

Capital Contingent : de la banque à l'assurance

Mémoire d'actuariat présenté pour l'obtention du

**Master professionnel Sciences de gestion, mention finances de marché
Spécialité Actuariat du CNAM**

Et l'admission à l'Institut des Actuares

Mémoire soutenu le 16 février 2016

par Alexis LAUTRETTE

Caractère confidentiel : non

Jury :

Président : Michel FROMENTEAU

Membres : Laurence ESLOUS

Franck LANGUILLAT

Pierre PETAUTON

Florence PICARD

Vincent RUOL

Remerciements

Merci à Michel Fromenteau, responsable du master d'actuariat du CNAM, d'avoir échangé avec moi lors de mes réflexions pour déterminer un sujet, et d'avoir su m'orienter loin des domaines qui n'auraient pu aboutir.

Je tiens à remercier Franck Languillat, directeur général délégué à la gestion de Financière de la Cité, pour m'avoir suivi et guidé dans la rédaction de ce mémoire. Merci également pour sa relecture attentive et ses remarques avisées.

Merci encore à Emmanuel Sales, président de Financière de la Cité, de m'avoir permis de rédiger ce mémoire au sein de son entreprise. Merci également de la confiance qu'il me témoigne en me laissant l'opportunité de prolonger ce mémoire à travers la gestion d'actifs.

Enfin, merci à ma formidable Claire pour sa patience dans la relecture, ses corrections et ses excellentes remarques.

Résumé

Les réglementations financières ont connu de profonds bouleversements durant ces 15 dernières années. Les faillites retentissantes de grands établissements financiers (AIG, Lehman Brothers, Equitable Life, ...) ont été le point de départ de Bâle III pour les banques et Solvabilité II pour les assureurs.

Ces réformes modifient considérablement l'évaluation des risques des institutions. Les règles de calculs des ratios de solvabilité ont été changées et le bilan est maintenant construit en vision économique.

Afin d'éviter de futures faillites aux lourdes conséquences, les régulateurs ont introduit une nouvelle catégorie de fonds propres : le capital contingent. Ce capital est accessible via les marchés financiers sous forme d'obligations contingentes convertibles : les Additional Tier 1 pour les banques sous Bâle III et les Tier 1 pour les assureurs sous Solvabilité II.

Ce mémoire a pour objectif d'explorer la modélisation de ces obligations pour un assureur soumis à Solvabilité II.

Dans la première partie, nous posons les bases réglementaires et montrons les liens étroits entre Bâle III et Solvabilité II. Nous définissons les nouvelles catégories de fonds propres avant de présenter le fonctionnement des obligations contingentes convertibles.

Dans la deuxième partie, nous présentons les trois familles de valorisation des CoCo bancaires :

- (1) Un modèle à forme réduite basé sur l'estimation de la probabilité de conversion de l'obligation CoCo.
- (2) Un modèle de réplication du PayOff de l'obligation CoCo par des produits dérivés sur action.
- (3) Un modèle structurel liant l'actif et le passif de la compagnie à son ratio de solvabilité.

La dernière partie de ce mémoire va être l'adaptation des modèles bancaires au monde de l'assurance. Afin de lier les variables des modèles au SCR, des études statistiques sont réalisées à partir :

- de l'historique de marché des obligations CoCo bancaires,
- des ratios SCR/SST déjà publiés par les assureurs européens.

Nous appliquons ensuite ces résultats en simulant l'émission d'une obligation CoCo par AXA.

Très utilisées par les praticiens, les deux premières approches apparaissent peu concluantes dans un marché encore inexistant. Ces modèles sont plutôt adaptés à une gestion des risques de ces produits plutôt que dans leurs valorisations.

Le modèle structurel semble être une bonne alternative dans notre contexte. Cependant, la faible quantité de données disponibles sur les SCR rend compliqué le calibrage.

Mots-clés : contingente, convertible, coco, Solvabilité II, Bâle III, AT1P

Abstract

The financial regulation have undergone profound changes over the last 15 years. The bankruptcies of major financial institutions (AIG, Lehman Brothers, Equitable Life, ...) were the starting point of new reforms. Basel III came into force in January 2013 for banks while Solvency II will come into force in January 2016 for insurers.

These reforms significantly change the assessment of institutional risks. Solvency ratios calculation were changed, and the balance sheet is now built with an economic vision.

To avoid future failures with serious consequences, regulators have introduced a new category of own funds : the contingent capital. This capital is accessible via the financial markets in the form of contingent convertible bonds : the Additional Tier 1 for banks under Basel III and Tier 1 for insurers under Solvency II.

This thesis aims to explore the modeling of these bonds for an insurer subject to Solvency II.

In the first part of this thesis, we are laying the regulatory bases and show the close links between Basel III and Solvency II. We define new categories of own funds before presenting the functioning of contingent convertible bonds.

In the second part, we present the valuation models of bank CoCo. Three families are explored :

- (1) A reduced form model based on the modeling of the probability of conversion of the CoCo bond.
- (2) A replication model PayOff of the CoCo bond by equity derivatives products.
- (3) A structural model linking the assets and liabilities of the company to its solvency ratio.

The last part of this thesis will be the adaptation of banking models to insurance. Statistical studies are made from :

- market history of bank CoCo bonds
- SCR / SST ratios already published by European insurers.

to bind the variables of the models to the SCR. We apply these results by simulating the issuance of a CoCo bond by AXA.

Widely used by practitioners, the first two approaches appear inconclusive in a still non-existent market. These models are more suitable in risk management rather than in valuation.

The structural model appears to be a good alternative in our context. However, the small amount of data available on SCR makes calibration complicated.

Keywords : contingent, convertible, coco, Solvency II, Basel III, AT1P

Table des matières

Remerciements	1
Résumé	2
Abstract	3
Liste des symboles	6
Introduction générale	7
partie 1. Motivations, contexte et objectifs	9
Introduction	10
Chapitre 1. Les défaillances des (ré)assureurs	11
1.1. Quelques définitions	11
1.2. Le rôle du régulateur	12
1.3. Des sauvetages lourds de conséquences	13
1.4. Des faillites avérées	14
Chapitre 2. Solvabilité II et Bâle III	17
2.1. Contexte	17
2.2. Une approche commune	19
2.3. De nouvelles catégories de fonds propres	20
2.4. Capital hybride d'un assureur sous Solvabilité II	23
Chapitre 3. Les obligations contingentes convertibles	27
3.1. Introduction	27
3.2. Caractéristiques	27
3.3. Le marché	29
3.4. Intérêts pour l'émetteur et pour l'investisseur	33
partie 2. Modélisation des obligations contingentes convertibles	36
Introduction	37
Notations	37
Formule générale d'évaluation d'une obligation CoCo	38
Chapitre 4. Modèles à forme réduite et dérivés action : une première approche	39
4.1. Quelques produits dérivés exotiques	39
4.2. Modèle à forme réduite	45
4.3. Réplication par des produits dérivés sur action	48
4.4. Critiques et extensions	52

Chapitre 5. Approche structurelle	54
5.1. Modélisation de la compagnie	54
5.2. Application aux CoCo	58
5.3. Analyse	59
partie 3. Adaptation à l'assurance	61
Introduction	62
Chapitre 6. Modélisation de la barrière	64
6.1. Barrière pour déclencheur implicite	64
6.2. Barrière pour modèle structurel	70
Chapitre 7. Simulation d'une émission	79
7.1. Préliminaires	79
7.2. Forme réduite et dérivés action	83
7.3. Modèle structurel	89
7.4. Comparaison des modèles	96
Conclusion générale	98
partie 4. Annexes	100
Annexe A. Éléments de mathématiques financières	101
A.1. Lois de probabilités usuelles	101
A.2. Éléments de calcul stochastique	101
A.3. Modèle de Black et Scholes	102
A.4. Dérivés vanilles	103
Annexe. Bibliographie	106

Liste des symboles

α	Proportion du nominal convertie en action en cas de conversion d'une obligation CoCo
\bar{c}	Niveau seuil du ratio de solvabilité dans le cas d'un déclencheur comptable d'une obligation CoCo
ρ	Le rendement actuariel d'un titre obligataire
σ_t	La volatilité d'un titre
τ	Temps de défaut de l'émetteur d'une obligation
θ	L'instant de survenance du déclencheur d'une obligation CoCo
C_p	Le prix de conversion de l'action sous-jacente en cas de conversion d'une obligation CoCo
C_r	Le nombre d'actions sous-jacentes reçues en cas de conversion d'une obligation CoCo
N	Le nominal d'un titre
q_t	Le taux de dividende d'une action
R	Le taux de recouvrement d'un titre
R_{CoCo}	le taux de recouvrement de l'obligation CoCo
S^*	Niveau seuil du cours de l'action dans le cas d'un déclencheur de marché d'une obligation CoCo
T	La maturité d'un titre
$X_N^c(t, T)$	La valeur en t d'un titre obligataire de maturité T versant les coupons (c_{t_i}) aux temps $\{t_0, t_1, \dots, T\}$ et de nominal N

Introduction générale

Juin 2009

La directive européenne Bâle II sur le secteur bancaire est adoptée par les pays membres de l'union après 5 ans de préparation. Elle prévoit notamment le calcul d'un ratio minimal de fonds propres par rapport à l'ensemble des crédits accordé par les banques : le ratio McDonough.

Novembre 2009

La banque britannique Lloyd's est la première institution à émettre une obligation convertible automatiquement en action en cas de ratio Core Tier 1 (une partie du ratio McDonough) passant en dessous d'une certaine limite. Cette nouvelle classe d'actif est appelée obligation contingente convertible (CoCo).

Janvier 2011

Pleine application du Swiss Solvency Test (SST), les (ré)assureurs helvètes doivent couvrir leur niveau de fonds propres minimum déterminé par le SST.

Mars 2013

Le réassureur suisse Swiss Re est le premier assureur à émettre une obligation CoCo à déclenchement basé sur son niveau de solvabilité réglementaire. L'émission, d'un montant de 750 millions de dollars, a reçu une demande environ 5 fois supérieure.

Novembre 2013

Après plus de 10 ans de travaux, d'études quantitatives, une crise financière majeure, des rumeurs croissantes d'abandons ces derniers mois... la commission européenne, le parlement européen et le conseil européen parviennent à un accord sur la partie garanties longues (Long-Term Guarantee) de la directive Solvabilité II. Cette date marque la fin de l'incertitude concernant la réforme et permet aux assureurs de se concentrer sur son application au 1er janvier 2016.

Janvier 2016

Tout comme les banques quelques années plus tôt, les (ré)assureurs européens vont donc devoir faire face à un durcissement de la réglementation à compter du 1er janvier 2016 et la mise en application de Solvabilité II.

Une révolution

Dans la même lignée que l'évolution des normes bancaires Bâle II et Bâle III, la directive Solvabilité II est une véritable "révolution" pour les (ré)assureurs européens, la réglementation actuelle ayant une trentaine d'années!

L'une des nouveautés les plus discutée (et décriée) est le calcul d'un niveau de capital réglementaire cible (Solvency Capital Requirement ou SCR), associé à l'évaluation de l'actif et du passif en valeur de marché, contrairement à Solvabilité I. Cette évolution implique une dépendance du niveau des fonds propres réglementaires à l'évolution des marchés financiers, pouvant ainsi mettre la solvabilité (réglementaire) de l'assureur en danger en cas de situation de marché défavorable.

De nouvelles sources de capitaux

L'évolution des réglementations financières ont fait apparaître de nouvelles formes de capital réglementaire avec la classification des fonds propres selon leur niveau de robustesse (Tier 1 pour les fonds propres les plus solides, jusqu'au Tier 3 pour les moins robustes). Ce capital supplémentaire est accessible via les marchés financiers à travers les titres hybrides ou capital contingent, assimilable à des quasi fonds propres pour les institutions financières.

Le marché de la dette hybride bancaire est encore en pleine expansion, avec une standardisation des titres qui devrait se poursuivre dans les années à venir. On trouve dans [CACIB, 2014] une estimation d'environ 36,2 milliards d'Euros de nouvelles émissions de dettes hybrides bancaires par an.

L'entrée des (ré)assureurs sur ce marché est relativement récente : Allianz en a émis 500 millions d'Euros en 2011¹, et Swiss-Re a été le premier assureur à émettre une obligation à déclenchement basé sur son niveau de solvabilité réglementaire (ie une obligation contingente convertible). Durant l'année 2013 Axa, Achmea, Zurich, Aviva et Uniqa ont émis environ 3 milliards d'Euros de titres hybrides pour consolider la structure de leurs capitaux en prévision de Solvabilité II ([Risk.net, 2013]). Néanmoins, aucune obligation contingente convertible n'a été émise par un assureur soumis à Solvabilité II, les critères de classifications des fonds propres n'étant définitifs qu'au 1er janvier 2016.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier la modélisation d'une obligation contingente convertible qui serait émise par un assureur soumis à solvabilité II en s'inspirant de l'expérience bancaire.

1. Obligation CoCo sur 30 ans intégralement souscrite par l'assureur japonais Nippon Life

Première partie

Motivations, contexte et objectifs

Introduction

La régulation des institutions financières est aujourd'hui au centre des préoccupations. En effet, la complexification des produits dérivés, la dématérialisation des transactions financières et la présence grandissante des automates sur les marchés financiers rendent de plus en plus fréquentes les périodes de stress de marché tout en augmentant leurs intensités.

En première analyse, la faillite brutale d'un (ré)assureur peut sembler beaucoup moins probable que celle d'une banque. Néanmoins l'histoire nous a montré des cas de faillites d'assureurs aux conséquences beaucoup plus lourdes pour les assurés que dans le cas d'une faillite bancaire.

Pour renforcer leurs fonds propres, fortement affaiblis avec la récente crise financière, les institutions financières ont donc tout intérêt à chercher de nouvelles formes de financement.

Nous présentons dans cette partie la notion de solvabilité d'un assureur en revenant sur quelques cas d'insolvabilité, avant de nous intéresser aux dernières évolutions de la réglementation des banques et des assurances : Bâle III et Solvabilité II. Ces réformes mettent en avant une nouvelle catégorie de fonds propres via l'appel aux marchés financiers : le capital contingent.

Nous introduirons ensuite les mécanismes des obligations contingentes convertibles. Ces actifs sont profondément liés aux nouvelles réglementations et particulièrement au calcul du niveau de fonds propres cibles à détenir par ces institutions.

Pour conclure cette partie, nous ferons le lien entre Solvabilité II, le capital contingent d'un assureur avant et après la mise en place de la réforme, et enfin les obligations contingentes convertibles.

CHAPITRE 1

Les défaillances des (ré)assureurs

1.1. Quelques définitions

On trouve sur le site de la ([F.F.S.A., 2013]) une excellente définition de la solvabilité :

DEFINITION 1 (Solvabilité). *capacité à respecter les engagements que l'assureur prend auprès de ses clients. Elle dépend des garanties et protections offertes aux assurés et des ressources, fonds propres et investissements, dont dispose l'assureur pour y faire face.*

De manière (très) simplifiée comme le montre figure 1, le bilan d'un (ré)assureur se compose :

- au passif, de **provisions techniques** et d'une **marge de solvabilité**
- à l'actif, de placements financiers et d'autres placements



FIGURE 1. Bilan simplifié d'un (ré)assureur

DEFINITION 2 (Provisions techniques). *Les provisions techniques d'un assureur sont les dettes de l'assureur ([Coulbault et Constant, 2009]). Elles sont principalement constituées par les provisions mathématiques pour les compagnies d'assurance vie, et par les provisions pour sinistres pour les compagnies d'assurance non-vie.*

DEFINITION 3 (Marge de solvabilité). *La marge de solvabilité d'un assureur représente, au-delà des provisions techniques qui sont la source principale de solvabilité d'une entreprise d'assurance, le matelas de sécurité contre l'aléa dans la réalisation des divers risques qui peuvent affecter le passif ou l'actif d'une société d'assurance. Il s'agit d'une notion équivalente à celle des fonds propres qui est utilisée dans le domaine des entreprises et des banques. [Sénat, 1998]*

DEFINITION 4 (Marge de solvabilité minimum). *Niveau minimum de fonds propres à détenir pour les assureurs régit par les textes réglementaires européens adaptés à la réglementation nationale (code des assurances, code de la sécurité sociale et code de la mutualité). Le calcul de la marge de solvabilité minimum dépend des primes et des sinistres pour l'assurance non vie, et (principalement) des provisions mathématiques pour l'assurance vie.*

DEFINITION 5 (Ratio de solvabilité). *Rapport entre la marge de solvabilité constituée (ie les fonds propres) et la marge de solvabilité réglementaire minimum.*

Pour faire face à la fois aux variations de passif (hausse de la sinistralité, tarification pas assez prudente...) et d'actif (mouvements de marché défavorables), l'assureur doit constituer un certain niveau de fonds propres (la marge de solvabilité minimum), qui doit de plus être en permanence supérieur à un certain seuil (ratio de solvabilité $> 100\%$).

Ce calcul, jusqu'à alors très simple, est extrêmement différent sous la nouvelle directive Solvabilité II : la marge de solvabilité minimum dépendra alors de la structure propre du passif de chaque assureur, mais également de la structure de son actif.

1.2. Le rôle du régulateur

Un (ré)assureur est déclaré insolvable si son ratio de solvabilité devient inférieur à 100%. Dans ce cas, le régulateur est saisi et intervient de manière graduelle :

- (1) augmentation de capital et vente d'actifs
- (2) adossement à un autre groupe
- (3) si aucune autre solution n'est trouvée : retrait d'agrément, faillite et liquidation

Peu d'études ont été effectuées en Europe, les cas d'insolvabilité y étant relativement rares. En revanche les exemples ne manquent pas aux Etats-Unis où l'on recense plus de 700 cas d'insolvabilité d'assureurs depuis 1969. Une étude d'AM Best, reprise par [Massey *et al.*, 2002] et illustré par figure 2, montre que la majorité de ces défaillances provient de difficultés sur le passif (provisions sous évaluées, sous tarification...).

La forte sinistralité des catastrophes naturelles aux Etats-Unis explique également l'importance de ces faillites. L'ouragan Andrew en 1992 a ainsi entraîné la faillite de 12 assureurs et réassureurs !

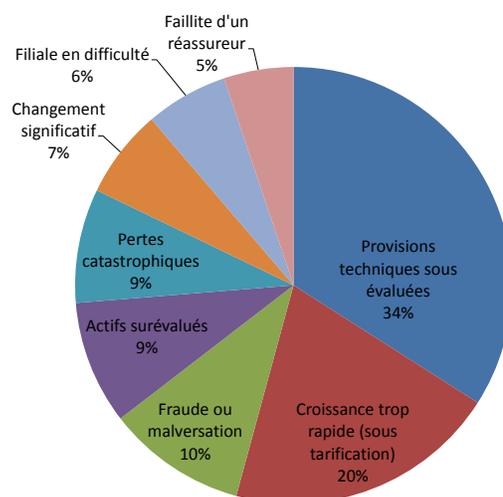


FIGURE 2. Répartitions des causes d'insolvabilité sur un échantillon de 426 assureurs américains entre 1969 et 1998

1.3. Des sauvetages lourds de conséquences

1.3.1. Groupama

Fin 2011, le ratio de solvabilité de Groupama est passé en dessous de 100% suite à des pertes de plus de 1,55 milliards d'Euros sur les obligations grecques et 1,5 milliards d'Euros sur des participations.

Une première recapitalisation par la Caisse des Dépôts et Consignation de 300 millions d'Euros a eu lieu fin 2011, préambule à la vente de nombreux actifs (figure 3) afin d'améliorer la santé financière du groupe.

En avril 2012, l'ACP alerte Groupama sur l'important sous-provisionnement de la P.R.E. dans sa filiale d'assurance vie, obligeant sa maison mère à effectuer une recapitalisation de 260 millions d'Euros [Echos, 2012]. Durant cette même année, le non paiement d'un coupon sur une obligation subordonnée entraîne la dégradation de la note de crédit de Groupama, catégorisée alors comme spéculative par Fitch.

Fin 2012, le groupe affichait une marge de solvabilité de 120%.



FIGURE 3. Actifs cédés par Groupama pour améliorer son ratio de solvabilité

1.3.2. GAN-CIC

Dans la fin des années 90, le Groupe des Assurances Nationales, filiale d'assurance du groupe GAN-CIC, doit faire face à des pertes records de plus de 5 milliards de francs, provenant notamment de ses filiales immobilières (U.I.C. et U.I.S.). Cette somme est alors supérieure à ses fonds propres, et l'assureur se retrouve en faillite virtuelle.

Les observateurs pointeront du doigt *l'aveuglement des autorités de contrôle, les déboires de l'immobilier et la gestion aventureuse du groupe* [Libération, 1998].

Après le feu vert de l'Europe, l'état français lance alors un plan de sauvetage de 20 milliards de francs (11 milliards de recapitalisation et 9 milliards de garantis [L'Humanite, 1997]) pour sauvegarder l'assureur, qui sera par la suite privatisé (condition imposée par l'Europe) et racheté par Groupama.

1.4. Des faillites avérées

1.4.1. EuropaVie

EuropaVie est le premier assureur vie à avoir été déclaré en faillite en France. Spécialiste des UC adossés à l'immobilier avec des taux garantis supérieur à 7%, la chute du marché parisien au milieu des années 1990 entraîne une dégradation rapide de sa solvabilité.

Il est déclaré en faillite en 1997.

Regroupant 7 000 assurés pour 70 millions d'Euros d'actifs, les pertes pour les assurés sont montées à 50% de leurs mises initiales. Deux ans plus tard, la FFSA et le GEMA décideront d'indemniser les victimes de Europavie à hauteur de 100% de la valeur effective de leurs contrats.

Cette faillite est à l'origine de la création du fonds de garantie des assurances de personne¹.

1.4.2. Equitable Life

Equitable Life, créée en 1762, est la plus ancienne mutuelle-vie au monde. En 1963, la compagnie démarre la vente de produits de retraite avec option de taux garantis, qui vont atteindre jusqu'à 7%.

Entre 1975 et 1993, Equitable Life ne passe aucune provision spécifique pour l'option de taux garanti, et ne souscrit aucun traité de réassurance ou de couverture sur ses actifs. En effet, les dirigeants pensaient pouvoir neutraliser le taux garanti en affectant un bonus final² proche de 0, leur permettant de servir un taux similaire au taux de marché.

En 1998, les premières plaintes des porteurs de ces garanties sont déposées devant la justice.

En 2000, la chambre des lords interdit à Equitable Life de moduler le bonus final, arguant que le taux maximum de 7% était présent sur la plaquette envoyée annuellement aux assurés ! Equitable Life se retrouve avec un passif supplémentaire de 1,5 Milliards de livres... La même année, le régulateur interdit tout nouveau contrat.

Le rapport [Penrose, 2004], commandé par le trésor britannique, met principalement en cause le management ainsi que l'actuariat d'Equitable Life. L'enquête du [Parlement européen, 2007] critiquera fortement le régulateur britannique ainsi que le gouvernement, l'exhortant à payer une partie des pensions dues par Equitable Life.

Prêt de 800 000 assurés ont perdu de l'argent dans l'affaire Equitable Life.



FIGURE 4. Les conséquences de la faillite d'Equitable Life

L'épisode Equitable Life est l'un des points de départ de la réforme Solvabilité II ([Commission européenne, 2009]).

1. Ce fonds garantit aujourd'hui les assurés des sociétés d'assurance vie à hauteur de 70 000 € pour l'épargne et 90 000 € pour les rentes en cas de faillite

2. Le taux de rémunération de la rente de retraite était égale à la somme du taux garanti et du bonus final

1.4.3. AIG

La faillite d'American International Group, ou plus exactement son sauvetage par l'état Américain, est sans aucun doute l'exemple le plus emblématique des faillites d'assureurs de ces dernières années.

Fortement impliqué sur les créances immobilières, et particulièrement sur la couverture de ces créances par des produits dérivés de type Credit Default Swap, la crise des subprimes va entraîner la chute d'AIG avec une violence et une rapidité inouïes.

AIG enregistrera quasiment 100 milliards de dollars de pertes en 2008. Sauvé de la faillite, la société a entrepris un vaste programme de cessions d'actifs.

Le gouvernement américain est aujourd'hui actionnaire d'AIG à 80%.

La crise des subprimes est le point de départ de la réforme bancaire Bâle III

CHAPITRE 2

Solvabilité II et Bâle III

2.1. Contexte

Les réglementations en vigueur au début des années 2000 (Bâle I pour les banques et Solvabilité I pour l'assurance) n'avaient pas été modifiées depuis une vingtaine d'années. La réforme Bâle II pour le secteur bancaire au niveau mondial, et la réforme Solvabilité II pour le secteur assurantiel au niveau de l'union européenne ont été lancées sur un socle commun il y a 15 ans.

Ces réformes ont un impact non seulement sur le niveau de solvabilité minimum requis pour les institutions financières (banques et assurances), mais également sur la qualité des fonds propres en couverture de ce niveau de solvabilité minimum. Elles ont ainsi permis l'émergence de nouveaux instruments permettant à ces institutions de renforcer leurs fonds propres grâce aux marchés financiers.

2.1.1. Le comité de Bâle

DEFINITION 6 (Comité de Bâle). Forum d'échanges ayant lieu à la Banque des Règlements Internationaux entre banquiers centraux et régulateurs où sont traités les sujets relatifs à la supervision bancaire. Son mandat est de renforcer la régulation, la supervision et les pratiques des banques en améliorant la stabilité financière mondiale.

En 1988, le comité élabore un ensemble de recommandations pour garantir un minimum de capitaux propres aux banques : il s'agit des accords de Bâle I. Le texte introduit le ratio Cooke qui impose un ratio de fonds propres minimal représentant 8% des crédits accordés par les banques. Le texte fut mis en place dans la plupart des pays de l'OCDE en 1992.

Au début des années 2000, il apparaît non satisfaisant d'imposer un niveau de fonds propres dépendant uniquement du volume de crédit accordé indépendamment de la qualité de crédit de l'emprunteur. Le comité de Bâle propose alors en 2004 de nouvelles recommandations (accords de Bâle II) et introduit un nouvel indicateur : le ratio McDonough.

Ce dernier impose toujours un niveau minimum de fonds propres mais dépendant cette fois-ci de la qualité de crédit de l'emprunteur. L'application réglementaire du texte fut compliquée en raison des divergences politiques entre les pays. Néanmoins la crise du secteur bancaire de 2008 a permis d'accélérer les événements, notamment au sein de l'Union Européenne, avec une adoption par l'ensemble des institutions de crédit en 2009.

La crise financière de la fin des années 2000 a été le point de départ de l'évolution de la réglementation bancaire vers les accords de Bâle III. Même si cette nouvelle

version garde le canevas de Bâle II, plusieurs évolutions font leur apparition comme la prise en compte du risque de liquidité, de l'effet de levier, des engagements hors bilan, ou encore la classification des fonds propres selon leur qualité.

L'application de cette nouvelle réforme devrait se faire graduellement entre 2013 et 2018.

2.1.2. Le trilogue européen et l'EIOPA

DEFINITION 7 (Trilogue européen). *Réunion tripartite informelle à laquelle participent des représentants du Parlement européen, du Conseil européen et de la Commission européenne.*

DEFINITION 8 (European Insurance and Occupational Pensions Authority). *L'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles est le régulateur européen du secteur de l'assurance chapeautant les régulateurs nationaux des pays membres de l'U.E. C'est également un organe consultatif auprès du trilogue européen. Ses missions vont de la protection des assurés à l'harmonisation des règles prudentielles et au soutien de la stabilité du système financier.*

Entrée en vigueur dans le milieu des années 1970 pour les assureurs, mutuelles et institutions de prévoyance, la directive Solvabilité I repose sur :

- Un provisionnement des engagements prudent, peu dépendant des conditions de marché, ainsi que des actifs sûrs, liquides et rentables en face de ces provisions.
- Un niveau de fonds propres minimum contrôlé par le régulateur.

Plusieurs faillites ou quasi-faillites d'assureurs européens (chapitre 1), l'évolution des normes bancaires et comptables (IFRS) ont fait prendre conscience d'une évolution nécessaire de la réglementation. Le secteur européen de l'assurance a donc lancé un vaste chantier de réforme prudentielle au début des années 2000 : Solvabilité II. Les origines détaillées de cette réforme sont remarquablement décrites dans le papier de [P., 2015].

L'EIOPA et le trilogue sont au coeur du processus d'élaboration de cette réforme qui, après de nombreux reports, sera finalement mise en application au 1er janvier 2016. Le calcul du niveau minimum de capital réglementaire dépend maintenant des risques propres de l'institution, aussi bien à l'actif qu'au passif. Autre nouveauté importante pour les assureurs français : la valorisation des actifs et des passifs pour le calcul des fonds propres s'effectue en valeur de marché dans Solvabilité II. Les équilibres du bilan se trouvent considérablement modifiés par cet impact comme l'illustre la figure 1.

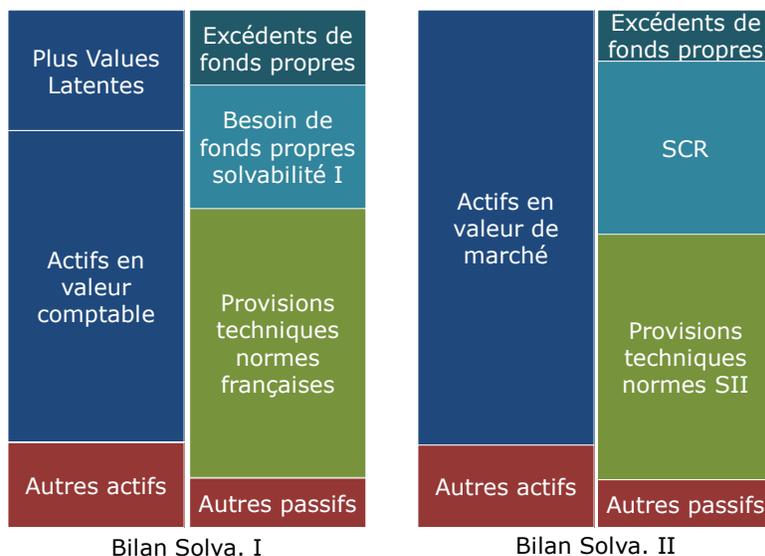


FIGURE 1. Comparaison des bilans Solvabilité I et II

2.2. Une approche commune

2.2.1. Origine et objectif

Comme l'explique le document de [RE, 2006], l'objectif des accords de Bâle est de renforcer la stabilité du système bancaire international en limitant la prise de risque excessive par les banques et en empêchant ainsi le passage des difficultés d'un établissement à l'économie réelle.

La réforme Solvabilité II vise quand à elle la protection du consommateur final afin d'éviter les conséquences dramatiques de la faillite d'un assureur comme Equitable Life. Il s'agit d'une démarche propre à l'union européenne, qui a été reprise avec la même philosophie en Suisse avec le Swiss Solvency Test.

Ainsi Solvabilité II cible tous les assureurs de l'union européenne alors que Bâle III est dirigé principalement vers les grandes banques internationales.

2.2.2. Trois piliers

2.2.2.1. Pilier I : les exigences quantitatives

L'objectif de ce pilier est de définir les méthodologies de calculs des fonds propres minimum réglementaires (banque et assurance) mais également le calcul des provisions techniques (assurance).

La réforme bancaire introduit le ratio de McDonough, qui prend en compte les risques de crédits, de marché et opérationnels de la banque dans le calcul des fonds propres réglementaires.

Solvabilité II introduit le Solvency Capital Requirement (SCR), incorporant l'ensemble des risques liés à la compagnie, ainsi que le Minimum Capital Requirement (MCR) plus proche du niveau de fonds propres Solvabilité I.

Dans les deux cas, les institutions ont le choix entre des méthodes standards, fournies par le régulateur, ou bien des méthodes internes développées par l'entreprise.

2.2.2.2. *Pilier II : la gouvernance et le processus de contrôle*

Au delà des calculs quantitatifs imposés par le régulateur dans le pilier I, les réformes imposent la mise en place d'une politique de suivi interne des risques et de la solvabilité. Cela signifie pour chaque entité de devoir aller au delà des calculs du pilier I en identifiant et en quantifiant les éventuels risques non pris en compte dans le pilier I. Dans Solvabilité II, on parle de l'Own Risk and Solvency Assessment (O.R.S.A.) pour désigner l'ensemble des processus à mettre en place pour répondre aux exigences du pilier II.

2.2.2.3. *Pilier III : la communication au superviseur et au public*

Le pilier III oblige les institutions soumises à la réglementation à communiquer au régulateur un certain nombre d'états réglementaires sur une fréquence annuelle ou trimestrielle. Ces états seront alors traités par un régulateur commun afin que celui-ci dispose d'une vision globale et précise des institutions dont il a la charge. Le régulateur français (l'A.C.P.R.) régule depuis peu les banques et les assurances de l'hexagone. Au niveau européen c'est l'E.I.O.P.A. qui a la charge des assurances et l'E.B.A. (ainsi que la B.C.E.) des banques.

2.3. De nouvelles catégories de fonds propres

La marge de solvabilité minimum requise par le régulateur est donc mise en regard des fonds propres de l'institution. Les réformes prudentielles introduisent plusieurs classifications de fonds propres pouvant être comptabilisés dans ce ratio de solvabilité.

2.3.1. **McDonough, SCR et MCR**

Nous présentons ici succinctement les grands principes de calculs des niveaux de fonds propres réglementaires des établissements financiers.

2.3.1.1. *Fonds propres réglementaires bancaires*

Le ratio de solvabilité bancaire, ou encore ratio McDonough, est défini dans Bâle III par le rapport entre les fonds propres de l'institution et les éléments suivants :

- (1) Risque de crédit : volume de crédit octroyé pondéré par le risque de défaut
- (2) Risque de marché : absorption de choc de marché (hausse des taux,...)
- (3) Risque opérationnel : défaillance interne

La somme de ces trois éléments est également appelé actifs risqués pondérés ou Risk Weighted Asset (RWA). On a donc

$$(2.3.1) \quad \text{McDonough} = \frac{\text{Fonds propres}}{\text{RWA}}$$

2.3.1.2. *Fonds propres réglementaires assurantiels*

Solvency Capital Requirement

Le SCR représente un montant de fonds propres à détenir calculé comme la somme corrélée d'un ensemble de stress test sur les grands facteurs de risques à l'actif comme au passif : taux, action, longévité, mortalité... L'intensité du stress est calibré

(pour la formule standard) à partir d'une valeur at risk à 99,5% à un an sur le phénomène considéré. Le SCR représente le capital cible nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur (ou plusieurs simultanément).

Minimum Capital Requirement

Le MCR représente le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle sera automatique et pourra entraîner le retrait de l'agrément de l'entreprise.

MCR et SCR représentent des montants de fonds propres à détenir et peuvent donc être exprimés en euros. Cependant, on parle également de SCR ou de MCR en parlant du ratio $\frac{\text{Fonds propres constitués}}{\text{SCR (MCR)}}$. Un assureur ayant un ratio SCR de 200% couvrira donc 2 fois le montant de SCR requis avec ses fonds propres.

2.3.2. La notion de Tier

2.3.2.1. Sous Bâle III

Depuis les accords de Bâle I, les fonds propres des institutions financières sont répartis en trois catégories, classés par ordre de solidité : Tier 1, Tier 2 et Tier 3.

Le capital Tier 1 est la principale mesure de la solidité financière d'une banque. Il se décompose lui même en deux poches :

- (1) le capital social appelé Core Tier 1
- (2) le capital supplémentaire composé de certains titres hybrides émis par les banques (Additional Tier 1).

Le capital Tier 2 représente le capital "supplémentaire" comme les plus values latentes, d'autres titres hybrides ou certaines dettes subordonnées .

Le capital Tier 3 englobe les fonds propres n'appartenant pas à une des deux catégories précédentes.

La couverture du niveau minimum de fonds propres requis dépend directement de la classification des fonds propres considérés :

- Ratio McDonough > 8% avec un minimum de 4,5% de Tier 1 et un maximum de 3,5% de Tier 2 en 2013
- Ratio McDonough > 10,5% avec un minimum de 6% de Tier 1 et un maximum de 2% de Tier 2 en 2019

Au delà du ratio de capital réglementaire total (ratio McDonough), les ratio Core Tier 1 et Tier 1 sont également étudiés avec attention.

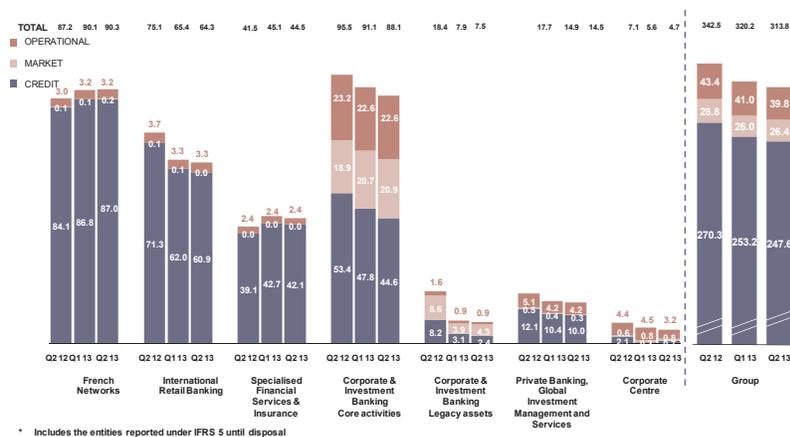
Le livre blanc de [Accenture, 2013] décrit précisément la répartition du capital sous Bâle III et les différentes évolutions à venir pendant la phase transitoire entre 2013 et 2019.

L'exemple Société Générale

Le rapport 2013 de [Générale, 2013] permet de visualiser concrètement la couverture des fonds propres du groupe dans l'univers Bâle III.

5.6.2 Extract from the presentation dated August 1, 2013: Second quarter 2013 results (and supplements)

BASEL 2.5 (CRD3) RISK-WEIGHTED ASSETS* (in EUR bn)



PRUDENTIAL CAPITAL RATIOS BASEL 2.5

In EUR bn	31 Mar. 13	30 June 13
Shareholder equity group share	49.9	49.4
Deeply subordinated notes*	(5.3)	(4.5)
Undated subordinated notes*	(1.6)	(1.6)
Dividend to be paid & interest on subordinated notes	(0.8)	(0.6)
Goodwill and intangibles	(7.8)	(7.6)
Non controlling interests	3.2	3.2
Deductions and other prudential adjustments	(3.9)	(3.5)
Core Tier 1 capital	33.8	34.9
Additional Tier 1 capital	5.9	5.1
Tier 1 capital	39.8	40.0
Tier 2 capital	4.4	5.3
Total Basel 2 Capital (Tier 1 and Tier 2)	44.1	45.3
RWA	320.2	313.8
Core Tier 1 ratio	10.6%	11.1%
Tier 1 ratio	12.4%	12.7%
Total capital ratio	13.8%	14.4%

* Excluding issue premiums on deeply subordinated notes and on undated subordinated notes
Basel 2 including CRD3 requirements

FIGURE 2. Structure des fonds propres du groupe Société Générale

Comme nous le montre la figure 2, le ratio McDonough du groupe au 31 mars 2013 est égal à :

$$(2.3.2) \quad \text{McDonough}_{SG} = \frac{\text{Total Basel 2 Capital}}{\text{RWA}} = \frac{44,1}{320,2} = 13,8\%$$

De manière similaire, on peut retrouver les ratios Core Tier 1 et Tier 1.

2.3.2.2. Sous Solvabilité II

La directive Solvabilité II considère les fonds propres économiques, composés des fonds propres de base et des fonds propres auxiliaires. Le rapport de [ACP, 2011] sur le QIS 5 nous fournit des définitions précises de ces deux types de fonds propres :

DEFINITION 9 (Fonds propres de base). *Les fonds propres de base sont égaux à la différence entre actifs et passifs (diminué du montant de ses propres actions détenu par l'entreprise), augmentés des dettes subordonnées.*

DEFINITION 10 (Fonds propres auxiliaires). *Les fonds propres auxiliaires sont des éléments de fonds propres qui peuvent être appelés pour absorber des pertes. Les fonds propres auxiliaires font l'objet d'un processus d'autorisation par le superviseur. Ils sont notamment constitués de la fraction non versée du capital social, des lettres de crédit, des garanties ou de tout autre engagement juridiquement (réassurance, rappel de cotisations...).*

Chaque constituant de ces fonds propres est de plus classé parmi 3 catégories : Tier 1, Tier 2 et Tier 3 dépendant de la qualité de ces derniers en fonction des critères suivants :

- disponibilité
- degré de subordination
- permanence ou durée d'existence.

La classification des fonds propres sous Solvabilité II est synthétisée dans le tableau 1.

Qualité	Fonds propres de base	Fonds propres auxiliaires
Elevée	Tier 1	Tier 2
Moyenne	Tier 2	Tier 3
Basse	Tier 3	-

TABLE 1. Classification des fonds propres sous Solvabilité II

De plus, comme dans les accords de Bâle, l'éligibilité des fonds propres en couverture du capital réglementaire requis (SCR et MCR) dépend de leur classification :

- SCR : 50% minimum de Tier 1, 35% maximum de Tier 2 et 15% maximum de Tier 3
- MCR : 80% minimum de Tier 1, 20% maximum de Tier 2 et aucun Tier 3

La figure 3 schématise les possibilités de couverture des fonds propres sous Solvabilité II.

2.4. Capital hybride d'un assureur sous Solvabilité II

DEFINITION 11 (Dettes Senior). *Une dette senior est une dette qui sera remboursée en priorité en cas de faillite de l'émetteur.*

DEFINITION 12 (Dettes subordonnées). *Une dette subordonnée est une dette qui sera remboursée après les dettes seniors en cas de faillite de l'émetteur.*

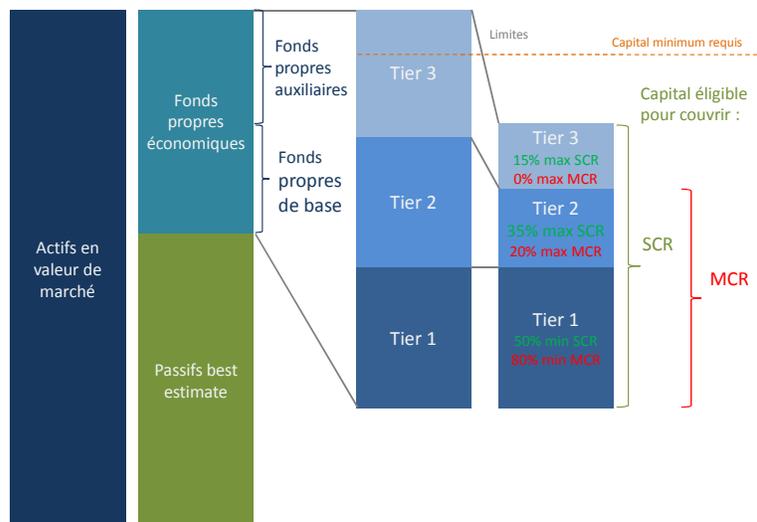


FIGURE 3. Représentation des fonds propres Solvabilité II

La directive Solvabilité II prévoit plusieurs catégories de fonds propres. Chaque catégorie peut être utilisée en couverture du SCR ou du MCR en fonction de ses caractéristiques et selon certaines limites quantitatives.

Ainsi, l'assureur n'est pas obligé d'avoir recours à une augmentation de capital pour augmenter ses fonds propres. Il peut en effet émettre des obligations subordonnées. Ces obligations offriront un rendement supplémentaire à leur détenteur en échange d'un risque plus grand par rapport aux obligations seniors.

La classification d'un titre dans les fonds propres Tier 1 ou Tier 2 dépend de critères précis liés aux caractéristiques du titres.

2.4.1.1. Fonds propres Tier 2

L'étude de [Slaughter et May, 2013], elle-même basée sur les mesures d'implémentation de niveau 2 de l'EIOPA, reprend les critères d'éligibilité pour qu'un titre soit classifié Tier 2 sous Solvabilité II, sous réserve de modifications ultérieures de la directive.

2.4.1.1.1. Maturité et rachat anticipé

Le titre doit avoir une maturité d'au moins 10 ans à l'émission. De plus l'accord du régulateur est requis pour un rachat anticipé, qui ne doit pas survenir avant les 5 premières années suivant l'émission.

2.4.1.2. *Pas d'incitation à un rachat anticipé*

Le rachat ou le remboursement anticipé doit être possible uniquement sur initiative de l'émetteur. Les caractéristiques du titre ne doivent pas augmenter la probabilité d'exercice de cette option de rachat ou de remboursement.

2.4.1.3. *Paiement des intérêts*

L'émetteur a la possibilité de suspendre le paiement des intérêts si celui-ci entraîne son insolvabilité (SCR ou MCR). Cette suspension peut être annulée par le régulateur s'il estime que la paiement n'entraîne pas une insolvabilité (SCR ou MCR) de l'émetteur. A ce stade il n'est pas encore clairement défini s'il s'agit d'une annulation ou d'un décalage du paiement.

2.4.1.4. *Remboursement du capital*

L'émetteur a la possibilité de suspendre le remboursement du capital si celui-ci entraîne son insolvabilité (SCR ou MCR). Cette suspension peut être annulée par le régulateur s'il estime que la paiement n'entraîne pas une insolvabilité (SCR ou MCR) de l'émetteur.

2.4.2. **Fonds propres Tier 1**

Les fonds propres Tier 1 représentent les fonds propres les plus durs sous Solvabilité II. Ils incluent par exemple le capital social mais également certaines obligations respectant notamment :

2.4.2.1. *Maturité et rachat anticipé*

Le titre doit avoir une maturité d'au moins 30 ans à l'émission. De plus, l'accord du régulateur est requis pour un rachat anticipé, qui ne doit pas survenir avant la 5ème année suivant l'émission.

2.4.2.2. *Pas d'incitation à un rachat anticipé*

Le rachat ou le remboursement anticipé doit être possible uniquement sur initiative de l'émetteur. Les caractéristiques du titre ne doivent pas augmenter la probabilité d'exercice de cette option de rachat ou de remboursement.

2.4.2.3. *Paiement des intérêts*

L'émetteur a la possibilité de suspendre et/ou d'annuler le paiement des intérêts sans contrepartie et sans que cela constitue un événement de défaut.

2.4.2.4. *Remboursement du capital*

L'émetteur a la possibilité de suspendre et/ou d'annuler le remboursement du capital si celui-ci entraîne son insolvabilité (SCR ou MCR). Cette suspension peut être annulée par le régulateur s'il estime que le paiement n'entraîne pas une insolvabilité (SCR ou MCR) de l'émetteur.

2.4.2.5. *Mécanisme d'absorption*

Le titre doit avoir une capacité d'absorption des pertes en cas de franchissement d'un déclencheur :

- le nominal peut être déprécié
- le titre peut être converti en action ordinaire

Le déclencheur doit s'activer si :

- le SCR chute en dessous de 75%
- le MCR chute en dessous de 100%
- le SCR reste inférieur à 100% sur une période supérieure à 3 mois.

Ainsi, le mécanisme d'absorption ne suffit pas pour qu'un titre puisse appartenir au capital Tier 1. Une obligation contenant une clause d'absorption des pertes mais qui n'aurait pas une maturité suffisante (ou bien sans clause de suspension de paiement des intérêts) pourrait être classée dans les fonds propres Tier 2.

Notons que dans le cas où le nominal serait déprécié, celle-ci peut être soit définitive, soit temporaire si l'établissement parvient à restaurer sa solidité financière.

De nombreux titres ont été émis par les assureurs européens ces dernières années pour pouvoir bénéficier de la "clause du grand-père" (*grandfathering*). Cette clause permet de pouvoir classer des titres émis sous Solvabilité I dans les fonds propres Tier 1 ou Tier 2 sous Solvabilité II.

La majorité prévoit une clause d'absorption des pertes dans le cas où l'insolvabilité de l'institution serait avérée. Les obligations CoCo ont pour rôle d'empêcher cela et doivent donc avoir un mécanisme de conversion avant l'insolvabilité.

Ainsi, l'unique classe d'actif de type obligataire pouvant être éligible aux fonds propres Tier 1 est l'obligation contingente convertible sous certaines conditions de maturité et de niveau de déclenchement.

CHAPITRE 3

Les obligations contingentes convertibles

3.1. Introduction

DEFINITION 13 (Obligation contingente convertible (CoCo)). *Instrument financier de type obligataire faisant l'objet, en cas de franchissement d'une certaine barrière (par exemple un niveau de capital réglementaire), d'une conversion en action ou d'une dépréciation du nominal.*

Les obligations contingentes convertibles sont apparues avec la réforme Bâle III. L'objectif de ces nouveaux produits était de renforcer les fonds propres des banques sans avoir à recourir à des augmentations de capital dilutives ou difficiles à mener dans un contexte de marché dégradé. Il s'agit donc avant tout d'une volonté du régulateur d'externaliser le risque de faillite des institutions bancaires.

Les obligations CoCo peuvent en effet être vues comme une forme de titrisation. Ce type de produit est très similaire aux obligations catastrophes (Cat Bonds) émises par les (ré)assureurs et dont le nominal est déprécié en cas de survenance, par exemple, d'une catastrophe naturelle déterminée dans une zone cible.

"In Europe, Solvency II hasn't come in yet. As a result there is no fixed risk-based solvency test so, from an investor's point of view, it is difficult to buy a CoCo instrument whose solvency event is not properly defined." [Risk.net, 2014]

Cantonné à l'origine au seul secteur bancaire, la mise en application prochaine de Solvabilité II devrait pousser les (ré)assureurs à se lancer sur ce marché.

3.2. Caractéristiques

3.2.1. Notations

- S^* niveau seuil du cours de l'action dans le cas d'un déclencheur de marché
- \bar{c} niveau seuil du ratio de solvabilité dans le cas d'un déclencheur comptable
- θ l'instant de survenance du déclencheur
- α la fraction de conversion, c'est à dire la proportion du nominale N qui sera convertie en action en cas de déclenchement. Dans les cas où la conversion est complète ($\alpha = 1$) on parle d'obligation CoCo complète.
- C_r le nombre d'actions sous-jacentes reçues en cas de conversion
- C_p le prix de conversion de l'action sous-jacente
- R_{CoCo} le taux de recouvrement de l'obligation CoCo

3.2.2. Les déclencheurs (ou triggers)

Le déclencheur d'une obligation CoCo est le signal qui va entraîner la conversion de l'obligation en action ou bien la dépréciation de son nominal. On note θ le

temps de survénance de ce déclencheur. Plusieurs options sont possibles pour le déclencheur et ce choix va avoir d'importantes conséquences en terme de valorisation et de classification dans les fonds propres.

3.2.2.1. *Déclencheur comptable*

Dans cette catégorie, un ratio comptable est utilisé comme indicateur de déclenchement. La majorité des obligations CoCo émises par les banques repose sur le ratio Tier 1 ou Common Equity Tier 1.

Solvabilité II prévoit ce type de mécanisme avec une conversion basée sur le SCR ou le MCR.

3.2.2.2. *Déclencheur de marché*

Il s'agit du déclencheur le plus présent dans la monde académique. L'idée ici est de déclencher la conversion de l'obligation en fonction d'une observation de marché :

- passage de la valeur de l'action de l'émetteur en dessous d'un seuil
- passage de la prime du CDS de l'émetteur au dessus d'un seuil
- ...

La première CoCo émise par Lloyd's en 2009 repose sur ce mécanisme.

3.2.2.3. *Déclencheur réglementaire*

La décision d'un régulateur national que l'institution est devenue non viable va déclencher le mécanisme de conversion. A notre connaissance, aucune CoCo ne possède ce mécanisme. Il apparaît cependant intéressant dans son approche.

3.2.2.4. *Multi déclencheurs*

Une combinaison de plusieurs facteurs : un propre à la compagnie et un autre propre à l'environnement économique général. Par exemple, Swiss Re a émis une obligation contingente convertible catastrophe en 2013. La conversion de cette obligation peut intervenir en cas de chute du ratio de Solvabilité ou bien de la survénance d'un certain type d'ouragan.

3.2.2.5. *Le meilleur choix ?*

Le déclencheur réglementaire peut rendre très long l'accès au capital pour la société, le temps que le régulateur rende son verdict. Ce type de déclencheur rend de plus encore plus subjective la valorisation du titre. Le risque pour l'émetteur est donc de devoir offrir un coupon élevé pour attirer les investisseurs.

Un déclencheur comptable a l'avantage de refléter parfaitement la nécessité d'une conversion. Le capital est de plus disponible immédiatement. En revanche, la faible fréquence de publication de tels indicateurs (au mieux de manière trimestrielle) rend compliqué la valorisation de tels produits.

Un déclencheur de marché a l'avantage de pouvoir être observable en permanence. Néanmoins une obligation peut se retrouver convertie en cas de période de stress des marchés (ou de manipulation) sans que l'émetteur ne soit en risque de solvabilité.

Parmi les nombreuses études menées afin de déterminer le meilleur choix de déclencheur, citons [Flannery, 0009] ou bien [Goodhart, 2010] qui estiment qu'un déclencheur de marché doit être privilégié tandis que [Von Furstenberg, 2011]

est de l'avis contraire.

Les réformes Bâle III et Solvabilité II imposent un déclencheur réglementaire pour l'appartenance au fonds propres Tier 1 ou Tier 2.

3.2.3. Le type de conversion

En cas de déclenchement du trigger, une obligation CoCo peut voir une fraction α de son nominal N :

- (1) être converti en un certain nombre d'action C_r
- (2) être déprécié d'une certaine fraction $1 - R_{CoCo}$, R_{CoCo} pouvant être égal à 0.

3.2.4. La conversion en action

Dans le cas d'une conversion en action, il reste à déterminer le nombre C_r et/ou le prix de conversion C_p des actions obtenues par ce mécanisme. Plusieurs schémas sont alors possibles :

Prix à la conversion

Le prix de conversion C_p est égal à la valeur de l'action au moment du déclenchement S_θ , c'est à dire au temps $t = \theta$. Le porteur reçoit alors $C_r = \frac{\alpha N}{S_\theta}$ actions. Le nombre d'action reçu n'est connu qu'au moment de la conversion.

Prix à l'émission

Le prix de conversion est déterminé à l'émission. Il peut être égal à la valeur de l'action S_0 au moment de l'émission au temps $t = 0$. Dans ce cas le porteur reçoit $C_r = \frac{\alpha N}{S_0}$. Le nombre d'actions reçu est connu dès l'émission.

Prix flooré

Le prix de conversion est égal au maximum entre la valeur de l'action S_θ au moment du déclenchement au temps $t = \theta$ et une valeur minimum S_{min} défini à l'émission. Le porteur reçoit alors $C_r = \frac{\alpha N}{\max(S_\theta, S_{min})}$ actions. Le nombre d'actions reçu n'est connu qu'au moment de la conversion.

Notons que dans tous les cas $C_p = \frac{\alpha N}{C_r}$.

De manière générale, les CoCo bancaires se basent sur le prix de l'action au moment de l'émission.

3.3. Le marché

3.3.1. Quelques chiffres

Il s'agit d'un marché récent, la première émission remontant à novembre 2009 par la banque britannique Lloyd's.

Cependant ce marché est actuellement porté par la nécessité pour les banques de renforcer leurs fonds propres, le volume d'émission (figure 1) a donc atteint un niveau historique de 45 milliards d'euros entre janvier et août 2014.

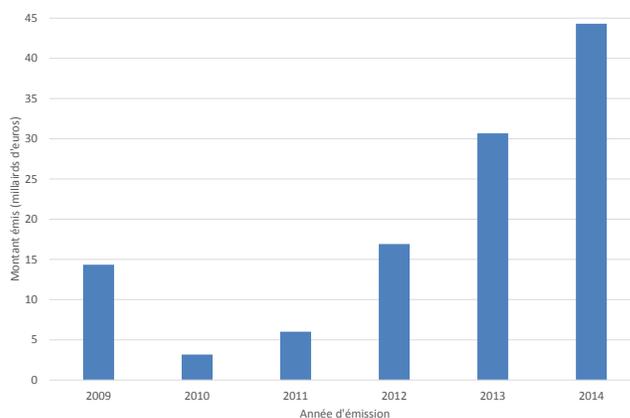


FIGURE 1. Volume d'émission des CoCo dans le monde
Source: Bloomberg

Il s'agit d'un marché avant tout européen comme le montre figure 2, fortement porté par la transposition de Bâle III au sein de l'union européenne.

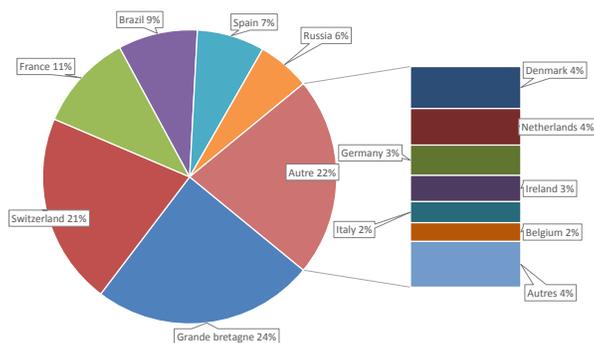


FIGURE 2. Répartition géographique des émissions de CoCo dans le monde
Source: Bloomberg

Les émetteurs européens ne se sont cependant pas cantonnés à l'euro comme devise d'émission, en effet une part non négligeable des émissions est libellée en dollar pour couvrir leurs activités internationales et attirer les investisseurs américains.

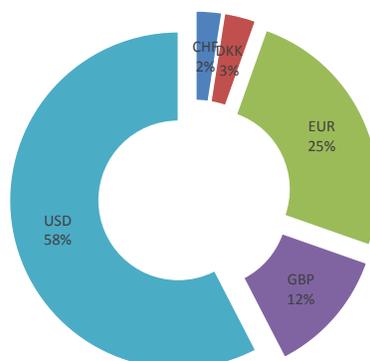


FIGURE 3. Répartition des émissions de CoCo dans le monde par devises

Source: Bloomberg

La majorité des émissions ont un déclencheur dit bas (low trigger) à 5% ou 5.125% sur le ratio CET1, de plus la conversion en actions est la règle majoritaire (tableau 1).

	Trigger 5%	Trigger 5.125%	Trigger 7%	Total
Conversion en action	35%	6%	14%	55%
Dépréciation temporaire	9%	8%	7%	25%
Dépréciation permanente	1%	18%	2%	21%
Total	45%	33%	23%	100 %

TABLE 1. Répartition des obligations CoCo en fonction du type de conversion et du niveau du déclencheur

3.3.2. Exemples d'émissions

La figure 4 permet de visualiser l'ensemble du marché européen des obligations CoCo. Les couleurs représentent la devise (€=vert, \$=bleu, £=violet), et la forme du point le type de conversion (rond = conversion en action, rectangle = dépréciation temporaire).

Nous présentons ci-dessous quelques exemples détaillés d'émissions récentes.

Société Générale

Titre émis en juin 2014 et classé dans les fonds propres AT1, son nominal est déprécié de façon non permanente (clause de retour à meilleure fortune, le nominal peut être recouvré en cas d'amélioration de la santé financière de la banque) en cas de déclenchement du trigger :

- Code : USF8586CXG25

- Trigger : Déclenchement si le Common Equity Tier 1 Ratio chute en dessous de 5,125%

Swiss Re

Emise en mars 2013, il s'agit de la première CoCo d'assureur. Le titre est classé dans les fonds propres supplémentaires (au sens du Swiss Solvency Test) et le nominal est déprécié de façon permanente en cas de déclenchement du trigger :

- Code : XS0901578681
- Coupon : 6,375%
- Maturité - Call : 01/09/2024 - 01/09/2019
- Trigger : Déclenchement si le Total Risk-Based Capital Ratio (SCR sous Solvabilité II) chute en dessous de 125%

Bien que le marché soit en voie de standardisation, chaque émission reste quasiment unique.

3.4. Intérêts pour l'émetteur et pour l'investisseur

Les obligations CoCo connaissent un succès indéniable depuis la première émission de la banque Lloyds en 2009. Ce succès est entretenu par la réglementation financière Bâle III et l'apparition des obligations CoCo Additional Tier 1, qui peuvent représenter jusqu'à 1,5% de l'actif pondéré par les risques des banques. Pour atteindre ce 1,5%, [**Société Générale Cross Asset Research, 2015**] estime le montant à émettre pour les banque européennes à 164 milliards d'euros, pour un montant émis aujourd'hui d'environ 94 milliards d'euros.

[**Henderson Global Investors, 2015**] compare ce montant au 250 milliards d'euros de gisement de la dette haut rendement des émetteurs non financiers européens.

La majorité des AT1 étant classée haut rendement par les agences de notation, la taille du marché semble trop important pour les seuls investisseurs traditionnels des titres obligataires spéculatifs.

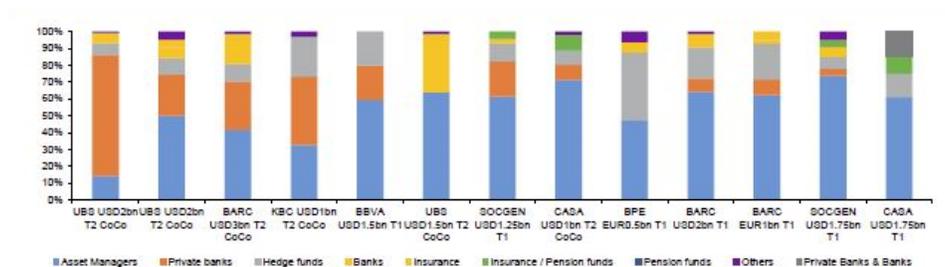


FIGURE 5. Répartition par type d'investisseurs à l'émission
Source: Crédit Agricole CIB

La figure 5 nous permet de de tirer plusieurs conclusions sur les investisseurs des AT1 :

- les gérants d'actifs traditionnels sont les principaux porteurs
- les hedge funds ne représentent qu'une petite partie

– les assureurs sont également porteurs d'AT1 en direct

En gardant en tête que les assureurs (au sens large, fonds de pension inclus) sont les principaux clients des gérants d'actifs, que les banques privées ne servent que d'intermédiaire avec leurs clients particuliers, nous pouvons en déduire que le risque n'est pas porté par les fonds spéculatifs, mais bien par les investisseurs traditionnels.

Les raisons du succès

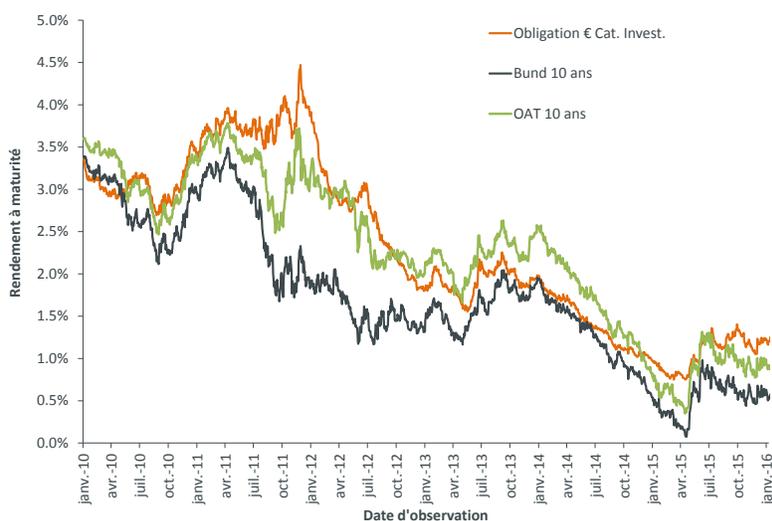


FIGURE 6. Evolution des taux de rendement des obligations d'états Allemand, Français, et d'entreprises de qualité investissement

Source: Bloomberg

Dans un univers de taux exceptionnellement bas, comme observé sur la figure 6, les émetteurs privés peuvent se financer sur le marché obligataire à un coût modeste. Les banques préfèrent ainsi émettre du quasi-capital sous forme d'obligations AT1, évitant ainsi d'émettre de nouvelles actions, ce qui aurait un impact défavorable sur le cours de bourse et mécontenterait les actionnaires existants.

Ces rendements proches de zéro sont également à mettre en relation avec les passifs des assureurs vie européens, qui peuvent être soumis à des taux garantis importants (allemande, pays-bas). Globalement, les assureurs doivent résoudre le problème suivant : comment obtenir du rendement avec des taux de référence si bas ?

Ils sont donc tentés d'augmenter le risque de leurs actifs, soit en augmentant la durée de ceux-ci, soit en investissant dans des émetteurs de moins bonne qualité

(haut rendement), voir les deux à la fois.

Dans ces conditions, les obligations CoCo sont apparues comme très intéressantes à leurs yeux : en effet un rendement affiché de 6,5% sur une AT1 Crédit Agricole (noté A par les agences de notation, soit le haut de la catégorie investissement), alors que la dette senior de ce même émetteur rapporte à peine 1% sur une maturité similaire, semble être un investissement judicieux en première analyse...

Des risques sous estimés

Les gérants d'actifs et assureurs détenteurs de ces papiers sont aujourd'hui protégés par la bienveillance du régulateur : en effet tant que le coussin de capital de 1,5% ne sera pas atteint, ce dernier sera tolérant et ne devrait pas imposer de suspensions de coupon. Cependant, une fois ce niveau atteint, les CoCo étant perpétuelles et dénuées de mécanismes d'incitation au rappel, les investisseurs devront être beaucoup plus prudent dans leur approche. La première alerte a déjà eu lieu : fin 2015, l'European Banking Authority s'est prononcée pour l'intégration du ratio SREP dans le Combined Buffer Requirement (CBR) (rappelons qu'un manquement au CBR peut potentiellement déclencher la suspension du coupon sur les AT1).

Même si le risque de conversion en capital de ces obligations apparaît lointain, nous pouvons nous interroger sur les conséquences d'une nouvelle crise bancaire majeure, et sur le déclenchement de plusieurs de ces conversions. Les assureurs détenteurs de ces papiers pourraient alors se retrouver à leur tour face à de fortes difficultés, et voir leurs (futurs) obligations Tier 1 être converties en capital... Les détenteurs de ces dernières étant certainement amenés à être également les assureurs, la crise ne serait cette fois ci pas cantonnée aux banques mais étendue à l'ensemble du secteur financier.

Deuxième partie

Modélisation des obligations
contingentes convertibles

Introduction

Une obligation CoCo est un titre hybride comportant une composante taux et une composante action. La recherche sur ce sujet a suscité de nombreux développements depuis le début des années 2000, néanmoins les résultats les plus intéressants reposent sur des publications récentes.

La valorisation de ces instruments est une problématique vaste et complexe qui fait intervenir de nombreuses facettes des mathématiques financières : dérivés actions, risque de crédit, notions comptables... Chaque émission ayant ses propres caractéristiques, il est compliqué de définir un seul modèle pour l'ensemble des titres, aucun consensus ne se dégageant parmi les acteurs du marché.

On peut classer les différentes approches en trois grandes familles (voir par exemple [Shang, 2013]) :

- (1) un **modèle à forme réduite** basé sur le risque de crédit et la modélisation de la conversion de l'obligation CoCo à partir d'un processus de Poisson
- (2) une approche **dérivé action** qui va utiliser des options à barrière pour répliquer les flux de l'obligation CoCo
- (3) un **modèle structurel** dans lequel le bilan de la firme va être modélisé en se basant sur le modèle de Merton

Nous présentons ici un aperçu de la littérature sur les deux premières familles avec des modélisations simples. Elles auront l'avantage d'aboutir sur des formules fermées peu précises mais qui pourront donner une première approche intéressante. Nous aborderons ensuite l'approche structurelle, qui se détache d'une approche purement financière et qui aura l'avantage de pouvoir être calibrée avec des données de marché et comptables.

Notations

Soit $X_N^c(t, T)$ la valeur à l'instant t d'un titre obligataire de maturité T versant les coupons $(c)_{t_i}$ aux temps $\{t_0, t_1, \dots, T\}$ et de nominal N .

Pour ce titre on note :

- $X_N^c(t, T) = X(t, T)$ s'il n'y pas de risque d'ambiguïté
- N son nominal.
- R son taux de recouvrement : il s'agit de la fraction de nominal que récupérera le porteur de l'obligation en cas de défaut de l'émetteur.
- F_{t_i} les flux distribués par le titre aux temps $\{t_0, t_1, \dots, T\}$
- ρ son rendement actuariel en t : $X(t, T) = \sum_{t_i} \frac{F_{t_i}}{(1+\rho)^{t_i}}$.

– $cs = \rho - r$ la prime de crédit du titre par rapport au taux sans risque r .

Soit $(r_t)_{t \in \{t_0, \dots, t_n\}}$ la courbe des taux sans risque, par exemple la courbe des rendements actuariels des obligations zéro coupon pour un émetteur considéré sans risque.

Soit $b(t, T)$ le facteur d'actualisation au taux sans risque (r_t) pour la période $[t, T]$ ($b(t, T) = e^{-r(T-t)}$ en actualisation continue à taux constant par exemple).

Soit S_t la valeur à l'instant t d'une action. On note :

- σ_t sa volatilité utilisée dans le modèle de Black & Scholes.
- q_t le taux de dividende

Formule générale d'évaluation d'une obligation CoCo

Notons $X_C(t, T)$ le prix d'une obligation CoCo ayant les mêmes caractéristiques (émetteur, subordination, coupon, nominal, maturité) qu'une obligation sans option de conversion $X(t, T)$. Notons que $X(t, T)$ intègre bien le même risque de crédit lié à l'émetteur de l'obligation CoCo, il ne s'agit pas d'une obligation sans risque. Nous reprenons les notations de la section 3.2.

Deux cas de figures se présentent alors :

- (1) Dans le cas où le déclenchement n'a pas lieu, le porteur de l'obligation CoCo X_C recevra des flux identiques à X .
- (2) En cas de déclenchement de la conversion à un instant θ , le détenteur de l'obligation CoCo ne percevra plus les coupons et ne sera plus remboursé de l'intégralité du nominal. Le porteur de l'obligation CoCo va par contre recevoir C_r actions à un prix de conversion C_p et valant S_θ sur le marché (chapitre 3).

On note $X(t, \theta)$ la valeur d'une obligation identique à $X(t, T)$ mais ne versant plus de flux après θ si $\theta \leq T$.

On peut donc écrire la formule d'évaluation générale de l'obligation CoCo :

$$(3.4.1) \quad X_C(t, T) = \mathbb{1}_{\{\theta > T\}} X(t, T) + \mathbb{1}_{\{\theta \leq T\}} [X(t, \theta) + b(t, \theta) C_r S_\theta]$$

La valeur de l'obligation CoCo en t sera alors donnée par $\mathbb{E}[X_C(t, T)]$.

Notons que le non remboursement du nominal et le non paiement des coupons en cas de conversion est pris en compte dans $X(t, \theta)$. De même, dans le cas d'une obligation CoCo sans conversion en action, on aura $C_r = 0$ et $X_C(t, T) = \mathbb{1}_{\{\theta > T\}} X(t, T) + \mathbb{1}_{\{\theta \leq T\}} X(t, \theta)$.

Modèles à forme réduite et dérivés action : une première approche

4.1. Quelques produits dérivés exotiques

Nous décrivons ici quelques produits dérivés sur action qui vont se révéler utiles pour valoriser les obligations CoCo. L'annexe A.4.1 fournit quelques rappels sur les options vanilles (call et put).

4.1.1. Quelques définitions

4.1.1.1. Options à barrière

Cette section se base principalement sur le chapitre 14 de [Portait et Poncet, 2003].

DEFINITION 14 (Option à barrière). *Une option à barrière aura une valeur à échéance identique à celle d'une option vanille, cependant l'exercice de l'option dépend du franchissement (ou du non franchissement) d'un seuil (la barrière) par le sous-jacent.*

Il existe donc deux types d'options à barrière :

- Les options à barrière activante (knock-in ou in) **sont inactives** tant que le cours de l'actif sous-jacent n'a pas atteint la barrière.
- Les options à barrière désactivante (knock-out ou out) **sont actives** tant que le cours de l'actif sous-jacent n'a pas atteint la barrière.

De plus, cette barrière peut être atteinte soit par la hausse soit par la baisse du sous-jacent :

- Une barrière est dite Up si elle est atteinte par la hausse du cours du sous-jacent
- Une barrière est dite Down si elle est atteinte par la baisse du cours du sous-jacent

Partant de ces définitions, on peut ainsi définir 8 types d'options à barrières : $\{\text{Call, Put}\} \times \{\text{In, Out}\} \times \{\text{Up, Down}\}$

4.1.1.2. Options digitales à barrière

Comme dans le cas des options vanilles, les options à barrière peuvent être de type digitales (annexe A.4.1). On distingue alors le cas où le paiement est reçu au moment du franchissement (at hit) et celui où le paiement est reçu à maturité (at expiry).

Le paiement au franchissement (at hit) existe uniquement pour les options activantes (In), et il n'y a dans ce cas pas de distinction entre call et put. Les autres options digitales à barrière ont leurs éventuels payoff à maturité T , et peuvent faire intervenir un strike K (sans que cela soit obligatoire).

4.1.2. Option Digitale Down and In at Expiry

Intéressons nous à l'option digitale down and in at expiry (DI_d^e) sur le sous-jacent S , de maturité T et de barrière L : il s'agit d'une option dont le payoff sera égal à :

- 1 en T (en τ dans le cas d'une option at hit) si l'actif sous-jacent franchit (In) à la baisse (Down) la barrière avant la maturité de l'option : $\exists \tau < T$ tel que $S_\tau < L$
- 0 sinon

Ainsi la valeur de l'option digitale down and in at expiry est égale à la valeur actuelle de la probabilité de franchissement de la barrière avant T

$$DI_d^e(S, T, L) = e^{-rT} \mathbb{P}_{\{\tau < T\}}$$

avec $\tau = \min_{t \leq T} \{S_t < L\}$

En se plaçant dans le modèle de Black & Scholes, [Portait et Poncet, 2003] montre que la formule d'évaluation de l'option digitale down and in at expiry est :

(4.1.1)

$$DI_d^e(S, T, L) = e^{-rT} \mathbb{P}_{\{\tau < T\}} = e^{-rT} \left[\phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) + \left(\frac{L}{S} \right)^{\frac{2(r - q - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right]$$

(4.1.2)

La figure 1 illustre cette formule pour plusieurs niveaux de volatilité.

4.1.3. Call Down and In

Un call down and in at expiry (CDI) dépend d'un sous-jacent S , d'une maturité T , d'une barrière L et d'un strike K . Il s'agit d'un call vanille classique sur S de strike K et de maturité T qui ne sera activé qu'en cas de franchissement par S de la barrière L à la baisse. Son payoff est égal à :

- $S_T - K$ en T si $S_T > K$ et $\exists \tau \leq T$ tel que $S_\tau \leq L$
- 0 sinon

En se plaçant dans le modèle de Black & Scholes, [Portait et Poncet, 2003] montre que la formule d'évaluation du call down and in est (pour $K > L$) :

(4.1.3)

$$CDI(S, T, K, L) = S e^{-qT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r - q + \frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L^2}{SK}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - K e^{-rT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r - q - \frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L^2}{SK}) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

La figure 2 illustre cette formule pour plusieurs niveaux de volatilité.

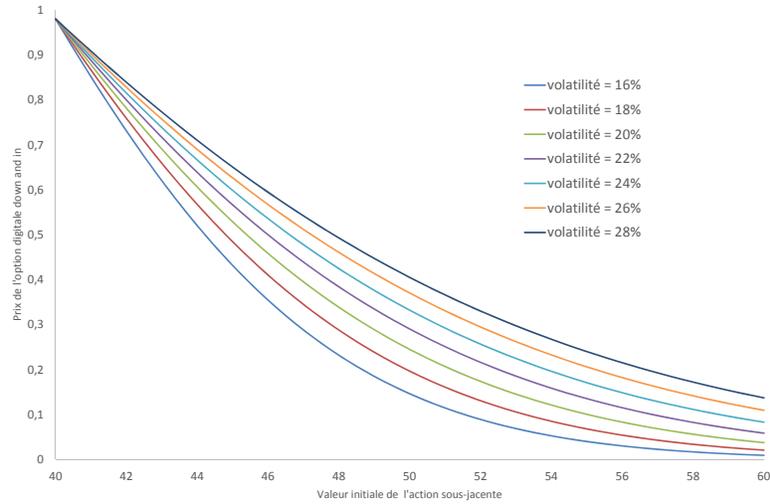


FIGURE 1. Valeur de $DI_d^e(S, T = 1 \text{ an}, L = 40)$ en fonction de S pour plusieurs volatilités σ . $r = 2\%$, $q = 0$

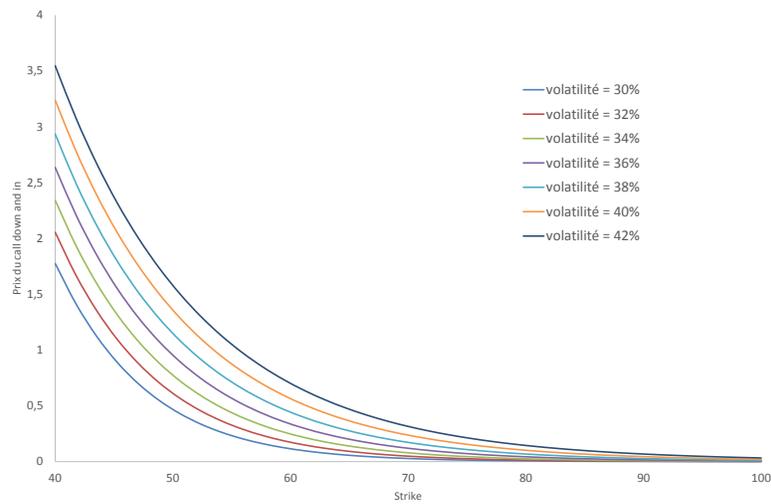


FIGURE 2. Valeur de $CDI(S = 50, T = 1 \text{ an}, K, L = 40)$ en fonction de K pour plusieurs volatilités σ . $r = 2\%$, $q = 0$

4.1.4. Put Down and In

De manière similaire au call down and in vu précédemment, un put down and in (*PDI*) dépend d'un sous-jacent S , d'une maturité T , d'une barrière L et d'un strike K . Il s'agit d'un put vanille classique sur S de strike K et de maturité T qui ne sera activé qu'en cas de franchissement par S de la barrière L à la baisse. Son payoff est égal à :

- $K - S_T$ en T si $S_T < K$ et $\exists \tau \leq T$ tel que $S_\tau \leq L$
- 0 sinon

En se plaçant dans le modèle de Black & Scholes, [Portait et Poncet, 2003] montre que la formule d'évaluation du put down and in est (pour $K > L$) :

(4.1.4)

$$\begin{aligned}
 PDI(S, T, K, L) = & Ke^{-rT} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) - (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
 & - Se^{-qT} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) - (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
 & + Se^{-qT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r-q+\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L^2}{SK}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
 & - Ke^{-rT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r-q-\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L^2}{SK}) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
 & + Ke^{-rT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r-q-\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) + (r - q - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
 & - Se^{-qT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r-q+\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right)
 \end{aligned}$$

La figure 3 illustre cette formule pour plusieurs niveaux de volatilité.

Remarques :

- Si $L \geq K$, alors le put down and in devient un simple put vanille, l'existence de τ étant assuré automatiquement $S_T < K \leq L$ ($\tau = T$)
- Si $L = K$, la formule d'évaluation de $PDI(S, T, K, L)$ se ramène à celle d'un put vanille

4.1.5. Forwards à barrière

De manière similaire aux options à barrières, il est possible d'ajouter une close de déclenchement pour les contrats forwards (un rappel sur ce type de contrat est disponible dans l'annexe A.4.3).

Dans le cas d'un tel contrat, en cas de franchissement d'une certaine barrière L par un sous-jacent S , le détenteur de ce contrat forward à barrière se trouvera avec une position longue sur un forward vanille.

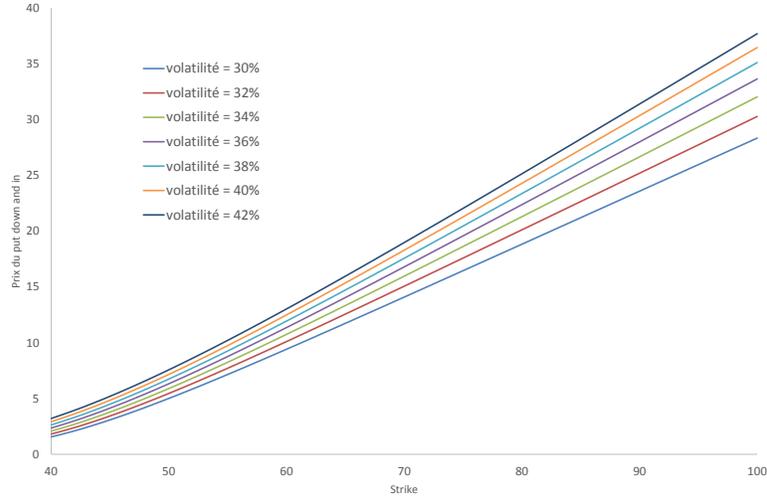


FIGURE 3. Valeur de $PDI(S = 50, T = 1 \text{ an}, K, L = 40)$ en fonction de K pour plusieurs volatilités σ . $r = 2\%$, $q = 0$

Un forward Knock-In est un forward à barrière de type down-and-in, il s'agit donc d'un contrat forward qui sera activé uniquement si le prix du sous-jacent franchit la barrière à la baisse. Son payoff est égal à

- $S_T - K$ en T si $\exists \tau \leq T$ tel que $S_\tau \leq L$
- 0 sinon

On remarque que la relation de parité Call-Put dans le cas vanille (Forward = Call - Put) s'établit entre forwards à barrière et les options à barrière que nous avons vu précédemment. Un forward Knock-In à barrière est égal à la combinaison d'une position longue sur un call down and in (section 4.1.3) et une position courte sur un put down and in (section 4.1.4) : $FKI(S, T, K, L) = CDI(S, T, K, L) - PDI(S, T, K, L)$. Après simplification, la formule d'évaluation de cet instrument est :

$$\begin{aligned}
FKI(S, T, K, L) &= CDI(S, T, K, L) - PDI(S, T, K, L) \\
&= Se^{-qT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r-q+\frac{\sigma^2}{2})/T} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) + (r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
&\quad - Ke^{-rT} \left(\frac{L}{S} \right)^{2(r-q-\frac{\sigma^2}{2})/T} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) + (r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
&\quad + Se^{-qT} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) - (r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
&\quad - Ke^{-rT} \phi \left(\frac{\ln(\frac{L}{S}) - (r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right)
\end{aligned}$$

La figure 4 illustre cette formule pour plusieurs niveaux de volatilité.

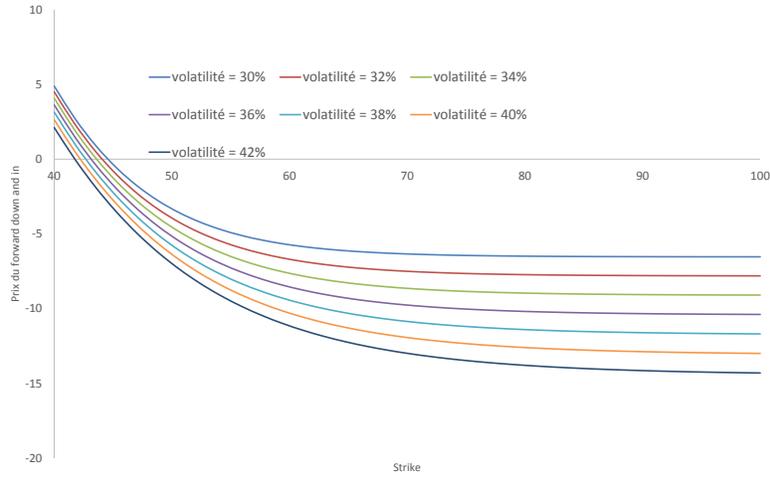


FIGURE 4. Valeur de $FKI(S = 50, T = 1 \text{ an}, K, L = 40)$ en fonction de K pour plusieurs volatilités σ . $r = 2\%$, $q = 0$

4.2. Modèle à forme réduite

L'objectif de cette partie est de s'inspirer des modèles utilisés dans l'évaluation de la probabilité de défaut de l'émetteur. Cette description se base principalement sur [De Spiegeleer et Schoutens, 2011] et [HyeYoon, 2012]

4.2.1. Modèle de crédit

4.2.1.1. Processus de Poisson

Définition

Soit T_1, \dots, T_n les temps de survenance d'un événement. Notons $N_t = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{T_i \leq t}$ le nombre de survenance de ces événements dans l'intervalle $[0, t]$.

Si les T_i forment une série de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi exponentielle de paramètre λ (annexe A.1.1), alors $N = (N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ . De plus les accroissements de N sont indépendants et suivent une loi de Poisson (annexe A.1.3) :

$\forall n \geq 1, \forall (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$

– $(N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ sont des variables aléatoires indépendantes

– $\forall i \in \{1, \dots, n\}, N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$

Notons que $N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)$.

Un processus bien connu

De manière intuitive, le processus de Poisson permet de modéliser simplement des phénomènes de comptage d'événements entre deux instants.

Un exemple classique consiste à vouloir compter le nombre de personnes arrivant dans une file d'attente entre les instants 0 et T : dans ce cas N_T représentera ce nombre de clients. La figure 5 montre une trajectoire d'un processus de poisson.

Le processus de Poisson est un classique des mathématiques actuarielles (comptage du nombre de sinistres), mais également des mathématiques financières (risque de crédit).

4.2.1.2. Triangle de crédit

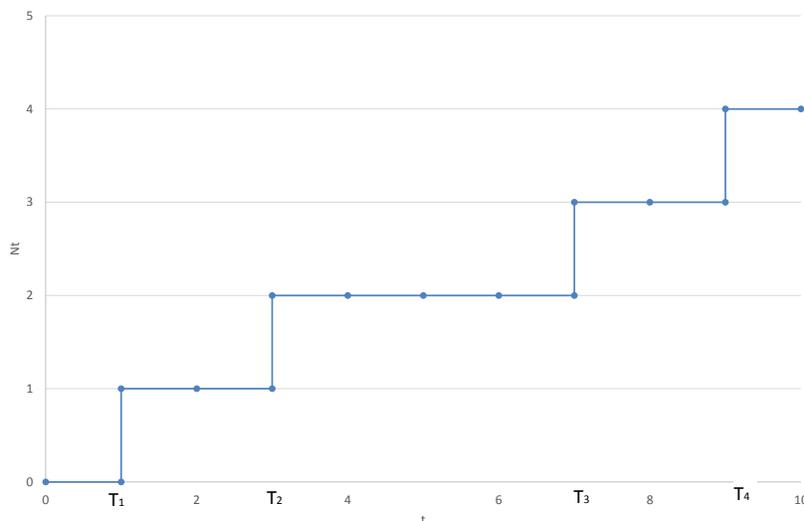
La prime de crédit d'une obligation correspond au surplus de rendement demandé par un investisseur pour compenser le risque de défaut de l'émetteur.

Cette prime se calcule donc comme l'écart entre le rendement de l'obligation et le taux "sans risque". La notion de taux sans risque a été remise en question depuis la crise financière de 2011 et l'endettement record actuel des Etats. Néanmoins dans le cas des obligations de la zone euro, le taux sans risque est toujours considéré comme étant celui de l'obligation de l'état allemand correspondante.

On rappelle la formule du triangle de crédit liant la prime de crédit cs d'une obligation de maturité T à sa probabilité de défaut p et son taux de recouvrement R ([Portait et Poncet, 2003] Chapitre 5 Annexe 1) :

$$(4.2.1) \quad cs(t) \approx (1 - R)p(t)$$

Cette approche très simple permet une première modélisation du risque de crédit en faisant le lien entre la probabilité de défaut de l'émetteur et le rendement de l'obligation (égal à la somme du taux sans risque et de la prime de crédit cs). En définissant R et p , on pourra ainsi avoir une première estimation du rendement de l'obligation.

FIGURE 5. Exemple de trajectoire de N_t avec saut en T_1, T_2, T_3 et T_4

4.2.1.3. Modélisation du défaut

Probabilité de défaut

Dans un modèle de crédit classique, on définit le défaut de l'émetteur d'un titre (ie le non remboursement de ses dettes) comme l'instant du premier saut d'un processus de poisson N d'intensité λ . Ce défaut intervient donc à l'instant $\tau = T_1$ d'après la définition.

La probabilité de survie jusqu'au temps t est donnée par $\mathbb{P}(\tau \geq t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$, la probabilité de défaut est donc :

$$(4.2.2) \quad \mathbb{P}(\tau < t) \stackrel{def}{=} p(t) = 1 - e^{-\lambda t} \frac{1}{T-t}$$

Formule fermée

En combinant la formule du triangle de crédit (équation (4.2.1)) et notre modèle de défaut (équation (4.2.2)), on obtient :

$$(4.2.3) \quad cs(t) \approx (1-R)p = (1-R)(1 - e^{-\lambda(T-t)}) \frac{1}{T-t} \approx (1-R)\lambda$$

en utilisant l'approximation $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \approx 1 + x$ pour x petit.

4.2.2. Application aux obligations CoCo

Afin d'appliquer cette approche aux obligations CoCo, nous allons chercher non pas à modéliser le temps du défaut τ mais le temps de déclenchement du trigger θ .

Nous utilisons pour θ un processus de poisson $\mathcal{P}(\lambda_{Trigger})$. En se basant sur l'équation (4.2.3), on pourra déterminer la prime de conversion de l'obligation CoCo par la formule :

$$(4.2.4) \quad cs_{Conv} \approx (1 - R_{CoCo})\lambda_{Trigger}$$

En ajoutant cette prime à la prime de crédit d'une obligation similaire cs_{Sim} sans clause de conversion, on obtiendra la prime de crédit globale de l'obligation CoCo.

$$(4.2.5) \quad cs_{CoCo} \approx (1 - R_{CoCo})\lambda_{Trigger} + cs_{Sim}$$

4.2.2.1. Estimation de la perte

Afin de pouvoir exploiter l'équation (4.2.5), il est nécessaire de déterminer le taux de recouvrement R_{CoCo} d'une telle obligation. Indépendamment du type de conversion, la perte $(1 - R_{CoCo})$ pour le porteur en cas de conversion est égale à :

$$(4.2.6) \quad 1 - R_{CoCo} = N - C_r S_\tau = N - \frac{N}{C_p} S_\tau = N \left(1 - \frac{S_\tau}{C_p}\right)$$

Ainsi

$$(4.2.7) \quad R_{CoCo} = \frac{S_\tau}{C_p}$$

Remarques

- Si le prix de conversion est fixé au prix de l'action au moment du déclencheur, alors le porteur ne subit aucune perte ($C_p = S_\tau$).
- Si l'obligation CoCo n'est pas convertie en action mais que le nominal est déprécié avec un taux de recouvrement R , on retiendra alors $R_{CoCo} = R$.

4.2.2.2. Estimation de l'intensité du déclencheur

Comme nous l'avons vu précédemment, le déclencheur de l'obligation CoCo peut être comptable, purement discrétionnaire sur pouvoir du régulateur, ou encore être une observation de marché .

Nous faisons ici l'hypothèse que les deux premiers types de déclencheurs seront intégrés dans le cours de l'action de l'émetteur observable sur le marché. Ainsi, le déclencheur est égal à un niveau barrière S^* de l'action sous-jacente.

On note $\theta = \min_{t \leq T} \{S_t < S^*\}$ le temps d'arrêt de franchissement de la barrière (ie le temps de survenance du déclencheur. Il suffit d'estimer la probabilité $p^* = \mathbb{P}(\theta \leq T)$ et nous pourrons ainsi déduire $\lambda_{Trigger} = -\frac{\ln(1-p^*)}{T}$.

Ce problème est un classique de la théorie des options, on peut en effet voir p^* comme le prix non actualisé d'un call digital down-and-in at expiry comme nous l'avons décrit dans la section 4.1.2. Dans le cadre du modèle de Black & Scholes, l'évaluation de cette option est possible avec une formule analytique pour p^* :

$$(4.2.8) \quad p^* = \mathbb{P}(\theta \leq T) = \phi\left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S^*}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \phi\left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

avec $\mu = r - q - \frac{\sigma^2}{2}$.

On peut maintenant déterminer la prime de crédit de l'obligation :

$$(4.2.9) \quad cs_{CoCo} = \lambda_{Trigger}(1 - R_{CoCo}) = -\frac{\ln(1 - p^*)}{T} \left(1 - \frac{S^*}{C_p}\right) + cs_{Sim}$$

4.2.3. Exemple : calcul de S^* sur une CoCo Swiss Re

Les obligations CoCo émises dernièrement possèdent toute un déclencheur de type réglementaire, le niveau de déclenchement S^* n'est donc pas disponible directement. A titre d'exemple du modèle à forme réduite, nous allons utiliser l'équation (4.2.9) pour calculer le niveau implicite S^* sur l'obligation CoCo émise par Swiss Re en 2013.

Les caractéristiques de l'obligation ont été présentées dans la section 3.3.2. Il s'agit pour rappel d'une obligation CoCo dont le nominal serait déprécié de 100% en cas de chute du Total Risk-Based Capital Ratio de Swiss Re en dessous de 125%. Le taux de recouvrement R_{CoCo} est donc égal à 0. Il s'agit d'une obligation perpétuelle, nous effectuons cependant les calculs avec comme horizon la prochaine date de rappel (01/09/2019).

Les données de marché sont issues de Bloomberg. Nous récupérons pour chaque jour de marché entre le 08/03/2013 et le 28/08/2014 :

- La prime de crédit de l'obligation par rapport au taux swap US 5 ans (taux sans risque) = cs_{CoCo}
- La prime de crédit d'une obligation similaire émise par Swiss Re sans mécanisme de conversion = cs_{Sim}
- Le cours de l'action Swiss Re en \$ = S
- Le taux de dividende estimé de l'action Swiss Re = q
- Plusieurs indicateurs de volatilité de l'action Swiss RE (calculé sur 90 jours, 180 jours, 360 jours, implicite pour l'option la plus liquide...) = σ

Nous pouvons alors calculer p^* avec l'équation (4.2.8) et déterminer pour chaque date la valeur de S^* qui égalise la prime de crédit de marché cs_{CoCo} avec l'équation (4.2.9).

Comme nous pouvons l'observer sur la figure 6, le prix de conversion implicite S^* ne forme évidemment pas une fonction affine constante comme cela devrait être le cas en théorie. Cela n'a rien de surprenant étant donné les hypothèses volontairement simples du modèle : σ , r et q constants, rendements gaussiens,... La volatilité du prix de conversion implicite est cependant moindre par rapport au prix de l'action sous-jacente.

4.3. Réplication par des produits dérivés sur action

Le but de cette approche est de construire un portefeuille répliquant les flux de l'obligation CoCo. En établissant un tel portefeuille, l'absence d'opportunité d'arbitrage impliquera l'égalité entre prix du portefeuille répliquant et prix de l'obligation CoCo.

Nous allons voir que les seuls produits dérivés utilisés pour répliquer l'obligation CoCo vont être des produits dérivés sur action. Cette description se base principalement sur [De Spiegleer et Schoutens, 2011].

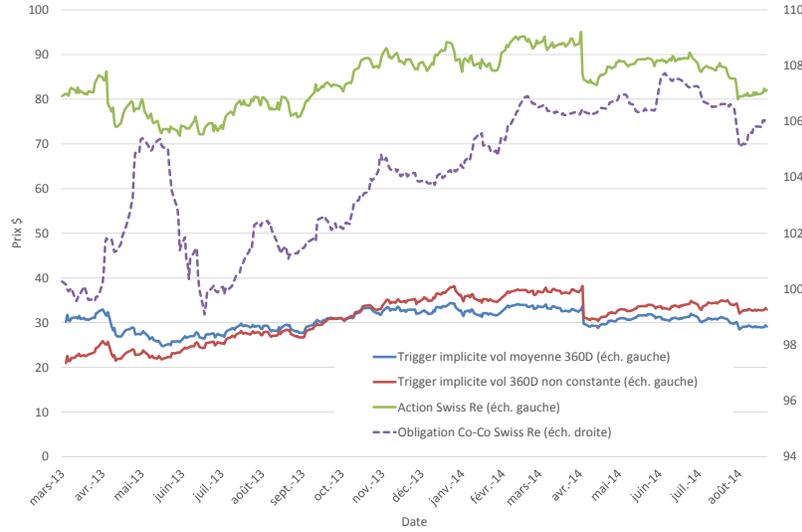


FIGURE 6. Cours de l'action Swiss Re et niveau de déclenchement implicite selon les données de marché disponibles à chaque date

4.3.1. Portefeuille répliquant

4.3.1.1. Réplication sans conversion

On rappelle la formule d'évaluation générale de l'obligation CoCo (équation (3.4.1)) :

$$X_C(t, T) = \mathbf{1}_{\{\theta > T\}} X(t, T) + \mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}} [X(t, \theta) + b(t, \theta) C_r S_\theta]$$

Dans le cas où le déclenchement n'a pas lieu ($\theta > T$) et hors défaut de l'émetteur ($\tau > T$), le porteur de l'obligation touchera les coupons $(c_i)_{i=0,1,\dots,k}$ aux temps $(t_i)_{i=0,1,\dots,k}$, $t_k = T$ et sera remboursé du nominal N à maturité.

La réplication de l'obligation en cas de non déclenchement se modélise par une obligation classique ayant les mêmes caractéristiques que l'obligation CoCo sans l'option de conversion et notée $X(T)$. Le risque de crédit lié à l'émetteur est identique.

4.3.1.2. Réplication de la conversion

En cas de déclenchement à un instant θ , le détenteur de l'obligation CoCo va recevoir C_r actions valant S_θ à un prix de conversion C_p , cela signifie que sa perte en capital est égale à $N - C_r C_p$.

À maturité T le porteur de l'obligation CoCo reçoit donc :

$$\text{PayOff}_T = \begin{cases} N - C_r C_p + C_r S_T & \text{si déclenchement} \iff \theta \leq T \\ N & \text{sinon} \end{cases}$$

Qui peut se réécrire :

$$(4.3.1) \quad \text{PayOff}_T = N + C_r(S_T - C_p)\mathbb{1}_{\{\theta \leq T\}}$$

La conversion de l'obligation en cas de franchissement d'une certaine barrière S^* de l'action sous-jacente (équivalent au déclenchement du trigger) peut être répliqué par C_r forwards knock in (section 4.1.5) de strike C_p . En effet, dans ce cas le détenteur de l'obligation recevra bien à maturité C_r actions sous-jacentes au prix C_p et son payoff sera bien égal à $C_r(S_T - C_p)\mathbb{1}_{\{\theta \leq T\}}$.

Il est bon de noter que cette réplication n'est pas parfaite : en cas de conversion le détenteur de l'obligation va recevoir les actions au moment θ , alors qu'avec cette approche il n'en sera détenteur que d'un contrat forward sur cet action. Un écart important entre θ et T entraînera la non perception des dividendes pour le détenteur du forward. Néanmoins il est raisonnable de supposer qu'un établissement convertissant ses obligations CoCo se s'apprête pas à payer des dividendes avant un certain temps (s'il ne se déclare pas en faillite...).

La conversion de l'obligation en cas de déclenchement du trigger peut se modéliser par une position longue sur C_r forward à barrière activante $FKI(S, T, K = C_p, L = S^*)$.

4.3.1.3. Réplication des coupons

Le détenteur d'une obligation CoCo va percevoir un coupon :

- jusqu'au déclenchement de la conversion si elle a lieu
- jusqu'à maturité sinon

Supposons que l'obligation verse un coupon c_i aux temps $(t_i)_{i=0,1,\dots,k}$. Ce coupon ne sera plus versé après le temps θ de déclenchement, et doit donc être retiré. Cela peut se répliquer facilement avec une position courte sur c_i option digitale down and in (section 4.1.2) de maturité t_i et de barrière S^* .

En effet si la conversion a lieu au temps θ tel que $t_j < \theta \leq t_{j+1}$, l'ensemble des options binaires de maturité supérieure ou égale à θ vont s'activer. Ainsi une position courte de c_i sur chacune annulera bien les coupons estimés dans la partie obligataire sans conversion du pricing .

Le non paiement des coupons en cas de déclenchement du trigger peut se modéliser par une combinaison de $k + 1$ positions courtes sur c_i options digitales down and in $DI_d^c(S, t_i, L = S^*)$.

4.3.2. Une formule fermée

L'obligation CoCo peut donc être répliquée par la combinaison :

- d'une position longue sur une obligation classique ayant les mêmes caractéristiques que l'obligation CoCo sans l'option de conversion
- d'une position longue sur C_r forwards à barrière activante (forward knock-in) de strike C_p : $FKI(S, T, K = C_p, L = S^*)$

- d'une position courte sur c_i options digitales down and in de maturité t_i : $DI_d^e(S, t_i, L = S^*)$

En reprenant les formules de section 4.1.5 et section 4.1.2, on obtient une formule fermée pour la valorisation de l'obligation CoCo :

(4.3.2)

$$\begin{aligned}
X_C(T) &= X(T) + C_r FKI(S, T, K = C_p, L = S^*) - \sum_i c_i DI_d^e(S, t_i, L = S^*) \\
&= X(T) \\
&\quad + C_r \left[S e^{-qT} \left(\frac{S^*}{S} \right)^{2(r-q+\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) + (r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right. \\
&\quad - C_p e^{-rT} \left(\frac{S^*}{S} \right)^{2(r-q-\frac{\sigma^2}{2})/\sigma^2} \phi \left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) + (r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
&\quad + S e^{-qT} \phi \left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) - (r-q+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
&\quad \left. - C_p e^{-rT} \phi \left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) - (r-q-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \right] \\
&\quad - \sum_i c_i e^{-rt_i} \left[\phi \left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) - (r-q-\frac{\sigma^2}{2})t_i}{\sigma\sqrt{t_i}} \right) + \left(\frac{S^*}{S} \right)^{\frac{2(r-q-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}} \phi \left(\frac{\ln(\frac{S^*}{S}) + (r-q-\frac{\sigma^2}{2})t_i}{\sigma\sqrt{t_i}} \right) \right]
\end{aligned}$$

4.3.3. Exemple : calcul de S^* sur une CoCo Santander

A titre d'illustration du modèle de réplication par dérivés action et également du modèle à forme réduite, nous allons utiliser équation (4.2.9) et équation (4.3.2) pour calculer le niveau implicite S^* sur l'obligation CoCo émise par Santander en 2014.

Les caractéristiques de l'obligation sont présentées dans la section 3.3.2. Le nominal de la CoCo santander va être converti en action dans le cas où le ratio Common Equity Tier 1 Ratio de la banque chuterait en dessous de 5,125%. Le prix de conversion est égal au prix de l'action Santander le jour de l'émission de l'obligation. Il s'agit d'une obligation perpétuelle, nous effectuons cependant les calculs avec comme horizon la prochaine date de rappel (19/05/2019).

Les données de marché sont issues de Bloomberg, nous récupérons ainsi pour chaque jour de marché entre le 16/05/2014 et le 29/08/2014 :

- La prime de crédit de l'obligation par rapport au taux swap US 5 ans (taux sans risque) = cs_{CoCo}
- Le cours de l'action Santander en \$ = S
- Le taux de dividende estimé de l'action Santander = q

- Plusieurs indicateurs de volatilité de l'action Santander (calculé sur 90 jours, 180 jours, 360 jours, implicite pour l'option la plus liquide...) = σ

Contrairement au calcul effectué dans la partie précédente sur la CoCo Swiss Re, le taux de recouvrement R_{CoCo} n'est pas égal à 0. Nous devons donc calculer p^* avec l'équation (4.2.8) et déterminer pour chaque date la valeur de S^* qui égalise la prime de crédit de marché cs_{CoCo} avec l'équation (4.2.9). Nous procédons de manière similaire avec l'équation (4.3.2).

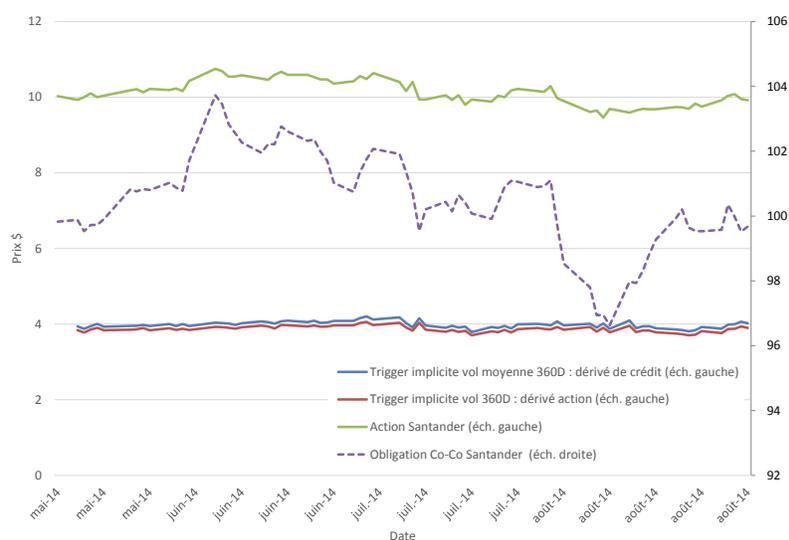


FIGURE 7. Cours de l'action et niveau de déclenchement implicite pour les deux modèles selon les données de marchés disponibles à chaque date

La forme linéaire des courbes de prix implicites paraît séduisante à première vue. Néanmoins, ces calculs ont été effectués sur un historique de données relativement court et pendant lequel l'action sous-jacente n'a pas vraiment connu de variations importantes.

La similitude des résultats dans les deux cas est due à leur noyau commun : l'estimation de la probabilité de déclenchement dans chacun des deux modèles s'appuie toujours sur l'estimation de franchissement d'un certain seuil par l'action sous-jacente ($\mathbb{P}(\theta < T)$) dans le modèle de Black & Scholes.

4.4. Critiques et extensions

Ces deux approches permettent d'obtenir une formule fermée relativement simple et d'avoir ainsi une première appréciation des caractéristiques techniques

des CoCo. Cependant, comme nous l'avons illustré dans nos exemples, la non linéarité du trigger implicite indique que les hypothèses de Black & Scholes ne sont pas adaptées à la modélisation des CoCo.

Plusieurs extensions ont vu le jour à partir de ce principe en complexifiant la dynamique de l'action sous-jacente. [Corcuera et Jan, 2011] utilisent une classe de processus de Levy appelé processus $\beta - VG$ permettant d'introduire des sauts ainsi qu'une distribution à queue épaisse. Cela conduit à une meilleure analyse des événements extrêmes comme le franchissement d'une barrière lointaine. [Teneberg, 2012] introduit également un processus à sauts pour la dynamique du sous-jacent, en appliquant des méthodes de résolution par arbre.

La complexification des processus entraîne une perte de formule fermée et la nécessité de recourir à des méthodes de simulations (Monte-Carlo, arbres...), améliorant ainsi la finesse des calculs mais les rendant plus sensibles aux hypothèses du modèle.

La grande limite de ces modèles reste l'hypothèse forte d'équivalence entre franchissement d'un seuil réglementaire et franchissement d'un cours seuil par l'action sous-jacente. Il apparaît évident à la lumière de ces premières simulations que ces méthodes trouvent rapidement leurs limites et que complexifier la dynamique du sous-jacent n'est pas le plus adapté. En effet, l'évolution du ratio de solvabilité des institutions financières n'est pas retranscrite dans les cours de marché, il paraît donc judicieux de s'intéresser à l'intégration de ces données pour modéliser ces obligations.

Approche structurelle

L'idée de cette approche est de se placer du point de vue de l'émetteur de l'obligation CoCo en modélisant le bilan de l'institution, c'est à dire son actif et son passif. L'institution sera considérée en faillite quand le passif deviendra supérieur à l'actif (l'équivalent du temps de défaut τ évoqué précédemment). Il faudra alors définir un indicateur représentant le temps de survenance du déclencheur de l'obligation CoCo (θ).

La littérature sur ce thème est relativement abondante, mais le dénominateur commun reste la modélisation de la structure de capital d'une société à partir des modèles de [Merton, 1974], [Black et Cox, 1976] ou [Leland, 1994].

[Albul *et al.*, 2010] se concentrent sur l'allocation du capital entre action, dette senior et dette convertible tandis que [Glasserman et Behzad, 2010] s'intéresse à la conversion par fraction de la dette convertible jusqu'à épuisement de celle ci.

Nous présentons ici les travaux de [Brigo *et al.*, 2013], qui couvrent aussi bien l'approche structurelle que la modélisation du niveau de capital réglementaire.

5.1. Modélisation de la compagnie

5.1.1. Merton, Black et Cox

Dans ses premiers travaux, [Merton, 1974] modélise la valeur d'une firme $(V)_{t \geq 0}$ (ou encore la valeur de ses actifs) comme la somme de ses dettes $(D)_{t \geq 0}$ et de la valeur de marché de ses actions S : $V_t = S_t + D_t$. Les hypothèses suivantes sont retenues pour la modélisation :

- la dette de la compagnie est une obligation zero coupon de valeur D_t et offrant un paiement D à maturité T
- la dynamique de V est un mouvement brownien géométrique (annexe A.3) : $dV_t = rV_t dt + V_t \sigma dW_t$
- la compagnie est considérée en défaut si et seulement si sa valeur en T est inférieure au montant de la dette $V_T < D$

Avec ses hypothèses, on a alors à maturité T :

- $S_T = 0$ si $V_T < D$
- $S_T = V_T - D$ si $V_T \geq D$

On peut ainsi déduire la valeur de la dette à chaque instant :

$$\begin{aligned} D_t &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[\min(V_T, D)] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[D - (D - V_T)^+] \\ &= e^{-r(T-t)} D - Put(V_t, K = D, T) \end{aligned}$$

La valeur de la dette est donc égale à son nominal actualisé moins la prime d'un put (annexe A.4.1) sur la valeur totale de la société de strike D et de maturité T . On en déduit alors :

$$S_t = V_t - D_t = V_t - e^{-r(T-t)}D + Put(V_t, K = D) = Call(V_t, K = D)$$

Dans le modèle de Merton, la valeur des actifs est égale à la prime d'un call (annexe A.4.1) sur la valeur totale de la société de strike D et de maturité T .

Pour palier à l'absence d'observation du défaut avant la maturité T du modèle de Merton, [Black et Cox, 1976] introduisent cette possibilité à n'importe quel instant entre 0 et T . Ils modélisent le premier temps de franchissement τ d'une barrière (appelé également niveau de sûreté) $H(t)$ par V_t comme déclencheur du défaut de l'entreprise :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t \leq H(t)\}$$

Black & Cox modélisent la valeur de la firme V , comme Merton, par un mouvement brownien géométrique et font l'hypothèse que H est de la forme $H(t) = He^{-\gamma(T-t)}$.

Avec ces hypothèses, la valeur des actions de la firme en T est égale à :

- $V_T - H(T)$ si $V_T \geq H(T) \Leftrightarrow \tau > T$
- 0 si $V_T < H(T) \Leftrightarrow \tau \leq T$

Soit de manière plus synthétique $S_T = (V_T - H(T))^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$, et de manière plus générale à un instant $t \leq T$:

$$S_t = b(t, T) \mathbb{E} \left[(V_T - H(T))^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right]$$

On reconnaît ici la formule d'un call down-and-out de strike $H(T)$, de barrière $H(t)$ et de maturité T .

Exemple :

A titre d'illustration, nous simulons plusieurs trajectoires de V d'après le modèle de Black et Cox et nous traçons une barrière H de la forme $H(t) = He^{-\gamma(T-t)}$. La figure 1 montre le résultat de ces simulations.

Le modèle de Black & Cox contient encore plusieurs limites importantes :

- la barrière H peut uniquement être de forme $He^{-\gamma(T-t)}$ avec H et γ constants
- les paramètres r , q et σ doivent être constants

En pratique le choix de H est supposé indépendant des conditions de marchés. Par exemple [Portait et Poncet, 2003] proposent pour $H(t)$ l'utilisation du nominal de la dette court terme due en t à laquelle on ajoute la moitié du nominal de la dette long terme.

Plusieurs résultats dépendants de la forme de H ont été publiés avec dans certains cas des formules fermées pour $\mathbb{P}(\tau > T)$ (voir par exemple [Bielecki et Rutkowski, 2002]). Notons que dans le cas où $\forall t, H(t) = H$, on se ramène à un problème classique de calcul d'options à barrière.

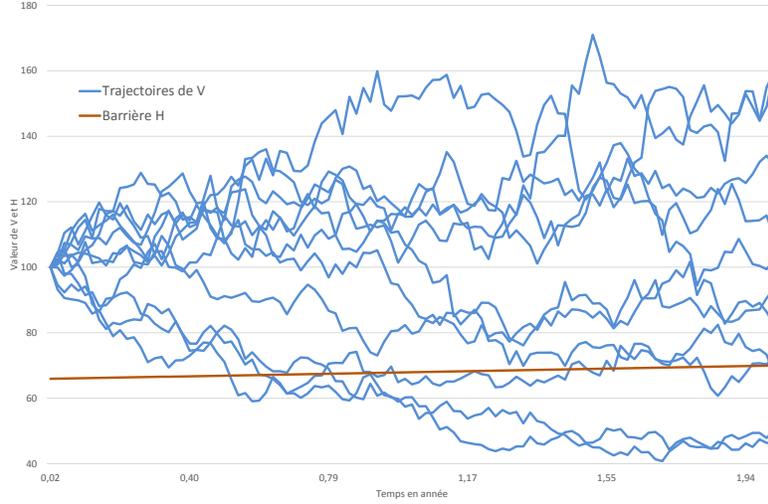


FIGURE 1. Exemple de trajectoires de V et H dans le modèle de Black & Cox avec $r = 3\%$, $\sigma = 25\%$, $V_0 = 100$, $H = 70$ et $\gamma = 3\%$

5.1.2. Le modèle Analytically Tractable First Passage (AT1P)

[Brigo et Tarenghi, 2004] ont étendu le modèle de Black & Cox en introduisant un taux sans risque et une volatilité dépendant du temps ainsi qu'une nouvelle forme de barrière déterministe.

5.1.2.1. Présentation du modèle AT1P

Le modèle AT1P modélise la valeur de la firme V par un mouvement brownien géométrique de la forme :

$$(5.1.1) \quad dV_t = V_t(r_t - q_t)dt + V_t\sigma_t dW_t$$

On lève ainsi la contrainte sur les paramètres r , q et σ qui ne sont plus forcément constants.

La barrière $H(t)$ représentant le défaut de l'entreprise est de la forme :

$$(5.1.2) \quad H(t) = H \exp\left(\int_0^t (r_s - q_s - B\sigma_s^2) ds\right)$$

[Brigo et Tarenghi, 2004] justifient l'utilisation d'une barrière de cette forme pour des raisons pratiques de calibrage et de valorisation.

On définit toujours le premier temps de franchissement par $H(t)$ de la barrière V_t par $\tau = \inf\{t \geq 0 : V_t \leq H(t)\}$

Sous ces hypothèses, on obtient ainsi deux résultats fondamentaux pour l'application aux obligations CoCo :

Une formule fermée pour la probabilité de survie :

(5.1.3)

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \phi \left(\frac{\ln \frac{V_0}{H} + \frac{2B-1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right) - \left(\frac{H}{V_0} \right)^{2B-1} \phi \left(\frac{\ln \frac{H}{V_0} + \frac{2B-1}{2} \int_0^T \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int_0^T \sigma_u^2 du}} \right)$$

Une formule fermée pour la valeur de l'entreprise S_t à l'instant t comme vu dans Black & Cox en tant que call down-and-out :

(5.1.4)

$$\begin{aligned} S_t &= b(t, T) \mathbb{E} \left[(V_T - H(T))^+ \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \right] \\ &= b(t, T) \left(V_t e^{\int_t^T r_s - q_s ds} \left(1 - \phi \left[\frac{(\ln \frac{H(T)})^+ - \ln \frac{V_t}{H} - \int_t^T r_s - q_s + \frac{\sigma(s)^2}{2} ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma(s)^2 ds}} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - H(T) \left(1 - \phi \left[\frac{(\ln \frac{H(T)})^+ - \ln \frac{V_t}{H} - \int_t^T r_s - q_s - \frac{\sigma(s)^2}{2} ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma(s)^2 ds}} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - H(t) \left(\frac{H(t)}{V_t} \right)^{2B} e^{\int_t^T r_s - q_s ds} \left(1 - \phi \left[\frac{(\ln \frac{H(T)})^+ - \ln \frac{H(t)^2}{HV_t} - \int_t^T r_s - q_s + \frac{\sigma(s)^2}{2} ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma(s)^2 ds}} \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + H(T) \left(\frac{H(t)}{V_t} \right)^{2B-1} \left(1 - \phi \left[\frac{(\ln \frac{H(T)})^+ - \ln \frac{H(t)^2}{HV_t} - \int_t^T r_s - q_s - \frac{\sigma(s)^2}{2} ds}{\sqrt{\int_t^T \sigma(s)^2 ds}} \right] \right) \right) \end{aligned}$$

5.1.2.2. Calibrage du modèle

Credit Default Swap

Les Credit Default Swap ou CDS sont des contrats de protection financière en cas d'événement de crédit (par exemple la faillite d'un émetteur qui entraîne un non remboursement du nominal d'une obligation). Un CDS est défini par un actif de référence (souvent une obligation bien identifiée), une maturité et un montant notionnel.

L'acheteur du CDS verse une prime en fonction du montant notionnel assuré au vendeur de protection. Le vendeur s'engage à compenser les pertes de l'actif de référence en cas d'événement de crédit (défaut de l'émetteur).

Le prix d'un CDS sur le marché va s'exprimer en points de base, et se comparera à la prime de crédit de l'obligation de référence sur laquelle il offre une protection. Des différences peuvent apparaître en fonction de la liquidité des deux produits (CDS et obligation), de leurs maturités...

Les CDS forment aujourd'hui un marché à part entière, et permettent d'avoir une estimation de la prime de crédit par maturité pour de nombreux émetteurs.

Nous ne détaillons pas plus ces instruments, des précisions sont disponibles dans [Portait et Poncet, 2003].

Calibrage par les CDS

Le modèle AT1P nécessite le calibrage des paramètres B, H et $(\sigma_t)_t$. Pour cela [Brigo et Tarengi, 2004] font l'hypothèse d'une fonction $\sigma(t)$ déterministe et affine par morceaux sur n intervalles. Le modèle AT1P a été utilisé à l'origine pour valoriser les CDS, ainsi on exprime la valeur d'un CDS protégeant contre le défaut de l'entreprise étudiée à l'horizon T en fonction des probabilités de survie aux instants $T_i < T, i = 1, \dots, N$:

(5.1.5)

$$CDS^T = \frac{(1 - R) \sum_{i=1}^N \frac{\beta(0)}{\beta(T_i)} (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - (\mathbb{Q}(\tau > T_i)))}{\sum_{i=1}^N \frac{\beta(0)}{\beta(T_i)} (T_i - T_{i-1}) (\mathbb{Q}(\tau > T_i) + \frac{1}{2}(\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - (\mathbb{Q}(\tau > T_i)))}$$

On se sert alors de la formule de probabilité de survie du modèle AT1P définie dans l'équation (5.1.3) pour calculer les $\mathbb{Q}(\tau > T_i)$.

Le calibrage de la volatilité $\sigma(t)$ par N CDS laisse deux degrés de liberté dans les paramètres, à savoir B et H . Ainsi, plusieurs triplets (H, B, σ) peuvent parfaitement matcher les observations de marché des CDS.

L'une des forces du modèle est de ne pas nécessiter de connaître précisément V_0 et H pour calculer la probabilité de survie $\mathbb{P}(\tau > T)$, mais uniquement le ratio $\frac{H}{V_0}$.

5.2. Application aux CoCo

5.2.1. Principe

Le modèle AT1P se base sur le temps de défaut τ , cependant le déclenchement de la conversion de l'obligation CoCo doit intervenir avant le défaut à un temps θ . Ce temps correspond à l'instant où le capital réglementaire c_t (par exemple le ratio Core Tier 1 pour les banques ou le SCR pour les assureurs) franchit à la baisse une certaine barrière \bar{c} :

$$(5.2.1) \quad \theta = \inf\{t \geq 0 : c_t \leq \bar{c}\}$$

[Brigo *et al.*, 2013] font l'hypothèse que $\theta < \tau$ si $\tau < T$, hypothèse tout à fait fondée et raisonnable (une chute du ratio de solvabilité interviendra avant le défaut, ou du moins au pire en même temps...). Un cas défavorable pourrait être un défaut "éclair" situé entre deux publications du ratio de solvabilité. Nous excluons cependant cette possibilité.

On rappelle la formule d'évaluation générale de l'obligation CoCo vue dans équation (3.4.1) :

$$X_C(t, T) = \mathbf{1}_{\{\theta > T\}} X(t, T) + \mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}} [X(t, \theta) + b(t, \theta) C_r S_\theta]$$

L'espérance de cette formule sera, par définition, égale à la valeur de l'obligation CoCo. Il nous reste donc à estimer θ , et donc définir c_t , ainsi que S_θ pour être en mesure de calculer cette espérance.

La première étape va être de lier la barrière de capital réglementaire (c_t) aux hypothèses du modèle AT1P :

- valeur des actifs (V_t)
- niveau de la barrière ($H(t)$)

Par la suite, le modèle AT1P va nous permettre de déduire la valeur de S_t à partir de V_t et $H(t)$.

5.2.2. Fonction de déclenchement

[Brigo *et al.*, 2013] modélisent c_t avec les hypothèses suivantes :

- le ratio Core Tier 1 est lié au ratio de levier de la banque émettrice
- le passif global de l'institution est égal à $H(t)$

Le ratio de levier AER (Asset Equity Ratio) d'une banque est le rapport entre ses actifs et ses fonds propres économiques. Ainsi à un instant t on peut écrire $AER_t = \frac{V_t}{V_t - H(t)}$ avec les hypothèses de [Brigo *et al.*, 2013].

Ils regroupent ensuite par rating de l'entité mère tous les émetteurs bancaires. Au sein d'un même groupe de rating γ , une relation linéaire entre le ratio Tier 1 et le ratio de levier AER est établie :

Ils arrivent alors à une fonction de déclenchement ayant la forme suivante :

$$(5.2.2) \quad c_t = c(V_t, H(t), \gamma) = \begin{cases} \bar{\alpha}_\gamma + \bar{\beta}_\gamma \frac{V_t}{V_t - H(t)} & V_t \geq H(t) \\ 0 & V_t < H(t) \end{cases}$$

5.2.3. Formule finale pour l'obligation CoCo sous AT1P

On utilise la formule générale d'évaluation de l'obligation CoCo :

$$\begin{aligned} P &= \mathbb{E}[X_C(t, T)] \\ &= X(t, T)\mathbb{P}(\theta > T) + \mathbb{E}[1_{\{\theta \leq T\}}(X(t, \theta) + C_r S_\theta b(t, \theta))] \end{aligned}$$

avec les hypothèses du modèle AT1P :

$$\begin{aligned} \theta &= \inf\{t \geq 0 : c_t = c(V_t, H(t)) \leq \bar{c}\} \\ dV_t &= V_t(r_t - q_t)dt + V_t\sigma_t dW_t \\ H(t) &= H \exp\left(\int_0^t (r_s - q_s - B\sigma_s^2)ds\right) \end{aligned}$$

Les étapes du calcul sont les suivantes :

- (1) Déterminer la dynamique de $t \mapsto c(V_t, H(t))$ par des méthodes statistiques sur l'historique disponible.
- (2) Calibrer les paramètres $\sigma(s)$, B et H à partir de la courbe des CDS, du dernier ratio de solvabilité disponible et de la valeur de marché des actifs de l'entreprise.
- (3) Calculer $P = \mathbb{E}[X_C(t, T)]$ par une méthode de Monte-Carlo, le terme de droite de $\mathbb{E}[X_C(t, T)]$ ne pouvant être calculé par une formule fermée.

5.3. Analyse

Contrairement aux modèles du chapitre 4, l'approche structurelle permet de modéliser l'actif V_t et le passif $H(t)$ de la compagnie. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'exprimer le niveau de déclenchement de la barrière \bar{c} en fonction d'un niveau seuil

pour l'action sous-jacente. Il faut en revanche établir une relation entre c_t , V_t et $H(t)$.

Le point le plus délicat du modèle est principalement l'établissement empirique de la relation entre ces trois éléments. Le secteur bancaire offre une quantité d'émetteurs et un historique relativement important de ratios de solvabilité Bâle Bâle III, permettant ainsi des études statistiques robustes. [Brigo *et al.*, 2013] proposent ainsi une relation linéaire simple entre le ratio de levier et le ratio Core Equity Tier 1.

Cette approche globale semble bien adaptée à l'étude d'un univers encore balbutiant comme celui des CoCo d'assureurs. La modélisation et le calibrage du lien entre c_t et les données (comptables/marché) vont par contre se révéler délicats.

Troisième partie

Adaptation à l'assurance

Introduction

Les modèles développés pour la modélisation des obligations CoCo s'inscrivent dans un cadre purement bancaire. Les approches que nous avons vu dans le chapitre 4 ne peuvent être utilisées qu'avec un déclencheur de marché (niveau seuil de l'action S^*). L'approche du chapitre 5 peut en revanche être utilisée directement avec un déclencheur comptable, ce qui présente un intérêt évident pour évaluer les CoCo d'assureurs non cotés (mutuelles,...).

Cependant, que ce soit pour la réglementation bancaire ou assurantielle, les textes imposent un déclencheur basé sur le niveau de solvabilité de l'entité émettrice et non sur un indicateur de marché.

L'objectif de cette partie est de pouvoir simuler une émission d'obligation CoCo pour un assureur européen soumis à la réglementation Solvabilité II.

Afin d'adapter ces modèles à cet univers, nous allons devoir :

- Trouver un équivalent comptable à la barrière S^* dans les modèles à dérivés action et à forme réduite.
- Adapter la modélisation du niveau de solvabilité (c_t) dans le modèle structurel.

Pour cela, nous allons avoir besoin de données concrètes sur les niveaux de SCR des institutions. Ces niveaux n'étant pas encore publiés officiellement, plusieurs options sont envisagées :

- (1) Simuler des niveaux de SCR ;
- (2) Se baser sur les niveaux du Swiss Solvency Test (SST), publiés depuis 2009 avec une fréquence semestrielle, et dont la méthodologie est très proche de celle de Solvabilité II ;
- (3) Se baser sur les niveaux de capital économique calculés par un modèle interne et publiés par certains assureurs depuis plusieurs années.

[Alm, 2013] propose un modèle de simulation de SCR pour les assureurs non vie nécessitant en entrée la distribution des paiements des primes et cotisations. Néanmoins, il semble plus judicieux de privilégier les options 2 et 3 afin de pouvoir confronter les modèles à la réalité. L'approche suisse se voulant être semblable à l'approche de l'union européenne, nous pourrions par la suite effectuer des simulations sur des acteurs soumis à la réglementation Solvabilité II en nous basant sur les résultats de cette étude.

Afin d'alléger les notations, nous notons par la suite SCR le ratio fonds propres économiques sur capital de solvabilité requis qu'il soit exprimé en terme de SST ou bien de SCR en modèle interne ou standard.

Après avoir présenté les données utilisées, nous proposerons une modélisation de la barrière S^* adaptée aux modèles à dérivés actions et à forme réduite, dépendants d'un niveau de solvabilité seuil dans la section 6.1. La section 6.2 établira une relation de la forme $SCR(t) = F(V_t, H_t, \text{données comptables})$ pour le modèle structurel.

Nous simulerons enfin une émission d'obligation CoCo selon les différents modèles pour un assureur soumis à Solvabilité II dans le chapitre 7.

CHAPITRE 6

Modélisation de la barrière

La modélisation des obligations CoCo repose sur l'étude du franchissement du niveau de capital réglementaire c_t d'une barrière \bar{c} .

Les modèles les plus simples (dérivés actions et forme réduite) font l'hypothèse d'équivalence entre franchissement d'une barrière \bar{c} par c_t et franchissement d'une barrière S^* par l'action sous-jacente S_t . Il est donc nécessaire d'évaluer un S^* implicite à partir des différentes données de marché et comptables à disposition.

Les modèles structurels font apparaître directement actif et passif de la société, en revanche il est nécessaire d'établir un lien entre c_t et ces éléments.

6.1. Barrière pour déclencheur implicite

6.1.1. Approche et hypothèses

Notons c_t le niveau de solvabilité (au sens économique Solvabilité II/Swiss Solvency Test) de l'institution publié à l'instant t , en principe, sur une base trimestrielle. A la différence des institutions bancaires, rappelons que c_t est exprimé en pourcentage des fonds propres (économiques!) constitués : $c_t = \frac{\text{Fonds propres}_t}{\text{SCR}_t}$. Un niveau seuil \bar{c} peut donc être atteint en cas de hausse du SCR et/ou de baisse des fonds propres économiques.

[**Société Générale Cross Asset Research, 2014**] fait l'hypothèse que le ratio de solvabilité suit un processus de retour à la moyenne (type Vasicek, cf. [**Portait et Poncet, 2003**]) négativement corrélé aux primes de crédit. Cette approche ne nous paraît pas adaptée au secteur de l'assurance pour les raisons suivantes :

- modéliser un ratio de solvabilité trimestriel par un processus stochastique à temps et à trajectoire continue semble peu réaliste
- le calibrage de la volatilité du ratio de solvabilité ne sera pas assez robuste étant donné le manque d'historique pour le secteur de l'assurance

Il nous paraît plus judicieux de faire l'hypothèse (très forte) que l'intégralité de l'information sur le niveau de solvabilité de l'institution est retranscrit dans les observations de marché (si elles existent) : niveau et volatilité de l'action, primes de crédit, ...

Par ailleurs, le socle commun entre Bâle II/Bâle III et Solvabilité II va être l'argument principal nous permettant de transposer les résultats bancaires à l'assurance.

Les modèles à intensité (section 4.2) et à répliation par dérivés actions (section 4.3) permettent de calculer facilement une barrière implicite S^* dans le cas où l'on peut observer sur le marché les données liées à l'obligation CoCo et à l'action de l'émetteur.

Le modèle de répliation par des produits dérivés sur action est bien adapté aux obligations CoCo qui vont effectivement être converties en action en cas de déclenchement. Néanmoins, ce type de conversion est loin d'être standard sur les obligations existantes, une grande proportion voyant son nominal déprécié dans ce cas là.

Le modèle à intensité s'adapte aussi bien aux obligations CoCo pouvant subir une conversion en actions qu'à celles pouvant voir leur nominal déprécié. Il apparaît donc plus judicieux de se baser sur ce modèle pour notre étude.

En résumé, nous effectuons les hypothèses suivantes :

- (1) Il y a équivalence entre Bâle III et Solvabilité II en terme de vision de la solvabilité des institutions financières, hypothèse qui semble raisonnable étant donné le socle commun sur lequel repose les deux réformes, comme nous l'avons déjà détaillé. Cette hypothèse nous permettra de transposer les résultats dans un cadre assurantiel.
- (2) La solvabilité d'une entreprise émettrice d'obligations CoCo est complètement retranscrite à travers la valeur de marché de ses obligations CoCo et de l'ensemble des valeurs observables sur le marché (niveau de l'action sous-jacente, volatilité, primes de crédit...)

6.1.2. Données et calculs

Nous sélectionnons les obligations CoCo émises par des institutions européennes soumises à Bâle III avec un déclencheur basé sur le niveau de solvabilité de la banque. Ce déclencheur est soit de 5.125% soit de 7.00% du ratio CET1.

Sur une liste initiale de 139 obligations, nous ne pouvons pas effectuer les calculs du modèle à forme réduite sur chaque titre. En effet, certaines de ces institutions n'ont pas d'action cotée sur le marché : cela peut soit venir de la structure de l'institution (citons par exemple Rabobank, banque coopérative hollandaise) ou encore de la nationalisation de la banque (Royal Bank of Scotland).

Par ailleurs, nous éliminons également de notre étude les obligations CoCo dont le déclencheur est différent du ratio core tier 1 (chapitre 2). Nous éliminons également les obligations illiquides et dont le prix sur le marché ne refléterait pas la vision réelle du marché.

Nous obtenons au final une liste de 95 obligations pour lesquelles nous allons calculer le S^* implicite pour chaque jour de marché où les

données de marché sont disponibles. (calculs identiques à la section 4.2 sur l'obligation Swiss Re).

La liste des établissements sur lesquels nous effectuons nos calculs est détaillée dans le tableau 1.

Compagnie	Pays	Notation dette senior long terme	Nombre de CoCo
Aareal Bank	Allemagne	A	1
Deutsche Bank	Allemagne	A	4
Danske Bank	Danemark	A	1
Banco Popular	Espagne	A	1
Banco Santander	Espagne	BBB+	3
BBVA	Espagne	BBB	2
Credit Agricole	France	A	8
Société générale	France	A	6
Unicredit	Italie	BBB-	2
Barclays	Royaume Uni	A	5
HSBC	Royaume Uni	A	3
Lloyds Banking group	Royaume Uni	BBB	40
Nordea	Suède	A	3
Skandinaviska Enskilda Banken	Suède	A	1
Banque Cantonale de Genève	Suisse	A	1
Crédit Suisse	Suisse	A	8
Julius Baer	Suisse	A	1
UBS	Suisse	A	5

TABLE 1. Base d'émetteurs européens d'obligations CoCo

Notons également la répartition en fonction du niveau de déclencheur (low trigger : $\leq 5.125\%$ ou high trigger : $\geq 5.125\%$) et du type de conversion dans le tableau 2.

	Conversion en action	Dépréciation définitive	Dépréciation temporaire
Low trigger	41	13	22
High trigger	15	2	2
Total	56	15	24

TABLE 2. Nombre d'obligations CoCo en fonction du déclencheur et du type de conversion

Source: Bloomberg

On rappelle l'équation du modèle à forme réduite pour calculer la prime de crédit de l'obligation CoCo (équation (4.2.9)) :

$$c_{CoCo} = \lambda_{Trigger}(1 - R_{CoCo}) = -\frac{\ln(1 - p^*)}{T} \left(1 - \frac{S^*}{C_p}\right)$$

avec

$$p^* = \mathbb{P}(\theta \leq T) = \phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S^*}{S}\right) - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \left(\frac{S^*}{S}\right)^{\frac{2\mu}{\sigma^2}} \phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S^*}{S}\right) + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

et $\mu = r - q - \frac{\sigma^2}{2}$.

Pour chaque jour de marché depuis l'émission de l'obligation, nous récupérons :

- La prime de crédit de l'obligation par rapport au taux sans risque de la devise d'émission = cs_{CoCo} calculé à la date du prochain call
- La prime de crédit d'une obligation similaire sans clause de conversion = cs_{Sim}
- Le taux sans risque de la devise d'émission de l'obligation = r
- Le cours de l'action sous-jacente = S
- Le taux de dividende estimé de l'action sous-jacente = q
- La volatilité historique de l'action sous-jacente calculé sur 360 jours afin de lisser cette donnée = σ

Nous calculons alors p^* et déterminons pour chaque date la valeur de S^* qui égalise la prime de crédit observée sur le marché et celle calculée par le modèle. Par ailleurs, le prix de conversion C_p est égal au cours de l'action sous-jacente le jour de l'émission de l'obligation. Nous faisons de plus l'hypothèse qu'en cas de franchissement de la barrière, le nominal est soit intégralement déprécié soit intégralement converti en action.

Au final, nous obtenons pour chaque obligation CoCo et pour chaque jour de marché t depuis l'émission de l'obligation un niveau de déclencheur implicite S_t^* ainsi que le taux de variation $\delta_{S_t^*} = \frac{S_t^*}{S_t} - 1$. Ce taux de variation $\delta_{S_t^*}$ est donc une fonction, au temps t , de :

- la durée de vie résiduelle : $T - t$
- la volatilité de l'action sous-jacente : σ
- le taux sans risque : r
- le taux de dividende de l'action sous-jacente : q
- la prime de crédit de l'obligation CoCo : cs_{CoCo}
- le prix de conversion de l'action sous-jacente de l'obligation CoCo : C_p

Par soucis de clarté, on note $T_t = T$, $\sigma_t = \sigma$, $r_t = r$ et $cs_{CoCo}(t) = cs_{CoCo}$.

6.1.3. Traitement des résultats

Titres hybrides

Entrons dans les détails des conditions de versement de coupon : pour un titre obligataire classique le versement du coupon est automatique sauf en cas de faillite et donc de défaut de l'émetteur. Il existe cependant d'autres catégories de titres sur lesquels un non paiement de coupon ne signifie pas un défaut de l'émetteur, parmi lesquels se trouve les titres hybrides.

Le non paiement du coupon peut être :

- purement discrétionnaire à l'émetteur
- conditionné au non paiement de dividende sur l'exercice en cours

- dépendant de critères financiers décrits dans le prospectus d'émission.

Dans l'éventualité d'un coupon qui ne serait pas payé durant une année, plusieurs options sont également possibles :

- le coupon est définitivement perdu
- les coupons non payés les années précédentes devront l'être si le coupon est versé à nouveau, ou bien si le titre est rappelé ou remboursé par l'émetteur. On parle alors de suspension cumulative.

- les coupons non payés sont néanmoins capitalisés.

Afin d'être admissible dans la catégorie de fonds propres Additional Tier 1 (AT1), les obligations CoCo des banques doivent avoir une suspension de coupon discrétionnaire et non cumulative. Dans le cas d'une suspension de coupon non discrétionnaire et cumulative, l'obligation CoCo sera catégorisé dans les fonds propres Tier 2 (T2).

Les obligations CoCo bancaires peuvent être classées en fonction :

- (1) de leur subordination AT1 et T2
- (2) de leurs devises (EUR, USD, GBP, CHF)
- (3) de leur déclencheur : low trigger ($\leq 5.125\%$) et high trigger ($> 5.125\%$)
- (4) du type de conversion en cas de conversion : dépréciation temporaire, dépréciation permanente, conversion en action
- (5) de la note de crédit de l'émetteur (A-, BBB, ...) ou de l'obligation

L'objectif de notre étude étant de simuler l'émission d'une obligation CoCo pour un assureur européen, nous avons vu dans la section 2.4.2 que la condition de suspension de coupon discrétionnaire était nécessaire pour appartenir au capital Tier 1. Ainsi nous étudierons uniquement les obligations bancaires AT1, en gardant en tête que la prime de crédit de ces obligations inclut le risque de suspension de coupon autant que le risque de conversion en capital.

Le calcul des $\delta_{S_t^*}$ étant indépendant de la devise de cotation du titre ou de l'obligation, nous gardons pour notre étude l'ensemble des devises.

Nous ne conservons que les AT1 low trigger, ie avec une conversion si le ratio CET1 de la banque franchit le seuil des 5.125%. Nous verrons par la suite la meilleure correspondance entre ce ratio de solvabilité Bâle III et les ratios sous solvabilité II (SCR et MCR).

Nous conservons l'ensemble des conversions possibles.

Les banques que nous étudions ayant toutes une notation de crédit de qualité investissement ¹ relativement homogène, nous ne faisons pas de différences sur ce point.

Notre étude repose au final sur 35 obligations et 6806 observations.

1. La note de crédit d'une obligation senior est supérieur ou égale à BBB-.

Notre objectif est d'établir une relation entre le choc implicite $\delta_{S_t^*}$ et les différents paramètres observables (σ , r , T) sans évidemment utiliser cs_{CoCo} qui sera notre inconnue dans le cadre de la simulation d'une émission.

Le taux sans risque propre à la devise (r) est un paramètre indépendant de l'obligation et ne doit donc pas entrer dans l'équation.

Il nous reste donc à étudier les relations entre $\delta_{S_t^*}$, T et σ .

Une représentation en surface de la forme $\delta_{S_t^*} = f(\sigma, T)$ est impossible car pour un même couple de valeur (σ, T), plusieurs chocs sont calculés avec des écarts parfois importants. La figure 1 montre qu'il n'existe pas de lien simple entre $\delta_{S_t^*}$ et T , en revanche une relation semble pouvoir s'établir entre $\delta_{S_t^*}$ et σ .

Dans la figure 2, nous représentons les régressions linéaires entre $\delta_{S_t^*}$ et σ en fonction du type de conversion de l'obligation CoCo.

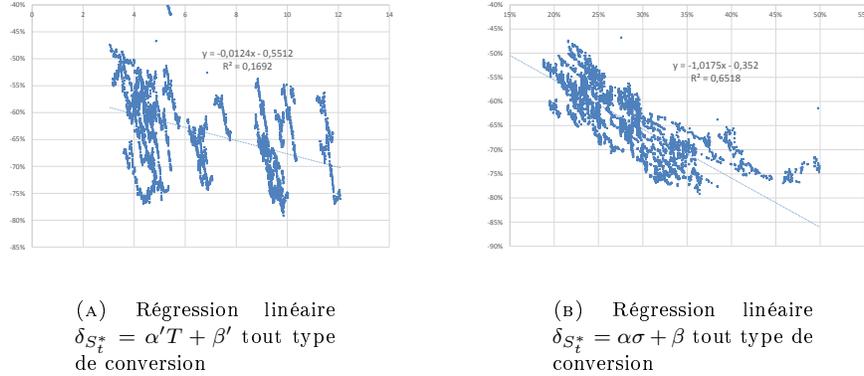


FIGURE 1. Relations linéaires entre $\delta_{S_t^*}$, σ et T

Suite à ces observations, nous faisons les conclusions suivantes :

- (1) le mode de conversion semble impacter le choc implicite en fonction de la volatilité du titre. Néanmoins le nombre d'observations relativement faible sur les dépréciations permanentes et les conversions en action (par rapport aux dépréciations temporaires) ne nous incite pas à séparer les cas.
- (2) une relation purement linéaire n'est pas satisfaisante notamment pour les volatilités élevées. Nous allons donc nous diriger vers une interpolation polynomiale d'ordre 2 afin de corriger cela.

Ces conclusions sont illustrées par la figure 3.

Pour appliquer les modèles à forme réduite ou à dérivé action à l'assurance, nous partirons donc sur la relation suivante entre le $\delta_{S_t^*}$ et la volatilité de l'action sous-jacente σ :

$$(6.1.1) \quad \delta_{S_t^*} = \alpha\sigma^2 + \beta\sigma + \xi$$

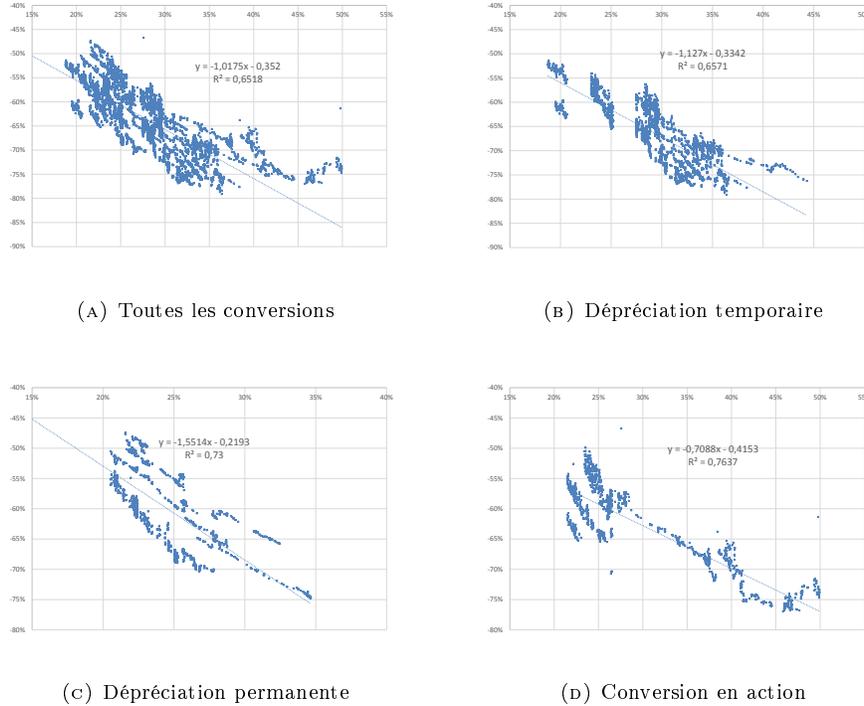


FIGURE 2. Régressions linéaires $\delta_{S_t^*} = \alpha\sigma + \beta$ en fonction du type de conversion

avec $\alpha = 3,0466$, $\beta = -2,8306$, $\xi = -0,0946$ les coefficients de la régression polynomiale d'ordre 2 entre $\delta_{S_t^*}$ et σ .

Remarque importante : il ne nous semble pas nécessaire de partir sur une fonction par morceau devenant affine pour les volatilités très élevées ($> 55\%$). Ces cas sont suffisamment rares pour que nous n'ayons pas à nous en soucier dans le cadre de notre étude sur les assureurs.

6.2. Barrière pour modèle structurel

6.2.1. Données utilisées

6.2.1.1. *Swiss Solvency Test et Solvabilité II*

Les réglementations suisse et européenne reposent sur des fondamentaux identiques :

- (1) Une approche économique avec une valorisation des actifs et des passifs en valeur de marché.
- (2) Le capital de solvabilité requis dépend des risques propres de la compagnie et de sa structure actif-passif.
- (3) Une approche value at risk à horizon un an pour le calcul du capital de solvabilité requis.

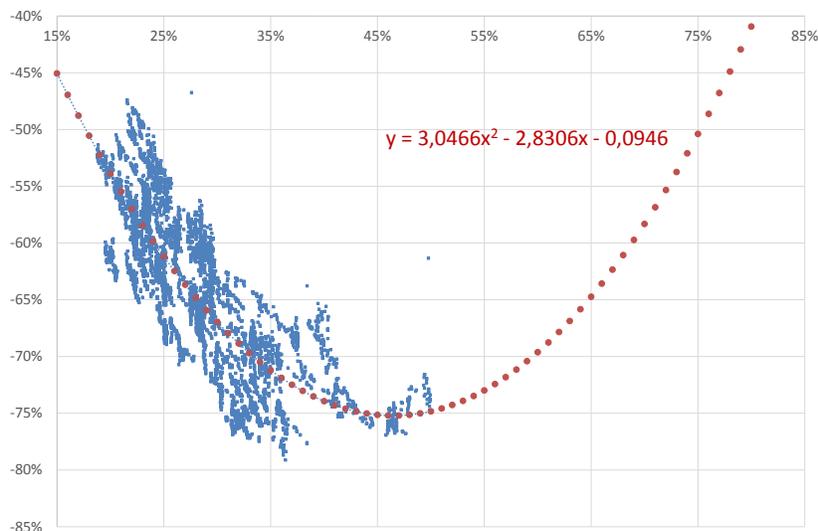


FIGURE 3. Interpolation polynomiale $\delta_{S_t^*} = \alpha\sigma^2 + \beta\sigma + \xi$

- (4) Le "Tiering" des fonds propres et l'incitation à avoir recours au capital hybride.
- (5) L'existence d'une marge supplémentaire permettant de couvrir les risques non captés.

La différence fondamentale entre les deux réglementations est l'utilisation d'un modèle interne dans le SST comme une norme et l'utilisation du modèle standard comme l'exception, contrairement à Solvabilité II. Par ailleurs, le traitement du capital supplémentaire n'est pas identique dans les deux approches.

On pourrait donc en première analyse prendre pour identique l'approche suisse et l'approche de l'union européenne en terme de capital de solvabilité requis.

Nuançons cependant ces propos par les récentes évolutions de la réglementation Solvabilité II telle qu'elle va entrer en application au 1er janvier 2016. En effet l'[Association Suisse d'Assurances, 2013] s'inquiète des exigences de capital plus élevées dans le SST que dans Solvabilité II. Partant de ce constat, la volonté du régulateur suisse est une convergence des deux méthodes d'ici 2016.

Pour plus de précisions sur les différences techniques entre les deux directives, on pourra se reporter à l'étude de [Milliman, 2013] sur la partie vie et à [Gisler, 2009] sur la partie Non-Vie.

Ces conclusions nous permettent raisonnablement d'utiliser indifféremment les données de SST et de SCR. Gardons en mémoire que le capital réglementaire dans le cadre du SST est, actuellement, plus élevé que sous Solvabilité II.

6.2.1.2. *Swiss Solvency Test*

Le ratio formé du capital de solvabilité requis rapporté aux fonds propres économiques est appelé Swiss Solvency Test ou SST dans la réglementation helvète.

Les (ré)assureurs soumis au SST n'ont pas l'obligation de publier publiquement leur niveau de SST, et pour la majorité d'entre eux les données ne sont effectivement pas accessibles pour le grand public.

Les seuls assureurs publiant ces données sont :

- Swiss Re
- Zurich Insurance Group
- Swiss Life
- Bâloise Assurances
- Helvetia

Après avoir (sans succès) demandé un accès à ces données à la FINMA², nous nous sommes tournés vers chacune des compagnies soumises à la réglementation suisse. La majorité des institutions ont eu la gentillesse de nous répondre, malheureusement la réponse fut négative dans 100% des cas.

Nous obtenons 46 données de SST pour 5 compagnies entre le premier trimestre 2009 et le deuxième trimestre 2014.

6.2.1.3. *Solvency Capital Requirement*

Le ratio formé du capital de solvabilité requis rapporté aux fonds propres économiques est appelé Solvency Capital Requirement ou SCR dans la réglementation européenne Solvabilité II.

Concernant Solvabilité II, même si la réglementation n'entrera en vigueur qu'à partir du 1er janvier 2016, certains assureurs publient leur niveau de capital économique. Ce capital économique est calculé selon leur modèle interne, et est donc équivalent à un SCR.

Nous obtenons ainsi des données de capital économique pour certains grands assureurs européens :

- AXA
- Allianz
- Generali
- Aviva
- Munich Re
- Old Mutual
- CNP

Nous obtenons 37 données de capital économique pour 7 compagnies entre le premier trimestre 2009 et le deuxième trimestre 2014.

6.2.1.4. *Base de données finale*

Ces données sont enrichies des données suivantes pour chaque date à laquelle un ratio de solvabilité est disponible :

². Autorité Fédérale de Surveillance des Marchés Financiers, le régulateur Suisse des assurances

- la valeur totale des actifs au bilan notée A_t
- la valeur totale des passifs au bilan notée L_t
- le ratio combiné, égal au rapport des frais de gestion et du coût des sinistres sur les primes, pour la partie non-vie SP_t
- le ratio coût, égal au rapport coût d'acquisition de police sur les primes, pour la partie vie RC_t
- le ratio prestation, égal au rapport des prestations versées sur les primes, pour la partie vie RP_t

En plus des données décrites précédemment, nous observons également :

- le ratio de levier de l'institution : $AER_t = \frac{A_t}{A_t - L_t}$
- le ratio Actif sur Passif : $AL_t = \frac{A_t}{L_t}$

Les données sont extraites de Bloomberg, et éventuellement complétées par les données présentes dans les rapports financiers de chaque société.

Au final, nous disposons de 83 données de capital économique pour 12 compagnies entre le premier trimestre 2009 et le deuxième trimestre 2014.

Voici la répartition de ces compagnies en terme de notation de dette senior :

Compagnie	Notation dette senior long terme	Régulation
AXA	A-	SII
ALLIANZ	AA	SII
GENERALI	A-	SII
AVIVA	A-	SII
CNP ASSURANCES	A	SII
MUNICH RE	AA-	SII
OLD MUTUAL	BBB	SII
SWISS RE	A	SST
ZURICH INSURANCE	A	SST
HELVETIA	A	SST
SWISS LIFE	A-	SST
BALOISE INSURANCE	A-	SST

TABLE 3. Notation dette long terme Fitch/Moody's/S&P

Source: Site internet de la compagnie

Toutes ces institutions appartiennent à la catégorie "investment-grade" du point de vue des agences de notation, et peuvent ainsi être étudiées dans une même cohorte.

6.2.2. Analyse en composantes principales

Nous rappelons dans un premier temps brièvement les grands principes de l'analyse en composantes principales, la littérature sur le sujet étant facilement accessible.

Nous appliquerons ensuite cette méthode à notre base de données afin de déterminer les axes les plus pertinents et d'obtenir une première relation de type

$SCR(t) = F(V_t, H_t, \text{données comptables})$.

6.2.2.1. *Éléments de théorie*

Lors de l'étude d'un certain nombre $p > 2$ de variables quantitatives associées à N observations, il est compliqué de représenter et de déterminer les liens pertinents entre ces variables (le cas $p = 2$ étant traité à l'aide d'un nuage de points et de régressions classiques). L'objectif de l'Analyse en Composantes Principales (ACP) est de se ramener à une visualisation de ces variables dans un espace à deux dimensions tout en déformant le moins possible la réalité. L'ACP va se ramener à une projection orthogonale des individus sur un nombre réduit d'axes (deux dans l'idéal).

Afin de formaliser la méthode, on se place dans le cadre d'une observation de p variables quantitatives sur n individus. On note alors :

- X_i^j la j -ième variable observée sur l'individu i , $1 \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq n$
- X la matrice $n \times p$ défini par $X(i, j) = X_i^j$, X_i la i -ième ligne et X^j la j -ième colonne
- \bar{X}^j la moyenne et σ_j l'écart type de X^j
- G le vecteur formé par les \bar{X}^j : $G = (\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^p)$ appelé barycentre ou centre de gravité
- σ_{jl} la covariance entre X^j et X^l
- Σ_X la matrice de variance-covariance des X^j : $\Sigma_X(j, l) = \sigma_{jl}$ $1 \leq j, l \leq p$

Métrique

Nous avons donc p variables avec n individus, ainsi chaque individu X_i est un membre de \mathbb{R}^p . Afin de pouvoir projeter ces variables sur un espace de plus faible dimension, la première étape est de définir une distance. Le choix se porte en générale vers la distance euclidienne classique :

$$(6.2.1) \quad d(X_i, X_j) = \|X_i - X_j\| = \left(\sum_{k=1}^p (X_i^k - X_j^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Inertie

L'inertie permet de mesurer la dispersion du nuage par rapport à son centre de gravité G , elle est défini par

$$(6.2.2) \quad I_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|X_i - G\|^2$$

Projection

Soit F un sous-espace de \mathbb{R}^p de dimension $k < p$, la projection orthogonale de X_i sur F notée f_i est définie par

$$(6.2.3) \quad \|X_i - G\|^2 = \|X_i - f_i\|^2 + \|f_i - G\|^2 \forall i = 1, \dots, n$$

Le but de l'ACP va alors être de minimiser $\frac{1}{n} \|X_i - f_i\|^2$. Cette résolution va s'appuyer sur la diagonalisation de Σ_X et la recherche des valeurs propres et vecteurs propres.

Étapes de l'ACP

Etape 1 : normalisation

On se ramène à des variables centrées réduites : $\bar{X}_i^j = \frac{X_i^j - \bar{X}^j}{\sigma_j}$. On note alors $X_i^j = \bar{X}_i^j$.

Etape 2 : changement de base

La diagonalisation de Σ_X nous permet d'obtenir p vecteurs propres noté u^k , $1 \leq k \leq p$ et rangé dans l'ordre croissant des valeurs propres.

Etape 3 : projection

A chaque axe u^k est associé une composante principale c^k défini comme la projection des individus sur u :

$$(6.2.4) \quad c^k = u_1^k X^1 + u_2^k X^2 + \dots + u_p^k X^p$$

Ainsi pour une représentation des individus sur un plan, on ne retiendra que les deux premières composantes principales. On pourra se rapporter à [Gonzalez, 2014] pour une description très claire de l'ACP ou à [Raoult, 2014] pour une approche plus théorique. Nous décrivons la représentation et l'interprétation dans l'application suivante.

6.2.2.2. *Application*

On se place dans le cadre des données de SCR que nous avons pu établir avec $n = 84$ individus et les $p = 6$ variables suivantes

- $X^1 = SCR_t$
- $X^2 = SP_t$
- $X^3 = RC_t$
- $X^4 = RP_t$
- $X^5 = AER_t$
- $X^6 = AL_t$

Nous utilisons le logiciel **Scilab** pour effectuer les calculs de l'ACP et obtenir la représentation suivante des valeurs propres de X . Il semble raisonnable d'effectuer l'analyse sur les deux premières composantes principales (les deux premières valeurs propres représentant environ 65% de l'information totale). Les valeurs propres de X et le cercle des corrélations sur ces deux premières composantes sont représentés sur la figure 4.

Il apparaît clairement que le SCR (variable X_1) est lié à la dynamique actif-passif (variables X_5 et X_6) sur la première composante, tandis que les ratios de résultats techniques (variables X_2 , X_3 et X_4) sont tous représentés par la deuxième composante.

L'ACP confirme l'intuition initiale d'un lien entre SCR et dynamique actif-passif. Les meilleurs choix pour établir un lien entre SCR et les différents éléments actif passif du bilan d'un assureur semblent être :

- le ratio de levier $A_t/(A_t - L_t)$ corrélé négativement au SCR
- ou le ratio actif/passif A_t/L_t corrélé positivement au SCR

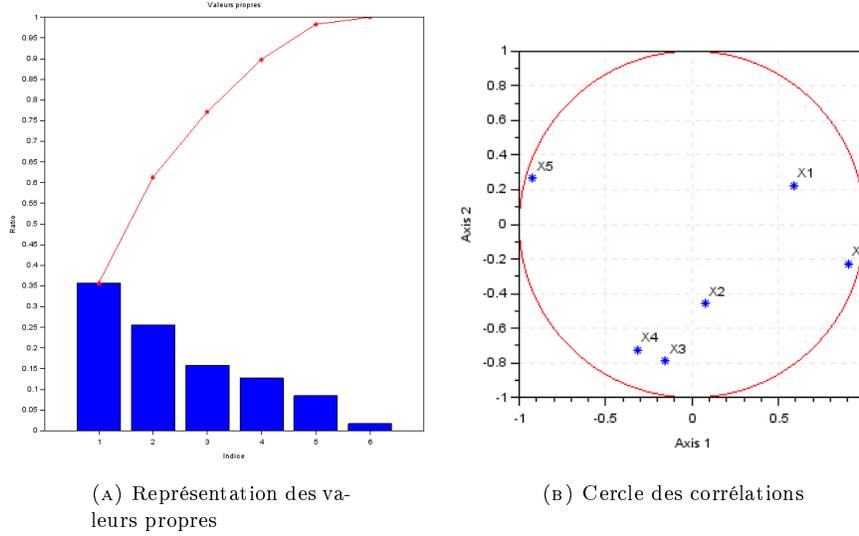


FIGURE 4. Représentation graphique des résultats de l'ACP

6.2.3. Etablissement de la relation

Une régression linéaire simple entre SCR et ratio de levier d'une part et SCR et ratio actif/passif d'autre part nous donne les résultats représentés sur la figure 5. L'interprétation graphique nous incite à utiliser une relation entre SCR et ratio de levier :

(6.2.5)

$$SCR_t = \beta + \alpha AER_t \text{ avec } AER_t = \frac{A_t}{A_t - L_t}, \alpha = -2,6378 \times 10^{-2}, \beta = 238,51 \times 10^{-2}$$

Gardons en tête que ce choix n'est évidemment pas optimum, néanmoins étant donné la faible profondeur d'historique de données disponibles, l'approche linéaire reste une approximation acceptable, permettant de s'intégrer facilement dans un modèle AT1P.

[Brigo *et al.*, 2013] proposent une extension de l'approche linéaire avec un bruit gaussien de la forme :

(6.2.6)

$$SCR_t = \beta + \alpha \sigma_{AER} \left(\eta \frac{AER_t}{\sigma_{AER}} + \sqrt{1 - \eta^2} \epsilon_t \right) \text{ avec } \forall t > 0, \epsilon_t = \mathcal{G}(0, 1), \eta \in [0, 1]$$

Observons que le paramètre η permet de contrôler la corrélation entre X_t et SCR_t :

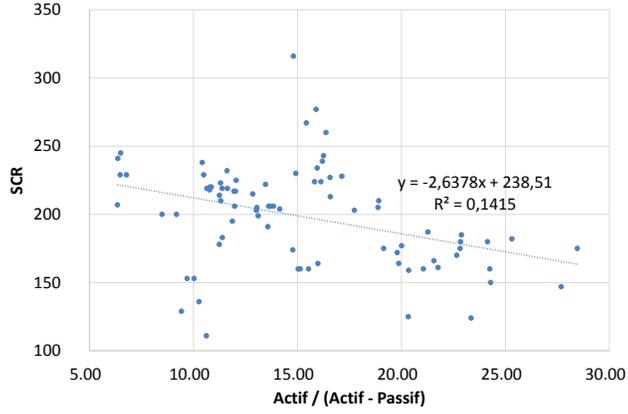
- pour $\eta = 0$, on obtient un SCR constant pour toutes les valeurs de X_t et ainsi une corrélation nulle
- pour $\eta = 1$, on obtient la droite de régression initiale sans ajout de bruit et ainsi une corrélation maximale

L'ensemble de ces calculs peut être visualisé sur la figure 5.

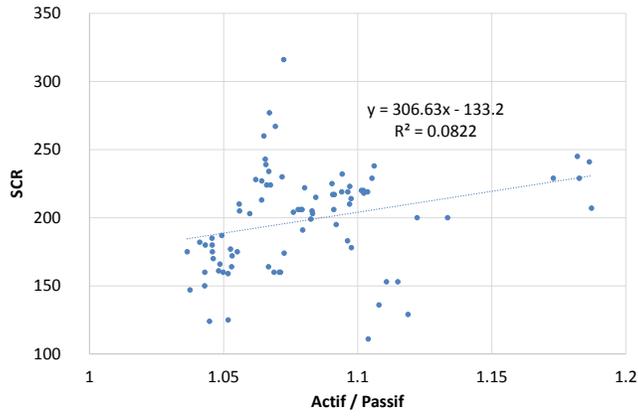
Pour appliquer le modèle structurel à l'assurance, nous partons donc sur la relation suivante entre le SCR et le niveau de levier AER_t :

$$(6.2.7) \quad SCR_t = \begin{cases} \beta + \alpha \sigma_{AER} \left(\eta \frac{AER_t}{\sigma_{AER}} + \sqrt{1 - \eta^2} \epsilon_t \right) & V_t \geq L_t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

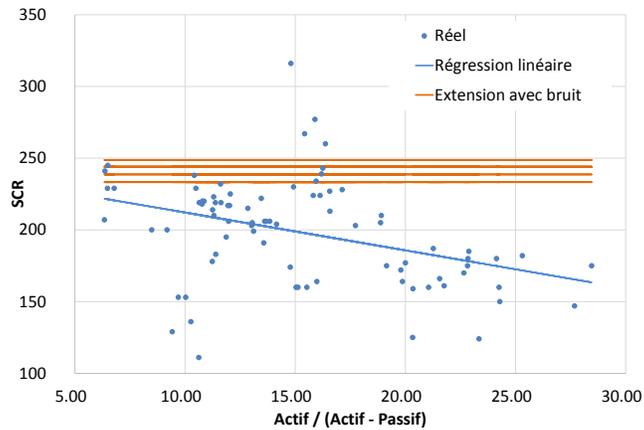
avec $\beta = 238,51 \times 10^{-2}$, $\alpha = -2,6378 \times 10^{-2}$ les coefficients de la régression linéaire entre SCR_t et $AER_t = \frac{A_t}{A_t - L_t}$ et $\sigma_{AER} = 5,21945$ l'écart type historique des AER_t .



(A) $SCR_t = \beta + \alpha AER_t$



(B) $SCR_t = \beta' + \alpha' AL_t$



(c) Extension pour 5 simulations de ϵ_t et $\eta = 0.5$

CHAPITRE 7

Simulation d'une émission

7.1. Préliminaires

7.1.1. Structure de l'émission

Les principales caractéristiques indispensables pour appartenir au capital Tier 1 d'un assureur ont été décrites dans la section 2.4.2 :

- Maturité d'au moins 30 ans, pas de call avant 5 ans et sans incitation au rappel anticipé.
- Possibilité de suspendre le paiement des intérêts sans contre-partie.
- Suspension du paiement des intérêts si le montant distribuable n'est pas suffisant.
- Suspension du paiement des intérêts et/ou du remboursement du capital si cela entraînerait un SCR en dessous de 100%.
- Mécanisme d'absorption des pertes (dépréciation du nominal ou conversion en actions ordinaires).

Dans [EIOPA, 2014], l'article OF.9. page 130 précise les choses concernant le mécanisme d'absorption :

The basic own-fund item absorbs losses at least once there is non-compliance with the Solvency Capital Requirement and does not hinder the recapitalisation of the insurance or reinsurance undertaking ;

Par ailleurs, toujours dans le même l'article, la section **Full discretion over distributions** confirme que le non paiement des intérêts est totalement libre et qu'un coupon non payé ne constitue pas un arriéré de paiement mais est définitivement perdu.

Concernant les obligations contingentes convertibles Additional Tier 1 bancaires, les principales caractéristiques sont :

- Maturité perpétuelle, pas de call avant 5 ans et sans incitation au rappel anticipé.
- Possibilité de suspendre le paiement des intérêts sans contre-partie.
- Suspension du paiement des intérêts si le montant distribuable n'est pas suffisant.
- Mécanisme d'absorption des pertes (dépréciation du nominal ou conversion en actions ordinaires) si le ratio CET1 passe en dessous de 5.125%.

Le tableau 1 synthétise ces observations.

	Additional Tier 1 Banque	Tier 1 Assurance
Maturité minimale	Perpétuelle	30 ans
Premier call	5 ans	5 ans
Incitation au rachat	Non	Non
Suspension des intérêts discrétionnaire	Oui	Oui
Paiement des intérêts cumulatif	Non	Non
Paiement des intérêts obligatoire si versement de dividende	Non	Non
Paiement des intérêts seulement si montant distribuable suffisant	Oui	Oui
Annulation des intérêts si le paiement entraîne insolvabilité	Non	Oui
Absorption des pertes	Oui	Oui
Déclencheur	CET1 < 5.125%	SCR < 75% / MCR < 100% / SCR < 100% pendant 3 mois

TABLE 1. Comparaison des caractéristiques du capital réglementaire AT1 banque et T1 assurance

La condition de suspension de coupon dans le cadre assurantiel est donc légèrement plus contraignante avec une annulation automatique si son paiement entraînerait une chute du SCR en dessous de 100%. Le caractère discrétionnaire de cette annulation rend similaire les conditions liées au coupon entre les titres bancaires et assurantiels.

La condition d'absorption des pertes et donc de conversion automatique en cas de franchissement d'un ratio de solvabilité est également une caractéristique nécessaire de ces deux types de titres. Il reste à déterminer s'il y a équivalence entre les conditions CET1 < 5.125% et SCR < 100%.

Liens entre CET1 et SCR

Gardons en tête que le SCR représente un ratio "capital constitué" sur "capital de solvabilité requis" tandis que le ratio CET1 représente un ratio "capital constitué" sur "bilan pondéré par les risques".

La directive cadre Solvabilité II indique que le franchissement du SCR en dessous du seuil de 100% n'impliquera pas la mise sous tutelle automatique de l'institution concernée par le régulateur national dont elle dépend (alors que ce sera le cas en cas de passage du MCR en dessous du seuil de 100%, avec une possible liquidation et retrait d'agrément).

Dans le cas bancaire, le point de non viabilité est fixé à un ratio CET1 inférieur à 4.5%.

Ainsi les seuils de déclenchement des obligations contingentes convertibles prévus par la réglementation sont dans chaque réglementation au

dessus du critère de non viabilité de l'institution.

S'il n'y a évidemment pas de strict équivalence entre $SCR < 100\%$ et $CET1 < 5.125\%$ qui peut être reformulée en :

$$\begin{aligned} \text{fonds propres assureur} &< \text{Capital de solvabilité requis} \\ &\iff \\ \text{fonds propres banque} &< 5.125\%RWA \end{aligned}$$

Nous allons cependant faire l'hypothèse que cette assertion est bien vérifiée. Cependant, nous pourrions tester plusieurs niveaux de déclencheurs (100%, 125%, ...)

Les caractéristiques des titres Additional Tier 1 émis par les banques sont globalement similaires aux titres Tier 1 Solvabilité II. Nous pouvons donc appliquer les résultats empiriques bancaires à l'assurance.

7.1.2. Présentation de l'émetteur

Afin de pouvoir réaliser nos simulations pour chaque modèle, il est important de choisir un émetteur pour lequel nous n'aurons pas de difficulté à récupérer les différentes données de marché nécessaires. De plus, notre émetteur doit avoir une structure de dette obligataire suffisante, ainsi qu'une présence importante sur les produits dérivés qui nous intéressent (options sur actions, Credit Default Swap). A partir de ces critères, les candidats sont les grands assureurs généralistes européens : AXA, Allianz, Aviva, Generalli.

Notre choix définitif s'arrête sur l'assureur généraliste AXA du fait de sa présence importante sur les marchés de la dette.

7.1.2.1. Quelques chiffres

Pas besoin de présenter longuement le premier assureur européen, voici simplement quelques éléments, principalement issus de [AXA, 2014b] et [AXA, 2014a] au 31/12/2014 :

- Chiffre d'affaires : 92 milliards d'euros
 - dont Vie : 55 milliards d'euros
 - dont IARD : 30 milliards d'euros
- Résultat net : 5 milliards d'euros
- Bilan total : 840 milliards d'euros
- Fonds propres : 65 milliards d'euros
- Ratio de solvabilité (Solvabilité I) : 266%
- Ratio de capital économique (SCR) : 201%

La figure 1 donne par ordre de séniorité les différents types d'obligations émises par AXA :

- La dette **senior covered** est adossée (collatéralisée) à un actif qui revient au porteur obligataire en cas de défaut de l'émetteur ;
- la dette **senior uncovered** de rang senior en cas de défaut de l'émetteur ;
- la dette **legacy tier 2** de rang subordonné, pouvant voir son coupon suspendu (mais cumulé en cas de suspension) et émise sous des critères Solvabilité I ;

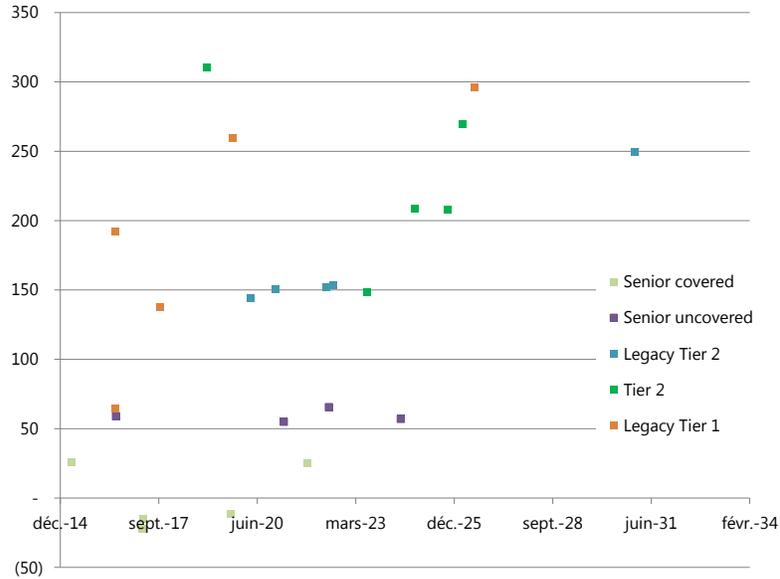


FIGURE 1. Primes de crédit par rapport à la courbe des taux swap des obligations AXA à la prochaine date de call ou à maturité au 08/04/2015

- la dette **tier 2** de rang subordonné, pouvant voir son coupon suspendu (mais cumulé en cas de suspension) et émise sous des critères Solvabilité II;
- la dette **legacy tier 1** de rang subordonné, pouvant voir son coupon suspendu (et non cumulé en cas de suspension) et émise sous des critères Solvabilité I.

7.1.3. Sur la formule d'évaluation générale de l'obligation CoCo

On rappelle la formule d'évaluation générale de l'obligation CoCo (équation (3.4.1)) :

$$X_C(t, T) = \mathbf{1}_{\{\theta > T\}} X(t, T) + \mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}} [X(t, \theta) + b(t, \theta) C_r S_\theta]$$

Comme vu dans la section 7.1.1, en plus de la clause d'absorption des pertes, l'obligation CoCo sous Solvabilité II doit inclure une clause de suspension de coupon discrétionnaire. Une obligation incluant cette clause, sans celle d'absorption des pertes ($X(t, T)$ dans équation (3.4.1)), existe déjà sous Solvabilité I : il s'agit d'obligation legacy tier 1. La prime de crédit est illustrée pour AXA sur la figure 1.

Dans le cas d'AXA, l'obligation Tier 1 de maturité (prochaine date de call) 5 ans au 31/12/2014 la plus proche est l'obligation ayant comme code ISIN XS0325823119, libellée en GBP (ce qui n'a que peu d'importance car nous observons la prime de crédit au delà du taux sans risque).

La prime de crédit observée pour pour une obligation de même caractéristique que l'obligation CoCo sans option de conversion pour AXA est de 331 points de base.

7.2. Forme réduite et dérivés action

Nous présentons ici les résultats des simulations avec les modèles à forme réduite et à dérivé action, en utilisant les résultats de la section 6.1 sur la barrière pour déclencheur implicite. L'ensemble des calculs est réalisé avec les données de marché au 31/12/2014.

7.2.1. Données de marché

On rappelle que nous nous plaçons dans un modèle simple où les paramètres σ , r et q sont supposés constants. L'estimation de ces paramètres à une date donnée est néanmoins délicate. Le tableau 2 illustre par exemple les différentes volatilités historiques et implicites σ pour le titre AXA. Les valeurs peuvent varier entre 22% et 27%, en fonction de la profondeur de l'historique ou de la méthode utilisée.

Type	Valeur
Volatilité historique 30 jours	27,26%
Volatilité historique 60 jours	27,25%
Volatilité historique 90 jours	24,17%
Volatilité historique 120 jours	23,11%
Volatilité historique 180 jours	22,03%
Volatilité historique 360 jours	23,53%
Volatilité implicite options à 3 mois	23,05%
Volatilité implicite options à 12 mois	23,80%

TABLE 2. Différentes volatilités de l'action AXA au 31/12/2014

On peut observer le même phénomène sur le taux de dividende q (tableau 3) calculé comme le rapport entre le dividende (estimé ou passé) et le cours de l'action. Ce taux a un impact fort sur la valorisation en raison des taux souverains proches de zéro dans l'univers actuel.

Type	Valeur
Rendement historique 12 derniers mois	4,23%
Rendement prévisionnel estimé	4,48%

TABLE 3. Différents taux de dividende pour l'action AXA au 31/12/2014

7.2.2. Calculs

Nous nous servons des formules d'évaluation de la prime de crédit de l'obligation CoCo dans le modèle à forme réduite (équation (4.2.8) et équation (4.2.9)). De même, nous utilisons l'équation (4.3.2) pour le modèle à dérivés actions.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- le prix de conversion C_p est égal au prix de l'action AXA S_0 le jour de l'émission

- le nombre d'actions reçu en cas de conversion C_r est calculé le jour de l'émission pour évaluer le nominal de l'obligation (fixé à 100) : $C_r = \frac{100}{C_p}$

Il nous reste à appliquer les résultats obtenus dans la section sur la modélisation de la barrière afin de déterminer S^* . On rappelle la relation (section 6.1) entre S^* et σ dans le cas d'une barrière implicite :

$$\delta_{S^*} = \frac{S^*}{S} - 1 = 3,0466\sigma^2 - 2,8306\sigma - 0,0946$$

Nous visualisons l'impact de la relation entre S^* et σ en testant différentes formes pour la régression comme illustré sur la figure 2.

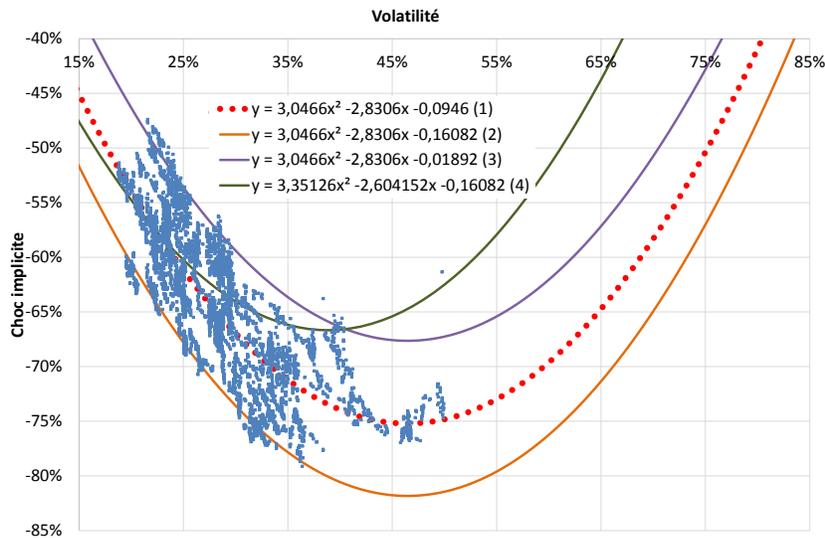


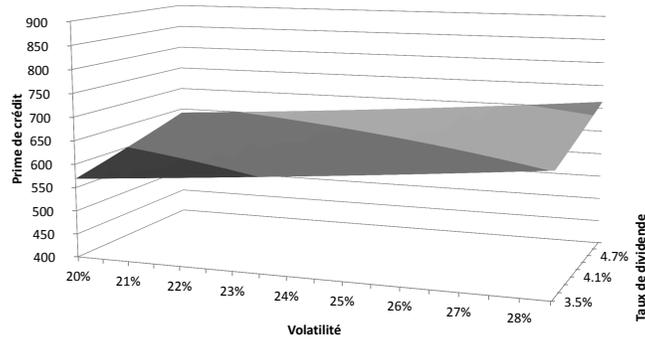
FIGURE 2. Différentes interpolations polynomiales

Quelques commentaires sur ces régressions :

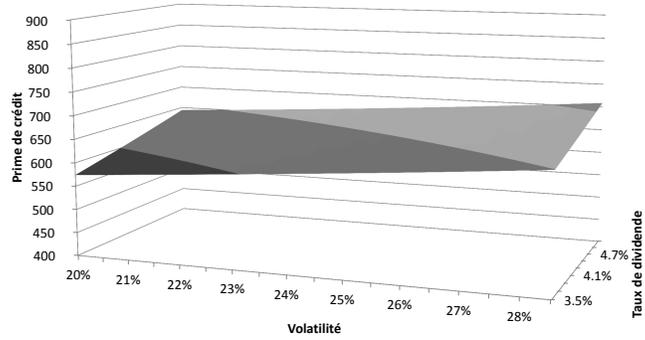
- la courbe 1 est l'interpolation centrale : $\delta_{S^*} = \frac{S^*}{S} - 1 = 3,0466\sigma^2 - 2,8306\sigma - 0,0946$
- la courbe 2 s'interprète comme l'interpolation la moins sévère pour une dynamique similaire à l'interpolation centrale : $\delta_{S^*} = \frac{S^*}{S} - 1 = 3,0466\sigma^2 - 2,8306\sigma - 0,16082$
- la courbe 3 s'interprète comme l'interpolation la plus sévère pour une dynamique similaire à l'interpolation centrale : $\delta_{S^*} = \frac{S^*}{S} - 1 = 3,0466\sigma^2 - 2,8306\sigma - 0,01892$
- la courbe 4 amplifie le choc implicite pour les faibles volatilités (en diminuant ainsi le risque) et le diminue pour les volatilités plus importantes en augmentant ainsi la prise en compte du risque. Il s'agit d'une courbe intermédiaire

entre les trois premières : $\delta_{S^*} = \frac{S^*}{S} - 1 = 3,35126\sigma^2 - 2,604152\sigma - 0,16082$

Nous faisons de plus varier les paramètres σ et q en fonction des valeurs observables sur le marché : $\sigma \in [19.5\%; 28\%]$ et $q \in [3.5\%; 5.1\%]$.

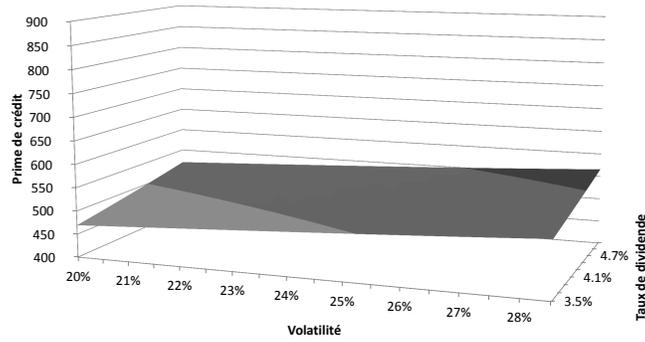


(A) Forme réduite

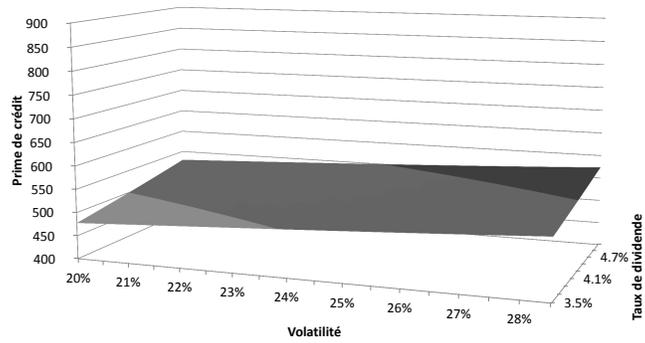


(B) Dérivé action

FIGURE 3. Primes de crédit en fonction de σ et q : **interpolation 1**



(A) Forme réduite

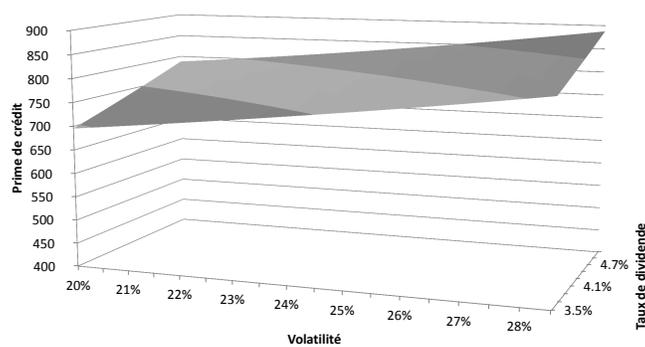


(B) Dérivé action

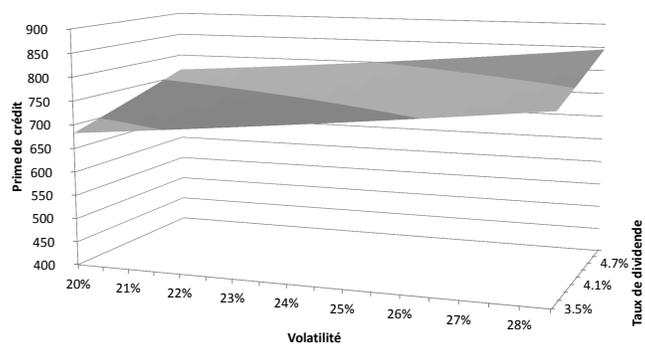
FIGURE 4. Primes de crédit en fonction de σ et q : **interpolation 2**

Les figures 3 à 6 illustrent les résultats de ces calculs. Sans surprise, les interpolations 2 et 3 permettent d'obtenir des bornes hautes et basses pour les primes de crédit :

- Valeurs maximales autour de 850 points de base dans les deux modèles avec l'interpolation 3.



(A) Forme réduite



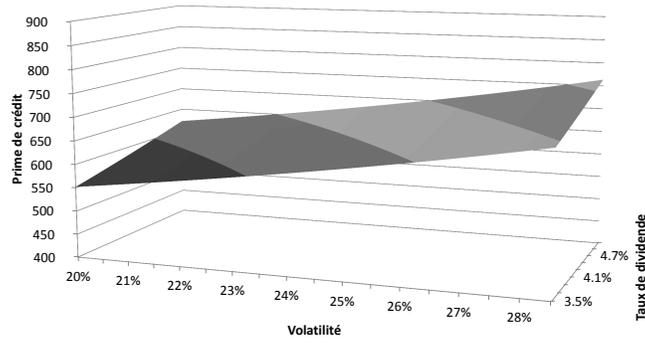
(B) Dérivé action

FIGURE 5. Primes de crédit en fonction de σ et q : **interpolation 3**

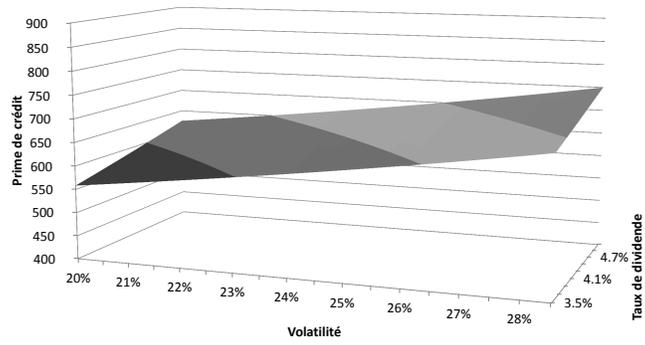
- Valeurs minimales autour de 450 points de base dans les deux modèles avec l'interpolation 2.

En prenant les niveaux suivants pour les paramètres :

- $\sigma = 23.5\%$
- $r = 0.6\%$
- $q = 4.25\%$



(A) Forme réduite



(B) Dérivé action

FIGURE 6. Primes de crédit en fonction de σ et q : **interpolation 4**

– courbe d'interpolation centrale

on obtient une prime de crédit de :

- 630 points de base pour le modèle à forme réduite
- 632 points de base pour le modèle à dérivé action.

7.2.3. Analyse

Le deux modèles affichent, sans surprise, des résultats très proches. Comme nous l'avions déjà remarqué, ces modèles sont peu adaptés à la valorisation directe d'obligation CoCo. La nécessité de déterminer un niveau seuil S^* implique de faire des hypothèses très fortes entre ce niveau et la perception par le marché des ratios de solvabilité.

Notre choix de lier ce niveau à la volatilité permet d'obtenir des formules fermées facilement exploitables. Néanmoins le choix de la relation utilisée entre ces deux variables va avoir un impact fort sur les résultats.

7.3. Modèle structurel

7.3.1. Rappel du problème

On rappelle que dans le modèle structurel, les actifs V_t d'une compagnie sont modélisés par :

$$(7.3.1) \quad dV_t = V_t(r_t - q_t)dt + V_t\sigma_t dW_t$$

De plus, la barrière $H(t)$ représentant le défaut de l'entreprise est de la forme :

$$(7.3.2) \quad H(t) = H \exp\left(\int_0^t (r_s - q_s - B\sigma_s^2)ds\right)$$

Nous avons établi précédemment le lien entre ratio de solvabilité, V_t et $H(t)$

$$(7.3.3) \quad SCR_t = \begin{cases} \beta + \alpha\sigma_{AER} \left(\eta \frac{AER_t}{\sigma_{AER}} + \sqrt{1 - \eta^2} \epsilon_t \right) & V_t \geq H(t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $AER_t = \frac{V_t}{V_t - H(t)}$, $\alpha = -2,6 \times 10^{-2}$, $\beta = 238,5 \times 10^{-2}$ et $\sigma_{AER} = 5,21945$.

On rappelle également que dans ce modèle, l'évaluation de S_t est possible avec l'équation (5.1.4).

On rappelle enfin que le payoff d'une obligation CoCo de maturité T évalué à l'instant t s'exprime par :

$$X_C(t, T) = \mathbf{1}_{\{\theta > T\}} X(t, T) + \mathbf{1}_{\{\theta \leq T\}} [X(t, \theta) + b(t, \theta)C_r S_\theta]$$

avec

$$(7.3.4) \quad \theta = \inf\{t \geq 0 : c_t \leq \bar{c}\} = \inf\{t \geq 0 : SCR_t \leq \overline{SCR}\}$$

Afin de pouvoir effectuer des simulations et calculer $\mathbb{E}[X_C(t, T)]$, nous avons besoin de calibrer les paramètres σ_s , B et H .

Les étapes du calcul seront les suivantes :

- (1) Calibrage de la nappe de volatilité σ_s à partir des observations des CDS
- (2) Calibrage des paramètres B et H à partir des CDS, du dernier SCR disponible, et du prix de marché de l'action sous-jacente
- (3) Simulation par une méthode de Monte-Carlo pour calculer le prix de l'obligation CoCo

7.3.2. Calibrage des paramètres du modèle

A partir de l'équation (5.1.5), il est possible de lier la valeur des CDS aux probabilités de survie aux dates $T_1, \dots, T_N = T$. Il ne reste alors plus qu'à obtenir les meilleurs paramètres σ_i par rapport aux données de marché disponibles.

En notant $CDS_M^{T_i}$ le prix de marché observé du CDS de maturité T_i et $CDS_C^{T_i}$ le prix calculé avec l'équation (5.1.5), le but va donc être de minimiser l'écart entre les deux vecteurs de \mathbb{R}^N :

$$\begin{aligned} & - CDS_M = (CDS_M^{T_1}, \dots, CDS_M^{T_N}) \\ & - CDS_S(CDS_C^{T_1}, \dots, CDS_C^{T_N}) \end{aligned}$$

[Brigo *et al.*, 2004] choisissent d'utiliser la distance euclidienne usuelle, non pas entre CDS_M et CDS_S , mais plus logiquement entre $\frac{CDS_C}{CDS_M}$ et le vecteur unité (qui représente une correspondance parfaite à 100%).

Notre problème revient à la minimisation de :

$$(7.3.5) \quad F(x) = F(\sigma_1, \dots, \sigma_N, B, H) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{CDS_C^{T_i} - CDS_M^{T_i}}{CDS_M^{T_i}} \right)^2$$

On se retrouve avec un problème de minimisation classique pouvant se résoudre facilement par une méthode numérique. Dans notre cas, nous utilisons la méthode du gradient réduit généralisé. A partir d'un point initial $x^{(0)} = (\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)}, \dots, B^{(0)}, H^{(0)})$, on cherche à minimiser F selon plusieurs contraintes :

$$\begin{aligned} & - \sigma_i > 5\% \text{ et } \sigma_i < 40\% \forall i \\ & - \frac{H}{V_0} < 1 \end{aligned}$$

Calibrage de la volatilité du modèle AT1P par les CDS sur AXA

Maturité (années)	CDS Senior	CDS Subordonnée
0,5	21,9	35,8
1	26,2	39,6
2	34,9	60,1
3	44,2	76,1
4	53,7	91,9
5	61,8	107,6
7	80,4	135,3
10	95,6	150,9

TABLE 4. Prime des CDS sur la dette senior et subordonnée d'AXA pour plusieurs maturités

Nous illustrons cette méthode sur la courbe des CDS de AXA (dette subordonnée) dont les valeurs de marché au 31/12/2014 sont indiquées dans la seconde colonne du tableau 4.

Nous fixons B à 0 pour cet exemple. Etant donné le degré de liberté supplémentaire ($N = 8$ observations de CDS et $N + 1 = 9$ variables pour l'optimisation), plusieurs solutions permettant de faire correspondre avec une très bonne précision

les observations (notamment en fonction du point initial $x^{(0)}$).

Nous proposons deux méthodes pour la détermination de $x^{(0)}$:

- méthode 1 : nous lançons une première fois l'algorithme avec $x^{(0)} = \{\sigma_1 = 25\%, \dots, \sigma_8 = 25\%, B = 0\}$ en minimisant uniquement sur les (σ_i) . Nous utilisons ensuite la solution obtenue comme nouveau point de départ en laissant cette fois-ci H comme degré de liberté supplémentaire
- méthode 2 : nous lançons l'algorithme avec $x^{(0)} = \{\sigma_1 = 25\%, \dots, \sigma_8 = 25\%, B = 0\}$ en minimisant sur les (σ_i) et H directement

Les résultats de ces méthodes sont visibles dans le tableau 5 et le tableau 6.

H initial	20%		40%		60%		80%	
H calibré	33%		40%		60%		78,3%	
Maturité (années)	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i
0,5	50,00%	9,0E-19	41,73%	3,7E-19	23,71%	2,9E-20	11,49%	1,5E-16
1	20,84%	2,0E-20	17,55%	8,3E-19	10,17%	1,5E-18	5,00%	6,2E-16
2	21,44%	1,2E-20	18,12%	1,0E-18	10,59%	4,1E-17	5,24%	2,5E-18
3	20,30%	1,7E-20	17,23%	8,0E-17	10,18%	7,9E-17	5,07%	7,6E-19
4	20,71%	5,2E-21	17,64%	2,1E-16	10,52%	6,8E-18	5,28%	3,8E-20
5	21,47%	1,3E-20	18,36%	9,2E-18	11,05%	2,7E-17	5,59%	9,0E-20
7	22,40%	3,0E-21	19,27%	9,1E-16	11,76%	6,1E-18	6,02%	1,0E-18
10	20,84%	1,2E-21	18,07%	6,1E-16	11,26%	6,1E-18	5,86%	4,4E-21

TABLE 5. Courbe de volatilité obtenues avec le modèle AT1P :
méthode 1 ($\Delta_i = \frac{CDS_C^{T_i} - CDS_M^{T_i}}{CDS_M^{T_i}}$)

H initial	20%		40%		60%		80%	
H calibré	33%		35,7%		34,4%		78,3%	
Maturité (années)	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i
0,5	50,00%	9,7E-19	46,66%	2,8E-20	48,32%	1,2E-17	11,49%	1,4E-19
1	20,84%	2,4E-20	19,52%	4,5E-18	20,18%	1,7E-17	5,00%	2,8E-19
2	21,44%	2,0E-20	20,11%	6,5E-16	20,77%	1,8E-18	5,24%	5,2E-20
3	20,30%	9,3E-20	19,08%	5,6E-15	19,69%	1,8E-18	5,07%	2,6E-22
4	20,71%	3,4E-22	19,49%	4,5E-15	20,09%	1,4E-16	5,28%	2,3E-20
5	21,47%	4,4E-20	20,24%	3,6E-16	20,85%	1,3E-16	5,59%	9,2E-21
7	22,40%	2,0E-20	21,15%	8,3E-15	21,78%	1,8E-15	6,02%	4,3E-21
10	20,84%	7,0E-21	19,74%	4,3E-15	20,29%	5,6E-18	5,86%	4,6E-22

TABLE 6. Courbe de volatilité obtenues avec le modèle AT1P :
méthode 2 ($\Delta_i = \frac{CDS_C^{T_i} - CDS_M^{T_i}}{CDS_M^{T_i}}$)

Les résultats sont extrêmement dépendants du point initial choisi $x^{(0)}$, tout en obtenant une précision excellente sur le calcul du prix des CDS.

L'utilisation de N CDS nous permet de calibrer N points de volatilité $(\sigma_i)_{i=1, \dots, N}$, cependant nous avons encore deux degrés de liberté avec les paramètres B et H .

Nous allons reprendre l'algorithme précédent en incluant le dernier SCR publié $SCR_M = 204\%$ (au 31/12/2014) et le comparer à $SCR_0 = \beta + \alpha \sigma_{AER} \left(\eta \frac{AER_0}{\sigma_{AER}} + \sqrt{1 - \eta^2} \epsilon_0 \right)$, $AER_0 = \frac{V_0}{V_0 - H}$

[Brigo *et al.*, 2013] utilisent également la valeur de l'entreprise calculée dans le modèle AT1P en $t = 0$ avec l'équation (5.1.4), et le comparent au prix de l'action sous-jacente observée sur le marché. Nous ne retenons cependant pas cette méthode car elle impose

- des hypothèses fortes entre le prix de l'action sous-jacente sur le marché et l'évaluation de la valeur de l'entreprise de S_0 ;
- ne plus pouvoir utiliser simplement le ratio $\frac{H}{V_0}$ mais bien la valeur réelle de V_0 .

Notre nouveau problème est la minimisation de :

$$F(\sigma_1, \dots, \sigma_N, B, H) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{CDS_C^{T_i} - CDS_M^{T_i}}{CDS_M^{T_i}} \right)^2 + \left(\frac{SCR_0 - SCR_M}{SCR_M} \right)^2$$

Nous testons plusieurs points initiaux pour l'optimisation, le résultat le plus satisfaisant est présenté dans le tableau 7.

H initial	80%	
H calibré	76,77%	
B initial	0	
B calibré	0.009	
Maturité (années)	σ_i	Δ_i
0,5	12,07%	4,3E-12
1	5,09%	3,6E-13
2	5,26%	3,9E-11
3	5,01%	6,5E-12
4	5,14%	2,2E-11
5	5,36%	2,9E-12
7	5,65%	2,3E-11
10	5,35%	9,7E-12

TABLE 7. Paramètres finaux du modèle AT1P ($\Delta_i = \frac{CDS_C^{T_i} - CDS_M^{T_i}}{CDS_M^{T_i}}$)

7.3.3. Valorisation de l'obligation par Monte-Carlo

L'ensemble des paramètres du modèle AT1P étant maintenant calibrés, nous pouvons effectuer les simulations pour valoriser une potentielle obligation contingente convertible émise par AXA.

Maillage

Même si le ratio de solvabilité n'est publié qu'entre 2 et 4 fois par an, un tel maillage n'est pas satisfaisant pour valoriser notre obligation. En effet, plus le maillage va être large, et plus les événements "insolvabilité" et "défaut" vont survenir au même temps ($\theta = \tau$), minimisant ainsi le prix de l'action sous-jacente au temps θ

($S_\tau = 0...$), mais maximisant également le nombre de coupons reçus par le porteur.

Nous prenons un maillage de t relativement fin avec 500 pas par an.

Nombre de simulations

Les simulations vont nous permettre de calculer une espérance, qui doit s'accompagner d'un intervalle de confiance (au sens gaussien) pour son interprétation. La précision du calcul dépend de la racine carré du nombre de simulations \sqrt{M} .

Pour trouver le bon équilibre entre temps de calcul et précision, nous effectuons $M = 100000$ simulations.

Paramètres r , q et η

Nous gardons un taux sans risque constant $r = 0.36\%$, la faiblesse et la pente des taux d'intérêts actuels rendant naturel ce choix méthodologique.

Contrairement aux modèles précédents, nous ne modélisons pas directement l'action sous-jacente observable sur le marché. Ainsi le taux de dividende q n'est pas le taux de dividende de l'action sous-jacente mais doit plutôt s'interpréter comme le dividende distribué sur les actions, rapporté à l'ensemble des actifs de la société.

Dans le cas d'AXA, en prenant en compte le total des actifs au bilan ($V_0 = 840$ milliards d'euros au 31/12/2014), le total des actions disponibles sur le marché multiplié par leur valeur (40 milliards d'€ au 31/12/2014) et le taux de dividende estimé de l'action (4.3%), on obtient $q = 0.204\%$.

Nous faisons cependant varier q entre $-r$ et $4r$ pour nos simulations.

Enfin, nous faisons varier η entre 0% et 100%.

Résultats

Les résultats de ces simulations apparaissent sur la figure 7 tandis que ceux pour les paramètres standards ($r = 0.36\%$, $q = 0.20\%$) sont résumés dans le tableau 8. La prime de crédit dans le modèle AT1P ressort entre 600 points de base ($\eta = 0\%$) et 660 points de base ($\eta = 100\%$) pour une obligation CoCo émise par AXA.

On observe une volatilité relativement faible des résultats en fonction de η . En revanche le choix de q reste fondamentale, avec une prime de crédit pouvant varier de 800 ($q = -r$) à 450 ($q = 4r$) points de base.

7.3.4. Sensibilités aux paramètres

Nous visualisons l'impact du choix du point initial $x^{(0)} = \{H^{(0)}, B^{(0)}, \sigma_1^{(0)}, \dots, \sigma_{10}^{(0)}\}$ sur les résultats. Nous retenons pour le calcul de ces sensibilités $r = 0.36\%$, $q = 0.20\%$ et $\eta = 100\%$. Nous utilisons la méthode 2 (section 7.3.2) en incluant le SCR avec H et B comme degrés de liberté pour le calibrage. L'impact de B étant faible, nous faisons varier uniquement les valeurs initiales de H et σ_i .

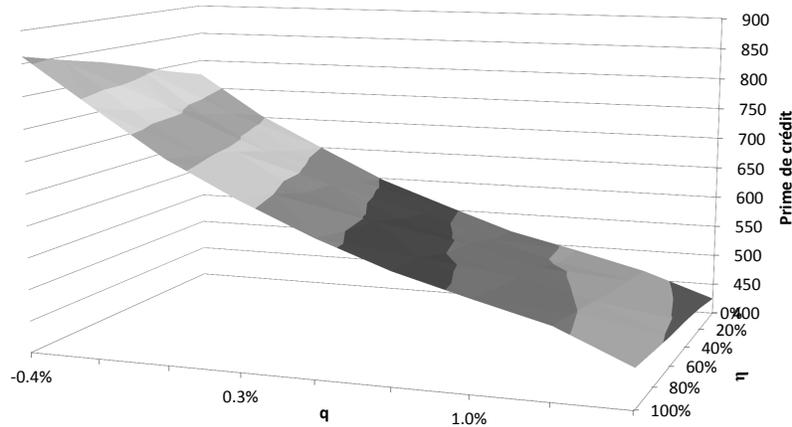


FIGURE 7. Primes de crédit selon le modèle structurel en fonction de η et q

r	0.36%	0.36%	0.36%	0.36%	0.36%	0.36%
q	0.20%	0.20%	0.20%	0.20%	0.20%	0.20%
η	0%	20%	40%	60%	80%	100%
Prime de crédit (points de base)	597	613	627	632	651	660
Intervalle de confiance à 95%	[592 ; 602]	[608 ; 618]	[622 ; 633]	[628 ; 637]	[649 ; 656]	[655 ; 665]

TABLE 8. Prime de crédit pour une CoCo AXA en fonction de η avec le modèle AT1P

Comme le tableau 9 l'illustre, le modèle est assez peu sensible au choix initial des σ_i . En revanche, le point initial pour H va beaucoup influencer sur le résultat de l'optimisation.

Un H faible va entraîner des volatilités plus élevées, mais en contrepartie diminuer la probabilité de déclenchement. Ce double effet va finalement rendre les primes calculées proches de celle du scénario central (660 points de base). Il est cependant raisonnable de choisir une valeur initiale proche de V_0 pour H .

Nous visualisons également l'impact d'un stress sur la courbe des CDS. Nous effectuons un décalage parallèle de cette courbe entre +30% et +100%. Nous retenons les mêmes paramètres que précédemment pour le modèle.

Les résultats de ces simulations sont visibles dans le tableau 10. L'augmentation de

H initial	30%		30%		50%		50%	
σ initial	25%		10%		25%		10%	
H calibré	32.0%		32.0%		50.4%		50.5%	
Maturité (années)	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i	σ_i	Δ_i
0,5	50%	1.0E-18	50%	3.3E-20	31%	5E-20	31%	8.5E-20
1	20%	2.7E-18	20%	5.5E-22	13%	2E-20	13%	1.6E-22
2	21%	5.4E-18	21%	3.2E-22	13%	4E-22	13%	1E-20
3	19%	6.0E-18	19%	9.6E-22	12%	4.1E-24	12%	1E-20
4	19%	6.6E-18	19%	1E-22	13%	4.5E-24	13%	2E-20
5	20%	6.3E-18	20%	3.0E-22	13%	5.3E-24	13%	2E-20
7	20%	7.7E-18	20%	2.8E-22	13%	6.3E-24	14%	6E-20
10	19%	5.7E-18	19%	9E-22	12%	8.2E-24	13%	3E-20
Prime de crédit (points de base)	649		649		618		613	

TABLE 9. Impact du point initial $x^{(0)}$ sur la prime de crédit ($\Delta_i = \frac{CDS_C^{T_i} - CDS_M^{T_i}}{CDS_M^{T_i}}$)

la prime des CDS va augmenter la volatilité calibrée ainsi que le niveau initial du passif H . Ainsi l'obligation CoCo va devenir plus risquée et aura donc une prime de crédit plus élevée.

Stress CDS	+30%	+60%	+100%
H calibré	78%	79%	80%
Prime de crédit (points de base)	703	753	791
Intervalle de confiance à 95%	[698 ; 708]	[748 ; 758]	[786 ; 796]

TABLE 10. Impact d'un stress parallèle des CDS sur la prime de crédit

7.3.5. Impact du déclencheur

Nous avons fait l'hypothèse d'un déclencheur basé sur un SCR en dessous de 100%. Néanmoins, un déclencheur au dessus de cette limite pourrait avoir du sens pour éviter l'insolvabilité de l'émetteur. Les CoCo bancaires ont par exemple plusieurs niveaux de déclencheur (5.125% : low trigger, 7% : high trigger), il est raisonnable de penser que plusieurs niveaux existeront pour les assureurs.

Nous effectuons les calculs avec les paramètres standards (tableau 8), les résultats apparaissent sur le tableau 11. Sans surprise, la prime de crédit augmente avec le niveau du déclencheur, mais de manière assez limitée.

7.3.6. Analyse

Avec les paramètres centraux, nous obtenons une prime de crédit autour de 660 points de base, très proche de celle estimée avec les modèles à dérivé action et à forme réduite. Les résultats des simulations dépendent encore toujours très

Trigger	100%	110%	125%	130%
Prime de crédit (points de base)	660	671	685	692

TABLE 11. Prime de crédit en fonction du niveau du déclencheur

fortement du taux de dividende q .

En revanche, les résultats ne dépendent plus de la volatilité de l'action sous-jacente σ_s observée sur le marché. Ceci est une nette amélioration par rapport aux modèles de la section 7.2, notamment pour évaluer les CoCo d'émetteurs n'ayant pas d'action cotée.

Le calibrage de σ_s par les CDS de l'émetteur permet de plus de capter le risque de crédit propre à l'obligation au delà de ses caractéristiques de conversion.

Le choix du point initial dans le modèle influe de manière importante sur les résultats, reflétant ainsi la sur paramétrisation du modèle. Des choix méthodologiques raisonnables sur les niveaux de volatilités minimum et maximum et sur $H^{(0)}$ permettent de palier à ce problème.

7.4. Comparaison des modèles

Les primes de crédit calculées sont, comme attendu, supérieures à celle de l'obligation Tier 1 AXA observée sur le marché. Cette surprime d'environ 300 points de base (par rapport à la dette Tier 1) permettant de compenser le risque de conversion, semble cohérente avec les observations sur les titres bancaires.

A titre d'illustration, l'écart de prime de crédit entre les titres Tier 1 et Additional Tier 1 de Crédit Agricole à la même date oscille entre 250 et 300 points de base.

Les modèles à dérivé action et à forme réduite permettent une première approche de l'estimation du risque de l'obligation CoCo. En se basant sur le modèle de Black & Scholes avec volatilité constante, ils permettent d'obtenir des formules fermées pour l'évaluation de la prime de crédit.

Néanmoins ces modèles se basent sur un déclencheur de marché avec un niveau seuil de l'action sous-jacente. Or, ce type de déclencheur est absent dans la réglementation actuelle. L'utilisation de ces modèles nécessite d'établir un lien entre baisse de l'action sous-jacente et baisse du ratio de solvabilité. Cette estimation repose sur l'hypothèse que le seuil de déclenchement réglementaire est retranscrit dans le cours de l'action sous-jacente et dans le prix de l'obligation CoCo sur le marché. De plus, ces modèles ne peuvent pas être utilisés sur des assureurs non cotés comme les mutuelles.

L'approche structurel nécessite d'établir un lien entre actif, passif et ratio de solvabilité. L'historique de SCR disponible étant encore relativement limité, il est compliqué d'établir ce lien de manière robuste.

Le modèle AT1P est ensuite calibré avec les CDS subordonnés et le dernier SCR disponible. Les résultats sont moins sensibles aux hypothèses sur le SCR, mais restent très dépendants de l'estimation de q . Les deux faiblesses du modèles sont

l'établissement nécessaire d'un lien entre Actif-Passif et ratio de solvabilité II ainsi que le trop grand nombre de paramètres à calibrer.

[**Wilkens et N., 2014**] concluent que le modèle à dérivé action reste le plus pratique pour la valorisation et la gestion des risques des obligations CoCo bancaires. Cette conclusion ne nous paraît pas aberrante étant donné l'importance de ce marché, mais l'approche structurelle nous semble plus adaptée à cette étude prospective sur les assurances.

Ces trois modèles sont basés sur la même théorie centrale : le caractère gaussien du rendement des actifs risqués, théorie de plus en plus délaissée par les praticiens pour des approches plus statistiques. Une fois qu'un historique de données de CoCo d'assureurs existera, d'autres pistes pourront être examinées (modélisation directe du ratio de solvabilité, sortie du modèle gaussien,...).

Les modèles se focalisent sur la conversion de l'obligation en cas de franchissement du déclencheur. Pourtant les différentes clauses de suspension de coupon sont des caractéristiques fondamentales des obligations CoCo.

Il serait intéressant de modéliser plus finement cette partie du produit, ce qui pourrait justement permettre de ne pas franchir le seuil du déclencheur. Il faudrait pour cela prendre en compte l'ensemble des obligations émises par l'assureur, laissant la possibilité de ne pas payer le coupon en cas de risque d'insolvabilité.

Conclusion générale

Après avoir profondément modifié la structure du capital des banques sous Bâle II et Bâle III, le capital contingent va devenir une possibilité supplémentaire offerte aux assureurs pour renforcer leurs fonds propres sous Solvabilité II.

L'étude des obligations contingentes convertibles, structure hybride située entre la dette et l'action dans le capital de l'émetteur, se révèle complexe. En effet, au delà du risque de crédit lié à l'émetteur, ces obligations présentent deux caractéristiques supplémentaires :

- la possibilité pour l'émetteur de ne pas payer le coupon
- la conversion de l'obligation en capital si le ratio de solvabilité de l'émetteur chute en dessous d'un seuil défini à priori sur le prospectus d'émission.

L'étude attentive des réglementations Bâle III et Solvabilité II nous permet de conclure que la recherche et les données existantes sur les CoCo bancaires constituent une base sérieuse pour l'étude des CoCo d'assureurs.

En utilisant le large historique disponible sur les CoCo bancaires, nous établissons un lien de type polynomiale entre la volatilité de l'action sous-jacente et S^* . Cette approche apparaît cependant peu intéressante, l'hypothèse que le ratio de Solvabilité de l'institution soit totalement retranscrit dans les informations de marché étant beaucoup trop forte. Elle permet cependant d'obtenir des formules fermées intéressantes et surtout de calculer un niveau S^* pour une obligation existante et observable sur le marché.

La modélisation de l'actif et du passif de la société, et l'analyse en composante principale des ratios SCR déjà publiés, nous permet d'obtenir une relation linéaire entre le ratio de solvabilité et le ratio de levier de l'institution. Cette approche est au final nettement plus concluante, et semble être une bonne base pour de futurs développements quand le marché des CoCo d'assureurs aura pleinement débuté.

Du point de vue de l'émetteur, banque ou assurance, l'intérêt de ces produits est indéniable, elles ont ainsi accès à une nouvelle forme de capital, moins onéreux que le capital dur (les actions), et immédiatement disponible pour absorber des pertes.

Comme le montre ce mémoire, la modélisation exhaustive de ces instruments reste aléatoire : en effet, d'une part la modélisation de la conversion, qui repose sur un ratio de solvabilité publié de manière trimestrielle, et d'autre part la possibilité

pour l'émetteur de ne pas payer le coupon de manière discrétionnaire, sont deux éléments qui échappent à tout modèle. L'approche qualitative est donc primordiale pour les investisseurs de ces obligations.

Enfin le régulateur, qui voit dans ces produits une alternative intéressante au capital, ne s'est malheureusement pas posé la question de savoir qui étaient les investisseurs finaux de ce type de papier. Si le but premier est d'éviter une faillite par ce mécanisme, il n'est pas certain que la recapitalisation d'un établissement par un autre, investisseur de capital contingent, soit plus pérenne pour le secteur financier.

Quatrième partie

Annexes

Éléments de mathématiques financières

A.1. Loïs de probabilités usuelles

A.1.1. Loi exponentielle

Une variable aléatoire X à valeur dans \mathbb{R}^+ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ notée $\mathcal{E}(\lambda)$ si elle est définie par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}$$

On a alors $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t}$. De plus son espérance et son écart type sont $\mathbb{E}(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

A.1.2. Loi normale

Une variable aléatoire X à valeur dans \mathbb{R} suit une loi normale de paramètre $\mu, \sigma > 0$ notée $\mathcal{G}(\mu, \sigma)$ si elle est définie par la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

De plus son espérance et son écart type sont $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$. On note sa fonction de répartition $\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(u) du$

A.1.3. Loi de Poisson

Une variable aléatoire X à valeur dans \mathbb{N} suit une loi de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

De plus son espérance et son écart type sont $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

A.2. Éléments de calcul stochastique

A.2.1. Processus stochastique

Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre t et définies sur un même espace de probabilités Ω .

La variable X_t représente l'état du processus au temps t .

L'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est noté S .

Un processus stochastique dont l'ensemble des états S est fini ou dénombrable est appelé une chaîne.

Un processus est à temps discret lorsque l'ensemble T est fini ou dénombrable.

A.2.2. Mouvement brownien

Soit $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus stochastique vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$
- $\forall s \leq t, W_t - W_s$ suit une loi normale $\mathcal{G}(0, \sqrt{t-s})$,

– $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables $(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0})$ sont indépendantes

Alors $(W_t)_{(t \geq 0)}$ est appelé mouvement brownien (standard).

A.2.3. Lemme d'Itô

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique de la forme

$$(A.2.1) \quad X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \Leftrightarrow dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

avec $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien.

Si $f(x, t), x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}^+$ est une fonction continûment dérivable à l'ordre 2, alors on a

$$(A.2.2) \quad f(X_t, t) = f(X_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(X_s, s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) dX_s + \int_0^t \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, s) \sigma_s^2 ds$$

A.2.4. Théorème de Girsanov

Soit $(W_t)_{(t \geq 0)}$ un mouvement brownien sous la probabilité $(\theta_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique tel que $\forall t \in [0, T], \int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty$.

Alors le processus $(\widetilde{W}_t)_{(t \geq 0)}$ définit par

$$(A.2.3) \quad \widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$$

est une martingale pour la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ définit par

$$(A.2.4) \quad \frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds}$$

A.3. Modèle de Black et Scholes

A.3.1. Description

Le modèle de Black-Scholes est une équation stochastique en temps continu modélisant la dynamique d'un titre financier en fonction d'un paramètre de volatilité σ_t , d'un drift μ_t et d'un mouvement brownien $(W_t)_{(t > 0)}$:

$$(A.3.1) \quad dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

En appliquant le lemme d'Itô avec $X_t = S_t$ et $f(x) \ln(x)$, on obtient

$$(A.3.2) \quad S_t = S_0 \exp^{\int_0^t \sigma_s dW_s} 1^{\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds} \exp^{\int_0^t \mu_s ds}$$

Dans le cas particulier ou $\forall t \geq 0, \sigma_t = \sigma, \mu_t = \mu$, (formule de Black-Scholes d'origine), on obtient une formule analytique pour S_t

$$(A.3.3) \quad S_t = S_0 \exp^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

A.3.2. Extensions du modèle de Black et Scholes

A.3.2.1. Probabilité risque neutre

Le paramètre μ utilisé dans le modèle de Black & Scholes correspondant au rendement espéré du titre sous la probabilité (historique) \mathbb{P} . Pour s'affranchir de ce

paramètre il est possible d'utiliser le théorème de Girsanov au modèle de Black & Scholes.

$$(A.3.4) \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

$$(A.3.5) \quad = r dt + \sigma(dW_t - \frac{r - \mu}{\sigma} dt)$$

$$(A.3.6) \quad = r dt + \sigma(\theta dt + dW_t)$$

En appliquant le théorème de Girsanov avec $\theta_t = \theta$, on définit ainsi une probabilité $\tilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle $\tilde{W}_t \stackrel{def}{=} W_t - \frac{r - \mu}{\sigma} t$ est un mouvement brownien. En pratique en notant r le taux sans risque, on appelle $\tilde{\mathbb{P}}$ la probabilité risque neutre.

A.3.2.2. Actif versant une rémunération

La plupart des actifs versent une rémunération pendant leur durée de vie (dividende pour les actions, coupon pour les obligations...), afin de prendre en compte cette réalité, on montre que la dynamique suivi par un actif versant une rémunération à un taux continu q sous la probabilité risque neutre est donnée par :

$$(A.3.7) \quad dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Dans ce cas on a :

$$(A.3.8) \quad S_t = S_0 \exp^{(r - q - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

A.4. Dérivés vanilles

Les produits dérivés dit "vanilles" sont les produits dérivés considérés comme les plus simples : forward, future, call et put classique.

A.4.1. Options vanilles

A.4.1.1. Call vanille

Un call (vanille) C sur un sous-jacent S est un produit dérivé offrant la possibilité à son détenteur d'acquérir l'actif sous-jacent à un prix K (strike) jusqu'au temps T (maturité). A maturité, le détenteur reçoit donc un payoff égal à

$$PayOff_C^T = \begin{cases} S_T - K & S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \max(S_T - K, 0)$$

Dans le cadre où la dynamique du sous-jacent est représenté par le modèle de Black & Scholes (avec volatilité constante), le prix du call sur S de maturité T et de strike K à l'instant t noté $C_t(T, K)$ est de :

$$(A.4.1) \quad C_t(T, K) = S_t \phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \phi(d_2)$$

avec

$$(A.4.2) \quad d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}$$

$$(A.4.3) \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}$$

et ϕ définit dans annexe A.1.2.

A.4.1.2. Put vanille

Un put (vanille) P sur un sous-jacent S est un produit dérivé offrant la possibilité à son détenteur de vendre l'actif sous-jacent à un prix K (strike) jusqu'au temps T (maturité). A maturité, le détenteur reçoit donc un payoff égal à

$$\text{PayOff}_P^T = \begin{cases} K - S_T & S_T < K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \max(K - S_T, 0)$$

Dans le cadre où la dynamique du sous-jacent est représenté par le modèle de Black & Scholes (avec volatilité constante), le prix du put sur S de maturité T et de strike K à l'instant t noté $P_t(T, K)$ est de :

$$(A.4.4) \quad P_t(T, K) = Ke^{-r(T-t)}\phi(-d_2) - S_t\phi(-d_1)$$

avec d_1 et d_2 identique à (A.4.2) et (A.4.3).

A.4.2. Options digitales (ou binaires)

A.4.2.1. Call digital

Un call digital C sur un sous-jacent S est un produit dérivé offrant à son détenteur à maturité T soit un montant fixe (par exemple 1 Euro) si la valeur du sous-jacent à maturité S_T est supérieure à un strike K , soit rien. A maturité, le détenteur reçoit donc un payoff égal à

$$\text{PayOff}_{C_T^d} = \begin{cases} 1 & S_T > K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbf{1}_{\{S_T - K > 0\}}$$

Dans le cadre où la dynamique du sous-jacent est représenté par le modèle de Black & Scholes (avec volatilité constante), le prix du call digital sur S de maturité T et de strike K à l'instant t noté $C_t^d(T, K)$ est de :

$$(A.4.5) \quad C_t^d(T, K) = e^{-r(T-t)}\phi(d_2)$$

avec d_2 identique à (A.4.3).

A.4.2.2. Put digital

Un put digital P sur un sous-jacent S est un produit dérivé offrant à son détenteur à maturité T soit un montant fixe (par exemple 1 Euro) si la valeur du sous-jacent à maturité S_T est inférieure à un strike K , soit rien. A maturité, le détenteur reçoit donc un payoff égal à

$$\text{PayOff}_{P_T^d} = \begin{cases} 1 & S_T < K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbf{1}_{\{S_T - K < 0\}}$$

Dans le cadre où la dynamique du sous-jacent est représenté par le modèle de Black & Scholes (avec volatilité constante), le prix du put digital sur S de maturité T et de strike K à l'instant t noté $P_t^d(T, K)$ est de :

$$(A.4.6) \quad P_t^d(T, K) = e^{-r(T-t)}\phi(-d_2)$$

avec d_2 identique à (A.4.3).

A.4.3. Forward

Un contrat à terme, ou forward, F sur un sous-jacent S est un engagement d'acheter (pour le souscripteur du contrat) l'actif S à maturité T du contrat à un prix K fixé initialement.

On montre très facilement que le strike est en fait égal à la valeur du sous-jacent à l'instant initial capitalisé au taux sans risque : $K = S_0 e^{(r-q)T} \stackrel{\text{def}}{=} F_0$. F_0 est appelé le prix forward en opposition au prix spot S_0 .

La valeur du contrat forward V , à ne pas confondre avec le prix forward, est égal à 0 au moment initial ($V_0 = 0$), il est ensuite égal à la différence actualisée entre le prix forward en t et le prix forward en 0 $V_t = e^{r(T-t)}(F_t - F_0)$.

Bibliographie

- [Accenture, 2013] ACCENTURE (2013). Basel iii handbook.
- [ACP, 2011] ACP (2011). Solvabilité 2 : principaux enseignements de la cinquième étude quantitative d'impact (qis5).
- [Albul *et al.*, 2010] ALBUL, B., DWIGHT, M. et TCHISTYI, A. (2010). Contingent convertible bonds and capital structure decisions. NA.
- [Alm, 2013] ALM, J. (2013). A simulation model for calculating solvency capital requirements for non-life insurance risk. *Scandinavian Actuarial Journal*, 0(0):1–17.
- [Association Suisse d'Assurances, 2013] ASSOCIATION SUISSE D'ASSURANCES (2013). Droit sur la surveillance des assurances.
- [AXA, 2014a] AXA (2014a). Chiffre clés.
- [AXA, 2014b] AXA (2014b). Full year 2014 earning.
- [Bielecki et Rutkowski, 2002] BIELECKI, T. et RUTKOWSKI, M. (2002). *Credit Risk : Modeling, Valuation and Hedging*. Springer Finance.
- [Black et Cox, 1976] BLACK, F. et COX, J. (1976). Valuing corporates securities : Some effects of bond indenture provisions. *Journal of Finance*, 31.
- [Brigo *et al.*, 2013] BRIGO, D., GARCIA, J. et PEDE, N. (2013). Coco bonds valuation with equity and credit calibrated first passage structural models. NA.
- [Brigo *et al.*, 2004] BRIGO, D., MORINI, M. et TARENGHI, M. (2004). Credit calibration with structural models the lehman case and equity swaps under counterparty risk. NA.
- [Brigo et Tarengi, 2004] BRIGO, D. et TARENGHI, M. (2004). Credit default swap calibration and equity swap valuation under counterparty risk with a tractable structural model. NA.
- [CACIB, 2014] CACIB (2014). At1 goes global.
- [Commission européenne, 2009] COMMISSION EUROPÉENNE (2009). 'solvency ii' : Frequently asked questions (faqs).
- [Corcuera et Jan, 2011] CORCUERA, J. et JAN, D. S. (2011). Efficient pricing of contingent convertibles under smile conform models. NA.
- [Couilbault et Constant, 2009] COUILBAULT, F. et CONSTANT, E. (2009). *Les grands principes de l'assurance*. L'argus de l'assurance Editions.
- [De Spiegeleer et Schoutens, 2011] DE SPIEGELEER, J. et SCHOUTENS, W. (2011). Pricing contingent convertibles : A derivatives approach. NA.
- [Echos, 2012] ECHOS, L. (2012). Groupama va injecter 260 millions d'euros dans sa société d'assurance-vie.
- [EIOPA, 2014] EIOPA (2014). Technical specification for the preparatory phase (part i).
- [F.F.S.A., 2013] F.F.S.A. (2013). Solvabilité 2 – 4 questions pour comprendre la réforme et ses enjeux.
- [Flannery, 0009] FLANNERY, J. (20009). Stabilizing large financial institutions with contingent capital certificates.
- [Gisler, 2009] GISLER, A. (2009). The insurance risk in the sst and in solvency ii : Modelling and parameter estimation.
- [Glasserman et Behzad, 2010] GLASSERMAN, P. et BEHZAD, N. (2010). Contingent capital with a capital-ratio trigger. NA.

- [Générale, 2013] GÉNÉRALE, S. (2013). Société générale - rapport financier 2013.
- [Gonzalez, 2014] GONZALEZ, P. (2014). L'analyse en composantes principales.
- [Goodhart, 2010] GOODHART, C. (2010). Are cocos from cloud cuckoo-land?
- [Henderson Global Investors, 2015] HENDERSON GLOBAL INVESTORS (2015). The rise of the coco - a primer on bank capital.
- [HyeYoon, 2012] HYEYOON, J. (2012). Pricing of contingent convertibles. NA.
- [Leland, 1994] LELAND, H. (1994). Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *Journal of Finance*, 49.
- [L'Humanite, 1997] L'HUMANITE (1997). Gan-cic : 20 milliards pour privatiser.
- [Libération, 1998] LIBÉRATION (1998). Gan : la vente éponge le sinistre.
- [Massey *et al.*, 2002] MASSEY, R., HART, D., WIDDOWS, J., LAW, D., BHATTACHARYA, K., HAWES, W. et SHAW, R. (2002). Insurance company failure. NA.
- [Merton, 1974] MERTON, R. (1974). On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest. *Journal of Finance*, 29.
- [Milliman, 2013] MILLIMAN (2013). How equivalent are the quantitative aspects of swiss solvency test and solvency ii for life insurers.
- [P., 2015] P., F. (2015). La fabrique sociale d'une tabula rasa : le lancement de solvency ii.
- [Parlement européen, 2007] PARLEMENT EUROPÉEN (2007). Report on the crisis of the equitable life assurance society. NA.
- [Penrose, 2004] PENROSE (2004). Report of the equitable life inquiry. NA.
- [Portait et Poncet, 2003] PORTAIT, R. et PONCET, P. (2003). *Finance de marché*. DALLOZ.
- [Raoult, 2014] RAOULT, J. (2014). Cours de statistiques et analyse des données.
- [RE, 2006] RE, S. (2006). Solvency ii : an integrated risk approach for european insurers.
- [Risk.net, 2013] RISK.NET (2013). Insurers embrace innovative hybrid capital structures.
- [Risk.net, 2014] RISK.NET (2014). Regulatory uncertainty 'a barrier' to issuance of contingent capital by european insurers.
- [Shang, 2013] SHANG, K. (2013). Understanding contingent capital.
- [Slaughter et May, 2013] SLAUGHTER et MAY (2013). Regulatory capital eligibility requirements for insurers : the changing landscape.
- [Sénat, 1998] SÉNAT (1998). Les niveaux réglementaires de marge de solvabilité minimum.
- [Société Générale Cross Asset Research, 2014] SOCIÉTÉ GÉNÉRALE CROSS ASSET RESEARCH (2014). Cocos : a pricing model. NA.
- [Société Générale Cross Asset Research, 2015] SOCIÉTÉ GÉNÉRALE CROSS ASSET RESEARCH (2015). Bank at1 cocos : Tactical switches, strategic positioning.
- [Teneberg, 2012] TENEBERG, H. (2012). Pricing contingent convertibles using an equity derivatives jump diffusion approach. NA.
- [Von Furstenberg, 2011] VON FURSTENBERG, G. (2011). Contingent capital to strenghten the private safety net for financial institutions : Cocos to the rescue?
- [Wilkens et N., 2014] WILKENS, S. et N., B. (2014). Contingent convertible bonds : A first empirical assessment of selected pricing models. *Financial Analysts Journal*, 70(2).