

# Modèles et Méthodes de Réserve

Petit Cours  
donné à l'Université de Strasbourg en Mai 2003  
par

**Klaus D. Schmidt**

Lehrstuhl für Versicherungsmathematik  
Technische Universität Dresden  
D – 01062 Dresden

E-mail: [schmidt@math.tu-dresden.de](mailto:schmidt@math.tu-dresden.de)  
Internet: [www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/](http://www.math.tu-dresden.de/sto/schmidt/)

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Notions de Base</b>	<b>1</b>
1.1	Représentation des Données . . . . .	1
1.2	Modèles de Développement . . . . .	4
1.3	Modèles Multiplicatifs . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Méthodes Basées sur les Facteurs</b>	<b>8</b>
2.1	La Méthode Chain–Ladder . . . . .	8
2.2	Le Modèle de Mack . . . . .	12
2.3	Le Modèle de Schnaus . . . . .	14
2.4	Prévision Optimale . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Méthodes Basées sur les Taux</b>	<b>17</b>
3.1	La Méthode Grossing–Up . . . . .	17
3.2	La Méthode Loss–Development . . . . .	20
3.3	La Méthode Bornhuetter–Ferguson . . . . .	22
3.4	La Méthode Benktander . . . . .	24
3.5	La Méthode Bornhuetter–Ferguson Itérative . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Méthodes Basées sur les Pourcentages</b>	<b>27</b>
4.1	La Méthode des Sommes Marginales . . . . .	27
4.2	Le Modèle Poisson . . . . .	29
4.3	Le Modèle Multinomial . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Modèles de Crédibilité</b>	<b>35</b>
5.1	Le Cadre Général . . . . .	35
5.2	Modèles avec un Paramètre Aléatoire . . . . .	38
5.3	Le Modèle de Mack . . . . .	39
5.4	Le Modèle de Witting . . . . .	41
5.5	Le Modèle de Hesselager et Witting . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Prévision dans les Modèles Linéaires</b>	<b>45</b>
6.1	Le Cadre Général . . . . .	45
6.2	Adaptation à la Réserve . . . . .	50
6.3	Le Modèle de Mack . . . . .	50
	<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

# Chapitre 1

## Notions de Base

Dans ce chapitre on développe une représentation canonique des données et on considère des modèles de développement et des modèles multiplicatifs.

### 1.1 Représentation des Données

Dans cette section, on développe une représentation des données qui sera utilisée dans tous les méthodes et modèles de réservation.

**Exemple.** Immédiatement après la fin de l'an 2000 on dispose des chiffres suivants qui représentent les prestations annuelles pour des sinistres des années d'origine 1995 à 2000:

Année d'Origine	Année de Développement					
	1995	1996	1997	1998	1999	2000
1995	1001	854	568	565	347	148
1996		1113	990	671	648	422
1997			1265	1168	800	744
1998				1490	1383	1007
1999					1725	1536
2000						1889

Pour mieux pouvoir détecter soit une structure de développement soit des sinistres extraordinaires ou des effets d'inflation, il est préférable d'utiliser une numérotation relative pour les années de développement:

**Exemple.** Passage à la numérotation relative des années de développement:

Année d'Origine	Année de Développement					
	0	1	2	3	4	5
1995	1001	854	568	565	347	148
1996	1113	990	671	648	422	
1997	1265	1168	800	744		
1998	1490	1383	1007			
1999	1725	1536				
2000	1889					

Pour la description et la modélisation mathématique des différents méthodes de réservation il est avantageux d'utiliser la numérotation relative non seulement pour les années de développement mais aussi pour les années d'origine:

**Exemple.** Passage à la numérotation relative des années d'origine:

Année d'Origine	Année de Développement					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	854	568	565	347	148
1	1113	990	671	648	422	
2	1265	1168	800	744		
3	1490	1383	1007			
4	1725	1536				
5	1889					

## Triangles et Carrés de Variables Aléatoires

On suppose que chaque sinistre sera réglé après  $n + 1$  années de développement, soit dans les  $n$  années civiles suivant l'année d'origine.

On considère une famille  $\{Z_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$  de variables aléatoires (positives) qui sont définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

On interprète  $Z_{i,k}$  comme paiement dans l'année de développement  $k$  pour des sinistres de l'année d'origine  $i$ . Alors  $Z_{i,k}$  signifie un paiement dans l'année civile  $i + k$ . Les variables aléatoires  $Z_{i,k}$  s'appellent *accroissements*.

On suppose que les accroissements  $Z_{i,k}$  sont *observables* (mais pas encore observées) pour  $i + k \leq n$  et *non-observables* (ou pas encore observables) pour  $i + k > n$ .

Les accroissements observables sont représentés dans un *triangle de développement*:

Année d'Origine	Année de Développement								
	0	1	...	$k$	...	$n-i$	...	$n-1$	$n$
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-i}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-i}$	...	$Z_{1,n-1}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			
$i$	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-i}$			
⋮	⋮	⋮		⋮					
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	...	$Z_{n-k,k}$					
⋮	⋮	⋮							
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$							
$n$	$Z_{n,0}$								

On appelle  $n$  la *durée du développement* ou *l'année civile actuelle*.

On considère aussi les *états*

$$S_{i,k} := \sum_{l=0}^k Z_{i,l}$$

qui sont observables pour  $i + k \leq n$  et non-observables pour  $i + k > n$ .

On a

$$Z_{i,k} = \begin{cases} S_{i,0} & \text{si } k = 0 \\ S_{i,k} - S_{i,k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Les états observables sont également représentés dans un *triangle de développement*:

Année d'Origine	Année de Développement								
	0	1	...	$k$	...	$n-i$	...	$n-1$	$n$
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮			
$i$	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$			
⋮	⋮	⋮		⋮					
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$					
⋮	⋮	⋮							
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$							
$n$	$S_{n,0}$								

L'état

$$S_{i,n-i}$$

s'appelle *état actuel*.

En ajoutant au triangle de développement les accroissements ou états non-observables, on obtient le *carré de développement pour les accroissements*

Année d'Origine	Année de Développement								
	0	1	...	$k$	...	$n-i$	...	$n-1$	$n$
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	...	$Z_{0,k}$	...	$Z_{0,n-i}$	...	$Z_{0,n-1}$	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	$Z_{1,k}$	...	$Z_{1,n-i}$	...	$Z_{1,n-1}$	$Z_{1,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$i$	$Z_{i,0}$	$Z_{i,1}$	...	$Z_{i,k}$	...	$Z_{i,n-i}$	...	$Z_{i,n-1}$	$Z_{i,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-k$	$Z_{n-k,0}$	$Z_{n-k,1}$	...	$Z_{n-k,k}$	...	$Z_{n-k,n-i}$	...	$Z_{n-k,n-1}$	$Z_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-1$	$Z_{n-1,0}$	$Z_{n-1,1}$	...	$Z_{n-1,k}$	...	$Z_{n-1,n-i}$	...	$Z_{n-1,n-1}$	$Z_{n-1,n}$
$n$	$Z_{n,0}$	$Z_{n,1}$	...	$Z_{n,k}$	...	$Z_{n,n-i}$	...	$Z_{n,n-1}$	$Z_{n,n}$

et le carré de développement pour les états

Année d'Origine	Année de Développement								
	0	1	...	$k$	...	$n-i$	...	$n-1$	$n$
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$i$	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$	...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-k$	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$	...	$S_{n-k,n-i}$	...	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮		⋮	⋮
$n-1$	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	...	$S_{n-1,k}$	...	$S_{n-1,n-i}$	...	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
$n$	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	...	$S_{n,k}$	...	$S_{n,n-i}$	...	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

L'état

$$S_{i,n}$$

s'appelle *état terminal* de l'année d'origine  $i$  et la différence

$$R_i := S_{i,n} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve* de l'année d'origine  $i$ .

## 1.2 Modèles de Développement

La plupart des méthodes et des modèles de réservation est basée sur l'idée qu'il existe un certain modèle de développement. Il y a plusieurs possibilités pour définir un modèle de développement. Ici nous considérons trois modèles de développement et nous démontrons que ces trois modèles de développement sont en fait équivalents:

### Modèle de Développement pour les Pourcentages

Dans le modèle de développement pour les pourcentages on compare les espérances des accroissements avec les espérances des états terminaux:

**Modèle de Développement pour les Pourcentages:** *Il y a des paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0,1)$  avec  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  tels que*

$$E[Z_{i,k}] = E[S_{i,n}] \cdot \vartheta_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0,1, \dots, n\}$ .*

Les paramètres d'un modèle de développement pour les pourcentages s'appellent *pourcentages de développement*.

## Modèle de Développement pour les Taux

Dans le modèle de développement pour les pourcentages on compare les espérances des états avec les espérances des états terminaux:

**Modèle de Développement pour les Taux:** *Il y a des paramètres  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0,1]$  avec  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1$  tels que*

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n}] \cdot \gamma_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0,1, \dots, n\}$ .*

Les paramètres d'un modèle de développement pour les taux s'appellent *taux de développement*.

## Modèle de Développement pour les Facteurs

Dans le modèle de développement pour les pourcentages on compare les espérances de deux états successifs:

**Modèle de Développement pour les Facteurs:** *Il y a des paramètres  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in (1, \infty)$  tels que*

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,k-1}] \cdot \varphi_k$$

*pour tout  $i \in \{0,1, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ .*

Les paramètres d'un modèle de développement pour les facteurs s'appellent *facteurs de développement*.

## Comparaison

Le théorème suivant montre que les trois modèles de développement sont équivalents:

**Théorème.**

- (1) *Soit  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  un modèle de développement pour les pourcentages. Pour  $k \in \{0,1, \dots, n\}$  on définit*

$$\gamma_k := \sum_{l=0}^k \vartheta_l$$

*Alors  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  est un modèle de développement pour les taux.*

- (2) *Soit  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  un modèle de développement pour les taux. Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  on définit*

$$\varphi_k := \gamma_k / \gamma_{k-1}$$

*Alors  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  est un modèle de développement pour les facteurs.*

- (3) Soit  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un modèle de développement pour les facteurs. Pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  on définit

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l}$$

Alors  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  est un modèle de développement pour les taux.

- (4) Soit  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  un modèle de développement pour les taux. Pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  on définit

$$\vartheta_k := \begin{cases} \gamma_0 & \text{si } k = 0 \\ \gamma_k - \gamma_{k-1} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Alors  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  est un modèle de développement pour les pourcentages.

Comme corollaire du théorème, on obtient un résultat supplémentaire:

**Corollaire.**

- (1) Soit  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  un modèle de développement pour les pourcentages. Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  on définit

$$\varphi_k := \frac{\sum_{l=0}^k \vartheta_l}{\sum_{l=0}^{k-1} \vartheta_l}$$

Alors  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  est un modèle de développement pour les taux.

- (2) Soit  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  un modèle de développement pour les facteurs. Pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  on définit

$$\vartheta_k := \begin{cases} \prod_{l=1}^n \frac{1}{\varphi_l} & \text{si } k = 0 \\ \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l} - \prod_{l=k}^n \frac{1}{\varphi_l} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Alors  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  est un modèle de développement pour les pourcentages.

On présente enfin un exemple qui illustre les différents modèles de développement:

**Exemple.**

		Année de Développement $k$					
		0	1	2	3	4	5
<b>Pourcentages</b>	$\vartheta_k$	0,400	0,240	0,160	0,120	0,046	0,034
<b>Taux</b>	$\gamma_k$	0,400	0,640	0,800	0,920	0,966	1
<b>Facteurs</b>	$\varphi_k$		1,600	1,250	1,150	1,050	1,035

## 1.3 Modèles Multiplicatifs

Les modèles multiplicatifs sont liés aux modèles de développement, mais ils sont légèrement plus précis.

Ici nous considérons deux modèles multiplicatifs qui sont en fait équivalents:

### Modèle Multiplicatif pour les Accroissements

Le modèle multiplicatif pour les accroissements est lié au modèle de développement pour les pourcentages:

**Modèle Multiplicatif pour les Accroissements:** *Il y a des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  et  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0, 1)$  avec  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  tels que*

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \vartheta_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Dans le modèle multiplicatif pour les accroissements on a

$$E[S_{i,n}] = \sum_{k=0}^n E[Z_{i,k}] = \sum_{k=0}^n \alpha_i \vartheta_k = \alpha_i$$

Le paramètre  $\alpha_i$  est donc l'espérance de l'état terminal de l'année d'origine  $i$  et les paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  forment un modèle de développement pour les pourcentages.

### Modèle Multiplicatif pour les États

Le modèle multiplicatif pour les états est lié au modèle de développement pour les taux:

**Modèle Multiplicatif pour les États:** *Il y a des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  et  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1]$  avec  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1$  tels que*

$$E[S_{i,k}] = \alpha_i \gamma_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Dans le modèle multiplicatif pour les états on a

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i$$

Le paramètre  $\alpha_i$  est donc l'espérance de l'état terminal de l'année d'origine  $i$  et les paramètres  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  forment un modèle de développement pour les taux.

# Chapitre 2

## Méthodes Basées sur les Facteurs

Dans ce chapitre on étudie la méthode chain–ladder qui est liée au modèle de développement pour les facteurs, ainsi que certaines modifications de cette méthode. On étudie également deux modèles stochastiques qui servent à justifier la méthode chain–ladder.

### 2.1 La Méthode Chain–Ladder

La méthode chain–ladder est basée sur le modèle suivant:

**Modèle Chain–Ladder:**

(i) Il y a des paramètres  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in (1, \infty)$  tels que

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,k-1}] \cdot \varphi_k$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

(ii) Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  on a  $\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1} > 0$ .

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle chain–ladder sont satisfaites et que les paramètres  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont inconnus.

### Facteurs de Chain–Ladder et Estimateurs de Chain–Ladder

La méthode chain–ladder procède en deux pas:

- Pour chaque année de développement  $k \in \{1, \dots, n\}$  on définit le *facteur de chain–ladder*

$$\widehat{F}_k^{\text{CL}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

comme estimateur du paramètre  $\varphi_k$ .

- Pour chaque année d'origine  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et chaque année de développement  $k \in \{n-i, \dots, n\}$  on définit l'*estimateur de chain–ladder*

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{F}_l^{\text{CL}}$$

comme estimateur de l'espérance  $E[S_{i,k}]$  de l'état futur  $S_{i,k}$ .

On a donc  $\widehat{S}_{i,n-i}^{\text{CL}} = S_{i,n-i}$  et

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} = \widehat{S}_{i,k-1}^{\text{CL}} \widehat{F}_k^{\text{CL}}$$

pour tout  $k \in \{n-i+1, \dots, n\}$ .

**Exemple.** Pour le triangle de développement

Année d'Origine	Année de Développement					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					

on obtient les réalisations des derniers facteurs de chain–ladder

$$\begin{aligned} & \frac{3483}{3335} \approx 1.044 \\ \frac{3335 + 3844}{2988 + 3422} &= \frac{7179}{6410} \approx 1.120 \\ \frac{2988 + 3422 + 3977}{2423 + 2774 + 3233} &= \frac{10387}{8430} \approx 1.232 \\ & \dots \end{aligned}$$

et les réalisations des estimateurs de chain–ladder

$$\begin{aligned} 3880 \times 1.232 &\approx 4780 \\ 4780 \times 1.120 &\approx 5354 \\ 5354 \times 1.044 &\approx 5590 \\ & \dots \end{aligned}$$

Il en résulte le carré de développement complété

Année d'Origine	Année de Développement					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	4013
2	1265	2433	3233	3977	4454	4650
3	1490	2873	3880	4780	5354	5590
4	1725	3261	4334	5339	5980	6243
5	1889	3587	4767	5873	6578	6867
<b>Facteur</b>		1.899	1.329	1.232	1.120	1.044

## Réserves de Chain–Ladder

Pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , la différence

$$\widehat{R}_i^{\text{CL}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{CL}} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve de chain-ladder* pour l'année d'origine  $i$ . On a  $\widehat{R}_0^{\text{CL}} = 0$ . La somme

$$\widehat{R}^{\text{CL}} := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{CL}}$$

s'appelle *réserve globale de chain-ladder* pour l'ensemble de toutes les années de développement.

**Exemple.** Pour l'année d'origine 3 on obtient la réserve

$$5590 - 3880 = 1710$$

Ainsi on obtient le tableau suivant:

Année d'Origine	Année de développement						Réserve
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	0
1	1113	2103	2774	3422	3844	4013	169
2	1265	2433	3233	3977	4454	4650	673
3	1490	2873	3880	4780	5354	5590	1710
4	1725	3261	4334	5339	5980	6243	2982
5	1889	3587	4767	5873	6578	6867	4978
<b>Somme</b>							10512

La réserve globale de chain-ladder est égale à 10512.

## Chain-Ladder et Grossing-Up

A partir du modèle de développement  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  pour les facteurs, on obtient un modèle de développement  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  pour les taux en posant

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l}$$

En utilisant les *taux de chain-ladder*

$$\widehat{G}_k^{\text{CL}} := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\widehat{F}_l^{\text{CL}}}$$

on peut écrire les estimateurs de chain-ladder dans la forme

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} = \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{G}_{n-i}^{\text{CL}}} \widehat{G}_k^{\text{CL}}$$

Ceci veut dire que l'on obtient les estimateurs de chain-ladder a partir de l'état actuel  $S_{i,n-i}$  par deux changements d'échelle, en passant d'abord au niveau de l'état terminal  $S_{i,n}$  et puis au niveau de l'état  $S_{i,k}$  dont il faut estimer l'espérance. Cette représentation des estimateurs de chain-ladder est intimement liée à la définition des estimateurs de grossing-up.

## Une Autre Explication de la Méthode Chain–Ladder

Si l'on suppose que tous les états sont strictement positifs, on peut définir les *facteurs de développement individuels*

$$F_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$$

Les facteurs de développement individuels sont observables pour  $i+k \leq n$  et ils sont non-observables pour  $i+k > n$ .

À l'aide des facteurs de développement individuels non-observables, on peut écrire les états non-observables de la manière suivante:

$$S_{i,k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k F_{i,l}$$

Si l'on remplace les facteurs de développement individuels par les facteurs de chain–ladder, on arrive à la définition des estimateurs de chain–ladder

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{F}_l^{\text{CL}}$$

En plus, les facteurs de chain–ladder

$$\widehat{F}_k^{\text{CL}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}$$

se montrent comme moyennes pondérées de facteurs de développement observables:

$$\widehat{F}_k^{\text{CL}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} F_{j,k}$$

**Exemple.** Pour le facteur de développement de l'année d'origine 3 et de l'année de développement 2 on obtient la réalisation

$$\frac{3880}{2873} \approx 1.351$$

Ainsi on obtient le tableau suivant:

Année d'Origine	Année de Développement					
	0	1	2	3	4	5
0		1.853	1.306	1.233	1.116	1.044
1		1.889	1.319	1.234	1.123	
2		1.923	1.329	1.230		
3		1.928	1.351			
4		1.890				
5						
<b>Facteur</b>		1.899	1.329	1.232	1.120	1.044

On remarque que, dans chaque colonne, les facteurs de développement individuels ne diffèrent que très peu.

## Modifications de la Méthode Chain–Ladder

Supposons encore que tous les états sont strictement positifs, on peut modifier la méthode chain–ladder de la manière suivante:

- Pour chaque année de développement  $k \in \{1, \dots, n\}$  on choisit une famille  $\{W_{j,k}\}_{j \in \{0,1,\dots,n-k\}}$  de variables aléatoires telle que  $\sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} = 1$  et on définit le *facteur de chain–ladder modifié*

$$\widehat{F}_k := \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} F_{j,k}$$

- Pour chaque année d'origine  $i \in \{0,1, \dots, n\}$  et chaque année de développement  $k \in \{n-i, \dots, n\}$  on définit l'*estimateur de chain–ladder modifié*

$$\widehat{S}_{i,k} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{F}_l$$

En vue de la diversité des possibilités de choisir les poids, il se pose la question

- sous quelles conditions et
- dans quel sens

les *poids de chain–ladder*

$$W_{j,k}^{\text{CL}} := \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}}$$

présentent un choix optimal.

## 2.2 Le Modèle de Mack

Le modèle de Mack est un des premiers modèles stochastiques (sinon *le* premier modèle stochastique) pour la méthode chain–ladder.

Pour la définition du modèle de Mack, on a besoin des tribus

$$\mathcal{F}_{i,k} := \sigma(\{S_{i,l}\}_{l \in \{0,1,\dots,k\}})$$

avec  $i, k \in \{0,1, \dots, n\}$ .

### Modèle de Mack:

- Les années d'origine sont indépendantes.*
- Pour tout  $i \in \{0,1, \dots, n\}$  on a  $E[S_{i,n}] > 0$ .*
- Il y a des paramètres  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in (1, \infty)$  et  $v_1, \dots, v_n \in (0, \infty)$  tels que*

$$\begin{aligned} E(S_{i,k} | \mathcal{F}_{i,k-1}) &= S_{i,k-1} \varphi_k \\ \text{var}(S_{i,k} | \mathcal{F}_{i,k-1}) &= S_{i,k-1} v_k \end{aligned}$$

*pour tout  $i \in \{0,1, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ .*

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle de Mack sont satisfaites et que les paramètres  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  et  $v_1, \dots, v_n$  sont inconnus.

La première partie de la condition (iii) est équivalente à la condition suivante:

Il y a des paramètres  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in (1, \infty)$  tels que

$$E\left(S_{i,k} \prod_{l=k+1}^n \varphi_l \mid \mathcal{F}_{i,k-1}\right) = S_{i,k-1} \prod_{l=k}^n \varphi_l$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$

En posant

$$\gamma_k := \prod_{l=k+1}^n \frac{1}{\varphi_l}$$

dans cette dernière condition, celle-ci peut être écrite de la manière suivante:

Il y a des paramètres  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1]$  tels que  $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1$  et

$$E\left(\frac{S_{i,k}}{\gamma_k} \mid \mathcal{F}_{i,k-1}\right) = \frac{S_{i,k-1}}{\gamma_{k-1}}$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$

Cette condition dit que, pour chaque année d'origine  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , la famille  $\{S_{i,k}\}_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$  forme une martingale par rapport à la filtration  $\{\mathcal{F}_{i,k}\}_{k \in \{0, 1, \dots, n\}}$ .

Il est immédiatement claire de la définition que le modèle de Mack est un modèle de développement pour les facteurs. Le résultat suivant est légèrement plus précis:

**Théorème.** *Le modèle de Mack est un modèle multiplicatif.*

Supposons maintenant que tous les états sont strictement positifs. Dans ce cas, la première identité de la condition (iii) s'écrit aussi comme une propriété des facteurs de développement individuels:

$$E(F_{i,k} \mid \mathcal{F}_{i,k-1}) = \varphi_k$$

A partir de cette équation on obtient les identités

$$E(S_{i,k} \mid \mathcal{F}_{i,n-i}) = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l$$

et

$$E(\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} \mid \mathcal{F}_{i,n-i}) = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l$$

On en tire un résultat assez remarquable:

**Théorème.** *Dans le modèle de Mack, les estimateurs de chain-ladder sont non-biaisés.*

Cependant, il se trouve que les estimateurs de chain–ladder ne sont pas les seuls estimateurs non–biaisés des espérances des états futurs. Pour le voir, on considère les tribus

$$\mathcal{F}_k := \sigma(\{S_{j,l}\}_{j \in \{0,1,\dots,n\}, l \in \{0,1,\dots,k\}})$$

avec  $k \in \{0,1,\dots,n\}$ . Ensuite on choisit pour chaque  $k \in \{1,\dots,n\}$  une famille  $\{W_{j,k}\}_{j \in \{0,1,\dots,n-k\}}$  de variables aléatoires mesurables par rapport à  $\mathcal{F}_{k-1}$  telle que  $\sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} = 1$  et on définit

$$\widehat{F}_k := \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} F_{j,k}$$

et

$$\widehat{S}_{i,k} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{F}_l$$

On démontre que ces *estimateurs des chain–ladder modifiés* sont également des estimateurs non–biaisés.

L'absence du biais n'est donc pas une propriété qui justifie de choisir les estimateurs de chain–ladder. Cependant, les estimateurs de chain–ladder peuvent être distingués parmi les estimateurs de chain–ladder modifiés par un certain critère d'optimisation, et ceci est même possible dans un modèle qui est un peu plus générale que le modèle de Mack.

## 2.3 Le Modèle de Schnaus

Le modèle de Schnaus est entièrement formulé par des conditions concernant des moments conditionnels:

**Modèle de Schnaus:**

- (i) Pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$  on a  $E[S_{i,n}] > 0$ .
- (ii) Il y a des variables aléatoires  $F_1, \dots, F_n > 1$  et  $V_1, \dots, V_n > 0$  telles que

$$\begin{aligned} E(S_{i,k} | \mathcal{F}_{k-1}) &= S_{i,k-1} F_k \\ \text{cov}(S_{i,k}, S_{j,k} | \mathcal{F}_{k-1}) &= S_{i,k-1} V_k \delta_{i,j} \end{aligned}$$

pour tout  $i, j \in \{0,1,\dots,n\}$  et  $k \in \{1,\dots,n\}$ .

La comparaison des modèles de Mack et de Schnaus n'est pas évidente, mais on a le résultat suivant:

**Théorème.** *Le modèle de Mack implique le modèle de Schnaus.*

On peut même démontrer que le modèle de Schnaus est une généralisation stricte du modèle de Mack:

**Exemple.** Soit  $n = 1$  et supposons que la distribution des accroissements soit donnée par

$$P\left[\bigcap_{i=0}^1 \bigcap_{k=0}^1 \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = e^{-\alpha} \frac{\alpha^{z_{0,0}}}{z_{0,0}!} e^{-z_{0,0}^2} \frac{(z_{0,0}^2)^{z_{0,1}}}{z_{0,1}!} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{z_{1,0}}}{z_{1,0}!} e^{-z_{0,0}z_{1,0}} \frac{(z_{0,0}z_{1,0})^{z_{1,1}}}{z_{1,1}!}$$

avec  $\alpha \in (0, \infty)$ . Alors les conditions du modèle de Schnaus sont satisfaites avec

$$\begin{aligned} F_1 &= Z_{0,0} + 1 \\ V_1 &= Z_{0,0} \end{aligned}$$

Puisque les variables aléatoires  $F_1$  et  $V_1$  ne sont pas constantes, les conditions du modèle de Mack ne sont pas satisfaites. En plus, on a

$$\begin{aligned} E[Z_{0,0}] &= \alpha \\ E[Z_{0,1}] &= \alpha^2 + \alpha \\ E[Z_{1,0}] &= \alpha \\ E[Z_{1,1}] &= \alpha^2 \end{aligned}$$

Le modèle présent n'est donc pas un modèle multiplicatif.

L'exemple précédant montre que le modèle de Schnaus n'est pas nécessairement un modèle de développement.

## 2.4 Prévision Optimale

Nous allons maintenant étudier la question si les estimateurs de chain-ladder sont optimaux dans un certain sens. Pour le faire, nous supposons que tous les états sont strictement positifs.

Pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ , soit

$$\Phi_k$$

la collection des facteurs de chain-ladder modifiés. Alors il existe, pour chaque  $\widehat{F}_k \in \Phi_k$ , une famille  $\{W_{j,k}\}_{j \in \{0,1,\dots,n-k\}}$  de variables aléatoires mesurables par rapport à  $\mathcal{F}_{k-1}$  telle que  $\sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} = 1$  et

$$\widehat{F}_k = \sum_{j=0}^{n-k} W_{j,k} F_{j,k}$$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $k \in \{n-i+1, \dots, n\}$ , soit

$$\Delta_{i,k}$$

la collection des estimateurs de chain-ladder modifiés pour (l'espérance de) l'état  $S_{i,k}$ . Alors il existe, pour chaque  $\widehat{S}_{i,k} \in \Delta_{i,k}$ , une famille  $\{\widehat{F}_l\}_{l \in \{n-i+1, \dots, k\}}$  avec  $\widehat{F}_l \in \Phi_l$  pour tout  $l \in \{n-i+1, \dots, k\}$  telle que

$$\widehat{S}_{i,k} = S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \widehat{F}_l$$

Évidemment, on a  $\widehat{F}_k^{\text{CL}} \in \Phi_k$  et  $\widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}} \in \Delta_{i,k}$ .

Un estimateur dans la collection  $\Delta_{i,k}$  s'appelle *estimateur admissible* pour l'état  $S_{i,k}$ , et un estimateur admissible pour  $S_{i,k}$  s'appelle *estimateur optimal* s'il minimise l'erreur quadratique conditionnelle

$$E\left(\left(\widehat{S}_{i,k} - S_{i,k}\right)^2 \mid \mathcal{F}_{n-i}\right)$$

dans  $\Delta_{i,k}$ . On a le résultat suivant:

**Théorème.** *Dans le modèle de Schnaus, l'estimateur de chain-ladder  $\widehat{S}_{i,n-i+1}^{\text{CL}}$  est un estimateur optimal pour  $S_{i,n-i+1}$ , et c'est le seul estimateur optimal.*

Ce résultat est très satisfaisant, mais il s'applique seulement à la première année civile non-observable. Pour la deuxième année civile non-observable, la situation est complètement différente:

**Théorème.** *Dans le modèle de Mack, l'estimateur de chain-ladder  $\widehat{S}_{i,n-i+2}^{\text{CL}}$  n'est pas nécessairement un estimateur optimal pour  $S_{i,n-i+2}$ .*

Ce résultat négatif indique que le critère qu'on a utilisé jusqu'ici pour juger la qualité des estimateurs n'est peut-être pas tout à fait approprié.

Si l'on considère que l'estimation pour le futur proche est beaucoup plus important que l'estimation pour le futur éloigné, on arrive à un autre critère qui est hiérarchique. Le *critère hiérarchique* impose, pour  $k \geq n-i+1$ , la restriction aux estimateurs admissibles  $\widehat{S}_{i,k}$  qui ont la forme

$$\widehat{S}_{i,k} = S_{i,k-1}^{\text{CL}} \widehat{F}_k$$

avec  $\widehat{F}_k \in \Phi_k$ .

**Théorème.** *Dans le modèle de Schnaus et sous le critère hiérarchique, chaque estimateur de chain-ladder est un estimateur optimal.*

Ce dernier résultat peut être considéré comme justification, ou bien comme explication, de la méthode chain-ladder.

# Chapitre 3

## Méthodes Basées sur les Taux

Dans ce chapitre on étudie plusieurs méthodes liées au modèle de développement pour les taux.

### 3.1 La Méthode Grossing-Up

La méthode grossing-up est basée sur le modèle suivant:

**Modèle Grossing-Up:**

- (i) Il y a des paramètres  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1]$  avec  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1$  tels que

$$E[S_{i,k}] = E[S_{i,n}] \cdot \gamma_k$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

- (ii) Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  on a  $\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1} > 0$ .

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle grossing-up sont satisfaites et que les paramètres  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  sont inconnus.

### Taux de Grossing-Up et Estimateur de Grossing-Up

La méthode grossing-up est définie par une procédure récursive:

Pour chaque année d'origine  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on définit d'abord le *taux de grossing-up*

$$\widehat{G}_{n-i}^{\text{GU}} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \frac{\sum_{j=0}^{i-1} S_{j,n-i}}{\sum_{j=0}^{i-1} \widehat{S}_{j,n}^{\text{GU}}} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

comme estimateur du paramètre  $\gamma_{n-i}$  et puis on définit l'*estimateur de grossing-up*

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}} := \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{G}_{n-i}^{\text{GU}}}$$

comme estimateur de l'espérance  $E[S_{i,n}]$  de l'état terminal  $S_{i,n}$ . On a  $\widehat{S}_{0,n}^{\text{GU}} = S_{0,n}$ .

Dans la méthode grossing—up, on obtient les estimateurs de grossing—up à partir de l'état actuel  $S_{i,n-i}$  par un changement d'échelle, en passant au niveau de l'état terminal  $S_{i,n}$

La méthode grossing—up peut être étendue pour obtenir aussi des estimateurs des espérances des autres états futurs en définissant

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{GU}} := \widehat{G}_k^{\text{GU}} \widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}}$$

On a  $\widehat{S}_{i,n-i}^{\text{GU}} = S_{i,n-i}$ .

### Réserves de Grossing—Up

Pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  la différence

$$\widehat{R}_i^{\text{GU}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve de grossing—up* pour l'année d'origine  $i$ . On a

$$\widehat{R}_i^{\text{GU}} = \left(1 - \widehat{G}_{n-i}^{\text{GU}}\right) \widehat{S}_{i,n}^{\text{GU}}$$

La somme

$$\widehat{R}^{\text{GU}} := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{GU}}$$

s'appelle *réserve globale de grossing—up* pour l'ensemble de toutes les années de développement.

**Exemple.** Pour le triangle de développement

Année d'Origine	Année de Développement					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					

on obtient les réalisations des taux de grossing—up des dernières années de développement et des estimateurs de grossing—up des premières années d'origine

$$\begin{array}{rcccl}
 & & & 1.000 & \frac{3483}{1.000} = 3483 \\
 & & & & \frac{3844}{0.958} \approx 4013 \\
 & & \frac{3335}{3483} \approx 0.958 & & \\
 \frac{2988 + 3422}{3483 + 4013} = \frac{6410}{7496} \approx 0.855 & & & & \frac{3977}{0.855} \approx 4651
 \end{array}$$

Il en résulte le carré de développement complété

Année d'origine	Année de Développement						Réserve
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	0
1	1113	2103	2774	3422	3844	4013	169
2	1265	2433	3233	3977		4651	674
3	1490	2873	3880			5591	1711
4	1725	3261				6247	2986
5	1889					6869	4980
<b>Taux</b>	0.275	0.522	0.694	0.855	0.958	1.000	
<b>Somme</b>							10520

La réserve globale de grossing–up est égale à 10520.

## Grossing–Up et Chain–Ladder

Les réalisations des réserves de grossing–up calculées dans l'exemple diffèrent légèrement des réalisations des réserves de chain–ladder. Il se trouve que ces différences sont dues exclusivement à l'arrondissement des chiffres présentés dans les tableaux.

Le lemme suivant établit une relation fondamentale entre les taux de grossing–up et les facteurs et les taux de chain–ladder:

**Lemme.** *On a*

$$\widehat{G}_{k-1}^{\text{GU}} \widehat{F}_k^{\text{CL}} = \widehat{G}_k^{\text{GU}}$$

et

$$\widehat{G}_k^{\text{GU}} = \widehat{G}_k^{\text{CL}}$$

pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Du lemme on déduit le résultat suivant:

**Théorème.** *On a*

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{GU}} = \widehat{S}_{i,k}^{\text{CL}}$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{n-i, \dots, n\}$ .

À cause du théorème, les estimateurs de grossing–up et les estimateurs de chain–ladder sont identiques pour tous les états futurs.

## Modifications de la Méthode Grossing–Up

L'identité

$$\widehat{G}_{n-i} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\widehat{S}_{j,n}^{\text{GU}}}{\sum_{h=0}^{i-1} \widehat{S}_{h,n}^{\text{GU}}} \frac{S_{j,n-i}}{\widehat{S}_{j,n}^{\text{GU}}}$$

montre que les taux de grossing-up peuvent être représentés comme moyennes pondérées des *taux de développement individuels*

$$\widehat{G}_{j,n-i} := \frac{S_{j,n-i}}{\widehat{S}_{j,n}^{\text{GU}}}$$

On obtient donc une modification de la méthode grossing-up en choisissant, pour chaque année de développement  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ , une famille  $\{W_{j,k}\}_{j \in \{0, 1, \dots, n-k-1\}}$  de variables aléatoires satisfaisant  $\sum_{j=0}^{n-k-1} W_{j,k} = 1$  et en définissant pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\widehat{G}_{n-i} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ \sum_{j=0}^{i-1} W_{j,n-i} \frac{S_{j,n-i}}{\widehat{S}_{j,n}} & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\widehat{S}_{i,n} := \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{G}_{n-i}}$$

Pour choisir les poids  $W_{j,k}$  on a les mêmes possibilités comme dans le cas de la méthode chain-ladder.

## 3.2 La Méthode Loss-Development

La méthode loss-development est une généralisation de la méthode chain-ladder. Elle est basée sur le modèle multiplicatif pour les états:

**Modèle Multiplicatif pour les États:** *Il y a des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  et  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1]$  avec  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1$  tels que*

$$E[S_{i,k}] = \alpha_i \gamma_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle multiplicatif pour les états sont satisfaites et que les paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  et  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  sont inconnus.

La méthode loss-development repose sur des *estimateurs a-priori*

$$\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_n$$

avec  $\widehat{\gamma}_n := 1$  comme estimateurs des taux de développement et elle utilise les *estimateurs de loss-development*

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}} := \widehat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

comme estimateurs des espérances  $E[S_{i,k}]$  des états futurs  $S_{i,k}$ .

On a

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}} = \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

et alors

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}} = \widehat{\gamma}_k \widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}}$$

La différence

$$\widehat{R}_i^{\text{LD}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve de loss–development* pour l'année de développement  $i$ . Les réserves de loss–development peuvent être écrites dans la forme

$$\widehat{R}_i^{\text{LD}} = (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}}$$

La somme

$$\widehat{R}^{\text{LD}} := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{LD}}$$

s'appelle *réserve globale de loss–development* pour l'ensemble de toutes les années de développement.

**Exemple.** Nous considérons un triangle de développement, complété par des réalisations des estimateurs a–priori des taux de développement qui ne sont pas obtenues par les données du triangle de développement:

Année d'Origine	Année de Développement $k$					
	0	1	2	3	4	5
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483
1	1113	2103	2774	3422	3844	
2	1265	2433	3233	3977		
3	1490	2873	3880			
4	1725	3261				
5	1889					
$\widehat{\gamma}_k$	0.280	0.510	0.700	0.860	0.950	1.000

Avec les réalisations des estimateurs de loss–development on obtient le tableau suivant:

Année d'Origine	Année de Développement $k$						Réserve
	0	1	2	3	4	5	
0	1001	1855	2423	2988	3335	3483	0
1	1113	2103	2774	3422	3844	4046	202
2	1265	2433	3233	3977	4393	4624	647
3	1490	2873	3880	4767	5266	5543	1663
4	1725	3261	4476	5499	6074	6394	3133
5	1889	3441	4722	5802	6409	6746	4857
$\widehat{\gamma}_k$	0.280	0.510	0.700	0.860	0.950	1.000	
<b>Somme</b>							10502

La réserve globale de loss–development est égale à 10502.

Le théorème suivant montre que la méthode loss–development est en fait une généralisation de la méthode chain–ladder:

**Théorème.** *Si l'on choisit les estimateurs a–priori des taux de développement comme*

$$\widehat{\gamma}_k := \prod_{l=k+1}^n \frac{\sum_{j=0}^{n-l} S_{j,l-1}}{\sum_{j=0}^{n-l} S_{j,l}}$$

*alors les estimateurs de loss–development et les estimateurs de chain–ladder sont identiques.*

D'autre part, la méthode loss–development est un cas particulier de la méthode Bornhuetter–Ferguson.

### 3.3 La Méthode Bornhuetter–Ferguson

La méthode Bornhuetter–Ferguson est une autre méthode basée sur le modèle multiplicatif pour les états:

**Modèle Multiplicatif pour les États:** *Il y a des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  et  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1]$  avec  $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1$  tels que*

$$E[S_{i,k}] = \alpha_i \gamma_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle multiplicatif pour les états sont satisfaites et que les paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  et  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  sont inconnus.

La méthode Bornhuetter–Ferguson repose sur des *estimateurs a–priori*

$$\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_n$$

avec  $\widehat{\gamma}_n := 1$  comme estimateurs des taux de développement et aussi sur des *estimateurs a–priori*

$$\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$$

comme estimateurs a–priori des espérances des états terminaux.

Les *estimateurs de Bornhuetter–Ferguson* des espérances des états futurs  $S_{i,k}$  sont définis par

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{BF}} := S_{i,n-i} + \left( \widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \widehat{\alpha}_i$$

Les estimateurs de Bornhuetter–Ferguson

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}} = S_{i,n-i} + \left( 1 - \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \widehat{\alpha}_i$$

s'appellent aussi *estimateurs a–posteriori*; en général, ils diffèrent des estimateurs a–priori.

La différence

$$\widehat{R}_i^{\text{BF}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve de Bornhuetter–Ferguson* pour l'année d'origine  $i$ . On a

$$\widehat{R}_i^{\text{BF}} = (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i$$

De cette identité on voit que les réserves de Bornhuetter–Ferguson sont entièrement déterminées par les estimateurs a-priori.

La somme

$$\widehat{R}^{\text{BF}} := \sum_{i=0}^n \widehat{R}_i^{\text{BF}}$$

s'appelle *réserve globale de Bornhuetter–Ferguson*.

**Exemple.**

Année d'Origine $i$	$\widehat{\alpha}_i$	Année de Développement $k$						Réserve
		0	1	2	3	4	5	
0	3517	1001	1855	2423	2988	3335	3483	0
1	3981	1113	2103	2774	3422	3844	4011	167
2	4598	1265	2433	3233	3977	4451	4644	667
3	5658	1490	2873	3880	4791	5374	5611	1731
4	6214	1725	3261	4330	5330	5970	6231	2970
5	6325	1889	3451	4539	5558	6209	6475	4586
$\widehat{\gamma}_k$		0.275	0.522	0.694	0.855	0.958	1.000	
<b>Somme</b>								10121

La réserve globale de Bornhuetter–Ferguson est égale à 10121.

Les estimateurs de Bornhuetter–Ferguson des états terminaux peuvent être écrits comme combinaisons convexes des estimateurs de loss–development et des estimateurs a-priori:

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}} = \widehat{\gamma}_{n-i} \widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i$$

On en déduit que la méthode loss–development est un cas spécial de la méthode Bornhuetter–Ferguson:

**Théorème.** *Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , soit*

$$\widehat{\alpha}_i := \frac{S_{i,n-1}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

*Alors les estimateurs de Bornhuetter–Ferguson et les estimateurs de loss–development sont identiques.*

Puisque la méthode chain–ladder est un cas spécial de la méthode loss–development, elle est aussi un cas spécial de la méthode Bornhuetter–Ferguson.

### 3.4 La Méthode Benktander

Pour mieux tenir compte des données du triangle de développement, Benktander a proposé une modification de la méthode Bornhuetter–Ferguson.

Comme la méthode de Bornhuetter–Ferguson, la méthode de Benktander est basée sur le modèle multiplicatif pour les états et elle repose sur des *estimateurs a-priori*

$$\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \dots, \widehat{\gamma}_n$$

avec  $\widehat{\gamma}_n := 1$  comme estimateurs des taux de développement et aussi sur des *estimateurs a-priori*

$$\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n$$

comme estimateurs a-priori des espérances des états terminaux.

Les estimateurs de Benktander utilisent les estimateurs de Bornhuetter–Ferguson au lieu des estimateurs a-priori des états terminaux et ils sont définis comme

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{BE}} := S_{i,n-i} + \left( \widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}}$$

En particulier, on a

$$\widehat{S}_{i,n}^{\text{BE}} = S_{i,n-i} + \left( 1 - \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}}$$

Les estimateurs de Benktander des états terminaux peuvent être écrits comme combinaisons convexes des estimateurs de loss–development et des estimateurs de Bornhuetter–Ferguson:

$$\widehat{S}_{i,k}^{\text{BE}} = \widehat{\gamma}_{n-i} \widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}} + \left( 1 - \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \widehat{S}_{i,k}^{\text{BF}}$$

Puisque la méthode loss–development est un cas particulier de la méthode Bornhuetter–Ferguson, il découle de la dernière identité que la méthode loss–development est aussi un cas particulier de la méthode Benktander.

La différence

$$\widehat{R}_i^{\text{BE}} := \widehat{S}_{i,n}^{\text{BE}} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve de Benktander*. Les réserves de Benktander peuvent être écrits comme

$$\widehat{R}_i^{\text{BE}} = \left( 1 - \widehat{\gamma}_{n-i} \right) \widehat{S}_{i,n}^{\text{BF}}$$

Ceci montre que les réserves de Benktander ne dépendent pas seulement des estimateurs a-priori, mais aussi des états actuels.

## 3.5 La Méthode Bornhuetter–Ferguson Itérative

La méthode Benktander peut être considérée comme une interpolation entre la méthode Bornhuetter–Ferguson et la méthode loss–development. En répétant l'idée de Benktander, on arrive à la *méthode de Bornhuetter–Ferguson itérative*.

Les estimateurs

$$\widehat{S}_{i,k}^{(m)} := \begin{cases} S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i & \text{si } m = 0 \\ S_{i,n-i} + (\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{S}_{i,n}^{(m-1)} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

s'appellent *estimateurs de Bornhuetter–Ferguson d'ordre m*. On a

$$\widehat{S}_{i,n}^{(m)} = \begin{cases} S_{i,n-i} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i & \text{si } m = 0 \\ S_{i,n-i} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{S}_{i,n}^{(m-1)} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

et puis

$$\widehat{S}_{i,k}^{(m)} = \frac{1 - \widehat{\gamma}_k}{1 - \widehat{\gamma}_{n-i}} S_{i,n-i} + \frac{\widehat{\gamma}_k - \widehat{\gamma}_{n-i}}{1 - \widehat{\gamma}_{n-i}} \widehat{S}_{i,n}^{(m)}$$

La différence

$$\widehat{R}_i^{(m)} := \widehat{S}_{i,n}^{(m)} - S_{i,n-i}$$

s'appelle *réserve de Bornhuetter–Ferguson d'ordre m*.

Les réserves de Bornhuetter–Ferguson d'ordre  $m$  peuvent être calculées de manière récursive par la formule

$$\widehat{R}_i^{(m)} = \begin{cases} (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{\alpha}_i & \text{si } m = 0 \\ (1 - \widehat{\gamma}_{n-i}) \widehat{S}_i^{(m-1)} & \text{si } m \geq 1 \end{cases}$$

ou bien directement par la formule

$$\widehat{R}_i^{(m)} = \left(1 - (1 - \widehat{\gamma}_{n-i})^m\right) \widehat{R}_i^{\text{LD}} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i})^m \widehat{R}_i^{\text{BF}}$$

On en déduit que les estimateurs de Bornhuetter–Ferguson d'ordre  $m$  peuvent également être calculés directement par la formule

$$\widehat{S}_{i,k}^{(m)} = \left(1 - (1 - \widehat{\gamma}_{n-i})^m\right) \widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}} + (1 - \widehat{\gamma}_{n-i})^m \widehat{S}_{i,k}^{\text{BF}}$$

La dernière identité permet quelques observations élémentaires:

**Lemme.**

(a) Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{n-i, \dots, n\}$  on a

$$\widehat{S}_{i,k}^{(0)} = \widehat{S}_{i,k}^{\text{BF}} \quad \text{et} \quad \widehat{R}_i^{(0)} = \widehat{R}_i^{\text{BF}}$$

(b) Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{n-i, \dots, n\}$  on a

$$\widehat{S}_{i,k}^{(1)} = \widehat{S}_{i,k}^{\text{BE}} \quad \text{et} \quad \widehat{R}_i^{(1)} = \widehat{R}_i^{\text{BE}}$$

(c) Si l'on définit, pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ,

$$\widehat{\alpha}_i := \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}}$$

alors on a

$$\widehat{S}_{i,k}^{(m)} = \widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}} \quad \text{et} \quad \widehat{R}_i^{(m)} = \widehat{R}_i^{\text{LD}}$$

pour tout  $m \in \mathbf{N}_0$  et tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{n-i, \dots, n\}$ .

La même identité permet aussi d'étudier le comportement asymptotique des suites des estimateurs et des réserves de Bornhuetter–Ferguson d'ordre  $m$ :

**Théorème.** On a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{S}_{i,k}^{(m)} = \widehat{\gamma}_k \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}} = \widehat{S}_{i,k}^{\text{LD}}$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \widehat{R}_i^{(m)} = \left(1 - \widehat{\gamma}_{n-i}\right) \frac{S_{i,n-i}}{\widehat{\gamma}_{n-i}} = \widehat{R}_i^{\text{LD}}$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et  $k \in \{n-i, \dots, n\}$ .

Si l'on choisit les taux de chain–ladder comme estimateurs a–priori des taux de développement, on obtient comme limites les estimateurs et réserves de chain–ladder.

**Exemple.** Le tableau suivant contient les réalisations des estimateurs des états terminaux, les réalisations des estimateurs de Bornhuetter–Ferguson d'ordre  $m$  des états terminaux et leurs limites:

Année d'Origine $i$	$\widehat{\alpha}_i$	États Terminaux									
		$\widehat{S}_{i,n}^{(0)}$	$\widehat{S}_{i,n}^{(1)}$	$\widehat{S}_{i,n}^{(2)}$	$\widehat{S}_{i,n}^{(3)}$	$\widehat{S}_{i,n}^{(4)}$	$\widehat{S}_{i,n}^{(5)}$	...	$\widehat{S}_{i,n}^{(10)}$	...	$\widehat{S}_{i,n}^{\text{LD}}$
0	3517	3483	3483	3483	3483	3483	3483	...	3483	...	3483
1	3981	4011	4012	4013	4013	4013	4013	...	4013	...	4013
2	4598	4644	4650	4651	4651	4651	4651	...	4651	...	4651
3	5658	5611	5597	5593	5591	5591	5591	...	5591	...	5591
4	6214	6231	6239	6243	6245	6246	6247	...	6247	...	6247
5	6325	6475	6583	6662	6719	6760	6790	...	6812	...	6869

On observe que la convergence est particulièrement vite pour les années d'origine les plus anciennes.

# Chapitre 4

## Méthodes Basées sur les Pourcentages

Dans ce chapitre on étudie la méthode des sommes marginales et quelques modèles liés au modèle de développement pour les pourcentages.

### 4.1 La Méthode des Sommes Marginales

La méthode des sommes marginales est basée sur le modèle multiplicatif pour les accroissements:

**Modèle Multiplicatif pour les Pourcentages:** *Il y a des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  et  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0, 1)$  avec  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  tels que*

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \vartheta_k$$

*pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Dans le modèle multiplicatif pour les accroissements on a

$$E[S_{i,n}] = \alpha_i$$

Le paramètre  $\alpha_i$  est donc l'espérance de l'état terminal de l'année d'origine  $i$  et les paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  forment un modèle de développement pour les pourcentages.

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle multiplicatif pour les accroissements sont satisfaites et que les paramètres sont inconnus.

### Estimation des Paramètres

À partir du modèle multiplicatif pour les accroissements on obtient les identités

$$\sum_{k=0}^{n-i} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{k=0}^{n-i} E[Z_{i,k}]$$

pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et

$$\sum_{i=0}^{n-k} \alpha_i \vartheta_k = \sum_{i=0}^{n-k} E[Z_{i,k}]$$

pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  ainsi que

$$\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

L'idée de la méthode des sommes marginales est de chercher des *estimateurs des sommes marginales*

$$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n \quad \text{et} \quad \hat{\vartheta}_0, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n$$

comme solution des *équations des sommes marginales*

$$\sum_{k=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}$$

pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et

$$\sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}$$

avec  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  sous la condition

$$\sum_{k=0}^n \hat{\vartheta}_k = 1$$

Il se pose la question si une solution existe et si la solution est unique. La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant:

**Théorème.** *Les estimateurs des sommes marginales sont unique sur l'événement*

$$\bigcap_{k=1}^n \left\{ \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^{k-1} Z_{j,l} > 0 \right\}$$

et sur cet événement on a

$$\hat{\alpha}_i = \hat{S}_{i,n}^{\text{CL}}$$

et

$$\hat{\vartheta}_k = \begin{cases} \hat{G}_0^{\text{CL}} & \text{si } k = 0 \\ \hat{G}_k^{\text{CL}} - \hat{G}_{k-1}^{\text{CL}} & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi le modèle multiplicatif pour les accroissements donne, en combinaison avec la méthode des sommes marginales, une justification très élémentaire de la méthode chain-ladder.

## 4.2 Le Modèle Poisson

Le modèle Poisson est un modèle pour les *nombres de sinistres*.

### Modèle Poisson:

- (i) La famille  $\{Z_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$  des accroissements est indépendante.
- (ii) Il y a des paramètres  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \infty)$  et  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0, 1)$  tels que  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  et

$$P_{Z_{i,k}} = \mathbf{Poi}(\alpha_i \vartheta_k)$$

pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle Poisson sont satisfaites et que les paramètres sont inconnus.

À cause de la condition (ii) on a

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \vartheta_k$$

Le modèle Poisson est donc un modèle multiplicatif pour les accroissements.

Pour estimer les paramètres du modèle Poisson, il y a deux possibilités: La méthode des sommes marginales et la méthode du maximum de vraisemblance.

### Méthode des Sommes Marginales

Quant à la méthode des sommes marginales, on sait déjà qu'elle conduit aux estimateurs de chain-ladder pour les états terminaux.

### Méthode du Maximum de Vraisemblance

Dans le modèle Poisson, la loi de la famille des accroissements est connue à l'exception des paramètres. On a

$$P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = \prod_{i=0}^n \prod_{k=0}^n \left( e^{-\alpha_i \vartheta_k} \frac{(\alpha_i \vartheta_k)^{z_{i,k}}}{z_{i,k}!} \right)$$

Pour estimer les paramètres on peut donc utiliser la méthode du maximum de vraisemblance qui est basée sur la loi de la famille des accroissements observables donnée par

$$P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^{n-i} \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = \prod_{i=0}^n \prod_{k=0}^{n-i} \left( e^{-\alpha_i \vartheta_k} \frac{(\alpha_i \vartheta_k)^{z_{i,k}}}{z_{i,k}!} \right)$$

À partir de la dernière identité on définit la *fonction de vraisemblance*  $L$  en posant

$$L(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n, \hat{\vartheta}_0, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n) := \prod_{i=0}^n \prod_{k=0}^{n-i} \left( e^{-\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k} \frac{(\hat{\alpha}_i \hat{\vartheta}_k)^{Z_{i,k}}}{Z_{i,k}!} \right)$$

On appelle *estimateurs du maximum de vraisemblance* chaque collection d'estimateurs

$$\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n \quad \text{et} \quad \widehat{\vartheta}_0, \widehat{\vartheta}_1, \dots, \widehat{\vartheta}_n$$

pour laquelle toutes les dérivées partielles de la fonction de vraisemblance (ou de son logarithme) sont annulées et pour laquelle on a en plus

$$\sum_{k=0}^n \widehat{\vartheta}_k = 1$$

Dans la situation présente on a

$$\begin{aligned} & (\log(L))(\widehat{\alpha}_0, \widehat{\alpha}_1, \dots, \widehat{\alpha}_n, \widehat{\vartheta}_0, \widehat{\vartheta}_1, \dots, \widehat{\vartheta}_n) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{n-i} \left( -\widehat{\alpha}_i \widehat{\vartheta}_k + Z_{i,k} \left( \log(\widehat{\alpha}_i) + \log(\widehat{\vartheta}_k) \right) - \log(Z_{i,k}!) \right) \end{aligned}$$

et l'annulation des dérivées partielles donne

$$\sum_{k=0}^{n-i} \widehat{\alpha}_i \widehat{\vartheta}_k = \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}$$

pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  et

$$\sum_{i=0}^{n-k} \widehat{\alpha}_i \widehat{\vartheta}_k = \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}$$

pour  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . On a donc le résultat suivant:

**Théorème.** *Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont unique sur l'événement*

$$\bigcap_{k=1}^n \left\{ \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{l=0}^{k-1} Z_{j,l} > 0 \right\}$$

*et sur cet événement ils sont identiques aux estimateurs des sommes marginales.*

En particulier, la méthode du maximum de vraisemblance conduit aux estimateurs de chain-ladder pour les états terminaux.

### 4.3 Le Modèle Multinomial

Le modèle multinomial est un autre modèle pour les *nombres de sinistres*.

**Modèle Multinomial:**

- (i) *Les accroissement prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .*
- (ii) *Pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  on a  $E[S_{i,n}] > 0$ .*

(iii) Il y a des paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0,1)$  tels que  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  et

$$P_{Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n} | S_{i,n}} = \mathbf{Mult}(S_{i,n}, \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle multinomial sont satisfaites et que les paramètres sont inconnus.

La condition (iii) du modèle multinomial implique

$$P_{Z_{i,k} | S_{i,n}} = \mathbf{Bin}(S_{i,n}, \vartheta_k)$$

On a donc

$$E(Z_{i,k} | S_{i,n}) = S_{i,n} \vartheta_k$$

De cette identité on peut tirer deux observations intéressantes: D'une part, on obtient

$$E \left[ \frac{Z_{i,k}}{S_{i,n}} \right] = \vartheta_k$$

Le paramètre  $\vartheta_k$  est donc, pour chaque année d'origine  $i$ , exactement l'espérance de la proportion des sinistres réglée dans l'année de développement  $k$ . D'autre part, on obtient

$$E[Z_{i,k}] = E[S_{i,n}] \vartheta_k$$

Cette identité montre que le modèle multinomial est un modèle multiplicatif pour les accroissements. La méthode des sommes marginales est donc applicable au modèle multinomial.

## Une Explication du Modèle Multinomial

Nous considérons le modèle suivant qui est inspiré de la théorie collective du risque:

### Modèle de Développement pour les Nombres de Sinistres:

- (i) Il existe une famille  $\{S_i\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$  de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble  $\{0,1,2,\dots\}$  et avec des espérances strictement positives.
- (ii) Pour chaque  $i \in \{0,1,\dots,n\}$  il existe une suite  $\{K_{i,p}\}_{p \in \{1,2,\dots\}}$  de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble  $\{0,1,\dots,n\}$  qui est indépendante, identiquement répartie et indépendante de  $S_i$ .
- (iii) Il y a des paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0,1)$  tels que

$$P[\{K_{i,p} = k\}] = \vartheta_k$$

pour tout  $i, k \in \{0,1,\dots,n\}$  et  $p \in \mathbf{N}$ .

On interprète les variables aléatoires du modèle de développement pour les nombres de sinistres de la manière suivante:

- $S_i$  est le nombre de sinistres de l'année d'origine  $i$ .
- $K_{i,p}$  est le délai avec lequel le sinistre  $p$  de l'année d'origine  $i$  sera réglé.

Avec cette interprétation, la variable aléatoire

$$Z_{i,k} := \sum_{p=1}^{S_i} \chi_{\{K_{i,p}=k\}}$$

est le nombre des sinistres de l'année d'origine  $i$  qui sont réglés dans l'année de développement  $k$ . On a

$$\sum_{k=0}^n Z_{i,k} = S_i$$

et

$$P_{Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n} | S_i} = \mathbf{Mult}(S_i, \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

Si l'on définit maintenant

$$S_{i,k} := \sum_{l=0}^k Z_{i,l}$$

alors on voit que le modèle de développement pour les nombres de sinistres conduit au modèle multinomial.

### Modèle Multinomial avec les Années d'Origine Indépendantes

Les conditions du modèle multinomial donnent, pour chaque année d'origine  $i$  et pour toute famille  $\{z_{i,k}\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$  et  $s_{i,n} := \sum_{k=0}^n z_{i,k}$ , l'identité

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] &= P\left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\} \mid \{S_{i,n} = s_{i,n}\}\right] \cdot P[\{S_{i,n} = s_{i,n}\}] \\ &= \frac{s_{i,n}!}{\prod_{k=0}^n z_{i,k}!} \prod_{k=0}^n \vartheta_k^{z_{i,k}} \cdot P[\{S_{i,n} = s_{i,n}\}] \end{aligned}$$

Il suffit donc de spécifier la loi de l'état terminal pour déterminer la loi (commune) de toutes les variables aléatoires d'une année d'origine; si, en plus, les années d'origine sont indépendantes, il suffit de spécifier les lois de tous les états terminaux pour déterminer la loi (commune) de tous les accroissements.

#### Modèle Multinomial Avec les Années d'Origine Indépendantes

- (i) Les années d'origine sont indépendantes.
- (ii) Les accroissements prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0,1,2,\dots\}$ .
- (iii) Pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$  on a  $E[S_{i,n}] > 0$ .
- (iv) Il y a des paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0,1)$  tels que  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  et

$$P_{Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n} | S_{i,n}} = \mathbf{Mult}(S_{i,n}, \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$ .

Dans le modèle multinomial avec les années d'origine indépendantes on a

$$P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = \prod_{i=0}^n P\left[\bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right]$$

Avec l'identité établie plus tôt, on en déduit

$$P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = \prod_{i=0}^n \left( \frac{s_{i,n}!}{\prod_{k=0}^n z_{i,k}!} \prod_{k=0}^n \vartheta_k^{z_{i,k}} \cdot P[\{S_{i,n} = s_{i,n}\}] \right)$$

Si l'on choisit maintenant les lois des états terminaux, alors on peut utiliser la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les états terminaux sur la base des accroissements observables.

## Cas Particuliers

**Lois de Poisson:** Si, dans le modèle multinomial avec les années d'origine indépendantes, on choisit

$$P_{S_{i,n}} := \mathbf{Poi}(\alpha_i)$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , alors on obtient

$$P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = \prod_{i=0}^n \prod_{k=0}^n \left( e^{-\alpha_i \vartheta_k} \frac{(\alpha_i \vartheta_k)^{z_{i,k}}}{z_{i,k}!} \right)$$

Dans ce cas on se retrouve dans le modèle Poisson. Le théorème suivant montre que le cas des lois de Poisson est un cas assez particulier du modèle multinomial:

**Théorème.** *Dans le modèle multinomial et avec*

$$\alpha_i := E[S_{i,n}]$$

*les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Les années d'origine sont indépendantes et on a*

$$P_{S_{i,n}} = \mathbf{Poi}(\alpha_i)$$

*pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

(b) *La famille des accroissements est indépendante et on a*

$$P_{Z_{i,n}} = \mathbf{Poi}(\alpha_i \vartheta_k)$$

*pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

(c) *La famille des accroissements est indépendante.*

**Lois Binomiales Négatives:** Si, dans le modèle multinomial avec les années d'origine indépendantes, on choisit

$$P_{S_{i,n}} = \mathbf{Negbin}(\beta_i, \eta_i)$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , alors on obtient

$$P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^n \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] = \prod_{i=0}^n \left( \frac{\Gamma(\beta_i + \sum_{k=0}^n z_{i,k})}{\Gamma(\beta_i) \prod_{k=0}^n z_{i,k}!} (1-\eta_i)^{\beta_i} \prod_{k=0}^n (\eta_i \vartheta_k)^{z_{i,k}} \right)$$

et puis, par sommation,

$$\begin{aligned} & P\left[\bigcap_{i=0}^n \bigcap_{k=0}^{n-i} \{Z_{i,k} = z_{i,k}\}\right] \\ &= \prod_{i=0}^n \left( \frac{\Gamma(\beta_i + \sum_{k=0}^{n-i} z_{i,k})}{\Gamma(\beta_i) \prod_{k=0}^{n-i} z_{i,k}!} \left( \frac{1-\eta_i}{1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{\beta_i} \prod_{k=0}^{n-i} \left( \frac{\eta_i \vartheta_k}{1-\eta_i + \sum_{l=0}^{n-i} \eta_i \vartheta_l} \right)^{z_{i,k}} \right) \end{aligned}$$

La loi des accroissements observables est donc connue à l'exception des paramètres. Pour estimer les espérances

$$\alpha_i := E[S_{i,n}]$$

par la méthode du maximum de vraisemblance, il faut d'abord utiliser l'identité

$$E[S_{i,n}] = \beta_i \eta_i / (1-\eta_i)$$

et effectuer la substitution

$$\beta_i = \alpha_i (1-\eta_i) / \eta_i$$

pour obtenir la fonction de vraisemblance comme fonction des paramètres

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \quad \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$$

Comme dans le cas Poisson, il se trouve que les estimateurs du maximum de vraisemblance pour

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$$

sont identiques aux estimateurs des sommes marginales.

**Lois Binomiales:** Si, dans le modèle multinomial avec les années d'origine indépendantes, on choisit

$$P_{S_{i,n}} = \mathbf{Bin}(m_i, \eta_i)$$

pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , on peut procéder comme dans le cas des lois binomiales négatives et on obtient le même résultat.

# Chapitre 5

## Modèles de Crédibilité

Dans ce chapitre on étudie l'application de la théorie de crédibilité au problème de réservation.

### 5.1 Le Cadre Général

Les modèles de crédibilité sont des modèles pour la détermination des estimateurs optimaux pour une variable aléatoire non-observable. Dans les modèles de crédibilité, on choisit un estimateur optimal parmi une collection d'estimateurs admissibles à l'aide d'un critère d'optimisation. Comme collection d'estimateurs admissibles on considère en particulier la collection des estimateurs qui sont une fonction affine-linéaire des variables aléatoires observables.

#### Le Modèle de Crédibilité Élémentaire

On considère des variables aléatoires observables  $X_1, \dots, X_m$  et une variable aléatoire non-observable  $X_0$ . On suppose que  $E[X_i^2] < \infty$  pour tout  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ .

On étudie le problème d'estimer  $X_0$  par un estimateur  $\hat{X}_0$  qui dépend seulement des variables aléatoires observables  $X_1, \dots, X_m$ .

Pour un estimateur  $\hat{X}_0$  de  $X_0$ , la différence

$$\hat{X}_0 - X_0$$

s'appelle *erreur d'estimation* de  $\hat{X}_0$  et l'espérance

$$E\left[\left(\hat{X}_0 - X_0\right)^2\right]$$

s'appelle l'*espérance de l'erreur quadratique d'estimation* de  $\hat{X}_0$ . L'espérance de l'erreur quadratique d'estimation est la base pour la comparaison de différents estimateurs de  $X_0$ . À cause de l'identité

$$E\left[\left(\hat{X}_0 - X_0\right)^2\right] = \text{var}\left[\hat{X}_0 - X_0\right] + \left(E\left[\hat{X}_0 - X_0\right]\right)^2$$

l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation de l'estimateur  $\hat{X}_0$  est intimement liée à la variance de l'erreur d'estimation.

Nous considérons l'espace linéaire

$$\Delta_m := \text{span}\{1, X_1, \dots, X_m\}$$

Un estimateur

$$\delta^*(X_0)$$

s'appelle *estimateur de crédibilité* pour  $X_0$  si  $\delta^*(X_0) \in \Delta_m$  et si

$$E\left[\left(\delta^*(X_0) - X_0\right)^2\right] = \inf_{Y \in \Delta_m} E\left[\left(Y - X_0\right)^2\right]$$

Le théorème suivant assure l'existence et l'unicité de l'estimateur de crédibilité pour  $X_0$  et établit aussi une propriété importante de cet estimateur:

**Théorème.** *Il existe un seul estimateur de crédibilité pour  $X_0$  et l'estimateur de crédibilité pour  $X_0$  est non-biaisé.*

Le théorème est une conséquence immédiate du théorème de projection dans les espaces de Hilbert.

## Notation Vectorielle

La notation vectorielle simplifie l'étude du problème de crédibilité. Nous définissons

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &:= E[\mathbf{X}] \\ \boldsymbol{\Sigma} &:= \text{Var}[\mathbf{X}] \\ \boldsymbol{\varrho}_0 &:= \text{Cov}[\mathbf{X}, X_0] \\ \mu_0 &:= E[X_0] \\ \sigma_0^2 &:= \text{var}[X_0] \end{aligned}$$

Alors chaque estimateur  $Y \in \Delta_m$  possède la forme

$$Y = a + \mathbf{a}' \mathbf{X}$$

avec  $a \in \mathbf{R}$  et  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m$ .

**Théorème.** *Si la variance  $\boldsymbol{\Sigma}$  est régulière, alors l'estimateur de crédibilité de  $X_0$  peut être représenté dans la forme*

$$\delta^*(X_0) = \mu_0 + \boldsymbol{\varrho}'_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$$

et on a

$$E\left[\left(\delta^*(X_0) - X_0\right)^2\right] = \sigma_0^2 - \boldsymbol{\varrho}'_0 \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\varrho}_0$$

Sous la condition de régularité de  $\Sigma$  on a

$$\text{var}[X_0] = \text{var}[\delta^*(X_0) - X_0] + \text{var}[\delta^*(X_0)]$$

La variance de la variable aléatoire non-observable  $X_0$  est alors la somme de la variance de l'erreur d'estimation et de la variance de son estimateur de crédibilité.

**Corollaire.** *Si la variance  $\Sigma$  est régulière et si  $\boldsymbol{\varrho}_0 = \mathbf{0}$ , alors l'estimateur de crédibilité de  $X_0$  satisfait*

$$\delta^*(X_0) = \mu_0$$

Sous les conditions du corollaire, l'estimateur de crédibilité de  $X_0$  ne dépend pas des variables aléatoires observables.

Considérons enfin l'estimateur de crédibilité d'une combinaison linéaire des deux variables aléatoires non-observables:

**Corollaire.** *Si la variance  $\Sigma$  est régulière, alors on a*

$$\delta^*(aX + bY) = a\delta^*(X) + b\delta^*(Y)$$

*pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$  et pour tous  $a, b \in \mathbf{R}$ .*

En fait, la linéarité de l'estimateur de crédibilité peut être établie sans la condition que la variance  $\Sigma$  soit régulière.

## Un Cas Particulier Important

Nous considérons maintenant une classe de modèles de crédibilité dans laquelle la variance des observables est non seulement régulière mais permet aussi une représentation explicite de son inverse.

**Condition (C):** *Il y a des paramètres  $\mu, \lambda \in \mathbf{R}$  et  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m \in (0, \infty)$  avec*

$$1 + \lambda \sum_{k=1}^m \varphi_k^{-1} > 0$$

*tels que*

$$\begin{aligned} E[X_k] &= \mu \\ \text{cov}[X_k, X_l] &= \varphi_k \delta_{k,l} + \lambda \end{aligned}$$

*pour tout  $k, l \in \{0, 1, \dots, m\}$ .*

Nous définissons le vecteur  $\mathbf{e} \in \mathbf{R}^m$  par

$$\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et nous posons

$$\mathbf{E} := \mathbf{e} \mathbf{e}'$$

Alors la condition (C) peut être formulée comme suit:

**Condition (C) :** Il y a des paramètres  $\mu, \lambda \in \mathbf{R}$  et  $\varphi_0 \in (0, \infty)$  et une matrice diagonale et positive  $\mathbf{\Phi} \in \mathbf{R}^{m \times m}$  tels que

$$1 + \lambda \mathbf{e}' \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{e} > 0$$

et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mu \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbf{\Phi} + \lambda \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\varrho}_0 &= \lambda \mathbf{e} \\ \mu_0 &= \mu \\ \sigma_0^2 &= \varphi_0 + \lambda \end{aligned}$$

On a le résultat suivant:

**Lemme.** Supposons que la condition (C) soit satisfaite. Alors la variance  $\boldsymbol{\Sigma}$  est régulière avec

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{\Phi}^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda \mathbf{e}' \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{e}} \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{\Phi}^{-1}$$

Sous la condition (C) on obtient des représentations explicites de l'estimateur de crédibilité  $\delta^*(X_0)$  de  $X_0$  et de l'erreur d'estimation:

**Théorème.** Supposons que la condition (C) soit satisfaite. Alors on a

$$\delta^*(X_0) = \frac{1}{1 + \lambda \sum_{l=1}^m \varphi_l^{-1}} \mu + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda \varphi_k^{-1}}{1 + \lambda \sum_{l=1}^m \varphi_l^{-1}} X_k$$

et

$$E \left[ \left( \delta^*(X_0) - X_0 \right)^2 \right] = \varphi_0 + \frac{1}{1 + \lambda \sum_{l=1}^m \varphi_l^{-1}} \lambda$$

Sous la condition (C), l'estimateur de crédibilité  $\delta^*(X_0)$  de  $X_0$  est donc une moyenne pondérée de l'espérance  $\mu$  et des observables  $X_1, \dots, X_m$ .

## 5.2 Modèles avec un Paramètre Aléatoire

Dans la plupart des modèles de crédibilité, on ne considère pas seulement des variables aléatoires observables et non-observables, mais aussi un paramètre aléatoire qui s'appelle aussi *paramètre de risque*.

Un paramètre de risque est une fonction mesurable  $\mathbf{\Lambda}$ , définie sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  donné et à valeurs dans un espace mesurable  $(\Omega', \mathcal{F}')$ . Souvent,  $\mathbf{\Lambda}$  est simplement une variable aléatoire ou un vecteur aléatoire.

Pour résoudre un problème de crédibilité, on a besoin des moments du premier et second ordre des variables aléatoires observables et non-observables. À cause des identités

$$E[X_i] = E[E(X_i | \mathbf{\Lambda})]$$

et

$$\text{cov}[X_i, X_j] = E[\text{cov}(X_i, X_j | \mathbf{\Lambda})] + \text{cov}[E(X_i | \mathbf{\Lambda}), E(X_j | \mathbf{\Lambda})]$$

il suffit de formuler des conditions

- pour les moments conditionnels  $E(X_i | \mathbf{\Lambda})$  et  $\text{cov}(X_i, X_j | \mathbf{\Lambda})$  et
- pour les moments non-conditionnels  $E[E(X_i | \mathbf{\Lambda})]$ ,  $E[\text{cov}(X_i, X_j | \mathbf{\Lambda})]$  et  $\text{cov}[E(X_i | \mathbf{\Lambda}), E(X_j | \mathbf{\Lambda})]$

On a donc des conditions pour la loi conditionnelle des variables aléatoires observables et non-observables et des conditions pour la loi non-conditionnelle du paramètre de risque.

### 5.3 Le Modèle de Mack

Le modèle de Mack est donné par les conditions suivantes:

**Modèle de Mack:** *Il y a des variables aléatoires  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  avec les propriétés suivantes:*

- (i) *Les vecteurs  $(Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n}, \Lambda_i)'$  sont indépendants.*
- (ii) *Il y a des fonctions mesurables  $m$  et  $s^2$  telles que  $\text{var}[m(\Lambda_i)] > 0$  et  $E[s^2(\Lambda_i)] > 0$  et des paramètres  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in (0, \infty)$  et  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, \infty)$  tels que*

$$\begin{aligned} E(Z_{i,k} | \Lambda_i) &= m(\Lambda_i) \beta_k \\ \text{cov}(Z_{i,k}, Z_{i,l} | \Lambda_i) &= s^2(\Lambda_i) \gamma_k \delta_{k,l} \end{aligned}$$

*pour tout  $i, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Le modèle de Mack est une généralisation d'un modèle de DeVyllder.

Si l'on pose  $\vartheta_k := \beta_k / \sum_{l=0}^n \beta_l$ , alors la condition (ii) donne

$$E[Z_{i,k}] = E[S_{i,n}] \cdot \vartheta_k$$

Le modèle de Mack est alors un modèle multiplicatif.

La condition (i) du modèle de Mack implique que les années d'origine sont indépendantes. Elle implique aussi que, pour chaque année d'origine  $i$ , les moments conditionnels des accroissements  $Z_{i,k}$  sous  $\Lambda_i$  sont identiques aux moments conditionnels des  $Z_{i,k}$  sous  $\mathbf{\Lambda} := (\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n)'$ . En particulier, on peut remplacer les identités de la condition (ii) par les identités

$$\begin{aligned} E(Z_{i,k} | \mathbf{\Lambda}) &= m(\Lambda_i) \beta_k \\ \text{cov}(Z_{i,k}, Z_{i,l} | \mathbf{\Lambda}) &= s^2(\Lambda_i) \gamma_k \delta_{k,l} \end{aligned}$$

Dans le modèle de Mack c'est donc le vecteur  $\mathbf{\Lambda}$  qui joue le rôle d'un paramètre de risque.

Nous supposons maintenant que les conditions du modèle de Mack sont satisfaites et que les fonctions et les paramètres de ce modèle sont connus.

Par intégration, on obtient

$$\begin{aligned} E[Z_{i,k}] &= E[m(\Lambda_i)] \beta_k \\ \text{cov}[Z_{i,k}, Z_{i,l}] &= E[s^2(\Lambda_i)] \gamma_k \delta_{k,l} + \text{var}[m(\Lambda_i)] \beta_k \beta_l \end{aligned}$$

Pour arriver à un modèle qui satisfait à la condition (C), on définit

$$X_{i,k} := Z_{i,k} / \beta_k$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} E[X_{i,k}] &= E[m(\Lambda_i)] \\ \text{cov}[X_{i,k}, X_{i,l}] &= E[s^2(\Lambda_i)] (\gamma_k / \beta_k^2) \delta_{k,l} + \text{var}[m(\Lambda_i)] \end{aligned}$$

Ces identités montrent que, pour chaque année d'origine  $i \in \{1, \dots, n\}$  et pour chaque  $s \in \{n-i+1, \dots, n\}$ , la famille  $\{X_{i,0}, X_{i,1}, \dots, X_{i,n-i}, X_{i,s}\}$  des accroissements normés forme un modèle qui satisfait à la condition (C). Avec

$$\begin{aligned} \mu_i &:= E[m(\Lambda_i)] \\ \kappa_i &:= E[s^2(\Lambda_i)] / \text{var}[m(\Lambda_i)] \end{aligned}$$

on obtient

$$\delta^*(X_{i,s}) = \frac{\kappa_i}{\kappa_i + \sum_{l=0}^{n-i} \beta_l^2 / \gamma_l} \mu_i + \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\beta_k^2 / \gamma_k}{\kappa_i + \sum_{l=0}^{n-i} \beta_l^2 / \gamma_l} X_{i,k}$$

et puis

$$\delta^*(Z_{i,s}) = \beta_s \left( \frac{\kappa_i}{\kappa_i + \sum_{l=0}^{n-i} \beta_l^2 / \gamma_l} \mu_i + \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\beta_k / \gamma_k}{\kappa_i + \sum_{l=0}^{n-i} \beta_l^2 / \gamma_l} Z_{i,k} \right)$$

On observe que les estimateurs de crédibilité sont identiques pour tous les accroissements normés d'une année d'origine commune.

L'estimateur de crédibilité  $\delta^*(Z_{i,s})$  d'un accroissement  $Z_{i,s}$  est d'abord l'estimateur de crédibilité *sur la base des accroissements observables de l'année d'origine  $i$* . À cause de la condition (i), il est en même temps l'estimateur de crédibilité *sur la base de tous les accroissements observables du triangle de développement*.

En vue de la remarque précédente, il est clair que l'on obtient les estimateurs de crédibilité

- de la somme des accroissements non-observables d'une année d'origine fixe,
  - de la somme de tous les accroissements non-observables, et
  - de la somme des accroissements d'une année civile future
- par sommation.

## 5.4 Le Modèle de Witting

Le modèle de Witting est un modèle pour les nombres de sinistres:

### Modèle de Witting:

- (i) Les accroissements prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0,1,2,\dots\}$ .
- (ii) Les vecteurs  $(Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n})'$  sont indépendants.
- (iii) On a  $E[S_{i,n}] > 0$  pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$ .
- (iv) Il y a des paramètres  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \in (0,1)$  avec  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  tels que

$$P_{Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n} | S_{i,n}} = \mathbf{Mult}(S_{i,n}, \vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$$

pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$ .

Le modèle de Witting est un modèle multinomial; par conséquent, c'est aussi un modèle multiplicatif.

La condition (ii) du modèle de Witting dit que les années d'origine sont indépendantes. Elle implique d'abord que la famille  $\{S_{i,n}\}_{i \in \{0,1,\dots,n\}}$  des états terminaux est indépendante et puis, pour chaque année d'origine  $i \in \{0,1,\dots,n\}$ , que la loi conditionnelle des accroissements  $Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n}$  par rapport à l'état terminal  $S_{i,n}$  est identique à la loi conditionnelle par rapport au vecteur  $(S_{0,n}, S_{1,n}, \dots, S_{n,n})'$ .

Nous supposons maintenant que les conditions du modèle de Witting sont satisfaites et que les paramètres sont connus.

Pour simplifier la notation, posons

$$\begin{aligned} \mu_i &:= E[S_{i,n}] \\ \sigma_i^2 &:= \text{var}[S_{i,n}] \end{aligned}$$

Pour les accroissements individuels on obtient d'abord

$$\begin{aligned} E(Z_{i,k} | S_{i,n}) &= S_{i,n} \vartheta_k \\ \text{cov}(Z_{i,k}, Z_{i,l} | S_{i,n}) &= S_{i,n} \vartheta_k \delta_{k,l} - S_{i,n} \vartheta_k \vartheta_l \end{aligned}$$

et puis, par intégration,

$$\begin{aligned} E[Z_{i,k}] &= \mu_i \vartheta_k \\ \text{cov}[Z_{i,k}, Z_{i,l}] &= \mu_i \vartheta_k \delta_{k,l} + (\sigma_i^2 - \mu_i) \vartheta_k \vartheta_l \end{aligned}$$

Pour arriver à un modèle qui satisfait à la condition (C), on définit

$$X_{i,k} := Z_{i,k} / \beta_k$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} E[X_{i,k}] &= \mu_i \\ \text{cov}[X_{i,k}, X_{i,l}] &= (\mu_i / \vartheta_k) \delta_{k,l} + (\sigma_i^2 - \mu_i) \end{aligned}$$

Ces identités montrent que, pour chaque année d'origine  $i \in \{1, \dots, n\}$  et pour chaque  $s \in \{n-i+1, \dots, n\}$ , la famille  $\{X_{i,0}, X_{i,1}, \dots, X_{i,n-i}, X_{i,s}\}$  des accroissements normés forme un modèle qui satisfait à la condition (C). Avec

$$\lambda_i := \sigma_i^2 - \mu_i$$

on obtient

$$\delta^*(X_{i,s}) = \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} \mu_i + \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\lambda_i \vartheta_k}{\mu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} X_{i,k}$$

et puis

$$\delta^*(Z_{i,s}) = \vartheta_s \left( \frac{\mu_i}{\mu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} \mu_i + \frac{\lambda_i}{\mu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k} \right)$$

On observe que les estimateurs de crédibilité dépendent des accroissements observables seulement par leur somme. De plus, la manière dans laquelle l'expérience du passé influence les estimateurs de crédibilité est déterminée par le signe de  $\lambda_i$ :

- $\lambda_i < 0$  (*cas binomial*): Si le nombre des sinistres observables est grand, alors la réserve de crédibilité est petite.
- $\lambda_i = 0$  (*cas Poisson*): La réserve de crédibilité ne dépend pas du nombre des sinistres observables.
- $\lambda_i > 0$  (*cas binomial négative*): Si le nombre des sinistres observables est grand, alors la réserve de crédibilité est grande aussi.

## 5.5 Le Modèle de Hesselager et Witting

Le modèle de Hesselager et Witting est une modification du modèle de Witting dans laquelle les probabilités constantes  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  sont remplacées par des probabilités aléatoires.

**Modèle de Hesselager et Witting (Cas Particulier):** *Il y a une famille  $\{\Theta_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$  de variables aléatoires et des paramètres  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, \infty)$  avec les propriétés suivantes:*

- (i) *Les accroissements prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{0,1,2,\dots\}$ .*
- (ii) *Les vecteurs  $(Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n}, \Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n})'$  sont indépendants.*
- (iii) *Pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$ ,  $S_{i,n}$  et  $\{\Theta_{i,k}\}_{k \in \{0,1,\dots,n\}}$  sont indépendants.*
- (iv) *Pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$  on a  $E[S_{i,n}] > 0$  et*

$$P_{\Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n}} = \mathbf{Dirichlet}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

- (v) *Pour tout  $i \in \{0,1,\dots,n\}$  on a*

$$P_{Z_{i,0}, Z_{i,1}, \dots, Z_{i,n} | S_{i,n}, \Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n}} = \mathbf{Mult}(S_{i,n}, \Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n})$$

Le modèle de Hesselager et Witting est un modèle multiplicatif; ceci n'est pas évident mais découlera de la discussion suivante.

Nous supposons maintenant que les conditions du modèle de Hesselager et Witting sont satisfaites et que les paramètres sont connus.

Pour simplifier la notation, posons

$$\begin{aligned}\mu_i &:= E[S_{i,n}] \\ \sigma_i^2 &:= \text{var}[S_{i,n}]\end{aligned}$$

Pour les accroissements individuels on obtient

$$\begin{aligned}E(Z_{i,k}|S_{i,n}, \Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n}) &= S_{i,n} \Theta_{i,k} \\ \text{cov}(Z_{i,k}, Z_{i,l}|S_{i,n}, \Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n}) &= S_{i,n} \Theta_{i,k} \delta_{k,l} - S_{i,n} \Theta_{i,k} \Theta_{i,l}\end{aligned}$$

et puis

$$\begin{aligned}E(Z_{i,k}|\Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n}) &= \mu_i \Theta_{i,k} \\ \text{cov}(Z_{i,k}, Z_{i,l}|\Theta_{i,0}, \Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,n}) &= \mu_i \Theta_{i,k} \delta_{k,l} + (\sigma_i^2 - \mu_i) \Theta_{i,k} \Theta_{i,l}\end{aligned}$$

En plus, avec

$$\gamma := \sum_{j=0}^n \gamma_j$$

et

$$\vartheta_k := \gamma_k / \gamma$$

on a

$$\begin{aligned}E[\Theta_{i,k}] &= \vartheta_k \\ E[\Theta_{i,k} \Theta_{i,l}] &= \frac{1}{1 + \gamma} \vartheta_k \delta_{k,l} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \vartheta_k \vartheta_l\end{aligned}$$

Pour les accroissements on obtient alors

$$\begin{aligned}E[Z_{i,k}] &= \mu_i \vartheta_k \\ \text{cov}[Z_{i,k}, Z_{i,l}] &= \frac{\sigma_i^2 + \mu_i^2 + \gamma \mu_i}{1 + \gamma} \vartheta_k \delta_{k,l} + \frac{\gamma \sigma_i^2 - \mu_i^2 - \gamma \mu_i}{1 + \gamma} \vartheta_k \vartheta_l\end{aligned}$$

Pour arriver à un modèle qui satisfait à la condition **(C)**, on définit

$$X_{i,k} := Z_{i,k} / \beta_k$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}E[X_{i,k}] &= \mu_i \\ \text{cov}[X_{i,k}, X_{i,l}] &= \frac{\sigma_i^2 + \mu_i^2 + \gamma \mu_i}{1 + \gamma} \frac{1}{\vartheta_k} \delta_{k,l} + \frac{\gamma \sigma_i^2 - \mu_i^2 - \gamma \mu_i}{1 + \gamma}\end{aligned}$$

Ces identités montrent que, pour chaque année d'origine  $i \in \{1, \dots, n\}$  et pour chaque  $s \in \{n-i+1, \dots, n\}$ , la famille  $\{X_{i,0}, X_{i,1}, \dots, X_{i,n-i}, X_{i,s}\}$  des accroissements normés forme un modèle qui satisfait à la condition (C). Avec

$$\begin{aligned}\nu_i &:= \sigma_i^2 + \mu_i^2 + \gamma\mu_i \\ \lambda_i &:= \gamma\sigma_i^2 - \mu_i^2 - \gamma\mu_i\end{aligned}$$

on obtient

$$\delta^*(X_s) = \frac{\nu_i}{\nu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} \mu_i + \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\lambda_i \vartheta_k}{\nu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} X_{i,k}$$

et puis

$$\delta^*(Z_s) = \vartheta_s \left( \frac{\nu_i}{\nu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} \mu_i + \frac{\lambda_i}{\nu_i + \lambda_i \sum_{l=0}^{n-i} \vartheta_l} \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k} \right)$$

# Chapitre 6

## Prévision dans les Modèles Linéaires

Les modèles linéaires sont parmi les modèles de base en statistique. Dans les modèles linéaires on suppose que les espérances de toutes les coordonnées d'un vecteur aléatoire sont une fonction linéaire d'un seul paramètre vectoriel dont la dimension est plus petite que celle du vecteur aléatoire.

Dans le *modèle linéaire élémentaire*, toutes les coordonnées du vecteur aléatoire sont supposées observables et on se propose le problème d'*estimer le paramètre inconnu*.

Dans le *modèle linéaire élargi*, on suppose qu'une partie des coordonnées du vecteur aléatoire n'est pas observable et on se propose le problème d'*estimer les coordonnées non-observables*.

### 6.1 Le Cadre Général

Rappelons d'abord l'estimation du paramètre dans le modèle linéaire élémentaire.

#### Le Modèle Linéaire Élémentaire

On considère un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeurs dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^m$  et posons

$$\Sigma := \text{Var}[\mathbf{X}]$$

Le modèle linéaire pour  $\mathbf{X}$  est donné par les conditions suivantes:

##### Modèle Linéaire Élémentaire:

- (i) Il y a un paramètre  $\beta \in \mathbf{R}^s$  et une matrice  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times s}$  avec  $\text{rang}(\mathbf{A}) = s$  tels que

$$E[\mathbf{X}] = \mathbf{A}\beta$$

- (ii) La matrice  $\Sigma$  est positive.

Nous supposons que les conditions du modèle linéaire élémentaire sont satisfaites, que la matrice  $\Sigma$  est connue et que le paramètre  $\beta$  est inconnu.

Pour estimer le paramètre  $\beta$  on pourrait, en principe, utiliser n'importe quel vecteur aléatoire  $\hat{\beta}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^s$  qui est une fonction mesurable de  $\mathbf{X}$ . Parmi tous les estimateurs possibles, l'estimateur *Gauss–Markov*

$$\beta := (\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\Sigma^{-1}\mathbf{X}$$

de  $\beta$  joue un rôle très particulier. Le lemme suivant donne une légitimation provisoire de l'estimateur Gauss–Markov:

**Lemme.** *L'estimateur de Gauss–Markov minimise l'erreur quadratique pondérée*

$$(\mathbf{X} - \mathbf{A}\hat{\beta})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{A}\hat{\beta})$$

*sur l'ensemble de tous les vecteurs aléatoires  $\hat{\beta}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^s$ , et c'est le seul vecteur aléatoire qui possède cette propriété.*

Du point de vue statistique, ce lemme n'est pas tout à fait satisfaisant parce qu'il ne contient aucune information sur les propriétés stochastiques de l'estimateur de Gauss–Markov.

Pour un estimateur  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  la différence

$$\hat{\beta} - \beta$$

s'appelle erreur d'estimation de  $\hat{\beta}$  et l'espérance

$$E[(\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta)]$$

s'appelle *espérance de l'erreur quadratique d'estimation* de  $\hat{\beta}$ . L'espérance de l'erreur quadratique d'estimation est la base pour la comparaison de différents estimateurs de  $\beta$ . À cause de l'identité

$$\begin{aligned} E[(\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta)] &= \text{trace}(\text{Var}[\hat{\beta} - \beta]) + E[\hat{\beta} - \beta]'E[\hat{\beta} - \beta] \\ &= \text{trace}(\text{Var}[\hat{\beta}]) + E[\hat{\beta} - \beta]'E[\hat{\beta} - \beta] \end{aligned}$$

l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation d'un estimateur  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  est intimement liée à la variance de l'estimateur.

Nous considérons deux propriétés qu'un estimateur de  $\beta$  peut posséder: Un vecteur aléatoire  $\hat{\beta}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^s$  s'appelle

- *estimateur linéaire* de  $\beta$  s'il existe une matrice  $\mathbf{B}$  telle que

$$\hat{\beta} = \mathbf{B}\mathbf{X}$$

- *estimateur non-biaisé* de  $\beta$  si l'identité

$$E[\hat{\beta}] = \beta$$

est vraie.

Un estimateur linéaire  $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$  de  $\boldsymbol{\beta}$  est non-biaisé si et seulement si  $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$  et pour chaque estimateur non-biaisé  $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$  de  $\boldsymbol{\beta}$  on a

$$E\left[\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)' \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)\right] = \text{trace}\left(\text{Var}[\widehat{\boldsymbol{\beta}}]\right)$$

Pour deux vecteurs aléatoires  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{Z}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^s$ , on dit que la variance de  $\mathbf{Y}$  est *plus petite* que la variance de  $\mathbf{Z}$  si la matrice  $\text{Var}[\mathbf{Z}] - \text{Var}[\mathbf{Y}]$  est positive, et dans ce cas on a  $\text{trace}(\text{var}[\mathbf{Y}]) \leq \text{trace}(\text{var}[\mathbf{Z}])$ .

L'estimateur de Gauss-Markov est évidemment un estimateur linéaire et non-biaisé de  $\boldsymbol{\beta}$ . De plus, on a le fameux théorème suivant:

**Théorème de Gauss-Markov.** *Parmi tous les estimateurs linéaires et non-biaisés de  $\boldsymbol{\beta}$ , l'estimateur de Gauss-Markov possède la variance la plus petite et il est le seul estimateur qui possède cette propriété.*

Le théorème de Gauss-Markov peut être reformulé avec l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation au lieu de la variance de l'estimateur:

**Corollaire.** *Parmi tous les estimateurs linéaires et non-biaisés de  $\boldsymbol{\beta}$ , l'estimateur de Gauss-Markov possède la plus petite espérance de l'erreur quadratique d'estimation, et il est le seul estimateur qui possède cette propriété.*

Ainsi le rôle exceptionnel de l'estimateur de Gauss-Markov pour l'estimation de  $\boldsymbol{\beta}$  est complètement clarifié.

## Le Modèle Linéaire Élargi

Considérons maintenant un vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^m$  dont seules les premières  $m_1$  coordonnées sont observables et les autres  $m_2 := m - m_1$  coordonnées sont non-observables. On écrit donc

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$$

et on suppose que  $\mathbf{X}_1$  est observable et que  $\mathbf{X}_2$  est non-observable. Avec

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{11} &:= \text{Var}[\mathbf{X}_1] \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12} &:= \text{Cov}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} &:= \text{Cov}[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1] \\ \boldsymbol{\Sigma}_{22} &:= \text{Var}[\mathbf{X}_2] \end{aligned}$$

on a alors

$$\text{var}[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$$

On élargit le modèle linéaire élémentaire comme suit:

**Modèle Linéaire Élargi:**

- (i) Il y a un paramètre  $\beta \in \mathbf{R}^s$  et des matrices  $\mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{m_1 \times s}$  et  $\mathbf{A}_2 \in \mathbf{R}^{m_2 \times s}$  avec  $\text{rang}(\mathbf{A}_1) = s$  tels que

$$E \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta$$

- (ii) La matrice  $\Sigma_{11}$  est positive.

Nous supposons maintenant que les conditions du modèle linéaire élargi sont satisfaites, que les matrices  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{21}$  sont connues et que le paramètre  $\beta$  est inconnu.

Dans le modèle linéaire élargi, le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_2$  est non-observable. Pour cette raison, l'estimation du paramètre  $\beta$  doit être basée sur le vecteur aléatoire  $\mathbf{X}_1$  au lieu de  $\mathbf{X}$ . Dans le modèle linéaire élargi, il y a aussi le problème d'estimer  $\mathbf{X}_2$  sur la base de  $\mathbf{X}_1$ . Il se montre que ces deux problèmes d'estimation peuvent être traités de manières complètement analogues.

Au lieu de considérer seulement les problèmes d'estimation de  $\beta$  et de  $\mathbf{X}_2$ , on étudie tout de suite les problèmes d'estimer  $\mathbf{C}\beta$  avec  $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{r \times s}$  et d'estimer  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$  avec  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{r \times m_2}$ .

Considérons d'abord l'estimation de  $\mathbf{C}\beta$  par un vecteur aléatoire  $\hat{\mathbf{Y}}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^r$  qui est une fonction mesurable de  $\mathbf{X}_1$ .

Un vecteur aléatoire  $\hat{\mathbf{Y}}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^r$  s'appelle

- *estimateur linéaire* de  $\mathbf{C}\beta$  s'il existe une matrice  $\mathbf{Q}$  telle que

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1$$

- *estimateur non-biaisé* de  $\mathbf{C}\beta$  si on a

$$E[\hat{\mathbf{Y}}] = \mathbf{C}\beta$$

Un estimateur linéaire  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1$  de  $\mathbf{C}\beta$  est non-biaisé si et seulement si  $\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}$ . Comme critère d'optimisation on utilise l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation de  $\hat{\mathbf{Y}}$

$$E \left[ \left( \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta \right)' \left( \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta \right) \right]$$

On a

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta \right)' \left( \hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta \right) \right] &= \text{trace} \left( \text{Var}[\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta] \right) + E[\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta]' E[\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta] \\ &= \text{trace} \left( \text{Var}[\hat{\mathbf{Y}}] \right) + E[\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta]' E[\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{C}\beta] \end{aligned}$$

Le vecteur aléatoire

$$\beta := (\mathbf{A}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}'_1 \Sigma_{11}^{-1} \mathbf{X}_1$$

s'appelle *estimateur de Gauss–Markov* de  $\beta$  et

$$\mathbf{Y}^*(\mathbf{C}\beta) := \mathbf{C}\beta$$

s'appelle *estimateur de Gauss–Markov* de  $\mathbf{C}\beta$ .

**Théorème de Gauss–Markov.** *L'estimateur de Gauss–Markov de  $\mathbf{C}\beta$  est un estimateur linéaire et non-biaisé de  $\mathbf{C}\beta$ . Parmi tous les estimateurs linéaires et non-biaisés de  $\mathbf{C}\beta$ , l'estimateur de Gauss–Markov minimise l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation et il est le seul estimateur qui possède cette propriété.*

Passons à l'estimation de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$ .

Un vecteur aléatoire  $\widehat{\mathbf{Y}}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^r$  s'appelle

– *estimateur linéaire* de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$  s'il existe une matrice  $\mathbf{Q}$  telle que

$$\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1$$

– *estimateur non-biaisé* de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$  si on a

$$E[\widehat{\mathbf{Y}}] = E[\mathbf{D}\mathbf{X}_2]$$

Un estimateur linéaire  $\widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Q}\mathbf{X}_1$  de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$  est non-biaisé si et seulement si  $\mathbf{Q}\mathbf{A}_1 = \mathbf{D}\mathbf{A}_2$ . Comme critère d'optimisation on utilise l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation de  $\widehat{\mathbf{Y}}$

$$E\left[\left(\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2\right)' \left(\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2\right)\right]$$

On a

$$E\left[\left(\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2\right)' \left(\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2\right)\right] = \text{trace}\left(\text{Var}[\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2]\right) + E[\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2]'E[\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{D}\mathbf{X}_2]$$

Le vecteur aléatoire

$$\mathbf{X}_2^* := \mathbf{A}_2\beta + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1\beta)$$

s'appelle *estimateur de Gauss–Markov* de  $\mathbf{X}_2$  et

$$\mathbf{Y}^*(\mathbf{D}\mathbf{X}_2) := \mathbf{D}\mathbf{X}_2^*$$

s'appelle *estimateur de Gauss–Markov* de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$ .

**Théorème de Gauss–Markov.** *L'estimateur de Gauss–Markov de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$  est un estimateur linéaire et non-biaisé de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$ . Parmi tous les estimateurs linéaires et non-biaisés de  $\mathbf{D}\mathbf{X}_2$ , l'estimateur de Gauss–Markov minimise l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation et il est le seul estimateur qui possède cette propriété.*

On termine cette section avec un cas particulier:

**Lemme.** *Soit  $\text{Cov}[\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2] = \mathbf{O}$ . Alors on a pour tout  $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^{r \times m_2}$*

$$\mathbf{Y}^*(\mathbf{D}\mathbf{X}_2) = \mathbf{D}\mathbf{A}_2\beta$$

*et  $\text{cov}[\mathbf{Y}^*(\mathbf{D}\mathbf{X}_2), \mathbf{D}\mathbf{X}_2] = \mathbf{O}$ .*

## 6.2 Adaptation à la Réservation

Le modèle linéaire pour la réservation est le modèle suivant:

**Modèle Linéaire pour la Réservation:** *Il y a un paramètre  $\beta \in \mathbf{R}^s$  et une famille  $\{\mathbf{g}_{i,k}\}_{i,k \in \{0,1,\dots,n\}}$  de vecteurs dans  $\mathbf{R}^s$  tels que*

$$E[Z_{i,k}] = \mathbf{g}'_{i,k}\beta$$

*pour tout  $i,k \in \{0,1,\dots,n\}$ .*

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle linéaire pour la réservation sont satisfaites et que le paramètre  $\beta$  est inconnu.

Soit  $m := (n+1)^2$ . En posant

$$\begin{aligned} X_h &:= Z_{i,k} \\ \mathbf{a}_h &:= \mathbf{g}_{i,k} \end{aligned}$$

avec

$$h := \begin{cases} \frac{(2n+3-i)i}{2} + k + 1 & \text{si } i+k \leq n \\ \frac{n(n+1)+i(i+1)}{2} + k + 1 & \text{si } i+k > n \end{cases}$$

on obtient un vecteur aléatoire

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}$$

composé par les accroissements réarrangés tel que  $\mathbf{X}_1$  est observable et  $\mathbf{X}_2$  est non-observable, et une matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$$

dont les lignes sont les transposées des vecteurs  $\mathbf{a}_h$  telle que

$$E \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \beta$$

Alors les conditions du modèle linéaire élargi sont satisfaites.

## 6.3 Le Modèle de Mack

Le modèle linéaire de Mack est le modèle suivant:

**Modèle de Mack:** *Il y a des paramètres  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n \in (0, \infty)$ ,  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in (0, \infty)$  et  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 \in (0, \infty)$  tels que*

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{Z_{i,k}}{\nu_i} \right] &= \beta_k \\ \text{cov} \left[ \frac{Z_{i,k}}{\nu_i}, \frac{Z_{j,l}}{\nu_j} \right] &= \frac{\sigma_k^2}{\nu_i} \delta_{i,j} \delta_{k,l} \end{aligned}$$

*pour tout  $i, j, k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ .*

Il y a au moins deux interprétations des paramètres  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$  du modèle de Mack:

- $\nu_i$  est la somme des primes pour l'année d'origine  $i$ .
- $\nu_i$  est le nombre des contrats dans l'année d'origine  $i$ .

Nous supposons dans cette section que les conditions du modèle de Mack sont satisfaites, que les paramètres  $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n$  sont connus et que les autres paramètres sont inconnus.

Pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$  on a

$$\begin{aligned} E[Z_{i,k}] &= \nu_i \beta_k \\ \text{cov}[Z_{i,k}, Z_{j,l}] &= \nu_i \sigma_k^2 \delta_{i,j} \delta_{k,l} \end{aligned}$$

Posons  $s := n + 1$  et

$$\boldsymbol{\beta} := \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Alors il existe pour tout  $i, k \in \{0, 1, \dots, n\}$  un vecteur  $\mathbf{g}_{i,k} \in \mathbf{R}^s$  tel que

$$E[Z_{i,k}] = \mathbf{g}'_{i,k} \boldsymbol{\beta}$$

Cela donne

$$E \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}$$

avec  $\mathbf{A}_1 \in \mathbf{R}^{m_1 \times s}$  et  $\mathbf{A}_2 \in \mathbf{R}^{m_2 \times s}$ . En plus, on a  $\text{rang}(\mathbf{A}_1) = s$  et la matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_{11} := \text{Var}[\mathbf{X}_1]$  est une matrice diagonale et régulière.

Le modèle de Mack satisfait donc aux conditions du modèle linéaire élargi avec  $\boldsymbol{\Sigma}_{21} := \text{Cov}[\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1] = \mathbf{O}$ .

On s'intéresse aux estimateurs de Gauss–Markov

- des accroissements non-observables  $Z_{i,k}$ ,
- de la somme  $\sum_{k=n-i+1}^n Z_{i,k}$  des accroissements non-observables de l'année d'origine  $i$  et
- de la somme  $\sum_{i=0}^n \sum_{k=n-i+1}^n Z_{i,k}$  de tous les accroissements non-observables.

Parce que  $\boldsymbol{\Sigma}_{21} = \mathbf{O}$ , il suffit de déterminer l'estimateur de Gauss–Markov du paramètre  $\boldsymbol{\beta}$ .

L'estimateur de Gauss–Markov  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  de  $\boldsymbol{\beta}$  sur la base de  $\mathbf{X}_1$  minimise l'erreur quadratique pondérée

$$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}})' \boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1} (\mathbf{X}_1 - \mathbf{A}_1 \hat{\boldsymbol{\beta}})$$

Parce que la matrice  $\Sigma_{11}$  est une matrice diagonale, l'erreur quadratique pondérée est égale à la somme double

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{\nu_i \sigma_k^2} (Z_{i,k} - \nu_i \hat{\beta}_k)^2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{\nu_i} (Z_{i,k} - \nu_i \hat{\beta}_k)^2$$

En minimisant chacune des sommes intérieures du côté droit de l'équation obtient

$$\boldsymbol{\beta} := \begin{pmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \vdots \\ \beta_n^* \end{pmatrix}$$

avec

$$\beta_k^* = \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i}$$

On remarque que la connaissance des paramètres  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  n'est pas nécessaire pour déterminer l'estimateur de Gauss–Markov du paramètre  $\boldsymbol{\beta}$ .

Il est maintenant facile de déterminer les estimateurs de Gauss–Markov des accroissements non–observables et de leurs sommes:

- À cause de  $\Sigma_{21} = \mathbf{O}$  on a

$$\mathbf{X}_2^* = \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\beta}$$

- Pour tout  $i, k \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $i + k > n$  il existe un vecteur unitaire  $\mathbf{e}'_{i,k}$  tel que  $Z_{i,k} = \mathbf{e}'_{i,k} \mathbf{X}_2$  et on obtient

$$\mathbf{Y}^*(Z_{i,k}) = \mathbf{e}'_{i,k} \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\beta}$$

Puisque  $\mathbf{g}'_{i,k} \boldsymbol{\beta} = E[Z_{i,k}] = E[\mathbf{Y}^*(Z_{i,k})] = \mathbf{e}'_{i,k} \mathbf{A}_2 \boldsymbol{\beta}$  on a  $\mathbf{g}'_{i,k} = \mathbf{e}'_{i,k} \mathbf{A}_2$  et donc

$$\mathbf{Y}^*(Z_{i,k}) = \mathbf{g}'_{i,k} \boldsymbol{\beta}$$

Parce que  $\nu_i \beta_k = E[Z_{i,k}] = E[\mathbf{Y}^*(Z_{i,k})] = \mathbf{g}'_{i,k} \boldsymbol{\beta}$  cette dernière équation donne

$$\mathbf{Y}^*(Z_{i,k}) = \nu_i \beta_k^*$$

- Pour chaque année d'origine  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a

$$\mathbf{Y}^* \left( \sum_{k=n-i+1}^n Z_{i,k} \right) = \sum_{k=n-i+1}^n \nu_i \beta_k^*$$

- Pour la somme de tous les accroissements non–observables on a

$$\mathbf{Y}^* \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=n-i+1}^n Z_{i,k} \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=n-k+1}^n \nu_i \beta_k^*$$

À l'aide des paramètres  $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  on peut enfin déterminer l'espérance de l'erreur quadratique d'estimation dans les trois cas.

## Bibliographie

- BAUER, H. [1991]: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin: DeGruyter.
- BAUER, H. [1992]: *Maß- und Integrationstheorie*. 2. Auflage. Berlin: DeGruyter.
- BENKTANDER G [1976]: *An approach to credibility in calculating IBNR for casualty excess reinsurance*. The Actuarial Review **April**, 7.
- BILLINGSLEY, P. [1995]: *Probability and Measure*. Third Edition. New York – Chichester: Wiley.
- BORNHUETTER RL & FERGUSON RE [1972]: *The Actuary and IBNR*. Proc. CAS **59**, 181–195.
- DEVYLDER F [1982]: *Estimation of IBNR claims by credibility theory*. Insurance Math. Econom. **1**, 35–40.
- FARNY D ET AL. (ED.) [1988]: *Handwörterbuch der Versicherung*. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.
- HACHEMEISTER CA & STANARD JN [1975]: *IBNR claims count estimation with static lag functions*. Unpublished.
- HAMER MD [1999]: *Loss prediction by generalized least squares – Discussion of Halliwell (1996)*. Proc. CAS **86**, 748–763.
- HESS KT & SCHMIDT KD [1994]: *A remark on modelling IBNR claim numbers with random delay pattern*. Dresdner Schriften zur Versicherungsmathematik 4/1994.
- HESS KT & SCHMIDT KD [2001]: *Credibility-Modelle in Tarifierung und Reservierung*. Allg. Statist. Archiv **85**, 225–246.
- HESS KT & SCHMIDT KD [2002]: *A comparison of models for the chain-ladder method*. Insurance Math. Econom. **31**, 351–364.
- HESSELAGER O & WITTING T [1988]: *A credibility model with random fluctuations in delay probabilities for the prediction of IBNR claims*. ASTIN Bull. **18**, 79–90.
- INSTITUTE OF ACTUARIES (ED.) [1989]: *Claims Reserving Manual*. London: The Institute of Actuaries.
- LORENZ H & SCHMIDT KD [1999]: *Grossing-up, chain-ladder and marginal-sum estimation*. Blätter DGVM **24**, 195–200.
- MACK T [1990]: *Improved estimation of IBNR claims by credibility theory*. Insurance Math. Econom. **9**, 51–57.
- MACK T [1991]: *A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR claims reserves*. ASTIN Bull. **21**, 93–103.
- MACK T [1993]: *Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates*. ASTIN Bull. **23**, 213–225.
- MACK T [1994a]: *Which stochastic model is underlying the chain-ladder method?* Insurance Math. Econom. **15**, 133–138.
- MACK T [1994b]: *Measuring the variability of chain-ladder reserves*. In: *Casualty Actuarial Society Forum Spring 1994*, vol. 1, pp. 101–182.

- MACK T [1997]: *Schadenversicherungsmathematik*. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.
- MACK T [2000]: *Credible claims reserves – The Benktander method*. ASTIN Bull. **30**, 333–347.
- MACK T & VENTER G [2000]: *A comparison of stochastic models that reproduce chain-ladder reserve estimates*. Insurance Math. Econom. **26**, 101–107.
- NORBERG R [1986]: *A contribution to modelling of IBNR claims*. Scand. Actuar. J., 155–203.
- RADTKE M & SCHMIDT KD (ED.) []: *Handbuch der Schadenreservierung*. En préparation.
- RENSHAW AE & VERRALL R [1998]: *A stochastic model for the chain-ladder method*. British Actuarial J. **14**, 903–923.
- SCHMIDT KD [1996]: *Lectures on Risk Theory*. Stuttgart: Teubner.
- SCHMIDT KD [1998]: *Prediction in the linear model – A direct approach*. Metrika **48**, 141–147.
- SCHMIDT KD [1999a]: *Non-optimal prediction by the chain-ladder method*. Insurance Math. Econom. **21**, 17–24.
- SCHMIDT KD [1999b]: *Chain-ladder prediction and asset-liability management*. Blätter DGVM **24**, 1–9.
- SCHMIDT KD [1999c]: *Reservierung für Spätschäden – Modellierung am Beispiel des Chain-Ladder Verfahrens*. Allg. Statist. Archiv **83**, 267–280.
- SCHMIDT KD [1999d]: *Loss prediction by generalized least squares – Discussion of Halliwell (1996)*. Proc. CAS **86**, 736–747.
- SCHMIDT KD [2001]: *Versicherungsmathematik*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer.
- SCHMIDT KD [2002]: *A note on the overdispersed Poisson family*. Insurance Math. Econom. **30**, 21–25.
- SCHMIDT KD & SCHNAUS A [1996]: *An extension of Mack’s model for the chain-ladder method*. ASTIN Bull. **26**, 247–262.
- SCHMIDT KD & WÜNSCHE A [1998]: *Chain-ladder, marginal-sum and maximum-likelihood estimation*. Blätter DGVM **23**, 267–277.
- STRAUB E [1988]: *Non-Life Insurance Mathematics*. Berlin – Heidelberg – New York: Springer.
- TAYLOR GC [1986]: *Claims Reserving in Non-Life Insurance*. Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland.
- TAYLOR GC [2000]: *Loss Reserving – An Actuarial Perspective*. Boston – Dordrecht – London: Kluwer.
- VAN EEGHEN J [1981]: *Loss Reserving Methods*. Rotterdam: Nationale Nederlanden.
- VERRALL RJ [2000]: *An investigation into stochastic claims reserving models and the chain-ladder technique*. Insurance Math. Econom. **26**, 91–99.
- VERRALL RJ & ENGLAND PD [2000]: *Comments on ‘A comparison of stochastic models that reproduce chain-ladder reserve estimates’ by Mack and Venter*. Insurance Math. Econom. **26**, 109–111.
- WITTING T [1987]: *Kredibilitätsschätzungen für die Anzahl IBNR-Schäden*. Blätter DGVM **18**, 45–58.