



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

le 20 Septembre 2018

Par : Claire-Lise Walle

Titre : Allocation stratégique d'actifs d'un contrat de retraite géré dans le cadre d'un FRPS
à l'aide d'un outil de projection actif passif

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaire :**

Anthony Nahelou

Sophie Bourdet

François-Xavier Negri

Signatures :

Membre présent du jury de l'EURIA :

Rainer Buckdahn

Entreprise :

Galea et Associés

Signature :

GALEA & Associés
25 rue de Choiseul
75002 PARIS
Tél. 01 43 22 11 11
R.C.S. Paris - 492 379 839

Directeur de mémoire en entreprise :

Nadia Eng

Signature :

Invité :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Résumé

Mots clefs: FRPS, Retraite professionnelle, Gestion actif-passif, ALM, Allocation stratégique d'actifs, Optimisation

Le système de retraite actuel en France est basé sur la répartition, ce type de financement repose sur une solidarité intergénérationnelle. Il est donc très sensible au vieillissement de la population et à la diminution de la natalité. Ces phénomènes risquent d'entraîner la diminution des retraites servies par les régimes obligatoires de base et complémentaires. La retraite supplémentaire pourrait être une solution aux difficultés rencontrées par le système de retraite actuel, et certains assurés pourraient investir dans ces produits pour s'assurer un complément de revenu pendant la retraite. Pourtant le marché de l'épargne retraite supplémentaire occupe encore une part marginale dans le financement de la retraite en France.

Les fonds de retraite sont soumis à la norme Solvabilité II qui semble peu appropriée à la gestion de fonds de retraites. D'une part l'horizon d'un an des exigences de solvabilité n'est pas en adéquation avec les engagements à long terme des fonds de retraite. D'autre part, la politique d'investissement sous Solvabilité II pénalise fortement les investissements sur des actifs risqués mais présentant un fort niveau de rendement (actions et immobilier par exemple) sur le long terme.

L'ordonnance n 2017-484 du 6 avril 2017 relative à la création d'organismes dédiés à l'exercice de l'activité de retraite professionnelle supplémentaire a mis en place les fonds de retraite professionnelle supplémentaires (FRPS) dans le but de répondre à cette problématique.

Les FRPS permettent un retour au cadre prudentiel Solvabilité I plus souple, avec l'introduction de tests de résistance.

Ce mémoire propose d'étudier l'impact de la réglementation FRPS sur la gestion des fonds de retraite. L'étude est menée sur un contrat de retraite supplémentaire de type article 83.

Pour répondre à cette problématique, deux outils sont développés et implémentés sous R.

Un outil ALM déterministe modélisant les tests de résistance FRPS qui permet de dresser un abaque mesurant le coût en fonds propres supplémentaires

engendrés par les stress tests.

Un outil de projection ALM stochastique qui utilise un générateur de scénarios économiques pour projeter le portefeuille sur plusieurs trajectoires en monde réel.

Les deux outils de projections implémentés sont ensuite utilisés conjointement afin d'optimiser le rendement de l'actif sous contrainte FRPS dans le but de trouver une allocation d'actifs optimale.

Abstracts

Keywords: FRPS, Supplementary pensions, ALM, Asset-Liability management, Strategic asset allocation, Optimisation

In France, the present pension system relies on solidarity between generations, being based upon redistribution. Population ageing or a decreasing birthrate may thus strongly impact it, being likely to reduce the pensions paid by both universal and complementary systems. Supplementary pensions could solve the problem. People might invest in these products in order to guarantee an extra income when retired. However the market of supplementary's pension plan still has a marginal share in the France's retirement funding. Pension funds conform to Solvency II norm, which seems inappropriate. First, the one year solvability horizon does not meet the long term requirements of pension funds. Furthermore, investment policy based on this norm strongly underrates risky investments with high long-term yields (such as shares or real-estate).

The ordinance 2017-484 of April 6th, 2017 on creation of organizations dedicated to supplementary pensions sets up the supplementary professional pension funds (FRPS) in order to tackle this issue.

The FRPS allows to use of the more flexible Solvabilité 1 frame, plus stress tests. The object of this report is to study the impact of FRPS regulations on management of pension funds. We base our study on a supplementary pension policy obeying article 83.

In order to address this issue, we develop and implement in R two ALM tools.

A deterministic ALM tool modelizing the FRPS stress tests. This allows to build a chart that gives the cost in extra equity capital generated by these tests.

A stochastic projective ALM tool using an economic scenarii generator in order to follow the portfolio along various real world trajectories.

Both tools are used to find an optimal asset allocation obeying the FRPS rule.

Synthèse

Contexte

En France le système de retraite actuel est presque exclusivement fondé sur la répartition où les cotisations des actifs servent à payer les prestations des retraités.

Cependant il est mis à l'épreuve notamment par le vieillissement de la population et une diminution de la natalité, qui risquent d'entraîner la diminution des retraites servies par les régimes obligatoires de base et les régimes complémentaires. Ces difficultés pourraient pousser les assurés à investir dans des régimes supplémentaires pour s'assurer un complément de revenu pendant leur retraite.

Bien qu'étant considérée comme une alternative aux difficultés rencontrées par le système de retraite actuel, la retraite supplémentaire constitue encore une part marginale de l'ensemble de la retraite en France (2% de l'ensemble des prestations versées et 4,8% de l'ensemble des cotisations collectées en 2016, selon la DRESS).

Cadre prudentiel des fonds de retraite supplémentaire

Les fonds de retraite supplémentaire correspondent majoritairement à des contrats collectifs d'assurance retraite gérés par les organismes assureurs et soumis à la réglementation Solvabilité II.

Cependant la réglementation Solvabilité II semble peu appropriée à la gestion des fonds de retraites. En effet, d'une part les exigences de solvabilité à horizon d'un an ne sont pas en adéquation avec les engagements à long terme des fonds de retraite. D'autre part, la politique d'investissement sous Solvabilité II pénalise fortement les investissements sur des actifs risqués avec des perspectives de rendements élevés à long terme.

En 2016, le président Emmanuel Macron a pris la décision de créer des organismes spécifiques destinés à la retraite professionnelle supplémentaire : les Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire (FRPS).

Les FRPS permettent de s'affranchir de la réglementation Solvabilité II en revenant à un cadre de gestion financière plus en accord avec les spécificités de la retraite. Ce cadre est proche de celui défini par Solvabilité I mais avec l'ajout de tests de résistance.

Définition de la problématique

Le problème posé et auquel ce mémoire s'efforce de répondre est de mesurer le coût en fonds propres engendré par la nouvelle réglementation FRPS. Il s'agit aussi d'étudier la possibilité que cette nouvelle réglementation permette de consacrer une allocation plus conséquente en actif risqué. Cela dans le but d'obtenir un meilleur rendement de l'actif et donc une revalorisation des rentes plus compétitive.

Pour répondre à ces questions, deux outils sont développés et implémentés sous R dans le cadre de ce mémoire.

Le premier est un outil de gestion actif/passif déterministe permettant de modéliser les tests de résistance FRPS. Il est appelé dans la suite *outil déterministe FRPS*.

Le deuxième est un outil de gestion actif-passif (ALM) stochastique donnant la possibilité de projeter les portefeuilles de retraite selon des scénarios générés par un générateur de scénarios économiques (GSE). L'utilisation conjointe de ces deux outils permet ensuite la mise en oeuvre d'un programme d'optimisation du rendement de l'actif dans le but de déterminer une allocation optimale d'actifs initiale sous les contraintes réglementaires posées par le cadre FRPS. Cette étude est menée sur des portefeuilles de retraite de type article 83 à cotisations définies, classique de type «Rentes Viagères Immédiates». Les cotisations sont capitalisées au cours d'une phase d'épargne puis converties en rente lors de la phase de restitution selon les taux techniques et les tables de mortalité en vigueur à cette date.

Il s'agit de portefeuilles constitués pour une part de rentiers et d'autre part d'actifs (ne touchant pas de rente), mais en *run off*, c'est à dire un portefeuille fermé (aucun nouveau bénéficiaire en cours de projections). Les adhérents en phase de cotisation versent des primes pendant la projection.

Outils développés

Les deux outils développés dans le cadre du mémoire sont similaires. Ils modélisent tous deux la gestion des actifs et des passifs relatifs à un portefeuille de retraite et permettent de projeter le bilan assurantiel sur T années. Ils diffèrent au niveau de la politique de gestion des placements considérée et au niveau des scénarios de projection des actifs financiers utilisés.

La modélisation du passif obéit à des règles comptables et réglementaires. Chaque année l'assureur est tenu d'honorer ses engagements; c'est-à-dire verser les rentes dues aux assurés ainsi que de revaloriser les rentes futures constituant les provisions mathématiques.

Ce mécanisme de revalorisation fait partie des interactions entre l'actif et le passif du bilan, et est étroitement lié à la problématique qui nous motive, puisqu'il dépend entre autres du rendement comptable de l'actif (TRA).

Le TRA est défini comme le rapport entre le résultat financier dégagé par les

placements financiers et la valeur nette comptable totale de l'actif.

La revalorisation est déterminée par trois mécanismes.

La participation aux bénéfices réglementaire : l'assureur est tenu de reverser au global, 85% du résultat financier et 90% du résultat technique.

La participation aux bénéfices contractuelle : l'assureur s'engage contractuellement à redistribuer aux assurés un pourcentage du résultat financier.

Le taux minimum garanti (TMG) : l'assureur s'engage contractuellement à revaloriser ses engagements à un taux fixé, le *TMG*.

Les fonds confiés par les assurés sont investis dans des actifs financiers. L'ensemble de ces placements constitue le portefeuille d'actifs de l'assureur gérés majoritairement dans le cadre de fonds euros (avec garantie de capital). Ces placements permettent de dégager un résultat financier.

L'actif du portefeuille est constitué d'une portefeuille considéré est simplifié, on considère qu'il se compose initialement de deux actifs :

1. **Un actif risqué :** il se compose des deux poches actions *EUR* et *FOR* ainsi que d'une poche d'actifs immobiliers *I*.
2. **Un actif non risqué :** il se compose d'obligations cotées au pair et relatives à différentes maturités résiduelles.

Par ailleurs, la politique de gestion diffère selon les outils.

Dans le cas de l'outil de gestion actif-passif (ALM) stochastique, les règles de gestion se rapprochent d'une stratégie *buy and hold*. Les actifs obligataires sont gardés jusqu'à leur maturité et les transactions sont restreintes autant que possible.

Dans le cas de l'outil ALM adapté au cadre FRPS, la réglementation impose entre autres que l'allocation des actifs reste inchangée sur l'ensemble de la période de projection. Les règles de gestion sont donc aménagées afin de satisfaire aux exigences réglementaires FRPS.

L'optimisation mise en oeuvre dans ce mémoire vise à maximiser un critère de rentabilité, en l'occurrence le taux de rendement de l'actif moyen. Celui-ci est estimé en simulant l'évolution du bilan assurantiel le long de scénarios économiques stochastiques par l'intermédiaire de l'outil de gestion actif-passif stochastique.

La modélisation sous la probabilité historique s'attache à projeter les actifs financiers au plus proche de la réalité économique retranscrite par les historiques de données. Cet univers de modélisation est donc à privilégier afin de déterminer un critère de rentabilité comme le rendement d'un portefeuille financier. Il s'agit de l'univers de modélisation retenu dans le cadre de ce mémoire.

La mise en place d'un GSE est un dispositif complexe. Aussi, nous nous

sommes servis du GSE risque neutre développé par le cabinet Galéa. Pour la modélisation des taux d'intérêt, nous avons décidé d'utiliser le modèle gaussien à deux facteurs (G2++) dont le calibrage était déjà implémenté et avons fait l'hypothèse, très simplificatrice, que les taux d'intérêt sous la probabilité risque-neutre sont identiques sous la probabilité historique. Cette hypothèse représente néanmoins une des limites du cadre de modélisation déployé. Toutefois, les cours des actions et de l'indice immobilier ont fait l'objet d'une modélisation spécifique sous la probabilité historique.

L'algorithme d'optimisation retenu dans ce mémoire s'inscrit dans la classe des algorithmes de recherche directe. Celui-ci, intitulé COBYLA (Constrained Optimization By Linear Approximation) généralise *la méthode du simplexe*, en autorisant la minimisation d'une fonction cible sujette à plusieurs contraintes sans nécessiter d'hypothèse de régularité. Il est donc particulièrement bien adapté aux sorties d'un outil de projection ALM qui ne sont pas toujours des fonctions régulières.

Abaque

Pour respecter la réglementation FRPS, l'assureur doit mettre en oeuvre des tests de résistance. Cette étape consiste à calculer la marge de solvabilité (MS) et l'exigence de marge de solvabilité (EMS) pour quatre scénarios, un scénario central prolongeant les conditions économique à la date de projection initiale et trois scénarios relatifs à des conditions économiques stressées :

1. Un scénario de baisse des taux d'intérêts ;
2. Un scénario de baisse des rendements des actifs non amortissables ;
3. Un scénario de baisse de la mortalité.

Dans le cas où, pour l'un des scénarios énumérés ci-dessus, le ratio de solvabilité $\frac{MS}{EMS}$ devient inférieur à 100% sur la période de projection de 10 ans préconisée par la réglementation, l'ACPR peut demander un plan de convergence. L'assureur doit alors ajouter un certain montant à ses fonds propres, appelé *capital add on*.

Formellement, pour chaque scénario, ce dernier correspond à la fraction $\frac{EMS-MS}{t}$ où t est la première date de l'horizon de projection à laquelle le ratio de solvabilité passe en dessous de 1.

Il est à noter que la réglementation n'apporte, à ce jour, pas de réponse définitive quant à la méthodologie d'agrégation du *capital add on* sur l'ensemble des scénarios de choc. C'est pourquoi, dans le cadre de ce mémoire, nous avons choisi de retenir le plus coûteux.

A partir de l'outil ALM adapté au cadre FRPS que nous avons implémenté, nous avons produit un abaque permettant d'exhiber les sensibilités d'un portefeuille de retraite aux tests de résistance. Les paramètres utilisés pour déterminer ces sensibilités sont les suivants.

Paramètres variables				
Taux minimum garanti (TMG)	0,50%	1,50%	2,00%	3,00%
Capitaux propres initiaux	4 % $PM(0)$	5 % $PM(0)$	8 % $PM(0)$	
Taux de participation aux bénéfices (PB)	85%	90%	95%	

Les résultats obtenus présentés sous forme de tableaux dans le corps du mémoire sont : le scénario de stress considéré le plus pénalisant, le coût associé à ce dernier (exprimé à la fois en pourcentage des fonds propres initiaux et à la fois en pourcentage des provisions mathématiques initiales) ainsi que l'horizon de déclenchement du stress test. Les tableaux suivants résument les principaux résultats de l'abaque au 31/12/2017 et pour 108 combinaisons distinctes des paramètres définis ci-dessus.

	Maximum	Minimum	Moyenne
Coût du test FRPS (en % PM initiales)	1,26%	0,02%	0,33%
Coût du test FRPS (en % FP initiaux)	31,60%	0,34%	7,29%
Horizon N d'activation du test	10	1	3,73

Ces résultats, ne prennent en considération que les portefeuilles de retraite pour lesquels au moins un des stress tests ne satisfait pas aux exigences réglementaires.

Sur les 108 portefeuilles de retraite testés, seuls 28 vérifient tous les stress test. Le tableau suivant dénombre les occurrences de non satisfaction des exigences réglementaires :

	Nombre de fois où le stress test se déclenche
Scénario de baisse des taux d'intérêts	18
Scénario de baisse des rendements financiers	57
Scénario de baisse de la mortalité	12

Pour un portefeuille donné, ces résultats font ressortir plusieurs conclusions :

1. Plus la capitalisation initiale (i.e. le niveau initial de fonds propres) est importante, mieux le portefeuille supporte les stress tests ;
2. Les stress tests sont très défavorables pour des niveaux de taux minimum garanti élevés, en particulier à partir de 2% ;
3. La clause de participation aux bénéfices contractuelle a peu d'influence sur le coût des stress tests car les contraintes imposées par le taux minimum garanti sont plus exigeantes que les contraintes dues à la participation aux bénéfices.

Allocation d'actifs optimale

La moyenne du rendement cumulé afférent à chaque trajectoire de l'outil ALM stochastique est optimisée sous les trois contraintes suivantes :

- (i) Les tests de résistances ne doivent pas conduire à la constitution d'un capital add on. Autrement dit, le ratio de solvabilité de l'ensemble des scénarios de stress doit rester supérieur à 100% ;
- (ii) Le quantile à 25% des fonds propres doit rester positif au cours de la projection, c'est-à-dire que dans 75% des cas, les fonds propres sont positifs ;
- (iii) La moyenne des fonds propres doit rester positive, à chaque pas de la projection.

On simule sous la probabilité historique, $l_s \in \mathbb{N}^*$ trajectoires de la courbe des taux zéro coupon, des cours des actions et de l'indice immobilier sur un ensemble de dates equi-espacées au pas $\Delta = 1an$ noté $\tau_s = \{T_0 = 0, \dots, T_H\}$, $H \in \mathbb{N}^*$. Ici, on considère $T_H = 10ans$.

On appelle allocation en actif risqué, la somme des parts en valeur nette comptable, représentées par les poches actions et la poche d'actifs immobiliers dans le portefeuille d'actifs. Pour une allocation initiale en actif risqué $0 \leq \alpha \leq 1$ donnée, où α reste constant pendant la durée de la projection, l'outil ALM stochastique renvoie pour chaque trajectoire, $1 \leq k \leq l_s$ et chaque date de projection $t \in \tau_s$ plusieurs indicateurs, dont le taux de rendement de l'actif noté $TRA^k(t, \alpha)$ et le niveau des fonds propres noté $FP^k(t, \alpha)$. L'indicateur agrégé à optimiser est alors défini tel quel, on pose la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\alpha \in [0, 1]$ par

$$f(\alpha) = -\frac{1}{l_s} \sum_{k=1}^{l_s} \prod_{t \in \tau_s} (1 + TRA^k(t, \alpha))$$

La forme de la fonction à optimiser peut être appréhendée dans le graphique suivant :

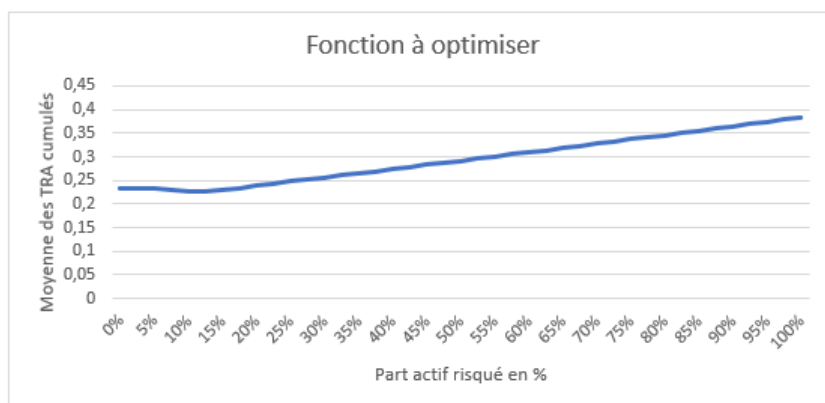


FIGURE 1 – Tracé de la fonction à optimiser

L'optimisation a été menée sur un portefeuille en *run off*, c'est à dire sans nouveaux entrants, mais avec des primes versées par les adhérents en phase de cotisation, pour

$l_s = 5000$ trajectoires. L'allocation initiale résultant de l'optimisation et le TRA cumulé moyen sont présentés ci-dessous.

Allocation initiale actif risqué	Allocation initiale actif non risqué	TRA moyen annualisé
33,3%	66,7%	3,12%

L'optimisation permet d'aboutir à une allocation importante en actif risqué (plus de 30%), sans coût supplémentaire en Fonds Propres, et d'obtenir un rendement de l'actif compétitif.

Le portefeuille optimisé présente un actif diversifié. La duration de l'actif non risqué est d'environ sept ans, et la duration du passif de 21 ans environ. Les résultats obtenus dans cette étude sont donc exploitables en tant que tels.

Cependant les outils implémentés n'atteignent pas le niveau de sophistication de ceux développés par des entreprises d'assurance, notamment au niveau de l'étalement de la distribution de la participation aux bénéfices aux assurés. Cette étude a été menée pour un portefeuille moyen d'engagements, et un assureur pourrait mettre en oeuvre cette même démarche en prenant en compte les spécificités de son portefeuille.

Synthesis

Context

In France, the present pension system is based almost exclusively on contributory system where working people's contributions are used to pay for the benefits of retired people.

This system is being tested however by population ageing and a decreasing birth rate which could lead to reduce the pensions paid under the first pillar (public, compulsory and pay-as-you-go pensions) as under the complementary pensions. Those difficulties could lead insured people to invest in supplementary products in order to guarantee an extra income when retired.

Supplementary pensions constitute only a marginal part yet in the whole retirement system in France (2% of the benefits paid and 4.8% of the contributions collected, in 2016, according to DRESS) although it is considered as an alternative means to present pensions systems difficulties.

Prudential framework of supplementary retirement

Supplementary pensions are mostly collective pension insurance contracts which are managed by supplementary pension funds that are subject to Solvency 2.

Solvency 2 frame seems however less appropriate for the management of pension funds. On the one hand indeed, solvency requirements within a one year time frame are not in line with long-term commitments of the pension funds. On the other hand, investment policy under solvency 2 frame strongly penalizes investments in risky assets with high rates of return in the long-term.

In 2016, President Macron decided to create specific agencies aimed to manage the supplementary pensions : the Supplementary Professional Pension Funds (FRPS).

FRPS make it possible to be free from Solvency 2 frame by coming back to a financial management frame more congruent with specificities of pensions retirement. This frame follows closely Solvency 2 frame but with addition of stress test.

Définition of the issue

The object of this report consists in trying to solve a problem by measuring the cost for equity generated by the new FRPS regulation. The study

also examines the opportunity for this new legislation to allow an higher allocation in risky assets. The aim is to obtain a better return on the assets, then a revaluation of more competitive rent annuities.

To answer these questions, two tools are developed and implemented under R as part of this report.

The first one is a deterministic asset/liability management tool which makes it possible to model FRPS stress tests. It is called afterwards FRPS deterministic tool.

The second one is a stochastic asset/liability management tool which allows to project retirement portfolio according to scenarios which are generated by an Economic Scenarios Generator(GSE). The joint use of these two tools enables then to implement an optimization program for the return on assets, with the aim to determine initial optimal allocation for assets under the regulatory constraints of the FRPS frame. This study is conducted on retirement portfolios according article 83, then defined-contributions, classic type “Immediate Life Annuities”. The contributions are capitalized during a saving time and then converted into annuities at the restitution phase according the technical rates and the mortality tables in force on that date.

It consists in large part in portfolios of annuitants on one hand, and working-people on the other hand, but in “run off”, which means that no new entrant is allowed during projections. The working people pay contributions during the whole period of projection.

Developped tools

The two developed tools in this study are similar. They both model asset/liability management into a retirement portfolio and make it possible to project the insurance balance on T years. They differ for the investment management policy and for the projection scenarios of financial assets used.

The liability modelling is subject to accounting rules and regulations. Each year, the insurer has to honour its commitments ; it means he has to pay the annuities dues to the insured persons and to revalue the future annuities that constitute the mathematical reserves. This revalorisation mechanism belongs to the interactions between the asset and liability sides of the balance sheet and is closely linked to the issue that motivates us, because it depends on the asset’s book yield (ARR).

The ARR is defined as the ratio between the financial result generated by the financial investments and the total net book value of the assets.

Revaluation is determined by three mechanisms.

Regulatory profit-sharing : the insurer is required to pay overall 85% of the financial result and 90% of the technical result.

Participation in the contractual benefits : the insurer undertakes to redistribute to the insured persons as a percentage of the financial result.

The Guaranteed Minimum Rate : the insurer contractually commits to

revaluing its commitments at a fixed rate, the GMT.

Funds given by the insured persons are invested in financial assets. All these investments constitute the portfolio of assets of the insurer, mainly managed in the context of euro funds. (with capital guarantee). These investments allow to generate a financial result. The portfolio considered is simplified, it is considered that it consists initially of two assets :

1. A risky asset, containing two equity pockets EUR and FOR and a real estate pocket I.
2. A non risky asset, obligations rated at maturity and with a set of different maturities and coupons,

Furthermore, the management policy differs according to the tools.

In the case of the stochastic asset/liability management (ALM) tool, the business rules are similar to a buy and hold strategy. Bond assets are held to maturity and transactions are restricted as much as possible.

In the case of the ALM tool adapted to the FRPS framework, the regulation requires, among other things that the allocation of assets remains unchanged over the entire projection period. Management rules are therefore developed to meet FRPS regulatory requirements.

The optimization implemented in this report aims to maximize a profitability criterion, in this case the rate of return on average assets. This is estimated by simulating the evolution of the insurance balance sheet along stochastic economic scenarios through the stochastic asset-liability management tool.

Modeling under historical probability focuses on projecting financial assets closer to the economic reality transcribed by historical data. This modelling universe is therefore to be promoted in order to determine a profitability criterion such as the return rate of a financial portfolio. This is the modelling universe used in this report.

The establishment of a GSE is a complex device. Also, we have used the GSE neutral risk developed by Galéa firm. For the modelling of interest rates, we decided to use the two factors Gaussian model (G2++) whose calibration was already implemented and we chose very simplistic hypothesis which are that the interest rates under the probability risk-neutral are identical under historical probability. This hypothesis nevertheless represents one of the limitations of the deployed modelling framework.

However, the modelling of the share price was made with specific modelling under historical probability.

The optimization algorithm used in this report is part of the class direct search algorithms. This one, entitled COBYLA (Constrained Optimization By Linear Approximation) generalizes the method of simplex, by allowing the minimization of a target function subject to several constraints without requiring a regularity assumption. It is therefore particularly well suited to the outputs of an ALM projection tool that are not always regular functions.

Abacus

In order to satisfy FRPS regulations, the insurer has to implement stress tests. This steps consists of calculating the solvency margin (MS) and the solvency margin requirement (EMS) for four scenarios, a central scenario prolonging the economic conditions at the initial projection date and three scenarios relating to stressed economic conditions :

1. A scenario of falling interest rates ;
2. A scenario of declining returns on non-depreciable assets ;
3. A scenario of lower mortality.

In the case where, for one of the scenarios listed above, the solvency ratio MS/EMS becomes less than 100% over the 10 year projection period recommended by the regulations, the ACPR may request a convergence plan. The insurer must then add a certain amount to its equities, called capital add on. Formally, for each scenario, the latter corresponds to the fraction $EMS-MS/t$ where t is the first date of the projection horizon at which the ratio of viability drops below 1. It should be noted that regulations do not, to this day, provide a definite answer to the methodology of aggregation of capital add on the whole shock scenarios. That's why, as part of this report, we chose to retain the most expensive.

From the ALM tool adapted to the FRPS framework that we have implemented, we produced an abacus to display the sensitivities of a pension portfolio with stress tests. The parameters used to define these sensitivities are as follows.

Variable parameters				
Guaranteed minimum rate (GMT)	0,50%	1,50%	2,00%	3,00%
Initial equity	4 % $PM(0)$	5 % $PM(0)$	8 % $PM(0)$	
Participation rate profits	85%	90%	95%	

The results obtained presented in the form of tables in the body of the report are : the stress scenario considered as the most penalizing, the cost associated with the latter (expressed both as a percentage of the initial equity and as a percentage of the mathematical reserves initials) as well as the triggering horizon of the stress test. The following tables summarize the main results of the chart as 31/12/2017 and for 108 different combinations of the parameters defined above.

	High	Low	Average
FRPS test costs (in % of initial PM)	1,26%	0,02%	0,33%
FRPS test costs (in % of initial FP)	31,60%	0,34%	7,29%
HORIZON N activation test	10	1	3,73

Those results, and in particular the minimum column, only consider pension portfolio for which at least one of the stress tests does not meet the regulatory requirements.

	Number of times the stress test goes off
Scenario for declining interest rates	18
Downside Scenario	57
Scenario for decreasing mortality	12

For a given portfolio, these results highlight several conclusions :

1. The higher the initial capitalization (i.e the initial level of capital), the better the portfolio supports stress tests ;
2. Stress tests are very unfavourable for high guaranteed minimum rate levels, especially from 2%.
3. The contractual profit-sharing clausud has little influence on the cost of stress tests because the constraints imposed by the guaranteed minimum rate are more demanding than the constraints due to profit-sharing.

Optimal Asset Allocation

The average cumulative yield for each trajectory of the stochastic tool ALM is optimized under the following three constraints :

- (i) The resistance test must not lead to the constitution of an add on capital. In other words, the solvency ratio of all stress scenarios must remain higher than 100% ;
- (ii) The 25% equity balance must remain positive during the projection, ie in 75% of the cases the equity is positive. ;
- (iii) La moyenne des fonds propres doit rester positive, à chaque pas de la projection.

We simulate, under the historical probability, $l_s \in \mathbb{N}^*$ trajectories of the zero coupon yield curve and the price of the equity index on a set of dates in step $\Delta = 1year$ noté $\tau_s = \{T_0 = 0, \dots, T_H\}$, $H \in \mathbb{N}^*$. Here, we consider $T_H = 10years$.

For an initial allocation in risky assets $0 \leq \alpha \leq 1$ given, the stochastic ALM tool returns for each path, $1 \leq k \leq l_s$ and each projection date $t \in \tau_s$ several indicators, including the rated rate of return on assets $TRA^k(t, \alpha)$ and the level of equities noted $FP^k(t, \alpha)$.

The aggregated indicator to be optimized is then defined as it is, we put the function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ defined for all $\alpha \in [0, 1]$ with

$$f(\alpha) = -\frac{1}{l_s} \sum_{k=1}^{l_s} \prod_{t \in \tau_s} (1 + TRA^k(t, \alpha))$$

The form of the function to be optimized can be seen in the following graph

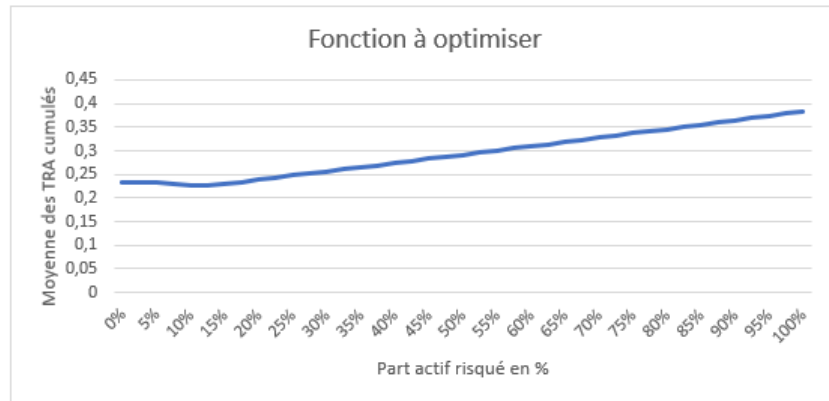


FIGURE 2 – Tracing of the function to be optimized

The optimization was conducted on a portfolio in *run off* and for $l_s = 5000$ trajectoires. The initial allocation resulting from optimization and the average cumulative TRA are presented below .

Initial share allocation	Initial allocation average	Aggregated TRA bond
33,3%	66,7%	3,12%

The optimisation allows us to obtain a much more important allocation in risky assets (more than 30 %), without a supplementary cost. The portfolio optimised presents a diversified asset. The duration of the non risky asset is around seven years, compared to the liability's duration of 21 years. The results we obtain can be applied in practice.

But the tools developed in this study are not as sophisticated as the ones used in insurance companies, particularly there is no spread of the participation rate profits. This study was conducted on an average portfolio and the procedure can be applied by an insurer with the specificities of his own portfolio taken in account.

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais en premier lieu exprimer toute ma reconnaissance à Norbert Gautron pour m'avoir accueillie au sein de son cabinet et pour avoir guidé mon travail.

Je voudrais également exprimer ma gratitude envers Maud Vannier-Moreau associée au sein du cabinet et responsable du pôle « Protection Sociale » pour les conseils et les remarques qu'elle m'a donnés, ainsi qu'à Pierre Therond, « associé du pôle Normes et Modèles », pour sa relecture et ses conseils.

Je remercie tout particulièrement ma tutrice Nadia Eng pour sa patience, sa disponibilité, ses judicieux conseils qui ont contribué à alimenter ma réflexion ainsi que pour son soutien sans faille et son implication tout au long de ce travail de mémoire.

Je remercie aussi Florence Chiu pour ses conseils avisés et le temps qu'elle a consacré pour m'aider à progresser.

Je remercie enfin toute l'équipe de Galéa pour l'ambiance de travail agréable qui a constitué un support moral tout au long de l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier mon tuteur académique Alexis Merx pour son suivi durant ce travail de mémoire.

J'adresse tous mes remerciements à l'ensemble des enseignants de l'EURIA, en particulier Franck Vermet, directeur des études, et Marc Quincampoix, directeur, pour la formation de qualité que j'ai eu la chance de recevoir durant mes années d'études dans cet établissement.

Enfin je tiens à remercier mon mari Pierre-Edouard Arrouy pour son soutien indéfectible pendant la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Retraite	7
2.1	La retraite fondements et principes	7
2.1.1	Généralités	7
2.1.2	La retraite en France, premier étage : les régimes de base	9
2.1.3	La retraite en France, deuxième étage : les régimes complémentaires obligatoires	11
2.1.4	La retraite en France, troisième étage : les régimes supplémentaires	12
2.2	Cadre réglementaire de l'épargne retraite supplémentaire	20
2.2.1	Solvabilité 2	21
2.2.2	FRPS	23
3	Projection actif/passif	29
3.1	Introduction des objectifs	29
3.2	Généralités et notions utiles	29
3.2.1	Table de mortalité	29
3.3	Caractéristiques des portefeuilles projetés	30
3.4	Modélisation des engagements de l'assureur	32
3.4.1	Généralités	32
3.4.2	Primes	32
3.4.3	Montant provisionné pour l'adhérent à la date de liquidation	33
3.4.4	Rentes	34
3.4.5	Provisions Mathématiques	34
3.4.6	Revalorisation	36
3.4.7	Indicateurs FRPS	39
3.5	Modélisation des placements financiers	39
3.5.1	Introduction sur les taux d'intérêts	39
3.5.2	Obligations et mécanismes comptables associés	42
3.5.3	Actions et mécanismes comptables associés	44
3.6	Politique de gestion des placements	48
3.6.1	Caractéristiques du portefeuille initial d'actifs	48
3.6.2	Politique de gestion des placements de l'outil ALM stochastique	49

3.6.3	Politique de gestion des placements appliquée au cadre FRPS . . .	50
3.6.4	Mécanismes sous-jacents aux investissements ou désinvestissements	51
4	Générateur de scénarios économiques (GSE)	57
4.1	Modélisation des taux d'intérêts	58
4.1.1	Probabilité risque neutre et changement de numéraire	58
4.1.2	Swaptions	59
4.1.3	Modèle gaussien à deux facteurs (G2++)	61
4.2	Modélisation du cours des actions et de l'indice immobilier	69
4.2.1	Calibrage du modèle	69
4.2.2	Simulation du modèle	70
4.2.3	Modélisation des dividendes	72
5	Optimisation et Abaque	73
5.1	Un peu d'histoire autour de l'optimisation	73
5.2	Algorithmes de recherche directe	74
5.2.1	Algorithme de Nelder et Mead	74
5.2.2	Algorithme COBYLA	77
5.3	Formulation du problème	78
6	Résultats	81
6.1	Abaque FRPS	81
6.1.1	Objectifs et indicateurs présentés dans l'abaque	81
6.1.2	Description des portefeuilles retenus pour l'abaque	82
6.1.3	Abaque	84
6.1.4	Analyse de l'abaque	87
6.2	Allocation stratégique optimale	93
6.2.1	Portefeuille testé et contraintes d'optimisation retenues	93
6.2.2	Tests de robustesse	98
7	Conclusion	105
A	GSE PRIIPS	109
A.1	Extraction des données historiques	109
A.2	Lissage des historiques de rendements des courbes	110
A.3	Simulation des actifs par ré-échantillonnage multivarié	111
B	Abaque FRPS	115
C	Optimisation sans primes	119
	Bibliographie	122

Table des figures

1	Tracé de la fonction à optimiser	x
2	Tracing of the function to be optimized	xviii
2.1	Produits de retraite supplémentaire souscrits à titre individuel	14
2.2	Produits de retraite supplémentaire souscrits à titre professionnel	15
2.3	Taux de remplacement moyen sur cycle de vie	17
2.4	Evolution du nombre d'adhérents	18
2.5	Evolution des cotisations	18
2.6	Evolution des PM	18
2.7	Part de la retraite supplémentaire dans l'ensemble des régimes de retraite	19
2.8	Les trois piliers de Solvabilité II	22
2.9	Taux de revalorisation de 2011 à 2017	23
2.10	Calendrier de mise en place de FRPS	24
2.11	Conditions de création et transferts de FRPS	24
3.1	Calcul des PM en phase de cotisation	35
3.2	Calcul des PM en phase de service	36
3.3	Processus de revalorisation	38
4.1	Courbe des taux réglementaire EIOPA au 31/12/2017 (CRA=10bp, VA=4bp, UFR=4,2%	67
4.2	Volatilités log-normales de marché des swaptions à la monnaie au 31/12/2017	68
4.3	Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 5 ans issues du G2++	69
4.4	Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 10 ans issues du G2++	69
4.5	Enveloppes des trajectoires des rendement de l'action <i>EUR</i> (Eurostoxx 50) issues du modèle action	71
4.6	Enveloppes des trajectoires des rendement de l'action <i>FOR</i> (S&P 500) issues du modèle action	71
4.7	Enveloppes des trajectoires des rendement de l'indice immobilier <i>I</i> (IPD Euro) issues du modèle action	72
6.1	Abaque pour une allocation de 10% en actif risqué et une PB de 90% . . .	85

6.2	Abaque pour une allocation de 30% en actif risqué et une PB de 90% . . .	86
6.3	Abaque pour une allocation de 40% en actif risqué et une PB de 90% . . .	87
6.4	Chocs de baisse des taux d'intérêt et des actifs non amortissables	89
6.5	Choc de baisse de la mortalité	89
6.6	TRA et résultats financiers, allocation 10 % en actif risqué	91
6.7	TRA et résultats financiers, allocation 30 % en actif risqué	91
6.8	TRA et résultats financiers, allocation 40 % en actif risqué	92
6.9	Fonction f à optimiser en fonction de l'allocation initiale en actif risqué .	94
6.10	Répartition de l'actif pour la fonction à optimiser	95
6.11	Evolution des Fonds Propres	96
6.12	Evolution du TRA	97
6.13	Evolution des Provisions Mathématiques	98
6.14	Evolution des PM - FP initiaux = 9% des PM initiales	99
6.15	Evolution des FP - FP initiaux = 9% des PM initiales	99
6.16	Evolution du TRA - FP initiaux = 9% des PM initiales	100
6.17	Evolution des PM - FP initiaux = 7% des PM initiales	101
6.18	Evolution des FP - FP initiaux = 7% des PM initiales	101
6.19	Evolution du TRA - FP initiaux = 7% des PM initiales	101
6.20	Evolution des PM - prime de risque action de 2,67%	102
6.21	Evolution des FP - prime de risque action de 2,67%	102
6.22	Evolution du TRA - prime de risque action de 2,67%	102
A.1	Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 5 ans . . .	112
A.2	Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 10 ans . . .	113
A.3	Enveloppes des trajectoires des rendement de l'action	113
B.1	Abaque pour une allocation de 10% action et une PB de 95%	115
B.2	Abaque pour une allocation de 30% action et une PB de 95%	116
B.3	Abaque pour une allocation de 40% action et une PB de 95%	116
B.4	Abaque pour une allocation de 10% action et une PB de 85%	117
B.5	Abaque pour une allocation de 30% action et une PB de 85%	117
B.6	Abaque pour une allocation de 40% action et une PB de 85%	118
C.1	Evolution des PM - prime de risque action de 2,67%	119
C.2	Evolution des FP - prime de risque action de 2,67%	119
C.3	Evolution du TRA - prime de risque action de 2,67%	120

Liste des tableaux

2.1	Modèles d'Etat Providence	7
2.2	Régimes de retraite en France	9
2.3	Conditions de départ à la retraite	11
2.4	Epargne Retraite en France et en Europe	21
3.1	Données individuelles concernant les adhérents du portefeuille	31
3.2	Paramètres généraux de projection	32

Chapitre 1

Introduction

Le système de retraite français actuel est presque exclusivement fondé sur le principe de retraite par répartition. Le mode de financement des retraites par répartition implique que les pensions actuellement reversées aux retraités sont intégralement financées par les cotisations actuelles des actifs et pose le principe de solidarité intergénérationnelle. Cependant, les régimes de retraite par répartition engendrent une très forte exposition aux risques de baisse de la natalité, de hausse du vieillissement de la population et aux variations du taux d'activité. A ce jour, cette tendance s'observe dans de nombreux pays dont la France.

Il existe cependant d'autres manières de cotiser pour sa retraite. La retraite par capitalisation permet d'éviter de créer une dépendance entre les différentes générations, puisque ce sont les cotisations versées par l'assuré au cours de sa phase d'activité qui serviront à pourvoir ses rentes.

En France, ce pan de la retraite est appelé la retraite supplémentaire, et vient en complément des régimes obligatoires. Facultatif, il est souscrit à titre individuel ou dans un cadre professionnel mais constitue une part minoritaire du financement de la retraite en France. Dans les fonds de retraite supplémentaire, l'actif adossant les engagements est investi sur les marchés financiers, le rendement de l'actif permettant alors une revalorisation des contrats.

Les fonds de retraite supplémentaires sont gérés dans un cadre assurantiel soumis à la norme Solvabilité II qui impose des exigences de fonds propres à horizon d'un an. Cette approche réglementaire n'est pourtant pas forcément adaptée à une gestion de fonds de retraite dont les horizons sont d'une trentaine d'année.

L'ordonnance n° 2017-484 du 6 avril 2017 relative à la création d'organismes dédiés à l'exercice de l'activité de retraite professionnelle supplémentaire a mis en place les fonds de retraite professionnelle supplémentaires (FRPS) dans le but de répondre à cette problématique.

Les FRPS constituent un retour vers les contraintes réglementaires plus souples de Solvabilité I, mais avec l'introduction de stress tests sur un horizon dix ans, que les fonds de retraites doivent être capables de supporter.

Afin de respecter les exigences de solvabilité imposées par la réglementation Solva-

bilité II, l'allocation d'actifs d'un fonds de retraite est en priorité portée sur des actifs peu risqués comme les obligations, ce qui peut nuire à la revalorisation des provisions mathématiques et donc des rentes futures, dans un contexte de taux durablement bas. En effet, les actifs risqués nécessitent une exigence en capital réglementaire plus élevée sous Solvabilité II.

Un positionnement sous la réglementation FRPS pourrait ainsi permettre une allocation plus importante en actifs risqués, induisant un meilleur espoir de rendement de l'actif, et une revalorisation des rentes plus compétitive. Autrement dit, l'introduction de structures dédiées à la retraite supplémentaire pourrait représenter l'opportunité d'un retour à un cadre de gestion financière plus adapté à la retraite tout en gardant un coût maîtrisé en capital réglementaire.

Dans ce contexte, ce mémoire propose d'étudier le coût engendré par le cadre réglementaire spécifique à FRPS ainsi que l'impact de l'allocation d'actifs initiale sur le rendement de l'actif en tenant compte des contraintes réglementaires FRPS, dans le cadre d'un contrat de retraite supplémentaire de type article 83.

A cet effet, deux outils sont développés, un outil de projection ALM stochastique et un outil de projections déterministes modélisant les tests de résistance spécifiques à FRPS. Dans le cas de l'outil de projection ALM en stochastique un générateur de scénario économiques est utilisé pour projeter le portefeuille sur plusieurs trajectoires en monde réel. Dans un premier temps, l'utilisation de l'outil de projection déterministe FRPS permet d'obtenir un abaque pour un portefeuille en fonction de plusieurs paramètres définis comme variables. Cet abaque présente la mesure du coût supplémentaire en fonds propres. Dans un second temps, les deux outils de projections implémentés sont utilisés conjointement afin de mener une optimisation du rendement de l'actif sous la contrainte réglementaire FRPS dans le but de rechercher l'allocation optimale d'actifs pour un portefeuille en *run off*.

Chapitre 2

La retraite fondements et principes

2.1 La retraite fondements et principes

2.1.1 Généralités

Il existe deux grands types de systèmes de protection sociale au sein de l'Union Européenne, les systèmes dits bismarckiens et les systèmes qualifiés de beveridgiens. Les systèmes bismarckiens fonctionnent sur le principe d'une protection sociale obligatoire, pour ce qui est de la retraite, les cotisations sont calculées en fonction du revenu d'activité professionnelle et les prestations servies pendant la retraite sont pensées pour maintenir un niveau de vie qui reste du même ordre que le niveau de vie pendant la période d'activité. C'est l'Etat qui assume la grande majorité de la protection sociale et de la retraite.

Les caractéristiques des modèles d'Etat-Providence donc de protection sociale sont présentées dans la typologie élaborée par [Esping-Andersen, 1999] et [Palier, 2011].

	Etat-Providence libéral	Etat-Providence conservateur corporatiste	Etat-Providence social démocrate
Référence historique	Beveridge	Bismarck	Beveridge
Mode de financement	Impôts	Cotisations	Impôts
Principes de fonctionnements	Indemnités modestes	Repose sur le travail salarié	Prestations sociales élevées
Exemples de pays	Grande Bretagne, Canada, Etats-Unis	Allemagne, Autriche, France, Italie	Danemark, Suède, Finlande

TABLE 2.1 – Modèles d'Etat Providence

Dans les systèmes de type beveridgiens, l'Etat ne prend en charge qu'une partie de la protection sociale, et pour ce qui est de la retraite, les prestations servies ne sont pas en

rapport avec le revenu en activité, elles ne servent qu'à assurer un revenu de subsistance minimum. Il appartient à chacun de constituer une épargne individuelle pour conserver un niveau de vie équivalent au niveau de vie en activité.

Quel que soit le système qui a eu la plus forte influence, en Europe, la retraite repose sur trois piliers. Le premier est constitué des régimes de retraite par répartition où les cotisations des actifs servent à payer les prestations des retraités, les régimes de retraite par capitalisation, où les cotisations sont investies sur le marché financier ou immobilier, forment le second pilier et le troisième pilier est l'épargne individuelle.

L'utilisation de ce terme de pilier n'est pas anodine, un bon système de retraite doit en théorie reposer sur ces trois piliers pour être sain.

Dans l'Union Européenne le dernier pilier, celui de l'épargne individuelle, est peu exploité, le second pilier ne revêt une réelle importance que dans les pays de tradition beveridgienne, et le premier pilier a un caractère quasiment exclusif dans les pays de tradition bismarckienne. La France dont le système de retraite par répartition existe depuis 1946, en fait partie.

Il est à noter que la France a depuis quelques décennies davantage d'éléments beveridgiens qu'auparavant, alors que la Grande Bretagne par exemple s'est rapprochée du modèle libéral après avoir eu un modèle plutôt social-démocrate.

La retraite en France est en effet composée de trois étages : les régimes de base, les régimes complémentaires et les dispositifs d'épargne retraite. Ces trois étages ne sont pas équivalents aux trois piliers de la retraite. Le tableau suivant décrit les régimes de retraite en France, ces informations proviennent d'une étude de la Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques (DRESS) [DRESS, 2018].

Retraite	
Premier pilier : régimes obligatoires par répartition	Régime de base (régime général, régimes alignés, régimes spéciaux de salariés, régime d'indépendants...)
	Régimes complémentaires légalement obligatoires (Arrco, Agirc, Ircantec, Rafp...)
Deuxième pilier : régimes supplémentaires ou surcomplémentaires d'entreprises, non légalement obligatoires	Contrats Article 39, Article 83, PERE, contrats Article 82 sortis en rente
	PERCO sortis en rente
Troisième pilier : Epargne retraite individuelle	PERP, Contrats destinés aux indépendants, (contrats « Madelin » ou « exploitants agricoles », contrats AVOCAPI, FONLIB et CAPIMED) ; contrats destinés aux fonctionnaires ou aux élus locaux (PREFON, COREM, CRH, FONPEL, CARFI) (retraite mutualiste du combattant REPMA, anciens PER « Balladur ».

TABLE 2.2 – Régimes de retraite en France

2.1.2 La retraite en France, premier étage : les régimes de base

Les régimes de base constituent le premier étage de la retraite en France, ils sont compris dans le premier pilier de la retraite, la retraite par répartition. Le système de retraite légal en France repose sur le mode de financement par répartition intégrale, les pensions actuellement reversées aux retraités sont intégralement financés par les cotisations des actifs d'aujourd'hui ce qui pose le principe de solidarité intergénérationnelle. De ce fait, ils sont très sensibles aux facteurs de natalité et d'allongement de la durée de vie, chaque génération hérite de la dette de la génération précédente.

Ils sont légalement obligatoires, gérés par la Sécurité Sociale et leur financement est assuré par des cotisations salariales et patronales, complétées par des dotations budgétaires.

En France il existe plus d'une vingtaine de régimes de base différents, un premier regroupement rassemble les salariés du secteur privé et les non titulaires de la fonction publique, un second regroupement concerne environ 10% des actifs non salariés et le troisième grand regroupement englobe 20% des actifs dont les bénéficiaires des régimes spéciaux (fonctionnaires, salariés d'entreprises publiques et quelques cas de salariés d'entreprises privés).

Plus précisément, les droits sont calculés par annuités en prenant en compte trois

éléments, la durée d'assurance dans le régime général exprimée en nombre de trimestres, le taux avec un maximum de 50% et le salaire annuel moyen de base, selon la formule suivante.

$$Pension = \text{Salaire annuel moyen de base} \times \text{Taux de liquidation} \\ \times \frac{\text{Duree d'assurance RG limitée a la duree maximum}}{\text{Duree d'assurance necessaire}} \times (1 + \text{Majoration})$$

Où la *Majoration* concerne les enfants ou conjoint à charge.

La durée d'assurance acquise dans le régime général correspond au nombre de trimestres validés par l'assuré. Elle évolue en fonction de l'année de naissance de l'assuré.

Le taux de liquidation est déterminé en fonction de la durée d'assurance et de l'âge plafonné à 50%, qui correspond au taux plein.

Le taux plein est obtenu si l'assuré cumule un nombre de trimestres suffisant et part à la retraite à l'âge légal, ou automatiquement à partir d'un certain âge de départ à la retraite. Le nombre de trimestres et l'âge légal de départ à la retraite dépendent de l'année de naissance de l'assuré, les réformes successives en France ayant conduit à un allongement de la durée d'assurance nécessaire pour atteindre le taux plein.

Date de naissance de l'assuré	Âge minimum légal de départ à la retraite	Âge de départ à la retraite au taux plein	Durée de cotisation (en trimestres)
1948	60 ans	65 ans	160
1949	60 ans	65 ans	161
1950	60 ans	65 ans	162
Du 1er janvier 1951 au 1er Juillet 1951	60 ans	65 ans	163
Du 1er Juillet 1951 au 31 décembre 1951	60 ans et 4 mois	65 ans et 4 mois	163
1952	60 ans et 9 mois	65 ans et 9 mois	164
1953	61 ans et 2 mois	66 ans et 2 mois	165
1954	61 ans et 7 mois	66 ans et 7 mois	165
1955	62 ans	67 ans	166
1956	62 ans	67 ans	166
1957	62 ans	67 ans	166
Du 1er Janvier 1958 au 31 décembre 1960	62 ans	67 ans	167
Du 1er Janvier 1961 au 31 décembre 1963	62 ans	67 ans	168
Du 1er Janvier 1964 au 31 décembre 1966	62 ans	67 ans	169
Du 1er Janvier 1967 au 31 décembre 1969	62 ans	67 ans	170
Du 1er Janvier 1970 au 31 décembre 1972	62 ans	67 ans	171
À partir du 1er Janvier 1973	62 ans	67 ans	172

TABLE 2.3 – Conditions de départ à la retraite

Le salaire annuel moyen de base est calculé sur la moyenne des meilleurs salaires, revalorisés pour tenir compte de l'érosion monétaire. Pour les assurés nés avant 1946, il est calculé sur les 25 meilleures années de salaire.

La pension versée ne peut excéder 50% du plafond annuel de la Sécurité Sociale (soit 1 655,50 par mois en 2018).

2.1.3 La retraite en France, deuxième étage : les régimes complémentaires obligatoires

Les régimes complémentaires obligatoires constituent le second étage de la retraite en France, ils viennent se superposer aux régimes de base et sont légalement obligatoires. Ce sont aussi des régimes par répartition, de fait soumis aux mêmes limites que les régimes de base.

Tous les salariés et non salariés du secteur privé sont affiliés à un régime complémentaire obligatoire, les cadres salariés cotisent à l'AGIRC (Association générale des institutions de retraite des cadres) et l'ensemble des salariés à l'ARRCO (Association des régimes de retraite complémentaires).

Pour les régimes spéciaux et les régimes de la fonction publique, il n'existe pas de distinction entre le régime de base et le régime complémentaire qui sont souvent gérés par la même Caisse, ils sont qualifiés de régimes intégrés.

L'AGIRC et l'ARRCO sont des systèmes fonctionnant par points. Les cotisations sont divisées par la valeur d'achat du point pour obtenir le nombre de points acquis sur l'année et pour verser les prestations, le nombre de points accumulés pendant la période active est converti en rente en multipliant par la valeur de service.

Comme pour le régime de base, les retraites complémentaires ne peuvent être touchées que si l'assuré réunit un certain nombre de conditions, à savoir avoir l'âge légal minimum ou bénéficier d'une retraite de la Sécurité Sociale taux plein.

Une fusion entre l'ARRCO et l'AGIRC est prévue au 1er janvier 2019. Elle donnera naissance à un régime de retraite obligatoire par répartition commun à tous les salariés du secteur privé, fonctionnant par points.

Ce régime ARRCO-AGIRC, sera piloté et géré par les partenaires sociaux, et s'inscrira dans la continuité des deux régimes ARRCO et AGIRC.

2.1.4 La retraite en France, troisième étage : les régimes supplémentaires

Les régimes supplémentaires constituent le troisième étage de la retraite en France. Ce sont des régimes par capitalisation, les cotisations versées par l'assuré sont investies sur le marché financier pendant la phase active et servent à payer une rente viagère pendant la retraite.

Ce système s'il est peu développé en France est parfois l'essentiel du système de retraite dans les pays de tradition beveridgienne.

La sortie obligatoire en rente distingue les régimes par capitalisation de l'épargne individuelle.

Panorama du marché de la retraite supplémentaire

Il existe deux grandes catégories de produits, les contrats à cotisations définies et les contrats à prestations définies.

Les contrats à cotisations définies définissent un niveau de financement, alors que les contrats à prestations définies garantissent un montant de prestation déterminé à l'avance, dépendant du salaire des bénéficiaires. Il existe deux sortes de régimes à prestations définies.

D'une part les régimes différentiels, dits chapeaux, où l'employeur verse la différence entre le niveau de retraite garanti par le régime supplémentaire et la somme des droits acquis au titre des autres régimes.

D'autre part les régimes additifs ou additionnels dans lesquels le montant de la rente est fixe et ne tient pas compte des pensions versées par les autres régimes.

Les produits de retraite supplémentaires se divisent en deux autres catégories, sous-crits à titre privé ou à titre professionnel.

Les deux tableaux suivants présentent les principaux produits de retraite supplémentaires disponibles sur le marché français et sont construits à partir des informations d'une étude de la DRESS [DRESS, 2018].

Les produits de retraite supplémentaire souscrits à titre privé					
Contrats à cotisations définies					
	Souscription	Cotisations	Imposition sur les cotisations	Prestations	Imposition sur les Prestations
Plan d'épargne retraite populaire (PERP)	Adhésion individuelle et facultative	Périodicité au choix et montant libre	Déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère mais sortie en capital possible sous certaines conditions	Impôt sur le revenu
Caisse nationale de prévoyance de la fonction publique (PREFON)	Fonctionnaires Adhésion facultative	Périodicité, montant et moyen de paiement au choix	Déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère mais sortie en capital possible à liquidation, à hauteur de 20% de la valeur de rachat	Impôt sur le revenu
Fonds de pension des élus locaux (FONPEL)	Elus locaux Adhésion facultative	Pourcentage fixe de l'indemnité de fonction choisi par l'affilié	Non déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère	Impôt sur le revenu (partiellement)
Caisse autonome de retraite des élus locaux-mutuelle des élus locaux (CAREL- MUDEL)	Elus locaux Adhésion facultative (remplacé par le MUDEL)	Pourcentage fixe de l'indemnité de fonction choisi par l'affilié	Non déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère	Impôt sur le revenu (partiellement)
Complément de retraite mutualiste (COREM)	Accessible à tous les particuliers	Montants libres	Déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère	Impôt sur le revenu
Complémentaire retraite des hospitaliers (CRH)	Personnel hospitalier	Salariales, basées sur des classes de cotisations choisies par l'affilié	Déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère mais sortie en capital possible à liquidation, à hauteur de 20% de la valeur de rachat	Impôt sur le revenu
Retraite mutualiste du combattant (RMC)	Titulaires de la carte combattant / titre de reconnaissance de la nation / victimes de guerre Adhésion individuelle et facultative	Minimum contractuel à respecter	Intégralement déductibles du revenu déclaré.	Rente viagère	Impôt sur le revenu (partiellement)

FIGURE 2.1 – Produits de retraite supplémentaire souscrits à titre individuel

Mémoire EURIA

Les produits de retraite supplémentaire souscrits à titre professionnel					
Contrats à cotisations définies dans un cadre individuel pour les professions indépendantes					
	Souscription	Cotisations / Primes	Imposition sur les cotisations / primes	Prestations	Imposition sur les Prestations
Contrats Madelins	Entrepreneurs individuels Adhésion individuelle	Obligation de cotisation à un montant minimal choisi à la souscription.	Déductibles du BIC ou BNC avant impôt	Rente viagère	Impôt sur le revenu
Contrats exploitants agricoles ("Madelins agricoles")	Travailleurs non salariés des entreprises agricoles Adhésion individuelle	Montant compris entre une cotisation minimale et un plafond égal à 15 fois cette cotisation minimale	Déductibles du bénéfice imposable	Rente viagère	Impôt sur le revenu
Contrats à prestations définies souscrits dans un cadre collectif par l'employeur pour le salarié					
	Souscription	Cotisations	Imposition sur les cotisations	Prestations	Imposition sur les Prestations
Article 39 du CGI	Adhésion collective	Prises en charge par l'entreprise	Déductibles de l'impôt sur les sociétés de l'entreprise	Rente viagère	Impôt sur le revenu
Contrats à cotisations définies souscrits dans un cadre collectif par l'employeur pour le salarié					
	Souscription	Cotisations	Imposition sur les cotisations	Prestations	Imposition sur les Prestations
Article 82 du CGI	Adhésion individuelle et facultative	Pourcentage du salaire pris en charge par l'entreprise	Impôt sur le revenu pour le salarié Déductibles du résultat imposable de l'entreprise	Rente viagère	Impôt sur le revenu et si sortie en capital, soumis au régime fiscal des contrats d'assurance vie
Article 83 du CGI	Adhésion collective et obligatoire	Pourcentage du salaire prises en charge par l'entreprise de façon partielle ou totale + un versement facultatif à la charge du salarié	Déductibles du résultat imposable de l'entreprise Déductibles du salaire brut pour le salarié Versements facultatifs déductibles du revenu déclaré	Rente viagère ou sortie en capital	Impôt sur le revenu
Plan d'épargne retraite entreprise (PERE) (caduque depuis la loi de 2011 sur l'art. 83)	Adhésion collective et obligatoire	Pourcentage du salaire prises en charge par l'entreprise de façon partielle ou totale + un versement facultatif à la charge du salarié	Déductibles du bénéfice imposable pour l'entreprise Versements facultatifs déductibles du revenu déclaré pour le salarié	Rente viagère	Impôt sur le revenu
Dispositif d'épargne salariale souscrit dans un cadre collectif par l'employeur pour le salarié					
	Souscription	Cotisations	Imposition sur les cotisations	Prestations	Imposition sur les Prestations
Plan d'épargne pour la retraite collective (PERCO)	Adhésion individuelle et facultative	La prise en charge par l'entreprise plafonnée 16% du PASS. Les versements volontaires de l'affilié ne peuvent excéder 25% de sa rémunération annuelle brute.	Impôt sur le revenu pour le salarié Déductibles du résultat imposable de l'entreprise	Rente viagère ou sortie en capital si l'accord collectif le permet	Impôt sur le revenu et si sortie en capital, totalement exonérée d'impôt sur le revenu
Il existe d'autres produits de retraites supplémentaires spécifiques à certaines sociétés, ils relèvent de la fiscalité de l'article 83.					

Claire-Lise Walle

FIGURE 2.2 – Produits de retraite supplémentaire souscrits à titre professionnel

Focus sur le produit de retraite supplémentaire article 83

Ce mémoire étant basé sur l'étude de contrats relevant de l'article 83 du CGI (code général des impôts), ce produit de retraite supplémentaire est décrit plus précisément dans le paragraphe suivant.

Il s'agit d'un régime à cotisations définies à adhésion obligatoire, il peut être à destination de l'ensemble du personnel ou réservé à une catégorie spécifique de collaborateurs, comme par exemple les cadres de la société.

Le principal intérêt pour le salarié est que les cotisations sont prises en charge en partie, voire en totalité, par l'employeur. Elles ne sont pas soumises à l'impôt sur le revenu jusqu'à hauteur de 8% de la rémunération annuelle brute plafonnée à 8 fois le plafond de la Sécurité Sociale, mais au forfait social, à hauteur de 20% depuis la loi de finance 2012, qui est de la responsabilité de l'employeur.

Depuis la réforme de 2010, les salariés peuvent compléter les cotisations versées à titre obligatoire par un versement à titre individuel et facultatif, ces versements sont déductibles du revenu imposable du foyer fiscal jusqu'à hauteur de 10% de la rémunération annuelle brute plafonnée à 8 fois le plafond de la Sécurité Sociale.

Toutes les cotisations sont exonérées de l'impôt de solidarité sur la fortune, elles sont cependant soumises, comme le salaire, à la CSG (9,2%) et à la CRDS (0,5%). En théorie ces contributions sont à la charge de l'employeur, mais elles sont la plupart du temps prélevées à la source par l'entreprise.

À l'âge du départ à la retraite, le capital épargné est débloqué sous la forme d'une rente viagère. Cette rente est soumise à l'impôt sur le revenu après abattement de 10%, à la CSG (8,3%), à la CRDS (0,5%), aux cotisations maladie (1%), ainsi qu'à la Contribution Additionnelle de Solidarité pour l'Autonomie (0,3%) depuis 2013. La rente n'est pas soumise à l'impôt de solidarité sur la fortune.

Si la rente s'élève à moins de 40 € par mois, la sortie peut se faire en capital.

L'assurance vie

L'assurance vie est un produit qui mérite un développement dans cette partie puisqu'il reste le placement épargne préféré des Français. Bien qu'il ne soit pas à proprement parler un régime de retraite supplémentaire, il représente en France la grande majorité du troisième étage de la retraite, on parle même parfois de quatrième pilier au titre de l'assurance vie individuelle.

Dans le cadre de l'assurance-vie, différents types de contrats existent.

Ces contrats vont différer selon plusieurs caractéristiques qui sont les garanties offertes, le versement des primes, capitaux ou rentes associés. Il est possible de distinguer deux catégories avec le contrat d'assurance, en cas de décès d'une part et le contrat d'assurance en cas de vie d'autre part.

Pour le contrat d'assurance en cas de décès, il s'applique en cas de décès du souscripteur durant la durée garantie dans le contrat et donc il est à « fonds perdus » si le souscripteur ne décède pas avant la fin du contrat.

Pour le contrat d'assurance en cas de vie, il y a versement d'un capital ou d'une rente à une

date déterminée dans le contrat. L'objectif principal est donc l'épargne. Le bénéficiaire du contrat peut recevoir le capital acquis en cas de décès du souscripteur avant la fin du contrat si une contre-assurance décès a été souscrite.

L'assurance vie comporte de nombreux avantages par rapport aux produits de retraite supplémentaire.

Les avantages principaux, et qui expliquent que l'assurance vie attire plus que les produits de retraite supplémentaire sont les suivants.

- Une fiscalité très avantageuse notamment si aucune partie du montant placé n'est retirée avant 8 ans.
- La disponibilité des sommes placées en assurance vie, qui peuvent être retirées à n'importe quel moment, et qui permet des rachats partiels ou totaux.
- La simplicité du produit qui est très accessible et dont la compréhension est aisée.

Les chiffres de la retraite supplémentaire

Le système de retraite actuel de la France est mis à l'épreuve notamment par le vieillissement de la population et une diminution de la natalité, qui risquent d'entraîner la diminution des retraites servies par les régimes obligatoires de base et complémentaires, et de pousser les assurés à investir dans des régimes supplémentaires pour s'assurer un complément de revenu pendant la retraite.

D'après le cinquième rapport annuel du conseil d'orientation des retraites (COR) [COR, 2018] le taux de remplacement est plus faible pour les jeunes générations, comme on peut le voir sur ce graphique tiré de la même étude. Le taux de remplacement correspond au pourcentage de revenu conservé par un salarié lors de sa cessation d'activité.

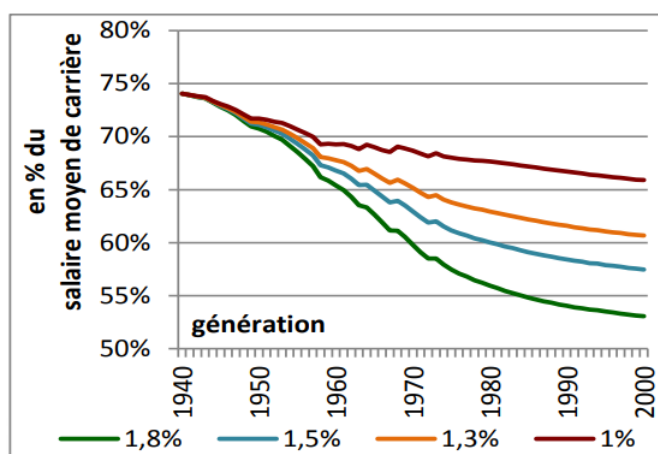


FIGURE 2.3 – Taux de remplacement moyen sur cycle de vie

Toujours d'après le rapport du conseil du COR [COR, 2018], le nombre de cotisant par retraité de droit direct continuerait de décroître passant de 1,7 à 1,3 en 2070 d'après

les projections, ce qui donne un ordre d'idée du vieillissement de la population. A ce titre la retraite supplémentaire par capitalisation est vue comme une possible réponse aux limites du système de retraite actuel fondé sur la répartition.

Les provisions mathématiques, les cotisations et le nombre d'adhérents aux produits de retraite supplémentaire augmentent sensiblement depuis 2011, comme illustré par les graphiques suivants.

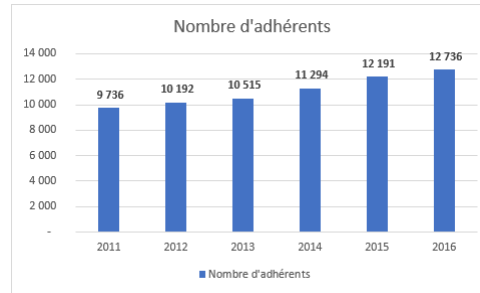


FIGURE 2.4 – Evolution du nombre d'adhérents

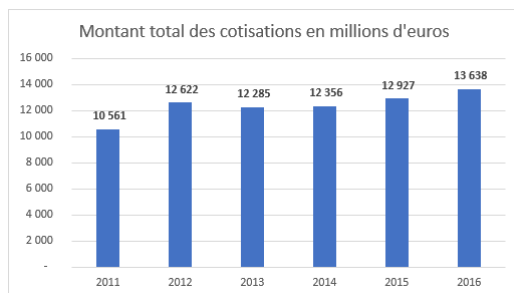


FIGURE 2.5 – Evolution des cotisations

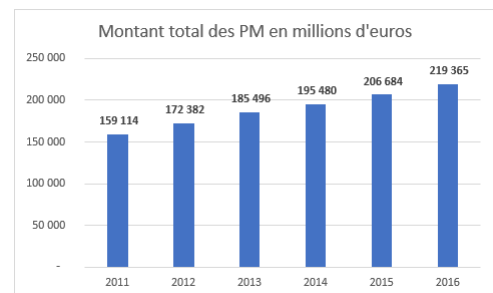


FIGURE 2.6 – Evolution des PM

Cependant la retraite supplémentaire constitue encore une part marginale de l'ensemble de la retraite en France, les produits de retraite supplémentaires représentent en effet seulement 2% de l'ensemble des prestations versées et 4,8% de l'ensemble des cotisations collectées en 2016, selon la DRESS [DRESS, 2018].

Le graphique ci-dessous tiré directement de l'étude de la DRESS [DRESS, 2018] montre que la part de la retraite supplémentaire conserve un niveau stable, le marché ne décollant pas réellement.

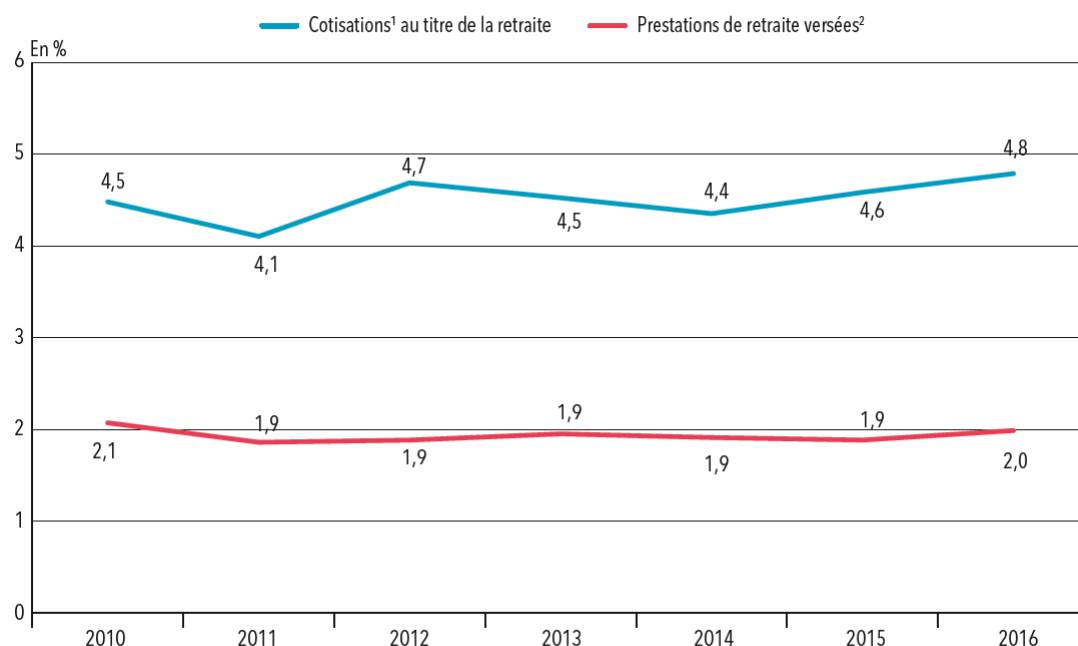


FIGURE 2.7 – Part de la retraite supplémentaire dans l'ensemble des régimes de retraite

Le vieillissement de la population, le ralentissement des naissances et l'augmentation du chômage déséquilibrent le régime de retraite français basée sur le principe de répartition et qui pourrait ne plus suffire à fournir une retraite en rapport avec le niveau de vie pendant la phase active.

Cependant il est impossible de passer à un régime par répartition sans sacrifier une génération.

Confronté à ces difficultés, l'environnement de la retraite est très évolutif. Deux grands changements sont attendus, dans un premier temps la loi Pacte (plan d'action pour la croissance et la transformation des entreprises), puis dans un deuxième temps la réforme des retraites en 2019.

L'épargne retraite est l'une des réformes portées par la loi Pacte et met en évidence la volonté du gouvernement de dynamiser la retraite supplémentaire en rendant les produits de retraite supplémentaires plus attractifs. Ce projet porterait sur l'harmonisation des dispositifs actuels d'épargne retraite individuels et collectifs.

La réforme des retraites prévue par le gouvernement dont le projet de loi devrait être déposé au Parlement dans le courant du deuxième semestre 2019 ne remettra pas en cause le financement des régimes légaux par répartition. Elle portera sur l'harmonisation des régimes de retraite pour que "un euro cotisé donne les mêmes droits, quel que soit le moment où il a été versé, quel que soit le statut de celui qui a cotisé" pour reprendre les

propos du président Emmanuel Macron. La retraite deviendrait une retraite en compte notionnel, similaire à la retraite par points mais plus sophistiquée.

Dans un régime de retraite en compte notionnel, les cotisations sont transformées en un capital fictif logé sur un compte et revalorisées chaque année, la sortie est en rente annuelle dont le montant dépend de plusieurs facteurs dont notamment l'âge de liquidation et l'espérance de vie dépendant de la génération.

Il est impossible de mesurer l'impact de cette réforme dans les conditions actuelles, et de savoir si elle pourrait permettre d'éviter une baisse des rentes. Dans cette optique, la constitution d'un complément de retraite individuelle pourrait devenir une option de plus en plus populaire pour les actifs souhaitant percevoir une retraite plus conséquente.

En tant que solution envisageable aux limites du système de retraite actuel, les produits de retraite supplémentaire devraient être amenés à prendre une place plus importante dans l'ensemble de la retraite en France.

La retraite supplémentaire restant marginale, il n'existait pas de réglementation spécifique sur les fonds destinés à la retraite supplémentaire qui sont donc soumis au règlement Solvabilité 2.

2.2 Cadre réglementaire de l'épargne retraite supplémentaire

Les systèmes de retraite de pays européens sont sous, l'impulsion de l'Union Européenne, engagés dans des processus d'uniformisation, bien que d'importantes différences persistent encore entre les pays membres.

Les produits d'épargne retraite supplémentaire restent cependant nationaux. Toutefois, la commission européenne a annoncé en juin 2017 la création d'un nouveau produit d'épargne retraite, le Pan European personal pension product (PEPP), qui permettrait de disposer d'un complément de retraite transférable dans tous les pays de l'Union Européenne.

Les directives de l'Union Européenne (IORP 1 et 2) concernant les fonds de retraite supplémentaires ont été appliqués différemment en France et dans le reste de l'Europe. Le tableau suivant présente la vision européenne de la retraite en parallèle de la vision française.

Europe		France	
Produits	Cadre réglementaire	Produits	Cadre réglementaire
Assurance Vie	Solvabilité II	Contrats collectifs d'assurance retraite gérés par les assureurs	Solvabilité II
Fonds de pension "IORP" avec la directive IORP I (2003) puis la directive IORP II (2016)	Régime prudentiel transitoire (maintien S1 jusqu'en 2019)	Contrats RPS (Transposition de l'article 4 de la directive IORP I) : cantons dans le bilan des Assureurs	Solvabilité I pendant la transitoire puis Solvabilité II à partir de 2022
		FRPS créé par ordonnance de 2017	Cadre prudentiel Solvabilité I avec l'ajout de stress test

TABLE 2.4 – Epargne Retraite en France et en Europe

2.2.1 Solvabilité 2

Les trois piliers

Les fonds de retraite en France sont majoritairement des contrats collectifs d'assurance retraite gérés par les organismes assureurs et soumis à la réglementation Solvabilité II. Contrairement aux fonds de pension IORP des autres pays européens qui sont gérés sous la réglementation Solvabilité I jusqu'en 2019.

Cependant, en France les normes imposées par la réglementation Solvabilité II ne sont pas forcément adaptées aux besoins spécifiques d'un fond de retraite. Nous allons introduire dans la suite de ce paragraphe les contraintes liées à la gestion d'un fond de retraite sous Solvabilité II. L'objet de ce mémoire n'étant pas d'étudier Solvabilité II nous nous contenterons de présenter brièvement le deuxième et le troisième pilier et nous concentrerons sur le premier pilier.

La réforme Solvabilité II comporte trois piliers.

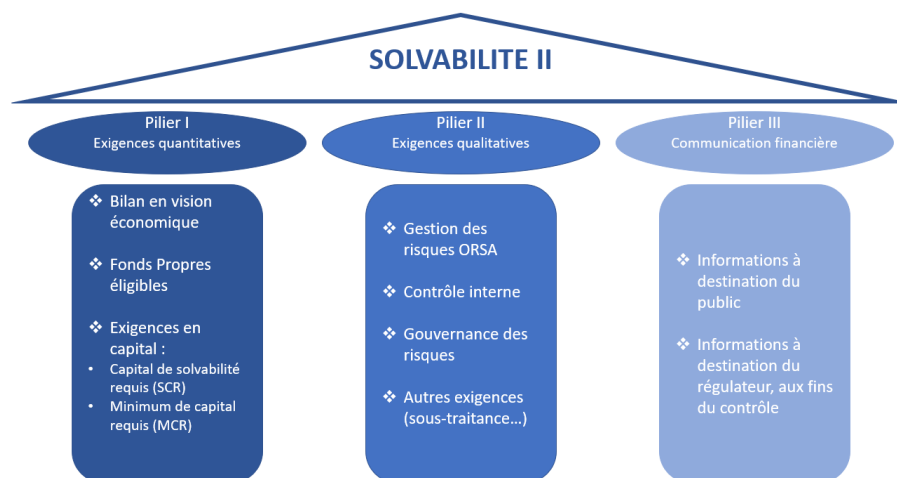


FIGURE 2.8 – Les trois piliers de Solvabilité II

Le deuxième concerne la gouvernance et la gestion des risques, il vient compléter le premier pilier qui contrôle le quantitatif. Le troisième pilier concerne quant à lui les enjeux de transparence et de communication.

Focus sur les exigences quantitatives du pilier I

La plus grande différence entre Solvabilité II et Solvabilité I vient de la valorisation du bilan qui est faite en valeur comptable sous Solvabilité I mais est market consistent pour Solvabilité II.

Les actifs sont valorisés en valeur de marché, et les passifs sur la base de leur valeur de transfert actuelle. Le but est de calculer le SCR, il correspond à une Value at Risk (VaR) à 95% à horizon d'un an. C'est le capital dont doit disposer l'assureur pour pouvoir faire face à la ruine dans 95% des cas à horizon d'un an.

Cependant la réglementation Solvabilité II semble peu appropriée à la gestion des fonds de retraites.

En effet, d'une part **l'horizon d'un an** des exigences de solvabilité n'est pas en adéquation avec les engagements à long terme des fonds de retraite. D'autre part, **la politique d'investissement** sous Solvabilité II pénalise fortement les investissements sur des actifs risqués mais présentant un fort niveau de rendement (actions et immobilier par exemple) sur le long terme.

Cette réticence à investir dans des actifs au rendement plus fort donc risqués, nuit au rendement de l'actif particulièrement dans le contexte de taux bas actuel. Le cabinet GALEA illustre cette baisse dans [Galea, 2018], en effet d'après cette étude, le taux de rendement moyen brut (non pondéré) a perdu plus de 0,70% entre 2014 et 2017, passant de 3,71% au 31/12/2014 à 2,97% au 31/12/2017. L'érosion des taux de rendement reste pourtant contenue par rapport à la baisse des taux de marché, grâce au stock d'obligations passées et aux poches de diversification.

Cependant un environnement de taux durablement bas forcerait les assureurs à réinvestir à des taux très défavorables quand leurs obligations arriveraient à maturité, ce qui jouerait sur la revalorisation des rentes des assurés.

Cette baisse des taux de revalorisation est illustrée dans une étude de l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR)[ACPR, 2018], ainsi le taux de revalorisation moyen des contrats collectifs est de 2,47% en 2017 contre 2,54% 2016, de même le taux de revalorisation moyen des contrats individuels baisse et passe de 1,83% en 2016 à 1,73% 2017. Le graphe suivant tiré de la même étude montre la baisse des taux de revalorisation pour les produits de retraite supplémentaire.

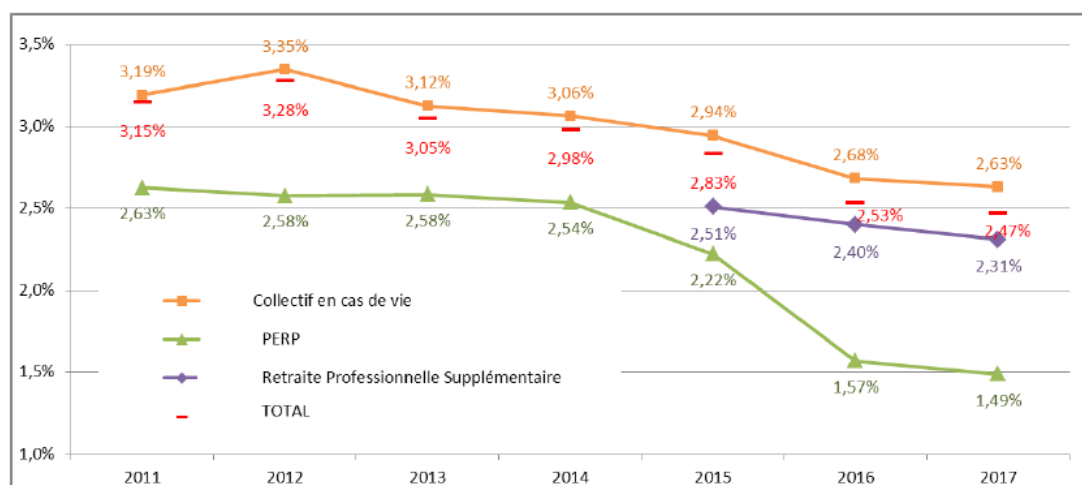


FIGURE 2.9 – Taux de revalorisation de 2011 à 2017

2.2.2 FRPS

Création des FRPS

La directive sur les institutions de retraite professionnelle (IORP) de 2003 donnait la possibilité aux pays de l'Union Européenne d'inclure les régimes de retraite professionnelle dans leur législation de deux façons.

1. dans le marché de l'assurance vie
2. ou en dehors de ce marché dans le cadre d'une gestion par fonds de pension

Pour la transposition en droit français, la France avait opté pour la première option en 2006. Les Retraite Professionnelle Supplémentaire (RPS) permettent aux sociétés d'assurance de cantonner les activités de retraite supplémentaire au sein d'organismes d'assurance déjà existants et d'appliquer les règles de Solvabilité I.

Le président Emmanuel Macron a voulu revenir sur cette décision en créant des organismes spécifiques destinés à la retraite professionnelle supplémentaire : les Fonds de

Retraite Professionnelle Supplémentaire (FRPS). Les FRPS ont été mis en place selon le calendrier suivant.



FIGURE 2.10 – Calendrier de mise en place de FRPS

Les FRPS peuvent relever du code des assurances, du code des mutuelles et du code de la sécurité sociale, ils relèvent de la directive IORP et sont soumis au contrôle de l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR). Ce sont des personnes morales de droit privé distinctes d'un organisme d'assurance, il ne s'agit pas d'un cantonnement comme pour les RPS.

Les FRPS sont vus comme une possibilité d'échapper au cadre réglementaire Solvabilité II dont les exigences de solvabilité à horizon d'un an du pilier 1 ne sont pas forcément cohérentes avec des fonds de retraite dont la durée des engagements est 30 ans.

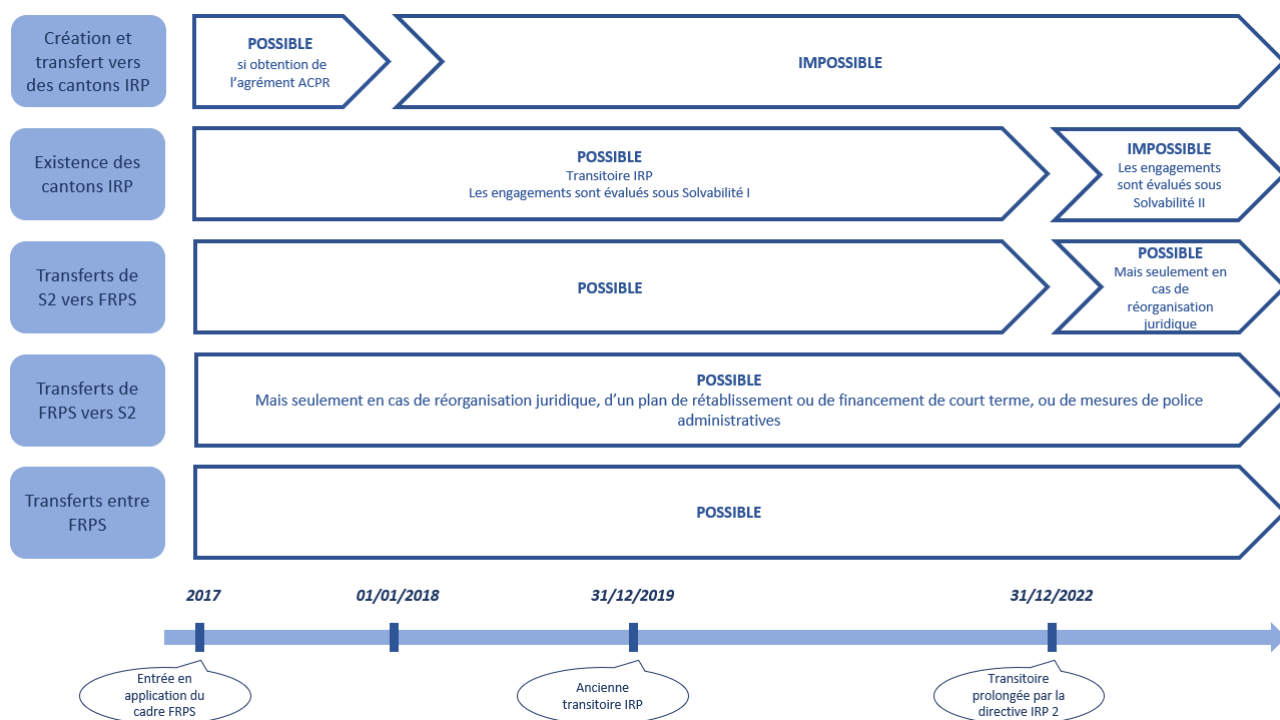


FIGURE 2.11 – Conditions de création et transferts de FRPS

Exigences de solvabilité sous FRPS

Le cadre réglementaire des FRPS est un retour au cadre prudentiel plus souple de Solvabilité I, mais avec l'introduction de stress tests.

Chaque année, les Fonds de Retraite Professionnelle Supplémentaire doivent mener ces tests de résistance qui évaluent leurs capacités à faire face à leurs engagements dans des conditions techniques ou financières dégradées. Il s'agit pour l'assureur de réaliser une projection de l'activité du Fond de retraite sur un horizon de temps de dix ans. Ainsi, l'organisme doit calculer :

1. Sa Marge de Solvabilité constituée (MS)

La marge de solvabilité est constituée des éléments suivants :

- Le capital social
- Les réserves ne correspondant pas aux engagements (dont la réserve de capitalisation)
- Le report de bénéfice/excédent/perte au titre du dernier exercice, déduction faite des dividendes. Ces éléments peuvent cependant être considérés comme faussés en cas de contrat de réassurance financière, dans ce cas l'ACPR peut demander un ajustement de la MS au terme du contrat de réassurance en fonction du report cumulé.
- Les emprunts pour fonds de développement (d'une valeur retenue dégressive à partir de la moitié de la durée de l'emprunt)
- Des fonds provenant de l'émission de titres ou emprunts subordonnés, d'actions de préférence peuvent être admis sous certaines conditions de durée et de remboursement.
- La réserve pour fonds de garantie à hauteur de la part de cotisation versée par l'entreprise et non utilisée par le fonds
- Les réserves constituées pour le système fédéral de garantie et le fonds de garantie, y compris la part de cotisation versée par la mutuelle de retraite professionnelle supplémentaire et non utilisée par le système fédéral de garantie ou le fonds de garantie mentionné.
(Les mutuelles ou unions de retraite professionnelle supplémentaire sont membres d'un système fédéral de garantie et doivent adhérer à un fonds de garantie. Ces deux organismes agissent en cas de défaillance, en garantissant le paiement des prestations, Le fonds de garantie intervient, le cas échéant, après le système fédéral de garantie.)

Les éléments suivants ne sont acceptés pour constituer la marge de solvabilité que sur l'accord expresse de l'Autorité de contrôle Prudentiel et de Résolution :

- La moitié du capital non versé ou du reste à rembourser de l'emprunt pour fonds d'établissement, à partir du moment où ce qui a déjà été versé atteint au

moins 25% de la totalité du capital ou du fonds, dans la limite de $\min(50\% \times MS, 50\% \times EMS)$

- Les plus values non exceptionnelles résultants de la sous-estimation d'éléments d'actifs
- Les plus-values latentes sur les instruments financiers à terme, si les opérations sont négociées sur un marché réglementé des Etats parties à l'accord sur l'Espace économique européen, un marché de pays tiers membres de l'OCDE en fonctionnement régulier ou réalisées de gré à gré et garanties dans les conditions d'une convention cadre.

On déduit de ce qui précède certains éléments afin obtenir la Marge de Solvabilité.

2. Son Exigence de Marge de Solvabilité (EMS)

Le cas étudié étant celui d'un portefeuille en fonds euro, on se contentera d'exposer la méthode de calcul de l'EMS pour des garanties exprimées en euros.

L'EMS est calculée par rapport aux capitaux propres et aux provisions suivantes,

Provision mathématique : Il s'agit de la différence entre la valeur actuelle de l'engagement pris par l'assureur et celui pris par les assurés. Quand on utilise une table de mortalité (survie), il faut prendre en compte dans le calcul du montant de la provision mathématique les frais futurs de gestion qui sont estimés par le montant des chargements de gestion prévus dans les conditions tarifaires de la prime ou du capital constitutif.

Provision de gestion : Elle sert à couvrir les charges de gestion futures des contrats non couvertes par ailleurs

L'EMS est la somme des deux éléments suivants,

- Le produit de $4\% \times (Provisions\ Mathematique + Provision\ de\ gestion)$, où les provisions sont relatives aux opérations d'assurance direct sans déduction des cessions en réassurance et aux acceptations en réassurance, par le maximum de 85% et du rapport entre le *Montant des provision mathématiques après cessions en réassurance* et le *Montant des provisions mathématiques brut de réassurance*.
- Le produit de $3\% \times Capitaux\ risques$ par le maximum de 50% et du rapport entre le *Montant des capitaux sous risque après cession et rétrocession en réassurance* et le *Montant des capitaux sous risque brut de réassurance*.

Stress tests ou tests de résistance

Pour mettre en oeuvre les tests de résistance, l'assureur doit calculer la MS et l'EMS pour quatre scénarios, un scénario central qui est fait dans des hypothèses qui prolongent les conditions de l'année N-1 et trois scénarios stressés détaillés ci-dessous, et tirés de l'article A. 385-3 de l'arrêté du 14 août 2017 [arr, 2017].

- **Scénario de baisse des taux d'intérêts** : Le niveau des taux d'intérêt pour les valeurs amortissables ainsi que celui servant de référence pour le calcul des provisions techniques est diminué, pour toute la durée de la projection, du maximum entre une baisse relative de 40 % et une baisse absolue de 0,75 %, sans pouvoir toutefois être inférieur à 0 % ou supérieur à 3,5 %.
- **Scénario de baisse des rendements financiers** : Le niveau de rendement des actifs non amortissables est diminué de 30% pour toute la durée de la projection.
- **Scénario de baisse de la mortalité** : Le taux de mortalité à tout âge est baissé de 10% pour la durée de la projection (10 ans).

Nous allons définir les hypothèses avec lesquelles ces calculs sont développés dans la suite. Tout d'abord on rappelle que le projection est menée sur les 10 exercices suivant la date de clôture.

Les éléments suivants sont ceux qui seront utiles dans le cadre de l'outil développé, l'ensemble des éléments, est détaillé par l'arrêté du 14 août 2017 [arr, 2017].

1. Les primes projetées correspondent aux versements périodiques et programmés.
2. L'allocation des actifs est inchangée pour l'ensemble de la période projetée.
3. Les valeurs amortissables sont détenues jusqu'à maturité et réinvesties conformément à la duration des engagements (avec un maximum de 15 ans) en prenant des taux coupon égaux aux moyennes annuelles des TECn de l'année d'exercice.
4. Les valeurs non amortissables sont évaluées comptablement et génèrent un rendement annuel égal à la moyenne annuelle sur l'exercice précédent le test du niveau du taux moyen des emprunts de l'Etat français, augmenté d'une prime de risque de 250 points de base.
5. La table de mortalité utilisée pour la projection est la même que celle utilisée pour le calcul des Provisions Mathématiques.
6. Les résultats du fonds de retraite professionnelle supplémentaire sont imposés à 33,33%.

Ces hypothèses seront respectées dans les contraintes de l'optimisation sous contraintes réglementaires FRPS.

Coût des tests de résistance

Les conséquences dans le cas où les stress tests ne sont pas passés, sont décrites dans le décret du 19/07/2017 à la section 6.

Concrètement, dans le cas où les stress tests se déclenchent, c'est-à-dire qu'à l'année t , le ratio de solvabilité $\frac{MS(t)}{EMS(t)}$ devient inférieur à 100%, l'ACPR peut éventuellement

demander un plan de convergence. Dans ce cas l'assureur doit ajouter un renfort à ses fonds propres qui lui permettra de faire face au risque. Ce montant est appelé *capital add on* et correspond à la formule ci-dessous.

$$\left[\max_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ t \in \tau_s}} \left\{ \frac{EMS^k(t) - MS^k(t)}{t} \right\} \right]^+$$

Où,

$1 \leq k \leq 4$ identifie le scénario déclenché concerné,

t est l'année à laquelle le stress test correspondant au scénario k se déclenche pour la première fois.

La création d'un FRPS semble permettre d'échapper à la réglementation Solvabilité II, peu adaptée aux activités de retraites et de revenir à un cadre de gestion financière plus adaptée à la retraite, c'est-à-dire équivalent à Solvabilité I mais avec l'ajout de tests de résistance.

La question qui se pose est le coût potentiel lié à ces tests de résistance, le mémoire s'attachera à déterminer l'ordre de grandeur de ce coût.

Cette partie nous a permis d'introduire le cadre dans lequel s'inscrit notre mémoire. Nous avons présenté un panorama de la retraite en France, et exposé les difficultés rencontrées par le système de retraite actuel. Nous nous sommes penchés plus en détail sur la retraite supplémentaire qui est vue comme une solution possible à ces difficultés. Nous avons ensuite brièvement présenté la réglementation prudentielle Solvabilité II à laquelle sont soumis les fonds de retraite supplémentaire, et avons finalement introduit la réglementation FRPS, vu comme un retour possible à la réglementation Solvabilité I mais avec l'ajout de tests de résistance.

Cela nous a permis d'introduire le cadre dans lequel s'inscrit notre mémoire et le problème qui nous intéresse, quel est le coût en fonds propres engendré par la nouvelle réglementation FRPS, et en quoi influe-t-elle sur l'allocation d'actifs d'un fonds de retraite.

Dans la partie suivante, nous présentons la modélisation des deux outils construits dans le cadre du mémoire et implémentés sous R.

Chapitre 3

Construction d'un outil de projection actif/passif

3.1 Introduction des objectifs

L'approche présentée dans cette partie a été développée dans le cadre de ce mémoire avec l'objectif de projeter des portefeuilles de retraite de type article 83. Elle présente les règles régissant la modélisation des actifs et des passifs.

Cette approche a été implémentée dans un outil de gestion actif-passif (ALM) donnant la possibilité de projeter les portefeuilles de retraite selon des scénarios générés par un générateur de scénarios économiques (GSE) décrit au chapitre 4.

En outre, un deuxième outil basé sur le premier a aussi été développé et permet de modéliser les contraintes FRPS faisant évoluer les portefeuilles de retraite selon des scénarios déterministes introduits par la réglementation.

Ces outils ont pour finalité de mener une optimisation de l'allocation initiale des actifs risqués adossés au portefeuille de retraite sous le respect des contraintes réglementaires imposées par l'environnement prudentiel FRPS.

3.2 Généralités et notions utiles

3.2.1 Table de mortalité

Une table de mortalité est utilisée en actuariat pour étudier les probabilités de survie et de décès au sein d'une population donnée. Elle est établie à partir de l'observation d'une population importante, toujours sur plusieurs exercices, afin de lisser les phénomènes conjoncturels (épidémie, catastrophe naturelle).

Les tables de mortalités peuvent être construites par sexe, catégorie socio-professionnelle, ou d'autres critères.

La table de mortalité est composée du nombre d'individus vivants d'âge et d'année de naissance donnés. Soient $age_{lim} \in \mathbb{N}^*$ l'âge maximal de la table de mortalité, et $\nu = \{v_1, \dots, v_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ l'ensemble des dates de naissance de la table de mortalité. Les

valeurs de la table de mortalité sont notées $l_x(v)$, $1 \leq x \leq age_{lim}$ et $v \in \nu$. On définit pour chaque âge $1 \leq x \leq age_{lim}$ et chaque date de naissance $v \in \nu$

- $p_x(v)$, la probabilité de survie à l'âge $x + 1$, $p_x(v) = \frac{l_{x+1}(v)}{l_x(v)}$
- $q_x(v)$ la probabilité de décès à l'âge $x + 1$, $q_x(v) = 1 - p_x(v) = \frac{l_x(v) - l_{x+1}(v)}{l_x(v)}$

3.3 Caractéristiques des portefeuilles projetés

L'outil a été développé pour projeter des portefeuilles de retraite de type article 83 à cotisations définies, classique de type «Rentes Viagères Immédiates» où les cotisations capitalisées pendant la phase d'épargne sont converties en rente lors de la date d'entrée en phase de restitution selon les taux techniques et tables de mortalité en vigueur à cette date. A distinguer des portefeuilles de type «Rentes Viagères Différées» où lors de la phase de restitution, les taux techniques et tables de mortalité servant à convertir les cotisations en rentes sont différents chaque année de restitution.

Les cotisations sont capitalisées pendant une phase d'épargne puis converties en rente lors de la phase de restitution selon les taux techniques et les tables de mortalité en vigueur à cette date.

La projection d'un portefeuille se fait par modèle point, les assurés sont regroupés par caractéristiques communes et un individu moyen est créé par groupe. La projection sera ainsi effectuée sur l'ensemble de ces individus moyens, au lieu d'être appliquée directement et exhaustivement à chaque assuré du portefeuille.

Pour projeter l'évolution d'un portefeuille sur plusieurs années, il est nécessaire de disposer d'un certain nombre d'éléments et d'hypothèses actuarielles.

Dans le cadre de ce mémoire, les portefeuilles considérés sont fermés, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'entrée de nouveaux adhérents au cours de la projection ni de sorties autrement que par le décès. Cependant des primes sont versées par les adhérents en phase de cotisation.

Remarque : Les portefeuilles étudiés étant fictifs, il n'a pas été nécessaire d'effectuer une cartographie du portefeuille. A noter que cette étape consiste à déterminer des caractéristiques permettant de trier les assurés de sorte à obtenir un portefeuille agrégé par modèle point selon des caractéristiques déterminantes communes (taux technique, garantie de participation aux bénéfices du contrat notamment).

Pour un portefeuille donné, on pose $J \in \mathbb{N}^*$ le nombre de modèles points d'individus qui le constituent. Les caractéristiques du portefeuille sont détaillées dans les tableaux ci-dessous pour un modèle point $1 \leq j \leq J$. Dans la suite un adhérent désigne un modèle point.

Données adhérents	Notation si pertinent
<i>Date adhésion</i> : La date à laquelle l'assuré a adhéré au produit de retraite supplémentaire	
<i>Année de naissance</i>	$an^j \in \nu$
<i>Age à la date d'exercice initiale</i>	$1 \leq age^j \leq age_{lim}$
<i>Date liquidation</i> : Date à laquelle l'adhérent commence à toucher des rentes	t_{liq}^j
<i>Montant initial PM</i> : Le montant de PM constitué pour l'adhérent au début de la projection	$PM^j(0)$
<i>Montant Prime annuelle</i> : Le montant des primes versées par l'adhérent chaque année	
<i>Taux revalorisation Prime</i> : Le taux auquel les primes sont revalorisées chaque année	$\tau_{revalo\ primes}^j$
<i>TMG - Phase de constitution</i> : Le taux minimum garanti contractuellement de revalorisation des PM en phase de cotisation	τ_{TMG}
<i>Taux technique - Phase de service</i> : Le taux minimum de revalorisation des PM garanti en phase de service	$\tau_{technique}^j$
<i>Taux d'actualisation - Phase de service</i> : Le taux auquel sont actualisées les PM en phase de service	$\tau_{actu\ PM\ service}^j$
<i>Taux PB contractuelle</i> : Le taux de participation aux bénéfices appliqué aux produits financiers nets de frais	$\tau_{PB\ contractuelle}^j$
<i>Taux Chargements sur encours - Phase de cotisation</i>	
<i>Taux Chargements sur encours - Phase de Service</i>	
<i>Taux Chargements sur primes</i>	$\tau_{changement/primes}^j$
<i>Taux Commissions sur primes</i>	
<i>Taux Commissions sur encours - Phase de cotisation</i>	
<i>Taux Commissions sur encours - Phase de service</i>	
<i>Taux Frais sur primes</i>	
<i>Taux frais sur encours</i>	
<i>Taux chute - cotisations</i>	
<i>Taux rachat - PM</i>	τ_{rachat}^j

TABLE 3.1 – Données individuelles concernant les adhérents du portefeuille

Paramètres généraux de projection	Notation si pertinent
<i>Année de projection</i> : Correspond à l'année à laquelle on fait la projection	T_0
<i>Capitaux propres initiaux</i> : Les Fonds propres de base dont dispose l'organisme	$FP(0)$
<i>Taux imposition</i> : Le taux fixé par l'Etat auquel les résultats sont imposés	
<i>Taux frais financiers</i> : Le taux auquel sont fixés les frais financiers	
<i>Age limite</i> : L'âge à partir duquel on considère qu'un adhérent est décédé	age_{lim}

TABLE 3.2 – Paramètres généraux de projection

Dans le cadre du mémoire, seul un type de portefeuilles est étudié. Il s'agit de portefeuilles constitués pour une part de rentiers et d'autre part d'actifs (ne touchant pas de rente), mais en *run off*, c'est-à-dire qu'aucune cotisation n'est versée pendant toute la durée de la projection.

Remarque : Les paramètres sont supposés être les mêmes pour tous les modèles points considérés, à l'exception de ceux qui dépendent de l'âge de l'adhérent (date de liquidation..).

3.4 Modélisation des engagements de l'assureur

La modélisation du passif obéit à des règles comptables et réglementaires qui sont détaillées dans cette partie. L'actif ainsi que les interactions entre l'actif et le passif font l'objet des sections suivantes.

Les méthodologies développées pour la projection du passif ont parfois été simplifiées pour des raisons de clarté, cependant elles demeurent les plus fidèles possible à la réalité.

3.4.1 Généralités

On souhaite projeter le passif, sur un ensemble de dates annuelles equi-espacées au pas $\Delta = 1an$ noté $\tau_s = \{T_0, \dots, T_H\}$, $H \in \mathbb{N}^*$ où T_0 est la date d'exercice initiale.

Le fonctionnement du portefeuille, est distingué selon deux phases :

1. la **phase de cotisation**, durant laquelle les adhérents versent des primes
2. la **phase de service**, durant laquelle les adhérents perçoivent les rentes.

3.4.2 Primes

Dans la suite de cette partie, on se place à la date $t \in \tau_s$, $t \geq 1$. La première étape de la projection du passif à la date t consiste à calculer les primes. Les primes correspondent au

montant payé par un assuré, à l'assureur, pour bénéficier d'une couverture d'assurance. Dans le cadre du contrat étudié, ces primes servent à constituer un capital que l'assuré touchera sous forme de rentes lors de sa cessation d'activité ou entrée en phase de service. Leur montant est prédéterminé, aussi elles ne dépendent pas des autres éléments de projection et peuvent être calculées en premier lieu :

- En **phase de cotisation** les primes annuelles sont fixées contractuellement, elles sont revalorisées chaque année, rendant compte de la revalorisation des assiettes de cotisation et on leur applique un éventuel taux de chute ;
- En **phase de service** les primes annuelles sont nulles.

Sur la base des primes brutes, on calcule les chargements, les commissions et les frais sur primes associés. Les taux de chargement, de commissions ainsi que les taux de revalorisation et de chute sont pré-établis contractuellement. Le taux de frais correspond aux frais de gestion réels, il est modélisé par une hypothèse pour la projection.

3.4.3 Montant provisionné pour l'adhérent à la date de liquidation

Une fois les primes obtenues, les commutations N_x et D_x sont calculés. Il s'agit de valeurs qui ne dépendent que de la table de mortalité, elles peuvent donc être calculées indépendamment des autres éléments de la projection. Pour chaque adhérent $1 \leq j \leq J$ elles sont notées respectivement N_x^j et D_x^j et sont déterminées par l'intermédiaire des formules suivantes

$$N_x^j = \sum_{i=age^j+t_{liq}^j-T_0+1}^{age_{lim}} \frac{l_i(an^j)}{(1+\tau_{technique}^j)^i}$$

$$D_x^j = l_{[t_{liq}^j - an^j]}(an^j)$$

Pour chaque adhérent $1 \leq j \leq J$, N_x^j , correspond à la valeur nette actualisée (VAN) des l_x à partir de la date de passage en phase de service.

Un montant spécifique à chaque adhérent est alors déterminé à la date de liquidation, en fonction du montant de PM accumulé jusqu'à cette date. Ce montant servira de base au calcul des rentes théoriques et réelles dans la suite de la projection.

Si l'adhérent $1 \leq j \leq J$ est en **phase de service** à la date de projection t , alors

$$\begin{cases} Montant^j = \frac{D_x^j}{N_x^j} \times PM_{debut\ de\ periode}^j(t_{liq}^j), & \text{si } t_{liq}^j = T_0 \\ Montant^j = \frac{D_x^j}{N_x^j} \times PM_{fin\ de\ periode}^j(t_{liq}^j), & \text{sinon} \end{cases}$$

où pour $u \in \tau_s$ et $1 \leq j \leq J$, $PM_{debut\ de\ periode}^j(u)$ (resp. $PM_{fin\ de\ periode}^j(u)$) est la valeur de la provision mathématique associée à l'adhérent j au début (resp. à la fin) de la période u , à savoir avant (resp. après) rachat, revalorisation, et cotisation.

3.4.4 Rentes

Pendant la **phase de cotisation**, l'adhérent constitue son capital, les rentes à verser pendant cette période sont par conséquent nulles.

En **phase de service**, la liquidation des rentes commence ; les flux de rentes sont alors calculés mais non revalorisés dans un premier temps. Ils sont déterminés par le produit du montant provisionné par l'adhérent par la probabilité qu'il soit encore en vie à la date de projection t . Formellement, le vecteur des flux de rentes non revalorisées restant à verser, noté FNR est déterminé à la date t pour l'adhérent $1 \leq j \leq J$ par

$$\left(FNR_i^j \right)_{1 \leq i \leq I_t} = \left(Montant^j \times \frac{l_{[i+t-an^j]}(an^j)}{l_{[t_{liq}^j - an^j]}(an^j)} \right)_{1 \leq i \leq I_t}$$

où $I_t = age_{lim} - (t - an^j)$ est la différence entre l'âge maximal possible pour l'assuré, age_{lim} , et son âge à la date t .

Le vecteur des flux de rentes revalorisées restant à verser, noté FR est alors obtenu en multipliant le vecteur des flux de rentes non revalorisées par le produit cumulé des taux de revalorisation estimés depuis la date de liquidation. Le calcul de ces derniers est détaillé plus loin dans cette partie. A la date t et pour l'adhérent $1 \leq j \leq J$

$$\left(FR_i^j \right)_{1 \leq i \leq I_t} = \left(FNR_i^j \times \prod_{k=1}^{t-t_{liq}^j} Taux\ de\ revalorisation^j(t_{liq}^j + k) \right)_{1 \leq i \leq I_t}$$

3.4.5 Provisions Mathématiques

Les provisions mathématiques suivent un schéma différent selon que l'adhérent se trouve en **phase de service** ou en **phase de cotisation**. La principale différence entre ces deux cas est qu'en phase de service, les PM sont calculées par rapport aux flux de rentes futures restant à verser à la date de projection t , alors qu'en phase de cotisation, elles dépendent des primes perçues dans l'année et les années précédentes.

En **phase de cotisation**, les PM de début de période sont d'abord soumises à la mortalité. Elles sont ensuite revalorisées au taux de revalorisation dont la méthode de calcul est détaillée dans la suite, finalement les cotisations de l'année dont le taux de chargement sur primes est imputé sont ajoutées.

Le schéma suivant illustre le processus d'obtention des PM en **phase de cotisation** et à la date de projection t

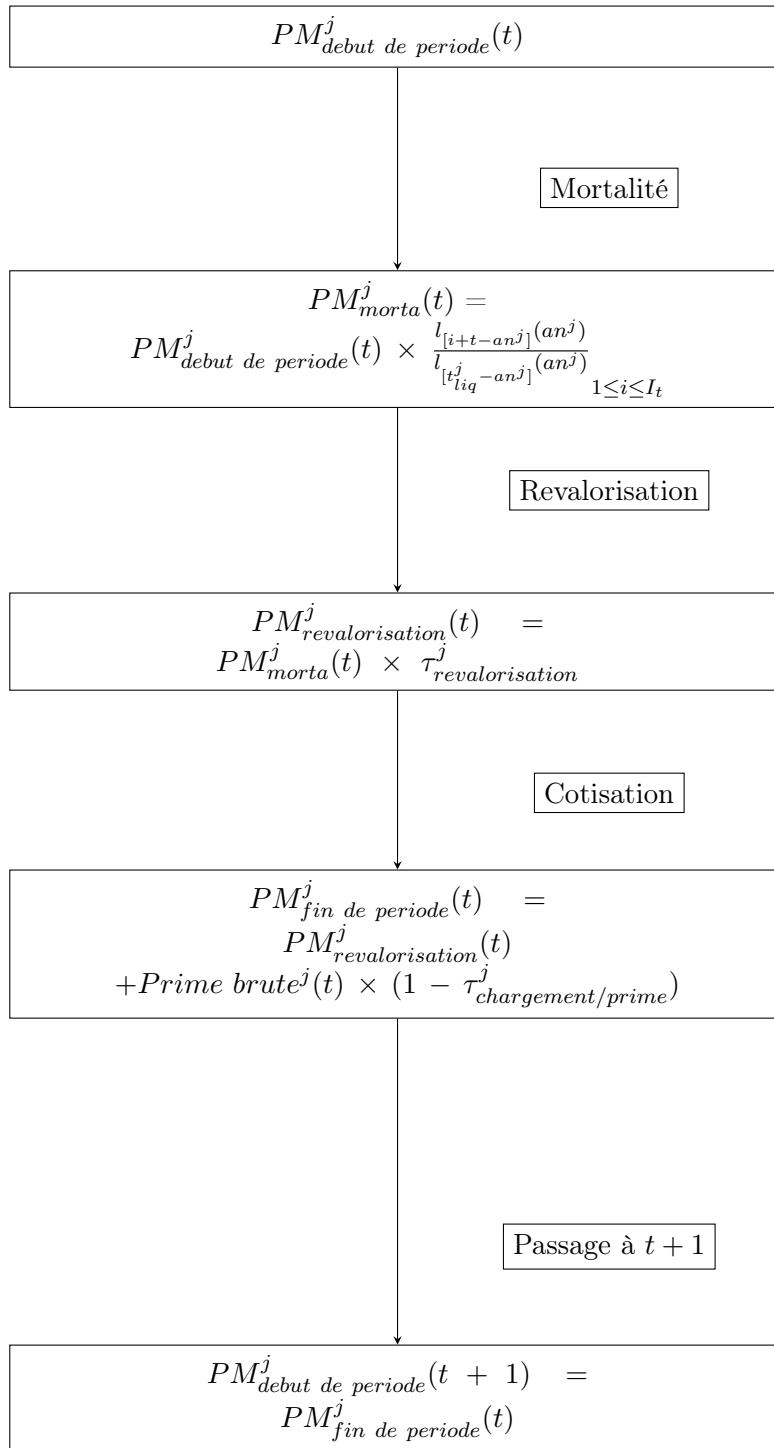


FIGURE 3.1 – Calcul des PM en phase de cotisation

En **phase de service**, les PM de début de période sont calculées comme la somme des rentes revalorisées restant à verser et actualisées au taux technique défini par le contrat.

Le schéma suivant illustre le processus d'obtention des PM en **phase de service** et à la date de projection t

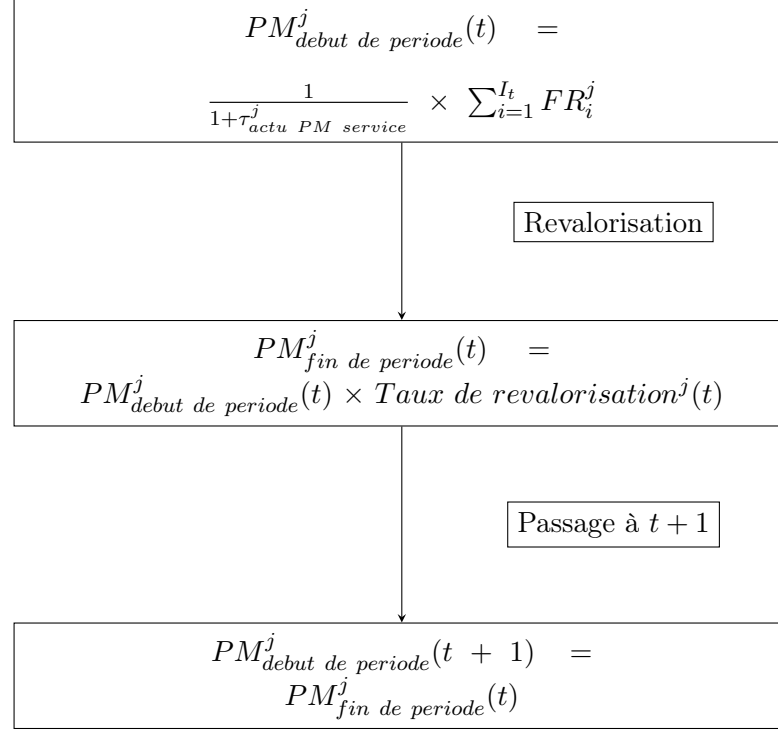


FIGURE 3.2 – Calcul des PM en phase de service

3.4.6 Revalorisation

La revalorisation des provisions mathématiques fait partie des interactions entre l'actif et le passif. Elle dépend du taux de rendement de l'actif (TRA).

Le résultat financier dégagé par les placements financiers permet d'évaluer le taux de rendement de l'actif (TRA) par rapport à la valeur nette comptable totale de l'actif. A la date de projection t , le rendement comptable est obtenu en appliquant la formule suivante.

$$TRA(t) = \frac{Resultat\ financier(t)}{VNC_{\mathcal{P}}(t-1)} \quad (3.1)$$

avec pour $u \geq 1$

- $VNC_{\mathcal{P}}(u)$ est la somme des valeurs nettes comptables des actifs composant le portefeuille d'actifs $\mathcal{P}$;

- *Resultat financier*(t) la valeur du résultat financier en date u dont la méthode d'estimation est expliquée dans la section relative à la modélisation de l'actif.

L'assureur doit reverser une partie des bénéfices générés par les placements financiers réalisés avec les fonds qui lui ont été confiés par les assurés. Le TRA permet d'estimer pour chaque adhérent du portefeuille de retraite $0 \leq j \leq J$ les contraintes de participation aux bénéfices (PB) suivantes :

- La part réglementaire de résultat à redistribuer aux assurés. L'assureur est tenu de reverser 85% du résultat financier et 90% du résultat technique. Cette contrainte est notée *Contraintes PB réglementaire* ^{j}
- La part contractuelle de résultat financier à redistribuer aux assurés. Cette contrainte, si elle existe, est prévue à la signature contrat. Elle est notée *Contraintes PB contractuelle* ^{j} . Cette contrainte est à respecter au global par l'assureur, cependant le portefeuille de l'étude porte sur un contrat unique.

Remarque : S'il y a lieu, la participation aux bénéfices (PB) est reversée immédiatement aux assurés. Aussi on ne gère pas de provision pour participation aux excédents (PPE).

En sus, les contrats considérés garantissent aux assurés un taux de revalorisation minimum des engagements (TMG). Pour chaque contrat $0 \leq j \leq J$ cette contrainte est notée *Contraintes* $TMG^j(t)^j$.

Le montant à verser effectivement aux assurés est alors égal au maximum des contraintes énoncées ci-dessus. Formellement pour chaque contrat $0 \leq j \leq J$ et pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{Montants servis}^j(t) = \max\{ & \text{Contraintes PB réglementaire}^j(t), \\ & \text{Contraintes PB contractuelle}^j(t), \\ & \text{Contraintes TMG}^j(t)^j(t) \} \end{aligned}$$

Finalement le taux de revalorisation est déterminé par le rapport entre le montant à verser aux adhérents sur la somme PM après rachat. Les étapes de son calcul sont illustrées dans le schéma suivant à la date de projection t et pour un contrat $0 \leq j \leq J$

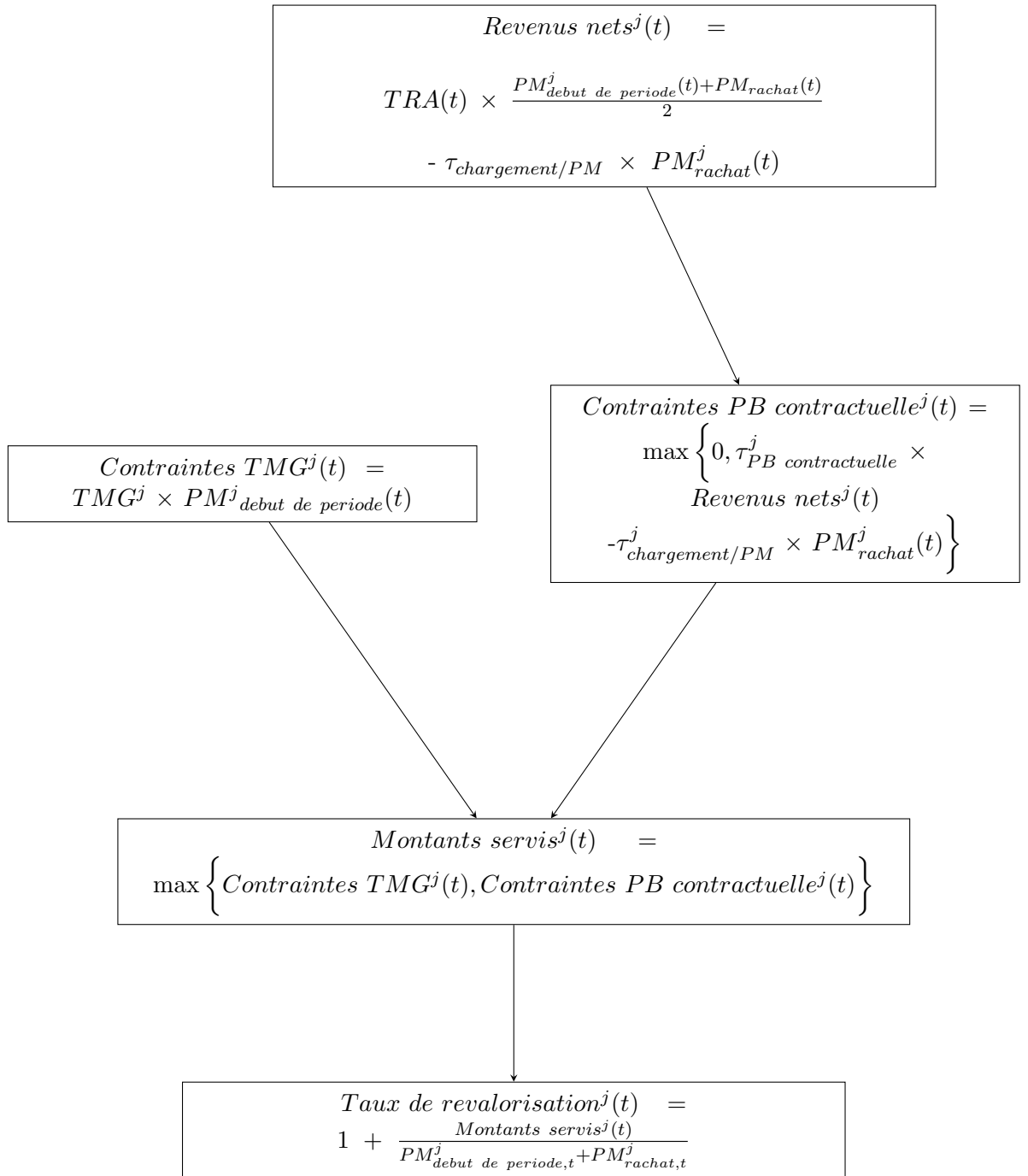


FIGURE 3.3 – Processus de revalorisation

3.4.7 Indicateurs FRPS

En premier lieu, posons PM , le montant total des provisions mathématiques. Il est donné à la date t par

$$PM(t) = \sum_{j=1}^J PM_{\text{debut de periode}}^j(t) \quad (3.2)$$

La réglementation FRPS impose le calcul de l'exigence de marge de solvabilité (EMS) et de la marge de solvabilité. L'EMS est obtenue à la date t par la relation

$$EMS(t) = 4\% \times PM(t)$$

La MS quand à elle correspond à la valeur des fonds propres, notés FP . A la date t

$$MS(t) = FP(t)$$

Finalement le ratio de solvabilité réglementaire, noté RS_{FRPS} vaut

$$RS_{FRPS}(t) = \frac{MS(t)}{EMS(t)}$$

Remarque : Dans le cadre du mémoire, nous avons choisi de ne pas prendre en compte les plus ou moins values latentes non exceptionnelles ou la dette subordonnée dans la marge de solvabilité. Le pilotage de la solvabilité est donc effectué sans autres leviers que les fonds propres.

3.5 Modélisation des placements financiers

Les fonds confiés par les assurés sont investis dans des actifs financiers. L'ensemble de ces placements constitue le portefeuille d'actifs de l'assureur. Cette partie s'attache à décrire la modélisation des actifs financiers au bilan de l'assureur. Nous introduisons dans un premier temps quelques définitions et notions essentielles pour la suite. Nous détaillons en second lieu, les mécanismes comptables principaux relatifs à la gestion des actifs dans le bilan assurantiel.

3.5.1 Introduction sur les taux d'intérêts

Convention de base

On pose $\tau : t \in [0, T] \mapsto \tau(T - t)$ la fonction donnant l'intervalle de temps séparant deux dates. Elle est exprimée en fraction d'années. On recense plusieurs conventions sur le marché laissées au choix du lecteur :

- **Actual/365** année de 365 jours ;
- **Actual/360** année de 360 jours ;

- **30/360** mois de 30 jours et année de 360 jours.

Dans la suite de ce mémoire nous utilisons $\tau(T-t) = T-t$. Par ailleurs, les principales notions afférentes aux taux d'intérêts sont définies ci-dessous.

Obligation zéro-coupon (ZC)

On appelle obligation zéro-coupon (ZC) d'échéance T , le contrat qui verse à son détenteur 1 unité monétaire à la maturité T sans coupon intermédiaire. Son prix à la date $t \in [0, T]$ est noté $P(t, T)$. Notons que $P(T, T) = 1$.

Taux d'intérêt composé continûment

Le taux d'intérêt composé continûment est noté $Y(t, T)$. Il s'agit du taux de rendement exponentiel pour lequel le zéro-coupon de maturité T évalué en t verse 1 unité monétaire en T

$$Y(t, T) = -\frac{1}{T-t} \times \ln P(t, T)$$

Taux d'intérêt simplement composé

Le taux d'intérêt instantané simplement composé est noté $L(t, T)$. Il s'agit du taux de rendement proportionnel pour lequel le zéro-coupon de maturité T évalué en t verse 1 unité monétaire en T

$$L(t, T) = \frac{1}{T-t} \times \frac{1 - P(t, T)}{P(t, T)}$$

Par exemple les taux interbancaires de type Euribor et Libor sont définis de la sorte.

Taux d'intérêt composé annuellement

Le taux d'intérêt instantané composé annuellement est noté $R(t, T)$. Il s'agit du taux de rendement pour lequel le zéro-coupon de maturité T évalué en t verse 1 unité monétaire en T

$$R(t, T) = \frac{1}{P(t, T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1$$

Taux court

Les taux définis ci-dessus ont la même limite quand $T \rightarrow t^+$. Cette limite est appelée taux court, noté $r(t)$

$$r(t) = - \left. \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \right|_{T=t}$$

Cette grandeur est en particulier utile pour la modélisation stochastique des taux d'intérêts. En effet, les modèles de taux courts très populaires comme le modèle G2++ décrit dans la section suivante de ce mémoire, dynamisent le taux court.

Taux forward

Le taux forward en date t , d'expiration T et de maturité S est noté $F(t, T, S)$. Il s'agit du taux qui annule la valeur d'un contrat forward garantissant à son propriétaire le paiement en date S d'un taux simplement composé fixe, noté K , contre le paiement à cette même date d'un taux simplement composé variable $L(T, S)$ gelé à la date T . Plus spécifiquement

$$F(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \times \frac{P(t, T) - P(t, S)}{P(t, S)} \quad (3.3)$$

Taux swap forward

On se munit d'un ensemble de dates $T_0 \leq T_1 \dots \leq T_K$, avec $T_0 = t$. On se donne deux entiers α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq K$, et on considère l'échéancier $\tau = T_\alpha, \dots, T_\beta$. Le contrat swap forward de tenor α et de maturité β , évalué en t , noté $RFS(t, \tau, K)$ garantit à son détenteur le paiement d'un taux d'intérêt fixe K (jambe fixe) contre un taux spot variable L (jambe variable) à chaque date $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. Ces taux sont libellés dans la même devise et calculés d'après un nominal, le capital n'étant jamais échangé. Après actualisation on a

$$\begin{aligned} RFS(t, \tau, K) &= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \\ &= P(t, T_\beta) - P(t, T_\alpha) + \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} K \tau_i P(t, T_i) \end{aligned}$$

où $\tau_i = T_i - T_{i-1}$, $i \in \{\alpha + 1, \beta\}$.

Le taux K annulant la valeur du contrat est appelé taux swap forward. Il est noté $S_{\alpha, \beta}(t)$ et est donné par

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

A noter que le taux swap, noté $S_\beta(t)$ correspond au taux swap forward avec en particulier $t = T_\alpha$

$$S_\beta(t) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}$$

Courbe des taux

La courbe des taux à une date t correspond à la fonction qui donne le taux relatif à chaque maturité T .

Les taux zéro-coupon sont déduits des taux swaps cotés sur le marché par découpage

$$P(t, T_i) = \frac{1 - S_i(t) \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j P(t, T_j)}{1 + \tau_i S_i(t)}$$

où par convention on considère que la somme vide vaut 0

3.5.2 Obligations et mécanismes comptables associés

La présente section définit les titres obligataires présents dans les portefeuilles utilisés pour la modélisation de l'actif. De plus elle explique les principaux mécanismes comptables associés.

Obligation à taux fixe

Une obligation à taux fixe est un instrument financier qui verse à son détenteur une somme appelée coupon à chaque date de l'échéancier défini par le contrat. Par ailleurs, à la dernière date de l'échéancier le détenteur touche, en plus du coupon, la valeur faciale ou nominal de l'obligation.

On se munit d'un échéancier de dates $T_0 \leq T_1 \dots \leq T_M$, avec $T_0 = t$. La valeur de marché (VM) en t , $VM_O(t)$ d'une obligation O de taux de coupon c et de nominal N est donnée à chaque date $T_{i-1} \leq t < T_i$ avec $1 \leq i \leq M$ par

$$VM_O(t) = \sum_{j=i}^K \frac{c \times N}{(1 + R(t, T_j))^{T_j - t}} + \frac{N}{(1 + R(t, T_M))^{T_M - t}}$$

Dans la suite, on considère des obligations à taux fixe qui versent des flux annuels ; autrement dit que les dates de l'échéancier sont equi-espacées par une année. Dans ces conditions on peut définir une obligation à partir de sa date d'acquisition T_0 , sa maturité résiduelle M telle que la date de maturité $T_M = T_0 + M$, son taux de coupon c et son nominal N . La valeur de marché s'écrit alors pour $T_0 \leq t < T_M$

$$VM_O(t) = \sum_{j=1}^{M_t^O} \frac{c \times N}{(1 + R(t, t + j))^j} + \frac{N}{(1 + R(t, t + M_t^O))^{M_t^O}}$$

où $M_t^O = i \in \mathbb{N}$ si $0 \leq t - i < 1$ est le temps restant à maturité de l'obligation.

Valeur nette comptable de l'obligation

La valeur nette comptable (VNC) d'une obligation O , notée VNC_O , correspond à la valeur inscrite dans les comptes. A la date d'acquisition T_0 du titre elle est égale à la valeur d'achat notée VA_O . De fait on a

$$VA_O = VM_O(T_0) = VNC_O(T_0)$$

Lorsque la valeur d'achat est différente du nominal, la valeur nette comptable est déterminée chaque année par l'intermédiaire d'une interpolation entre ces deux grandeurs. Ce mécanisme est appelé amortissement. On distingue alors deux cas :

- Si la valeur d'achat de l'obligation est inférieure au nominal, on parle de décote et la VNC augmente chaque année.
- A l'inverse si la valeur d'achat de l'obligation est supérieure au nominal, on parle de surcote et la VNC diminue chaque année.

Une obligation dont la valeur d'achat est égale au nominal n'est pas amortie ; elle est dite cotée au pair.

La surcote ou décote est déterminée à la date d'achat. Elle vaut :

$$Surcote/Decote = N - VA_O$$

Dans l'outil développé pour ce mémoire, la valeur nette comptable de l'obligation est ensuite amortie linéairement entre T_0 et T_M . La VNC de l'obligation est donnée à la date $T_1 \leq t < T_M$ par

$$VNC_O(t) = VNC_O(t-1) + \frac{Surcote/Decote}{M}$$

Remarque : Il est possible d'amortir l'obligation de manière actuarielle. Cette approche nécessite le calcul du taux actuariel noté a , solution de l'équation non linéaire

$$\begin{aligned} VA_O &= \sum_{j=1}^M \frac{c \times N}{(1+a)^j} + \frac{N}{(1+a)^M} \\ &= N \times \left(c \times \frac{1 - \frac{1}{(1+a)^M}}{1 - \frac{1}{1+a}} + \frac{1}{(1+a)^M} \right) \end{aligned}$$

Le taux a est généralement déterminé par optimisation numérique. La VNC de l'obligation dépend du temps restant à maturité de l'obligation et est donnée à la date $T_0 \leq t < T_M$ par

$$VNC_O(t) = \sum_{j=1}^{M_t^O} \frac{c \times N}{(1+a)^j} + \frac{N}{(1+a)^{M_t^O}}$$

Plus ou moins values de l'obligation

Les plus et moins values latentes de l'obligation, notées $PMVL_O$, découlent de la différence entre la valeur de marché de l'obligation et sa valeur nette comptable. Pour $T_0 \leq t < T_M$

$$PMVL_O(t) = VM_O(t) - VNC_O(t)$$

1. Si $PMVL_O(t) \leq 0$, on constate une moins-value latente sur l'obligation O à la date t
2. Si $PMVL_O(t) \geq 0$, on constate une plus-value latente sur l'obligation O à la date t

Les plus values (resp. moins values) latentes ne sont réalisées que si l'obligation est vendue alors qu'elle est en situation de plus-value (resp. moins values).

Revenus financiers de l'obligation

Les coupons cN versés par l'obligation constituent un revenu financier à intégrer au résultat financier à chaque date de l'échéancier. D'autre part, l'amortissement de l'obligation dû à une éventuelle surcote ou décote est imputé au résultat financier de la compagnie d'assurance. En comptabilité des assurances, les plus ou moins values réalisées lors de cessions d'obligations sont dotées ou reprises à la réserve de capitalisation. Néanmoins, nous ne modélisons pas la réserve de capitalisation et, en conséquence les plus ou moins values réalisées affectent le compte de résultat.

Remarque : Le rendement comptable d'une obligation cotée au pair est égal à son taux de coupon. En effet pour tout $T_0 \leq t < T_M$

$$\frac{c \times N}{VNC_O(t)} = \frac{c \times N}{N} = c$$

3.5.3 Actions et mécanismes comptables associés

La présente section définit les poches action présentes dans les portefeuilles utilisés pour la modélisation de l'actif. De plus elle explique les principaux mécanismes comptables associés.

Action

On considère une action, dont le cours est noté S . La valeur de marché de l'action à la date $t \geq 0$ est donnée par son cours

$$VM_S(t) = S(t)$$

Valeur nette comptable de l'action

La valeur nette comptable d'une action S , notée VNC_S , correspond à la valeur inscrite dans les comptes. A la date d'acquisition T_0 du titre elle est égale à la valeur d'achat notée VA_S . De fait on a

$$VA_S = VM_S(T_0) = VNC_S(T_0)$$

A l'inverse des titres obligataires, les actions ne sont pas amortissables. Néanmoins, elles peuvent faire l'objet d'une dépréciation nécessitant la constitution d'une provision pour dépréciation durable (PDD). Cette dernière est déterminée par rapport à la valeur d'achat du titre. On la note PDD_S et pour $t \geq T_0$

$$PDD_S(t) = \begin{cases} VA_S - VM_S(t), & \text{si } \frac{VM(t)}{VA_S} < Ratio_{PDD} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $Ratio_{PDD}$ est un seuil pré-défini.

La valeur nette comptable de l'action est alors donnée à la date $t \geq T_0$ par

$$VNC_S(t) = VA_S - PDD_S(t)$$

Remarque : La PDD est une provision ligne à ligne qui est déterminée individuellement pour chaque titre.

L'outil développé dans le cadre de ce mémoire ne prend pas en compte la PDD (i.e $Ratio_{PDD} = 0$). Toutefois l'outil modélise la provision pour risque d'exigibilité (PRE) dont le fonctionnement est détaillé dans la partie afférente aux interactions entre l'actif et le passif.

Plus ou moins values de l'action

De la même manière que pour les obligations, les plus et moins values latentes de l'action, notées $PMVL_S$ découlent de la différence entre la valeur de marché de l'action et sa valeur nette comptable. Pour $t \geq 0$

$$PMVL_S(t) = VM_S(t) - VNC_S(t)$$

1. Si $PMVL_S(t) \leq 0$, on constate une moins-value latente sur l'action S à la date t
2. Si $PMVL_S(t) \geq 0$, on constate une plus-value latente sur l'action S à la date t

Revenus financiers de l'action

L'action donne le droit à son détenteur de recevoir des dividendes si la société émettrice en distribue. Ces flux financiers sont à intégrer au résultat financier à la date de versement.

D'autre part, le différentiel de PDD entre deux dates de calcul du bilan est imputé au résultat financier de la compagnie d'assurance.

Poche action

On appelle poche action A , le montant investi dans une action de même type dont le cours est noté S . On suppose qu'on détient $n_s(t)$ actions à la date $t \geq 0$. La valeur de marché VM_A de la poche action à la date t est alors égale à

$$VM_A(t) = n_s(t) \times S(t)$$

Remarque : Dans la suite du mémoire une poche d'actifs immobiliers est aussi considérée. Son traitement est identique en tous points à celui d'une poche action.

On suppose par la suite que les titres action sont infiniment divisibles, c'est-à-dire $n_s(t) \in \mathbb{R}_+$. En outre, on fait l'hypothèse que le rebalancement de la poche action a lieu chaque année juste avant le calcul du bilan. Pour $t \geq 0$

$$n_s(\lfloor t \rfloor) = n_s(t)$$

avec $n_s(0) = n_{s0}$.

Sous ces hypothèses, pour $t \geq 0$, l'évolution de la poche action peut être obtenue à partir de sa valeur à l'année précédente et du rendement de l'action

$$\begin{aligned} VM_A(t) &= n_s(t) \times S(\lfloor t \rfloor) \frac{S(t)}{S(\lfloor t \rfloor)} \\ &= VM_A(\lfloor t \rfloor) \frac{S(t)}{S(\lfloor t \rfloor)} \end{aligned}$$

Valeur nette comptable de la poche action

La valeur nette comptable de la poche action A , notée VN_A , correspond à la somme des valeurs nettes comptables des titres qui la composent. Pour $t \geq 0$

$$VNC_A(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} n_s(t, j) \times VNC_S(t, j)$$

où

- $\forall u, t \in \mathbb{R}_+, u \leq t$, $n_s(t, u)$ est le nombre d'actions achetées à la date $\lfloor u \rfloor$ et encore détenues en t ;
- $\forall u, t \in \mathbb{R}_+, u, VNC_S(t, u)$ est la valeur nette comptable en t de l'action achetée à la date $\lfloor u \rfloor$.

Remarque : Pour $t \geq 0$, on a $\sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} n_s(t, j) = n_s(t)$

Plus ou moins values de la poche action

Les plus ou moins values latentes de la poche action correspondent à la somme des plus ou moins values des titres qui la composent. Pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 PMVL_A(t) &= \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} n_s(t, j) \times (VM_S(t) - VNC_S(t, j)) \\
 &= \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} n_s(t, j) \times VM_S(t) - \sum_{j=0}^{\lfloor t \rfloor} n_s(t, j) \times VNC_S(t, j) \\
 &= n_s(t) \times VM_S(t) - VNC_A(t) \\
 &= VM_A(t) - VNC_A(t)
 \end{aligned}$$

1. Si $PMVL_A(t) \leq 0$, on constate une moins-value latente de la poche action en t
2. Si $PMVL_A(t) \geq 0$, on constate une plus-value latente de la poche action en t

Provision pour risque d'exigibilité

La provision pour risque d'exigibilité intervient aussi bien au niveau de l'actif que du passif. C'est une provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins values latentes sur l'ensemble des actifs. Elle consiste en un étalement sur trois ou huit ans des moins values latentes.

Dans le cadre du mémoire, la PRE est considérée étalée sur huit ans et ne concerne que la poche action.

Les règles régissant la PRE associée à la poche action A s'expriment comme suit pour $t \geq 0$

$$PRE_A(t) = \begin{cases} \min \left\{ PRE_A^*(t-1) + \frac{1}{8} \times PMVL_A(t), PMVL_A(t) \right\}, & \text{si } PMVL_A(t) < 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $PRE_A^*(t-1) := PRE_A(t-1) \times \min \left\{ \frac{n_s(t)}{n_s(t-1)}, 1 \right\}$ permet de tenir compte d'une reprise proportionnelle de la PRE en cas de vente d'une partie de la poche action en date t . La PRE interagit avec l'actif et impacte le compte de PB puisqu'en tant que provision technique, elle est prise en compte dans l'assiette des provisions à laquelle est appliquée le rendement comptable afin de déterminer les revenus nets. Formellement, pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 Revenus\ nets(t) &= TRA(t) \times (PM(t) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + PRE_A(t))
 \end{aligned}$$

où PM est la provision mathématique définie dans l'équation 3.2.

La PRE impacte aussi le résultat technique en tant que provision technique. Pour $t \geq 1$

$$Resultat\ technique(t) = \dots - (PRE_A(t) - PRE_A(t-1))$$

Remarque : A la différence de la PDD, la PRE est constituée globalement (et non ligne à ligne). Dans le cas particulier où l'on déprécie l'intégralité des moins values latentes et où le portefeuille ne contient qu'un seul titre action, la PDD et la PRE ne peuvent pas coexister puisque la constitution d'une PDD implique une dépréciation de la valeur nette comptable et donc mécaniquement une reprise de la PRE.

3.6 Politique de gestion des placements

La gestion du portefeuille d'actifs de l'assureur, considérée annuelle dans ce mémoire, implique des investissements ou des désinvestissements. Cette partie décrit le portefeuille d'actifs initial ainsi que les politiques de gestion retenues dans les outils développés. Les mécanismes sous-jacents aux opérations d'achat ou de vente sont ensuite détaillés.

3.6.1 Caractéristiques du portefeuille initial d'actifs

On considère dans ce mémoire un portefeuille d'actifs simple, noté $\mathcal{P}$ initialement constitué de :

1. **Un actif risqué :** il se compose des deux poches actions EUR et FOR ainsi que d'une poche d'actifs immobiliers I dont les valeurs nettes comptables représentent des parts $(\alpha_{EUR}, \alpha_{FOR}, \alpha_I) \in [0, 1]^3$, de la valeur nette comptable totale de l'actif risqué. Les trois poches retenues ont été calibrées et agrégées sur un portefeuille ligne à ligne d'actions représentatif du marché français. Leurs caractéristiques principales sont détaillées dans le tableau suivant :

	<i>EUR</i>	<i>FOR</i>	<i>I</i>
Description	Poche des actions européennes	Poche des actions non européennes composée quasi exclusivement de titres US	Poche des actifs immobiliers
Indice sous-jacent	Eurostoxx 50	S&P 500	IPD Euro
Part en VNC dans l'actif risqué	$\alpha_{EUR} = 72\%$	$\alpha_{FOR} = 13\%$	$\alpha_I = 14\%$
Hypothèse de dividendes	4%	4,5%	4%
Taux de PVL initial	7,5%	7,5%	14,3%

Par ailleurs, la part d'actif risqué en valeur nette comptable au sein de l'ensemble du portefeuille $\mathcal{P}$ est notée $\alpha \in [0, 1]$.

2. **Un actif non risqué** : il se compose d'obligations ne portant pas de risque de défaut, cotées au pair et relatives à différentes maturités résiduelles. Les modèles points d'obligations retenus ont été calibrés et agrégés sur un portefeuille ligne à ligne d'obligations représentatif du marché français. Leurs caractéristiques principales sont détaillées dans le tableau suivant :

Maturité	Part en VNC dans l'actif non risqué	Taux de coupon
1	4,6%	2,4%
2	9,2%	3,3%
3	7,0%	3,2%
4	8,8%	3,1%
5	7,7%	2,8%
6	10,7%	2,9%
7	5,9%	2,5%
8	8,1%	2,3%
9	10,6%	2,7%
10	5,7%	3,1%
11	3,8%	2,5%
12	3,5%	2,7%
13	5,3%	2,5%
14	3,7%	2,0%
15	1,4%	1,7%
16	0,8%	2,0%
17	1,0%	1,3%
18	1,5%	1,4%
19	0,6%	1,2%

La duration de l'actif non-risqué obligataire est d'environ 7 ans. En outre l'actif non-risqué affiche un taux de plus values latentes initiales de 13%.

La valeur nette comptable totale de l'actif non risqué représente une part $1 - \alpha$ au sein de l'ensemble du portefeuille $\mathcal{P}$.

Dans la suite, ce portefeuille est désigné par la mention "allocation d'actif risqué initiale α ". Il est à noter que la répartition en VNC initiale des poches actions et de la poche d'actifs immobiliers (resp. des obligations) au sein de l'actif risqué (resp. non-risqué) est identique pour tous les portefeuilles considérés.

3.6.2 Politique de gestion des placements de l'outil ALM stochastique

L'outil de gestion actif-passif (ALM) stochastique permet de projeter le bilan de l'assureur le long de scénarios stochastiques, générés par un générateur de scénarios éco-

nomiques (GSE) décrit au chapitre 4. Ces projections permettent de caractériser l'évolution des placements financiers selon les mécanismes comptables introduits précédemment. Pour chaque trajectoire économique stochastique, l'outil de projection ALM suit les règles d'investissements ou désinvestissements listées ci-dessous par ordre de priorité.

Soit $t \in \mathbb{N}^*$ une date annuelle de constitution du bilan assurantiel :

- Rg. 1** Toute obligation du portefeuille arrivant à maturité à la date t , est immédiatement remplacée par une obligation cotée au pair de même nominal et de maturité résiduelle 10 ans. De fait, le taux de coupon de la nouvelle obligation correspond au taux au pair de maturité résiduelle 10 ans à sa date d'acquisition.
- Rg. 2** Dans le cas où l'équilibrage du bilan à la date t nécessite de céder un montant X , on liquide en priorité et de manière proportionnelle les poches actions et la poche d'actifs immobiliers. Le montant X_A de la poche A à vendre à la date t vaut

$$X_A = \min \left\{ VNC_A(t), \frac{VNC_A(t)}{\sum_{y \in \text{poches actions-imm}} VNC_y(t)} X \right\}$$

Si la vente d'actions ne suffit pas, i.e. $X > \sum_{y \in \text{poches actions-imm}} VNC_y(t)$, on vend une partie des obligations par ordre de priorité le temps restant à maturité, du plus faible au plus élevé. Le montant X_O d'obligations à vendre à la date t vaut

$$X_O = X - X_A$$

- Rg. 3** Dans le cas où l'équilibrage du bilan à la date t nécessite d'acheter un montant X d'actifs, on acquiert des actions et actifs immobiliers ainsi que des obligations proportionnellement à l'allocation d'actif risqué initiale α du portefeuille. Le montant d'actif risqué (resp. le montant d'actif non risqué) à acheter est αX (resp. $(1 - \alpha)X$). Les obligations achetées sont cotées au pair et de maturité résiduelle 10 ans.

Remarque : La politique d'investissement décrite ici se rapproche d'une stratégie de *buy and hold* qui consiste à investir dans des actions et à ensuite limiter aux maximum les mouvements d'achat/vente. Cette stratégie se base sur l'idée que sur le long terme, les actions finiront par rapporter, tout l'enjeu est donc d'investir sur les bonnes actions au départ et de diversifier avec soin son portefeuille.

3.6.3 Politique de gestion des placements appliquée au cadre FRPS

L'outil ALM adapté au cadre FRPS, décrit l'évolution du bilan assurantiel le long des scénarios de tests de résistance déterministes FRPS. Cette approche ne nécessite pas l'utilisation d'un GSE, et suppose que la valeur de marché des actifs reste égale à la valeur nette comptable au cours de la projection, si bien qu'aucune plus ou moins value n'est constatée. En outre, la réglementation impose que l'allocation des actifs reste inchangée sur l'ensemble de la période de projection. L'outil de projection ALM adapté au cadre

FRPS suit les règles d'investissements ou désinvestissements listées ci-dessous par ordre de priorité.

Soit $t \in \mathbb{N}^*$ une date annuelle de constitution du bilan assurantiel :

Rg. 1 Toute obligation du portefeuille arrivant à maturité à la date t , est immédiatement remplacée par une obligation cotée au pair de même nominal et de maturité résiduelle 10 ans. Le taux de coupon de l'obligation au pair est fixé par la réglementation comme la moyenne de l'indice TEC_{10} sur l'année précédant la date initiale de projection.

Rg. 1 bis Dans le cas où, en date t , l'allocation d'actif risqué en valeur nette comptable est modifiée par rapport à l'allocation d'actif risqué initiale α , le portefeuille est rebalancé. On pose β la nouvelle part d'actif risqué en valeur nette comptable à la date t

$$\beta = \frac{\sum_{y \in \text{poches actions-imm}} VNC_y(t)}{VNC_{\mathcal{P}}(t)}$$

où pour tout $u \geq 0$, $VNC_{\mathcal{P}}(u) := \sum_{y \in \mathcal{P}} VNC_y(u)$ est la somme des valeurs nettes comptables des actifs en portefeuille.

On distingue deux cas :

	$\beta < \alpha$	$\beta > \alpha$
Actif risqué	achat d'un montant $(\alpha - \beta)VNC_{\mathcal{P}}(t)$	vente d'un montant $(\beta - \alpha)VNC_{\mathcal{P}}(t)$
Actif non risqué	vente d'un montant $(\beta - \alpha)VNC_{\mathcal{P}}(t)$	vente d'un montant $(\alpha - \beta)VNC_{\mathcal{P}}(t)$

Rg. 2 Cette règle de gestion est identique à la règle 2 de l'outil ALM stochastique décrite dans la partie précédente.

Rg. 3 Dans le cas où l'équilibrage du bilan à la date t nécessite d'acheter un montant X d'actifs, on acquiert des actions et actifs immobiliers ainsi que des obligations proportionnellement à l'allocation d'actif risqué initiale α du portefeuille. Le montant d'actif risqué (resp. le montant d'actif non risqué) à acheter est αX (resp. $(1 - \alpha)X$). Les obligations achetées sont cotée au pair et de maturité résiduelle 10 ans. A noter que le taux de coupon de l'obligation au pair est fixé par la réglementation comme la moyenne de l'indice TEC_{10} sur l'année précédant la date initiale de projection.

3.6.4 Mécanismes sous-jacents aux investissements ou désinvestissements

Dans la suite de cette partie, on formalise la manière dont fonctionnent les règles d'investissements ou de désinvestissements en détaillant les opérations d'achat et de vente

ainsi que leur impact.

On définit pour toute fonction càd làg f à support réel et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t^-) := \lim_{u \rightarrow t^-} f(u)$$

Dans le cadre d'un achat ou d'une vente d'un actif financier effectué à une date $t > 0$, la notation t^- caractérise l'instant juste avant cette opération. En outre, les investissements ou désinvestissements au sein du portefeuille ont lieu chaque année juste avant l'établissement du bilan. Dans la suite on parle de rebalancement du portefeuille.

Vente d'obligation

On suppose qu'un rebalancement du portefeuille à une date $t > 0$ implique de libérer, en valeur nette comptable, un montant $X \leq VNC_O(t^-)$ d'une obligation O de taux de coupon c et de nominal N . On fait l'hypothèse qu'il est possible de scinder l'obligation pour n'en vendre qu'une partie.

La nouvelle valeur nette comptable de l'obligation à la date t est donnée par

$$VNC_O(t) = VNC_O(t^-) - X$$

La nouvelle valeur de marché de l'obligation à la date t est calculée proportionnellement à la vente

$$VM_O(t) = VM_O(t^-) \times \frac{VNC_O(t)}{VNC_O(t^-)}$$

Cette approche implique une révision du nominal. Le nouveau nominal révisé, N^* , de l'obligation O doit vérifier

$$\begin{aligned} VM_O(t) &= \sum_{j=1}^{M_t^O} \frac{c \times N^*}{(1 + R(t, t + j))^j} + \frac{N^*}{(1 + R(t, t + M_t^O))^{M_t^O}} \\ &= N^* \times \frac{VM_O(t^-)}{N} \end{aligned}$$

En conséquence le nominal révisé de l'obligation O est

$$N^* = N \times \frac{VM_O(t)}{VM_O(t^-)}$$

Remarque : Si l'obligation est initialement cotée au pair, elle le reste après la vente puisque dans ce cas $N = VNC_O(t^-)$ et par conséquent

$$\begin{aligned} N^* &= N \times \frac{VM_O(t)}{VM_O(t^-)} \\ &= N \times \frac{VNC_O(t) VM_O(t^-)}{VNC_O(t^-) VM_O(t^-)} \\ &= VNC_O(t) \end{aligned}$$

Finalement, la vente obligataire dégage une plus ou moins value réalisée à la date t , notée PMV_O et donnée par

$$\begin{aligned} PMV_O(t) &= VM_O(t^-) - VM_O(t) - (VNC_O(t^-) - VNC_O(t)) \\ &= PMVL_O(t^-) \times \left(1 - \frac{VNC_O(t)}{VNC_O(t^-)}\right) \end{aligned}$$

Achat d'obligation

On suppose qu'un rebalancement du portefeuille à une date $t > 0$ implique d'acheter, un montant X d'obligation. A cet effet on ajoute au portefeuille une obligation O de taux de coupon c et de maturité résiduelle M dont la valeur d'achat est

$$VA_O = X$$

On sait qu'à la date d'achat t ,

$$\begin{aligned} VA_O &= VM_O(t) = VNC_O(t) \\ &= \sum_{j=1}^M \frac{c \times N}{(1 + R(t, t+j))^j} + \frac{N}{(1 + R(t, t+M))^M} \end{aligned}$$

De fait le nominal N de l'obligation à acquérir est déduit par la relation

$$N = \frac{X}{\sum_{j=1}^M \frac{c}{(1+R(t,t+j))^j} + \frac{1}{(1+R(t,t+M))^M}}$$

Remarque : Si le taux de coupon est égal au taux au pair (ou taux swap) de maturité résiduelle M à la date d'achat t alors l'obligation est cotée au pair, autrement dit si

$$c = \frac{1 - P(t, t+M)}{\sum_{j=1}^M P(t, t+j)}$$

Vente d'actions

On suppose qu'un rebalancement du portefeuille à une date $t > 0$ implique de libérer, en valeur nette comptable, un montant $X \leq VNC_A(t^-)$ de la poche action A constituée d'une action de même type dont le cours est S .

Après la vente, la VNC de la poche action à la date t est

$$VNC_A(t) = VNC_A(t^-) - X$$

Par ailleurs on suppose que le rebalancement est répercuté de manière proportionnelle sur la valeur de marché de la poche action

$$VM_A(t) = VM_A(t^-) \times \frac{VNC_A(t)}{VNC_A(t^-)}$$

Cette méthodologie peut être interprétée en terme de nombre de titres en portefeuille. Rappelons que les titres action sont supposés infiniment divisibles et que le rebalancement de la poche action a lieu chaque année juste avant le calcul du bilan, **c'est-à-dire qu'on considère que** $t \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $\lfloor t^- \rfloor = t - 1$.

Remarque : La constitution de la PDD, s'il y a lieu, est réalisée au même moment que le rebalancement du portefeuille, si bien que $VNC_A(t-1) = VNC_A(t^-)$ est toujours vérifié puisqu'aucune vente d'actions n'est effectuée entre les instants $t-1$ et t^- .

L'approche retenue revient alors à vendre une proportion $p = \frac{VNC_A(t)}{VNC_A(t^-)}$ de chaque titre en portefeuille. En effet

$$\begin{aligned} VNC_A(t) &= p \times VNC_A(t^-) = p \times VNC_A(t-1) \\ &= p \times \sum_{j=0}^{t-1} n_s(t-1, j) \times VNC_S(t-1, j) \\ &= \sum_{j=0}^t n_s(t, j) \times VNC_S(t, j) \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{cases} n_s(t, u) = p \times n_s(t-1, u), & \text{si } 0 \leq u \leq t-1 \\ n_s(t, t) = 0 \end{cases}$$

Par conséquent, $n_s(t) = n_s(t-1)$.

Le cours de l'action et donc sa valeur de marché sont supposés continus, i.e. $VM_S(t^-) = VM_S(t)$. De fait, il vient

$$\begin{aligned} VM_A(t) &= n_s(t) \times VM_S(t) \\ &= n_s(t-1) \times VM_S(t) \\ &= p \times \sum_{j=0}^{t-1} n_s(t-1, j) \times VM_S(t^-) \\ &= p \times VM_A(t^-) \end{aligned}$$

A l'instar de la vente obligataire, la vente d'une partie de la poche action dégage une plus ou moins value réalisée à la date t , notée PMV_A . Sous les hypothèses retenues elle est donnée par

$$\begin{aligned} PMV_A(t) &= VM_A(t^-) - VM_A(t) - (VNC_A(t^-) - VNC_A(t)) \\ &= PMVL_A(t^-) \times \left(1 - \frac{VNC_A(t)}{VNC_A(t^-)}\right) \end{aligned}$$

Achat d'actions

On suppose qu'un rebalancement du portefeuille à une date $t > 0$ implique d'acheter, un montant X d'actions. A cet effet on ajoute à la poche action A autant d'actions de cours S que nécessaire.

La VNC de la poche action à la date d'achat t devient

$$VNC_A(t) = VNC_A(t^-) + X$$

De la même manière, la VM de la poche action à la date d'achat t devient

$$VM_A(t) = VM_A(t^-) + X$$

Cette approche revient à acheter un nombre d'actions

$$n_s(t, t) = \frac{X}{S(t)}$$

Dans cette partie, nous avons présenté la modélisation des deux outils développés dans le cadre de ce mémoire.

On rappelle que le premier outil est destiné à projeter l'évolution de l'actif et du passif sous la probabilité historique le long de trajectoires stochastiques.

Le deuxième outil a quant à lui été développé afin d'évaluer l'impact des quatre scénarios déterministes de stress imposés par le cadre réglementaire FRFPS.

Ces deux outils diffèrent dans la politique de gestion des placement déployée ; le cadre FRPS impose notamment que l'allocation des actifs reste constante au cours de la projection.

La partie suivante concerne le théorie du générateur de scénarios économiques (GSE) utilisé pour projeter le bilan en monde réel et les hypothèses retenues pour son utilisation dans le cadre de ce mémoire. Le GSE vient compléter l'outil ALM puisque c'est ce qui va permettre de projeter en stochastique sur différentes trajectoires selon les comportements du cours de l'action et des taux d'intérêts.

Chapitre 4

Générateur de scénarios économiques (GSE)

L'allocation à déterminer dans le cadre de ce mémoire, vise à maximiser un critère de rentabilité, par exemple le taux de rendement de l'actif (TRA) moyen. Celui-ci est estimé en simulant l'évolution du bilan assurantiel le long de scénarios économiques stochastiques. F. Planchet et P. Thérond définissent la notion de scénario économique comme *la projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêt*. Le cadre posé par ce mémoire s'intéresse en particulier à la simulation des taux d'intérêts et du cours d'une action intervenant dans la modélisation de l'actif présenté dans le chapitre précédent.

Dans la suite, on se munit d'un espace de probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ une filtration sur la σ -algèbre $\mathcal{F}$. De plus on suppose que l'ensemble des actifs échangés sur le marché sont $\mathbb{F}$ -adaptés.

$\mathbb{P}$ correspond à la probabilité historique, sous laquelle sont observés les historiques de prix de marché. La modélisation sous la probabilité historique s'attache à projeter les actifs financiers au plus proche de la réalité économique retranscrite par les historiques de données. Le rendement de chaque actif modélisé intègre une prime de risque qui lui est propre. De fait cet univers de modélisation est à privilégier afin de déterminer un critère de rentabilité comme le rendement d'un portefeuille financier. Il s'agit de l'univers de modélisation retenu dans le cadre de ce mémoire. La mise en place d'un GSE est un dispositif complexe. En particulier, la stabilisation du processus de calibrage et la justification de certains paramètres peuvent parfois s'avérer délicates. Aussi, pour la modélisation des taux d'intérêt, nous avons décidé d'utiliser un modèle dont le calibrage était déjà implémenté, et développé par le cabinet GALEA. Il s'agit du modèle gaussien à deux facteurs (G2++). Ce dernier spécifie la dynamique du taux court sous la probabilité risque-neutre. Nous faisons ensuite l'hypothèse, très simplificatrice, que le rendement des actifs relatifs aux taux d'intérêt n'intègrent pas de prime de risque sous la probabilité historique. Ainsi les taux d'intérêt sous la probabilité risque-neutre sont supposés identiques sous la probabilité historique.

Toutefois, la modélisation du cours des actions et de l'indice immobilier fait l'objet d'une

modélisation spécifique sous la probabilité historique.

Une autre approche de projection des taux nominaux et du cours de l'action sous la probabilité historique a été étudiée et implémentée. Celle-ci est directement inspirée de la modélisation exposée dans la réglementation PRIIPS (Packaged Retail Investment and Insurance Products). La projection des actifs financiers est basée sur une approche de ré-échantillonnage multivarié simple de mise en œuvre, et appuyée par un contexte réglementaire. En outre le choix des paramètres exogènes est imposé par la réglementation comme le coefficient de déplacement sur les taux. La théorie associée est détaillée en annexe A.

Toutefois les limitations de cette approche nous ont amenées à privilégier le modèle G2++.

Le tirage avec rendement ne prend pas en compte les phénomènes de cycle, c'est-à-dire la dépendance entre les dates consécutives dans l'évolution des grandeurs. En pratique il y a une dynamique dans les évolutions et les déformations de courbe des taux que la technique de ré-échantillonnage ne reproduit pas. De plus le conditionnement aux historiques de calibrage considérés est très important.

Ce chapitre documente les modèles retenus pour les taux nominaux le cours des actions et l'indice immobilier. En particulier la probabilité risque neutre ainsi que les produits dérivés (swaptions) classiquement considérés pour le calibrage les modèles de taux nominaux risque-neutres y sont introduits. Ces notions sont importantes à la bonne compréhension du modèle G2++.

4.1 Modélisation des taux d'intérêts

Cette partie décrit le modèle gaussien à deux facteur (G2++). Il s'agit du modèle retenu pour les taux d'intérêt. Ce modèle s'exprime sous la probabilité risque neutre, introduite ci dessous. Par ailleurs nous définissons les options sur swap (swaptions) utilisées dans l'algorithme de calibrage du G2++.

4.1.1 Probabilité risque neutre et changement de numéraire

On suppose que la loi fondamentale du marché énoncée par Nicole El Karaoui [Karoui, 2004] est vérifiée :

Dans un marché très liquide, où il n'y a ni coûts de transaction, ni limitations sur la gestion (achat-vente) des actifs supports, il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul.

Cette propriété implique l'existence d'une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$, sous laquelle les prix des actifs déflatés sont des martingales. En outre on suppose que le marché est complet, c'est-à-dire que tout actif peut être parfaitement couvert par un portefeuille autofinancé. Cette hypothèse implique l'unicité de la probabilité risque-neutre. Le déflateur ou facteur d'actualisation associé est défini

pour $t \geq 0$ par

$$D(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$$

La notion d'univers risque-neutre est largement introduite dans littérature financière ; on pourra par exemple se référer à la définition énoncée dans [Karoui, 2004].

Numéraire : On appelle numéraire, tout instrument de marché strictement positif ne versant aucun paiement intermédiaire.

Changement de numéraire : Supposons qu'il existe un numéraire N et une probabilité $\mathbb{Q}^N$ équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ (ie pour tout $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{Q}^N(A) = 0$ ssi $P(A) = 0$) tels que le prix de n'importe quel instrument financier (ne versant pas de paiement intermédiaire) X normalisé par N soit une martingale sous $\mathbb{Q}^N$. Pour $0 \leq t \leq T$

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{X_T}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

Alors, pour tout numéraire U , il existe une probabilité $\mathbb{Q}^U$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que le prix de n'importe quel instrument financier Y normalisé par U soit une martingale sous $\mathbb{Q}^U$. Formellement pour $0 \leq t \leq T$

$$\frac{Y_t}{U_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[\frac{Y_T}{U_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

La dérivée de Radon-Nykodym caractérisant la probabilité $\mathbb{Q}^U$ vaut alors

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T}$$

L'existence d'une probabilité risque-neutre implique que la première partie du théorème de changement de numéraire est vérifiée. D'autre part, le numéraire associé à la probabilité risque-neutre est le compte bancaire $B(t)$ dont l'évolution en $t \geq 0$ est donnée par

$$B(t) = e^{\int_0^t r(u)du}$$

4.1.2 Swaptions

Les swaptions (pour option sur swap) font partie des dérivés de taux les plus échangés du marché. De fait ils constituent la principale source de calibrage des modèles de taux nominaux risque-neutre de place. De la même manière que pour le taux swap forward, on se munit d'un ensemble de dates $T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n$, avec $T_0 = 0$. On se donne deux entiers α et β tels que $0 \leq \alpha < \beta \leq n$, et on considère l'échéancier $\tau = T_\alpha, \dots, T_\beta$.

On appelle swaption le contrat donnant le droit à son détenteur d'entrer dans un swap de prix d'exercice (ou strike) K , à la date de maturité T_α pour une durée $T_\beta - T_\alpha$ appelée maturité résiduelle. Dans le cas où le détenteur de la swaption paie le taux fixe K , on

parle de swaption payeuse. Au contraire, dans le cas où le détenteur de la swaption reçoit le taux fixe K , on parle de swaption receveuse. Le payoff actualisé en 0 d'une swaption payeuse est

$$D(T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \quad (4.1)$$

Une swaption est dite à la monnaie si son strike est égal au taux swap forward

$$K = K_{ATM} = S_{\alpha,\beta}(0) = \frac{P(0, T_\alpha) - P(0, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)} \quad (4.2)$$

Par ailleurs, si :

- $K < K_{ATM}$, alors la swaption est dite en dehors de la monnaie
- $K > K_{ATM}$, alors la swaption est dite dans la monnaie

Une swaption est généralement cotée en volatilité. Bloomberg permet par exemple d'extraire :

- **la volatilité log-normale d'une swaption** : le taux swap forward est supposé log-normal sous la probabilité level-neutre $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$ dont le numéraire est l'annuité du swap $A_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$. On peut écrire pour $t \geq 0$

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(t) \sigma_{\alpha,\beta}^{LN} dW_{\alpha,\beta}(t)$$

avec $\sigma_{\alpha,\beta}^{LN} > 0$ la volatilité log-normale et $W_{\alpha,\beta}$ un mouvement brownien sous la probabilité level-neutre.

Le prix de la swaption est alors obtenu par l'intermédiaire de la formule de Black

$$\begin{aligned} PS^{Black}(0, \tau, K, \sigma_{\alpha,\beta}^{LN}) &= A_{\alpha,\beta}(0) (S_{\alpha,\beta}(0) \phi(d_1) - K \phi(d_2)) \\ d_1 &= \frac{\ln \frac{S_{\alpha,\beta}(0)}{K} + \frac{T_\alpha (\sigma_{\alpha,\beta}^{LN})^2}{2}}{\sigma_{\alpha,\beta}^{LN} \sqrt{T_\alpha}} \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{T_\alpha} \sigma_{\alpha,\beta}^{LN} \end{aligned}$$

avec ϕ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Notons que ce modèle n'est défini que si le taux swap forward est strictement positif. A ce jour, la courbe des taux swap est négative pour les maturités courtes. Aussi pour les couples de faibles maturités / maturité résiduelles, il n'existe pas de cotations de volatilités log-normales.

- **la volatilité normale d'une swaption** : le taux swap forward est supposé normal sous la probabilité leve-neutre $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$. Pour $t \geq 0$

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\alpha,\beta}^N dW_{\alpha,\beta}(t)$$

avec $\sigma_{\alpha,\beta}^N > 0$ la volatilité log-normale et $W_{\alpha,\beta}$ un mouvement brownien sous la probabilité level-neutre.

Le prix de la swaption est alors obtenu par l'intermédiaire de la formule de Bachelier

$$PS^{Bachelier}(0, \tau, K, \sigma_{\alpha,\beta}^N) = A_{\alpha,\beta}(0) \sigma_{\alpha,\beta}^N (d_1 \phi(d_1) + \varphi(d_1))$$

$$d_1 = \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\alpha,\beta}^N}$$

avec φ la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Contrairement aux volatilité log-normales, les volatilités normales sont définies lorsque le taux swap forward est négatif.

Historiquement, le modèle de cotation log-normal était très populaire chez les assureurs. Néanmoins, ces derniers se tournent aujourd'hui de plus en plus vers le modèle de cotation normal du fait de l'apparition de taux négatifs induisant des volatilités explosives voire non-définies. Dans la suite nous considérerons des volatilités log-normales pour le calibrage du modèle de taux. En effet, l'adaptation au cadre normal du générateur de scénarios économiques (GSE) utilisé demanderait des modifications significatives dépassant le périmètre de ce mémoire.

4.1.3 Modèle gaussien à deux facteurs (G2++)

Le modèle gaussien à deux facteurs (G2++) est un modèle spécifiant la dynamique du taux court sous la mesure risque-neutre comme la somme de deux facteurs gaussiens corrélés. Il induit des formules fermées pour le prix des obligations zéro-coupon. Par ailleurs, le G2++ est un modèle d'absence d'opportunité d'arbitrage et intègre une fonction déterministe qui par construction permet de répliquer exactement la courbe des taux initiale. Aussi, les swaptions constituent généralement les dérivés considérés afin de calibrer les paramètres du modèle. Le calcul des prix de swaptions peut être réalisé par l'intermédiaire de formules semi-fermées nécessitant l'évaluation d'une intégrale numérique dont l'intégrande dépend d'un paramètre solution d'une équation non linéaire. Toutefois, il est possible d'exhiber des formules fermées approchées dont l'évaluation est notablement moins consommatrice en temps de calcul.

Dynamique du taux court

Le modèle G2++ fait l'hypothèse que sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$ le taux court, $r(t)$, est donné pour $t \geq 0$ par

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t) \quad (4.3)$$

$$r(0) = r_0 \quad (4.4)$$

- $\varphi(t)$ est une fonction déterministe, dépendante du temps, de la courbe des taux initiale et des paramètres du modèle ;
- $r_0 \geq 0$.

Par ailleurs x, y sont deux facteurs gaussiens dont les dynamiques sont pour $t \geq 0$

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \quad (4.5)$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t) \quad (4.6)$$

avec a, b, σ et η des réels positifs, (W_1, W_2) un mouvement brownien bi-dimensionnel sous la probabilité risque-neutre tels que $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$.

Remarque : La fonction φ dépend de la courbe des taux initiale ainsi que des paramètres du modèle. Formellement pour $t \geq 0$

$$\varphi(t) = f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bt})^2 + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-at}) (1 - e^{-bt})$$

avec $f(0, t) = \frac{\partial \ln P(0, t)}{\partial t}$ le taux forward instantané à la date initiale ; on note qu'il est entièrement déterminé par la courbe des taux zéro-coupon initiale.

En appliquant le lemme d'Itô et en intégrant il vient pour tout $s < t$

$$\begin{aligned} r(t) = & x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) \\ & + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \varphi(t) \end{aligned}$$

De fait, conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, $r(t)$, $t \geq s \geq 0$, suit une loi normale de moyenne et de variance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] = & x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \varphi(t) \\ \text{Var}^{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] = & \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{\eta^2}{2b} (1 - e^{-2b(t-s)}) \\ & + \frac{2\rho\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(t-s)}) \end{aligned}$$

Valorisation d'une obligation zéro-coupon

Sous la probabilité risque neutre le prix du zéro-coupon de maturité $T \geq 0$ est donné pour $0 \leq t \leq T$ par

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (4.7)$$

Dans le cadre du modèle G2++ cette espérance est donnée par une formule analytique qui dépend des paramètres du modèle. La démonstration n'est pas effectuée dans ce mémoire et est documentée par exemple dans [Brigo Mercurio, 2006]. Il vient pour $0 \leq t \leq T$

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B_1(t, T)x(t) - B_2(t, T)y(t)} \quad (4.8)$$

où A et B_1 et B_2 sont des fonctions déterministes qui dépendent des paramètres du modèle telles que si $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} e^{\frac{1}{2}(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t))} \\ B_1(t, T) &= \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \\ B_2(t, T) &= \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} \end{aligned}$$

avec pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{e^{-2a(T-t)}}{2a} - \frac{3}{2a} \right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2e^{-b(T-t)}}{b} - \frac{e^{-2b(T-t)}}{2b} - \frac{3}{2b} \right) \\ &\quad + \frac{2\rho\sigma\eta}{ab} \left(T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Valorisation d'une swaption payeuse

Soient $T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n$ des dates avec $T_0 = 0$. Soient $0 \leq \alpha \leq n$.

On souhaite calculer le prix PS d'une swaption payeuse de maturité T_α , de tenor $T_\beta - T_\alpha$ et de strike K en date $t = 0$ pour l'échéancier $\tau = T_\alpha, \dots, T_\beta$.

$$PS(0, \tau, K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[D(T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \right]$$

En passant sous la probabilité T_α -forward dont le numéraire est le prix zéro-coupon $P(t, T_\alpha)$, le prix de la swaption peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} PS(0, \tau, K) &= P(0, T_\alpha) \mathbb{E}^{T_\alpha} \left[\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \right] \\ &= P(0, T_\alpha) \mathbb{E}^{T_\alpha} \left[\left(1 - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i P(T_\alpha, T_i) \right)^+ \right] \end{aligned}$$

où $c_i = K \tau_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $c_n = 1 + K \tau_n$

En utilisant l'expression (4.8) du prix de l'obligation zéro-coupon induite par le modèle on a

$$PS(0, \tau, K) = P(0, T_\alpha) \mathbb{E}^{T_\alpha} \left[\left(1 - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B_1(T_\alpha, T_i)x(T_\alpha) - B_2(T_\alpha, T_i)y(T_\alpha)} \right)^+ \right]$$

Finalement, en posant $g(x, y)$ la densité jointe de $(x(T_\alpha), y(T_\alpha))$ sous la probabilité T_α -forward il vient

$$PS(0, \tau, K) = P(0, T_\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B_1(T_\alpha, T_i)u - B_2(T_\alpha, T_i)v} \right)^+ g(u, v) du dv \quad (4.9)$$

Remarque 1 : Sous la probabilité T_α -forward, pour $s \leq t \leq T_\alpha$, la densité jointe de $(x(t), y(t))$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, correspond à une loi normale bi-dimensionnelle de vecteur de moyenne $\mu(t)$ et de matrice de covariance Σ définis par

$$\begin{aligned} \mu(t) &= (-M_x^{T_\alpha}(s, t), -M_y^{T_\alpha}(s, t)) \\ \Sigma(t) &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) & \frac{\rho\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(t-s)}) \\ \frac{\rho\sigma\eta}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(t-s)}) & \frac{\eta^2}{2b} (1 - e^{-2b(t-s)}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} M_x^{T_\alpha}(s, t) &= \left(\frac{\sigma^2}{a^2} + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} \right) (1 - e^{-a(t-s)}) - \frac{\sigma^2}{2a^2} (e^{-a(T_\alpha-t)} - e^{-a(T_\alpha+t-2s)}) \\ &\quad - \frac{\rho\sigma\eta}{b(a+b)} (e^{-b(T_\alpha-t)} - e^{-bT_\alpha-at+(a+b)s}) \\ M_y^{T_\alpha}(s, t) &= \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\rho\sigma\eta}{ab} \right) (1 - e^{-b(t-s)}) - \frac{\eta^2}{2b^2} (e^{-b(T_\alpha-t)} - e^{-b(T_\alpha+t-2s)}) \\ &\quad - \frac{\rho\sigma\eta}{a(a+b)} (e^{-a(T_\alpha-t)} - e^{-aT_\alpha-bt+(a+b)s}) \end{aligned}$$

Remarque 2 : Il est possible de ramener (4.11) à une intégrale unidimensionnelle. Pour ce faire on pose $\bar{y}(u)$, $u \in \mathbb{R}$, la solution de l'équation non linéaire

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B_1(T_\alpha, T_i)u - B_2(T_\alpha, T_i)\bar{y}(u)} = 1 \quad (4.10)$$

Le prix de la swaption s'écrit alors

$$PS(0, \tau, K) = P(0, T_\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left(\Phi(-h_1(u)) - \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \lambda_i(u) e^{\kappa_i(u)} \Phi(-h_2^i(u)) \right) du \quad (4.11)$$

avec pour $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h_1(u) &= \frac{\bar{y}(u) - \mu_y}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(u - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} \\ h_2^i(u) &= h_1(u) + B_2(T_\alpha, T_i) \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \\ \lambda_i(u) &= c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B_1(T_\alpha, T_i)u} \\ \kappa_i(u) &= -B_2(T_\alpha, T_i) \left(\mu_y - \frac{1}{2}(1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 B_2(T_\alpha, T_i) + \rho_{xy} \sigma_y \frac{u - \mu_x}{\sigma_x} \right) \\ \mu_x &= -M_x^{T_\alpha}(0, T_\alpha) \\ \mu_y &= -M_y^{T_\alpha}(0, T_\alpha) \\ \sigma_x &= \sigma \sqrt{\frac{(1 - e^{-2aT_\alpha})}{2a}} \\ \sigma_y &= \eta \sqrt{\frac{(1 - e^{-2bT_\alpha})}{2b}} \\ \rho_{xy} &= \frac{\rho \sigma \eta}{(a + b) \sigma_x \sigma_y} \left(1 - e^{-(a+b)T_\alpha} \right) \end{aligned}$$

Cette approche permet de s'affranchir d'une dimension d'intégration, néanmoins elle reste très consommatrice en temps de calcul, puisque la fonction $\bar{y}(u)$ est estimée par optimisation numérique et cela en chaque point de l'intégrande.

Approximation de la volatilité d'une swaption payeuse

La méthode de calcul du prix de la swaption par intégration numérique nécessite de résoudre à chaque point de l'intégrande, une équation non linéaire dont la solution est déterminée par méthode numérique. Bien que l'utilisation d'une quadrature adaptée permette de limiter le nombre de points en lesquels évaluer l'intégrande, cette approche demeure consommatrice en temps de calcul. A cet effet, les travaux de Schrager et Pelsser exhibent des formules fermées approchées de bonne qualité pour le calcul des

volatilités log-normales de swaption. En particulier le prix approché, noté $\widetilde{PS}$, de la swaption payeuse de maturité T_α , de tenor $T_\alpha - T_\beta$ et de strike K peut être approximé en date $t = 0$ par

$$\widetilde{PS}(0, \tau, K) = A_{\alpha, \beta}(0) \frac{\widetilde{\sigma}_{\alpha, \beta}}{\sqrt{2\pi}}$$

où pour rappel, $A_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$, $0 \leq t \leq T_\alpha$,

Par ailleurs le terme de volatilité, $\widetilde{\sigma}_{\alpha, \beta}$, est défini par la relation

$$\begin{aligned} \widetilde{\sigma}_{\alpha, \beta} = & \left(\sigma^2 C_{\alpha, \beta}^{(1)}(0)^2 \frac{e^{2aT_\alpha} - 1}{2a} + \eta^2 C_{\alpha, \beta}^{(2)}(0)^2 \frac{e^{2bT_\alpha} - 1}{2b} \right. \\ & \left. + 2\sigma\eta\rho C_{\alpha, \beta}^{(1)}(0) C_{\alpha, \beta}^{(2)}(0) \frac{e^{(a+b)T_\alpha} - 1}{a+b} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

avec pour $0 \leq t \leq T_\alpha$

$$\begin{aligned} C_{\alpha, \beta}^{(1)}(t) &= \frac{1}{A_{\alpha, \beta}(t)} \times \left(e^{-aT_\alpha} P(t, T_\alpha) - e^{-aT_\beta} P(t, T_\beta) - K \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} e^{-aT_i} \tau_i P(t, T_i) \right) \\ C_{\alpha, \beta}^{(2)}(t) &= \frac{1}{A_{\alpha, \beta}(t)} \times \left(e^{-bT_\alpha} P(t, T_\alpha) - e^{-bT_\beta} P(t, T_\beta) - K \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} e^{-bT_i} \tau_i P(t, T_i) \right) \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur le raisonnement permettant d'aboutir à cette formule il est possible de se référer à l'article de Schrager et Pelsser [Schrager et Pelsser, 2006].

Remarque : A la monnaie, la volatilité $\widetilde{\sigma}_{\alpha, \beta}$ correspond au paramètre de volatilité normale à renseigner dans la formule de Bachelier afin de retrouver $\widetilde{PS}(0, \tau, K = S_{\alpha, \beta}(0))$

$$PS^{Bachelier}(0, \tau, S_{\alpha, \beta}(0), \widetilde{\sigma}_{\alpha, \beta}) = \widetilde{PS}(0, \tau, S_{\alpha, \beta}(0))$$

Calibrage du G2++

Le vecteur de paramètres $\theta^* = (a^*, b^*, \sigma^*, \eta^*, \rho^*)$ du modèle G2++ est obtenu par optimisation numérique et est solution du problème suivant

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}_+^4 \times [-1, 1]} \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{S}} \left(\widetilde{PS}(0, \tau, S_{\alpha, \beta}(0)) - PS^{Black}(0, \tau, S_{\alpha, \beta}(0), \sigma_{\alpha, \beta}^{LN, Mkt}) \right)^2$$

où

- $\mathcal{S} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ représente l'ensemble des couples *maturité* $\times$ *tenor* de swaptions considérées pour le calibrage du modèle ;

- pour $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$, $\sigma_{\alpha, \beta}^{LN, Mkt}$ est la volatilité log-normale de marché de la swaption payeuse à la monnaie de maturité T_α et de tenor $T_\alpha - T_\beta$ extraite d'une plateforme de cotation comme Bloomberg.

Le calibrage est effectué au 31/12/2017. La courbe des taux initiale correspond à la courbe des taux réglementaire publiée par l'EIOPA. Elle intègre un ajustement pour risque de crédit (CRA) de 10bp, un ajustement pour risque de volatilité (VA) de 4bp et une convergence après 40 ans vers l'*ultimate forward rate* (UFR) de 4,2%. Elle est tracée ci-dessous :

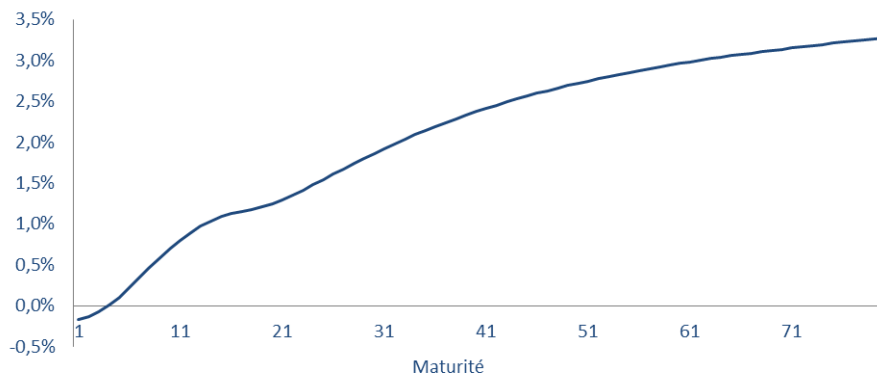


FIGURE 4.1 – Courbe des taux réglementaire EIOPA au 31/12/2017 (CRA=10bp, VA=4bp, UFR=4,2%)

Les swaptions retenues pour le calibrage du G2++ sont tirées des cotations Bloomberg afférentes et présentent les caractéristiques suivantes :

- les swaptions considérées sont payeuses et à la monnaie
- les maturités annuelles considérées sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 25, 30
- les tenors annuels considérés sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 25, 30

Les volatilités log-normales de marché relatives aux swaptions retenues sont reportées au 31/12/2017 dans le graphique ci-dessous :

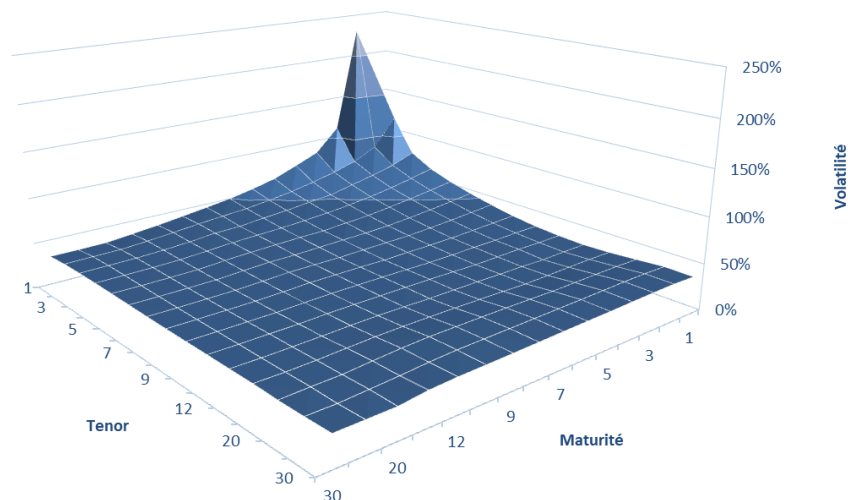


FIGURE 4.2 – Volatilités log-normales de marché des swaptions à la monnaie au 31/12/2017

Remarque : La volatilité de la swaption de maturité 1 an et de tenor 1 an n'existe pas au 31/12/2017. En effet le taux swap forward $S_{1,1}(0)$ est négatif; tous les autres taux swap forward considérés sont quant à eux positifs et les volatilités log-normales de swaption associées bien définies. Il est à noter que les volatilités log-normales présentent un caractère explosif aux faibles maturités et tenors, pour lesquels les taux swap forward sont très proches de 0.

Finalement, les paramètres issus de l'optimisation sont

a^*	b^*	σ^*	η^*	ρ^*
22,5%	36,4%	0,300%	0,00127 %	-39,8%

Simulation du G2++

Les processus x et y sont diffusés en loi, puisque conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, $s \geq 0$, et pour $t \geq s$

$$\begin{aligned}
 x(t) &\sim \mathcal{N}\left(x(s)e^{-a(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right)\right) \\
 y(t) &\sim \mathcal{N}\left(y(s)e^{-b(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2b} \left(1 - e^{-2b(t-s)}\right)\right)
 \end{aligned}$$

En outre les aléas gaussiens sous-jacents à la simulation de x sont corrélés à ρ avec les aléas gaussiens sous-jacents à la simulation de y .

La courbe des prix zéro-coupon ainsi que celle des taux zéro-coupon, sont alors déduites par l'intermédiaire de la formule (4.8). Les trajectoires des taux zero-coupon de

maturité résiduelles 5 ans et 10 ans obtenues sur 5000 simulations à pas annuel et avec les paramètres calibrés sur les conditions économiques du 31/12/2017 sont présentées ci-dessous

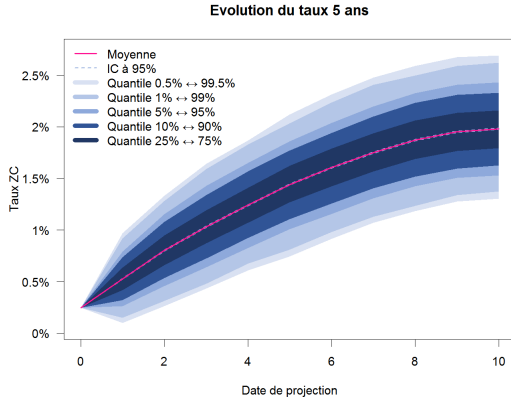


FIGURE 4.3 – Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 5 ans issues du G2++

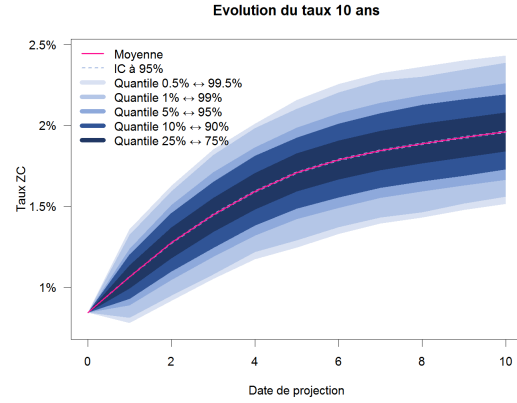


FIGURE 4.4 – Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 10 ans issues du G2++

4.2 Modélisation du cours des actions et de l'indice immobilier

Nous supposons que le cours $\tilde{S}$ d'une action ou d'un indice immobilier ne versant pas de dividendes, suit un mouvement brownien géométrique sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. Sa dynamique est pour $t \geq 0$

$$d\tilde{S}(t) = \tilde{S}(t) ((r(t) + \mu)dt + \xi dZ_t)$$

Où $\mu \in \mathbb{R}$ est la prime de risque de l'indice action, $\xi \in \mathbb{R}_+^*$ la volatilité de l'indice et Z un mouvement brownien sous la probabilité historique.

4.2.1 Calibrage du modèle

Soit $\Delta > 0$. Le log rendement $X(t) = \ln \left(\frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t-\Delta)} \right)$, $t \geq \Delta$ s'écrit

$$X(t) = \int_{t-\Delta}^t r(u)du + \left(\mu - \frac{1}{2}\xi^2 \right) \Delta + \xi \int_{t-\Delta}^t dZ_u$$

où pour $t \geq \Delta$, $\int_{t-\Delta}^t dZ_u \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{\Delta})$

Les paramètres du modèle sont estimés à partir de l'historique du cours de l'indice et de l'historique des prix zéro-coupon induits par les taux EURIBOR dont la maturité résiduelle est aussi le pas de l'historique. Notons $\tau = \{T_{-N}, \dots, T_0 = 0\}$, $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des dates de l'historique equi-espacées de Δ et de cardinal $N + 1$.

La volatilité de l'indice est estimée par la relation

$$\bar{\xi} = \sqrt{\frac{1}{\Delta N} \sum_{t \in \tau^*} \left(\ln \left(P(t - \Delta, t) \frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t - \Delta)} \right) - \bar{m} \right)^2}$$

avec

- $\tau^* = \tau \setminus \{T_{-N}\}$ l'ensemble des dates de l'historique privé de la première date
- $\bar{m} = \frac{1}{N+1} \sum_{t \in \tau^*} \ln \left(P(t - \Delta, t) \frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t - \Delta)} \right)$

La prime de risque est quant à elle estimée par

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{m}}{\Delta} + \frac{1}{2} \xi^2$$

Dans le cadre de ce mémoire, nous modélisons trois indices relatifs aux deux poches actions *EUR* et *FOR* et à la poche d'actifs immobiliers *I* composant le portefeuille d'actifs décrit dans la section 3.6.1. Les calibrages afférents sont présentés dans le tableau ci-dessous :

	<i>EUR</i>	<i>FOR</i>	<i>I</i>
Indice sous-jacent	Eurostoxx 50	S&P 500	IPD Euro
Date de début d'historique	01/01/1999	01/01/1999	31/12/2000
Date de fin d'historique	31/12/2017	31/12/2017	31/12/2017
Pas d'historique	Mensuel	Mensuel	Annuel
$\bar{\mu}$	3,17%	4,70%	3,85%
$\bar{\xi}$	18,7%	15.9%	10.0%

Remarque 1 : Du fait de la faible profondeur de l'historique considéré, la volatilité de l'indice immobilier est choisie égale à 10%, comme majorant des volatilités historiques de divers indices immobiliers (INSEE, EDHEC IEIF, IPD, ...) associés à différentes zones géographiques (Paris vs France, Europe globale, Allemagne, UK) et différentes typologies d'investissements (logements vs immobilier d'entreprises).

Remarque 2 : Les historiques d'actions extraits donnent l'évolution de l'indice brut de dividendes, c'est-à-dire sans versement de flux de dividendes.

4.2.2 Simulation du modèle

Le cours de l'indice $\tilde{S}$ ne versant pas de dividendes, est diffusé chaque année. Les trajectoires des rendements $TR(t) = \frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(t-\Delta)} - 1$, $t \geq \Delta$, obtenues sur 5000 simulations

4.2. MODÉLISATION DU COURS DES ACTIONS ET DE L'INDICE IMMOBILIER

avec les paramètres estimés sur les conditions économiques du 31/12/2017 sont présentées ci-dessous pour chacun des indices considérés

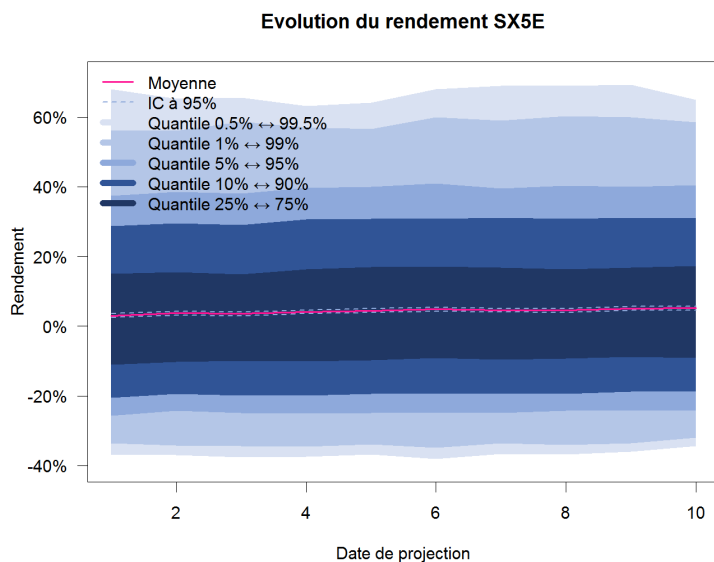


FIGURE 4.5 – Enveloppes des trajectoires des rendement de l'action *EUR* (Eurostoxx 50) issues du modèle action

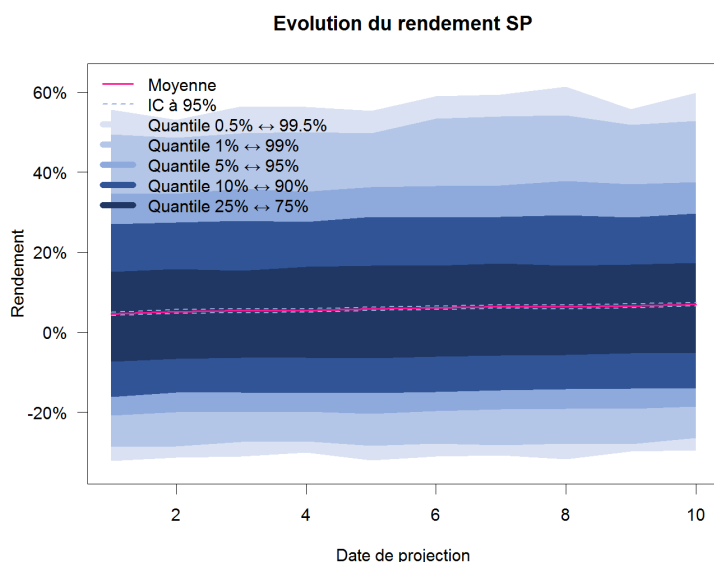


FIGURE 4.6 – Enveloppes des trajectoires des rendement de l'action *FOR* (S&P 500) issues du modèle action

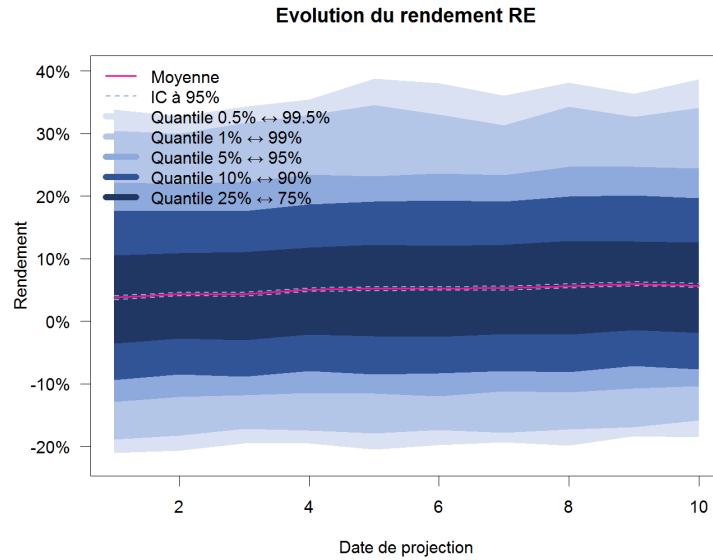


FIGURE 4.7 – Enveloppes des trajectoires des rendement de l'indice immobilier I (IPD Euro) issues du modèle action

4.2.3 Modélisation des dividendes

Les dividendes, aussi appelés loyers pour l'indice l'immobilier, sont modélisés simplement par l'intermédiaire d'un taux de dividendes annuel constant, noté r_{div} , fixé à 4% pour les actions et à 4,5% pour l'indice immobilier. Le cours S de l'indice versant des dividendes est obtenu pour $0 \leq u \leq t$

$$S(t) = S(u) \times \frac{\tilde{S}(t)}{\tilde{S}(u)} \times (1 - r_{div})^{t-u}$$

Dans cette partie, nous avons présenté la théorie et les hypothèses retenues pour la modélisation des trajectoires du portefeuille sous la probabilité historique par le GSE. On rappelle que l'on a pris comme hypothèse simplificatrice que le rendement des actifs relatifs aux taux d'intérêt n'intègrent pas de prime de risque sous la probabilité historique. Cette hypothèse nous permet d'utiliser le modèle gaussien à deux facteurs (G2++) pour la modélisation des taux d'intérêt. Cependant la modélisation du cours des actions et de l'indice immobilier est, elle, réalisée en monde réel puisque l'on calibre une prime de risque. La partie suivante détaille l'algorithme d'optimisation utilisé dans la suite pour déterminer l'allocation d'actifs optimale sous contrainte réglementaire FRPS. Nous exposons aussi le programme d'optimisation choisi ainsi que les indicateurs retenus pour cette optimisation.

Chapitre 5

Algorithme d'optimisation et problème à résoudre

Afin de déterminer une allocation optimale, nous souhaitons maximiser un critère de rentabilité estimé en simulant l'évolution du bilan assurantiel le long de scénarios économiques stochastiques. Par ailleurs l'allocation à déterminer, doit satisfaire plusieurs contraintes dont les contraintes réglementaires FRPS.

Le présent chapitre introduit quelques références historiques autour des méthodes d'optimisation. Il présente ensuite les algorithmes de recherche directe et détaille la méthode du simplexe, puis l'algorithme COBYLA retenu dans le cadre de ce mémoire. Finalement nous formalisons le problème à résoudre.

5.1 Un peu d'histoire autour de l'optimisation

On peut faire remonter l'une des premières apparitions de l'idée d'optimisation au principe de Fermat (dix-septième siècle) suivant lequel, en optique, la lumière suit toujours le plus court chemin disponible, ce qui permet de prévoir son trajet à partir de données géométriques. D'ailleurs, au premier siècle après J.-C., Héron d'Alexandrie avait déjà remarqué, qu'en ce qui concerne la réflexion, la lumière suivait ce principe.

Les problèmes d'optimisation formulés la suite se ramènent souvent à des calculs de minima ou de maxima de fonctions, qui seront résolus lorsque les travaux de Leibniz et de Newton sur le calcul différentiel, mettant en exergue la notion de dérivée, les ramèneront à l'étude des zéros de cette dérivée.

Mais dès cette époque, à la charnière des dix-septième et dix-huitième siècles un problème beaucoup plus « moderne » passionne les mathématiciens ; celui de la courbe brachistochrone. Il s'agit d'une courbe dans un plan vertical sur laquelle un point matériel pesant placé dans un champ de pesanteur uniforme, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les courbes joignant deux points fixés. La solution est un arc de cycloïde, mais le problème en lui-même constitue une étape dans l'histoire des mathématiques.

A la fin du dix-huitième siècle les outils mathématiques se perfectionnent avec l'invention par Euler du calcul des variations, outil théorique permettant de résoudre le problème de la brachystochrone, puis l'introduction des multiplicateurs de Lagrange, permettant de traiter les problèmes d'optimisation sous contraintes. Un problème célèbre dit des « déblais, remblais » est soulevé dès le dix-huitième siècle par Monge. Il vise à trouver le chemin minimum à parcourir avec une brouette afin de déplacer un tas de sable jusqu'à un endroit donné. Ceci le conduit à chercher un trajet minimal à travers un nuage de points ; ce célèbre problème, maintes fois cité dans l'histoire de l'optimisation, est considéré comme le premier problème historique de recherche opérationnelle, et peut aussi être rattaché à « l'optimisation combinatoire », branche importante des mathématiques qui nous rapproche de notre sujet. Mais Monge, qui ne donne pas la solution de son problème le transforme en problème de géométrie différentielle dont la solution ne sera donnée définitivement qu'en 2003.

Toutes ces techniques supposent que l'on travaille avec des fonctions très régulières du point de vue de la différentiabilité, et n'interviennent donc pas dans l'algorithme d'optimisation utilisée ici qui ne pose aucune hypothèse de ce genre.

La méthode employée repose sur la disponibilité de moyens informatiques permettant d'exécuter des algorithmes portant sur des fonctions, sans hypothèses de régularité, théoriquement exécutables à la main, mais en un temps rédhibitoire. En ce sens, l'informatique introduit une rupture dans l'histoire de l'optimisation. En effet Monge avait transformé un problème discret en problème continu pour pouvoir le résoudre, là où l'informatique permettra la démarche inverse.

5.2 Algorithmes de recherche directe

Les algorithmes de recherche directe exploitent la puissance de calcul à disposition et se basent sur des idées euristiques. Ils ne requièrent pas d'évaluer une dérivée et sont par conséquent particulièrement adaptés à l'optimisation d'une fonction ne pouvant pas être facilement écrite comme une expression analytique. Leur principale faiblesse réside dans le fait qu'ils peuvent converger lentement en évaluant la fonction à optimiser un grand nombre de fois. Ce type d'approche semble être à privilégier en vue de maximiser un critère de rendement en sortie du modèle d'Actif-Passif, dont l'évaluation fait intervenir des mécanismes complexes n'aboutissant pas à des formules fermées.

Nous détaillons en premier lieu, l'algorithme de Nelder et Mead qui est la base des approches de minimisation s'appuyant sur un simplexe. Dans un second temps nous introduisons l'algorithme de COBYLA, qui constitue une extension plus générale permettant d'intégrer des contraintes au problème d'optimisation.

5.2.1 Algorithme de Nelder et Mead

La méthode d'optimisation décrite par Nelder et Mead [Nelder et Mead, 1965] constitue l'approche pionnière des algorithmes de recherche directe. Elle est souvent connue sous le nom de "*méthode du simplexe*". Elle vise à trouver, ou tout au moins approcher,

le minimum d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sans contrainte, et aisément programmable. La fonction f est appelée "*fonction objectif*" ou "*fonction cible*". Le problème d'optimisation s'exprime sous la forme

$$\text{Minimiser : } f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

Pour le résoudre, Nelder et Mead introduisent une suite de simplexes sur $\mathbb{R}^n$. Rappelons qu'un simplexe est un ensemble de $n + 1$ points dans $\mathbb{R}^n$, aussi dits sommets, dont aucun n'est un barycentre des n autres. Autrement dit s'agit de l'enveloppe convexe de $n + 1$ points dans $\mathbb{R}^n$ avec une condition de non dégénérescence, à savoir que le volume de l'enveloppe convexe est strictement positif. Par exemple,

- si $n = 1$, un simplexe est un ensemble de deux points formant un segment non vide ;
- si $n = 2$, un simplexe est un ensemble de trois points formant un triangle non aplati ;
- si $n = 3$, un simplexe est un ensemble de quatre points formant un tétraèdre non aplati.

Le principe de l'algorithme est le suivant : la fonction objectif est évaluée à chaque point du simplexe et le sommet associé à la valeur la plus élevée est remplacée par un nouveau point relatif à une valeur de fonction cible inférieure. Quatre opérations principales sont opérées sur le simplexe : réflexion, expansion, réduction et contraction. La méthode du simplexe fonctionne de manière itérative. Plaçons nous à l'itération $i \in \mathbb{N}^*$ de l'algorithme et notons $x_1^i, \dots, x_{n+1}^i \in \mathbb{R}^n$ les n sommets du simplexe de l'itération i .

Les étapes de l'itération i sont décrites ci-dessous :

Etape 1 Ordonnancement des sommets du simplexe en terme de valeur de la fonction objectif. On réindexe les points tels que

$$f(x_1^i) \leq \dots \leq f(x_{n+1}^i)$$

Etape 2 Calcul du centre de gravité x_c de tous points excepté x_{n+1}^i

$$x_c = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^i$$

Etape 3 Calcul de la réflexion, x_r , de x_{n+1}^i par rapport x_c

$$x_r = x_c + \alpha(x_c - x_{n+1}^i)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est appelé facteur de réflexion

Etape 4 Si $f(x_r) < f(x_1^i)$, un nouveau point minimal a été trouvé et on calcule l'expansion x_e du simplexe

$$x_e = x_r + (\gamma - 1)(x_r - x_c)$$

où $\gamma \geq 1$ est appelé facteur d'expansion. A noter que si on passe à l'itération $i + 1$ et on revient à l'étape 1 avec le nouveau simplexe

$$(x_1^{i+1}, x_2^i, \dots, x_{n+1}^{i+1}) = \begin{cases} (x_e, x_1^i, \dots, x_n^i), & \text{si } f(x_e) < f(x_r) \\ (x_r, x_1^i, \dots, x_n^i), & \text{sinon} \end{cases}$$

Etape 5 Si $f(x_1^i) \leq f(x_r) < f(x_n^i)$, on passe à l'itération $i + 1$ et on revient à l'étape 1 avec le nouveau simplexe

$$(x_1^{i+1}, \dots, x_n^{i+1}, x_{n+1}^{i+1}) = (x_1^i, \dots, x_n^i, x_r)$$

Etape 6 Calcul de la réduction x_s

$$x_s = \begin{cases} x_c + \beta(x_r - x_c), & \text{si } f(x_n^i) \leq f(x_r) < f(x_{n+1}^i) \\ x_c + \beta(x_{n+1}^i - x_c), & \text{si } f(x_r) \geq f(x_{n+1}^i) \end{cases}$$

où $0 \leq \beta \leq 1$ est le facteur de réduction. Le premier cas constitue une réduction du simplexe entre x_c et x_r du coté de la réflexion, dit "*coté bas*". Au contraire le deuxième cas est une réduction du simplexe entre x_c et x_r du "*coté haut*". Si $f(x_n^i) \leq f(x_r) < f(x_{n+1}^i)$, on passe à l'itération $i + 1$ et on revient à l'étape 1 avec le nouveau simplexe

$$(x_1^{i+1}, \dots, x_n^{i+1}, x_{n+1}^{i+1}) = (x_1^i, \dots, x_n^i, x_s)$$

Etape 7 Finalement, si $f(x_r) \geq f(x_{n+1}^i)$ une contraction générale du simplexe par rapport à x_1^i est effectuée. Et pour tout $2 \leq j \leq n + 1$ la contraction $x_j^{i,*}$ est donnée par

$$x_j^{i,*} = x_1^i + \beta^*(x_j^i - x_1^i)$$

où $\beta^* \geq 0$ est le facteur de contraction. On passe à l'itération $i + 1$ et on revient à l'étape 1 avec le nouveau simplexe

$$(x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_{n+1}^{i+1}) = (x_1^i, x_2^{i,*}, \dots, x_{n+1}^{i,*})$$

Les facteurs α , γ , β , β^* recommandés par Nash [Nash, 1990] et implémentés dans la fonction *optim* de R sont

$$\alpha = 1, \gamma = 2$$

$$\beta = \frac{1}{2}, \beta^* = \frac{1}{2}$$

Remarque : L'algorithme dépend du choix du simplexe initial $(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$. Cette procédure est appelée "*initialisation*".

5.2.2 Algorithme COBYLA

Powell [Powell, 1994] modifie et généralise l'algorithme du simplexe de Nelder et Mead. Cette nouvelle version, appelée COBYLA (*Constrained Optimization By Linear Approximation*), s'attache à minimiser une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ sujette à plusieurs contraintes. Le problème d'optimisation s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser :} & f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ \text{Sous les contraintes :} & c_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq K \end{cases}$$

où $K \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de contraintes du problème, et $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq K$ sont des fonctions pour lesquelles aucune hypothèse de continuité n'est imposée.

Remarque : L'algorithme peut être adapté de sorte à minimiser la fonction f sur un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$. On peut notamment procéder par changement de variable. Dans le cadre de l'optimisation de la part d'actif risqué initiale nous considérerons en particulier $\mathcal{E} = [0, 1]$.

L'approche COBYLA est fondée sur l'utilisation d'une méthode du simplexe modifiée et appliquée à la fonction de mérite Φ définie pour $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$\Phi(x) = f(x) + \mu \left[\max_{1 \leq i \leq K} \{-c_i(x)\} \right]^+$$

avec $\mu \in \mathbb{R}_+$ un paramètre de pondération des contraintes, initialement égal à 0 puis ajusté à chaque itération de l'algorithme.

Chaque itération débute par le calcul des $K+1$ fonctions linéaires f^* et c_i^* , $1 \leq i \leq K$, sur $\mathbb{R}^n$ qui prennent les mêmes valeurs que la fonction objectif et les contraintes aux sommets du simplexe. A noter que l'existence et l'unicité de ces fonctions résultent de la définition d'un simplexe non dégénéré. Le problème d'optimisation est alors modifié sous la forme

$$\begin{cases} \text{Minimiser :} & f^*(x), x \in \mathbb{R}^n \\ \text{Sous les contraintes :} & c_i^*(x) \geq 0, 1 \leq i \leq K \end{cases}$$

La solution x^* de ce problème que l'on sait résoudre simplement, est alors utilisée afin de réviser les sommets du simplexe.

Remarque : Dans le cas où au moins une des contraintes ne peut pas être vérifiée, x^* est obtenu en minimisant le maximum des violations des contraintes.

Cette reformulation du problème se rattache aux "*algorithmes de programmation linéaire séquentielle*". Toutefois, cette linéarisation est parfois source d'erreurs difficiles à contrôler, et de plus, dans l'algorithme COBYLA, le passage d'un simplexe au suivant est plus complexe que dans la méthode originelle du simplexe décrite dans la sous-section précédente.

C'est cet algorithme que nous considérons dans la suite du mémoire afin de déterminer l'allocation en actif risqué optimale.

5.3 Formulation du problème

On simule $l_s \in \mathbb{N}^*$ trajectoires de la courbe des taux zéro coupon, des cours des actions et de l'indice immobilier sur un ensemble de dates equi-espacée au pas $\Delta = 1an$ noté $\tau_s = \{T_0 = 0, \dots, T_H\}$, $H \in \mathbb{N}^*$. On considère $T_H = 10ans$.

Nous considérons le portefeuille d'actifs initial défini dans la section 3.6.1. Pour une allocation initiale en actif risqué $0 \leq \alpha \leq 1$ donnée, l'outil ALM stochastique renvoie pour chaque trajectoire, $1 \leq k \leq l_s$ et chaque date de projection $t \in \tau_s$ plusieurs indicateurs, dont le taux de rendement de l'actif noté $TRA^k(t, \alpha)$ et le niveau des fonds propres noté $FP^k(t, \alpha)$.

Il s'agit maintenant de définir un indicateur agrégé à optimiser. On pose la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\alpha \in [0, 1]$ par

$$f(\alpha) = -\frac{1}{l_s} \sum_{k=1}^{l_s} \prod_{t \in \tau_s} (1 + TRA^k(t, \alpha))$$

Remarque : Il s'agit de la moyenne du rendement cumulé de l'actif sur chaque trajectoire.

Le TRA cumulé, tel qu'obtenu dans le cadre de ce mémoire apporte une information intéressante sur le rendement de l'actif, néanmoins incomplète. En effet, il semble plus pertinent de considérer une approche de détermination du bilan économique en valeur de marché à chaque date de la projection, afin d'évaluer la meilleure estimation des provisions mathématiques constituant l'assiette de calcul du TRA.

Cette approche nécessiterait une valorisation risque neutre le long de chaque trajectoire monde réel et pour chaque année de la projection. Elle requiert, par conséquent, des développements conséquents et pose des contraintes techniques fortes. C'est pourquoi nous lui avons préféré la méthodologie, plus simple, présentée.

D'autre part, rappelons que la réglementation FRPS introduit quatre scénarios déterministes :

Sc. 1 Scénario central

Sc. 2 Scénario de baisse des taux d'intérêts

Sc. 3 Scénario de baisse des rendements financiers de l'action

Sc. 4 Scénario de baisse de la mortalité

Pour une allocation initiale en actif risqué $0 \leq \alpha \leq 1$ donnée, l'outil ALM adapté au cadre FRPS renvoie pour chaque scénario déterministe $1 \leq k \leq 4$ et chaque date de projection $t \in \tau_s$, le ratio de solvabilité réglementaire $RS_{FRPS}^k(t, \alpha)$. Ce dernier doit être supérieur à 100%, aussi on définit la contrainte $c_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$c_1(\alpha) = \min_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ t \in \tau_s}} \left\{ RS_{FRPS}^k(t, \alpha) \right\} - 1$$

En outre, dans l'outil ALM stochastique, on souhaite contrôler les scénarios pour lesquels les fonds propres deviennent négatifs. En effet, les scénarios afférents à une baisse des rendements actions impactent fortement les fonds propres, car l'actif considéré est très peu diversifié, et qu'aucun apport extérieur, des actionnaires par exemple, n'est modélisé. Nous exprimons ce besoin sous la forme d'une contrainte $c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$c_2(\alpha) = q_\kappa \left\{ \left(FP^k(T_H, \alpha) \right)_{1 \leq k \leq l_s} \right\}$$

où $0 \leq \kappa \leq 1$ est un seuil de quantile et q_κ est la fonction retournant le quantile empirique au seuil κ d'un échantillon.

On considère dans ce mémoire, $\kappa = 25\%$. La distribution des fonds propres en sortie de l'outil ALM stochastique présente un caractère fortement dissymétrique. Aussi il est possible que la moyenne des fonds propres soit plus faible que le quantile à 25% estimé sur l'échantillon des fonds propres simulé à la date T_H . C'est pourquoi nous ajoutons une dernière contrainte $c_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$c_3(\alpha) = \frac{1}{l_s} \sum_{k=1}^{l_s} FP^k(T_H, \alpha)$$

Finalement le problème à résoudre s'écrit

$$\begin{cases} \text{Minimiser :} & f(x), x \in [0, 1] \\ \text{Sous les contraintes :} & c_i(x) \geq 0, 1 \leq i \leq 3 \end{cases}$$

Remarque : Les représentations graphiques des fonctions d'optimisation et de contraintes par rapport à la part action α sont présentées dans la section 6.2.1.

Dans cette partie nous avons introduit les algorithmes de recherche directe en commençant par la méthode du simplexe mise en oeuvre par Nelder et Mead puis en détaillant l'algorithme COBYLA retenu. Le problème d'optimisation que nous cherchons à résoudre dans le cadre de ce mémoire a ensuite été formalisé.

Chapitre 6

Présentation des résultats

6.1 Abaque FRPS

6.1.1 Objectifs et indicateurs présentés dans l'abaque

On reprend les notations introduites dans les parties précédentes ; rappelons notamment que $\tau_s = \{T_0 = 0, \dots, T_H\}$, $H \in \mathbb{N}^*$ est l'ensemble des dates de la projection equi-espacées au pas $\Delta = 1an$ avec $T_H = 10ans$.

Avant de procéder à une optimisation, plusieurs types de portefeuilles ont été testés dans le but d'obtenir un abaque, mis en oeuvre au 31/12/2017, avec une grille de lecture illustrant et mesurant le coût des stress tests FRPS.

L'abaque, construit et présenté ci-dessous, a pour objectif d'estimer pour des portefeuilles aux caractéristiques différentes le coût des stress tests FRPS. Nous considérons dans la suite le portefeuille d'actifs initial défini dans la section 3.6.1. Pour une allocation initiale en actif risqué $0 \leq \alpha \leq 1$ donnée, les stress tests ne passent pas lorsque

$$\min_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ t \in \tau_s}} \left\{ RS_{FRPS}^k(t, \alpha) \right\} < 1$$

Cette situation entraîne le calcul du coût du stress test, correspondant à un *capital add on* qui devra être ajouté aux fonds propres pour respecter les contraintes de solvabilité. Il est calculé de la manière suivante, pour $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\left[\max_{\substack{1 \leq k \leq 4 \\ t \in \tau_s}} \left\{ \frac{EMS^k(t, \alpha) - MS^k(t, \alpha)}{t} \right\} \right]^+$$

où pour $1 \leq k \leq 4$, $t \in \tau_s$, $EMS^k(t, \alpha)$ (resp. $MS^k(t, \alpha)$) correspond à l'exigence de marge de solvabilité (resp. la marge de solvabilité) à la date t en sortie de l'outil ALM adapté au cadre FRPS, pour le stress test k .

Le premier scénario est formé des conditions centrales non choquées et les trois scénarios restants sont associés aux trois stress tests FRPS. La réglementation n'énonce pas

clairement la méthodologie à utiliser pour déterminer quel stress test et quel *capital add on* afférant retenir.

Dans le cadre de ce mémoire, le stress test retenu est celui qui entraîne le *capital add on* le plus élevé.

6.1.2 Description des portefeuilles retenus pour l'abaque

Portefeuille moyen

Les portefeuilles de retraite retenus pour l'abaque sont des portefeuilles en *run off*. C'est à dire qu'il est considéré qu'il n'y a pas d'entrée de nouveaux adhérents dans le portefeuille. Cependant, les adhérents en phase de cotisation versent bien des primes pendant la projection, on fait aussi l'hypothèse que le taux de rachat est nul.

Le portefeuille considéré est réparti entre plusieurs modèles points de 25 à 85 ans. Le choix du portefeuille s'est porté sur un portefeuille plutôt âgé, justifié par la projection sur 10 ans pour pouvoir analyser les impacts de la réglementation FRPS sur un portefeuille qui est en situation de servir un montant de rentes importants. On considère des provisions mathématiques (PM) initiales de 1 000 000 000 €.

Les paramètres et données présentés ci-dessous sont ceux du portefeuille moyen considéré. Certains paramètres seront pris comme variables dans la suite afin de tester leur influence sur le coût des stress tests FRPS.

La duration du passif est d'environ 21 ans. En comparaison, la duration d'environ 7 ans de l'actif du portefeuille décrit à la section 3.6.1 est moins importante, ce choix est justifié par les deux facteurs suivants.

Cette différence permet de ne pas stériliser le rendement. De plus, si la duration de l'actif n'était pas inférieure à 10 ans, l'étude présentée ici n'aurait que peu d'intérêt. En effet si l'actif non risqué n'est pas renouvelé, les conditions restent stables et ne permettent pas de se confronter aux fluctuations du marché. Le but recherché par ce mémoire étant de mesurer le coût et l'influence sur le rendement avec dans un premier temps l'abaque et dans un second temps l'optimisation.

Paramètres généraux	
Année de projection	2017
Capitaux propres initiaux	5 % PM
Taux imposition	33,33 %
Taux frais financier	0 %

Paramètres communs à tous les portefeuilles	
Taux d'actualisation - Phase de service	1,50%
Taux PB contractuelle	90%
Taux Chargements sur encours	0,50%
Taux Chargements sur primes	1,00%
Taux Commissions sur primes	0,30%
Taux Commissions sur encours	0,05%
Taux Frais sur primes	0,40%
Taux frais sur encours	0,30%
Taux chute - cotisations	0,00%
Taux rachat - PM	0,00%
Adhérents en phase de cotisation	
Âge moyen	55 ans
Poids des PM	25%
Taux technique moyen	0,25%
Adhérents en phase de service	
Âge moyen	75 ans
Poids des PM	75%
Taux technique moyen	1,5%

Paramètres variables

Les paramètres pris comme variables de l'abaque et pour lesquels le coût des stress tests est déterminé, sont les suivants :

Paramètres variables				
TMG	0,50%	1,50%	2,00%	3,00%
Capitaux propres initiaux	4 % $PM(0)$	5 % $PM(0)$	8 % $PM(0)$	
PB	85%	90%	95%	

Remarque : Les valeurs de taux minimum garanti (TMG) élevées, en particulier 3%, ne correspondent pas aux niveaux de TMG constatés actuellement, puisque le niveau de TMG moyen en phase de service est généralement moins élevé. Néanmoins ces valeurs peuvent être observées pour des contrats isolés anciens et permettent de tester les limites de l'approche sur des cas fortement défavorables.

Le TMG de 1,5% peut paraître élevé, pourtant c'est celui qui est retenu pour représenter le "portefeuille moyen" dans la suite de ce mémoire, en effet d'après l'étude de l'ACPR [ACPR, 2018], menée sur les fonds généraux de retraite, le taux technique moyen est en 2017 de 1,48%.

Toutes les combinaisons de ces valeurs sont testées, sur la base du portefeuille de retraite défini ci-dessus, pour les trois allocations initiales d'actifs,

- (i) 10% d'actif risqué et 90% d'actif non risqué ;
- (ii) 30% d'actif risqué et 70% d'actif non risqué ;
- (iii) 40% d'actif risqué et 60% d'actif non risqué.

6.1.3 Abaque

Dans cette section, les résultats de la modélisation des stress tests FRPS sont présentés sous forme de tableaux.

Ces résultats ont été obtenus avec l'outil ALM déterministe adapté au cadre FRPS et permettant de projeter sur dix ans, l'évolution du bilan assurantiel le long d'un scénario central et des trois scénarios de stress imposés par la réglementation.

La mise en oeuvre de l'optimisation de l'allocation en actif risqué du portefeuille d'actifs initial défini dans la section 3.6.1 est, elle, exposée dans la partie 6.2.

Les tableaux suivants présentent pour une participation aux bénéfices contractuelles de 90%, et avec les paramètres variables suivants, les fonds propres initiaux ou capitaux propres initiaux et le taux technique ou TMG en phase de service. Par ailleurs, les tableaux associés aux autres valeurs de participation aux bénéfices sont reportés dans l'annexe B.

Clé de lecture des tableaux : Considérons par exemple les cases mises en évidence par la couleur verte. Dans ce cas, le stress test FRPS le plus coûteux est le scénario de baisse de la mortalité, à la cinquième année de projection, et le coût du stress test représente 0,03 % des PM initiales ou 0,58% des fonds propres (FP) initiaux. A noter que les cases vides correspondent aux sensibilités pour lesquelles les stress test passent tous.

Allocation	10% actif risqué 90% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 90%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,09%	0,18%	0,47%	1,22%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,18%	4,49%	11,74%	30,48%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%	0,02%	0,03%	0,22%	0,20%	Coût du test FRPS
		0,47%	0,58%	4,47%	4,00%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des taux d'intérêts	Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		10	5	3	1	Nombre d'année
	8%		0,09%	0,15%	0,41%	Coût du test FRPS
			1,11%	1,91%	5,07%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des taux d'intérêts	Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
			8	7	4	Nombre d'année

FIGURE 6.1 – Abaque pour une allocation de 10% en actif risqué et une PB de 90%

Allocation	30% actif risqué 70% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 90%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,09%	0,20%	0,50%	1,25%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,29%	4,93%	12,40%	31,14%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%		0,09%	0,12%	0,54%	Coût du test FRPS
			1,70%	2,37%	10,90%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des actions	Baisse de la mortalité	Baisse des taux d'intérêts	Scénario de stress le plus pénalisant
			5	4	2	Nombre d'année
	8%			0,06%	0,41%	Coût du test FRPS
				0,69%	5,08%	Coût du test FRPS (en % FP)
				Baisse des taux d'intérêts	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
				7	4	Nombre d'année

FIGURE 6.2 – Abaque pour une allocation de 30% en actif risqué et une PB de 90%

Allocation	40% actif risqué 60% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 90%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,09%	0,21%	0,51%	1,26%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,34%	5,15%	12,72%	31,46%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%		0,07%	0,10%	0,47%	Coût du test FRPS
			1,47%	1,91%	9,37%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des actions	Baisse des taux d'intérêts	Baisse des taux d'intérêts	Scénario de stress le plus pénalisant
			5	4	2	Nombre d'année
	8%			0,03%	0,41%	Coût du test FRPS
				0,39%	5,09%	Coût du test FRPS (en % FP)
				Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
				10	4	Nombre d'année

FIGURE 6.3 – Abaque pour une allocation de 40% en actif risqué et une PB de 90%

6.1.4 Analyse de l'abaque

Observations générales

En tenant compte des tableaux passés en annexe, l'abaque donne au 31/12/2017 les résultats issus de 108 combinaisons différentes de paramètres et donc de 108 portefeuilles de retraite aux profils distincts.

Le tableau suivant résume les impacts des stress tests sur la totalité des portefeuilles de retraite testés.

	Maximum	Minimum	Moyenne
Coût du test FRPS (en % PM initiales)	1,26%	0,02%	0,33%
Coût du test FRPS (en % FP initiaux)	31,60%	0,34%	7,29%
Horizon N d'activation du test	10	1	3,73

Ces résultats, ne prennent en considération que les portefeuilles de retraite pour lesquels au moins un des stress tests ne satisfait pas aux exigences réglementaires.

Sur les 108 portefeuilles de retraite testés, seuls 21 vérifient tous les stress test. Le tableau suivant dénombre les occurrences de non satisfaction des exigences réglementaires :

	Nombre de fois où le stress test se déclenche
Scénario de baisse des taux d'intérêts	18
Scénario de baisse des rendements financiers	57
Scénario de baisse de la mortalité	12

Le portefeuille le plus pénalisant correspond à un taux de 95% de PB contractuelle, un TMG de 3%, des capitaux propres initiaux égaux à 4% des PM initiales et une allocation de 40% en actif risqué et de 60% en actif non risqué.

Les résultats de l'abaque montrent sans surprise que plus la capitalisation initiale (i.e. le niveau initial de fonds propres) est importante, moins le *capital add on* à constituer est élevé et moins les stress tests ne se déclenchent. Pour une capitalisation initiale égale à 8% des PM initiales, aucun stress test ne se déclenche pour un taux minimum garanti de 0,5%.

Pour ce qui est de l'influence du TMG, à partir de 2% , les stress tests se déclenchent systématiquement.

L'abaque exhibe que le coût du stress test varie très faiblement pour les différentes valeurs de PB considérées, les autres paramètres restant fixes par ailleurs.

Les graphiques suivants, tracés pour une allocation initiale en actif risqué de 30% et un TMG de 1,5%, présentent pour chacun des scénarios stressés, la trajectoire du TRA et la revalorisation induite par la PB contractuelle, obtenue en multipliant le taux de PB contractuelle par le TRA à chaque date de la projection.

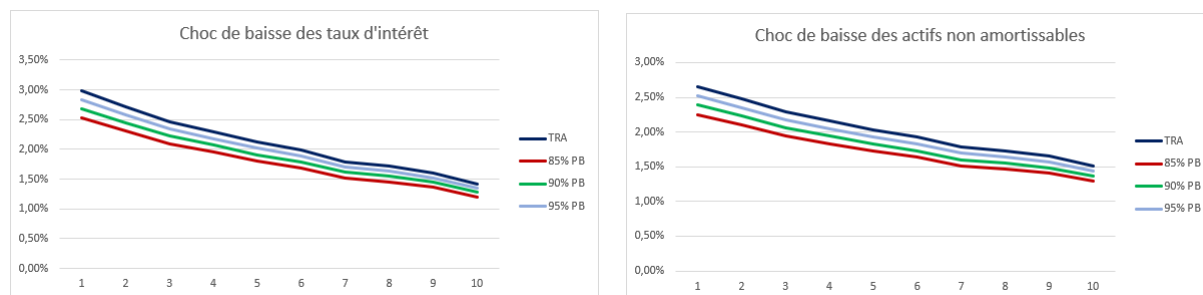


FIGURE 6.4 – Chocs de baisse des taux d'intérêt et des actifs non amortissables

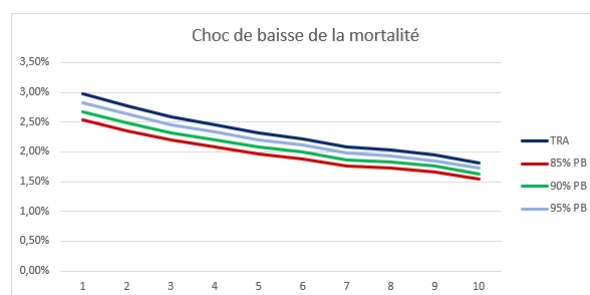


FIGURE 6.5 – Choc de baisse de la mortalité

Ces graphiques permettent de mettre en évidence que les différences de PB contractuelles ont une influence limitée sur la revalorisation induite (moins de 0,5%). De plus, on remarque que les contraintes imposées par le TMG peuvent être plus exigeantes que les contraintes dues à la PB. Par exemple un TMG de 2% domine la PB contractuelle dans toutes les situations à partir de la cinquième année, limitant ainsi l'apparition d'impacts bien distincts entre les valeurs de PB considérées.

Impacts des tests de résistance

Les deux tableaux suivants permettent de résumer les résultats de l'abaque et de mieux appréhender l'impact de chaque test de résistance.

Le premier tableau présente les coûts (en pourcentage des PM) entraînés par les différents stress tests sur l'ensemble des portefeuilles de l'abaque.

Le deuxième tableau donne l'horizon moyen d'activation de chaque tests, ainsi que l'horizon minimum et maximum.

	Coût moyen	Coût maximum	Coût minimum
Baisse des taux d'intérêts	0,20%	0,56%	0,02%
Baisse des rendements financiers	0,35%	1,26%	0,07%
Baisse de la mortalité	0,08%	0,16%	0,03%

	Horizon moyen	Horizon maximum	Horizon minimum
Baisse des taux d'intérêts	6	10	2
Baisse des rendements financiers	3	5	1
Baisse de la mortalité	6,5	10	4

Choc de baisse des taux d'intérêt

Le choc de baisse des taux d'intérêt reste en moyenne moins coûteux et intervient moins souvent que le choc de baisse des rendements financiers.

Il intervient en moyenne à un horizon de 6 ans. Son impact est significatif mais moins important que celui du choc de baisse des rendements financiers.

Choc de baisse des rendements financiers

Le choc de baisse des rendements financiers est celui qui se déclenche le plus souvent, dans plus de la moitié des cas c'est le scénario qui entraîne *le capital add on* le plus élevé. On remarque, que le coût de ce stress test augmente peu même avec un pourcentage d'actif risqué plus élevé, cette observation est expliquée par le fort rendement des actifs non amortissables dans les scénarios FRPS, qui atténue l'impact du scénario lorsque l'allocation en actif risqué est plus importante.

Le choc de baisse des rendements financiers est le stress test le plus impactant, on remarque d'ailleurs qu'il se déclenche toujours avant la septième année.

Choc de baisse de la mortalité

Le coût maximum engendré par le stress test de mortalité est inférieur au coût moyen des deux autres tests, c'est aussi celui qui intervient le moins souvent.

Ce moindre impact est expliqué par le caractère plus progressif du choc, tous les adhérents n'étant pas en phase de service, sur 10 ans, le choc de mortalité n'est réellement impactant que sur les individus les plus âgés.

TRA et résultats financiers

Le tracé du taux de rendement de l'actif et des revenus financiers permet d'appréhender de manière plus précise les résultats exhibés dans l'abaque. Les graphes présentés plus bas ont été obtenus pour les trois allocations d'actifs testées et les paramètres suivants :

Paramètres variables	
TMG	1,50%
Capitaux propres initiaux	5 % $PM(0)$
PB	90%

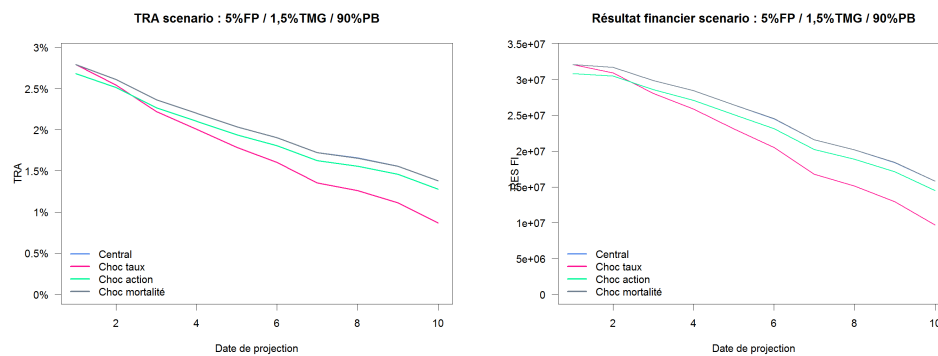


FIGURE 6.6 – TRA et résultats financiers, allocation 10 % en actif risqué

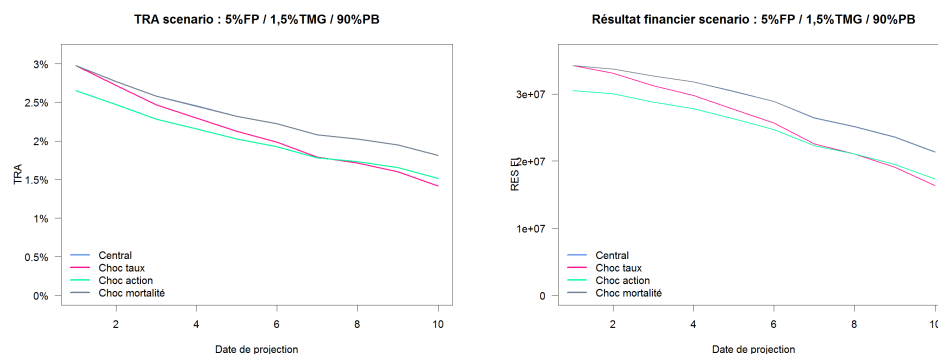


FIGURE 6.7 – TRA et résultats financiers, allocation 30 % en actif risqué

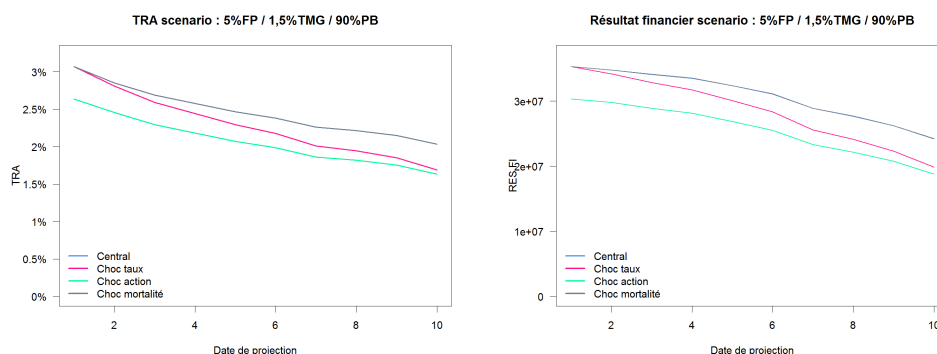


FIGURE 6.8 – TRA et résultats financiers, allocation 40 % en actif risqué

Les revenus financiers ainsi que le TRA décroissent dans le temps avec une tendance linéaire.

Ces graphes appuient les résultats de l'abaque. Le choc de baisse des taux a peu d'influence sur les premières années, puis devient de plus en plus défavorable au cours du temps. En effet contrairement aux chocs de baisse de rendement des actions et de la mortalité, il n'intervient qu'à l'acquisition de nouvelles obligations cotées au pair dont les coupons sont faibles. On observe une diminution du taux de rendement de l'actif dès lors que les obligations du portefeuille initial d'actif arrivent à maturité ou qu'il faut investir les primes versées par les adhérents en phase de cotisation. Le risque de réinvestissement à des conditions de taux moins favorables se matérialise au fur et à mesure du renouvellement des obligations en stock.

Comme attendu, le choc de baisse des rendements financiers est d'autant plus impactant que la part en actif risqué augmente.

Le choc de baisse de la mortalité n'a que très peu d'impact, il est graphiquement impossible de le discerner du scénario central, bien que les résultats chiffrés montrent que les deux scénarios ne sont pas confondus et que la baisse de la mortalité a une influence, bien que limitée, sur les résultats.

Limite des test de résistance

La limite principale des tests de résistance est liée à la nature même des scénarios de stress qui constituent, dans un cadre déterministe, une photo du bilan à la date de projection (au 31/12/2017 en ce qui nous concerne). Ce parti pris engendre une dépendance forte aux conditions économiques à la date de projection. En effet si ces conditions sont défavorables, elles seront prolongées sur dix ans sans possibilité d'amortissement, et dans le cas inverse, si elles sont trop favorables, cela conduira à sous estimer le risque encouru par l'assureur.

Une seconde limite émerge de notre interprétation du *stress test le plus pénalisant*. Pour rappel nous avons retenu à cet effet le stress test entraînant le *capital add on* le

plus élevé. Cependant cette définition n'est pas nécessairement la plus pertinente. En effet, on pourrait aussi retenir comme définition du stress test le plus pénalisant, le maximum du niveau de fonds propres en pourcentage des PM initiales à ajouter de sorte que le ratio de solvabilité soit supérieur à 100% au bout de 10 ans. L'abaque actuel ne permet pas d'illustrer cette différence, en effet les tests menés faisaient ressortir les mêmes stress tests comme les plus pénalisant et ce quelque que soit la définition retenue. Cependant des premiers tests menés avec un actif simplifié (une seule action et une seule obligation) mettait en évidence cette différence possible.

6.2 Allocation stratégique optimale

L'optimisation est mise en place selon l'approche décrite dans le chapitre 5. L'objectif est de montrer que sous la réglementation FRPS il est possible de considérer une allocation initiale d'actifs risqués plus importante. Cette partie présente les résultats issus de l'optimisation sous contraintes ainsi que les limites et les difficultés rencontrées.

6.2.1 Portefeuille testé et contraintes d'optimisation retenues

Description du portefeuille

L'optimisation a été menée sur le portefeuille de retraite toujours considéré en *run off*, (aucune sortie autre que par décès et pas de nouveaux entrants), avec versement de primes pour les adhérents en phase de cotisation pour le jeu de paramètres suivant :

Paramètres variables	
TMG	1,50%
Capitaux propres initiaux	8 % $PM(0)$
PB	90%

La capitalisation initiale retenue entraîne un ratio de solvabilité associé à ce portefeuille au début de la projection de

$$\frac{8\%PM(0)}{4\%PM(0)} = 200\%$$

Ce ratio de solvabilité est légèrement supérieur aux ratios de solvabilité habituels des portefeuilles de retraite. Cependant les tests de robustesse mis en oeuvre dans la suite montrent que la sensibilité de l'optimisation à la capitalisation initiale est réduite.

Contraintes d'optimisation retenues

Le problème d'optimisation à résoudre est formalisé dans la partie 5.3, rappelons en les principaux points. La moyenne du rendement cumulé afférent à chaque trajectoire de l'outil ALM stochastique est optimisée sous les trois contraintes suivantes :

- (i) Les tests de résistances ne doivent pas conduire à la constitution d'un capital add on. Autrement dit, le ratio de solvabilité de l'ensemble des scénarios de stress doit rester supérieur à 100% ;
- (ii) Le quantile à 25% des fonds propres doit rester positif au cours de la projection, c'est-à-dire que dans 75% des cas, les fonds propres sont positifs ;
- (iii) La moyenne des fonds propres doit rester positive, à chaque pas de la projection.

On simule sous la probabilité historique, $l_s = 5000$ trajectoires de la courbe des taux zéro coupon, des cours des actions et de l'indice immobilier chaque année sur un horizon de 10 ans. Nous considérons le portefeuille d'actifs initial défini dans la section 3.6.1. Pour une allocation initiale en actif risqué $0 \leq \alpha \leq 1$ donnée, l'outil ALM stochastique renvoie pour chaque trajectoire, $1 \leq k \leq l_s$ et chaque date de projection $0 \leq t \leq 10$ plusieurs indicateurs, dont le taux de rendement de l'actif noté $TRA^k(t, \alpha)$ et le niveau des fonds propres noté $FP^k(t, \alpha)$. L'indicateur agrégé à optimiser correspond à la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui pour $\alpha \in [0, 1]$ vaut

$$f(\alpha) = -\frac{1}{l_s} \sum_{k=1}^{l_s} \prod_{t=1}^{10} (1 + TRA^k(t, \alpha))$$

La fonction à optimiser est de la forme suivante :

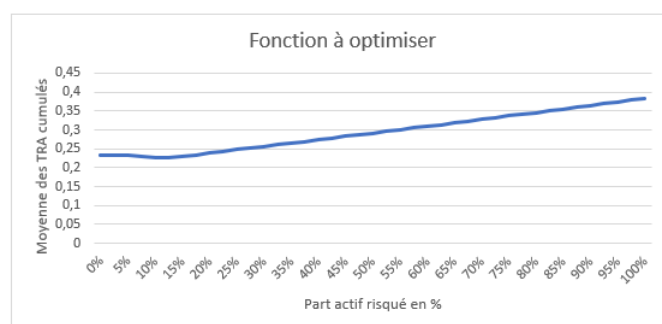


FIGURE 6.9 – Fonction f à optimiser en fonction de l'allocation initiale en actif risqué

Les résultats suivants sont obtenus avec le GSE risque neutre adapté à la probabilité historique présenté à la section 4. Le tableau suivant présente les résultats principaux issus de l'optimisation, à savoir l'allocation initiale optimale et le TRA cumulé moyen afférent.

Allocation initiale actif risqué	Allocation initiale actif non risqué	TRA moyen annualisé
33,3%	66,7%	3,12%

où le TRA moyen annualisé est donné pour une allocation en actif risqué $\alpha \in [0, 1]$ par

$$(f(\alpha) - 1)^{\frac{1}{10}}$$

Le Benchmark [Galea, 2018] mené par Galea sur les fonds généraux de retraite indique que le taux moyen du rendement de l'actif est 2,97% en 2017. Le TRA moyen annualisé résultant de l'optimisation est donc supérieur de peu (0,15%). Cependant, cette comparaison doit être considérée avec du recul. En effet le TRA moyen annualisé est obtenu par une optimisation sur les 10 années futures, alors que le rendement moyen exhibé par le benchmark est une constatation en 2017. Ce rendement est évalué pour des fonds généraux et tire profit d'un stock d'obligations passées disposant encore un bon rendement ainsi que de poches d'action diversifiées présentant pour certaines des plus values latentes comme expliqué à la section 2.2.1.

La répartition du portefeuille d'actifs obtenue pour l'allocation en actif risqué optimisée est présentée ci-dessous.

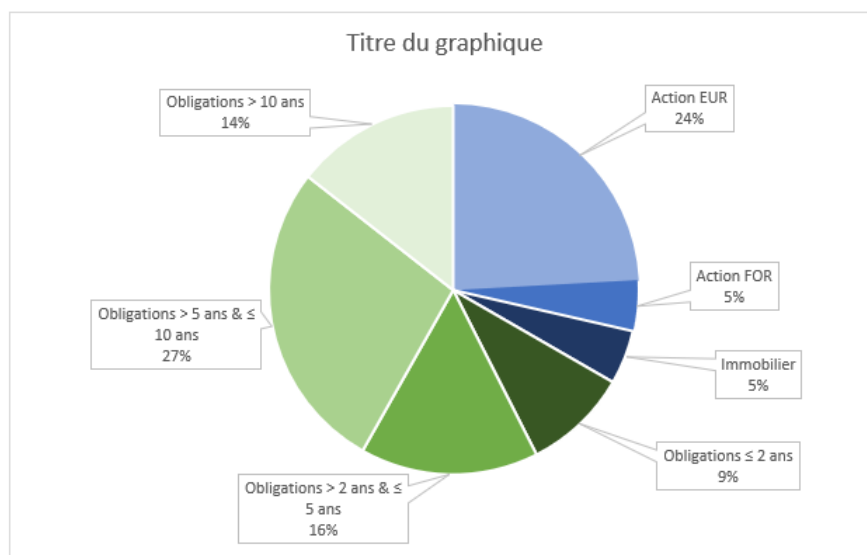


FIGURE 6.10 – Répartition de l'actif pour la fonction à optimiser

Rappelons que la duration l'actif non risqué du portefeuille initial est d'environ 7 ans. Le graphique ci-dessus met en évidence que l'actif non risqué est renouvelé à près de 80% au bout des 10 années de projection. Cette observation implique qu'à la fin de la période de projection la majeure partie de de la poche obligataire initiale est renouvelée à des conditions moins avantageuses. L'allocation initiale en actif risqué supérieure à 30% permet donc d'obtenir un rendement de l'actif compétitif malgré les moins bonnes

performances de la poche obligataire.

Le graphe suivant présente l'évolution des fonds propres au cours de la projection, pour l'allocation initiale obtenue après optimisation :

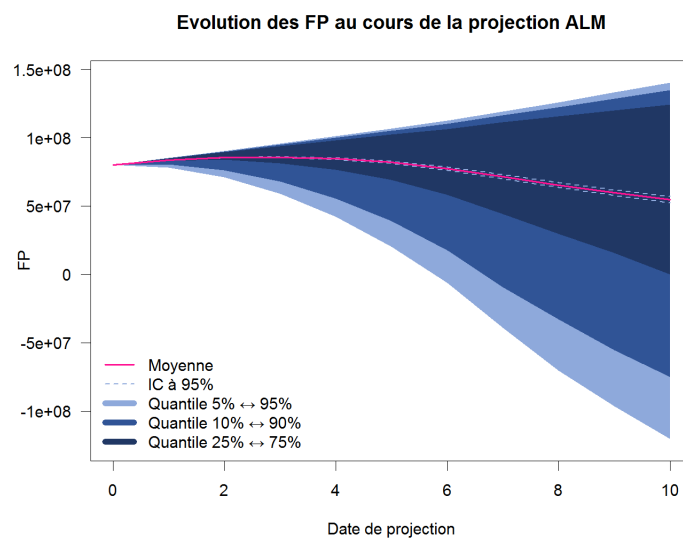


FIGURE 6.11 – Evolution des Fonds Propres

Les fonds propres présentent un profil dissymétrique et une tendance baissière qui se stabilise néanmoins autour de la septième année de projection. Afin d'expliquer ces phénomènes nous traçons l'évolution du taux de rendement des actifs financiers au cours de la projection.

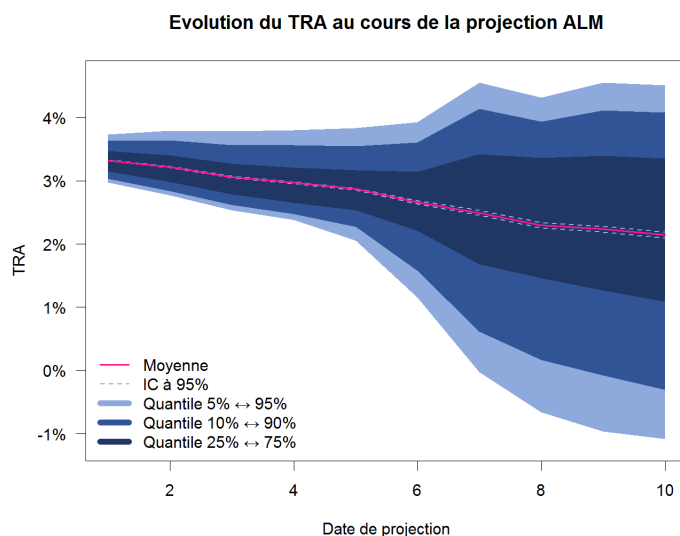


FIGURE 6.12 – Evolution du TRA

Les mauvaises performances sont limitées du point de vue de l'assuré puisque les PM sont toujours revalorisées à minima au taux minimum garanti, ici de 1,5%. Par conséquent, de mauvaises performances des actifs financiers impliquent, du point de vue de l'assureur, de combler la différence entre le TMG et le TRA. Dans la modélisation retenue, cette contrainte est directement imputée aux fonds propres. Au contraire, dans le cas où le taux de rendement des placements est élevé, l'assureur est tenu de reverser la majorité des bénéfices aux assurés. Le mécanisme de PB, modère donc l'augmentation des fonds propres.

Le TRA est comme les fonds propres plus exposé aux scénarios baissiers. Cette observation s'explique notamment par une limitation de l'outil ALM stochastique. En cas de bon TRA, tous les bénéfices sont immédiatement redistribués aux adhérents, et il n'y a pas d'étalement de la PB dans le temps. Ainsi, lors de mauvais résultats, il n'est pas envisageable de recourir au compte de PB et il est nécessaire de vendre des actifs risqués en moins-values.

Le graphe de l'évolution des provisions mathématiques est le suivant :

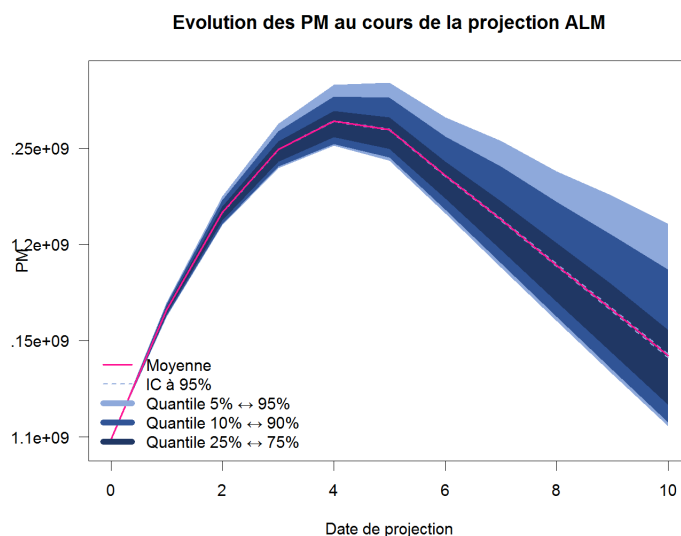


FIGURE 6.13 – Evolution des Provisions Mathématiques

On note deux phase d'évolution des provisions mathématiques :

1. Phase d'expansion : les provisions mathématiques augmentent car beaucoup d'assurés sont en phase de cotisation et l'assureur reçoit plus de primes qu'il ne verse de rentes ;
2. Phase d'écoulement : les provisions mathématiques diminuent car la plupart des assurés sont en phase de service et l'assureur doit verser plus de rentes qu'il ne reçoit de primes.

Il est possible de mettre ces éléments en regard avec le graphique des fonds propres. La moyenne de ces derniers augmente légèrement au début de la projection pendant la phase d'expansion des provisions mathématiques. L'augmentation des provisions mathématiques, implique d'acheter de nouveaux titres (et de ne pas en vendre) afin d'équilibrer le bilan. Par conséquent les moins values des actifs risqués ne sont pas réalisées, et leur impact sur le solde technique par le biais de la PRE est limité car étalées sur 8 ans. Finalement il est possible de servir le TMG dans la majorités des scénarios et donc les fonds propres augmentent légèrement grâce à la part de 10% des bénéfices réservée à l'assureur (car le taux de participation aux bénéfices retenu est de 90%).

6.2.2 Tests de robustesse

Les tests de robustesse effectués dans cette section ne sont pas exhaustifs. Néanmoins, ils permettent de mettre en évidence certaines sensibilités de l'outil développé.

Générateur de nombres aléatoires

La solution du problème d'optimisation est conditionnée par les l_s trajectoires stochastiques considérées ainsi que la génération des nombres aléatoires sous-jacents aux aléas gaussiens du GSE.

A ce sujet, quelques tests de robustesse ont été menés en diminuant le nombre de simulations, et en modifiant la graine du générateur de nombres pseudo-aléatoires, dans notre cas le générateur de Mersenne Twister. A partir de $l_s = 2000$ simulations, l'impact ne semble pas significatif au regard des résultats reportés ci-dessous :

	$l_s = 1000$	$l_s = 2000$	$l_s = 5000$
Graine #1	32,5%	33,2%	33,3%
Graine #2	33,5%	33,3%	33,3%

Les résultats détaillés et analysés dans ce document ont été obtenus pour la graine #2 et 5 000 simulations.

Fonds propres initiaux égaux à 9% des PM initiales

Les graphes et les résultats suivants sont obtenus avec le GSE risque neutre adapté au monde réel. Par rapport au cadre d'étude principal, les fonds propres initiaux sont augmentés à 9% des PM initiales au lieu de 8%. L'allocation initiale et les graphes résultant de l'optimisation sont reportés ci-dessous.

Allocation initiale actif risqué	Allocation initiale actif non risqué
35%	65%

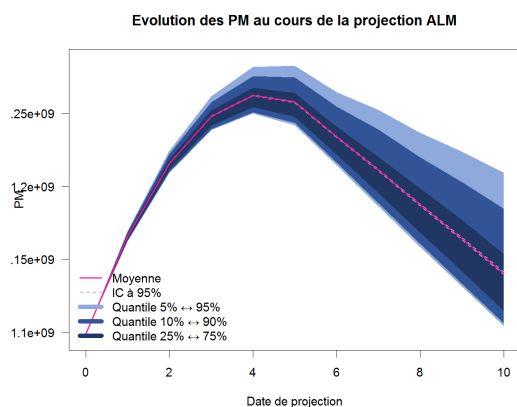


FIGURE 6.14 – Evolution des PM -
FP initiaux = 9% des PM initiales

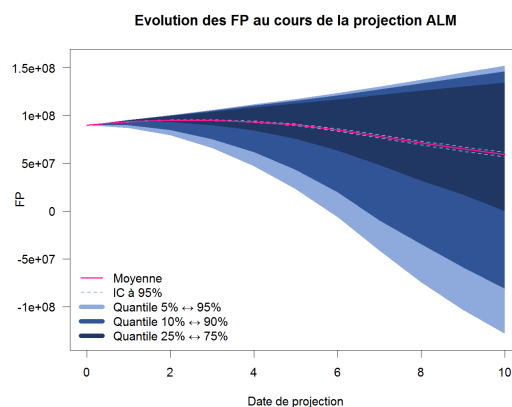


FIGURE 6.15 – Evolution des FP -
FP initiaux = 9% des PM initiales

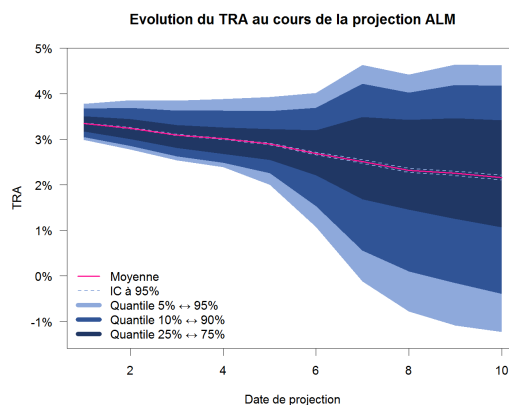


FIGURE 6.16 – Evolution du TRA - FP initiaux = 9% des PM initiales

L'allocation d'actifs initiale augmente de 1,7% et les graphes obtenus restent globalement homogènes avec cette augmentation des fonds propres initiaux.

Fonds propres initiaux : 7% des PM initiales

Les graphes et les résultats suivants sont obtenus avec le GSE risque neutre adapté au monde réel. Par rapport au cadre d'étude principal, les fonds propres initiaux sont diminués à 7% des PM initiales au lieu de 8%.

L'allocation initiale et les graphes résultant de l'optimisation sont reportés ci-dessous.

Allocation initiale actif risqué	Allocation initiale actif non risqué
30,2%	69,8%

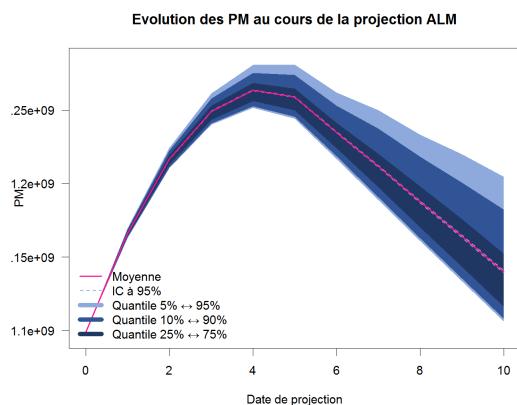


FIGURE 6.17 – Evolution des PM -
FP initiaux = 7% des PM initiales

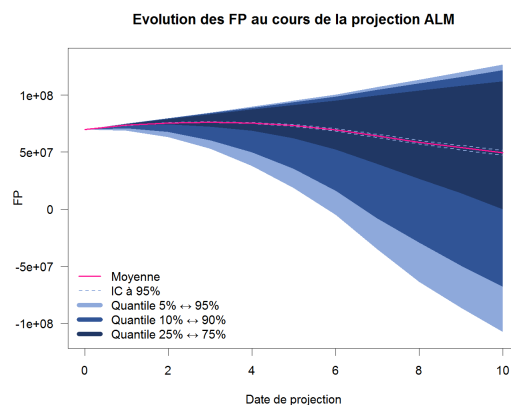


FIGURE 6.18 – Evolution des FP -
FP initiaux = 7% des PM initiales

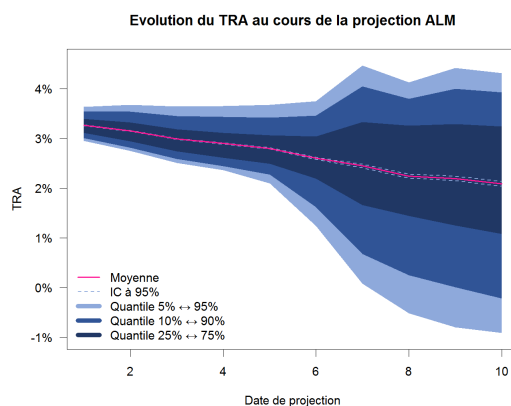


FIGURE 6.19 – Evolution du TRA - FP initiaux = 7% des PM initiales

L'allocation d'actifs initiale diminue cette fois de 3,1%. Bien qu'un peu plus importante, cette variation confirme que le modèle est assez robuste et que les petites variations de la capitalisation initiale considérées ne remettent pas en cause les ordres de grandeurs exhibés dans le cadre d'étude principal.

Choc à la baisse du niveau des primes de risque des actifs risqués

Les graphes et les résultats suivants sont obtenus avec le GSE risque neutre adapté au monde réel. Par rapport au cadre d'étude principal, les primes de risque des actifs risqués sont réduites de 0,5% et valent maintenant :

	<i>EUR</i>	<i>FOR</i>	<i>I</i>
$\bar{\mu}$	2,67%	4,20%	3,35%

L'allocation initiale et les graphes résultant de l'optimisation sont reportés ci-dessous.

Allocation initiale actif risqué	Allocation initiale actif non risqué
29,8%	60,2%

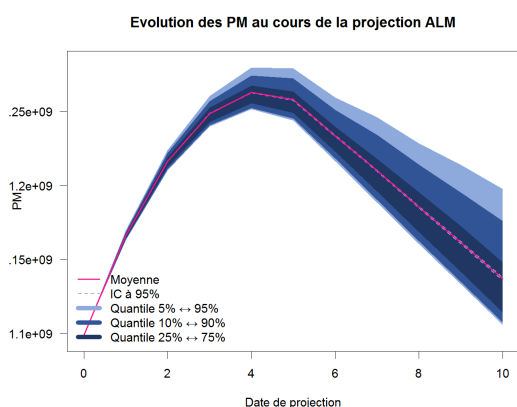


FIGURE 6.20 – Evolution des PM - prime de risque action de 2,67%

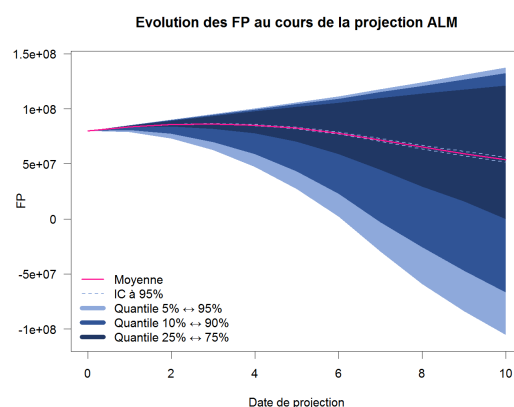


FIGURE 6.21 – Evolution des FP - prime de risque action de 2,67%

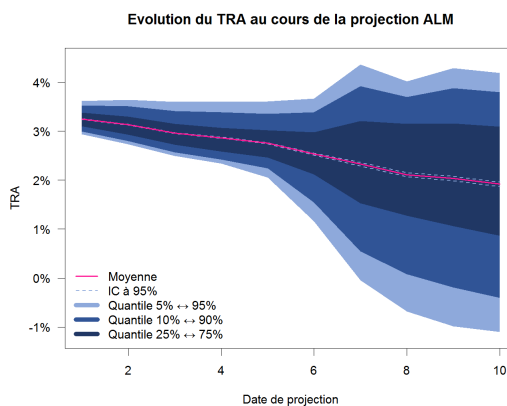


FIGURE 6.22 – Evolution du TRA - prime de risque action de 2,67%

La diminution de la prime de risque action abaisse le rendement moyen de l'actif risqué qui comparativement aux titres obligataires devient moins attractif que dans le cadre d'étude principal. De fait, on constate une diminution de l'allocation initiale optimisée

de 3,5%. Toutefois cette baisse de l'allocation en actif risqué demeure modérée, et appuie la robustesse de l'optimisation réalisée dans le cadre d'étude principal.

Au vu des résultats de l'abaque et de leur analyse, nous pouvons penser que la contrainte liée au coût des stress tests FRPS n'est pas pénalisante. Cependant pour les portefeuilles testés les plus risqués (ceux avec un fort taux technique de 2% ou 3% en restitution, les stress tests tels que définis dans les textes FRPS sont systématiquement déclenchés quelque soit le niveau de capitalisation initial et le niveau de la clause de PB financière. On rappelle que le programme d'optimisation concernait la moyenne du TRA cumulé le long des trajectoires résultant du GSE, sous des contraintes de solvabilité liées à la réglementation FRPS. Pour un portefeuille de retraite en *run off* percevant des primes des adhérents en phase de cotisation, présentant un taux minimum garanti de 1,5% et un taux de participation aux bénéfices de 90%, l'allocation initiale en actif risqué résultant de l'optimisation était supérieure à 30%. Cette dernière induit un taux de rendement moyen annualisé de 3,1% au cours de la projection.

Chapitre 7

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier l'impact de l'allocation initiale d'actifs sur le taux de rendement de l'actif (TRA) sous la réglementation FRPS pour un contrat de retraite supplémentaire de type Article 83.

Dans cette optique, un panorama de la retraite en France et en Europe a été présenté dans une première partie exposant le contexte dans lequel se place ce mémoire.

Il en découle que Solvabilité II est une réglementation très contraignante en termes d'exigences de solvabilité à très court terme (horizon d'un an) qui impose aux assureurs de limiter leurs investissements sur des actifs risqués comme les actions. Le nouveau cadre réglementaire FRPS, consiste en un retour au cadre prudentiel de Solvabilité I mais avec l'ajout de tests de résistance. Les rendements des fonds euros continuant à baisser, la question se posait de savoir si FRPS pouvait permettre une allocation d'actifs plus agressive en actifs risqués, sans être trop coûteuse en fonds propres. Ce qui permettrait d'espérer un meilleur rendement de l'actif et par extension une revalorisation des rentes plus compétitive.

A cet effet, deux outils ont été développés et implémentés sous R.

Il a d'abord été nécessaire de modéliser l'actif et le passif d'un portefeuille de type article 83 en prenant en compte les interactions actif/passif et les règles comptables et de gestion spécifiques à ce contrat.

Puis les deux outils ont été développés. Le premier est l'outil déterministe FRPS permettant de modéliser les tests de résistance et le deuxième est l'outil ALM stochastique qui, à l'aide du générateur de scénarios économiques (GSE), permet de projeter le portefeuille sur différentes trajectoires sous la probabilité historique.

La théorie autour du GSE a été détaillée, expliquant les choix de modélisation et de calibrage retenus.

Plusieurs types de portefeuilles de retraite ont été testés dans le but d'obtenir un abaque, avec une grille de lecture illustrant le coût des stress tests FRPS, en se servant de l'outil FRPS déterministe.

L'allocation à déterminer dans le cadre de ce mémoire, visait à maximiser un critère de rentabilité, en l'occurrence le TRA cumulé moyen. Celui-ci a été estimé en simulant

l'évolution du bilan assurantiel le long de scénarios économiques stochastiques des taux d'intérêts et du cours d'une action. Nous avons pour cela privilégié la modélisation sous la probabilité historique.

L'algorithme d'optimisation utilisé s'inscrit dans la classe des algorithmes de recherche directe. Celui-ci, intitulé COBYLA (*Constrained Optimization By Linear Approximation*), a alors été exposé et généralise *la méthode du simplexe*, en autorisant la minimisation d'une fonction cible sujette à plusieurs contraintes sans nécessiter d'hypothèse de régularité.

Les résultats de l'optimisation sous contraintes obtenus pour le portefeuille moyen en *run off* indiquent une part en actif risqué de plus de 30% pour un TRA cumulé moyen de 3,12%. La fonction objectif à maximiser évaluait la moyenne du TRA cumulé le long des trajectoires résultant du GSE, sous des contraintes de solvabilité liées à la réglementation FRPS.

Il a été constaté que la contrainte liée au coût des stress tests FRPPS n'est pas discriminante, et que les 30% d'allocation en actif risqués obtenus grâce au programme d'optimisation n'entraînent pas de coût supplémentaire en Fonds Propres. L'abaque et l'optimisation menée nous permettent de conclure que la réglementation FRPS permet une allocation en actif risqué importante.

De plus sous le régime Solvabilité II, la part d'actif risqué des assureurs d'un fond de retraite représente en 2017 environ 15%. Le passage sous FRPS autorise, sous les hypothèses de ce mémoire, une allocation en actif risqué deux fois plus importante sans entraîner de coût supplémentaire en Fonds Propres. En outre le problème d'optimisation formulé, ainsi que l'algorithme COBYLA sélectionné, demeurent génériques et applicables à des fonctions complexes à plusieurs variables garantant d'une modélisation minutieuse. Il serait donc très intéressant d'étendre le cadre d'étude posé dans ce mémoire à une modélisation exhaustive et parfaitement représentative des nombreux mécanismes de gestion de l'actif et du passif des assureurs.

Le portefeuille étudié est doté d'un actif diversifié, il est donc possible d'utiliser l'analyse des résultats pour étudier l'impact de la réglementation FRPS. Cette étude permet de conclure qu'il est possible d'envisager une allocation en actifs risqué importante sous FRPS. Cependant, si cette démarche était mise en oeuvre par un assureur pour son propre portefeuille, il lui faudrait tenir compte de ses spécificités, c'est à dire le niveau d'engagement de taux technique, de rendement initial de l'actif ainsi que la durée de l'actif et du passif.

Par ailleurs il est important de prendre en considération la loi Pacte ainsi que la réforme des retraites.

Dans les propositions amenées par la loi Pacte, figure l'idée d'une gestion des actifs par défaut se servant de grilles de gestion à horizon comme cela est déjà fait en Epargne salariale. Cette proposition illustre une volonté toujours plus forte de sortir d'une gestion à 100% en fonds euros pour se diriger vers d'autres supports.

Quant à la réforme des retraites, dont les modalités exactes n'ont pas encore été présentées, elle pourrait faire évoluer le contexte réglementaire et en conséquence impacter

significativement la gestion de la retraite supplémentaire.

L'actualité récente vient appuyer les conclusions de ce mémoire. En effet certains acteurs de l'assurance s'intéressent aux FRPS, Aviva vient d'ailleurs de créer un FRPS [THEVENIN, 2018], ce qui devrait permettre d'après son directeur Patrick Dixneuf d'investir davantage dans des produits plus risqués comme les actions et d'améliorer le rendement. De son côté, Malakoff Médéric a déposé en août un dossier d'agrément à l'ACPR. Bien que ce premier FRPS soit un signe positif, les acteurs du marché de l'assurance restent pour la majorité en phase d'attente, étant donné les réformes en discussion.

Annexe A

GSE PRIIPS

Cette annexe présente une autre approche de projection des taux nominaux et du cours de l'action sous la probabilité historique ayant été étudiée et implémentée. Celle-ci est directement inspirée de la modélisation exposée dans la réglementation PRIIPS (Packaged Retail Investment and Insurance Products). La projection des actifs financiers est basée sur une approche de ré-échantillonnage multivarié simple de mise en œuvre, et appuyée par un contexte réglementaire. En outre le choix des paramètres exogènes est imposé par la réglementation comme le coefficient de déplacement sur les taux.

A.1 Extraction des données historiques

Notons $\tau = \{T_{-N}, \dots, T_0 = 0\}$, $N \in \mathbb{N}^*$, un ensemble des dates equi-espacées de $\Delta > 0$ et de cardinal $N + 1$. Par ailleurs on pose $\tau^* = \tau \setminus \{T_{-N}\}$ l'ensemble des dates de l'historique privé de la première date. On se munit des historiques de données suivants, extraits aux dates τ :

- (i) un de taux zéro-coupons $(R(t, m))_{t \in \tau, m \in \mathcal{M}}$ où $\mathcal{M} \subset \mathbb{N}^*$ est un ensemble de maturité résiduelles annuelles, tel que $Card(\mathcal{M}) \geq 3$;
- (ii) un historique du cours d'une action $(S(t))_{t \in \tau}$.

L'historique des rendements logarithmiques de taux zéro coupon shiftés par maturité résiduelle, noté LR_{ZC} est défini pour $t \in \tau^*$, $m \in \mathcal{M}$ par

$$LR_{ZC}(t, m) = \ln \left(\frac{R(t, m) + \delta}{R(t - \Delta, m) + \delta} \right)$$

où $\delta \geq 0$ est le paramètre de shift ou coefficient de déplacement. Ce dernier permet de considérer des quantités positives à l'intérieur de la fonction logarithme. Dans le cas où certains taux de l'historique sont négatifs (assez probable dans le contexte actuel), la réglementation impose que le coefficient de déplacement soit égal au plus petit entier

(exprimé en %) assurant la positivité des taux shiftés pour toutes les date et pour toutes les maturités considérées. Formellement

$$\delta = - \left[\min_{t \in \tau, m \in \mathcal{M}} \frac{1}{100} \times \lfloor R(t, m) \times 100 \rfloor \right]^+$$

L'historique des rendements logarithmiques, LR_S du cours de l'action est défini pour $t \in \tau^*$ par

$$LR_S(t) = \ln \left(\frac{S(t)}{S(t - \Delta)} \right)$$

A.2 Lissage des historiques de rendements des courbes

On procède tout d'abord à un lissage de l'historique des rendements taux par l'intermédiaire d'une analyse en composantes principales (ACP). On considère un historique de courbes de taux. En reprenant point par point la réglementation, on effectue les étapes suivantes :

Etape 1 Sélection du shift assurant la positivité de l'ensemble des taux shiftés tel que défini dans la section précédente.

Etape 2 Calcul des rendements de taux shiftés pour chaque maturité (cf. paragraphe sur l'extraction des données historiques).

Etape 3 Pour chaque maturité, les rendements sont centrés, de sorte à ce que la moyenne des rendements soit nulle. Pour $t \in \tau^*$ et $m \in \mathcal{M}$

$$X(t, m) = LR_{ZC}(t, m) - \bar{\mu}_m$$

$$\text{avec } \bar{\mu}_m = \frac{1}{N} \sum_{t \in \tau^*} LR_{ZC}(t, m), m \in \mathcal{M}$$

On définit la matrice $X = (X(t, m))_{t \in \tau, m \in \mathcal{M}}$, dans la suite c'est à cette matrice X que l'on va appliquer l'ACP.

Etape 4 En premier lieu on calcule la matrice de covariance empirique Σ

$$\Sigma = \frac{1}{N} X' X$$

Etape 5 On calcule ensuite les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice. On diagonalise Σ

$$\Sigma = W D W'$$

avec

- W une matrice orthogonale ;
- D une matrice diagonale dont les valeurs diagonales sont triées par ordre décroissant.

Etape 6 On construit une matrice de trois colonnes, en sélectionnant les trois premiers vecteurs propres de Σ , c'est-à-dire les trois premières colonnes de la matrice W , notées $W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)}$.

On remarque en particulier que $W_{(1)}$ reflète le risque de translation, $W_{(2)}$ le risque de pentification et $W_{(3)}$ le risque de courbure du sous-jacent.

Etape 7 On projette ensuite les vecteurs de rendements de dimension $Card(\mathcal{M})$ sur l'espace de dimension 3 dont les trois vecteurs orthogonaux $W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)}$ forment une base.

$$Y = X \times [W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)}]$$

Etape 8 La dernière étape consiste à multiplier la matrice Y de la projection des rendements par la transposée de la matrice des vecteurs propres W . On obtient ainsi la matrice $\widetilde{LR}_{ZC}$ des rendements lissés

$$\widetilde{LR}_{ZC} = Y \times [W_{(1)}, W_{(2)}, W_{(3)}]$$

Dans la suite on note $\widetilde{LR}_{ZC} = \left(\widetilde{LR}_{ZC}(t, m) \right)_{t \in \tau, m \in \mathcal{M}}$.

A.3 Simulation des actifs par ré-échantillonnage multivarié

On souhaite projeter $l_s \in \mathbb{N}^*$ trajectoires de la courbe des taux zéro coupon, des cours des actions et de l'indice immobilier sur un ensemble de dates equi-espacée au pas Δ noté $\tau_s = \{T_0 = 0, \dots, T_H\}$, $H \in \mathbb{N}^*$.

Soient $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $t \in \tau_s$. On effectue un tirage uniforme avec remise d'une date de l'ensemble des dates de l'historique τ^* que l'on note $T_t^k \in \tau^*$. Nous détaillons ensuite le calcul de la courbe des taux zéro-coupon et du cours de l'actif pour la simulation k et à la date de projection t . Cette approche est appelée ré-échantillonnage multivarié ou *bootstrap* multivarié et permet de conserver les relations de dépendance observées sur les historiques entre les différents drivers modélisés.

Simulation de la courbe des taux zéro-coupon

Le taux zéro-coupo de maturité résiduelle $m \in M$ afférent à la simulation k et la date t , noté $R^k(t, m)$ est obtenu par la relation

$$R^k(t, m) = (R^k(t - \Delta, m) + \delta) \times \exp(\widetilde{LR}_{ZC}(T_t^k, m)) - \delta$$

Le zéro-coupon de maturité résiduelle $m \in M$ à la date initiale est donné par la dernière date de l'historique, si bien que $R^k(T_0, m) = R(T_0, m)$.

Simulation du cours de l'action

Le cours de l'indice action relatif à la simulation k et la date t , noté $S^k(t)$ est simplement donné par

$$S^k(t) = S^k(t - \Delta) \times \exp(LR_S(T_t^k))$$

Le cours de l'action à la date initiale est donné par la dernière date de l'historique, si bien que $S^k(T_0) = S(T_0)$.

Résultats de la simulation

On considère l'historique mensuel (i.e. $\Delta = 1\text{mois}$) du cours l'Eurostoxx50 ainsi que l'historique mensuel des taux zéro-coupon induits par les taux EURIBOR disponibles aux mêmes dates du 01/01/1999 au 31/12/2017.

Les trajectoires des taux zero-coupon de maturité résiduelles 5 ans et 10 ans obtenues sur 5000 simulations sont tracées ci-dessous

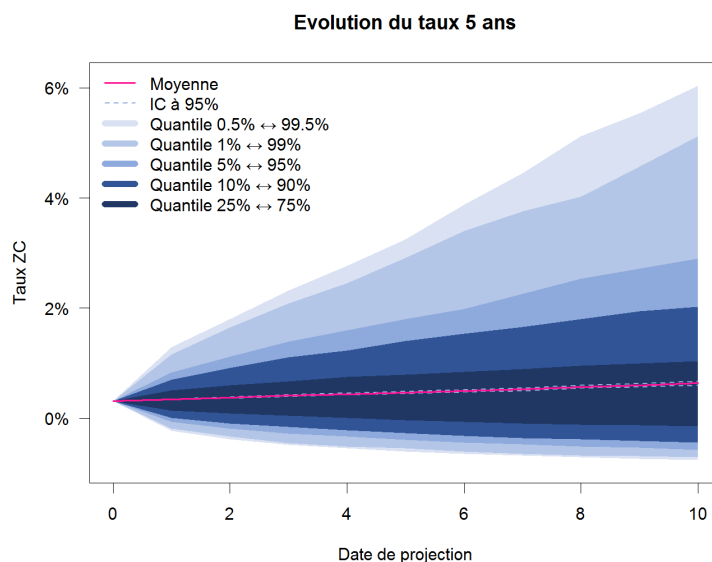


FIGURE A.1 – Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 5 ans

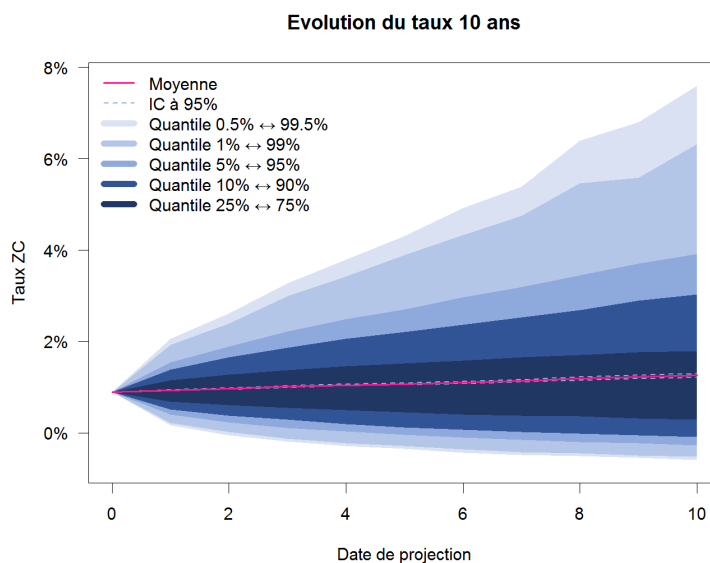


FIGURE A.2 – Enveloppes des trajectoires des taux ZC de maturité résiduelle 10 ans

Les trajectoires des rendements actions $TR^k(t) = \frac{S^k(t)}{S^k(t-\Delta)} - 1$, $t \geq \Delta$, $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, obtenues sur 5000 simulations sont présentées ci-dessous

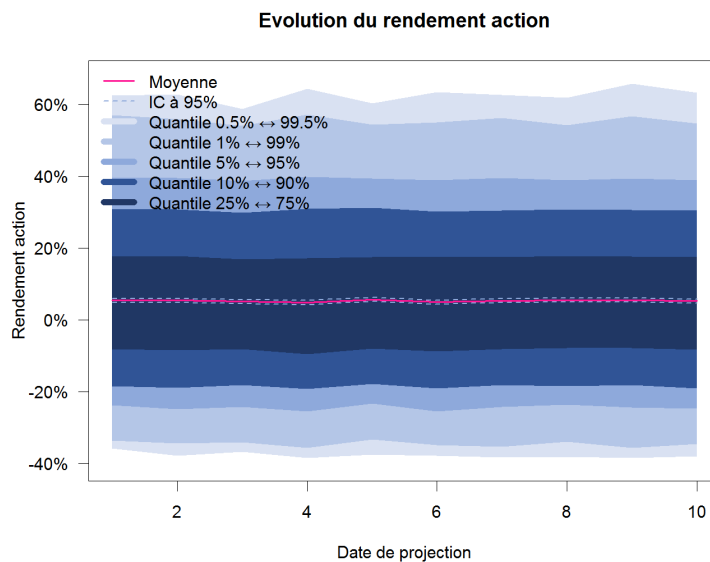


FIGURE A.3 – Enveloppes des trajectoires des rendement de l'action

Annexe B

Abaque FRPS

Cette annexe constitue la suite et la fin de l'abaque présenté dans la section 6.1.3. Les tableaux suivants présentent pour une participation aux bénéfices contractuelle de 85% et 95%, et avec les paramètres variables suivants, les fonds propres initiaux ou capitaux propres initiaux et le taux technique ou TMG en phase de service.

Allocation	10% actif risqué 90% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 95%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,10%	0,18%	0,48%	1,23%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,54%	4,61%	11,92%	30,66%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%	0,02%	0,03%	0,23%	0,21%	Coût du test FRPS
		0,34%	0,64%	4,54%	4,14%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des taux d'intérêts	Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		10	5	3	1	Nombre d'année
	8%		0,09%	0,16%	0,41%	Coût du test FRPS
			1,10%	1,95%	5,10%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des taux d'intérêts	Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
			8	7	4	Nombre d'année

FIGURE B.1 – Abaque pour une allocation de 10% action et une PB de 95%

Allocation	30% actif risqué 70% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 95%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,1%	0,20%	0,50%	1,25%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,59%	5,03%	12,55%	31,28%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%		0,09%	0,13%	0,56%	Coût du test FRPS
			1,73%	2,55%	11,18%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des actions	Baisse de la mortalité	Baisse des taux d'intérêts	Scénario de stress le plus pénalisant
			5	4	2	Nombre d'année
	8%			0,06%	0,41%	Coût du test FRPS
				0,74%	5,11%	Coût du test FRPS (en % FP)
				Baisse des taux d'intérêts	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
				7	4	Nombre d'année

FIGURE B.2 – Abaque pour une allocation de 30% action et une PB de 95%

Allocation	40% actif risqué 60% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 95%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,10%	0,21%	0,51%	1,26%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,62%	5,24%	12,86%	31,60%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%		0,07%	0,11%	0,49%	Coût du test FRPS
			1,49%	2,11%	9,72%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des actions	Baisse des taux d'intérêts	Baisse des taux d'intérêts	Scénario de stress le plus pénalisant
			5	4	2	Nombre d'année
	8%			0,04%	0,41%	Coût du test FRPS
				0,46%	5,12%	Coût du test FRPS (en % FP)
				Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
				10	4	Nombre d'année

FIGURE B.3 – Abaque pour une allocation de 40% action et une PB de 95%

Allocation	10% actif risqué 90% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 85%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,09%	0,18%	0,47%	1,22%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,18%	4,49%	11,73%	30,47%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%	0,02%	0,03%	0,22%	0,20%	Coût du test FRPS
		0,48%	0,57%	4,46%	3,99%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des taux d'intérêts	Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		10	5	3	1	Nombre d'année
	8%		0,10%	0,15%	0,41%	Coût du test FRPS
			1,21%	1,91%	5,06%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des taux d'intérêts	Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
			8	7	4	Nombre d'année

FIGURE B.4 – Abaque pour une allocation de 10% action et une PB de 85%

Allocation	30% actif risqué 70% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 85%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,09%	0,20%	0,50%	1,25%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,29%	4,92%	12,39%	31,13%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%		0,08%	0,12%	0,54%	Coût du test FRPS
			1,69%	2,37%	10,89%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des actions	Baisse de la mortalité	Baisse des taux d'intérêts	Scénario de stress le plus pénalisant
			5	4	2	Nombre d'année
	8%			0,05%	0,41%	Coût du test FRPS
				0,68%	5,08%	Coût du test FRPS (en % FP)
				Baisse des taux d'intérêts	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
				7	4	Nombre d'année

FIGURE B.5 – Abaque pour une allocation de 30% action et une PB de 85%

Allocation	40% actif risqué 60% actif non risqué	Taux minimum garanti en phase de service				PB 85%
		0,50%	1,50%	2%	3%	
Fonds propres de base en % des Provisions Mathématiques	4%	0,09%	0,21%	0,51%	1,26%	Coût du test FRPS (en % PM)
		2,34%	5,14%	12,71%	31,46%	Coût du test FRPS (en % FP)
		Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
		1	1	1	1	Nombre d'année
	5%		0,07%	0,09%	0,47%	Coût du test FRPS
			1,46%	1,90%	9,36%	Coût du test FRPS (en % FP)
			Baisse des actions	Baisse des taux d'intérêts	Baisse des taux d'intérêts	Scénario de stress le plus pénalisant
			5	4	2	Nombre d'année
	8%			0,03%	0,41%	Coût du test FRPS
				0,38%	5,09%	Coût du test FRPS (en % FP)
				Baisse de la mortalité	Baisse des actions	Scénario de stress le plus pénalisant
				10	4	Nombre d'année

FIGURE B.6 – Abaque pour une allocation de 40% action et une PB de 85%

Annexe C

Optimisation sans primes

Allocation initiale actif risqué	Allocation initiale actif non risqué
43,4%	56,6%

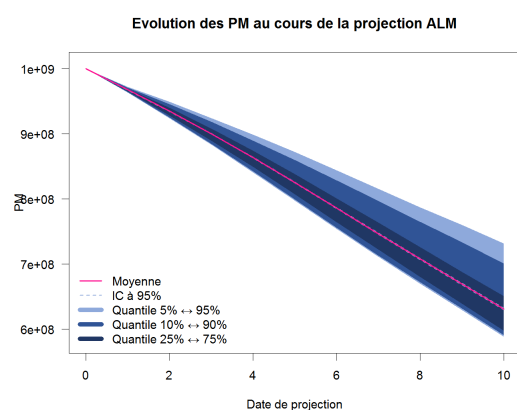


FIGURE C.1 – Evolution des PM -
prime de risque action de 2,67%

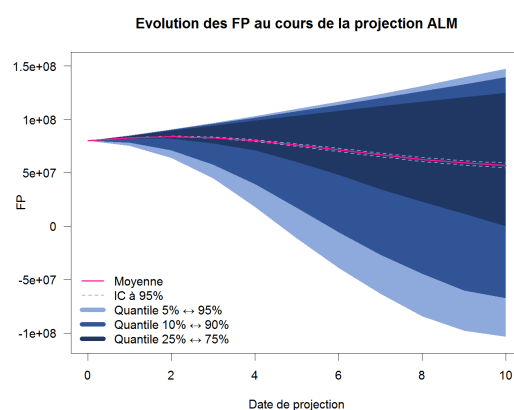


FIGURE C.2 – Evolution des FP -
prime de risque action de 2,67%

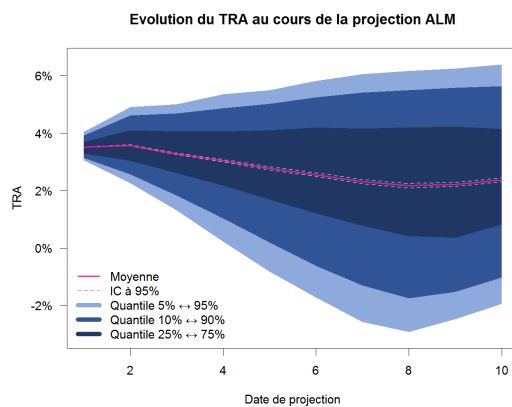


FIGURE C.3 – Evolution du TRA - prime de risque action de 2,67%

Bibliographie

- [arr, 2017] (2017). Arrêté du 14 août 2017 fixant les règles applicables aux fonds de retraite professionnelle supplémentaire et relatif à l’adaptation des régimes de retraite supplémentaire en unités de rentes.
- [ACPR, 2018] ACPR, B. d. F. (2018). Revalorisation 2017 des contrats d’assurance-vie et de capitalisation – engagements à dominante retraite collectifs. Analyse et synthèses, 95.
- [Boulier Dupré, 2002] BOULIER DUPRÉ, J.-F. D. (2002). Gestion financière des fonds de retraite.
- [Brigo Mercurio, 2006] BRIGO MERCURIO, D. F. (2006). Interest rate models-theory and practice : With smile, inflation and credit.
- [COR, 2018] COR (2018). Rapport annuel du cor. Évolutions et perspectives des retraites en France.
- [DRESS, 2018] DRESS (2018). Les retraités et les retraites. Panoramas de la DRESS.
- [Esping-Andersen, 1999] ESPING-ANDERSEN, G. (1999). Essai sur le capitalisme moderne.
- [Galea, 2018] GALEA, B. (2018). Baromètre des rendements des fonds généraux en retraite supplémentaire. Lettre d’actualité Entreprises.
- [Karoui, 2004] KAROUI, N. E. (2004). Couverture des risques dans les marchés financiers.
- [Nash, 1990] NASH, J. C. (1990). Compact numerical methods for computers : linear algebra and function minimisation. CRC press.
- [Nelder et Mead, 1965] NELDER, J. A. et MEAD, R. (1965). A simplex method for function minimization. The computer journal, 7(4):308–313.
- [Nicolas, 2011] NICOLAS, F. (2011). Retraites stratégies de placement.
- [Palier, 2011] PALIER, B. (2011). La protection sociale en europe. La documentation Française.

- [Powell, 1994] POWELL, M. J. (1994). A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation. In Advances in optimization and numerical analysis, pages 51–67. Springer.
- [Schrager et Pelsser, 2006] SCHRAGER, D. F. et PELSSER, A. A. (2006). Pricing swaptions and coupon bond options in affine term structure models. Mathematical Finance, 16(4):673–694.
- [THEVENIN, 2018] THEVENIN, L. (2018). Aviva crée un premier fonds de pension "à la française". Les Echos.