $\sigma_{i,j}$ | MSCI France | MSCI Europe | MSCI World |
|----------------|-------------|-------------|------------|
| MSCI France | 5.764 % | | |
| MSCI Europe | 2.923 % | 2.231 % | |
| MSCI World | 2.155 % | 1.570 % | 1.720 % |

On calcule alors l'écart-type du rendement de chaque action :

| écart type | |
|-------------|---------|
| MSCI France | 24.008% |
| MSCI Europe | 14.938% |
| MSCI World | 13.115% |

Le modèle ainsi estimé, la simulation de l'évolution du marché des actions ne nécessite plus que le tirage aléatoire de la variable $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$.

Par ailleurs, nous avons estimé à titre de comparaison les rendements moyens et la matrice de variance-covariance sur une période s'étendant de décembre 1969 à avril 2003. Nous obtenons les résultats suivants:

| μ' | | | |
|-----------------|-------------|-------------|------------|
| | MSCI France | 10.440 % | |
| | MSCI Europe | 8.274 % | |
| | MSCI World | 7.794 % | |
| $\sigma'_{i,j}$ | MSCI France | MSCI Europe | MSCI World |
| MSCI France | 9.027 % | | |
| MSCI Europe | 4.868 % | 3.734 % | |
| MSCI World | 3.743 % | 2.639 % | 2.640 % |

Nous constatons que les rendements sur la période longue sont inférieurs à ceux de la période courte, à l'inverse les volatilités sont plus élevées sur la période longue que sur la période courte.

Remarque: Pour l'estimation des paramètres, on peut utiliser la méthode de Zellner, conférer annexes page 43.

2 Modélisation du passif

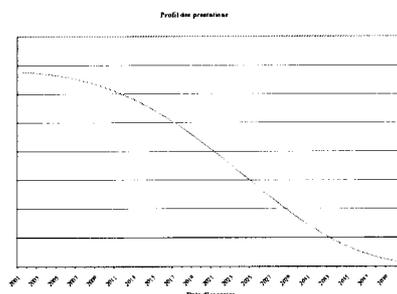
Le passif sera constitué de deux postes :

- les fonds propres et
- les provisions mathématiques.

Les capitaux propres et réserves ont pour but de garantir la solvabilité de l'entreprise; plus précisément des fonds propres sont mobilisés pour assurer la solvabilité de l'assurance.

Les provisions mathématiques (ou PM en abrégé) en assurance-vie sont définies comme la différence entre la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et de la valeur actuelle probable des engagements de l'assuré. Outre le taux d'actualisation, le choix de la table de mortalité utilisée doit être conforme aux dispositifs réglementaires et aux éventuelles clauses contractuelles. Les provisions mathématiques, qui constituent l'essentiel des provisions techniques en assurance vie, ont une formule de calcul qui varie selon les contrats, en fonction des risques assurés, des garanties accordées et des bases techniques de provisionnement choisies. Leur rôle principal est de retracer la constitution ou l'épuisement d'une épargne par l'assuré.

L'engagement de l'assuré dans le portefeuille étudié est nul puisque nous disposons d'un ensemble de contrats d'assurance vie-décès dont l'assuré est déjà décédé. Ainsi, nous nous sommes intéressées uniquement à la modélisation de l'engagement de l'assureur. L'assureur s'engage à verser des prestations aux bénéficiaires des contrats. Pour un portefeuille donné, les prestations non valorisées de l'assureur (contrats collectifs d'entreprise) évoluent dans le temps selon le profil suivant.



Il sera calculé par une méthode alternative à celle usuellement utilisée (alors que les provisions mathématiques sur lesquelles l'actif s'adosse restent calculées par la méthode habituelle). Nous présenterons successivement ces deux méthodes, en justifiant notre choix.

2.1 Méthode classique

Le caractère aléatoire de la durée de vie résiduelle apparaît classiquement dans l'élément actuariel a_x (qu'il nous suffit de lire dans une table) et qui est donné par:

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^t}$$

Par suite, on peut considérer que pour chaque bénéficiaire de 1 euro de rente à terme échu et âgé de x années, la provision à constituer est égale à a_x ; si la rente est de r euros, la provision à constituer est de $r.a_x$.

2.2 Méthode alternative

On peut exprimer le caractère aléatoire de la durée de vie sans utiliser explicitement a_x . On considère alors que pour chaque bénéficiaire, l'aléa qui entoure le contrat est véhiculé par deux voies :

- la durée de vie résiduelle K_x du bénéficiaire et
- les taux financiers d'actualisation.

Simulation des durées de vie résiduelles

Pour simuler des durées de vie résiduelles suivant l'âge de chaque individu, nous avons procédé de la façon suivante. A partir de la table TPRV donnant le nombre de survivants nés l'année A ($1887 \leq A \leq 1993$) et d'âge x ($0 \leq x \leq 118$), nous avons déterminé :

- la table donnant la probabilité cumulée de survie de tout individu encore vivant en 2003 et né entre 1887 et 1993,
- la table donnant la durée de vie résiduelle de tout individu vivant en 2003.

Puis, nous avons tiré aléatoirement des réalisations de la loi uniforme $U[0,1]$. Cette réalisation peut être vue comme une probabilité p à laquelle correspond une durée de vie résiduelle k tels que : $P(K \leq k) = p$. Finalement, pour chaque simulation, nous avons déterminé la durée de vie résiduelle de chaque individu du portefeuille.

Actualisation des flux

Pour une simulation donnée, soit un contrat donnant lieu au versement par l'assureur d'une rente r à un bénéficiaire dont la durée de vie résiduelle est connue égale à k . En supposant que l'engagement de l'assureur est réinvesti chaque année au taux zéro-coupon d'échéance T , il peut alors prévoir en 2003 un versement de

$$\sum_{t=1}^k r \cdot \frac{R(t,T)}{R(0,T)}$$

où $R(t,T)$ désigne le taux zéro-coupon déterminé en t d'échéance T . C'est ce montant qui constitue la valeur estimée de l'engagement de l'assureur vis à vis de l'individu considéré.

Nous avons privilégié cette méthode car elle permet de construire "à la main" $E(K = k)$ en prenant en compte, non pas un taux technique constant, mais un taux d'actualisation dépendant du temps.

3 Modélisation de la marge actif / passif

3.1 La gestion actif- passif

La gestion actif- passif (*ALM, Asset Liability Management* en anglais) apparaît aux Etats-Unis au début des années 80 dans un univers de volatilité grandissante des taux, d'émergence des marchés dérivés et de déréglementation. Ces facteurs accroissent les risques encourus dans le secteur bancaire, risques que les banques cherchent à quantifier et à contrôler. Durant les années 80, la gestion actif- passif apparaît également en France. Au début des années 90, les assureurs intègrent à leur tour ce mode de gestion des risques. Cependant les caractéristiques de l'assurance rendent complexe l'utilisation des méthodes développées par les banques.

La réglementation (mise en place d'une marge de solvabilité réglementaire et réglementation des placements) fournit une base de calcul des fonds propres qu'une compagnie d'assurance doit constituer. Cependant, ce calcul n'est pas adapté à chaque compagnie (puisque'il reste général) et peut sous-estimer le besoin en capital. Ainsi, l'assurance peut développer un modèle de gestion interne de risques adaptée: la gestion actif- passif a pour but d'aider à la décision qui doit lui permettre d'optimiser son retour sur fonds propres.

Les modèles actif- passif sont regroupés en quatre catégories :

- Les modèles d'allocation d'actifs adaptés à l'assurance, type modèles de Wise ou Wilkie ;
- Les modèles de première génération d'adossement par les flux : gaps de trésorerie et gestion en duration ;
- Les modèles de deuxième génération : une approche comptable prenant en compte les interaction actif- passif ;
- Les modèles de troisième génération : une approche par scénarii stochastiques.

Notre modèle appartient à la troisième génération, c'est à dire que nous adoptons une approche par scénarii stochastiques.

3.2 La Value at Risk

Notre modélisation de la marge actif/passif se rapprochant de la VaR (Value at Risk) largement utilisé en finances, nous commencerons par présenter brièvement cet outil [18].

Historique de la VaR

La VaR s'inscrit dans une volonté des institutions financières de contrôler les risques grandissant au sein de l'activité bancaire. Cette volonté prend forme durant la décennie précédente. Les autorités bancaires ont tout d'abord mis en place des ratios internationaux de solvabilité afin de mesurer le risque de contrepartie des établissements financiers. En 1993, une approche standard est établie pour évaluer les risques liés aux activités de marché : l'exigence de fonds propres est calculée à partir des sensibilités forfaitaires. Cependant, depuis l'amendement de Bâle en 1996, les banques soumises à des risques de marché ont la possibilité de construire un modèle interne en vue de calculer le montant optimal de fonds propres. Ce modèle doit respecter un certain nombre de condition pour être homologué par la commission bancaire. S'il est accepté, l'établissement qui en est l'auteur pourra allouer un montant de fonds propres plus juste que le montant réglementaire.

La VaR, introduite par Riskmetrics, est souvent une des bases de ces modèles internes. En effet, la VaR est un instrument de mesure des risques encourus par l'entreprise (cette mesure étant nécessaire pour l'allocation des fonds propres) mais ne donne pas explicitement le montant optimal des fonds propres à allouer.

Présentation de la VaR

Pour un horizon de gestion donné et un seuil $x\%$ fixé, la VaR correspond au montant de perte potentielle qui ne sera pas dépassé dans $x\%$ des cas :

$$Prob(perte > VaR) = x$$

La VaR s'adresse aux professionnels de marché (gestionnaires de fonds de pension, de fonds privés, de fonds institutionnels), aux gestionnaires des risques, aux comptables et aux institutionnels. Les services de Risk Management des établissements bancaires, moteurs de développement de la VaR, ont pour mission de réévaluer chaque jour au prix du marché toutes les positions (ces positions étant à l'origine des pertes et des profits) en tenant compte des risques de marché. A partir de cette réévaluation, il est possible de déterminer le montant des pertes potentielles, puis la VaR. Par conséquent, si la VaR pouvait être utilisée, en théorie, pour mesurer plusieurs type de risques tels que les risques de marché, de crédit, de liquidité, elle est de fait utilisée principalement pour le risque de marché. Pour quantifier ce risque, trois méthodes existent : la VaR analytique, la VaR historique et la VaR Monte Carlo (précisions en annexes page 44).

3.3 Analyse de la marge actif/passif

Notre méthode d'évaluation de la marge actif/passif prend en compte les postes présents au bilan comptable d'une entreprise:

| Actif | Passif |
|----------------------|--|
| Actifs investis (AI) | Capitaux propres et réserves (FP) Provisions mathématiques (PM) |
| Total actif | Total passif |

Dans une perspective comptable classique (et statique), le bilan est équilibré et les fonds propres sont la différence entre l'actif (ici, le seul poste à l'actif est le poste des AI) et le passif réel (ici, il s'agit des PM). Notre démarche n'est pas statique puisque nous modélisons l'aléa résidant dans la date de fin des contrats constituant le portefeuille et dans les flux futurs anticipés. Notre but n'est pas de construire un bilan comptable mais un bilan "économique" et donc d'estimer actif et passif par valeur actuelle probable (VAP). Nous commençons par estimer les valeurs actualisées des flux d'actifs investis et de passifs réels suivant les méthodes évoquées précédemment. Puis, nous déterminons les fonds propres tels que la probabilité de ruine soit au plus égale à un seuil $x\%$ donné :

$$Proba(VA(activ) - VA(passif) < -FP) < x\%$$

Cette définition de la solvabilité s'apparente à la VaR : il s'agit bien du montant de perte potentielle qui ne sera pas dépassé dans $x\%$ des cas : $Proba(-VA(MAP) > -FP) = x\%$

où VA désigne la valeur actuelle et MAP est la marge actif/passif.

Les simulations nous permettent d'aboutir aux deux résultats suivants concernant la solvabilité du portefeuille:

- la distribution de la valeur actuelle de la marge actif/passif (différence entre $VA(activ) - VA(passif)$) et
- le montant de fonds propres à retenir pour que la probabilité de ruine soit égale au plus à 1% (i.e. $x=1$), ce seuil étant généralement retenue pour la VaR.

Nous pourrions alors notamment comparer :

- les différentes distributions de la marge actif/ passif en fonction des hypothèses retenues;

- le montant des fonds propres retenu avec le marge de solvabilité réglementaire qui est égale, pour le portefeuille considéré, à 4% des provisions mathématiques ($PMb = PMn$ en reprenant les notations de la page 3).

Quatrième partie

Application à un portefeuille de rentes viagères

Nous appliquons le modèle présenté à un portefeuille d'assurance vie qui verse des rentes au conjoint survivant. Ce type de contrats est particulièrement intéressant dans notre étude d'évaluation de la solvabilité, puisqu'il permet d'aborder des problématiques de risques telles que le risque de taux et de mortalité dues aux garanties accordées. L'étude de la solvabilité de l'assureur sur ce portefeuille nous permet:

- d'illustrer et de chiffrer le coût (en terme de fonds propres nécessaires pour garantir une probabilité de défaut faible) d'une promesse faite aux assurés;
- de définir un taux technique prudent et
- de rechercher l'allocation optimale pour concilier les différents objectifs (profits de l'assureur, revalorisation des rentiers).

1 Présentation du portefeuille

1.1 Généralités et problématique

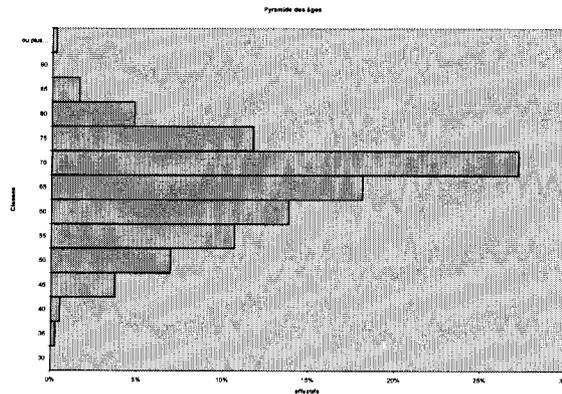
Nous travaillons sur un portefeuille de rentes viagères de type "prévoyance collective". Le principe de base est le suivant : la tête assurée épargne à travers le paiement d'une prime annuelle qui sera, au moment de son décès, convertie en rente viagère ou en capital au profit des bénéficiaires. Le versement des rentes est donc déclenché lorsque la tête assurée décède.

Notre portefeuille de rentes viagères est constitué de contrats souscrits depuis plus de 10 ans par des salariés d'une multinationale et dont seuls les bénéficiaires des garanties accordées sont vivants. En d'autres termes, tous les assurés sont décédés en 2003.

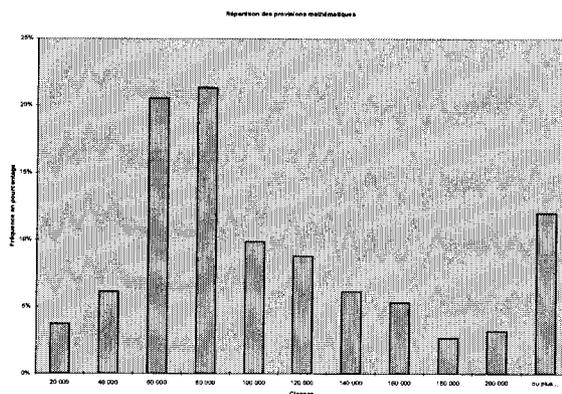
Les informations disponibles les concernant sont leur date de naissance et le montant de leur rente annuelle. Par conséquent, nous privilégions l'utilisation de la table de mortalité inter-générationnelle TPRV 93. Remarquons que notre modèle peut être utilisé pour tout portefeuille de rentes viagères.

1.2 Etude statistique du portefeuille

Le portefeuille regroupe 375 contrats souscrits il y a plus de 10 ans. La moyenne d'âge du portefeuille est de 62.7 ans avec près de 82% de la population répartie entre 55 ans et 75 ans. La pyramide des âges a le profil présenté page suivante.



La moyenne des rentes est de 5 491 euros par an. La moyenne des provisions mathématiques constituées en 2003 est de 107 325 euros mais ces montants sont très variables (l'écart-type est environ de 85 000 euros). La répartition des provisions mathématiques est la suivante:



1.3 La table de mortalité utilisée

La réglementation impose de retenir :

- Un taux d'actualisation au plus égal à 60% du TME en vigueur au moment de la survenance du décès (qui a conduit au versement de la rente au conjoint survivant). Cela veut dire sur la base des taux actuels un taux au plus égal à 2,5%. Or, nous avons pu constater, après simulations, qu'un tel taux ne permettrait pas de revaloriser de manière satisfaisante les rentes dans le futur. Nous montrons alors qu'un taux de 1,5% est préférable.
- Les tables prospectives de rentes viagères. Par conséquent, la table utilisée pour le provisionnement des rentes après décès de la tête assurée est la table TPRV 93. Cette table constitue une approximation des tables de générations - la table de génération 1950 étant prise comme référence et l'âge de l'assuré étant ajusté en fonction de son année de naissance.

1.4 Hypothèses simplificatrices

Ce portefeuille est considéré comme un groupe fermé (pas de nouveaux entrants). Les frais de gestion, pour le flux de passif, sont par ailleurs égaux à 30 centimes que l'on soustrait au taux d'actualisation. Enfin, nous ne prenons pas en compte les effets d'une éventuelle réassurance dans la mesure où ce n'est pas l'objet de notre étude.

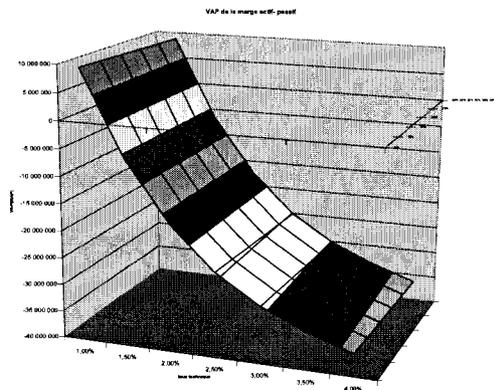
2 Du T3 à notre modèle

Le T3 est une méthode déterministe de calcul de la marge de solvabilité. Il apparaît dans un arrêt du 26 décembre 2000 et présente un calcul de :

- la somme des flux de passif actualisés à différents taux techniques ;
- la rémunération globale d'une obligation OAT donnée, actualisée à différents taux ;
- la valeur de marché d'une action au bout de n années en envisageant différentes chutes de valeur possibles.

Puis, il suffit de sommer en respectant les pondérations à affecter à chaque poste ; nous obtenons alors un calcul de la marge actif- passif.

Nous avons représenté la marge actif-passif - avant allocation de fonds propres - suivant des taux techniques différents (axe des abscisses) et des chutes de valeur de l'action différentes (côte). Nous nous sommes placées dans le cadre d'une répartition entre titre obligataire et non-obligataire de : 92,5 % contre 7,5 %.



Nous remarquons que la marge actif - passif est, dans la majeure partie des cas (dès que le taux technique est supérieur à 1%), négative. Si l'on considérait une allocation de portefeuille égale à (92,5% , 7,5 %), une chute de valeur de l'action de 5%⁴, et des taux de 1,5 %, nous aboutissons à une valeur de la marge de solvabilité égale à -5 822 755, valeur très négative, contrairement à celle estimée à partir de notre approche que nous exposons par la suite.

Cette approche étant statique et déterministe, nous ne concluons pas à ce niveau de l'étude ; l'approche que nous avons privilégiée et qui est dynamique apportera des résultats plus nuancés. En effet, la démarche que nous proposons part du même principe : ce sont les mêmes postes que nous tentons d'estimer et les pondérations à affecter sont identiques. Cependant, notre approche a le double avantage d'être dynamique et de prendre en compte des modélisations stochastiques de divers paramètres.

4. Notons que le portefeuille du titre synthétique de type R332-20 que nous avons modélisé croit dans le temps, alors que le T3 envisage uniquement des chutes de la valeur de l'action.

3 Plan de la démarche utilisée

Nous présentons le plan de la démarche que nous avons utilisée pour aboutir à l'estimation de la marge de solvabilité.

1) Calcul du passif associé à un individu



| Simulation | Durée de vie Résiduelle k | Année | | | | | Année n | Somme actualisée des flux |
|------------|-----------------------------|---------|---|---|---|---|-----------|---------------------------|
| | | Année 1 | . | . | . | . | | |
| 1 | k_1 | x | x | x | | | | Somme ₁ |
| . | . | x | x | x | x | x | x | . |
| . | . | x | | | | | | . |
| . | . | x | x | | | | | . |
| s | k_s | x | x | x | x | | | Somme _s |
| | | | | | | | | Passif Moyen |



Passif moyen associé à un individu

2) Calcul du passif associé au portefeuille de prévoyance collective



Sommation des passifs moyens associés aux individus

3) Calcul de l'actif

Provisions Mathématiques totale
+ Fonds Propres



Investis dans le portefeuille d'actifs

4) Calcul de la marge de solvabilité

Actif
- Passif



Marge de solvabilité

4 Résultats sur l'ensemble du portefeuille

Nous avons déterminé pour différentes valeurs de α (proportion d'obligation dans le portefeuille d'actifs) -variant de 70 % à 100 % avec un pas de 2,5%- ou pour différentes valeurs de fonds propres -variant de 0 % des provisions mathématiques (PM) à 20 % des PM avec un pas de 2% des PM- :

- la Valeur Actuelle Probable de l'actif notée VAP(Actif) ;
- la Valeur Actuelle Probable du passif notée VAP(Passif) ;
- la Valeur Actuelle Probable de la marge actif-passif notée MAP et
- la probabilité de ruine notée $Proba[MAP < -FP]$.

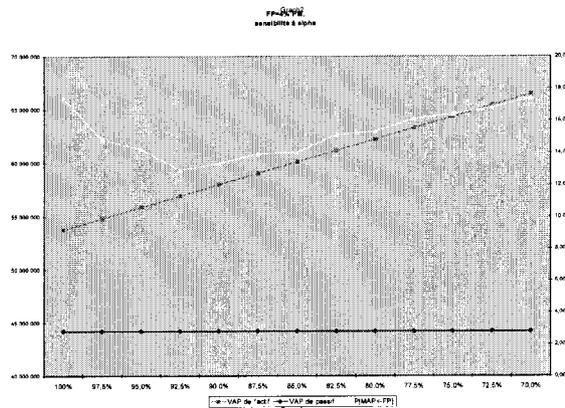
4.1 Sensibilité à la proportion de titre synthétique obligataire au sein du portefeuille d'actifs

Nous avons répertorié les résultats dépendant de la valeur de α dans les tableaux suivants. Nous avons considéré ici que le montant des fonds propres alloués était fixe et déterminé par la réglementation (soit 4% des PM).

| Postes | 100% | 97,5% | 95,0% | 92,5% | 90,0% | 87,5% | 85,0% |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| VAP(Actif) | 53 766 152 | 54 824 261 | 55 882 371 | 56 940 480 | 57 998 590 | 59 056 699 | 60 114 809 |
| VAP(Passif) | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 |
| Marge Actif-Passif | 9 543 905 | 10 602 014 | 11 660 124 | 12 718 234 | 13 776 343 | 14 834 453 | 15 892 562 |
| P[MAP < -MAP] | 17,40 % | 14,80 % | 14,20 % | 12,90 % | 13,30 % | 13,90 % | 14,00 % |

| Postes | 82,5% | 80% | 77,5% | 75% | 72,5% | 70% |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| VAP(Actif) | 61 172 918 | 62 231 028 | 63 289 137 | 64 347 247 | 65 405 356 | 66 463 466 |
| VAP(Passif) | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 |
| Marge Actif-Passif | 16 950 672 | 18 008 781 | 19 066 891 | 20 125 000 | 21 183 110 | 22 241 219 |
| P[MAP < -MAP] | 15,10 % | 14,30 % | 16,10 % | 16,40 % | 16,80 % | 17,40 % |

Nous avons représenté ces résultats dans le graphique suivant :



Si la valeur actuelle probable estimée de la marge actif-passif ne cesse de croître avec la proportion d'actions ($1 - \alpha$), le comportement de la probabilité de ruine est plus original : l'allocation optimale du portefeuille d'actifs investis (pour un montant de fonds propres donné égal à 4% des provisions mathématiques) est de (92,5%, 7,5%).

Ces résultats proviennent de l'allure de la courbe du prix des actions. Nous avons en effet modélisé le portefeuille de titre non-obligataire par un Black & Scholes empilé. Les drifts sont élevés et les écart-types le sont également. Ainsi, la croissance du prix de l'action synthétique

est plus rapide que la croissance du taux de coupon de l'OATi; le prix de l'action étant par ailleurs volatile. Cette constatation explique d'une part la croissance de la MAP avec la proportion d'actions dans le portefeuille et d'autre part l'augmentation de la probabilité de ruine au-dessus d'un certain seuil (92,5%), provenant d'une volatilité accrue du portefeuille.

4.2 Sensibilité de la probabilité de ruine aux fonds propres

Nous avons déterminé la probabilité de ruine du portefeuille de prévoyance collective suivant le montant de fonds propres alloués pour deux allocations distinctes du portefeuille d'actifs investis : $\alpha = 75\%$ et $\alpha = 92,5\%$.

Cas d'une répartition (obligation, action) = (75 %, 25 %)

Nous obtenons les tableaux suivants : cf annexes page 45.

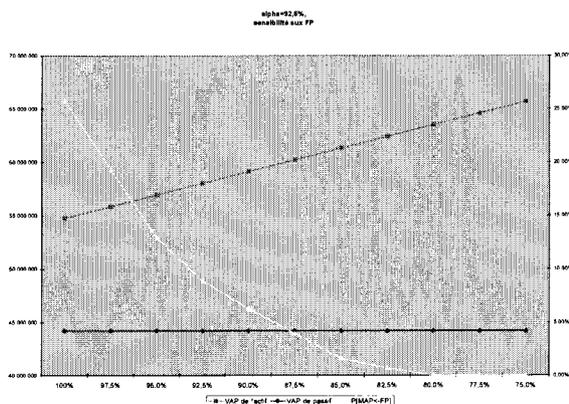
Cas d'une répartition (obligation, action) = (92,5 %, 7,5 %)

Dans le cas de $\alpha = 92,5\%$, les résultats sont recensés dans les tableaux suivants :

| Postes | 0% | 2% | 4% | 6% | 8% | 10% |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| VAP(Actif) | 60 225 508 | 54 750 462 | 55 845 471 | 56 940 480 | 58 035 489 | 59 130 499 |
| VAP(Passif) | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 |
| Marge Actif-Passif | 10 528 215 | 11 623 224 | 12 718 234 | 13 813 243 | 14 908 252 | 16 003 261 |
| P[MAP < -MAP] | 25,80 % | 19,30 % | 12,90 % | 8,90 % | 6,30 % | 4,00 % |

| Postes | 12% | 14% | 16% | 18% | 20% |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| VAP(Actif) | 61 320 517 | 62 415 526 | 63 510 536 | 64 605 545 | 65 700 554 |
| VAP(Passif) | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 |
| Marge Actif-Passif | 17 098 270 | 18 193 280 | 19 288 289 | 20 383 298 | 21 478 307 |
| P[MAP < -MAP] | 1,60 % | 0,70 % | 0,00 % | 0,00 % | 0,00 % |

Puis, nous visualisons les résultats :



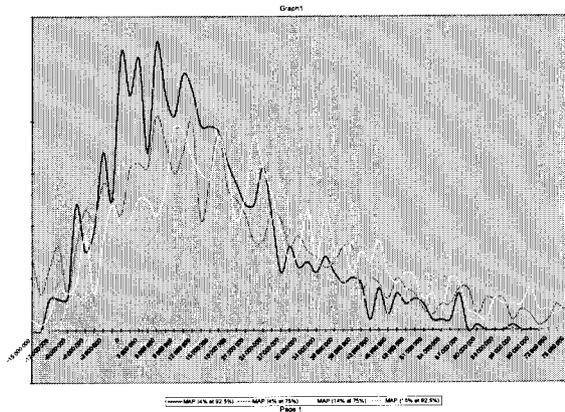
La marge active-passive actualisée probable croît avec le montant des fonds propres alloués tandis que la probabilité de ruine diminue. Ces résultats appuient tout à fait notre intuition première. On remarque de plus que dans ce cas, la probabilité de ruine pour $\alpha = 75\%$ est plus élevée que la probabilité de ruine pour $\alpha = 92,5\%$ (cf annexes page 45).

Distribution de la marge de solvabilité dans plusieurs cas envisagés

Nous avons étudié la distribution de la marge de solvabilité pour différentes valeurs de fonds propres (FP) en fonction des Provisions Mathématiques (PM) et de α , proportion du titre obligataire au sein du portefeuille. Nous présentons quatre couples de valeurs :

- FP=4% PM et $\alpha = 92,5\%$ c'est à dire : valeur de fonds propres réglementaire et proportion du titre obligataire optimal ;
- FP=4% PM et $\alpha = 75\%$ c'est à dire : valeur de fonds propres réglementaire;
- FP=10% PM et $\alpha = 92,5\%$ c'est à dire : proportion du titre obligataire optimal et probabilité de ruine inférieure à 1% ;
- FP=14% PM et $\alpha = 75\%$ c'est à dire : probabilité de ruine inférieure à 1% pour une valeur de α .

Nous avons représenté les distributions des marges dans chaque cas.



Au couple de valeurs (**FP = 10%PM; $\alpha = 92,5\%$**), dont la probabilité de ruine est la plus faible, correspond l'une des marges de solvabilité moyennes les plus faibles, certes, mais la distribution est " plus centrée " autour de cette moyenne avec un coefficient de variation de 92% (**conférer annexes page 46**). De plus, la queue de distribution est similaire à celle d'une distribution de loi normale, avec un kurtosis proche de 1.

A l'inverse, au couple de valeurs (**FP = 4%PM; $\alpha = 75\%$**) correspond l'une des marges de solvabilité moyennes les plus élevées et une distribution diffuse avec un coefficient de variation de 131% ; la queue de distribution est épaisse (kurtosis égale à 5,7).

Pour toutes les distributions, la marge de solvabilité moyenne et le coefficient d'asymétrie sont positifs, indiquant une asymétrie vers la droite.

Conclusion

Le risque d'insolvabilité est une préoccupation constante des compagnies d'assurance. Celui-ci, souvent à l'origine d'une mauvaise gestion (sous-tarification, investissements trop risqués...), rend l'analyse de la solvabilité un enjeu majeur pour l'entreprise. Notre mémoire présente **un calcul de la marge de solvabilité pour un portefeuille de rentes de conjoint survivant**.

La démarche adoptée est une extension stochastique de la méthode T3 à l'origine déterministe. Elle consiste à estimer le montant de fonds propres (FP) à mobiliser pour éviter la ruine à un seuil de risque $x\%$ donné (les banques considèrent généralement un seuil de risque de 1%). Notre méthode présente l'avantage d'être simple: nous calculons la Valeur Actuelle Probable (VAP) des actifs investis - à l'actif du bilan - et des provisions que l'assureur doit constituer pour respecter ses engagements - au passif du bilan -. Puis, nous déterminons la valeur des fonds propres qui vérifient: $Proba(VAP(aktif) - VAP(passif) < -FP) = x\%$.

La modélisation d'une **courbe des taux** est nécessaire pour actualiser les flux (le prix des zéro-coupons constitue le numéraire). Le modèle de Vasicek (1977) est satisfaisant mais il ne permet pas de rendre compte de toute la panoplie de courbes de taux et de leurs déformations telles qu'elles existent sur le marché. Toutefois, nous avons montré que des modèles plus complexes tels que Vasicek-CIR ne sont pas pour autant meilleurs dans la mesure où ils s'avèrent invalidés: le zéro-coupon de maturité infinie ne peut jamais diminuer sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage.

En outre, nous avons jugé utile de prendre en compte l'**évolution future de l'inflation**: les actifs investis (OAT_i) et les flux de passif sont indexés sur l'inflation. Dans ce but, nous avons utilisé le modèle de Wilkie (1995), auquel nous avons superposé un processus GARCH(1,1) pour prendre en compte l'hétéroscédasticité des résidus.

Nous avons remarqué que pour une part du titre synthétique obligataire (dans l'ensemble des actifs investis) fixée à 92.5% et des flux indexés sur l'inflation, le montant des fonds propres réglementaire, égal à 4% des provisions mathématiques, évite la ruine dans seulement 87.1% des cas. Pour que le seuil de risque soit de 1%, il faut élever les fonds propres à 14% des provisions mathématiques. L'assureur a donc un arbitrage à faire entre sécurité et profit.

Nous avons envisagé plusieurs **améliorations et approfondissements** à la méthode que nous proposons. Faute de temps, nous ne les exposons pas dans ce mémoire mais nous espérons avoir l'opportunité des les présenter à l'Institut des Actuaire.

- Nous pensons complexifier le modèle de taux avec un Vasicek-Fong (1992) en augmentant le nombre de facteurs.
- Le taux de revalorisation économique r est un indicateur de la rentabilité du portefeuille. Ce taux vérifie:

$$\sum_t FA_t^{passif} \cdot (1+r)^t = \sum_t FA_t^{aktif}$$

où FA_t désigne le flux actualisé en t .

- Il serait intéressant de comparer les résultats obtenus à partir de différentes tables, notamment à partir d'une table expérimentale.
- L'outil que nous avons construit permet une flexibilité de la donnée du taux technique; nous pouvons ainsi déterminer la sensibilité de la probabilité de ruine au taux technique.

Références

Livres :

- [1] Befec Price Waterhouse Coopers, La comptabilité des assurances, Axa, *Editions l'Argus*, 1997.
- [2] Le code des assurances, *Daloz*, 1999.
- [3] L.Martellini et P.Priaulet, Produits de Taux d'Intérêt, *Economica*, 2000.
- [4] P.Petauton, Théorie et pratique de l'assurance-vie, *Dunod*, 1996.
- [5] A.Tosetti, T.Béhar, M. Fromenteau et S.Ménart, Assurance: règlementation, comptabilité, actuariat, *Dunod*, 2000.

Articles et publications:

- [6] Brennan et Xia, "Asset Allocation under Inflation", , 2001.
- [7] Commission des Communautés Européennes, Rapport au Comité des Assurances sur la nécessité d'une harmonisation ultérieure de la marge de solvabilité, 24 juillet 1997.
- [8] Commission européenne, "Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision", Mai 2002.
- [9] M.Moreno, "On the Relevance of Modeling Volatility for Pricing Purposes", *Universitat Pompeu Fabra*, 1999.
- [10] Sherris, "Model assumption for Australia", *Journal of Actuarial Practice*, Vol.5, No. 2, 1997.
- [11] Vasicek, "An equilibrium characterization of the term structure of interest rates", *Journal of Financial Economics*, 5: 177-188, 1977.
- [12] A.D Wilkie , "More on a stochastic asset model for actuarial use", *British Actuarial Journal*, 1, 777-964, 1995.

Polycopiés:

- [13] N.El Karoui et L.Elie, "Modèles de diffusion, applications statistiques et financières", *Cours de l'école Polytechnique*, 1996.
- [14] N.Gautron, "Actuariat de la retraite et de l'assurance vie", *Cours de l'ENSAE*, 2003.
- [15] N.Pistre, "Risk Management", *Cours de l'ENSAE*, 2003.

Mémoires d'actuariat:

- [16] F.Berthoix et J.Crugnola, "Approche dynamique et stochastique de la solvabilité en assurance vie", *ENSAE*, 2001.
- [17] N.Bokobza, "Comparaison de modèles stochastiques d'allocation d'actifs pour un portefeuille de Prévoyance Collective", *Université Paris IX Dauphine*, 2002.
- [18] M.Bresson et E.Lehmann, "Application de la Value at Risk pour le calcul des fonds propres en assurance vie", *ENSAE*, 2000.
- [19] C.Dutey et V.Leflaive, "Mesure du risque d'illiquidité et d'insuffisance de marge du bilan d'Axa Global Risk", *ENSAE*, 2000.

Annexes

1 Règlementation relative à la marge de solvabilité

Approche américaine: le Risk Based Capital

Actifs investis dans les filiales d'assurances et le hors bilan (R_0)

Les investissements dans les filiales remontent pour les filiales nationales à 100% de la valeur de marché des ces sociétés dans l'estimation du RBC de la maison mère et à 50% pour les filiales étrangères.

Cependant, l'acquisition de filiales diversifie le risque, ce qui n'est pas pris en compte dans le calcul de R_0 . En effet, le montant de fonds propres nécessaires à deux filiales d'une même société est inférieure à la somme des fonds propres de deux sociétés indépendantes.

Actifs à revenus fixes (R_1)

Le portefeuille est ventilé par nature de titres en fonction du degré de risque de contrepartie (en d'autres termes, le risque d'insolvabilité des débiteurs est pris en considération). Puis, le montant du capital ainsi estimé est revu en fonction de la diversification du portefeuille.

Actifs investis en actions (R_2)

Le capital requis est de 30% du portefeuille. Ce montant du capital est tel qu'il est indifférent pour l'actionnaire de placer les actifs au taux sans risque ou en actions.

Créances (R_3)

Le capital requis est de 10% des créances sur réassureurs et ce, quelque soit leur solidité financière, et de 1% des autres créances.

Provisions de sinistres (R_4)

Le montant des fonds propres est calculé par application d'un coefficient de liquidation correspondant à la plus mauvaise observation des dix derniers exercices.

Primes (R_5)

Un calcul similaire aux provisions pour sinistres est réalisé pour les primes, en utilisant la notion de sinistralité.

Capital total requis en fonction des risques pris (R)

Le montant des fonds propres minimal se déduit des six capitaux partiels précédents:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$$

La racine carrée de la somme des carrés est due aux corrélations entre les différents postes du bilan.

Actuellement, pour les compagnies ayant un montant de fonds propres

- supérieur à R : les autorités n'interviennent pas;
- inférieur à 35% de R : la compagnie est mise sous tutelle;
- entre ces deux bornes: la compagnie doit mettre en oeuvre un plan de redressement.

2 Modélisation des outils de base

Modélisation du taux zéro-coupon: Première tentative

Le modèle

Nous nous sommes intéressées dans un premier temps à la mise en oeuvre du modèle de Vasicek-CIR comme le propose Berthoix & Crugnola [16] dans leur mémoire d'actuariat (mai 2001). Ce modèle, cas particulier du modèle de Schaefer et Schwartz (1984) a été développé par Moreno (Universitat Pompeu Fabra) en 1997 et est présenté en détail dans l'article de Moreno paru en 1999 [9]. Ce modèle fait l'hypothèse que le prix des zéro-coupons dépend uniquement de leur maturité résiduelle et de deux facteurs:

- le spread (différence entre le taux à long terme et le taux instantané) et
- le taux d'intérêt à long terme

Pour décrire la dynamique de chacun de ces facteurs, des modèles de diffusion sont choisis.

- le spread suit un processus de type Vasicek (processus d'Ornstein-Uhlenbeck):

$$ds = k_1 \cdot (\mu_1 - s) \cdot dt + \sigma_1 \cdot dZ_{1,t}$$

- le taux d'intérêt à long terme suit un processus de type CIR:

$$dL = k_2 \cdot (\mu_2 - L) \cdot dt + \sigma_2 \cdot \sqrt{L} \cdot dZ_{2,t}$$

où

k_i est un paramètre d'échelle,

t est la variable temps,

μ_i est la tendance autour de laquelle oscille le taux spot,

σ_i est la volatilité instantané supposé constante et

$(Z_{1,t})_{t \in \mathbb{R}^+}$ et $(Z_{2,t})_{t \in \mathbb{R}^+}$ sont des processus de Wiener standards orthogonaux.

L'estimation des paramètres du modèle

Nous commençons par écrire une approximation des équations de diffusion en temps discret, en effectuant un développement limité à l'ordre 1 (dicrotisation du modèle):

- pour le spread :

$$s_t = s_{t-1} + k_1 \cdot (\mu_1 - s_{t-1}) + \sigma_1 \varepsilon_t^s$$

- pour le taux long :

$$L_t = L_{t-1} + k_2 \cdot (\mu_2 - L_{t-1}) + \sigma_2 \cdot \sqrt{L_{t-1}} \cdot \varepsilon_t^L$$

où t est la variable temps, $(\varepsilon_t^s)_{t \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_t^L)_{t \in \mathbb{N}}$ sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi normale centrée réduite.

Il s'agit alors, à partir de données historiques, d'estimer les paramètres μ_i et σ_i ($i=1,2$).

Modèle de diffusion du taux long

Nous avons réécrit l'équation discrète précédente sous la forme:

$$\frac{L_t - L_{t-1}}{\sqrt{L_{t-1}}} = k_2 \mu_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{L_{t-1}}} - k_2 \cdot \sqrt{L_{t-1}} + \sigma_2 \varepsilon_t$$

Nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse d'indépendance des variables suivantes:

$$\left(\frac{L_t - L_{t-1}}{\sqrt{L_{t-1}}}, \frac{1}{\sqrt{L_{t-1}}}, \sqrt{L_{t-1}} \right)$$

Dès lors, nous pouvons chercher à estimer les paramètres (α, β) en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires au modèle:

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \frac{L_t - L_{t-1}}{\sqrt{L_{t-1}}} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{L_{t-1}}} & \sqrt{L_{t-1}} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \eta_t \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

où $\eta_t \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Cependant, les tests de Student et Fisher appliqués aux résultats de l'estimation concluent en la non-significativité des paramètres estimés. Nous avons, par conséquent rejeté cette méthode d'estimation.

Conclusion

Dybvig, Ingersoll et Ross (1996) ont montré qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux long zéro-coupon de maturité infinie ne pouvait jamais diminuer. Ainsi, le choix des variables d'état dans un modèle multi-factoriel s'avère déterminant pour la validation du modèle. Par conséquent, les modèles faisant intervenir des variations négatives du taux long dans le temps sont invalidés. C'est le cas des modèles à deux variables d'état de: **Brennan et Schwartz** (1979), **Nelson et Schaefer** (1983) et **Schaefer et Schwartz** (1984). Finalement, nous avons rejeté le modèle de Moreno.

3 Etude de l'évolution de l'indice à la consommation : Sorties SAS

Données annuelles sur la période longue (1950-2003)

AR(1)

Maximum Likelihood Estimates

| | | | |
|------------------|------------|----------------|------------|
| SSE | 0.04249088 | DFE | 49 |
| MSE | 0.0008672 | Root MSE | 0.02945 |
| SBC | -208.20447 | AIC | -212.06812 |
| Regress R-Square | 0.0000 | Total R-Square | 0.5016 |
| Durbin-watson | 1.7558 | | |

| Variable | DF | Estimate | Standard Error | t Value | Approx Pr > t |
|-----------|----|----------|----------------|---------|----------------|
| Intercept | 1 | 0.0557 | 0.0153 | 3.64 | 0.0006 |
| AR1 | 1 | -0.7436 | 0.0951 | -7.82 | <.0001 |

Autoregressive parameters assumed given.

| Variable | DF | Estimate | Standard Error | t Value | Approx Pr > t |
|-----------|----|----------|----------------|---------|----------------|
| Intercept | 1 | 0.0557 | 0.0152 | 3.65 | 0.0006 |

Données mensuelles sur la période courte (janv.1990- avril 2003)

AR(1)

1) On vérifie la stationnarité de la série :

Test ADF:

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Tests

| Type | Lags | Rho | Pr < Rho | Tau | Pr < Tau | F | Pr > F |
|-------------|------|----------|----------|-------|----------|-------|--------|
| Zero Mean | 0 | -40.1076 | <.0001 | -4.80 | <.0001 | | |
| | 1 | -24.9877 | 0.0002 | -3.53 | 0.0005 | | |
| Single Mean | 0 | -115.685 | 0.0001 | -9.53 | <.0001 | 45.39 | 0.0010 |
| | 1 | -130.947 | 0.0001 | -8.02 | <.0001 | 32.15 | 0.0010 |
| Trend | 0 | -121.743 | 0.0001 | -9.85 | <.0001 | 48.57 | 0.0010 |
| | 1 | -148.641 | 0.0001 | -8.39 | <.0001 | 35.31 | 0.0010 |

2) L'autocorrélogramme et le test du porte-manteau valide le modèle AR(1):

Autocorrélogramme

| Lag | Covariance | Correlation | -1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | Std Error |
|-----|------------|-------------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| 0 | 2.80521E-6 | 1.00000 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0 |
| 1 | 7.36749E-7 | 0.26264 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.079556 |
| 2 | 3.11034E-8 | 0.01109 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.084866 |
| 3 | 7.14312E-7 | 0.25464 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.084875 |
| 4 | 5.4972E-7 | 0.19596 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.089580 |
| 5 | -4.4488E-8 | -0.01586 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092253 |
| 6 | 5.05907E-8 | 0.01803 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092271 |
| 7 | 1.79064E-7 | 0.06383 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092293 |
| 8 | 8.9524E-8 | 0.03191 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092572 |
| 9 | -2.4204E-8 | -0.00863 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092641 |
| 10 | 3.86868E-7 | 0.13791 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092647 |
| 11 | 6.28582E-7 | 0.22408 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.093937 |
| 12 | -1.675E-7 | -0.05971 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.097261 |
| 13 | -4.335E-7 | -0.15454 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.097493 |
| 14 | 3.31307E-7 | 0.11810 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.099031 |
| 15 | 1.14015E-8 | 0.00406 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.099918 |
| 16 | -4.4429E-7 | -0.15838 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.099920 |
| 17 | 1.68355E-8 | 0.00600 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.101496 |
| 18 | -9.0134E-8 | -0.03213 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.101498 |
| 19 | -2.618E-7 | -0.09333 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.101563 |
| 20 | 8.98265E-8 | 0.03202 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.102104 |
| 21 | 1.31649E-7 | 0.04693 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.102167 |
| 22 | -3.8697E-8 | -0.01379 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.102304 |
| 23 | -3.8024E-7 | -0.13555 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.102316 |
| 24 | -9.8109E-8 | -0.03497 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.103446 |
| 25 | 1.97756E-7 | 0.07050 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.103521 |
| 26 | -3.1136E-8 | -0.01110 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.103824 |
| 27 | -2.117E-7 | -0.07547 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.103832 |
| 28 | -2.0632E-8 | -0.00735 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.104178 |
| 29 | 1.59764E-7 | 0.05695 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.104181 |
| 30 | -3.1191E-8 | -0.01112 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.104378 |

Test du porte-manteau

Autocorrelation Check for White Noise

| To Lag | Chi-Square | DF | Pr > ChiSq | -----Autocorrelations----- | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------|------------|----|------------|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 6 | 28.10 | 6 | <.0001 | 0.263 | 0.011 | 0.255 | 0.196 | -0.016 | 0.018 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 41.47 | 12 | <.0001 | 0.064 | 0.032 | -0.009 | 0.138 | 0.224 | -0.060 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 52.74 | 18 | <.0001 | -0.155 | 0.118 | 0.004 | -0.158 | 0.006 | -0.032 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | 58.63 | 24 | <.0001 | -0.093 | 0.032 | 0.047 | -0.014 | -0.136 | -0.035 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | 61.37 | 30 | 0.0006 | 0.070 | -0.011 | -0.075 | -0.007 | 0.057 | -0.011 | | | | | | | | | | | | | | | | |

3) Les paramètres sont estimés (p-value du test de student <5% et AIC grand) :

Estimation des paramètres de l'AR(1)

Maximum Likelihood Estimation

| Parameter | Estimate | Standard Error | t Value | Approx Pr > t | Lag |
|---------------------|-----------|----------------|----------|----------------|-----|
| MU | 0.0023239 | 0.0001751 | 13.27 | <.0001 | 0 |
| AR1,1 | 0.26305 | 0.07727 | 3.40 | 0.0007 | 1 |
| Constant Estimate | | | 0.001713 | | |
| Variance Estimate | | | 2.644E-6 | | |
| Std Error Estimate | | | 0.001626 | | |
| AIC | | | -1578.81 | | |
| SBC | | | -1572.68 | | |
| Number of Residuals | | | 158 | | |

4) Une amélioration du modèle AR par un modèle AR-GARCH est nécessaire:

Test de Durbin-watson:

| | |
|---------------|--------|
| Durbin-watson | 1.4669 |
| Pr < DW | 0.0003 |
| Pr > DW | 0.9997 |

NOTE: Pr<DW is the p-value for testing positive autocorrelation, and Pr>DW is the p-value for testing negative autocorrelation

Q and LM Tests for ARCH Disturbances

| Order | Q | Pr > Q | LM | Pr > LM |
|-------|---------|--------|---------|---------|
| 1 | 12.5505 | 0.0004 | 12.3179 | 0.0004 |
| 2 | 31.6062 | <.0001 | 24.4094 | <.0001 |
| 3 | 36.4337 | <.0001 | 24.4863 | <.0001 |
| 4 | 36.8839 | <.0001 | 25.9081 | <.0001 |
| 5 | 37.3740 | <.0001 | 25.9110 | <.0001 |
| 6 | 37.7451 | <.0001 | 26.2201 | 0.0002 |
| 7 | 38.2016 | <.0001 | 26.2278 | 0.0005 |
| 8 | 39.5954 | <.0001 | 31.3959 | 0.0001 |
| 9 | 40.2557 | <.0001 | 32.0123 | 0.0002 |
| 10 | 40.2632 | <.0001 | 32.2145 | 0.0004 |
| 11 | 40.4118 | <.0001 | 32.2207 | 0.0007 |
| 12 | 40.8010 | <.0001 | 34.6114 | 0.0005 |

AR(1)- GARCH(1,1)

Estimation des paramètres

Algorithm converged.

GARCH Estimates

| | | | |
|----------------|------------|----------------|------------|
| SSE | 0.00041297 | Observations | 158 |
| MSE | 2.61374E-6 | Uncond Var | 2.69403E-6 |
| Log Likelihood | 800.178285 | Total R-Square | 0.0683 |
| SBC | -1575.0436 | AIC | -1590.3566 |
| Normality Test | 13.3838 | Pr > Chisq | 0.0012 |

| Variable | DF | Estimate | Standard Error | t Value | Approx Pr > t |
|-----------|----|----------|----------------|---------|----------------|
| Intercept | 1 | 0.002280 | 0.000161 | 14.15 | <.0001 |
| AR1 | 1 | -0.2416 | 0.0937 | -2.58 | 0.0099 |
| ARCH1 | 1 | 0.1289 | 0.0585 | 2.20 | 0.0277 |
| GARCH1 | 1 | 0.8018 | 0.0906 | 8.85 | <.0001 |

Etude des résidus du modèle AR(1)-GARCH(1,1)

Name of Variable = r

Mean of Working Series 0.00003
Standard Deviation 0.001616
Number of observations 158

Autocorrelations

| Lag | Covariance | Correlation | -1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | Std Error |
|-----|------------|-------------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|------|---|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| 0 | 2.61184E-6 | 1.00000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | 9.40667E-8 | 0.03602 | | | | | | | | | | | | * | | | | | | | | | | 0.079556 |
| 2 | -3.1246E-7 | -0.11963 | | | | | | | | | | | | ** | | | | | | | | | | 0.079659 |
| 3 | 6.17776E-7 | 0.23653 | | | | | | | | | | | | . | **** | | | | | | | | | 0.080788 |
| 4 | 4.17674E-7 | 0.15992 | | | | | | | | | | | | . | *** | | | | | | | | | 0.085058 |
| 5 | -1.9393E-7 | -0.07425 | | | | | | | | | | | | . | * | | | | | | | | | 0.086940 |
| 6 | 1.88095E-8 | 0.00720 | | | | | | | | | | | | . | . | | | | | | | | | 0.087341 |
| 7 | 1.5491E-7 | 0.05931 | | | | | | | | | | | | . | * | | | | | | | | | 0.087344 |
| 8 | 5.67218E-8 | 0.02172 | | | | | | | | | | | | . | . | | | | | | | | | 0.087599 |
| 9 | -1.4099E-7 | -0.05398 | | | | | | | | | | | | . | * | | | | | | | | | 0.087633 |
| 10 | 2.627E-7 | 0.10058 | | | | | | | | | | | | . | ** | | | | | | | | | 0.087843 |

Name of Variable = r

Period(s) of Differencing 1
Mean of Working Series -9.56E-6
Standard Deviation 0.002248
Number of observations 157
Observation(s) eliminated by differencing 1

Autocorrelations

| Lag | Covariance | Correlation | -1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | Std Error |
|-----|------------|-------------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|-------|---|---|---|---|---|---|---|-----------|
| 0 | 5.05209E-6 | 1.00000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | -2.1299E-6 | -0.42159 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.079809 |
| 2 | -1.3193E-6 | -0.26115 | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | | 0.092917 |
| 3 | 1.14039E-6 | 0.22573 | | | | | | | | | | | | | . | ***** | | | | | | | | 0.097480 |
| 4 | 3.6615E-7 | 0.07247 | | | | | | | | | | | | | . | * | | | | | | | | 0.100754 |
| 5 | -8.0324E-7 | -0.15899 | | | | | | | | | | | | | . | *** | | | | | | | | 0.101086 |
| 6 | 3.53323E-8 | 0.00699 | | | | | | | | | | | | | . | . | | | | | | | | 0.102666 |
| 7 | 2.60244E-7 | 0.05151 | | | | | | | | | | | | | . | * | | | | | | | | 0.102669 |
| 8 | 9.67919E-8 | 0.01916 | | | | | | | | | | | | | . | . | | | | | | | | 0.102834 |
| 9 | -5.6055E-7 | -0.11095 | | | | | | | | | | | | | . | ** | | | | | | | | 0.102856 |
| 10 | 3.18221E-8 | 0.00630 | | | | | | | | | | | | | . | . | | | | | | | | 0.103616 |

Name of Variable = r

Period(s) of Differencing 2
Mean of Working Series -6.2E-8
Standard Deviation 0.00241
Number of observations 156
Observation(s) eliminated by differencing 2

Autocorrelations

| Lag | Covariance | Correlation | -1 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | Std Error |
|-----|------------|-------------|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|-------|---|---|---|---|---|---|-----------|
| 0 | 5.80625E-6 | 1.00000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| 1 | -5.5161E-7 | -0.09500 | | | | | | | | | | | | | | ** | | | | | | | | 0.080064 |
| 2 | -3.5486E-6 | -0.61116 | | | | | | | | | | | | | | ***** | | | | | | | | 0.080783 |
| 3 | 1.37495E-6 | 0.23681 | | | | | | | | | | | | | | . | ***** | | | | | | | 0.106371 |
| 4 | 1.06512E-6 | 0.18344 | | | | | | | | | | | | | | . | **** | | | | | | | 0.109698 |
| 5 | -1.2371E-6 | -0.21306 | | | | | | | | | | | | | | . | *** | | | | | | | 0.111647 |
| 6 | -4.9397E-7 | -0.08508 | | | | | | | | | | | | | | . | ** | | | | | | | 0.114224 |
| 7 | 6.72554E-7 | 0.11583 | | | | | | | | | | | | | | . | ** | | | | | | | 0.114629 |
| 8 | -8.6561E-8 | -0.01491 | | | | | | | | | | | | | | . | . | | | | | | | 0.115377 |
| 9 | -9.6647E-7 | -0.16645 | | | | | | | | | | | | | | . | *** | | | | | | | 0.115389 |
| 10 | 6.40226E-7 | 0.11026 | | | | | | | | | | | | | | . | ** | | | | | | | 0.116918 |

Name of Variable = r

Period(s) of Differencing 3
Mean of Working Series 0.000012
Standard Deviation 0.001984

| | | Number of Observations | | 155 | |
|---|------------|---|----|---|-----------|
| | | Observation(s) eliminated by differencing | | 3 | |
| Autocorrelations | | | | | |
| Lag | Covariance | Correlation | -1 | 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 | Std Error |
| 0 | 3.93463E-6 | 1.00000 | | ***** | 0 |
| 1 | 4.15922E-8 | 0.01057 | | . * | 0.080322 |
| 2 | -4.3374E-7 | -.11024 | | . ** | 0.080331 |
| 3 | -1.3006E-6 | -.33056 | | . ***** | 0.081301 |
| 4 | 6.13565E-7 | 0.15594 | | . *** | 0.089553 |
| 5 | -2.641E-7 | -.06712 | | . * | 0.091288 |
| 6 | -5.1604E-7 | -.13115 | | . *** | 0.091606 |
| 7 | -4.1795E-7 | -.10622 | | . ** | 0.092810 |
| 8 | -2.2796E-7 | -.05794 | | . * | 0.093591 |
| 9 | 1.79345E-8 | 0.00456 | | . * | 0.093822 |
| 10 | 8.6011E-7 | 0.21860 | | . **** | 0.093823 |
| Name of Variable = r | | | | | |
| Period(s) of Differencing | | | | 4 | |
| Mean of Working Series | | | | 0.000011 | |
| Standard Deviation | | | | 0.002088 | |
| Number of Observations | | | | 154 | |
| Observation(s) eliminated by differencing | | | | 4 | |
| Autocorrelations | | | | | |
| Lag | Covariance | Correlation | -1 | 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 | Std Error |
| 0 | 4.36139E-6 | 1.00000 | | ***** | 0 |
| 1 | -2.7366E-7 | -.06275 | | . * | 0.080582 |
| 2 | -3.131E-7 | -.07179 | | . * | 0.080899 |
| 3 | 1.06835E-6 | 0.24496 | | . ***** | 0.081312 |
| 4 | -1.7462E-6 | -.40038 | | . * | 0.085970 |
| 5 | -3.8285E-7 | -.08778 | | . ** | 0.097328 |
| 6 | -5.9156E-8 | -.01356 | | . * | 0.097840 |
| 7 | -1.0252E-6 | -.23506 | | . ***** | 0.097853 |
| 8 | -5.2618E-8 | -.01206 | | . * | 0.101453 |
| 9 | 4.94266E-7 | 0.11333 | | . ** | 0.101462 |
| 10 | 4.36906E-8 | 0.01002 | | . * | 0.102281 |

4 Mise en oeuvre des simulations

Simulation de la loi normale

Simulation d'une loi $N(0,1)$: l'inversion de Moro

Il existe plusieurs méthodes permettant de simuler des lois normales. Nous retenons celle de Moro car elle s'avère être une **bonne méthode en terme de précision**.

La fonction de répartition de la loi normale n'est pas explicitement inversible. En pratique, on utilise une formule d'approximation de l'application réciproque de cette fonction. L'approximation est faite en fonction de la valeur de u (valeur générée pour la loi uniforme).

Posons $x = u - 0.5$, si $|x| < 0.42$ alors on pose $y = x^2$ et l'on a:

$$\Phi^{-1}(u) \approx x \frac{\sum_{k=0}^3 a_k y^k}{\sum_{k=0}^4 b_k y^k}.$$

Si en revanche $|x| \geq 0.42$, alors l'approximation est faite à l'aide des polynômes de Tchebychev:

$$\Phi^{-1}(u) = \varepsilon \left[\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right] - \varepsilon \frac{c_0}{2}$$

où ε est le signe de $\Phi^{-1}(u)$ et

$$t = k_1 \left[2 \ln \left(-\ln \left(\frac{1}{2} - |\Phi^{-1}(u)| \right) \right) - k_2 \right]$$

Le tableau suivant donne la valeur des coefficients a_i, b_i, c_i et k_i :

| i | a_i | b_i | c_i | k_i |
|---|-----------------|-----------------|----------------------------------|--------------------|
| 0 | 2.50662823884 | 1 | 7.7108870705487895 | 0.4179886424926431 |
| 1 | -18.6150062529 | -8.4735109309 | 2.7772013533685169 | 4.2454686881376569 |
| 2 | 41.39119773534 | 23.08336743743 | 0.3614964129261002 | |
| 3 | -25.44106049637 | -21.06224101826 | 0.0373418233434554 | |
| 4 | | 3.13082909833 | 2.829714303696 .10 ⁻³ | |
| 5 | | | 0.162571691792 .10 ⁻³ | |
| 6 | | | 8.0173304740 .10 ⁻⁶ | |
| 7 | | | 0.3840919865 .10 ⁻⁶ | |
| 8 | | | 0.0129707170 .10 ⁻⁶ | |

Enfin, la fonction $f(t) = \left[\sum_{i=0}^8 c_i T_i(t) \right] \frac{c_0}{2}$ peut être approchée par l'algorithme suivant.

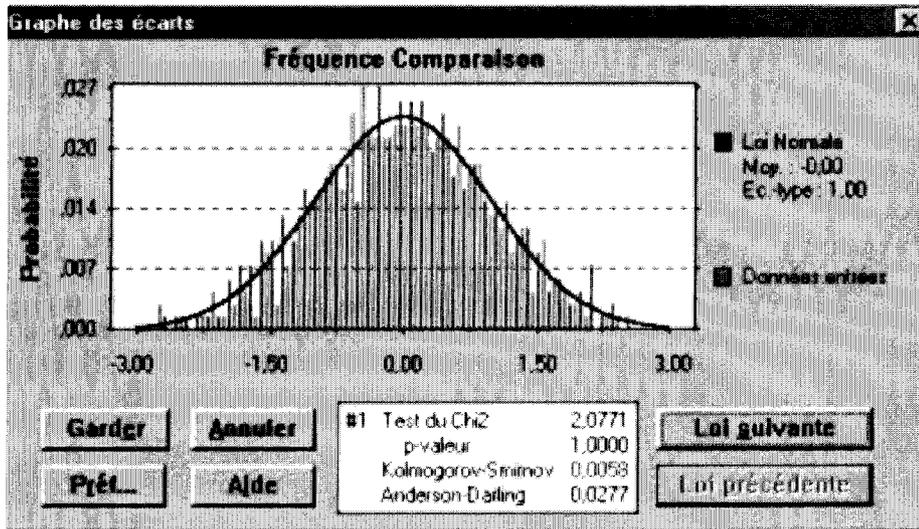
Soient d_1 et d_9 deux réels nuls.

Soient d_i , les réels déterminés par: $d_i = 2t d_{i+1} - d_{i+2} + c_i$ pour $i = 1, \dots, 8$.

Alors,

$$f(t) = t d_1 + d_2 + \frac{c_0}{2}$$

La formule de Moro s'avère être d'une très bonne précision. Par exemple, voici le résultat de la distribution de 500 valeurs simulées à l'aide d'un algorithme de la fonction de Moro.



Ce résultat montre que les valeurs simulées avec ce générateur suivent une distribution normale $N(0,1)$.

Simulation d'une loi $N(0,\Sigma)$: la décomposition de Cholewsky

Notre but est de générer aléatoirement une réalisation (multidimensionnelle) de la loi $N(0,\Sigma)$ où Σ est une matrice de variance-covariance de dimension supérieur à 1.

Nous savons maintenant générer des réalisations indépendantes de la loi $N(0,1)$. Pour obtenir une réalisation de $N(0,I_n)$, $n > 1$, il suffit alors d'empiler n tirages unidimensionnels. Puis, la loi normale étant stable par combinaison linéaire, il nous suffit de trouver une transformation linéaire qui à un vecteur X tiré de la loi $N(0,I_n)$ associe un vecteur Y tiré de la loi $N(0,\Sigma)$. En d'autres termes, nous cherchons une matrice A telle que $Y = AX$. Dès lors, $Var(Y) = E(YY') = A Var(X) A' = AA'$.

Finalement, il suffit de choisir A telle que $\Sigma = AA'$. La décomposition de Cholesky fournit une matrice A triangulaire inférieure.

Méthodes de simulation Monte Carlo

La simulation par Monte Carlo est fondée sur la loi des grands nombres. Le principe est de simuler, de façon indépendante, un grand nombre de variables aléatoires X ($X \in \mathbb{R}^d$ de densité f) puis de prendre comme estimateur du paramètre d'intérêt I_g la moyenne empirique des $g(X)$ réalisés. De sorte que:

$$I_g = E[g(X)]$$

Ainsi, la loi forte des grands nombres assure que pour $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d de variables aléatoires sur \mathbb{R}^d de densité f :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) = E[g(X)] \text{ p.s}$$

Si l'erreur commise est nulle de façon asymptotique, ce n'est pas le cas à distance finie. Il convient donc de mettre en place des outils de contrôle de la convergence. Ceux-ci reposent essentiellement sur le théorème Central Limite.

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - E[g(X)] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} N(0,1)$$

où $\sigma^2 = \text{Var}[g(X)]$. Il apparaît alors que la variance de loi simulée joue un rôle fondamental pour la construction des intervalles de confiance bilatéral à 95% asymptotique:

$$P \left(E[g(X)] \in \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 95\%$$

Dans le cas le plus général, l'écart type σ n'est pas calculable. Il est donc lui aussi approché par une méthode de Monte-Carlo. En effet,

$$\sigma^2 = E \left[(g(X) - E[g(X)])^2 \right]$$

On a donc:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \right)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2 \text{ p.s}$$

Par ailleurs, les simulations Monte Carlo permettent l'obtention d'estimateurs dont la vitesse de convergence est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

5 Titre synthétique non obligataire

Estimation de μ par application du théorème de Zellner

Soit alors \tilde{X} le vecteur des rendements observés (variables expliquées):

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} r_1^{MSCI Fr} \\ \vdots \\ r_T^{MSCI Fr} \\ r_1^{MSCI Eur} \\ \vdots \\ r_T^{MSCI Eur} \\ r_1^{MSCI World} \\ \vdots \\ r_T^{MSCI World} \end{pmatrix}$$

Le modèle s'écrit alors: $\tilde{X} = (I_3 \otimes e_T)\mu + \varepsilon$ où

- $e_T \in R^T$ ne comprend que des 1
- ε vérifie: $E(\varepsilon) = 0$ et $Var(\varepsilon) = \sigma \otimes I_t$

On se retrouve alors dans le cadre du théorème de Zellner, selon lequel l'estimation par moindres carrés ordinaires du paramètre $\beta = {}^t(b_1, \dots, b_g, b_G)$ du modèle:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_g \\ Y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_g & 0 \\ 0 & 0 & A_G \end{pmatrix} \beta + u \text{ avec } \begin{matrix} Var(u) = \sigma \otimes I \\ A_i \stackrel{loi}{=} A_j \forall i, j \end{matrix}$$

est équivalente à l'estimation par moindres carrés généralisés. En d'autres termes, nous pouvons estimer μ par la moyenne empirique des rendements $(r_t^i)_{t=1..T}$ de chaque actif i .

6 Modélisation de la marge actif / passif

La Value at Risk

La VaR analytique

Dans le modèle, la variation algébrique d'un portefeuille est représentée par une combinaison linéaire de K facteurs gaussiens.

On suppose:

$$F(t) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

et

$$\Delta_{t+1}P = P(t+1) - P(t) = a^t F(t) \sim \mathcal{N}(a^t \mu, a^t \Sigma a).$$

En écrivant:

$$\frac{\Delta_{t+1}P - a^t \mu}{\sqrt{a^t \Sigma a}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

et

$$P\left(\frac{\Delta_{t+1}P - a^t \mu}{\sqrt{a^t \Sigma a}} \leq \Phi^{-1}(1-x)\right) = x,$$

on obtient :

$$VaR = \Phi^{-1}(x) \sqrt{a^t \Sigma a} - a^t \mu.$$

En supposant que $\mu = 0$; il reste :

$$VaR = \Phi^{-1}(x) \sqrt{a^t \Sigma a}$$

Cette méthode repose sur trois hypothèses : les variations dans le temps de la valeur du portefeuille sont indépendantes, les facteurs de risques sont normaux et la valeur de portefeuille dépend linéairement de ces facteurs. D'autre part, cette mesure nécessite la connaissance de la matrice de variance-covariance Σ , démarche difficile.

La VaR historique

La VaR historique est fondée sur les variations historiques des facteurs de risque. Elle ne repose pas sur une hypothèse sur la loi des facteurs de risque. Mais il est tout de même nécessaire d'avoir un modèle sous-jacent pour estimer les facteurs de risque historiques. Un des obstacle majeur à cette méthode est la vitesse de convergence de l'estimateur du quantile faible.

La VaR Monte Carlo

La VaR Monte Carlo est fondée sur les variations simulées des facteurs de risque, donnant une loi de distribution admissible avec l'historique.

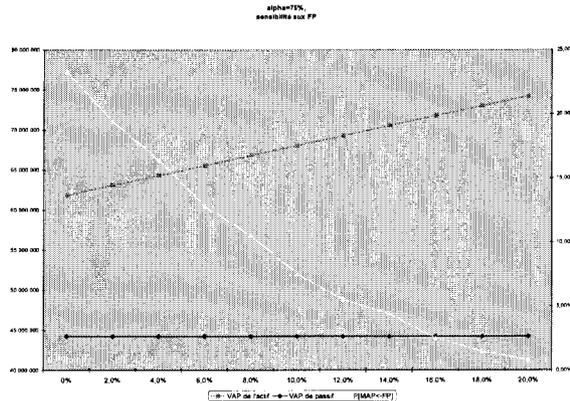
7 Résultats sur l'ensemble du portefeuille

Sensibilité de la probabilité de ruine aux fonds propres

| Postes | 0% | 2% | 4% | 6% | 8% | 10% |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| VAP(Actif) | 61 872 353 | 63 109 800 | 64 347 247 | 65 584 694 | 66 822 141 | 68 059 588 |
| VAP(Passif) | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 |
| Marge Actif-Passif | 17 650 106 | 18 887 553 | 20 125 000 | 21 362 447 | 22 599 894 | 23 837 341 |
| P[MAP < -MAP] | 23,30 % | 19,40 % | 16,40 % | 12,80 % | 10,50 % | 7,50 % |

| Postes | 12% | 14% | 16% | 18% | 20% |
|--------------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| VAP(Actifs) | 69 297 035 | 70 534 482 | 71 771 929 | 73 009 376 | 74 246 823 |
| VAP(Passif) | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 | 44 222 247 |
| Marge Actif-Passif | 25 074 788 | 26 312 236 | 27 549 683 | 28 787 130 | 30 024 577 |
| P[MAP < -MAP] | 5,50 % | 4,40 % | 2,50 % | 1,50 % | 0,80 % |

Nous représentons les données des tableaux par le graphique suivant.



**Etude de la distribution de la marge de solvabilité
pour différentes valeurs de α et de fonds propres : sorties SAS**

Marge de solvabilité pour
 $\alpha=92,5\%$ et FP (Fonds Propres)= 4% des PM (Provisions Mathématiques)

| Moments | | | |
|-----------------|------------|------------------|------------|
| N | 10000 | Sum Weights | 10000 |
| Mean | 12718233.5 | Sum Observations | 1.27182E10 |
| Std Deviation | 14535900.4 | Variance | 2.11292E14 |
| Skewness | 0.93431241 | Kurtosis | 0.96236422 |
| Uncorrected SS | 3.72835E17 | Corrected SS | 2.11081E17 |
| Coeff Variation | 114.291818 | Std Error Mean | 459665.531 |

| Basic Statistical Measures | | | |
|----------------------------|----------|---------------------|------------|
| Location | | Variability | |
| Mean | 12718234 | Std Deviation | 14535900 |
| Median | 10144633 | Variance | 2.11292E14 |
| Mode | . | Range | 99797339 |
| | | Interquartile Range | 18627264 |

| Tests for Location: Mu0=0 | | | |
|---------------------------|-------------|-------------------|--------|
| Test | -Statistic- | -----p Value----- | |
| Student's t | t 27.66845 | Pr > t | <.0001 |
| Sign | M 312 | Pr >= M | <.0001 |
| Signed Rank | S 207290 | Pr >= S | <.0001 |

Quantiles (Definition 5)

| Quantile | Estimate |
|------------|-----------|
| 100% Max | 87115611 |
| 99% | 55406008 |
| 95% | 42074387 |
| 90% | 33657286 |
| 75% Q3 | 20524525 |
| 50% Median | 10144633 |
| 25% Q1 | 1897261 |
| 10% | -3359010 |
| 5% | -6443235 |
| 1% | -10814218 |
| 0% Min | -12681728 |

Extreme Observations

| -----Lowest----- | | -----Highest----- | |
|------------------|-----|-------------------|-----|
| Value | Obs | Value | Obs |
| -12681728 | 279 | 56326109 | 85 |
| -12527478 | 864 | 56506075 | 636 |
| -12186991 | 920 | 59919369 | 739 |
| -12174317 | 148 | 65141733 | 133 |
| -12094667 | 981 | 87115611 | 8 |

Marge de solvabilité pour $\alpha=75\%$ et FP = 4% des PM

| Moments | | | |
|-----------------|------------|------------------|------------|
| N | 10000 | Sum Weights | 10000 |
| Mean | 20125000.3 | Sum Observations | 2.0125E10 |
| Std Deviation | 26323929.6 | Variance | 6.92949E14 |
| Skewness | 1.82765732 | Kurtosis | 5.70489988 |
| Uncorrected SS | 1.09727E18 | Corrected SS | 6.92256E17 |
| Coeff Variation | 130.802133 | Std Error Mean | 832435.744 |

| Basic Statistical Measures | | | |
|----------------------------|----------|---------------------|------------|
| Location | | Variability | |
| Mean | 20125000 | Std Deviation | 26323930 |
| Median | 14361047 | Variance | 6.92949E14 |
| Mode | . | Range | 213746384 |
| | | Interquartile Range | 28340564 |

| Tests for Location: Mu0=0 | | | |
|---------------------------|-------------|-------------------|--------|
| Test | -Statistic- | -----p Value----- | |
| Student's t | t 24.17604 | Pr > t | <.0001 |
| Sign | M 308 | Pr >= M | <.0001 |
| Signed Rank | S 202752 | Pr >= S | <.0001 |

| Quantiles (Definition 5) | |
|--------------------------|-----------|
| Quantile | Estimate |
| 100% Max | 194167010 |
| 99% | 106883722 |
| 95% | 71443772 |
| 90% | 54700356 |
| 75% Q3 | 31109591 |
| 50% Median | 14361047 |
| 25% Q1 | 2769027 |
| 10% | -5596057 |
| 5% | -10002825 |
| 1% | -15869198 |
| 0% Min | -19579374 |

| Extreme Observations | | | |
|----------------------|-----|-------------------|-----|
| -----Lowest----- | | -----Highest----- | |
| Value | Obs | Value | Obs |
| -19579374 | 363 | 138181944 | 819 |
| -19250168 | 920 | 142194855 | 884 |
| -17918421 | 381 | 150288336 | 319 |
| -17294726 | 151 | 191276986 | 8 |
| -17063762 | 864 | 194167010 | 737 |

| |
|--|
| Marge de solvabilité pour $\alpha=75\%$ et FP = 14% des PM |
|--|

| Moments | | | |
|-----------------|------------|------------------|------------|
| N | 10000 | Sum Weights | 10000 |
| Mean | 26312235.6 | Sum Observations | 2.63122E10 |
| Std Deviation | 28266460.9 | Variance | 7.98993E14 |
| Skewness | 1.92225334 | Kurtosis | 6.23179666 |
| Uncorrected SS | 1.49053E18 | Corrected SS | 7.98194E17 |
| Coeff Variation | 107.427059 | Std Error Mean | 893863.98 |

| Basic Statistical Measures | | | |
|----------------------------|----------|---------------------|------------|
| Location | | Variability | |
| Mean | 26312236 | Std Deviation | 28266461 |
| Median | 20042260 | Variance | 7.98993E14 |
| Mode | . | Range | 233732500 |
| | | Interquartile Range | 29435573 |

| Tests for Location: Mu0=0 | | | |
|---------------------------|-------------|------------------|--------|
| Test | -Statistic- | ----p Value----- | |
| Student's t | t 29.43651 | Pr > t | <.0001 |
| Sign | M 384 | Pr >= M | <.0001 |
| Signed Rank | S 233177 | Pr >= S | <.0001 |

Quantiles (Definition 5)

| Quantile | Estimate |
|------------|-----------|
| 100% Max | 218293159 |
| 99% | 120640419 |
| 95% | 80180383 |
| 90% | 62801575 |
| 75% Q3 | 37337784 |
| 50% Median | 20042260 |
| 25% Q1 | 7902211 |
| 10% | -1240938 |
| 5% | -5246930 |
| 1% | -11402624 |
| 0% Min | -15439341 |

Extreme Observations

| -----Lowest----- | | -----Highest----- | |
|------------------|-----|-------------------|-----|
| Value | Obs | Value | Obs |
| -15439341 | 363 | 154677065 | 819 |
| -15012850 | 920 | 160379991 | 884 |
| -13525616 | 381 | 169201630 | 319 |
| -13075679 | 151 | 210818159 | 8 |
| -12558465 | 519 | 218293159 | 737 |

Marge de solvabilité pour $\alpha=92,5\%$ et FP = 10% des PM

| Moments | | | |
|-----------------|------------|------------------|------------|
| N | 10000 | Sum Weights | 10000 |
| Mean | 16003261.3 | Sum Observations | 1.60033E10 |
| Std Deviation | 14725143.6 | Variance | 2.1683E14 |
| Skewness | 0.94507526 | Kurtosis | 1.01958673 |
| Uncorrected SS | 4.72717E17 | Corrected SS | 2.16613E17 |
| Coeff Variation | 92.0133923 | Std Error Mean | 465649.925 |

| Basic Statistical Measures | | | |
|----------------------------|----------|---------------------|-----------|
| Location | | Variability | |
| Mean | 16003261 | Std Deviation | 14725144 |
| Median | 13336094 | Variance | 2.1683E14 |
| Mode | . | Range | 102489815 |
| | | Interquartile Range | 18872373 |

| Tests for Location: Mu0=0 | | | |
|---------------------------|-------------|-------------------|--------|
| Test | -Statistic- | -----p Value----- | |
| Student's t | t 34.36758 | Pr > t | <.0001 |
| Sign | M 390 | Pr >= M | <.0001 |
| Signed Rank | S 234056 | Pr >= S | <.0001 |

| Quantiles (Definition 5) | |
|--------------------------|----------|
| Quantile | Estimate |
| 100% Max | 92831005 |
| 99% | 58922496 |
| 95% | 45576094 |
| 90% | 37239770 |
| 75% Q3 | 23924187 |
| 50% Median | 13336094 |
| 25% Q1 | 5051814 |
| 10% | -321135 |
| 5% | -3401244 |
| 1% | -7736240 |
| 0% Min | -9658811 |

| Extreme Observations | | | |
|----------------------|-----|-------------------|-----|
| -----Lowest----- | | -----Highest----- | |
| Value | Obs | Value | Obs |
| -9658811 | 279 | 61377909 | 819 |
| -9517011 | 864 | 62622548 | 737 |
| -9237109 | 920 | 63376649 | 739 |
| -9167450 | 148 | 68923290 | 133 |
| -9111662 | 363 | 92831005 | 8 |

8 Exemple sur un individu

Hypothèse sur l'individu:

| | | | | |
|----------|------------|-------|-----------|-----------|
| Individu | année nais | rente | ax à 1,5% | Prov Math |
| 33 | 1921 | 5 200 | 8,41 | 43 738 |

Hypothèse sur les actifs:

Obligation

(100% du portefeuille)

| | | Sans indexation sur I | avec indexation sur I |
|---|--------|--------------------------|--------------------------|
| taux de coupon de l'obligation | | 4,50% | 2,50% |
| maturité de l'obligation | 60 ans | | |
| prise en compte des frais dans l'obligation | 0,003 | | |
| prix initial | 100 | | |

Zero- coupon

| | |
|--------|-------|
| T | 60 |
| R(0,T) | 1,17% |

Résultats avec Fonds propres égaux à 4500 €:

| | Sans prise en compte de l'inflation | Avec prise en compte de l'inflation |
|-----------------|---|---|
| VA Actif moyen | 53 301 | 45 679 |
| VA Passif moyen | 34 959 | 39 908 |
| <hr/> | | |
| VA MAP moyen | 18 342 | 5 771 |
| P[MAP<4500] | 21,40% | 40,10% |

8 Exemple sur un individu

