



**Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention
du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon**

le 26 juin 2006

Par : HAAS Stéphanie

Titre : Méthodologie d'évaluation économique des traités proportionnels en réassurance vie
Application au swap de mortalité

Confidentialité : Confidentiel

Membre du jury I.A.

M. PLANCHET Frédéric

Entreprise :

PARTNER RE

Membres du jury I.S.F.A.

M. LEBOISNE Nicolas

M. LOISEL Stéphane

M. SERANT Daniel

Directeur de mémoire :

Mme EMILY Anne

Invité :

Secrétariat :

Mme GARCIA Marie-José

Mme ANTUNES Maria

Mme BARTHELEMY Diane

Mme BRUNET Marie-Christine

Mme MOUCHON Marie-Claude

Bibliothèque :

Mme SONNIER Michèle

Résumé

Les grands projets actuels, le reporting Embedded Value, les normes IFRS, Solvabilité 2, ont mis l'accent sur les questions relatives à l'évaluation et la valorisation des activités du secteur assurantiel. Partner Re, dont les activités en réassurance vie se sont fortement développées, souhaite mettre en place un calcul de la valeur économique de ses traités de réassurance vie, et en particulier pour les traités proportionnels aux engagements longs, en utilisant MoSes.

Pour cela, les concepts relatifs aux questions d'évaluation sont d'abord examinés afin de définir le cadre de l'étude et respecter une certaine cohérence avec les pratiques de marché.

Ensuite, les différents flux financiers liés aux opérations de réassurance sont analysés afin d'en déduire une méthodologie standard de type Best Estimate.

Cette démarche est ensuite appliquée au swap de mortalité qui propose le transfert du risque de longévité au réassureur. Enfin l'approche Best Estimate ne fournissant à la lecture qu'une unique valeur, nous envisageons une seconde approche qui propose de tenir compte de l'incertitude autour des tables de mortalité. Nous illustrons comment mesurer cette incertitude avec la méthodologie de Lee Carter, devenue une référence dans la construction de tables prospectives.

Mots clés : Embedded Value, valeur économique, projections de flux, Best Estimate, risque de longévité, modèle de Lee Carter, modèle Poisson Log Bilinéaire, simulation de tables prospectives.

Abstract

The current focus on large projects such as Embedded Value reporting, IFRS standards, Solvency 2, has highlighted questions relating to the evaluation and appreciation of insurance and reinsurance operations.

Backed to its strong development in life reinsurance, Partner Re intends to implement an economic value calculation of its reinsurance treaties and in particular its long term proportional treaties, using MoSes.

First, the concepts relating to the evaluation are examined with a view to defining the framework of the study and to respect a certain coherence with market practices.

Then the different financial cash flows linked to reinsurance operation are analysed in order to deduce a standard methodology based on a Best Estimate approach.

This step is then applied to the mortality swap, which transfers the risk of longevity to the reinsurer. Lastly, since the Best Estimate approach provides only one single value, we consider a second approach which suggests taking the uncertainty surrounding the prospective mortality tables into account. We shall illustrate how to estimate the uncertainty by using the Lee Carter methodology, now a reference for the construction of prospective tables.

Key words: Embedded Value, Economic Value, projections of cash flow, Best Estimate, longevity risk, Lee Carter model, Poisson Log Bilinear model, simulation of prospective tables.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon maître de Stage Madame Anne EMILY, pour avoir mis son expérience à ma disposition, sa disponibilité, ainsi que pour tous ses conseils.

Je remercie également Messieurs Cédric FETIVEAU et Jean BRUNET pour leur contribution dans la réalisation de ce mémoire.

Sommaire

Introduction..... 7

Partie 1 : Concepts dans un environnement international et réglementaire..... 8

1. L'Embedded Value 8

1.1 Définition..... 8

1.2 Composantes de l'Embedded Value..... 9

1.3 Exemple de calcul de la valeur actuelle des profits (pertes) futurs..... 14

1.4 Critiques de L'Embedded Value Traditionnelle 16

2. Le contexte international 19

2.1 European Embedded Value / Market Consistent Embedded Value..... 19

2.2 Deux grands projets connexes : les normes IFRS et Solvabilité 2..... 22

Partie 2 : Méthodologie de calcul de la valeur économique des traités..... 32

1. Rappel des grands principes liés à la réassurance 32

1.1 Définition..... 32

1.2 Les objectifs 33

1.3 Les modalités de transfert du risque..... 33

1.4 Les deux formes de réassurance : proportionnelle et non proportionnelle 34

2. Etude du portefeuille..... 36

2.1 Segmentation du portefeuille..... 36

2.2 Les évènements particuliers 38

2.3 Identification des flux..... 39

2.4 La valeur économique du portefeuille..... 44

3. Hypothèses Best Estimate 46

3.1	La projection du compte technique	46
3.2	La projection des frais	47
3.3	La projection des besoins en capital.....	48
3.4	Le taux d'actualisation	48
Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité.....		50
1. Présentation du produit		50
1.1	Les solutions classiques de réassurance pour les rentes.....	50
1.2	Le Swap de Mortalité	51
1.3	Etude des flux	52
2. Approche Best Estimate.....		54
3. Approche par simulations		59
3.1	Le risque de longévité	59
3.2	Le modèle de Lee & Carter (1992-2000)	62
3.3	Le modèle de Poisson Log Bilinéaire.....	77
3.4	Application avec MoSes.....	81
Conclusion.....		84
Bibliographie		85
Annexes		86

Introduction

Depuis quelques années, d'importants projets ont vu le jour pour les secteurs de l'assurance et de la réassurance. Ces projets interagissent autour des questions relatives à l'évaluation et à la valorisation des activités, notamment dans le but d'une transparence accrue et d'une meilleure maîtrise des risques.

Partner Re, qui a vu le jour en 1992 comme réassureur de catastrophes naturelles, a fortement diversifié ses activités et est aujourd'hui un acteur important sur le marché de la réassurance.

Ses activités en réassurance vie se sont fortement développées ces dernières années.

La compagnie souhaite aujourd'hui mettre en place un calcul de la valeur économique de ses traités de réassurance vie et en particulier pour les traités proportionnels aux engagements les plus longs. Ceci répond dans un premier temps à un besoin interne de pilotage, avec comme but ultime la publication d'une Embedded Value.

Pour cela, Partner Re souhaite utiliser MoSes, qui est un logiciel de projection de flux financiers qu'elle vient d'acquérir.

Dans la première partie de ce mémoire nous examinons le concept d'Embedded Value, dont la valeur économique du portefeuille est une des deux composantes, ainsi que les évolutions récentes de ce concept. Nous examinons également le contexte international avec les grands projets actuels en relations avec l'évaluation des actifs et des passifs : les normes IFRS et le projet de directive Solvabilité 2.

Nous étudions dans la seconde partie, les mécanismes de la réassurance et les différents flux financiers qui entrent dans la composition de la valeur économique des traités. Ceci passe par l'étude de la structure du portefeuille, et du compte de résultat afin de définir la valeur économique des traités. Nous retenons ensuite une méthodologie standard de type Best Estimate afin de projeter les différents flux avec MoSes.

Dans la dernière partie, nous appliquons la méthodologie retenue au swap de mortalité, qui réassure le risque de longévité pour les produits de rentes. A l'aide de MoSes nous répliquons les mécanismes du produit afin d'obtenir l'ensemble des flux financiers futurs. Nous calculons alors la valeur économique pour un traité en portefeuille.

Enfin, l'approche Best Estimate, ne permettant pas de mesurer une quelconque incertitude sur la valeur obtenue, nous nous sommes intéressés à celle liée à la table de mortalité utilisée, en simulant un grand nombre de tables. Nous illustrons comment procéder à l'aide de la méthodologie de Lee Carter et son extension le modèle Poisson Log Bilinéaire, utilisés ici comme des modélisations stochastiques de la mortalité.

Partie 1 : Concepts dans un environnement international et réglementaire

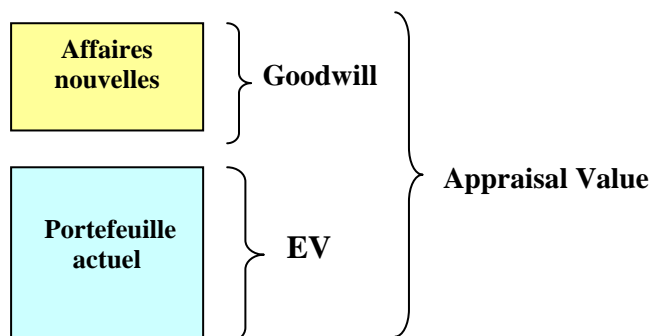
1. L'Embedded Value

1.1 Définition

L'Embedded Value (EV), ou "valeur intrinsèque", est un indicateur de référence pour les entreprises exerçant des opérations d'assurance ou de réassurance. L'EV va permettre de mieux rendre compte des performances de l'entreprise compte tenu des spécificités des opérations qu'elle réalise : en effet, l'inversion du cycle de production rend l'image figée du bilan insuffisante, et a fortiori pour les branches à déroulement long où les principes comptables s'avèrent totalement inadaptés, ne reflétant que la performance instantanée de l'entreprise.

D'origine anglo-saxonne, cet indicateur est aujourd'hui très largement utilisé par les professionnels européens, notamment pour la communication financière et les opérations de transactions (Fusions et Acquisitions), et tend à se généraliser.

L'EV est l'évaluation de la valeur économique de l'entreprise, en situation de Run-off¹; la justification de ce dernier point tient au fait que l'EV se veut être une approche prospective de *l'existant* à la date du calcul ; ainsi les éléments à prendre en compte dans le calcul ne doivent pas s'appuyer sur des perspectives de développement et de croissance, difficiles à déterminer, qui sont par défaut les objectifs du management. La prise en compte de ce potentiel de résultat supplémentaire généré par les affaires nouvelles, appelé Goodwill², fait l'objet d'un autre calcul. Ajouté à l'EV, le Goodwill permettra de déterminer la valeur estimée ou Appraisal value de l'entreprise.



Si de nombreuses entreprises se limitent en général au calcul de l'EV, c'est qu'il paraît plus fiable et moins discutable que l'Appraisal Value du fait d'un environnement économique changeant ; néanmoins les entreprises publient souvent

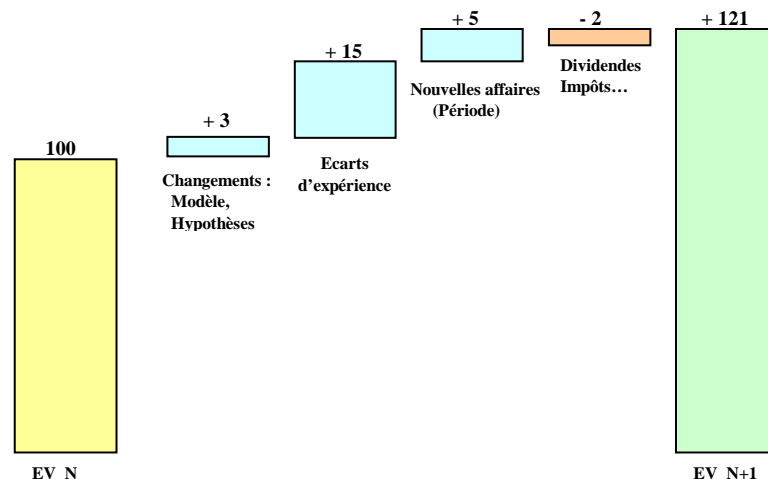
¹ Mot d'origine anglo-saxonne qui signifie littéralement "cesser de courir". Ici cela veut dire l'arrêt de la croissance ; les activités sont réduites à la gestion des affaires existantes.

² A ne pas confondre avec le Goodwill en tant que survaleur de l'entreprise, liée à des éléments qualitatifs comme la réputation, un emplacement privilégié, ... comptabilisé en tant qu'élément d'actif incorporel en cas d'acquisition.

simultanément à l'EV à titre informatif, la valeur d'une année d'affaire nouvelle estimée.

L'EV est un outil de communication externe, pour les actionnaires, les marchés financiers et les agences de rating ; mais c'est également un outil interne d'analyse de la performance, car le résultat comptable peut être très différent du résultat économique. Une analyse de la variation d'un exercice à l'autre permet de quantifier la création de valeur et de mesurer l'enrichissement réel :

Exemple d'analyse de la création de valeur pour l'année N+1 :



Aujourd'hui, si le calcul s'envisage également pour des opérations d'assurance Non Vie, il reste néanmoins plus traditionnel en Vie. Ceci provient du principe forfaitaire qui régit ces opérations : les capitaux sous risques sont connus dès la souscription, ce qui facilite la projection des flux de capitaux.

1.2 Composantes de l'Embedded Value

L'EV se présente habituellement comme la somme de l'actif net réévalué (ANR) et de la valeur actuelle des profits (ou pertes) futurs.

$$\text{EV} = \text{ANR} + \text{Valeur actuelle des profits futurs.}$$

▫ L'Actif Net Réévalué

Il s'agit d'une approche bilantielle.

Tout d'abord rappelons ce qu'est l'actif net : il s'agit de la valeur comptable de la société. Elle est calculée en soustrayant de la somme des actifs, l'ensemble des dettes contractées.

Bilan Comptable

Actif	Dettes
	Actif Net

Néanmoins cette vision purement comptable ne correspond pas à la véritable image de l'entreprise, puisque par exemple les actifs corporels sont évalués à leur valeur historique, les plus values latentes n'étant pas prises en compte.

L'actif net réévalué (ANR), au contraire, se base sur la valeur vénale (réelle) et non seulement comptable des actifs. Il restitue de cette façon une image plus fidèle de la valeur économique de la société (à un moment donné).

L'évaluation des éléments du bilan s'effectue ainsi sur la base de leur valeur de marché, c'est-à-dire,

- une valeur de marché directement observable pour les instruments négociés sur un marché organisé,
- une valeur théorique obtenue par une actualisation des flux au taux de rendement actuariel d'opérations de marché, de durée et de risque comparables à ceux de l'instrument évalué,
- une valeur estimée à l'aide d'un modèle d'évaluation de type Black et Scholes par exemple, lorsqu'il s'agit d'instruments conditionnels.

L'ANR s'interprète comme la valeur de marché des actifs appartenant aux actionnaires, nette de tous impôts : il est donc nécessaire d'effectuer quelques ajustements, comme :

- éliminer les actifs incorporels,
- éliminer la valeur des titres de participations dans les filiales pour la remplacer par l'actif net réévalué de ces filiales afin d'éviter une double comptabilisation,
- rajouter la part des plus-values latentes attribuable aux actionnaires et non prise en compte dans la valeur du portefeuille.

Il s'agit donc de la valeur comptable des actifs du bilan qui ne sont ni en représentation des provisions³, ni des dettes vis-à-vis des tiers, et corrigée des plus ou moins values latentes et impositions s'y rattachant.

³ Les provisions techniques et les autres engagements réglementés doivent, à toute époque, être couverts par des actifs équivalents (article R.332-1 du code des assurances). Le choix des placements doit obéir à des règles de sécurité, de dispersion et de liquidité.

▫ La valeur actuelle des profits ou pertes futurs

Par définition, il s'agit de la valeur actualisée des résultats futurs espérés distribuables liés aux contrats en portefeuille, diminuée du coût généré par l'immobilisation du capital alloué pour l'activité.

Précisons les points clés de cette définition :

Résultat distribuable :

Comme pour l'actif net réévalué, ceci sous-entend résultats distribuables *aux actionnaires*. Il s'agit donc des résultats nets, après participations aux bénéficiaires et impositions.

Résultats futurs espérés :

Ce point sera précisé plus en détail dans la suite puisqu'il s'agit d'un des aspects les plus importants. Ici il s'agit d'effectuer la projection de l'ensemble des cash flows attendus, liés aux contrats.

Contrats en portefeuille :

L'entreprise est considérée comme étant en Run-off à la date d'évaluation. Donc seules les affaires présentes dans le portefeuille seront prises en compte pour les calculs.

Capital alloué :

Ce que l'on entend par capital alloué est le montant de capital que l'entreprise met en regard de son portefeuille pour pouvoir faire face à ses engagements, compte tenu des risques liés à ce portefeuille.

On parle également de capital requis, que l'on pourrait imaginer être le capital requis réglementaire comme le Risk Based Capital utilisé aux Etats-Unis, ou la marge de solvabilité réglementaire en Europe.

Néanmoins la relation n'est pas systématique : pour l'Europe, ce capital requis réglementaire est communément appelé marge de solvabilité ; il émane des instances de contrôle des sociétés d'assurance dans le cadre d'une réglementation prudentielle. Il a essentiellement pour but de protéger les assurés contre le risque d'insolvabilité de leur assureur en exigeant un certain niveau de fonds propres. Ce niveau correspond à un montant minimal pour faire face à des chocs qui pourraient affecter l'actif comme le passif. Pour le passif on peut imaginer une détérioration importante du rapport sinistres à primes et pour l'actif, on entend par là une baisse de la rentabilité des placements.

La marge de solvabilité est conçue de manière à ce que la compagnie d'assurance dispose d'un excédent de capital suffisant pour donner à ses dirigeants et aux autorités de surveillance le temps de résoudre la plupart des difficultés. Il s'agit donc d'une garantie supplémentaire qui vient s'ajouter aux actifs détenus en contrepartie des provisions techniques.

L'exigence de marge de solvabilité est déterminée en fonction des branches d'assurances. De manière simplifiée on peut retenir qu'en assurance vie la marge de solvabilité doit être supérieure à 1% des provisions mathématiques des contrats en

unités de comptes pour lesquels l'assureur n'assume pas le risque de placement, et de 4% des provisions mathématiques pour les contrats exprimés en euro, en intégrant la prise en compte partielle de la réassurance.

Par ailleurs, une directive européenne définit les éléments admissibles pour la couverture de la marge de solvabilité :

- les fonds propres,
- les titres subordonnés (suivant certaines limitations),
- la réserve de capitalisation⁴,
- certaines plus value latentes , avec accord des autorités de contrôle.

Actuellement, le procédé pour les sociétés d'assurance est donc le suivant : chaque année a lieu le calcul du montant de la marge de solvabilité à l'aide de la formule standard, et on vérifie au niveau du bilan que la somme des éléments admis est au moins égale au montant exigé. Ceci ne signifie pas que la compagnie n'a pas à vérifier et ajuster son montant de fonds propres durant l'année au rythme des nouvelles affaires souscrites.

Néanmoins, cette notion reste différente de celle du capital alloué ; dans ce dernier cas il s'agit d'une allocation de capital dont le choix dépend du management. Cette allocation peut être spécifique à un produit ou à un portefeuille particulier et a lieu dès la souscription. La démarche n'est donc pas identique même si l'objectif est similaire. Ainsi chaque compagnie peut allouer à son activité un niveau de capital supérieur et c'est ce montant qui doit être pris en compte pour le calcul du coût d'immobilisation détaillé dans la suite.

Cette précaution peut être d'autant plus importante que les exigences réglementaires actuelles peuvent conduire à un niveau insuffisant de capitaux compte tenu d'une exposition particulière à certains risques. Le système actuel pour le calcul de la marge n'est pas "ajusté au risque" (risk-adjusted). Ce point est d'ailleurs le coeur du projet Solvabilité 2⁵ qui fera l'objet de la future directive sur la solvabilité des entreprises d'assurance.

Néanmoins, en l'absence d'une politique d'allocation de capital par le biais d'un modèle interne, souvent de type "Value at Risk"⁶, le capital alloué sera par défaut le capital requis réglementaire, qui sert de borne inférieure.

On peut noter également qu'il n'existe pas actuellement en Europe de contraintes de solvabilité minimale applicables aux réassureurs. Une directive européenne dans ce sens a bien été approuvée par le Parlement Européen le 7 juin 2005 mais ne l'a pas encore été par le Conseil Européen. Ces modalités ne sont donc pas encore transposées dans les législations nationales.

⁴ Provision technique destinée à lisser les résultats financiers des placements obligataires à taux fixe, en cas de variation de taux. Les plus-values réalisées en cas de cession d'obligations y sont versées et les moins-values réalisées sont compensées par un prélèvement.

⁵ Développé plus en détail dans la suite

⁶ Les modèles internes de type "Value at Risk" doivent tenir compte de la taille, des protections en réassurance et des corrélations croisées entre les divers risques. De tels modèles nécessitent de s'appuyer sur une base statistique suffisamment riche et sont en général complexes à mettre en oeuvre.

Le coût d'immobilisation

Les contraintes d'immobilisation de capital pour les affaires en portefeuille génèrent effectivement un coût. Parce qu'il sert de "garde fou", ce capital ne doit en effet pas être soumis au risque de placements ; il est donc investi à un taux sans risque, qui ne sera pas le taux servi aux actionnaires, puisque leur rémunération doit bien sûr tenir compte du risque induit par l'activité. Cette différence entre le taux servi et le taux sans risque s'appelle la prime de risque ; elle représente généralement la part la plus importante de la rémunération. C'est cette différence de taux qui génère un coût de façon purement mécanique.

Exemple de calcul du coût d'immobilisation :

L'entreprise alloue un capital de 150 pour son portefeuille l'année n.

Le montant de la marge de solvabilité s'élève à 100 pour cette année.

Le capital alloué est donc bien supérieur au montant réglementaire.

Ce capital est placé au taux sans risque : 4 %.

Les revenus financiers sont imposés à hauteur de 25%.

Le taux servi aux actionnaires est de 9%.

*Le coût de l'immobilisation en janvier n+1 est de : $150 * (9\% - (1-25\%)*4\%)$*

Enfin, on peut rencontrer parfois une Embedded Value publiée suivant un autre schéma ; elle est alors décomposée suivant les trois éléments suivants.

- **Le capital libre** : c'est la valeur de marché (après taxes) des actifs en représentation du capital complémentaire au capital requis et des engagements (dettes, PM).

- **Le capital requis diminué du coût d'immobilisation** : c'est donc le capital considéré comme nécessaire à l'activité, déjà impacté du coût.

- **La valeur de portefeuille seule** : la valeur actuelle des résultats futurs probables ou espérés, issus des contrats en portefeuille à la date d'évaluation.

Cette présentation est similaire à la précédente, avec comme seule nuance que le capital requis fait l'objet d'un traitement à part.

1.3 Exemple de calcul de la valeur actuelle des profits futurs

Le calcul de la valeur actuelle des profits futurs consiste en la projection puis en l'actualisation de l'ensemble des flux futurs espérés, à un horizon donné ; on la nomme également, la projection du compte de résultat.

Ceci passe par plusieurs étapes qui seront reprises et détaillées dans la seconde partie dans le cas de traités de réassurance :

- faire des hypothèses concernant le déroulement futur du portefeuille : rachats, mortalité, l'horizon de projection des flux...
- projeter sous ces hypothèses l'ensemble des flux (les revenus liés aux contrats, les sinistres, les impôts) afin de déterminer les revenus futurs,
- projeter les besoins futurs en capital,
- déterminer les profits annuels distribuables,
- calculer la valeur actuelle de ces profits.

Nous présentons ici le principe sur un exemple simple, une rente temporaire de 10 ans, qui prévoit le versement d'une prestation annuelle d'un montant de 1000€ à termes échus (fin d'année) ; l'assuré paie en contrepartie une prime unique dès la souscription (date $t=0$).

Caractéristiques du contrat :

Age de l'assuré : 60 ans
Table utilisée pour la tarification : TPRV 93
Taux technique : 2.5%
Chargement d'inventaire : 1.5%
Chargement commercial : 3%

Les hypothèses utilisées pour la projection des cash flows sont les suivantes :

Le choix de l'horizon est particulièrement simple ici, on le fixe égal à la durée de la rente soit 10 ans.

Hypothèse sur la mortalité : conforme à la table utilisée pour la tarification.
Rendement financier attendu (provisions mathématique et capital): 4%
Frais réels la première année (coûts d'acquisition) : 4% de la prime
Frais pour les années suivantes (gestion, paiements...) : 1% des prestations
Taux d'imposition : 33%

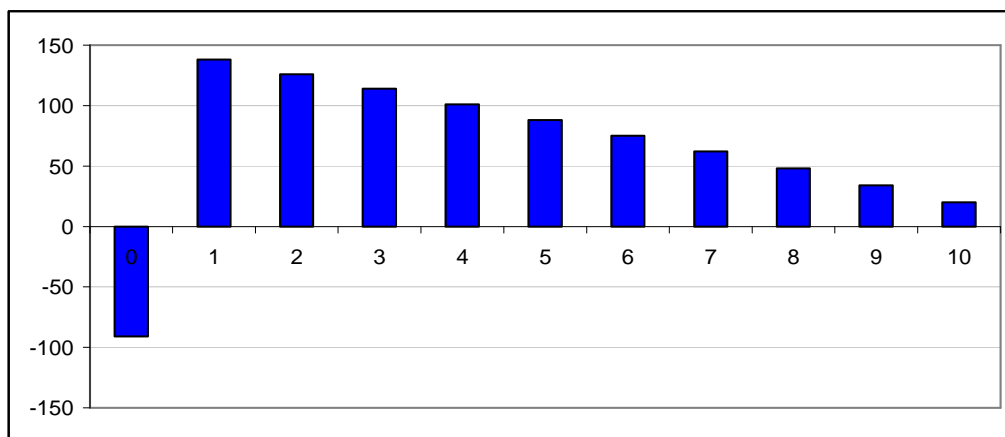
Capital alloué : 4% des provisions mathématiques

Au moment de la souscription, l'ensemble des cash flows futurs générés par ce contrat est présenté dans le tableau ci-dessous :

Partie 1 : Concepts dans un environnement international et réglementaire

	t=0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Primes	9110										
Revenus financiers	0	353	322	289	256	222	187	152	115	78	39
Prestations	0	(996)	(996)	(996)	(995)	(995)	(995)	(994)	(994)	(993)	(993)
Frais	(364)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)	(10)
Variation de Provision	(8836)	790	810	830	850	851	892	914	937	960	983
Revenu total	(90)	137	126	113	101	68	74	62	48	35	19
Impôts	0	45	42	37	33	22	24	20	16	12	6
Revenu après impôts	(90)	92	84	76	68	46	50	42	32	23	13
Capital alloué	(354)	32	32	33	34	35	36	37	37	38	39
Intérêts sur capital alloué (avant imposition)	0	14	13	12	10	9	7	6	5	3	2

Il reste ensuite à actualiser, avec le taux retenu, les revenus après impôts et le coût du capital alloué, calculé comme décrit précédemment. L'allure des résultats avant impôts est la suivante.



Profil des résultats (avant impôt) du contrat.

Pour une affaire qui vient d'être souscrite, on peut constater une perte la première année, due notamment au coût d'acquisition, et il n'est pas rare qu'il faille attendre quelques années avant de dégager un profit.

Ceci montre également, que dès lors que la date d'évaluation est postérieure à la date de souscription, la valeur actuelle des profits futurs n'est pas un indicateur de la rentabilité d'une affaire : en effet, on ne tient pas compte des pertes possibles les premières années, de même que s'il s'agit d'une affaire ancienne, il se peut que le bénéfice ait déjà été réalisé dans le passé.

1.4 Critiques de L'Embedded Value Traditionnelle

Depuis quelques années, des critiques ont émergé à propos du calcul de l'Embedded Value traditionnelle qui est "déterministe". Certaines ont d'ailleurs reçu un écho important avec la chute des marchés financiers en 2000 et la baisse des taux d'intérêts.

Si le concept est unanimement compris, la méthodologie retenue peut varier d'une société à une autre. Pour conserver sa crédibilité, l'EV requiert donc un encadrement et une communication détaillée. Néanmoins, l'EV est jugée comme étant encore très hétérogène en Europe.

Certains autres points faibles de ce concept sont inhérents au principe, puisque la méthode fait référence à des résultats futurs *probables*. Ainsi si l'on reprend les principales étapes de l'évaluation de la valeur de portefeuille, on peut d'ores et déjà isoler les points délicats suivants :

- *Les hypothèses*

Cette première étape est très importante puisqu'il s'agit d'établir les hypothèses qui serviront pour la projection des flux futurs. On peut distinguer les deux types d'hypothèses suivantes :

- les hypothèses d'expérience, qui en quelque sorte envisagent l'avenir comme une réplique du passé (mortalité, loi de rachat...)
- les hypothèses économiques, qui sont liées à la conjoncture et aux prévisions économiques (inflation, rendements financiers...)

Cela signifie par conséquent qu'il est nécessaire de prendre des hypothèses dites "Best Estimate" à propos du déroulement futur du portefeuille.

Cette notion qui joue un rôle central dans le calcul de l'EV a fait l'objet de nombreuses discussions dans le monde de l'actuariat et on peut la définir de la façon suivante :

Les hypothèses Best Estimate doivent permettre de refléter les résultats les plus probables. Elles doivent être réalistes et raisonnables, avec la convention que si deux scénarios sont équiprobables, celui retenu est celui qui produira soit l'engagement le plus élevé, soit la valeur de l'actif la moins élevée.

Le choix des hypothèses va donc être un premier exercice délicat et devra faire l'objet d'une justification et d'une publication détaillée.

- *Le taux d'actualisation*

L'autre étape difficile s'avère le choix du taux d'actualisation pour le calcul de la valeur actuelle des profits projetés. Ce choix est crucial car il constitue une composante importante du pilotage de l'entreprise.

Ce taux appelé également Risk Discount Rate, est le rendement attendu par les actionnaires pour leurs investissements dans la compagnie. L'idée sous-jacente est

similaire à celle du Modèle d'évaluation des actifs financiers⁷, (MEDAF) ou l'équivalent anglo-saxon le "Capital Asset Pricing Model" : les investisseurs attendent un rendement identique à celui que leur aurait procuré un investissement "direct" (produits financiers) présentant le même niveau de risque. Ce taux est déterminé à partir d'un taux sans risque (exemple OAT⁸ 10 ans) et d'une prime de risque, qui comme son nom l'indique, est appréciée en fonction du risque de l'activité.

Cette prime doit prendre en compte l'ensemble des risques de la compagnie notamment les risques de placements et les risques dits opérationnels liés à l'éventualité d'une défaillance interne (humaine, informatique...) et à des événements externes.

Cependant il n'existe pas de méthode qui ferait l'unanimité et qui permettrait de convertir ce risque en prime additionnelle au taux sans risque.

Cela signifie donc que le choix final du taux d'actualisation dépend exclusivement du choix du management qui reste influencé par les pratiques de marché.

▪ *Les garanties et options*

Certains produits offrent des clauses ou garanties contractuelles qui peuvent être interprétées comme des options (souvent américaines) détenues par les assurés. Ces options sont dites options cachées car elles ne sont pas émises explicitement par les sociétés d'assurance mais sont intrinsèques aux contrats ; certaines clauses ont un caractère légal donc obligatoire, comme la clause de participation aux bénéfices, tandis que d'autres voient le jour dans des phases de croissance ou sont un argument de marketing, comme le taux minimum garanti.

Par exemple, les options rencontrées fréquemment sur le marché français de l'assurance sont les suivantes:

- le taux minimum garanti (TMG),
- la participation aux bénéfices,
- les garanties plancher (pour les contrats en unité de compte),
- les conversions en rente suivant des conditions garanties,
- les rachats (conjoncturels).

Néanmoins, elles exposent le bilan de la société à un risque de taux d'autant plus important que les marchés financiers sont volatiles et les contrats d'assurance "souples".

Jusqu'à dernièrement les options cachées ne faisaient pas l'objet d'une grande attention, qu'il s'agisse de tarification ou de mise en place de stratégies de couverture.

⁷ Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers : il permet de valoriser les actifs financiers, notamment les actions. L'hypothèse de base est qu'un investisseur souhaite maximiser la rentabilité, en minimisant le risque apprécié à travers la volatilité : le taux de rentabilité k exigé s'exprime alors sous la forme suivante : $k = r_f + \beta(k_m - r_f)$ où r_f est le taux sans risque et k_m est le rendement d'un indice de marché donné et β représente la volatilité de l'actif par rapport à la volatilité du marché considéré.

⁸ Obligation Assimilable au Trésor: C'est l'instrument utilisé depuis 1985 par l'Etat français pour emprunter sur des durées comprises entre 7 et 30 ans.

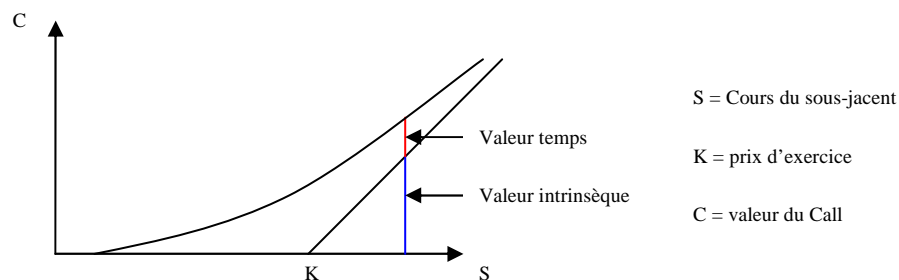
Mais aujourd'hui c'est un problème pris très au sérieux depuis l'effondrement de la bourse en 2000. Par exemple, comme fréquemment ces garanties ne font pas l'objet

d'une prime supplémentaire, les contrats prévoient de plus en plus des pénalités de rachat et des clauses de fidélité afin de refreiner un comportement arbitragiste quand les taux fluctuent.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue que la motivation des assurés dépasse la simple rationalité économique, comme pour les rachats conjoncturels ; cet aspect comportemental rend par conséquent toujours difficile la détermination du coût de l'option pour la société.

Une évaluation reste néanmoins nécessaire pour déterminer l'Embedded Value.

Dans le calcul traditionnel le coût est déterminé en combinant une valorisation explicite et implicite ; rappelons pour cela que la valeur d'une option dépend de deux composantes représentées sur le graphique suivant dans le cas d'une option d'achat :



- la valeur intrinsèque : valeur si l'échéance était immédiate,
- la valeur temps : la surcôte entre le cours et la valeur intrinsèque.

Cette dernière est d'autant plus élevée que la durée de vie de l'option est grande.

La valeur intrinsèque est déterminée explicitement comme la différence entre la valeur du cours et le prix d'exercice, tandis que la valeur temps est prise en compte implicitement au travers de la prime de risque du taux d'actualisation. Cette valorisation forfaitaire est critiquée par son manque de transparence qui soulève des doutes quant à la valorisation économique des options.

Ce dernier point est un exemple pour lequel les projections déterministes ne permettent pas de déterminer de manière satisfaisante le risque lié aux options.

Conclusion : L'EV est aujourd'hui une mesure de la performance économique très utilisée par les compagnies sur un marché devenu mondial. Néanmoins, compte tenu de la complexité grandissante des opérations d'assurance, l'EV traditionnelle souffre d'un manque de transparence et de comparabilité. Les projections déterministes qui dans certains cas classiques sont tout à fait pertinentes, s'avèrent insuffisantes pour évaluer les options et garanties. Les entreprises qui souhaitent calculer leur Embedded Value doivent tenir compte des nouvelles méthodes proposées et des grands projets actuels.

2. Le contexte international

2.1 *European Embedded Value / Market Consistent Embedded Value*

En réponse aux problèmes liés à l'Embedded Value traditionnelle, une variété de changements a été suggérée et les deux propositions qui ont été les plus plébiscitées sont l'European Embedded Value et la méthode Market Consistent Embedded Value dont nous présentons les principaux points.

2.1.1 *European Embedded Value (EEV)*

C'est une série de 12 principes publiés en mai 2004, élaborés par le CFO⁹ Forum, qui regroupe les directeurs financiers de plusieurs groupes d'assurance européens. L'objectif de ces principes est de rendre les Embedded Value publiées plus comparables et plus objectives, en introduisant un cadre méthodologique complet. L'application de ces principes est en vigueur depuis la fin de l'année 2005.

Les quatre axes majeurs qui ont orienté les travaux du CFO Forum étaient les suivants:

- donner suffisamment de crédibilité et de clarté à cette publication afin d'assurer un minimum de cohérence entre toutes les publications d'EV,
- inclure l'évaluation de la valeur temps des options financières incorporées aux contrats afin de répondre à une critique majeure de l'EV traditionnelle,
- définir un minimum d'informations à communiquer (sensibilités permettant de comparer les résultats d'une compagnie à une autre),
- garantir la cohérence de la méthodologie avec le modèle de l'assurance vie.

Ainsi, si les définitions des concepts restent globalement identiques, certains principes préconisent une approche différente de celle de l'EV traditionnelle, notamment pour ce qui est la question soulevée par l'évaluation des options et des garanties :

- *"la valeur des cash flows futurs est réduite de la valeur des options et garanties financières, c'est-à-dire celles influencées par la valeur de marché". (Principe 6)*
- *"l'évaluation de la valeur temps des options est basée sur des techniques stochastiques. Celles-ci doivent être cohérentes avec la méthodologie et les hypothèses de l'EV". (Principe 7)*

Cela signifie notamment, que la valorisation d'une option se fait globalement par le biais d'un modèle stochastique ; la valeur temps se retrouve alors en effectuant la différence entre la valeur globale de l'option issue du modèle et la valeur intrinsèque.

⁹ Chief Financial Officer

Ensuite, pour la valorisation, il faut tenir compte de l'ensemble de risques financiers :

- le risque de marché : lié à l'évolution des indices macro-économiques (taux d'inflation, immobilier, ...),
- le risque de crédit : pour les obligations dites "corporate", soumises au risque de défaillance de l'entreprise émettrice,
- le risque de liquidité, pour lequel on peut envisager de subdiviser le portefeuille d'actifs et d'interdire la vente de certaines parties lors des projections.

Il est également rappelé que le capital requis doit au moins être égal au capital réglementaire ; il préconise cependant d'utiliser un modèle interne d'allocation de capital et de calculer le coût d'immobilisation sur cette base.

Les derniers principes précisent enfin que la détermination des hypothèses doit tenir compte de l'analyse du passé, du présent, et du futur attendu, ainsi que de toute autre information utile. Les hypothèses utilisées pour les projections doivent être :

- propres au produit,
- Best Estimate pour chaque groupe de polices,
- cohérentes avec l'ensemble du reporting financier, interne (pricing, valuation...), et externes (bases GAAP), ainsi qu'avec les données de marché,
- revues annuellement, et toute modification doit être justifiée.

On peut enfin mentionner que le CFO Forum énonce que le taux d'actualisation est égal au taux sans risque plus une prime de risque et encourage l'utilisation de taux différents par type de portefeuille et de zone géographique.

2.1.2 *Market-Consistent Embedded Value (MCEV)*

Définissons tout d'abord ce que signifie Market Consistent :

"Une méthode est dite Market Consistent si elle permet de retrouver les prix de marché d'une série d'actifs de référence, comme le prix d'obligations, d'option de taux,..."

Ainsi évaluer des actifs et des passifs signifie ici déterminer un prix de marché. De manière générale, les actifs disposent "directement" d'une valeur de marché. Pour ce qui est de la valeur des passifs, elle est obtenue en considérant la valeur de marché d'actifs comparables, ou par réplcation de la valeur du portefeuille en actifs financiers.

Dans cette approche trois points diffèrent de l'approche traditionnelle :

- le taux d'actualisation utilisé, est fixé objectivement en se basant sur les rendements observés sur les marchés au moment de l'évaluation,

- le coût des options est évalué explicitement par la mise en œuvre de techniques stochastiques cohérentes avec le prix de marché, le caractère "Market Consistent" étant assuré par le choix de modèles risque neutre ou univers réel et déflateurs¹⁰,
- le calcul du coût du capital tient compte de l'ensemble des coûts en particulier des "*frictionnal costs*" qui sont des cash flows négatifs pour les actionnaires ; ces coûts sont étroitement liés aux mécanismes mis en œuvre pour générer des bénéfices et de ce fait sont difficiles à modéliser. On peut citer les coûts liés à une double imposition (les actionnaires sont taxés lors de leur investissement puis sur les bénéfices), et ceux liés à un doublement des frais de transaction.

Cependant, précisons que l'approche Market Consistent pour un calcul d'Embedded Value n'est que partielle, car la méthode ne s'applique aisément que pour les risques financiers ; une partie des risques n'est pas parfaitement répliquable et ne peut être évaluée comme Market Consistent : c'est le cas du risque d'assurance.

2.1.3 Comparaison

Pour l'European Embedded Value, les calculs ne doivent pas forcément être "Market Consistent"; la société peut donc soit choisir un modèle stochastique avec actualisation à taux constant (approche non Market Consistent) ou bien opter pour une évaluation de type "Market Consistent" ; dans ce cas, si les projections ont été réalisées dans un univers risque neutre, les flux espérés sont actualisés à l'aide de la courbe des taux sans risque ; s'il s'agit de l'univers réel, ils sont actualisés grâce aux déflateurs.

On peut par ailleurs noter que les calculs de MCEV s'appuient également sur les principes de l'European Embedded Value.

On peut naturellement s'interroger sur la méthode à utiliser. Pour cela on peut tout d'abord rappeler que la notion de cohérence avec les marchés financiers est une notion relative, car soumise à l'aléa financier (pas de réplification parfaite de la courbe des taux etc.). Cela fait donc plus référence à un niveau acceptable de cohérence, qu'à un calcul exact.

Cependant, la valorisation Market Consistent peut paraître plus homogène avec les nouvelles normes (IFRS, Solvency 2), et les bases utilisées pour l'évaluation sont non contestables.

Ce point reste néanmoins libre pour les compagnies qui devront justifier leur choix. Une approche non Market Consistent est ainsi un choix plus offensif et peut avoir pour objectif la prise en compte des anticipations économiques du management.

En définitive quelle que soit l'approche choisie ces deux méthodes d'évaluation convergent sensiblement, par le recours à des techniques stochastiques.

¹⁰ Facteur d'actualisation stochastique qui permet d'actualiser des flux sous la probabilité historique

Ces normes n'ont pas pour objet d'être appliquées à d'autres fins que strictement comptables, et donc non fiscales ou prudentielles. Leur choix s'est basé non pas sur les secteurs d'activités mais sur *les types de transactions* effectuées par l'ensemble des entreprises. Ceci répond bien à un objectif d'harmonisation, en facilitant la lecture des comptes et donc la comparabilité d'entreprises de secteurs différents.

- **Le projet "norme contrat d'assurance".**

Un autre objectif affiché est l'amélioration de la transparence des bilans ; pour cela, en 1997, l'IASC entreprend de développer un cadre permettant d'évaluer les actifs et les passifs à leur juste valeur (Fair Value). Ceci s'appliquera à tous les instruments financiers, qui feront l'objet de deux normes IAS 39 et 32.

Cette notion de "juste valeur" doit être comprise plus comme un concept, que comme une règle d'évaluation. Une des définitions possible est la suivante:

C'est le montant pour lequel un élément d'actif ou de passif pourrait être réglé entre parties bien informées et consentantes, dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale.

Pour la déterminer, on peut procéder comme suit :

- c'est la valeur de marché s'il existe un marché et des conditions de concurrence normales (liquidité, absence de position dominante...) : cela peut être son prix d'achat ou de vente s'il est coté, ou bien la valeur obtenue par référence aux prix récents de transactions identiques ou quasi-identiques,
- c'est la valeur obtenue par comparaison avec des instruments similaires,
- c'est la valeur obtenue à l'aide d'un modèle d'évaluation, s'appuyant par exemple sur la base de flux de trésorerie futurs escomptés.

Cependant il apparaît clairement que c'est un exercice périlleux en cas d'absence de marché liquide. Cela remet alors en cause la fiabilité de l'évaluation effectuée et peut être source de manipulations : c'est le cas pour les passifs d'assurance.

C'est pourquoi plutôt que d'inclure les opérations d'assurance dans une norme globale "instruments financiers", l'IASC reconnaît la nécessité d'élaborer une norme spécifique pour traiter de l'ensemble des questions relatives aux contrats d'assurance : il s'agit de la future norme IFRS 4.

Il crée alors l'Insurance Steering Committee, comité directeur en charge de traiter les questions spécifiques aux contrats d'assurance. Mais la définition d'un contrat d'assurance alors proposée ne séduit guère les professionnels de l'assurance et les autorités de contrôle ; il est alors dissout, et laisse place à l'Insurance Advisory Committee créée par l'IASB en 2000.

En 2001, le DSOP (Draft Statement of Principles of Insurance Contracts) est présenté par l'IASB. Il tient compte des remarques et recommandations formulées par les secteurs publics et privés et dans un document de travail (Issue Paper) publié en 1999.

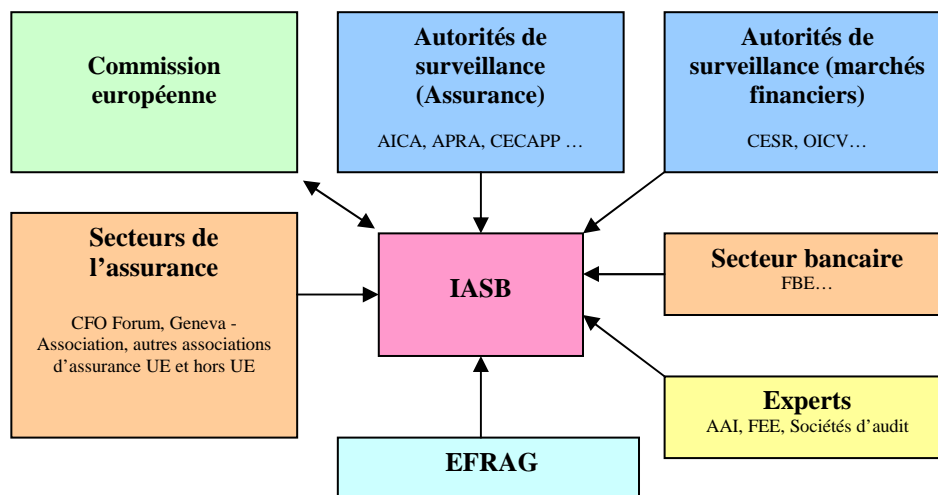
L'IASB admet alors en particulier que les contrats d'assurance ne font pas l'objet d'un commerce actif et introduit la notion de valeur propre à l'entreprise (Entity Specific Value, ESV¹⁴) comme alternative à la juste valeur ; cette notion pourra alors être utilisée en l'absence d'information fondée sur le marché.

En mai 2002, sous la pression croissante des assureurs et organismes publics, l'IASB reconnaît la complexité du projet "norme contrat d'assurance" en cours d'élaboration. Il décide alors de procéder en deux phases, de manière à ce que certains éléments puissent être déjà mis en place dès 2005, sans pour autant retarder le reste du projet :

- la *phase I* concerne la norme IFRS 4, spécifique aux contrats d'assurances et par extension les normes IAS 32 (présentation des instruments financiers et informations à fournir) et IAS 39 (comptabilisation et évaluation des instruments financiers) créés en 1998. Les travaux se sont achevés par la publication de la norme IFRS 4 en mars 2004, amenée à évoluer avec la phase II ; la phase I est entrée en vigueur le 1^{er} janvier 2005 conformément à l'échéance fixée par l'UE et correspond à une période transitoire.

- les travaux de la *phase II* ont repris en septembre 2004 pour une mise en pratique prévue théoriquement en 2007 ; ils se concentrent donc sur les points laissés en suspens pendant la phase I, notamment la question controversée de l'évaluation des engagements d'assurance.

Les Acteurs du projet norme assurance :



AICA : Association Internationale des contrôleurs d'assurance, APRA : Australian Prudential Regulation Authority, CECAPP : Comité Européen des Contrôleur des Assurances et des pensions Professionnelles, CESR : Committee of European Security Regulator, AAI : Association Actuarielle Internationale, EFRAG : European Financial Reporting Advisory Group, FBE : Fédération des Banques Européennes, FEE : Fédération des Experts Comptables Européens, OICV : Organisation Internationale des Commissions de Valeurs.

¹⁴ Le DSOP définit l'ESV comme la valeur des dépenses que devrait effectuer la société pour se dégager de ses obligations envers les assurées ou d'autres bénéficiaires, en accord avec la durée contractuelle de ses engagements.

▪ Conséquences en Assurance et Réassurance

L'impact des nouvelles normes IAS/ IFRS est très important pour ce secteur d'activité. Tout d'abord parce que les aspects comptables y sont complexes : le passage d'un document unique, le plan comptable de l'assurance, à un corpus de normes (une trentaine applicable à ce secteur), constitue un profond changement. Par exemple,

Pour les placements :

- Pour les instruments financiers : IAS 32 et IAS 39
- Immobilier : IAS 2, 16 et 40
- Trésorerie : IAS 7 et 39
- Participations (Filiales) IAS 27, 28, et 36

Pour les passifs d'assurances :

- Contrats d'assurance : IFRS 4 (en deux phases), IAS 18
- Instruments Financiers : IAS 32 / 39

Les normes IFRS 4 et IAS 39 sont celles qui impactent le plus les compagnies. Analysons brièvement les principes comptables de ces normes ainsi que leurs impacts sur le bilan et le compte de résultat.

▫ La norme IFRS 4 ou norme "contrat d'assurance" (Phase I)

Elle a un caractère transitoire puisqu'elle n'est pas finalisée : il s'agit de premières recommandations qui seront complétées par les travaux de la phase II. C'est pourquoi jusqu'à la fin de cette seconde phase, les principes locaux en matière de contrats d'assurance continueront de s'appliquer avec toutefois quelques changements. L'objectif général est d'apporter quelques améliorations aux pratiques comptables existantes et d'identifier les facteurs de risques potentiels ainsi que les points sensibles des contrats d'assurance.

Les principaux points de cette norme sont les suivants :

- *La définition d'un contrat d'assurance*

*"Un contrat d'assurance est un contrat sous lequel un parti (l'assureur) couvre un risque d'assurance **significatif** et accepte d'indemniser une autre partie (l'assuré) ou un autre bénéficiaire si un événement futur incertain (l'événement assuré) touche défavorablement l'assuré ou un autre bénéficiaire".*

Ainsi pour qu'un produit puisse être qualifié de contrat d'assurance, il doit entraîner un transfert de risque significatif ; le risque d'assurance doit préexister au contrat et ne pas être de nature financière, comme une variation de taux d'intérêts, de taux de change, d'indice de prix etc.

En assurance vie, cela impacte les produits d'épargne, les plans de retraite et les rentes pour lesquels le caractère significatif du risque d'assurance est à vérifier : par exemple pour les contrats d'assurance vie, on considère qu'il y a un risque d'assurance significatif lorsque le capital payable en cas de décès est nettement plus élevé que la valeur de rachat ou le capital en cas de vie ; sinon ils sont considérés comme des

contrats d'épargne pure et relèvent des normes IAS 32 et 39 sur les instruments financiers.

En assurance non vie, tous les produits traditionnels font partie des contrats d'assurance.

Néanmoins si la composante " service " domine au sein du contrat, ce dernier relève alors de l'IAS 18.

Quant aux produits moins traditionnels comme l'assurance crédit, les obligations catastrophes (Cat Bond), les dérivés climatiques, ils ne sont en général pas considérés comme des contrats d'assurance à moins qu'ils ne remplissent certaines conditions bien précises¹⁵.

Pour la réassurance, la plupart des transactions entrent dans la catégorie des contrats d'assurance ; certains traités de réassurance financière n'en font cependant pas partie.

- Le test de suffisance du passif

La norme IFRS 4 impose un test de suffisance du passif à chaque arrêté des comptes pour les contrats d'assurance et de réassurance, ainsi que les contrats d'investissement, également appelés contrat d'assurance vie avec participation discrétionnaire.

L'objectif de ce dispositif est de créer un mécanisme permettant de réduire la possibilité que des pertes significatives ne soient pas prises en compte en Phase I : il ne constitue pas un mode d'évaluation des passifs d'assurance mais consiste à vérifier que les passifs comptabilisés sont suffisants. Il s'agit donc d'un test global comparant la valeur de l'ensemble des flux de trésorerie futurs des contrats, aux engagements provisionnés, dans les comptes de l'assureur :

$$\text{Passifs des contrats} \pm \text{autres éléments d'actif et de passif liés} \geq \text{Total des flux de trésorerie futurs (y compris options et coûts)}$$

- La suppression des provisions pour égalisation

L'IASB considère que les provisions ne sont autorisées que si elles correspondent à des sinistres qui se sont déjà produits. La provision pour égalisation étant destinée à absorber des pertes exceptionnelles et lisser le résultat, ne remplit pas cette condition ; elle est dorénavant interdites et doit être incorporées aux fonds propres.

- L'évaluation des dérivés incorporés¹⁶ et la dissociation des composantes de dépôts.

Les dérivés incorporés doivent être comptabilisées à leur juste valeur et les évolutions doivent être portées au compte de résultat. Pendant la phase I, si le dérivé est lui-même

¹⁵ Assurance crédit : les versements doivent être destinés à rembourser son détenteur d'une perte due au défaut de paiement d'un débiteur, selon les conditions d'un titre de créance.

Obligation catastrophe : le détenteur doit être impacté négativement par l'événement spécifié.

Dérivés climatiques : ils doivent prévoir des paiements basés sur des fluctuations d'une variable climatique spécifique à une contrat.

¹⁶ Un dérivé incorporé prend la forme d'une disposition d'un contrat qui a pour effet de modifier des éléments clés du contrat en fonction de l'évolution d'un taux, d'un prix, d'un indice ou d'une autre variable sous-jacente.

considéré comme un contrat d'assurance ou étroitement lié au contrat hôte, les compagnies en sont dispensées.

Par ailleurs, certains contrats d'assurance ont une composante d'assurance et de dépôts. Cette dernière est une composante contractuelle qui n'est pas comptabilisée comme un dérivé selon IAS 39 mais qui entrerait dans le champ d'application de IAS 39 si elle était un instrument séparé.

Dans certains cas, les assureurs pourront ou devront comptabiliser ces composantes séparément.

A ce stade, les questions de calcul de l'EV ne font pas partie des travaux menés pour la norme IFRS 4 ; quelques points sont néanmoins précisés par le Board notamment pour les entreprises qui incluent l'EV dans leur bilan. Le petit nombre d'assureurs qui jusqu'alors l'incluaient sous la forme d'un passif d'assurance et d'un actif incorporel peut continuer ; quant à ceux qui souhaiteraient le faire à présent, ceci n'est possible que sous certaines conditions, notamment de pertinence et d'absence de marge sur les investissements, afin de ne pas attribuer à certains postes une valeur supérieure à leur juste valeur. C'est une pratique cependant marginale.

▫ La norme IAS 39

Cette norme a été élaborée de manière simultanée avec la norme l'IAS 32 en 1998 ; elle a été depuis révisée plusieurs fois. Elle définit la manière de comptabiliser les actifs et les passifs relatifs aux instruments financiers¹⁷. Si les contrats d'assurance répondent bien à la définition d'un des instruments financiers (en tant que passif), seuls ceux ne répondant pas à la définition d'un contrat d'assurance telle qu'exposée dans la norme IFRS 4, rentrent dans le champ d'application de cette norme. Elle va jouer un rôle majeur en comptabilité des assurances puisqu'elle s'applique non seulement aux actifs financiers venant en représentation des engagements techniques, mais également aux passifs de certains contrats d'assurance vie considérés par l'IASB comme des contrats d'épargne.

Tous les instruments financiers doivent faire l'objet d'un classement suivant une des quatre catégories présentées ci-dessous. Ces catégories déterminent la manière dont chaque instrument est évalué et l'emplacement où les gains et les pertes seront comptabilisés. Un choix entre plusieurs catégories est souvent possible, et il faudra prendre alors en compte les caractéristiques de l'instrument ainsi que l'utilisation que l'on souhaite en faire. Les reclassements sont en effet rarement permis par la suite et il importe donc de faire le bon choix d'emblée.

¹⁷ Un instrument financier est un contrat qui crée un actif financier pour une partie et un passif financier ou un instrument de capitaux propres pour une autre partie : "Financier" signifie que le contrat sera réglé directement ou indirectement en trésorerie (ou au moyen d'un instrument de capitaux propres s'il s'agit d'un actif).

Partie 1 : Concepts dans un environnement international et réglementaire

Les quatre catégories d'instruments financiers sont :

- *les actifs ou passifs détenus à des fins de transaction* ("trading") : presque tous les dérivés¹⁸ entrent dans cette catégorie, ainsi que tous les instruments qui ont pour objet de réaliser un profit.

- *les placements détenus jusqu'à leur échéance* ("held to maturity") : cette catégorie regroupe les actifs financiers à échéance fixe, assortis de paiements déterminés ou déterminables, pour lesquels l'entreprise a l'intention et la capacité de les conserver jusqu'à leur échéance. Ce sont donc uniquement des instruments d'emprunt.

- *les prêts et créances* émis par l'entreprise et non détenus à des fins de transaction (en ce cas, ils doivent être considérés comme "trading") : cette catégorie comprend tous les prêts et créances, sauf les titres de créance.

- *les instruments financiers disponibles à la vente* ("available for sale") : cette catégorie englobe tous les actifs financiers autres que les actifs détenus à des fins de transaction ou détenus jusqu'à leur échéance ainsi que les prêts et créances.

La norme prévoit la comptabilisation initiale de tous les instruments financiers (quelque soit leur catégorie), à leur juste valeur (Fair Value) en tenant compte des coûts de transactions. Ceci constitue un changement très important puisqu'ils étaient comptabilisés jusqu'à présent à leur valeur d'achat (coût historique).

Résumé des règles :

Catégorie	Evaluation initiale	Evaluation ultérieure	Gains et pertes
Actifs et passifs détenus à des fins de transaction	Juste valeur	Juste valeur	Comptabilisés en résultat net
Placements détenus jusqu'à leur échéance	Juste valeur	Coût après amortissement	Si dépréciation la perte est portée au résultat
Prêts et créances			Comptabilisés en résultat net
Instruments disponibles à la vente	Juste valeur	Juste valeur	Les plus ou moins values latentes font partie des fonds propres / les intérêts et pertes de valeur sont comptabilisés immédiatement en résultat net

Le 16 juin 2005, la norme a fait l'objet d'un amendement très attendu : le Board de l'IASB a convenu que l'option juste valeur incluse en 2003 à la norme IAS 39 mais non retenue par la commission européenne en novembre 2004, pouvait être utilisée de manière inadéquate. Elle consistait à pouvoir désigner tout instrument financier comme étant détenu à des fins de transactions (donc évalué à sa juste valeur) dans le but de simplifier l'application de la norme. Cependant, ceci posait le problème de comparabilité des comptes, et rendait possible les manipulations en absence de marché liquide pour les passifs.

Dorénavant cette option n'est possible que dans un nombre limité de cas, notamment les instruments financiers comprenant des dérivés incorporés.

¹⁸ Un dérivé est un contrat dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution d'un taux, d'un prix, d'un indice ou d'une autre variable spécifiée, qui ne requiert aucun placement initial ou qu'un placement initial minime et qui sera réglé à une date future, exemple : les dérivés tels que les contrats à terme de gré à gré, les swaps et les options.

▫ Impacts sur le bilan et le compte de résultat

Les opérations vie seront d'avantage impactées que les opérations non vie. Ceci est dû à la plus longue durée des engagements qui comprennent souvent des options et garanties, qui devront être évaluées à leur juste valeur.

Une part importante de l'activité consistant au placement des primes à l'actif, tout changement dans l'évaluation des actifs, notamment leur comptabilisation à leur juste valeur et non plus au coût historique, a des répercussions importantes. La modification des règles de comptabilisation pose également le problème de l'équilibre du bilan. L'égalité actif passif peut être remise en question, si les actifs et passifs ne réagissent pas de façon identique à une même modification de l'environnement économique. En particulier cette divergence comptable (accounting mismatch) peut se produire s'il existe des méthodes d'évaluation différentes pour les actifs et les passifs. De plus, tout décalage de valorisation augmentera mécaniquement la volatilité des résultats.

La norme IFRS 4 prévoit de réduire cette asymétrie dans ce traitement des actifs et passifs, par l'introduction de la méthode de la "comptabilité reflet" (Shadow Accounting). Par cette disposition, un assureur est autorisé à changer de méthodes comptables afin qu'une plus-value ou une moins-value sur un actif, comptabilisée mais latente, affecte les évaluations de la même façon que le fait une plus-value ou une moins-value réalisée. Il s'agit alors de déterminer les plus-values latentes qui génèrent des profits futurs pour les assurés ; ceci s'applique donc à la fois aux contrats d'assurance, et aux contrats d'investissement avec participation discrétionnaire, pour autant qu'il existe un lien entre la mesure des passifs et la valorisation des actifs.

Toutes les alternatives proposées par l'IASB ne sont que provisoires et n'apportent que des solutions partielles. Sur ces points, les travaux de la phase II sont donc très attendus.

Pour ce qui est de la norme IAS 39, elle est à ce stade mal adaptée à ce secteur d'activité ; la classification des actifs est jugée trop rigide : en pratique la catégorie "détenu jusqu'à échéance" semble difficilement utilisable, puisque par exemple, le contrat peut être racheté à tout moment par l'assuré. De plus, cette norme s'adapte mal à la gestion actif- passif, cruciale dans ce secteur.

Enfin, les nouvelles normes n'ont pas pour objectif d'être "prudentes", notamment dans les évaluations faites des postes du bilan puisque par exemple la provision pour égalisation et les provisions pour sinistres catastrophiques sont désormais interdites. Par conséquent les pertes exceptionnelles se répercuteront directement sur les fonds propres.

Les normes actuelles restent donc encore mal adaptées aux secteurs de l'assurance et de la réassurance, et nécessitent des ajustements. Les premiers comptes annuels basés sur les normes finalisées, spécifiques à l'assurance (phase I et II), sont prévus à ce jour à fin 2007, bien qu'il semble aujourd'hui probable que cela soit retardé aux vues de la complexité et de l'ampleur de la tâche.

2.2.2 Solvabilité 2

Il s'agit du projet de directive européenne sur la solvabilité pour le secteur assurantiel.

Les premières directives européennes relatives à la solvabilité avaient été établies dans les années 1970 afin de protéger les assurés dans des conditions de concurrence identiques. Cependant, avec le développement de produits d'assurance de plus en plus complexes et l'évolution des techniques financières, ce système est devenu obsolète et insuffisant : l'utilisation de simples ratios basés sur les provisions techniques apparaît aujourd'hui archaïque, compte tenu des progrès réalisés dans la mesure des risques.

Des règles complémentaires avaient bien vu le jour dans de nombreux états membres (état C6 bis en France, Individual Capital Asset au Royaume Uni...) afin de renforcer la protection des assurés ; mais ces améliorations ne constituaient qu'une solution partielle et hétérogène.

Une première réforme européenne Solvabilité I entrée en application en 2002, a constitué une première mise à jour du système.

Le projet Solvabilité II est né ensuite des améliorations encore possibles et nécessaires, à la lumière de l'évolution des techniques de gestion des risques et des normes comptables internationales.

Ce projet comporte deux phases :

La phase I, finalisée fin 2003 a permis de définir l'architecture du futur système de solvabilité européen : une structure à trois piliers comparable à celle retenue pour le secteur bancaire (Bâle 2), contribuant de fait à l'harmonisation des deux secteurs .

Le premier pilier est le plus important puisqu'il traite des exigences financières auxquelles seront soumises les compagnies, notamment pour les provisions techniques et l'allocation de capital.

Pour les provisions techniques, il s'agit principalement d'harmoniser leur calcul : la marge de prudence utilisée au-delà du calcul Best Estimate afin de tenir compte de la volatilité, devra être explicite c'est-à-dire quantifiée.

Pour le capital, il y a été convenu de deux niveaux d'exigences :

- un capital minimum (Minimum Capital Requirement- MCR) assimilable à un garde fou dont le calcul devrait être simple et forfaitaire,
- le capital cible (Solvency Capital Requirement – SCR) qui est défini comme le montant de capital souhaitable pour maintenir une probabilité de ruine acceptable à horizon d'un an. Le calcul serait effectué au moyen d'une méthode standard, ou bien d'un modèle interne si il a été validé par un audit.

Le deuxième pilier traite des procédures de contrôles internes que les entreprises devront mettre en place afin de garantir une saine gestion des risques, notamment en matière de gestion actif passif.

Le troisième pilier a pour but de définir le niveau d'information et la forme de l'ensemble des communications sur ces sujets.

La phase II doit servir à résoudre les questions de fond et aboutir à la rédaction du projet de directive, pour une adoption prévue aujourd'hui à horizon 2010. Les questions ont été soumises au CEIOPS¹⁹ sous la forme de trois lots de questions. Les points techniques les plus complexes sont ceux du premier pilier avec la détermination du capital cible :

- quelle méthode de calcul retenir ?
- quel niveau de probabilité de ruine choisir ?
- quels risques prendre en compte ?
- comment prendre en compte les corrélations entre les risques ?
- comment traiter le risque opérationnel ?
- quels seront les caractéristiques et critères de validation des modèles internes ?

La prochaine étape importante du projet est aujourd'hui le résultat de l'étude d'impact dont les résultats sont attendus pour février 2007.

Conclusion : Toutes les questions relatives à la valorisation, ou aux exigences financières sont au cœur des grands projets que sont le reporting Embedded Value, les normes IFRS, et le projet Solvabilité II ; ces travaux interagissent car ils doivent présenter à la fois une cohérence et une convergence des concepts. Il s'agit donc d'un programme ambitieux pour le secteur de l'assurance et de la réassurance, devenu nécessaire compte tenu de l'importance du marché et des besoins accrus en transparence.

¹⁹ Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors

Partie 2 : Méthodologie de calcul de la valeur économique des traités

Nous allons ici nous intéresser à la méthodologie mise en œuvre afin de calculer la valeur économique des traités proportionnels du portefeuille Vie de Partner Re.

Contrairement aux compagnies d'assurance "directe", les options et garanties sont marginales car la réassurance vie se concentre sur les risques biométriques purs²⁰. Néanmoins, les spécificités des opérations et le manque d'information peuvent rendre l'exercice difficile. Dans la suite nous présentons une méthodologie pour les traités proportionnels aux engagements longs.

Après avoir rappelé les spécificités des opérations de réassurances, nous étudions les différents flux qui entrent dans la composition de la valeur économique. Nous présentons ensuite la méthodologie dite "Best Estimate" pour projeter les flux futurs espérés pour Partner Re. Il s'agit de la manière la plus fréquente de procéder pour un calcul de la valeur de portefeuille.

1. Rappel des grands principes liés à la réassurance²¹

1.1 Définition

"La réassurance est un contrat par lequel un réassureur prend en charge en contrepartie d'une rémunération et sous certaines conditions, une partie des risques souscrits par l'assureur, qui reste seul responsable vis-à-vis de l'assuré".

Bien que les conditions restent librement négociables par les deux contractants, la plupart des clauses sont aujourd'hui standards.

Elle a pour vocation principale, d'assurer une certaine stabilité financière au sein des compagnies d'assurance, qui peut être mise en péril par diverses causes ; on peut citer :

- la survenance d'un sinistre très important : les attentats du World Trade Center ont été couverts à plus de 90% par les compagnies de réassurance,
- un événement générant un nombre important de sinistres comme les catastrophes naturelles,
- une erreur de tarification / l'anti-sélection / le risque moral,
- une évolution défavorable ou une dérive du risque couvert (amiante, augmentation de la durée de vie, jurisprudence...),
- un manque de capital pour supporter l'activité,

²⁰ Hormis le cas particulier de la réassurance des garanties plancher, que nous ne traitons pas ici.

²¹ Seuls les aspects de la réassurance dite traditionnelle sont présentés; il existe également une réassurance financière, et l'ART, transfert de risques alternatifs qui ne font pas partie du portefeuille Vie à proprement parlé.

1.2 Les objectifs

En fonction de la taille de la compagnie d'assurance, et de son assise financière, les solutions de réassurance peuvent remplir plusieurs objectifs :

- générer une meilleure homogénéité du portefeuille : le principe fondamental de l'assurance étant la mutualisation, l'assureur doit s'assurer que la loi des grands nombres s'applique : cela peut ne pas être le cas pour un "petit" portefeuille par exemple.
- protéger contre une dérive du résultat technique : les assureurs cherchent en effet à réduire la volatilité de leur résultat et à garantir une certaine stabilité dans le temps.
- augmenter la capacité de souscription tout en conservant la flexibilité commerciale : l'assureur ne peut en effet souscrire de gros risques ou une grande quantité d'affaires sans faire appel à la réassurance, notamment pour des questions de solvabilité.
- lancer de nouveaux produits : le réassureur peut à la fois participer à l'élaboration d'un produit en apportant son expertise et sa connaissance des différents marchés, financer le lancement et prendre en charge une partie des pertes éventuelles.

De manière générale, la réassurance va permettre à l'assureur de réduire sa probabilité de ruine en protégeant son bilan, ainsi que de poursuivre le développement de ses activités.

1.3 Les modalités de transfert du risque

Il existe trois modes de cession des risques en réassurance :

- la réassurance *facultative* pour laquelle l'assureur et le réassureur sont respectivement libres de céder²² et d'accepter un risque : on parle de facultative.
- la réassurance *facultative obligatoire* : la cession est facultative pour l'assureur et obligatoire pour le réassureur : on parle de Fac Ob.
- la réassurance *obligatoire* : l'engagement est réciproque ; l'assureur cède une partie de son risque de manière systématique, conformément aux dispositions contractuelles ; le réassureur l'accepte : on parle de *traité*.

Des deux derniers modes de cession, il apparaît clairement que la réassurance obligatoire est la plus équitable pour le réassureur, puisque l'assureur n'est pas alors tenté de ne transférer que ses mauvais risques. C'est pourquoi les traités représentent 80% des contrats et les Fac Ob seulement 15%.

²² La compagnie d'assurance est nommée également cédante.

Les facultatives quant à elles ne représentent que 5% du marché, principalement par ce qu'elles nécessitent des échanges répétés et génèrent alors des coûts plus élevés. Sans perte de généralité, nous parlerons dans la suite de traité de réassurance.

1.4 Les deux formes de réassurance : proportionnelle et non proportionnelle

La réassurance proportionnelle

L'assureur cède une certaine *proportion* de son portefeuille.

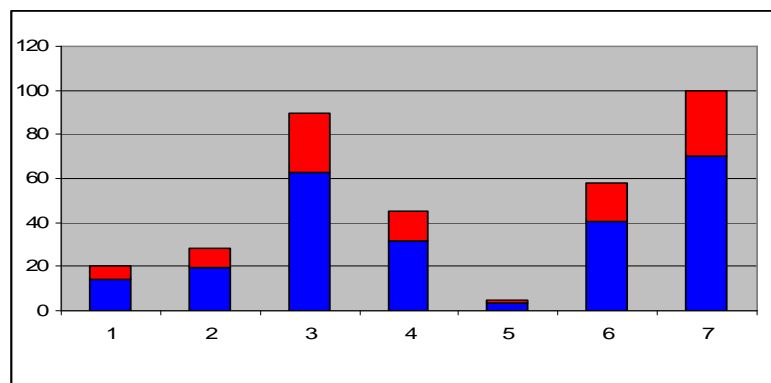
On parle de cession du point de vue de l'assureur et d'acceptation du point de vue du réassureur : pour une police donnée, le réassureur couvre une certaine *proportion* du risque en échange de la même *proportion* de la prime payée à l'assureur, par l'assuré ; en contrepartie, le réassureur règlera les sinistres survenus dans cette même proportion.

Il existe ainsi une connexion directe entre le portefeuille d'origine et la partie de ce portefeuille cédée au réassureur : la politique de souscription, la tarification, la distribution des risques et les résultats techniques de l'assureur vont affecter le réassureur de façon identique.

Pour définir son besoin en réassurance proportionnelle, l'assureur doit d'abord déterminer, pour chacun des produits qu'il souhaite souscrire par branche, le montant maximum qu'il peut conserver : il s'agit de sa rétention et c'est sur cette base que le programme de réassurance va être élaboré ; elle peut être exprimée en terme de somme assurée, ou bien en terme de sinistre maximum possible ou probable (SMP ou PML).

Pour les traités dits en **Quote Part** (ou participation), la proportion du risque cédé est identique pour tous les risques (ou polices) en portefeuille.

Exemple :



Part de risque cédée pour un traité en quote part de 30% sur la base des sommes assurées.

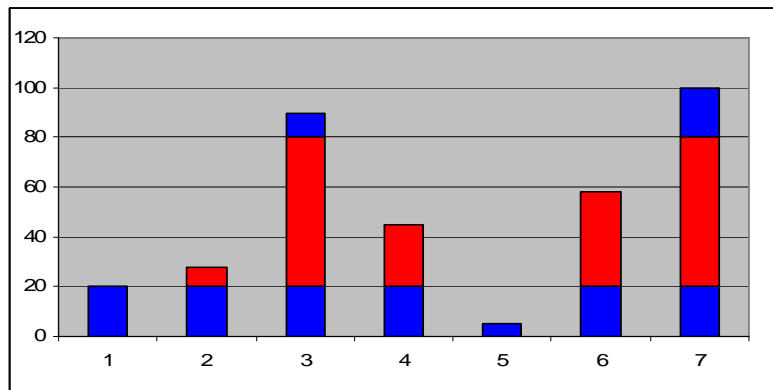
La partie rouge représente l'engagement du réassureur pour chaque risque : 30% de la somme assurée contre 30% de la prime payée par l'assuré. L'avantage de ce type de traité est qu'il est facile à gérer pour les deux entités et s'adapte à toutes les branches.

Partie 2 : Méthodologie de calcul de la valeur économique des traités

Pour les traités dits en **Excédent de plein**, la portion du risque cédé est calculée police par police, par le biais d'un taux de cession. Chaque taux s'appliquera ensuite à chacun des flux générés par la police correspondante.

Le réassureur couvre ainsi la portion du risque dépassant un certain montant appelé *plein*, et n'excédant pas un certain nombre de fois ce plein. Ces deux bornes sont définies contractuellement.

Exemple : un excédent de plein de 3 pleins pour un plein de 20



Part de risque cédée (en rouge) pour un traité en excédent de plein

La réassurance non proportionnelle :

Le réassureur participe pour des sinistres "individuels" (excédent de sinistre) ou pour une accumulation de sinistres (excédent de pertes), qui dépassent un certain montant appelé *franchise* (ou priorité) et dans une certaine limite, appelée *portée*.

L'excédent de sinistre se décompose en deux catégories :

- l'excédent de sinistre par risque pour lequel le réassureur intervient pour chaque police, dès que la priorité est dépassée,
- l'excédent de sinistre catastrophe, qui couvre une accumulation de sinistres individuels dépassant la priorité et qui a pour origine un événement catastrophique.

La prime de réassurance fait ici l'objet d'une tarification particulière et contrairement à la réassurance proportionnelle, on raisonne en montant de sinistres.

Conclusion : Ces premiers éléments permettent de comprendre la nature de la relation commerciale entre une compagnie d'assurance et son réassureur ; le traité la matérialise et définit les engagements financiers de chacun.

2. Etude du portefeuille

2.1 Segmentation du portefeuille

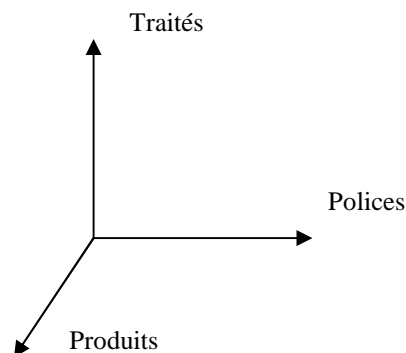
Avant tout reporting économique ou financier il est nécessaire de définir la structure de celui-ci. Cela signifie, effectuer un classement adéquat des traités pour pouvoir expliquer les écarts de valorisation d'une année sur l'autre, avec un niveau de détail pertinent.

Pour cela, on constate que le portefeuille comporte une importante diversité de produits qui répondent à la fois aux besoins classiques de la branche vie, ainsi qu'aux demandes plus spécifiques des marchés locaux.

Chaque traité va définir très précisément les engagements pris avec la cédante ; on peut dès lors considérer que chaque traité a un caractère "unique" puisqu'il est adapté aux besoins et à "l'appétit" en réassurance d'une cédante.

C'est la raison pour laquelle, pour deux produits identiques les conditions vont pouvoir varier d'un traité à l'autre et les garanties d'une police à l'autre.

Si l'on souhaite avoir une vision synthétique du portefeuille on pourrait l'envisager schématiquement de la façon suivante :



Il y a ainsi trois sources d'information différentes qui vont permettre de déterminer les engagements financiers réciproques:

- les informations du traité permettent de connaître les conditions de réassurance, notamment proportionnelle ou non, la part, ou le couple "priorité - portée", la durée des engagements...
- le produit permet de connaître le type de risque réassuré, comme le risque de mortalité, ou le risque de longévité pour les rentes (qui nous intéressera dans la dernière partie),
- la connaissance des caractéristiques de chaque police renseigne sur le profil individuel de chaque risque.

Cependant, la difficulté de l'exercice pour des activités de réassurance se trouve à deux niveaux :

- certains traités sont conclus pour de courtes durées, de un à trois ans.
- les informations sont souvent agrégées.

Pour ces deux raisons, nous proposons de scinder le portefeuille de la façon suivante :

Les traités non proportionnels

Ces traités ont le plus souvent un caractère annuel et peuvent être comparés à des affaires de type Non Vie. Leurs résultats peuvent être assez volatiles d'une année sur l'autre, et certains traités, comme l'excédent de sinistres catastrophe, ne se mutualisent en partie, que par le biais d'une dispersion géographique du risque. C'est la raison pour laquelle un niveau de détail " type de traité "²³, serait retenu pour un reporting économique.

Par ailleurs, le recours à des projections de flux espérés pour ce type d'affaires ne se justifie pas du fait de la faible durée des engagements.

Pour en déterminer la valeur on peut alors envisager d'utiliser les résultats attendus lors de la tarification dès lors qu'il n'y a pas d'information nouvelle.

Les traités proportionnels sans bordereaux

Il s'agit des traités proportionnels pour lesquels les engagements sont également courts et dont le produit peut être qualifié de "classique". La cédante ne transmet alors pas les informations police par police lors de ces envois périodiques de comptes.

En l'absence de ces bordereaux détaillés, un moyen de calculer la valeur économique sera d'appliquer le ratio technique S/P^{24} , estimé au moment de la tarification, aux primes attendues : les hypothèses pourront être revues annuellement si on constate des écarts avec les chiffres réels.

Les traités proportionnels pour des produits spécifiques

Il s'agit des traités qui nous intéressent dans ce mémoire.

Pour ces traités nous disposons des informations police par police, envoyées régulièrement par la cédante sur une base annuelle ou semestrielle ou encore trimestrielle ; il est alors possible de suivre l'évolution des flux, et de mettre à jour les projections sur la base du dernier portefeuille reçu.

Les produits concernés ont les deux caractéristiques suivantes:

- la réassurance d'un risque particulier comme le risque de longévité, ou encore un risque aggravé,
- un engagement à long terme.

Il est alors nécessaire de suivre la sinistralité de manière précise, soit pour fermer le traité aux affaires nouvelles, soit pour proposer une évolution du tarif pour les futures générations de contrats. Pour ces traités, il est plus pertinent d'obtenir une valeur économique par produit plutôt qu'une valeur agrégée de ce segment, ne serait ce que pour éviter les compensations entre la réassurance de risque anti-corrélés comme la mortalité et la longévité.

²³ Excédent de sinistre individuel, excédent de sinistre catastrophe ou excédent de perte.

²⁴ Egalement appelé Loss ratio: montant de sinistre rapporté au montant de primes.

2.2 Les évènements particuliers

Nous allons brièvement examiner les évènements qui peuvent avoir lieu après la signature d'un traité et qui ont un impact économique en modifiant les engagements. On peut tenter de les présenter chronologiquement ainsi :

- *L'entrée de portefeuille* : il s'agit de l'acceptation par le réassureur de couvrir de manière rétroactive un nouveau portefeuille entier de polices, en contrepartie des primes perçues à l'époque. Le réassureur devient alors responsable du paiement des sinistres qui ont eu lieu durant les exercices de souscription concernés ainsi que des sinistres tardifs éventuels. Cette opération particulière fait l'objet d'une négociation importante.

- *Le renouvellement* : il est en général concentré en fin d'année civile car la plupart des traités couvrent des exercices par année calendaire. Il peut s'agir :

- soit de l'ouverture d'une nouvelle période de garantie lorsque la couverture offerte arrive à son échéance,
- soit d'une re-discussion des conditions lorsqu'il est prévu une clause de révision : il peut s'agir des tarifs, des exclusions, des limites de garantie, des commissions, des formules de calcul des provisions mathématiques, d'un changement de part dans un programme de réassurance...

Ainsi dans ce second cas, l'ensemble des nouvelles polices souscrites par la cédante, pour des traités dits alors *ouverts* aux affaires nouvelles, se verront appliquer les nouvelles conditions négociées.

- *La sortie de portefeuille* : cette opération correspond à l'opération inverse de celle de l'entrée de portefeuille. On pourrait également la qualifier de rachat ; en général elle concerne une année de souscription particulière.

- *La résiliation simple* : Il s'agit de la fin du traité, la période de couverture est arrivée à son terme, ou bien il s'agit de la décision d'une des deux parties. Ceci ne signifie néanmoins pas nécessairement la fin des engagements mutuels ; deux cas peuvent se présenter :

- la gestion d'un Run-off : cela signifie que la couverture continue pour les polices en portefeuille à la date de résiliation, suivant les conditions prévues au traité. Il peut s'agir d'un Run off de Primes et de Sinistres, dans ce cas le réassureur continue à recevoir des primes et paye les sinistres, ou bien uniquement un Run off de sinistres.

-le "Clean Cut" : Cette opération est un désengagement total du réassureur : cela permet, moyennant le remboursement des primes et des provisions constituées pour le paiement des sinistres, de transférer la totalité de son engagements à un autre réassureur.

Tous ces évènements engendrent bien de nouveaux échanges de flux financiers, ou modifient les flux futurs. On peut donc naturellement s'interroger sur l'impact de ces évènements sur la valeur du portefeuille.

Partie 2 : Méthodologie de calcul de la valeur économique des traités

La mise en Run-off du portefeuille du réassureur pour l'évaluation répond en partie à cette question, puisqu'elle règle les cas de la croissance naturelle du portefeuille pour les traités dit ouverts, ainsi que le cas des renouvellements qui déboucheraient à la création d'une nouvelle période de couverture (considérés par conséquent comme des affaires nouvelles). Ainsi pour le calcul de la valeur économique la compagnie ne souscrit plus aucun traité et les traités sont *fermés* aux affaires nouvelles.

Par ailleurs ces évènements peuvent intervenir à l'initiative de la cédante, et il est alors impossible de les prévoir, à moins qu'ils ne fassent l'objet d'un accord préalable, connu à la date d'évaluation. C'est pourquoi faute de pouvoir les anticiper, nous n'en tiendrons pas compte par la suite.

De même, du point de vue de Partner Re, les conditions de réassurance seront considérées comme fixées sur la base de la dernière situation connue à la date d'évaluation, et qu'il n'y aura pas d'arbitrage, de désengagement, d'inclus dans les projections.

2.3 Identification des flux

A présent nous allons déterminer les flux qui sont générés par les activités de réassurance pure²⁵. Comme déjà mentionné ils proviennent principalement des comptes de résultats technique et non technique, que l'on peut représenter de façon simplifiée ainsi :

Compte technique					
Postes		Opérations brutes	Rétrocession	Opérations nettes N	Opérations nettes N-1
Primes	+				
Charges sinistres					
Sinistre/prestation	-				
Variations Provisions	+/-				
Coûts					
Commission	-				
Frais de courtage	-				
PB	-				
Produit des placements					
Intérêts sur dépôts	+				
Intérêts sur portefeuille	+				
Résultat technique					

²⁵ C'est-à-dire que les flux générés uniquement par les traités, leur souscription et leur gestion..

Compte non technique			
Postes		Opérations nettes N	Opérations nettes N-1
Produits financiers sur capital alloué.	+		
Frais	-		
Impôt sur les bénéfices	-		
Résultat opérationnel			

Les signes présentés ci-dessus sont donnés à titre indicatif car il peut y avoir des ajustements pour chaque poste. Les opérations nettes s'obtiennent par déduction des affaires rétrocedées à un autre réassureur, dont nous faisons abstraction dans la suite.

Les primes

Dans le cas de la réassurance proportionnelle, les primes à percevoir sont obtenues simplement, car il s'agit en effet d'appliquer pour chaque police, le ou les taux de cession du traité, suivant qu'il s'agit d'un traité en Quote-part ou d'un traité en excédent de plein. On pourra noter qu'en réassurance non proportionnelle, on dispose à la souscription du traité du montant *global* de prime à percevoir pour couvrir un portefeuille entier de polices.

Les sinistres et variations de provisions techniques

Les sinistres et prestations payées n'amènent pas de commentaires particuliers. En général, on parle plutôt de sinistre lorsqu'il s'agit d'un capital payé suite à la réception d'une déclaration de sinistre de la cédante, et plutôt de prestation lorsqu'il y a une continuité des versements dans le temps, avec une fréquence définie au traité.

Pour les provisions techniques, on distingue les provisions mathématiques, des autres provisions techniques. En effet, les provisions mathématiques appartiennent à l'assuré et leur constitution a lieu dès le transfert de la prime, comme pour l'assurance "directe". Ce montant est transmis en général par la cédante à chaque envoi des comptes. Ensuite, suivant le type de produit et de traité, le montant des réserves constituées va pouvoir être supérieur à celui des provisions mathématiques, afin de tenir compte du décalage dans le report des pertes par la cédante ou servir de garantie en cas d'une mauvaise estimation des PM. Ces provisions de type IBNR (Incurred But Not Reported) sont soit décidées au cas par cas, soit obéissent à des règles de provisionnement par segment.

Le procédé est identique lorsqu'il n'y a pas de provisions mathématiques, des provisions sont quasiment toujours constituées lors de l'encaissement de la prime.

Les coûts

La commission de réassurance : il s'agit de la plus classique.

Elle a pour but de participer aux frais de la cédante ; cette dernière a en effet effectué des dépenses pour acquérir de nouvelles affaires dont elle cède une partie au réassureur. La cédante effectue également la gestion des contrats, qui induit des coûts supplémentaires.

Néanmoins cette commission ne représente pas toujours exactement la part du réassureur dans ces frais, mais peut être supérieure. A l'instar du courtier, la compagnie d'assurance joue le rôle d'apporteur d'affaires, et est en droit à ce titre de réclamer une rémunération. Celle-ci sera négociée par les deux parties sur la base de l'anticipation des profits futurs : plus la relation créée sera étroite plus la commission sera élevée ; c'est la raison pour laquelle la commission pour un traité en quote part sera plus élevée que pour un traité en excédent de plein.

Cette commission est toujours exprimée en pourcentage des primes cédées et le calcul est élémentaire lorsqu'il s'agit d'un taux fixe. Celui-ci est moins immédiat lorsque le traité prévoit une commission dite à l'échelle (Sliding Scale), dont le taux est inversement proportionnel au S/P du traité.

Comme ce dernier n'est connu qu'en fin d'année, on utilise un taux provisoire qui donne lieu au paiement d'une commission prévisionnelle. Il se peut donc qu'il existe un solde annuel positif ou négatif en fonction de la sinistralité réelle.

Voici un exemple de fonctionnement : une commission entre 25% et 35% des primes cédées pour un S/P compris entre 75% et 55%.

Le taux provisoire est de 35% et le S/P observé fin d'année n est de 67%. Il est alors possible de déterminer une relation simple entre les deux taux : la commission augmentera en effet de 1 pour une baisse du S/P de 2.

Ainsi un S/P de 67% donne un taux de 29%. Le solde est donc créditeur pour le réassureur.

Enfin une clause particulière peut prévoir un report de perte (Loss Carry Forward) et dans ce cas le montant dépassant la limite prévue par l'échelle peut être reportée en "mali" pour le compte de l'année suivante.

La sur-commission : appelée également "Override", elle est payée parfois par le réassureur en plus d'une commission classique : elle apporte une compensation financière supplémentaire au regard d'un aspect particulier de la relation liant l'assureur et le réassureur, en général un déséquilibre ou une position délicate pour l'assureur ; elle est plus courante entre le réassureur et son rétrocessionnaire pour compenser cette fois les frais du réassureur.

Il s'agira dans ce cas d'un taux fixe exprimé en pourcentage de la prime de réassurance.

Partie 2 : Méthodologie de calcul de la valeur économique des traités

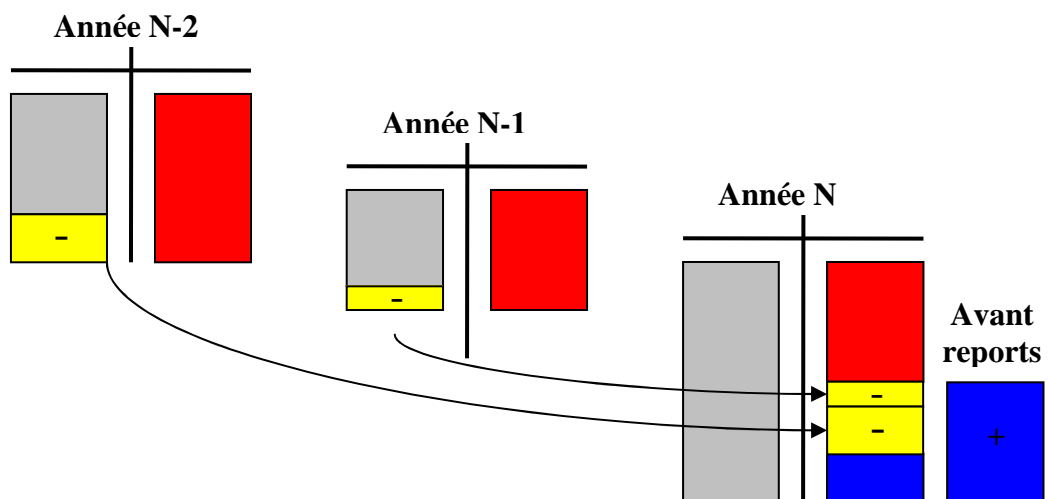
La participation aux bénéfices : comme pour l'assurance directe, un traité peut inclure une clause de participation aux bénéfices (PB). Néanmoins cette rémunération n'est pas connectée à la performance financière du réassureur comme c'est le cas en assurance directe pour les produits d'épargne, mais à la performance technique du traité. Ainsi, si le traité procure des bénéfices au réassureur, une partie sera restituée à la cédante.

Son calcul nécessite un traitement hors du compte de résultat technique. En effet, dès lors qu'une clause de PB est inscrite au traité, il y a création d'un autre compte de résultat fictif, dit compte de PB : dans ce compte, les gains et pertes sont reportés d'une façon particulière, car l'assiette de calcul n'est pas le résultat technique du réassureur, mais le résultat dont on déduit un montant de frais prévu au traité, et non les frais réels du réassureur pour la période.

Pour cela on retient une période de référence, parfois un an, souvent trois ans et on compare les primes aux charges de la période, constituées des sinistres, des commissions et des frais pour le réassureur exprimés en % des primes (en général de l'ordre de 3 à 5%). Si le réassureur dégage des profits suivant ce calcul, une partie va être restituée à la cédante selon les modalités prévues au traité.

En regard de cette clause, il est souvent prévu une clause inverse, dite de report de pertes, qui va pénaliser le compte de PB d'une année profitable pour tenir compte des mauvais exercices antérieurs, mais dans la limite de quelques années.

Voici le fonctionnement de manière schématique du compte :



Les déficits des années antérieures sont reportés au débit du compte de la dernière année.

Le courtage : Il se peut qu'une affaire soit conclue par le biais d'un courtier en réassurance. Dans ce cas il sera rémunéré en pourcentage de la prime brute, avant la déduction des autres commissions. La durée peut être d'un an ou plus suivant le rôle joué dans la relation cédante/réassureur ; si le courtier reste l'intermédiaire et fournit un service, cette commission peut durer jusqu'au terme du traité.

Les Frais : Il s'agit de frais internes²⁶ liés à l'activité de réassurance pure : Il s'agit de tous les frais générés par l'activité (souscription, tarification, provisionnement, administration...).

Ils sont divisés en frais d'acquisition et en frais gestion ; pour Partner Re ils représentent 75% et 25% des frais totaux. Les frais d'acquisition sont ceux liés à la souscription du traité, comme l'entrée en relation commerciale avec la cédante et la tarification ; tandis que les frais de gestion, également appelés frais de renouvellement, sont les frais qui persistent au-delà de la première année pour le suivi du traité. Une règle de réaffectation déterminée par le service tarification permet de les distribuer par type de produit puis par taille de traité (en volume de primes par exemple).

Les produits financiers

Une particularité de la réassurance est la possibilité de dépôt, auprès des cédantes, du montant des provisions mathématiques du traité. Cette disposition est d'usage systématique lorsque la réglementation locale exige des compagnies d'assurance, que l'actif dont elles doivent disposer (à tout moment) pour couvrir leurs engagements corresponde au montant brut²⁷ de réassurance ; c'est le cas en France²⁸. C'est également la garantie supplémentaire que le réassureur remplira ses obligations.

Généralement le montant du dépôt est égal à l'engagement du réassureur, mais il peut être calculé de manière plus forfaitaire, comme par exemple un pourcentage des primes cédées. Ceci correspond alors à un certain effort de financement de la part du réassureur qui ne recevra qu'un pourcentage des primes cédées après déduction éventuelle d'une commission de réassurance.

Une clause du traité stipule précisément les modalités de la constitution de ce dépôt, pour lequel deux options existent.

- Il peut s'agir d'un dépôt en espèces : dans ce cas, la cédante rémunère en contrepartie ce dépôt à un taux fixé contractuellement. On parlera alors *d'intérêts sur dépôts espèces*.

- L'autre alternative est le dépôt de titres détenus par le réassureur, après leur agrément par la cédante. Ils sont ensuite nantis²⁹ au profit de cette dernière auprès d'un établissement bancaire. Celui-ci envoie périodiquement une évaluation de leur valeur qui devra être complétée en fin d'année en cas de baisse prolongée, mais pourra être ajustée également en cas de hausse. Les produits financiers générés par ces titres sont qualifiés *d'intérêts sur portefeuille* et reviennent au réassureur.

On qualifie de même les intérêts qui sont générés pour les actifs en représentation des autres provisions du réassureur.

²⁶ Egalement appelés Operating Expenses ou OPEX.

²⁷ On ne déduit pas la part du réassureur dans les engagements pris envers les assurés.

²⁸ Article R 331-1 du code des assurances

²⁹ Le nantissement est un contrat par lequel un débiteur remet une chose à son créancier pour sûreté de la dette, sans en entraîner pour autant la dépossession.

2.4 La valeur économique du portefeuille

Sur la base de la définition de l'Embedded Value introduite dans la première partie, nous définissons la valeur économique d'un traité ou du portefeuille de traités de la façon suivante³⁰ :

C'est la valeur actuelle des résultats techniques diminués, des frais de fonctionnement, des impôts et taxes, et du coût du capital.

Nous adoptons les notations suivantes, pour la date h

v : Coefficient d'actualisation (fixe ici)

P_h : Primes

C_h : Coûts

S_h : Charges sinistres et variation de réserves

I_h : Revenus financiers

E_h : Frais

CoC_h : Coût du capital

α : Taux d'imposition

H : Horizon de projection

A la date t d'évaluation, la valeur de portefeuille s'écrit alors :

$$V_t = \sum_{h=t}^H v^{h-t} \times \left[R_h - E_h - \alpha(R_h - E_h)1_{R_h - E_h > 0} - CoC_h \right]$$

où $R_h = P_h - S_h - C_h + I_h$ représente le résultat technique.

L'horizon de projection H doit coïncider avec la fin des engagements du réassureur. Comme nous écartons la possibilité d'une résiliation par l'assureur, il s'agit soit de la fin de la période de garantie, soit de l'extinction de la population réassurée du traité. La fin de la période de garantie peut être liée à l'âge atteint par l'assuré ou encore la fin de la période de couverture prévue par le traité. L'horizon H peut donc être unique pour un traité ou propre à chaque police.

Au vu de l'expression ci-dessus, la majorité des postes est aisément calculable dès lors que l'on connaît la composition du portefeuille et les rendements financiers à chaque date h .

³⁰ Il n'est pas tenu compte des opérations de rétrocession.

Cependant ces flux restent bien sûr incertains puisque les opérations de réassurance sont risquées. Ceci justifie bien l'appellation de cash flows futurs *espérés ou probables*.

Cela signifie que la valeur économique correspond bien à l'espérance mathématique des flux actualisés et plus précisément à une somme d'espérances conditionnelles. La différence entre les Valeurs Actuelles Probables (VAP) des engagements de la cédante et du réassureur représente la principale contribution à la valeur du portefeuille.

Nous allons énoncer dans la suite les points que nous retenons pour le calcul de la valeur économique fondée sur une approche *Best Estimate*³¹.

Traditionnellement pour déterminer les flux futurs, les compagnies utilisent un scénario "central" déterministe. Il est nécessaire pour cela de choisir le jeu d'hypothèses sur le portefeuille qui va produire l'échéancier de flux jugé le plus probable.

Par ailleurs nous ne tiendrons pas compte du décalage des flux, fréquent en réassurance. En effet, bien que les traités prévoient le rythme de réception des comptes et des règlements, il n'est pas rare qu'il y ait un délai plus ou moins important pour le paiement de la prime de réassurance.

Ceci n'est bien sûr pas neutre en terme de résultat puisque le taux de rendement interne de l'opération (TRI) diminue. Néanmoins, il est impossible de définir une règle en la matière et les traités avec bordereaux que nous considérons ici sont peu concernés par ces décalages ; on suppose donc que les flux de trésoreries ont lieu sans retard. Ainsi pour déterminer le pas de temps entre deux flux pour les projections, nous retiendrons la périodicité prévue au traité.

<p>Conclusion : Seuls les traités pour lesquels la durée est significative et l'information disponible au niveau de détail "policy", justifient de recourir à des projections sous MoSes. L'analyse des mécanismes financiers liés à un traité permet de définir les éléments entrants dans la composition de la valeur économique.</p>
--

³¹ Définition partie 1 page 16

3. Hypothèses Best Estimate

Elles sont choisies dans la suite de manière à refléter à la fois, les contraintes du secteur, la pratique de l'entreprise, ainsi que les décisions prises par le management.

3.1 *La projection du compte technique*

Les règles de provisionnement

Pour un calcul de valeur économique, il s'agit de constater le résultat au moment où il est effectivement réalisé. En d'autres termes, il faut tenir compte du décalage induit par le provisionnement dans l'apparition des bénéfices. Rappelons que ce décalage est d'ailleurs une des raisons pour lesquelles le taux utilisé pour actualiser les cash flows est supérieur aux taux techniques et financiers. Ceci implique donc que les calculs de valeur économique ne sont pas indépendants des hypothèses faites pour calculer les réserves. Ici, afin de répliquer fidèlement les flux, il convient d'employer la méthode actuelle de provisionnement utilisée.

La sinistralité

Il faut tout d'abord noter qu'il ne s'agit plus de sur ou sous-estimer la mortalité comme on peut le faire au moment de la tarification, ou pour le provisionnement à des fins prudentielles, mais de déterminer l'évolution future probable de la sinistralité de notre portefeuille.

Les hypothèses de mortalité sont modélisées de façon déterministe à partir d'une table de mortalité. Ceci présente l'avantage d'être une approche simple qui permet d'obtenir facilement les flux du portefeuille. La valeur du portefeuille est ainsi une somme de flux pondérés par des probabilités.

Nous utiliserons les tables de mortalité les plus récentes pour la population concernée avec un ajustement éventuel pour refléter au mieux la population du traité. Cet ajustement prend la forme d'un abattement sur la table dont le choix peut s'appuyer sur un historique, ou sur des hypothèses "marché" pour le produit concerné.

De même que pour les produits plus complexes on utilisera les modèles utilisés pour la tarification du risque avec les dernières tables mises à jour.

Les chutes

Un des points qui reste difficile, est celui de la sortie éventuelle de la police du portefeuille couvert. La fin de la période de garantie et le décès de l'assuré sont pris en compte dans les projections à l'aide du traité et de la table de mortalité. Mais il se peut que l'assuré résilie son contrat auprès de la cédante.

Cet événement qualifié fréquemment de chute, reste difficile à modéliser de manière pertinente du fait de la multitude de causes possibles. Cela aurait d'ailleurs peu de sens de vouloir déterminer des lois de chutes en l'absence d'un historique précis et suffisamment long, dont nous ne disposons actuellement pas à Partner Re.

C'est la raison pour laquelle nous ferons des hypothèses au cas par cas en fonction des spécificités du produit et du marché. Nous retiendrons également comme critère, lorsque cela est possible, la date de souscription de la police par l'assuré.

Les intérêts

On distingue ici les intérêts sur dépôts espèces, des autres intérêts financiers générés par les actifs détenus par Partner Re pour les provisions (dépôts titres et autres provisions techniques) et sur capital alloué.

Comme nous l'avons vu dans le cas de dépôts en espèces, le taux d'intérêt versé par la cédante est connu et inscrit au traité. La plupart du temps il s'agit d'un taux fixe, mais dans quelques cas il peut s'agir d'un taux variable, indexé sur l'EURIBOR par exemple.

Ensuite, dans le cas des autres intérêts financiers, la compagnie a mis en place une gestion actif-passif, en choisissant des placements purement obligataires, de durée égale à celle de ses passifs. Néanmoins, la gestion actif passif étant effectuée de manière globale pour le groupe (activité vie et non vie), nous ne disposons pas d'informations précises sur les caractéristiques des actifs en représentation des activités vie de Partner Re.

De plus, la compagnie a choisi de concentrer ses activités sur les risques biométriques, et souhaite limiter son exposition aux risques financiers liés aux produits.

Ces deux points motivent le choix simple d'utiliser le taux sans risque pour calculer les revenus financiers.

3.2 La projection des frais

Les frais

Certains paramètres sont décidés au moment de la mise en place du Business Plan³². C'est notamment le cas des frais, ou bien du ROE. Ce plan est établi pour une durée de cinq années et est revu annuellement. Nous disposons donc de la valeur à utiliser pour nos projections. Par ailleurs hormis pour les traités dans leur première année au moment de l'évaluation, la mise en Run-off réduit le montant des frais à ceux de gestion soit 25% pour Partner Re.

³²Il s'agit de la fixation des objectifs et des moyens mis à disposition pour les remplir

Taux d'inflation sur frais

Il doit être tenu compte de l'inflation sur les frais de gestion et d'administration pour les projections. Ce taux à définir n'est donc pas lié à la croissance du portefeuille puisque l'entreprise est en Run-off. On peut alors retenir un taux de croissance moyen.

3.3 La projection des besoins en capital

Le capital immobilisé en plus des provisions techniques est calculé globalement par Partner Re de manière à ce que la probabilité de ruine soit inférieure à 0,4% sur un an, autrement dit en conservant les notations définies plus haut, pour une date h

$$P(S_h + C_h + E_h > P_h + RAC_h) \leq 0.4\%$$

où le RAC^{33} désigne le montant du capital alloué.

Ce montant est calculé en tenant compte de facteurs dits de "diversification", liés à des mutualisations des risques à la fois intra-produits, inter-produits et de la contribution des affaires Non Vie. Il existe ainsi un modèle interne d'allocation de capital et des règles simples ont été décidées afin d'affecter un montant à chaque traité. Pour cela rentrent en considération le type d'affaire, le produit ainsi que la taille du portefeuille réassuré. Pour les projections on réutilisera donc ces mêmes règles pour réévaluer à chaque date, les nouveaux besoins en capital.

3.4 Le taux d'actualisation

Il joue un rôle important puisqu'il va très fortement influencer la valeur du portefeuille. Comme nous l'avons déjà évoqué cette notion reste subjective, et on peut l'envisager suivant différents angles.

On pourrait en effet le considérer comme le retour sur investissement³⁴, attendu par actionnaires pour les opérations de réassurance.

On peut également choisir le taux sans risque fixe avec une prime de risque additionnelle. On peut également utiliser la courbe des taux sans risque, afin de tenir compte de la maturité des flux, à laquelle on ajouterait la prime de risque.

Ce choix de la prime de risque, ainsi que du taux sans risque à considérer, relève de l'expertise de la direction financière et doit être révisé chaque année.

Néanmoins, il peut être pertinent d'utiliser plusieurs taux d'actualisation, en fonction du produit et/ou du pays. Le premier point tient à la durée de l'engagement. Le second

³³ Risk Adjusted Capital

³⁴ Return on Equity (ROE)

Partie 2 : Méthodologie de calcul de la valeur économique des traités

point est lié au caractère international des activités de réassurance, et donc des investissements sur des marchés différents (zone euro, US, Asie...).

Ici nous avons choisi d'utiliser un taux d'actualisation fixe qui tiendra compte du pays ou de la zone, ainsi que du produit.

Conclusion : Le recours à des Hypothèses Best Estimate est d'usage pour le calcul de la valeur du portefeuille, notamment pour la simplicité des calculs. On obtient alors une valeur qui n'a de sens que si on la communique avec les hypothèses qui ont servi à son calcul. Il est ensuite nécessaire d'étudier la sensibilité de la valeur aux hypothèses retenues. L'analyse des variations d'une année sur l'autre est un réel outil de pilotage pour la compagnie.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Partner Re a développé une expertise dans la réassurance du risque de longévité, qui représente une part importante de ses engagements.

Un des produits commercialisé est appelé le swap de mortalité ; le risque supporté par le réassureur, est que l'évolution réelle de la mortalité dévie de celle décrite par la table utilisée pour la tarification. Le point crucial est donc de modéliser correctement l'évolution de la mortalité.

Nous calculons ici la valeur économique pour ce produit suivant la méthodologie Best Estimate retenue. Les mécanismes des flux ont été répliqués avec MoSes.

La critique que l'on peut alors formuler à cette approche, est qu'elle ne permet pas de mesurer l'incertitude autour de la valeur obtenue. Dans la dernière partie nous proposons une seconde approche par simulation qui permet de mesurer une partie de cette incertitude, liée à la table de mortalité.

1. Présentation du produit

1.1 Les solutions classiques de réassurance pour les rentes

L'amélioration constante de la mortalité a beaucoup affecté les compagnies d'assurance, par des renforcements successifs de provisions et donc des pertes financières. Le risque de longévité est le terme qui décrit ce risque inhérent au produit de rentes. Des solutions de réassurance ont alors été imaginées afin de l'atténuer ou le supprimer du bilan des compagnies d'assurance.

Généralement, hormis le cas très particulier de la réassurance financière, il y a deux manières de réassurer les rentes en stabilisant la mortalité :

- la réassurance à la prime originale,
- la réassurance à la prime de risque.

La réassurance à la prime originale s'effectue en quote part ou en excédent de plein et prévoit un transfert du risque de mortalité (ou plutôt de non mortalité) et du risque financier par le transfert des provisions.

La réassurance à la prime de risque signifie ici que seul le risque de mortalité sur la rente est cédé.

Le choix approprié pour la compagnie d'assurance va dépendre du portefeuille de rentes à réassurer, plus précisément s'il s'agit d'un portefeuille existant ou de nouvelles d'affaires.

Ensuite, en fonction de son appétit au risque ainsi que de son assise financière, elle choisira de maintenir ou non le risque financier.

Néanmoins en pratique on constate que les compagnies intéressées par la couverture du risque de longévité (principalement au Royaume Uni) souhaitent conserver le risque de placement, qui correspond d'ailleurs plus à leur coeur de métier qu'à celui du réassureur.

1.2 Le Swap de Mortalité

Le swap de mortalité est le nom du produit qui vise uniquement le transfert du risque de mortalité d'un portefeuille de rente, sans le transfert d'actifs. (Réassurance à la prime de risque).

En finance, un swap représente un contrat entre deux parties pour un échange des flux d'instruments financiers définis. Les deux parties entrent en relation, parce qu'elles ont soit des anticipations différentes des performances futures soit des structures différentes de leur passif qui seront financées par ces instruments.

Par analogie, le swap de mortalité est caractérisé ici par un échange de *base de mortalité différente* pour un portefeuille donné. Cet échange est conclu à une date précise, en figeant le portefeuille de rentes³⁵. Toutes les affaires nouvelles nécessitent alors un nouvel accord avec de nouvelles bases.

Le principe est le suivant : Les compagnies d'assurance et de réassurance s'entendent sur la valeur espérée des rentes, qui devient la prime de réassurance. En retour, le réassureur paye le montant réel des rentes. La différence entre les deux constitue la déviation de mortalité.

Pour Partner Re, les conditions de réassurance sont les suivantes:

- les traités sont conclus en quote part ou excédent de plein, donc réassurent un certain pourcentage du portefeuille total.
- les affaires cédées peuvent être uniquement limitées à certaines années de souscription.
- les paiements, à savoir les échanges primes / rentes payées, sont périodiques,
- il n'y a pas de clause de participation aux bénéfices.

Il existe également une clause de sortie pour l'assureur après dix ou quinze ans sans coût supplémentaire, dès lors que le traité lui occasionne une perte supérieure à un montant défini.

Une clause identique est prévue pour le réassureur à un horizon plus important.

³⁵ Le portefeuille est mis en Run-off.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

La couverture est proposée pour tous les types de rentes immédiates commercialisées, à savoir :

- obligatoires, ou facultatives,
- avec réversion, revalorisation...

1.3 Etude des flux

Afin de donner une idée des mécanismes du produit, nous présentons ci-dessous de manière simplifiée les différents résultats que peuvent attendre l'assureur et le réassureur avant et après le programme de réassurance.

Les formules présentées ci-dessous ne font référence qu'au résultat technique annuel, en omettant les frais. Pour simplifier l'écriture on ne fait pas de distinction de sexe et on suppose que tous les assurés ont le même âge.

On suppose également que les rentes sont payées en début d'année et que les placements sont rémunérés au taux technique.

Notations :

R_t est le résultat de l'opération à la fin de l'année t , $t=0..n$

l_x^{Stat} est le nombre d'assurés en vie à l'âge x d'après une table statutaire, qui a servi à la tarification (par exemple la TPG 93 en France)

l_x^{Actual} est le nombre réel d'assurés en vie à l'âge x

l_x^{Exp} est le nombre d'assuré en vie à l'âge x , attendu par le réassureur (Exp=Expected)

m est le montant de la rente, montant identique pour tous les assurés

i est le taux technique

$v = \frac{1}{1+i}$ est le taux d'actualisation

${}_t\Pi_x^{Stat} = \sum_{k=0}^{\omega-t} \frac{l_{x+t+k}^{Stat}}{l_{x+t}^{Stat}} \times v^k$ (où ω est l'âge maximum de la table de mortalité) désigne le montant de la provision mathématique unitaire pour *un* assuré d'après la table de l'assureur

${}_t\Pi_x^{Exp} = \sum_{k=0}^{\omega-t} \frac{l_{x+t+k}^{Exp}}{l_{x+t}^{Exp}} \times v^k$ est le montant de la provision mathématique unitaire pour *un* assuré d'après la table du réassureur

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Le résultat de l'assureur avant réassurance est alors :

$$R_t = \underbrace{-m \times l_{x+t-1}^{Actual}}_{\text{montant des rentes payé en début d'année}} + \underbrace{m \times \left(l_{x+t-1}^{Actual} \times {}_{t-1}\Pi_x^{Stat} - l_{x+t}^{Actual} \times {}_t\Pi_x^{Stat} \right)}_{\text{variation de provisions mathématiques}} + i \underbrace{\left(m \times l_{x+t-1}^{Actual} \times {}_{t-1}\Pi_x^{Stat} \right)}_{\text{produits financiers}}$$

Le résultat de l'assureur après réassurance devient :

$$R_t = \underbrace{-m \times l_{x+t-1}^{Exp}}_{\text{montant de la prime de réassurance}} + \underbrace{m \times \left(l_{x+t-1}^{Exp} \times {}_{t-1}\Pi_x^{Stat} - l_{x+t}^{Exp} \times {}_t\Pi_x^{Stat} \right)}_{\text{variation de provisions mathématiques}} + i \underbrace{\left(m \times l_{x+t-1}^{Exp} \times {}_{t-1}\Pi_x^{Stat} \right)}_{\text{produits financiers}}$$

On constate bien qu'avec cette structure, le risque de longévité a été totalement transféré, tout en conservant les provisions et les intérêts des placements : Les flux de la compagnie d'assurance sont alors devenus stables.

Le résultat du réassureur est quant à lui :

$$R_t = m \times l_{x+t-1}^{Exp} - m \times l_{x+t-1}^{Actual}$$

2. Approche Best Estimate

Nous proposons ici de calculer à l'aide de l'approche Best Estimate décrite dans la seconde partie, la valeur économique d'un traité "swap de mortalité".

Pour cela nous utilisons MoSes dans lequel nous avons reproduits à l'identique les mécanismes du produit dans un modèle spécifique : on dispose pour un portefeuille de polices donné, de l'ensemble des flux projetés à chaque date suivant les caractéristiques du traité et les hypothèses spécifiées.

Nous prenons comme exemple, un traité conclu en 2002 pour un portefeuille anglais de rentes viagères, pour lequel nous disposons de la composition du portefeuille à fin 2005. On souhaite en évaluer la valeur au 31 décembre 2005.

- Les montants de prime à percevoir périodiquement ont été établis à la souscription, et la seule inconnue demeure le montant de rentes à régler à chaque date future.

- Dans ce traité, il y a à la fois des commissions de courtage ainsi que des commissions de réassurance, exprimées en pourcentage des primes.

- Les commissions de réassurances payées sont réévaluées annuellement à un taux prévu contractuellement.

- Pour projeter la mortalité des rentiers, nous conservons l'hypothèse Best Estimate de mortalité faite lors de la tarification du produit en 2002, à savoir un abattement pour les deux tables Hommes et Femmes, PMA80 et PFA80 ajustées³⁶.

La valeur actuelle des profits futurs avant impôt est donc défini par :

$$\sum_{t=0} \frac{primes_t - sinistres_t^{Exp} - com_{t_{reass}} - com_{t_{courtage}} - frais_{t_{admin}}}{(1+r)^t}$$

où $\frac{1}{1+r}$ est le taux d'actualisation choisit (fixe).

Le capital alloué, que l'on nomme à nouveau RAC dans la suite, est calculé spécifiquement pour ce produit comme étant la différence entre la valeur actuelle des profits futurs sous l'hypothèse de mortalité "Best Estimate" et celle obtenue pour un scénario dit "catastrophe", résultant d'un abattement supplémentaire appliqué sur les deux tables hommes/femmes ; le RAC évolue donc de manière dynamique et le coût du capital alloué, vu à la date d'évaluation, s'exprime alors :

$$CoC = \sum_t \frac{(r - r_f * 75\%) RAC_t}{(1+r)^t}$$

³⁶ Il s'agit de tables spécifiques établies par l'institut des actuaires anglais pour la tarification des rentes.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

r_f le taux sans risque retenu (fixe) et 25% le taux d'imposition.

Nous présentons dans la suite les résultats obtenus pour ce portefeuille, qui comporte environ 200 000 polices pour lesquelles il peut y avoir réversion ; il est composé à 74% par des hommes. Voici quelques statistiques réalisées sur le portefeuille :

	Age moyen	Age moyen pondéré par le montant de rente	Age Min	Age Max
Hommes	73	72	41	107
Femmes	76	75	44	111

On peut noter également une grande variabilité des rentes versées: de 100£ à 230 000£.

Le portefeuille n'est ainsi pas homogène en montant, avec un montant annuel moyen de 2300£ pour un écart type de près de 6000£.

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus avec MoSes pour un horizon de projection fixé volontairement à 2052. (Les montants affichés dans la suite ont été modifiés mais les écarts ont été respectés).

Le tableau ci-dessous représente les premiers flux obtenus nécessaires au calcul de la valeur économique du portefeuille après application de la quote part. Les montants sont en £:

	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
Primes	14 859 636	14 266 556	13 657 042	13 033 067	12 396 929	11 751 235	11 098 893	
Sinistres (prestations)	14 730 276	14 042 493	13 343 591	12 636 292	11 923 612	11 208 817	10 495 397	
Commissions		14 860	14 267	13 657	13 033	12 397	11 751	11 099
Courtage		1 252	1 227	1 199	1 168	1 134	1 098	1 059
Resultat technique		113 249	208 570	298 595	382 574	459 786	529 569	591 338
Frais		260	265	270	276	281	287	293
Profit_avant_impôt		112 989	208 305	298 325	382 298	459 505	529 282	591 045
Profit_après_impôt		84 742	156 229	223 744	286 723	344 628	396 962	443 284
Capital	10 643 290	10 265 064	9 860 168	9 431 324	8 981 593	8 514 436	8 033 562	7 542 963
Coût du capital		449 988	433 062	415 049	396 072	376 275	355 811	334 848

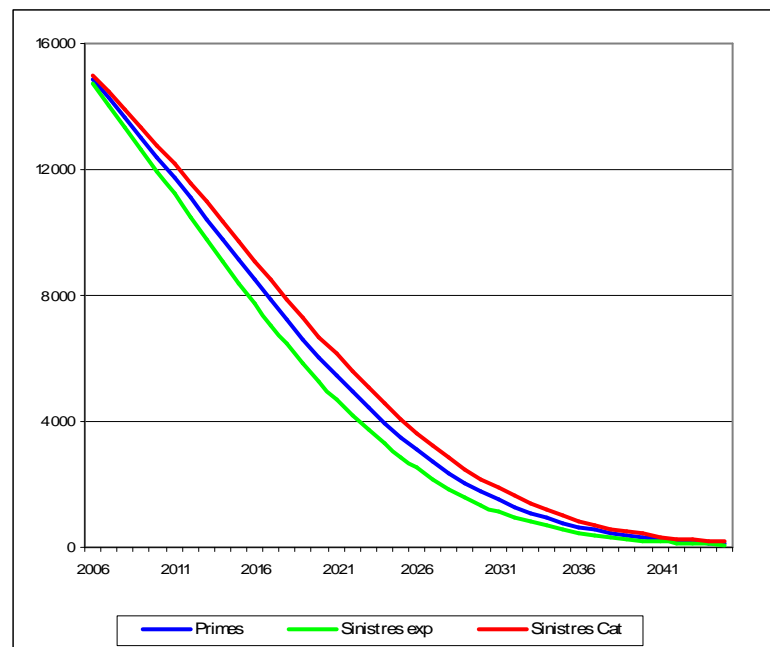
Le taux d'inflation sur frais retenu est de 2% par an et le taux d'imposition considéré est de 25% (hypothèse moyenne pour Partner Re).

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

En actualisant tous les flux obtenus à l'aide de MoSes jusqu'en 2052 on obtient :

valeur actuelle des profits futurs		4 761 535
coût du capital	-	3 360 768
valeur du portefeuille	=	1 400 766

Nous avons tracé ci-dessous l'évolution des primes, ainsi que les évolutions des montants de sinistres attendus (les montants de rentes réglés), et des montants de sinistres pour le scénario dit "catastrophe" sur lequel s'appuie le calcul du RAC à chaque date : la différence entre les courbes verte et bleu représente le résultat attendu hors coûts.



Le risque ici est que la courbe verte représentant les sinistres attendus par le réassureur croise la courbe des primes (en bleu), qui signifierait une perte technique.

Sensibilités

Les deux hypothèses qui auront le plus d'impact sur la valeur du portefeuille pour ce produit vont être le taux d'actualisation retenu et bien sûr l'hypothèse de mortalité. Nous présentons ci-dessous quelques éléments d'analyse des écarts :

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

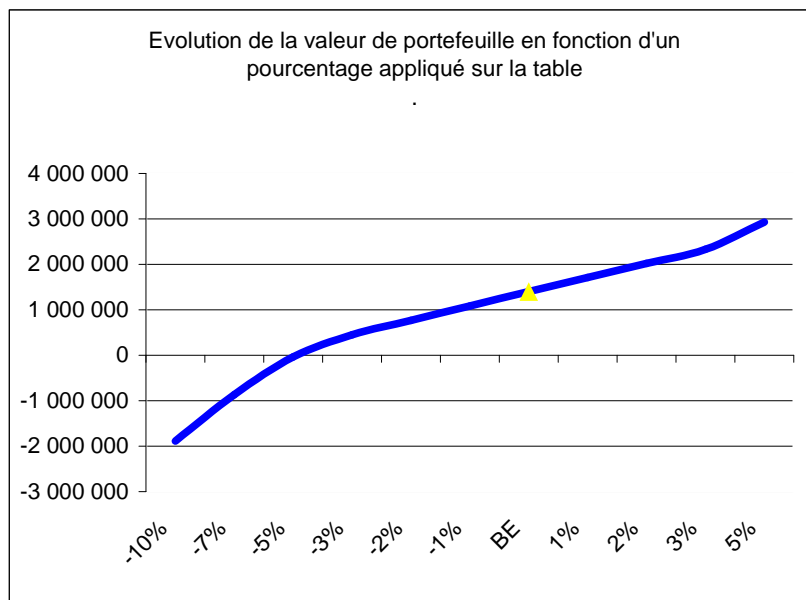
Taux d'actualisation :

	-0.5 %	Best Estimate	+0.5 %
Valeur actuelle des profits futurs	5 027 125	4 761 535	4 515 880
Coût du capital	3 240 325	3 360 768	3 448 428
Valeur du portefeuille	1 786 800	1 400 766	1 067 453
Ecart Valeur	5.6%	0.0%	-5.2%
Ecart Coût	-3.6%	0.0%	2.6%
Ecart portefeuille	27.6%	0.0%	-23.8%

Comme attendu, une augmentation du taux d'actualisation entraîne une diminution de la valeur du portefeuille car cela réduit la valeur actuelle des profits futurs et fait augmenter mécaniquement le coût du capital alloué.

Mortalité :

Nous avons appliqué aux deux tables de mortalités hommes/ femmes des abattements en pourcentage de la table initiale, dès le début de la date de projection. Le graphique ci-dessous montre l'impact de ces variations sur la valeur du portefeuille.



Il est clair ici que tout l'enjeu provient de la mortalité ; il n'y a en effet aucun aléa sur les autres postes. On comprend alors les limites de l'approche Best Estimate qui ne donne qu'une unique valeur et ne permet qu'une analyse de sensibilité aux hypothèses : aucune indication sur l'incertitude autour de la valeur obtenue n'est disponible.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Dans le cas présent, cette incertitude sur la mortalité projetée est due à plusieurs facteurs :

L'amélioration future de mortalité liée aux progrès de la science et aux améliorations de conditions de vie. Ceci est difficilement "modélisable" puisqu'il s'agit d'événements incertains et dont on ne peut mesurer la probabilité de survenance à un horizon donné. Ce point ne sera pas traité dans la suite.

Ensuite, lorsque l'on raisonne en valeur actuelle probable (VAP), cela signifie que l'on ne tient pas compte du risque assurantiel lié à la taille limitée du portefeuille, pour lequel il peut y avoir des fluctuations d'échantillonnage. Ici comme pour beaucoup d'autres portefeuilles réassurés de taille importante, on peut supposer, que le risque assurantiel est, si non éliminé, au moins réduit par mutualisation.

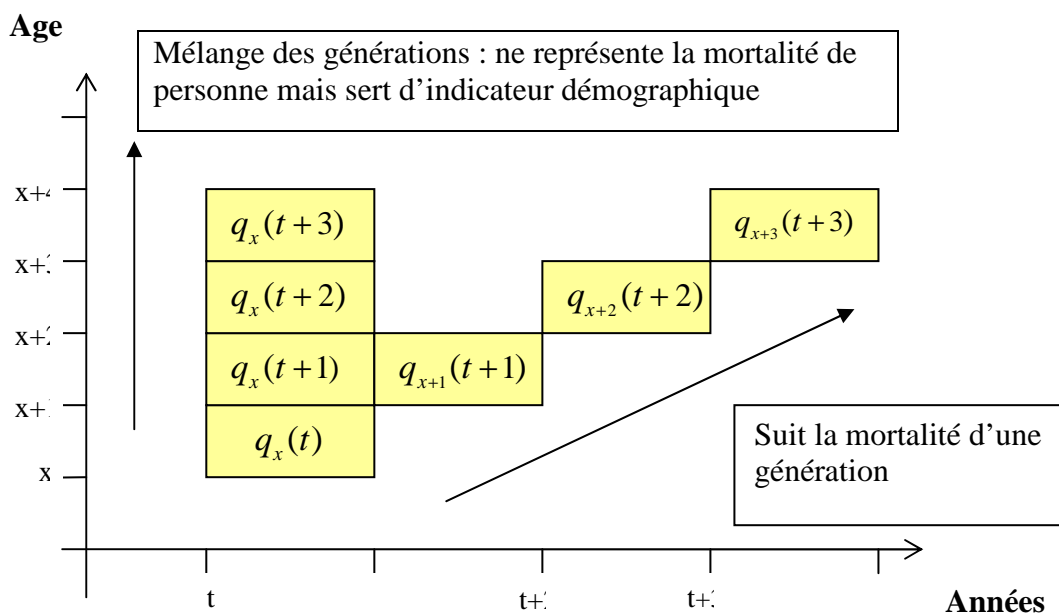
La dernière incertitude provient des tables utilisées. Celle-ci n'a jamais été analysée auparavant par Partner Re (contrairement au risque assurantiel). C'est cette incertitude que nous proposons d'étudier dans la suite.

3. Approche par simulations

3.1 Le risque de longévité

Le risque de longévité est un risque en constante évolution, comme l'ont démontré toutes les études démographiques. C'est la raison pour laquelle une mesure de mortalité basée uniquement sur quelques années est insuffisante pour la construction d'une table.

L'évolution de la mortalité impose une lecture diagonale des tables de mortalité :



Les tables utilisées pour la tarification des rentes reprennent bien sûr cette vision dite longitudinale.

Cependant à un instant donné, on ne dispose, pour chaque génération, que des taux de mortalité correspondants aux âges passés. Il est alors nécessaire d'avoir recours à des extrapolations pour obtenir des prévisions des taux futurs de mortalité. Les tables ainsi construites sont appelées tables prospectives.

Leur construction soulève un certain nombre d'interrogations liées à la "modélisation". En effet, il est nécessaire de recourir à un modèle paramétrique puis de prolonger les tables à l'aide d'une série chronologique.

On sait qu'il existe alors plusieurs sources d'erreurs liées à cette manière de procéder :

- Le risque de modèle, car le modèle peut ne pas bien refléter la mortalité,
- L'incertitude sur les paramètres, liée au nombre réduit d'observations, appelée risque de paramètre,
- L'incertitude sur la prédiction.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Le calcul de l'incertitude de la projection des flux financiers à partir d'une table construite est très complexe.

D'autre part nous ne disposons pas ici des éléments qui ont permis de déterminer la table de mortalité prospective utilisée pour le swap de mortalité.

Pour obtenir une mesure de cette incertitude nous proposons de considérer les taux de mortalités futurs comme aléatoires, et de générer alors un grand nombre de tables de mortalité afin de rendre compte de fluctuations autour de la valeur tendancielle. Chaque table représentera un scénario de mortalité : une mesure de l'incertitude sera obtenue à l'aide de la distribution des valeurs économiques calculées (Méthode de Monte Carlo).

Nous nous sommes intéressé à la méthodologie de LEE & CARTER (1992-2000) pour illustrer une approche stochastique de la mortalité. Ce choix tient au fait que le modèle a été appliqué avec succès à la population de nombreux pays et est devenu un standard pour construire des tables prospectives.

C'est également une méthodologie étudiée par le comité d'actuaire anglais chargé des recherches sur le thème de la mortalité (le CMIB, Continuous Mortality Investigation Board).

Dans la suite nous présentons les techniques de simulation de tables pour le modèle de Lee Carter ainsi que le modèle Poisson Log bilinéaire, amélioration suggéré par BROUHNS et AL. (2002).

Faute de données disponibles pour les rentiers, nous avons travaillé sur la population anglaise générale. Les données utilisées proviennent du site www.mortality.org

Notations et définitions.

Nous utilisons les notations suivantes, pour un assuré d'âge x pendant l'année t : les quantités sont doublement indicées afin de tenir compte de l'évolution de la mortalité.

T_{xt} : la durée de survie résiduelle

L_{xt} : le nombre d'individu d'âge x l'année t en vie

D_{xt} : le nombre de décès d'individus, d'âge x à la date t

q_{xt} : la probabilité de décès dans l'année et $p_{xt} = 1 - q_{xt}$ la probabilité de survie correspondante.

μ_{xt} : le taux instantané de mortalité, qui est une mesure du risque qu'il décède "instantanément.

Nous introduisons également la notion d'exposition au risque, qui est une quantité utile lorsque l'on observe les décès d'un groupe d'individus.

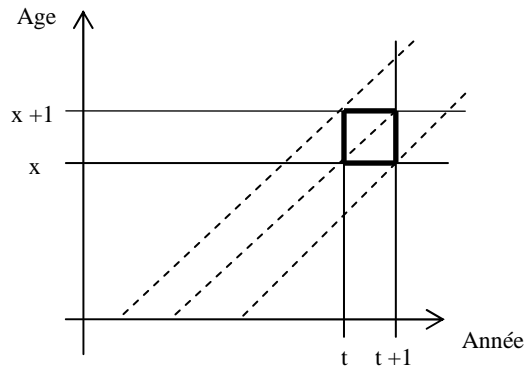
Cette variable aléatoire que l'on note ici ER_{xt} donne la fraction de temps vécu par les individus d'âge x l'année t .

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Elle s'exprime de la façon suivante.

$$ER_{xt} = \int_0^1 \int_0^1 L_{x+h,t+k} dh dk$$

On fait alors l'hypothèse usuelle de constance du taux instantané pour chaque carré du diagramme de Lexis, représenté ci-dessous :



La probabilité de survie s'écrit alors facilement en fonction du taux instantané :

$$\text{En effet, } \mu_{xt} = -\frac{d}{dx} \frac{d}{dt} \ln p_{xt} \Leftrightarrow p_{xt} = \exp\left(-\int_0^1 \int_0^1 \mu_{x+k,t+h} dk dh\right)$$

$$\text{et } \mu_{x+k,t+k} = \mu_{xt} \Rightarrow p_{xt} = \exp(-\mu_{xt}) \text{ et } \mu_{xt} = -\ln(p_{xt}) \quad (1)$$

De même l'exposition au risque se réécrit :

$$ER_{xt} = \frac{-L_{xt} q_{xt}}{\ln p_{xt}} \quad (2)$$

A l'aide de ces notations, en utilisant une table (s) générée, on obtient la valeur actuelle des prestations versées pour le $i^{\text{ème}}$ individu d'âge x à la date d'évaluation t qui perçoit un montant de rente m_i (sans réversion):

$$V_t^{(i,s)} = E \left[\sum_{k=1}^{T_{xt}^{(i,s)}} v^k m_i \right]$$

$$V_t^{(i,s)} = \sum_{k \geq 0} v^k m_i \prod_{j=0}^k p_{x+j,t+j}^{(s)}$$

$$V_t^{(i,s)} = \sum_{k \geq 0} v^k m_i \exp\left(-\sum_{j=0}^k \mu_{x+j,t+j}^{(s)}\right)$$

3.2 Le modèle de Lee & Carter

3.2.1 Description

Le modèle de Lee Carter décompose le logarithme du taux instantané de mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle.

Le modèle s'écrit sous la forme *log-bilinéaire* suivante :

$$\boxed{\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}} \quad (3)$$

où :

α_x représente la composante spécifique à l'âge x et décrit le comportement moyen des $\ln \mu_{xt}$ au cours du temps,

κ_t est un indice qui décrit l'évolution générale de la mortalité,

β_x indique la sensibilité de la mortalité instantanée à l'âge x par rapport à l'évolution générale de la mortalité représentée par les variations de κ_t ; on peut en effet écrire,

$$\frac{d \ln \mu_{xt}}{dt} = \beta_x \frac{d \kappa_t}{dt} \text{ et donc } \beta_x = \frac{d \ln \mu_{xt}}{d \kappa_t}$$

les ε_{xt} représentent les erreurs du modèle, supposées indépendantes et identiquement distribuées, de loi $N(0, \sigma^2)$.

Cette composante aléatoire représente la partie non expliquée par la structure paramétrique $\alpha_x + \beta_x \kappa_t$.

Ce modèle n'est pas identifiable sans contrainte, car il est "insensible" à certaines transformations de ses paramètres, comme des translations ou des homothéties.

Il est donc nécessaire de fixer des contraintes et plusieurs choix sont possibles.

Nous reprenons celles fixées dans le modèle d'origine :

$$\boxed{\sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t = 0}$$

où x_{\min}, x_{\max} sont respectivement le plus petit et le plus grand âge considéré et t_{\min}, t_{\max} l'année calendaire de départ et de fin pour les observations.

On notera $n_x = x_{\max} - x_{\min} + 1$, le nombre d'âges de la table et $n_t = t_{\max} - t_{\min} + 1$ le nombre d'années.

Pour construire des tables prospectives il faut tout d'abord estimer les paramètres du modèle de Lee Carter puis modéliser la composante temporelle κ_t décrivant l'évolution

de la mortalité. On utilise ensuite le modèle de série chronologique retenu pour extrapoler la tendance.

3.2.2 Estimation des paramètres :

L'estimation des paramètres se déroule en quatre étapes :

Étape 1 : Estimation des taux de décès

Pour cela, d'après (1) et (2) nous pouvons exprimer μ_{xt} à l'aide de D_{xt} et ER_{xt} par :

$$\mu_{xt} = \frac{D_{xt}}{ER_{xt}}.$$

On estime ensuite μ_{xt} par $\hat{\mu}_{xt} = \frac{d_{xt}}{er_{xt}}$ où d_{xt} et er_{xt} sont les observations de la période retenue.

Il y a alors deux considérations préalables :

- il est nécessaire d'avoir des tableaux complets, ce qui pose le problème des données aux âges élevés. L'âge maximum x_{\max} sera donc choisi de manière à ce qu'il y ait des données, de préférence non agrégées, pour chaque année calendaire. Pour notre étude nous retiendrons 103 ans pour les femmes et 101 ans pour les hommes.
- des études ont montré que le choix de l'année de départ t_{\min} avait un impact important sur les résultats obtenus. Ceci est dû à des événements particuliers, comme les guerres. C'est pourquoi on choisit fréquemment la seconde partie du 20^e siècle comme période d'étude. Nous faisons de même en choisissant dans un premier temps $t_{\min} = 1950$. Pour t_{\max} nous prenons la dernière année disponible, à savoir 2003.

On dispose ainsi pour chaque sexe, de deux matrices de décès et d'exposition au risque.

Étape 2 : Estimation des α_x

L'estimation des paramètres s'obtient par la méthode des moindres carrés, ici non linéaires, par minimisation de la somme en x et t des carrés des écarts :

$$\sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2.$$

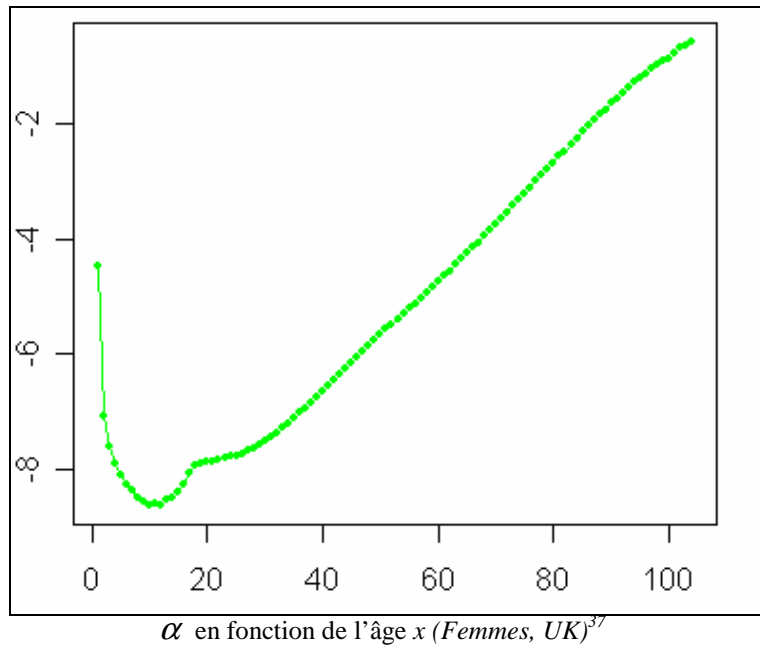
Pour α_x , le résultat est alors immédiat grâce à la contrainte imposée sur les κ_t :

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} (\ln \hat{\mu}_{jt} - \alpha_j - \beta_j \kappa_t)^2 &= \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} -2(\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t) \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} (\ln \hat{\mu}_{jt} - \alpha_j - \beta_j \kappa_t)^2 &= 2n_t \alpha_x - 2 \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \beta_x \kappa_t) \\ &= 2n_t \alpha_x - 2 \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \ln \hat{\mu}_{xt} + 2\beta_x \underbrace{\sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t}_0 \end{aligned}$$

On obtient $\hat{\alpha}_x = \frac{1}{n_t} \sum_t \ln \hat{\mu}_{xt}$

Voici la représentation des valeurs obtenues de α en fonction de l'âge x :



Etape 3 : Estimation des β_x et κ_t

On définit la matrice Z de taille $n_x \times n_t$ composée des éléments $z_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{\alpha}_x$.

Le but est d'approximer Z par le produit de deux vecteurs représentant β et κ , avec le critère d'optimalité au sens des moindres carrés.

On utilise alors la décomposition en valeurs singulières qui offre cette garantie.

La matrice Z s'écrit de la façon suivante :

$$Z = \sum_i \sqrt{\lambda_i} v_i u_i^t \text{ avec } v_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} Z u_i$$

³⁷ Cf annexe pour les Hommes.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

u_i et v_i sont respectivement le vecteur propre normé de $'ZZ$ et le vecteur propre de $Z'Z$ pour la même valeur propre λ_i (car ces deux matrices ont mêmes valeurs propres et de même multiplicité).

On proposera comme approximation au rang 1, $Z \approx \sqrt{\lambda_{\max}} v_{\lambda_{\max}} u_{\lambda_{\max}}'$, où λ_{\max} est la plus grande valeur propre.

Pour vérifier la qualité de l'approximation, on mesure la quantité $\frac{\lambda_{\max}}{\sqrt{\lambda_{\max}}}$, appelée taux d'inertie ; cette grandeur fournit la part de variance expliquée.

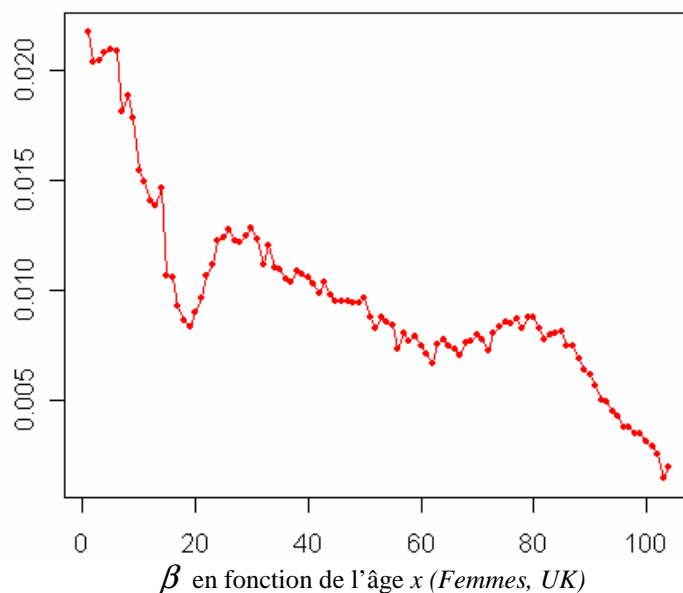
Nous obtenons un taux d'inertie de **88%** pour les femmes et de **89%** pour les hommes, qui indique que l'approximation est de bonne qualité.

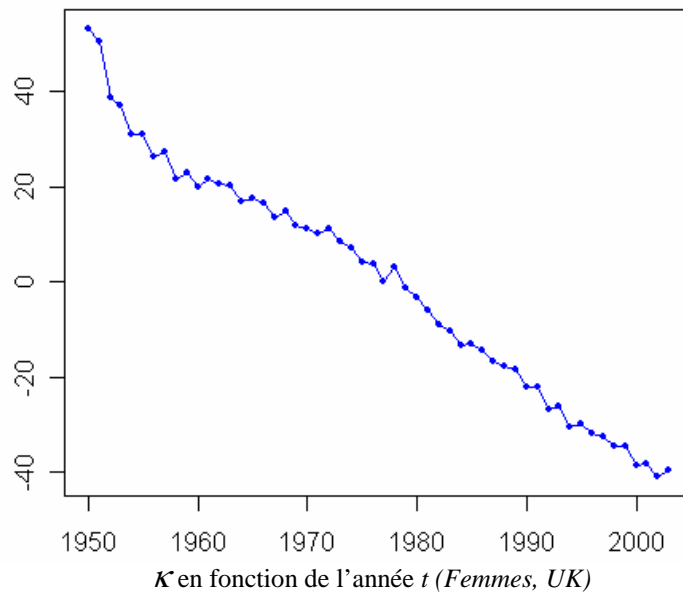
On obtient alors les estimateurs des vecteurs β et κ suivants :

$$\widehat{\beta} = \frac{v_{\lambda_{\max}}}{v_{\lambda_{\max}} \cdot} \quad \text{et} \quad \widehat{\kappa} = \sqrt{\lambda_{\max}} v_{\lambda_{\max}} \cdot \times u_{\lambda_{\max}}$$

où $v_{\lambda_{\max}} \cdot$ est le somme des composantes de $v_{\lambda_{\max}}$.

Les deux graphiques ci-dessous représentent les β_x et κ_t obtenus :





Étape 4 : Réajustement des κ_t

La mise en œuvre des étapes précédentes n'accorde pas d'importance à la qualité de l'ajustement au nombre de données. Néanmoins, c'est une quantité peut être utile dans les applications actuarielles.

Cette dernière étape a donc pour but de réajuster les paramètres du modèle de façon à ce que le nombre de décès prévus chaque année soit égal au nombre de décès observés, ce qui s'exprime par l'égalité suivante:

$$\sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} d_{xt} = \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} e r_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$$

On va alors réajuster les κ_t en cherchant le zéro de la fonction :

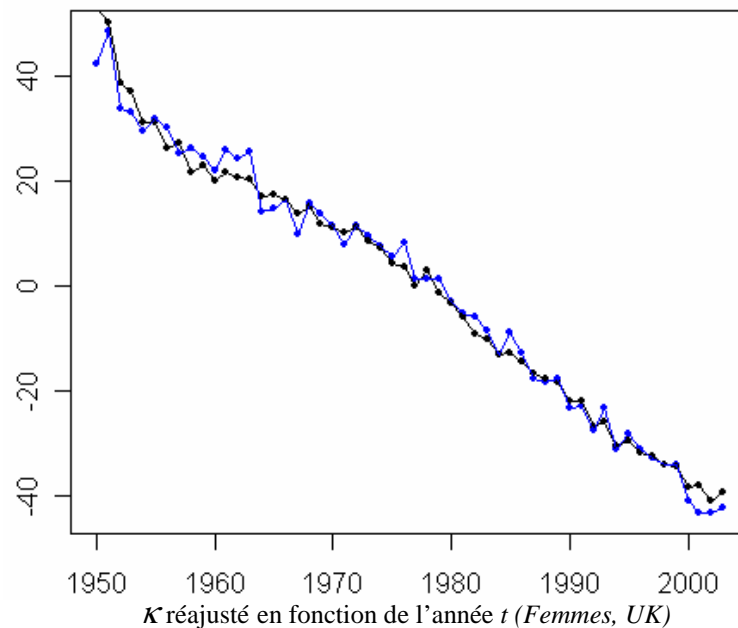
$$f(k) = \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} e r_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x k) - \sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} d_{xt}$$

On utilise un algorithme itératif de type Newton-Raphson avec la condition initiale $k_0 = \hat{\kappa}_t$ (obtenu à l'étape 3).

On note $\hat{\kappa}^*$ le nouveau vecteur obtenu.

Une correction s'impose enfin pour respecter les deux contraintes d'identifiabilité ; en notant les nouveaux paramètres comme les anciens, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_t &\leftarrow \hat{\kappa}_t^* - \overline{\hat{\kappa}_t^*} \\ \hat{\alpha}_x &\leftarrow \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \overline{\hat{\kappa}_t^*} \end{aligned}$$



3.2.3 L'extrapolation de la composante temporelle

Il est nécessaire de spécifier la forme du processus κ_t afin de pouvoir faire des prévisions. Cette série peut être modélisée à l'aide des processus de type ARIMA³⁸.

Ceci permet d'écrire le processus κ_t sous la forme :

$$\nabla_d \kappa_t - \sum_{k=1}^p a_k \nabla_d \kappa_{t-k} = \theta + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q b_j \varepsilon_{t-j} \quad (4)$$

où Δ_d est l'opérateur de différence d c'est à dire $\Delta_d \kappa_t = \kappa_t - \kappa_{t-d}$

et ε_t sont des erreurs indépendantes et identiquement distribuées, que l'on peut supposer gaussiennes, ie $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.³⁹

Pour la modélisation, on suit la démarche de Box Jenkins :

- *Stationnarisation de la série* : la série des κ_t présente une tendance décroissante comme on a pu le constater sur le graphique ci-dessus, ce qui contredit la condition de stationnarité du premier ordre (en moyenne). On différencie alors la série jusqu'à temps que la série différenciée soit stationnaire.
- *Identification du modèle* : l'étude des autocorrélogrammes et des autocorrélogrammes partiels permet de déterminer les ordres possible des AR et MA. Si plusieurs modèles sont envisageables, on retient celui qui maximise le critère d'information Akaike (AIC).

³⁸ L'extrapolation de la tendance observée dans le passé ne tient pas compte des effets possibles des facteurs qui pourrait influencer la mortalité dans l'avenir, qui sont difficilement modélisables ; il s'agit de la méthode par défaut.

³⁹ On parle de bruit blanc gaussien.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

- *Estimation des paramètres* : elle se fait par la méthode du maximum de vraisemblance.
- *Validation du modèle choisi par analyse des résidus* : cette dernière étape consiste à effectuer des tests de blancheur sur les résidus du modèle retenu.

Nous avons suivi cette démarche pour les deux populations ⁴⁰, à l'aide du logiciel R et retenu :

Pour la population féminine le modèle ARIMA (0,1,1) suivant :

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \hat{\theta} + \varepsilon_t + \hat{b}_1 \varepsilon_{t-1}, \text{ où } \varepsilon_t \text{ bruit blanc de variance estimée } \hat{\sigma}^2 \text{ avec}$$
$$(\hat{b}_1 = -0.7158, \hat{\theta} = -1.6155, \hat{\sigma}^2 = 10.21)$$

Pour la population masculine, le modèle ARIMA (0,2,2) :

$$\kappa_t = 2\kappa_{t-1} - \kappa_{t-2} + \hat{\theta} + \varepsilon_t + \hat{b}_1 \varepsilon_{t-1} + \hat{b}_2 \varepsilon_{t-2} \text{ avec}$$
$$(\hat{\theta} = -0.0425, \hat{b}_1 = -1.6936, \hat{b}_2 = 0.7927, \hat{\sigma}^2 = 5.457)$$

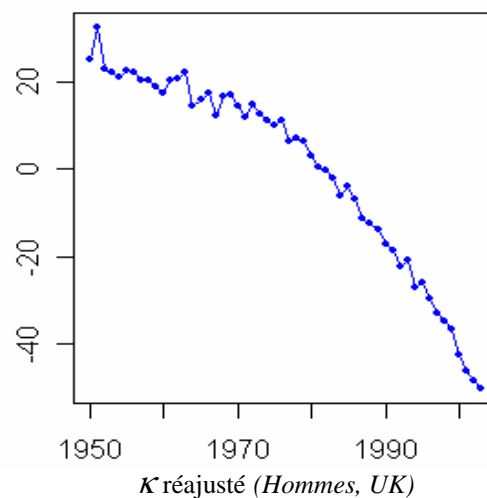
Remarque :

On peut aussi modéliser les deux séries chronologiques précédentes par une régression linéaire ou quadratique avec un modèle ARMA sur les erreurs.

Ici pour la population féminine, le tracé des κ_t indique une tendance linéaire ; le modèle retenu le confirme : il s'agit du modèle de régression linéaire $\kappa_t = a + bt + \zeta_t$ où ζ_t est un processus ARMA (1,1).

avec $(\hat{a} = 43.5423, \hat{b} = -1.5868, \hat{a}_1^\zeta = 0.8503, \hat{b}_1^\zeta = -0.6126, \hat{\sigma}^2 = 9.548)$

Pour la population masculine, le tracé de κ_t suggère une régression quadratique pour la tendance.



⁴⁰ Les détails sont présentés en annexe.

Le modèle que l'on retient ici est $\kappa_t = a + bt + ct^2 + \zeta_t$ où ζ_t est un processus MA (1) avec $(\hat{a} = 22.1211, \hat{b} = 0.2656, \hat{c} = -0.0294, \hat{b}_1^\zeta = 0.2233, \hat{\sigma}^2 = 5.063)$

3.2.4 Génération de tables prospectives.

Pour générer S tables de mortalité par simulation il existe plusieurs possibilités :

a) On conserve l'ensemble des paramètres estimés liés à l'âge x , $\hat{\alpha}_x$ et $\hat{\beta}_x$ et on simule S trajectoires de la série κ_t pour $t > t_{\max}$, à partir de l'écriture ARIMA de la série $\hat{\kappa}_t$:

Pour cela on utilise les paramètres du modèle ARIMA $(\hat{a}_i), (\hat{b}_i), \hat{\theta}$, et $\hat{\sigma}^2$ estimés et on simule un bruit blanc gaussien de variance $\hat{\sigma}^2$ pour les erreurs ε_t .

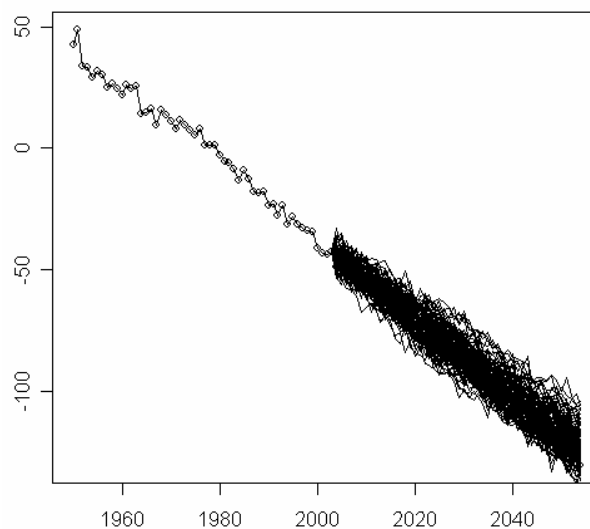
On obtient ainsi un taux instantané pour tout couple (x,t) avec $t > t_{\max}$:

Pour les femmes, en utilisant $\hat{\kappa}_{t_{\max}}$ pour initialiser le processus, on a ainsi pour $t > t_{\max}$,

$$\ln \mu_{xt}^{(s)} = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x (\kappa_{t-1} + \hat{\theta} + \tilde{\varepsilon}_t^{(s)} + \hat{b}_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1}^{(s)})$$

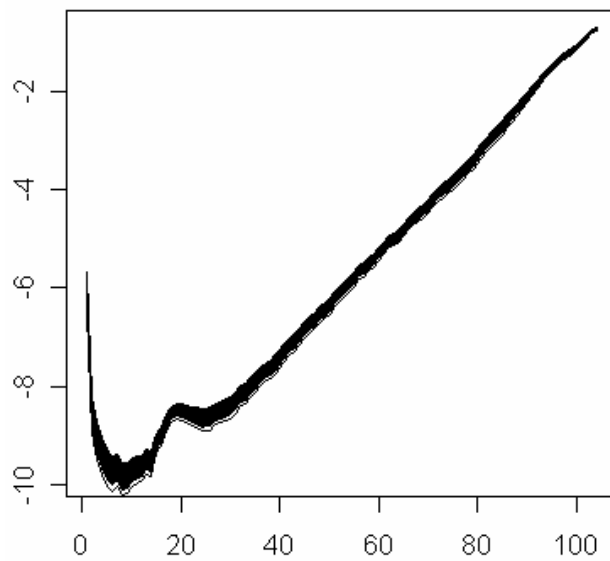
où les $\tilde{\varepsilon}_t$ sont des réalisations de va de loi $N(0, \hat{\sigma}^2)$.

Les graphiques suivant montrent 100 trajectoires de κ_t obtenues par simulation et les trajectoires du logarithme du taux instantané en 2020 :



100 simulations de κ_t à horizon 2053 (Femmes)

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité



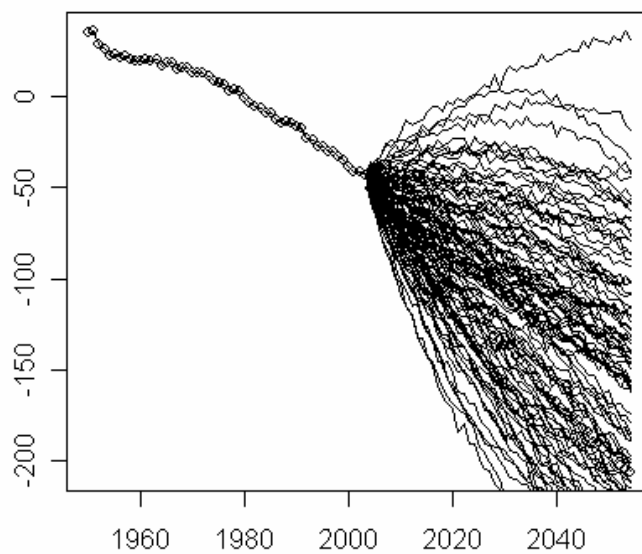
100 simulations de trajectoires $\ln \mu_{x,2020}$ (Femmes).

Les trajectoires obtenues sont conformes à notre attente.

Pour la population masculine, en utilisant la modélisation ARIMA (0,2,2) retenue précédemment et en initialisant les trajectoires à l'aide de $\hat{\kappa}_{t_{\max}}$ et $\hat{\kappa}_{t_{\max}-1}$ on obtient pour $t > t_{\max}$:

$$\ln \mu_{xt}^{(s)} = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x * (2\kappa_{t-1} - \kappa_{t-2} + \hat{\theta} + \tilde{\varepsilon}_t^{(s)} + \hat{b}_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1}^{(s)} + \hat{b}_2 \tilde{\varepsilon}_{t-2}^{(s)})$$

Le tracé de 100 trajectoires simulées de κ_t montre cependant une grande instabilité, ce qui donnera des taux de mortalité aberrants dans peut être 50% des cas si on tente de dénombrer le nombre de trajectoires suspectes sur le graphique ci-dessous.



100 simulations de κ_t à horizon 2053 (Hommes)

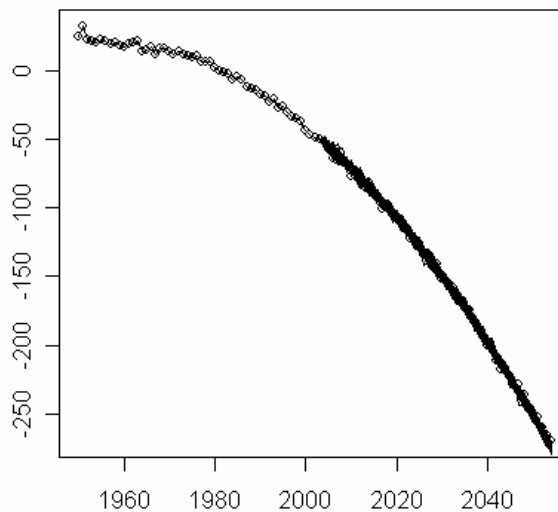
Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Ceci peut provenir du fait que le modèle ARIMA (0,2,2) est peut être sur-paramétré, ce qui impliquerait qu'il y a trop d'incertitude autour des paramètres estimés.

On peut quoiqu'il en soit en déduire qu'il n'est pas adapté pour effectuer des simulations du fait de la trop grande variabilité des trajectoires.

Pour remédier à ce problème on peut procéder de la façon suivante :

On peut utiliser le modèle de régression quadratique avec erreur ARMA comme évoqué ci-dessus ; les trajectoires que l'on obtient sont alors très stables.



100 simulations de κ_t (modèle de régression+AR (1))

Néanmoins choisir cette tendance "déterministe" pour ε_t est une contrainte forte pour le modèle, car il apparaît clairement que la forme quadratique retenue est due à la période 1950 - 1975 et qu'au delà une régression linéaire semble possible.

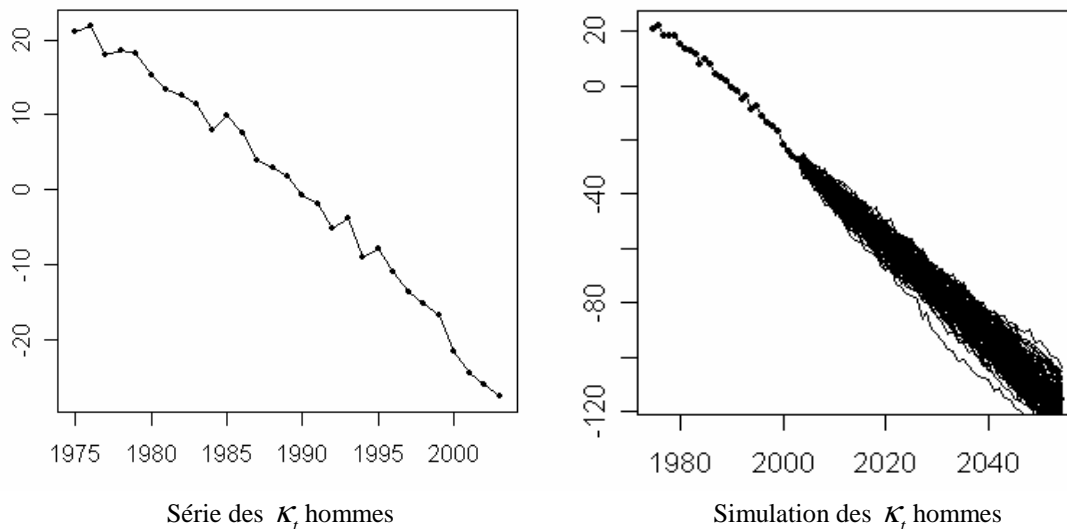
Il ne paraît donc pas nécessaire ni souhaitable de travailler avec un historique aussi important même si il s'agit de faire des projections à horizon éloigné⁴¹.

Pour effectuer des simulations nous choisissons alors de prendre $t_{\min} = 1975$ pour les hommes et les femmes, date à partir de laquelle la tendance est linéaire pour les hommes.

Les paramètres du modèle de Lee Carter sont alors ré-estimés pour cet historique réduit (1975-2003) et on modélise à nouveau les κ_t hommes, femmes, suivant des processus ARIMA.

L'analyse des nouvelles séries confirme le choix d'un modèle **ARIMA (0,1,1)** pour les femmes et pour les hommes on retient cette fois ci un modèle légèrement moins paramétré un **ARIMA (0,1,2)**. Les trajectoires obtenues par simulation sont alors satisfaisantes.

⁴¹ En théorie il n'est pas possible de projeter à horizon aussi lointain. En général on retient comme nombre maximum la moitié du nombre d'observations. Néanmoins il s'agit de la technique par défaut.



Remarque : il est également souvent fait usage d'une simple marche aléatoire pour la série κ_t , c'est à dire le modèle ARIMA (0,1,0). Ici, dans la mesure où nous effectuons des simulations et que les trajectoires obtenues ne sont pas aberrantes, il n'est pas plus coûteux en temps de calcul de conserver des modèles légèrement plus paramétrés.

b) Une seconde façon de procéder serait de générer de nouveaux taux instantanés μ_{xt} pour obtenir de nouveaux paramètres $\hat{\alpha}_x$ et $\hat{\beta}_x$ et $\hat{\kappa}_t$. Ensuite, en conservant les ordres du modèle ARIMA retenu sur les données originales, nous effectuons "la" prévision de $\hat{\kappa}_t$ ⁴² à l'horizon souhaité.

Pour générer ces nouveaux taux instantanés μ_{xt} , on peut envisager deux techniques :

- Pour un couple (x,t) pour $t \leq t_{\max}$ on peut les générer par simulation du terme d'erreur ε_{xt} de l'équation :

$$\ln \mu_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}$$

Les ε_{xt} étant par hypothèse indépendants et identiquement distribués de loi $N(0, \sigma^2)$, un estimateur sans biais de σ^2 est alors :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_x n_t - (2n_x + n_t - 2)} \sum_{xt} e_{xt}^2 \quad (5)$$

où :- les e_{xt} sont les résidus du modèle ; ils ont pour expression $e_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t$
 - le dénominateur correspond au nombre de paramètres libres du modèle (en tenant compte des deux contraintes d'identifiabilité du modèle)⁴³

⁴² Sous R on peut utiliser la fonction predict, ou filter

⁴³ Ici comme $n_x n_t \gg 2n_x + n_t - 2$ on peut utiliser $n_x n_t$ au dénominateur

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

- L'autre possibilité est de recourir à un procédé de rééchantillonnage sur les résidus du modèle.

L'idée ici est de mimer des répétitions, afin de générer de nouveaux échantillons

(technique du bootstrap) : On obtient ainsi de nouveaux $\hat{\mu}_{xt}$ à l'aide de la relation :

$$\ln \hat{\mu}_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} + e_{\sigma_1(x), \sigma_2(t)}$$

où $\sigma_1(\cdot)$ et $\sigma_2(\cdot)$ représentent respectivement les permutations aléatoires sur les âges et sur les années.

Ainsi pour générer une nouvelle matrice de taux instantanés, il suffit d'effectuer un tirage uniforme (avec remise) parmi tous les résidus.

Remarque : Ceci soulève alors un point particulier : le nombre de décès d_{xt} observés.

Lorsque l'on procède comme décrit précédemment, seuls les $\ln \hat{\mu}_{xt}$ changent, et on peut alors naturellement se poser la question du réajustement des κ_t .

On peut déjà noter qu'il n'est pas réaliste de vouloir recalculer de nouveaux nombres de décès ; déjà par ce que le produit $\hat{\mu}_{xt} e_{xt}$ n'est pas entier, ensuite parce que l'on perdrait de l'information, puisque l'on connaît les "vrais" nombres de décès de la période.

On conservera donc l'étape du réajustement des κ_t avec les nombres de décès originaux (sinon on introduit une erreur supplémentaire).

c) Les deux méthodes précédentes négligent une partie de l'aléatoire : sur les paramètres pour la première et sur la prédiction pour la seconde.

On propose donc de retenir la combinaison des deux afin de tenir compte des deux sources de variabilité ainsi que des interactions entre le modèle initial et le modèle prédictif retenu. Il s'agit d'une démarche identique à celle mise en œuvre pour l'obtention d'intervalles de confiance.

Nous définissons l'**algorithme** suivant pour la génération d'une table prospective (s), à partir des observations des nombres de décès et des expositions au risque, pour la période 1975-2003.

Etape 1 : générer de nouvelles valeurs pour les paramètres $\alpha_x^{(s)}, \beta_x^{(s)}, \kappa_t^{(s)}$:

- par simulation du terme d'erreur ε_{xt} suivant la loi $N(0, \hat{\sigma}^2)$ où $\hat{\sigma}^2$ est estimé comme ci-dessus (5). On obtient alors de nouvelles "observations" $\hat{\mu}_{xt}$ à partir de l'expression $\ln \hat{\mu}_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} + \varepsilon_{xt}$.
Ces nouvelles valeurs sont alors utilisées pour estimer les paramètres $\alpha_x^{(s)}, \beta_x^{(s)}, \kappa_t^{(s)}$.

- ou par ré-échantillonnage des résidus e_{xt} du modèle : $\ln \hat{\mu}_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} + e_{\sigma_1(x), \sigma_2(t)}$

Etape 2 : Estimer les paramètres du modèle ARIMA (en conservant les ordre du modèle initial).

Etape 3 : Simuler une trajectoire de $\kappa_t^{(s)}$ pour $t > t_{\max}$ en simulant un bruit blanc gaussien de variance celle du modèle ARIMA, estimée à l'étape 2

Etape 4 : On calcule les $\mu_{xt}^{(s)} : \mu_{xt}^{(s)} = \exp(\alpha_x^{(s)} + \beta_x^{(s)} \kappa_t^{(s)})$

3.2.5 Fermeture des tables prospectives :

A ce stade les tables simulées s'arrêtent à 101 ans et 103 ans alors qu'il est nécessaire de tenir compte de la mortalité à des âges plus élevés jusqu'à 120 ou 130 ans, afin de ne pas sous estimer le risque de longévité, donc sur estimer la valeur économique. Ce procédé qui consiste à extrapoler la mortalité s'appelle la fermeture.

Plusieurs méthodes existent et peuvent être appliquées ici. Celles-ci peuvent avoir lieu avant ou après la modélisation Lee Carter.

Toutes les méthodes existantes extrapolent les taux instantanés μ_{xt} ou les taux q_{xt} et non les nombres de décès observés ou les expositions au risque utilisés dans le modèle de Lee Carter. Comme nous souhaitons générer un grand nombre de tables prospectives, nous avons choisit ici de les fermer après leur obtention et cette nouvelle étape constitue l'**étape 5** de l'algorithme précédent. (D'ailleurs, toutes.)

Nous retenons ici le modèle ad hoc de DENUIT & GODERNIAUX (2005) qui propose une régression quadratique du logarithme du quotient de mortalité q_{xt} pour les âges élevés.

$$\ln \hat{q}_{xt} = a_t + b_t x + c_t x^2 + \varepsilon_{xt} \quad \text{où } \varepsilon_{xt} \text{ iid } \sim N(0, \sigma^2)$$

Les auteurs introduisent les deux contraintes suivantes :

- une contrainte de fermeture à l'âge de 130 ans : $q_{130,t} = 1$
- une contrainte "d'inflexion" : $q'_{130,t} = 0$

Ces contraintes garantissent l'existence d'une tangence horizontale à l'âge ultime de 130 ans et permettent d'écrire plus simplement :

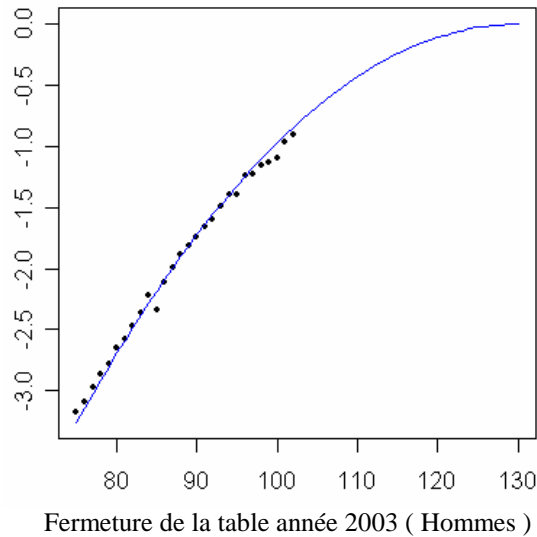
$$\ln \hat{q}_{xt} = c_t (130^2 - 260x + x^2) + \varepsilon_{xt}$$

Pour chaque table prospective (s) et pour chaque année calendaire t fixée ($t=2006, \dots$), nous estimons les paramètres pour les âges supérieurs à 75 ans.

Il est alors possible d'obtenir à l'aide des paramètres estimés, l'extrapolation des taux jusqu'à 130 ans.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Voici l'ajustement obtenu sur les logarithmes des taux bruts *initiaux* de l'année 2003 pour les hommes.



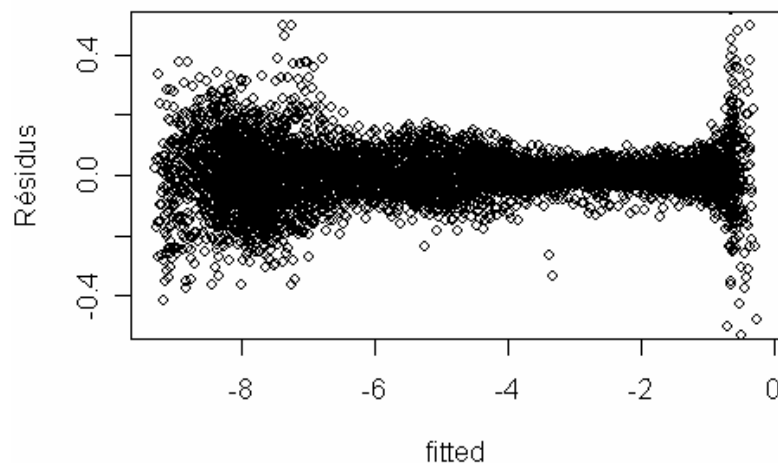
La question qui se pose est alors de déterminer à partir de quel âge remplacer la valeur du taux de mortalité par le taux ajusté provenant du modèle, car au-delà d'un certain âge les données sont moins nombreuses et donc la variabilité plus importante : c'est donc une façon de lisser les taux.

Ici, pour les hommes et les femmes nous choisissons **95 ans**, car les taux bruts semblent visuellement plus erratiques à partir de cet âge, à cause du faible nombre de données.

3.2.6 Remarques sur la qualité d'ajustement du modèle :

Avant de générer des tables, nous avons souhaité analyser les résidus du modèle de Lee Carter, de manière à détecter une éventuelle structure.

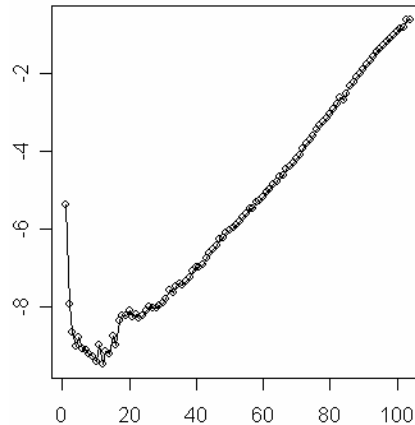
Le tracé des résidus suivant les valeurs prévues amène deux remarques :



Tracé des résidus du modèle contre les valeurs prévues (Femmes 0 à 103 ans)

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

- Les résidus sont de plus grande variabilité pour les jeunes âges qui correspondent aux valeurs des logarithmes des taux instantanés les plus faibles (à gauche du graphique précédent) : ceci signifie que le modèle ne permet pas de rendre compte de manière satisfaisante de la mortalité infantile ainsi que la "bosse accident" autour de l'âge de 20 ans que l'on observe sur la figure suivante.



Logarithme du taux instantané pour l'année 2003 en fonction de l'âge

Pour remédier à ce premier problème il suffit alors de restreindre l'étude aux âges supérieurs à **40 ans**, puisque les produits de rentes sont rarement souscrits avant cet âge. D'ailleurs dans le traité étudié, le plus jeune assuré du portefeuille à 41 ans.

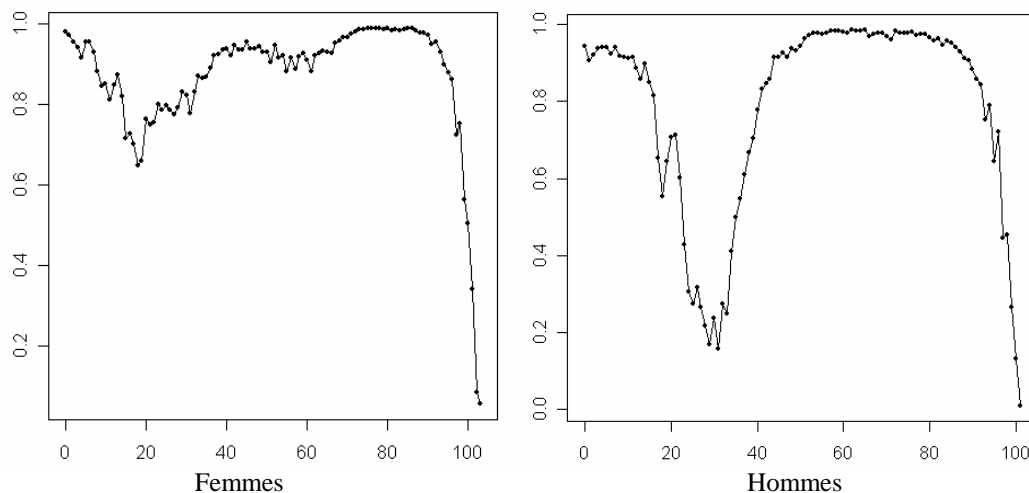
- Pour les âges les plus élevés les taux instantanés sont plus variables, car il y a moins d'observations, ce qui explique la plus grande variabilité des résidus. Nous en tenons compte lors de la fermeture de la table (l'étape 5).

La qualité de l'ajustement peut également être appréciée à l'aide du coefficient de détermination, qui s'écrit :

$$R_x^2 = 1 - \frac{\text{var}(e_{xt})}{\text{var}(\ln \hat{\mu}_{xt})}$$

Il exprime la part de variance temporelle à l'âge x expliquée par le modèle.

Nous obtenons les résultats suivants :



On constate que les coefficients de détermination sont supérieurs à 90% pour tous les âges sauf pour la tranche d'âge 15-40 ans où la qualité d'ajustement est nettement moins bonne et plus particulièrement pour les hommes, ainsi que pour les âges supérieurs à 95 ans pour les deux sexes. Ceci justifie bien de se restreindre l'étude aux âges supérieurs à 40 ans.

Cependant, la critique que l'on peut formuler au modèle de Lee Carter, est l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs du modèle faite pour l'estimation par moindres carrés. Elle est en effet forte et peu réaliste. Pour les simulations, on pourrait tenir compte d'une plus grande variabilité à certains âges, en considérant une variance par âge x . Il s'agirait alors, à l'étape 1 de l'algorithme, de brasser les résidus à âge fixé ou de simuler des erreurs $N(0, \hat{\sigma}_x^2)$ avec $\hat{\sigma}_x^2$ la variance estimée par âge. Néanmoins le modèle de Poisson Log bilinéaire présenté ci dessous amène une vraie réponse à ce problème.

3.3 Le modèle de Poisson Log Bilinéaire

Ce modèle, constitue une extension et une amélioration du précédent :

- Il conserve la forme log bilinéaire des taux instantanés de mortalité
- Il n'impose pas l'homoscédasticité de la structure aléatoire, ce qui permet de tenir compte en particulier de la plus grande variabilité aux âges élevés.

Ce modèle, proposé par Brouhns et Al (2002), modélise le nombre de décès D_{xt} par une loi de Poisson et s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} D_{xt} = \text{Poisson}(e^{\mu_{xt}}) \\ \text{avec } \mu_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) \end{array}}$$

L'interprétation des paramètres reste essentiellement la même.

Comme précédemment, le modèle n'est identifiable qu'en imposant des contraintes sur les paramètres et peut conserver celles déjà retenues pour le modèle de Lee Carter.

$$\sum_{x_{\min}}^{x_{\max}} \beta_x = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{t_{\min}}^{t_{\max}} \kappa_t = 0$$

Un autre avantage du modèle est que l'on modélise directement le nombre de décès, contrairement à la méthodologie de Lee Carter qui modélise le taux instantané.

Ceci peut s'avérer utile si l'on souhaite tenir compte en plus du risque assurantiel en simulant les instant de décès des individus (Méthode de Monte Carlo).

De plus, le modèle de Poisson reconnaît le caractère entier du nombre de décès et comme nous le verrons plus bas il n'est pas nécessaire de réajuster les κ_t .

3.3.1 Estimation des paramètres et extrapolation

L'estimation des paramètres est ici de type maximum de vraisemblance :

Comme, $P(D_{xt} = d_{xt}) = \frac{(er_{xt}\mu_{xt})^{d_{xt}} e^{-er_{xt}\mu_{xt}}}{d_{xt}}$ la vraisemblance du modèle est

$$L_{\alpha,\beta,\kappa} = \prod_{x,t} \frac{(er_{xt}\mu_{xt})^{d_{xt}} e^{-er_{xt}\mu_{xt}}}{d_{xt}}$$

En passant au logarithme et en remplaçant μ_{xt} par son expression, la log-vraisemblance s'écrit :

$$LnL_{\alpha,\beta,\kappa} = \sum_{xt} \{d_{xt}(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) - er_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)\} + cste$$

La valeur des paramètres s'obtient ensuite par minimisation de l'expression ci-dessus. On a recours alors à l'algorithme itératif, proposé par GOODMAN (1979)⁴⁴ dont voici le schéma :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_x^{(k+1)} &= \hat{\alpha}_x^{(k)} - \frac{\sum_t \{d_{xt} - er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})\}}{-\sum_t \{er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})\}} \\ \hat{\beta}_x^{(k+1)} &= \hat{\beta}_x^{(k)} - \frac{\sum_t \{d_{xt} - er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})\} \hat{\beta}_x^{(k)}}{-\sum_t \{er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k+1)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})\} (\hat{\beta}_x^{(k)})^2} \\ \hat{\kappa}_t^{(k+1)} &= \hat{\kappa}_t^{(k)} - \frac{\sum_x \{d_{xt} - er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})\} \hat{\kappa}_t^{(k)}}{-\sum_x \{er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x^{(k)} + \hat{\beta}_x^{(k)} \hat{\kappa}_t^{(k)})\} (\hat{\kappa}_t^{(k)})^2} \end{aligned}$$

On choisit librement les valeurs initiales $\alpha_x^{(0)}, \beta_x^{(0)}$ pour $x = [x_{\min} \dots x_{\max}]$ et $\kappa_t^{(0)}$ pour $t \in [t_{\min}, t_{\max}]$, avec toutefois $\beta_x^{(0)} \neq 0$ pour éviter la division par 0. Néanmoins pour accélérer la convergence au vu de notre problématique de simulation d'un grand nombre de tables, on peut utiliser des données initiales proches de celles attendues et dont on a une idée de l'ordre de grandeur pour avoir mis en œuvre Lee Carter simple.

Comme nous l'avons déjà mentionné, il n'est pas nécessaire ici de réajuster les $\hat{\kappa}_t$. Ceci provient des équations de vraisemblance du modèle qui garantissent que le modèle reproduit le nombre total de décès observés :

⁴⁴ La forme bilinéaire ne permet pas d'utiliser les outils classiques : GOODMAN est une méthode de type Newton unidimensionnelle.

puisque, $\frac{\partial}{\partial_x} \ln L_{\alpha, \beta, \kappa} = 0 \Leftrightarrow \sum_t d_{xt} = \sum_t e r_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t)$

Toutefois afin de respecter les contraintes imposées, la transformation suivante est nécessaire :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &\leftarrow \hat{\alpha} + \bar{\kappa} \hat{\beta} \\ \hat{\beta} &\leftarrow \frac{1}{\sum_x \beta_x} \hat{\beta} \\ \hat{\kappa} &\leftarrow \left(\sum_x \beta_x \right) (\hat{\kappa} - \bar{\kappa}) \end{aligned}$$

où $\bar{\kappa}$ est la moyenne des $\hat{\kappa}_t$ initiaux.

Comparées à celles obtenues avec le modèle de Lee Carter, les estimations des paramètres sont assez similaires⁴⁵, plus particulièrement pour les $\hat{\alpha}_x$ et $\hat{\kappa}_t$

L'extrapolation de la tendance temporelle κ_t se fait ensuite de la même manière que pour le modèle de Lee Carter.

3.3.2 Génération de tables

L'algorithme déjà présenté dans le cadre de Lee Carter reste quasi-identique. Seule change la première étape, qui consiste à tenir compte de l'erreur sur les paramètres. Il existe plusieurs méthodes proposées dans la littérature : les trois premières sont des techniques de simulations, la dernière un rééchantillonnage.

Première méthode :

Par efficacité asymptotique du maximum de vraisemblance, les paramètres convergent en loi vers une loi normale de moyenne $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\kappa})$ et de matrice de variance-covariance l'inverse de la matrice d'information de Fisher noté $I^{-1}(\alpha, \beta, \kappa)$.

Un estimateur consistant de $I^{-1}(\alpha, \beta, \kappa)$ est donné par $\hat{V}_{k,l} = \frac{1}{n} \sum_{x,t} \frac{\partial^2 \ln L(\hat{\Theta})}{\partial \Theta_k \partial \Theta_l}$

où Θ est le vecteur $\Theta = (\alpha_{x_{\min}}, \dots, \alpha_{x_{\max}}, \beta_{x_{\min}}, \dots, \beta_{x_{\max}}, \kappa_{t_{\min}}, \dots, \kappa_{t_{\max}})$ de taille $n = 2n_x + n_t$

On génère alors $(\alpha^{(s)}, \beta^{(s)}, \kappa^{(s)})$ à partir de la loi normale asymptotique.

⁴⁵ Conf Annexe

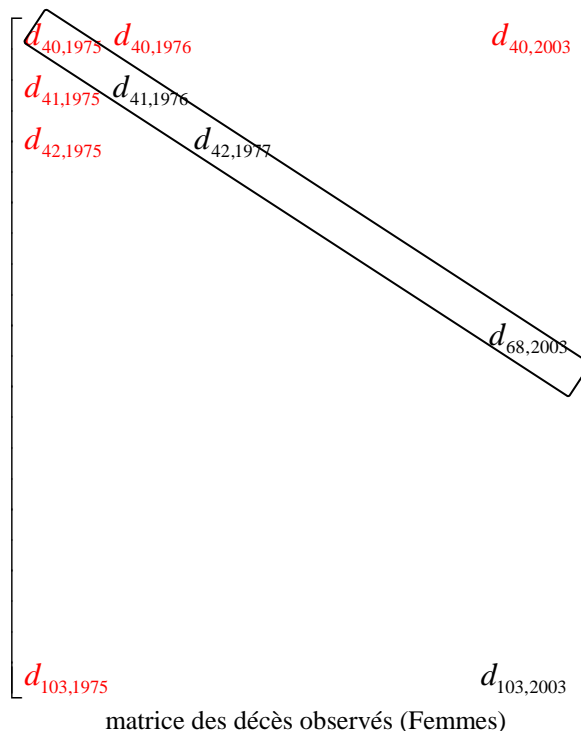
Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

Deuxième méthode :

On génère de nouvelles réalisations de D_{xt} , $d_{xt}^{(s)}$, par tirage dans la loi de Poisson de paramètre d_{xt} , le nombre de décès observé en (x, t) .

Troisième méthode :

Cette troisième méthode a pour but de redistribuer les nombres de décès pour chaque génération, représentée par une diagonale du "tableau" de décès.



Les nombres de décès en rouge représentent le début de l'observation de chaque génération fictive.

On note (x_0, t_0) un de ces indices et $\{(x_0, t_0), (x_0 + 1, t_0 + 1), (x_0 + 2, t_0 + 2), \dots\}$ sa "trajectoire".

Les nouveaux nombres de décès sont générés à l'aide de la loi multinomiale d'exposant $\sum_{j \geq 0} d_{x_0+j, t_0+j}$ noté N_0 , qui représente le nombre total de décès à répartir sur

la trajectoire, et de paramètres les probabilités estimées $\hat{p}_j = \frac{d_{x_0+j, t_0+j}}{N_0}$, $j = 0, 1, \dots$.

Rappel sur la loi multinomiale :

Soit X_1, \dots, X_n indépendantes à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, k\}$ de même loi définie par $P(X_i = j) = p_j$ pour $j=1 \dots k$ avec $\sum p_j = 1$, $p_j > 0$ ⁴⁶

⁴⁶ Généralise la loi de Bernoulli

On définit N_j par $N_j = \sum_{i=1}^n 1_{X_i=j} \cdot (\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k N_j = n)$

La loi de (N_1, \dots, N_k) est appelée loi multinomiale de paramètre (n, p) où $p = (p_1, \dots, p_k)$

Dans notre cas, la variable X_i est la date du i ème décès avec $i = 1..N_0$ et

$$P(X_i = j) = P(\text{le } i^{\text{ème}} \text{ décès à lieu en } (x_0 + j, t_0 + j)) = \hat{p}_j = \frac{d_{x_0+j, t_0+j}}{N_0}$$

Par cette méthode le nombre total de décès pour chaque génération fictive est maintenu par simulation.

Quatrième méthode

Une autre méthode envisageable consiste en le rééchantillonnage des résidus, comme déjà évoqué dans le modèle de Lee Carter.

On remplace ici les résidus ordinaires par les résidus de Pearson ou de la déviance car leur variance dépend de la valeur du paramètre.

$$r_{xt}^P = \frac{d_{xt} - \hat{\lambda}_{xt}}{\sqrt{\hat{\lambda}_{xt}}}$$

$$r_{xt}^D = \text{sign}(d_{xt} - \hat{\lambda}_{xt}) \sqrt{2(d_{xt} \ln \left(\frac{d_{xt}}{\hat{\lambda}_{xt}} \right) - (d_{xt} - \hat{\lambda}_{xt}))}$$

$$\text{avec } \hat{\lambda}_{xt} = e r_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$$

On effectue ensuite des tirages uniformes avec remise des résidus, on renormalise et on reconstitue les nombres de décès bootstrap $d_{xt}^{(s)}$

3.4 Application avec MoSes

Nous utilisons ici le second modèle, Poisson Log Bilinéaire, pour générer des tables par tirage des décès dans la loi de Poisson (méthode 2) suivant l'algorithme présenté plus haut.⁴⁷

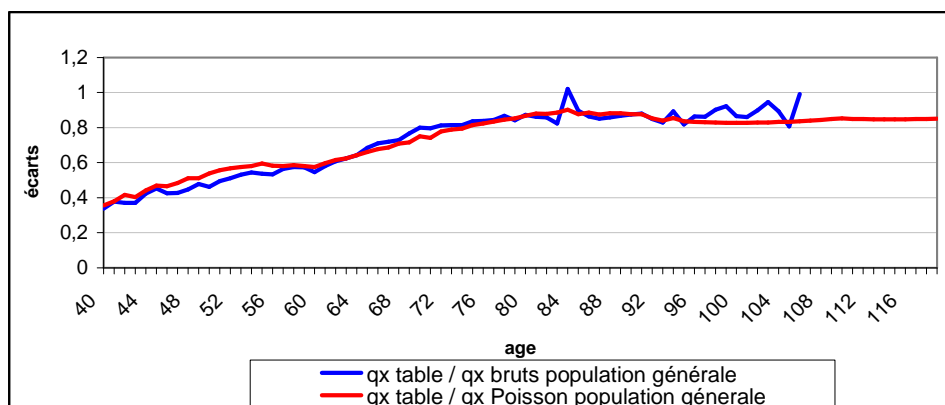
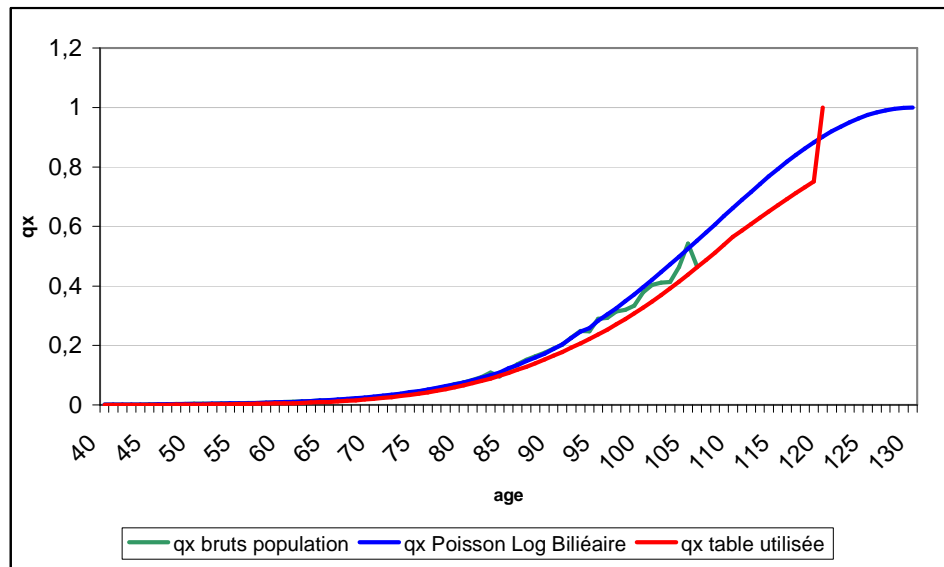
Le modèle MoSes initial, qui a été d'abord construit pour l'utilisation d'une unique table, a été modifié de manière à effectuer les calculs du modèle pour chacune des tables, alors indicées par un numéro de scénario.

⁴⁷ Le programme réalisé avec R est présenté en annexe.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

La remarque importante à faire ici, est qu'en utilisant des tables de population il n'est pas tenu compte du phénomène d'antisélection. L'anti-sélection se traduit par le fait que les rentiers ont une mortalité moins élevée que la population générale.

Ici, si on compare pour l'année 2003 (qui correspond à la dernière année de données disponibles), les quotients de mortalités bruts pour la population générale, aux quotients de la table ajustée et abattue utilisée précédemment pour la projection des flux, les écarts sont ainsi très significatifs.



Les écarts diminuent à mesure que l'âge augmente mais demeurent importants.

Les tables de mortalités prospectives simulées sur les données de population générale ne peuvent donc pas être appliquées directement, à moins peut être qu'il s'agisse de rentes à caractère obligatoire, qui n'est pas le cas ici.⁴⁸

Les tables simulées donnant par conséquent des valeurs économiques faussement élevées et non comparables à celle calculée suivant l'approche Best Estimate, nous

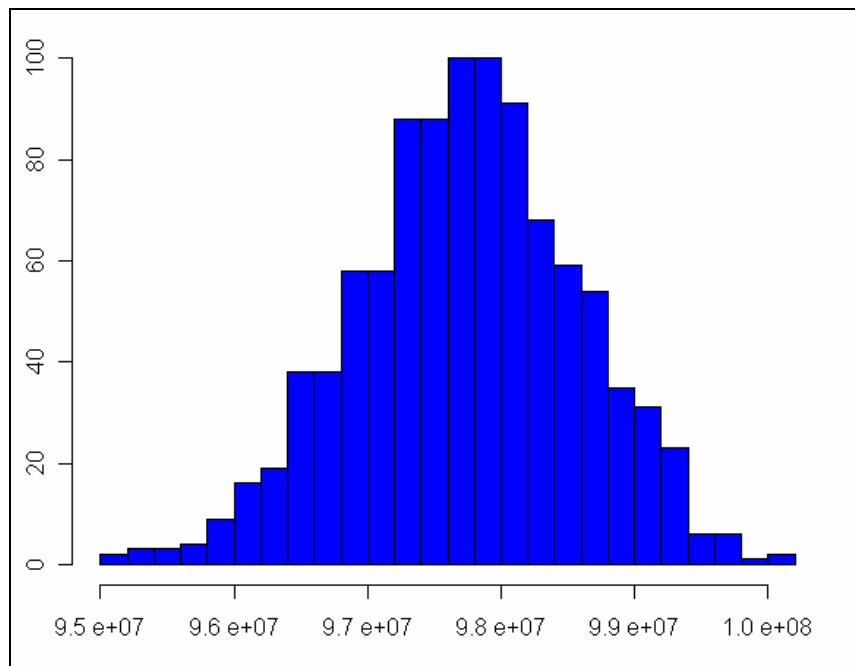
⁴⁸ Ceci pourrait s'appliquer au Longevity Bond qui est un produit développé par Partner Re et BNP Paribas basé sur un indice de mortalité sur la population générale, non encore vendu à ce jour.

Partie 3 : Valeur économique du Swap de Mortalité

présentons uniquement la distribution des valeurs actuelles probables des rentes à payer pour le portefeuille, sur la base de la mortalité générale de la population anglaise.

Afin de réduire les temps de calcul sous MoSes nous n'avons utilisé que 1000 tables ainsi que des models points⁴⁹, ce qui est équivalent comme on raisonne en espérance, à effectuer les calculs police par police.

En procédant ainsi nous avons obtenu 1000 valeurs actuelles des prestations futures à payer, représentées par l'histogramme ci-dessous.



En tenant compte ainsi de l'incertitude sur les tables, on peut en déduire un intervalle de confiance pour la valeur actuelle des engagements. On constate ici qu'il est relativement étroit.

Conclusion : Nous avons illustré avec la méthodologie de Lee Carter, couramment utilisée pour construire des tables prospectives, une modélisation stochastique de la mortalité, qui a permis de générer un grand nombre de tables pour mesurer une partie de l'incertitude autour de la valeur économique.

⁴⁹ Il s'agit de regrouper les individus suivant des critères pertinents ici l'âge, et le sexe.

Conclusion

La mise en place d'un calcul de la valeur économique de la branche vie de Partner Re est un projet d'envergure. Nous nous sommes attachés ici à définir les besoins pour les traités proportionnels avec bordereaux et nous avons retenu une méthodologie standard de type Best Estimate qui sera appliquée par défaut à tous ces traités. Pour ce qui est des autres traités, la méthode d'évaluation est actuellement encore en cours de discussion.

Pour chacun des produits concernés ici, il est nécessaire de créer un modèle d'évaluation avec MoSes qui tiendra compte des spécificités du produit et permettra de répliquer l'ensemble des flux futurs.

Dans le cadre de ce mémoire nous avons mis en œuvre la méthodologie retenue pour calculer la valeur économique du swap de mortalité : le modèle d'évaluation a été créé sous MoSes et nous obtenons une valeur pour les hypothèses Best Estimate.

Le risque de longévité étant un segment important pour Partner Re, nous nous sommes intéressés dans un second temps à une approche stochastique de la mortalité, utilisée ici à des fins d'évaluation, mais éventuellement par la suite pour la tarification.

Les deux modèles que souhaitait étudier Partner Re étaient le modèle de Lee Carter et le modèle Poisson Log Bilinéaire qui ont servi ici de support pour simuler un grand nombre de tables de mortalité, afin de tenir compte d'une partie de l'incertitude liée aux tables prospectives et mesurer ainsi l'impact sur la valeur économique du swap de mortalité.

En l'absence d'un historique de données pour les rentiers disponible immédiatement à Partner Re, la modélisation s'est portée sur la population générale. La prochaine étape sera par conséquent de tenir compte de l'antisélection afin d'adapter l'étude à la population assurée.

Bibliographie

BLONDEAU J., PARTRAT C. (2003) La réassurance, Approche technique, Economica.

B&W DELOITTE (2005), Les évolutions de l'Embedded Value: Market Consistent Embedded Value-CFO Forum.

B&W DELOITTE (2005) IFRS in your pocket, Deloitte IFRS Publications.

B&W DELOITTE (2005) IAS/ IFRS Phase 2.

CMIB, Continuous Mortality Investigation, Mortality Committee (2005) Projecting future mortality: Discussion paper, Working Paper 3.

CMIB, Continuous Mortality Investigation, Mortality Committee (2005) Projecting future mortality: towards a proposal for a stochastic methodology, Working Paper 15.

DELWARDE A., DENUIT M. Construction de tables de mortalité prospectives et périodiques, Economica.

DENUIT M. (2004) Lee-Carter model with Poisson random structure and applications in insurance, Workshop in Edinburgh.

DENUIT M., QUASHIE A. (2005) Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands ages.

HAGOPIAN M., LAPARRA M., (1991), Aspects théoriques et pratiques de la réassurance, L'argus.

KOISSI M.C, SHAPIRO A.F (2005) Evaluating and Extending the Lee Carter model for mortality forecasting: Bootstrap confidence interval.

O'KEEFFE P. J. L., DESAI A. J., K (2005) Currents developments in Embedded Value Reporting, Institute of Actuaries.

PETAUTON P. (2002), Théorie et pratique de l'assurance vie.

SWISS RE (2004) L'impact des normes IFRS sur le secteur de l'assurance, Sigma.

SOA Risk Management Metrics Subgroup (2001) Embedded Value Definition

TOSETTI A. (2002) Assurance, comptabilité, Réglementation, Actuariat, Economica.

Annexes

Annexe 1 : Présentation succincte de MoSes

Annexe 2 : Etude de la série chronologique pour les Femmes

Annexe 3 : Etude de la série chronologique pour les Hommes

Annexe 4 : Comparaison des paramètres estimés Lee Carter / Poisson Log Bilinéaire

Annexe 5 : 1000 trajectoires des logarithmes de taux instantanés (Poisson)

Annexe 6 : Code sous R pour l'analyse des deux modèles (femmes)

Annexe 7 : Code sous R de l'algorithme de génération de tables (hommes)

Annexe 8 : Code sous R des méthodes 3 et 4 (Poisson)

1. Présentation succincte de MoSes

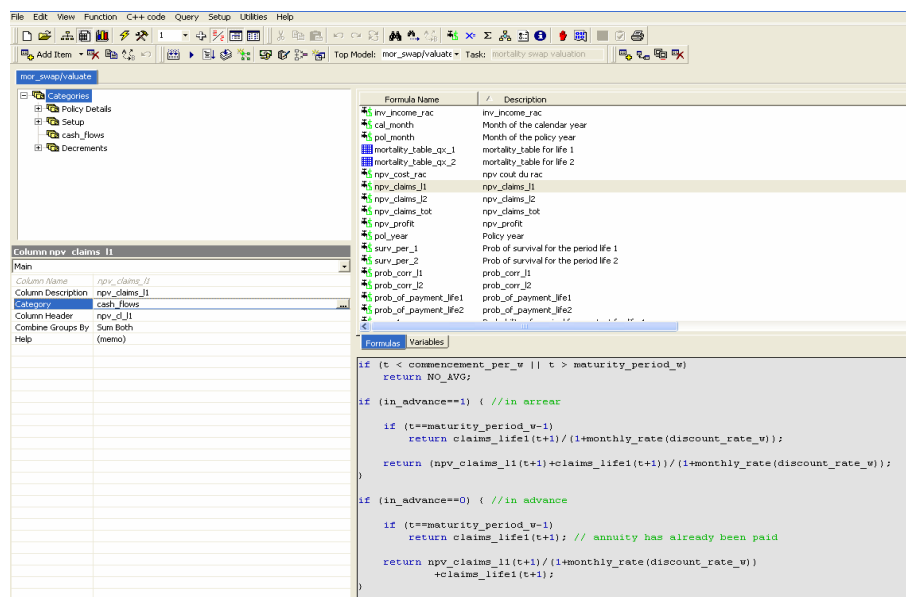
MoSes est un système générique de projection de flux financiers. Il peut être utilisé pour la tarification des produits, la projection du déroulement des affaires, la gestion actif-passif....

Il est utilisé aujourd'hui par des sociétés d'assurance vie et IARD, des banques, des réassureurs...

Partner Re le met en place depuis 2005 pour la tarification et le suivi du portefeuille.

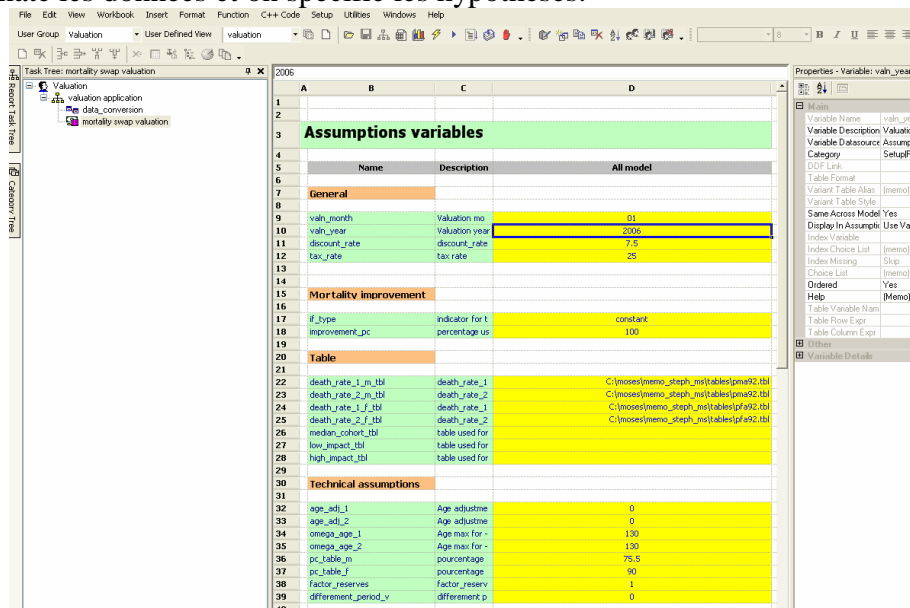
L'outil se décompose en trois vues :

La "Design View" : On construit le modèle et éventuellement des sous modèles. On relie les données à des variables, on crée les formules.



La "Task View" :

On formate les données et on spécifie les hypothèses.



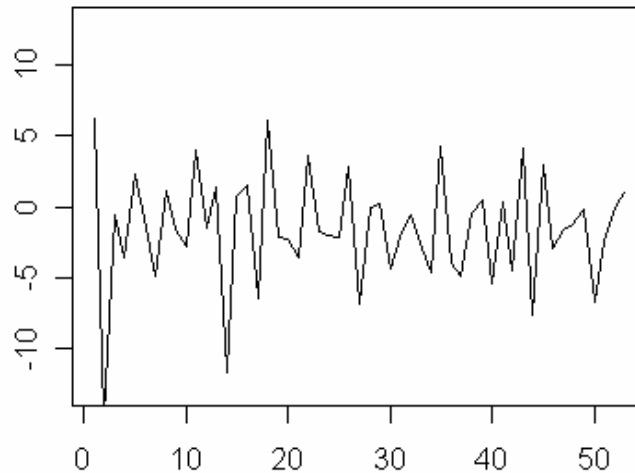
L' "Analysis View" :

Les champs à afficher ont été spécifiés au préalable et on analyse dans cette vue les résultats obtenus.

Period	col_year	G	I	J	L	P	R	S	T	U	V	
1												
15	12	2.006.00	40 975 496.73	40 975 496.73	504 571 878.84	0.00	0.15	41 758.58	41 717.08	8 699.46	43 297.29	0.00
17	14	2.006.00	40 582 152.10	40 582 152.10	81 370 002.37	0.00	0.16	41 489.93	0.00	0.00	0.00	0.00
18	15	2.006.00	40 378 021.47	40 378 021.47	121 748 023.84	0.00	0.16	41 349.50	0.00	0.00	0.00	0.00
19	16	2.006.00	40 175 440.93	40 175 440.93	161 923 464.77	0.00	0.16	41 229.84	0.00	0.00	0.00	0.00
20	17	2.006.00	39 974 393.29	39 974 393.29	201 897 858.06	0.00	0.16	41 070.95	0.00	0.00	0.00	0.00
21	18	2.006.00	39 774 861.65	39 774 861.65	241 672 719.71	0.00	0.16	40 932.83	0.00	0.00	0.00	0.00
22	19	2.006.00	39 576 829.36	39 576 829.36	281 249 549.07	0.00	0.16	40 795.45	0.00	0.00	0.00	0.00
23	20	2.006.00	39 380 280.04	39 380 280.04	320 629 629.12	0.00	0.16	40 658.83	0.00	0.00	0.00	0.00
24	21	2.006.00	39 185 197.57	39 185 197.57	359 815 026.69	0.00	0.16	40 522.95	0.00	0.00	0.00	0.00
25	22	2.007.00	38 994 967.40	38 994 967.40	398 809 994.09	0.00	0.15	40 389.71	0.00	0.00	0.00	0.00
26	23	2.007.00	38 806 129.66	38 806 129.66	437 616 123.75	0.00	0.15	40 257.18	0.00	0.00	0.00	0.00
27	24	2.007.00	38 618 669.52	38 618 669.52	476 224 793.27	0.00	0.15	40 125.36	40 887.20	8 682.65	44 163.23	0.00
28	25	2.007.00	38 432 207.38	38 432 207.38	514 632 207.38	0.00	0.16	39 993.94	0.00	0.00	0.00	0.00
29	26	2.007.00	38 227 765.83	38 227 765.83	552 659 973.21	0.00	0.16	39 848.49	0.00	0.00	0.00	0.00
30	27	2.007.00	38 024 952.13	38 024 952.13	590 302 333.00	0.00	0.16	39 703.89	0.00	0.00	0.00	0.00
31	28	2.007.00	37 823 747.60	37 823 747.60	627 580 673.94	0.00	0.16	39 560.13	0.00	0.00	0.00	0.00
32	29	2.007.00	37 624 133.91	37 624 133.91	664 132 806.84	0.00	0.16	39 417.20	0.00	0.00	0.00	0.00
33	30	2.007.00	37 426 092.97	37 426 092.97	700 358 899.82	0.00	0.16	39 275.10	0.00	0.00	0.00	0.00
34	31	2.007.00	37 229 607.02	37 229 607.02	736 289 506.84	0.00	0.16	39 133.82	0.00	0.00	0.00	0.00
35	32	2.007.00	37 034 668.57	37 034 668.57	771 923 165.41	0.00	0.16	38 993.25	0.00	0.00	0.00	0.00
36	33	2.007.00	36 841 230.38	36 841 230.38	806 764 995.79	0.00	0.16	38 853.69	0.00	0.00	0.00	0.00
37	34	2.008.00	36 652 498.09	36 652 498.09	841 316 893.88	0.00	0.16	38 716.69	0.00	0.00	0.00	0.00
38	35	2.008.00	36 465 210.40	36 465 210.40	876 084 104.28	0.00	0.16	38 580.46	0.00	0.00	0.00	0.00
39	36	2.008.00	36 279 351.44	36 279 351.44	910 161 455.71	0.00	0.16	38 445.00	39 956.43	9 009.38	45 046.58	0.00
40	37	2.008.00	36 094 500.01	36 094 500.01	943 550 001.00	0.00	0.16	38 309.97	0.00	0.00	0.00	0.00
41	38	2.008.00	35 911 846.66	35 911 846.66	976 346 366.00	0.00	0.17	38 160.71	0.00	0.00	0.00	0.00
42	39	2.008.00	35 730 881.82	35 730 881.82	100 877 228.48	0.00	0.17	38 012.37	0.00	0.00	0.00	0.00
43	40	2.008.00	35 551 505.52	35 551 505.52	103 648 814.01	0.00	0.17	37 864.94	0.00	0.00	0.00	0.00
44	41	2.008.00	35 373 938.08	35 373 938.08	106 420 752.09	0.00	0.17	37 718.41	0.00	0.00	0.00	0.00
45	42	2.008.00	35 197 920.16	35 197 920.16	109 204 672.24	0.00	0.17	37 572.78	0.00	0.00	0.00	0.00
46	43	2.008.00	34 993 512.72	34 993 512.72	112 004 194.96	0.00	0.17	37 428.04	0.00	0.00	0.00	0.00
47	44	2.008.00	34 790 697.04	34 790 697.04	114 824 882.00	0.00	0.17	37 284.18	0.00	0.00	0.00	0.00
48	45	2.008.00	34 589 454.68	34 589 454.68	117 664 336.68	0.00	0.17	37 141.19	0.00	0.00	0.00	0.00
49	46	2.009.00	34 389 894.27	34 389 894.27	120 524 230.95	0.00	0.17	37 000.86	0.00	0.00	0.00	0.00
50	47	2.009.00	34 192 827.09	34 192 827.09	123 394 058.04	0.00	0.17	36 861.37	0.00	0.00	0.00	0.00
51	48	2.009.00	33 998 236.25	33 998 236.25	126 282 294.30	0.00	0.17	36 722.71	38 931.70	9 188.49	45 547.45	0.00
52	49	2.009.00	33 781 638.26	33 781 638.26	129 188 326.00	0.00	0.17	36 584.52	0.00	0.00	0.00	0.00
53	50	2.009.00	33 581 548.69	33 581 548.69	132 112 186.95	0.00	0.18	36 431.96	0.00	0.00	0.00	0.00
54	51	2.009.00	33 383 202.84	33 383 202.84	135 054 389.79	0.00	0.18	36 280.39	0.00	0.00	0.00	0.00

**2. Etude sous R de la série chronologique κ_t du modèle de Lee Carter :
Femmes (0-103 ans) de 1950 à 2003 :**

- On étudie la série différenciée une fois dont voici le tracé:



- Tracé des autocorrélations et autocorrélations partielles :

Ci-dessous est représenté l'auto-corrélogramme de la série différenciée. Ce graphique représente les autocorrélations simples γ_k de la série. On teste :

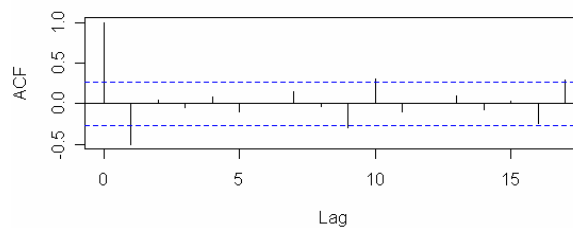
$$H_0 : \gamma_k = 0$$

$$H_1 : \gamma_k \neq 0$$

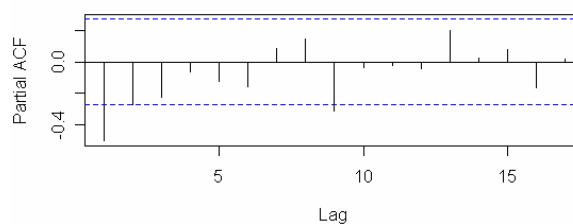
Sous H_0 , γ_k converge asymptotiquement vers une loi normale de moyenne 0 et d'écart type $\frac{1}{\sqrt{n}}$. La région d'acceptation de H_0 au seuil α est le domaine $0 \pm q_{1-\alpha/2}^N \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec

q_{α}^N le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ d'une loi normale centrée réduite. Cette région est ici tracée en pointillés.

Series diff(kappat)



Series diff(kappat)



Le tracé des autocorrélations et autocorrélations partielles ne permet pas de déterminer un ordre MA et AR ; un ordre 9 pour l'AR ne paraît pas réaliste.

Nous testons alors les modèles suivants : (pour la série différenciée à l'ordre 1) :

Modèles testés	Log vraisemblance	AIC
ARMA(0,0)	-148,46	300,92
ARMA(1,0)	-140,23	286,47
ARMA(0,1)	-137,13	280,26
ARMA(1,1)	-137,11	282,21
ARMA(0,2)	-137,11	282,21
ARMA(2,0)	-138,55	285,1
ARMA(2,1)	-137,11	284,21
ARMA(1,2)	-137,0	284,0

Sur la base du critère d'information d'Akaike on retient le modèle ARMA (0,1), qui minimise ce critère :

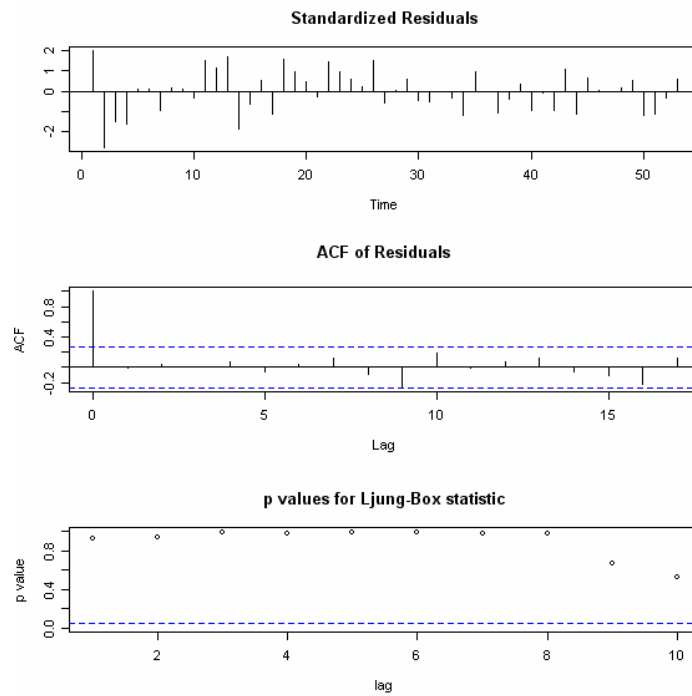
```
arima(x = dkappat, order = c(0, 0, 1))
```

Coefficients:

```
      ma1  intercept
      -0.7158  -1.6156
s.e.   0.1030   0.1326
```

```
sigma^2 estimated as 10.21:  log likelihood = -137.13,  aic = 280.26
```

L'analyse des résidus du modèle retenu est concluante : il s'agit d'un bruit blanc :



Le dernier tracé permet de tester globalement la nullité des autocorrélations simples.
 Le test de Box Pierce fait intervenir les hypothèses suivantes :

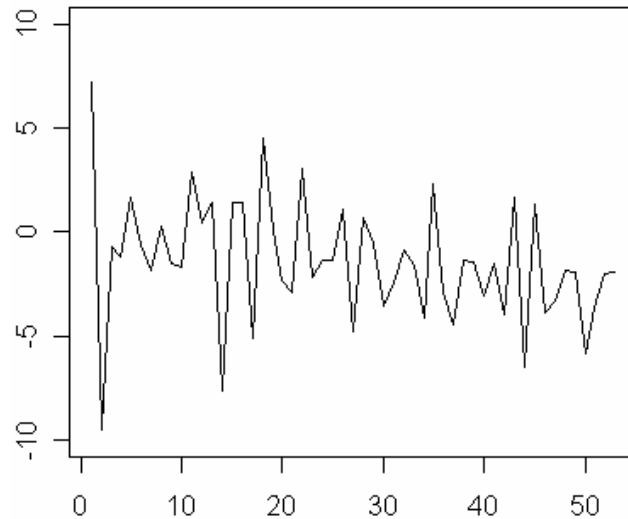
$$H_0 : \gamma_1 = \dots = \gamma_h = 0$$

$$H_1 : \exists j \text{ tq } \gamma_j \neq 0$$

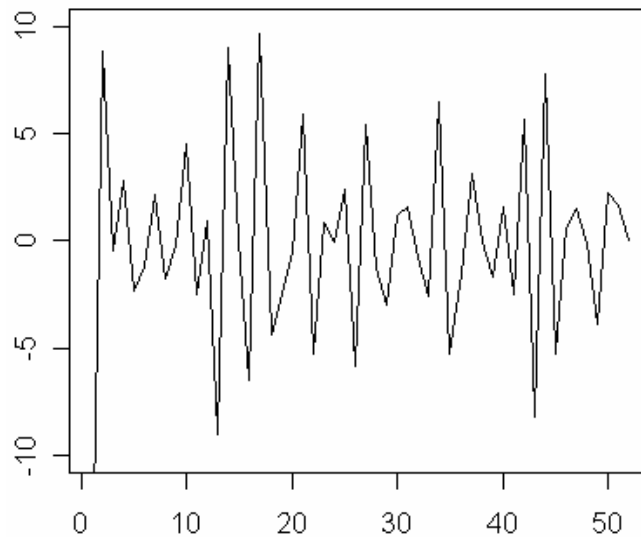
La statistique de Ljung-Box $Q = n \sum_{k=1}^h \rho_k^{-2}$ suit asymptotiquement sous H_0 un chi deux à h degrés de liberté.

**3. Etude sous R de la série chronologique κ_t du modèle de Lee Carter :
Hommes (0-101 ans) de 1950 à 2003 :**

- La série différenciée une fois n'est visuellement pas stationnaire car il subsiste une nette tendance décroissante :

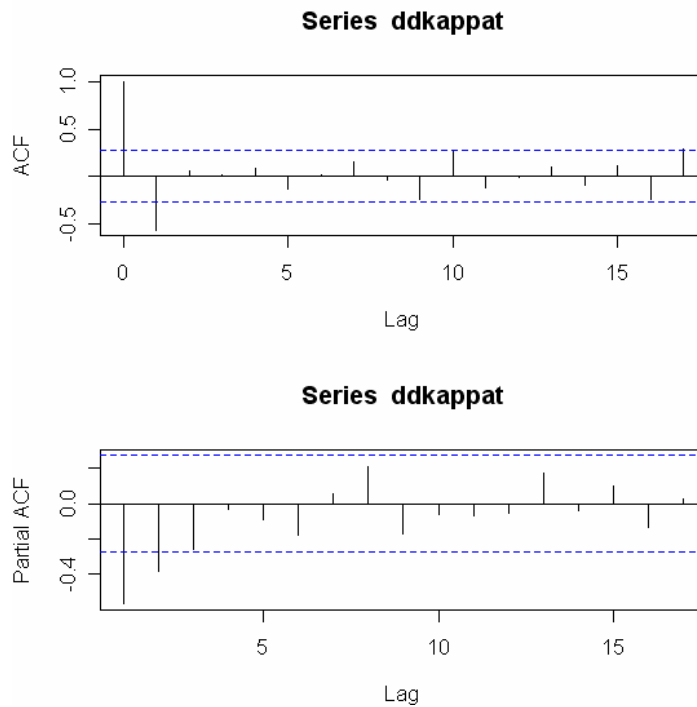


On différencie donc la série à l'ordre 2 :



On accepte ici la stationnarité.

- Tracé des autocorrélations et autocorrélations partielles :



Le tracé des autocorrélations partielles suggère un AR (1), les autocorrélations simples un MA (1).

Le principe de parcimonie nous amène à tester les modèles suivants (pour la série différenciée à l'ordre 1) :

Modèles testés	Log vraisemblance	AIC
ARMA(0,0)	-155,31	314,63
ARMA(1,0)	-141,59	289,17
ARMA(0,1)	-130,53	267,07
ARMA(1,1)	-123,76	255,52
ARMA(0,2)	-120,01	248,02
ARMA(2,0)	-133,67	275,35
ARMA(2,1)	-121,13	250,00
ARMA(1,2)	-120,00	252,27

Sur la base du critère d'information d'Akaike on retient le modèle ARMA (0,2), qui minimise ce critère :

Call:

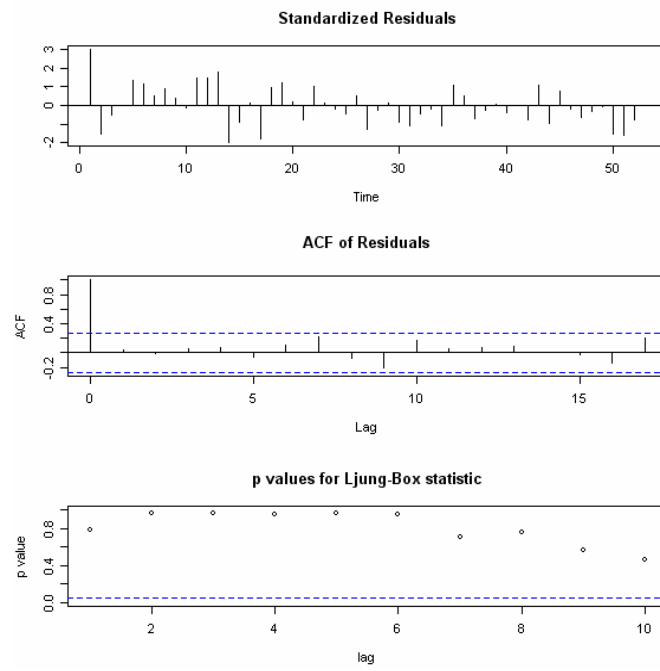
```
arima(x = ddkappat, order = c(0, 0, 2))
```

Coefficients:

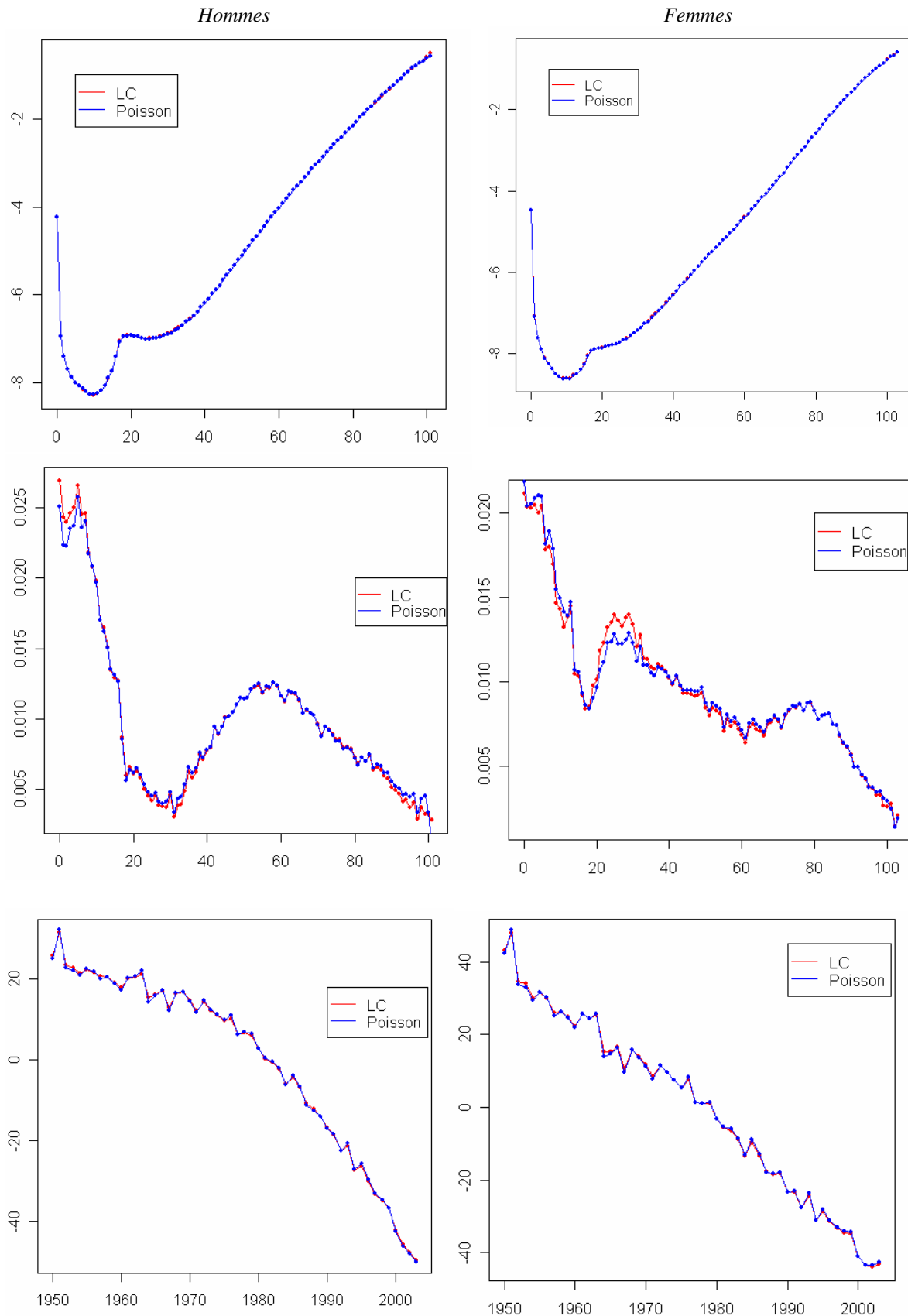
```
      ma1      ma2  intercept
-1.6936  0.7927   -0.0425
s.e.   0.1106  0.1168    0.0329
```

```
sigma^2 estimated as 5.457:  log likelihood = -120.01,  aic = 248.02
```

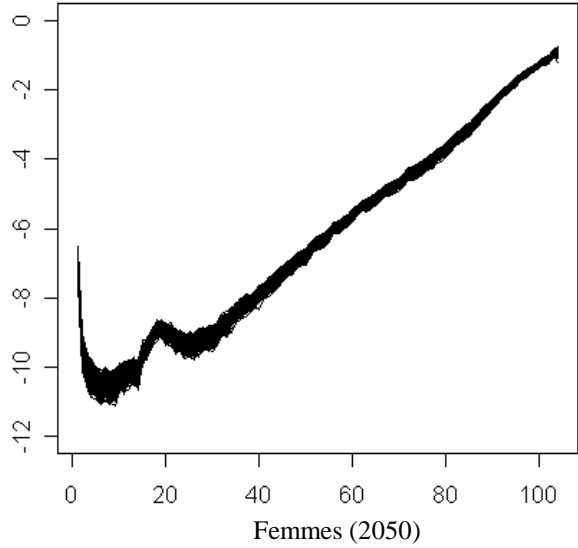
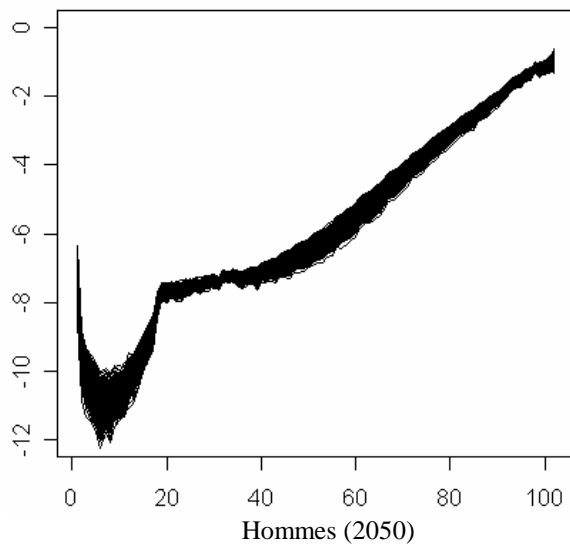
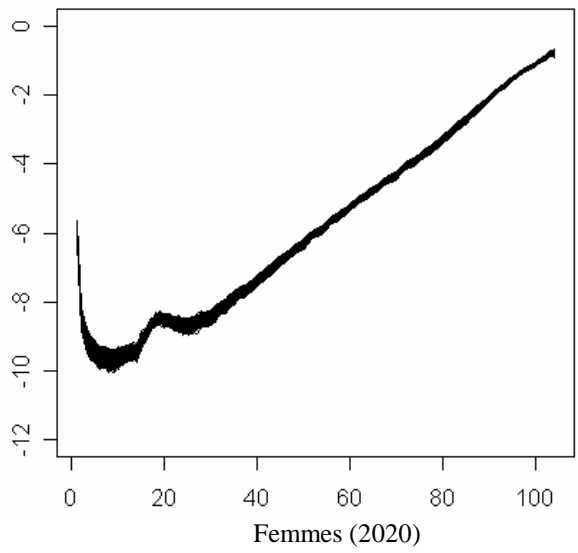
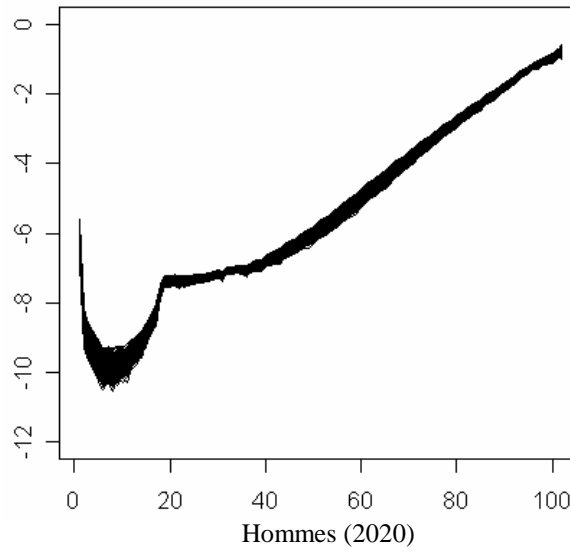
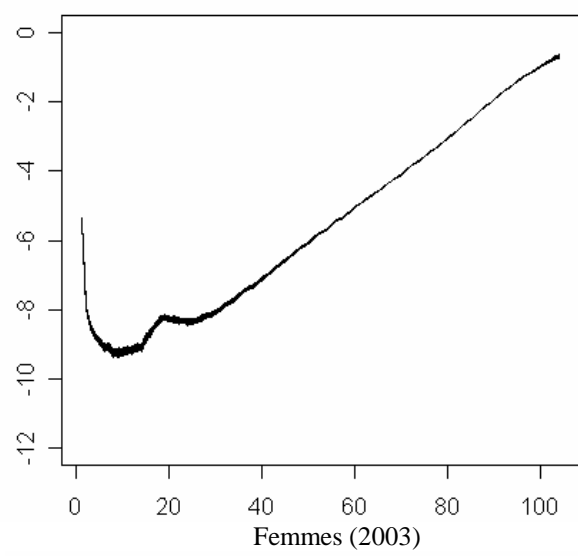
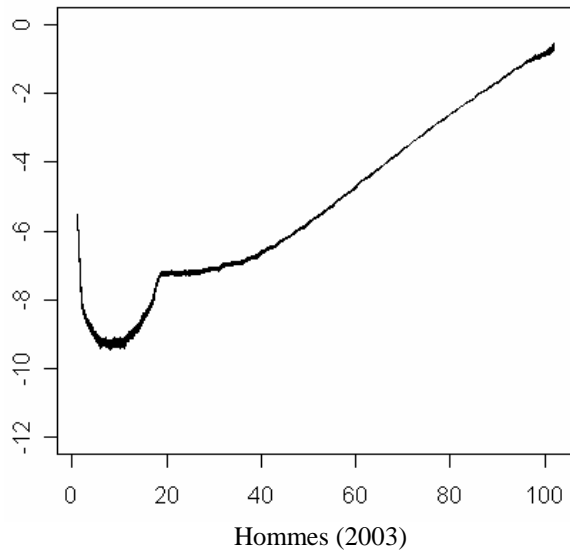
L'analyse des résidus du modèle retenu est concluante : il s'agit d'un bruit blanc :



4. Comparaison des paramètres estimés (1950-2003) : Modèles de Lee Carter et Poisson log bilinéaire



**5. 1000 trajectoires des logarithmes des taux de mortalité instantanés:
(Simulation des nombres de décès par Poisson)**



6. Code sous R : Analyse des modèles de Lee Carter et Poisson Log Bilinéaire.

```
#####DONNEES (Femmes)#####
getwd()

tmin=1950
tmax=2003
xmin=0
xmax=103
nx=xmax-xmin+1
nt=tmax-tmin+1

##### TABLES DE DECES ET EXPOSITIONS #####
dxt=t(matrix(scan('input_dxt_UK_F.txt'),nt,nx))
ext=t(matrix(scan('input_ext_UK_F.txt'),nt,nx))

#####ETAPE 1
muxt=dxt/ext
lnmuxt=log(muxt)

##### MODELE DE LEE CARTER #####

##### ETAPE 2: CALCUL DES ALPHAX

alphax=NULL
for (x in 1:nx)
  {alphax[x]=mean(lnmuxt[x,])}

##### ETAPE 3: CALCUL DES BETAX ET KAPPAT

z=lnmuxt-alphax
tzz=t(z)%*%z
vp=eigen(tzz)
lambda1=max(vp$value)
u1=vp$vector[,1]
v1=(1/sqrt(lambda1))*z%*%u1
taux_inertie=lambda1/sum(vp$value)

#### BETAX

betax=(1/sum(v1))*v1
test=sum(betax)

#### KAPPAT

kappat=sqrt(lambda1)*sum(v1)*u1
test=sum(kappat)

##### PREMIERS GRAPHIQUES

par(mfrow = c(1,3))
plot(xmin:xmax,alphax,col="green",type="p",pch=20,main="alpha",xlab="age",ylab=" ")

lines(xmin:xmax,alphax,col="green")
plot(xmin:xmax,betax,col="red",type="p",pch=20,main="beta",xlab="age",ylab=" ")
lines(xmin:xmax,betax,col="red")
plot(tmin:tmax,kappat,type="p",pch=20,col="blue",main="kappa",xlab="annee",ylab=" ")
lines(tmin:tmax,kappat,col="blue")

##### ETAPE 4 REAJUSTEMENTS

exp_betax=exp(betax)
exp_alphax=exp(alphax)
kappat_adjusted=NULL
```

```

for (t in 1:nt){
  f=function(x)
  { value=sum(ext[,t]*exp_alphax*(exp_betax)^x)-sum(dxt[,t])
    return(value)}

  kappat_adjusted[t]<-uniroot(f,low=-100,up=100,tol = 0.0000001)$root
}

kappat_adj_corrected=kappat_adjusted-(1/(nt))*sum(kappat_adjusted)
test=sum(kappat_adj_corrected)

alphax_corrected=alphax+(1/nt)*betax*sum(kappat_adjusted)

##### GRAPHIQUES AVANT/APRES REAJUSTEMENTS#####

plot(tmin:tmax,kappat_adj_corrected,type="p",pch=20, col = "blue",main="kappa",xlab="annee",ylab=" ")
points(tmin:tmax,kappat,type="p",pch=20)
lines(tmin:tmax,kappat)
lines(tmin:tmax,kappat_adj_corrected, col = "blue")

plot(xmin:xmax,alphax_corrected,type="p",pch=20,col="green",main="alpha réajusté",xlab="annee",ylab="
")
lines(xmin:xmax,alphax_corrected,main="kappa",xlab="annee",ylab=" ", col = "green")

##### PARAMETRES DU MODELE DE LEE CARTER#####

alphax_LC=alphax_corrected
betax_LC=betax
kappat_LC=kappat_adj_corrected

##### VALEUR PREVUES PAR LE MODELE DE LEE CARTER #####

lnmuxt_model=matrix(0,nx,nt)
for (x in 1:nx){ for (t in 1:nt)
  {lnmuxt_model[x,t]<-alphax_LC[x]+(betax_LC%*%t(kappat_LC))[x,t]}

####GRAPHIQUES
plot(lnmuxt_model[,nt],type="n")

lines(lnmuxt_model[,nt])
lines(lnmuxt_model[,1])
lines(lnmuxt_model[,10])
lines(lnmuxt_model[,15])
lines(lnmuxt_model[,20])
lines(lnmuxt_model[,25])
lines(lnmuxt_model[,30])
lines(lnmuxt_model[,35])
lines(lnmuxt_model[,40])

#####RESIDUS DU MODELE DE LEE CARTER#####

residu=lnmuxt-lnmuxt_model

par(mfrow = c(1,4))
plot(residu[20,])
plot(residu[40,])
plot(residu[60,])
plot(residu[80,])

residu2=residu^2
var_est=1/(nx*nt-(nx*2+nt)+2)*sum(residu2)

```

```

##### COEFFICIENT DE DETERMINATION #####

R=NULL
residu=lnmuxt-lnmuxt_model
for (i in 1:nx)
R[i]=1-(var(residu[i,])/var(lnmuxt[i,]))
plot(xmin:xmax,R,pch=20)
lines(xmin:xmax,R,pch=20)

##### NORMALITE DES RESIDUS #####

res=residu[1,]

for (i in 2:nx)
{res=c(res,residu[i,])}

res_sorted=sort(res)
qqnorm(res_sorted)

##### MODELE POISSON LOG BILINEAIRE #####

parametre_poisson=function(dxt,ext,alphax=NULL,betax=NULL, kappat=NULL)

{
muxt=dxt/ext
lnmuxt=log(muxt)

# INITIALISATION GOODMAN

alphax=NULL

for (x in 1:nx)
{alphax[x]<-mean(lnmuxt[x,])}

betax <- matrix(1/nx,nx,1)
kappat <- matrix(-(1:nt),nt,1)

#### ESTIMATION

logvrais<-function(a,b,k) {
aa<-matrix(a,nx,nt)
l<-sum(dxt*(aa+b%*%t(k))-ext*exp(aa+b%*%t(k)),na.rm=TRUE)

return(l)
}

l<--10^100
lnew<-logvrais(alphax,betax,kappat)
i<-0

while (abs((lnew-l)/l)>10^(-7)){
i<-i+1

for (x in 1:nx)
{alphax[x]=alphax[x]-sum(dxt[x,]-ext[x,]*exp(alphax[x]+betax[x]%*%t(kappat)))/sum(-
ext[x,]*exp(alphax[x]+betax[x]%*%t(kappat)))}

for (t in 1:nt)
{kappat[t]=kappat[t]-sum((dxt[,t]-ext[,t]*exp(alphax+betax%*%kappat[t]))*betax)/sum(-
ext[,t]*betax*betax*exp(alphax+betax%*%kappat[t]))}

for (x in 1:nx)

```

```
{betax[x]=betax[x]-sum((dxt[x,]-ext[x,]*exp(alphax[x]+betax[x]*t(kappat)))*t(kappat))/sum(-
ext[x,]*t(kappat)*t(kappat)*exp(alphax[x]+betax[x]*t(kappat)))}
```

```
l<-lnew
lnew<-logvrais(alphax,betax,kappat)
}
```

```
l<-logvrais(alphax,betax,kappat)
```

```
#### AJUSTEMENTS AUX CONTRAINTES
```

```
alphax_poisson=alphax+betax*sum(kappat)/nt
betax_poisson=betax/sum(betax)
kappat_poisson=kappat*sum(betax)-sum(betax)*sum(kappat)/nt
```

```
return (list(alphax_poisson,betax_poisson,kappat_poisson))
}
```

```
param=parametre_poisson(dxt,ext)
alphax_poisson=as.vector(param[[1]])
betax_poisson=as.vector(param[[2]])
```

```
kappat_poisson=as.vector(param[[3]])
```

```
#####GRAPHIQUES#####
```

```
par(mfrow = c(1,3))
plot(xmin:xmax,alphax_poisson,col="green",type="p",pch=20,xlab="age",ylab=" ",main="alpha ")
lines(xmin:xmax,alphax_poisson,col="green")
plot(xmin:xmax,betax_poisson,col="red",type="p",pch=20,xlab="age",ylab=" ",main="beta")
lines(xmin:xmax,betax_poisson,col="red")
plot(tmin:tmax,kappat_poisson,col="blue",type="p",pch=20,xlab="année",ylab=" ",main="kappa Poisson")
lines(tmin:tmax,kappat_poisson,col="blue")
```

```
#COMPARAISON LEE CARTER / POISSON LOG BILINEAIRE
```

```
par(mfrow = c(1,3))
```

```
plot(xmin:xmax,alphax_poisson,col="red",type="p",pch=20,xlab="age",ylab=" ",main="alpha Poisson vs
Lee carter")
lines(xmin:xmax,alphax_poisson,col="red")
lines(xmin:xmax,alphax_LC,col="blue")
points(xmin:xmax,alphax_LC,col="blue",type="p",pch=20)
legend(5,-1,c("LC", "Poisson"), col = c(2,4),lty = c(1,1), merge = TRUE)
```

```
plot(xmin:xmax,betax_poisson,col="red",type="p",pch=20,xlab="age",ylab=" ",main="beta Poisson vs Lee
Carter")
lines(xmin:xmax,betax_poisson,col="red")
lines(xmin:xmax,betax_LC,col="blue")
points(xmin:xmax,betax_LC,col="blue",type="p",pch=20)
legend(80,0.02,c("LC", "Poisson"), col = c(2,4),lty = c(1,1), merge = TRUE)
```

```
plot(tmin:tmax,kappat_poisson,col="red",type="p",pch=20,xlab="année",ylab=" ",main="kappa Poisson vs
Lee Carter")
lines(tmin:tmax,kappat_poisson,col="red")
lines(tmin:tmax,kappat_LC,col="blue")
points(tmin:tmax,kappat_LC,col="blue",type="p",pch=20)
legend(1990,45,c("LC", "Poisson"), col = c(2,4),lty = c(1,1), merge = TRUE)
```

```
#####MODELISATION ARIMA DE KAPPA#####
```

```
library(ts)
kappat=kappat_LC
dkappat=ts(diff(kappat))
```

```

adf.test(dkappat)

acf(diff(kappat))
pacf(diff(kappat))

ar(diff(kappat))

model00=arima(dkappat,c(0,0,0))
tsdiag(model00)
model10=arima(dkappat,c(1,0,0))
tsdiag(model10)
model11=arima(dkappat,c(1,0,1))
tsdiag(model11)
model01=arima(dkappat,c(0,0,1))
tsdiag(model01)
model20=arima(dkappat,c(2,0,0))
tsdiag(model20)
model12=arima(dkappat,c(1,0,2))
tsdiag(model(12))
model02=arima(dkappat,c(0,0,2))
tsdiag(model(02))

model=arima(dkappat,c(0,0,1))

#####SIMULATION DE TRAJECTOIRES POUR KAPPA#####

#CAS MA(1)
npred=50
nsim=100
pred=NULL
pred=matrix(kappat[nt],npred+nt+1,nsim)

for (j in 1:nsim){

    erreur= sqrt(model$sigma2)*rnorm(npred+tmax+2)

    for (t in 1:nt){
        pred[t,j]=kappat[t]
    }
    for (t in nt:(npred+nt)){
        pred[t+1,j]=pred[t,j]+model$coef[2]+erreur[t+1]+model$coef[1]*erreur[t]
    }
}

#####TRAJECTOIRES DE LNMUXT #####

graphe_trajetoire=function(annee){

#initialise le premier tableau de valeur comme une matrice
lnmuxt_sim=matrix(0,nx,nt+npred+1)
for (x in 1:nx){ for (t in 1:(nt+npred+1))
    { lnmuxt_sim[x,t]<-alphax[x]+(betax[x]*(pred)[t,1]) } }

plot(lnmuxt_sim[, (annee-tmin+1)], type="n")

#concaténation des matrices les unes en dessous des autres
for (i in 2:nsim){
    lnmuxt_sim_new=matrix(0,nx,nt+npred+1)

    for (x in 1:nx)
        { for (t in 1:(nt+npred+1))
            { lnmuxt_sim_new[x,t]<-alphax[x]+(betax[x]*(pred)[t,i]) } }

lines(lnmuxt_sim_new[, (annee-tmin+1)]) } }

graphe_trajetoire(2020)

```

7. Code sous R : Algorithme de génération de tables prospective : Simulation des décès suivant la loi de Poisson

```
#####POISSON LOG BILINEAIRE #####

#####DONNEES (Hommes)#####

xmin=40
xmax=101
tmin=1975
tmax=2003

nx=xmax-xmin+1
nt=tmax-tmin+1
kappat=NULL
alphax=NULL
betax=NULL
kappat_poisson=NULL
alphax_poisson=NULL
betax_poisson=NULL

b1=0
b2=0
sigma=0

age_ferm=95 #age à partir duquel on substitue les quotients de mortalité

##### TABLES DE DECES ET EXPOSITIONS #####

getwd()

#matrice des deces
dxt=t(matrix(scan('input_dxt_UK_M_40_102_1975.txt'),nt,nx))
#matrice des expositions
ext=t(matrix(scan('input_ext_UK_M_40_102_1975.txt'),nt,nx))

#####FONCTIONS #####

#####SIMULATION DE NOUVEAUX DECES#####
simul_poisson=function(dxt){
  for (x in 1:nx){
    for (t in 1:nt){
      dxt[x,t]=rpois(1,dxt[x,t])
    }
  }
  return (dxt)}

#####SIMULATION DE TRAJECTOIRES DE KAPPAT: ARIMA(0,1,2)#####

prediction=function(npred,kappat,b1,b2,constante,sigma){
  pred=0
  erreur= sigma*rnorm(npred+nt+3)

  for (t in 1:nt){
    pred[t]=kappat[t]
  }
  for (t in nt:(npred+nt)){
    pred[t+1]=pred[t]+constante+erreur[t+1]+b1*erreur[t]+b2*erreur[t-1]}
  return(pred)}

##### FONCTION EXTRAPOLATION (DENUIT GODERNIAUX)#####

fermeture=function(a,b)
{a*(130*130-260*b+b*b)}
```

```

#####SPECIFICATIONS

qxt_sim_new=NULL
qxt_sim=NULL
nsim=1000
npred=50

#####SIMULATION#####

for (s in 1:nsim){

#####ETAPE 1#####
dxt_simu=simul_poisson(dxt)

#####ETAPE 2#####

param=parametre_poisson(dxt_simu,ext)#####

alphax=as.vector(param[[1]])
betax=as.vector(param[[2]])
kappat=as.vector(param[[3]])

#####ETAPE 3#####
dkappat=ts(diff(kappat))
model=arima(dkappat,c(0,0,2))

sigma=sqrt(model$sigma2)
b1=model$coef[1]
b2=model$coef[2]
constante=model$coef[3]

#####ETAPE 4#####

pred=prediction(npred,kappat,b1,b2,constante,sigma)

#####ETAPE 5 : FERMETURE & STOCKAGE#####

if (s==1)
{qxt_sim=matrix(0,(age_ferm-xmin),nt+npred+1) #on s'arrete à 94 ans
for (x in 1:(age_ferm-xmin)){ for (t in 1:(nt+npred+1))
  {qxt_sim[x,t]<-1-exp(-exp(alphax[x]+(betax[x]*pred[t])))}

  ferm_table=matrix(0,130-age_ferm+1,nt+npred+1)#ok jusque là

  x=75:(age_ferm-1)#vrai age va 75 à 94

  for (t in 1:(nt+npred+1)){
    logq75t=log(qxt_sim[,t])[75-xmin+1:(age_ferm-xmin)]
    d=data.frame(x=logq75t)
    res=nls(logq75t~fermeture(a,x),d,start=list(a=0))
    for (i in 1:(130-age_ferm+1)){
      ferm_table[i,t]=exp(fermeture(coef(res),(i+age_ferm-1)))}

qxt_sim=rbind(qxt_sim,ferm_table)}

if(s>1)
{qxt_sim_new=matrix(0,(age_ferm-xmin),nt+npred+1)

for (x in 1:(age_ferm-xmin)){ for (t in 1:(nt+npred+1))
  {qxt_sim_new[x,t]<-1-exp(-exp(alphax[x]+(betax[x]*pred[t])))}

  ferm_table=matrix(0,130-age_ferm+1,nt+npred+1)
  x=75:age_ferm

```

```

    for (t in 1:(nt+npred+1)){
      logq75t=log(qxt_sim[,t])[(75-xmin+1):(age_ferm-xmin+1)]
      d=data.frame(x=logq75t)
      res=nls(logq75t~fermeture(a,x),d,start=list(a=0))
      for (i in 1:(130-age_ferm+1)){
        ferm_table[i,t]=exp(fermeture(coef(res),(i+age_ferm-1)))}}

qxt_sim_new=rbind(qxt_sim_new,ferm_table)
qxt_sim=rbind(qxt_sim,qxt_sim_new)
}
##### MOSES#####
scenario=matrix(rep(1:nsim,each=(130-xmin+1)),nsim*(130-xmin+1),1)

age=matrix(rep(xmin:130,times=nsim),(130-xmin+1)*nsim,1)

qxt_sim=cbind(scenario,age,qxt_sim)

dates=c(0,0,tmin:(tmax+npred+1))

dates=matrix(dates,1,length(dates))# tmin-1 et tmin-2 sont fictifs pour les remplacer par scen et age dans
access.
qxt_sim=rbind(dates,qxt_sim)

write.table(qxt_sim, file = "tables_hommes_1000.txt", quote = TRUE, sep = "\t",row.names =
FALSE,col.names = FALSE)

```


8. Code sous R : Méthode 2 et 3 : Simulation avec la loi multinomiale & Rééchantillonnage des résidus de Pearson

```
#####METHODE 2 : SIMULATION LOI MULTINOMIALE#####

#####TRIANGLE INFERIEUR TABLES DECES#####
t=1
dxt_simu=matrix(0,nx,nt)
for (x in 1:nx){
  j=x
  d=0
  t=1
  if (x<(nx-nt+2))
  nb_valeur=nt else
  nb_valeur=nx-x+1

  for (i in 1:nb_valeur){
    d=d+dxt[j,t]
    t=t+1
    j=j+1
  }
  t=1
  j=x
  qxt=NULL

  for (i in 1:nb_valeur){

    qxt[i]=dxt[j,t]/d
    t=t+1
    j=j+1
  }
#####
  simu=rmultinom(1,d,qxt)

  t=1
  j=x

  for (i in 1:nb_valeur){

    dxt_simu[j,t]=simu[j-x+1,1]
    t=t+1
    j=j+1
  }
}
#####TRIANGLE SUPERIEUR TABLES DECES#####
for (t in 2:nt)
{
  d=0
  x=1
  j=t
  nb_valeur=nt-t+1

  for (i in 1:nb_valeur){
    d=d+dxt[x,j]
    x=x+1
    j=j+1
  }
  x=1
  j=t
  qxt=NULL

  for (i in 1:nb_valeur){

    qxt[i]=dxt[x,j]/d
  }
}
```

```

                x=x+1
                j=j+1
            }
#####
simu=rmultinom(1,d,qxt)

x=1
j=t

for (i in 1:nb_valeur){

    dxt_simu[x,j]=simu[x,1]
    x=x+1
    j=j+1
}
}

#####RE ECHANTILLONNAGE DES RESIDUS PEARSON#####

#####RESIDU DE PEARSON#####
deltaxt=matrix(0,nx,nt)
for(t in 1:nt){
    for (x in 1:nx){
        temp=ext[x,t]*exp(alphax_poisson[x]+betax_poisson[x]*kappat_poisson[t])
        deltaxt[x,t]=temp
    }
}

res_pearson=(dxt-deltaxt)/sqrt(deltaxt)

res_pearson_cent=res_pearson-mean(res_pearson)

#####RE ECHANTILLONNAGE #####

#Sur les t
s=matrix(0,nx,nt)

for (x in 1:nx)
{s[x,]=sample(res_pearson_cent[x,])}

#sur x et t
s=matrix(sample(res_pearson_cent),nx,nt)

#####RECONSTITUTION DES DXT#####

dxt_simu=deltaxt+sqrt(deltaxt)*s

```