



Mémoire présenté le :

**pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : Mr Grégory Voillereau

Développement de stratégies de trading systématique sur le
marché du Forex

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membre présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

signature

Entreprise :

Nom : Natixis

Signature :

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom : Mr Ouri Mimran

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)**

Signature du responsable
entreprise

Signature du candidat

*Membres présents du jury de la
filière*

Mr Guillaume De Fresnoye

Secrétariat

Bibliothèque :

Remerciements

Je souhaite remercier tout d'abord mon maître de stage Ouri MIMRAN pour sa pédagogie, sa grande disponibilité et ses précieuses recommandations. J'associe à ces remerciements, également, toute l'équipe RECHERCHE ECONOMIQUE pour l'accueil qu'elle m'a réservé et sa sympathique participation au bon déroulement de mon stage.

Je remercie aussi Arnaud COHEN et Guillaume DE FRESNOYE, mes tuteurs ISUP, pour leurs excellents conseils ainsi que pour la bienveillance qu'ils ont toujours manifestée à mon égard.

Je souhaite enfin remercier Daniel GABAY et Daniel HERLEMONT, mes responsables ESILV, pour leurs aides et leurs soutiens constants dans l'obtention de mon double diplôme.

RESUME

De nombreux modèles mathématiques fondés sur le *trading* systématique apparaissent au sein des milieux financiers : sont-ils fiables ? Peuvent-ils reproduire de manière certaine les résultats escomptés ?

Nous nous proposons d'aborder cette problématique en appuyant notre raisonnement sur des études statistiques et actuarielles en définissant une méthode d'analyse et de construction de stratégies de *trading* systématique.

Différents outils nous permettent d'appréhender leurs rendements tout en tenant compte des facteurs de risque. C'est au travers d'une construction *In Sample* et d'une analyse *Out of Sample* que nous nous assurerons de leurs robustesses.

Avant d'aborder l'élaboration de cette stratégie, nous commençons par étudier le comportement de l'indicateur sur lequel reposera notre futur système. Nous utilisons l'un des indicateurs les plus courants et les plus utilisés : la moyenne mobile simple. Nous cherchons à améliorer sa réactivité tout en conservant une capacité de lissage intéressante.

L'utilisation de *l'extrapolation de Richardson* nous a permis d'accélérer sa vitesse de convergence et d'introduire ainsi la *moyenne mobile de Hull*.

L'analyse détaillée de deux systèmes de *trading* systématique, l'un construit sur la base de deux *moyennes mobiles de Hull*, l'autre réalisé grâce à l'application des *bandes de Bollinger* à une *moyenne mobile de Hull*, complète notre démarche.

Les résultats obtenus sont intéressants et diminuent de manière significative le risque inhérent à une stratégie de *buy and hold*. Le *ratio de Sharpe*, le *K-ratio* et le *Maximum Drawdown* s'améliorent nettement. Les tests de robustesse s'avèrent également concluants. Nous sommes, par conséquent, en mesure d'augmenter le potentiel de gain d'une stratégie basique de *buy and hold* tout en diminuant son risque.

Il est toutefois prudent de rappeler que malgré la série d'analyses réalisées, le passage du *backtest* à la réalité est parfois compliqué. Une recherche de stratégies possédant des marges plus confortables permettrait d'éviter tout désagrément.

Nous nous intéressons pour finir au pouvoir prédictif du modèle d'estimation *ARMA*, afin de savoir s'il pourrait être utilisé dans le cadre d'un système de *trading systématique*. L'étude de ce modèle semble offrir des prévisions assez fines qui prennent, cependant, difficilement en compte les évolutions brutales des cours.

ABSTRACT

Many mathematical models based on systematic trading are coming out in the financial world: are they reliable? Can they produce sure benefits?

We deal with this problematic basing our reasoning on statistical and actuarial studies and defining an analysis and development method for systematic trading strategies.

We point out different useful tools to appreciate strategies returns taking into account risk factors. We also need to study the robustness of these indicators, processing In Sample and out of Sample.

Before tackling the construction of this strategy, we analyze the behavior of the indicator on which we rely on for the development. The indicator we use is one of the most common and the most widely used: the simple moving average. Our aim is to improve its reactivity while maintaining its smoothing characteristic.

The Richardson extrapolation gave us the capability to increase the convergence speed of the simple moving average and to define that way the Hull moving average.

The analysis of two systematic trading strategies, the first one based on the cross of two Hull moving average, the other one using the application of the Bollinger bounds to a Hull moving average, is completing our approach.

The results of these analyses are quite interesting and subsequently decrease the risk linked to buy and hold strategy. The Sharpe ratio, the K ratio and the maximum drawdown significantly improve. The robustness tests reveal to be also compelling. Consequently, we found a way to increase the potential gain of a buy and hold strategy, while reducing its risk.

However, we need to underline that in spite of the analysis performed, going from the backtest to reality can reveal tricky. To be more comfortable, it would be interesting to improve the margins of this strategy to avoid bad surprises.

To conclude, we show interest on the predictive power of the estimation model ARMA, in order to find out a way to use it in a systematic trading system. This model shows to be offering thin predictions, even if hardly transcribing again the fast changes of the prices.

Sommaire

I.	Introduction.....	5
A.	Présentation de la problématique.....	5
B.	Présentation de la société Natixis.....	7
II.	Analyse de stratégies de <i>trading</i> systématique.....	12
A.	Présentation du marché étudié.....	12
B.	Evaluation de stratégies de <i>trading</i>	14
1.	Les rendements.....	14
2.	Estimation de la volatilité historique des cours.....	21
3.	Mesures de rendements ajustées au risque.....	24
4.	Robustesse d'une stratégie.....	32
5.	Synthèse.....	34
III.	Construction de stratégies de <i>trading</i> systématique.....	35
A.	Systèmes de <i>trading</i> basés sur une évolution tendancielle.....	35
1.	Mise en évidence de signaux d'Achats et de Ventes basiques.....	35
2.	Détermination d'une droite de tendance.....	38
3.	Evaluation brute du signal.....	45
4.	Décomposition des <i>trades</i> en fonction du marché.....	50
5.	Backtest.....	56
B.	Comparaison de 2 stratégies de <i>trading</i> systématique.....	58
1.	Stratégie 1.....	59
2.	Stratégie 2.....	68
3.	Conclusion.....	74
IV.	Estimation à partir du modèle <i>ARMA</i>	75
A.	<i>ARMA</i>	75
1.	Analyse de l'échantillon.....	75
2.	Détermination des ordres.....	78
3.	Vérification du modèle.....	79
4.	Prédictions.....	81

V. Conclusion.....	83
VI. Annexes.....	85
A. Présentation de l'algorithme au travers d'un exemple :.....	86
B. Etude des processus ARMA.....	87
1. Critère de type AIC.....	90
2. Critère de type BIC (Schwartz) :.....	91
3. Etude des résidus.....	92

I. Introduction

A. Présentation de la problématique

On observe actuellement au sein des milieux financiers un développement important des modèles mathématiques fondés sur le *trading* systématique. Ces méthodes sont utilisées en particulier dans des fonds d'investissement de type *CTA* (*Comodity Trading Advisor*). Elles favorisent la génération et le passage d'ordres de manière automatique, tout en annihilant l'impact psychologique du marché vis-à-vis du *trader*.

Les critères de développement de ces modèles devraient assurer des gains systématiques, en garantissant une présence effective sur les marchés de manière indirecte 24h/24 et 252 jours/252. La cible d'application de tels produits est toute trouvée, il s'agit du marché des changes à but très spéculatif, aussi appelé *FOREX*.

A l'évidence l'importance de la technique du *trading* systématique n'a cessé de croître au cours des dernières années sur ce type de marché.

Aux Etats-Unis, 75% des institutions financières et 95% des traders institutionnels utilisent ces méthodes d'investissement.

En Europe il est moins développé, mais il représente tout de même un ordre d'achat sur quatre.

Confrontés à un enjeu financier considérable et à une véritable éclosion d'offres, toutes plus prometteuses les unes que les autres, mais peut-être pas aussi efficaces qu'il y paraît, il nous a semblé intéressant, au travers de ce mémoire, d'étudier avec une approche statistique et avec toute la rigueur et le pragmatisme nécessaires, le développement d'une stratégie de *trading* systématique.

Après une analyse approfondie de ces systèmes, réputés être très performants, nous avons pu constater, lors de nos tests, qu'ils ne reproduisaient jamais les résultats escomptés. Toujours présentés de manière très superficielle, ils ne font jamais référence aux hypothèses prises en compte.

La première nuance à observer a trait à la qualité des données utilisées. Selon le fournisseur, il existe effectivement d'énormes différences au niveau de la précision des données proposées. Ce phénomène peut avoir un impact non négligeable sur le développement des stratégies.

La seconde constatation concerne les résultats qui sont généralement obtenus pour un seul échantillon et ne garantissent en aucun cas la possibilité qu'aura le système à reproduire des résultats satisfaisants pour d'autres échantillons.

Les coûts des transactions sont enfin totalement oubliés. Or pour des stratégies très vives, dans lesquelles, il y aura de très nombreux signaux d'interventions, les gains potentiels seront faibles ; des frais supplémentaires pourront les faire totalement disparaître.

Il paraît ainsi assez facile de présenter un système de *trading* attirant. Pour ce faire, il suffit en effet de choisir judicieusement son échantillon de données et de sur-paramétrer son système. Dans ce cas, la stratégie obtenue sera attrayante sur le papier mais demeurera totalement inefficace en réalité.

Par conséquent, le nombre des données mathématiques à prendre en considération lors de l'élaboration d'une stratégie, leurs finesses d'appréciation, leurs différences au niveau des résultats et souvent leurs caractères contradictoires, voire même quelques fois antagonistes, nous amènent à devoir manipuler ces éléments avec prudence et réflexion.

Dans ce mémoire, nous aurons pour objectif de définir des méthodes permettant la mise en place et la comparaison de stratégies de *trading* systématique en appuyant notre raisonnement sur des études statistiques et actuarielles.

Pour ce faire, nous introduirons tout d'abord différents outils permettant de procéder à l'étude de stratégies de *trading*. Ils nous permettront d'en appréhender les rendements tout en tenant compte des facteurs de risque mais également en considérant leurs robustesses.

Nous étudierons ensuite la construction d'une stratégie de *trading* basée sur une évolution tendancielle. Pour cela et à partir d'un indicateur simple, la moyenne mobile, nous chercherons à améliorer cette donnée afin de pouvoir générer des signaux d'intervention suffisamment représentatifs et fiables.

Nous terminerons par l'étude détaillée de deux systèmes de *trading* systématique, l'un sera construit à partir de deux *moyennes mobiles de Hull*, l'autre sera réalisé sur la base des *bandes de Bollinger* appliquées à une *moyenne mobile de Hull*.

Nous nous intéresserons, enfin, au pouvoir prédictif du modèle d'estimation *ARMA*, afin de savoir s'il pourrait être utilisé dans le cadre d'un système de *trading* systématique.

- ✓ Afin de travailler sur cette problématique j'ai réalisé mon stage au sein de la société *Natixis*, j'y ai rejoint l'équipe rattachée au département de « *Recherche Economique* » de la *Banque de Financement et d'Investissement*, en tant que stratéguiste sur le marché de change.

B. Présentation de la société *Natixis*

Natixis est la banque de financement, de gestion et de services financiers du Groupe BPCE, 2^{ème} groupe bancaire en France avec 36 millions de clients au travers de ses deux réseaux, Banque Populaire et Caisse d'Epargne.

Natixis est cotée à la Bourse de Paris.

Avec près de 22 000 collaborateurs, *Natixis* intervient dans trois domaines d'activités :

- La Banque de Financement et d'Investissement
- L'Epargne (Gestion d'actifs, Banque privée, Assurance, Capital Investissement)
- Les Services Financiers Spécialisés.

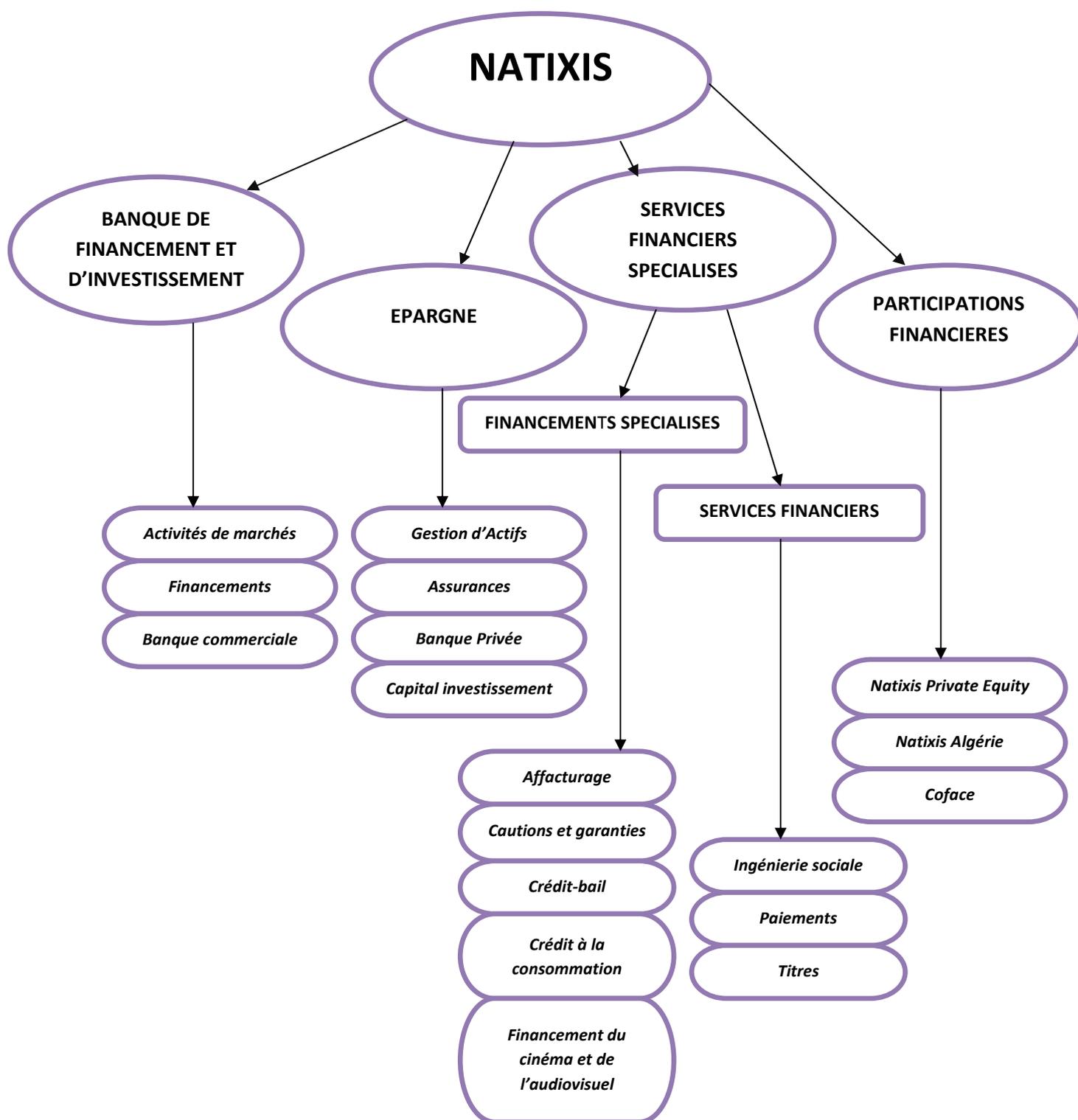
Natixis accompagne dans le monde entier, sa propre clientèle d'entreprises, d'institutions financières ainsi que la clientèle des deux réseaux bancaires du Groupe BPCE.

Natixis met en œuvre une politique de développement durable qui vise à diminuer son impact sur l'environnement et à participer au progrès social.

Cette politique s'appuie sur un ensemble d'engagements internationaux parmi lesquels :

- Engagement en faveur du Pacte Mondial des Nations unies, depuis 2007.
- Adhésion aux Principes pour l'Investissement Responsable (PRI) depuis 2008.
- Signature des Principes de l'Equateur en 2010.

1) Organigramme de la société



2) Quelques chiffres clés concernant l'année 2011

	2011	2010
Résultat (<i>exprimé en millions d'euros</i>)		
Résultat net part du Groupe	1562	1745
Structure Financière		
Total du bilan (en milliards d'euros)	507.7	458
Actif net par action (en euros)	5.35	5.47
Produit net bancaire des métiers (<i>exprimés en millions d'euros</i>)		
Banque de financement et d'investissement	2760	3027
Epargne	1884	1789
Services financiers spécialisés	1129	1074
Participations financières	865	869
Résultat avant impôt des métiers (<i>exprimés en millions d'euros</i>)		
Banque de financement et d'investissement	979	1175
Epargne	436	498
Services financiers spécialisés	281	254
Participations financières	49	72

3) La Banque de Financement et d'Investissement (BFI)

Au 31 décembre 2011, la Banque de Financement et d'Investissement de *Natixis* emploie près de 4600 personnes (ETP), déployées dans 31 pays.

Elle a réalisé en 2011 un PNB de 2760 millions d'euros.

2011 aura été une année de contraste, entre un premier semestre porteur pour les activités de BFI et un deuxième semestre affecté par un durcissement sensible de la crise financière mondiale et la matérialisation de ses effets dans l'économie réelle.

Les impacts les plus significatifs ont résidé dans la difficulté d'accès au refinancement en dollar pour l'ensemble des banques européennes, la tension sur les liquidités et l'augmentation de son coût.

La BFI intervient dans les domaines suivants :

- *Coverage*

La direction du *Coverage* couvre à la fois les activités de *coverage* et de banque commerciale (financements classiques, flux et cash management) pour 2500 clients dont 90% des 350 premières entreprises françaises.

Elle s'est réorganisée en profondeur courant 2011 afin de mieux accompagner ses clients et développer ses activités de conseil.

- *Dettes et financements*

« Dettes et Financements » conçoit des solutions de financements structurés pour la clientèle d'entreprises et d'institutionnels de Natixis, en qualité de conseil et d'arrangeur.

Organisée en six lignes métiers mondiales et implantée sur chaque plateforme internationale de la banque, la direction emploie près de 500 collaborateurs.

- *Marchés de taux, de change, de crédit, de matières premières et trésorerie et arbitrage*

Plus de 650 personnes composent les équipes de la ligne métier FI&T. Elles sont basées en Europe ainsi qu'à Singapour, Tokyo, Hong-Kong et New York et pratiquent à la fois la vente et le *trading*.

Ces équipes proposent à la clientèle des produits d'investissement et de couverture sur les marchés des taux d'intérêt, du crédit, des devises et des matières premières sur les pays de l'OCDE.

Elles se positionnent également sur les pays émergents.

- *Marchés Actions*

Depuis l'intégration des activités Cash et Dérivés actions, la plateforme *Equity Markets* a renforcé ses équipes en France et à l'International dans le but d'élargir la gamme de produits et l'univers de ses clients.

L'équipe ESOP est venue enrichir l'offre à destination de la clientèle institutionnelle, proposant des produits d'actionnariat, de rachat/vente d'actions et de couverture.

- *Corporate Solutions & Advisory*

Corporate Solutions propose à ses clients des solutions sur mesure d'optimisation de bilan ou de transfert de risques dans le cadre d'opérations de restructuration et d'acquisition.

Constituée de 90 personnes et présente dans neuf pays, *Corporate Solutions* s'adresse à une large clientèle d'entreprises internationales et de fonds souverains située en Europe, au Moyen-Orient, en Asie et en Amérique du Sud.

- *Gestion pour compte de tiers*

Natixis développe des activités de Gestion d'actifs pour compte de tiers ayant des synergies avec les métiers de la BFI et destinées aux investisseurs institutionnels français et internationaux.

Ces activités regroupent la gestion de fonds d'infrastructures, d'environnement et de développement durable, la gestion de fonds de transfert de risques assurances (*alternative risk transfer*).

Elles assurent aussi la couverture d'une plateforme de *managed funds* et de gestion alternative.

- *La plateforme Asie*

Présente dans 12 pays, avec près de 450 collaborateurs, la plateforme Asie-Pacifique regroupe la plupart des activités de Financements et de Marchés.

Son objectif est d'accompagner les clients internationaux et de développer l'expertise des métiers spécialisés dans cette zone à forte croissance.

- *La plateforme Amériques*

Présente en Amérique du Nord et en Amérique latine, la plateforme couvre la majorité des activités de financements et de marchés de capitaux, avec environ 600 collaborateurs répartis dans 5 pays.

- *La plateforme Europe Afrique Moyen-Orient*

La stratégie de la plateforme a été définie en cohérence avec les objectifs généraux de la banque : évolution vers des activités à forte valeur ajoutée et à faible consommation de fonds propres, avec une attention particulière portée aux clients clés.

- *La recherche*

La recherche de la BFI est une priorité stratégique et fait partie intégrante de la démarche de *Natixis* auprès de sa clientèle. Elle publie quotidiennement des analyses pour éclairer les décisions de ses clients et participe au processus de création de solutions financières adaptées à leurs attentes.

II. Analyse de stratégies de *trading* systématique

A. Présentation du marché étudié

Notre étude sera développée sur le marché des changes sur lequel les devises sont échangées l'une contre l'autre, à des taux de change qui varient sans cesse. Ce marché porte le nom de FOREX, issu de la contraction des termes anglais *Foreign Exchange*. Il a été créé en 1971.

Ce marché interbancaire, mondial par nature, est le deuxième marché financier de la planète en termes de volume global, derrière celui des taux d'intérêt. Il est le plus concentré et le premier pour la liquidité des produits les plus traités, comme la parité euro/dollar. Le volume quotidien moyen des échanges était en 2007 de 3210 milliards de dollar US, soit une augmentation de 71% des volumes par rapport à la précédente étude de 2004.

À titre de comparaison cela représente 500 fois le volume moyen quotidien de la bourse de Paris et 40 fois celui du plus grand marché d'actions au monde, le *NYSE (New York Stock Exchange)*.

Afin d'assurer une couverture 24h sur 24 de leurs clients, chaque banque importante dispose d'une salle de marché sur les trois continents. A une équipe située en Asie ou en Australie succède une autre située en Europe puis enfin une troisième située en Amérique du Nord, et ainsi de suite (le marché est fermé les week-ends).

Le *Forex* concerne plusieurs catégories d'intervenants.

- En premier lieu, les entreprises qui réalisent des contrats internationaux et qui souhaitent se couvrir contre des fluctuations des cours afin d'assurer la stabilité de leurs revenus.
- En second lieu, les grands investisseurs institutionnels, au travers des principales banques, qui réalisent des transactions sur ce marché à but spéculatif ou de couverture.

- Enfin, les particuliers qui commencent à affluer en masse sur ce nouveau marché. Les offres en direction de ces derniers se sont multipliées et ont permis aux particuliers de rentrer sur ce marché qui était auparavant réservé aux professionnels.

L'attrait du *Forex* pour les particuliers est relativement récent mais ces derniers font preuve d'un engouement très fort pour ce nouveau type d'investissement. Si la France n'est touchée par le phénomène que depuis peu, les États-Unis proposent des services d'investissement sur le *Forex* depuis maintenant plusieurs années.

Il faut noter que le marché des changes ne manque pas d'atouts pour séduire les investisseurs et notamment les plus spéculatifs d'entre eux.

Parmi les pôles d'intérêts principaux nous pouvons citer :

- Une très grande liquidité qui permet de rentrer et de sortir à n'importe quel moment, quelle que soit la somme.
- Une cotation 24 heures sur 24 et cinq jours sur sept. L'ouverture quasi permanente de ce marché permet aux investisseurs de réaliser des transactions quand ils le souhaitent. On peut également réagir instantanément à n'importe quel événement. Cela n'est pas possible avec les marchés d'actions qui sont fermés la nuit.
- La possibilité de réaliser des opérations très spéculatives grâce à un énorme effet de levier qui permet de mettre sur le marché une somme jusqu'à 400 fois supérieure à celle que le client possède, tout en conservant une marge suffisante pour pouvoir couvrir des pertes éventuelles.
- Peu de valeurs à surveiller : à la différence des marchés d'actions qui comptent des centaines voire des milliers de titres, le *Forex* ne propose que quelques dizaines de devises différentes dont cinq ou six majeures que les opérateurs surveillent de près et sur lesquelles se réalisent la majorité des échanges.
- Des frais de transactions réduits. Pour négocier sur le *Forex*, les intermédiaires financiers ne facturent généralement pas de commissions, ils se rémunèrent uniquement sur la fourchette achat/vente (le *spread*). Sur les principales paires de devises, le *spread*, soit la différence entre le cours d'achat et le cours de vente, est de 2 à 3 unités de base.

Toutes les données utilisées, dans notre étude, seront récupérées sous CQG. Ce fournisseur offre des données historiques particulièrement précises.

B. Evaluation de stratégies de *trading*

De manière à pouvoir évaluer et développer des stratégies de *trading*, nous nous intéresserons tout d'abord à l'analyse des outils permettant d'appréhender leurs qualités.

1. Les rendements

Le premier outil permettant de juger la capacité d'une stratégie de *trading* à gagner de l'argent est le calcul de son rendement.

Il en existe plusieurs types : logarithmique, arithmétique, ou incréments de prix.

On notera C_t le prix à l'instant t .

- Rendements logarithmiques :

$$r_t = \log \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right)$$

Ce rendement a pour avantage de garantir des prix positifs. De ce fait, à partir de l'équation précédente, nous pouvons déduire le prix sous la forme :

$$C_t = \exp \left(\sum_{i=0}^t r_i \right) C_0$$

- Rendements arithmétiques :

$$r_t = \frac{C_t - C_{t-1}}{C_{t-1}}$$

Il est comparable au précédent dans le cas de rendements faibles.

- Incréments de prix :

$$r_t = C_t - C_{t-1}$$

L'incrément de prix est inadapté à la comparaison de différentes évolutions de prix. Prenons ainsi l'exemple de deux devises ayant des prix très différents l'une de l'autre : l'EUR/USD et l'USD/JPY. L'Euro a une valeur d'environ 1.33\$ alors que le Yen n'est évalué qu'à 0.0125\$. De ce fait, pour une même augmentation de cours l'impact sur le prix de départ s'avèrera extrêmement différent.

- ✓ Dans la suite de notre étude nous calculerons des rendements qualifiés de *mark to market*. Ceci consiste à évaluer de manière régulière une position sur la base de sa valeur observée sur le marché au moment de l'évaluation. Par conséquent les rendements seront généralement faibles, nous utiliserons de ce fait un modèle logarithmique.

Afin d'évaluer le profit global de la stratégie nous ferons apparaître ces rendements *mark to market* sous la forme de rendements cumulés. Ils seront représentés sous la forme d'une courbe, aussi appelée *equity curve* :

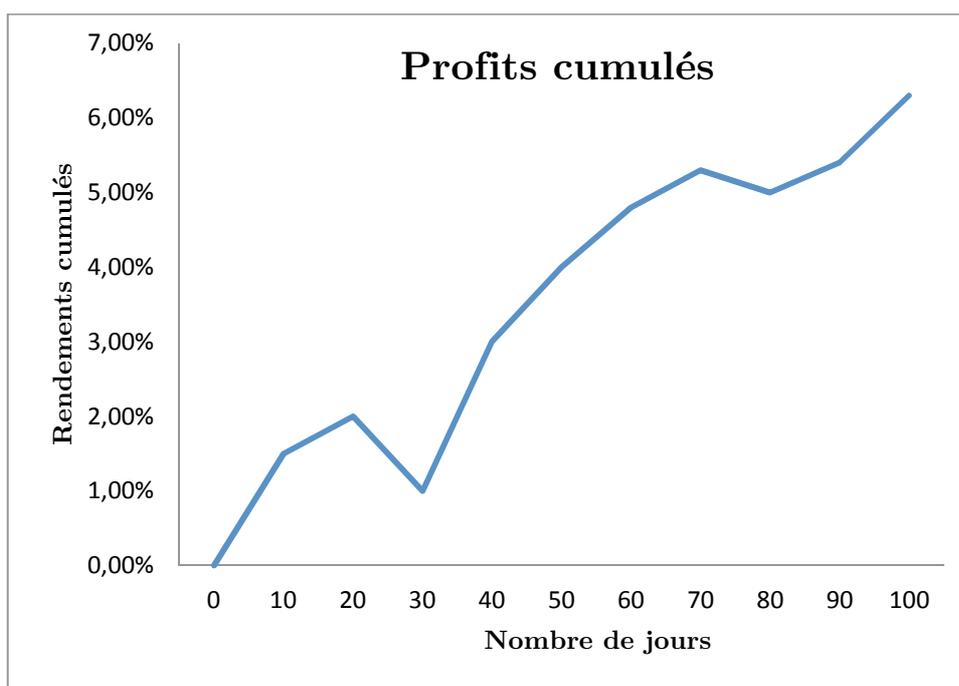


Figure 1 Exemple de représentation d'une *equity curve*

De nombreux modèles financiers sont basés sur l'hypothèse suivante :

- *Les rendements sont indépendants et distribués selon une loi normale.*

Cette hypothèse pourrait malheureusement stopper toute velléité de construction de stratégie de *trading*. Si les rendements sont réellement indépendants, il serait totalement

aberrant de baser leur prédiction sur les évènements passés et une normalité parfaite résumerait la stratégie à un jeu de hasard. Nous allons par conséquent, étudier leurs distributions et leurs indépendances.

a) *Test de normalité*

L'hypothèse de normalité est la conséquence directe du théorème central limite (TCL). En effet, si on discrétise les rendements d'une période T en n rendements identiquement distribués et indépendants, le TCL nous permet de conclure quant à la convergence de leur distribution vers une loi normale.

Nous allons étudier l'EUR/USD et tester la véracité de cette hypothèse. Pour cela nous avons commencé par tracer un graphique quantile-quantile de ses rendements journaliers :

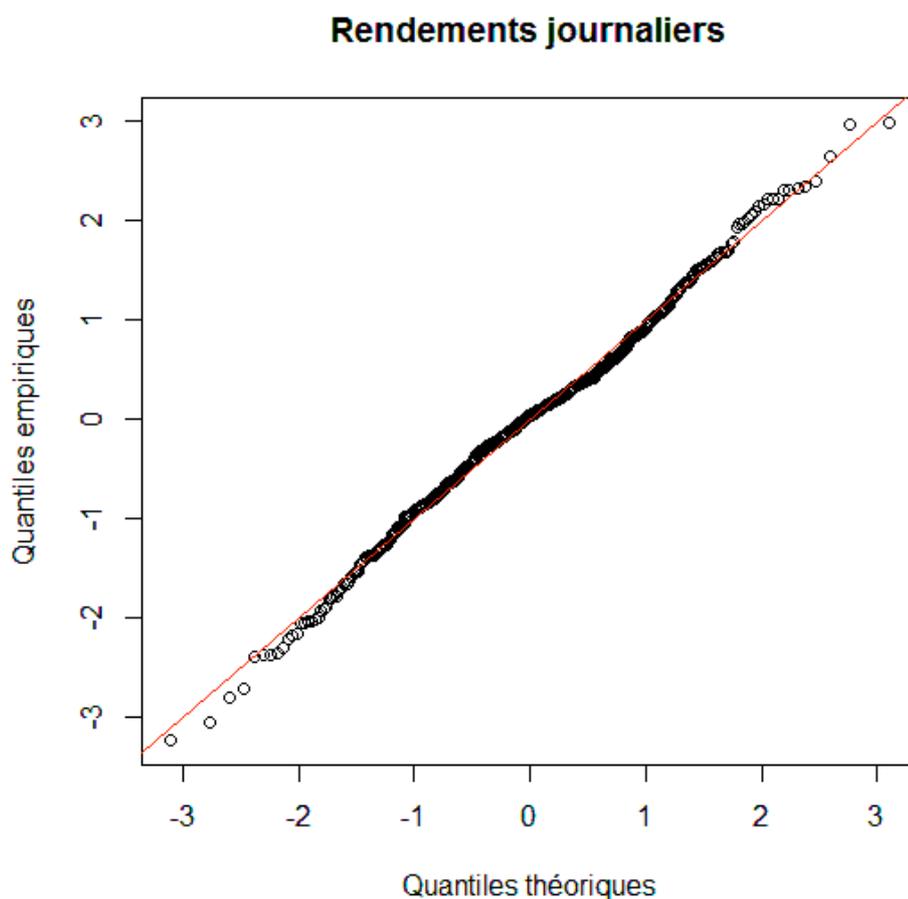


Figure 2 : Graphique quantiles-quantiles des rendements journaliers de l'EUR/USD

Il permet d'évaluer la pertinence de l'ajustement d'une distribution donnée à un modèle théorique, en l'occurrence un modèle gaussien. Si les points, en noirs, sont alignés avec la droite rouge ($x=y$) alors notre échantillon sera distribué selon une loi normale.

Un zoom sur les queues de distribution nous permet d'étudier plus finement cette distribution :

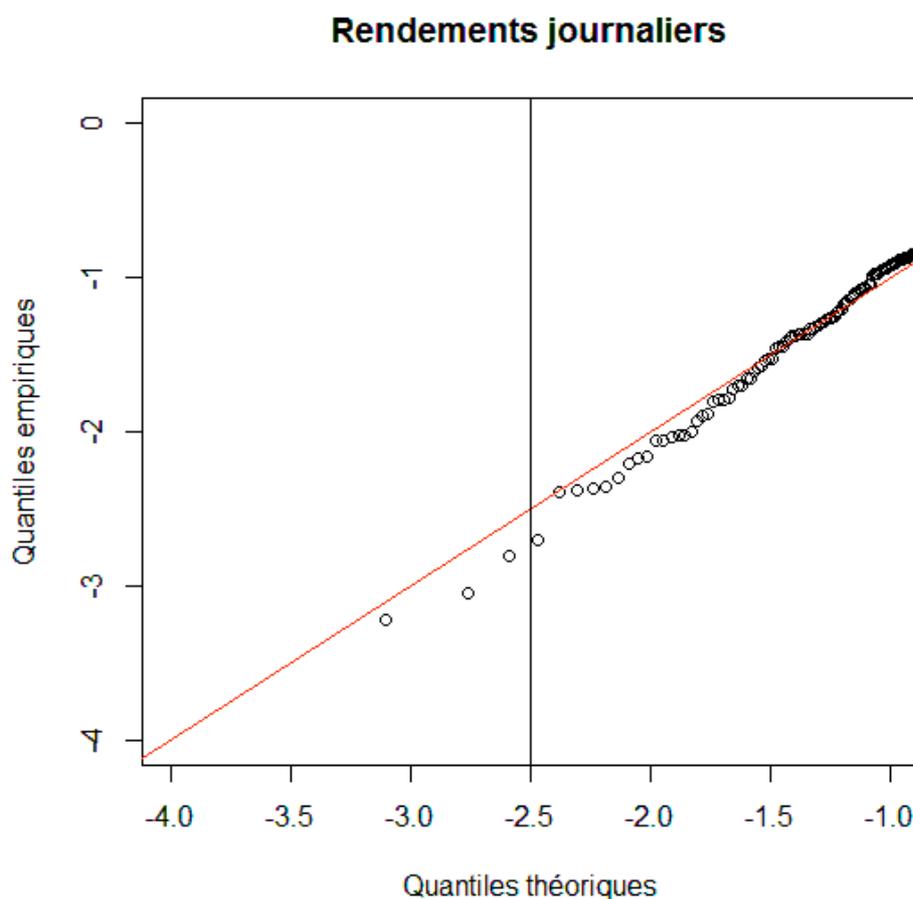


Figure 3 : Zoom sur les queues de distribution des rendements de l'EUR/USD

Ainsi à $x=-2.5$ le rendement théorique pour une distribution $N(0,1)$ serait égal à -2.5% alors que pour notre échantillon (rendements de l'EUR/USD) on obtient un rendement plus faible d'environ -2.8% .

Autour de la moyenne, les rendements observés sur notre échantillon semblent donc normalement distribués, cependant aux extrêmes ils s'éloignent de cette distribution et possèdent des queues de distributions épaisses.

Cette constatation peut être généralisée à l'aide de différents tests statistiques permettant de tester l'hypothèse de normalité.

Pour notre étude, nous nous focaliserons sur le test de *Shapiro Wilk*¹ qui est le plus utilisé. Celui-ci permet d'obtenir la p-value, c'est la probabilité de commettre une erreur de première espèce, c'est-à-dire de rejeter à tort l'hypothèse nulle (***H*₀**). Pour des tests de normalité, l'hypothèse nulle est : « *L'échantillon suit une loi normale* ». Si cette valeur p est inférieure à la valeur du seuil préalablement défini on rejette ***H*₀**.

En général, on considère les seuils suivants :

- < 0.01 : très forte présomption contre l'hypothèse nulle
- 0.01 – 0.05 : forte présomption contre l'hypothèse nulle
- 0.05 – 0.1 : faible présomption contre l'hypothèse nulle
- > 0.1 : pas de présomption contre l'hypothèse nulle

L'application de ce test à l'échantillon précédent donne une p-value égale à 6.31E-14. Celle-ci étant très largement inférieure à 0.01 nous pouvons rejeter l'hypothèse de normalité. L'observation des graphiques *quantiles quantiles* et le test de *Shapiro Wilk* conduisent à la même conclusion.

Enfin, nous nous proposons d'étudier cette même distribution si l'on augmente la durée d'observation comprise entre chaque récupération de données, c'est-à-dire si l'on observe les rendements de manière journalière, hebdomadaire et mensuelle.

Rendements	Journaliers	Hebdomadaires	Mensuels
Test de <i>Shapiro Wilk</i>	6.30E-14	4.80E-10	0.81

Il existe une forme de convergence vers une distribution normale lorsque les durées entre les observations augmentent.

- ✓ Nos stratégies futures seront appliquées à des données journalières qui comme nous venons de le voir ne sont pas distribuées de manière normale. Nous chercherons à profiter des queues de distributions épaisses synonymes d'une quantité importante de mouvements de prix directionnels.

¹ La théorie du test de *Shapiro Wilk* apparaîtra dans la partie A de l'annexe

b) *Test d'indépendance*

Nous allons maintenant vérifier l'hypothèse selon laquelle les rendements sont indépendants les uns des autres. Elle se base sur le fait qu'ils ne sont pas auto-corrélés. En effet si l'on calcule l'auto-corrélation des rendements journaliers de l'EUR/USD, on trouve l'autocorrelogramme suivant :

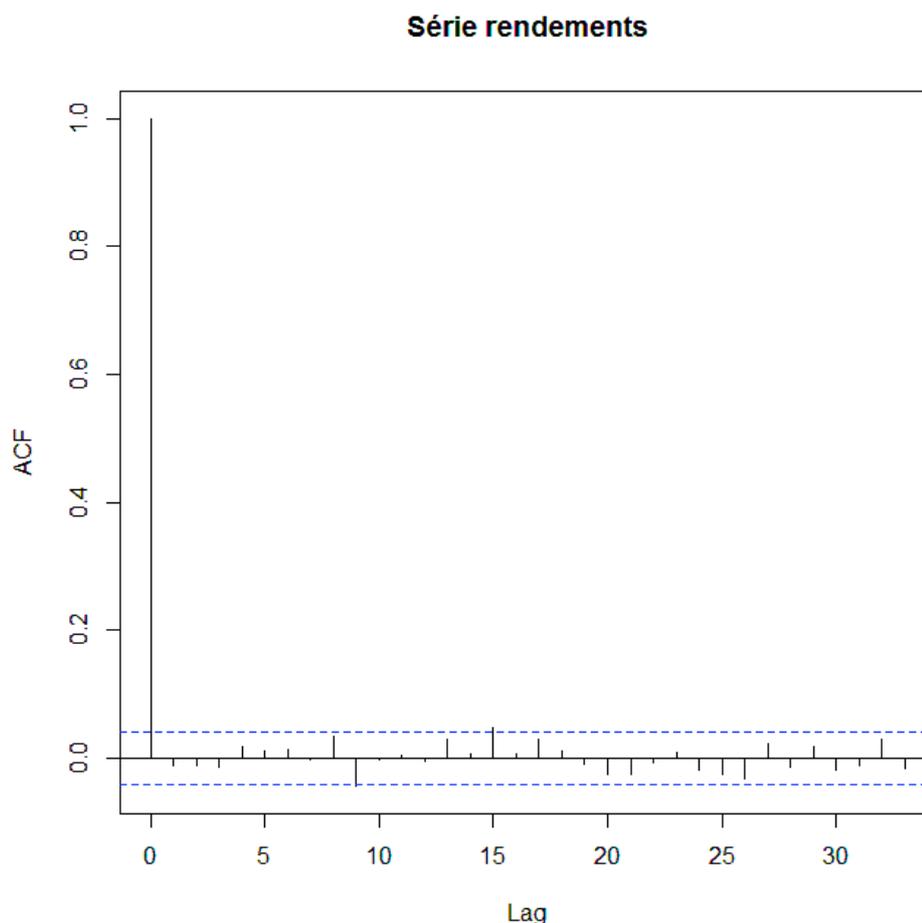


Figure 4 : Autocorrelogramme des rendements de l'EUR/USD

On peut ainsi étudier les auto-corrélations entre les rendements pour différents intervalles de temps. La droite horizontale bleue (*en pointillés*) représente l'intervalle de confiance à 95%, l'auto-corrélation ne sera considérée significative que si cette droite est largement franchie. Il apparaît ainsi clairement que les rendements journaliers ne sont pas auto-corrélés les uns aux autres.

L'hypothèse d'indépendance des rendements réside dans cette non auto-corrélation. Or cette affirmation à la simple vue des conclusions précédentes est quelque peu simpliste. En effet il est aisé de démontrer que l'indépendance implique la non auto-corrélation :

Prenons ainsi deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant respectivement une loi de densité f et une loi de densité g, on a :

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)] * E[g(Y)] = E[f(X)] * E[g(Y)] - 2 * cov(f(X), g(Y))$$

On voit ainsi aisément que $cov(f(X), g(Y)) = 0$

Cependant, la réciproque est fausse et nous allons le démontrer en affichant l'autocorrelogramme des rendements au carré. Notre étude comme précédemment a été réalisée pour des rendements journaliers calculés à partir des cours de l'EUR/USD.

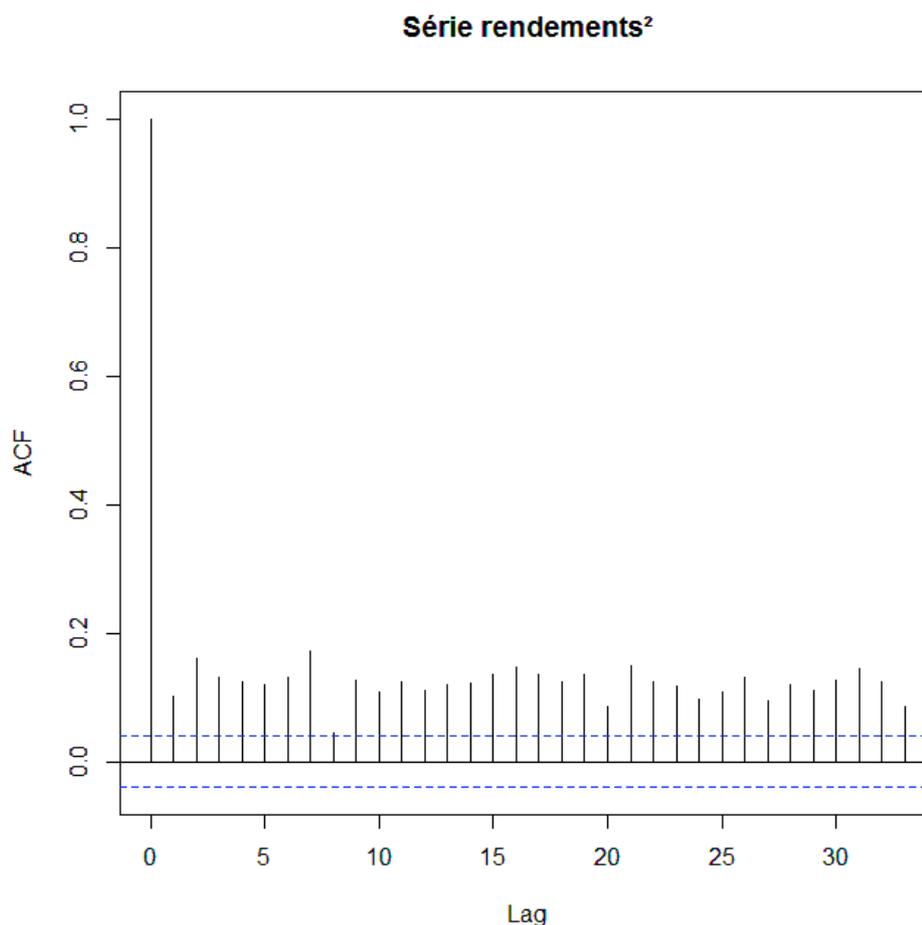


Figure 5 : Autocorrelogramme des rendements au carré de l'EUR/USD

On peut ainsi noter à partir du graphique précédent que les auto-corrélations des rendements au carré sont significatives. Par conséquent s'appuyer sur le fait que les rendements sont indépendants permet de simplifier les choses et permet le développement de nombreux modèles mais cette hypothèse paraît contestable.

Cette conclusion est intéressante dans le cadre de notre étude car la remise en question de cette indépendance pourrait nous permettre de construire des modèles prédictifs basés sur le passé nous permettant de définir des signaux d'achat.

- ✓ Cependant une simple étude des rendements n'est pas suffisante pour analyser une stratégie. Il est également nécessaire de prendre en compte le risque encouru par l'investisseur. Cette notion de risque est présentée dans la partie suivante au travers de l'étude de la volatilité historique inhérente à un système de *trading*.

2. Estimation de la volatilité historique des cours

a) *Définition de la volatilité*

La volatilité d'un actif financier mesure les variations de ses rendements passés. Elle est exprimée en pour-cent. Un titre dont le rendement varie fortement d'un jour à l'autre aura une volatilité importante. En revanche, un actif financier dont le rendement serait fixe (par exemple : titre à croissance constante) aura une volatilité nulle.

Il existe deux types de volatilité :

- la volatilité historique, qui est basée sur le passé.
- la volatilité implicite, qui représente la volatilité future estimée par le marché.

Dans la suite de ce mémoire nous ne nous intéresserons qu'à la volatilité historique.

Elle se calcule sur l'historique des cours du sous-jacent, selon un des estimateurs suivants :

(N = taille de l'échantillon)

Estimateur le plus classique :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} * \sum_{i=1}^N (r_i - \bar{r})^2$$

Avec $\bar{r} = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N r_i$; \mathbf{r} : rendement

Estimateur de Parkinson :-

$$\sigma^2 = \frac{1}{N * 4 * \log(2)} * \sum_{i=1}^N (h_i - l_i)^2$$

Avec $\mathbf{h}=\log(\text{high})$ et $\mathbf{l}=\log(\text{low})$

Estimateur de Roger Satchell :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N ((h_i - o_i) * (h_i - c_i) + (l_i - o_i) * (l_i - c_i))$$

avec $\mathbf{o}=\log(\text{open})$ et $\mathbf{c}=\log(\text{close})$

Estimateur de Garman Klass :

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (0.511 * (u_i - d_i)^2 - 0.019 * (c_i * (u_i + d_i) - 2 * u_i * d_i) - 0.383 * c_i^2)$$

Avec $\mathbf{u} = \log(\text{high}) - \log(\text{open})$ $\mathbf{d} = \log(\text{low}) - \log(\text{open})$ et $\mathbf{c} = \log(\text{close}) - \log(\text{open})$

Comparaison des différents estimateurs :

On considère une action (ou un indice typique) de volatilité théorique annuelle égale à 30%. On cherche à calculer l'erreur relative d'estimation $\frac{\sqrt{ERQM}}{\sigma^2}$. Pour un estimateur V , on construit 100 estimations $\hat{\sigma}_i^2$ de la volatilité ; l'erreur quadratique moyenne est alors :

$$ERQM = \frac{1}{100} * \sum_{i=1}^{100} (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)^2$$

Les résultats obtenus sont regroupés dans le graphique suivant :

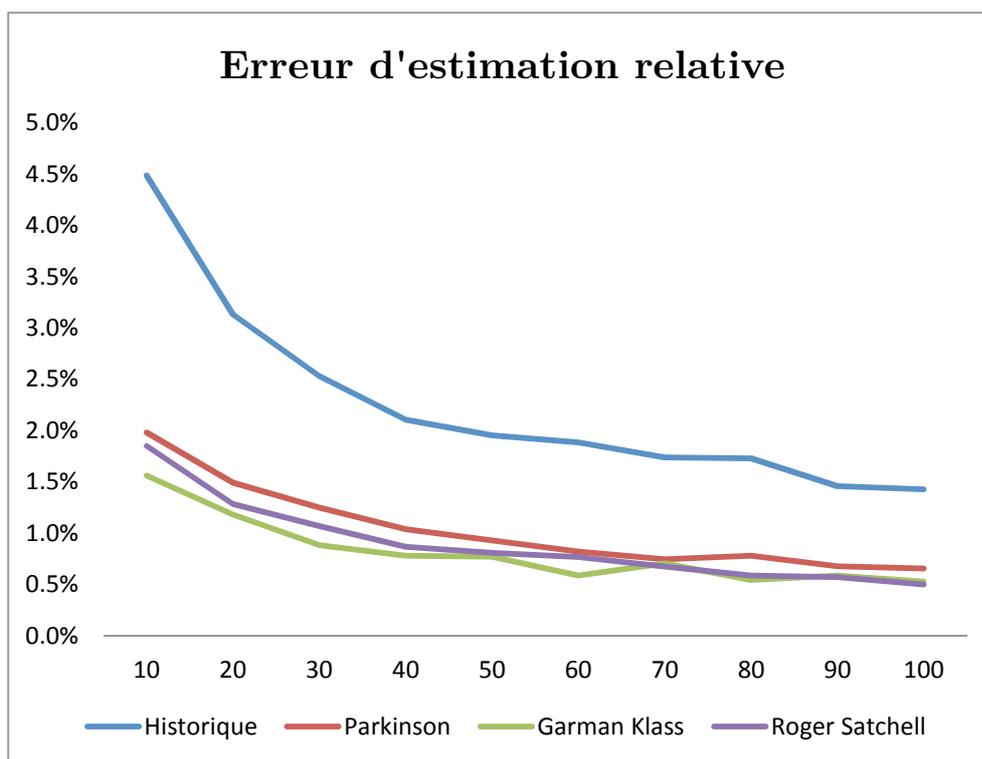


Figure 6 : Erreur d'estimation relative de la volatilité

Nbr de jours		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Erreur relative	<i>Historique</i>	44.9%	31.3%	25.3%	21.1%	19.5%	18.8%	17.4%	17.3%	14.6%	14.3%
	<i>Parkinson</i>	19.8%	14.9%	12.5%	10.4%	9.3%	8.2%	7.4%	7.8%	6.8%	6.6%
	<i>Garman Klass</i>	15.6%	11.8%	8.8%	7.8%	7.7%	5.9%	7.1%	5.5%	5.9%	5.3%
	<i>Roger Satchell</i>	18.5%	12.8%	10.7%	8.7%	8.1%	7.7%	6.7%	5.9%	5.7%	5.0%

On peut constater que pour l'estimation historique l'erreur relative d'estimation de la variance est de l'ordre de 20% pour $n=50$ alors que pour des estimateurs basées sur les plus hauts et plus bas, cet ordre d'erreur est obtenu pour seulement $n=10$.

Par conséquent, il semble intéressant d'appliquer ces nouvelles méthodes d'estimations afin d'appréhender au mieux la volatilité historique. Nous utiliserons, par la suite, l'estimateur de *Garman Klass* qui semble le plus efficace.

- ✓ Nous venons d'introduire des outils d'analyse de rendement et de volatilité. Nous allons maintenant développer des mesures permettant d'interpréter conjointement la performance et le risque d'une stratégie de *trading* systématique.

3. Mesures de rendements ajustées au risque

a) *Ratio de Sharpe*

Le ratio de Sharpe correspond au rapport suivant :

$$S = \frac{R_S - R_f}{\sigma_S}$$

Avec : R_S le rendement de la stratégie ; R_f le taux sans risque et σ_S la volatilité de la stratégie

Ce ratio permet de classer des portefeuilles de risques différents. Sur une période donnée, le portefeuille ayant la valeur la plus élevée du ratio peut être considéré comme le plus performant puisque, pour un niveau de risque donné, il procure le rendement le plus élevé.

A titre d'exemple, supposons qu'un gérant se voie confier un portefeuille avec un objectif de risque. Deux stratégies d'investissement s'offrent à lui.

- La première ; il peut investir une partie de la somme dans le portefeuille de marché et une autre dans l'actif sans risque, de telle façon que le risque global du portefeuille corresponde exactement à l'objectif qui lui a été assigné. Cette stratégie passive ne fait appel ni à ses talents de gérant, ni à aucun savoir-faire particulier.
- Une seconde stratégie consiste à choisir des titres risqués dans des proportions telles que le risque du portefeuille corresponde à l'objectif. La différence de rendement obtenu entre cette stratégie et la stratégie passive tient à ses choix et à son savoir-faire.

Sur le graphique suivant, le portefeuille A présente une performance supérieure à celle du portefeuille A'. Ce dernier est une combinaison du portefeuille de marché et de l'actif sans risque. Son risque est identique à celui du portefeuille A.

De même, le portefeuille B a une performance supérieure à celle du portefeuille B', qui est une combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille de marché de même risque que B. Les gérants faisant preuve d'habileté sont donc ceux dont les portefeuilles se situent au-

dessus de la droite $R.M$. Afin de comparer les mérites respectifs des deux gérants, il faut impérativement tenir compte du risque de leur portefeuille.

La comparaison directe des rendements des portefeuilles en excès de la stratégie naïve conduirait à affirmer la supériorité de la gestion de A sur celle de B, puisque l'écart $A-A'$ est plus élevé que l'écart $B-B'$. Or, la prise en compte du risque au dénominateur du ratio de *Sharpe* aboutit à la conclusion inverse, puisque ce ratio n'est rien d'autre que la pente de la droite reliant chaque portefeuille au taux sans risque.

Le ratio de *Sharpe* offre l'avantage d'être simple à calculer et à interpréter lorsque le numérateur est positif. En revanche, son interprétation pose problème lorsque celui-ci est négatif. Examinons les portefeuilles C et D sur le graphique ci-dessous. Un classement selon le ratio de *Sharpe* conduirait à estimer le gérant du fonds C comme plus talentueux que celui du fonds D, alors que le rendement qu'il a obtenu est moindre pour un risque plus élevé.

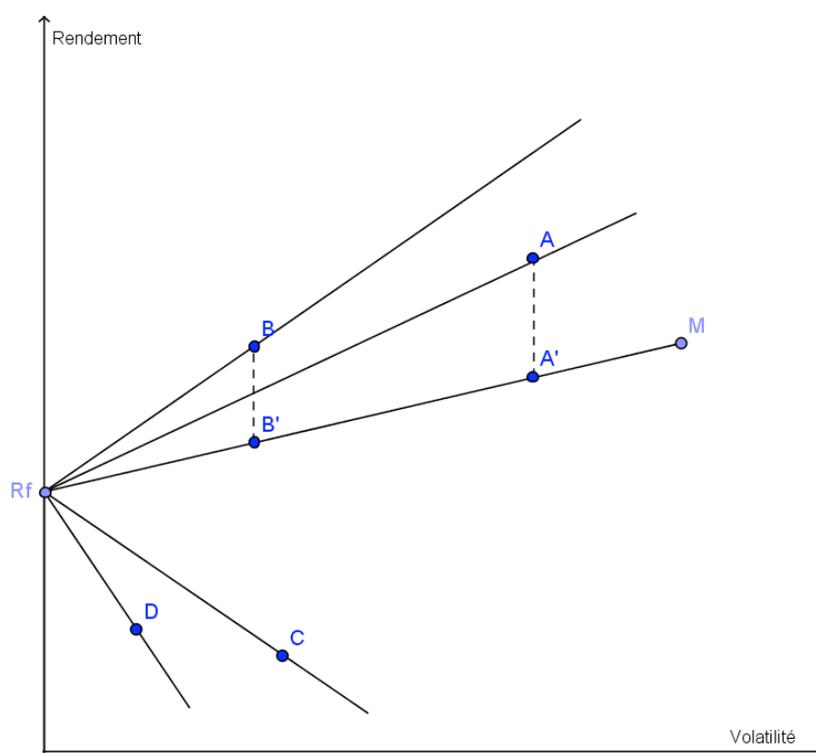


Figure 7 : Présentation du ratio de Sharpe

Les fondements théoriques du ratio sont solides, mais ils supposent aussi que les hypothèses de la théorie financière soient respectées et qu'il est possible d'emprunter pour investir plus de 100% dans un portefeuille risqué. Or, ce n'est pas toujours envisageable dans la pratique.

Prenons le cas des portefeuilles A, B, C et D du graphique ci-dessous. D'après la mesure de *Sharpe*, le portefeuille A domine le portefeuille B, qui domine C, qui lui-même domine D. Cela n'est vrai qu'à condition de pouvoir emprunter au taux sans risque afin d'investir dans le portefeuille risqué de son choix. Si un investisseur décide de faire un placement dans un portefeuille de même risque que le portefeuille C, en empruntant au taux sans risque dans le but d'investir plus de 100% de sa richesse dans le portefeuille risqué A, il peut se déplacer jusqu'à A', qui clairement domine C, mais seulement si cette opération est possible. Dans le cas contraire, il est impossible d'affirmer que A domine C.

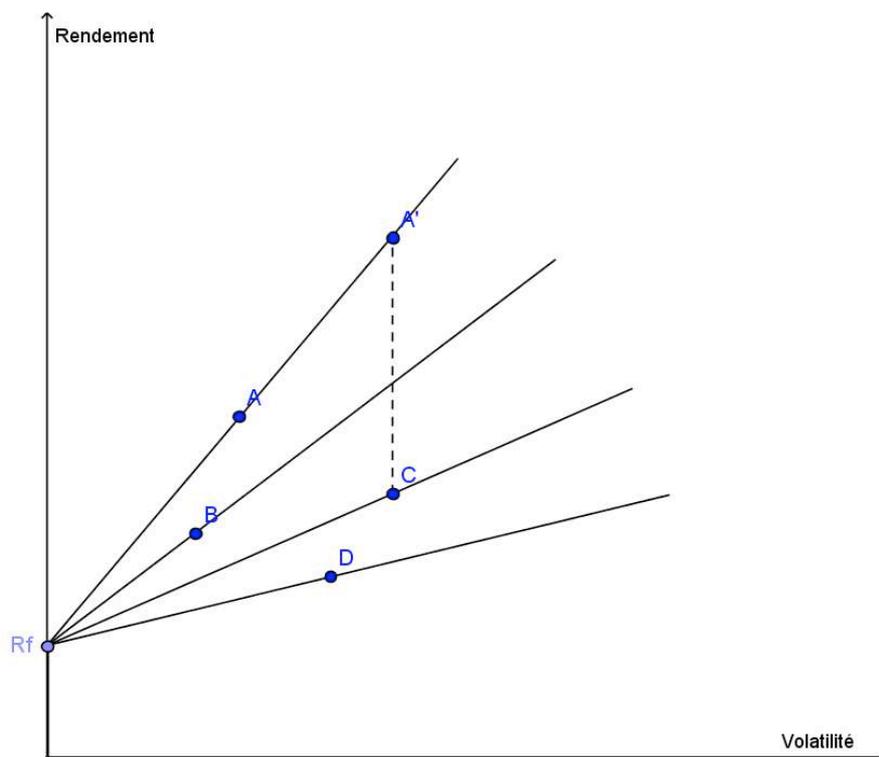


Figure 8 : Présentation du ratio de Sharpe

L'interprétation du ratio a aussi des limites. Que deux fonds aient le même ratio de Sharpe ne signifie pas qu'un investisseur choisit indifféremment l'un des deux. Prenons l'exemple de *Pierre Batteau* (1997), de deux fonds dont les historiques de rendement sont résumés dans le tableau suivant :

Fonds A		Fonds B	
Performance	Fréquence	Performance	Fréquence
18%	0.3	42%	0.1
11%	0.4	12%	0.2
8%	0.2	7%	0.4
-24%	0.1	0%	0.3

Le rendement moyen des deux fonds est identique (9%), de même que son écart type (11.6%). Le calcul du ratio de Sharpe conduit à classer ces fonds ex aequo, alors que les investisseurs expriment généralement une préférence pour le fonds B qui a l'avantage d'offrir des rendements toujours positifs.

Dans la suite de notre étude nous utiliserons comme taux sans risque le taux *Euribor*. Le ratio de *Sharpe* sera utilisé de la manière suivante :

- Si le ratio est négatif, le portefeuille a moins performé que le référentiel et la situation est très mauvaise.
 - Si le ratio est compris entre 0 et 1. Soit le sur-rendement du portefeuille considéré par rapport au référentiel se fait pour une prise de risque trop élevée. Soit le risque pris est trop élevé pour le rendement obtenu.
 - Si le ratio est supérieur à 1, le rendement du portefeuille surperforme le référentiel pour une prise de risque ad hoc. Autrement dit, la surperformance ne se fait pas au prix d'un risque trop élevé.
- ✓ Cette mesure de performance ajustée au risque s'avère intéressante. Cependant du fait des limites d'interprétations présentées précédemment il va être nécessaire d'étudier d'autres mesures.

b) *Ratio de Calmar*

Avant d'introduire le ratio de *Calmar*, nous devons présenter le *maximum drawdown*. Celui-ci représente la performance la plus mauvaise réalisée par un investisseur qui serait entré au plus haut pour sortir au plus bas à l'intérieur d'une période définie. Nous l'exprimerons en valeur absolue.

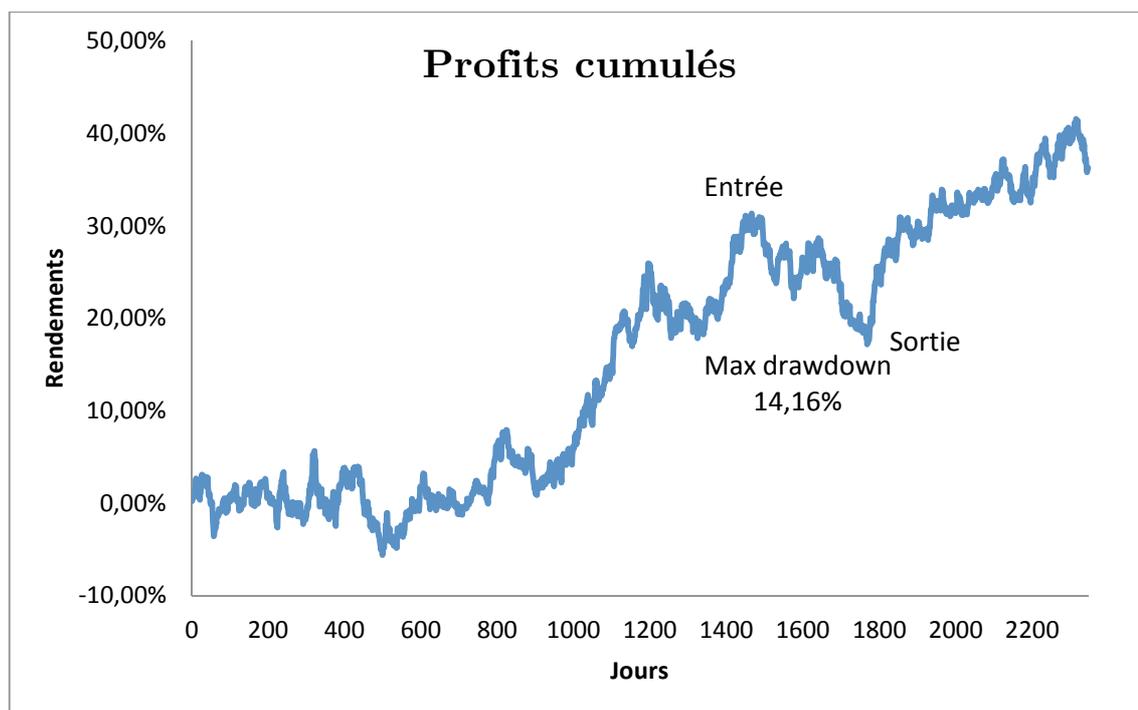


Figure 9 : Maximum Drawdown d'une stratégie de trading

C'est une mesure de risque dite « cohérente » car elle possède les propriétés suivantes :

- Invariance par translation : $MDD(P+x)=MDD(P)$
- Convexité : $MDD(P+P') \leq MDD(P)+MDD(P')$
- Homogénéité : $MDD(yP)=yMDD(P)$

Avec : P et P' qui représentent les profits cumulés de deux stratégies différentes.

Il s'agit d'une mesure de risque essentielle tant en gestion alternative qu'en *trading*.

Le ratio de *Calmar* se déduit du *maximum drawdown* de la manière suivante :

$$\text{Ratio Calmar}_{[0,T]} = \frac{P}{MDD_{[0,T]}}$$

Des stratégies risquées auront ainsi un *maximum drawdown* important ce qui entraînera un ratio de *Calmar* faible. Cependant, un problème persiste ; sur une stratégie de *trading* robuste le gain cumulé va évoluer de manière linéaire avec le temps. En effet chaque période engendre en moyenne le même profit. Alors que de son côté le *maximum drawdown* n'évoluera pas de manière linéaire.

Ceci a été démontré par *Lars Kestner* dans son livre : « *Quantitative Trading strategies* ». Pour cela il simule à l'aide de *Monte Carlo*, 1000 rendements aléatoires en prenant pour rendement moyen journalier \$10 et pour volatilité journalière \$1000. En moyenne il obtient les résultats suivants :

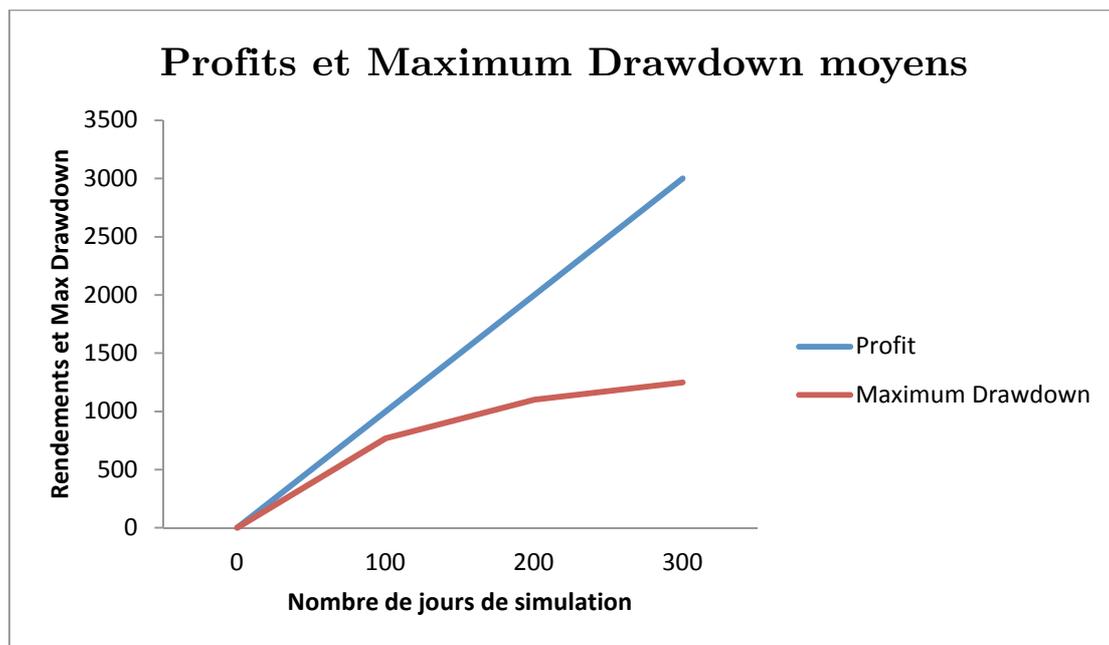


Figure 10 : Evolution du rendement et du maximum drawdown en fonction de la durée du backtest

Il en déduit le graphique suivant représentant le ratio de *Calmar* en fonction du nombre de jours de simulation :

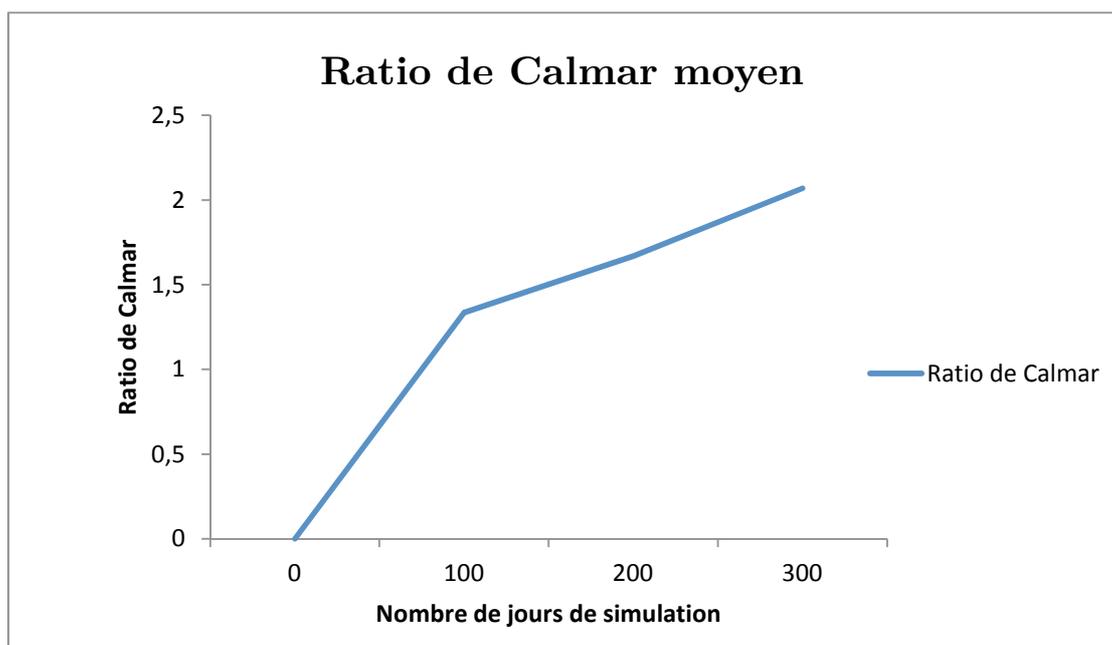


Figure 11 : Evolution du ratio de Calmar en fonction de la durée du backtest

Il apparaît clairement que plus la stratégie sera longue dans le temps, plus le ratio de *Calmar* sera important. Par conséquent nous ne pourrons pas comparer directement deux ratios de *Calmar* ; l'un calculé à partir d'un *backtest* de 5 ans et l'autre sur un *backtest* de 10 ans. Dans le cadre de comparaisons de stratégies de *trading* ceci s'avère pénalisant. Nous allons introduire une nouvelle mesure permettant de faire face à ce problème.

c) *K-ratio*

Le *K-ratio* calcule la performance en fonction de la stabilité de *l'equity curve*. Pour le calculer on commence par effectuer une régression linéaire de la courbe des profits cumulés. La régression linéaire est la droite qui minimise le carré des erreurs relatives à l'estimation.

Voici l'équation de cette régression :

$$P_i = b_0 + b_1 * x_i$$

Avec : P_i le profit cumulé à l'instant i

Le risque dans le K -ratio est mesuré par le calcul de l'erreur standard d'estimation du coefficient de régression b_1 (σ_{b_1}). Elle se calcule de la façon suivante :

$$\sigma_{b_1} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left[\sum (P - \bar{P})^2 - \frac{[\sum (x - \bar{x})(P - \bar{P})]^2}{\sum (x - \bar{x})^2} \right]}$$

Une erreur importante signifie que la pente de *l'equity curve* en fonction du temps n'est pas consistante. Par exemple, si les profits sont dus à un seul gros *trade* gagnant, l'erreur standard d'estimation sera importante en raison du manque de stabilité des rendements.

Les graphiques suivants représentent *l'equity curve* de 2 stratégies de *trading* dont les rendements cumulés finaux sont égaux :

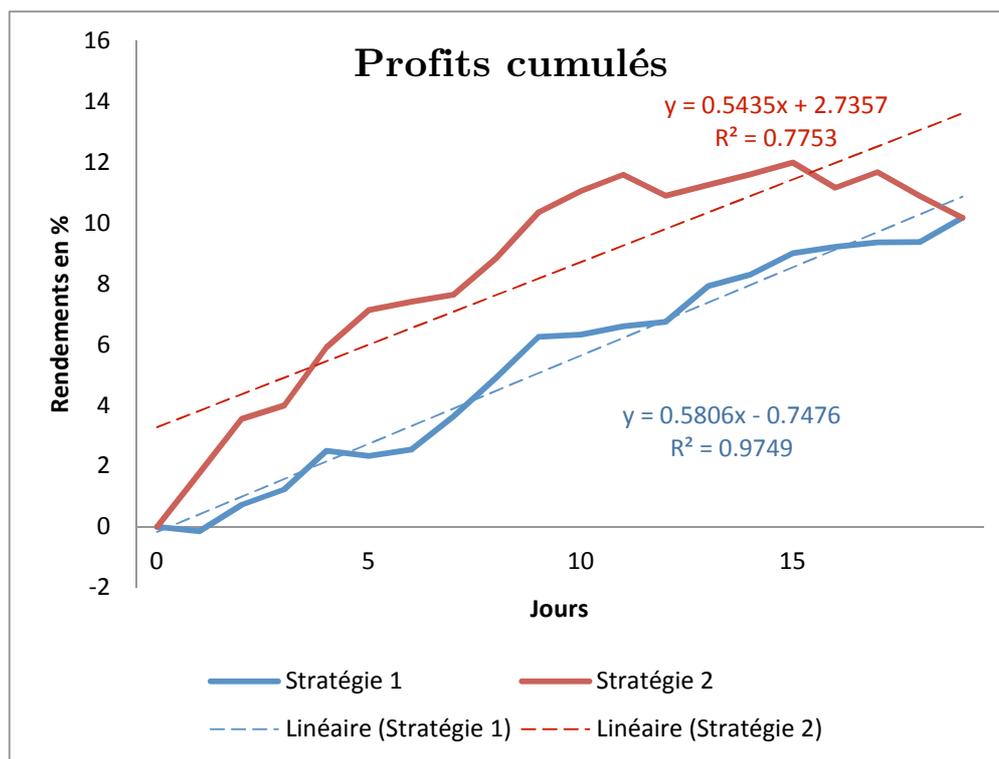


Figure 12 : Régressions linéaires relatives à deux stratégies

Les rendements relatifs à la stratégie 1 évoluent de manière régulière au cours du temps, alors que la stratégie 2 entraîne des rendements supérieurs entre 0 et 10 jours puis

tend à s'essouffler. Bien que les coefficients de régression b_1 soient assez proches l'un de l'autre (0.58 contre 0.54), l'erreur standard d'estimation est nettement supérieure pour le système 2 (0.22) que pour le système 1 (0.02). Ceci indique que les rendements associés à la stratégie 1 sont moins risqués que ceux de la stratégie 2.

Le *K-ratio* est calculé de la manière suivante :

$$Kratio = \frac{b_1}{\sigma_{b_1} * NbrObs}$$

C'est une mesure de performance sans unité qui peut permettre de comparer des stratégies indépendamment de la longueur du *backtest*. Dans l'exemple précédent le système 1 possède un ratio de 1.32 alors que celui du système 2 est égal à 0.40.

Nous considèrerons qu'une stratégie possède un *K-ratio* suffisamment élevé si celui-ci est supérieur à 0.10.

- ✓ Ensemble, le *K-ratio* et le *ratio de Sharpe* représentent les mesures les plus importantes qui permettent d'appréhender la performance de différentes stratégies de *trading* systématique. De plus le *K-ratio* possède également l'intérêt de rendre compte de la consistance d'un système.

Dans la partie suivante nous nous intéresserons à une autre méthode qui nous permettra d'aborder la robustesse d'une stratégie.

4. Robustesse d'une stratégie

Lorsque l'on construit une stratégie de *trading* systématique, celle-ci est adossée à un seul échantillon de données. Dans ce cadre il est important de comprendre que les résultats obtenus ne reflèteront en aucun cas les résultats futurs. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'étudier la robustesse de notre système avant de conclure quant à sa possible utilisation. Nous allons, par conséquent, développer une méthode de construction et de calibration de stratégie permettant d'en assurer la robustesse.

a) *In sample / Out of sample*

Lors d'un *backtest* on commence par segmenter notre échantillon de donnée (2/3 ; 1/3). La calibration de la stratégie est réalisée sur le premier segment. On dit que le système est construit *In sample*. On obtient ainsi différents ratios et une *equity curve* permettant d'appréhender la performance de notre stratégie.

Dans le cas où les résultats obtenus sont positifs nous devons être capables de savoir si ceci n'est pas simplement dû à une sur-optimisation entraînant une forme de *curve fitting*. Pour cela il est nécessaire d'étudier la stratégie mise en place précédemment de manière *Out of sample* ; on l'applique alors simplement à un échantillon relatif au second segment et on évalue sa qualité.

Cette méthode est présentée au travers du schéma suivant :

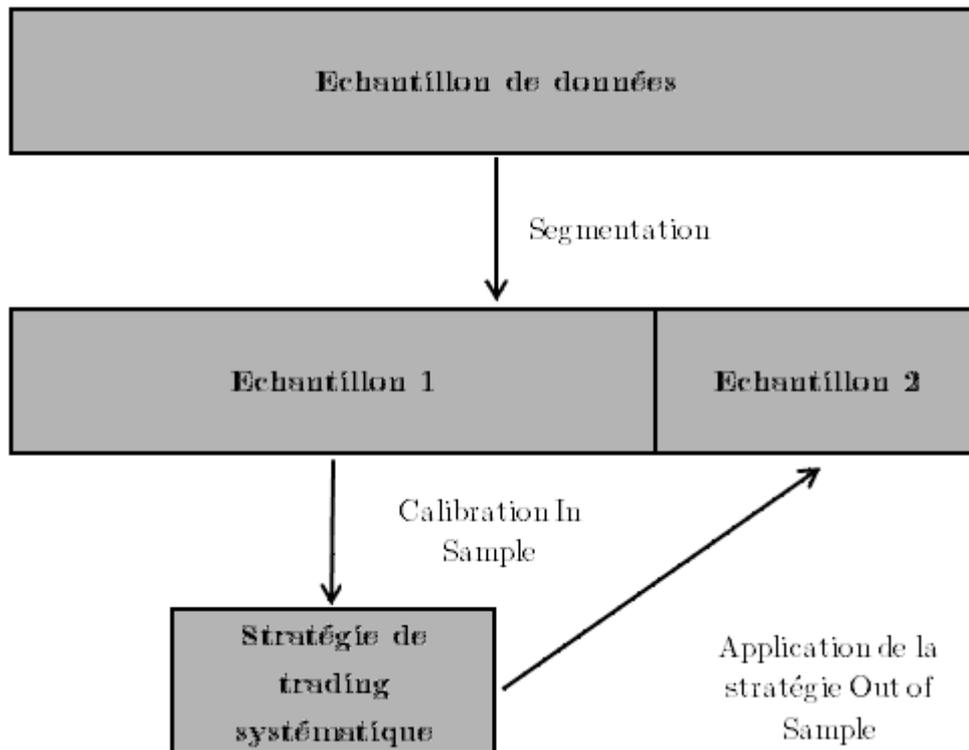


Figure 13 : Méthode In Sample / Out of Sample

5. Synthèse

Après avoir envisagé l'ensemble des outils permettant d'analyser une stratégie de *trading* systématique, nous pouvons en déduire les éléments suivants :

La construction de stratégies est possible

- Du fait de la non-normalité des rendements, nous avons observé, grâce au graphique *quantile quantile* que les queues de distributions étaient épaisses. Cette non-normalité est confirmée ensuite par le test de *Shapiro Wilk*.
- Du fait que l'indépendance des rendements n'est pas démontrée ; il existe même une dépendance forte au niveau des rendements au carré.

Nous sommes capables d'évaluer une stratégie

- En prenant en considération des rendements cumulés au travers d'une *Equity Curve* dont la représentation est très parlante pour l'investisseur.
- En procédant au calcul du *Maximum Drawdown* qui permettra d'envisager le risque de perte maximale.
- En calculant le ratio de *Sharpe* et le *K-ratio* qui rendent compte du rendement d'une stratégie en fonction du risque encouru. Le ratio de *Sharpe* sera déterminé à l'aide de la volatilité dite de *Garman Klass*, dont la convergence est très rapide.
- En s'assurant de sa possibilité à se reproduire sur différents échantillons : construction *In Sample* et test *Out of Sample*.
-

- ✓ En tenant compte de ces éléments nous allons construire une stratégie de *trading* systématique. Puis nous évaluerons son potentiel.

III. Construction de stratégies de *trading* systématique

A. Systèmes de *trading* basés sur une évolution tendancielle

L'analyse tendancielle est à la base de nombreux programmes de *trading* permettant d'obtenir des résultats satisfaisants. Il existe deux types de méthodes fondées sur l'évolution tendancielle :

- Le *Trend following*, système dans lequel l'investisseur prend des positions dans le sens de la tendance.
- Le *Contrarian*, prise de position dans le sens opposé à la tendance.

Par conséquent, l'identification de cette tendance a un caractère primordial.

Le succès d'un tel système de *trading* réside, d'une part, dans le fait que les évolutions long-terme du marché prennent en compte des facteurs macroéconomiques eux-mêmes caractérisés par une évolution progressive et tendancielle (cycle économique).

Les décisions gouvernementales vont avoir un impact non négligeable sur l'évolution des taux d'intérêt, mais également sur le commerce international.

D'autre part, comme nous l'avons étudié dans la première partie, les rendements ne sont pas régis par une distribution normale. On peut ainsi noter l'apparition de queues de distribution épaisses reflétant une quantité importante de prix suivant des mouvements directionnels.

1. Mise en évidence de signaux d'Achats et de Ventes basiques

Pour cela nous avons besoin de définir la notion de droite de tendance. C'est une courbe permettant de déterminer le sens d'évolution d'un actif, d'une devise, ou bien du marché, tout en faisant abstraction des changements transitoires (bruits).

a) Croisement entre le prix et la droite de tendance

Le fait que les prix coupent la droite de tendance est à l'origine d'un des signaux d'intervention les plus basiques :

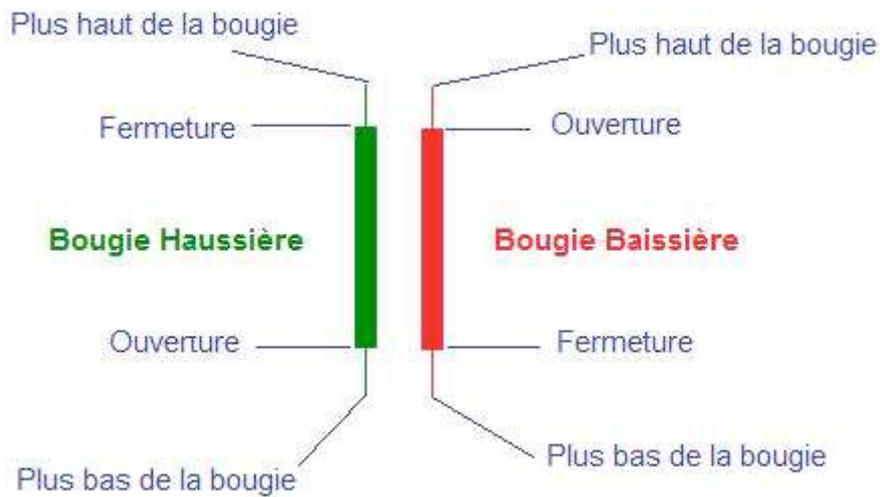
- Achat lorsque le prix augmente et croise la droite
- Vente lorsque le prix croise la droite en décroissant

Ce système semble, il est vrai, extrêmement simple ; cependant, comme nous pouvons le voir sur la figure suivante, le croisement se produit en cours de journée alors que les cours ne sont pas fixés. L'investisseur devra ainsi faire face à de nombreux retournements de signaux, ou bien choisir de n'interpréter que les cours de clôture.



Figure 14 : Détermination d'un signal d'intervention

Sur le graphique précédent, la droite de tendance apparaît en bleu et les cours apparaissent à travers une représentation en *candlestick*. Celle-ci permet de considérer l'évolution journalière :



b) *Sens de variation de la droite de tendance*

L'évolution de la droite de tendance peut également être utilisée comme signal d'intervention :

- Achat lorsque le sens de variation devient positif
- Vente lorsque le sens de variation devient négatif
-



Figure 15 : Détermination d'un signal d'intervention

c) *Avantages et inconvénients des deux méthodes*

Chacune de ces deux méthodes d'intervention possède à la fois des avantages et des inconvénients. Lorsque l'on se focalise sur le sens de variation de la droite de tendance on perd de la justesse au niveau du timing. On peut ainsi noter sur la figure précédente que les cours croisent la droite de tendance environ deux semaines avant le point de retournement. Cependant cette méthode d'intervention permet la détermination de signaux beaucoup plus forts. Un seul signal apparaît sur l'EUR/USD lorsque le sens de variation de la droite de tendance devient positif alors que quatre signaux relatifs aux croisements apparaissent entre le 20/08/2010 et le 31/08/2010.

2. Détermination d'une droite de tendance

Avant toute chose il est indispensable de déterminer une droite de tendance à partir de laquelle nous construirons les différents signaux d'interventions. Cette droite de tendance sera représentée au travers de la moyenne mobile simple.

a) *Moyenne mobile simple*

La méthode la plus simple consiste à calculer la moyenne mobile des cours sur une période plus ou moins longue. C'est une méthode de lissage, permettant de gommer les évolutions peu significatives ou transitoires. Elle est recalculée de manière continue, en utilisant à chaque calcul un sous-ensemble d'éléments dans lequel un nouvel élément remplace le plus ancien ou s'ajoute au sous-ensemble.

$$\bar{x}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N x_{n-k}$$

Avec N : période la moyenne mobile

Nous allons utiliser les cours de l'EUR/USD afin de calculer des moyennes mobiles de périodes différentes. Ceci nous permettra de mesurer l'impact de ce paramètre vis-à-vis à la fois, de la capacité de lissage et de la capacité prédictive.

Moyenne Mobile Bleue	5 jours
Moyenne Mobile Rouge	20 jours
Moyenne Mobile Verte	60 jours



Figure 16 : Présentation de moyennes mobiles en fonction de leurs périodes

Nous pouvons noter que la période a un énorme impact sur la moyenne mobile. En effet, une période longue entraînera un lissage important ainsi qu'une lenteur problématique au moment des changements de tendance.

Cette méthode de lissage confère la même importance à chaque valeur quelle que soit son ancienneté. Or, dans un but prédictif, ceci n'est pas réellement judicieux. La moyenne mobile exponentielle et la moyenne mobile pondérée permettent de faire face à ce problème.

b) *Moyenne mobile exponentielle*

La moyenne mobile exponentielle utilise une pondération des termes qui décroît exponentiellement. Le poids de chaque valeur participant à la moyenne est d'un facteur plus grand que la valeur qui le précède dans la série, ce qui donne plus d'importance aux observations les plus récentes, sans supprimer complètement l'effet des valeurs les plus anciennes.

Elle se calcule de manière récursive :

$$EMA_t = EMA_{t-1} + \alpha * (P_t - EMA_{t-1})$$

Avec : EMA la moyenne mobile exponentielle, P le prix

α représente le degré de décroissance des poids. Il peut par exemple être exprimé en fonction de la période (N), on aura :

$$\alpha = \frac{2}{N + 1}$$

$$EMA_t = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^n P_{t-n}$$

La figure ci-dessous permet de comparer les deux types de moyennes mobiles : simple (bleu) et exponentielle (rouge).



Figure 17 : Comparaison entre une moyenne mobile simple et une moyenne mobile exponentielle

La moyenne mobile exponentielle permet de gagner en précision au niveau du timing, lorsque le prix évolue très fortement celui-ci est mieux reflété par la droite de tendance. Le *lag* reste, cependant, très pénalisant. On peut ainsi noter que le retournement à la baisse opéré par l'EUR/USD mi-Décembre ne sera ressenti que début Janvier, soit un retard d'environ trois semaines.

L'objectif serait de développer une droite de tendance réduisant le *lag* au maximum. Pour cela nous allons appliquer l'extrapolation de *Richardson* à la moyenne mobile simple.

c) *Application de l'extrapolation de Richardson*

Afin d'améliorer la moyenne mobile, nous partons d'un constat simple : si nous calculons la moyenne simple d'une série nous obtenons, comme nous venons de le voir dans les paragraphes précédents, un résultat assez éloigné de la dernière valeur.

Prenons par exemple une série de 6 chiffres :

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

Sa moyenne est égale à 3.5 et son erreur relative est donc de 2.5.

De façon à minimiser cette erreur, nous nous proposons d'appliquer l'extrapolation de *Richardson*. C'est une technique d'accélération de convergence qui est notamment utilisée pour définir une méthode numérique d'intégration : la méthode de *Romberg* (accélération de la méthode des trapèzes).

Principe :²

On suppose que la quantité inconnue A peut être approchée par une fonction $A(h)$ avec une convergence d'ordre n en h .

$$A - A(h) = a_n h^n + O(h^n)$$

Avec a_n un coefficient inconnu différent de 0 et $m > n$.

Le principe d'extrapolation consiste à supprimer le terme en h^n par combinaison linéaire de deux valeurs de $A(h)$, calculés avec des h différents : par exemple $A(h)$ et $A(h/2)$. On obtient alors :

$$R(h) = \frac{A\left(\frac{h}{2}\right) - A(h)}{2^n - 1} + A\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2^n A\left(\frac{h}{2}\right) - A(h)}{2^n - 1}$$

$R(h)$ est l'extrapolé de Richardson qui approche A à l'ordre $m > n$ en h . Le facteur 2 peut être remplacé par n'importe quel autre facteur.

Nous nous sommes basés sur cette méthode d'extrapolation afin d'accélérer la convergence de la moyenne mobile simple. Pour cela nous appliquerons la formule suivante :

$$2 * MoyenneMobile(t/2) - MoyenneMobile(t)$$

Avec t : période de la moyenne mobile.

Nous obtenons ainsi un résultat égal à 6.5.

² Un exemple de calcul d'intégrale basé sur l'extrapolation de Richardson est présenté dans la partie B de l'annexe

Des recherches nous ont amené à découvrir une moyenne mobile construite sur la base de cet algorithme, il s'agit de la moyenne mobile de *Hull*. Sa construction est un peu plus complexe.

En effet, d'une part, au lieu d'utiliser des moyennes mobiles simples on utilisera des moyennes mobiles pondérées. Cette technique consiste, comme pour la moyenne mobile exponentielle, à donner plus d'importance aux données les plus récentes. Pour cela, les poids de chaque terme décroissent linéairement, le plus récent ayant un poids N et le plus ancien (Nième) ayant un poids unitaire. En voici la formule :

$$\bar{C}_N = \frac{N * C_N + (N - 1) * C_{N-1} + \dots + 2 * C_2 + C_1}{N + N - 1 + \dots + 2 + 1}$$

Avec **C** : le cours

D'autre part on introduira comme facteur de lissage la racine carré de la période choisie.

Série	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Pondérations	1	4	9	16	25	36						
Moyennes pondérées (A)						4.8	5.8	6.8	7.8	8.8	9.8	10.8
Pondérations				1	4	9						
Moyennes pondérées (B)						5.6	6.6	7.6	8.6	9.6	10.6	11.6
2*B-A						6.3	7.3	8.3	9.3	10.3	11.3	12.3
Moyenne de Hull							6.8	7.8	8.8	9.8	11	12

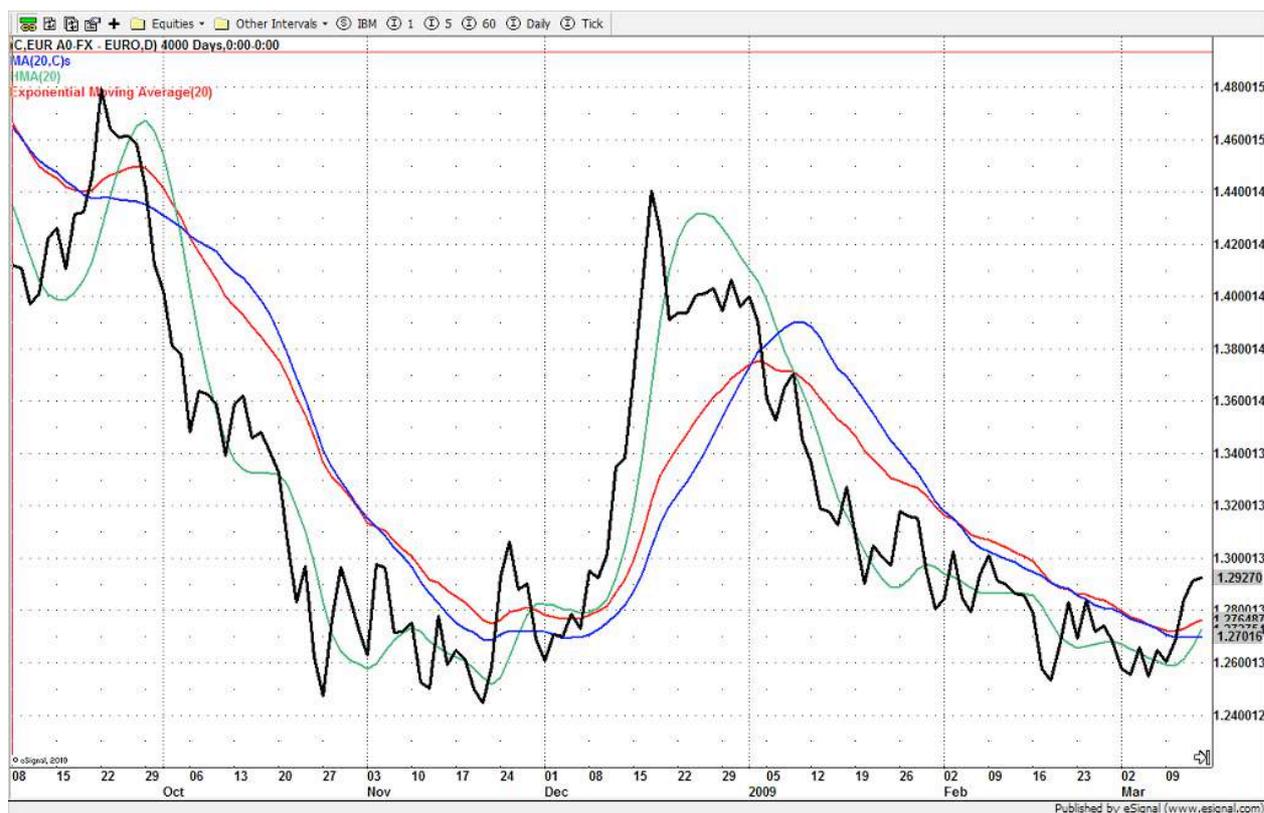


Figure 18 : Moyenne mobile de Hull

La moyenne mobile de Hull est représentée en vert, la simple apparaît en bleue et l'exponentielle en rouge.

Le retournement baissier se produisant mi-décembre sera cette fois ci ressenti avec seulement 2 jours de retard pour un système basé sur le croisement des cours et de la droite de tendance. On a ainsi réussi à construire une moyenne mobile capable de capter les tendances avec une vivacité plus forte et qui possède malgré tout une capacité de lissage intéressante. On peut pourtant noter que cette vivacité va avoir un impact plutôt négatif sur les longues phases tendanciennes. Les deux phases de baisse ressenties entre Septembre et Novembre 2008 et Janvier et Mars 2009 seront certes captées plus tôt mais seront pénalisées par une quantité de *trades* aller-retour.

Par conséquent, la moyenne mobile de *Hull* semble intéressante dans l'optique d'une prise de tendance. Néanmoins afin de pouvoir tirer de véritables conclusions, nous devons étudier ces signaux de manière plus rigoureuse ; il serait, effectivement, anormal de conclure à l'aide de simples observations graphiques.

Ne disposant pas d'outils satisfaisants nous permettant l'étude d'un signal d'intervention, nous avons dû créer notre propre outil de simulation de stratégie de *trading* systématique. Celui-ci a été réalisé sous VBA et permet à l'utilisateur de créer son propre système d'investissements, appliqué à une ou plusieurs devises, à partir d'une liste d'indicateurs.

Il permet également de comprendre les forces et faiblesses des différentes stratégies à travers une évaluation du signal en fonction d'un horizon de temps, puis en fonction de la forme du marché.

- ✓ L'ensemble de nos interventions sont réalisées aux cours *Bid/Ask* afin de prendre en considération les conditions les plus désavantageuses, de plus nous intégrons toujours des frais de transactions afin d'être le plus proche possible de la réalité (ces frais sont variables d'un opérateur à l'autre en fonction de son importance sur le marché).

3. Evaluation brute du signal

L'objectif est de déterminer de manière robuste quel est le meilleur signal d'entrée entre la moyenne mobile et la moyenne mobile de *Hull*. Pour cela nous avons étudié, à partir d'un portefeuille ³constitué des devises du G10, la moyenne des rendements *mark to market* à différents horizons (1 barre, 2 barres, ...).

Ce test sera réalisé dans un premier temps pour un croisement entre le cours et la droite de tendance (*cross*), puis pour un *swing* de cette même droite de tendance.

Cross :

Nous affichons, les résultats relatifs à l'ensemble des devises du G10 pour une moyenne mobile simple 20 jours puis pour une moyenne mobile de *Hull* 20 jours :

³ Le portefeuille est détaillé dans la partie C des annexes

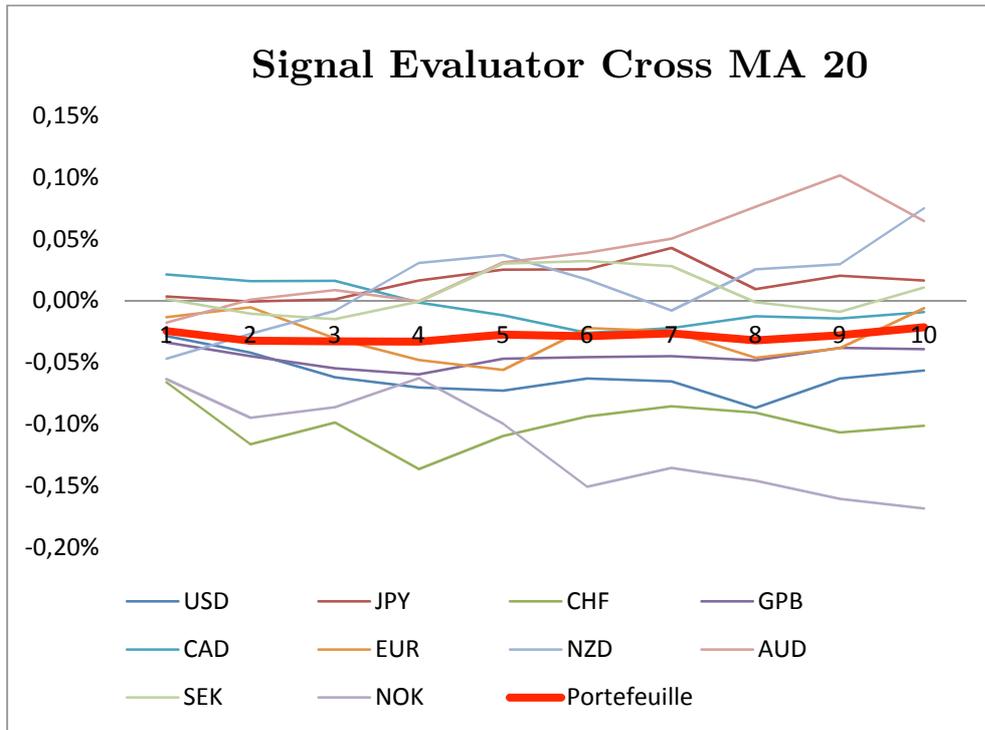


Figure 19 : Etude d'un signal cross MA 20

On note une sous-performance pour les devises relatives à la couronne norvégienne (*NOK*) et au franc suisse (*CHF*).

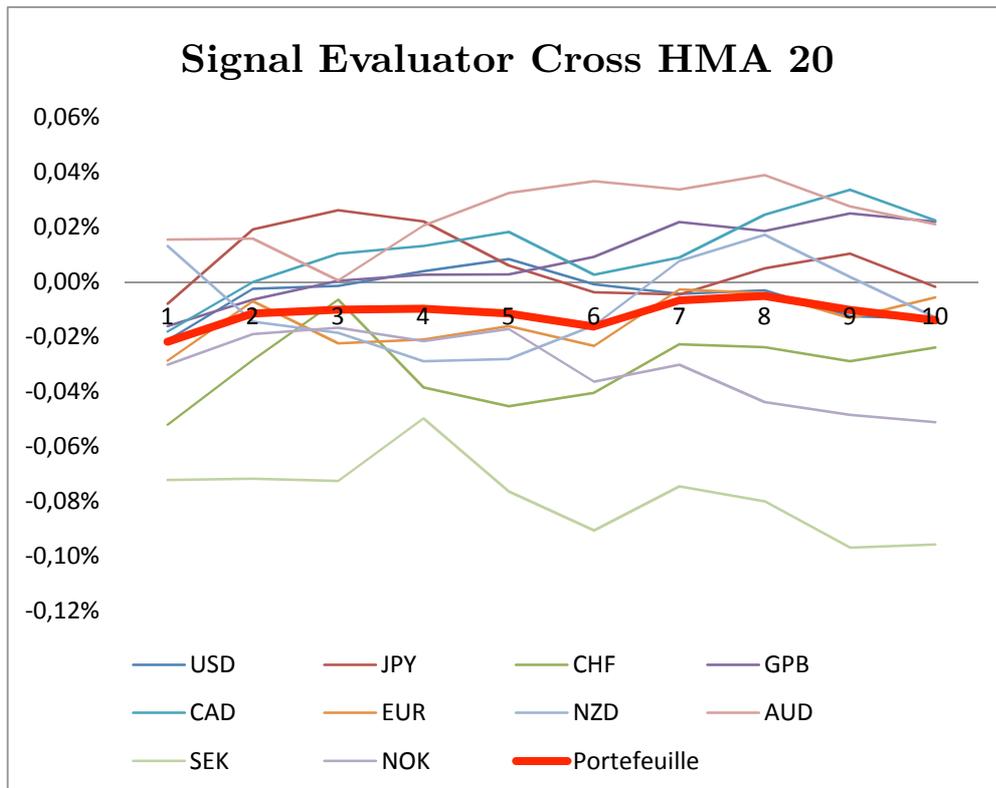


Figure 20 : Etude d'un signal cross HMA 20

Les parités relatives à la couronne suédoise (*SEK*) apparaissent clairement mauvaises dans le cadre de signaux d'interventions construits à partir d'un cross de moyenne mobile de *Hull* 20 jours.

Le graphique suivant nous permet de comparer les signaux générés d'une part par le *cross* d'une moyenne mobile 20 jours (rouge) et d'autre part par le *cross* d'une moyenne mobile de *Hull* 20 jours (bleue).

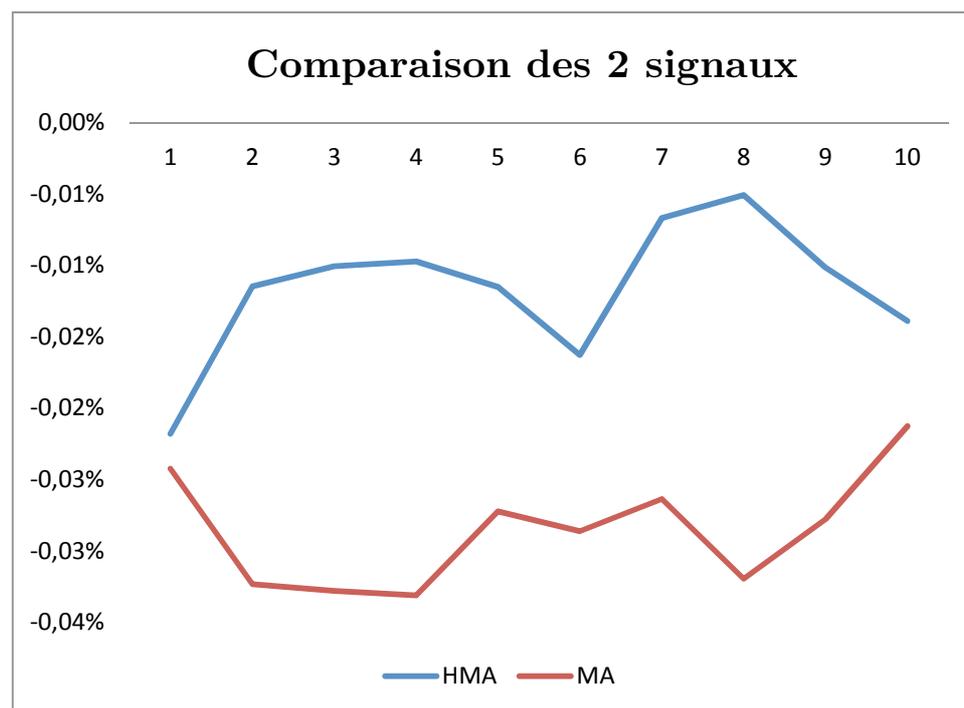


Figure 21 : Comparaison MA vs HMA

Bars	1	3	5	7	9
HMA	-0.02%	-0.01%	-0.01%	-0.01%	-0.01%
MA	-0.02%	-0.03%	-0.03%	-0.03%	-0.03%

Swing :

Comme précédemment, nous affichons les résultats relatifs à l'ensemble des devises du G10 pour une moyenne mobile simple 20 jours puis pour une moyenne mobile de *Hull* 20 jours.

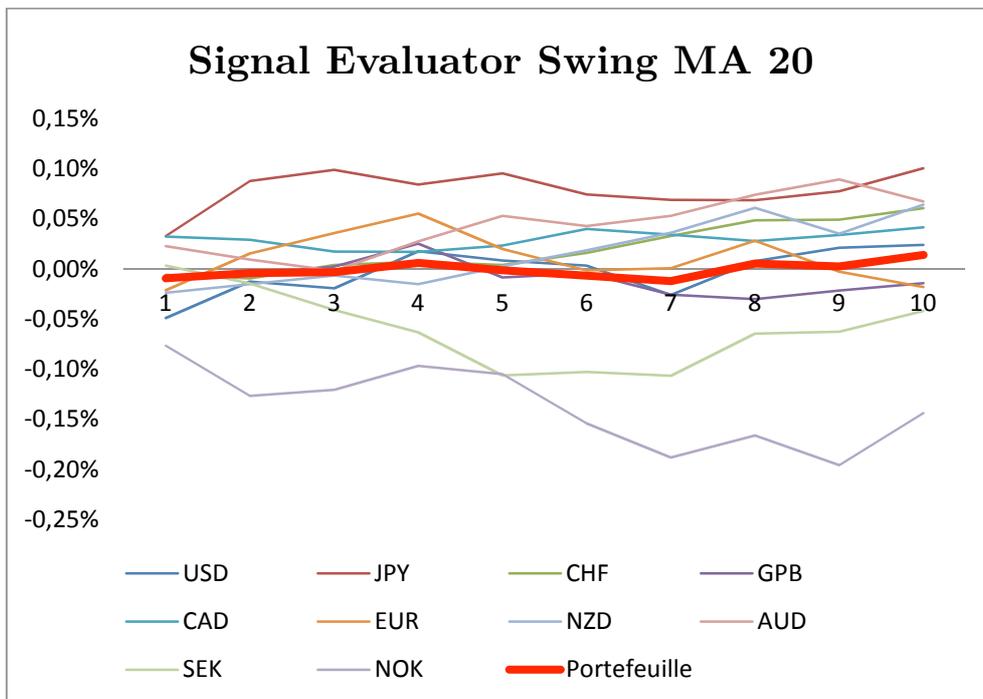


Figure 22 : Etude d'un signal swing MA 20

On peut observer une sous-performance des devises basées sur la *NOK* et la *SEK* et une surperformance du yen (*JPY*).

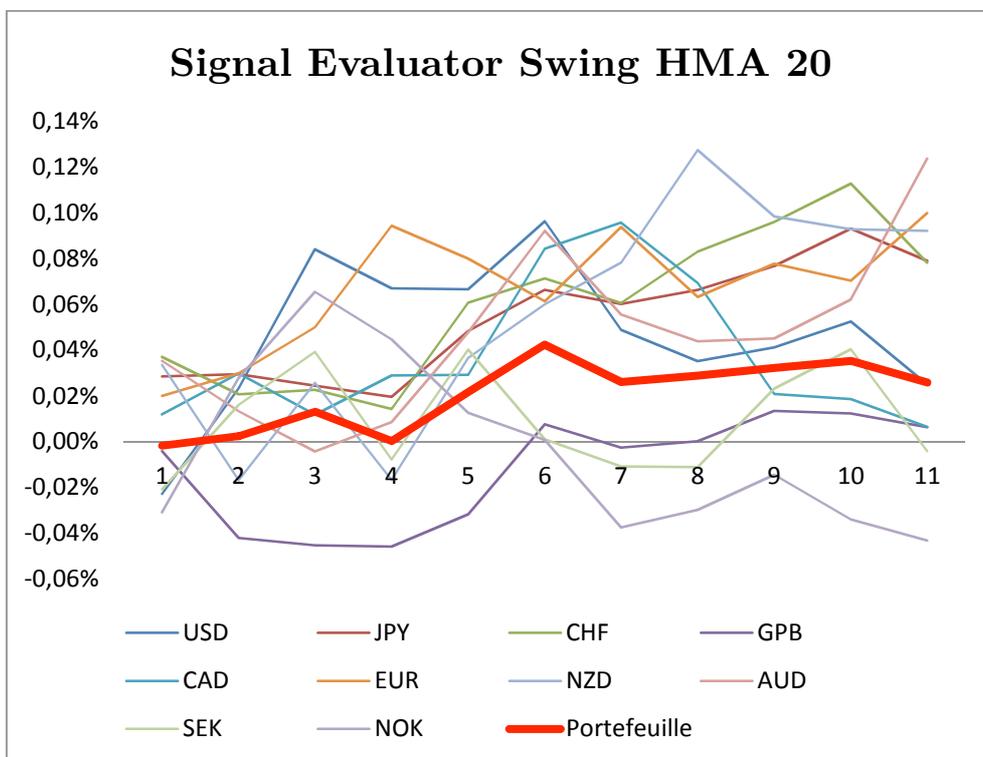


Figure 23 : Etude d'un signal swing HMA 20

Les résultats sont globalement homogènes, mise à part le Sterling (*GBP*) dont les rendements sont décevants entre 1 et 6 barres.

Afin de déterminer quel est le meilleur signal entre le *swing* de moyenne mobile de *Hull* et celui de moyenne mobile simple, nous allons faire apparaître sur un même graphique leurs moyennes calculées à partir de l'ensemble des devises du G10.

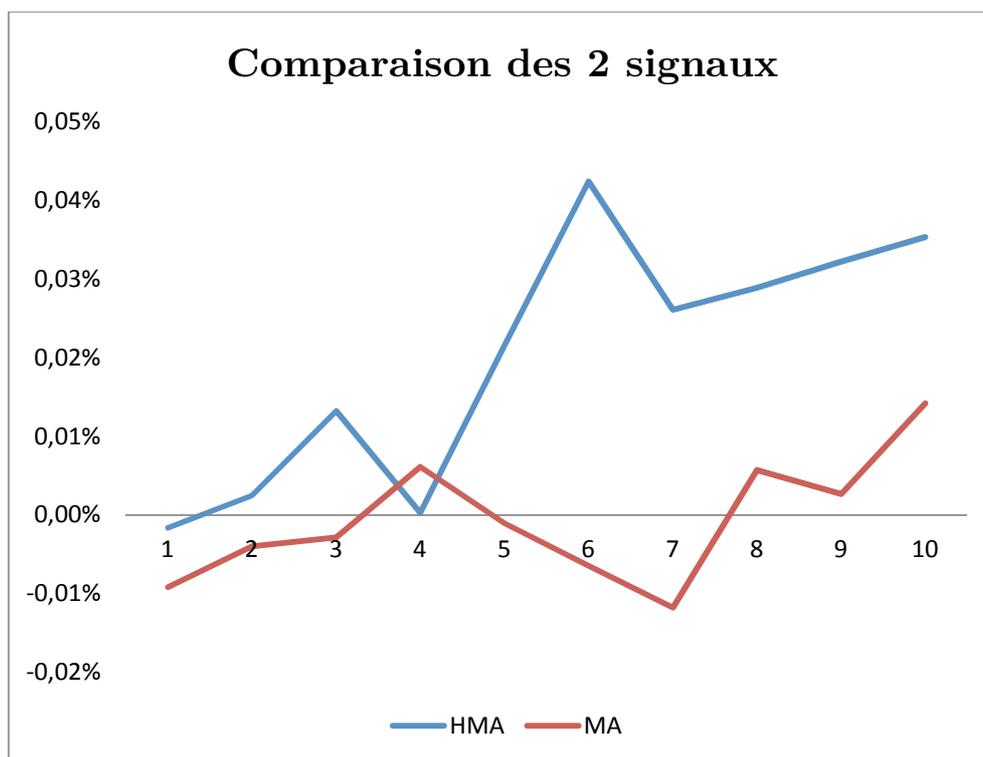


Figure 24 : Comparaison signaux MA vs HMA

Bars	1	3	5	7	9
HMA	0.00%	0.01%	0.02%	0.03%	0.03%
MA	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.01%	0.00%

Hormis une légère décroissance entre 3 et 4 barres, la moyenne mobile de *Hull* est plus performante que la moyenne mobile simple. Les rendements obtenus sont malheureusement trop faibles et engendreront des stratégies peu convaincantes.

- ✓ Nous allons affiner cette étude afin d'envisager au mieux les caractéristiques de ce nouvel indicateur.

4. Décomposition des *trades* en fonction du marché

Nous avons pour objectif d'étudier les rendements relatifs aux différents signaux d'intervention en fonction de la forme du marché. Pour cela il faut noter que l'évolution du marché financier peut être décomposée en trois phases :

- Tendance haussière
- Tendance baissière
- Phase de range

Une phase de range est une période au cours de laquelle le marché se stabilise, il n'y a pas de véritable sens d'évolution hormis des changements transitoires.

Nous avons réalisé un outil permettant de classer les rendements des *trades* en fonction d'un coefficient de volatilité du marché. Pour caractériser ce coefficient nous avons choisi de calculer un ratio de volatilité (*CoefVol*) celui-ci s'exprime de la manière suivante :

$$CoefVol = \frac{\max_{i \in T} High(i) - \min_{i \in T} Low(i)}{\min_{i \in T} Low(i)}$$

Avec **T** : la durée correspondant au *trade* sur lequel le coefficient est calculé.

Nous pouvons ainsi étudier les rendements moyens correspondants aux différentes phases de marché en fonction de signaux d'interventions basés tout d'abord sur un croisement entre le cours et la droite de tendance puis sur un *swing* de cette même droite tendancielle. Cette étude est ici aussi réalisée pour l'ensemble des devises du G10. Les résultats obtenus pour la moyenne mobile simple et pour la moyenne mobile de *Hull* apparaissent au travers des deux graphiques suivants :

Cross :

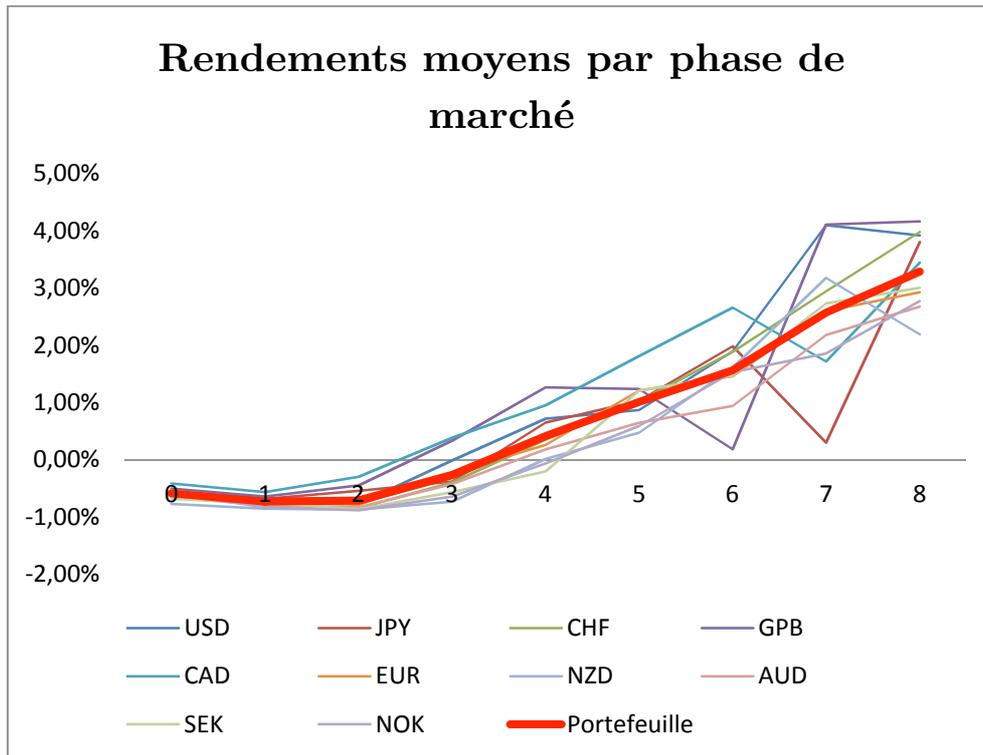


Figure 25 : Signal cross MA en fonction de la phase du marché

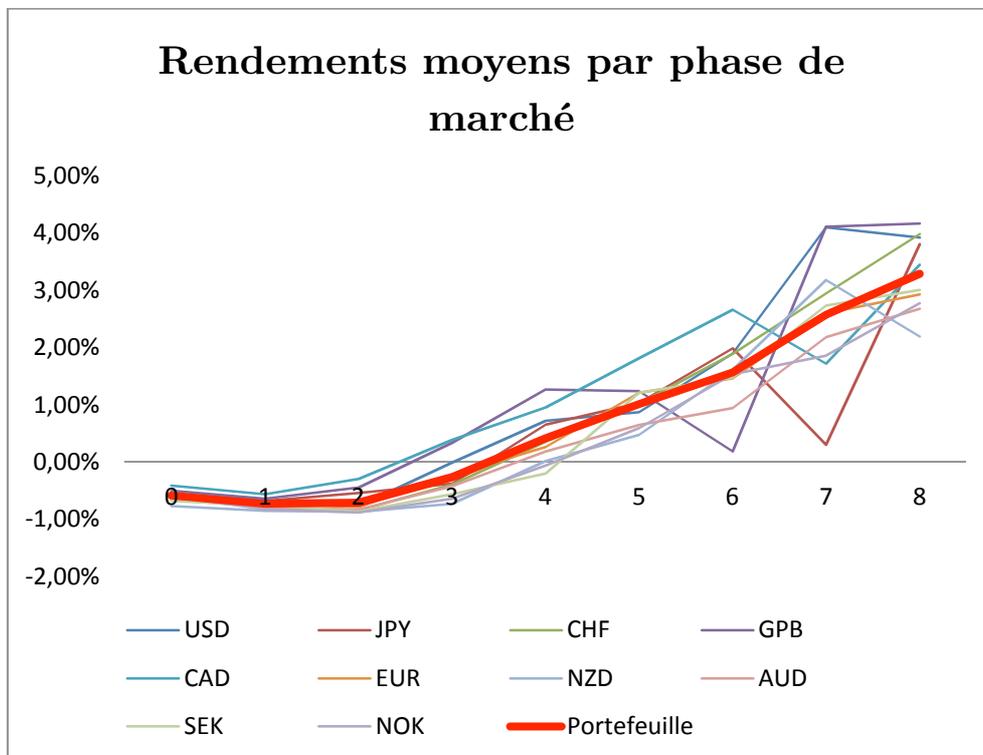


Figure 26 : Signal cross HMA en fonction de la phase du marché

Les résultats obtenus sont homogènes pour l'ensemble des devises. Le graphique suivant nous permet de comparer le *cross* de moyenne mobile simple (courbe rouge) et le *cross* de moyenne mobile de *Hull* (courbe bleue), tous deux mis en place sur une période de 20 jours.

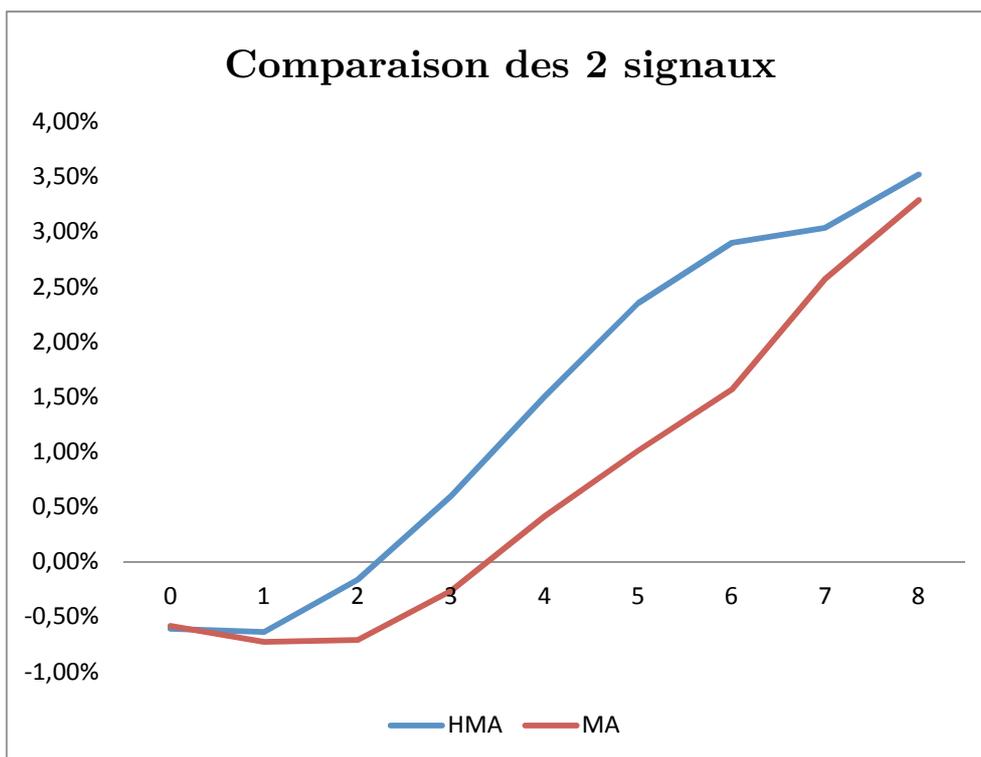


Figure 27 : Comparaison MA vs HMA

En période de range, on observe peu de différence entre les signaux d'interventions qu'ils soient basés sur une moyenne mobile simple ou de *Hull*. Cependant, l'amélioration relative à la *HMA* se fait ressentir dans des marchés qui évoluent en tendance.

Nous allons réaliser la même étude pour des signaux basés sur un swing.

Swing :

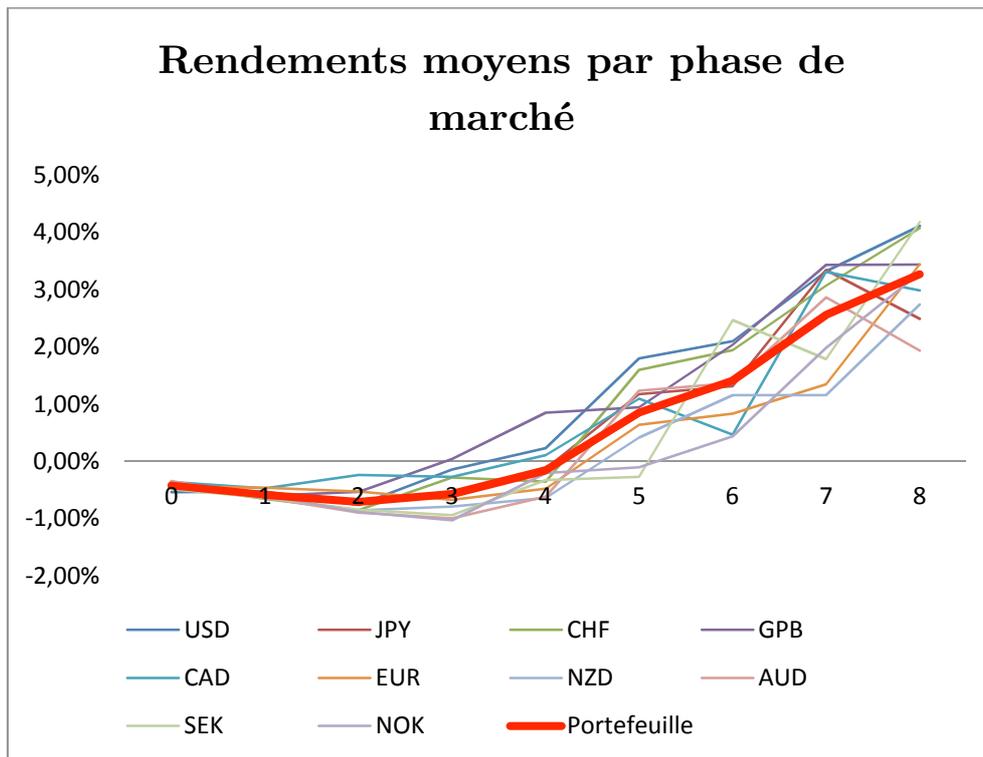


Figure 28 : Signal swing MA en fonction de la phase du marché

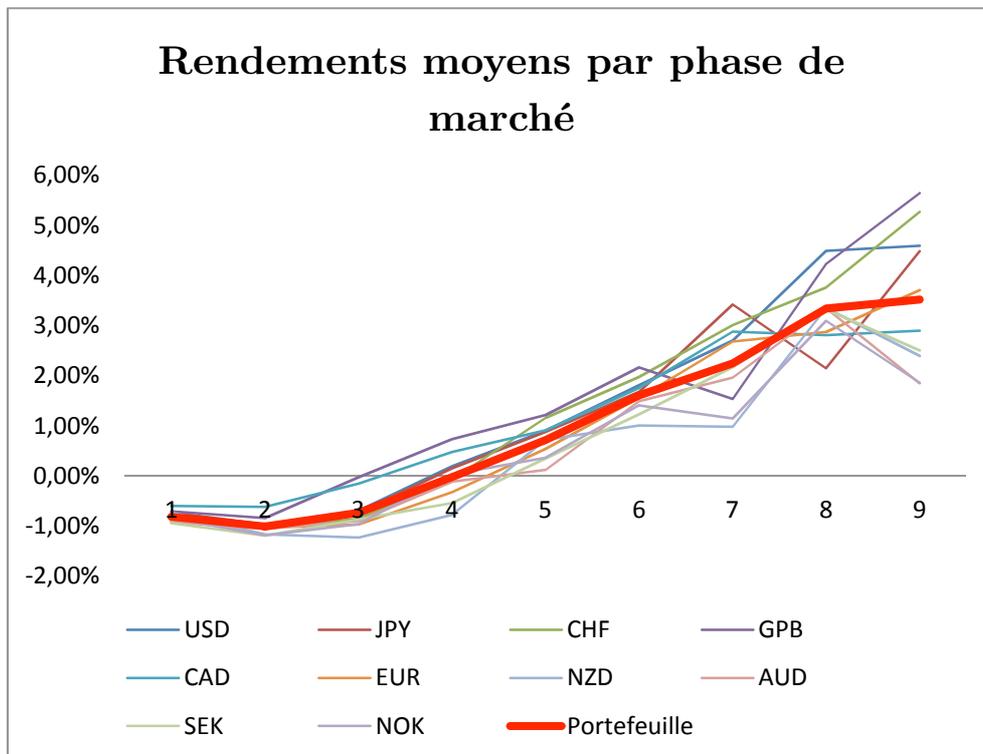


Figure 29 : Signal swing HMA en fonction de la phase du marché

Comme précédemment, il apparaît peu de différence entre les différentes devises.

Le graphique suivant nous permet d'analyser conjointement les signaux *swings* relatifs à la moyenne mobile de *Hull* (bleue) et à la moyenne mobile simple (rouge).

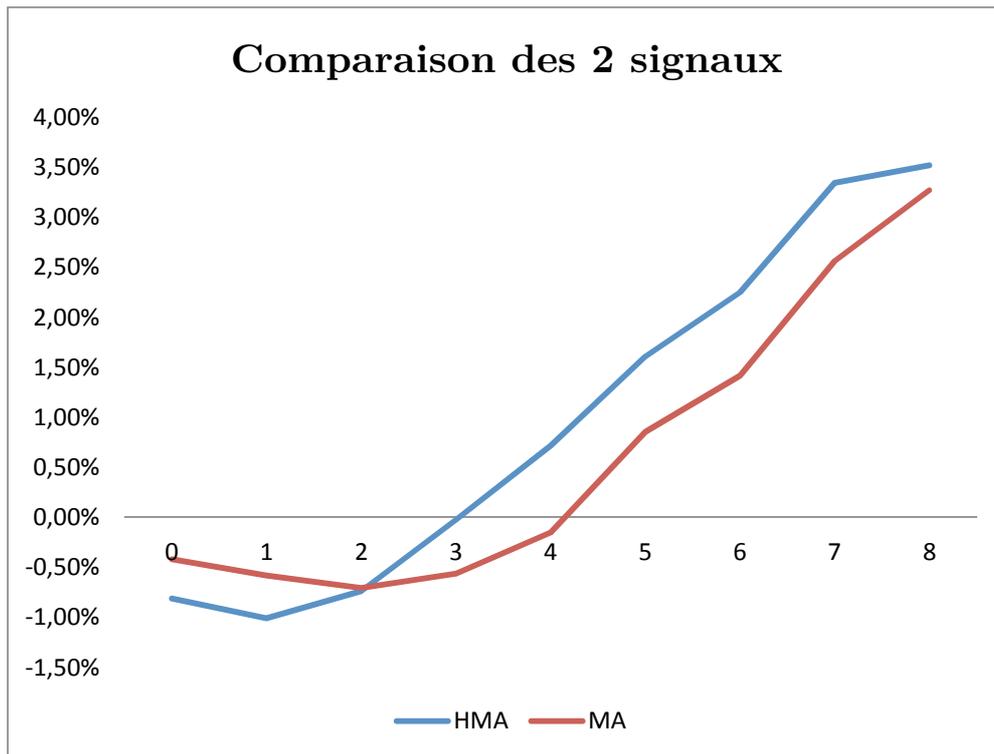


Figure 30 : Comparaison MA vs HMA

On note une légère sous-performance dans les phases de *range* pour les signaux basés sur la moyenne mobile de *Hull*. Cependant, comme pour le *cross*, ils deviennent meilleurs dans des phases de tendances.

Afin de déterminer quel type de signal est le plus performant, nous allons représenter sur un même graphique les résultats précédemment obtenus pour un *swing* de moyenne mobile de *Hull* 10 jours et pour un croisement entre cette dernière et le cours.

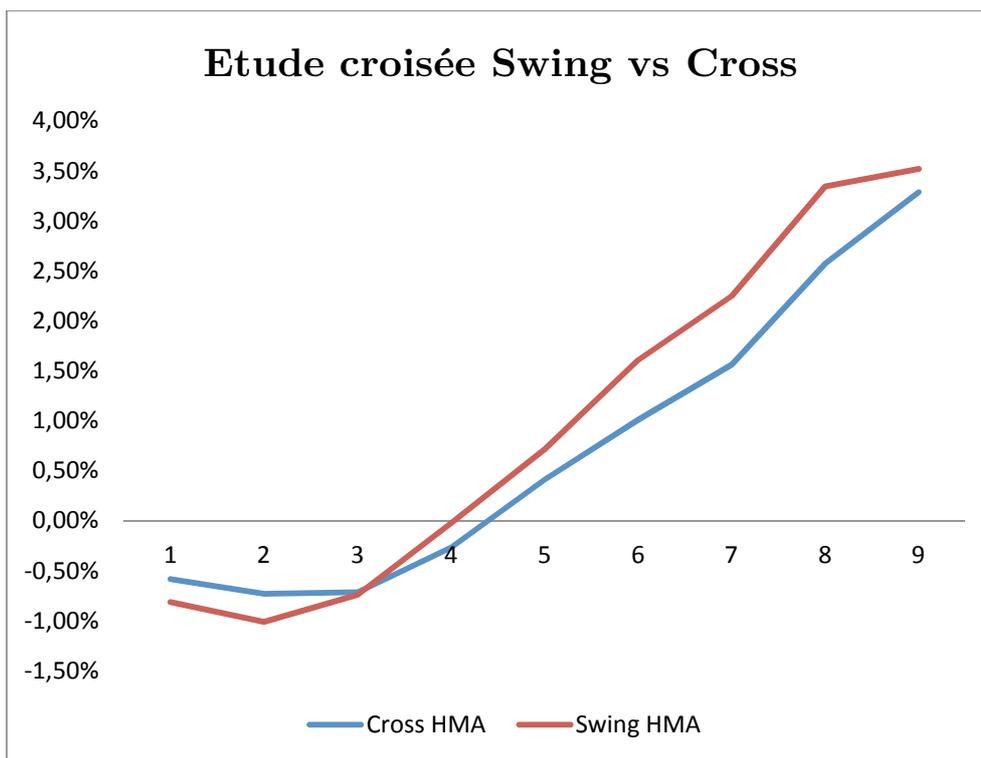


Figure 31 : Comparaison Swing vs Cross

Pour des *trades* rapides dans des marchés volatils la règle utilisant le croisement entre le cours et la droite de tendance semble nettement plus intéressante. Au contraire, pour des tendances long terme les signaux utilisant le sens d'évolution de la droite de tendance s'avèrent plus satisfaisants.

- ✓ Nous venons d'améliorer un indicateur basique, la moyenne mobile simple, en le rendant plus réactif. Nous allons maintenant développer un exemple de *backtest* basé sur ce nouvel indicateur, nous permettant de visualiser cette amélioration.
Nous présentons maintenant un *backtest* afin d'illustrer nos propos.

5. Backtest

Ces systèmes de *trading* simples sont basés sur le sens de variation de la moyenne mobile simple et sur le sens de variation de la moyenne mobile de *Hull*. Ceux-ci sont appliqués au GBP/USD sur une période de 10 ans.

Nous décidons de développer la stratégie suivante :

Caractéristiques de la stratégie	
Devise	GBP/USD
Durée	1997/2008
Méthode	<i>Sens de variation</i>
Période	20 jours
Intervalle	<i>Journalier</i>
Cours	Clôture

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Statistiques de différents systèmes					
<i>Systèmes</i>	<i>Trades</i>	<i>% Win</i>	<i>Profit Annuel</i>	<i>Ratio Sharpe</i>	<i>K-ratio</i>
<i>Moyenne Mobile</i>	314	30%	-0.75%	-0.03	-0.03
<i>Moyenne Mobile de Hull</i>	341	37%	2.16%	0.25	0.06

On peut noter que les résultats les plus satisfaisants sont obtenus pour la moyenne mobile de *Hull*. On obtient en effet un rendement ainsi que des ratios nettement supérieurs à ceux obtenus à partir de la moyenne mobile simple.

Cette amélioration se fait clairement ressentir au travers des deux *equity curve* suivantes :

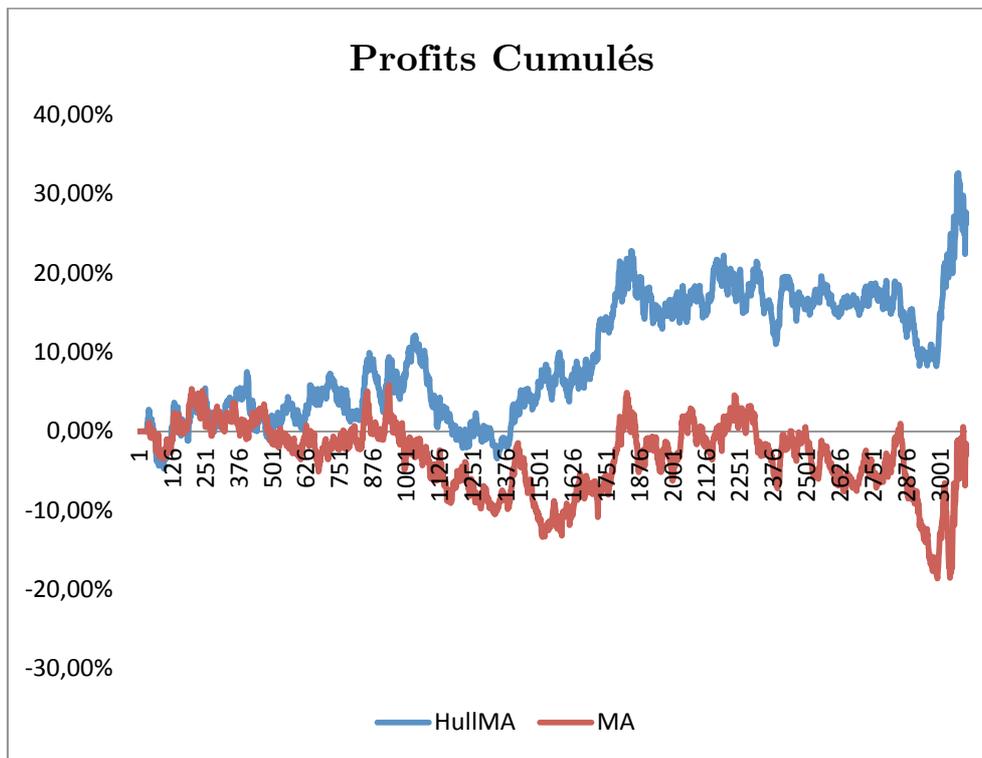


Figure 32 : Profits cumulés de deux stratégies de trading systématique

L'equity curve relative à la moyenne mobile de *Hull* est gagnante. La stratégie rapporte 26.28%. Cependant, ce gain n'est dû qu'à quelques très bons *trades* ; le reste du temps, la stratégie semble plutôt *flat*. De plus, nous devons faire face à un maximum *drawdown* d'environ 13% qui, comparé au rendement de la stratégie, s'avère trop important. Ceci rend la stratégie intraitable.

Ces conclusions se retrouvent aussi dans l'étude des différents ratios. Le Sharpe et le K-ratio sont très faibles, respectivement égaux à 0.25 et 0.06.

Cette relative faiblesse confirme bien les résultats obtenus dans la partie II.3 : *Evaluation brute du signal*. En effet la moyenne mobile de *Hull* est certes meilleure que la moyenne mobile simple mais en l'état actuel des choses son utilisation brute n'est toutefois pas satisfaisante. Ceci s'explique simplement, comme nous pouvons le voir sur le graphique suivant, par la répartition des *trades* en fonction de la phase d'évolution du marché.

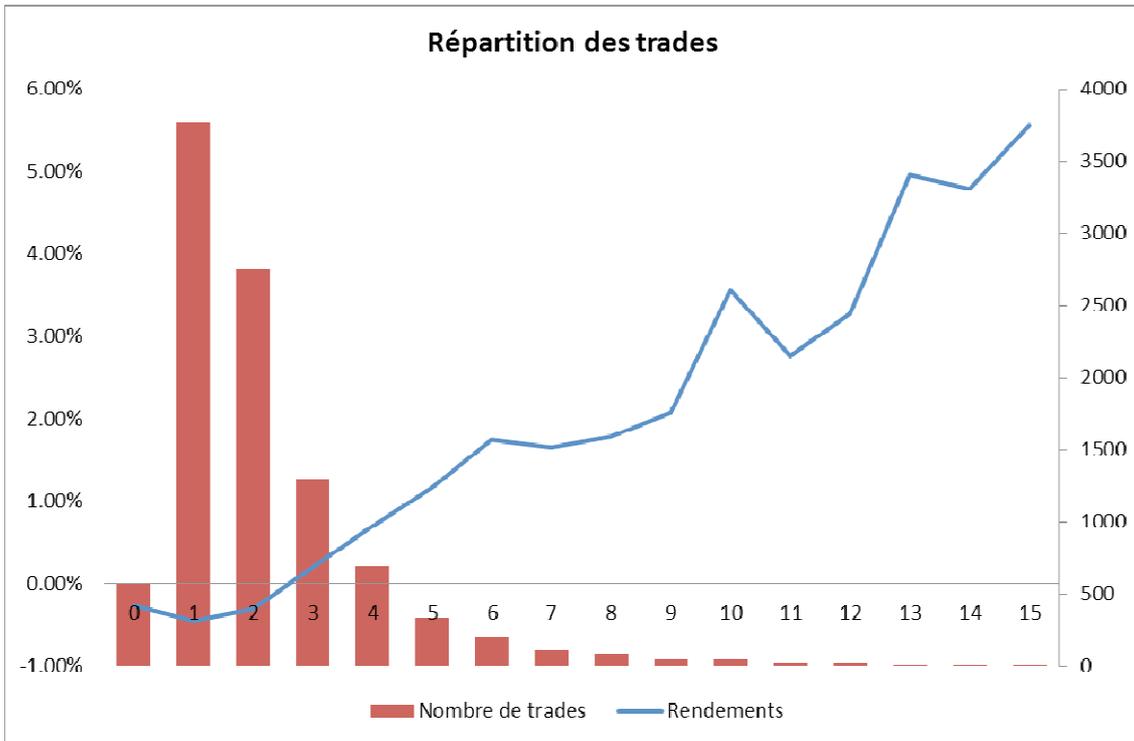


Figure 33 : Répartition des trades en fonction de la phase de marché

Nous pouvons noter que la plupart des *trades* se déroulent en période de range. Or lors de ces périodes les rendements sont négatifs. C'est la répétition de nombreux petits *trades* perdants qui abime la stratégie.

- ✓ Nous allons développer deux stratégies systématiques très courantes permettant de filtrer la quantité de faux signaux d'interventions. Ceci nous permettra de vérifier si la construction d'un système de *trading* robuste est envisageable à l'aide de la *moyenne mobile de Hull*.

B. Comparaison de 2 stratégies de *trading* systématique

Ayant réussi à améliorer la moyenne mobile simple au travers de la moyenne mobile de *Hull*, nous allons maintenant mettre en place 2 stratégies de *trading* établies sur ce nouvel indicateur.

Ces exemples se veulent illustratifs mais ils ne seront en aucun cas exhaustifs. Nous nous focaliserons, en effet, sur une seule devise sur une période comprise entre 2000 et 2012.

1. Présentation du *benchmark*

Nous décidons de réaliser notre étude sur l'USD/JPY, voici son évolution entre 2000 et 2012 :

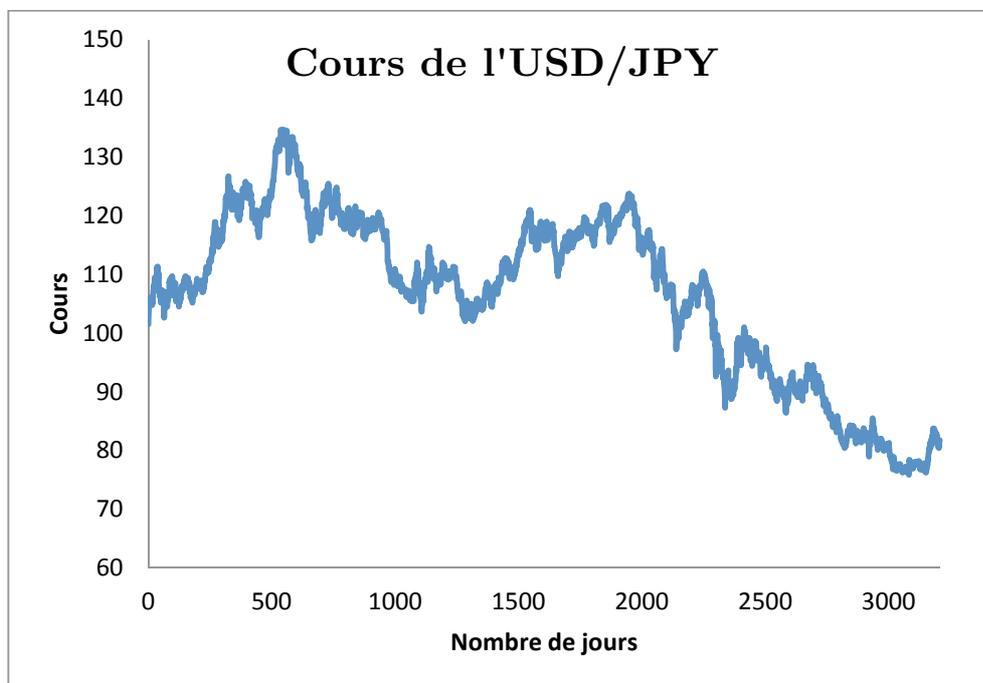


Figure 34 Evolution du cours de l'USD/JPY entre 2000 et 2012

Nous développons pour commencer deux systèmes dits de *buy and hold*. Ils correspondent pour le premier à un achat au 3 Janvier 2000 et à une revente au 31 Décembre 2007 et pour le second à une vente le 2 Janvier 2008 et un rachat le 20 Avril 2012. Ceci ayant pour objectif de rendre compte de la capacité de nos futures stratégies à surperformer le *benchmark*.

	<i>Buy & Hold 1</i>	<i>Buy & Hold 2</i>
<i>Rendement Stratégie</i>	9.60%	37.43%
<i>Rendement moyen annuel</i>	1.20%	9.54%
<i>Ratio de Sharpe</i>	0.02	0.65
<i>Maximum Drawdown</i>	27.67%	13.94%
<i>K-ratio</i>	-7.05E-04	0.08
<i>%Win</i>	50.34%	52.58%
<i>%Loss</i>	49.66%	47.42%

2. Stratégie 1

La première stratégie que nous allons étudier sera construite à partir de 2 moyennes mobiles de *Hull*.

Nous commencerons par présenter le fonctionnement de ce type de système.

a) *Détermination des signaux d'entrées à partir de 2 droites de tendances :*

Il faut utiliser deux types de moyennes mobiles ; une lente, qui permettra de rendre compte de la tendance sous-jacente due par exemple à une politique économique particulière (baisse des taux d'intérêts afin de favoriser la croissance, ...) ; et une plus rapide qui sera utilisée pour le *timing*.

Voici 3 méthodes différentes permettant de déterminer les signaux d'interventions :

• **Méthode 1 :**

Achat lorsque la moyenne mobile rapide croise à la hausse la moyenne mobile lente.

Vente lorsque la moyenne mobile rapide croise à la baisse la moyenne mobile lente.

• **Méthode 2 :**

Achat lorsque le cours passe au-dessus des 2 moyennes mobiles et *Clôture* de la position lorsque le cours repasse en dessous de l'une des 2 moyennes mobiles.

Vente lorsque le cours passe en dessous des 2 moyennes mobiles et *Clôture* de la position lorsque le cours repasse au-dessus de l'une des 2 moyennes mobiles.

• **Méthode 3 :**

Achat lorsque la moyenne mobile rapide repart à la hausse et que la moyenne mobile lente croît.

Vente lorsque la moyenne mobile rapide repart à la baisse et que la moyenne mobile lente décroît.

Clôture de la position lorsque les 2 droites de tendances évoluent dans des sens contraires.

Dans la construction de cette stratégie nous n'appliquerons que la méthode 1, celle-ci est illustrée par le graphique suivant :



Figure 35 : Présentation de la méthode 1

Ce système demande la mise en place de 3 paramètres, 2 sont relatifs aux moyennes mobiles, le dernier correspond au prix sur lequel ces moyennes sont calculées (*Open, High, Low, Close,...*)

b) *Mise en place pratique de la stratégie*

L'objet de ce mémoire n'étant pas l'optimisation de stratégies de trading, la calibration de notre système a été réalisée de manière empirique. Ceci nous a amené à étudier la stratégie de *trading* suivante :

Caractéristiques de la stratégie	
Devise	USD/JPY
Durée	2000-2007
Méthode	<i>Croisement de moyennes mobiles de Hull</i>
Moyenne Mobile Lente	20 jours
Moyenne Mobile Rapide	90 jours
Intervalle	<i>Journalier</i>
Cours	Clôture

Cette stratégie génère 97 *trades* dont voici leurs principales caractéristiques :

Statistiques <i>Trades</i>			
<i>Trades gagnants</i>	45	<i>Trades perdants</i>	52
% <i>Win</i>	46%	% <i>Loss</i>	54%
Gain moyen	1.19%	Perte moyenne	-0.70%

Il apparaît que la proportion de *trades* perdants est supérieure à celle des gagnants. Cependant cette faiblesse est compensée par le fait qu les gains moyens surperforment les pertes moyennes.

A partir de l'études des différents *trades* nous pouvons en déduire une distribution des rendements *mark to market* générés par la stratégie. Nous espérons une asymétrie positive importante résultant de queues de distribution étalées vers la droite.

Distribution des rendements mark to market

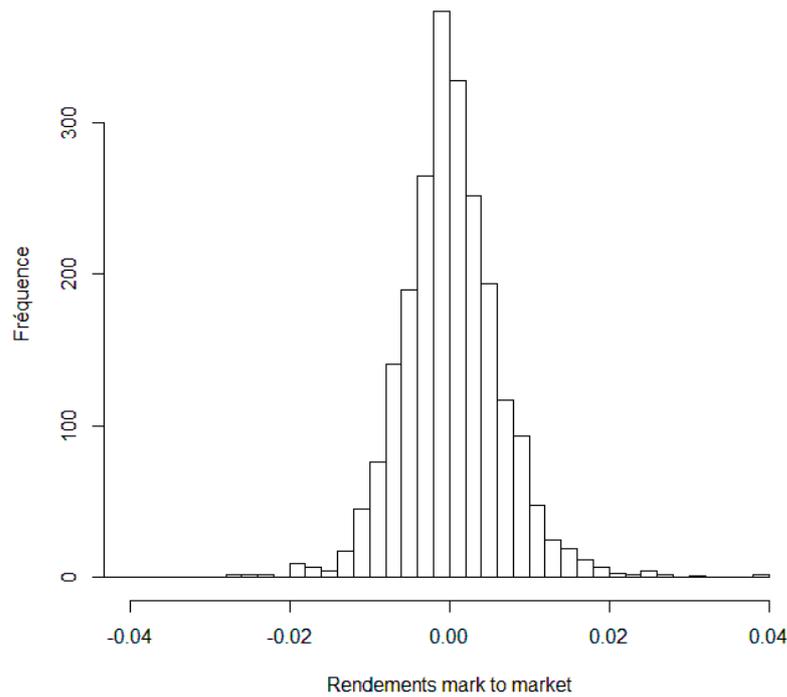


Figure 36 : Distribution des rendements mark to market

Sur l'histogramme précédent il apparaît une légère asymétrie positive. Celle-ci peut être quantifiée à partir des moments d'ordre 3 (*Skewness*) et 4 (*Kurtosis*) :

$$Skewness = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3\right]$$

$$Kurtosis = E\left[\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

<i>Kurtosis</i>	2.77	<i>Skewness</i>	0.39
-----------------	------	-----------------	------

Les rendements *mark to market* dont nous venons d'étudier la distribution sont maintenant présentés sous forme d'*equity curve*. Ceci permet de rendre compte de l'évolution de la stratégie en fonction du temps :

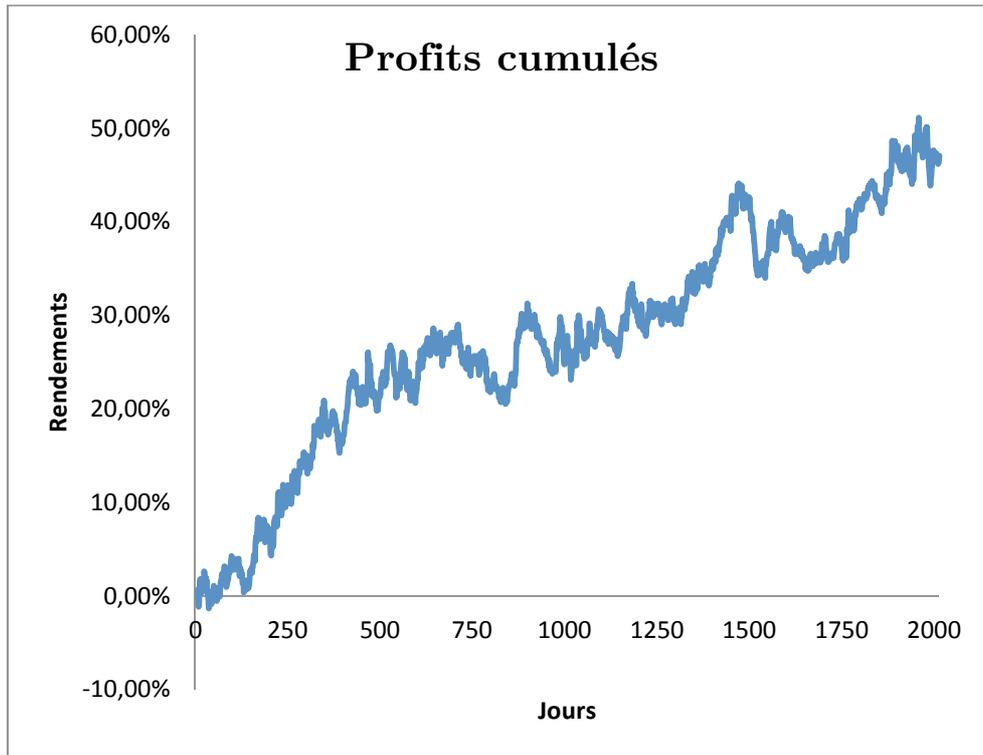


Figure 37 : Equity curve de la stratégie 1

Ce système de *trading* rapporte 47.07% en 8 ans ce qui correspond à un rendement moyen annuel de 5.88%. Celui-ci semble globalement intéressant mais comme nous l'avons étudié dans la première partie de ce mémoire il est nécessaire d'étudier différents ratios avant de s'assurer de la capacité de la stratégie :

Ratios	
Maximum <i>Drawdown</i>	10.01%
Ratio de <i>Sharpe</i>	0.65
<i>K-ratio</i>	0.07

Ces ratios sont intéressants mais malheureusement encore trop faibles. Jusqu'ici nous avons développé des stratégies qualifiées de *Stop & Reverse*, c'est-à-dire, un système dans lequel l'investisseur est perpétuellement soit en position d'achat, soit en position de vente. Nous allons maintenant mettre en place un système de *Stop Loss* afin d'éviter de trop fortes instabilités dans l'évolution des rendements.

c) *Mise en place de Stop Loss*

Un *Stop Loss* est équivalent à un ordre de sortie. Il permet de limiter la perte en cas de mouvement du cours dans le sens contraire de la position.

Il peut être appréhendé de deux manières :

- Soit sous forme d'un seuil ; par exemple un *Stop Loss* de 5% signifie qu'en cas de baisse du cours (ou hausse selon le sens d'intervention de l'investisseur), la position sera soldée.
- Soit sous forme d'un signal de sortie ; par exemple le retournement d'une droite de tendance

Les *Stop Loss* sont très couramment utilisés en cas de gestion active du portefeuille.

(1) Différents Stop Loss

Nous allons présenter ici 3 méthodes relatives au croisement de 2 moyennes mobiles permettant de déterminer des signaux de sortie :

- **Méthode 1 :**

Stop Achat lorsque la moyenne mobile lente repart à la baisse

Stop Vente lorsque la moyenne mobile lente repart à la hausse.

- **Méthode 2 :**

Stop Achat lorsque le cours repasse en dessous de l'une des 2 moyennes mobiles.

Stop Vente lorsque le cours repasse au-dessus de l'une des 2 moyennes mobiles.

- **Méthode 3 :**

Stop lorsque les 2 droites de tendances évoluent dans des sens contraires.

Nous utiliserons par la suite la méthode 1.

(2) Comparaison des profits cumulés bruts et affinés

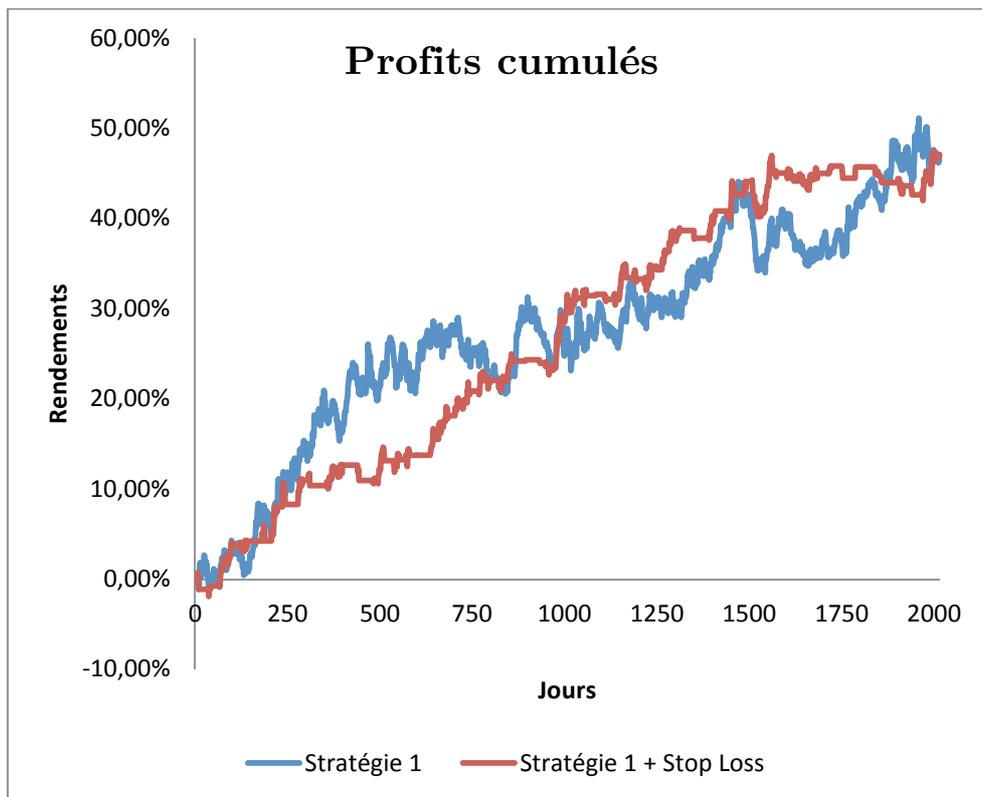


Figure 38 : Equity curve avec et sans Stop Loss

	STRATEGIE 1 + STOP LOSS	STRATEGIE 1
<i>Rendement Stratégie</i>	47.12%	47.07%
<i>Rendement moyen annuel</i>	5.89%	5.88%
<i>Ratio de Sharpe</i>	1.20	0.65
<i>Maximum Drawdown</i>	6.75%	10.01%
<i>K-ratio</i>	0.13	0.07
<i>Nombre de trades</i>	97	97
<i>%Win</i>	58.76%	45.92%
<i>%Loss</i>	41.24%	53.06%
<i>Gain moyen</i>	1.44%	2.60%
<i>Perte moyenne</i>	-0.67%	-1.33%

La mise en place de *Stop Loss* améliore nettement notre stratégie, pas spécialement sur le plan du rendement puisque comme nous pouvons le voir dans le tableau précédent le rendement moyen annuel est quasiment égal d'un système à l'autre, mais on augmente de manière significative la stabilité. Le ratio de *Sharpe* passe de 0.65 à 1.20, alors que le *K-ratio* est lui environ 2 fois supérieur. De plus on peut s'apercevoir que le *Stop Loss* a un effet conservateur de capital puisqu'il diminue les gains et pertes moyennes. Nous décidons, par conséquent, d'intégrer ce système dans notre stratégie.

Cette stratégie de *trading* systématique semble jusqu'ici intéressante. De plus nous pouvons noter que cette gestion active permet à l'investisseur de diminuer de manière significative le risque inhérent à la stratégie de *buy and hold* 1. En effet, le ratio de *Sharpe* (0.02 -> 1.20), le *K-ratio* (0 -> 0.13) et le *maximum drawdown* (27.67% -> 6.75%) s'améliorent nettement. Il est maintenant nécessaire d'étudier la robustesse de notre système.

d) *Etude de la robustesse de la stratégie*

Nous étudions maintenant notre système de *trading* de manière *Out of Sample* (entre 2008 et 2012), les résultats obtenus sont présentés ci-dessous :

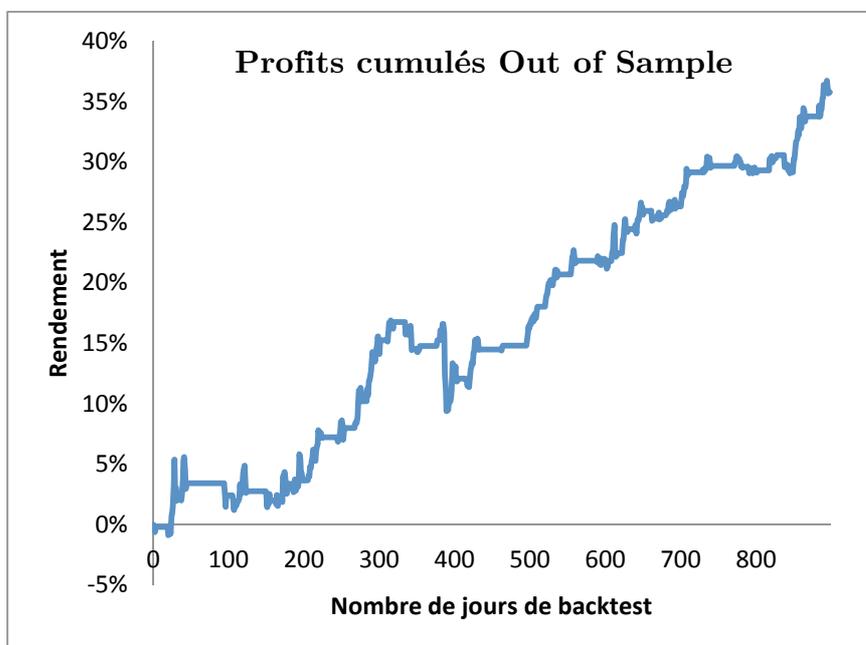


Figure 39 : Etude de la robustesse par une approche *Out of Sample*

Nous obtenons les résultats suivants :

<i>Ratio de Sharpe</i>	1.40	<i>K-ratio</i>	0.17
------------------------	------	----------------	------

Ce système semble intéressant. Cependant les quelques périodes de faiblesses, notamment entre 0 et 200 jours et entre 300 et 500 jours pénalisent nos ratios qui apparaissent ainsi légèrement au dessus des seuils d'admissibilité. Malgré cela, la stratégie 1 semble robuste et pourrait servir de base au développement d'un système de *trading* systématique.

Il est également important de noter que même pour une période au cours de laquelle la tendance baissière est très forte, les résultats obtenus grâce à notre stratégie sont plus satisfaisants que ceux relatifs à un simple *buy and hold*. On est donc capable d'augmenter le potentiel de gain tout en diminuant le risque encouru.

Nous allons maintenant élaborer une seconde stratégie afin de pouvoir les comparer.

3. Stratégie 2

La seconde stratégie que nous allons étudier sera construite à partir des *bandes de Bollinger* calculées à partir d'une moyenne mobile de *Hull*.

Nous allons maintenant présenter le fonctionnement de ce type de système.

a) *Système basé sur les Bandes de Bollinger (BB)*

Développées par John BOLLINGER, les *Bandes de Bollinger* (BB) représentent un indicateur qui permet d'apprécier la volatilité des cours. Les BB permettent de comparer la volatilité par niveaux de prix sur une période donnée.

Cet indicateur est composé de trois bandes :

- La **bande du milieu** correspondant à une moyenne mobile simple (MMS)
- La **bande supérieure** correspondant à la MMS auquel on ajoute x fois l'écart type
- La **bande inférieure** correspondant à la MMS auquel on retranche x fois l'écart type

La plupart du temps, les cours évoluent entre la bande supérieure et la bande inférieure. Les BB encadrent et s'ajustent aux prix en fonction de la volatilité. Lorsque la volatilité des cours est faible, l'écart type est faible et donc les BB se contractent. De la même façon les BB s'écartent lorsque la volatilité est importante.

Il existe ensuite diverses méthodes permettant de déterminer les signaux d'interventions :

- **Méthode 1** : Généralement utilisée dans un marché de tendance forte.

Achat lorsque les cours traversent la BB supérieure.

Vente lorsque les cours traversent la BB inférieure.

- **Méthode 2** : Généralement utilisé dans un marché de tendance faible

Achat lorsque le cours échoue à franchir sur la BB inférieure.

Vente lorsque le cours rebondit sur la BB supérieure.

Dans la construction de cette stratégie nous n'appliquerons que la méthode 1, celle-ci est illustrée par le graphique suivant :



Figure 40 : Présentation de la méthode 1

Les bandes de *Bollinger* supérieures et inférieures apparaissent en bleu, alors que la moyenne mobile de *Hull* apparaît en rouge.

Il existe un indicateur qui permet de comparer l'écart des deux bandes extrêmes par rapport à la moyenne mobile (bande du milieu) :

$$\frac{BB(\text{supérieure}) - BB(\text{inférieure})}{BB(\text{centrale})}$$

Lorsque cet indicateur augmente, l'écart entre les bandes extrêmes par rapport à la MMS devient plus important : la volatilité s'accroît. Le marché rentre en tendance (il peut y avoir la formation d'une bulle spéculative). Quand les bandes se contractent, la volatilité retombe, le calme revient et la tendance s'essouffle.

b) *Mise en place pratique de la stratégie*

Nous avons développé un système de *trading* basé sur des *bandes de Bollinger* calculées à partir des moyennes mobiles de *Hull*.

Les caractéristiques relatives à cette stratégie sont regroupées dans le tableau suivant :

	Caractéristiques de la stratégie
Devise	USD/JPY
Durée	2000-2007
Méthode	<i>Cassure des bandes de Bollinger de Hull</i>
Moyenne Mobile de <i>Hull</i>	20 jours
Ecart relatif à la BB	2
Intervalle	<i>Journalier</i>
Cours	Temps réel

Les différentes statistiques relatives aux *trades* générés par la stratégie apparaissent dans le tableau suivant :

Statistiques Trades			
Trades gagnants	13	Trades perdants	14
% Win	48%	% Loss	52%
Gain moyen	5.26%	Perte moyenne	-1.71 %

Ce système entraîne des *trades* peu nombreux mais dont la durée de développement est importante. Les gains moyens rapportés aux pertes moyennes s'avèrent cependant très intéressants.

Nous présentons la distribution des rendements *mark to market* en annexe car son étude n'est pas essentielle dans la compréhension d'une stratégie de trading systématique.

Analyse de l'*equity curve* et des différents ratios :

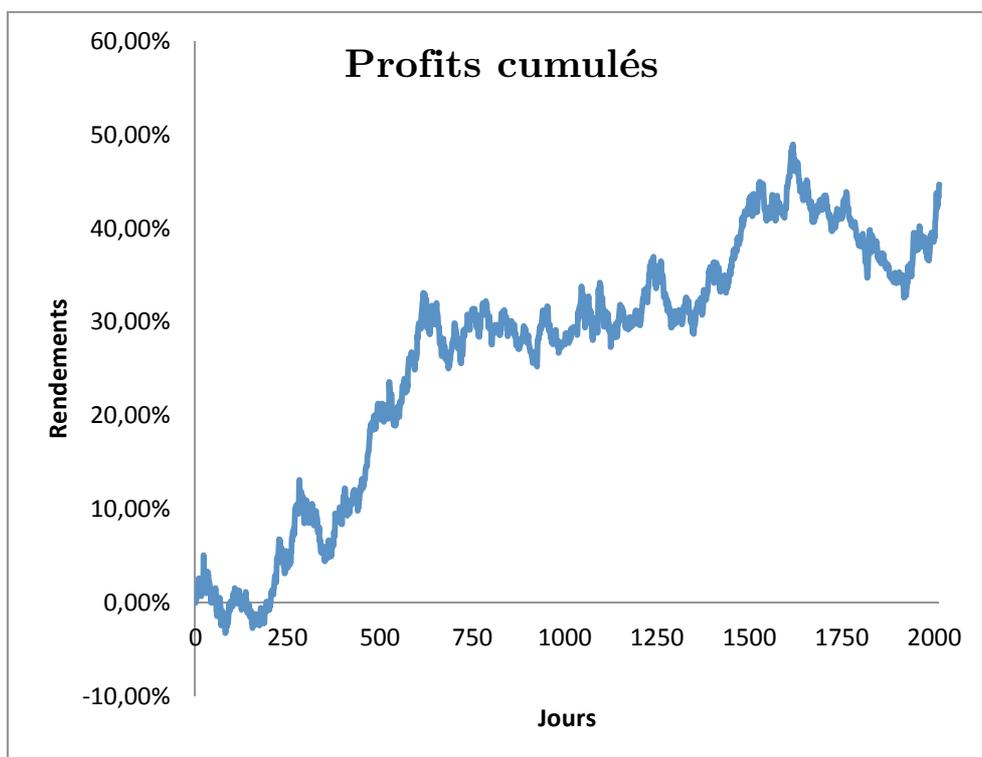


Figure 41 : Equity curve de la stratégie 2

Ratios	
Maximum <i>Drawdown</i>	16.38%
Ratio de <i>Sharpe</i>	0.62
<i>K-ratio</i>	0.05

La stratégie 2 permet un gain de 44.69% soit une moyenne de 5.59% par an. Les ratios obtenus ne sont clairement pas satisfaisants du fait d'une très grande irrégularité des rendements *mark to market*. Il est nécessaire de mettre en place des *Stop Loss*.

c) *Mise en place de Stop Loss*

(1) Présentation de différentes méthodes

Nous allons présenter ici 3 méthodes relatives au croisement de 2 moyennes mobiles permettant de déterminer des signaux de sortie :

- **Méthode 1 :**

Stop Achat lorsque la moyenne mobile lente repart à la baisse

Stop Vente lorsque la moyenne mobile lente repart à la hausse.

- **Méthode 2 :**

Stop Achat lorsque le cours repasse en dessous de l'une des 2 moyennes mobiles.

Stop Vente lorsque le cours repasse au-dessus de l'une des 2 moyennes mobiles.

- **Méthode 3 :**

Stop lorsque les 2 droites de tendances évoluent dans des sens contraires.

Dans la suite de notre étude nous développerons la méthode 1.

a) Comparaison *equity curve* brutes et affinées

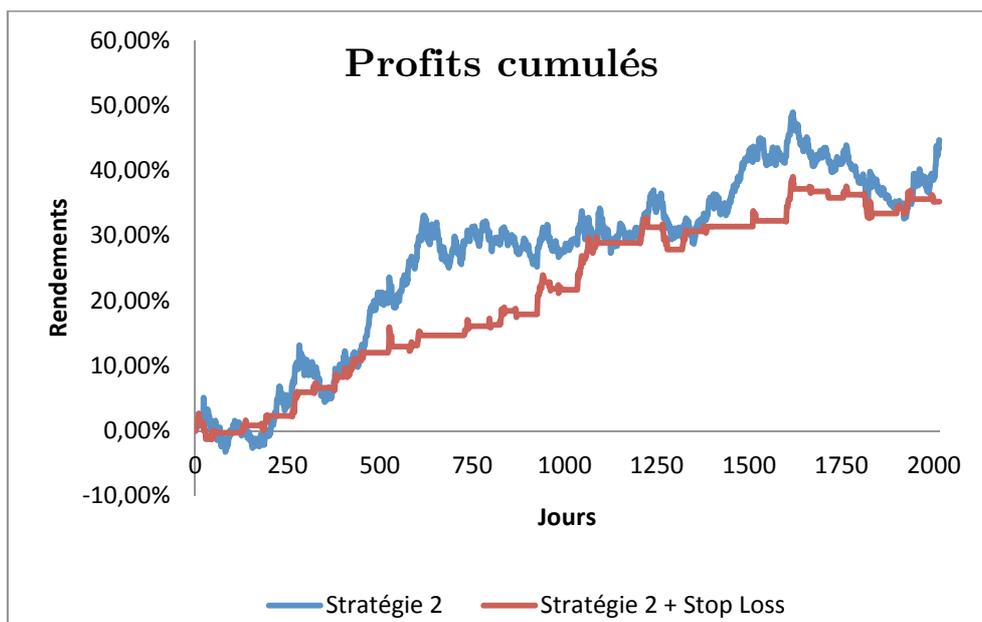


Figure 42 : Equity curve avec et sans Stop Loss

	STRATEGIE 2 + STOP LOSS	STRATEGIE 2
<i>Rendement Stratégie</i>	35.24%	44.69%
<i>Rendement moyen annuel</i>	4.41%	5.59%
<i>Ratio de Sharpe</i>	0.87	0.54
<i>Maximum Drawdown</i>	6.38%	16.38%
<i>Nombre de trades</i>	42	27
<i>% Win</i>	71%	48%
<i>% Loss</i>	29%	52%
<i>Gain moyen</i>	1.68%	5.26%
<i>Perte moyenne</i>	-1.12%	-1.71%
<i>K-ratio</i>	0.09	0.05

La stratégie 2 sur laquelle on introduit des *Stop Loss* apparaît très intéressante de par sa capacité à générer des trades gagnants, cependant son rendement est trop faible. Ceci se ressent dans le *K-ratio* qui est inférieur à 0.10 mais également au niveau du ratio de *Sharpe* qui est inférieur à 1. Ce système n'étant pas satisfaisant, nous n'étudierons pas sa robustesse. Il s'avère cependant plus intéressant qu'une stratégie de *buy and hold* classique.

3 Conclusion

L'étude des deux stratégies de *trading* systématique nous amène à considérer le premier système comme étant le plus performant. De plus, celui-ci s'avère satisfaisant aussi bien sur le plan de l'efficience que de la robustesse. Nous pouvons également noter que la mise en place de *Stop Loss* entraîne une amélioration non négligeable de notre stratégie. Nous avons donc atteint notre objectif qui était de construire un système de *trading* de manière rigoureuse, en nous appuyant sur des études statistiques.

Nous devons cependant nuancer nos propos car les ratios obtenus grâce au développement de la stratégie 1 sont très légèrement supérieurs aux seuils préalablement définis dans la partie 1 et habituellement utilisés par les investisseurs. Malgré tous les tests de robustesse, le passage du *backtest* à la réalité est parfois quelque peu compliqué.

Afin d'éviter tout désagrément nous aurions tendance à chercher des stratégies de *trading* systématique possédant une marge plus importante.

- ✓ Dans la partie suivante, nous chercherons à étudier le pouvoir prédictif d'un modèle d'estimations très présent dans la littérature ; le modèle ARMA. Cette démarche nous permettra de vérifier si la construction d'une stratégie de trading est envisageable à partir de ce modèle.

IV. Estimation à partir du modèle *ARMA*

A. ARMA

Nous allons dans un premier temps tenter de modéliser les rendements de l'EUR/USD à partir d'un modèle *ARMA* pour des fréquences journalières. Avant toute chose il est nécessaire de préciser que pour réaliser cette estimation, nous n'utiliserons pas l'échantillon de données dans sa globalité. En effet nous partons d'un échantillon de 252 jours (soit une année boursière) et tentons d'estimer le cours de l'EUR/USD le 253^{ème} jour, à la recherche d'un signal d'achat.

1. Analyse de l'échantillon

Nous allons tout d'abord observer le graphique des rendements :

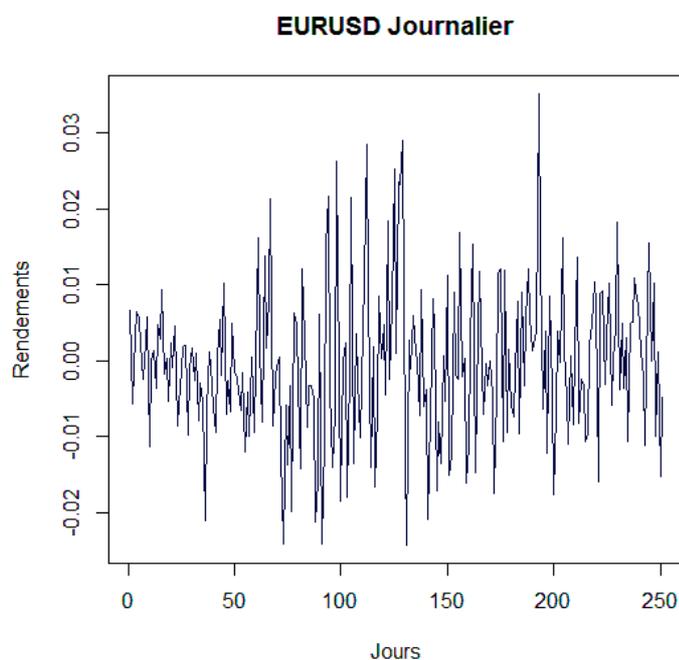


Figure 43 : Rendements journaliers de l'EUR/USD

A la vue de ces résultats il ne semble pas y avoir de saisonnalité ni de tendance apparente.

Cependant, afin de confirmer cette observation, il est pertinent d'effectuer un test de stationnarité et un test de saisonnalité. Suivant les résultats de ces tests, nous appliquerons si nécessaire des opérateurs de différenciation sur la série initiale pour pouvoir définir une modélisation.

Test de Dickey Fuller⁴

Nous allons effectuer le test de *Dickey Fuller* qui permet d'affirmer ou d'infirmer la présence d'une racine unité ce qui entraîne la stationnarité ou non de notre série. Les résultats obtenus sous R apparaissent ci-dessous :

p-value	0.01
---------	------

Les hypothèses du test de *Dickey Fuller* sont :

H_0 : présence de racine unité,

H_1 : pas de racine unité dans l'autorégressif

La p-value est largement inférieure au seuil de 5%, on peut par conséquent rejeter l'hypothèse nulle de non-stationnarité.

Périodogramme

Le périodogramme est un estimateur de la densité spectrale.

La présence d'un pic dans la représentation graphique du périodogramme en fonction de la période révèle une saisonnalité dont l'ordre est donné par la période.

⁴ La théorie relative à ce test est présentée dans la partie D des annexes

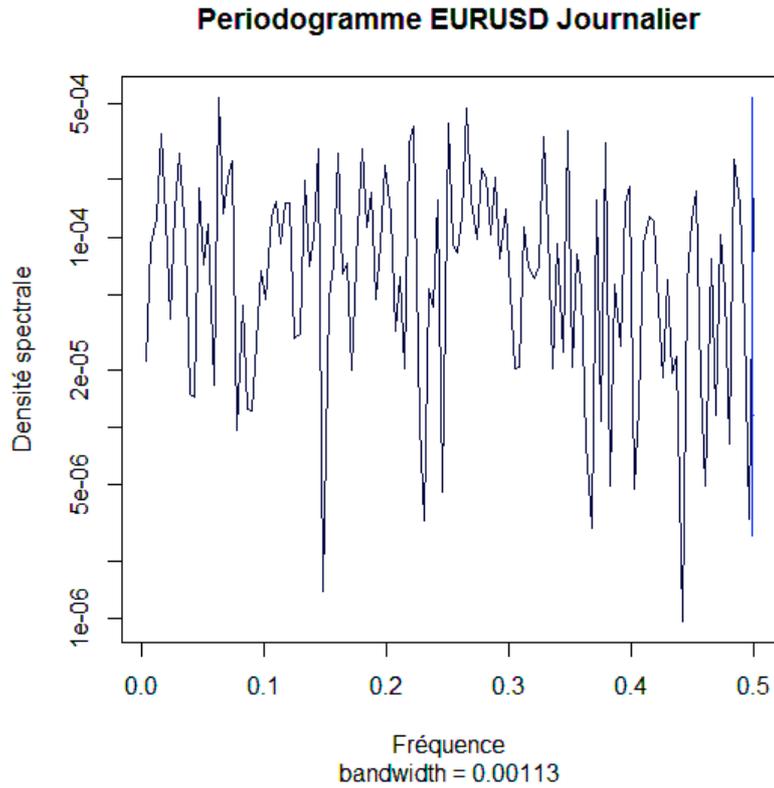


Figure 44 : Périodogramme des rendements de l'EUR/USD

Il n'y a pas de valeurs significatives, on peut en déduire que la série étudiée ne présente pas de saisonnalité.

La prochaine étape va consister à déterminer un modèle correspondant à la série. Pour cela nous allons nous intéresser aux auto-corrélations.

2. Détermination des ordres

L'autocorrélogramme (ACF) et l'autocorrélogramme partiel (PACF) :

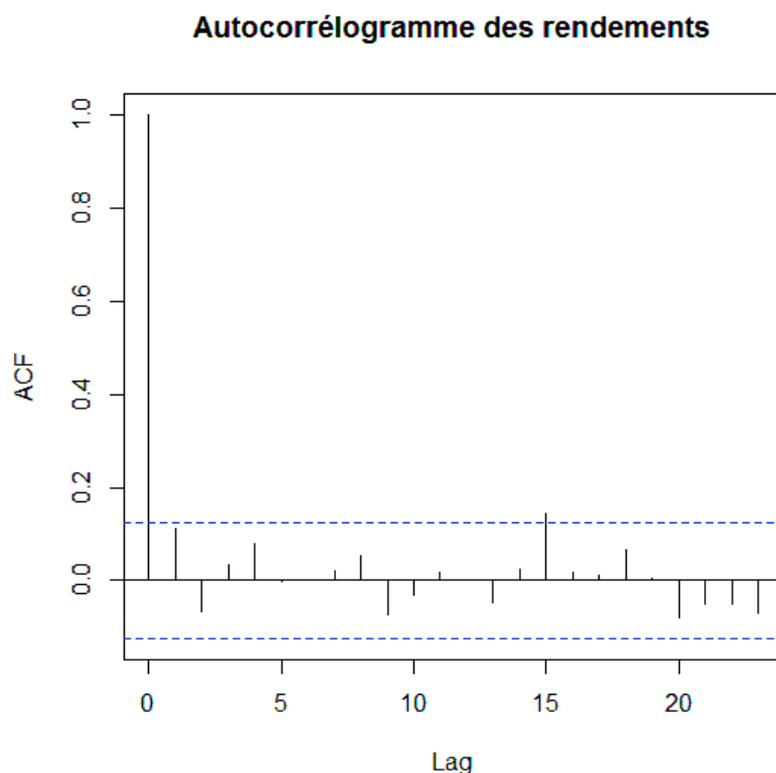


Figure 45 : Autocorrélogramme des rendements

Une seconde façon de mesurer l'influence entre le processus et son décalé dans le temps est de calculer la corrélation entre deux instants en enlevant une partie de l'information contenue entre ces deux instants. Plus précisément, on calcule la corrélation entre le terme $X_t - EL(X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ et le terme $X_{t-h} - EL(X_{t-h}|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ où la quantité $EL(X_t|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$ (resp. $EL(X_{t-h}|X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1})$) désigne la régression linéaire de X_t (resp. X_{t-h}) sur $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$.

Autocorrélogramme partiel des rendements

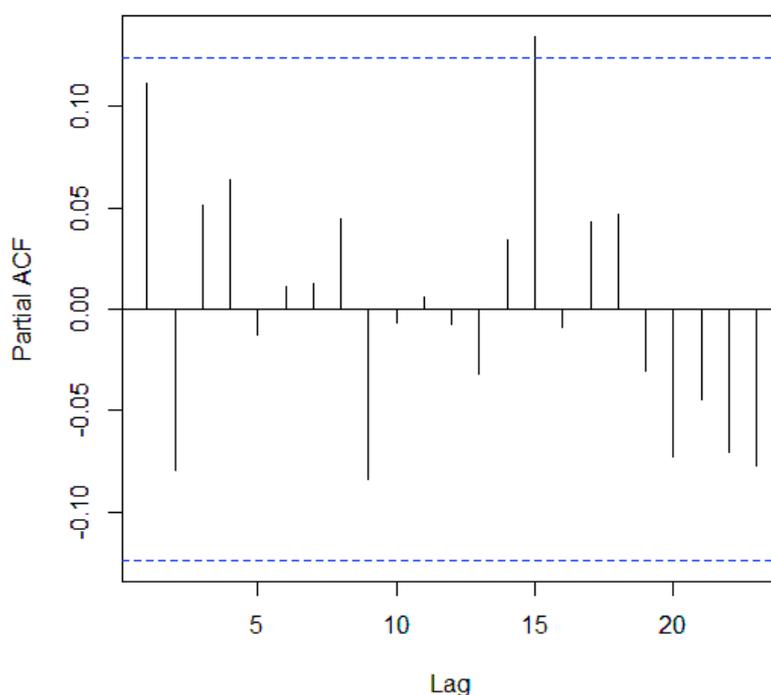


Figure 46 : Autocorrélogramme partiel des rendements

Un processus *moyenne mobile* $MA(q)$ présente des auto-corrélations nulles à partir de l'ordre $q+1$, un processus autorégressif $AR(p)$ présente des auto-corrélations partielles nulles à partir de l'ordre $p+1$. On va chercher des points de rupture dans les ACF et PACF.

Nous remarquons un pic pour un *lag* égal à 15 à la fois pour l'ACF et le PACF. Nous allons tester les modèles $ARMA(p,q)$ pour $p \leq 15$ et $q \leq 15$.

Cette calibration peut également être réalisée à l'aide des critères AIC et BIC.⁵

Sous R, nous avons réalisé plusieurs modélisations $ARMA(p,q)$ pour $p \leq 15$ et $q \leq 15$. Celles-ci nous ont amené à utiliser un $ARMA(1,1)$ qui minimise la valeur *AIC*.

3. Vérification du modèle

Afin de vérifier si notre modèle est judicieusement calibré, nous allons étudier les résidus. Les graphiques relatifs à leur distribution apparaissent en annexe.

Le but de cette démonstration est de vérifier les hypothèses classiques sur les perturbations:

⁵ Ces méthodes sont détaillées en annexe

- les perturbations forment un bruit blanc
- les perturbations sont non corrélées

Tout d'abord, si l'on souhaite vérifier que les résidus forment un bruit blanc, il suffit de vérifier que leur moyenne est nulle.

Pour cela, nous avons réalisé un test de *Student*⁶, les résultats figurent dans le tableau suivant :

H0 : La moyenne des résidus est nulle

H1 : La moyenne des résidus est non nulle

Test de Student	
Degré de confiance	95%
p-value	0.9961
Estimation de la moyenne des résidus	-3.05e-06

Nous ne rejetons pas l'hypothèse **H0**, nous en déduisons que la moyenne des résidus est nulle.

Nous allons ensuite vérifier l'auto-corrélation des erreurs. Nous réalisons ainsi un test de *Portemanteau*, en particulier celui de *Ljung-Box* :

H0 : Les résidus ont une volatilité constante

H1 : La volatilité des résidus n'est pas constante

Test de Ljung-Box	
p-value	0.7879

Nous ne rejetons pas l'hypothèse nulle, nous considérons les résidus homoscedastiques. Nos prédictions peuvent ainsi être validées.

⁶ Présentation du principe en annexe

4. Prédiction

Le modèle ARMA(1,1) nous permet d'obtenir les prévisions suivantes :

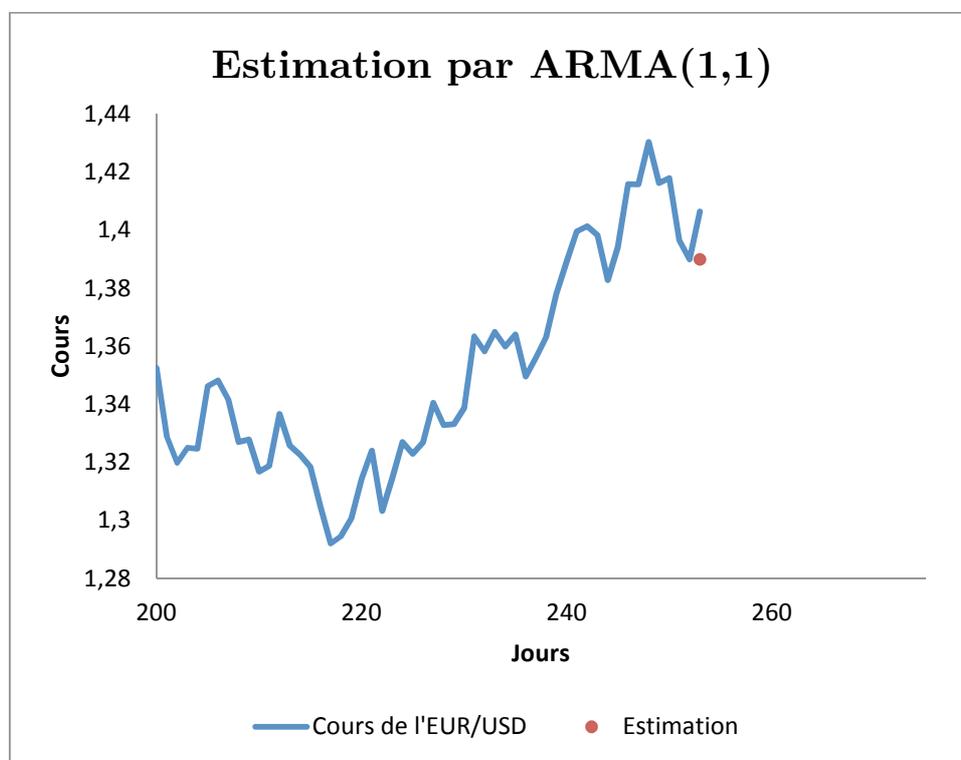


Figure 47 : Estimation du cours de l'EUR/USD au 253ème jour

La courbe bleue représente les rendements de l'EUR/USD. Les prévisions réalisées à l'aide de la modélisation ARMA(1,1) apparaissent en rouge.

Nous venons de présenter la méthode permettant d'estimer les cours de l'EUR/USD à l'aide d'un modèle ARMA. Avant de tirer une conclusion quant à son pouvoir prédictif nous devons automatiser cette opération. Pour cela nous avons réalisé une macro sous R qui nous permet à chaque étape de ré estimer le modèle ARMA à partir duquel nous déduisons nos prédictions. Les résultats obtenus sont présentés sur le graphique suivant :

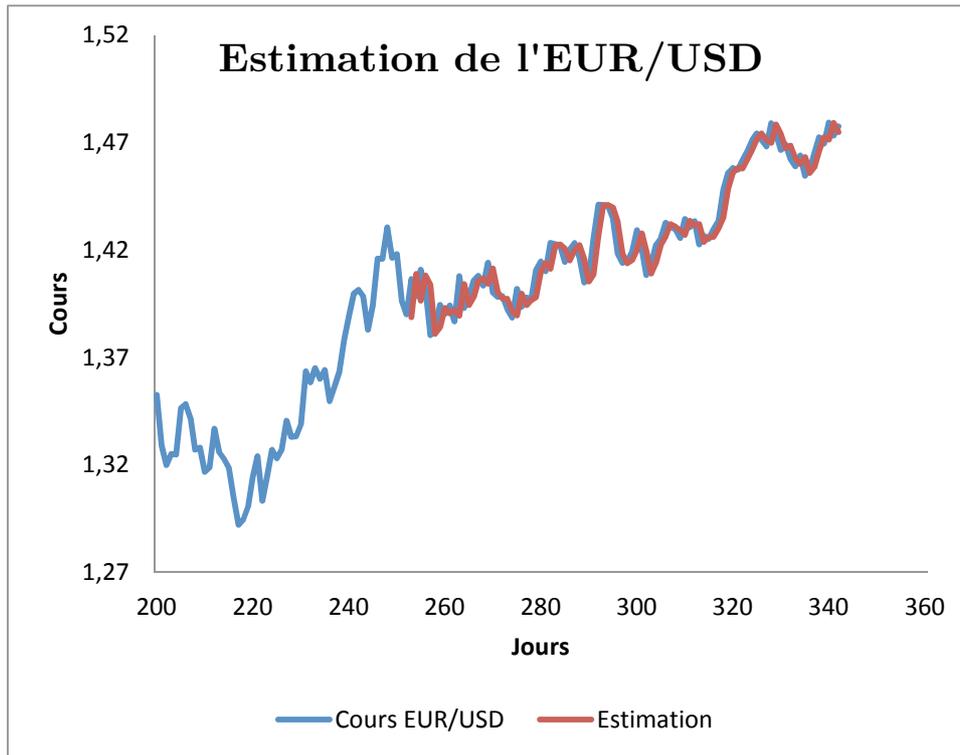


Figure 48 : Modélisation des cours de l'EUR/USD

Notons $\hat{\epsilon}_{t+1|t} = x_{t+1} - \hat{x}_{t+1}$ l'erreur de prévision, qui est la différence entre la valeur observée et la valeur prédite.

Nous allons maintenant étudier la stationnarité des erreurs de prédictions afin de pouvoir conclure quant à la capacité prédictive de notre modèle.

Si les séries d'erreur de prévision sont stationnaires alors $E[\hat{\epsilon}_{t+1|t}^2]$ est constant pour tout t . Calculons la moyenne et l'écart-type des $\hat{\epsilon}_{t+1|t}^2$. Nous supposons l'hypothèse de stationnarité raisonnable si $\tau = \frac{STD[\hat{\epsilon}_{t+1|t}^2]}{E[\hat{\epsilon}_{t+1|t}^2]} \% \leq 5\%$.

Nous obtenons $\tau = 1.54\%$.

L'hypothèse de stationnarité est donc vérifiée.

- ✓ Ces prévisions semblent satisfaisantes. Il serait ainsi intéressant de développer des systèmes de *trading* systématique basés sur cette modélisation. Cependant, comme nous pouvons le remarquer sur le graphique représentant l'estimation au 253ème jour, les prédictions réalisées à l'aide du modèle *ARMA* prennent difficilement en compte les évolutions brutales des cours.

V. Conclusion

La configuration économétrique du marché nous permet d'envisager la construction de stratégies de *trading* systématique basées sur une évolution tendancielle. En effet, nous avons démontré, lors de l'étude approfondie des rendements que leur normalité n'était pas parfaite et que l'hypothèse d'indépendance qui les caractérise, pouvait être remise en cause.

Notre démarche dans ce document consistait à définir une méthode de raisonnement en utilisant au départ des indicateurs simples en cherchant à les améliorer, pour déboucher, au final, sur la présentation d'un modèle d'estimation plus complexe.

Différents outils d'évaluation des systèmes d'interventions ont été introduits de manière analytique afin d'envisager leurs champs d'application et de définir leurs qualités et leurs inconvénients.

Ainsi le lecteur bénéficie d'informations précises et n'a pas l'impression d'opacité que l'on retrouve dans les stratégies présentées dans la littérature.

Afin de rendre compte de la qualité d'un système il est nécessaire de respecter un cheminement précis. Les résultats sont représentés sous la forme d'*equity curve* ce qui permet une vision globale de la stratégie.

Le calcul conjoint du ratio de *Sharpe* et du *K-ratio* fournit ensuite une information essentielle quant à la mesure du rendement ajusté au risque. Enfin, la capacité à se reproduire de notre système est assurée grâce à une construction *In Sample* et un test *Out of Sample*.

L'observation et la compréhension du fonctionnement des indicateurs que l'on souhaite utiliser, constituent un préalable au développement d'une stratégie.

A partir de constatations relatives à la moyenne mobile simple, une application de l'extrapolation de *Richardson* permet de diminuer le *lag* tout en conservant une capacité de lissage intéressante : nous définissons ainsi la moyenne mobile de *Hull*.

Les signaux d'interventions fondés sur ce nouvel indicateur, qu'ils soient construits à partir d'un *swing* ou bien d'un *cross* permettent l'obtention de rendements plus intéressants. La moyenne mobile de *Hull* est par conséquent plus pertinente et plus précise que la moyenne mobile simple.

L'étude poussée d'un indicateur peut par conséquent permettre son amélioration.

Nous avons donc construit une stratégie de *trading* systématique basée sur le croisement de deux moyennes mobiles de *Hull*. En respectant la méthode d'évaluation préalablement présentée, nous nous sommes aperçus que ce système permettait d'obtenir des gains satisfaisants tout en faisant preuve de robustesse.

Nous sommes donc parvenus à produire un système de *trading* tendanciel de manière rigoureuse en s'appuyant sur de nombreuses études statistiques. Les résultats sont intéressants mais restent, cependant, relativement faibles.

Certains outils, plus élaborés que la moyenne mobile, peuvent posséder de fortes capacités prédictives. La modélisation *ARMA* semble offrir, en effet, des prévisions assez fines.

La validation des résultats étant affaire de conviction et de perception personnelle, la liberté est maintenant laissée au lecteur de préciser et développer ses propres stratégies basées sur ce nouvel indicateur tout en respectant la méthode de construction présentée au travers de ce mémoire.

Nous n'avons, volontairement, jamais abordé les problématiques de corrélations. Nous observons, cependant, de fortes corrélations entre certaines devises, en particulier entre l'AUD/USD et le *Gold Index*. La prise en considération de ces éléments au niveau du marché des changes pourrait probablement déboucher sur la mise au point de nouveaux indicateurs.

L'intégration de ces problématiques dans la construction de stratégies de *trading* systématique pourrait s'avérer importante et constituerait probablement un nouveau champ d'investigations.

VI. Annexes

A. Test de *Shapiro Wilk*

En statistique, le test de *Shapiro–Wilk* vérifie l'hypothèse nulle selon laquelle un échantillon x_1, \dots, x_n est issu d'une population normalement distribuée.

Il a été publié en 1965 par *Samuel Shapiro* et *Martin Wilk*.

La statistique de test est la suivante:

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i x_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Où

- $x_{(i)}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre, i.e., le $i^{\text{ème}}$ plus petit nombre dans l'échantillon;
- $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ est la moyenne de l'échantillon
- la constante a_i est donnée par :

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{1/2}}$$

Où

$$m = (m_1, \dots, m_n)^T$$

et m_1, \dots, m_n sont les espérances des statistiques d'ordre d'un échantillon de variables indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale.

V est la matrice de variance-covariance de ces statistiques d'ordre.

B. Présentation de l'algorithme de *Richardson* au travers d'un exemple :

Nous cherchons à calculer l'intégrale suivante :

$$M = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

Avec pour valeurs :

$$N_1(h) = 1.570796$$

$$N_1\left(\frac{h}{2}\right) = 1.896119$$

$$N_1\left(\frac{h}{4}\right) = 1.974242$$

On prendra : $M = N_1(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + a_3 h^6 + a_4 h^8 + O(h^{10})$

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + a_1 \frac{h^2}{4} + a_2 \frac{h^4}{16} + a_3 \frac{h^6}{64} + a_4 \frac{h^8}{256} + O(h^{10})$$

On fait disparaître le terme en h^2 de la façon suivante :

$$4M - M = 3M = 4 * N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h) + \widehat{a}_2 h^4 + \widehat{a}_3 h^6 + \dots$$

Par conséquent :

$$M = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{3} + \widehat{a}_2 h^4 + \widehat{a}_3 h^6$$

On posera : $N_2 = N_1\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_1\left(\frac{h}{2}\right) - N_1(h)}{3}$

En prenant : $M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{16} * \widehat{a}_2 h^4 + \frac{1}{64} * \widehat{a}_3 h^6$

On fait disparaître le terme en h^4 de la façon suivante :

$$16M - M = 15M = 16 * N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h) + O(h^6)$$

Donc :

$$M = N_2\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{N_2\left(\frac{h}{2}\right) - N_2(h)}{15} + O(h^6)$$

Ce qui donne : $M = 1.999984$

- On commence avec une approximation en $O(h^2)$ pour laquelle on connaît le développement de *Taylor*.
- On utilise cette approximation pour trouver N_2 qui est d'ordre $O(h^4)$; on connaît également son développement de *Taylor*.
- Finalement on utilise N_2 pour trouver une approximation en $O(h^6)$.

C. Portefeuille constitué à l'aide des devises du G10

EURUSD	GBPAUD	AUDNOK	USDCAD	SEKCHF
EURGBP	GBPSEK	AUDSEK	CADNOK	SEKJPY
EURAUD	GBPNZD	AUDCHF	CADSEK	USDCHF
EURNZD	GBPNOK	AUDJPY	CADCHF	CHFJPY
EURNOK	GBPCHF	NZDUSD	CADJPY	USDJPY
EURSEK	GBPJPY	NZDCAD	USDNOK	USDSEK
EURCAD	GBPCAD	NZDNOK	NOKSEK	NZDJPY
EURJPY	AUDUSD	NZDSEK	NOKCHF	AUDCAD
EURCHF	AUDNZD	NZDCHF	NOKJPY	GBPUSD

D. Etude des processus ARMA

1. Présentation théorique du modèle

Étant donné une série temporelle X_t , le modèle ARMA est un outil qui permet d'appréhender et de prédire les valeurs futures de cette série.

Le modèle est composé de deux parties : une part autorégressive (AR) et une part moyenne-mobile (MA).

Le modèle est généralement noté ARMA(p,q), où p est l'ordre de la partie AR et q l'ordre de la partie MA.

- La notation AR(p) réfère au modèle autorégressif d'ordre p ; le modèle AR(p) se note :

$$X_t = c + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Où $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont les paramètres du modèle, c est une constante et ε_t un bruit blanc.

- La notation MA(q) réfère au modèle moyenne-mobile d'ordre q :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

Où les $\theta_1, \dots, \theta_q$ sont les paramètres du modèle et $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots$ sont encore une fois des termes d'erreur.

- La notation ARMA(p, q) réfère le modèle avec p termes autoregressifs et q termes moyenne-mobile. Ce modèle contient à la fois les modèles AR(p) et MA(q) :

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^p \varphi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i}$$

2. Test de *Dickey Fuller*

Ce test est basé sur une structure AR(1).

Nous notons X_t le processus étudié. Les modèles servant de base à la construction de ce test sont :

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \quad : \text{Modèle autorégressif d'ordre 1}$$

$$X_t = \rho X_{t-1} + \mu + \varepsilon_t \quad : \text{Modèle autorégressif d'ordre 1 avec constante}$$

$$X_t = \rho X_{t-1} + \tau \cdot t + \mu + \varepsilon_t \quad : \text{Modèle autorégressif d'ordre 1 avec un trend et une constante}$$

On teste donc :

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 1 \\ H_1 : \rho \neq 1 \end{cases}$$

Pour faire ce test, nous estimons la régression m.c.o (moindres carrés ordinaires) des trois modèles suivants :

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \varepsilon_t \quad : \text{Modèle sans contrainte}$$

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \mu + \varepsilon_t \quad : \text{Modèle avec constante}$$

$$\Delta X_t = \gamma X_{t-1} + \tau t + \mu + \varepsilon_t \quad : \text{Modèle avec trend et constante}$$

Le test de significativité est

$$\begin{cases} H0 : \gamma = \rho - 1 = 0 : \text{Le processus a des racines unités ; il n'est donc pas stationnaire} \\ H1 : \gamma = \rho - 1 \neq 0 : \text{Le processus n'a pas de racines unités ; il est donc stationnaire} \end{cases}$$

La statistique de test est :

$$T = \frac{(\hat{\rho} - 1)}{SE(\hat{\rho})}$$

Cette statistique est tabulée par *Dickey-Fuller*.

La règle de décision est la suivante :

- Si la valeur de la statistique observée T est inférieure à la valeur de la table tabulée nous rejetons H_0 au profit de H_1 , c'est-à-dire que le processus n'a pas de racine unité, il est donc significativement stationnaire.
- De même, si la valeur de la statistique observée T est supérieure à la valeur de la table tabulée nous ne rejetons pas H_0 , c'est-à-dire que le processus étudié a une racine unité, il est donc significativement non-stationnaire.

3. Critère de type AIC

Rappel théorique sur le critère AIC (critère de AKAIKE) :

Nous supposons travailler dans un modèle ARMA (p,q) . Nous considérons la fonction suivante :

Dans le cas d'un modèle avec constante :

$$AIC(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{2}{T} * (p + q + 1)$$

où $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ est la variance résiduelle associée aux résidus $(\hat{\varepsilon}_t)$ et T le nombre d'observations.

Dans le cas d'un modèle sans constante :

$$AIC(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{2}{T} * (p + q)$$

Nous retenons alors le modèle qui minimise la fonction AIC (p) pour $0 \leq p \leq p_{\max}(T)$

Nous obtenons ainsi la formule de *Schwert* : $P_{\max}(T) = 12 * \left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$

Nous obtenons, ici, 524 observations.

Nous cherchons p et q minimisant le critère avec : $P_{\max} = 12 * \left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{1}{4}} = 18.6$

Donc p et q sont inférieurs à 19.

4. Critère de type BIC (Schwartz) :

Rappel théorique sur le critère BIC (Critère Informationnel Bayésien ou critère de Schwartz) :

Si nous travaillons dans une structure $ARMA(p,q)$, nous considérons la fonction suivante :

Dans le cas d'un modèle avec constante

$$BIC(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{p + q + 1}{T} * \ln(T)$$

Dans le cas d'un modèle sans constante:

$$BIC(p, q) = \ln(\hat{\sigma}_\varepsilon^2) + \frac{p + q}{T} * \ln(T)$$

Nous cherchons p et q minimisant le BIC

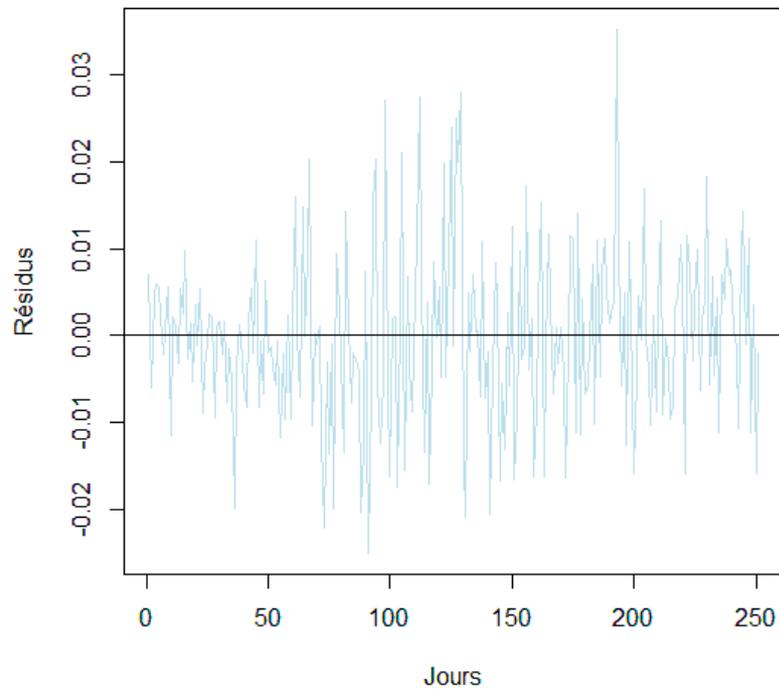
$$\text{Avec : } P_{max} = 12 * \left(\frac{T}{100}\right)^{\frac{2}{9}} = 17.34$$

Donc p et q sont inférieurs à 18.

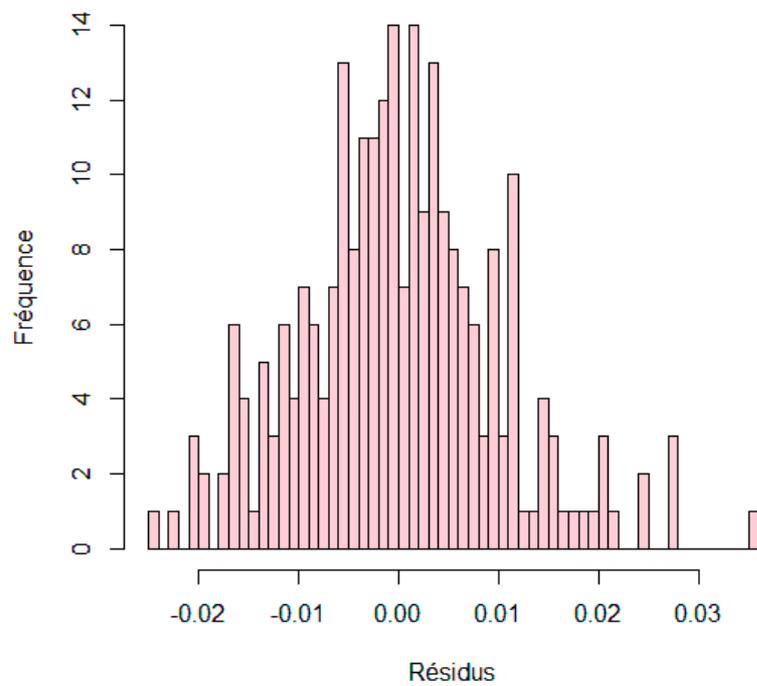
Nous retenons alors le modèle qui minimise la fonction BIC (p,q) pour $0 \leq p, q \leq p_{\max}(T)$

5. Etude des résidus

Résidus du modèle ARMA(1,1)



Histogramme des résidus



6. Test de *Student*

Le principe du test de *Student* est le suivant : on veut déterminer si la valeur d'espérance d'une population de distribution normale et d'écart type non connu est égale à une valeur déterminée μ_0 .

Pour ce faire, on tire de cette population un échantillon de taille n dont on calcule la moyenne \bar{x} et l'écart-type empirique s .

Selon l'hypothèse nulle, la distribution d'échantillonnage de cette moyenne se distribue elle aussi normalement avec un écart type égal à s/\sqrt{n}

La variable $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ suit alors une loi de Student avec $n-1$ degrés de liberté.

Bibliographie

New Trading Systems and Methods Perry *J.KAUFFMAN*

IFTA Journal 09

Series temporelles et modèles dynamiques *Economica Alain MONFORT & Christian GOURIERAUX*

Bollinger on Bollinger Bands *John BOLLINGER*

Risk Management and Financial Institutions (third edition) *John HULL*

Options Futures and other Derivatives *John HULL*

Futures and Options Markets *John HULL*

La Gestion Quantitative *Philippe ZAOUATI*

La Gestion d'Actifs Quantitative *Thierry ROCALLI*

Essentiel de la Finance Quantitative *Paul WILMOTT*

Hedge Funds, origine, stratégies, performance *François-serge LHABITANT*

Gestion Quantitative du Portefeuille *Mondher BELLALAH*

Guide Complet de l'Analyse Technique *Thierry CLEMENT*

L'Art du Trading *Thami KABBAJ*

A Short Course In Technical Trading *J.KAUFMAN*