UFR Mathématique Informatique Strasbourg

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

**Mémoire présenté devant**

**l'UFR de Mathématique et Informatique**

**pour l'obtention du Master Mathématiques et Applications, spécialité Statistique,**

**parcours Actuariat**

**le 30/09/2015**

Par : Valentin SAVIDAN

Titre: Comptabilisation de la valeur temps des options et garanties intrinsèques d'un contrat d'épargne Euro selon la norme IFRS 4 – phase II

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI Durée : ☐ 1 an ☑ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres du jury de l'Institut des Actuaires* signature

*Membres du jury de l'Unistra :*

M. Philippe Artzner
M. Jean Bérard
M. Karl-Theodor Eisele
M. Jacques Franchi
M. Jean-Luc Netzer
Mme Myriam Maumy-Bertrand
M. Vincent Vigon

*Invités :*

M. David Dubois
M. David Fitouchi
M. Sylvain Gadenne
Mme Frédérique Henge
Mme Magali Kelle-Vigon
M. Jean Modry
M. Alexandre You

*Entreprise :*

Nom : Deloitte Conseil

DELOITTE CONSEIL
185, avenue Charles de Gaulle
92200 NEUILLY-SUR-SEINE
S.A.S. au Capital de € 3.040.000
401 948 245 RCS Nanterre
FR 14 401 948 245

*Signature :*

RH

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Nom : Redouan HMAMI

*Signature :*

*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels*** *(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Savidan

*Secrétariat : Mme Stéphanie Richard*

*Bibliothèque : Mme Christine Disdier*

Diplôme Universitaire des Actuaires de Strasbourg

UFR Mathématique Informatique Strasbourg

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

**Mémoire présenté devant**

**l'UFR de Mathématique et d'Informatique**

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg**

**et l'admission à l'Institut des Actuaires**

**le 30/09/2015**

Par : Valentin SAVIDAN

Titre: Comptabilisation de la valeur temps des options et garanties intrinsèques d'un contrat d'épargne Euro selon la norme IFRS 4 – phase II

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI Durée : ☐ 1 an ☑ 2 ans ☐ 3 ans ☐ 4 ans ☐ 5 ans

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres du jury de l'Institut des Actuaires* signature

*Membres du jury de l'Unistra :*

M. Philippe Artzner
M. Jean Bérard
M. Karl-Theodor Eisele
M. Jacques Franchi
M. Jean-Luc Netzer
Mme Myriam Maumy-Bertrand
M. Vincent Vigon

*Invités :*

M. David Dubois
M. David Fitouchi
M. Sylvain Gadenne
Mme Frédérique Henge
Mme Magali Kelle-Vigon
M. Jean Modry
M. Alexandre You

*Secrétariat : Mme Stéphanie Richard*

*Bibliothèque : Mme Christine Disdier*

*Entreprise :* RH

DELOITTE CONSEIL
185, avenue Charles de Gaulle
92200 NEUILLY-SUR-SEINE
S.A.S. au Capital de € 3.040.000
401 948 245 RCS Nanterre
FR 14 401 948 245

Nom : Deloitte Conseil

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Nom : Redouan HMAMI

*Signature :*

*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

***Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels***
*(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

**Valentin SAVIDAN**

# Comptabilisation de la valeur temps des options et garanties intrinsèques d'un contrat d'épargne Euro selon la norme IFRS 4 - phase II

Tuteur de mémoire en entreprise : **Redouan HMAMI**
Tuteur de mémoire adjoint en entreprise : **Baptiste BRECHOT**
Tuteur de mémoire académique : **Sylvain GADENNE**

**Jury**

# Table des matières

# Résumé

Mots-clés : IFRS 4 - phase II, valeur temps des options et garanties, contrat d'épargne Euro, générateur de scénarios économiques, best estimate, marge de services contractuelle, other comprehensive income, bilan IFRS 4 - phase II, compte de résultat IFRS 4 - phase II, volatilité.



L'objectif de ce mémoire est de définir une méthode de comptabilisation de la valeur temps des options et garanties (TVOG) d'un contrat d'épargne Euro selon la future norme IFRS 4 - phase II, permettant de limiter la volatilité du résultat IFRS de l'assureur.

L'application de la future norme IFRS 4 - phase II va amener les assureurs à évaluer les options et garanties intrinsèques des contrats d'épargne et à les comptabiliser. Les assureurs doivent valoriser ces options dans le but de déterminer la juste valeur de leurs engagements. Étant fortement liées à l'évolution des marchés financiers, leur évaluation doit tenir compte de la multiplicité des scénarios économiques. Un générateur de scénarios économiques permet de projeter sur un horizon donné des variables économiques et financières. La mise en oeuvre de ce modèle financier ainsi que son calibrage dans un univers risque-neutre est présenté dans le cadre de ce mémoire.

Afin que l'estimation prospective des engagements de l'assureur soit la plus juste, la modélisation de la TVOG est essentielle. Les assureurs doivent avoir recours aux techniques d'évaluation stochastique afin de déterminer cette valeur temps car une modélisation déterministe ne permet que de mesurer la valeur intrinsèque de l'option. Dans ce mémoire, deux approches sont présentées afin d'évaluer la TVOG. La première méthode est basée sur la théorie d'évaluation des options financières. L'adéquation entre les options et les garanties intrinsèques aux contrats d'épargne et les options financières n'étant pas parfaite, le développement d'un modèle de gestion actif/passif stochastique permet de s'affranchir des formules fermées. La TVOG est alors calculée par différence entre le Best Estimate stochastique et le Best Estimate déterministe.

La TVOG étant sensible aux conditions économiques, elle impacte fortement le résultat IFRS de l'assureur. Le choc de la courbe des taux permet de mettre en évidence la volatilité de la TVOG. Par conséquent, un des objectifs est de définir une méthode optimale de comptabilisation de la TVOG qui permet de limiter la volatilité du résultat IFRS. La nouvelle norme IFRS 4 - phase II n'indiquant pas explicitement comment comptabiliser la TVOG au bilan et dans le compte de résultat, deux méthodes sont proposées. La première consiste à comptabiliser les variations de la TVOG en marge de services contractuelle (CSM) et la seconde en Other Comprehensive Income (OCI).

La seconde méthode est retenue pour comptabiliser la TVOG car elle permet de réduire la volatilité du résultat, contrairement à la première méthode. En effet, les fluctuations des marchés financiers sont entièrement comptabilisées en OCI sans impacter le résultat IFRS.

# Abstract

Key words : IFRS 4 - phase II, time value of options and guarantees, participating contracts, economic scenario generator, best estimate, contractual service margin, other comprehensive income, IFRS 4 - phase II balance sheet, IFRS 4 - phase II profit and loss statement, volatility

The purpose of this thesis is to lay out the different accounting methods of Time Value of Options and Guarantees (TVOG) for participating contracts according to IFRS 4 – phase II standard.

Options and guarantees represent a cost for insurers that the implementation of IFRS 4 - phase II standard has to take into account. Insurers have to evaluate these options in order to determine the fair value of their commitments. Being strongly linked to financial markets, their assessment must take into account many economic scenarios. An Economic Scenario Generator enables one to project economic and financial variables. The implementation of this financial model as well as its calibration in a risk-neutral universe is presented.

The modelling of TVOG is essential to ensure that the most accurate estimates as possible are achieved regarding the long-term commitments for insurers. Insurers must have recourse to using stochastic techniques to determine this time value because a determinist modelling only allows one to measure the intrinsic value of the option. In this thesis, two approaches are presented to calculate the TVOG. The first one is based on financial theory. The second one is based on the development of an ALM model. TVOG is then calculated through the difference between stochastic Best Estimate and determinist Best Estimate.

Being susceptible to economic conditions (decrease in interest rates, volatility, credit spread), the TVOG strongly impacts the insurer's IFRS profit and loss. The stress of risk free interest rates term structure highlights the volatility of the TVOG. Consequently, one of the objectives is to define an optimal method limiting the volatility of the IFRS profit. As the IFRS 4 - phase II standard does not state explicitly how to account for the TVOG on the balance sheet and in the Profit and Loss Statement (PL), two methods are proposed. The first one consists in accounting the variations of the TVOG in Contractual Service Margin (CSM) and the second one in Other Comprehensive Income ( OCI).

The method 2 is chosen to account for the TVOG because it allows to reduce the volatility of the profit, contrary to the method 1. Indeed, the fluctuations of financial markets are accounted in OCI without impacting the IFRS profit.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Claude Chassain, associée de Deloitte Actuariat Assurance, de m'avoir fait confiance et de m'avoir permis de réaliser mon mémoire au sein de son équipe.

Je remercie Redouan Hmami, mon maître de stage, et Baptiste Bréchot, senior manager, pour m'avoir encadré pendant mon stage et pour leurs nombreux conseils.

Mes remerciements s'adressent à Sylvain Gadenne, mon tuteur académique, pour ses précieux conseils et son suivi tout au long de mon stage.

Je tiens également à remercier l'ensemble des professeurs de l'Université de Strasbourg pour leur enseignement durant ces trois années de formation.

Mes remerciements vont à l'équipe Actuariat Assurance et plus précisément à Anass Assali, Anthony Lasry, Ivan Herboch et Loic Michel pour m'avoir aidé et soutenu.

Je remercie mes plus proches amis pour leurs aides pendant mes années d'études.

Un grand merci à mes parents, Gildas et Anne, et à ma soeur Pauline. Je les remercie chaleureusement pour leur soutien et leur présence.

Enfin, une pensée émue à mon grand-père, à qui je dédie ce mémoire.

# Cadre du stage

Notre étude rentre dans le cadre du développement d'un modèle ALM. Ce modèle est composé de trois modèles :

— un générateur de scénarios économiques (GSE)
— un modèle de projection déterministe
— un modèle de projection stochastique (modèle ALS)

Nous avons tout d'abord développé un générateur de scénarios économiques *market-consistent*, la partie développement des modèles de projection ne faisant pas partie du périmètre de notre travail.

Le modèle ALM produit des flux de trésorerie qui sont ensuite utilisés pour construire un bilan et un compte de résultat en normes French GAAP et en valeur de marché. Ainsi, nous avons travaillé sur la construction d'une maquette de reporting et la mise en place de contrôles en sortie du modèle ALM.

Afin d'évaluer la TVOG, deux méthodes ont été mises en oeuvre. La première est basée sur la théorie d'évaluation des options financières : la revalorisation d'un contrat d'épargne Euro a été modélisée à l'aide de la formule de Black (chapitre 6). La seconde méthode repose sur l'utilisation du modèle ALM (chapitres 6 et 7). La TVOG est calculée par différence entre le Best Estimate stochastique et le Best Estimate déterministe.

Dans le cadre de ce mémoire, deux méthodes de comptabilisation de la TVOG d'un contrat d'épargne Euro selon la norme IFRS 4 - phase II sont analysées. Ces deux méthodes sont définies puis mises en oeuvre sur un exemple simplifié. Les résultats obtenus permettent d'identifier une méthode qui nous parait la plus pertinente sur la base d'une comparaison d'avantages et d'inconvénients. Cette méthode est ensuite appliquée aux flux de trésorerie issus du modèle ALM .

Les résultats et conclusions présentés ci-après ne sont valables que dans le cadre seul des hypothèses définies dans ce mémoire. Par conséquent, les conclusions présentées ne peuvent se substituer à une analyse approfondie d'un contexte particulier.

Les travaux réalisés dans le cadre de ce mémoire sont confidentiels. Leur utilisation et diffusion nécessite l'obtention de l'accord formel de la part de Deloitte Conseil et de l'auteur de ce mémoire.

*A Panou*

# Introduction

Après plusieurs années de débats, le normalisateur comptable international finalise actuellement la norme IFRS 4 - phase II, la future norme IFRS relative à la comptabilisation et à l'évaluation des passifs d'assurance.

L'entrée en vigueur de cette norme provoquera un changement dans l'évaluation du passif technique des compagnies d'assurance. Les assureurs doivent constituer des provisions en représentation de leurs engagements, du fait de l'aléa portant sur les événements qu'ils assurent. Actuellement, les passifs sont comptabilisés selon les normes comptables en vigueur dans chaque pays. Or, la future norme IFRS 4 - phase II prévoit que les assureurs devront comptabiliser leurs passifs sur la base de calculs prospectifs. Parallèlement, la norme IFRS 9 (Instruments financiers) entrera en vigueur à partir de janvier 2018. Cette norme impactera directement l'évaluation et la comptabilisation de l'actif du bilan des assureurs.

Ce nouvel environnement comptable nécessite la construction d'un bilan et d'un compte de résultat en vision économique. Par conséquent, les assureurs doivent développer un modèle de gestion actif/passif stochastique afin de déterminer une estimation prospective de leurs engagements. Les options et garanties intrinsèques aux contrats sont fortement liées à l'évolution des marchés financiers, et leurs évaluations sont complexes. Les normes comptables locales n'obligent pas les assureurs à valoriser ces engagements au bilan mais le passage à la norme IFRS 4 - phase II va amener les assureurs à les évaluer et à les comptabiliser.

La valeur temps des options et garanties (TVOG) est un poste du passif qui est défini précisément dans le bilan IFRS 4 - phase II. Cependant, la norme n'indique pas comment la comptabiliser dans le bilan et au compte de résultat. Ce mémoire a donc pour objectif de définir deux méthodes de comptabilisation de la TVOG selon la norme IFRS 4 - phase II et de déterminer s'il existe une méthode optimale pour les assureurs. De par sa définition, la TVOG est un élément du bilan très sensible aux conditions économiques et financières. La méthode optimale de comptabilisation de la TVOG doit donc permettre de limiter la volatilité du résultat IFRS.

Dans un premier temps, les principes comptables selon la norme IFRS 4 sont présentés (chapitre 1). Les contrats d'épargne en assurance vie et les normes comptables françaises sont définis dans le deuxième chapitre du mémoire (chapitre 2). Puis, le cadre théorique de la modélisation (chapitre 3) est défini. Le quatrième chapitre présente la modélisation ALM. La construction d'un générateur de scénarios économiques est développée dans le cinquième chapitre (chapitre 5). Le sixième chapitre traite de la valeur temps des options et garanties intrinsèques aux contrats d'épargne Euro (chapitre 6). Enfin, les méthodes de comptabilisation de la TVOG sont définies dans le dernier chapitre du mémoire (chapitre 7).

# Chapitre 1

# Les principes comptables selon IFRS 4

## Sommaire

Depuis de nombreuses années, les assureurs sont confrontés à une évolution significative des normes de valorisation des engagements d'assurance et de communication financière. Par conséquent, les acteurs du marché suivent de près l'avancement des normes IFRS [1]. L'ensemble de ces normes est élaboré par l'International Accounting Standards Board (IASB) [2] qui est l'organisme concepteur des normes de l'IASC Fundation. De plus, le principe de la juste valeur s'est imposé ces dernières années dans les référentiels comptables et est devenu un élément clé de l'évaluation *market consistent* des portefeuilles d'assurance.

Après plusieurs années de débat, l'IASB finalise actuellement la nouvelle norme IFRS relative à l'évaluation et à la comptabilisation des passifs d'assurance. La publication de cette norme est prévue en 2016 et son entrée en vigueur en janvier 2020.

## 1.1 Contexte et calendrier

L'information financière étant un élément clé dans les choix stratégiques pris par les acteurs des marchés financiers, elle est un facteur décisif de l'économie mondiale. L'une de ses fonctions les plus importantes est de fournir aux actionnaires et investisseurs internationaux les informations portant sur la situation économique et financière des entreprises. Pour cela, les états financiers permettent de donner une représentation structurée de la situation financière ainsi que les performances financières d'une société. Ces états sont établis à partir des informations et des variations de la situation de la performance financière de la structure. Ils font partie intégrante du processus financier destiné à informer les acteurs du marché économique de l'entité. Or, les états financiers étant établis conformément à la réglementation et aux usages d'un pays donné, ils sont souvent difficilement compréhensibles par les investisseurs étrangers. Les normes comptables internationales ont donc pour objectif d'assurer une certaine comparabilité des états financiers grâce à une harmonisation dans leur présentation et leur clarté.

Bien que les normes IFRS aient pour objectif une application au niveau mondial, elles restent principalement en vigueur au sein de l'Union Européenne. En effet, le règlement CE 1606/2002 impose à l'ensemble des entreprises cotées ou faisant appel à l'épargne publique publiant des comptes consolidés d'établir des états financiers conformément aux normes IAS/IFRS depuis le 1er janvier 2005. L'application de ce référentiel pour les sociétés non cotées reste optionnelle en France, le choix étant laissé aux états membres de l'Union Européenne.

Actuellement, le référentiel IFRS compte une cinquantaine de normes mais seulement une partie d'entre elles impactent les compagnies d'assurance. Le principe directeur de ces normes est celui de la juste valeur ou *fair value*. Le principe de la juste valeur est défini dans la norme IFRS 13 "Evaluation de la juste valeur". Ce principe étant fortement critiqué par les acteurs du marché financier, l'IASB a souhaité établir un référentiel concernant l'évaluation, l'utilisation et la communication de la juste valeur.

1. Les normes IFRS (International Financial Reporting Standards) sont les normes internationales d'information financière
2. L'IASB (International Accounting Standards Board) est le normalisateur comptable international

La juste valeur est définie comme étant "le prix qui serait reçu pour la vente d'un actif ou payé pour le transfert d'un passif dans une transaction entre participants d'un marché organisé à la date d'évaluation. Ainsi, chaque entité doit déterminer avec la plus grande précision l'ensemble des éléments nécessaires à l'évaluation des instruments financiers par la juste valeur. Il est nécessaire de distinguer plusieurs cas afin de déterminer la juste valeur d'un actif. Si un actif s'échange dans des conditions normales sur un marché, la juste valeur correspond à la valeur de sortie (*exit value*) après prise en compte des coûts de transaction. En revanche, si l'actif n'est pas dans ce cas de figure, la juste valeur est estimée à l'aide de techniques d'évaluation. Par conséquent, la juste valeur n'est pas synonyme de valeur de marché.

La norme IFRS 13 précise que les trois techniques d'évaluation de la juste valeur les plus utilisées sont : l'approche par le marché, l'approche par les coûts et l'approche par le résultat. "L'approche par le marché consiste à se fonder sur les prix et autres observations générées par des transactions de marché sur des actifs identiques ou comparables. L'approche par les coûts consiste à déterminer le coût de remplacement, à la date d'évaluation, qui permettrait de remplacer la valeur de service de l'actif considéré. Enfin, l'approche par le résultat consiste à estimer la valeur qu'accorderait le marché à des montants futurs".

Afin d'améliorer la cohérence et la comparabilité des évaluations à la juste valeur, la norme IFRS 13 présente une hiérarchie en trois niveaux, en fonction de la fiabilité de l'évaluation :

1. Cours non ajustés sur des marchés pour des actifs ou des passifs identiques auxquels l'entité peut avoir accès à la date d'évaluation.
2. Données d'entrée concernant l'actif ou le passif, autres que les cours du marché inclus dans les données d'entrée de niveau 1, qui sont observables directement ou indirectement.
3. Données d'entrée concernant l'actif ou le passif qui ne sont pas observables, y compris les propres données de l'entité, ajustées pour refléter les hypothèses des intervenants du marché.

L'IASB a décidé d'établir une norme spécifique aux contrats d'assurance afin de refléter la réalité économique de l'activité d'assurance. En effet, ce secteur, englobant l'assurance de personnes et l'assurance de biens et de responsabilités, rassemble une grande diversité de contrats. Cette diversité implique différents traitements réglementaires, comptables et actuariels. La comparaison entre les reporting financiers est complexe du fait de la diversité des pratiques comptables entre les pays et les institutions financières.

Les objectifs de la norme IFRS 4 Contrats d'assurance sont par conséquent :

— homogénéiser la comptabilisation des contrats d'assurance entre les institutions financières (banque, assurance, etc...).

— améliorer la compréhension des états financiers des assureurs.

— améliorer la comparabilité des comptes entre les divers assureurs.

La phase I a été adoptée par l'Union Européenne le 29 décembre 2004 et est en application depuis 2005. Elle est actuellement toujours en vigueur. Les passifs techniques des compagnies d'assurance sont comptabilisés selon les règles comptables en vigueur dans chaque pays. La phase II est en cours d'élaboration par l'IASB. Les assureurs devront comptabiliser leurs passifs selon des règles cohérentes avec les marchés financiers. L'entrée en vigueur de la phase II provoquera donc un changement dans l'évaluation et la comptabilisation des passifs techniques des compagnies d'assurance.

Avant de publier une nouvelle norme, l'IASB publie un ou plusieurs Exposé-sondage. Ces documents ont pour objectif de présenter les propositions de la nouvelle norme. Les commentaires reçus permettent à l'IASB de confirmer ou d'ajuster les différentes sections de la norme. L'IASB a publié deux exposés sondages pour la norme IFRS 4 - phase II : un premier en juillet 2010 et un second en octobre 2013.

Alors que les passifs sont comptabilisés selon les règles comptables en vigueur dans chaque pays (principalement au coût amorti), les actifs doivent être évalués et comptabilisés en valeur de marché. Les trois normes IAS 39, IAS 32 et IFRS 7 traitent de l'évaluation, de la comptabilisation et de la présentation des instruments financiers. Ces normes s'intéressent à l'enregistrement comptable de l'ensemble des instruments financiers à l'exception des actifs et passifs détenus dans le cadre des avantages du personnel (IAS 19 et IFRS 2).

Les actifs et passifs financiers sont initialement comptabilisés à leur coût qui est la juste valeur de la contrepartie donnée ou reçue en échange (y compris les coûts de transaction). Les prêts et créances émis (non détenus à des fins de transactions) ou *originated loans and receivables* sont évalués au coût amorti (après déduction des réductions pour dépréciation ou créances irrécouvrables) et la variation du coût amorti est comptabilisée en résultat. Les titres de participation détenus jusqu'à leur échéance ou *Held-To-Maturity investments (HTM)* sont comptabilisés au coût amorti, après déduction des réductions pour dépréciation ou créances irrécouvrables. La variation de coût amorti est comptabilisée en résultat. Les actifs financiers détenus à des fins de transaction ou *financial assets Held For Trading (HFT)* sont comptabilisés à la juste valeur et les variations de valeur sont constatées dans le résultat de l'exercice. Enfin, les actifs financiers disponibles à la vente ou *Available-For-Sale financial assets (AFS)* sont évalués à la juste valeur et les variations de valeur sont comptabilisés dans les fonds propres puis en résultat de l'exercice. La catégorie HTM est soumise à de fortes contraintes. En effet, un actif peut être reclassé en AFS si sa vente est prématurée.

Parallèlement, la norme IFRS 9 entrera en vigueur à partir de janvier 2018. Cette norme impactera directement la comptabilisation et l'évaluation de l'actif du bilan des assureurs. Dans la mesure où les normes IFRS 9 et IFRS 4 - phase II n'ont pas la même date d'application, un potentiel *mismatch* entre la valorisation des actifs (IFRS 9) et la valorisation des passifs (IFRS 4 - phase II) est possible.

La frise chronologique ci-dessous présente le calendrier des futures normes IFRS 4 - phase II et IFRS 9 :

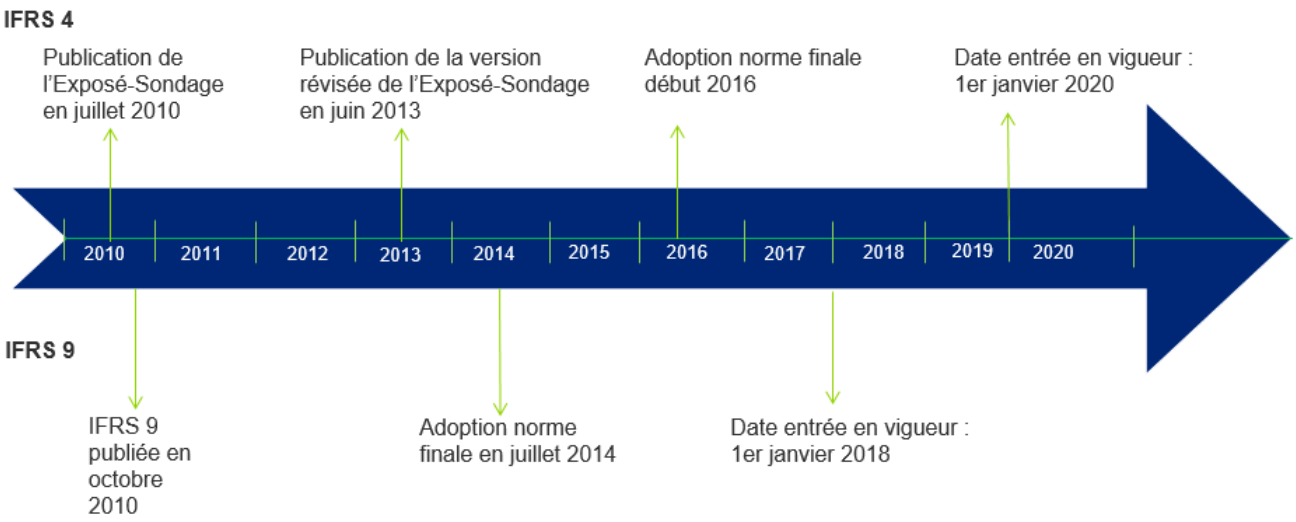



Figure 1.1 – Calendrier des normes IFRS 4 - phase II et IFRS 9

L'entrée en vigueur de la directive Solvabilité II, prévue pour le 1er janvier 2016, impactera la future norme IFRS 4 - phase II. En effet, Solvabilité II présente des similitudes en termes de calcul de passifs et de vision économique. Les assureurs pourront par conséquent bénéficier de l'ensemble des chantiers déployés pour la mise en oeuvre de Solvabilité II.

## 1.2 Comptabilisation des passifs selon IFRS 4

Une entité doit appliquer la norme IFRS 4 Contrats d'assurance aux :

- contrats d'assurance (y compris les traités de réassurance) qu'elle émet et aux traités de réassurance qu'elle détient.
- instruments financiers qu'elle émet avec un élément de participation discrétionnaire, correspondant à la part des bénéfices distribués au delà des minima légaux.

Les assureurs doivent constituer des provisions en représentation de leurs engagements, du fait de l'aléa portant sur les événements qu'ils assurent. Cette incertitude peut se situer au niveau de la réalisation, de la date de survenance ou du montant de la prestation à verser. Les passifs sont comptabilisés selon les normes comptables en vigueur dans chaque pays. Cela signifie que les entreprises d'assurance françaises doivent appliquer le Code des assurances et le règlement du Comité de la Réglementation Comptable n°2000-05 relatif aux comptes consolidés des entreprises d'assurance. Néanmoins, certains retraitements sont appliqués dans le but de réduire le *mismatch* comptable entre les actifs évalués à la juste valeur et les passifs au coût amorti.

A chaque date de reporting, un assureur doit évaluer si les passifs comptabilisés sont suffisants, en utilisant les estimations actuelles de flux de trésorerie futurs générés par les contrats. Il s'agit du test de suffisance de passifs. Si cette évaluation indique que la valeur comptable de ses passifs (diminuée des coûts d'acquisition différés correspondants et des immobilisations incorporelles liées) est insuffisante au regard des flux de trésorerie futurs estimés, l'insuffisance totale doit être comptabilisée en résultat.

De plus, la comptabilité reflet permet de réduire les écarts comptables provenant du fait que les passifs sont actuellement évalués au amorti tandis que les actifs sont évalués à la juste valeur. L'ajustement correspondant du passif d'assurance (ou des frais d'acquisition différés ou des immobilisations incorporelles) doit être comptabilisé en capitaux propres si et seulement si les plus ou moins values non réalisées sont directement comptabilisées en capitaux propres. Cette approche a été adoptée par la plupart des assureurs.

Enfin, la norme IFRS 4 proscrit toute provision non contractuelle destinée à faire face à des événements futurs se rattachant à des contrats futurs, telles que les provisions pour égalisation. En effet, les normes IFRS évitent la comptabilisation de tout excès de prudence au sein des provisions.

La norme IFRS 4 engendre un *mismatch* comptable entre l'évaluation des actifs et des passifs. En effet, les actifs sont évalués principalement en juste valeur alors que les passifs sont déterminés au coût amorti qui font généralement référence à la valeur historique. Partiellement corrigé par la comptabilité reflet, ce *mismatch* a pour conséquence d'introduire une volatilité artificielle très importante qui rend la lecture, la compréhension et la comparaison des états financiers des compagnies d'assurance complexes.

## 1.3 Les notions clés d'IFRS 4 - phase II

Cette section s'appuie sur la description des notions présentées dans l'exposé-sondage de juin 2013. Les contrats commercialisés par un assureur sont classés en normes IFRS selon les catégories suivantes :

— les contrats d'assurance et de réassurance comptabilisés selon la norme IFRS 4.

— les contrats d'investissement comportant une participation aux bénéfices discrétionnaire comptabilisés également selon IFRS 4.

— les contrats d'investissement sans participation aux bénéfices discrétionnaire comptabilisés selon la norme IAS 39 (ou IFRS 9 dès que l'entité applique cette norme).

— les contrats de service comptabilisés selon la norme IAS 18, produits des activités ordinaires.

### 1.3.1 Le contrat d'assurance

La norme définit un contrat d'assurance comme étant *un contrat selon lequel une partie (l'assureur) prend un risque d'assurance important pour une autre partie (le titulaire de police) en convenant d'indemniser le titulaire de la police si un événement futur incertain spécifié (l'événement assuré) affecte de façon défavorable le titulaire de la police.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – Annexe A

La définition du contrat d'assurance fait intervenir le risque d'assurance. Ce risque doit répondre à deux critères :

— il doit être lié à un événement spécifié, futur et incertain, affectant défavorablement l'assuré.

— il existe une possibilité raisonnable que l'événement futur et incertain cause un changement significatif dans la valeur actuelle des flux futurs payés par l'assureur sous contrat.

La norme précise par ailleurs la notion du caractère important du risque d'assurance. Le risque d'assurance est significatif, si et seulement si, un évènement assuré peut obliger un assureur à payer des prestations complémentaires significatives dans n'importe quel scénario, à l'exclusion des scénarios qui manquent de substance commerciale. Le risque d'assurance peut être significatif même s'il y a une probabilité minimale de pertes d'importance relative pour un portefeuille entier de contrats. Autrement dit, la couverture d'assurance doit recouvrir une substance commerciale et donner lieu à un montant de décaissement significatif pour l'assureur.

De plus, la définition du contrat d'assurance exclut les risques financiers. Le risque financier est quant à lui défini comme étant *le risque d'une variation future possible d'un ou de plusieurs éléments suivants : taux d'intérêt spécifié, prix d'un instrument financier, prix d'une marchandise, taux de change, indice de prix ou de taux, notation de crédit ou indice de crédit ou autre variable, à condition que dans le cas d'une variable non-financière, la variable ne soit pas spécifique à une des parties au contrat.*

Ainsi, les contrats ne comportant qu'un risque financier et ne comportant pas une clause de participation discrétionnaire sont des contrats d'investissement. La norme définit la participation discrétionnaire comme étant *un droit contractuel de recevoir en tant que supplément des prestations garanties des prestations complémentaires :*

— *qui représenteront probablement une part importante du total des prestations prévues au contrat.*

— *dont le montant ou l'échéance est contractuellement à la discrétion de l'émetteur.*

— *qui sont contractuellement fondées sur : la performance d'un ensemble défini de contrats d'assurance ou d'un type de contrat d'assurance spécifié, les rendements de placements réalisés et/ou latents d'un portefeuille d'actifs spécifiés détenus par l'émetteur, le résultat de l'entité (société, fonds ou autre) qui émet le contrat.*

— *à condition qu'il existe également des contrats d'assurance qui offrent des droits contractuels similaires à une part de la performance des mêmes contrats d'assurance, du même portefeuille d'actifs ou du résultat de la même société, du même fonds ou de la même entité.*

### 1.3.2 Contrats d'investissement avec participation aux bénéfices discrétionnaire

La comptabilisation des contrats d'investissement avec participation aux bénéfices discrétionnaire est problématique. En effet, ces contrats ne comprennent pas la plupart du temps un risque d'assurance. Dès lors, ils doivent être à priori exclus du champ de la norme IFRS 4. Or, lors de la phase I, l'IASB a décidé d'inclure ces contrats dans le champ de la norme assurance. L'exposé sondage de 2013 propose de conserver ces contrats si l'entité qui les émet, émet aussi des contrats d'assurance. Ils sont définis de la manière suivante : *Instrument financier qui confère à un investisseur donné le droit contractuel de recevoir, en tant que supplément à un montant qui n'est pas à la discrétion de l'émetteur, des montants additionnels qui réunissent les caractéristiques suivantes :*

*a. ils représenteront probablement une part importante du total des prestations prévues au contrat*

*b. leur montant ou leur échéance est contractuellement à la discrétion de l'émetteur*

*c. ils sont contractuellement fondés :*

*i. ou bien sur les rendements tirés d'un ensemble défini de contrats d'assurance ou d'un type de contrat d'assurance spécifié,*

*ii. ou bien sur les rendements de placements réalisés et/ou latents d'un portefeuille d'actifs spécifiés détenus par l'émetteur,*

*iii. ou bien sur le résultat de l'entité ou du fonds qui émet le contrat.* (Source : exposé-sondage ES/2013/7 – Annexe A) :

### 1.3.3 Contrat de réassurance

Le contrat de réassurance est un *contrat d'assurance émis par une entité (le réassureur) pour indemniser une autre entité (le cédant) au titre de demandes d'indemnisation résultant d'un ou de plusieurs contrats d'assurance émis par le cédant.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – Annexe A

### 1.3.4 Limites des contrats

La norme prévoit la mise en place de limites afin d'identifier les composantes du contrat à prendre en compte.

#### 1.3.4.1 Le regroupement des contrats

Tout d'abord, certains contrats pourront être regroupés, en cas de réalisation de l'une des trois conditions ci-dessous et donc être traités comme un seul contrat :

— *les contrats sont négociés en bloc et visent un objectif commercial unique.*

— *le montant de la contrepartie à payer en vertu d'un contrat dépend de la contrepartie ou de l'exécution de l'autre ou des autres contrats.*

— *la couverture que les contrats d'assurance fournissent au titulaire de police attrait au même risque d'assurance. Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 8*

Ces trois conditions sont décrites de manière générale. Le normalisateur permet aux assureurs de regrouper les contrats de manière à représenter au mieux leur modèle.

#### 1.3.4.2 La séparation des composantes d'un contrat

La norme prévoit le cas de certains contrats qui regroupent différentes composantes. Par conséquent, ces contrats relèvent de différentes normes IFRS pour leur évaluation : assurance, services, instruments financiers. *Il se peut qu'un contrat d'assurance comporte une ou plusieurs composantes qui entreraient dans le champ d'application d'une autre norme s'il s'agissait de contrats distincts.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 9

#### 1.3.4.3 Les limites temporelles

Un assureur comptabilise un passif d'assurance (ou un actif d'assurance dans le cas d'une créance vis-à-vis d'un réassureur) au plus tôt entre :

— la date du début de la période de couverture.

— la date à laquelle le premier paiement du titulaire de la police devient exigible.

— le cas échéant, la date à laquelle le portefeuille de contrats d'assurance auquel appartient le contrat est déficitaire. Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 12

Ces trois dates sont à interpréter comme étant la date de l'exposition effective de l'assureur au risque. Cette approche est similaire à Solvabilité II mais différente de la comptabilisation des passifs selon les normes de comptabilité françaises (normes French GAAP).

En effet, la date de première comptabilisation du passif est la date d'effet du contrat. L'assureur annule le passif d'assurance (ou l'actif) à l'extinction du risque d'assurance. Ainsi, les montants se rattachant à des primes attendues qui n'entrent pas dans le périmètre du contrat et liés à des contrats d'assurance futurs sont exclus de l'application de la norme.

Par conséquent, lorsque le risque d'assurance est éteint, l'assureur doit décomptabiliser un passif d'assurance. *L'entité doit décomptabiliser un contrat d'assurance de son état de la situation financière lorsque, et seulement lorsque, celui-ci est éteint (c'est-à-dire lorsque l'obligation stipulée dans le contrat d'assurance a été honorée ou est annulée ou expirée). À ce moment-là, l'entité n'est plus exposée à un quelconque risque et elle n'est par conséquent plus tenue de transférer des ressources économiques pour satisfaire aux termes du contrat d'assurance.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 50

## 1.4 Comptabilisation des passifs selon IFRS4 – phase II

De nombreuses évolutions ont eu lieu depuis le début de la mise en place du projet. L'exposé-sondage de 2010 a introduit un nouveau modèle d'évaluation des passifs, révolutionnant les méthodes actuarielles et comptables. L'objectif de ce nouveau modèle est d'évaluer les passifs du contrat d'assurance, incluant les options et les garanties intrinsèques au contrat, selon une approche *market-consistent*, c'est à dire en cohérence avec les valeurs de marché.

Les principes fondamentaux de ce modèle sont les suivants :

- l'émergence du résultat est cohérente avec la performance de l'assureur envers ses clients (couverture du risque).
- absence de gain en résultat à la souscription du contrat.
- les provisions sont évaluées selon la notion de *current value*.

En effet, les contrats d'assurance ne seront pas évalués selon une vision *fair value* mais selon une vision *current expected value*, reposant ainsi sur une vision prospective des engagements de l'assureur. En effet, la vision *fair value* n'est pas une méthode d'évaluation appropriée pour les contrats d'assurance étant donné qu'ils sont généralement maintenus jusqu'au terme du contrat plutôt qu'échangés au cours de la vie du contrat. Par conséquent, l'approche *current expected value* prend en compte le fait que la compagnie s'attend à honorer les obligations des contrats plutôt que de les transférer. En d'autres termes, l'approche retenue par l'IASB considère qu'un contrat d'assurance est un contrat financier mais également un contrat de service.

Les provisions techniques à la souscription du contrat sont évaluées selon la notion de *current fulfilment value* et composées :

- de la valeur actuelle probable des flux futurs engendrés par l'exécution de l'engagement.
- d'un ajustement pour risque.
- d'une marge pour service contractuelle représentant le profit attendu du contrat.

L'exposé-sondage de 2013 introduit des notions complémentaires par rapport au premier exposé-sondage. Parmi ces nouvelles notions, la prise en compte d'OCI provenant du passif d'assurance ainsi que l'ajustement de la marge de service contractuelle sont définies.

### 1.4.1 Les flux de trésorerie

Tout d'abord, l'assureur doit identifier l'ensemble des flux de trésorerie rattachés à un contrat ou à un groupe de contrats. En effet, *les estimations des flux de trésorerie utilisées pour déterminer les flux de trésorerie d'exécution doivent prendre en compte toutes les entrées et sorties de trésorerie directement rattachées à l'exécution du portefeuille de contrats.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 22

De plus, ces flux de trésorerie doivent être probabilisés et calculés sur les dernières hypothèses. Ainsi, les flux doivent :

- être explicites.
- refléter les caractéristiques de l'entité sans contredire les informations disponibles sur le marché.
- être basés sur les hypothèses les plus récentes.
- être pondérés de manière à prendre en compte l'incertitude sur le montant et le calendrier des flux.

Les flux doivent respecter les limites du périmètre du contrat d'assurance.

### 1.4.2 L'actualisation ou la valeur temps de l'argent

Les assureurs doivent actualiser leurs flux de trésorerie afin de prendre en compte la valeur temps de l'argent. Ainsi, *l'entité doit déterminer les flux de trésorerie d'exécution en ajustant les estimations des flux de trésorerie futurs pour tenir compte de la valeur temps de l'argent, au moyen de taux d'actualisation qui reflètent les caractéristiques de ces flux de trésorerie futurs.*

Ces taux doivent :

- *cadrer avec les prix de marché courants observables d'instruments dont les flux de trésorerie ont des caractéristiques qui cadrent avec celles du contrat d'assurance du point de vue, par exemple, du calendrier, de la devise ou de la liquidité.*
- *faire abstraction des effets des facteurs qui influent sur les prix de marché observables mais qui ne sont pas pertinents pour les flux de trésorerie du contrat d'assurance.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 25

En outre, la norme précise, dans la description des taux d'actualisation, l'importance de prendre compte l'interaction actif/passif. En effet, *dans la mesure où le montant, le calendrier ou l'incertitude des flux de trésorerie découlant d'un contrat d'assurance dépendent en tout ou en partie des rendements des éléments sous-jacents, les caractéristiques du passif reflètent cette dépendance. Le taux d'actualisation retenu pour évaluer ces flux de trésorerie doit donc refléter l'étendue de cette dépendance.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 25

Concernant le taux d'actualisation, les assureurs doivent prendre en compte les données des marchés financiers afin de construire la courbe des taux. Ils peuvent néanmoins ajuster ces données à partir des informations spécifiques à la compagnie et au contrat d'assurance. L'IASB a réfléchi à la manière de définir le taux d'actualisation.

Ainsi, deux approches ont été retenues :

— une approche *bottom-up* : les taux sans risque sont ajustés en ajoutant une prime de liquidité.

— une approche *top-down* : le rendement attendu du portefeuille est ajusté en éliminant les composants non applicables pour l'actualisation du passif.

Ces deux approches peuvent être présentées de la manière suivante :


FIGURE 1.2 – Les approches bottom-up et top-down

Le schéma suivant présente les différentes composantes du spread :

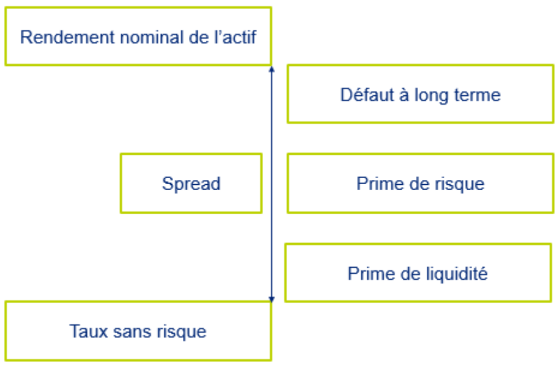



FIGURE 1.3 – Décomposition du spread

L'IASB recommande aux assureurs d'utiliser l'une de ces deux approches. La méthodologie bottom-up présente des similarités importantes avec celle de la construction de la courbe des taux sans risque selon la directive Solvabilité II. La description présentée par l'IASB concernant le choix du taux d'actualisation est peu directive. Elle permet donc aux assureurs de définir différentes approches mais doivent rester néanmoins compatibles avec leur modèle.

### 1.4.3 L'ajustement au titre du risque

L'ajustement au titre du risque permet à l'assureur de provisionner un montant supplémentaire reflétant le risque porté au-delà du risque moyen. A titre illustratif, l'IASB présente un exemple : *l'ajustement au titre du risque permettra à l'entité de prendre en compte la différence entre ces deux contrats :*
*- le premier présentant une prestation certaine de 100*
*- le deuxième présentant une prestation de 90 avec une probabilité de 50 % et une prestation de 110 avec une probabilité de 50 %. Le résultat présenté par la marge de risque doit refléter l'incertitude portée par un contrat sur le montant et la temporalité des flux de trésorerie.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – B76

Au premier exposé sondage, l'IASB avait retenu trois méthodes différentes pour le calcul de l'ajustement au titre du risque : la Value at Risk (VaR), la Conditional Tail Expectation (CTE) et la méthode du coût du capital.

Cependant, contrairement au premier exposé-sondage, l'IASB a décidé pour le deuxième exposé sondage de ne pas présenter de méthodologie relative au calcul de l'ajustement au titre du risque. Toutefois, l'IASB indique quelques propriétés que cet ajustement doit vérifier :

- les risques avec une faible fréquence et une haute intensité présenteront un plus grand ajustement au titre du risque que les risques à haute fréquence et faible intensité.
- pour des risques similaires, les contrats avec une duration plus longue présenteront un ajustement plus élevé que les contrats à plus courte duration.
- les risques avec une distribution plus large des probabilités présenteront un ajustement plus élevé.
- l'ajustement sera d'autant plus élevé que l'information disponible sur le risque est faible.
- l'ajustement aura tendance à se réduire avec la réalisation du risque.

#### 1.4.3.1 Les Mesures de risque

La Value-at-Risk (VaR) et la Conditional Tail Expectation (CTE) étant des mesures de risque, elles sont tout d'abord définies.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\Gamma$ l'ensemble des variables aléatoires réelles.

**Définition** [3] : Une mesure de risque, $\rho$, est une fonction définie sur l'ensemble $\Gamma$ et à valeurs sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{array}{cccc} \rho & : & \Gamma & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & X & \mapsto & \rho(X) \end{array}$$

Ainsi, une mesure de risque $\rho$ associe à une position X un capital requis $\rho(X)$. Pour une position X, $\rho(X)$ représente donc un montant monétaire dont la compagnie doit disposer pour se couvrir contre le risque X : il représente alors une perte lorsqu'il s'agit d'une valeur positive et d'un gain dans le cas contraire.

Remarque : $\rho(X)$ peut s'interpréter comme le montant des fonds propres exigés associé à la position X.

**Définition** : Soient X et Y deux variables aléatoires et $\rho$ une mesure de risque. On dit que :

- $\rho$ est invariante en loi, si $X = Y$, alors $\rho(X) = \rho(Y)$
- $\rho$ est monotone, si $X \geq Y$ p.s., alors $\rho(X) \geq \rho(Y)$
- $\rho$ est invariante par translation, si pour toute constante c, alors $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.
- $\rho$ est homogène positive, si pour toute constante positive c, alors $\rho(cX) = c\rho(X)$
- $\rho$ est sous-additive, si $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
- $\rho$ est convexe, si pour tout $\beta \in [0, 1]$, $\rho(\beta X + (1 - \beta)Y) \leq \beta\rho(X) + (1 - \beta)\rho(Y)$ .

**Définition** : une mesure de risque est dite monétaire si elle est monotone et invariante par translation.

**Définition** : une mesure de risque est qualifiée de cohérente [4] si elle monétaire, homogène positive et sous-additive.

3. [DC04] DENUIT Michel, CHARPENTIER Arthur, [2004], "Mathématiques de l'assurance non-vie", Paris, Economica, 464 pages.
4. [ADEH98] ARTZNER Philippe, DELBAEN Freddy, EBER Jean-Marc, HEATH David,[1998],"Coherent Measures of Risks", *Mathematical Finance*,1999,Volume 9,n°3,p. 203–228.

#### 1.4.3.2 Mesure en un point : la Value-at-Risk (VaR)

Les mesures en un point représentent des niveaux de quantile de la variable aléatoire X : elles reposent sur un point de la distribution. Les autorités de contrôle assurantielles et bancaires recommandent le recours à ce type de mesures de risque du fait de sa simplicité. La Value-at-Risk est la mesure la plus souvent rencontrée pour le calcul de capitaux réglementaires.

La Value-at-Risk (VaR)[5] ou valeur ajustée au risque s'est tout d'abord développée dans les milieux financiers avant d'être utilisée par les assureurs.

Soit X $\in \mathit{\Gamma}$ une variable aléatoire représentant un risque et $F_X$ sa fonction de répartition.

**Définition** : La Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0,1)$ du risque $X$, notée $VaR_\alpha(X)$, est le quantile de niveau $\alpha$ :

$$VaR_\alpha(X) = Inf(x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X < x) > \alpha) = F_X^{-1}$$

où $F_X^{-1}$ désigne la fonction quantile de X définie par :

$$F_X^{-1} = Inf(x \in \mathbb{R}, F_X(x) \geq \alpha), \alpha \in [0,1]$$

Etant définie comme le quantile de X, la Value-at-Risk représente le montant de perte qui n'est dépassé que dans $1-\alpha$ % des cas. La probabilité $\alpha$ est à déterminer en fonction du niveau de sécurité que la compagnie considère. Ce concept peut être également relié à des notions de théorie de la ruine. En effet, si une entreprise d'assurance dispose d'un montant $VaR_\alpha(X)$ et ne couvre qu'un risque X alors sa probabilité de ruine est de $1-\alpha$.

Si un assureur décide d'utiliser la méthode de la Value-at-Risk afin de déterminer l'ajustement au titre du risque, noté ATR, alors :

$$ATR = VaR_\alpha(X) - BE^{6}(X)$$

L'avantage de cette méthode est sa facilité d'implémentation. En revanche, elle ne permet pas de prendre en compte le comportement de la distribution au delà du seuil $\alpha$. Il faut par conséquent définir avec précision le seuil $\alpha$. Un autre inconvénient est le fait que la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle ne respecte pas l'axiome de sous-additivité.

5. [PTJ11] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, JUILLARD Marc [2011], "Modèles financiers en assurance", 2e édition, Paris, Economica, 565 pages.
6. BE : Best Estimate

#### 1.4.3.3 Mesures de dépassement espéré

Cette famille de mesure de risque permet la mesure des résultats espérés dépassant un certain seuil. Elle se compose des mesures de risque comme la Conditional Tail Expectation, la Tail Value-at-Risk ou encore l'Expected Shortfall. L'un des enjeux, dans ce cas de figure, est alors de définir le seuil à considérer. A l'inverse des mesures de risque en un point, les mesures de dépassement espéré renseignent sur les queues de distribution.

Soit X une variable aléatoire continue telle que $\mathbb{E}[X] < \infty$.

**Définition** : La Tail Value-at-Risk (TVaR) [7] de niveau $\alpha$ associée au risque X est définie par :

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 F_X^{-1}(u)du$$

On remarque que la TVaR peut s'écrire en fonction de la VaR :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} \mathbb{E}\left((X - VaR_\alpha(X))^+\right)$$

La Tail Value-at-Risk a également rencontré un grand succès car elle précise le comportement de la distribution au-delà de la Value-at-Risk. La Tail Value-at-Risk est, contrairement à la Value-at-Risk, une mesure de risque cohérente.

**Définition** : La Conditional Tail Expectation de niveau $\alpha$, notée $CTE_\alpha(X)$, est le montant de la perte moyenne sachant que celle-ci dépasse la VaR au niveau $\alpha$, i.e,

$$CTE_\alpha(X) = \mathbb{E}(X - VaR_\alpha(X)|X > VaR_\alpha(X))$$

La Conditional Tail Expectation correspond donc à la perte moyenne dans les $(1-\alpha)$ % des cas où la VaR est dépassée. L'ajustement au titre du risque avec la méthode de la Conditional Tail Expectation est :

$$ATR = CTE(X, \alpha) - BE(X)$$

Cette méthode permet de prendre en compte les valeurs extrêmes et ainsi les pertes associées qui surviennent dans les $(1-\alpha)$ % cas. La modélisation des valeurs extrêmes ne peut pas être négligée car le risque de l'assureur réside dans ces valeurs extrêmes. Par conséquent, l'utilisation de cette méthode semble plus appropriée que la Value-at-Risk pour calculer l'ajustement au titre du risque.

**Définition** : La Conditional Value-at-Risk de niveau $\alpha$, notée $CVaR_\alpha(X)$, est l'excédent moyen de sinistre au delà de la VaR au niveau de probabilité $\alpha$ :

$$CVaR_\alpha(X) = \mathbb{E}(X - |X > VaR(X, \alpha))$$

7. [PTJ11]PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, JUILLARD Marc [2011], "Modèles financiers en assurance", 2e édition, Paris, Economica, 565 pages.

**Définition** : L'Expected Shortfall de niveau de probabilité $\alpha$, notée $ES_\alpha(X)$, est la perte moyenne au-delà de la VaR au niveau $\alpha$, i.e,

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}((X - VaR(X, \alpha))^+).$$

L'Expected Shortfall représente le montant de la prime Stop-Loss avec une rétention de l'assureur égale à la Value-at-Risk au niveau $\alpha$ si X est la charge brute de sinistres.

Il existe un lien entre ces différentes mesures de risque.

**Proposition** : Pour le niveau $\alpha \in (0, 1)$, on a :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{1-\alpha} ES_\alpha(X)$$

$$CTE_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{1}{\overline{F_X}(VaR_\alpha(X))} ES_\alpha(X)$$

avec $\overline{F_X}$ la fonction de survie de X.

**Proposition** : Si la fonction de répartition $F_X$ du risque X est continue, alors :

$$TVaR_\alpha(X) = CTE_\alpha(X) = CVaR_\alpha(X) = ES_\alpha(X)$$

#### 1.4.3.4 Méthode du coût du capital

Le coût du capital correspond au taux de rentabilité annuel moyen attendu par les actionnaires et les créanciers en retour de leurs investissements. Le coût du capital peut être utilisé pour calculer un ajustement au risque. Pour cela, plusieurs étapes doivent être mises en place :

1. estimer une distribution de probabilité des flux de trésorerie.
2. déterminer un niveau de $\alpha$.
3. déterminer le capital nécessaire pour que dans $\alpha$ % des cas, les actifs soient suffisants pour couvrir les engagements.
4. calculer l'ajustement au risque à partir du capital en utilisant un taux de coût du capital et un taux sans risque.

Dans le cadre de la directive Solvabilité II, la méthode du coût du capital correspond au coût d'immobilisation des fonds propres. En effet, immobiliser du capital représente un coût pour l'assureur et la rentabilité des actifs sera plus faible que celle attendue par les actionnaires.

La norme IFRS 4 - phase II ne spécifiant pas le taux de coût du capital et le taux sans risque, l'assureur doit estimer ces deux paramètres en fonction de ses propres risques. De plus, l'exposé sondage ne présente aucune méthode pour calculer le coût du capital. Par conséquent, le calcul préconisé par les spécifications techniques de la directive Solvabilité II afin de déterminer le coût du capital via le SCR est présenté.

Le coût du capital est donc déterminé en actualisant le coût annuel généré par l'immobilisation du SCR :

$$CoC = \tau \times \sum_{i=1}^{N} \frac{SCR_i}{(1+r_{i+1})^{i+1}}$$

— $\tau$ : taux de coût du capital
— N : le nombre d'années de projection
— $SCR_i$ : SCR calculé en i
— $r_i$ le taux sans risque de maturité i

### 1.4.4 La marge de service contractuelle

La marge de service contractuelle (Contractual Service Margin), notée par la suite CSM, joue un rôle prépondérant dans le reporting IFRS 4 - phase II. En effet, elle permet de révéler la profitabilité attendue d'un contrat. L'amortissement de la CSM au cours de la vie du contrat permet de reconnaître en résultat les profits réalisés.

#### 1.4.4.1 Le calcul à l'origine

La CSM, à la réception de la prime, permet d'obtenir les profits futurs attendus du contrat. Elle est définie par :

$$\text{CSM} = \text{Primes} - (\text{Best Estimate} + \text{Ajustement au titre du risque})$$

La CSM ne peut pas être négative. Si le contrat présente une perte à l'émission du contrat alors la CSM est nulle. La perte est alors reconnue immédiatement en résultat. À moins que le portefeuille de contrats d'assurance dont fait partie le contrat ne soit déficitaire au moment de la comptabilisation initiale, l'entité doit évaluer la CSM comptabilisée à ce moment, en application du paragraphe 18(b), à un montant qui est l'égal et l'opposé de la somme des montants suivants :

— les flux de trésorerie d'exécution du contrat d'assurance au moment de la comptabilisation initiale.
— tout flux de trésorerie de précouverture.

#### 1.4.4.2 La désactualisation de la CSM

A chaque période, la CSM est désactualisée au taux utilisé pour prendre en compte la valeur temps de l'argent. *Le montant résiduel de la marge de service contractuelle à la date de clôture est la valeur comptable à la date d'ouverture de la période de présentation de l'information financière : plus l'intérêt accumulé sur la valeur comptable de la marge de service contractuelle durant la période de présentation de l'information financière pour tenir compte de la valeur temps de l'argent (l'intérêt accumulé est calculé à l'aide des taux d'actualisation indiqués au paragraphe 25 qui s'appliquaient lors de la comptabilisation initiale du contrat).* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 30

La désactualisation devrait se faire au taux calculé à l'origine. Cette proposition est cependant débattue. En effet, l'utilisation d'un taux fixé à l'origine ne peut pas être maintenue en cas de changement de l'environnement économique.

#### 1.4.4.3 L'amortissement de la CSM

La CSM calculée à l'origine est amortie pendant la durée de vie du contrat : *l'entité doit comptabiliser la marge sur services contractuels restante en résultat net sur la durée de la période de couverture, d'une manière systématique, sur la base qui reflète le mieux la prestation des services qui restent à fournir en vertu du contrat.* Source : exposé-sondage ES/2013/7 – 32

#### 1.4.4.4 L'ajustement de la CSM

L'exposé sondage de juin 2013 a introduit le concept d'ajustement de la CSM. Cet ajustement est possible, à condition qu'il soit relatif aux flux de trésorerie futurs.

A la date de clôture, le montant résiduel de la CSM correspond à la valeur comptable à la date d'ouverture :

— plus tout écart favorable entre les estimations actuelles et antérieures de la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs si ceux-ci sont liés à la couverture future et à d'autres services futurs.

— moins toute variation défavorable des flux de trésorerie futurs :
- si la variation résulte d'un écart entre les estimations actuelles et antérieures de la valeur actualisée des flux de trésorerie futurs qui sont liés à la couverture future et à d'autres services futurs,
- dans la mesure où la marge de service contractuelle est suffisante pour absorber une variation défavorable. La marge de service contractuelle ne doit pas être négative. Source : exposé-sondage ES/2013/7–30

Cependant, l'exposé sondage de 2013 limite fortement l'ajustement de la CSM pour les contrats participatifs. L'IASB ne souhaite pas confondre la comptabilisation des services d'assurance (IFRS 4) avec la variation de valeur des instruments financiers (IFRS 9). Cette distinction est difficile pour les contrats avec participation discrétionnaire. En effet, le calcul de la CSM à l'ouverture du contrat représente les profits futurs de l'entité, reflétant ainsi le revenu des actifs ainsi que le modèle de gestion de l'assureur. La distinction entre les deux composantes semble donc impossible.

### 1.4.5 Other Comprehensive Income (OCI)

L'Other Comprehensive Income (OCI), traduit en français par "autres éléments du résultat global", correspond à un poste des fonds propres IFRS. L'OCI permet de prendre en compte les variations bilancielles qui ne sont pas prises en compte dans le compte de résultat. Ainsi, la comptabilisation en OCI permet de ne laisser dans le compte de résultat que les éléments représentatifs de l'activité de la compagnie. L'OCI permet de prendre en considération la volatilité à court terme n'ayant pas vocation à se refléter dans le compte de résultat ainsi que les *mismatch* comptables.

La notion d'OCI n'est pas réservée à la norme IFRS 4. En effet, selon la norme IFRS 9 il est possible de comptabiliser certains instruments financiers en juste valeur par OCI (JVOCI). Ainsi, lorsqu'une obligation est comptabilisée en JVOCI, les variations de valeur de marché de cette obligation n'impactent pas le compte de résultat de la compagnie mais sont prises en compte en OCI. Cette comptabilisation en OCI est en parfait accord avec la politique de gestion de la compagnie d'assurance. En effet, les assureurs souhaitent détenir les obligations jusqu'à leur maturité et ne souhaitent pas être impactés par les variations de valeur de marché de l'obligation.

#### 1.4.5.1 L'OCI provenant de l'actif (OCI actif)

Tous les instruments d'actif présentent deux référentiels de comptabilisation : le premier correspond à la valeur de marché et le second est celui relatif au coût amorti. Ainsi, en cas de comptabilisation d'un actif en JVOCI, l'OCI correspond à la différence entre la valeur de marché et le coût amorti.

#### 1.4.5.2 L'OCI provenant du passif (OCI passif)

Afin de comptabiliser l'OCI provenant du passif, il faut tout d'abord définir deux référentiels de comptabilisation du passif. L'actif pouvant être comptabilisé en valeur de marché ou au coût amorti, le passif est également comptabilisé selon deux méthodes. La méthode symétrique à la valeur de marché correspond à l'actualisation du passif avec le taux *current*. La seconde méthode correspond à l'actualisation du passif avec un taux alternatif. L'OCI provenant du passif correspond à la différence entre le passif actualisé au taux *current* et le passif actualisé au taux alternatif.

### 1.4.6 Comptabilisation des contrats non participatifs

Le périmètre du modèle général est l'ensemble des contrats non participatifs. Ce modèle repose sur l'utilisation ou non de l'option OCI au passif afin de reporter les effets des changements de taux. A chaque date d'évaluation, deux Best Estimate sont calculés :

— un Best Estimate actualisé avec le courbe des taux *current*.

— un Best Estimate actualisé avec la courbe des taux observés à la souscription du contrat

Si l'assureur décide d'utiliser l'option OCI, la désactualisation du Best Estimate et de la CSM s'effectue alors au taux figé à la souscription. En revanche, s'il décide de ne pas utiliser l'option OCI, la désactualisation du Best Estimate s'effectue au taux *current*.

De plus, le modèle général repose sur l'amortissement et l'ajustement de la CSM. Les intérêts crédités sont calculés sur le stock de CSM à l'aide de la courbe des taux observée à la souscription. L'évolution des hypothèses de projections actuarielles impacte le Best Estimate. Le traitement comptable lié à ce changement est le suivant :

— absorption par la CSM de l'impact sur le Best Estimate relatif aux périodes d'assurance futures, actualisé avec les taux observés à la souscription du contrat.

— absorption par le résultat de l'impact sur le Best Estimate relatif aux périodes passées.

Par conséquent, il est nécessaire de stocker la courbe des taux à la souscription pour chaque génération de contrats (ce qui est déjà le cas si l'option OCI est privilégiée) ainsi que d'identifier les flux relatifs aux périodes passées et futures.

La comptabilisation des contrats participatifs est définie dans le chapitre 7.

# Chapitre 2

# Les contrats d'épargne en assurance vie et les normes comptables françaises

## Sommaire

## 2.1 Les produits d'épargne en assurance vie

Les produits d'épargne en assurance-vie sont très utilisés par les Français depuis de nombreuses années, notamment en raison des avantages fiscaux. En France, l'assurance vie représente aujourd'hui environ 40% de l'épargne totale des Français.

### 2.1.1 Définition et caractéristiques

Il existe deux types d'assurance vie : l'assurance vie en cas de vie et l'assurance vie en cas de décès. L'assurance vie, en cas de vie, permet le versement d'un capital ou d'une rente en cas de vie de l'assuré à une date prédéfinie à la souscription du contrat contre le versement de primes. Si le décès survient avant le terme du contrat, le bénéficiaire ne perçoit rien et l'assureur peut conserver le capital constitué. Cependant, la majorité des produits commercialisés sous le nom d'assurance vie garantissent le versement d'un capital ou d'une rente à l'échéance du contrat à l'assuré s'il est toujours en vie, ou au bénéficiaire si le décès survient. Ce type de produit est ainsi destiné à la constitution d'une épargne ou à la valorisation d'un capital à long terme.

Ces différents produits comportent deux risques principaux pour l'assureur : le risque financier et le risque de mortalité. Le premier risque se situe au niveau des supports libellés en euros uniquement. Le second risque est, quant à lui, lié aux éventuelles garanties décès que propose le contrat.

Il existe deux types de contrats d'assurance vie :

— les contrats monosupport : l'ensemble de l'épargne confiée par le souscripteur est placé dans des actifs de même nature, soit en fonds euros, soit en unités de compte.

— les contrats multisupports : une partie de l'épargne confiée par le souscripteur est investie dans le fonds général, l'autre en unités de compte.

### 2.1.2 Les contrats d'épargne monosupport

#### 2.1.2.1 Les contrats d'épargne libellés en Euro

La principale caractéristique des contrats d'épargne libellés en Euro est la sûreté du placement. En effet, ces contrats sont principalement investis en obligations. L'assureur s'engage à verser à l'échéance du contrat le montant des cotisations nettes de frais de souscription et de gestion, auxquelles sont ajoutés les intérêts produits par le contrat. L'épargne confiée par le souscripteur ne peut qu'augmenter chaque année : les placements génèrent des intérêts, qui une fois intégrés au capital, sont eux-mêmes producteurs d'intérêts. Il s'agit de l'effet cliquet. En contre partie de cette sécurité, les perspectives de gains sont limitées.

Afin de faire face à ses engagements, l'assureur doit constituer une provision au passif. A l'actif, les différents placements permettent de couvrir cette provision. L'épargne constituée s'apprécie à chaque versement de prime du souscripteur et grâce au mécanisme de revalorisation. A la souscription du contrat, l'assureur fixe le taux minimum garanti correspondant au taux minimum annuel de revalorisation de l'épargne.

L'assureur s'engage alors à revaloriser l'épargne à ce taux chaque année, peu importe ses résultats financiers. Le taux minimum garanti obéit à des contraintes fixées par le Code des assurances (articles [A. 132-1] et [A. 132-2] ) et ne peut excéder :

— 75% du TME [1] pour les contrats dont la durée maximale est inférieure ou égale à huit ans.

— Min (3,5%, TME) pour les contrats dont la durée est supérieure à huit ans.

De plus, l'assureur a l'obligation de redistribuer aux assurés une partie des bénéfices qu'il a réalisés au cours de l'année. Il s'agit de la participation aux bénéfices. Selon le Code des assurances, les assureurs doivent distribuer au minimum 90 % de leurs bénéfices techniques et 85 % de leurs bénéfices financiers. Ils disposent de 8 ans pour restituer à l'assuré l'ensemble des produits financiers.

#### 2.1.2.2 Les contrats d'épargne en unités de compte

Les contrats d'épargne en unités de compte sont plus risqués mais offrent potentiellement un rendement plus performant que les contrats libellés en euros. Une unité de compte (UC) représente un ensemble de valeurs cotées sur un marché financier. Elle correspond à une enveloppe composée d'actions, d'obligations et d'OPCVM. Contrairement aux contrats libellés en euros, le risque est entièrement supporté par l'assuré, à moins que le contrat inclut une garantie plancher. L'assureur garantit alors un montant minimum de capital au bénéficiaire, peu importe l'évolution des cours des unités de compte.

### 2.1.3 Les contrats d'épargne multisupports

Les primes versées par le souscripteur d'un contrat multisupports sont réparties entre le fonds Euro et les unités de compte. Ces contrats permettent à la fois de profiter du marché en cas de hausse tout en assurant un capital minimum. Une partie de l'épargne étant placée sur le fonds Euro, l'assureur doit fournir le taux minimum garanti et verser de la participation aux bénéfices sur la partie de l'épargne investie. Les contrats multisupports offrent une grande liberté à l'assuré qui peut décider lui-même de la gestion de son épargne et de la répartition entre les différents supports.

1. Le TME désigne le taux moyen des emprunts d'état à long terme calculé sur les six mois précédant la souscription

## 2.2 Les normes comptables françaises (French GAAP)

Le bilan, représentant la situation financière de la compagnie, est constitué de l'actif et du passif. L'actif d'une compagnie d'assurance représente l'ensemble des biens et des placements qu'elle possède. Le passif constitue l'ensemble de ses engagements envers les assurés (provisions techniques) ainsi que les capitaux propres représentant la richesse intrinsèque de l'entreprise. Les provisions techniques représentent la plus grande partie du passif (90%) tandis que les fonds propres représentent une faible part (10%).

### 2.2.1 Comptabilisation des actifs

La comptabilisation des actifs selon les normes comptables françaises est présentée ci-après [2]. Ces normes distinguent les titres amortissables des titres non amortissables.

#### 2.2.1.1 Les titres amortissables

L'amortissement correspond à la constatation comptable et annuelle de la perte de valeur des actifs d'une entreprise du fait de l'usure, du temps ou de l'obsolescence. Les obligations étant des titres amortissables, elles sont comptabilisées selon le principe du coût historique. Ainsi, la valeur d'une obligation à la date t est égale à :

$$\text{Valeur obligation}(t) = \text{valeur achat}(0) + \text{amortissement de la surcote/decote} + \text{coupon couru}(t)$$

La surcote/décote est égale à la différence entre la valeur nominale et la valeur d'achat de l'obligation.

#### 2.2.1.2 Les titres non amortissables

Les actions, les actifs immobiliers, les OPCVM sont des titres non amortissables. L'évaluation de ces titres au bilan d'une compagnie d'assurance résulte de trois articles du Code des assurances :

- la comptabilisation au prix d'acquisition
- l'enregistrement d'une éventuelle provision pour dépréciation à caractère durable
- le calcul global de la provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques

Ainsi, selon le principe de prudence comptable, des provisions sont dotées si des moins-values sur ces titres venaient à être constatées. Ces provisions doivent donc être vues comme des réserves que l'assureur doit doter dans le cas où il est amené à constater des moins values sur ces actifs. Ces provisions appartiennent aux provisions techniques.

Les provisions techniques doivent permettre à l'assureur de tenir ses engagements envers les assurés ou les bénéficiaires des contrats. Elles représentent une estimation des engagements de la compagnie. Cette estimation doit être effectuée à partir d'hypothèses prudentes définies par le Code des assurances.

2. [Rev11], REVELEN Julien, *"Replicating portfolio" et capital économique en assurance vie*, 2011, Mémoire d'actuariat, ISFA.

### 2.2.2 Les provisions techniques vie

Les provisions techniques vie que doit constituer un assureur sont détaillées à l'article R331-6 du Code des assurances. Les provisions techniques modélisées dans le cadre de ce mémoire sont définies ci-après.

#### 2.2.2.1 Les Provisions Mathématiques

Les Provisions Mathématiques correspondent à la différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés, à l'exception, pour les contrats mentionnés à l'article L. 142-1, des engagements relatifs à la provision de diversification.

#### 2.2.2.2 La réserve de capitalisation

D'après l'article R331-3 du code des assurances, la réserve de capitalisation est définie comme étant "une réserve destinée à parer la dépréciation des valeurs comprises dans l'actif de l'entreprise et à la diminution de leur revenu".

La réserve de capitalisation [3] est une provision liée aux titres obligataires. L'objectif de cette provision est d'empêcher les assureurs de distribuer leurs plus-values obligataires. En effet, cette réserve n'est dotée ou reprise que dans le cas où la compagnie est amenée à réaliser les plus ou moins values latentes c'est-à-dire dans le cas de la vente de son actif. La réglementation prévoit ainsi :

- en cas de baisse des taux, cette provision est dotée à la hauteur de la plus-value réalisée provenant de la variation des taux.
- en cas de hausse des taux, les moins values réalisées provenant des fluctuations de taux sont compensés par des prélèvements sur cette réserve.

La plus ou moins value réalisée (PMVR) sur la vente d'une obligation est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$PMVR = VM - (VNC - CC)$$

avec :

- PMVR : la plus/moins value réalisée sur la vente de l'obligation.
- VM : la valeur de marché de l'obligation.
- VNC : la valeur nette comptable de l'obligation.
- CC : le coupon couru.

La variation de la réserve de capitalisation vaut :

$$\mathit{\Delta RC} = \begin{cases} \text{PMVR si PMVR} > 0 \\ max(PMVR, -RC_0) \text{ si PMVR} < 0 \end{cases}$$

avec :

- $\mathit{\Delta RC}$ la variation de la réserve de capitalisation due à la vente de l'obligation.
- $RC_0$ la valeur de la réserve de capitalisation avant la vente.

3. [Rev11],REVELEN Julien, *"Replicating portfolio" et capital économqiue en assurance vie*, 2011, Mémoire d'actuariat, ISFA.

**Exemple de dotation de la réserve de capitalisation** :

On considère une obligation de valeur égale à 100% du nominal, vendue 110% suite à une baisse des taux et rachetée immédiatement à 110%.

Sans l'existence de la réserve de capitalisation, on aurait la situation suivante :

— en contrepartie de la vente de l'obligation, la société d'assurance reçoit en trésorerie 110% du nominal de l'obligation.

— la société enregistre un résultat financier de 10% du nominal.

Avec la réserve de capitalisation, on a la situation suivante :

— en contrepartie de la vente de l'obligation, la société d'assurance reçoit en trésorerie 10% du nominal de l'obligation.

— la société enregistre un résultat financier de 10% du nominal.

— la société comptabilise une charge de dotation de 10% du nominal.

— le résultat de la cession est donc neutralisé.

La réserve de capitalisation est une provision particulière dans la mesure où elle fait partie des fonds propres de l'assureur. En particulier, elle est éligible dans la constitution de la marge de solvabilité. [4]

#### 2.2.2.3 Provision pour Risque d'Exigibilité des engagements techniques (PRE)

La Provision pour Risque d'Exigibilité des engagements techniques est destinée à faire "face à une insuffisante liquidité des placements notamment en cas de modification du rythme de règlements des sinistres".

D'après l'article R331-3-1 du Code des assurances, la PRE est une "provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R332-20". Les actifs mentionnés dans l'article R332-20 sont essentiellement les placements en actions et en immobiliers.

Selon le Conseil National de la Comptabilité, "cette provision correspond à la perte globale que subirait une entreprise si elle était amenée à liquider immédiatement ces placements, en l'absence de risque de liquidité ou de risque identifié sur les placements, hormis ceux d'ores et déjà pris en compte, dans les provisions pour dépréciation durable".

La PRE est calculée par différence entre la valeur de réalisation et la valeur comptable au bilan de tous les actifs autres que les titres amortissables. Par arrêté du 30 janvier 2009, les assureurs peuvent désormais étaler la dotation à la PRE sur une durée égale à trois ou huit ans.

4. P. THEROND, Provisions techniques relatives aux actifs financiers des assureurs

**Exemple de dotation à la PRE**

Une compagnie enregistre une plus-value latente de cinq millions d'euros sur l'ensemble de son portefeuille :

— les plus-values latentes sur les titres amortissables représentent sept millions d'euros.

— les moins values latentes sur titres non amortissables représentent deux millions d'euros.

Les plus-values des titres non amortissables ne sont pas inscrites au bilan, mais une provision pour risque d'exigibilité des engagements techniques de deux millions d'euros est constituée.

#### 2.2.2.4 Provisions pour participation aux bénéfices (Fond de PB)

Le Code des assurances oblige les assureurs à redistribuer à l'assuré au minimum 85% des bénéfices qu'ils réalisent. Cette redistribution doit intervenir au plus tard dans les huit ans qui suivent le constat des bénéfices.

#### 2.2.2.5 Provision pour Participation aux Excédents (PPE)

D'après l'article R331-3 du Code des assurances, la Provision pour Participation aux Excédents est définie comme étant le "montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits".

L'assureur peut choisir de la doter les années où le résultat est meilleur qu'attendu et de la reprendre les années moins bonnes. Ainsi, le rendement des contrats est lissé sur plusieurs années. Si le taux servi est inférieur aux taux de participation aux bénéfices réglementaire, la PPE est dotée de la différence. La distribution de la participation aux excédents peut être différée jusqu'à huit ans. Une fois les huit ans atteints, l'intégralité de la participation aux excédents mise en provision d'une année donnée doit avoir été distribuée. L'assureur peut choisir de doter plus que le minimum réglementaire.

# Chapitre 3

# Le cadre théorique de la modélisation

## Sommaire

Le nouvel environnement IFRS nécessite la construction d'un bilan et d'un compte de résultat prenant en compte la valeur temps des options et garanties. Par conséquent, il est nécessaire de développer un modèle de gestion actif/passif stochastique afin de projeter l'ensemble des flux permettant de déterminer une estimation prospective des engagements de l'assureur. En effet, le calcul du Best Estimate et de la CSM se base sur un calcul prospectif des prestations.

Le cadre théorique de la modélisation est décrit dans cette partie. L'ensemble des notions financières nécessaires à la modélisation de l'actif et le principe de valorisation *Market-Consistent* sont définis. [1]

On considère un marché financier sans effectuer d'hypothèses particulières pour le moment. Soit $T^* > 0$, l'horizon des temps (les temps sont exprimés en années).

# 3.1 Notions financières

## 3.1.1 Actif sans risque et facteur d'actualisation

L'actif sans risque $(S_t)$, $t \in [0; T^*]$ correspond à la valeur d'un investissement initial d'une unité placé au taux sans risque.

### 3.1.1.1 Actif sans risque

L'actif sans risque $(S_t)$, t $\in [0; T^*]$ est l'unique solution de l'équation différentielle :

$$dS_t = r_t S_t dt$$

avec $S_0 = 1$ et pour $t \in [0; T^*]$, $r_t$ définit le taux d'intérêt instantané à cette date.

Ainsi, pour t $\in [0; T^*]$,

$$S_t = e^{\int_0^t r_s \, \mathrm{d}s}$$

### 3.1.1.2 Facteur d'actualisation

Le facteur d'actualisation ou *discount factor* correspond au montant à placer à une date t<T au taux sans risque pour obtenir une unité de monnaie en T.

Soient $t, T \in [0; T^*]$. Le facteur d'actualisation entre les dates t et T est le montant en t équivalent à 1 unité de monnaie en T. Il est défini ainsi :

$$D(t,T) = \frac{S_t}{S_T} = e^{-\int_t^T r_s \, \mathrm{d}s}$$

1. [BM06] BRIGO Damiano, MERCURIO Fabio, [2006], "Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit", 2e édition, Berlin, Springer Finance, 982 pages.

### 3.1.2 Obligations zéro-coupon et taux d'intérêt spot

L'obligation zéro-coupon, produit financier fondamental, est définie. [2]

#### 3.1.2.1 Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon de maturité T $\in [0; T^*]$ est un contrat garantissant à son détenteur le paiement de 1 unité de monnaie à la date T.

Son prix à une date t $\in [0; T^*]$ est noté $P(t, T)$. En particulier, $P(T, T)$=1 pour tout T.

#### 3.1.2.2 Taux d'intérêt composé continu spot

Le taux d'intérêt composé continu spot entre t $\in [0; T[$ et T$\in [0; T^*]$, noté $R(t, T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unités de monnaie en t conduit continûment à l'obtention de 1 unité de monnaie en T :

$$R(t, T) = -\frac{ln(P(t, T))}{T - t}$$

Ainsi, le prix de l'obligation zéro-coupon s'écrit :

$$P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)}$$

#### 3.1.2.3 Taux d'intérêt composé simple spot

Le taux d'intérêt composé simple spot entre t $\in [0; T[$ et T$\in [0; T^*]$, noté $L(t, T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ unités de monnaie en t conduit proportionnellement à l'obtention de 1 unité de monnaie en T :

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}$$

où $\tau$(t,T) définit la différence de temps entre les dates t et T, considérée avec la convention Actual/360. Les taux LIBOR sont par exemple des taux d'intérêt composés simples, c'est pourquoi ces taux sont notés $L$.

Par définition,

$$P(t, T)(1 + L(t, T)\tau(T, t)) = 1$$

Ainsi, le prix de l'obligation zéro-coupon s'écrit :

$$P(t, t) = \frac{1}{1 + L(t, T)\tau(t, T)}$$

2. [BM06] BRIGO Damiano, MERCURIO Fabio, [2006], "Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit", 2e édition, Berlin, Springer Finance, 982 pages.

#### 3.1.2.4 Taux d'intérêt composé annuel spot

Le taux d'intérêt composé annuel spot entre t $\in [0; T[$ et T$\in$ $[0; T^*]$, noté $Y(t,T)$, est le taux constant auquel un investissement de $P(t,T)$ unités de monnaie en t conduit à l'obtention de 1 unité de monnaie en T en réinvestissant les montant obtenus chaque année :

$$Y(t,T) = \frac{1}{P(t,T)^{\frac{1}{\tau(t,T)}}} - 1$$

où $\tau$(t,T) définit la différence de temps entre les dates t et T, considérée avec la convention Actual/365.

En effet, par définition :

$$P(t,T)(1 + Y(t,T))^{(\tau(t,T))} = 1$$

Les trois définitions des taux d'intérêt spot coïncident sur un intervalle de temps "petit". Par conséquent, la notion de taux d'intérêt instantané est définie par :

$$r_t = \lim_{T \to t^+} (R(t,T)) = \lim_{T \to t^+} (L(t,T)) = \lim_{T \to t^+} (Y(t,T))$$

### 3.1.3 Courbe des taux et courbe zéro-coupon

La courbe des taux et la courbe zéro-coupon sont définies.

#### 3.1.3.1 Courbe des taux

Par définition, la courbe des taux (ou structure par terme des taux d'intérêts) à une date t $\in$ $[0; T^*]$ (exprimée en année) est la représentation graphique de la fonction :

$$T \mapsto \begin{cases} L(t,T) \text{ si } t < T < t+1 \\ Y(t,T) \text{ si } T > t+1 \end{cases}$$

Différentes méthodes peuvent être utilisées afin de construire la structure par terme des taux d'intérêt. Par exemple, la courbe des taux fournie par l'Institut des Actuaires est construite à partir d'un taux actuariel avec le temps exprimé en mois. Le graphique ci-dessous représente la courbe des taux au 31/12/2014. (source : Institut des Actuaires).

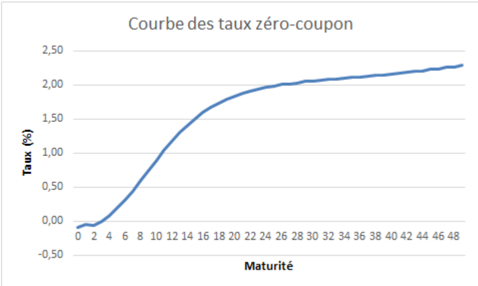



FIGURE 3.1 – Courbe des taux au 31/12/2014

#### 3.1.3.2 Courbe zéro-coupon

La courbe zéro-coupon à une date t $\in$ $[0; T^*]$ est la représentation graphique de la fonction $T \mapsto P(t,T), T\ [t; T^*]$.

Le graphique ci-dessous représente la courbe zéro-coupon au 31/12/2014. (source : Institut des Actuaires)

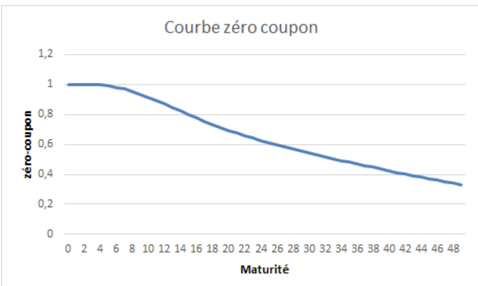



FIGURE 3.2 – Courbe zéro-coupon au 31/12/2014

#### 3.1.3.3 Taux forward

Les taux forward sont des taux d'intérêt fixés aujourd'hui pour un investissement qui sera effectué dans le futur. Ils peuvent être définis à partir du contrat Forward Rate Agreement (FRA) [3].

Un FRA sur un nominal $N > 0$ est un contrat impliquant 2 signataires (appelés receveur et payeur) et faisant intervenir 3 dates :

- t : la date de signature du contrat.
- T : la date d'expiration du contrat.
- S : la date de maturité du contrat.

A la date S, ce contrat verse au receveur un montant au taux fixe K (taux du contrat FRA fixé à la signature par les 2 signataires) pour la période [T,S] contre le paiement d'un taux variable L(T,S) fixé en T pour cette même période [T,S]. Ainsi, ce contrat induit un échange de flux entre les deux signataires tel que, du point de vue du receveur, la valeur du FRA en date S est :

$$N\tau(T,S)K - N\tau(T,S)L(T,S) = N\tau(T,S)(K - L(T,S))$$

Afin que le contrat soit juste, les deux signataires doivent déterminer le bon taux K au moment de la signature. Un taux particulier, calculable en t, appelé taux FRA est introduit. Ce taux, noté $K_{FRA}$, annule la valeur du contrat en t.

La valeur en S du FRA est :

$$\begin{aligned}
N\tau(T,S)K - N\tau(T,S)L(T,S) &= N\tau(T,S)K - N\tau(T,S)\frac{1-P(T,S)}{\tau(T,S)P(T,S)} \\
&= N\tau(T,S)K - N\frac{1-P(T,S)}{P(T,S)} \\
&= N(\tau(T,S)K - \frac{1}{P(t,S)} + 1) \\
&= N\tau(T,S)K + N - N\frac{1}{P(t,S)}
\end{aligned}$$

Or, détenir un montant $P(t,S)(N\tau(T,S)K + N)$ en t est équivalent à détenir un montant $N\tau(T,S)K + N$ en S par définition de $P(t,S)$. De même, détenir un montant $N\frac{1}{P(t,S)}$ est équivalent à détenir un montant N en T, donc $NP(t,T)$ en t par définition de P(T,S) et P(t,T).

Ainsi, la valeur du FRA en t est donnée par :

$$P(t,S)(N\tau(T,S)K + N) - NP(t,T)$$

3. [BM06] BRIGO Damiano, MERCURIO Fabio, [2006], "Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit", 2e édition, Berlin, Springer Finance, 982 pages.

Ainsi, $K_{FRA}$ est caractérisé par :

$$P(t,S)(\tau(T,S)K_{FRA}+1)-P(t,T)=0 \Leftrightarrow K_{FRA}=\frac{1}{\tau(T,S)}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}-1\right)$$

Il est intéressant d'étudier la limite de F(t,T,S) lorsque S tend vers $T^{+}$. En utilisant la définition de F(t,T,S), il vient en utilisant la convention $\tau(T,T+h)=h$ pour $h>0$ assez petit :

$$\lim_{S\to T^{+}}(F(t,T,S))=\lim_{S\to T^{+}}\frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)-P(t,S)}{P(t,S)}\right)=-\frac{1}{P(t,T)}\lim_{S\to T^{+}}\left(\frac{P(t,S)-P(t,T)}{S-T}\right)$$

Ainsi,

$$\lim_{S\to T^{+}}F((t,T,S))=-\frac{1}{P(t,T)}\frac{\partial P(t,T)}{\partial T}=-\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T}$$

Le taux d'intérêt forward composé simple prévalant en t $\in[0;T^{*}]$ pour la période $[T,S]$ avec T$\in[t;T^{*}]$, S$\in]T;T^{*}]$, noté F(t,T,S) est le taux FRA d'un Forward Rate Agreement signé en t, de date d'expiration T et de maturité S. Autrement dit :

$$F(t,T,S)=\frac{1}{\tau(T,S)}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}-1\right)$$

Le taux d'intérêt forward instantané prévalant à la date t $\in[0,T^{*}]$ pour la maturité T $\in[t,T^{*}]$, noté f(t,T), est donné par :

$$f(t,T)=\lim_{S\to T^{+}}(F(t,T,S))=-\frac{\partial \ln(P(t,T))}{\partial T}$$

La relation fondamentale ci-dessous découle de la définition du taux forward instantané :

$$P(t,T)=exp\left(-\int_{t}^{T}f(t,u)\,\mathrm{d}u\right)$$

On peut alors définir le prix zéro-coupon forward à la date t pour l'expiration T et la maturité S par :

$$P(t,T,S)=\frac{P(t,S)}{P(t,T)}\text{ ou encore }P(t,T,S)=exp\left(-\int_{T}^{S}f(t,u)\,\mathrm{d}u\right)$$

P(t,T,S) est la valeur vue à la date t du montant à payer à la date T pour acheter l'obligation zéro-coupon qui versera une unité à la date S.

### 3.1.4 Swap de taux d'intérêt et taux swap forward

Un swap de taux d'intérêt est une généralisation du FRA [4].

#### 3.1.4.1 Swap de taux d'intérêt

Un swap de taux d'intérêt de nominal N > 0 et de taux fixe K > 0 est un contrat induisant des échanges de flux (flux fixes et flux variables) entre deux parties (partie payeuse et partie receveuse). Chaque flux est appelé jambe ou patte. Lorsque la jambe fixe est payée et la jambe variable est reçue, le swap de taux d'intérêt est dit payeur ou *Payer IRS* (PFS). Dans le cas contraire, le swap de taux est dit receveur ou *Receiver IRS*(RFS).

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux entiers. Soit un calendrier de dates $T_i$, i= $\alpha$,...,$\beta$. On note $\tau_i = T_i$ - $T_{i-1}$.

Ainsi, pour un swap de taux payeur, la partie payeuse paie à chaque date $T_i$ un montant fixe $N\tau_i K$. La partie receveuse, quant à elle, paie un montant variable $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$, quantité associée au taux d'intérêt $L(T_{i-1}, T_i)$ prévalant en $T_i$ et dont $T_{i-1}$ est la date de fixing.

Le payoff actualisé en t d'un PFS peut donc s'écrire, du point de vue de la partie payeuse :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N\tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)$$

En revanche, le payoff actualisé en t, d'un FRS du point de vue de la partie payeuse est :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N\tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))$$

Le swap de taux d'intérêt peut être vu comme une somme de FRA. Ainsi, le prix $RFS(t, \alpha, \beta, \tau, N, K)$ du swap receveur à la date t vaut :

$$RFS(t, \alpha, \beta, \tau, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} FRA(t, T_{i-1}, T_i, \tau_i, N, K)$$

En utilisant l'équation donnant le prix du FRA, on obtient :

$$RFS(t, \alpha, \beta, \tau, N; K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} NP(t, T_i)\tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))$$

La somme des flux variables se simplifie en utilisant la définition du taux Libor forward. On obtient par le calcul que :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i L(T_{i-1}, T_i) P(t, T_i) P(t, T_i) = P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)$$

Finalement, le prix du swap receveur s'écrit sous la forme :

$$RFS(t, \alpha, \beta, \tau, N, K) = -NP(t, T_\alpha) + NP(t, T_\beta) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i)$$

4. [BM06] BRIGO Damiano, MERCURIO Fabio, [2006], "Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit", 2e édition, Berlin, Springer Finance, 982 pages.

#### 3.1.4.2 Taux swap forward

Le taux swap forward [5] associé au swap payeur est défini par :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum\limits_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t,T_i)}$$

Plus précisément, nous parlons de taux swap $T_\beta - T_\alpha$ ans dans t ans.

### 3.1.5 Produits dérivés simples

Les caps et les floors sont, avec les swaptions (présentées ci-après), les produits dérivés de taux d'intérêt les plus courants. [6]

#### 3.1.5.1 Les swaptions

Une swaption payeuse européenne est une option permettant d'entrer à une date T (appelée maturité de la swaption), dans un swap payeur pour la période $T_\beta - T_\alpha$ (appelé tenor de la swaption), de nominal N et de strike K. On suppose ici que T=$T_\alpha$.

A la date $T_\alpha$, la valeur du swap payeur sous-jacent s'écrit :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} NP(T_\alpha,T_i)\tau_i[L(T_{i-1},T_i) - K]$$

Par définition, le payoff de la swaption payeuse s'écrit donc à la date $T_\alpha$ :

$$N\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha,T_i)\tau_i[L(T_{i-1},T_i) - K]\right)^+$$

Ce payoff à la date $T_\alpha$ se réécrit en fonction du taux swap :

$$N\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha,T_i)\tau_i\right)(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+$$

De la même façon, si le swap considéré est receveur, le payoff de la swaption est en t :

$$N\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha,T_i)\tau_i\right)(K - S_{\alpha,\beta}(T_\alpha))^+$$

5. [BM06] BRIGO Damiano, MERCURIO Fabio, [2006], "Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit", 2e édition, Berlin, Springer Finance, 982 pages.
6. [Tok11] TOKE Ioane Muni, [2011], Modèles stochastiques de taux d'intérêts, Ecole Centrale Paris.

## 3.2 Valorisation *Market-Consistent*

La future norme IFRS 4 - phase II préconise une valorisation *Market Consistent* du bilan des assureurs : la valeur de l'actif et du passif doit être cohérente avec les valeurs et le risque de marché. L'approche *Market Consistent* s'est imposée comme le standard de valorisation des sociétés d'assurance vie. En pratique, cela se traduit par le fait que les scénarios économiques générés doivent être cohérents avec les prix observés sur les marchés financiers à la date d'évaluation.

Le concept fondamental sur lequel repose la valorisation *Market Consistent* est l'absence d'opportunité d'arbitrage. Un arbitrage est une opération financière assurant un gain positif ou nul de manière certaine : il s'agit de profiter d'inefficiences temporaires de prix entre différents titres ou contrats financiers. L'absence d'opportunité d'arbitrage représente donc l'impossibilité de réaliser un profit sans mise de fonds et sans risque. Ainsi, si les assureurs veulent déterminer leur bilan de manière cohérente avec la valeur de marché, ils doivent respecter le fait que les marchés sont effectivement sans arbitrage : chaque séquence de flux futurs ne peut avoir qu'une seule valeur qui est identique à la valeur du portefeuille utilisé pour les reproduire.

L'absence d'opportunité d'arbitrage dans le cadre d'un marché complet (possibilité de répliquer n'importe quel flux futur à partir d'un portefeuille autofinançant bien choisi) est donc l'hypothèse indispensable sur laquelle se base toute méthode de valorisation *Market Consistent*. Pour cela, deux théories d'évaluation sont utilisées dans le secteur assurantiel :

— la théorie risque-neutre

— la théorie des déflateurs (non définie dans le cadre de ce mémoire)

La théorie risque-neutre permet de passer de l'univers réel (avec la mesure de probabilité historique) vers un univers où les agents sont indifférents au risque. L'évaluation risque-neutre est un outil efficace pour déterminer une valeur actuelle qui soit cohérente avec les valeurs de marché, les flux de trésorerie futurs étant actualisés au taux sans risque. Elle permet également d'obtenir facilement des formules explicites. Par conséquent, la valorisation en univers risque-neutre a été retenue dans le cadre de ce mémoire.

Les mesures de probabilité les plus souvent utilisées sont :

— la mesure risque-neutre où le numéraire est un compte épargne valorisé au taux sans risque : nous raisonnons alors en univers risque-neutre.

— la mesure forward-neutre associée au numéraire zéro-coupon d'échéance égale au terme de la projection : cet univers forward-neutre est une extension de l'univers risque-neutre dans le cas de taux d'intérêt stochastiques.

Afin de pouvoir définir la mesure de probabilité risque-neutre, il faut supposer que le marché satisfait certaines hypothèses.

### 3.2.1 Hypothèses initiales sur le marché

Nous supposons que le marché satisfait dans toute la suite cinq hypothèses fondamentales :

- le marché est liquide : il est possible d'acheter et vendre instantanément des actifs qui y sont cotés sans que cela n'ait un effet majeur sur les prix.
- il n'y a pas de coûts de transaction.
- il est possible de vendre à découvert : il est autorisé de vendre à terme un titre que l'on ne détient pas mais que l'on se met en mesure de détenir le jour de sa livraison.
- les actifs sont divisibles à l'infini.
- il est possible d'emprunter et prêter à chaque date t $\in [0, T^*]$ au même taux $r_t$.

### 3.2.2 Formalisme associé au marché

Dans la suite, nous considérons un marché dont $\Omega$ décrit l'ensemble des évolutions possibles. Par ailleurs, nous considérons $\mathbb{P}$, une mesure de probabilité associée (appelée probabilité historique), telle que $(\Omega, \mathcal{F})$ constitue un espace probabilisé. Nous rappelons que $T^* > 0$ désigne l'horizon des temps, et $(\mathcal{F}_t)_{0<t<T^*}$ définit une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ complète et continue à droite.

Le marché est supposé contenir K $\in \mathbb{N}^*$ actifs risqués $(S_t^1), ..., (S_t^K)$, tous $(\mathcal{F}_t)_{0<t<T^*}$ -adaptés et positifs.

Soient $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) = \left\{ X \in \Lambda : \forall i \in 0, ..., K, \mid \int_0^{t^*} X_t dS_t^i \mid < \infty \right\}$ et $\Lambda$ l'espace vectoriel des processus $(\mathcal{F}_t)$-adaptés.

On suppose également que les taux d'intérêt instantanés $(r_t)$ sont $(\mathcal{F}_t)$-adaptés.

**Définition** : Un portefeuille est la donnée d'un K+1-uplet $(\phi^0, ..., \phi^K)$ appartenant à $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}$. Sa valeur à une date t $\in [0, T^*]$ est définie par :

$$V_t(\phi^0, ..., \phi^K) = \sum_{i=0}^{K} \phi_t^i S_t^i$$

**Définition** : Le portefeuille $(\phi^0, ..., \phi^K) \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}$ est autofinançant si et seulement si :

$$\forall t \in [0, T^*], 0 \leq V_t(\phi^0, ..., \phi^K) = V_0(\phi^0, ..., \phi^K) + \sum_{i=0}^{K} \int_0^t \phi_u^i dS_u^i.$$

Un portefeuille autofinançant est un portefeuille dont la valeur ne varie au cours du temps qu'avec celles des actifs le constituant.

**Proposition** : Le portefeuille $(\phi^0, ..., \phi^K) \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}$ est autofinançant si et seulement si :

$$\forall t \in [0, T^*], 0 \leq D(0,t)V_t(\phi^0, ..., \phi^K) = V_0(\phi^0, ..., \phi^K) + \sum_{i=0}^{K} \int_0^t \phi_u^i d(D(0,u)S_u^i).$$

Cette proposition est essentielle car elle permet de faire le lien avec la notion de de probabilité risque-neutre.

### 3.2.3 Définition de la probabilité risque-neutre

La probabilité risque-neutre a été introduite par Black et Scholes [7]. Le prix d'un produit dérivé à une date t est défini comme la valeur à cette même date d'un portefeuille autofinançant qui réplique son payoff à maturité. Cette valeur correspond à l'espérance sous la probabilité risque-neutre de son payoff actualisé.

**Définition** : Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ dont la dérivée de Radon-Nikodym est de carré intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. Alors $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ si et seulement si la valeur actualisée de tout portefeuille autofinançant est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{Q}$. Autrement dit, si et seulement si :

$\forall(\phi^0, ..., \phi^K) \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}, (D(0,t)V_t(\phi^0, ..., \phi^K))_{0<t<T^*}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale.

**Définition** : Une $\mathcal{F}_t$-martingale est un processus réel $\{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ tel que :

— i) $X_t$ est $\mathcal{F}_t$ - mesurable (processus adapté) et intégrable

— ii) $X_t = \mathbb{E}(X_{t+s}|\mathcal{F}_t)$, pour tous s,t>0

Nous pouvons alors définir le processus de prix associé à un payoff quelconque à travers la proposition suivante, souvent appelée formule de pricing. [8]

**Proposition** : Soient $t \in [0, T^*]$, $\mathbb{Q}$ une probabilité risque neutre sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ telle qu'il existe un portefeuille autofinançant $(\phi^0, ..., \phi^K)$ de $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}$ vérifiant $V_t(\phi^0, ..., \phi^{K+1}) = X$. Alors il existe un unique processus $(P_s)_{0<s<t}$ tel que le prix en s $\in [0, t]$ d'un instrument financier de payoff $X$ en t soit égal à $P_s$. Ainsi,

$$P_s = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(s,t)X|\mathcal{F}_s).$$

En particulier :

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t,T)|\mathcal{F}_t).$$

7. [BS76] BLACK Fisher, [1976], "The Pricing of commodity contracts", *Journal of Financial Economics*, 1976, Volume 3, p. 167-179.

8. [HP81] HARRISON Michael J., PLISKA R., [1981], "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 1981, Volume 11, n°3, p. 215-260.

### 3.2.4 Probabilité risque-neutre et arbitrage

La notion de probabilité risque-neutre est à rapprocher de celle d'arbitrage.

**Définition** : Une opportunité d'aribitrage est un portefeuille autofinançant $(\phi^0, ..., \phi^K) \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}$ tel que :

$$V_0(\phi^0, ..., \phi^K) = 0 \text{ et } \mathbb{P}\left(V_{T^*}(\phi^0, ..., \phi^K) > 0\right) > 0$$

Harrison et Pliska ont prouvé en 1981 dans [HP81] que l'existence d'une probabilité risque-neutre équivaut à l'absence d'opportunités d'arbitrage. Il s'agit du théorème suivant :

**Théorème** : Un marché, dont l'incertitude est modélisée par $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ respecte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage si et seulement s'il existe une mesure de probabilité risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$.

Dans le cas d'un marché respectant l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, nous avons vu qu'il existe nécessairement une probabilité risque-neutre. Mais, celle-ci n'est pas unique. Il nous faut définir la notion de complétude pour parvenir à l'unicité.

**Définition** : Un marché est dit complet si pour tout t $\in [0, T^*]$ et tout X, variable aléatoire sur $(\Omega, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ de carré intégrable, il existe un portefeuille autofinançant $(\phi^0, ..., \phi^K)$ appartenant à $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})^{K+1}$ tel que $V_{T^*}(\phi^0, ..., \phi^K) = X$.

Cette définition est la traduction mathématique du fait qu'il est possible de répliquer n'importe quel flux futur à partir d'un portefeuille autofinançant bien choisi. Elle permet de donner une condition nécessaire et suffisante de l'unicité de la probabilité risque-neutre propre à un marché.

**Théorème** : Un marché $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ respecte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage et est complet si et seulement s'il existe une unique probabilité risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$.

### 3.2.5 Changement de référentiel : le théorème de Girsanov

Le théorème de Girsanov permet de changer de référentiel et décrit le passage de l'univers réel vers l'univers risque-neutre.

**Théorème de Girsanov** : Soient Z un mouvement brownien pour un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et $\lambda$ un processus adapté vérifiant $\mathbb{E}\left(exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \lambda(u)^2 du\right)\right) < \infty$ (condition de Novikov). Si l'on définit le processus Z' et la mesure $\mathbb{Q}$ sur [0,T] par $Z'(t) = Z(t) + \left(\int_0^t \lambda(s)ds\right)$ et $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = exp\left(-\int_0^T \lambda(u)dZ(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda(u)^2 du\right)$, alors Z' est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

# Chapitre 4

# La modélisation ALM

## Sommaire

La valorisation des passifs d'assurance selon la norme IFRS 4 - phase II nécessite l'utilisation d'un modèle de projection actif-passif fonctionnant dans un environnement stochastique. Du fait de la dissymétrie existante entre l'assureur et l'assuré en fonction des marchés financiers, les options et garanties sous-jacentes aux contrats d'assurance vie admettent une valeur temps (voir chapitre 6). La valorisation de ces options nécessite alors la prise en compte d'une multitude de scénarii économiques dans le modèle ALM. En d'autres termes, la valorisation du *Best Estimate* d'un contrat d'assurance vie contenant des options ou garanties nécessite l'utilisation d'un générateur de scénarii économiques. La modélisation ALM est décrite dans le présent chapitre et le Générateur de Scénarios Économiques développé dans le cadre de ce stage est défini dans le chapitre suivant.

## 4.1 La société et le produit modélisés

### 4.1.1 La société modélisée

La société modélisée est une société fictive d'assurance vie. La composition du bilan initial en terme d'actifs a été effectuée sur la base de la publication des résultats d'Allianz, Axa et CNP au premier semestre 2015. Les actifs du bilan initial ont néanmoins été simplifiés par rapport à ceux de ces trois assureurs.

### 4.1.2 Le produit modélisé

Le produit modélisé est un produit d'épargne Euro à prime unique assortie d'un taux minimum garanti (TMG) avec sortie en capital. Le TMG retenu est 0%, la grande majorité des contrats du marché français ayant un TMG nul. Le contrat propose un taux de participation aux bénéfices garanti de 90%. L'assuré a également la possibilité de racheter son contrat, avec ou sans pénalités, à tout moment ainsi que d'effectuer des rachats partiels. Le contrat prévoit le versement en cas de décès d'un montant égal à l'épargne acquise par l'assuré.

Le produit comporte un unique portefeuille composé de 10 000 contrats identiques. Les assurés sont des hommes[1] âgés de 40 ans à la souscription et ont apporté un capital initial de 10 000 euros. Les frais administratifs sont modélisés sous la forme d'un coût unitaire de 10 euros par contrat avec une inflation annuelle de 2%. Les chargements sur encours sont de 0,6% et les commissions s'élèvent à 60% des chargements sur encours.

1. Par raison de simplification, on considère que les assurés sont des hommes. Cette hypothèse ne modifie pas les conclusions de l'étude.

## 4.2 Description de la modélisation actif/passif

Le pôle modélisation de Deloitte Actuariat Assurance a développé un modèle ALM permettant de projeter l'actif et le passif d'un contrat d'épargne Euro ainsi que de prendre en compte les différentes interactions actif/passif. Ce modèle, développé sous le logiciel de projection *Prophet*, produit des flux de trésorerie qui sont ensuite utilisés pour construire un bilan et un compte de résultat en normes French GAAP et en valeur de marché. L'ensemble des analyses ont été effectuées à l'aide de ce modèle ALM. La description de la modélisation actif/passif repose sur les spécifications techniques rédigées par Deloitte Actuariat Assurance.

Le processus de projection actif/passif couvre trois grandes phases :

1. la définition des hypothèses et la construction des tables *Prophet*.
2. la projection : calcul des différentes variables du modèle.
3. la restitution et l'exploitation des résultats à partir des variables de reporting.

Trois modèles sont nécessaires afin de projeter les flux d'actif et de passif :

— un générateur de scénarios économiques (GSE).

— un modèle de projection déterministe.

— un modèle de projection stochastique (modèle ALS).

Le schéma ci-dessous présente la structure du modèle ALM :

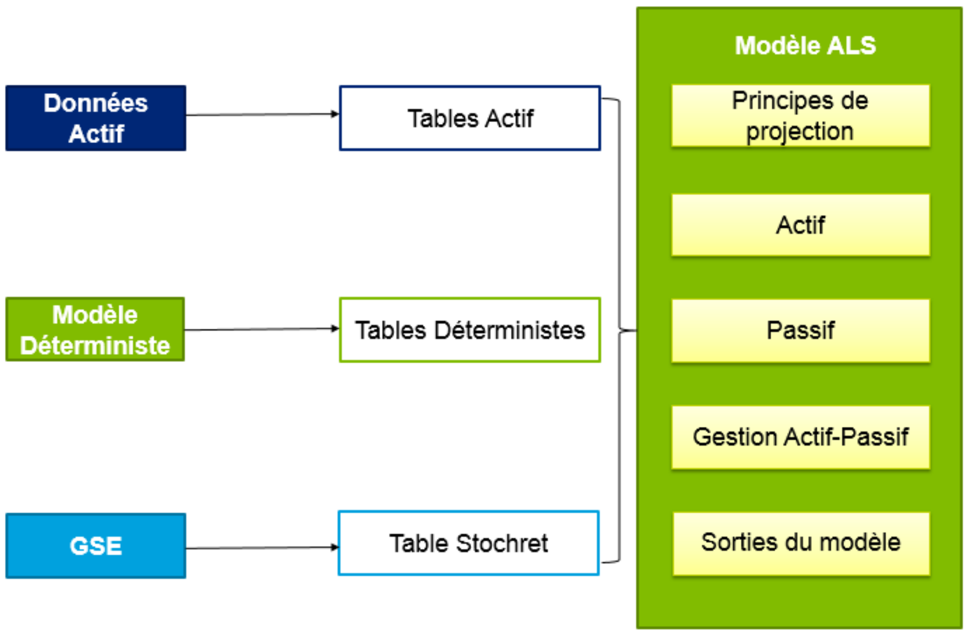



FIGURE 4.1 – Le modèle ALM

### 4.2.1 Le générateur de scénarios économiques

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un modèle financier permettant de projeter différentes classes d'actifs ainsi que des variables économiques. Les indicateurs économiques le plus souvent modélisés sont : les taux d'intérêt, les actions, l'immobilier, l'inflation, le risque de crédit. Ce modèle doit prendre en compte la dépendance qui existe entre ces variables.

Dans le cadre de ce stage, un GSE a été développé (voir chapitre 5). Par conséquent, le GSE sera plus détaillé dans la suite de ce mémoire. Les sorties du GSE ont permis de construire la table *Stochret*, table stochastique alimentant le modèle ALS.

### 4.2.2 Le modèle épargne déterministe

La grande partie des fonctionnalités du produit d'épargne Euro est modélisée au sein du modèle de projection déterministe. Les flux des passifs sont calculés indépendamment des actifs. Par conséquent, les flux ne contiennent que les intérêts techniques. Le modèle déterministe permet d'obtenir les tables déterministes qui sont utilisées en entrée du modèle ALS. Ces tables contiennent les flux de passif qui sont ensuite ajustés en fonction de l'actif par le modèle de projection stochastique.

Les différentes caractéristiques des assurés sont modélisées au sein de *Model Points* (regroupement de contrats de même caractéristiques) et de tables d'hypothèses. Les différents *Model Points* sont :

— l'encours à la date de projection
— l'ancienneté / date de souscription
— l'âge / date de naissance
— le sexe
— le terme du contrat

Les tables de paramètres sont :

— le taux minimum garanti
— les chargements
— les commissions
— les frais
— la clause de participation aux bénéfices

Les différentes tables d'hypothèses sont :

— les tables de mortalité
— la table de lois de rachats totaux et partiels par ancienneté
— la chronique de rendement financier déterministe

L'horizon de projection retenu est de 20 ans et le modèle utilise un pas de projection mensuel. Il existe deux principaux types de flux techniques s'appliquant au contrat d'épargne : les primes et les prestations ainsi que trois types de flux administratifs : les frais, les commissions et les chargements.

La plupart des flux financiers s'appliquant à un contrat d'épargne sont modélisés dans le module ALS car ils dépendent des *management actions*. Dans le modèle déterministe, seuls les intérêts crédités sont modélisés. Les intérêts crédités correspondent aux intérêts versés à l'assuré. Ils sont calculés sur la base du taux minimum garanti. Plus précisément, un taux de revalorisation comprenant le taux minimum garanti et le taux de participation aux bénéfices est appliqué à la Provision Mathématique de fin d'année. Les intérêts crédités sont calculés selon le scénario central [2] uniquement et sont recalculés dans le modèle ALS selon les scénarios stochastiques générés par le GSE.

Le profit brut (avant réassurance, revalorisation et impôts) est calculé comme la différence entre les flux entrants et les flux sortants. Les flux entrants comprennent les primes et les gains. Les flux sortants contiennent les sorties techniques (décès, rachat, rachat partiel, contrats à terme, rentes, garanties complémentaires et autres sorties) et les sorties administratives (commissions et frais).

Le modèle déterministe permet la création de la table $DET\_CF$. Cette table contient, par famille de produit modélisée, les cash-flows projetés issus du modèle déterministe. Une fois obtenue, la table $DET\_CF$ permet d'alimenter le modèle de projection stochastique afin d'utiliser la méthode de flexing des cash-flows. Les différentes données provenant du modèle de projection déterministe sont extraites des fichiers de résultats *Prophet* et renseignées dans une maquette Excel à l'aide de la fonction *Proj_Result* qui prend notamment en argument la variable ainsi que le produit et l'année de projection.

Le modèle déterministe ne sera pas plus décrit car l'essentiel de la problématique concerne la modélisation stochastique.

### 4.2.3 Modèle de projection stochastique (modèle ALS)

L'ensemble des interactions entre l'actif et le passif est modélisé au sein du modèle de projection stochastique. Les flux sont recalculés dans le modèle ALS afin de prendre en compte le rendement des actifs en portefeuille, le scénario économique, les contraintes réglementaires et les options et garanties.

Afin de modéliser les interactions actif/passif, les flux de trésorerie déterministes sont *flexés* (méthode du flexing) au sein du modèle ALS par un système de ratios. Les ratios de flexing permettent de calculer à chaque fin de période et pour chaque scénario stochastique les montants de provisions mathématiques, prestations, frais et commissions.

2. Le scénario central correspond aux hypothèses et résultats du scénario de base du business plan notamment les hypothèses stratégiques fixées par l'AMSB (Administrative Management or Supervisory Body) et les hypothèses de marché, avant toute simulation de chocs)

## 4.3 Modélisation de l'actif

Les actifs modélisés sont les obligations souveraines à taux fixe, les actions, les actifs immobiliers et la trésorerie.

### 4.3.1 Modélisation des obligations

Le prix en t d'une obligation de maturité T est calculé par la formule suivante :

$$Obligation(t) = \sum_{i=1}^{T-t} \frac{C_T \times nominal}{(1 + R(t, t+i))^i} + \frac{nominal}{(1 + R(t, T))^{T-t}}$$

avec :

— R(t,i) : taux sans risque *spot* issu du GSE (propre à chaque simulation).

— $C_T$ : taux de coupon des obligations de maturité T

Les obligations sont comptabilisées à leur prix de revient qui se décompose en une valeur nette comptable (VNC) et un coupon couru (CC).

### 4.3.2 Modélisation des actions

La valeur de marché des actions est calculée comme suit :

$$VM_{actions}(t) = VM_{actions}(t-1) + gains(t)$$

Les gains sont définis comme la somme des dividendes et de la performance financière :

$$gains(t) = dividendes(t) + performance(t)$$

Les dividendes sont supposés être versés à chaque milieu d'année. Le montant de dividende est obtenu en multipliant la valeur de l'action en milieu d'année par le taux de dividende. Le taux de dividende est défini comme la somme :

— un taux fixe, fourni en entrée du modèle pour chaque année de projection.

— un taux variable, indexé sur le rendement de l'indice action. Ce taux varie en fonction des scénarios économiques.

On suppose que les dividendes sont réinvestis en trésorerie.

La performance financière correspond à la variation de la valeur de marché de l'action nette des dividendes.

Les dividendes étant réinvestis en trésorerie, la valeur comptable des actions en fin d'année est égale à la valeur comptable initiale.

### 4.3.3 Modélisation de la trésorerie

Le montant de trésorerie à la date de début de projection est fourni en entrée du modèle. La trésorerie est investie au taux forward 1 an. Les intérêts sur trésorerie sont perçus en milieu et en fin d'année.

## 4.4 Modélisation du passif

### 4.4.1 Modélisation de la mortalité

Les taux de mortalité annuels sont calculés à partir d'une table de mortalité. L'utilisateur peut modifier les taux de mortalité de cette table pour les augmenter ou les diminuer en les multipliant par un coefficient multiplicateur, fourni en entrée du modèle. La table de mortalité utilisée est la TH 00-02 avec un abattement de 15%.

### 4.4.2 Modélisation des rachats

Le rachat est une option permettant à l'assuré, lorsqu'il l'exerce, de retirer tout ou une partie de son épargne à tout moment avant la date d'échéance prévue au contrat (on parle respectivement de rachat total et de rachat partiel). Le Code des assurances stipule que la valeur de rachat est égale à la provision mathématique de son contrat à la date du rachat.

Les rachats surviennent en milieu d'année et sont effectués sur la base de l'épargne revalorisée. Le taux de rachat est égal à la somme du taux de rachat partiel, du taux de rachat structurel et du taux de rachat conjoncturel.

#### 4.4.2.1 Rachat partiel

Pour chaque année de projection, le taux de rachat partiel est donné dans le graphique suivant :

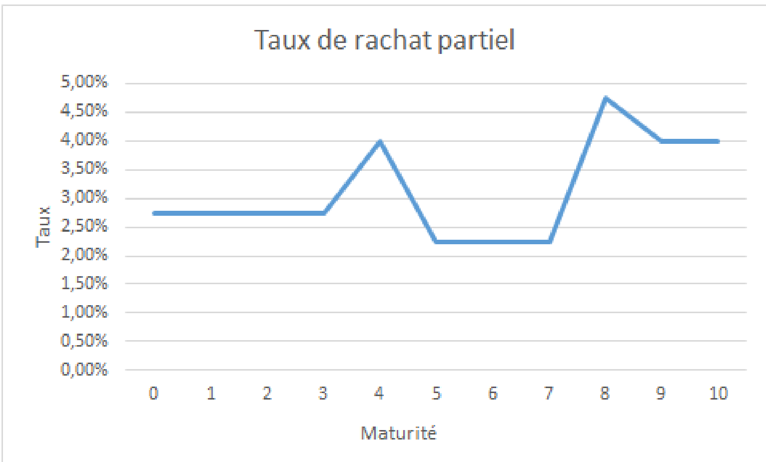



FIGURE 4.2 – Taux de rachat partiel en fonction de la maturité du contrat

#### 4.4.2.2 Rachats structurels

Les rachats structurels sont indépendants des conditions économiques et du taux de revalorisation servi par l'assureur. La politique de la compagnie en matière de taux servis aux assurés n'a donc pas d'influence sur cette composante des rachats. Deux phénomènes principaux expliquent les rachats structurels :

— dégradation de la situation financière de l'assuré : l'assuré peut avoir besoin de fonds pour subvenir à un besoin financier ponctuel ou conserver un niveau de vie après un incident professionnel.

— fiscalité de l'assurance vie : l'ensemble des produits d'épargne sont soumis aux prélèvements sociaux. Pour les sorties en capital, l'imposition diffère selon l'ancienneté du contrat. Pour les contrats de maturité inférieure à 8 ans, ils sont soumis à l'impôt sur le revenu (35% pour les sorties avant 4 ans et 15% pour les sorties entre 4 et 8 ans). Si la sortie est effectuée après 8 ans, il y a exonération totale ou partielle d'impôts sur le revenu sur les intérêts en fonction de la date de souscription et du type de contrat. La fiscalité est donc décroissante avec l'ancienneté du contrat.

La courbe de rachats structurels est déterminée dans les compagnies par observation du comportement des assurés. Dans le cadre de ce mémoire, la courbe de rachats structurels est définie arbitrairement. Le graphique suivant montre l'évolution du taux de rachats pour les vingt années de projection.

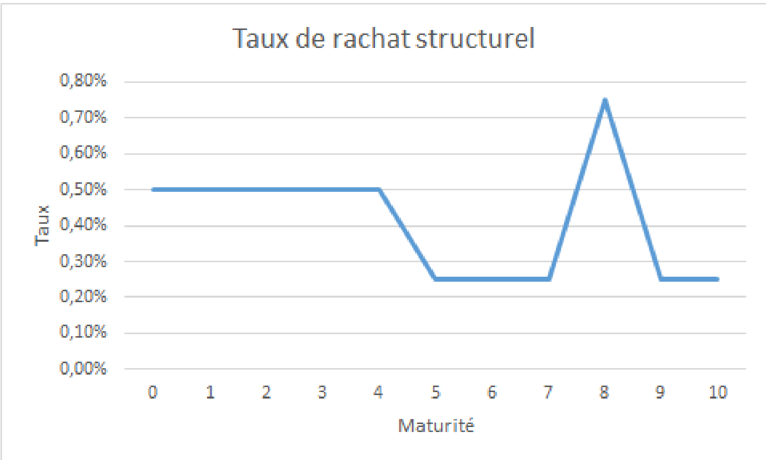



FIGURE 4.3 – Taux de rachats structurels

#### 4.4.2.3 Rachats conjoncturels

Les rachats conjoncturels correspondent aux rachats qu'effectuent les assurés en arbitrant entre l'évolution des marchés financiers et les taux servis par l'assureur. En effet, en cas de hausse des taux, une partie des assurés peut se comporter de manière rationnelle et racheter leurs contrats pour accéder aux taux plus compétitifs des nouveaux contrats.

La loi de rachats dynamiques retenue dans le cadre de cette étude est celle proposée par l'ACPR. [3].

Le taux de rachats conjoncturels RC devra être additionné au taux de rachats structurels RS. Si le taux servi est inférieur au taux attendu (TA) par les assurés, ces derniers auront tendance l'année suivante à racheter plus que ne l'indique la courbe de rachats structurels. A l'inverse, si les assurés se voient offrir un taux supérieur à leurs attentes, ils rachèteront l'année suivante moins que par le passé.

Le taux de rachats conjoncturels est fonction de l'écart entre le taux servi R et le TA :

$$RC(R) = \begin{cases} RC_{max} & \text{si } R - TA < \alpha \\ RC_{max}\frac{R-TA-\beta}{\alpha-\beta} & \text{si}\alpha < R - TA < \beta \\ 0 & \text{si}\beta < R - TA < \gamma \\ RC_{min}\frac{R-TA-\gamma}{\delta-\gamma} & \text{si}\gamma < R - TA < \delta \\ RC_{min} & \text{si } R - TA > \delta \end{cases}$$

Les différents paramètres peuvent s'interpréter de la façon suivante :

— $\alpha$ est le seuil en-deçà duquel les rachats conjoncturels sont constants et fixés à $RC_{max}$. Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.

— $\beta$ et $\gamma$ sont respectivement les seuils d'indifférence à la baisse et à la hausse du taux servi. Entre ces 2 seuils, le comportement de l'assuré n'est pas modifié.

— $\delta$ est le seuil au-delà duquel la diminution du taux de rachat structurel est constante et fixée à $RC_{min}$. Ce n'est plus l'écart de taux qui explique le comportement des assurés.

Le taux de rachat total RT s'exprime comme :

$$RT(R, TA) = min(1, max(0, RS + RC(R, TA)))$$

Les rachats ont une influence directe sur l'actif et le passif d'une société d'assurance. La norme IFRS 4 - phase II impose que l'évaluation des passifs doit inclure l'ensemble des options et garanties, dont font partie les rachats.

3. ACPR,[2013], "Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques pour l'exercice 2013 de préparation à Solvabilité II"

### 4.4.3 La revalorisation de l'épargne

L'assureur s'engage à revaloriser l'épargne des assurés. Le taux de revalorisation dépend du taux minimum garanti (TMG), du taux minimum de participation aux bénéfices réglementaire et éventuellement contractuel et du taux de revalorisation cible. L'assureur doit veiller à ce que le taux de revalorisation soit au minimum égal au TMG. L'assureur peut être amené à réaliser des pertes pour satisfaire cette condition.

#### 4.4.3.1 Taux minimum garanti

A la souscription du contrat, l'assureur fixe le taux minimum garanti correspondant au taux minimum annuel de revalorisation de l'épargne. L'assureur s'engage alors à revaloriser l'épargne à ce taux chaque année, peu importe ses résultats financiers. Le taux minimum garanti obéit à des contraintes fixées par le Code des assurances (articles [A. 132-1] et [A. 132-2]) et ne peut excéder :

— 75% du TME [4] pour les contrats dont la durée maximale est inférieure ou égale à huit ans.

— Min (3,5%, TME) pour les contrats dont la durée est supérieure à huit ans.

#### 4.4.3.2 Participation aux bénéfices

De plus, l'assureur a l'obligation de redistribuer aux assurés une partie des bénéfices qu'il a réalisés au cours de l'année. Il s'agit de la participation aux bénéfices. Selon le Code des assurances, les assureurs doivent distribuer au minimum 90 % de leurs bénéfices techniques et 85 % de leurs bénéfices financiers. Le montant de participation aux bénéfices est soit affecté directement aux PM soit à la PPE. En effet, les assureurs disposent de 8 ans pour restituer à l'assuré l'ensemble des produits financiers.

La revalorisation ne tient pas seulement compte du minimum réglementaire mais également d'un minimum de participation aux bénéfices contractuelle. La participation aux bénéfices contractuelle est souvent liée au produit alors que la participation aux bénéfices réglementaire est déterminée en agrégeant l'ensemble des produits.

Dans le mécanisme de participation aux bénéfices, des *management actions* ont été mises en place en matière de politique de taux servi. Une politique de taux cible a été définie.

#### 4.4.3.3 Taux cible

Le taux cible correspond au taux de revalorisation que l'assureur souhaite verser afin de rester compétitif. Pour des raisons de confidentialité, la dynamique du taux cible n'est pas expliquée dans ce mémoire. La définition retenue permet de modéliser un taux de marché traduisant la concurrence.

4. Le TME désigne le taux moyen des emprunts d'état à long terme calculé sur les six mois précédant la souscription

### 4.4.4 Frais, commissions et chargements

Chaque année, l'assureur prélève des chargements de gestion sur encours et des chargements d'acquisition sur primes. Ces chargements sont destinés à faire face à des frais (fixes et variables, acquisition et administration) et à des commissions, qui rémunèrent le réseau apporteur d'affaires (également sous forme de commissions d'acquisition et de commissions sur encours, la plupart du temps).

### 4.4.5 La réserve de capitalisation

En cas de vente d'obligations, la réserve de capitalisation est dotée ou reprise. La réserve de capitalisation permet ainsi de lisser la performance des obligations détenues par les sociétés d'assurance. La réserve de capitalisation est modélisée de la manière suivante. Soit $X$ la plus ou moins value associée à a vente d'une obligation. Ainsi,

$$X = VM - (VNC + CC)$$

On note Y la dotation ou la reprise de la réserve de capitalisation. Si $X$ est positif, $Y = X$. Si X est négatif, $Y = max(X; -RC_0)$. Si $X$ est négatif et que $|X| > RC_0$, l'assureur doit enregistrer une charge C = X-Y.

### 4.4.6 La provision pour risque d'exigibilité

Une dotation à la provision pour risque d'exigibilité (PRE) doit être effectuée lorsque l'ensemble des actifs non obligataires est en moins-value latente. La dotation correspond à la différence entre la valeur d'acquisition et la valeur de marché des actifs. Les actifs à prendre en compte pour le calcul de la PRE sont les actions et les actifs immobiliers. Depuis 2009, les assureurs ont la possibilité d'étaler la dotation à effectuer à la PRE sur une durée comprise entre 3 et 8 ans.

Soit $\tau$ un taux permettant d'étaler sur plusieurs années la dotation à la PRE, $\tau \in [\frac{1}{8}; \frac{1}{3}]$. La PRE est calculée comme suit :

$$PRE_t = min((VA_t - VM_t)^+, PRE_{t-1} + \tau(VA_t - VM_t)^+)$$

## 4.5 Interactions actif/passif

### 4.5.1 Étapes de projection

Les principales étapes de calcul au cours d'une année de projection sont :

1. Début d'année :
   — Bilan debut d'année n = Bilan fin année n-1
2. Milieu d'année :
   — Vieillissement d'une année du passif
   — Prestations
   — Chargements
   — Revenus des actifs
   — Calculs des flux de trésorerie
3. Fin d'année :
   — Vieillissement de l'actif
   — Allocation de l'actif
   — Stratégie de participation aux bénéfices
   — Revalorisation de l'épargne
   — Calcul de la PRE et de la réserve de capitalisation
   — Impôts et prélèvements sociaux

Les flux de trésorerie en sortie du modèle ALS permettent de construire un bilan ainsi qu'un compte de résultat en normes French GAAP ainsi qu'en valeur de marché.

### 4.5.2 La méthode du *flexing*

L'architecture du modèle ALM de Deloitte France, basé sur l'utilisation successive d'un modèle de projection déterministe et d'un modèle de projection stochastique, nécessite l'utilisation de la méthode du *flexing* afin de modéliser l'impact des options et garanties.

Cette méthode de modélisation est très spécifique. En effet, une trajectoire déterministe est modélisée et non pas un ensemble de *Model Points* de passif. Cette trajectoire est le résultat d'une projection déterministe, selon des hypothèses connues, de plusieurs *Model Points* réunis au sein d'une même poche.

Le principe du *flexing* n'est pas de modéliser séparément l'actif et le passif mais d'ajuster les flux de passif en fonction du rendement de l'actif. Plus précisément, cette méthode consiste à appliquer un coefficient multiplicateur d'ajustement (qui sera fonction du rendement de l'actif) à chaque flux de passif de cette trajectoire déterministe.

Ainsi, chaque flux stochastique est calculé de la manière suivante :

$$Flux_{stochastique}(t, i) = Flux_{deterministe}(t) \times Ratio_{flexing}(t, i, \phi)$$

Où :

— t : date de projection.

— i : scénario.

— $\phi$ : flux.

— $Flux_{stochastique}$ (t,i) : montant du flux de passif calculé dans le modèle de projection stochastique à la date t pour le scénario i.

— $Flux_{deterministe}$ (t) : flux de passif calculé dans le modèle déterministe.

— $Ratio_{flexing}(t, i, \phi)$ : ratio de *flexing*, facteur multiplicatif appliqué au flux à la date t pour le scénario économique i. Ce ratio varie selon le type de flux $\phi$ (primes, frais, commissions, prestations).

L'exemple suivant illustre le fonctionnement du *flexing*. On considère un produit d'épargne à prime unique. La seule prestation est la sortie pour décès. Une participation aux bénéfices discrétionnaire est calculée et distribuée dans le modèle stochastique.

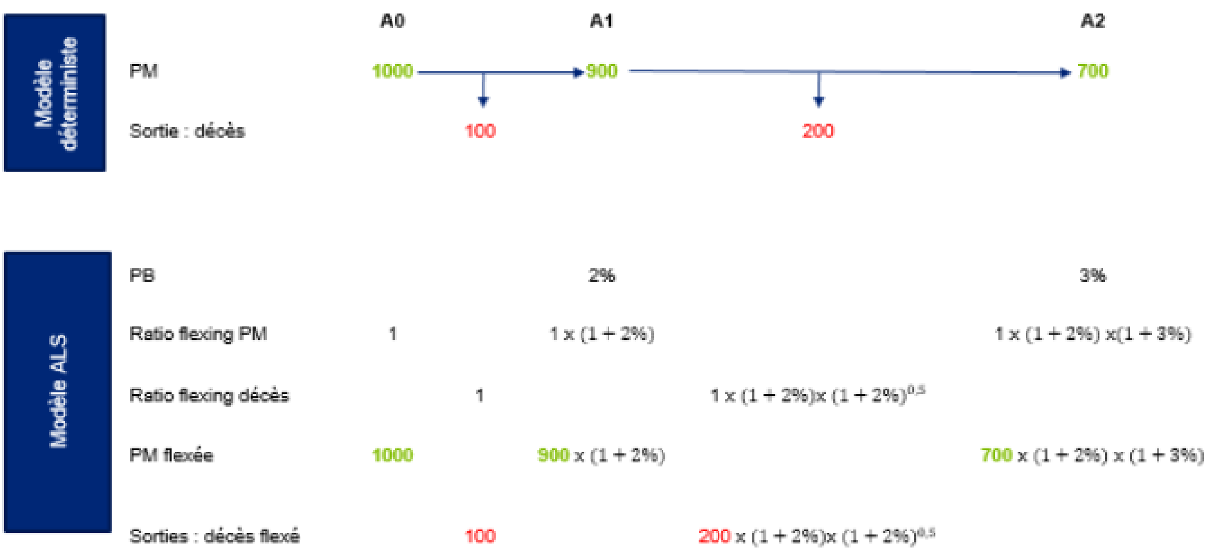



Figure 4.4 – Exemple d'application du *flexing*

## 4.6 Limites de la modélisation ALM

La problématique de ce mémoire concerne la comptabilisation de la TVOG selon IFRS 4 - phase II. Le modèle ALM est un outil permettant de répondre à la problématique. Par soucis de simplification, un certain nombre de limites ont été utilisées dans la modélisation ALM. Le lecteur prendra donc toutes les précautions d'usage dans l'interprétation des résultats obtenus dans ce mémoire.

### 4.6.1 Limites relatives à la société d'assurance

La société d'assurance considérée est fictive et simplifiée. Elle est composée d'un unique produit d'épargne Euro possédant des garanties simples. Le bilan de cette société d'assurance est donc simplifié par rapport à celui d'une société d'assurance réelle.

### 4.6.2 Limites relatives au modèle

Dans le cadre de ce mémoire, un modèle ALM a été développé afin de déterminer le bilan et le compte de résultat IFRS. Ce modèle présente les limites suivantes.

#### 4.6.2.1 Hypothèses de rachats structurels

La loi de rachats structurels qui a été considérée ne dépend que de l'âge du contrat et pas de l'âge de l'assuré. En pratique, cette deuxième composante doit être prise en compte. De plus, aucune distinction n'a été effectuée entre les rachats partiels et les rachats totaux. Cet aspect peut être une simplification dans le cas où différentes clauses de participation aux bénéfices s'appliquent en fonction du type de sortie. Il a été décidé de ne pas modéliser cette subtilité. En pratique, de nombreux assureurs modélisent de manière conjointe les rachats totaux et les rachats partiels.

#### 4.6.2.2 Hypothèses de mortalité

Les taux de mortalité n'ont pas été estimés sur la base d'un historique puisque la société qui a été considérée est une société fictive. Par conséquent, une table de mortalité de référence a été utilisée. Les hypothèses de mortalité considérées dans ce modèle ne sont donc pas des hypothèses Best Estimate.

#### 4.6.2.3 Modélisation des provisions techniques

Les provisions qui ont été modélisées sont les provisions mathématiques, la PRE, la PPE et la réserve de capitalisation. La Provision pour Dépréciation Durable (PDD), la Provision pour Aléas Financiers (PAF) et la Provisions pour perte Globale de Gestion (PGG) n'ont pas été modélisées. La PDD n'a pas été modélisée car l'actif n'a pas été modélisé ligne par ligne. La PAF et la PGG n'ont pas été modélisées par raison de simplification. En pratique, beaucoup d'assureurs français ne modélisent pas ces deux provisions.

L'ensemble des flux de passif a été considéré en milieu d'année. Cette approximation a été retenue car le modèle ALM admet un pas de temps annuel. En pratique, la plupart des assureurs français utilisant des modèles ALM stochastiques retiennent la même hypothèse.

Le portefeuille modélisé est en *run-off*. Par conséquent, la stratégie financière qui a été définie est appliquée sur un portefeuille en *run-off*. Dans la réalité, la stratégie financière est définie sur la base d'un portefeuille qui n'est pas en *run-off*, notamment pour la définition d'allocation cible. C'est d'ailleurs le cas de toute étude ou stratégie ALM.

#### 4.6.2.4 Modélisation de l'actif

Au niveau de la modélisation de l'actif, les obligations d'entreprise, les obligations à taux variable ainsi que les produits dérivés ne sont pas modélisés. De plus, le risque de crédit n'étant pas modélisé, l'allocation dynamique des actifs n'est pas effectuée par *rating*.

# Chapitre 5

# Construction d'un Générateur de Scénarios Économiques

## Sommaire

## 5.1 Définition et description

Le calcul des différents postes du passif du bilan selon la norme IFRS 4 - phase II, et notamment le calcul du *Best Estimate*, nécessite l'utilisation d'un jeu de scénarios économiques. En effet, l'utilisation de simulations est nécessaire afin de prendre en compte la valeur temps des options et garanties dans les passifs de l'assureur. De plus, la future norme IFRS 4 - phase II stipule que les scénarios économiques utilisés soient cohérents avec les prix observés sur les marchés financiers à la date d'évaluation. Pour ce faire, un GSE *Market Consitent* a été développé dans le cadre de ce stage.

La génération de scénarios risque-neutre nécessite de répliquer les conditions de marché à un instant donné afin de respecter le caractère de *Market Consistency*. Pour ce faire, un ensemble de critères permet de valider le modèle :

— réplication des conditions de marché : le modèle doit reproduire la courbe des taux initiale et doit répliquer les volatilités implicites des marchés financiers.

— caractère martingale : les prix projetés actualisés doivent être martingales.

La modélisation sous-jacente à la construction du GSE a été réalisée sur la base de modèles dont la complexité est limitée, mais permettant de réaliser des simulations de Monte-Carlo de manière aisée. En effet, comme cela a été présenté en introduction, l'étude réalisée dans le cadre de ce mémoire a pour principal objectif la comptabilisation de la valeur temps des options et garanties d'un contrat d'épargne Euro selon la norme IFRS 4 - phase II. Ainsi, le domaine d'application du GSE développé dans le cadre de ce mémoire est tout à fait suffisant dans le cadre précis de l'étude réalisée. Le développement d'un GSE plus complexe pourra être réalisé dans le cadre d'une prochaine étude.

## 5.2 Générateur de variables aléatoires

La première étape de toute simulation stochastique consiste à créer l'aléa du modèle à partir d'un générateur de nombres aléatoires. Cette étape est très importante car la qualité du modèle dépend du caractère aléatoire de ces nombres. La génération de nombres aléatoires de loi uniforme est essentielle à la mise en oeuvre des simulations, du fait de l'utilisation de méthodes du type "inversion de la fonction de répartition" afin de générer des variables aléatoires.

La fonction *rnorm* de R a été utilisée afin de simuler les variables aléatoires gaussiennes. Le générateur de nombres aléatoires utilisé est le générateur digital de Mersenne Twister. Les générateurs digitaux consistent à utiliser des récurrences matricielles où le vecteur $X_n$ représente $x_n$ en base m, i.e :

$$X_n = (X_n^1, ..., X_n^L)$$

$$x_n = X_n^1 m^{L-1} + X_n^2 m^{L-2} + ... + X_n^L$$

Le générateur de Mersenne Twister [1] est un générateur digital pour lequel m=2. Basé sur un algorithme TGSFR (Twisted Generalised Shift Feedback Register), ce générateur définit la relation de récurrence sur la base d'opérations arithmétiques matricielles dans le corps fini {0,1}. Cet algorithme exploite l'architecture binaire des ordinateurs, ceci permettant d'optimiser les temps de calcul.

Il existe différentes méthodes de simulation de variables aléatoires. La fonction *rnorm* utilise la méthode d'inversion. Cette méthode est l'une des plus utilisées en simulation. Cette méthode nécessite une expression analytique simple ou alors une approximation numérique de l'inverse de la fonction de répartition.

**Propriété : Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si la fonction de répartition F est continue et strictement croissante sur I, alors elle admet une unique fonction réciproque, notée $F^{-1}$.**

Le propriété suivante justifie l'utilisation de la méthode d'inversion de la fonction de répartition afin de simuler des variables aléatoires.

**Propriété : Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. Alors la variable aléatoire réelle $F^{-1}(U)$ a pour fonction de répartition F.**

Remarque : On peut noter que la pseudo-inverse est, quant à elle, toujours définie, que la fonction de répartition soit continue ou non et strictement croissante ou non, et que, avec la pseudo-inverse, la propriété ci-dessus est toujours vraie.

Ainsi, pour simuler un n-échantillon indépendant et identiquement distribué de loi ayant pour fonction de répartition F, il suffit de simuler n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur [0 ;1], puis d'appliquer l'inverse de la fonction de répartition à chacune de ces valeurs. Cette méthode permet de simuler notamment la loi Normale.

1. [PTK09] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, KAMEGA Aymric, [2009], "Scénarios économqiues en assurance - Modélisation et simulation", Paris, Economica, 235 pages.

## 5.3 Modélisation des taux d'intérêt

La génération des variables aléatoires étant définie, il faut à présent déterminer le processus stochastique qui permet de modéliser les taux d'intérêt. La modélisation des taux d'intérêt était initialement basée sur la dynamique du taux court instantané $r$. Ce dernier suit un processus de diffusion caractérisé par l'équation suivante :

$$dr_t = \mu_{r,t}dt + \sigma_{r,t}dW_r(t)$$

avec :

- $dr$ la variation du taux court $r$ au cours de l'instant $dt$.
- $\mu_{r,t}$ la moyenne des changements instantanés du taux par unité de temps aussi appelé coefficient de dérive.
- $\sigma_{r,t}$ l'écart type des changements instantanés du taux par unité de temps aussi appelé coefficient de diffusion ou volatilité.
- $W_r(t)$ un mouvement brownien standard.

Ces dernières années, des modèles plus complexes ont été développés, basés sur la diffusion des taux forward. Par exemple, la classe de modèles HJM permet de modéliser le taux forward instantané et le modèle LMM le taux forward Libor.

Aujourd'hui, les taux d'intérêt sont historiquement très bas. A titre d'exemple, au 15 juin 2015, les taux des bons du Trésor et OAT français étaient de :

- -0,17% (maturité 1 an)
- -0,12% (maturité 2 ans)
- 0,42% (maturité 5ans)
- 1,27% (maturité 10 ans)

Ce phénomène est observable dans de nombreux pays membres de l'OCDE [2], et plus particulièrement dans les pays de la zone Euro.

Dans l'actuariel de mars 2015, Christian Noyer, Gouverneur de la Banque de France, explique que : "Pour revenir à des taux d'inflation les plus proches possibles de la cible de la BCE, qui est de 2%, nous avons adopté une politique monétaire très accommodante qui comprend plusieurs volets dont des taux d'intérêt à court terme proches de 0, et une indication clairement donnée aux marchés que nous allons garder ce taux pour longtemps. Ceci conduit à penser que la courbe des taux va demeurer basse, plate pendant une période assez longue, au moins 2 ans et peut être davantage. Donc pendant cette période, tous les actifs de type obligataires, les actifs de taux qui seront acquis par les investisseurs institutionnels, notamment les assureurs, vont l'être à des taux très bas. Cela doit être pris en compte dans la séquence des rendements projetés par les assureurs. "

2. Organisation de Coopération et de Développements Économiques

Les assureurs doivent par conséquent intégrer ce nouvel environnement économique dans leurs modèles ALM. Ainsi, nous avons décidé de retenir un modèle de taux permettant de modéliser les taux négatifs.

De plus, les obligations sont un composant majeur de l'allocation d'actifs d'un organisme assureur. De ce fait, le modèle retenu pour décrire la dynamique de la courbe des taux et les anticipations de prix des obligations constitue un élément important du générateur de scénarios économiques. La logique de cohérence avec les valeurs de marché imposée par IFRS 4 - phase II conduit ainsi à privilégier les modèles utilisant la courbe des taux initiale comme paramètre. En effet, les structures par terme des taux d'intérêt engendrées par le GSE doivent être cohérentes avec la structure des taux à la date de calcul.

Nous allons à présent expliquer pourquoi le modèle de Hull-White à un facteur a été retenu et non pas un autre modèle de taux. Tout d'abord, le modèle de Vasicek permet de modéliser les taux négatifs mais n'utilise pas la structure par terme des taux d'intérêt initiale comme paramètre. Le modèle CIR ne permet pas quant à lui de modéliser les taux négatifs. Le modèle Black–Karasinski à deux facteurs ne permet pas de modéliser les taux négatifs. De plus, il n'existe pas de formules fermées pour le calcul des prix zéro-coupons. Le calibrage de ce modèle est complexe, nécessitant un pricing par arbre. Enfin, la surface de volatilité n'est pas adaptée aux observations sur le marché. Le modèle Libor Market Model (LMM) est un modèle de marché permettant de diffuser les taux forward. Les prix zéro-coupon sont directement déduits des taux forward et il existe des formules fermées pour calculer le prix des produits dérivés. Ce modèle permet de bien répliquer la surface de volatilité de marché. Cependant, ce modèle ne permet pas de modéliser les taux négatifs et son calibrage est complexe.

Le modèle de Hull-White à un facteur permet de modéliser les taux négatifs et prend en paramètre la courbe des taux initiale. De plus, il existe des formules fermées pour le calcul des prix zéro-coupons et des produits dérivés, ce qui rend le calibrage de ce modèle simple à mettre en oeuvre. Cependant, il est nécessaire de noter que certaines surfaces de volatilité sont difficiles à répliquer et que ce modèle impose des contraintes fortes sur la forme des courbes des taux futures.

Par conséquent, au vu des avantages et inconvénients des modèles de taux, celui qui a été retenu est le modèle de Hull-White à un facteur. Le développement d'un modèle de taux plus complexe pourra être réalisé dans le cadre d'une prochaine étude.

### 5.3.1 Modèle de Hull-White

Le modèle de Hull-White a été proposé par Hull et White en 1990. On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On suppose que sous une probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ le taux court instantané r est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = (\theta_t - \beta r_t)dt + \sigma dW_r(t)$$

avec :

- $\beta$ : vitesse de retour à la moyenne.
- $\sigma$ : volatilité.
- $\theta$ : fonction déterministe du temps correspondant à la moyenne de long-terme. Cette fonction est choisie afin de reproduire exactement la structure par terme des taux d'intérêt observée sur les marchés.

Pour $T > 0$ fixé, si nous notons $P^M(0,T)$ le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T observée sur le marché à la date 0, et $f^M(0,T)$ le taux forward instantané associé, le modèle de Hull-White reproduit exactement la courbe des taux zéro-coupon de marché si :

$$\theta_t = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T} + \beta f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

Le modèle Hull-White étant un modèle exogène (prend en paramètre la courbe des taux initiale), il est nécessaire de déterminer la structure par terme des taux d'intérêt sans risque.

### 5.3.2 Construction de la courbe des taux

La première étape consiste à construire la courbe des taux sans risque. La norme IFRS 4 - phase II est peu directive concernant la détermination du taux d'actualisation. En effet, l'IASB recommande aux assureurs d'utiliser une approche bottom-up ou top-down afin de déterminer le taux d'actualisation. La méthodologie bottom-up présentant des similarités importantes avec celle de la construction de la courbe des taux sans risque selon la directive Solvabilité II, la méthodologie préconisée par l'EIOPA [3] a été retenue.

#### 5.3.2.1 Méthodologie

L'EIOPA a publié un document technique présentant la méthodologie et l'ensemble des hypothèses permettant de déterminer la structure par terme des taux d'intérêt :

- étape 1 : récupérer les données financières.
- étape 2 : appliquer le *Credit Risk Adjustment* (CRA).
- étape 3 : extrapolation et interpolation.
- étape 4 : appliquer le *Volatility Adjustment* (VA).

3. [Del15] DELL'ACQUA Silvia, 4 steps to get the risk free interest rates term structures provided by EIOPA, 2015.

Ces différentes étapes ont été mises en oeuvre afin de reproduire la structure par terme des taux d'intérêt. Pour ce faire, une maquette Excel a été construite et les valeurs des différents coefficients utilisés sont les suivantes :

— CRA = 0,10%.

— $\alpha$ = 0,129489 (valeur préconisée par l'EIOPA).

— VA = 0.

**Etape 1 : récupérer les données financières**

Tout d'abord, les taux swap euro "contre EURIBOR 6 mois" au 31/12/2014 ont été récupérés sur Bloomberg grâce au ticker *curncy - EUR006M Index*.

Le graphique ci-dessous représente la courbe des taux swap :

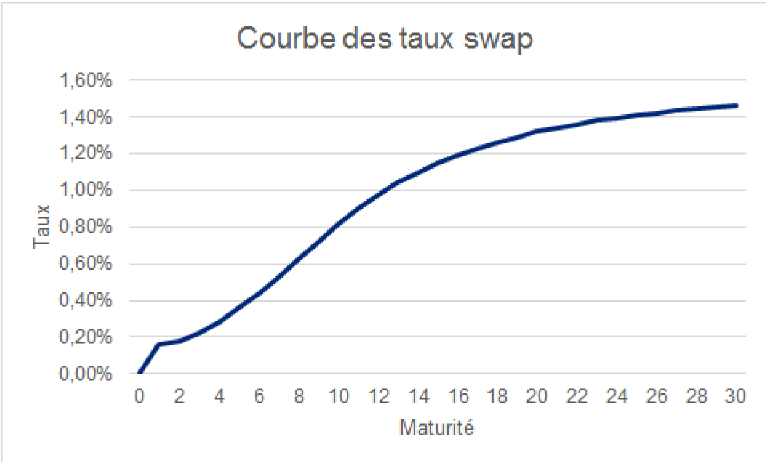



FIGURE 5.1 – Courbe des taux swap euro "contre EURIBOR 6 mois" au 31/12/2014

**Etape 2 : appliquer le Credit Risk Adjustment(CRA)**

Puis, ces taux swap sont retraités afin de supprimer le spread du risque de crédit. Pour cela, un coefficient, appelé *Credit Risk Adjustement* (CRA), est appliqué aux taux swap jusqu'au *Last Liquid Point* (LLP). Le LLP correspond à la plus longue maturité verifiant les critères de Profondeur, Liquidité et Transparence. Pour la zone Euro, le LLP est fixé de telle sorte qu'il respecte le critère suivant : le volume cumulatif des obligations dont les maturités sont supérieures au LLP doit représenter moins de 6% du volume total des obligations cotées sur les marchés financiers. Le LLP est fixé à 20 ans pour la zone Euro.

Le CRA est égal à 50 % de la moyenne annuelle des différences entre le taux flottant du taux swap et du Overnight Index Swap (OIS) de même maturité. L'OIS est un swap de taux dans lequel la jambe variable est indexée sur un taux au jour le jour (EONIA pour la zone Euro) et les intérêts capitalisés sur la jambe variable. Ce type de contrat a généralement une durée beaucoup plus courte que les swaps de taux "classiques" (moins d'un an). Pour la zone Euro, le taux swap IOS correspond au taux swap contre EONIA 3 mois. Le CRA doit être compris entre [10-35] bps.

Puis, les prix zéro-coupon sont obtenus en inversant l'équation suivante :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum\limits_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t,T_i)}$$

Les taux *spot* sont obtenus à l'aide de l'équation suivante :

$$R(t,T) = -\frac{ln(P(t,T))}{T-t}$$

**Etape 3 : extrapolation et interpolation**

L'étape suivante est l'interpolation et l'extrapolation des taux d'intérêt grâce à la méthode de Smith-Wilson. L'objectif est d'atteindre un taux d'équilibre de long terme, appelé *Ultimate Forward Rate* (UFR) : les taux spot entre le LLP et la dernière maturité observable, appelée maturité de convergence, sont déterminés par interpolation et les taux de maturité supérieure à la maturité de convergence sont déterminés par extrapolation.

L'UFR est fixé comme paramètre du modèle. De plus, on suppose que les prix zéro-coupon pour l'ensemble des maturités jusqu'au LLP sont des données d'entrée du modèle. Les J maturités jusqu'au LLP sont notées : $u_1, u_2, ..., u_J$, avec $u_J = LLP$. Le prix zéro-coupon de maturité T>0 à la date 0 est noté $P(0,T)$. Le but de cette technique est de déterminer la fonction $P(0,T)$ pour l'ensemble des maturités T. Puis, la courbe des taux est déterminée grâce à la définition des taux spot.

Smith et Wilson propose une fonction de la forme suivante :

$$P(0,\tau) = e^{-UFR\times\tau} + \sum_{i=1}^{J} \zeta_i \times W(\tau,u_i), \tau \geq 0$$

avec :

$$W(\tau,u_i) = e^{-UFR\times(\tau+u_i)} \times \Big(\alpha \times min(\tau,u_i) - 0,5 \times e^{-\alpha\times max(\tau,u_i)} \times (e^{\alpha\times min(\tau,u_i)} - e^{-\alpha\times mix(\tau,u_i)}\Big).$$

— $\tau$ : *Time to maturity.*

— UFR : *Ultimate Forward Rate.*

— $\alpha$ : retour à la moyenne, vitesse de convergence vers l'UFR.

— $\zeta_i$ : paramètres pour reproduire la courbe des taux.

Pour chaque prix zéro-coupon $P(0,t)$, $t = u_1, .., u_J$ , un noyau est défini. Un noyau est une fonction non-négative, intégrable et à valeurs réelles, notée K, qui doit vérifier les deux conditions suivantes :

— $\int_{-\infty}^{+\infty} K(u)du = 1$

— $K(-u) = K(u)$ pour toutes les valeurs de u.

Les noyaux $K_i(\tau)$ sont définis en fonction de $\tau$ :

$$K_i(\tau) = W(\tau,u_i), \tau > 0 \text{ et } i = 1, ..., J$$

L'intuition du modèle est de déterminer la fonction $P$, à partir de laquelle on calcule la structure par terme, comme une combinaison linéaire des noyaux. Les paramètres de la combinaison linéaire des noyaux, $\zeta_i, i = 1, ..., J$, sont solution du système d'équations linéaires suivant :

$$P(0, u_1) = e^{-UFR \times u_1} + \sum_{i=1}^{J} \zeta_i \times W(u_1, u_i)$$

$$P(0, u_J) = e^{-UFR \times u_J} + \sum_{i=1}^{J} \zeta_i \times W(u_J, u_i)$$

En notation vectorielle,

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{E} + W \times \overrightarrow{\zeta}$$

avec :

— $\overrightarrow{P} = (P(u_1), ..., P(u_J))'$
— $\overrightarrow{E} = \left(e^{-UFR \times u_1}, ..., e^{-UFR \times u_J}\right)'$
— $\overrightarrow{\zeta} = (\zeta_1, ..., \zeta_J)'$
— $W = (W(u_i, u_j))_{i,j=1,...,J}$

La solution du système $(\zeta_1, ..., \zeta_J)$ est :

$$\overrightarrow{\zeta} = W^{-1} \times (\overrightarrow{P} - \overrightarrow{E})$$

Les paramètres $(\zeta_1, ..., \zeta_J)$ étant déterminés, ils permettent de calculer $P(0, t)$ pour toutes les maturités $\tau$ :

$$P(\tau) = e^{-UFR \times \tau} + \sum_{i=1}^{J} \zeta_i \times W(\tau, u_i), \tau \geq 0$$

Le paramètre $\alpha$, contrôlant la vitesse de convergence, est fixé comme étant la plus petite valeur atteignant l'UFR avec une tolérance de 1 bp. La borne inférieure pour $\alpha$ est fixée à 5%. Pour la zone Euro, l'UFR est égal à 4,2% et correspond à une maturité de convergence de 60 ans.

**Etape 4 : appliquer le *Volatility Adjustment* (VA)**

La quatrième et dernière étape consiste à appliquer un coefficient, appelé *Volatility Adjustement* (VA) ou correction pour volatilité. "Les organismes d'assurance peuvent appliquer une correction pour volatilité de la courbe des taux d'intérêt sans risque. Pour chaque monnaie, cette correction est fonction de l'écart entre le taux d'intérêt qu'il serait possible de tirer des actifs inclus dans un portefeuille de référence dans cette monnaie et les taux de la courbe des taux d'intérêt sans risque correspondante dans cette monnaie. Elle ne peut néanmoins être utilisée que sous certaines conditions. Les conditions d'application sont définies aux articles R. 354-2 , R. 354-2-1 , R. 354-3-2 et R. 355-7 du Code des assurances". Source : ACPR 2015.

Il a été décidé de ne pas appliquer le *Volatily Adjustment* par raison de simplicité.

#### 5.3.2.2 Courbe des taux obtenue

La courbe des taux zéro-coupon obtenue est comparée à celle fournie par l'EIOPA au 31/12/2014. [4]

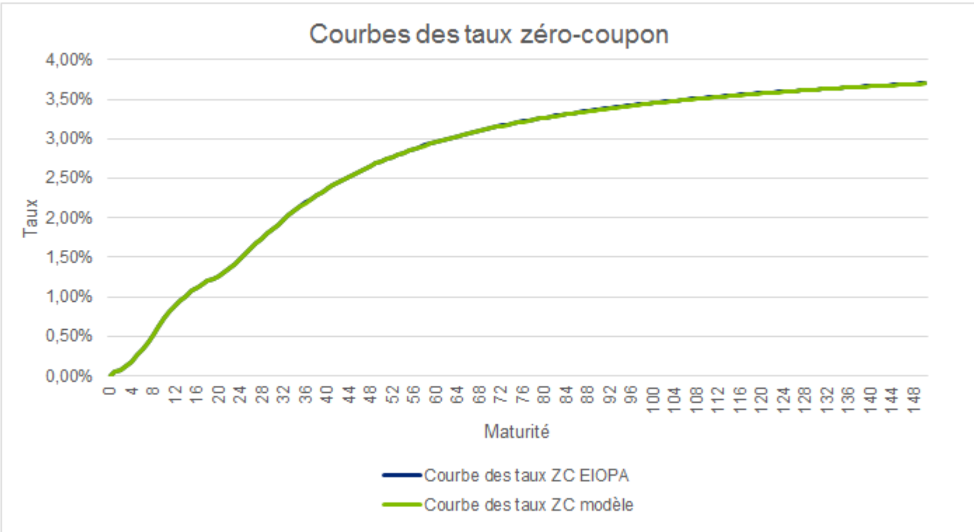



FIGURE 5.2 – Courbe des taux zéro-coupon

On observe que les deux courbes sont identiques, ce qui permet de valider le processus de construction de la courbe des taux. Ainsi, nous sommes parvenus à répliquer la structure par terme des taux d'intérêt sans risque.

4. références : EUR-31-12-2014-SWP-LLP-20-EXT-40-UFR-4.2

### 5.3.3 Simulation du taux court

On peut montrer que le taux court s'écrit :

$$\begin{aligned} r_t &= r_s e^{-\beta(t-s)} + \int_s^t e^{-\beta(t-u)} \theta_u du + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_r(u) \\ &= r_s e^{-\beta(t-s)} + \alpha(t) - \alpha_s e^{-\beta(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-u)} dW_r(u) \end{aligned}$$

avec :

$$\alpha_t = f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\left(1 - e^{-\beta t}\right)^2$$

Le taux court est donc gaussien, d'espérance et variance :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-\beta(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-\beta(t-s)}$$

$$Var_{\mathbb{Q}}[r_t|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)$$

Ainsi,

$$r_t \sim N\left(r_s e^{-\beta(t-s)} + \alpha_t - \alpha_s e^{-\beta(t-s)}, \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right)$$

Le taux court fait intervenir :

— les paramètres $\beta$ et $\sigma$, déterminés à l'étape de calibrage du modèle.

— $\alpha_t$.

— les réalisations de la loi normale N(0,1).

Connaissant $\alpha_t$, le taux court peut être simulé de manière exacte. En effet, de part la structure du modèle, la discrétisation du processus n'est pas nécessaire. Or, pour déterminer $\alpha_t$ il est nécessaire d'avoir les taux forward instantanés marché $f^M(0,t)$. Ces taux n'étant pas disponibles sur les marchés financiers, ils vont être déterminés à partir des prix zéro-coupon grâce à l'équation ci-dessous :

$$P^M(0,T) = exp\left(-\int_0^T f^M(0,t)dt\right)$$

Tout d'abord, les prix zéro-coupon pour les maturités $0.5, 1, ..., 20$ sont calculés à partir de la courbe des taux. Cependant, les taux forward instantanés pour chaque date t (taux journalier) doivent être déterminés afin de simuler correctement le taux court. Pour obtenir l'ensemble des taux journaliers, une interpolation linéaire est utilisée. Ainsi, la courbe des taux forward instantanés est linéaire pour chaque intervalle de temps $i$ et est définie par :

$$f_i(t) = a_i \times t + b_i$$

Pour chaque intervalle de temps, il faut déterminer $a_i$ et $b_i$.

Les calculs pour les deux premiers intervalles de temps $[0, 0.5]$ et $[0, 1]$ sont détaillés ci-dessous. Par définition, le taux forward initial est égal au taux court initial. On suppose que le taux court initial est égal au taux *spot* Euribor 6 mois. Ainsi, on a : $f_1(0) = r_0 = R(0, 0.5) = 0.17\%$. Donc $b_1 = 0, 17\%$. Ainsi, il vient :

$$
\begin{aligned}
P^M(0, 0.5) &= exp\left(-\int_0^{0,5} f_1(t)dt\right) \\
&= exp\left(-\int_0^{0,5}(a_1 t + 0, 0017)dt\right) \\
&= exp\left(-\frac{a_1 0, 5^2}{2} - 0, 0017 \times 0, 5\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, $a_1 = -8(log(P(0, 0, 5)) + 0, 0017 \times 0, 5) \sim 0$

Pour le premier intervalle [0,0.5], on a : $f_1(t) = a_1 \times t + b_1 = 0, 0017$.

Pour le second intervalle [0,1], les paramètres $a_2$ et $b_2$ doivent être déterminés. Le point de départ du second segment doit être égal au point terminal du premier segment. Notant ce point $t1 = 0, 5$ nous avons :

$$
f_2(t_1) = f_1(t_1) \text{ ie } a_2 \times t_1 + b_2 = a_1 \times t_1 + b_1
$$

Donc $b_2 = t_1 \times (a_1 - a_2) + b_1$. Ayant déterminé $t_1$,$b_1$ et $a_1$, le seul paramètre restant à déterminer est $a_2$. Il est obtenu en résolvant l'équation :

$$
\begin{aligned}
P^M(0, 1) &= exp\left(-\int_0^{1} f_2(t)dt\right) \\
&= exp\left(-\int_0^{0,5}(a_1 t + b_1)dt\right) exp\left(-\int_{0,5}^{1}(a_2 t + b_2)dt\right) \\
&= P^M(0, 0.5)exp\left(-\frac{a_2(1^2 - 0, 5^2)}{2} - b_2(1 - 0, 5)\right)
\end{aligned}
$$

Nous obtenons $a_2$ = -0,0068 et donc $b_2 = t_1(a_1 - a_2) + b1$ = 0,0051. La méthodologie est identique pour les autres intervalles.

Une fonction sur R [5] a permis de déterminer les différents coefficients $a_i$ et $b_i$ et calculer les taux forward instantanés pour chaque intervalle de temps. Puis, la fonction $\alpha_t$ a été déterminée. Le taux court $r$ est ensuite simulé sur R (discrétisation exacte, pas de temps égal à $\delta$) grâce à la formule :

$$r_{t+\delta} = r_t e^{-\beta\delta} + \alpha_{t+\delta} - \alpha_t e^{-\beta\delta} + \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2\beta\delta}}{2\beta}}\epsilon$$

avec : $\epsilon$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Un pas de temps journalier ($\delta = 1/360$) a été choisi pour la simulation du taux court. On suppose donc que $r_t$ est constant entre deux jours.

Le graphique suivant présente 50 simulations du taux court :

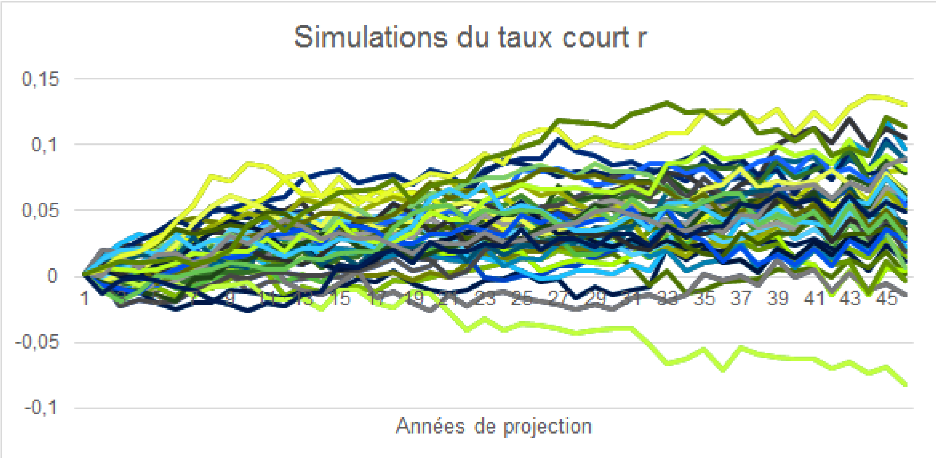



FIGURE 5.3 – Simulations du taux court r

### 5.3.4 Détermination des prix zéro-coupon

Dans le modèle de Hull-White, le prix P(t,T) s'écrit :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

avec :

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(o,t)} exp\left[B(t,T)f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1-e^{-2\beta t})B(t,T)^2\right]$$

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(T-t)}\right)$$

Cette équation a été utilisée afin de déterminer les prix zéro-coupon.

5. [Dag10] DAGISTAN Cagatay, *Quantifying the interest rate risk of bonds by simulation*, 2008, Master of Science, Bogaziçi University.

### 5.3.5 Calibrage du modèle de taux

Le modèle de taux doit être calibré afin de répliquer les conditions de marché (reproduire la courbe des taux initiale et répliquer la volatilité implicite des marchés financiers) et ainsi respecter le caractère de *Market Consistency*. Le modèle doit donc reproduire les prix des instruments les plus liquides sur les marchés financiers. Pour ce faire, le modèle de taux est calibré sur :

— la structure par terme des taux sans risque.

— des instruments liquides.

— une mesure de volatilité appropriée.

Le calibrage du modèle de taux s'effectue en deux temps. Tout d'abord, il faut calibrer la fonction déterministe $\theta$ qui permet de reproduire la courbe des taux initiale. Puis, il faut calibrer les paramètres $\beta$ et $\sigma$ de façon à répliquer la surface volatilité implicite.

#### 5.3.5.1 Calibrage de la courbe de taux : fonction $\theta$

Le modèle de Hull-White prend comme donnée d'entrée la courbe de taux sans risque initiale et utilise la fonction déterministe $\theta$ afin de reproduire exactement cette courbe.

En effet, pour $T > 0$ fixé, si nous notons $P^M(0,T)$ le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T observée sur le marché à la date 0, et $f^M(0,T)$ le taux forward instantané associé, le modèle de Hull-White reproduit exactement la courbe des taux zéro-coupon de marché si :

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T} + \beta f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{-2\beta t}\right)$$

#### 5.3.5.2 Calibrage de la volatilité

Un des objectifs du calibrage est de reproduire la surface de volatilité implicite des marchés. En effet, en pratique on ne calibre pas la volatilité $\sigma$ mais la volatilité à-la-monnaie ou *at the money (ATM)* c'est à dire la volatilité implicite.

Par définition, la volatilité est une mesure des amplitudes des variations du cours d'un actif financier. Ainsi, plus la volatilité d'un actif est élevée et plus l'investissement dans cet actif est considéré comme risqué. Par conséquent, l'espérance de gain ou inversement le risque de perte est important. En revanche, un actif sans risque ou peu risqué aura une volatilité très faible.

Il existe deux types de volatilité : la volatilité historique et la volatilité implicite.

— la volatilité historique est fondée sur le comportement passé de l'actif financier et se calcule sur l'historique de l'évolution des cours.

— la volatilité implicite mesure l'amplitude anticipée par le marché des variations du cours d'un sous-jacent d'une option. La volatilité implicite est par conséquent un paramètre essentiel pour l'évaluation des produits dérivés. Les acteurs des marchés financiers utilisent le modèle de Black pour calculer, à partir des prix des options, les volatilités implicites.

Dans la pratique, on constate que la volatilité implicite d'une option évolue en fonction du prix d'exercice (*strike*) et de la maturité de l'option. Pour une maturité donnée, la volatilité implicite atteint généralement un point bas lorsque l'option est à la monnaie (*ATM*). La volatilité devient plus importante au fur et à mesure que l'option devient davantage dans la monnaie (*ITM*) ou en dehors de la monnaie (*OTM*). La représentation graphique de la volatilité en fonction du *strike*, en forme de *smile*, donne son nom à ce phénomène.

Il a été décidé de calibrer la volatilité du modèle de taux sur le marché des swaptions car c'est un marché très liquide contrairement au marché des caplets. Le calibrage consiste à minimiser la moyenne des carrés des erreurs entre les prix des swaptions *ATM* induites par le modèle et les prix des swaptions *ATM* observées sur le marché financier.

#### 5.3.5.3 Prix swaption marché

Les prix des swaptions *ATM* sont disponibles sur le marché de gré-à-gré européen. Mais les prix étant exprimés en volatilité implicite, la formule de Black a été utilisée afin d'obtenir le prix marché des swaptions.

Sur Bloomberg, à l'aide de l'option *VCUB*, la matrice de volatilité implicite *normal* des swaptions *ATM* au 31/12/2014 pour les taux swap sous-jacent EURIBOR 6 M a été récupérée. La nappe de volatilité est représentée graphiquement ci-dessous :

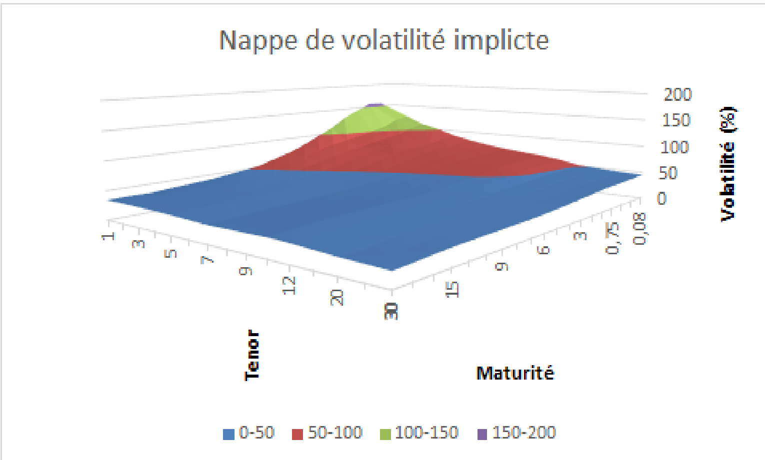



Figure 5.4 – Nappe de volatilité implicite

Les prix marché des swaptions ont été déterminés à l'aide de la formule de Black, considérée comme le modèle financier standard pour évaluer le prix des swaptions. Elle est une extension de la formule de Black-Scholes, utilisée pour déterminer le prix des options sur actions. La formule de Black dépend de deux paramètres, le taux swap forward et la volatilité.
Le prix Black d'une swaption ATM payeuse à l'instant t=0 de maturité $T_\alpha$, de tenor $T_\beta - T_\alpha$, de strike K et de volatilité implicite $\sigma$ est donné par :

$$PSwaption(0, T_\alpha, T_\beta, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \left(S_{\alpha,\beta}(0)N(d1) - KN(d2)\right)$$

avec :

$$d1 = \frac{ln(\frac{S_{\alpha,\beta}(0)}{K}) + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{T}$$

- $T_\alpha$ : maturité.
- $T_\beta - T_\alpha$ : tenor.
- K : strike.
- $\tau_i = T_i - T_{i-1}$.
- N : fonction de répartition de la loi normale centrée-réduite.

La nappe de prix marché des swaptions est représentée ci-dessous :

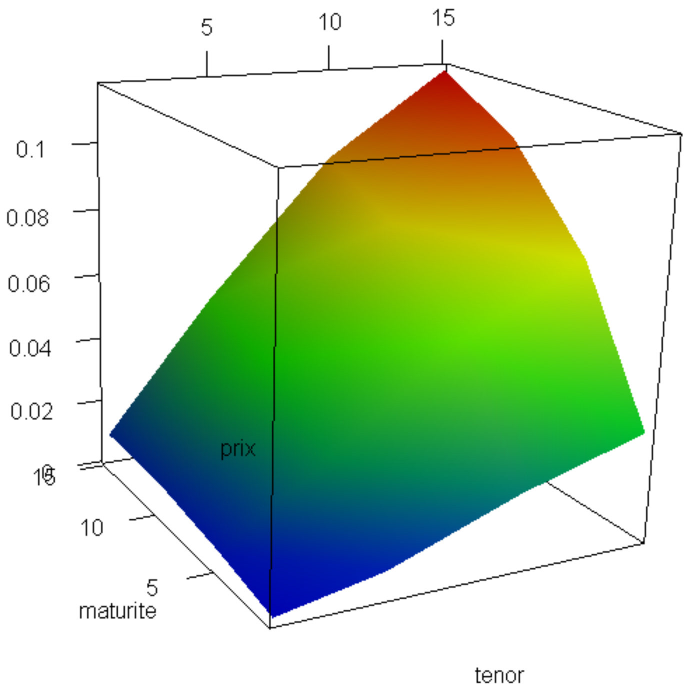



FIGURE 5.5 – Nappe de prix marché des swaptions

#### 5.3.5.4 Prix des swaptions modèle

La méthodologie adoptée pour déterminer le prix des swaptions selon le modèle de Hull-White est décrite ci-après.

Le taux swap forward associé au swap payeur est défini par :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t,T_\alpha) - P(t,T_\beta)}{\sum\limits_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t,T_i)}$$

avec $P(t,T_i)$ le prix d'une obligation zéro-coupon et $T_i$ les maturités du taux swap.

Le prix d'une swaption payeuse à la date t vaut :

$$PSwaption_{\alpha,\beta}(t) = \mathbb{E}_t\left(e^{-\int_t^{T_\alpha} r(s)ds} \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha,T_i)\tau_i\left(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K\right)^+\right)$$

De même, le prix d'une swaption receveuse à la date t vaut :

$$RSwaption_{\alpha,\beta}(t) = \mathbb{E}_t\left(e^{-\int_t^{T_\alpha} r(s)ds} \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha,T_i)\tau_i(K - S_{\alpha,\beta}(T_\alpha))^+\right)$$

Une swaption peut être également vue comme une option sur une obligation à coupons (OC) de strike égal à 1. En effet,

$$RSwaption_{\alpha,\beta}(t) = \mathbb{E}\left(e^{-\int_t^{T_\alpha} r(s)ds}(OC_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - 1)^+\right)$$

avec $OC_{\alpha,\beta}(t) = \sum\limits_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i P(t,T_i)$ et $c_i = K\tau_i$ pour $i = \alpha+1, ..., \beta-1$ et $c_\beta = 1 + K\tau_\beta$.

On suppose que que les prix zéro-coupon s'écrivent :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

avec :

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(o,t)} exp\left(B(t,T)f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2\beta t})B(t,T)^2\right)$$

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}\left(1 - e^{-\beta(T-t)}\right)$$

Il existe $r^*$ tel que la valeur de l'obligation à coupons à la date $t = T_\alpha$ avec $r(T_\alpha) = r^*$ vaut 1 :

$$OC_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i P(t,T_i) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha,T_i)e^{-B(T_\alpha,T_i)r^*} = 1$$

En remplaçant 1 par $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha,T_i)r^*}$ dans $RSwaption_{\alpha,\beta}(t)$, on obtient :

$$RSwaption_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i \mathbb{E}_t \left( e^{\int_t^{T_\alpha} r(s)ds} \left(P(T_\alpha, T_i) - K_i\right)^+ \right) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i CALL(t, T_\alpha, T_i, K_i)$$

Avec $K_i = A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha,T_i)r^*}$ et $CALL(t, T_\alpha, T_i, K_i)$ une option d'achat sur une obligation zéro-coupon de maturité $T_\alpha$ et de strike $K_i$.

De même, pour une swaption payeuse :

$$PSwaption_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i PUT(t, T_\alpha, T_i, K_i)$$

Ainsi, une swaption peut être analysée comme un portefeuille d'options sur obligation zéro-coupon. Le modèle de Hull-White permet d'obtenir une formule analytique d'évaluation des options sur obligations[6]. Le prix en t d'un call européen de maturité T sur une obligation zéro-coupon de principal L, de strike K, de maturité s est :

$$L \times P(t,s)N(h) - K \times P(t,T)N(h - \sigma_p)$$

De même, le prix en t d'un put européen de maturité T sur une obligation zéro-coupon de maturité s est :

$$K \times P(t,T)N(-h + \sigma_p) - L \times P(t,s)N(-h)$$

avec $\sigma_p$ et h définis par :

$$h = \frac{1}{\sigma_p} \ln \left( \frac{L \times P(t,s)}{P(t,T) \times K} \right) + \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} \left( 1 - e^{\beta(s-T-t)} \right) \sqrt{\left( \frac{1 - e^{-2\beta(T-t)}}{2\beta} \right)}$$

Ainsi,

$$PSwaption_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i \times PUT(t, T_\alpha, T_i, K_i) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i \times \left(K_i P(t, T_\alpha) N(-h + \sigma_p) - LP(t, T_i) N(-h)\right)$$

avec $K_i = A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha,T_i)r^*}$ et $r^*$ solution de : $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T_\alpha, T_i) e^{-B(T_\alpha,T_i)r} = 1$

Tout d'abord, on détermine $r^*$ c'est à dire la valeur de r pour laquelle le prix de l'obligation à coupon est égal à 1 (strike de l'option). Puis, on détermine les prix des options sur obligation zéro-coupon. Le prix de la swaption est alors égal à la somme des prix des options sur obligation zéro-coupon calculés à l'étape précédente.

6. HULL John, [2011], "Options, futures et autres actifs dérivés", Paris, Pearson, 867 pages.

#### 5.3.5.5 Détermination des paramètres optimaux

L'un des objectifs du calibrage du modèle de taux est de reproduire la surface de volatilité implicite. Pour cela, il faut déterminer les paramètres $(\beta, \sigma)$ du modèle qui minimise l'erreur quadratique entre les prix marché des swaptions et les prix des swaptions déterminés par le modèle.

Les paramètres $(\beta, \sigma)$ sont déterminés par une méthode des moindres carrés :

$$\min_{\alpha,\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left(Prix_{i,HW}(\beta,\sigma) - Prix_{i,Mkt}\right)^2$$

Les paramètres optimaux sont $(\beta, \sigma)$ = (0.01,0.008).

La nappe de prix des swaptions obtenue par le modèle est représentée graphiquement ci-dessous :

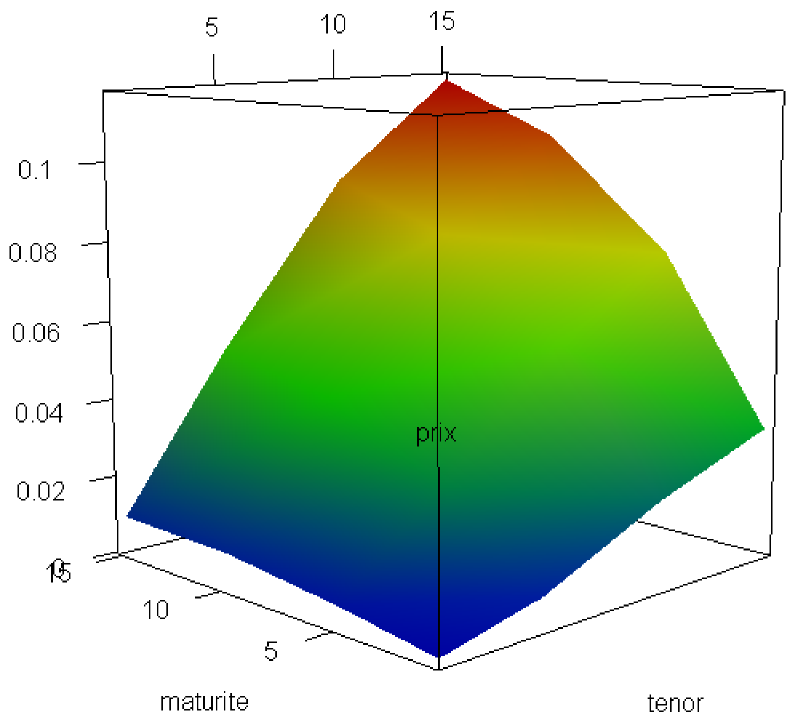



FIGURE 5.6 – Nappe de prix obtenue avec le modèle

Les prix des swaptions marché sont :

| **Prix marché** | **1** | **5** | **10** | **15** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,10% | 0,71% | 2,15% | 3,25% |
| **5** | 0,49% | 2,69% | 5,49% | 7,38% |
| **10** | 0,85% | 4,18% | 7,89% | 10,21% |
| **15** | 0,92% | 4,80% | 9,01% | 11,58% |

Les prix des swaptions obtenus avec le modèle sont :

| **Prix modèle** | **1** | **5** | **10** | **15** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,31% | 1,54% | 2,83% | 3,83% |
| **5** | 0,67% | 3,11% | 5,71% | 7,89% |
| **10** | 0,87% | 3,91% | 7,22% | 10,10% |
| **15** | 0,92% | 4,18% | 9,81% | 10,84% |

Les deux nappes de prix sont représentées sur le même graphique afin d'observer les différences :

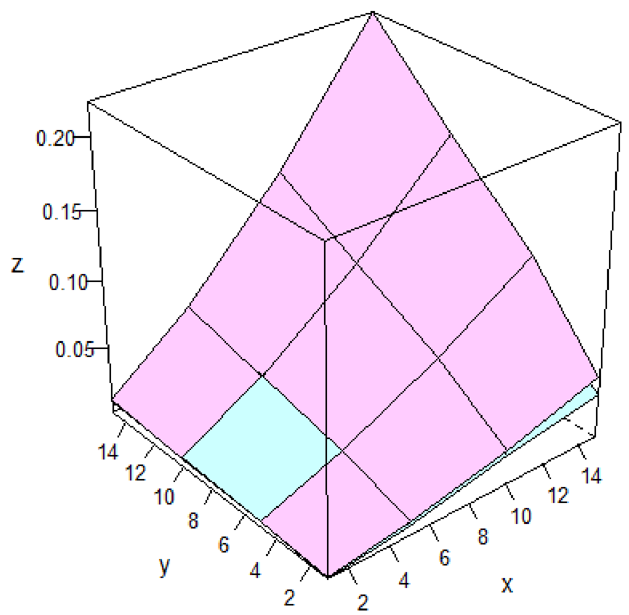



FIGURE 5.7 – Nappes de prix

La surface rose représente la nappe de prix marché et la surface bleue représente la nappe de prix obtenue avec le modèle.

Le tableau suivant présente les écarts relatifs entre les prix de swaptions :

| **Ecarts relatifs** | 1 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| **1** | -217,03% | -115,92% | -31,67% | -18,01% |
| **5** | -34,65% | -15,31% | -3,93% | -6,82% |
| **10** | -2,20% | 6,35% | 8,43% | 1,10% |
| **15** | -0,44% | 12,81% | -8,85% | 6,39% |

Les résultats montrent que le modèle ne parvient pas à capturer l'intégralité de la surface de volatilité, notamment pour une maturité égale à un an. La raison principale est le fait que la volatilité est un paramètre déterministe et ne dépend pas du temps. En effet, une des limites du modèle de Hulll-White à un facteur est que certaines surfaces de volatilité complexes sont difficiles à répliquer.

Des améliorations peuvent être apportées au niveau de la volatilité implicite. Tout d'abord, la volatilité peut être fonction de la maturité. Ainsi, pour le modèle de Hull-White, la dynamique du taux court devient alors :

$$dr_t = \theta_t \beta r_t dt + \sigma_t dW_r(t)$$

De plus, le modèle peut être amélioré en permettant à la volatilité de dépendre du tenor. En effet, un modèle avec une volatilité dépendant uniquement du temps ne permet pas de capter la dépendance de la volatilité au tenor des swaptions. La volatilité utilisée dans un modèle type Hull-White ne reproduit pas la dépendance au tenor car la volatilité ne dépend que du temps.

Les modèles de taux peuvent être améliorés en prenant en compte le strike au niveau de la volatilité. Les prix du marché font ressortir que la volatilité implicite des swaptions est différente selon le strike, le profil étant soit monotone (on parle alors de skew), soit en forme de U (on parle alors de smile). Un modèle à volatilité locale, exprimant la volatilité en fonction du strike, permet de reproduire le phénomène de skew de volatilité. Un modèle avec volatilité locale prend en compte le skew et la structure par terme de la volatilité mais ne prend pas en compte la déformation de la nappe de volatilité dans le temps. Ainsi, un modèle de diffusion avec volatilité stochastique, permet de prendre en compte la déformation de la nappe de volatilité dans le temps ainsi que la corrélation de volatilité avec le taux avec un effet de rappel.

## 5.4 Modélisation des actions

L'étape suivante de la construction du GSE est le choix du processus stochastique afin de modéliser le cours des actions.

### 5.4.1 Modèle retenu

Depuis les travaux de Bachelier, les modèles de valorisation financiers d'actifs de type actions se sont développés avec l'hypothèse sous-jacente de rendements gaussiens. Afin de modéliser le cours des actions (sans dividende) [7], le modèle de Black, Scholes et Merton a été retenu. Les hypothèses de ce modèle sont :

— le cours de l'actif sous-jacent $S_t$ suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité $\sigma$ constante et un taux stochastique.

— le sous-jacent est côté en continu sur les marchés financiers et est parfaitement divisible.

— l'absence d'opportunité d'arbitrage et de coût de transaction et d'impôts.

— le marché est complet.

— la possibilité d'effectuer des ventes à découvert.

Ce modèle a été retenu car il est très utilisé dans le monde de la finance. Sous la probabilité risque-neutre, ce modèle permet d'intégrer un taux court stochastique et le caractère martingale de l'indice. De plus, il s'agit d'un modèle simple à calibrer et à implémenter. Mais ce modèle présente certains désavantages qu'il est important de noter. De nombreuses études empiriques montrent que les prix observés sur les marchés ont des comportements très éloignés de l'hypothèse de rendements gaussiens. Dans son ouvrage, "Une approche fractale des marchés", Mandelbrot propose de nombreux exemples ainsi que des modélisations alternatives.

Tout d'abord, le modèle de Black-Scholes stipule que, pour toute durée donnée t, les log-rapports :

$$log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) \sim N\left(t(r - \frac{2}{2}), t\sigma^2\right)$$

7. Les dividendes n'ont pas été modélisés par raison de simplification. La prise en compte des dividendes complexifie le calibrage de la volatilité

Les graphiques ci-dessous présentent l'historique du cours journalier et les log-rapport journalier de l'indice CAC 40 entre le 01/01/1990 et le 31/12/2014.

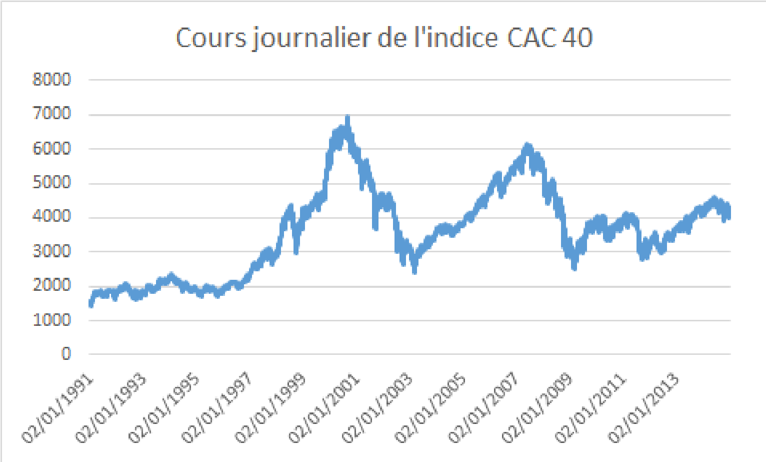



Figure 5.8 – Historique du cours journalier de l'indice CAC 40 entre le 01/01/1990 et le 31/12/2014.

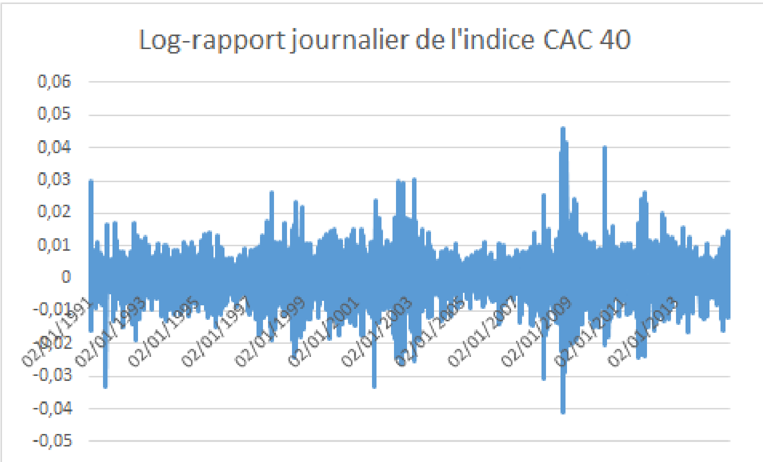



Figure 5.9 – log-rapport journalier de l'indice CAC 40 entre le 01/01/1990 et le 31/12/2014.

L'étude des séries chronologiques financières met en évidence certains faits stylisés concernant les log-variations journalières des actifs : distribution à queue lourde (non gaussienne), variation de la volatilité au cours du temps. En effet, dans le modèle de Black-Scholes la volatilité du cours des actions est supposée constante. En pratique, les volatilités ne sont pas constantes selon que les options sont dans ou en-dehors de la monnaie. Ce modèle ne permet pas de prendre en compte le smile de volatilité, traduisant la non constance de la volatilité des options en fonction du prix d'exercice. Certains modèles permettent de prendre en compte ce phénomène : le modèle Constant Elasticity of Variance (CEV), les modèles à volatilité stochastique (modèle de Heston ou le modèle SVJD), les modèles de séries chronologiques avec hétéroscédasticité conditionnelle (ARCH, GARCH), les modèles à changement de régime markovien, les modèles basés sur des processus de Levy. Le développement d'un modèle plus complexe pourra faire l'objet d'une prochaine étude.

Sous la probabilité historique $\mathbb{P}$, le cours de l'actif risqué $(S_t)_t$ suit l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dS_t = S_t(\mu_S dt + \sigma_S dW_S(t))$$

avec :

- $\mu_S$ : la tendance du processus.
- $\sigma_S$ : la volatilité du processus.
- $W_S$ : un mouvement brownien.

On suppose que $d\langle W_S(t), W_r(t)\rangle = \rho_{r,S} dt$.

En appliquant le lemme d'Itô, on peut montrer que la solution explicite de l'EDS s'écrit :

$$S_t = S_0 exp\left(\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_S(t)\right)$$

En discrétisant l'EDS de manière exacte (pas de discrétisation égal à $\delta$), on obtient :

$$S_{t+\delta} = S_t exp\left(\left(\mu_S - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\delta + \sigma_S(W_S(t+\delta) - W_S(t))\right)$$

avec $W_S(t+\delta) - W_S(t) = \sqrt{\delta}\epsilon$ et $\epsilon \sim N(0,1)$

Raisonnons à présent en univers-risque neutre. Sous la probabilité risque-neutre, la dynamique du cours de l'action (en considérant un taux court stochastique) est donnée par :

$$dS_t = S_t\left(r_t dt + \sigma_S dW_S^{\mathbb{Q}}(t)\right)$$

avec $r_t$ le taux instantané issu du modèle de Hull-White.

En appliquant le lemme d'Itô, on peut montrer que la solution explicite de l'équation différentielle stochastique est :

$$S_t = S_0 exp\left(\int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)ds + \sigma_S W_S^{\mathbb{Q}}(t)\right)$$

Le processus est discrétisé de manière exacte. La solution explicite de l'équation différentielle stochastique s'écrit :

$$S_{t+\delta} = S_t exp\left(\left(r_{t+\delta} - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)\delta + \sigma_S\left(W_S^{\mathbb{Q}}(t+\delta) - W_S^{\mathbb{Q}}(t)\right)\right)$$

avec $W_S^{\mathbb{Q}}(t+\delta) - W_S^{\mathbb{Q}}(t) = \sqrt{\delta}\epsilon$ et $\epsilon \sim N(0,1)$

### 5.4.2 Calibrage

Le modèle doit être calibré en adéquation avec l'environnement financier à la date d'évaluation. Dans l'univers risque neutre, seule la volatilité est à déterminer.

D'après la formule de Black-Scholes, le prix en 0 d'un *call* européen de strike K, de sous-jacent S, de maturité T, de volatilité constante $\sigma$ et N la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite est :

$$C_{BS}(S_0, K, \sigma, T) = S_0 N(d1) - Ke^{-rT} N(d2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T \right)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dans notre cas, on suppose que le taux sans risque r est égal à R(0,T) (taux *spot* avec le modèle de Hull-White). Le prix en 0 du call devient :

$$C_{BS}(S_0, K, \sigma_S, T) = S_0 N(d1) - Ke^{-R(0,T)} N(d2)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left( \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(R(0,T) + \frac{1}{2}\sigma_S^2\right) T \right)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_S\sqrt{T}$$

Après avoir obtenu le taux sans risque, la seule variable inconnue est la volatilité. Théoriquement, il n'existe pas une valeur unique étant donné que les actions n'ont pas toutes la même volatilité. Cependant, on peut définir pour des calls observés sur le marché :

$$C_{Mkt} = C_{BS}(S_0, K, \sigma_S, T)$$

Il s'agit d'une équation à une inconnue $\sigma_S$. De manière équivalente, on chercher la racine de la fonction $f(\sigma) = C_{BS}(S_0, K, \sigma, T) - C_{Mkt}$

On peut souligner l'unicité de cette solution car la fonction $f(\sigma)$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$à$]0, S_0[$. En effet, la dérivée de cette fonction, appelée vega, est strictement positive.

La solution est déterminée grâce à l'algorithme de Newton-Raphson. D'après la formule de Taylor pour une fonction f dérivable au moins une fois on a :

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

on cherche à résoudre $f(x_1) = 0$ ie $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Cette technique permet d'approcher la solution cherchée par itération. On a la formule de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dans notre cas, $f'(\sigma) = \;= \frac{S_0\sqrt{T}}{2\pi} exp(-\frac{d_1^2}{2})$

Un call sur l'indice CAC 40 a été utilisé. La volatilité implicite obtenue est égale à 7%.

# 5.5 Modélisation de l'immobilier

## 5.5.1 Modèle retenu

Si les actions et les obligations représentent une proportion très importante de l'actif des assureurs, il ne faut pas négliger les autres éléments dans lesquels il a la possibilité d'investir. Parmi ces éléments, nous pouvons citer l'immobilier.

Une difficulté est qu'il n'existe pas, comme pour les actions, de marché d'échanges pour les actifs immobiliers. Par conséquent, les immeubles, sont des actifs moins liquides que les titres cotés en bourse. D'un point de vue macro-économique, l'économiste Friggit a démontré que les prix des logements sont liés à la croissance des revenus des ménages de telle sorte qu'ils oscillent avec une marge de plus ou moins 10% autour d'une tendance longue, appelée tunnel de Friggit. (Friggit [2001]). L'immobilier apparaît générer plus de rendement que les actions, alors que sa volatilité est sensiblement plus faible (même ordre de grandeur que celle d'un placement obligataire).

Cette classe d'actif étant délicate à modéliser, il est souvent retenu le modèle de Black, Scholes et Merton lorsqu'on modélise directement le prix. Ahlgrim propose une modélisation des rendements réels de l'immobilier sur la base d'un modèle de Vasicek. Wilkie propose quant à lui une approche originale, dans laquelle en plus du rendement on modélise également le revenu de l'immobilier. Le prix s'en déduit en rapportant le volume de revenu au rendement.

Afin de modéliser l'immobilier (sans loyer), le modèle de Black, Scholes et Merton a été retenu car sa mise en place opérationnelle est simple. La dynamique de l'actif immobilier est alors donnée par l'équation différentielle suivante :

$$dI_t = S_t(\mu_I dt + \sigma_I dW_I(t))$$

avec :

— $\mu_I$ : la tendance de l'actif immobilier.

— $\sigma_I$ la volatilité du processus.

— $W_I$ un mouvement brownien sous la probabilité historique.

On suppose que $d\langle W_I(t), W_r(t)\rangle = \rho_{r,I}dt$ mais qu'il n'existe pas de corrélation entre les actions et les actifs immobiliers.

En appliquant le lemme d'Ito, on peut montrer que la solution explicite de l'EDS s'écrit :

$$I_t = I_0 exp\left(\left(\mu_I - \frac{\sigma_I^2}{2}\right)t + \sigma_I W_I(t)\right)$$

En discrétisant l'EDS de manière exacte (pas de temps égal à $\delta$), on obtient :

$$I_{t+\delta} = I_t exp\left(\left(\mu_I - \frac{\sigma_I^2}{2}\right)dt + \sigma_I(W_I(t+\delta) - W_I(t))\right)$$

avec $W_I(t+\delta) - W_I(t) = \sqrt{\delta}\epsilon$ et $\epsilon \sim N(0,1)$

Raisonnons à présent en univers-risque neutre. Sous la probabilité risque-neutre, la dynamique du cours de l'action (en considérant un taux court stochastique) est donnée par :

$$dI_t = I_t\left(r_t dt + \sigma_I dW_I^{\mathbb{Q}}(t)\right)$$

avec $r_t$ le taux instantané issu du modèle de Hull-White.

En appliquant le lemme d'Ito, on peut montrer que la solution explicite de l'équation différentielle stochastique est :

$$I_t = I_0 exp\left(\int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_I^2}{2}\right) ds + \sigma_I W_I^{\mathbb{Q}}(t)\right)$$

Le processus est discrétisé de manière exacte (pas de discrétisation égal à $\delta$). La solution explicite de l'équation différentielle stochastique s'écrit :

$$I_{t+dt} = I_t exp\left(\left(r_{t+dt} - \frac{\sigma_I^2}{2}\right) dt + \sigma_I \left(W_I^{\mathbb{Q}}(t+dt) - W_I^{\mathbb{Q}}(t)\right)\right)$$

avec $W_I^{\mathbb{Q}}(t+dt) - W_I^{\mathbb{Q}}(t) = \sqrt{dt}\epsilon$ et $\epsilon \sim N(0,1)$

La volatilité du marché immobilier étant plus faible que le marché action, une volatilité de 5% a été utilisée.

## 5.6 Corrélation entre les actifs

Les mouvements browniens des actifs risqués sont supposés être corrélés. Les hypothèses de corrélation sont les suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon_r \epsilon_S dt = \rho_{S,r} dt \\ \epsilon_r \epsilon_I dt = \rho_{I,r} dt \\ \epsilon_S \epsilon_I dt = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, $\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_S \\ \epsilon_I \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ où $\Sigma$ est la matrice de variance-covariance de $\epsilon$ sous la forme :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 \rho_{S,r} \rho_{I,r} \\ \rho_{S,r} 1 \rho_{I,r} \\ \rho_{S,r} \rho_{I,r} 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition de Cholesky permet de corréler des variables gaussiennes indépendantes. Soient $Z_i \sim N(0,1)$, i = 1,2,3 des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et identiquement distribuées. On a donc :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} \sim N(0, I_3)$$

Soit $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ un vecteur constant. On a donc :

$$C^T Z \sim N(0, C^T Z)$$

On cherche donc C tel que C$^T Z = \Sigma$.

Comme $\Sigma$ est symétrique et définie positive (les valeurs propres de $\Sigma$ sont strictement positives) alors $\Sigma$ s'écrit

$$\Sigma = U^T D U$$

où U est une matrice triangulaire supérieure, D est une matrice diagonale positive. On peut décomposer $\Sigma$ telle que :

$$\Sigma = U^T D U = (U^T \sqrt{D})(\sqrt{D} U) = (\sqrt{D} U)^T (\sqrt{D} U)$$

En posant $C = (\sqrt{D} U)$, on a la décomposition désirée. Dans le logiciel R, la fonction chol nous permet d'obtenir la matrice C et la fonction rmvnorm du package mvtnorm nous permet d'obtenir le vecteur gaussien voulu.

Concernant la modélisation de la dépendance entre les actions et les taux d'intérêt, le facteur de corrélation linéaire a été estimé sur la base d'un historique des deux grandeurs sur la fenêtre 2000-2014. Plus précisément, une corrélation glissante sur une fenêtre mobile de 1 an a été étudiée. La corrélation a été calculée entre les deux références suivantes :

— les rendements du CAC 40 (dividendes non réinvestis) obtenus sur Bloomberg avec le Ticker CAC Index.

— les évolutions du taux swap annuel 1 an obtenues sur Bloombeg grâce au Ticker EUSA 1 Index.

La corrélation glissante sur un an évolue entre 2% et 61% sur la plage 2000-2014. Il a été choisi, de manière arbitraire, de retenir une corrélation de 20%, qui se situe dans la fenêtre [2% ; 61%].

Concernant la corrélation entre l'immobilier et les taux d'intérêt, il a été choisi, de manière arbitraire, de retenir une corrélation de 40%.

Dans le cadre du développement de ce GSE, l'objectif était avant tout de choisir des valeurs de paramètres cohérentes avec les observations sur le marché. Comme cela a été précisé, l'objectif de ce mémoire n'est pas de présenter des valeurs de Best Estimate exactes, mais de définir deux méthodes de comptabilisation de la TVOG. Une étude du facteur de corrélation le plus pertinent à considérer pourra être effectuée dans de prochains travaux donnant suite à l'étude menée dans le cadre de ce mémoire. Cette étude doit notamment être effectuée par les compagnies utilisant un GSE développé en interne dans le cadre de Solvabilité 2, d'IFRS 4 - phase II ou du calcul de la MCEV.

## 5.7 Tests du GSE

La génération de scénarios risque-neutre nécessite de répliquer les conditions de marché afin de respecter le caractère de *Market Consistency*. Pour cela, le modèle de taux a été calibré à partir des swaptions ATM afin de répliquer la nappe de volatilité implicite. De plus, la volatilité du modèle action a été calibrée sur l'indice CAC 40. Nous allons à présent tester si le modèle respecte le caractère martingale à l'aide du test martingale.

### 5.7.1 Définition du test martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{P})$ un espace probabilisé. Soit $(\mathcal{F}_t)_{0<t<T^*}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$ complète et continue à droite.

Soit X $= \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ un processus réel $(\mathcal{F}_t)$-adapté. X est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale si :

— $\mathbb{E}(X_t) < +\infty$

— $X_t = \mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t)$, $\forall s > t$

Le test martingale permet de vérifier que :

$$X_t = \mathbb{E}(X_s|\mathcal{F}_t), \forall s > t$$

Afin de s'assurer que le test est validé, un intervalle de confiance *time dependent* est construit. Il existe deux types d'intervalle de confiance *time dependent* : asymptotique et non asymptotique. L'intervalle de confiance asymptotique est présenté ci-dessous.

Nous notons $X_t^{(i)}$ la valeur en t de la ie simulation de la variable X. Nous supposons que les $X_t^{(i)}$ sont indépendants et normalement distribués.

La moyenne empirique est :

$$X_t^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_t^i$$

La variance empirique non-biaisée est :

$$S_t^{2(n)} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(X_t^{(i)} - X_t^{(n)})^2$$

D'après le théorème central-limit, on peut écrire l'intervalle de confiance suivant :

$$IC_\alpha = \left[X_t^n - q_{1-\alpha/2}\frac{S_t^{2n}}{\sqrt{n}}, X_t^n + q_{1-\alpha/2}\frac{S_t^{2n}}{\sqrt{n}}\right]$$

avec $q_{1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ de la loi normale.

### 5.7.2 Lien entre le test martingale et le GSE

Sous la probabilité risque-neutre, la valeur actualisée d'un actif $(S_t)$ est martingale. Dans la pratique, le test martingale permet de vérifier que la moyenne des valeurs actualisées de chaque actif est égale à la valeur initiale de l'actif considéré.

En effet, d'après la formule de pricing, on a :

$$S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(P(t,T)S_T|\mathcal{F}_t)$$

En particulier,

$$S_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(P(0,t)S_t|\mathcal{F}_0)$$

On vérifie que pour chaque année de projection t, l'égalité ci-dessus est vérifiée.

### 5.7.3 Test martingale pour les prix zéro-coupon

Afin de s'assurer que le modèle de taux reproduit la courbe de taux initiale, le test martingale pour les prix zéro-coupon a été mis en oeuvre. Pour chaque année de projection t, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P(0,t)|\mathcal{F}_0] = P(0,t)$$

En pratique, cette équation est vérifiée par la méthode de Monte Carlo. D'après la loi des grands nombres, la moyenne empirique étant un estimateur sans biais de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P(0,t)] \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i(0,t)$$

$P_i(0,T)$ est calculé de la manière cumulative suivante (pour la simulation i) :

$$P_i(0,t) = \prod_{k=0}^{t} \frac{1}{1+R_i(k,k+1)}$$

avec :

- k : année de projection (pour la simulation i).
- $R_i(k,k+1)$ : taux 1 an relatif à l'année de projection k (pour la simulation i) issu du modèle de Hull-White.

Par conséquent, on vérifie que pour chaque année de projection t :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i(0,t) \sim P(0,t)$$

Pour réaliser ce test, N=1000 simulations ont été utilisées. Le graphique ci-dessous présente les résultats obtenus :

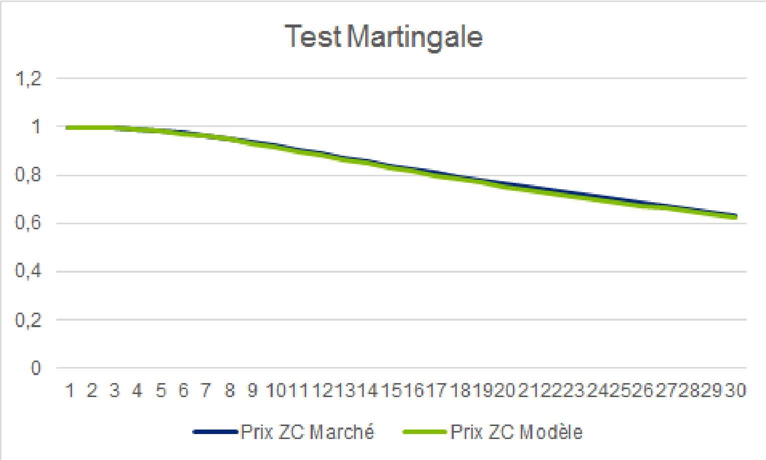



FIGURE 5.10 – Test martingale pour les prix zéro-coupon

La courbe bleue représente la courbe des prix zéro-coupon obtenus avec la structure par terme des taux d'intérêt (prix zéro-coupon marché). La courbe verte représente les prix zéro-coupon obtenus avec le modèle (prix zéro-coupon modèle). On observe que la courbe des prix zéro-coupon modèle est proche de la courbe des prix zéro-coupon marché. La moyenne des écarts entre les deux courbes est 0,7%. L'erreur est inférieure à 0,5% pour les 25 premières années de projection. Pour les maturités supérieures à 25, l'erreur augmente, tout en restant inférieure à 5%. Par conséquent, la martingalité n'est pas tout à fait vérifiée au-delà de la 25e année de projection.

Etant donnée la volatilité considérée dans le modèle, la convergence pour des années de projection supérieures à 25 ans est obtenue avec un nombre de simulations supérieur à celui pour les années de projections proches de t=0. Ce problème de martingalité pour les années de projections élevées est rencontré par de nombreux assureurs, notamment dans les périodes de stress de marché (par exemple dans le cadre du calcul de la MCEV au 31/12/2009).

L'horizon retenu pour la projection des flux de trésorerie étant 20 ans, la modélisation ne sera pas impactée.

### 5.7.4 Test martingale pour l'indice action

Le test martingale pour l'indice action a été mis en oeuvre. Pour chaque année de projection t, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P(0,t)S_t] = S_0$$

En pratique, cette équation est vérifiée par la méthode de Monte Carlo. D'après la loi des grands nombres, la moyenne empirique étant un estimateur sans biais de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P(0,t)S_t] \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i(0,t)S_{i,t}$$

$P_i(0,t)$ est calculé de la manière cumulative suivante :

$$P_i(0,t) = \prod_{k=0}^{T} \frac{1}{1+R_i(k,k+1)}$$

avec :

- k : année de projection (pour la simulation i).
- $R_i(k,k+1)$ : taux 1 an relatif à l'année de projection k (pour la simulation i) issu du modèle de Hull-White.

Par conséquent, on vérifie que :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i(0,t)S_{i,t} \sim S_0$$

Pour réaliser ce test, N=1000 simulations ont été utilisées. Le test est validé pour toutes les maturités comme le montre le graphique ci-dessous. Un écart inférieur à 5% avec 1000 simulations est observé.

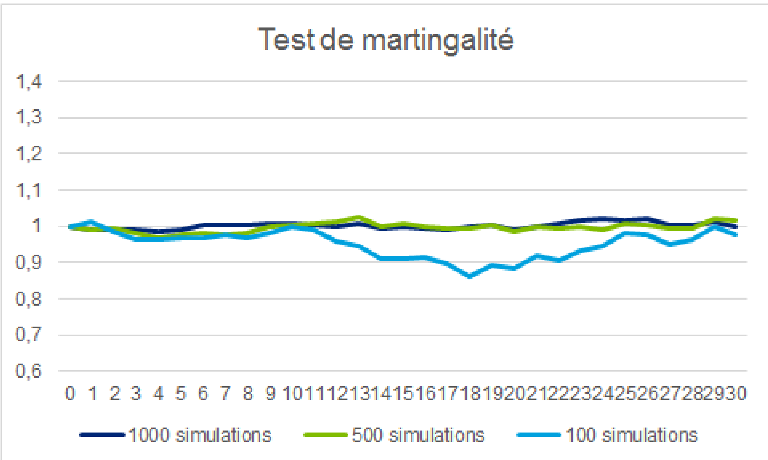



FIGURE 5.11 – Test martingale pour les actions

L'écart type des prix actualisés par rapport à la valeur de l'indice action à t=0 ($S_0 = 1$) diminue quand le nombre de simulations augmente. En effet, le rendement de l'indice action converge vers le rendement du taux sans risque avec une vitesse proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{\text{nombre de simulations}}}$ (convergence en Monte-Carlo).

### 5.7.5 Test martingale pour l'indice immobilier

Le test martingale pour l'indice immobilier a été mis en oeuvre. Pour chaque année de projection t, l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P(0,t)I_t] = I_0$$

En pratique, cette équation est vérifiée par la méthode de Monte Carlo. D'après la loi des grands nombres, la moyenne empirique étant un estimateur sans biais de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[P(0,t)I_t] \sim \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} D_i(0,t)I_{i,t}$$

La diffusion étant discrète, $P_i(0,t)$ est calculé de la manière cumulative suivante :

$$P_i(0,t) = \prod_{k=0}^{T} \frac{1}{1+R_i(k,k+1)}$$

avec :

- k : année de projection (pour la simulation i).
- $R_i(k,k+1)$ : taux spot 1 an relatif à l'année de projection k (pour la simulation i) issu du modèle de Hull-White.

Par conséquent, on vérifie que :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P_i(0,t)I_{i,t} \sim I_0$$

Pour réaliser ce test, N=1000 simulations ont été utilisées. Le test est validé pour toutes les maturités comme le montre le graphique ci-dessous. Un écart inférieur à 5% avec 1000 simulations est observé.

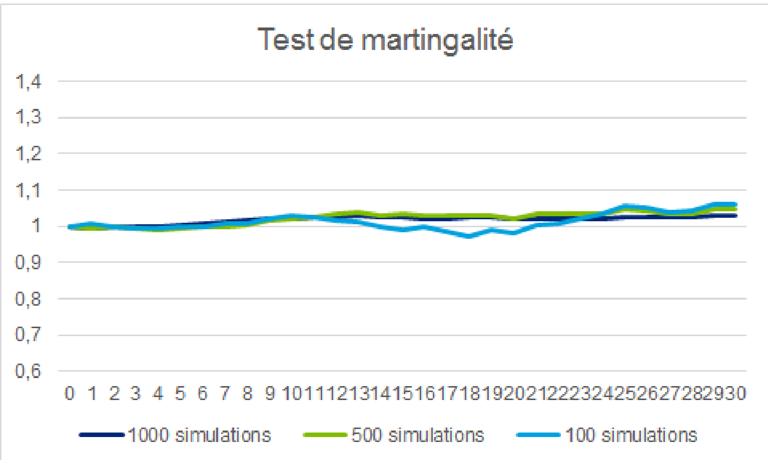



FIGURE 5.12 – Test martingale pour l'immobilier

## 5.8 Limites du GSE

Le GSE qui a été développé pour les besoins de l'étude est d'un niveau de complexité relativement simple. Les résultats obtenus en utilisant ce GSE sont toutefois tout à fait suffisants pour comprendre la problématique IFRS étudiée ici. Les principales limites relatives au GSE sont les suivantes :

— le modèle de Hull-White à un facteur ne permet pas de répliquer entièrement la surface de volatilité implicite.

— le modèle retenu pour modéliser le cours des actions et de l'immobilier.

— la volatilité $\sigma_I$ a été déterminée de manière arbitraire.

— la structure de dépendance entre les modèles de taux et action est une corrélation linéaire. Le calibrage de la corrélation linéaire entre les taux courts et les actions a été réalisé sur la base d'une fenêtre temporelle arbitraire, mais reste dans l'intervalle de valeurs observé historiquement.

— la structure de dépendance entre les modèles de taux et immobilier est une corrélation linéaire. Il a été choisi, de manière arbitraire, de retenir une corrélation de 0,4.

# Chapitre 6

# La valeur temps des options et garanties intrinsèques aux contrats d'épargne

## Sommaire

## 6.1 Définition de la valeur temps des options et garanties

### 6.1.1 Les options et garanties intrinsèques aux contrats d'épargne

L'évaluation des options et garanties intrinsèques aux contrats d'épargne peut s'avérer complexe du fait qu'elles dépendent fortement des caractéristiques des contrats. Les assureurs doivent néanmoins les intégrer dans l'estimation de leurs engagements. Les principales options et garanties sont définies ci-dessous :

— l'option de rachat : le rachat est une option permettant à l'assuré, lorsqu'il l'exerce, de récupérer tout ou une partie de son épargne avant la date d'échéance du contrat. La valeur de rachat du contrat est égale à la provision mathématique à la date du rachat. Le rachat partiel permet à l'assuré de récupérer une partie de son épargne, l'autre partie restant investie : il ne met donc pas un terme à son contrat. Le rachat total met fin au contrat en versant à l'assuré la totalité de la provision mathématique.

— l'option d'avance : l'assuré peut demander à l'assureur une avance pour une partie de la somme investie. Cela permet à l'assuré d'avoir accès à son capital sans pour autant perdre les avantages de son contrat en effectuant un rachat.

— l'option de réduction : le souscripteur peut décider d'interrompre le versement des primes périodiques prévues dans les termes du contrat. La garantie du contrat sera donc réduite au prorata des paiements effectués.

— l'option d'arbitrage : l'assuré, détenant un contrat d'épargne multisupports, peut décider de céder sa position sur un fonds ou un support afin d'investir dans un autre.

— l'option de versement additionnel : le souscripteur peut verser une prime complémentaire.

— l'option de transformation en rente : le souscripteur peut décider de sortir en capital ou en rente à l'échéance de son contrat.

Certaines garanties sont indépendantes du comportement des assurés et font partie intégrante des garanties financières du contrat. Par conséquent, ces options dépendent du rendement des actifs financiers :

— le taux minimum garanti : le taux de revalorisation garanti à l'assuré.

— la participation aux bénéfices : elle peut être réglementaire, contractuelle, discrétionnaire.

Ces différentes options et garanties représentent un coût pour l'assureur que l'application de la future norme IFRS 4 - phase II conduit à prendre en compte. De ce fait, les assureurs doivent évaluer ces options dans le but de déterminer la juste valeur de leurs engagements.

### 6.1.2 Analogie avec les options financières

A travers l'étude d'un exemple, nous allons montrer que les flux des engagements de l'assureur envers les assurés peuvent être assimilés à des options financières. En effet, certaines options telles que le taux minimum garanti ou la participation aux bénéfices peuvent être interprétées comme des options financières.

#### 6.1.2.1 Les options financières

L'univers des options financières comprenant un vocabulaire spécifique ainsi que de nombreux anglicismes, ces derniers sont indiqués.

Une option financière est un contrat entre deux parties (un acheteur et un vendeur), qui donne à l'acheteur le droit :

- d'acheter (on parle alors d'option d'achat ou *call*) ou de vendre (on parle alors d'option de vente ou *put*)
- une quantité donnée d'un actif sous-jacent (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, fonds, inflation, etc.)
- à un prix précisé à la signature du contrat (prix d'exercice ou *strike*)
- à une date d'échéance (option européenne), ou durant toute la période jusqu'à échéance (option américaine)
- avec un mode de règlement fixé à l'avance (livraison du sous-jacent ou seulement du montant équivalent).

Ce droit se négocie contre un certain prix, appelé prime (*premium*). Les options s'échangent à la fois sur des marchés d'options spécialisés et sur les marchés de gré à gré.

Une option est dite :

- dans la monnaie (*In The Money* ou *ITM*) lorsque son prix d'exercice est inférieur au prix de l'actif sous-jacent (pour un *call*) ou supérieur au prix de l'actif sous-jacent (pour un *put*).
- hors de la monnaie (*Out of The Money* ou *OTM*) dans le cas contraire.
- à la monnaie (*At The Money* ou *ATM*) si le prix d'exercice est égal au cours actuel de l'actif sous-jacent.

Le résultat à l'échéance, la valeur, la valeur intrinsèque et la valeur temps sont définis.

**Résultat à l'échéance**

Le résultat à l'échéance d'une option ou *payoff* correspond à ce que va toucher son détenteur à l'échéance. Le payoff dépend du strike $K$ et du prix du sous-jacent $S_t$.

Pour un call, il est égal à :

$$max(0, S_t - K)$$

Pour un put il est égal à :

$$max(0, K - S_t)$$

**Valeur / prix d'une option**

En finance, la valeur correspond à l'estimation d'un prix potentiel, à un moment donné et suivant des conditions de marché données. Ainsi, l'évaluation de la valeur d'une option est l'estimation de la prime à débourser pour acquérir cette option. Le prix d'une option représente donc la probabilité, estimée à une date donnée par les acteurs du marché, que l'option soit dans la monnaie à un moment futur ou à l'échéance dans le cas d'une option européenne et le montant de l'option. En effet, si l'acheteur estime qu'il y a peu de chance que son option soit dans la monnaie à l'échéance, il va souhaiter que la prime payée soit faible. En revanche, si le vendeur estime que cette probabilité est élevée, il va en demander un prix élevé.

Les financiers ont démontré que la valeur d'une option dépend de différents paramètres :

- la différence entre le prix d'exercice et le prix de l'actif sous-jacent
- *Time To Maturity* correspondant à la durée restant à courir avant la maturité de l'option
- le taux d'intérêt
- la volatilité du cours du sous-jacent ainsi que celle de l'option
- le type d'option

Analytiquement, la valeur d'une option est constituée de deux éléments : sa valeur intrinsèque et sa valeur temporelle.

### Valeur intrinsèque

La valeur intrinsèque d'une option représente la différence instantanée entre le cours de l'actif sous-jacent et le strike. Par conséquent, la valeur intrinsèque représente le bénéfice de l'acheteur (et la perte du vendeur) s'il exerçait l'option immédiatement. Elle est positive pour toute option ITM, nulle pour les options OTM ou ATM. Mais la valeur intrinsèque ne peut être négative puisque l'exercice de l'option est un droit et non une obligation.

### Valeur temps

La valeur temps mesure la possibilité que, d'ici l'échéance de l'option, l'évolution du cours de l'actif sous-jacent soit telle que la valeur intrinsèque d'une option OTM (donc nulle) devienne positive ou que la valeur intrinsèque d'une option ITM s'accroisse, c'est-à-dire la probabilité d'exercer l'option. Ainsi, même quand la valeur intrinsèque est nulle, la prime n'est pas nulle mais égale à sa valeur temps. La valeur temps est donc positive ou nulle et dépend de trois facteurs :

— la durée de vie de l'option
— la volatilité du prix de l'actif sous-jacent
— l'évolution des taux d'intérêt

Le schéma suivant représente la valeur d'une option, sa valeur temps et sa valeur intrinsèque :

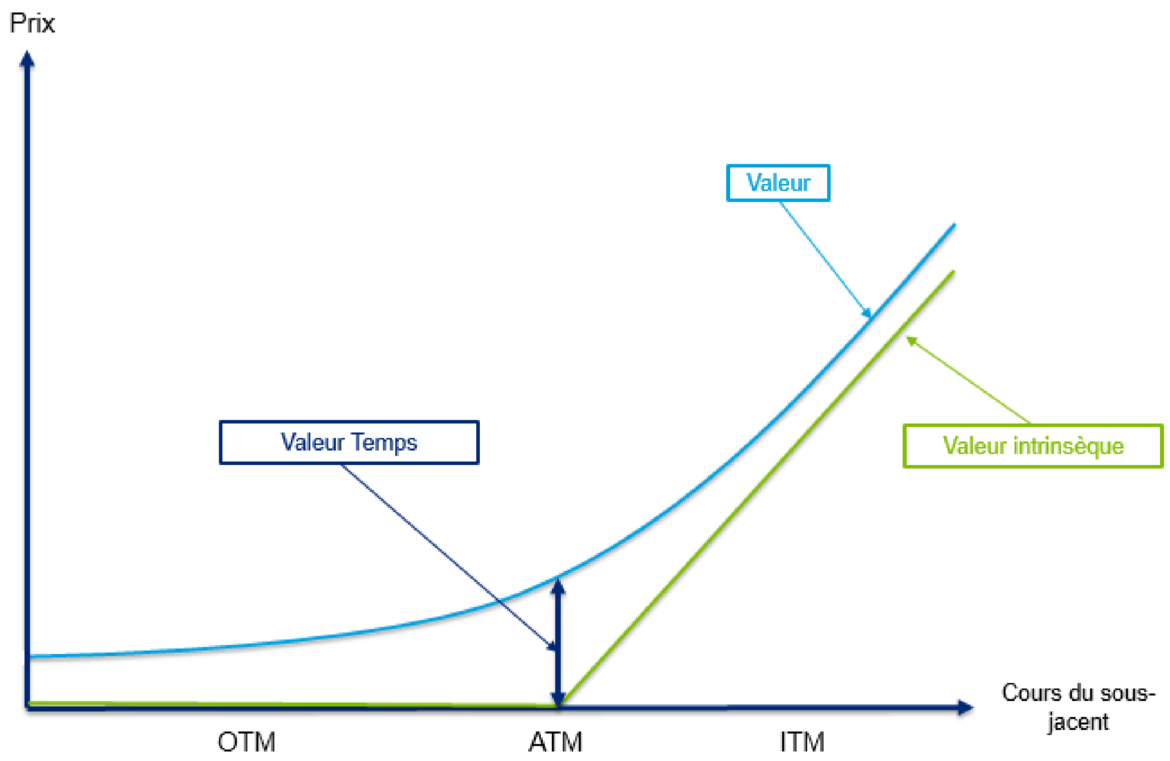



FIGURE 6.1 – La valeur intrinsèque et la valeur temps d'une option

#### 6.1.2.2 Étude d'un exemple

Après avoir défini et présenté les principales caractéristiques des options financières, nous allons montrer, à l'aide d'un exemple, qu'il existe une analogie entre les options intrinsèques des contrats d'épargne et les options financières. Pour cela, nous considérons un contrat d'épargne Euro assorti d'un taux minimum garanti. Nous notons :

— $S_t$ : valeur de l'actif S à la date t.

— $FP_t$ : valeur des fonds propres à la date t.

— $PM_t$ : valeur des provisions mathématiques à la date t.

— P : prime unique payée par l'assuré en 0.

Les flux au début et à la fin de contrat sont :

| Date | Flux des assurés | Flux des assureurs |
|---|---|---|
| 0 | -P | -$FP_0$ |
| T | Min($PM_T; S_T$) | $(S_T - PM_T)^+$ |

En T, le flux des assurés est :

$$\text{Min}(PM_T, S_T) = PM_T + S_T - \text{Max}(PM_T, S_T) = PM_T - (PM_T - S_T)^+$$

Ce flux est celui d'une obligation zéro-coupon d'échéance T et de la vente d'un put européen de sous-jacent S, de prix d'exercice $PM_T$ et d'échéance T.

**Conclusion : A travers l'étude d'un exemple, nous avons montré qu'il existe une analogie entre les options des contrats d'épargne et les options financières. Le lecteur pourra se référer à [PTJ11] [1], [Rad15] [2], [BPJ14] [3], [BCPT14] [4], [Lin01] [5] et [PA96] [6] pour une discussion plus générale du lien existant entre les options et garanties intrinsèques des contrats d'épargne Euro et les options financières.**

1. [PTJ11] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, JUILLARD Marc [2011], "Modèles financiers en assurance", 2e édition, Paris, Economica, 565 pages
2. RADI Yassir, [2015], "Valorisation des options et garanties par formules fermées dans le cadre d'un modèle ORSA"
3. Bonnin F., Planchet F., Juillard M., 2014, "Best estimate calculations of savings contracts byclosed formulas - Application to the ORSA"
4. Bonnin F., Combes F., Planchet F., Tammar M., 2014, Un modèle de projection pour descontrats de retraite dans le cadre de l'ORSA.
5. Lindset S., 2001,Pricing of rate of return guarantees on multi-period assets
6. Persson S., Aase K., 1996, Valuation of the minimum ruaranteed return embedded in life insuranceproducts.

### 6.1.3 La valeur temps des options et garanties (TVOG)

Les contrats d'épargne possèdent des options et garanties non symétriques. Ces options pouvant être assimilées à des options financières, il est important de prendre en compte la valeur intrinsèque de ces options et garanties, mais aussi leur valeur temps. Cette valeur temps est notée TVOG (Time Value of Options and Guarantees). Elle est complexe à évaluer car elle requiert une approche stochastique contrairement à la valeur intrinsèque qui est déterminée sur la base d'un scénario déterministe.

Par définition, la valeur intrinsèque représente la valeur des options et garanties de l'*In-Force*[7] à la date d'évaluation, l'In-Force étant projeté selon des hypothèses déterministes. La valeur intrinsèque n'est généralement pas calculée explicitement car elle est incluse dans la valeur de l'*In-Force*. En fonction des conditions des marchés financiers et de la duration des contrats, la valeur intrinsèque peut être nulle. Par exemple, la valeur intrinsèque d'un contrat en dehors de la monnaie est nulle : la valeur comptable du contrat est supérieure à la garantie.

L'objectif de la TVOG est de refléter la valeur de l'incertitude des obligations que la compagnie d'assurance a prise envers les assurés. Par conséquent, elle est la résultante de l'asymétrie de partage des richesses entre l'actionnaire et les assurés. Par exemple, dans un contrat d'épargne Euro, cette asymétrie est générée par les contraintes réglementaires et contractuelles de participation aux bénéfices : alors que les pertes financières sont entièrement à la charge de l'actionnaire, les profits sont partagés en respect de la participation aux bénéfices minimale réglementaire ou selon les clauses contractuelles. En effet, si le rendement des investissements de l'assureur est plus élevé que le montant garanti à l'assuré, ce dernier obtiendra un montant discrétionnaire en plus du montant garanti. Cependant, si le rendement des investissements est insuffisant pour couvrir le montant garanti, la compagnie d'assurance doit couvrir cette perte.

Les normes comptables sociales n'obligent pas les assureurs à valoriser les options et garanties intrinsèques des contrats d'épargne au bilan mais le passage à la nouvelle norme IFRS 4 - phase II va conduire à les évaluer et à les comptabiliser. Elles sont fortement liées à l'évolution des marchés financiers et dépendent de la rentabilité des actifs financiers. Par conséquent, l'évaluation de ces options doit tenir compte de la de la multiplicité des scénarios financiers. Modéliser une option par une méthode déterministe ne permettrait que de mesurer la valeur intrinsèque de celle-ci. Or, il est important de prendre en compte la valeur temps afin que l'estimation prospective des engagements de l'assureur soit la plus réaliste. Par conséquent, les assureurs doivent avoir recours aux techniques d'évaluation stochastique des options financières afin de modéliser la TVOG. Deux approches sont généralement utilisées :

- Méthode reposant sur la théorie d'évaluation des options financières.
- Modèle ALM stochastique permettant d'obtenir une valeur moyenne des engagements sur l'ensemble des scénarios.

Ces deux méthodes vont être mises en place dans les deux parties suivantes.

7. L'In-Force représente le stock de contrats en-cours

## 6.2 Modélisation stochastique de la revalorisation d'un contrat d'épargne Euro

Afin de modéliser la TVOG, la première méthode retenue est basée sur la théorie d'évaluation des options financières. La revalorisation d'un contrat d'épargne Euro est modélisée à l'aide de la formule de Black[8]. Cette revalorisation s'effectue par l'intermédiaire de deux paramètres : le taux minimum garanti et la participation aux bénéfices. Pour cela, une modélisation déterministe est utilisée. Nous allons déterminer la valeur temps de ces deux options et ainsi nous pourrons déterminer la valeur temps de la revalorisation totale du contrat.

### 6.2.1 Formule de Black

Un cap est un swap payeur pour lequel seuls les flux positifs pour l'acheteur du contrat sont échangés. Le payoff du cap s'écrit donc :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i)[L(T_{i-1}, T_i) - K]^+$$

Dans le cas du swap receveur, ce contrat est appelé floor et son payoff s'écrit :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i)[K - L(T_{i-1}, T_i)]^+$$

Le cap permet de protéger son détenteur d'une hausse des taux Libor, et symétriquement le floor protège d'une baisse des taux. Le payoff du cap (resp. floor) est additif. On peut donc le décomposer en flux indépendants à chaque date de paiement $T_i$. Chacun de ces flux est appelé caplet (resp. floorlet). Ainsi, le caplet de nominal N, de strike K, sur le taux $L(T_{i-1}, T_i)$ paie à la date $T_i$ le flux :

$$N\tau_i[L(T_{i-1}, T_i) - K]^+$$

La formule de Black donne le prix d'un caplet, de notionnel X, de strike K et de maturité T, sur le Libor $L(., \theta)$ de maturité $\theta$ :

$$C(t, T, K, \theta) = XP(t, T + \theta)[L(t, T, T + \theta)N(d_1) - KN(d_2)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} ln \left( \frac{L(t, T, T + \theta)}{K} \right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De même, le prix en t d'un floorlet de notionnel X, strike K et de maturité T, sur le Libor $L(., \theta)$ de maturité $\theta$ est :

$$P(t, T, K, \theta) = XP(t, T + \theta)[KN(-d_2) - L(t, T, T + \theta)N(-d_1)]$$

8. [Hel10] HELUIN Alexandre, *Solvency II : Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie*, 2010, Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

### 6.2.2 La revalorisation du taux minimum garanti

Le taux minimum garanti (TMG) est le taux contractuel auquel la provision mathématique (PM) est revalorisée. Ce taux peut être fixé jusqu'à la maturité du contrat, sur une durée fixée, ou varier annuellement. Pour un TMG fixé (noté g), le coût total de cette garantie (notée G) pour l'assureur dépend de l'évolution du rendement des actifs financiers.

On suppose que le rendement des actifs financiers entre la date $T$ et la date $T+1$ est égal au taux forward F(0,T,T+1) (calculé à partir de la courbe des taux sans risque). Ainsi, si le rendement financier en T+1 est inférieur au TMG alors la valeur de l'option doit prendre en compte le fait que l'assureur devra compenser l'insuffisance de rentabilité financière obtenue afin d'honorer sa garantie. En revanche, si ce rendement est supérieur au taux garanti, alors l'assureur n'aura rien à ajouter et le coût de la garantie sera nul. Le coût de la garanti entre T et T+1, noté $G_{T+1}$ est défini par :

$$G_{T+1} = \begin{cases} g & \text{si F(0,T,T+1)<0} \\ F(0,T,T+1) - g & \text{si 0<F(0,T,T+1)<g} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$G_{T+1}$ peut être assimilé à la vente d'un floorlet [9] dont le prix d'exercice est g. Le schéma ci-dessous représente le *payoff* du floorlet :

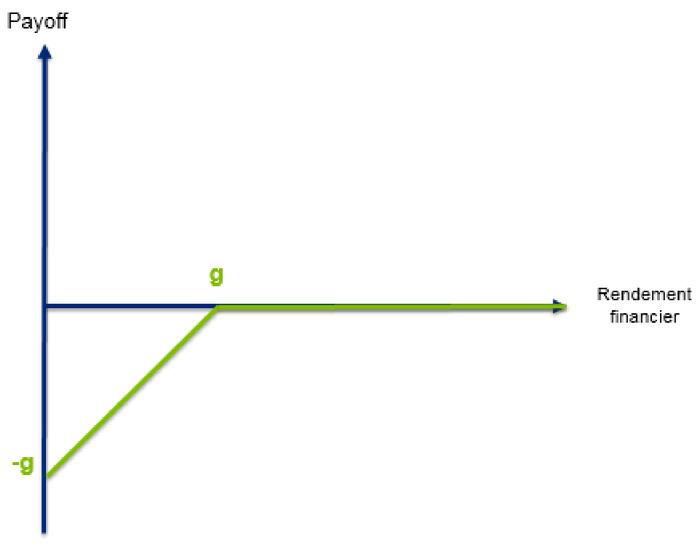



FIGURE 6.2 – Payoff de la vente d'un floorlet

Ainsi, le *payoff* de cette option représente le coût de la garantie entre T et T+1 pour un euro de PM.

9. [Hel10] HELUIN Alexandre, *Solvency II : Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie*, 2010, Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

En appliquant la formule de Black, le coût en 0 de la garantie entre T et T+1 est :

$$G_{T+1} = PM_{T+1}P(0,T+1)[gN(-d_2) - F(0,T,T+1)N(-d_1)]$$

avec :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} ln\left(\frac{F(0,T,T+1)}{g}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où :

— notionnel : $PM_{T+1}$ la provision mathématique projetée entre T et T+1.

— strike : g le TMG.

— maturité : T.

— taux : $F(0,T,T+1) \sim L(0,T,T+1)$.

On en déduit que le coût global de la garantie G est égale à :

$$G = \sum_{T\geq 0} G_{T+1}$$

La valeur temps de la garantie $G_{TVOG}$ est obtenue en soustrayant la valeur intrinsèque égale à $PM_{T+1}(g - F(0,T,T+1))^+$ :

$$G_{TVOG} = \sum_{T\geq 0} \left(G_{T+1} - PM_{T+1}(g - F(0,T,T+1))^+\right)$$

### 6.2.3 La revalorisation de la participation aux bénéfices

La participation aux bénéfices versée aux assurés selon les résultats financiers et techniques doit être prise en compte. Le mécanisme de participation aux bénéfices retenu est le suivant :

$$PB_{T+1} = PM_{T+1} \times max\left(F(0,T,T+1) - g - c, 0\right)$$

avec :

- $PM_{T+1}$ : provision mathématique du contrat à la date T+1.
- $F(0,T,T+1)$ : rendement financier attendu en date T+1, supposé égal au taux forward 1 an.
- g : taux minimum garanti.
- c : chargements sur encours.

Ce mécanisme de participation aux bénéfices peut être reproduit par l'achat d'un bull spread aussi appelé call-spread [10]. Le bull spread est une stratégie d'options très utilisé pour profiter des mouvements neutres ou haussier des taux. Le bull spread a donc les mêmes conséquences que l'achat direct du sous-jacent, sauf qu'il permet de réduire le risque en limitant à la fois les gains et les pertes. Cette stratégie implique de prendre une position simultanément sur au moins deux options dont le type est identique c'est-à-dire deux call ou deux put. Le bull spread peut être :

- créditeur (credit spread) : la prime de l'option vendue est supérieure à la prime de l'option qui est achetée. Ce type de bull spread est construit avec des put.
- débiteur (debit spread) : la prime payée est plus importante que la prime reçue. Le bull spread débiteur est construit à partir de call.

Le call-spread correspond à la combinaison de deux call ayant le même sous-jacent et la même date d'échéance. L'idée est d'acheter le call ayant le strike le plus faible et de vendre le call ayant le strike le plus élevé. La prime achetée est supérieure à la prime vendue (le call acheté a un strike plus bas). Ce spread est donc débiteur, c'est-à-dire qu'il nécessite un investissement initial.

Soient deux call ayant le même sous-jacent et la même date d'exercice. Pour construire le call-spread, on achète le call de strike K1 et vend le call de strike K2 (K2 > K1).

10. [Hel10] HELUIN Alexandre, *Solvency II : Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie*, 2010, Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

Le schéma suivant représente le payoff du call-spread.

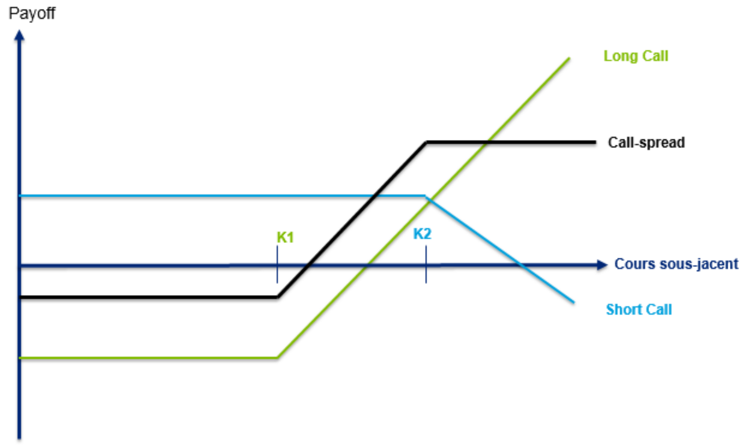



FIGURE 6.3 – Payoff du call-spread

Le payoff du call-spread est :

| $S_T$ | Long call | Short call | call-spread |
|---|---|---|---|
| $S_T \geq K2$ | $S_T - K1$ | $-(S_T - K2)$ | $K2 - K1$ |
| $K1 < S_T < K2$ | $S_T - K1$ | 0 | $S_T - K1$ |
| $S_T \leq K1$ | 0 | 0 | 0 |

Situation 1 : Si le cours du sous-jacent est supérieur à K2, le bénéfice total du spread est maximum. A partir de ce seuil, tout surplus de gain généré par la position longue sur le premier call est compensé par la perte sur la position courte.

Situation 2 : Si le cours du sous-jacent est compris entre les deux strike, le call vendu génère un profit égal à sa prime et le call acheté commence à s'apprécier. Ce dernier devient rentable lorsqu'il dépasse son point mort. Le spread génère une perte au début puis devient bénéficiaire à partir du moment où le gain du call vendu compense la perte du call acheté.

Situation 3 : Si le cours du sous-jacent est inférieur à K1, l'option achetée finira sans valeur et l'option vendue générera un profit correspondant au montant de la prime. La prime payée étant plus importante que la prime reçue, le résultat net de l'opération est négatif.

Le mécanisme de participation aux bénéfices peut être reproduit par un call-spread avec l'achat d'un caplet de prix d'exercice g et la vente d'un second caplet de prix d'exercice $g + c$.

Le prix en 0 du caplet acheté de strike g, de nominal $PM_{T+1}$, de maturité T, sur le taux F(0,T,T+1) est :

$$C1_{T+1} = P(0, T + 1)[F(0, T, T + 1)N(d_1) - gN(d_2)]$$

Le prix en 0 du caplet vendu de strike g+c, de nominal $PM_{T+1}$, de maturité T, sur le taux F(0,T,T+1) est :

$$C2_{T+1} = P(0, T + 1)[(g + c)N(-d_2) - F(0, T, T + 1)N(-d_1)]$$

Ainsi, le call-spread peut être fabriqué. La valeur temps de la participation aux bénéfices est :

$$PB_{TVOG} = C1_{TVOG} - C2_{TVOG}$$

avec :

$$\begin{cases} C1_{TVOG} = \sum_{T\geq 0}\left(C1_{T+1} - PM_{T+1}(F(0,T,T+1) - g)^+\right) \\ C2_{TVOG} = \sum_{T\geq 0}\left(C2_{T+1} - PM_{T+1}((F(0,T,T+1) - (g+c))^+\right) \end{cases}$$

### 6.2.4 La revalorisation totale du contrat d'épargne Euro

Les deux mécanismes de revalorisation (taux minimum garanti et participation aux bénéfices) sont agrégés afin d'obtenir la valeur temps totale de la revalorisation du contrat d'épargne :

$$Revalorisation_{TVOG} = G_{TVOG} + PB_{TVOG}$$

Le *payoff* de la revalorisation totale peut être répliqué par une position longue sur un contrat à terme et la vente d'un *call* de *strike* g+c. En effet, la relation de parité *call/put* permet d'écrire en t=0 :

$$P(S,K,T,\sigma) + S_0 = C(S,K,T,\sigma) + Ke^{rT}$$

Avec :

- P : le prix d'un put.
- $S_t$ : le prix du sous-jacent en date t.
- K : le strike.
- T : la maturité des options.
- $\sigma$ : la volatilité du sous-jacent.
- C : le prix d'un call.
- r : le taux sans risque.

Si la vente d'un *put* de *strike* g est combinée avec l'achat d'un *call* de *strike* g, la relation de parité *call/put* en t donne :

$$C_t(S,g,T,\sigma) - Pt(S,g,T,\sigma) = S_t - g \times e^{r(T-t)}$$

c'est-à-dire le *payoff* à maturité T d'une position longue sur un contrat à terme de prix d'exercice g.

Comme la valeur temps d'un contrat à terme est nulle étant donné que l'on s'engage à un prix d'achat dès la souscription de ce contrat, on ne calcule que la valeur temps de la vente du *call* de *strike* g+c.

### 6.2.5 Résultats obtenus

On considère un contrat d'épargne Euro dont les caractéristiques sont :

— chargements = 0,5.

— prime unique = 10 000.

— projection = 20 ans.

On suppose que le rendement des actifs financiers entre la date $T$ et la date $T+1$ est égal au taux forward F(0,T,T+1). Les différents taux forward sont calculés à partir de la courbe des taux construite dans le chapitre 5. L'actualisation des flux s'effectue à partir de cette même courbe des taux.

Le graphique suivant montre l'évolution de $G_T$ au cours de la projection pour différentes poches de TMG.

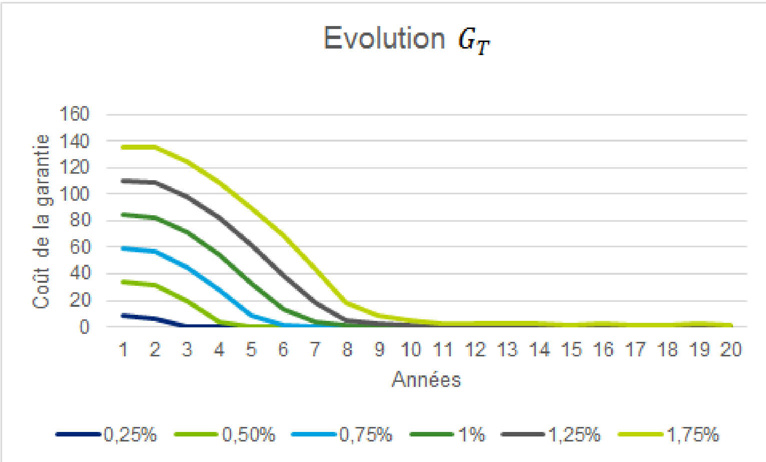



FIGURE 6.4 – Evolution de $G_T$ au cours de la projection

On observe que le coût de la garantie $G_T$ est croissant avec le TMG, ce qui est plutôt cohérent. Dès que le taux de rendement est supérieur au TMG, le montant de la garantie s'annule. Ainsi, pour un TMG égal à 0,25 %, $G_T$ est nul à partir de la troisième année car 0,25% < 0,31% = F(0,3,4). Il en est de même pour les autres TMG.

Le graphique suivant présente les valeurs de G pour différentes valeurs du TMG.

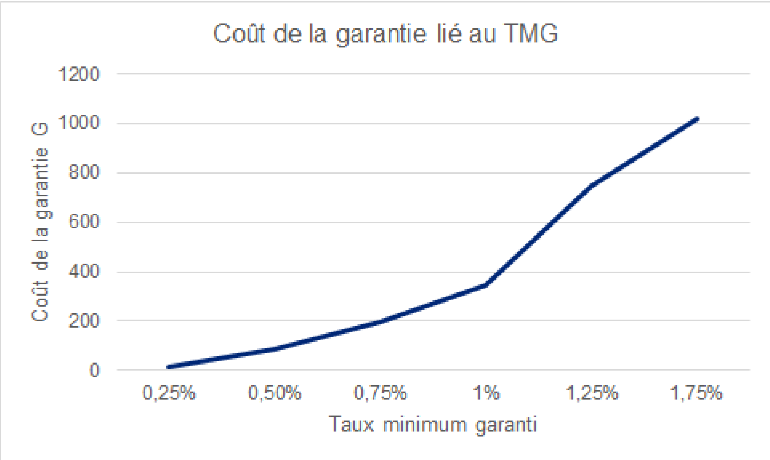



FIGURE 6.5 – Coût de la garantie par poches de taux

On observe que le coût total de la garantie G dû à la revalorisation au taux minimum garanti est croissant. Les taux étant bas, garantir un taux supérieur à 1% est très onéreux.

Le graphique ci-dessous montre le coût total de la garantie lié à la participation aux bénéfices en fonction de différentes poches de TMG.

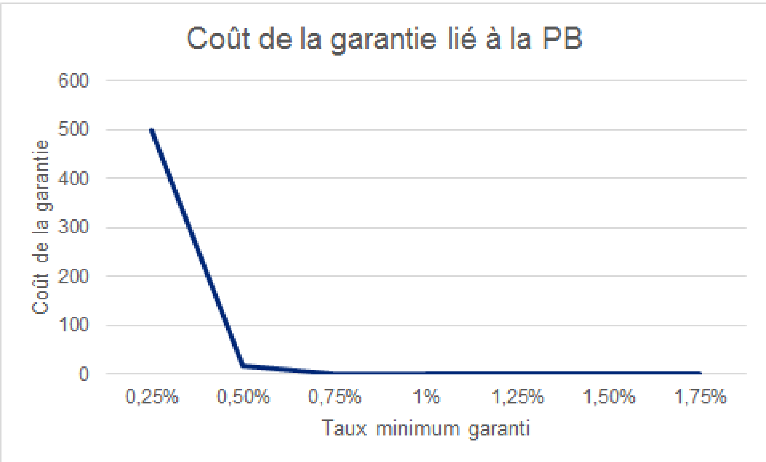



FIGURE 6.6 – Coût de la garantie pour la participation aux bénéfices

Garantir un TMG de 0,25% à l'assuré coûte 500 euros à l'assureur. Nous sommes dans le cas de figure où $F(0, T, T+1) > g - c$. Par conséquent, l'assureur distribue de la la participation aux bénéfices. Les taux étant bas, l'assureur distribuera très peu de participation aux bénéfices si le TMG est égal à 0,50% ou 0,75%. Mais si le TMG est supérieur à 1%, l'assureur ne distribue pas de participation aux bénéfices car $F(0, T, T+1) < g - c$. Dans ce cas, le coût de la garantie liée à la participation aux bénéfices est nul.

Le graphique suivant montre le coût de la revalorisation totale en fonction des différentes poches de taux garanti.

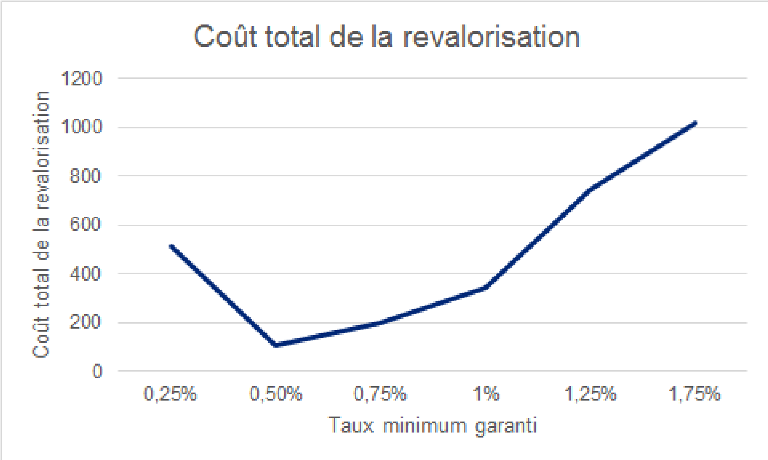



FIGURE 6.7 – Coût total de la revalorisation

Le coût total de la revalorisation est égal à la somme du coût lié au TMG et du coût lié à la participation aux bénéfices. Le coût total de la revalorisation est le plus faible pour un TMG égal à 0,50% et non pas égal à 0,25%. En effet, pour un TMG égal à 0,25%, le coût lié à la participation est le plus élevé ce qui explique que le coût total ne soit pas le plus faible. A partir d'un TMG égal à 0,50%, le coût total de la revalorisation est croissant en fonction du TMG, ce qui est cohérent avec les graphes précédents.

### 6.2.6 Limites

La modélisation des options et garanties à l'aide de la formule de de Black possède de nombreuses limites. Les hypothèses nécessaires à l'évaluation d'options financières ne sont pas toujours vérifiées dans le cas des options intrinsèques d'un contrat d'épargne :

— l'absence d'un marché liquide pour ces options.

— l'absence d'opportunité d'arbitrage du fait de l'existence de contraintes fiscales ainsi que des frais d'arbitrage. Les contrats d'épargne ne peuvent pas être arbitrés facilement et à tout moment. En effet, l'exercice d'une option ne dépend pas uniquement du sous-jacent car l'assuré peut décider de racheter son contrat.

— l'absence de rationalité parfaite des assurés. Le contrat d'assurance est un produit complexe dont la valeur réelle n'est pas connue par l'assuré.

— le modèle repose sur un mouvement brownien géométrique. Ce modèle ne décrit pas parfaitement la réalité.

Par conséquent, l'adéquation entre les options intrinsèques aux contrats d'épargne et les options financières n'est pas parfaite. Les assureurs, souhaitant s'affranchir des formules fermées afin d'évaluer la valeur temps des options et garanties, développent des modèles ALM stochastique. En effet, la génération de scénarios stochastiques afin d'utiliser la méthode de Monte-Carlo, permet d'intégrer la valeur temps de ces garanties dans la projection.

## 6.3 Modélisation stochastique à l'aide du modèle ALM

La valorisation des options et garanties peut être effectuée soit par l'utilisation de formules fermées soit par une modélisation stochastique. La première méthode, basée sur la théorie d'évaluation des options financières, a été présentée dans la section précédente. Pour les contrats en euros français, les formules fermées pour l'évaluation d'options sont complexes à expliciter et ne sont pas utilisés en pratique. Cette complexité provient de la multitude des options sous-jacentes au contrat ainsi que des interactions actifs/passifs. La seconde méthode repose sur la méthode de Monte Carlo basée sur des simulations stochastiques permettant d'obtenir une valeur moyenne des engagements sur l'ensemble des scénarios. Cette méthode est privilégiée par de nombreux assureurs afin de modéliser les produits d'épargne en Euro.

Le modèle ALM développé par le pôle modélisation de Deloitte a permis de déterminé la TVOG pour chaque année de projection du produit Euro modélisé. La TVOG est calculée par différence entre le Best Estimate stochastique et le Best Estimate déterministe (scénario équivalent certain).

### 6.3.1 Définition du Best Estimate

Selon l'exposé-sondage, les passifs d'assurance doivent être évalués selon une moyenne moyenne actualisée, non biaisée et pondérée par les probabilités, de l'ensemble des flux de trésorerie futurs du contrat d'assurance. Ce bloc de passif est appelé Best Estimate (BE). La norme n'indique aucune règle précise relative à la mise en œuvre de ce principe. Par conséquent, la méthodologie retenue pour déterminer le Best Estimate est celle mise en œuvre dans le cadre de Solvabilité II.

Selon la directive Solvabilité II, le Best Estimate est défini comme étant égale à "la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs,compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente". Le Best Estimate correspond donc à la somme actualisée au taux sans risque de tous les flux de trésorerie futurs probables induits par l'ensemble des contrats en *run-off* (à savoir les contrats en cours et pas les affaires nouvelles). Ainsi, tous les flux futurs jusqu'à l'extinction des contrats sont pris en compte. Il n'existe pas de marchés financiers liquides permettant d'évaluer les passifs. Par conséquent, les assureurs doivent utiliser une espérance mathématique qui tient compte de la probabilité d'occurrence de chaque flux futur ainsi que de l'incertitude. Les assureurs calculent donc la somme actualisée des moyennes de leurs engagements futurs, engagements s'obtenant par différence entre les flux sortants et entrants projetés selon des hypothèses bien définies.

P. Artzner et K-T Eisele définissent mathématiquement le Best Estimate dans [AE11]. Il peut être défini de la manière suivante :

$$\text{Best Estimate} = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \prod_{u \leq t} \frac{1}{(1+R(0,u))} \left( FT_t^s - FT_t^e \right) \right]$$

Avec :

- $\mathbb{Q}$ : la probabilité risque-neutre.
- $FT_t$ les cash-flows entrants et sortants à la date de projection t.
- $R(0,u)$ : le taux sans risque *spot* de maturité u.

### 6.3.2 Calcul du Best Estimate

#### 6.3.2.1 Règles préconisées par IFRS 4 - phase II

Afin de calculer le Best Estimate, certaines règles doivent être respectées dans le cadre d'IFRS 4 - phase II :

— la chronique des flux futurs doit être explicite et évaluée séparément du taux d'actualisation ou de l'ajustement au titre du risque.

— l'évaluation doit refléter le point de vue de l'entité d'assurance et l'estimation de variables de marché doit être cohérente avec les prix observables sur le marché.

— l'évaluation doit prendre en compte l'ensemble des informations disponibles à la date d'évaluation.

— les flux de trésorerie ne doivent comprendre que les contrats en stock.

— les primes futures ne sont comprises dans l'évaluation que si l'entité peut contraindre les assurés à payer les primes ou lorsqu'elle a l'obligation substantielle de fournir une couverture ou d'autres services aux assurés. Cette obligation de l'entité cesse dès lors qu'elle a le droit ou la capacité pratique de réévaluer le tarif du contrat. Dans le cas de flux futurs fortement non linéaires avec les changements des conditions économiques, l'évaluation requiert l'utilisation d'une modélisation stochastique.

#### 6.3.2.2 Méthodologie de calcul

En pratique, le Best Estimate est calculé comme la somme des valeurs actualisées des flux futurs de trésorerie générés par le contrat. A la date t de la projection, le Best Estimate se calcule de la manière suivante :

$$BE_t = \sum_{k=t+1}^{T} (-primes_k + prestations_k + frais_k + commissions_k)P(t,k) + (VM_{fin})P(t,T)$$

$VM_{fin}$ correspond à à la valeur de marché résiduelle de l'actif en dernière année de projection. Cette valeur représente la valeur du passif en fin de projection. En effet, après la vingtième année, il reste des assurés dans le portefeuille.

#### 6.3.2.3 Best Estimate déterministe

Le Best Estimate déterministe correspond au Best Estimate calculé sur le scénario central, ce dernier contenant la valeur intrinsèque des options et garanties. Le scénario central correspond aux hypothèses et résultats du scénario de base du business plan notamment les hypothèses stratégiques fixées par l'AMSB et les hypothèses de marché, avant toute simulation de chocs. L'ensemble des flux de trésorerie est actualisé avec la courbe des taux sans risque construite dans le chapitre 5.

#### 6.3.2.4 Best Estimate stochastique

Afin de valoriser les options et les garanties, la norme IFRS 4 -phase II impose l'évaluation du Best Estimate selon une approche stochastique. On considère un contrat d'épargne Euro dont les caractéristiques sont les suivantes :

— provisions mathématique initiales = 100.
— taux minimum garanti (TMG)= 3%.
— rendement financier distribué aux assurés = 100
— maturité du contrat = 1 an.

On suppose de plus que le taux 1 an est égal à 4% et que le GSE fournit deux scénarios équiprobables égaux à 2% et 6%.

Si l'assureur décide d'utiliser un modèle déterministe, le Best Estimate est égal à :

$$\text{BE déterministe} = \frac{104}{1,04} = 100$$

En revanche, si l'assureur décide d'utiliser un modèle stochastique, le Best Estimate est égal à :

$$\text{BE stochastique} = 0,5 \times \frac{106}{1,06} + 0,5 \times \frac{103}{1,02} = 100,5$$

On observe que le Best Estimate stochastique est supérieur au Best Estimate déterministe. L'utilisation d'un modèle stochastique permet donc de prendre en compte le caractère optionnel de l'engagement de l'assureur envers l'assuré.

Le Best Estimate étant défini par l'espérance mathématique des flux de trésorerie futurs actualisés, il faudrait connaître la fonction de densité, ce qui est impossible. Pour pallier à cette insuffisance, la méthode de Monté Carlo et la loi forte des grands nombres sont utilisée. La méthode de Monte-Carlo est définie ci-dessous.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^s$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^f}$ et h : $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ une application mesurable. Le problème consiste à résoudre numériquement l'intégrale :

$$I = \mathbb{E}[h(X)] = \int_{\Omega} h(X) d\mathcal{P}$$

lorsque h(X) est $\mathcal{P}$-intégrable, ie h(X) $\in$L$^1$ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.

La méthode de Monte-Carlo est basée sur le théorème fondamental de la loi forte des grands nombres.

**Théorème : Loi forte des grands nombres**

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables i.i.d. Alors :

$$I_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[Z_1]$$

Un jeu de N=1000 scénarios est utilisé. Pour chacun des scénarios, un montant de Best Estimate est calculé. La méthode de Monte-Carlo est ensuite appliquée ($Z_n$ représente la valeur du Best Estimate du scénario n).

Ainsi, le Best Estimate stochastique est estimé numériquement par la formule suivante :

$$\text{Best Estimate stochastique} \sim \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Z_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} BE_t.$$

### 6.3.3 Calcul de la TVOG

Pour chaque année de projection, la TVOG est calculée par différence entre le Best Estimate stochastique et le Best Estimate déterministe.

#### 6.3.3.1 Méthodologie

L'objectif de cette étude est de définir une méthode optimale de comptabilisation de la TVOG permettant de limiter la volatilité du résultat IFRS. Par conséquent, la TVOG doit être déterminée pour chaque année de projection.

**Calcul de la TVOG en 0**

En t=0, la TVOG est égale à :

$$\text{TVOG (0) = BE stochastique (0) - BE déterministe (0)}$$

**Calcul de la TVOG en t>0**

Si la TVOG est calculée par différence entre le Best Estimate stochastique et le Best Estimate déterministe pour les autres années de projection, il est nécessaire de déterminer pour chaque année la valeur du Best Estimate stochastique. Or, la production de milliers de scénarios stochastiques à chaque pas de temps est difficilement réalisable en pratique.

La méthode la plus satisfaisante est la technique des Simulations dans les Simulations (SdS) reposant sur le principe de simulations imbriquées. La technique des SdS étant complexe à mettre en oeuvre, nous allons nous affranchir de cette technique en utilisant la méthode des *driver*. Utilisée dans le cadre de la directive Solvabilité II, cette méthode consiste à rechercher des indicateurs permettant d'estimer la valeur du SCR dans le temps.

Cette méthode va être appliquée au calcul de la TVOG. Plus précisément, pour déterminer la TVOG pour chaque année de projection, un driver est défini approximant son évolution à travers le temps.

Le driver mis en place est le suivant : pour t >0,

$$\text{TVOG(t)} = \text{TVOG(0)} \times \frac{\text{BE deterministe (t)}}{\text{BE deterministe (0)}}$$

On suppose ainsi que la TVOG possède la même tendance que le Best Estimate déterministe au cours du temps. Pour chaque année de projection, le Best Estimate déterministe est calculé grâce à la projection des différents flux de trésorerie.

La méthode utilisée pour déterminer la TVOG à chaque année de projection est une limite de la modélisation et peut être remise en question. Cependant, l'objectif de ce mémoire n'est pas de réaliser des études d'impacts sur le Best Estimate mais d'étudier la comptabilisation de la TVOG.

# Chapitre 7

# La comptabilisation de la TVOG selon IFRS4 - phase II

## Sommaire

## 7.1 Motivations

La mise en oeuvre des différentes notions définies par l'IASB révèle plusieurs points de difficulté sur les contrats participatifs. En effet, alors que le modèle général proposé par l'IASB pour les contrats non participatifs est à présent quasiment finalisé, reste le sujet crucial de la comptabilisation des contrats participatifs.

Dans l'exposé-sondage de 2013, l'IASB a proposé une méthode de comptabilisation des contrats participatifs. Cette approche "miroir" (*Mirroring Approach*) a été rejetée par l'industrie. Elle consistait à évaluer et comptabiliser les contrats de manière cohérente avec le traitement des placements sous-jacents. Cette méthode prévoyait une décomposition entre les flux attendus qui varient directement avec les rendements des actifs sous-jacents et ceux qui varient indirectement avec ces rendements. La décomposition des flux de trésorerie des contrats participatifs nécessitait une capacité opérationnelle de décomposer les flux de trésorerie.

En Novembre 2014, l'industrie a proposé un modèle à l'IASB sur la comptabilisation des contrats participatifs : le modèle alternatif. Ce modèle comptable a pour objectif de répondre aux grands principes retenus par l'IASB tout en étant cohérent avec la comptabilisation des instruments financiers dans IFRS 9.

Le nouvel environnement IFRS prévoit de nombreuses options d'évaluation et de comptabilisation des actifs et des passifs. Les actuaires sont donc confrontés au choix des méthodes d'évaluation et doivent justifier tout *mismatch* économique ou comptable entre actifs et passifs. Ces différents mismatch impactent fortement la volatilité du résultat IFRS. Cela exige de maîtriser toute source de volatilité du résultat en provenance de l'environnement économique, de la méthodologie ainsi que de l'ensemble des techniques de modélisation. En effet, le résultat IFRS est particulièrement sensible aux modifications d'environnement économique (choc de taux d'intérêt, choc actions). Par exemple, l'écart de duration entre actifs et passifs est un facteur de volatilité du résultat IFRS. Les flux de versement au passif sont généralement plus tardifs que les flux générés par le portefeuille d'actifs qui subit le choc de taux d'intérêt. Une partie importante des variations du Best Estimate sont expliquées par l'effet d'actualisation. Les flux de passifs étant plus éloignés que les flux d'actifs, les variations d'actifs et de passifs sont différentes. Cet écart impacte le compte de résultat dès lors que ces variations bilancielles sont comptabilisées en résultat. Ainsi, une adéquation actif/passif la plus optimale est essentielle. Cependant, compte tenu de la durée des passifs pour les contrats participatifs, cette adéquation est difficilement réalisable car il existe peu d'actifs financiers possédant une duration longue et il est nécessaire d'assurer une certaine diversification à l'actif.

Un autre facteur pouvant influer sur la volatilité du résultat IFRS est les options et garanties des contrats. Les modifications de l'environnement économique font varier les prestations associées à ces options et garanties. En particulier, l'accélération (le ralentissement) des rachats lors d'une hausse (baisse) des taux d'intérêt modifie fortement le rythme de versement des prestations et donc le montant de la TVOG. Les flux du portefeuille d'actifs restent quant à eux inchangés, générant un écart actif/passif. Par conséquent, la valorisation des options et garanties génèrent une volatilité importante de la TVOG et donc du résultat IFRS.

Ainsi, ce mémoire a pour but de définir, pour un contrat d'épargne Euro, une méthode optimale de comptabilisation de la TVOG permettant de limiter la volatilité du résultat IFRS de l'assureur.

Tout d'abord, le bilan et le compte de résultat IFRS d'un assureur sont présentés. La comptabilisation des contrats participatifs reposant en partie sur l'amortissement de la CSM, trois méthodes d'amortissement sont définies. Les deux méthodes de comptabilisation de la TVOG proposées dans le cadre ce mémoire sont inspirées du modèle alternatif. Ainsi, les principes du modèle alternatif puis les deux méthodes de comptabilisation de la TVOG sont définies et mises en oeuvre.

## 7.2 Bilan et Compte de Résultat IFRS d'un assureur

La norme IFRS 4 concerne les engagements techniques d'une compagnie d'assurance. Cependant, le bilan et le compte de résultat sont régis par l'ensemble des normes IFRS. Pour des raisons de simplification, la présentation du bilan et du compte de résultat de l'assureur se limitera aux normes IFRS 9 (Instruments financiers) et IFRS 4 - phase II.

### 7.2.1 La comptabilisation des Instruments financiers

Les principaux éléments de la norme IFRS 9 sont présentés dans le cadre de ce mémoire. Pour une définition complète de la comptabilisation des Instruments financiers, nous renvoyons le lecteur vers [Bre12]. La dépréciation des titres obligataires et la comptabilité de couverture ne sont pas présentées dans ce mémoire.

La future norme IFRS 9, Instruments financiers, entrera en vigueur en 2018. Cette norme a pour objectif de simplifier la norme actuelle, IAS 39, afin de :

- simplifier le classement des instruments financiers.
- réviser les règles de dépréciation.
- simplifier les règles de comptabilité de couverture (*hedge accounting*).

La norme IFRS 9 prévoit la comptabilisation des actifs financiers au coût amorti ou à la juste valeur en fonction de la nature des instruments. Les catégories Trading, Available For Sale (AFS), Held To Maturity (HTM) et Prêts et créances sont supprimées.

#### 7.2.1.1 Instruments de dette : comptabilisation au coût amorti

Les instruments de dette sont comptabilisés au coût amorti si ces instruments présentent des caractéristiques d'instrument de dette basique et sont acquis pour les intérêts qu'ils génèrent et non les plus-values qui pourraient être réalisées par leur cession. Il ne s'agit pas d'une option : tout instrument qui répond à ces deux conditions doit être classé au coût amorti.

Un instrument de dette classique correspond à un contrat donnant lieu à des dates prédéterminées à des paiements de principal et d'intérêts. La norme IFRS 9 cite comme éléments de dette classique :

- une obligation zéro-coupon
- un rendement fixe sur la durée de vie de l'instrument
- un rendement variable basé sur un seul taux variable (Euribor, Libor)
- une formule de taux : taux fixe + taux variable (Euribor, Libor)
- un rendement avec un cap ou un floor (sans effet de levier)
- une clause de remboursement anticipé pour un montant égal au capital et intérêts restant dû
- titres subordonnés dès lors que le détenteur conserve un droit contractuel au montant de principal et d'intérêts non encore versés.

Les instruments qui ne répondent pas à la définition de dette basique sont par exemple :

— une obligation convertible en action
— une obligation dont le coupon est indexé sur une maturité plus longue que la maturité résiduelle du titre
— un titre perpétuel pour lequel l'émetteur a la possibilité de suspendre les intérêts

#### 7.2.1.2 Actions : option de comptabilisation à la juste valeur par capitaux propres

La norme IFRS 9 permet à une société de comptabiliser les actions à la juste valeur par capitaux propres (JVOCI). Les actions sont évaluées en valeurs de marché, les dividendes sont calculés au coût amorti puis comptabilisés en résultat. Les variations de juste valeur latentes et réalisées sont reconnues directement dans les capitaux propres (en OCI) et ne sont pas comptabilisés en résultat.

#### 7.2.1.3 Comptabilisation en juste valeur par résultat

Tout instrument non comptabilisé au coût amorti ou en juste valeur par capitaux propres est comptabilisé à la juste valeur par résultat (JVPL). Il s'agit :

— des instruments financiers détenus dans une optique de cession à court terme
— des instruments de dettes qui comportent des dérivés incorporés
— des actions
— des instruments dérivés (comme les swaps de taux, les contrats forward, les options)

IFRS 9 prévoit, par ailleurs, la comptabilisation sur option d'un instrument à la juste valeur par résultat pour éviter un *mismatch* comptable entre un actif et un passif. Cela concerne en particulier les titres obligataires qui répondraient aux conditions de classification au coût amorti et qui seraient en représentation d'un passif qui dépend des conditions de marché des actifs (par exemple : contrats en unité de compte).

Le classement à la juste valeur par résultat est irrévocable : un instrument ne peut être reclassé au coût amorti ou à la juste valeur par capitaux propre suite à un classement initial à la juste valeur par résultat. Ce principe est particulièrement structurant pour l'assureur : il lui impose dès l'acquisition d'un actif d'anticiper les conséquences du mode de comptabilisation qui lui aura été attribué.

### 7.2.2 Le Bilan IFRS d'un assureur

Le schéma ci-dessous présente le bilan IFRS d'un assureur selon les normes IFRS 4 - phase II et IFRS 9 :


FIGURE 7.1 – Bilan selon IFRS 9 et IFRS 4 - phase II

Le formalisme ci-dessous est adopté pour présenter le bilan IFRS. L'actif est évalué en valeur de marché et non pas selon la norme IFRS 9.

| En k€ | Année |
|---|---|
| **Bilan IFRS** | Obligations |
| | Actions et Immobilier |
| | Autres |
| | Trésorerie et assimilés |
| | Coupons courus |
| | **Total Actifs** |
| | Résultats cumulés IFRS |
| | Dividendes distribués |
| | Autres réserves |
| | Total OCI |
| | Fonds propres |
| | Marge de service contractuelle |
| | Marge pour risque |
| | Best estimate |
| | dont Best estimate déterministe |
| | dont TVOG |
| | **Total Passifs** |

FIGURE 7.2 – Formalisme retenu pour le bilan IFRS

### 7.2.3 Compte de résultat IFRS 4 - phase II

Contrairement aux autres référentiels tels que Solvabilité II et la MCEV [1], la norme IFRS 4 - phase II requiert la présentation d'un compte de résultat. Cette exigence donne à la norme IFRS 4 une dimension supplémentaire. En effet, présenter une situation de solvabilité ou de profitabilité à une année donnée est une information importante. Mais diffuser un compte de résultat prenant en compte l'ensemble des évolutions prospectives nécessite de la part des compagnies d'assurance une maîtrise totale de la volatilité induite par ses placements, ses engagements provenant de la volatilité des marchés financiers et du comportement des assurés. Le compte de résultat IFRS 4 - phase II présente des spécificités telles que la notion de charge de désactualisation du passif et l'amortissement de la CSM ce qui le différencie fortement d'un compte de résultat standard.

Le schéma ci-dessous présente le formalisme adopté pour présenter le compte de résultat selon la norme IFRS 4 - phase II.

| Etat IFRS | Composants | Commentaires |
|---|---|---|
| Résultat IFRS | Relâchement de la CSM | {a} |
| | Ajustement de la CSM | {b} |
| | Marge de la souscription issue de la CSM | A = {a} + {b} |
| | Relâchement de la marge pour risque | {c} |
| | Ajustement de la marge pour risque | {d} |
| | Relâchement de la TVOG | {e} |
| | Ajustement de la TVOG | {f} |
| | Marge de souscription issue de la marge pour risque et TVOG | B = {c} + {d} + {e} + {f} |
| | Relâchement du BEL déterministe | {g} |
| | Flux réels | {h} |
| | Ecarts d'expériences | C = {g} + {h} |
| | Ajustement du BEL déterministe | {i} |
| | Marge de souscription totale | D = A +B + C + {i} |
| | Revenus financiers | {j} |
| | Charge de désactualisation | {k} |
| | Marge financière | E = {j} + {k} |
| | Résultats IFRS | F = D + E |
| Variation OCI | Variation réserve OCI Actifs | {l} |
| | Variation réserve OCI Passifs | {m} |
| TCI | Total Comprehensive Income | G = F + {l} + {m} |

FIGURE 7.3 – Compte de résultat IFRS 4 - phase II

**(a) Relâchement de la CSM**

Le relâchement de la CSM correspond à la partie amortie de la CSM sur la base du service rendu entre deux clôtures.

**(b) Ajustement de la CSM**

L'ajustement de la CSM correspond à une dotation ou à une reprise de la CSM due à une modification des profits attendus du contrat ou groupe de contrats.

**(A) Marge de souscription issue de la CSM**

La marge de souscription issue de la CSM reflète le profit attendu du contrat ou groupe de contrats issu du relâchement et de l'ajustement de la CSM. Le résultat de cette marge peut, en fonction des modalités de calcul de la CSM, représenter un résultat brut ou net de la TVOG et de la marge pour risque.

1. Les deux référentiels actuels présentent des reporting du type Variation Analysis en Solvabilité II ou Analyse de passage en MCEV mais ces reportings restent relativement peu standardisés et exploités

**(c) Relâchement de la marge pour risque & (d) Ajustement de la marge pour risque**
La marge pour risque est recalculée chaque année afin de prendre en compte la modification du risque porté par le contrat ou le groupe de contrats. Il existe une distinction comptable entre la désactualisation de la marge pour risque **(k)** et la variation hors désactualisation de la marge pour risque. Cette variation se décompose en relâchement et ajustement de la marge pour risque.

Le relâchement de la marge pour risque **(c)** correspond à la variation anticipée de la marge pour risque comme si aucune modification dans la structure de risque ne s'est produite.

L'ajustement de la marge pour risque **(d)** correspond à une dotation ou à une reprise de la marge pour risque due à une modification des profits attendus du contrat ou groupe de contrats. Il est possible de ne pas faire la distinction comptable entre ces deux composantes. Elles peuvent donc être traitées ensemble sous l'intitulé variation de la marge pour risque. La désactualisation reste quant à elle traitée à part dans le résultat financier **(k)**. Enfin, ces deux composantes peuvent être traitées comptablement en OCI et ne seront par conséquent pas affichées au niveau du compte de résultat.

**(e) Relâchement de la TVOG & (f) Ajustement de la TVOG**
La TVOG correspond à l'écart à chaque clôture entre le Best Estimate stochatsique et le Best estimate déterministe.

La différence de la TVOG entre deux clôtures peut être décomposée en désactualisation de la TVOG **(k)** et variation hors désactualisation de la TVOG. De même, la variation hors désactualisation peut être séparée en relâchement et ajustement de la TVOG.

Le relâchement de la TVOG **(e)** correspond à la variation anticipée de la TVOG selon les hypothèses économiques et non économiques anticipées. L'ajustement de la TVOG **(f)** correspond à l'écart entre la TVOG attendue à la clôture et celle qui est finalement calculée.

Il est possible de traiter en un seul bloc le relâchement et l'ajustement mais tout en maintenant la désactualisation dans le résultat financier **(k)**. Enfin, ces deux composantes peuvent être traitées comptablement en OCI et ne seront par conséquent pas affichées au niveau du compte de résultat.

**(B) Marge de souscription issue de la marge pour risque et TVOG**
La marge de souscription issue de la marge pour risque et de la TVOG correspond aux provisions au titre de la marge pour risque et de la TVOG. Si les risques correspondant à ces provisions ne se réalisent pas alors celles-ci correspondront à des profits. Sinon, les relâchements permettront de compenser les écarts d'expérience ou les ajustements de Best Estimate.

La variation du Best Estimate déterministe d'une clôture à l'autre se décompose en :

— Relâchement du Best Estimate déterministe **(g)**
— Ajustement du Best Estimate déterministe **(i)**
— Désactualisation **(k)**

**(g) Relâchement du Best Estimate déterministe**
Le relâchement du Best Estimate déterministe **(g)** correspond à la variation anticipée du Best Estimate déterministe comme si aucune modification dans la structure des flux ne s'est produite.

**(h) Flux réels**
Les flux réels correspondent aux prestations, frais, primes réellement perçus sur la période. Il s'agit de flux techniques et non pas de flux de trésorerie. La différence entre les flux techniques et les flux de trésorerie est gérée grâce aux comptes de dettes et créances (non présentés).

**(C) Écarts d'expérience**
Les écarts d'expérience correspondent à la différence entre les flux prévus (provisionnés) issus du relâchement du Best Estimate déterministe et les flux réels constatés à la fin de la période.

**(i) Ajustement du Best Estimate déterministe**
L'ajustement du Best Estimate déterministe correspond à l'écart entre le Best Estimate déterministe de fin de période tel que prévu et le Best Estimate déterministe recalculé de fin de période. Cet ajustement tient compte de l'ensemble des changements d'hypothèses économiques et non économiques ainsi que des écarts de projections de flux.

**(D) Marge de souscription totale**
La marge de souscription totale correspond aux profits liés au contrat ou groupe de contrats tels que prévus à la souscription ainsi que les ajustements liés aux écarts d'estimation et d'expérience. Il est très important d'insister sur la notion de résultat de souscription car il est différent du résultat technique en normes locales. Le résultat de souscription contient l'ensemble des profits attendus d'un contrat ou groupe de contrats y compris le résultat financier. De plus, le résultat de souscription dépend de la méthode d'amortissement de la CSM alors que le résultat en normes locales est basé sur le constaté d'une année comptable et ne prend pas en compte les profits futurs.

La CSM calculée initialement contient l'ensemble des profits attendus du contrat (profits techniques et financiers). Par conséquent, le relâchement de la CSM concerne les composantes technique et financière. Ainsi, il est cohérent que la marge de souscription porte sur la dimension technique et financière.

**(j) Revenus financiers**
Les revenus financiers correspondent aux produits des placements comptabilisés selon la norme IFRS 9.

**(k) Charge de désactualisation**
La notion de charge de désactualisation correspond au coût du passage du temps des passifs d'assurance. La charge de désactualisation porte sur le Best Estimate déterministe, la TVOG, la marge pour risque et la CSM. Cette charge est calculée sur la base du taux d'actualisation utilisé pour mesurer les passifs. Il est important d'éviter toute incohérence comptable entre la comptabilisation des actifs et leurs revenus d'une part et les passifs et leur charge de désactualisation d'autre part.

**(E) Marge financière**
La marge financière correspond à l'écart entre les revenus financiers et la charge de désactualisation. Cette marge ne correspond pas au résultat financier (normes locales) car même si les

produits financiers ont toujours la même signification, la charge de désactualisation ne correspond pas aux produits financiers distribués.

**(F) Résultat IFRS**
Le résultat IFRS correspond à la somme de la marge de souscription totale et de la marge financière. Il s'agit d'un résultat brut d'impôts, les impôts étant traités selon la norme IAS 12.

**(l) Variation réserve OCI Actifs**
La variation réserve OCI Actifs correspond à la différence entre la réserve OCI en provenance des actifs calculée à deux clôtures successives. Une augmentation de plus-value latente d'un actif conduit à une variation positive.

**(m) Variation réserve OCI Passifs**
La variation réserve OCI Passifs correspond à la différence entre la réserve OCI en provenance des passifs calculée entre deux clôtures successives. Une augmentation de plus-value latente d'un passif (ex. différence entre Best Estimate déterministe calculé avec deux taux d'actualisation différents) conduit à une variation négative.

**(G) Total Comprehensive Income (TCI)**
Le TCI correspond à la somme entre le résultat IFRS et les variations OCI. En cas d'absence d'OCI, le TCI est égal au résultat IFRS.

## 7.3 Méthodes d'amortissement de la CSM

La comptabilisation des contrats participatifs repose en partie sur le mécanisme d'amortissement de la CSM. Les différentes méthodes d'amortissement de la CSM sont définies à l'aide d'un exemple. Pour cela, nous considérons un contrat d'épargne Euro à prime unique dont les caractéristiques sont les suivantes :

— prime unique = 1000.
— chargements d'acquisition = 4%.
— frais d'acquisition = négligeables.
— frais de gestion : négligeables.
— prestations = 320 par an.
— durée du contrat = 3 ans.

L'actif est évalué en valeur marché et le passif selon la norme IFRS 4 - phase II. Le résultat IFRS au compte de résultat est brut d'impôt. Par souci de simplicité, nous considérerons que la marge pour risque ainsi que les taux sont nuls.

Les différents flux de trésorerie pour chaque année sont résumés dans le tableau ci-dessous :

| **Flux trésorerie** | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **Flux entrants** | | | | |
| - Prime commerciale | 1000 | | | |
| - Dont chargements d'acquisition | 40 | | | |
| **Flux sortants** | | | | |
| - Prestations | | 320 | 320 | 320 |
| **Best Estimate déterministe** | 970 | 640 | 320 | 0 |

La CSM initiale est calculée par différence (1000-970 = 30) et présente les gains escomptés du contrat. Le gain réalisé par l'assureur provient du chargement d'acquisition.

### 7.3.1 Amortissement de la CSM selon les profits futurs

La première méthode d'amortissement consiste à considérer que la CSM correspond à la somme des profits futurs, notée PVFP (Present Value of Future Profits) en référence à la terminologie utilisée dans le cadre de la MCEV. Dans le référentiel MCEV, la PVFP correspond à la valeur actuelle des profits futurs industriels, net d'impôts, généré par le portefeuille de contrats. La CSM de clôture de chaque année est calculée de manière prospective. Ainsi :

$$CSM_t = PVFP_t$$

avec :

$$PVFP_t = \sum_{k>0} P(t, t+k) \times \text{ résultat } (t, t+k)$$

où résultat (t,t+k) correspond au résultat annuel tel qu'il est estimé pour l'année t+k vu de l'année t selon les normes sociales French GAAP.

Dans l'exemple, les taux étant nuls, nous avons :

$$CSM_t = \sum_{k>0} \text{ résultat } (t, t+k)$$

En fin d'année 1, l'assureur a déjà réalisé l'ensemble de ses profits. Par conséquent, les profits futurs ultérieurs à l'année 1 sont nuls. Ainsi, dans cette configuration, la CSM d'ouverture est intégralement amortie en résultat dès la première année. Le tableau ci-dessous présente le profil d'amortissement de la CSM :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **Profits futurs** | | 0 | 0 | 0 |
| **CSM** | 30 | | | |
| **Relâchement CSM** | | 30 | 0 | 0 |

Le bilan et le compte de résultat sont présentés pour chaque année de projection.

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Bilan IFRS** | Obligations | | | | |
| | Actions et Immobilier | | | | |
| | Autres | | | | |
| | Trésorerie et assimilés | 1000 | 670 | 350 | 30 |
| | Coupons courus | | | | |
| | **Total Actifs** | **1000** | **670** | **350** | **30** |
| | Résultats cumulés IFRS | | 30 | 30 | 30 |
| | Dividendes distribués | | | | |
| | Autres réserves | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Total OCI | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fonds propres | 0 | 30 | 30 | 30 |
| | Marge de service contractuelle | 30 | 0 | 0 | 0 |
| | Marge pour risque | | | | |
| | Best estimate | 970 | 640 | 320 | 0 |
| | dont Best estimate déterministe | 970 | 640 | 320 | 0 |
| | dont TVOG | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | **Total Passifs** | **1000** | **670** | **350** | **30** |

FIGURE 7.4 – Bilan IFRS

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Résultat IFRS** | Relâchement de la CSM | | 30 | 0 | 0 |
| | Ajustement de la CSM | | | | |
| | Marge de souscription issue de la CSM | | 30 | 0 | 0 |
| | Relâchement de la marge pour risque | | | | |
| | Ajustement de la marge pour risque | | | | |
| | Relâchement des TVOG | | | | |
| | Ajustement des TVOG | | | | |
| | Relâchement Marge pour Risque et TVOG | | 0 | 0 | 0 |
| | Relâchement du BEL déterministe | | 330 | 320 | 320 |
| | Prestations réelles | | -330 | -320 | -320 |
| | Ecarts d'expériences | | 0 | 0 | 0 |
| | Ajustement du BEL | | | | |
| | **Marge de souscription totale** | | **30** | **0** | **0** |
| | Revenus financiers | | 0 | 0 | 0 |
| | Charge de désactualisation | | 0 | 0 | 0 |
| | **Marge financière** | | **0** | **0** | **0** |
| | **Résultat IFRS** | | **30** | **0** | **0** |
| ***Variation OCI*** | Variation réserve OCI Actif | | 0 | 0 | 0 |
| | Variation réserve OCI Passif | | 0 | 0 | 0 |
| ***TCI*** | **Total Comprehensive Income** | | **30** | **0** | **0** |

FIGURE 7.5 – Compte de résultat IFRS

Le graphique ci-dessous présente le profil de la CSM et du résultat IFRS en appliquant cette méthode :

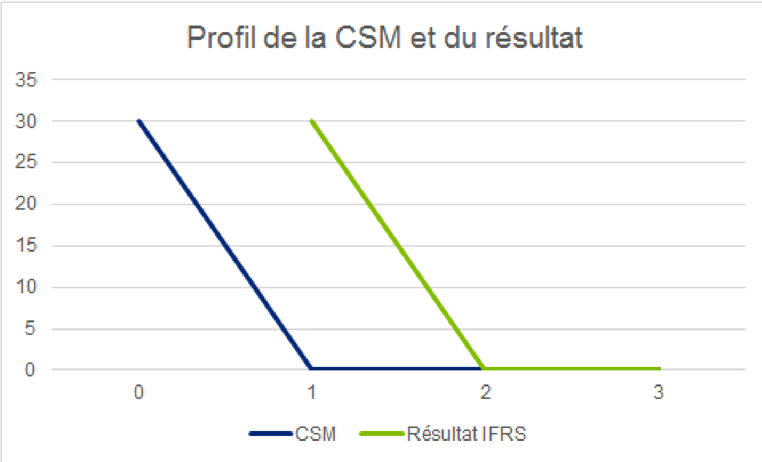



FIGURE 7.6 – Profil de la CSM et du résultat IFRS

Cette méthode n'est pas compatible avec une approche d'amortissement basée sur le service rendu. En effet, même si le contrat continue de vivre pendant trois années (un service est donc rendu pendant ces trois années), la totalité des profits a été reconnu en résultat dès la première année (voir figure 7.6). Par conséquent, cette méthode ne peut être compatible avec l'esprit d'IFRS 4 qui exige un amortissement basé sur le service rendu. La CSM peut être calculée de manière prospective à l'ouverture et peut prendre en compte les changements dans la profitabilité future mais ne peut pas être calculée de manière complètement prospective pour les clôtures ultérieures.

Il convient donc de bien distinguer la CSM en IFRS 4 de la PVFP dans le cadre de la MCEV car elles présentent une différence fondamentale de concept. La CSM est amortie alors que la PVFP est calculée de manière complètement prospective. Le passage vers la nouvelle norme IFRS 4 - phase II va requérir de prendre en compte un suivi de l'amortissement de la CSM non existant dans les référentiels actuels Solvabilité 2 et MCEV.

La norme IFRS 4 - phase II requiert un amortissement de la CSM selon le service rendu mais ne précise pas cette notion de service. Dans le cadre de ce mémoire, nous considérons deux visions du service rendu par l'assureur : le versement des prestations (méthode 2) et la gestion des encours (méthode 3). En pratique, la méthode d'amortissement retenue dépendra des produits :

— pour les produits purement assurantiels, la CSM sera amortie selon les prestations.

— pour les produits d'assurance avec une forte composante gestion d'actifs, la CSM sera amortie selon l'encours géré.

### 7.3.2 Amortissement de la CSM selon les prestations

Dans cette méthode, la CSM est amortie selon les prestations payées à l'assuré. La formule de calcul est assez simple étant donné que les prestations sont égales pendant les trois années. La formule de calcul de la CSM à chaque clôture est :

$$\text{CSM } (0) = \text{CSM ouverture}$$

$$CSM(n+1) = CSM(n) \times \frac{\sum\limits_{k=n+2} \text{prestations(k)}}{\sum\limits_{k=n+1} \text{prestations(k)}}$$

Le profil d'amortissement de la CSM est présenté dans le tableau ci-dessous :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **CSM** | 30 | 20 | 10 | 0 |
| **Relâchement CSM** | | 10 | 10 | 10 |

Le bilan et le compte de résultat sont présentés pour chaque année de projection :

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bilan IFRS | Obligations | | | | |
| | Actions et Immobilier | | | | |
| | Autres | | | | |
| | Trésorerie et assimilés | 1000 | 670 | 350 | 30 |
| | Coupons courus | | | | |
| | Total Actifs | 1000 | 670 | 350 | 30 |
| | Résultats cumulés IFRS | | 10 | 20 | 30 |
| | Dividendes distribués | | | | |
| | Autres réserves | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Total OCI | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fonds propres | 0 | 10 | 20 | 30 |
| | Marge de service contractuelle | 30 | 20 | 10 | 0 |
| | Marge pour risque | | | | |
| | Best estimate | 970 | 640 | 320 | 0 |
| | dont Best estimate déterministe | 970 | 640 | 320 | 0 |
| | dont TVOG | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Total Passifs | 1000 | 670 | 350 | 30 |

FIGURE 7.7 – Bilan IFRS

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Résultat IFRS** | Relâchement de la CSM | | 10 | 10 | 10 |
| | Ajustement de la CSM | | | | |
| | Marge de souscription issue de la CSM | | 10 | 10 | 10 |
| | Relâchement de la marge pour risque | | | | |
| | Ajustement de la marge pour risque | | | | |
| | Relâchement des TVOG | | | | |
| | Ajustement des TVOG | | | | |
| | Relâchement Marge pour Risque et TVOG | | 0 | 0 | 0 |
| | Relâchement du BEL déterministe | | 330 | 320 | 320 |
| | Prestations réelles | | -330 | -320 | -320 |
| | Ecarts d'expériences | | 0 | 0 | 0 |
| | Ajustement du BEL | | | | |
| | **Marge de souscription totale** | | 10 | 10 | 10 |
| | Revenus financiers | | 0 | 0 | 0 |
| | Charge de désactualisation | | 0 | 0 | 0 |
| | **Marge financière** | | 0 | 0 | 0 |
| | **Résultat IFRS** | | 10 | 10 | 10 |
| | | | | | |
| ***Variation OCI*** | Variation réserve OCI Actif | | 0 | 0 | 0 |
| | Variation réserve OCI Passif | | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | |
| ***TCI*** | **Total Comprehensive Income** | | 10 | 10 | 10 |

FIGURE 7.8 – Compte de résultat IFRS

Le graphique ci-dessous présente le profil de la CSM et du compte de résultat en appliquant cette deuxième méthode.

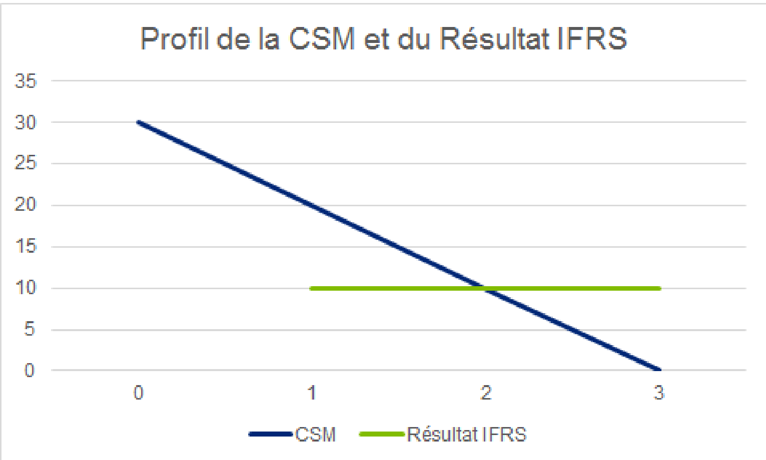



FIGURE 7.9 – Profil de la CSM et du résultat IFRS

Avec cette approche, le profil de libération de la CSM dépend du profil de sortie des flux de trésorerie. L'amortissement de la CSM selon le profil des prestations conduit à un relâchement plus important de la CSM lors des années présentant les sorties les plus élevées. On observe que la CSM de fin des deux premieres années ne reflète pas les profits futurs qui sont nuls au-delà de la souscription.

La norme requière un amortissement de la CSM selon le service rendu mais ne précise pas cette notion de service ni sa déclinaison aux différents contrats d'assurance. Ainsi, le service dans le cadre d'un contrat d'assurance vie et notamment d'un contrat d'épargne avec participation aux bénéfices discrétionnaire reste à définir. Dans le cadre de ce mémoire, nous considérons deux visions du service rendu par l'assureur : le versement des prestations et la gestion des encours. La méthode d'amortissement qui pourra être retenue en pratique dépendra des produits avec à priori une dominante pour les produits purement assurantiels et une dominante gestion de l'encours pour les produits d'assurance avec une forte composante gestion d'actifs.

### 7.3.3 Amortissement de la CSM selon l'encours géré

La CSM est amortie selon l'encours moyen géré par l'assureur. Nous supposons que, pour chaque année de projection, l'encours est égal au Best Estimate déterministe. Les formules ci-dessous présentent la récurrence retenue pour le calcul annuel de la CSM :

$$\text{CSM(0)=CSM ouverture}$$

La formule de calcul de la CSM à chaque clôture est dans ce cas-là :

$$CSM(n+1) = CSM(n) \times \frac{\sum\limits_{k=n+2} \text{encours moyen(k)}}{\sum\limits_{k=n+1} \text{encours moyen(k)}}$$

$$CSM(n+1) = CSM(n) \times \frac{\sum\limits_{k=n+2} \frac{(PM_k + PM_{k+1})}{2}}{\sum\limits_{k=n+1} \frac{(PM_k + PM_{k+1})}{2}}$$

Le choix de l'amortissement selon l'encours moyen est basé sur le principe du service rendu, à savoir la gestion au cours d'une année non pas de l'encours initial ou de l'encours final mais la moyenne de cet encours. Par conséquent, le profil de libération de la CSM dépend du profil de diminution de l'encours. Étant donné que l'encours géré est plus important les premières années que les dernières années de la projection, le relâchement de la CSM sera plus important au début qu'à la fin du contrat. Le tableau ci-dessous présente le profil d'amortissement de la CSM :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **En cours moyen** | 970 | 805 | 480 | 160 |
| **CSM** | 30 | 13 | 3 | 0 |
| **Relâchement CSM** | | 17 | 10 | 3 |

Le bilan et le compte de résultat sont présentés pour chaque année de projection.

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Bilan IFRS** | Obligations | | | | |
| | Actions et Immobilier | | | | |
| | Autres | | | | |
| | Trésorerie et assimilés | 1000 | 670 | 350 | 30 |
| | Coupons courus | | | | |
| | **Total Actifs** | 1000 | 670 | 350 | 30 |
| | Résultats cumulés IFRS | | 17 | 27 | 30 |
| | Dividendes distribués | | | | |
| | Autres réserves | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Total OCI | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fonds propres | 0 | 17 | 27 | 30 |
| | Marge de service contractuelle | 30 | 13 | 3 | 0 |
| | Marge pour risque | | | | |
| | Best estimate | 970 | 640 | 320 | 0 |
| | dont Best estimate déterministe | 970 | 640 | 320 | 0 |
| | dont TVOG | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | **Total Passifs** | 1000 | 670 | 350 | 30 |

Figure 7.10 – Bilan IFRS

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Résultat IFRS** | Relâchement de la CSM | | 17 | 10 | 3 |
| | Ajustement de la CSM | | | | |
| | Marge de souscription issue de la CSM | | 17 | 10 | 3 |
| | Relâchement de la marge pour risque | | | | |
| | Ajustement de la marge pour risque | | | | |
| | Relâchement des TVOG | | | | |
| | Ajustement des TVOG | | | | |
| | Relâchement Marge pour Risque et TVOG | | 0 | 0 | 0 |
| | Relâchement du BEL déterministe | | 330 | 320 | 320 |
| | Prestations réelles | | -330 | -320 | -320 |
| | Ecarts d'expériences | | 0 | 0 | 0 |
| | Ajustement du BEL | | | | |
| | **Marge de souscription totale** | | 17 | 10 | 3 |
| | Revenus financiers | | 0 | 0 | 0 |
| | Charge de désactualisation | | 0 | 0 | 0 |
| | **Marge financière** | | 0 | 0 | 0 |
| | **Résultat IFRS** | | 17 | 10 | 3 |
| | | | | | |
| ***Variation OCI*** | Variation réserve OCI Actif | | 0 | 0 | 0 |
| | Variation réserve OCI Passif | | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | |
| ***TCI*** | **Total Comprehensive Income** | | 17 | 10 | 3 |

Figure 7.11 – Compte de résultat IFRS

Le graphique ci-dessous présente le profil de la CSM et du résulat IFRS en appliquant cette méthode :

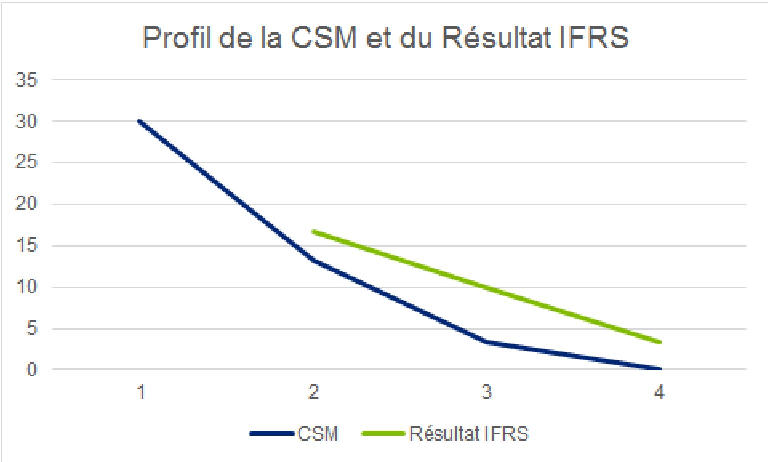
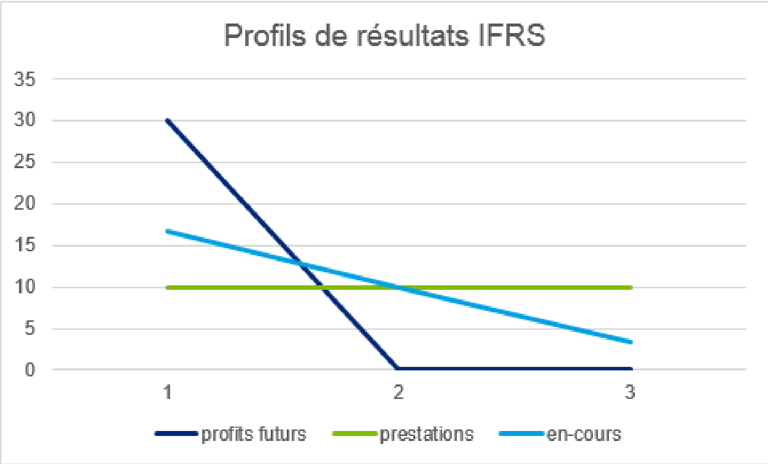



Figure 7.12 – Profil de la CSM et du résulat IFRS

Il est important de noter qu'au-delà de la définition de la base d'amortissement, un deuxième niveau de spécifications est nécessaire pour définir plus précisément la méthode de calcul. En effet, il est nécessaire de définir l'encours retenu et le rythme d'amortissement.

### 7.3.4 Conclusion sur les méthodes d'amortissement de la CSM

Trois différentes méthodes d'amortissement de la CSM sur un contrat élémentaire ont été proposées. Ces différentes méthodologies conduisent à des profils de résultat différents :




Profils de résultat IFRS

L'ensemble des méthodes présentées ci-dessus peuvent s'appliquer pour un contrat participatif. La méthode 1 (CSM amortie selon les profits futurs) présente une nature différente des deux autres méthodes. Cette méthode ne s'inscrit pas dans l'esprit d'amortissement tel qu'il est proposé par la nouvelle norme IFRS 4. En effet, il ne s'agit pas d'une mécanique d'amortissement mais plutôt de la prise en compte de variations de CSM. Les méthodes 2 (CSM amortie selon les prestations) et 3 (CSM amortie selon l'encours géré) peuvent répondre aux attentes de la norme et le choix de la méthode d'amortissement sera à définir en fonction de la nature du produit d'assurance. Le choix entre ces deux méthodes porte uniquement sur la nature du contrat et la nature du service rendu par l'assureur. Ainsi, pour une temporaire-décès la méthode 2 pourrait être plus appropriée alors que pour un contrat d'épargne Euro il s'agit plutôt de la méthode 3. Un amortissement mixte peut également être envisagé dans le cas par exemple de rentes viagères. La méthode d'amortissement retenue dans la suite est l'amortissement selon l'encours géré.

## 7.4 Le modèle comptable alternatif

Cette section présente les principes du modèle alternatif proposé par le CFO Forum. Ce modèle se veut proche du modèle général et suppose que :

$$\begin{cases} TVOG = BE^{sto} - BE^{det} \\ CSM_t = Max(0, PVFP_{CBY,t}) \end{cases}$$

On rappelle que la CSM représente la profitabilité attendue du contrat à la souscription. Celle-ci correspond à la différence entre la prime du contrat et la somme du Best Estimate et de l'ajustement pour risque à la date de souscription du contrat. Le calcul de la CSM à la souscription diffère donc du calcul aux dates ultérieures. Le modèle alternatif prévoit l'amortissement de la CSM selon les profits futurs. Ces derniers ne sont pas actualisés avec la courbe des taux *current* mais avec la courbe *Current Book Yield* ($CBY$).

### 7.4.1 Définition de la courbe CBY

La courbe CBY correspond, à une date t, à la "courbe des taux de rendement prévisionnel, dans le référentiel IFRS, des placements en portefeuille (et des désinvestissements / réinvestissements issus des interactions actif-passif) dans un scénario financier déterministe. Les réinvestissements se font au taux de marché en vigueur à la date du réinvestissement." Cette courbe est utilisée pour calculer les charges d'intérêts sur le passif.

Le modèle alternatif propose, comme dans le modèle général, la possibilité de choisir entre une approche FVOCI et une approche FVPL. Si l'approche FVPL est retenue, la courbe CBY n'est pas à calculer. L'évaluation du Best Estimate à la date d'arrêté s'effectue avec la courbe des taux *current*.

### 7.4.2 Traitement du Best Estimate déterministe

Le modèle alternatif prévoit la comptabilisation de la variation du Best Estimate déterministe sur la période $[t-1;t]$ en introduisant la courbe des taux CBY.

On note $BE^{det}$ le Best Estimate déterministe calculé avec la courbe des taux de marché observés à la date d'évaluation t (utilisée dans le scénario déterministe) et $BE^{CBY}$ le Best Estimate obtenu avec la courbe des taux CBY.

Le Best Estimate déterministe est décomposé en utilisant la courbe CBY afin de calculer la part de la variation de $BE^{det}$ à répartir entre résultat et OCI :

$$BE_t^{det} = (BE_t^{det} - BE_t^{CBY}) + BE_t^{CBY}$$

La différence $(BE_t^{det} - BE_t^{CBY})$ alimente le cumul d'OCI à la date d'inventaire t de sorte que la variation de la différence $(BE^{det} - BE^{CBY})$ entre les dates t-1 et t corresponde à la variation d'OCI constatée sur la période $[t-1,t]$. La variation de $BE^{CBY}$ entre t-1 et t est affectée en résultat. Par convention, on n'enregistre pas d'OCI lors d'une première comptabilisation. Par conséquent, le modèle présuppose qu'il n'y a pas d'écart à la souscription entre $BE_t^{det}$ et $BE_t^{CBY}$.

Si l'approche FVOCI est retenue, la variation du Best Estimate déterministe est égal à :

$$\Delta BE_t^{det} = \Delta(BE_t^{det} - BE_t^{CBY}) + \Delta BE_t^{CBY}.$$

Le modèle prévoit que $\Delta(BE_t^{det} - BE_t^{CBY})$ soit comptabilisé en OCI et $\Delta BE_t^{CBY}$ en résultat.

Si l'approche FVPL est retenue, la décomposition du Best Estimate déterministe n'est pas nécessaire. La variation du Best Estimate déterministe passe alors en résultat.

Dans le cadre de ce mémoire, l'approche FVPL a été retenue car nous souhaitons étudier l'impact du traitement comptable de la TVOG sur le profil de résultat IFRS de l'assureur. L'approche FVOCI pourra être mise en oeuvre dans le cadre d'études ultérieures.

## 7.5 Méthodes de comptabilisation de la TVOG

Le modèle alternatif prévoit également un traitement comptable spécifique pour la TVOG. Deux modèles de traitement comptable de la TVOG sont présentés [2] :

- méthode 1 : comptabilisation des variations de la TVOG par CSM
- méthode 2 : comptabilisation des variations de la TVOG par OCI

Ces deux méthodes ont été adaptées car le modèle alternatif prévoit d'amortir la CSM selon les profits futurs en supposant que $CSM_t = PVFP_t$. Or, la méthode retenue dans ce mémoire est l'amortissement selon l'encours géré.

### 7.5.1 Comptabilisation des variations de la TVOG par CSM

Cette première méthode consiste à comptabiliser la variation $\Delta TVOG = TVOG_{t-1} - TVOG_t$ en résultat. La CSM est diminuée du montant $TVOG_t$ à la date d'inventaire t, dans la limite de la CSM, de sorte que la variation $TVOG_{t-1} - TVOG_t$ constatée en résultat soit éventuellement compensée par la variation de CSM entre t-1 et t.

On a ainsi :

$$\Delta TVOG = \underbrace{TVOG_{t-1} - TVOG_t}_{P\&L}$$

### 7.5.2 Comptabilisation des variations de la TVOG en OCI

Cette méthode consiste à comptabiliser les variations de la TVOG en OCI. On décompose $TVOG_t$ à l'aide de la TVOG en date d'inventaire t, du point de vue de la date de la première comptabilisation. Cette dernière est notée $TVOG_0(t)$.

La différence $TVOG_t - TVOG_0(t)$ alimente le cumul d'OCI à la date d'inventaire t, de sorte que la variation entre t-1 et t de $TVOG - TVOG_0$ passe en variation d'OCI sur la période [t-1,t]. La variation de $TVOG_0$ entre t-1 et t, $TVOG_0(t-1) - TVOG_0(t)$, passe en résultat.

De plus, la CSM est diminuée du montant $TVOG_0(t)$ à la date d'inventaire t, dans la limite de la CSM, de sorte que la variation $TVOG_0(t-1) - TVOG_0(t)$ constatée en résultat soit éventuellement compensée par la variation de CSM entre t-1 et t.

On a ainsi :

$$\Delta TVOG = \underbrace{\Delta(TVOG - TVOG_0)}_{\Delta_{OCI}} + \underbrace{\Delta TVOG_0}_{P\&L}$$

2. cette partie n'est pas détaillée dans les principes du modèle. Elle a été établie à partir de l'exemple pédagogique élaboré par Allianz

### 7.5.3 Mise en oeuvre

Les deux méthodes de comptabilisation sont mises en oeuvre à partir de l'exemple utilisé pour définir les méthodes d'amortissement de la CSM. On considère le profil de TVOG suivant pour chaque année de projection :

— $TVOG_0 = 7$
— $TVOG_1 = 15$
— $TVOG_2 = 5$
— $TVOG_3 = 0$

Ce scénario correspond à un choc des taux intervenant en fin de première année conduisant à une hausse de la TVOG.

A l'ouverture, le bilan IFRS est :

| En k€ | Année | A0 |
|---|---|---|
| Bilan IFRS | Obligations | |
| | Actions et Immobilier | |
| | Autres | |
| | Trésorerie et assimilés | 1000 |
| | Coupons courus | |
| | **Total Actifs** | **1000** |
| | Résultats cumulés IFRS | 0 |
| | Dividendes distribués | 0 |
| | Autres réserves | 0 |
| | Total OCI | 0 |
| | Fonds propres | 0 |
| | Marge de service contractuelle | 40 |
| | Marge pour risque | 0 |
| | Best estimate | 960 |
| | dont Best estimate déterministe | 960 |
| | dont TVOG | 0 |
| | **Total Passifs** | **1000** |

FIGURE 7.13 – Bilan à l'ouverture du contrat

#### 7.5.3.1 Methode 1 : comptabilisation des variations de la TVOG par CSM

La CSM est amortie au cours de la projection selon l'encours moyen géré. De plus, à chaque date d'inventaire t, la CSM est diminuée du montant $TVOG_t$.

Le profil d'amortissement de la CSM est :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **En-cours moyen** | 960 | 800 | 480 | 160 |
| **CSM** | 33 | 15 | 4 | 0 |
| **Relâchement CSM** | | 18 | 11 | 4 |

Le bilan et le compte de résultat sont présentés pour chaque année de projection.

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bilan IFRS | Obligations | | | | |
| | Actions et Immobilier | | | | |
| | Autres | | | | |
| | Trésorerie et assimilés | 1000 | 680 | 360 | 40 |
| | Coupons courus | | | | |
| | **Total Actifs** | **1000** | **680** | **360** | **40** |
| | Résultats cumulés IFRS | | 10 | 31 | 40 |
| | Dividendes distribués | | | | |
| | Autres réserves | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Total OCI | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Fonds propres | 0 | 10 | 31 | 40 |
| | Marge de service contractuelle | 33 | 15 | 4 | 0 |
| | Marge pour risque | | | | |
| | Best estimate | 967 | 655 | 325 | 0 |
| | dont Best estimate déterministe | 960 | 640 | 320 | 0 |
| | dont TVOG | 7 | 15 | 5 | 0 |
| | **Total Passifs** | **1000** | **680** | **360** | **40** |

FIGURE 7.14 – Bilan IFRS - méthode 1

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Résultat IFRS | Relâchement de la CSM | | 18 | 11 | 4 |
| | Ajustement de la CSM | | | | |
| | Marge de souscription issue de la CSM | | 18 | 11 | 4 |
| | Relâchement de la marge pour risque | | | | |
| | Ajustement de la marge pour risque | | | | |
| | Relâchement des TVOG | | 4 | 2 | 1 |
| | Ajustement des TVOG | | -12 | 8 | 4 |
| | Relâchement Marge pour Risque et TVOG | | -8 | 10 | 5 |
| | Relâchement du BEL déterministe | | 320 | 320 | 320 |
| | Prestations réelles | | -320 | -320 | -320 |
| | Ecarts d'expériences | | 0 | 0 | 0 |
| | Ajustement du BEL | | | | |
| | **Marge de souscription totale** | | 10 | 21 | 9 |
| | Revenus financiers | | 0 | 0 | 0 |
| | Charge de désactualisation | | 0 | 0 | 0 |
| | **Marge financière** | | 0 | 0 | 0 |
| | **Résultat IFRS** | | 10 | 21 | 9 |

FIGURE 7.15 – Compte de résultat - méthode 1

Le graphique suivant montre le profil du résultat IFRS.

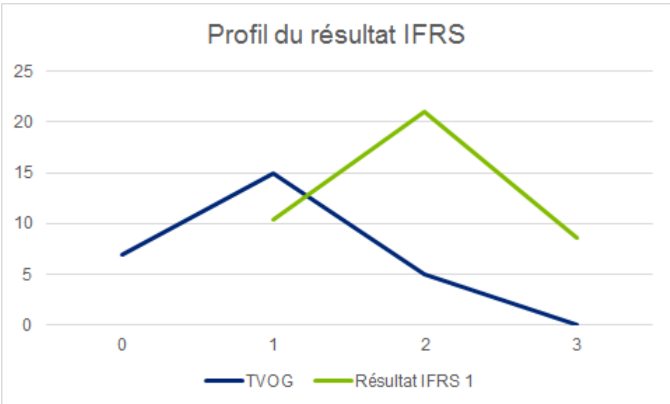



FIGURE 7.16 – Profil du résultat IFRS- méthode 1

On observe que le résultat IFRS est fortement impacté par les variations de la TVOG. Par conséquent, cette méthode aboutit à une forte volatilité du résultat. Or, l'objectif est de définir une méthode de comptabilisation de la TVOG permettant de limiter la volatilité du résultat IFRS.

#### 7.5.3.2 Méthode 2 : comptabilisation des variations de la TVOG par OCI

Le profil d'amortissement de la CSM est :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| **En-cours moyen** | 960 | 800 | 480 | 160 |
| **CSM** | 33 | 15 | 4 | 0 |
| **Relâchement CSM** | | 18 | 11 | 4 |

Le bilan et le compte de résultat sont présentés pour chaque année de projection.

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bilan IFRS | Obligations | | | | |
| | Actions et Immobilier | | | | |
| | Autres | | | | |
| | Trésorerie et assimilés | 1000 | 680 | 360 | 40 |
| | Coupons courus | | | | |
| | Total Actifs | 1000 | 680 | 360 | 40 |
| | Résultats cumulés IFRS | | 22 | 36 | 40 |
| | Dividendes distribués | | | | |
| | Autres réserves | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | Total OCI | 0 | -12 | -4 | 0 |
| | Fonds propres | 0 | 10 | 31 | 40 |
| | Marge de service contractuelle | 33 | 15 | 4 | 0 |
| | Marge pour risque | | | | |
| | Best estimate | 967 | 655 | 325 | 0 |
| | dont Best estimate déterministe | 960 | 640 | 320 | 0 |
| | dont TVOG | 7 | 15 | 5 | 0 |
| | Total Passifs | 1000 | 680 | 360 | 40 |

FIGURE 7.17 – Bilan IFRS - méthode 2

| En k€ | Année | A0 | A1 | A2 | A3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Résultat IFRS | Relâchement de la CSM | | 18 | 11 | 4 |
| | Ajustement de la CSM | | | | |
| | Marge de souscription issue de la CSM | | 18 | 11 | 4 |
| | Relâchement de la marge pour risque | | | | |
| | Ajustement de la marge pour risque | | | | |
| | Relâchement des TVOG | | 4 | 2 | 1 |
| | Ajustement des TVOG | | | | |
| | Relâchement Marge pour Risque et TVOG | | 4 | 2 | 1 |
| | Relâchement du BEL déterministe | | 320 | 320 | 320 |
| | Prestations réelles | | -320 | -320 | -320 |
| | Ecarts d'expériences | | 0 | 0 | 0 |
| | Ajustement du BEL | | | | |
| | Marge de souscription totale | | 22 | 13 | 4 |
| | Revenus financiers | | 0 | 0 | 0 |
| | Charge de désactualisation | | 0 | 0 | 0 |
| | Marge financière | | 0 | 0 | 0 |
| | Résultat IFRS | | 22 | 13 | 4 |

FIGURE 7.18 – Compte de résultat - méthode 2

Le graphique suivant montre le profil du résultat IFRS.

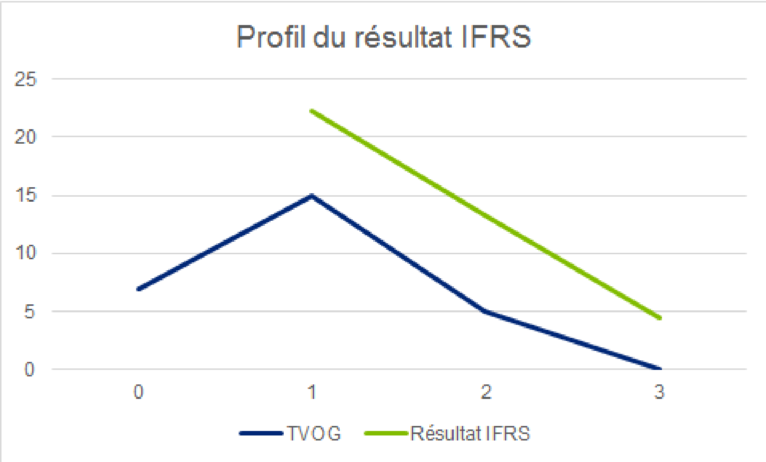



FIGURE 7.19 – Profil du résultat IFRS - méthode 2

On observe que les variations de la TVOG n'impactent pas le résultat IFRS. Cette méthode permet de réduire la volatilité du résultat IFRS. Les fluctuations des marchés financiers sont entièrement captées en OCI sans impacter le résultat IFRS. De plus, d'un point de vue opérationnel, cette méthode est simple à mettre oeuvre pour les assureurs. En effet, la CSM n'étant pas ajustée en fin de période, un recalcul de l'amortissement n'est donc pas nécessaire.

### 7.5.4 Synthèse sur les méthodes de comptabilisation de la TVOG

Le graphique suivant montre le profil du résultat IFRS pour chacune des deux méthodes.

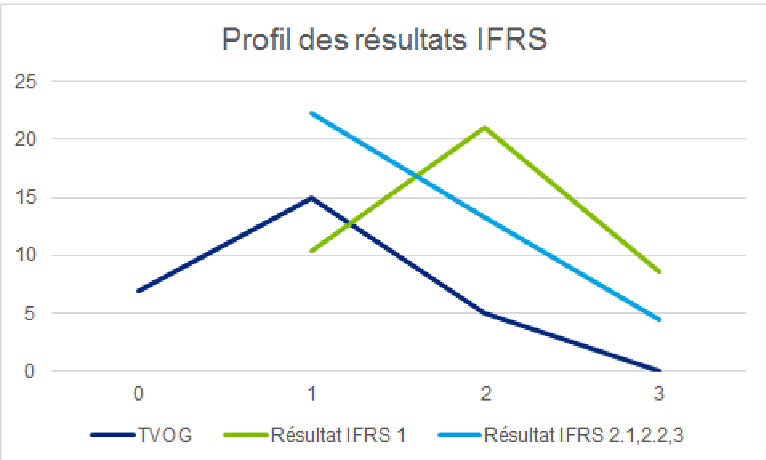



FIGURE 7.20 – Profils de résultat IFRS - synthèse des méthodes

La méthode 1 aboutit au profil de résultat le plus volatile car il est impacté chaque année des variations de la TVOG. Par conséquent, la méthode 2 est la méthode qui sera retenue pour comptabiliser la TVOG.

## 7.6 Comptabilisation de la TVOG avec le modèle ALM

La méthode retenue pour comptabiliser la TVOG est la méthode 2 à savoir la comptabilisation des variations de la TVOG en OCI. L'actif est comptabilisé en valeur marché et le passif selon la norme IFRS 4 - phase II. Le résultat IFRS au compte de résultat est brut d'impôt. Pour chaque année de projection, la CSM est amortie selon l'encours moyen. Par raison de simplification, on suppose que la marge pour risque est égale à 1% du Best Estimate stochastique pour chaque année de projection.

### 7.6.1 Bilans d'ouverture

Le bilan d'ouverture en normes French GAAP est :

| En k€ | Année | 0 |
|---|---|---|
| Bilan Social | PM | 100 000 |
| | PPE | 2 000 |
| | PRE | 0 |
| | Réserve de capitalisation | 1 000 |
| | Total Passif | 103 000 |
| | Obligations | 85 000 |
| | Actions et Immobilier | 10 000 |
| | Autres | 0 |
| | Trésorerie et assimilés | 8 000 |
| | Coupons courus | 0 |
| | Total Actif | 103 000 |

FIGURE 7.21 – Bilan d'ouverture en normes French GAAP

Les provisions mathématiques (PM) initiales valent 100 000 000 et la richesse initiale représente 3% des provisions mathématiques (2 000 000 de PPE et 1 000 000 de réserve de capitalisation).

Le bilan d'ouverture en normes IFRS est :

| En k€ | Année | A0 |
|---|---|---|
| Bilan IFRS | Obligations | 104 702 |
| | Actions et Immobilier | 10 000 |
| | Autres | 0 |
| | Trésorerie et assimilés | 8 000 |
| | Coupons courus | 0 |
| | Total Actifs valeur marché | 122 702 |
| | Resultats cumulés IFRS | |
| | Dividendes distribués | |
| | Autres réserves | 0 |
| | Total OCI | 0 |
| | Fonds propres | 0 |
| | Marge de service contractuelle | 5 931 |
| | Marge pour risque | 1 156 |
| | Best estimate | 115 615 |
| | dont Best estimate déterministe | 114 940 |
| | dont TVOG | 675 |
| | Total Passifs | 122 702 |

FIGURE 7.22 – Bilan d'ouverture en norme IFRS

### 7.6.2 Tests du modèle ALM

Afin de s'assurer de la validité de la modélisation ALM, plusieurs tests sont mis en place. Tout d'abord, le Best Estimate doit représenter au moins 90% de la valeur marché de l'actif. De plus, l'écart de convergence entre la valeur marché initiale de l'actif et la somme du Best Estimate et des profits futurs actualisés doit être vérifié. Plus précisément, l'écart de convergence est défini de la manière suivante :

$$\text{Valeur marché actif } (0) = \text{Best Estimate } (0) + \text{PVFP } (0)$$

La PVFP (Prevent Value of Future Benefits) correspond aux profits futurs actualisés. Elle est calculée ainsi :

$$\text{PVFP}(0) = \sum_{k=t+1}^{T} -\text{résultats(k)P(t,k)} + (VM_{fin})P(t,T)$$

Les tableaux suivants présentent les résultats obtenus avec le scénario déterministe.

Valeur marché actifs en t=0

| | |
|---|---|
| Obligations | 104 702 069 |
| Trésorerie | 8 000 000 |
| Actions | 10 000 000 |
| **Valeur marché actif** | **122 792 069** |

Best Estimate déterministe en t=0

| | |
|---|---|
| Prime | 0 |
| Prestations actualisées | 88 680 527 |
| Frais actualisés | 1 469 878 |
| Commissions | 0 |
| Fonds fin de projection | 24 094 025 |
| PVL actualisée : Part assuré | 626 057 |
| **Best Estimate** | **114 870 487** |

Profits futurs actualisés (PVFP) en t=0

| | |
|---|---|
| Résultats bruts actualisés | 7 761 997 |
| PVL finale actualisée : Part assureur | 69 562 |
| MVL finale actualisée | 0 |
| **Profits Futurs actualisés** | **7 831 559** |

Au vu des résultats, le test de convergence est respecté : la valeur des actifs est bien égale à la somme du Best Estimate et de la PVFP. De plus, le Best Estimate déterministe représente 93,2% de la valeur marché initiale des actifs.

Les tableaux suivants présentent les résultats obtenus avec les simulations stochastiques :

Valeur marché actifs en t=0

| | |
|---|---|
| Obligations | 104 702 069 |
| Trésorerie | 8 000 000 |
| Actions | 10 000 000 |
| **Valeur marché actif** | **122 702 069** |

Best Estimate Stochastique en t=0

| | |
|---|---|
| Prime | 0 |
| Prestations actualisées | 91 749 727 |
| Frais actualisés | 1 463 534 |
| Commissions | 0 |
| Fonds fin de projection | 22 383 194 |
| Part assuré - PVL actualisée | 18 586 |
| **Best Estimate** | **115 515 041** |

Profits futurs actualisés (PVFP) en t=0

| | |
|---|---|
| Résultats bruts actualisés | 6 026 938 |
| Part assureur - PVL finale actualisée | 2065 |
| MVL finale actualisée | 0 |
| **Profits Futurs actualisés** | **6 029 003** |

L'écart de convergence est égal à 0,86% et le Best Estimate représente 95% de la valeur marché des actifs.

Un autre contrôle mis en place est le test de convergence de la PVFP en fonction du nombre de simulations. Le nombre de scénarii stochastiques est à définir pour assurer une convergence suffisante de la PVFP. De nombreux assureurs utilisent 1000 scénarii pour les produits d'épargne, mais un nombre plus élevé peut s'avérer nécessaire pour obtenir une meilleure précision.

Le graphique suivant illustre les résultats obtenus en fonction du nombre de simulations :

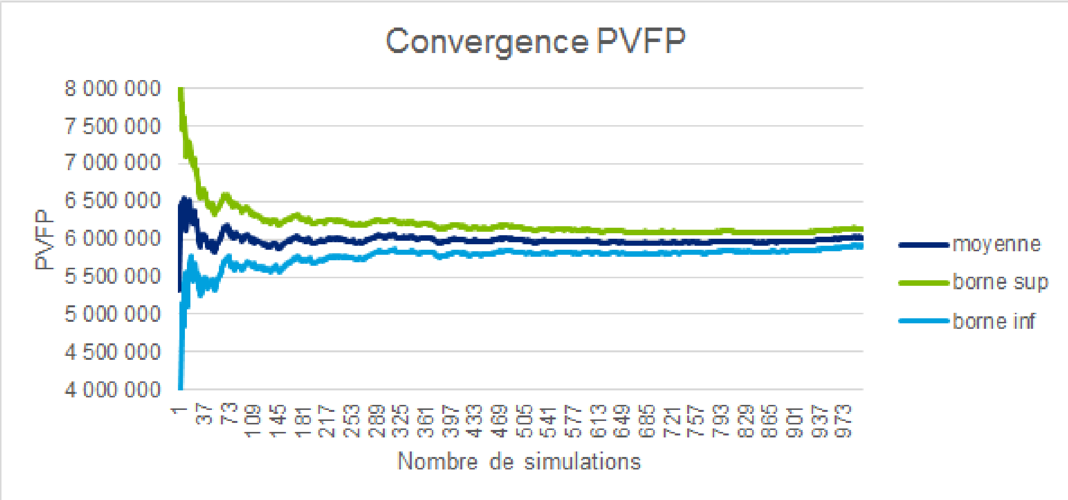



FIGURE 7.23 – Convergence de la PVFP

La PVFP obtenue pour 1000 simulations est égale à 6 029 003 et est comprise dans l'intervalle de confiance à 95% : IC = [5 909 827,6 144 049].

D'après le théorème central-limit, lorsque la taille n de l'échantillon est assez grande, l'intervalle de confiance de la moyenne d'une variable gaussienne de variance inconnue est valable pour estimer l'espérance d'un loi quelconque. Un intervalle de confiance basé sur une loi normale dont la variance est estimée par la variance empirique est ainsi utilisé. L'intervalle de confiance à 95% de la PVFP est :

$$IC_{95\%}(PVFP) = \left[\overline{PVFP_{1000}} - 1,96\frac{s'_{1000}}{\sqrt{1000}}, \overline{PVFP_{1000}} + 1,96\frac{s'_{1000}}{\sqrt{1000}}\right]$$

— $\overline{PVFP_{1000}}$ : moyenne empirique de la PVFP sur 1000 scénarios.

— $s'_{1000}$ : écart-type estimé sur ces 1000 scénarios.

Le tableau suivant présente les écarts relatifs en fonction du nombre de simulations.

| **Nombre de scénarios** | **100** | **500** | **1000** |
|---|---|---|---|
| **Écart relatif (borne sup)** | 6,1% | 2,7% | 1,9% |
| **Écart relatif (borne inf)** | 6,1% | 2,7% | 1,9% |

L'écart relatif est égal à 1,9% pour 1000 simulations, ce qui correspond à un seuil peu acceptable. Par conséquent, il faudrait utiliser un nombre supérieur à 1000 simulations. Ceci représente une limite de la modélisation ALM. Cependant, la problématique de ce mémoire concerne la comptabilisation de la TVOG et non différentes études d'impacts sur le Best Estimate.

### 7.6.3 Calcul de la TVOG

Les options modélisées du produit d'épargne Euro sont le taux minimum garanti, la participation aux bénéfices et les rachats.

En t=0, la TVOG est calculée par différence entre la valeur du Best Estimate stochastique et la valeur du Best Estimate déterministe. Ainsi, la TVOG initiale est égale :
TVOG (0) = BE stochastique (0) - BE déterministe (0) = 115 615 041 - 114 870 487 = 675 203

Le montant de TVOG obtenu est positif, ce qui est cohérent. En effet, la TVOG représentant un coût pour les assureurs, elle vient augmenter la valeur de ses engagements.

Pour les autres années de projection (t>0), la TVOG est déterminée à l'aide du driver suivant :

$$\text{TVOG(t)} = \text{TVOG(0)} \times \frac{\text{BE deterministe(t)}}{\text{BE deterministe(0)}}$$

Le graphique ci-dessous présente l'évolution de la TVOG pour l'ensemble des vingt années de projection.

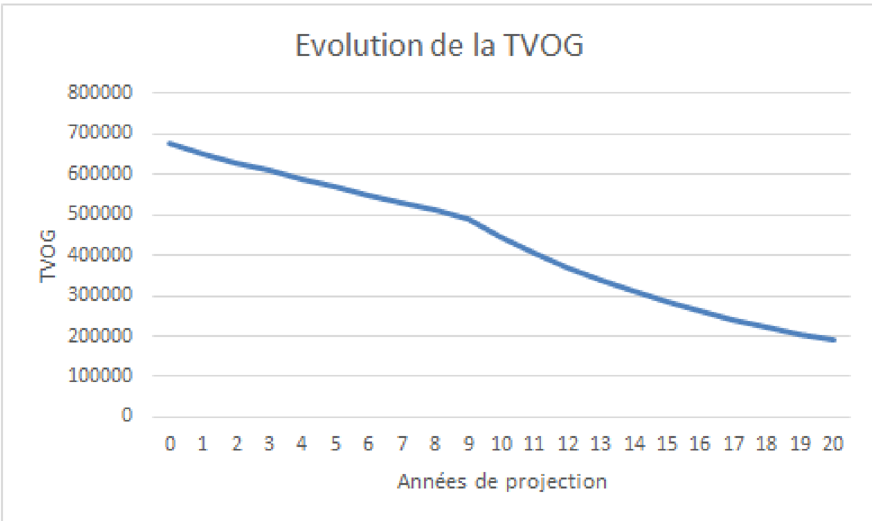



Figure 7.24 – Evolution de la TVOG

Nous souhaitons évaluer l'impact de la hausse et de la baisse des taux sur la TVOG. Pour cela, la courbe des taux construite dans le chapitre 5 est choquée en utilisant les spécifications techniques de l'EIOPA.

D'après l'article 105 (4) (a) de la Directive 2009/138/EC : "*The sensitivity of the values of assets, liabilities and financial instruments to changes in the term structure of interest rates, or in the volatility of interest rates*". Ainsi, l'évolution de la structure par terme des taux d'intérêts impacte fortement la valeur du bilan.
Pour chacun des piliers de maturité, le choc à la hausse et à la baisse est défini dans le tableau ci-dessous.

| **Maturité** | **Choc à la hausse** | **Choc à la baisse** |
|---|---|---|
| **1 an ou inférieure** | 70% | -75% |
| **2** | 70% | -65% |
| **3** | 64% | -56% |
| **4** | 59% | -50% |
| **5** | 55% | -46% |
| **6** | 52% | -42% |
| **7** | 49% | -39% |
| **8** | 47% | -36% |
| **9** | 44% | -33% |
| **10** | 42% | -31% |
| **11** | 39% | -30% |
| **12** | 37% | -29% |
| **13** | 35% | -28% |
| **14** | 34% | -28% |
| **15** | 33% | -28% |
| **16** | 31% | -27% |
| **17** | 30% | -28% |
| **18** | 29% | 28% |
| **19** | 27% | -28% |
| **20** | 26% | -29% |
| **90 ans ou supérieure** | 20% | 20% |

Les maturités non indiquées dans le tableau sont déduites par interpolation linéaire.

Les spécifications techniques de l'EIOPA indiquent : *"Irrespective of the above stress factors, the absolute increase of interest rates in the upward scenario at any maturity should at least be one percentage point.*" Par conséquent, le choc à la hausse est donc pour chaque point de la courbe des taux de +100 bps minimum. En revanche, le choc minimal de -100 bps à la baisse a disparu dans les dernières spécifications.

Le graphique ci-dessous illustre les courbes de taux choquées obtenues :

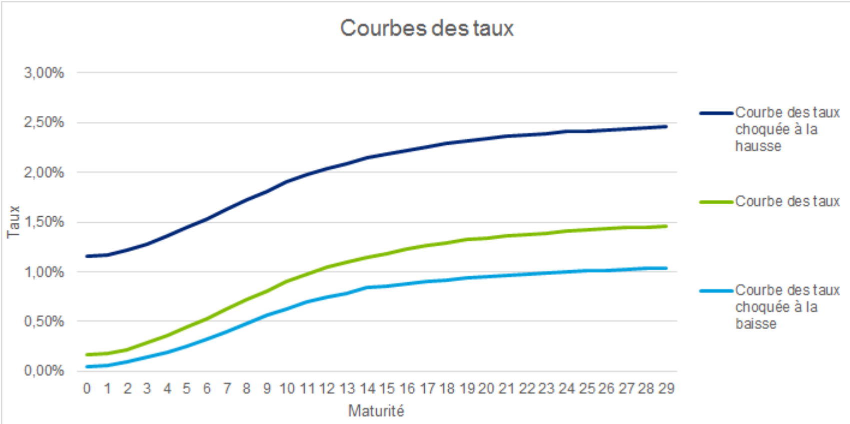



FIGURE 7.25 – Courbes des taux choquées

Le tableau suivant indique les résultats obtenus :

| Choc | TVOG |
|---|---|
| - | 675 203 |
| Choc à la hausse | 285 204 |
| Choc à la baisse | 965 541 |

Le montant de TVOG obtenu avec la courbe des taux choquée à la hausse est plus faible et le montant de TVOG obtenu avec la courbe des taux choquée à la baisse est plus élevé. Dans un contexte de taux bas, les scénarios stochastiques entraînent des pertes financières pour l'assureur. Par conséquent, la baisse des taux entraîne une hausse significative des niveaux de TVOG, comme observé chez les principaux assureurs européens fin 2014. [3]

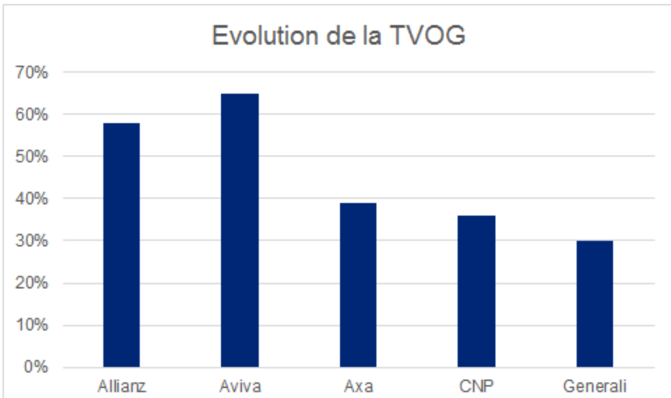



FIGURE 7.26 – Variation de la TVOG en 2014

Ces différents résultats permettent de mettre en évidence la volatilité de la TVOG, impactant fortement le résultat IFRS des assureurs. Or, ces derniers souhaitent piloter leur résultat tout en limitant sa volatilité, leur objectif étant d'obtenir la meilleure lisibilité possible de la performance de leur activité. Dans le cadre de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à définir une méthode de comptabilisation de la TVOG, permettant de limiter la volatilité du résultat IFRS de l'assureur. Les résultats obtenus sont présentés dans la partie suivante.

3. source : Rapport Embedded Value au 31.12.14

### 7.6.4 Résultats obtenus

Le graphique suivant représente le profil de résultat obtenu en norme sociale et l'évolution du pourcentage des Provisions Mathématiques par rapport à la valeur total du passif au cours de la projection.

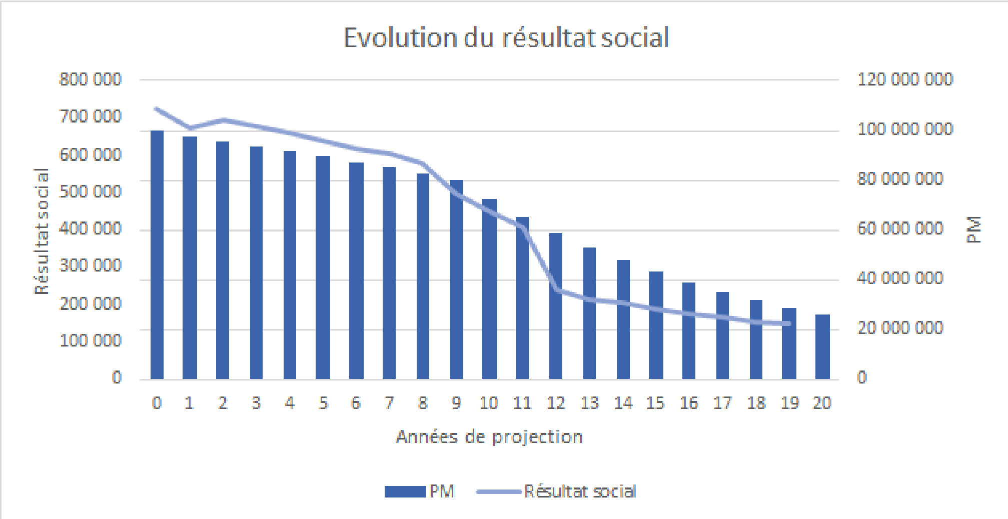



FIGURE 7.27 – Profil de résultat en norme social

On observe que le résultat en norme sociale est volatile du fait de de la diminution des Provisions Mathématiques au cours de la projection. Afin d'expliquer ces résultats, nous avons représenté graphiquement l'évolution des réserves (PPE et PRE) et du profit.

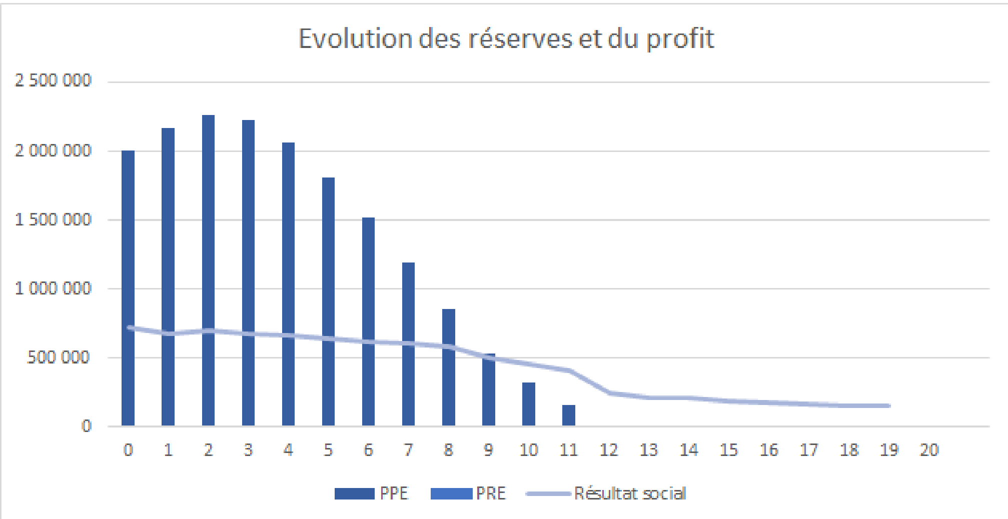



FIGURE 7.28 – Evolution des réserves et du résultat

Pour rappel, d'après l'article R331-3-1 du Code des assurances, la PRE est une "provision destinée à faire face aux engagements dans le cas de moins-value de l'ensemble des actifs mentionnés à l'article R332-20". Les actifs mentionnés dans l'article R332-20 sont essentiellement les placements en actions et en immobiliers. La PRE est calculée par différence entre la valeur de réalisation et la valeur comptable au bilan de tous les actifs autres que les titres amortissables.

On observe que le montant de PRE est nul au cours de la projection car la valeur de marché des actifs est supérieure à la valeur comptable pour chaque année de projection. De plus, on observe que le montant de la PPE évolue : les deux premières années de projection, nous observons une dotation de la PPE puis une reprise de la PPE jusqu'à son épuisement en année 14.

Le graphique ci-dessous représente la dotation ou la reprise de la PPE ainsi que l'évolution du taux servi et du rendement financier au cours de la projection.

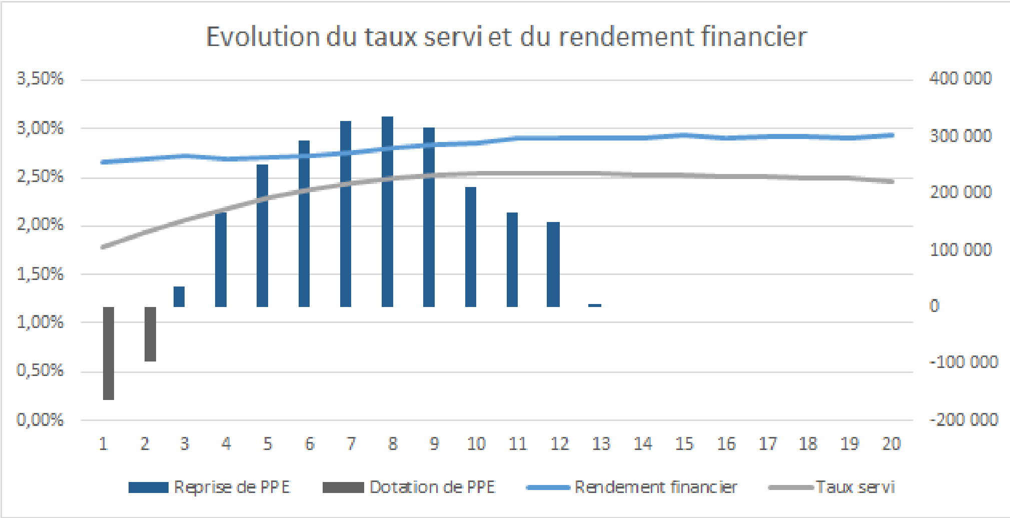



FIGURE 7.29 – Evolution du taux servi et du rendement financier

Pour rappel, d'après l'article R331-3 du Code des assurances, la PPE est définie comme étant le "montant des participations aux bénéfices attribuées aux bénéficiaires de contrats lorsque ces bénéfices ne sont pas payables immédiatement après la liquidation de l'exercice qui les a produits". L'assureur peut choisir de la doter les années où le résultat est meilleur qu'attendu et de la reprendre les années moins bonnes. Ainsi, le rendement des contrats est lissé sur plusieurs années.

Les deux premières années de projection, nous observons une dotation de la PPE. En effet, le rendement financier diminué des frais de gestion est supérieur au taux cible. A partir de l'année 3, nous observons une reprise de la PPE car le rendement financier n'est pas suffisant pour servir le taux cible. En année 14, la PPE est épuisée. Par conséquent, le résultat diminue fortement car la marge maximale ne peut plus être prélevée sur les contrats, en absence de reprise de PPE. Afin d'atteindre le taux cible, seuls les rendements financiers peuvent être pris en compte.

Le graphique suivant présente le profil de résultat obtenu en norme IFRS.

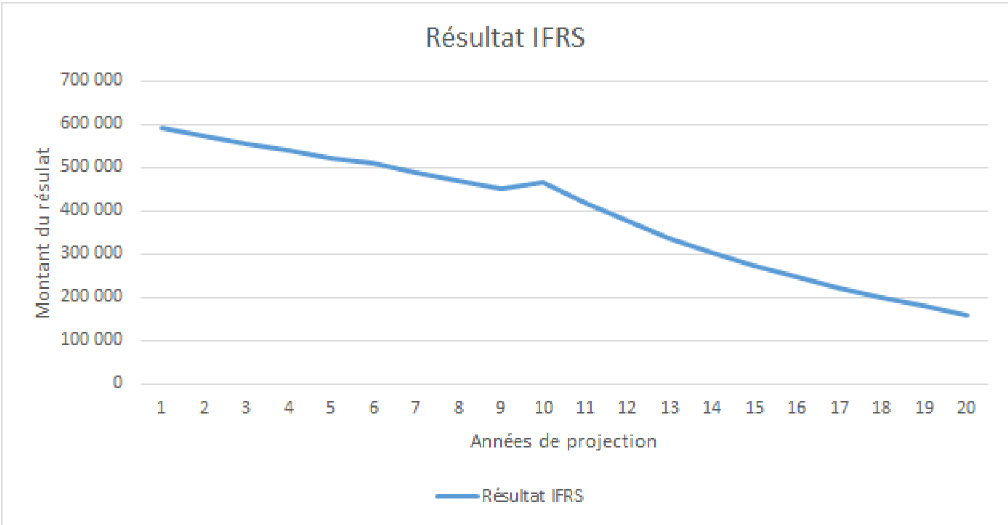



Figure 7.30 – Profil de résultat IFRS

On observe que le résultat IFRS est moins volatile que le résultat social. On peut néanmoins remarquer une hausse du résultat IFRS en dixième année.

La marge de souscription issue du relâchement et de l'ajustement de la CSM est représentée ci-dessous :

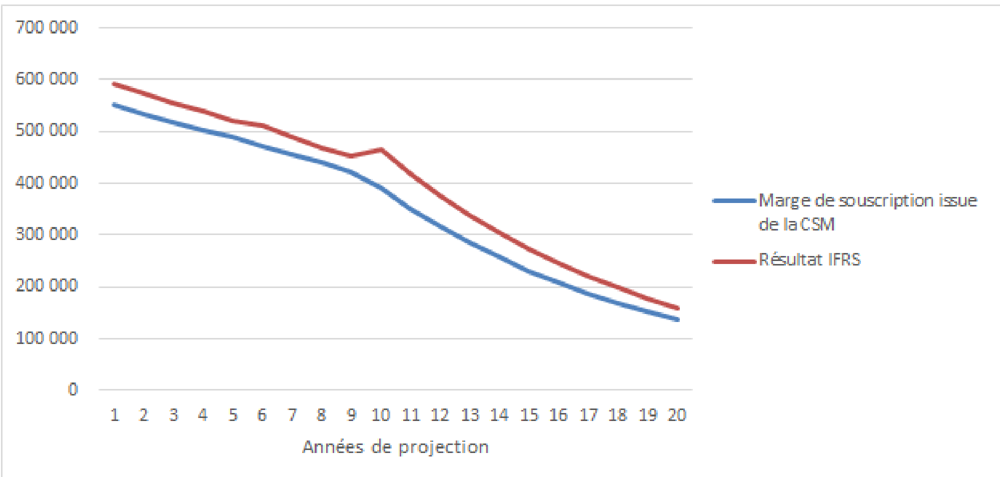



Figure 7.31 – Profil de la marge de souscription issue de la CSM

Nous observons que la marge de souscription issue de la CSM n'est pas responsable de la hausse du résultat IFRS en dixième année.

Le graphique ci-dessous représente la marge de souscription issue de la TVOG et de la marge pour risque. Les variations de la TVOG étant comptabilisées en OCI, le relâchement de la TVOG est nul pour chaque année de projection. Ainsi, seule la marge de souscription issue de la marge pour risque est représentée.

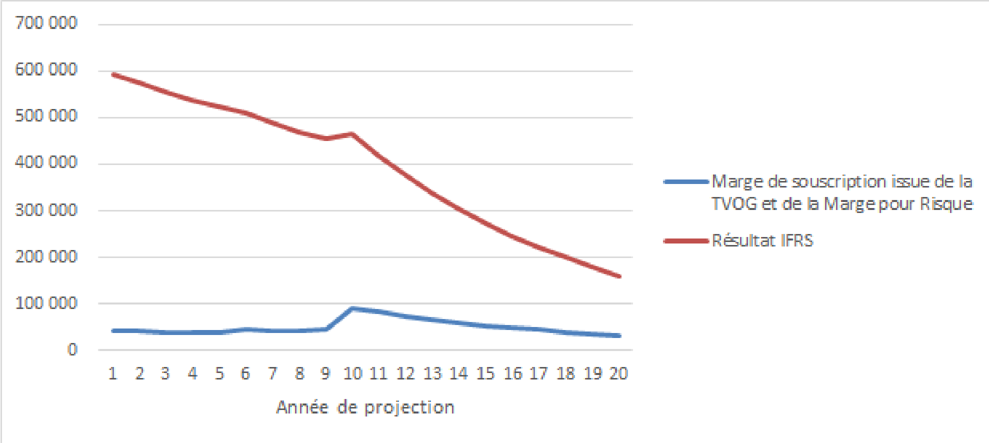



FIGURE 7.32 – Profil de la marge de souscription issue de la marge pour risque

On observe que la marge de souscription issue de la marge pour risque augmente en dixième année de projection. Le compte de résultat ci-dessous confirme que le résultat IFRS augmente à la dixième année.

| En k€ | Année | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|---|
| **Résultat IFRS** | Relâchement de la CSM | 439 | 422 | 392 |
| | Ajustement de la CSM | 0 | 0 | 0 |
| | Marge de souscription issue de la CSM | 439 | 422 | 392 |
| | Relâchement de la marge pour risque | 42 | 46 | 91 |
| | Ajustement de la marge pour risque | 0 | 0 | 0 |
| | Relâchement des TVOG | | | |
| | Ajustement des TVOG | | | |
| | Relâchement TVOG et Marge pour Risque | 42 | 46 | 91 |
| | Relâchement du BEL déterministe | 4 190 | 4 510 | 8 974 |
| | Prestations réelles | -4 190 | -4 510 | -8 974 |
| | Ecarts d'expériences | 0 | 0 | 0 |
| | Ajustement du BEL | 0 | 0 | 0 |
| | **Marge de souscription totale** | **482** | **468** | **483** |
| | Revenus financiers | 1 190 | 1 319 | 1 340 |
| | Charge de désactualisation | -1 202 | -1 334 | -1 357 |
| | **Marge financière** | **-12** | **-15** | **-17** |
| | **Résultat IFRS** | **469** | **453** | **466** |

FIGURE 7.33 – Compte de résultat IFRS

En étudiant le compte de résultat, on observe que l'augmentation du résultat provient de l'augmentation du relâchement de la marge pour risque. Le tableau ci-dessous montre que cette hausse provient d'une baisse de la marge pour risque.

| | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|
| **Marge pour risque** | 874 | 842 | 764 |
| **Variation de la marge pour risque** | 31 | 33 | 77 |
| *Dont désactualisation* | -12 | -13 | -14 |
| *Dont Relâchement* | 42 | 46 | 91 |

On rappelle que la marge pour risque est égale à 1% du Best Estimate stochastique. La baisse de la marge pour risque provient donc d'une diminution du Best Estimate stochastique et plus particulièrement d'une diminution du Best Estimate déterministe.

| | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|
| **Best Estimate stochastique** | 87 427 | 84 168 | 76 444 |
| **TVOG** | 511 | 492 | 446 |
| **Best Estimate déterministe** | 86 9161 | 83 677 | 75 997 |
| *% TVOG* | 0,58% | 0,58% | 0,58% |

Le graphique suivant représente le profil de relâchement du Best Estimate déterministe au cours de la projection.

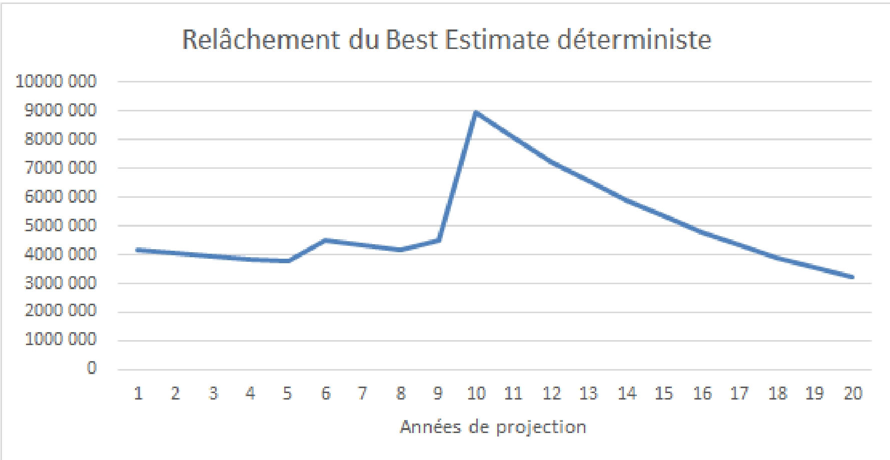



FIGURE 7.34 – Profil de relâchement du Best Estimate déterministe

Nous observons en dixième année de projection un important relâchement du Best Estimate déterministe dû à une baisse de ce dernier.

La diminution du Best Estimate déterministe provient de l'augmentation des prestations liées au rachat comme le montre le tableau ci-dessous. En effet, le taux de rachat structurel passe de 3% à 10% en dixième année.

| | A8 | A9 | A10 |
|---|---|---|---|
| **Rachats** | 3 951 | 4 269 | 8 741 |
| **Décès** | 140 | 144 | 142 |
| **Prestations** | 4 092 | 4 414 | 8 882 |

Le résultat IFRS est donc impacté par l'option de rachat. Plus précisément, il n'est pas impacté par la variation de la valeur temps de cette option (la TVOG est comptabilisée en OCI) mais par une augmentation des prestations.

# Conclusion

Le nouvel environnement IFRS prévoit différentes méthodes d'évaluation et de comptabilisation des actifs et des passifs d'assurance. Les futures normes IFRS 9 et IFRS 4 - phase II entreront en application respectivement les 1er janvier 2018 et 1er janvier 2020. Cette *temporia differentia* impactera fortement la communication financière des assureurs. En effet, ces derniers craignent une augmentation de la volatilité de leur résultat si les nouvelles exigences en termes de comptabilisation des instruments financiers sont appliquées avant celles concernant les contrats d'assurance. Par conséquent, les actuaires sont confrontés au choix des méthodes d'évaluation et doivent justifier tout *mismatch* économique ou comptable entre actifs et passifs. Ces différents *mismatch* impactent fortement la volatilité du résultat IFRS. Par conséquent, cela exige de maîtriser toute source de volatilité du résultat en provenance de la méthodologie, de l'ensemble des techniques de modélisation ainsi que de l'environnement économique.

L'entrée en vigueur de la nouvelle norme IFRS 4 - phase II va amener les assureurs à modéliser la valeur temps des options et garanties intrinsèques aux contrats afin de déterminer la juste valeur de leurs engagements. Pour ce faire, les assureurs peuvent utiliser la théorie d'évaluation des options financières. Cependant, le développement d'un modèle de gestion actif/passif permet de s'affranchir des formules fermées. La TVOG étant fortement liée à l'évolution des marchés financiers, un générateur de scénarios économiques a été développé dont le modèle de taux est le modèle de Hull-White à un facteur. Dans une optique d'amélioration, il sera intéressant d'examiner l'impact du processus stochastique de la modélisation des taux d'intérêt sur la TVOG. Une comparaison entre le modèle de Hull-White et d'autres modèles de taux (CIR, Black–Karasinski, Libor Market Model) indiquera l'importance d'un choix adapté en fonction de l'environnement économique.

De par sa définition, la TVOG est sensible aux conditions économiques (choc des taux d'intérêt, volatilité...). L'enjeu de ce mémoire est de définir une méthode optimale de comptabilisation de la TVOG permettant de limiter la volatilité du résultat IFRS de l'assureur. La méthode retenue prévoit la comptabilisation des variations de la TVOG en Other Comprehensive Income (OCI), permettant une stabilité du résultat IFRS. Les fluctuations des marchés financiers sont comptabilisées en OCI. Par conséquent, le résultat IFRS n'est pas impacté de la volatilité des marchés. D'un point de vue opérationnel, cette méthode est simple à mettre œuvre pour les assureurs. En effet, l'absence de calcul d'amortissement de la TVOG est une économie de complexité d'autant plus importante si un suivi par génération est opéré. La CSM n'étant pas ajustée en fin de période, un recalcul de l'amortissement n'est donc pas nécessaire.

La principale critique que nous pouvons relever est l'approximation effectuée pour le calcul de la TVOG. En effet, pour déterminer la TVOG pour chaque année de projection, un driver a été défini. Si la TVOG était calculée par différence entre le Best Estimate stochastique et le Best Estimate déterministe pour l'ensemble années de projection, il serait nécessaire de déterminer pour chaque année la valeur du Best Estimate stochastique. Par conséquent, la production de milliers de scénarios stochastiques à chaque pas de temps serait nécessaire, ce qui est difficilement réalisable en pratique. L'une des méthodes est la technique des Simulations dans les Simulations mais elle nécessite des ressources informatiques importantes.

Même si l'étude menée possède des limites, elle a permis d'identifier une méthode de comptabilisation de la TVOG qui permet de limiter la volatilité du résultat IFRS de l'assureur tout en présentant une simplicité opérationnelle. Le versement des dividendes étant lié au résultat, les actionnaires souhaitent que la contribution de leurs filiales à leur propre résultat puisse être anticipable. En effet, les assureurs souhaitent piloter leur résultat tout en limitant sa volatilité, l'objectif étant une meilleure lisibilité de la performance réelle de l'activité. La présentation du résultat le plus fidèle de la situation financière de la société et le plus compréhensible par les actionnaires et les investisseurs est l'enjeu majeur des futures normes IFRS.

# Glossaire

ALM : Asset Liability Management

ATM : At the money

BE : Best Estimate

CC : Coupon couru

CoC : Cost of Capital

CSM : Contractual Service Margin

EIOPA : European Insurance and Occupational Pensions Authority

French GAAP : French Generally Accepted Accounting Principles

IASB : International Accounting Standards Board

IFRS : International Financial Reporting Standards

ITM : In the money

IASB : International Accounting Standards Board

IFRS : International Financial Reporting Standards

MCEV : Market Consistent Embedded Value

OCI : Other Comprehensive Income

OTM : Out the money

PB : Participation aux bénéfices

PM : Provisions Mathématiques

PMV : Plus ou moins values

PMVL : Plus ou moins values latentes

PMVR : Plus ou moins values réalisées

PPE : Provision pour Participation aux Excédents

PRE : Provision pour Risque d'Exigibilité

PVFP : Present Value of Future Benefits

SCR : Solvency Capital Requirement

TMG : Taux minimum garanti

TVaR : Tail-Value at Risk

TVOG : Time value of options and guarantees

VaR : Value-at-Risk

VM : Valeur marché

VNC : Valeur nette comptable

# Liste des figures

# Bibliographie

[ADEH98] ARTZNER Philippe, DELBAEN Freddy, EBER Jean-Marc, HEATH David,[1998],”Coherent Measures of Risks”, *Mathematical Finance*, 1999, Volume 9, n°3, p. 203–228.

[AE10] ARTZNER Philippe, EISELE Karl-Theodor, [2010], ”Supervisory accounting : Comparison between Solvency II and coherent risk measures”.

[BS73] BLACK Fischer, SCHOLES Myron, [1973], ”The Pricing of Options and Corporate Liabilities”, *The Journal of Political Economy*, 1973, Volume 81, n°3, p. 637-654.

[BS76] BLACK Fisher, [1976], ”The Pricing of commodity contracts”, *Journal of Financial Economics*, 1976, Volume 3, p. 167-179.

[Dev10] DEVOLDER Pierre, [2001], ”Les univers virtuels de la finance”, *Belgian Actuarial Bulletin*, 2001, Volume 1, n°1.

[FL09] FRASCA Robert, LASORELLA Ken, [2009], ”Embedded Value : Practice and Theory”, *Actuarial Practice Forum.*

[HP81] HARRISON Michael J., PLISKA R., [1981], ”Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications*, 1981, Volume 11, n°3, p. 215-260.

[HW90] HULL John, WHITE Alan, [1990], ”Pricing interest-rate derivative securities”, *The Review of Financial Studies*, 1990, Volume 3, n°4, p. 573–592.

[HW93] HULL John, WHITE Alan, [1993], ”One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1993, Volume 28, n°2, p.235–254.

[Jam89] JAMSHIDIAN Farshid, [1989], ”An exact bond option pricing formula”, *Journal of Finance*, 1989, Volume 44, p. 205-209.

[Vas77] VASICEK Oldrich, [1977], ”An Equilibrium Characterization of the Term Structure”, *Journal of Financial Economics*, 1977, Volume 5, n°2, p. 177-188.

[PTJ11] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, JUILLARD Marc [2011], ”Modèles financiers en assurance”, 2e édition, Paris, Economica, 565 pages.

[PTK09] PLANCHET Frédéric, THEROND Pierre, KAMEGA Aymric, [2009], ”Scénarios économqiues en assurance - Modélisation et simulation”, Paris, Economica, 235 pages.

[DC04] DENUIT Michel, CHARPENTIER Arthur, [2004], ”Mathématiques de l'assurance non-vie”, Paris, Economica, 464 pages.

[Hul11] HULL John, [2011], ”Options, futures et autres actifs dérivés”, Paris, Pearson, 867 pages.

[BM06] BRIGO Damiano, MERCURIO Fabio,[2006], ”Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit”, 2e édition, Berlin, Springer Finance, 982 pages.

[PM12] PETAUTON Pierre, FROMENTEAU Michel, [2012], ”Théorie et pratique de l'assurance vie - Cours et exercices corrigés”, 4e édition, Paris, Dunod, 288 pages.

[LL92] LAMBERTON Damien, LAPEYRE Bernard, [2012], ”Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance,3e édition, Paris, Ellipses, 256 pages.

[TBFM00] TOSETTI Alain, BEHAR Thomas, FROMENTEAU Michel, MENART Stéphane, [2000], ”ASSURANCE Comptabilité Réglementation Actuariat”, France, Economica, 322 pages.

[Axa] XA, Befec-PriceWaterhouse, [1996], ”Normes et réglementation comptables”, Paris, L'Argus, 1581 pages.

[Bre12] BRECHOT Baptiste, *Enjeux relatifs à l'évaluation d'un portefeuille de contrats participatifs dans le nouvel environnement IFRS*, 2012, Mémoire d'actuariat, Centre d'Etudes Actuarielles.

[Thi12] THIZY Aurélie, *Valorisation d'un portefeuille de contrats d'épargne multi-supports dans le cadre d'IFRS 4 phase 2*, 2012,Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

[Hel10] HELUIN Alexandre, *Solvency II : Techniques de modélisation du Best Estimate en assurance-vie*, 2010, Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

[Del14] DELNER John, *The imapct of the underlying interet rate process - When calculatin the best estimate of liabilities*, 2014, Master Thesis in Mathematical Statistics, Stockholm University.

[Til14] TILGENKAMP W.G, *Swaption pricing under the Hull-White One Factor Model*, 2014, BSc Thesis in applied mathematics, Delft University of Technology.

[Dag10] DAGISTAN Cagatay, *Quantifying the interest rate risk of bonds by simulation*, 2008, Master of Science, Bogaziçi University.

[MH15] MAALMI Ali, HMAMI Redouan, *IFRS 4 phase 2 - Vers une modernisation du reporting financier en assurance*, 2015, Mémoire d'actuariat, CEA.

[Mer10] LE MER Stéphane, *Calcul du capital économique en assurance vie*, 2010, Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine.

[Pou11] POULET Guillaume, *Optimisation du capital Economique en Assurance Vie à l'aide de produits dérivés*, 2011, Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

[Pel12] PELLETIER Laurence, *Intégration des contraintes de Solvabilité 2 dans le cadre de la valorisation de portefeuilles de contrats*, 2012, Mémoire d'actuariat, Université Paris Dauphine.

[Ber15] BERARD Jean, [2015], Risque de défaut - Taux d'intérêt, Université de Strasbourg.

[Ber14] BERARD Jean, [2014], Simulation avec R, Université de Strasbourg.

[Fra14] FRANCHI Jacques, [2014], Calcul Stochastique, Université de Strasbourg.

[Gad14] GADENNE Sylvain, [2014], Modélisation actuarielle, Université de Strasbourg.

[Mer14] MERLI Maxime, [2013], Marché à terme, Univeristé de Strasbourg.

[Met14] METAIS Carole, [2013], Actifs dérivés, Université de Strasbourg.

[Mod13] MODRY Jean, [2013], Assurance Vie, Université de Strasbourg.

[Net14] NETZER Jean-Lucien, [2014], Comptabilité, Univeristé de Strasbourg.

[Tok11] OKE Ioane Muni, [2011], Modèles stochastiques de taux d'intérêts, Ecole Centrale Paris.

[Del15] DELL'ACQUA Silvia, 4 steps to get the risk free interest rates term structures provided by EIOPA, 2015.

[1] EIOPA,Technical document regarding the risk free interest rate term , 2015.

[2] CEIOPS, QIS 5 Risk-free interest rates – Extrapolation method, 2010.

[3] IASB, IAS 39, Instruments financiers : comptabilisation et évaluation, 2005.

[4] IASB,2005, IFRS 4, Contrats d'assurance, 2005.

[5] IASB, Norme IFRS 9, Instruments financiers, 2009.

[6] IASB, Exposure Draft, Insurance contracts, 2010.

[7] IASB, Exposure Draft, Insurance contracts, 2013.

[8] IASB, Norme IFRS 9, Instruments financiers, 2014.

[9] www.iasb.org

[10] www.cfoforum.nl

[11] https ://eiopa.europa.eu

[12] www.ffsa.fr

[13] www.focusifrs.com

[14] www.institutdesactuaires.com

[15] www.ressources-actuarielles.net

# Annexes

## A.1 Les taux de référence dans la zone Euro

Deux taux de référence sont publiés quotidiennement dans la zone Euro. Il s'agit des taux interbancaires calculés à partir des taux effectivement pratiqués par les grandes banques européennes.

### L'EONIA

Le premier taux de référence est l'EONIA (Euro OverNight Index Average). Il résulte de la moyenne pondérée de toutes les transactions au jour le jour de prêts réalisées par les banques retenues. La convention de l'EONIA est "actual/360" et est calculé à trois décimales par la Banque Centrale Européenne. Ce taux est diffusé chaque soir entre 18h45 et 19h00 (CET) par la Fédération Bancaire de l'Union Européenne.

### L'EURIBOR

Le second taux de reférence est l'EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate). L'Euribor désigne un groupe de taux d'intérêt de la devise Euro largement utilisés en Europe. Il fait partie des nombreux taux IBOR.

Le taux IBOR (Interbank Offered Rate) correspond au taux auquel une banque de première catégorie, à un moment donné et pour une échéance donnée, prête à une autre banque de première catégorie en blanc c'est à dire sans que le prêt soit gagé par des titres financiers.

Plus précisément, l'EURIBOR est le taux interbancaire offert entre les banques européennes de meilleures signatures pour la rémunération de dépôts dans la zone Euro. Il est calculé en effectuant une moyenne quotidienne des taux prêteurs sur 13 échéances communiquées par un échantillon de 57 établissements bancaires les plus actifs de la zone Euro. Il est calculé sur la base de 360 jours et est diffusé à 11h le matin si au moins 50% des établissements constituant l'échantillon ont effectivement fourni une contribution. La moyenne est effectuée après élimination des 15% de cotations extrêmes (le nombre éliminé est toujours arrondi) et exprimée avec trois décimales.

## A.2 Modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek a été proposé par Vasicek en 1977. On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On suppose que sous une probabilité risque-neutre $Q$ le taux court instantanné r suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficient constants :

$$dr_t = \beta(\mu - r_t)dt + \sigma dW_t, r(0) = r_0$$

avec $r_0$, $\sigma$, $\mu$ et $\sigma$ des constantes positives et $W_t$ un Q-mouvement brownien standard.

En mathématiques, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ou "mean-reverting process", est un processus stochastique décrit par l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = -\beta(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t$$

où $\beta > 0$, $\alpha$, $\sigma > 0$ et $X_0 = x_0$

Posons pour t $\in [0, T^*]$, $x_t = r_t - \theta$. Alors, $dx_t = -kx_t dt + \sigma dW_t$ et $x_0 = r - \theta$, ce qui prouve que $(x_t)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Les paramètres du modèle sont :
— $\beta$ : la vitesse de retour à la moyenne
— $\mu$ : la moyenne de long terme
— $\sigma$ : la volatilité du taux court

Le principe du retour à la moyenne implique que dans le long terme, toutes les trajectoires de r évoluent autour de la moyenne $\mu$. Lorsque le taux court est en dessous de $\mu$ le drift du processus est positif ; lorsque le taux court est au dessus de $\mu$ le drift du processus est négatif. Ainsi, dans tous les cas, $r_t$ est ramené vers la moyenne $\mu$.

On peut montrer que la solution de l'EDS s'écrit :

$$r(t) = r(s)e^{-\beta(t-s)} + \mu\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) + \sigma\int_s^t e^{-\beta(t-u)}dW_u \tag{7.1}$$

Ainsi, $r_t$ est distribué normalement conditionnement à $(\mathcal{F}_s)$, s<t, de moyenne et variance :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r_t|\mathcal{F}_s = r(s)e^{-\beta(t-s)} + \mu\left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)$$

$$Var_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2\beta}\left(1 - e^{(-2\beta(t-s)}\right)$$

Dans le modèle de Vasicek, le prix du zéro-coupon à la date t de maturité T s'écrit :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

avec

$$A(t,T) = exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2\beta^2})(B(t,T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4\beta}B(t,T)^2\right)$$

$$B(t,T) = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta(T-t))}$$