IRM | institut du risk management

Mémoire présenté pour la validation de la Formation
« Certificat d'Expertise Actuarielle »
de l'Institut du Risk Management
et l'admission à l'Institut des actuaires
le

Par : Raphaël KONAN

Titre : Introduction du risque de défaut en matière de tarification : Application aux traités de réassurance vie

Confidentialité : ☑ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1an ☐ 2 ans)
Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des actuaires :

Membres présents du jury de l'Institut du Risk Management :

Secrétariat :

Bibliothèque :

Entreprise : NEXIALOG Consulting

Nom :

Signature et Cachet :

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Jérémy ROBERT

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Signature(s) du candidat(s)

Table des matières

Remerciements 4
Résumé 5
Abstract 6
Synthèse de l'étude 7
Executive summary 13
Limites du mémoire 18
Liste des Abréviations 20
Introduction 21
Chapitre 1 : La réassurance 24
1.1. Définition et problématique 24
1.2. Acteurs de la réassurance 24
1.3. Le marché de la réassurance en bref 25
1.4. Formes juridiques d'un contrat de réassurance 30
1.4.1. Le traité 30
1.4.2. La facultative 30
1.4.3. La facultative obligatoire 30
1.5. Deux formes techniques de réassurance 31
1.5.1. Les traités proportionnels 31
1.5.2. Les traités non-proportionnels 31
Chapitre 2 : Modèles de défaut, déflateurs et Credit Valuation Adjustment 33
2.1. Modèles de défaut structurels 33
2.1.1. Modèle de Merton 33
2.1.2. Modèle KMV 35
2.1.3. Modèle basé sur les ratings 37
2.1.4. Modèles factoriels 37
2.2. Les modèles à intensité de défaut 38
2.3. La Credit Valuation Adjustment 39
2.3.1. Contexte et définition 39
2.3.2. Notion de risque de contrepartie 40
2.3.3. Différents types de CVA 40
2.3.4. Eléments de calcul de la CVA 43
Chapitre 3 : Tarification d'un traité de réassurance intégrant le risque de défaut 57
3.1. Spécification du modèle 57
3.1.1. Hypothèses de modélisation 57

3.1.2. La réassurance perçue sous l'angle d'un produit dérivé d'assurance 58
3.1.3. Caractéristiques du swap de sinistralité 60
3.2. Pricing du risque de contrepartie sous-jacent à un traité de réassurance 62
3.2.1. Tarification en prime pure sur le marché primaire 63
3.2.2. Réassurance des contrats de Sofia et tarification traditionnelle des traités 68
3.2.3. Introduction du risque de défaut dans la tarification des traités 77
3.3. Calibrage des paramètres de tarification du risque de défaut du réassureur 93
3.3.1. Calibrage des probabilités de défaut 93
3.3.2. Calcul des facteurs d'actualisation 103
3.4. Résultats de la tarification du risque de défaut du réassureur 105
3.4.1. CVA unilatérale hors soulte 105
3.4.2. Evolution de la CVA en fonction du taux de recouvrement ajusté 106
3.4.3. Présentation détaillée des primes de réassurance ajustées du prix du risque de contrepartie 112
Conclusion 116
Table des illustrations 118
Annexes 120
Bibliographie 133

Remerciements

Nos premiers remerciements vont à l'endroit de Ali Zerad pour la qualité des sujets traités ensemble dans le cadre des chantiers du pôle R&D de Nexialog Consulting. Notre approfondissement du concept de la *CVA* date de cette période de collaboration, et le présent mémoire n'aurait existé sous son thème actuel sans cette collaboration.

Nous remercions également Xavier Milhaud, Directeur des études du CEA, et Areski Cousin, Professeur d'actuariat à l'Université de Strasbourg pour leur disponibilité et pour l'aide précieuse apportée dans l'élaboration du mémoire.

Enfin nous remercions toutes les personnes qui, de prêt ou de loin, ont contribué à réaliser ce mémoire, en particulier le corps dirigeant de Nexialog Consulting pour sa marque de confiance et pour l'encadrement reçu depuis bientôt un an.

Résumé

Mots clés : réassurance, traités, tarification, swap, Credit Valuation Adjustment, probabilités de défaut, CDS

Ce mémoire propose une tarification des traités de réassurance incluant le risque de défaut du réassureur. La méthode utilisée pour atteindre cet objectif consiste à ajuster la prime de réassurance classique par un terme reflétant le prix du risque. Afin de calculer le terme d'ajustement, nous avons, d'une part, assimilé le contrat de réassurance à un « swap de sinistralité » par analogie à un *Credit Default Swap* (*CDS*). D'autre part, nous avons calculé le prix du risque de contrepartie découlant de ce swap en recourant à la notion de *CVA* (*Credit Valuation Adjustment*). Le mémoire est structuré en trois parties. La première partie définit la réassurance et en rappelle les principes généraux. La seconde partie aborde les modèles de défaut. Elle traite aussi de la *CVA*, dispositif servant au calcul du prix du défaut inhérent au swap de sinistralité. Enfin, la troisième partie présente la modélisation des valeurs théoriques de cinq swaps de sinistralité dont nous calculons les *CVA* respectives en vue d'en ajuster les primes de réassurance. Les *CVA* sont calculées du point de vue de l'assureur.

Plusieurs enseignements peuvent être tirés de ce mémoire :

- La valeur de la *CVA* diminue progressivement en fonction du taux de recouvrement et du taux de collatéralisation. On montre notamment que cette valeur devient nulle dès lors que le *Loss Given Default*[1] est inférieur au taux de collatéralisation réduit de son *haircut*
- La méthode d'ajustement tarifaire proposée pourrait servir de levier supplémentaire pour l'assureur dans la négociation des primes de réassurance, notamment face à des réassureurs n'offrant aucune garantie de collatéral.
- L'approche par la *CVA* se prête mieux aux portefeuilles de réassurance tarifés traité par traité ; c'est le cas, par exemple, des traités en excédent de plein et des traités en excédent de sinistre.
- Enfin, la méthode d'ajustement tarifaire proposée pourrait être étendue à la tarification des contrats d'assurance en vue d'impacter la prime d'assurance du risque de défaut de l'assureur. Elle pourrait, de façon plus générale, être appliquée à toute autre forme de contrats synallagmatiques tels que les swaps de longévité, les Cat Bonds, etc.

[1] La perte en cas de défaut, matérialisée par un moins le taux de recouvrement.

Abstract

Key words: reinsurance, treaties, pricing, swap, Credit Valuation Adjustment, default probabilities, CDS

This actuarial thesis aims at including the reinsurer's default risk in the reinsurance premium. The method used to achieve this objective consists in adjusting the traditional reinsurance premium by a term which represents the default risk premium. In order to solve for the adjustment term's value, we have assimilated the reinsurance contract to what we denote by a "claim swap" in reference to a Credit Default Swap (CDS). Then, we valued the counterparty risk premium inherent to the "claim swap" using the so-called CVA concept (Credit Valuation Adjustment). The thesis consists of three parts. The first one deals with the concept of reinsurance and its general principles. The second part recalls some of the major theories in terms of default modelling. That part also discusses the CVA as a technique allowing for the calculation of the default risk premium. In the last part, we present a modelling framework giving the theoretical values of five reinsurance treaties (here denoted by "claim swaps") for which we calculate the corresponding CVAs in order to adjust the reinsurance premiums. CVAs are only calculated from the perspective of the insurer.

Several lessons could be learned from our work:

- The CVA is a decreasing function of both the recovery rate and the collateral level. In particular, we show that the CVA value reaches zero when the Loss Given Default becomes smaller than the collateral rate net of haircut.
- The proposed adjustment technique could serve as an additional leverage for the insurer while negotiating its reinsurance premiums, particularly when the reinsurer offers no collateral.
- The CVA approach is more appropriate for reinsurance portfolios where treaties are valued in a line-by-line way, such as surplus share and stop-loss contracts.
- Finally, our reasoning could be extended to the pricing of a traditional insurance policy in order to capture the insurer's default risk. Other potential extension fields are bilateral contracts such as longevity swaps, Cat Bonds, etc.

Synthèse de l'étude

(i) Le contexte et la problématique

L'industrie de l'assurance est un secteur financier à part entière et les produits qui y sont commercialisés sont légitimement perceptibles comme des produits financiers embarquant des garanties actuarielles. Pourtant, contrairement aux produits traditionnellement échangés sur le marché financier, le prix d'un contrat d'assurance n'inclut pas directement de composante de défaut. Cela est d'autant plus paradoxal que le risque de défaut est bien présent dans ce secteur d'activité. Nous en voulons pour preuve les faillites en série observables sur le marché de l'assurance construction[2].

L'éventualité d'un défaut de l'assureur (*resp*. du réassureur) constitue un gros risque pour l'assuré (*resp*. pour l'assureur) du fait des montants colossaux garantis. En 2017, l'APREF (Association des Professionnels de la Réassurance en France) avait ainsi évalué à 140 milliards de dollars le coût de l'assurance des dégâts causés par les ouragans Harvey, Irma et Maria.

Par ailleurs, sur le marché de la réassurance, la législation européenne n'impose aucune obligation aux réassureurs quant à la livraison d'un collatéral en échange du portefeuille cédé (directive réassurance 2005/68/CE). Et, la plupart des acteurs du secteur ne sont pas référencés sur le marché des *CDS* (*Credit Default Swap*), limitant ainsi les marges de couverture des opérateurs les plus exposés au risque de défaut.

(ii) L'objectif de l'étude

A travers ce mémoire, nous souhaitions introduire le risque de défaut de contrepartie dans la tarification des contrats d'assurance au sens large[3].

Dans le cadre de la réassurance, cette introduction pourrait constituer un levier supplémentaire dans la négociation des tarifs. Ainsi, dans notre modélisation, nous proposons une révision des tarifs de réassurance vie en nous plaçant du point de vue d'un assureur désirant optimiser ses tarifs en jouant sur le risque de défaut de son réassureur. Le raisonnement inverse est aussi légitime et envisageable.

(iii) La modélisation

Illustration d'une couverture de réassurance par un *Credit Default Swap*

Afin de proposer une tarification des traités de réassurance ajustée du risque de défaut du réassureur, nous établissons un parallèle entre un contrat de réassurance et un *CDS*. Le *CDS* est probablement la meilleure illustration possible d'un contrat de réassurance par un swap. En raison de cette analogie, nous utilisons par la suite l'expression « swap de sinistralité » pour désigner un contrat de réassurance. Puis, le prix du risque de défaut est obtenu en calculant la *CVA* (*Credit Valuation Adjustment*) du swap de sinistralité.

[2] Voir Annexe 0 pour consulter la liste des assureurs défaillants recensés au cours des dix dernières années.
[3] Y compris le secteur de la réassurance

Le schéma ci-dessous met en lumière les similitudes entre un *CDS* et un contrat de réassurance.

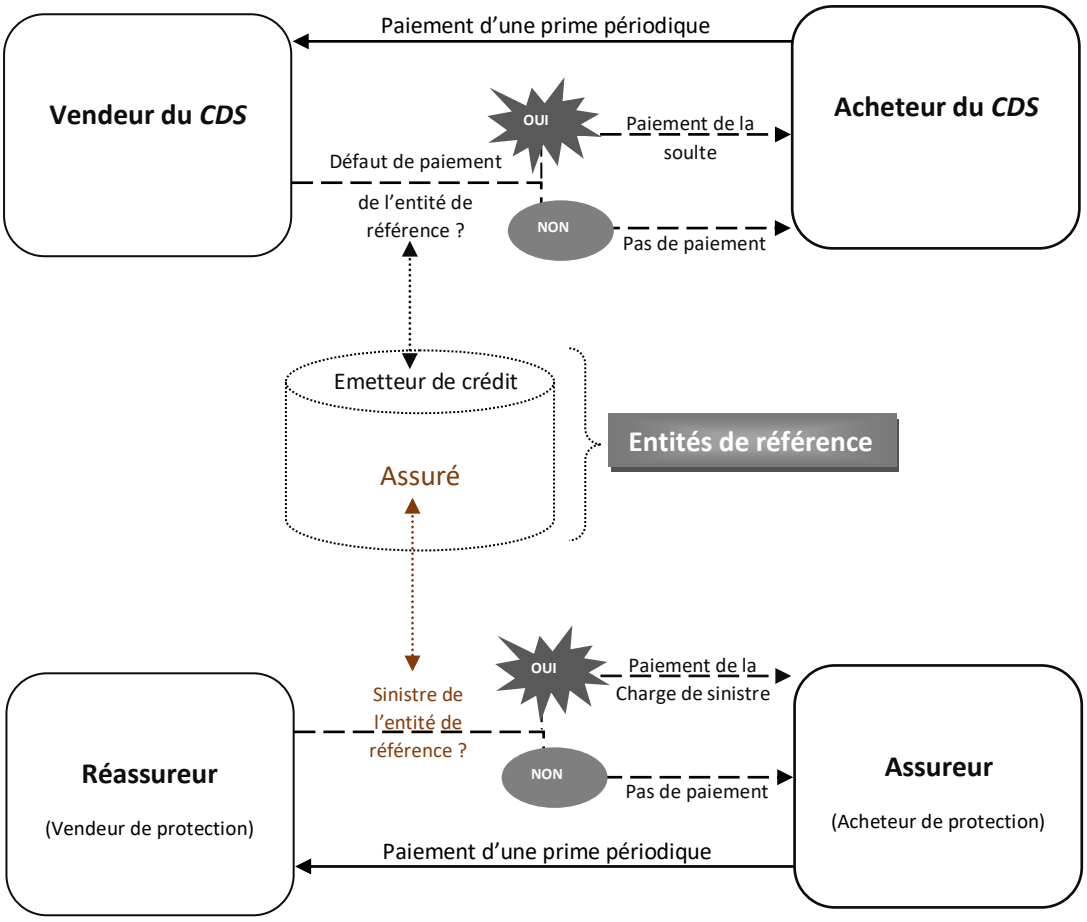


Figure 1 : Similitudes entre un *CDS* et un traité de réassurance

Tout comme un *CDS*, un contrat de réassurance met en jeu trois parties :

- Le réassureur, acheteur d'un risque de sinistralité et réciproquement vendeur d'une protection contre ce risque
- L'assureur, vendeur d'un risque de sinistralité et réciproquement acheteur d'une protection contre ce risque
- L'assuré, incarnant l'entité de référence dont le sinsitre déclenche le versement, par le réassureur à l'assureur, de la charge de sinistre couverte par le traité. Ce flux servant ensuite à l'indemnisation de l'assuré ou de ses bénéficiaires.

Dans un *CDS*, comme dans un contrat de réassurance, le risque couvert est négocié entre le vendeur et l'acheteur du risque. La protection effective est déclenchée par la réalisation d'un événement de risque (défaut pour le *CDS* et sinistre pour le traité) issu de l'entité de référence.

Hypothèses de modélisation

La modélisation proposée se fonde sur un certain nombre d'hypothèses que nous listons ci-dessous :

- Par souci de simplification, le modèle proposé se fonde sur une tarification en prime pure. Il ne tient, de ce fait, pas compte des frais de gestion des contrats cédés et encore moins des commissions de réassurance.
- La protection offerte par la réassurance couvre toute la durée de la garantie.
- Nous nous plaçons dans un cadre théorique de modélisation où les sinistres surviennent à la mi-année et sont payés à ce moment-là.
- Les probabilités de défaut découlent d'une courbe de spreads de *CDS* et sont formulées dans le cadre d'un modèle à intensité.

Cinq contrats de réassurance sont étudiés dans le mémoire. Leurs caractéristiques synthétiques sont confinées dans le tableau ci-après :

Garantie	Type de traité	Prime*	Date Souscription	Maturité	Age assuré	Table de mortalité
Mixte	Quote-Part	PPU	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Mixte	Quote-Part	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Mixte	Excédent de Plein	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Temporaire Décès	Quote-Part	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Temporaire Décès	Excédent de Plein	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02

(*) PPU : prime pure unique / PPP : prime pure périodique

Figure 2 : Caractéristiques des contrats étudiés

Pricing des swaps de sinistralité et du prix du risque de défaut

Pour la note de synthèse, nous ne présentons que le contrat mixte à prime pure périodique cédé en excédent de plein. Le détail des prix théoriques des swaps, et des *CVA* associés, pour les autres contrats est disponible au chapitre 3 du mémoire.
Le schéma de calcul présenté pour le contrat mixte à prime pure périodique cédé en excédent de plein demeure le même pour tous les autres contrats étudiés.

Valeur théorique du swap de sinistralité :

La valeur théorique du contrat de réassurance est donnée par l'égalité[4] :

$$\Pi(t,N)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}\left((t+1)\pi-R\right)^+-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^+}\pi\right]v^t+\frac{l_{x+N}}{l_x}\left(C-R\right)^+v^N$$

[4] La démonstration de l'égalité est présentée à la section 3.2.2, dans la partie consacrée aux traités en excédent de plein.

Où :

- π désigne la prime pure périodique. Dans notre modèle, le bénéficiaire du contrat mixte perçoit la somme des primes versées par l'assuré jusqu'à la date du décès éventuel, dans la limite de la durée du contrat.
- R désigne le plein de rétention.
- C le capital garanti perçu par l'assuré s'il est encore en vie au terme du contrat.
- N l'échéance du contrat.
- v^t le facteur d'actualisation des flux à venir en date t.
- Π le prix du swap de sinistralité (i.e., le contrat de réassurance).
- $x^+ = \max(x, 0)$

La jambe de prime $J_p(t)$ du swap vaut :

$$J_p(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{\left((t+1)\pi - R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi, R\right) + \left((t+1)\pi - R\right)^+} \pi v^t$$

Et la jambe de sinistre est :

$$J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \left((t+1)\pi - R\right)^+ v^t + \frac{l_{x+N}}{l_x} \left(C - R\right)^+ v^N$$

La valeur de la soulte du swap est connue à la signature du contrat, soit à $t = 0$:

$$Soulte = \Pi(0, N)$$

Le prix du risque de défaut du réassureur :

La détermination de ce prix passe par le calcul de la *CVA* unilatérale ($UCVA$) associée au swap de sinistralité :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{N} D(0, T_k) \left(\gamma_t\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

- γ_t est égal au flux net probable perçu par l'assureur en t. Il s'agit de la différence entre la charge des sinistres probables versée par le réassureur et la prime de réassurance payée par l'assureur.
- $D(0, T_k)$ est le facteur d'actualisation (déterministe dans notre cas) applicable aux flux $\left(\gamma_t\right)^+$ à la date T_k.
- $\bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$ est la probabilité de défaut du réassureur entre les dates T_{k-1} et T_k.
- $R^{ec}{}_{Adj} = R^{ec} + Min\left((1 - chc)c, 1 - R^{ec}\right)$, où R^{ec} est le taux de recouvrement en cas de défaut du réassureur, c désigne le taux de collatéralisation et chc le pourcentage de dépréciation (*haircut*) de la valeur du collatéral au moment du défaut éventuel.
- $UCVA$ est le prix du risque de défaut.

Le prix du risque après ajustement par la soulte devient :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0, N)\right)^+$$

(iv)Les résultats

La figure 3 donne les variations de la *CVA* unilatérale en fonction du taux de collatéralisation et du taux de recouvrement.

Nappe de *CVA* en fonction du taux de recouvrement ajusté

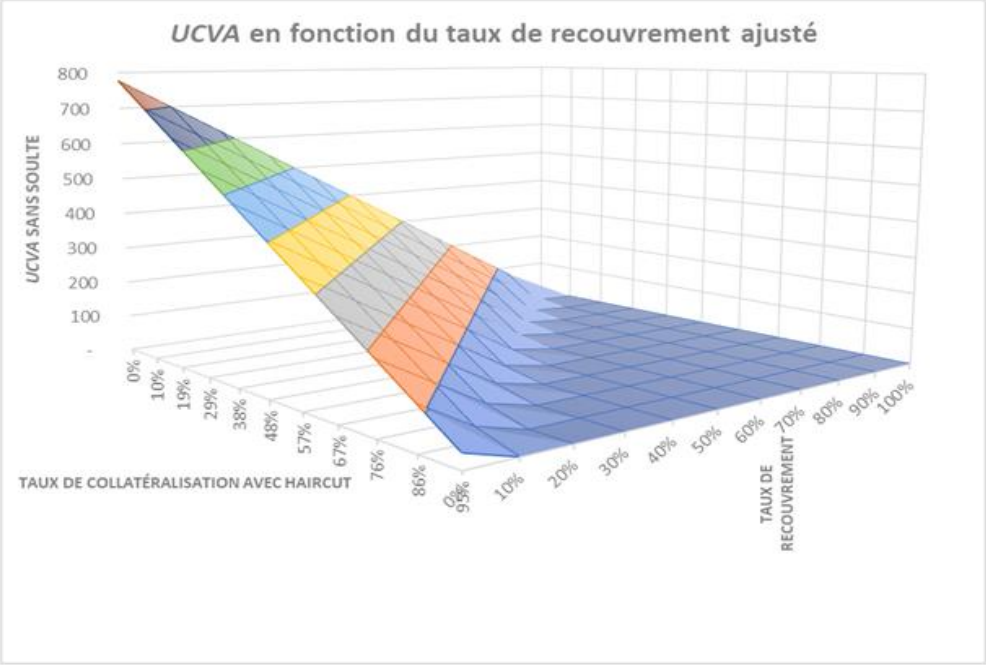


Figure 3 : Nappe de *CVA* en fonction du taux de recouvrement ajusté

Comme le montre le graphique ci-dessus, le prix du risque de contrepartie (*UCVA*) est maximal pour l'assureur lorsque les taux de recouvrement et de collatéralisation sont nuls. Le prix est une fonction décroissante de ces deux taux. On remarque par ailleurs l'annulation du prix du risque à partir d'un certain seuil. Ce seuil est atteint lorsque la relation $(1-chc)c \geq \left(1-R^{ec}\right)$ est satisfaite.

Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein

t	ä30:10	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* (avec soulte)	Ajustement du tarif au fil de l'eau	Prime du traité ajustée du risque de contrepartie
0	9,76	439	0	77	-8	0
1	9,76	439	0	0	-8	0
2	9,76	439	0	0	-8	0
3	9,76	439	0	0	-8	0
4	9,76	439	96	0	-8	88
5	9,76	439	203	0	-8	195
6	9,76	439	310	0	-8	302
7	9,76	439	417	0	-8	409
8	9,76	439	524	0	-8	516
9	9,76	439	631	0	-6	625
10	9,76	439	0	0	0	0

Figure 4 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein

La *CVA* au fil de l'eau s'élève à un montant annuel de 8 € sur 9 ans et 6 € sur la 10ème année de prime. On constate que, du fait de l'absence de prime cédée avant les 4 premières années, le premier ajustement de la prime cédée devrait s'opérer à l'année 5. Le prix du traité ajusté du risque de contrepartie serait alors de 88 €, au lieu de 96 €, et il croîtrait jusqu'à 625 € à la 10ème année du traité, au lieu de 631 €. Ces prix sont à mettre à jour chaque année.

(v) Context and problem

The insurance industry is a financial sector whose products can legitimately be perceived as financial products embedding various actuarial guarantees. However, unlike the products usually traded on the financial markets, the premium of an insurance contract does not directly include a default risk component. Which is actually paradoxical since the default risk is not seldom in the sector. This is evidenced by the increasing number of insolvent insurers in the real estate market.

The perspective of an insurer's insolvency (resp. a reinsurer's insolvency) is a big threat to the policyholder (resp. the insurer) because of the huge benefit amounts at stake. According to a 2017 APREF (*Association des Professionnels de la Réassurance en France)* report, the insurance cost related to natural disasters Harvey, Irma and Maria amounted to $ 140 billion.

Besides, the European Union, through its directive 2005/68/EC, prohibits member states companies from requiring EU reinsurers to post collateral. Moreover, only a few companies are referenced on the CDS market, thus limiting the hedging possibilities against a contingent default.

(vi)Purpose

The current actuarial thesis aims at introducing the counterparty default risk in the pricing of insurance contracts.

In the context of reinsurance, this introduction could serve as an additional leverage in the premium negotiation between the insurer and the reinsurer. Thus, in our model, we propose an adjustment of life reinsurance premiums by calculating a CVA from the standpoint of the insurer. The reverse reasoning is both legitimate and recommendable.

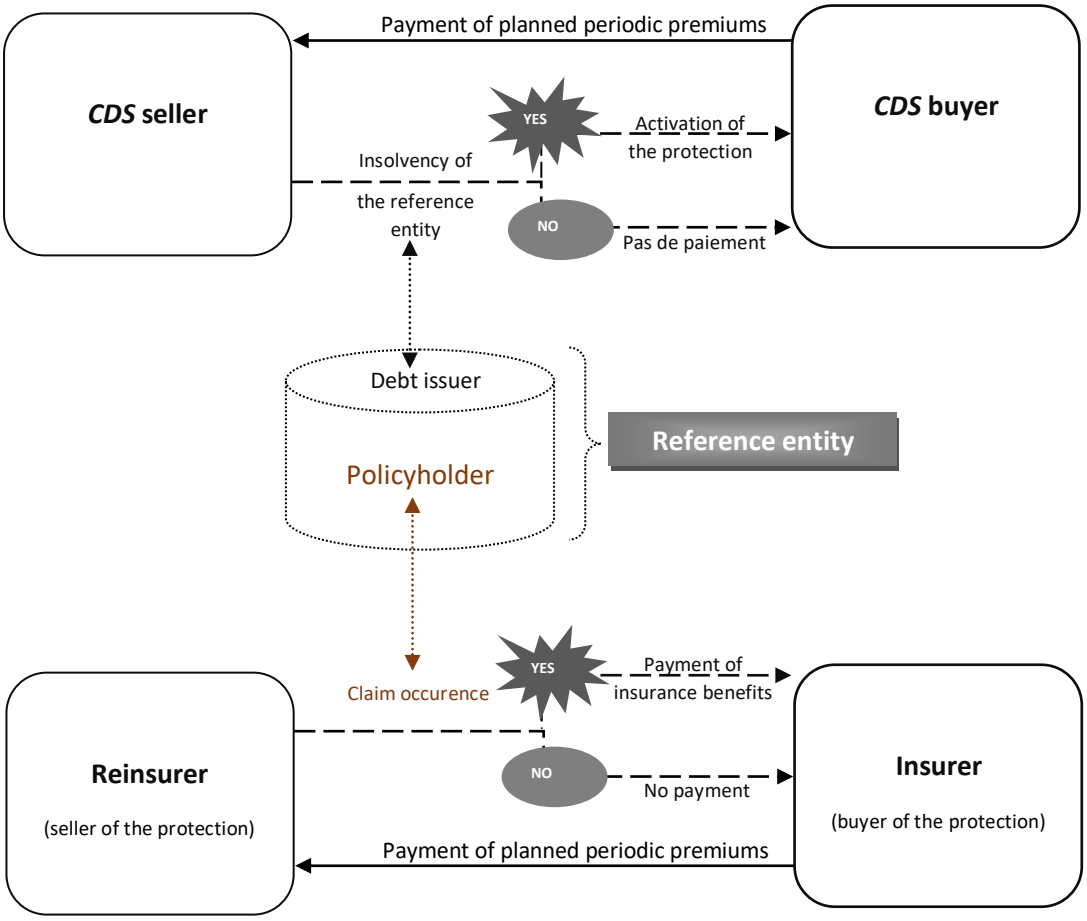
(vii) Model definition

Similarities between a reinsurance coverage and a *Credit Default Swap*

In order to calculate a reinsurance premium adjusted for the default risk of the reinsurer, we draw a parallel between a reinsurance contract and a CDS contract. CDS are probably the best possible illustration of a reinsurance contract by a swap contract. As a result of this analogy, we later use the expression "claim swap" to denote a reinsurance contract. Then, the price of the default risk is obtained by solving for the CVA (Credit Valuation Adjustment) of the "claim swap".

The diagram below highlights the similarities between a CDS contract and a reinsurance contract.

Similarities between a CDS contract and a reinsurance treaty



Both CDS contracts and reinsurance treaties involves three counterparties:

- The reinsurer, buyer of a risk and reciprocally seller of a protection against the risk

- The insurer, seller of a risk and reciprocally buyer of a protection against the risk

- The policyholder, embodying the reference entity whose claim triggers the payment, by the reinsurer to the insurer, of a guaranteed benefit specified in the terms of the treaty. Which benefit amount is subsequently paid to the policyholder or his beneficiaries.

In a CDS deal, as in a reinsurance contract, the hedged risk is traded between the seller and the buyer of the risk. The protection is triggered by a risk event (a default for the CDS or a claim for the treaty) from the reference entity.

Modelling assumptions

Our model relies on some assumptions listed below:

• For the sake of simplification, the model is based on pure premium pricing. As a result, it excludes both the management fees related to the insurance policies and the ceding commissions paid to the insurer.

• The coverage offered by a given treaty spans over the entire life of the contract.

• The model is built in a theoretical framework where claims occur in mid-year and are paid at that time.

• Default probabilities are derived from CDS spreads and are modelled through an intensity model.

Five reinsurance contracts are studied in this thesis. The following table provides a breakdown of each contract. The premiums are exclusively pure premiums.

Guarantees	Treaty nature	Premium*	Underwriting date	Duration	Insured age	Mortality table
Endowment plan	Quota share	PPU	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Endowment plan	Quota share	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Endowment plan	Surplus share	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Term insurance	Quota share	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02
Term insurance	Surplus share	PPP	01/01/2018	10	30	TH 00-02

(*) PPU : pure premium paid once, at inception / PPP : pure periodic premium

Reinsurance contract valuation and default risk pricing

Here, we only focus on an endowment plan for which the policyholder pays planned periodic premiums. We assume that the contract is ceded by the insurer to the reinsurer through a surplus share treaty.

The calculation steps shown below hold for the other four reinsurance treaties presented in the table above. Details of the calculations for those contracts are available in section 3.2 of the current paper.

Theoretical valuation of the claim swap (the treaty) :

The theoretical value of the reinsurance contract is given by[5] :

$$\Pi(t,N)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}\left((t+1)\pi-R\right)^+-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^+}\pi\right]v^t+\frac{l_{x+N}}{l_x}\left(C-R\right)^+v^N$$

where :

- π denotes the planned periodic premium. In our model, the beneficiary of the endowment plan receives a lump sum of money corresponding to the sum of the premiums paid by the policyholder prior to his death.
- R denotes the fixed amount of policy liability above which the reinsurer takes responsibility for the remaining claim charge.
- C is the sum to be received by the policyholder if he is still alive at the end of the contract.

[5] The formula is proved in section 3.2.2 of the paper. Please, refer to the sub-section related to surplus share treaties.

- N is the maturity date of the contract.
- v^t is the discount factor applied to cashflows at time *t*.
- Π the value of the claim swap (i.e., the treaty).
- $x^+ = \max(x, 0)$

The premium leg of the swap is worth :

$$J_p(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{\left((t+1)\pi - R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi, R\right) + \left((t+1)\pi - R\right)^+} \pi v^t$$

Whereas, the claim leg is :

$$J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \left((t+1)\pi - R\right)^+ v^t + \frac{l_{x+N}}{l_x} \left(C - R\right)^+ v^N$$

In order to issue a par swap, a cash adjustment needs to be made at the inception of the swap. That adjustment corresponds to the value of the claim swap at time 0 :

$$Soulte = \Pi(0, N)$$

Pricing the reinsurer's default risk :

The reinsurer's default risk appraisal is performed via the unilateral CVA related to the swap :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{N} D(0, T_k) \left(\gamma_t\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

- γ_t is the contingent net cashflow received by the insurer at time *t*. This is the difference between the contingent future amounts of money paid by the reinsurer and the future reinsurance premiums paid by the insurer.
- $D(0, T_k)$ the deterministic discount factor applied to cashflow $\left(\gamma_t\right)^+$ at time T_k.
- $\bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$ is the reinsurer's probability of default between time T_{k-1} and time T_k.
- $R^{ec}{}_{Adj} = R^{ec} + Min\left((1 - chc)c, 1 - R^{ec}\right)$, where R^{ec} is the recovery rate in case of default, *c* is the collateral rate and *chc* denotes the collateral haircut. R^{ec}_{Adj} is the adjusted recovery rate, i.e., the recovery rate adjusted in order to account for the collateral rate.
- *UCVA* is the price of the default risk.

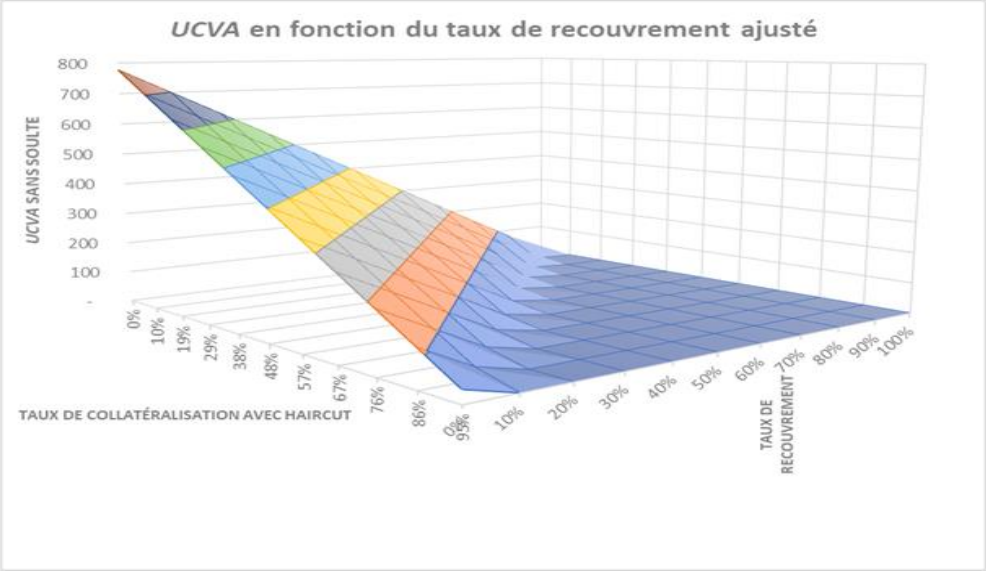
Finally, the price of the default risk after initial cash adjustment writes :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0, N)\right)^+$$

(viii) Results

The following exhibit shows how the unilateral CVA varies according to the collateral and recovery rates.

CVA surface as a function of the adjusted recovery rate



The price of the reinsurer's default risk (*UCVA*) is maximum when both the recovery and the collateral rates reach zero. The price is a decreasing function of these two rates. Moreover, we can notice the cancellation of the price when a certain threshold is reached. This is true when the following relation is respected :

$$(1-chc)c \geq \left(1-R^{ec}\right).$$

Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein

t	ä30:10	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* (avec soulte)	Ajustement du tarif au fil de l'eau	Prime du traité ajustée du risque de contrepartie
0	9,76	439	0	77	-8	0
1	9,76	439	0	0	-8	0
2	9,76	439	0	0	-8	0
3	9,76	439	0	0	-8	0
4	9,76	439	96	0	-8	88
5	9,76	439	203	0	-8	195
6	9,76	439	310	0	-8	302
7	9,76	439	417	0	-8	409
8	9,76	439	524	0	-8	516
9	9,76	439	631	0	-6	625
10	9,76	439	0	0	0	0

The running CVA is annually valued at 8 € over 9 years and 6 € in the 10th year of the treaty. As a result of the absence of ceded premiums before the first 4 years of the contract, the primary CVA adjustment of the premiums should occur in year 5. The premium of the treaty, after adjustment for the reinsurer's default, should then amount to 88 €, instead of 96 €, and it should grow up to 625 € in the 10th year of the treaty, instead of 631 €. The premium adjustments should be updated on an annual basis.

Limites du mémoire

Ce mémoire introduit une composante défaut dans le calcul des tarifs de réassurance vie. Pour ce faire, quelques hypothèses de modélisation simplificatrices sont postulées. La première concerne la caractérisation d'un contrat de réassurance par un contrat de swap entre l'assureur et le réassureur. En effet, s'il est vrai qu'il existe une analogie de forme et de principe entre la couverture par la réassurance et la couverture par *CDS* (Credit Default Swap), il n'en demeure pas moins vrai qu'il existe des différences fondamentales entre le marché des dérivés et le marché de la réassurance :

- La prime de réassurance intègre une composante d'évaluation des risques techniques et dépend également de négociation sur le marché de la réassurance. Même si les flux de réassurance correspondent à ceux d'un swap de sinistralité, une position sur un contrat de réassurance ne peut pas être réinvestie sur le marché en cas de défaut du réassureur, comme c'est le cas pour les dérivés de taux avec l'existence de *market-makers*. De ce point de vue, le concept de *CVA* (prix de marché du risque de contrepartie) serait sans doute mieux adapté pour les swaps de longévité ou les Cat Bonds. De plus, contrairement à la plupart des instruments échangés sur les marchés financiers, le swap de sinistralité (i.e., le contrat de réassurance) ne dispose pas d'un marché de produits dérivés suffisamment liquides pour couvrir la *CVA* du swap. Pour la couvrir, on pourrait calculer un *CDS* émis uniquement sur le contrat de réassurance concerné.

- Dans le calcul de la *CVA*, nous assimilons les dépôts de titres nantis et de cash à du collatéral. Ces dépôts sont en effet effectués par le réassureur en échange du portefeuille cédé par l'assureur. L'équivalence entre les dépôts et le collatéral est une pratique répandue dans la modélisation du SCR de contrepartie. Pour autant, contrairement au marché des dérivés, le réassureur n'est pas obligé de poster du collatéral conformément à la directive réassurance 2005/68/CE.

Par ailleurs, pour calibrer les probabilités de défaut utilisées dans le calcul de la *CVA*, nous utilisons des spreads de *CDS* de marché que nous interpolons pour les maturités manquantes. Cette interpolation directe des prix de marché est à éviter dans la mesure du possible car elle pourrait générer des opportunités d'arbitrage. Il aurait été préférable de postuler une intensité de défaut constante par morceaux.

Enfin, la caractérisation du traité de réassurance par un swap de sinistralité implique que le contrat de réassurance soit émis au pair. L'émission au pair assure qu'on a bien une égalité entre les valeurs actuelles probables des engagements futurs du réassureur et de l'assureur. Pourtant, cette égalité n'est pas toujours acquise dans notre modélisation (d'où la nécessité de verser une soulte), car les taux d'actualisation utilisés pour la tarification des contrats d'assurance sur le marché primaire[6] (entre l'assureur et l'assuré) ne correspondent pas aux taux d'actualisation déterministes utilisés pour valoriser les swaps de sinistralité. La soulte

[6] En effet, tout contrat d'assurance est émis au pair sur le marché primaire, du fait du principe d'égalité des VAP.

induite (positive ou négative) par cet écart de taux est rajoutée à la valeur de la *CVA* dans notre modélisation.

Liste des Abréviations

APREF : ASSOCIATION DES PROFESSIONNELS DE LA REASSURANCE EN FRANCE

CVA : CREDIT VALUATION ADJUSTMENT

DVA : DEBIT VALUATION ADJUSTMENT

CDS : CREDIT DEFAULT SWAP

ENE : EXPECTED NEGATIVE EXPOSURE

EPE : EXPECTED POSITIVE EXPOSURE

GSE : GENERATEUR DE SCENARIOS ECONOMIQUES

LGD : LOSS GIVEN DEFAULT

CIR : COX INGERSOLL ROSS

LMM : LIBOR MARKET MODEL

LMM+ : LIBOR MARKET MODEL PLUS

OTC : OVER THE COUNTER

PPU : PRIME PURE UNIQUE

PPP : PRIME PURE PERIODIQUE

KMV : KEALHOFER, McQUOWN, VASICEK

VAP : VALEUR ACTUELLE PROBABLE

Introduction

Les modèles de tarification traditionnels des contrats d'assurance semblent négliger un détail pour le moins important : le risque de défaut de l'une des parties prenantes au contrat. Faudrait-il vraiment s'en inquiéter ?

La question précédente est d'autant plus légitime que les récentes catastrophes naturelles (Irma, Harvey, Maria) et l'ampleur de leurs dégâts corporels et financiers[7] rappellent à l'esprit combien il est crucial pour l'assuré d'avoir une contrepartie solvable. Pour Denis KESSLER[8], les opérateurs ne poursuivant pas une stratégie de diversification et de protection contre ces événements extrêmes seraient les plus exposés à ces catastrophes ; ce qui pourrait causer leur sortie du marché.

Certes, les pertes potentielles en cas de défaut du réassureur sont quelques fois limitées par l'existence d'un collatéral sous la forme de cash ou de nantissement de titres. Cependant, pour les réassureurs européens, la directive réassurance 2005/68/CE n'impose aucune obligation de collatéral ; ce qui suppose par déduction qu'aucun assureur ne peut exiger de son réassureur le versement d'un collatéral en contrepartie des cessions.

En assurance vie, les contrats à prime unique tendent à corriger le risque de défaut pour l'assureur dès l'instant où le versement de la prime a été effectué par l'assuré. Par contre, l'assuré, lui, reste exposé au défaut potentiel de l'assureur, pénalisé du fait du cycle de production inversé caractérisant l'activité d'assurance.

Dans le cas des contrats à primes périodiques, il existe clairement un risque de défaut de paiement aussi bien chez l'assuré que chez l'assureur. Chez l'assuré, ce risque est lui-même justifié par le dispositif réglementaire[9] en assurance vie qui ne contraint pas l'assuré à verser les primes contractuelles prévues à la souscription. Toutefois, ce risque est atténué par le principe de la réduction de contrat qui consiste à revoir à la baisse la garantie offerte à l'assuré. La réduction de contrat impacte le calcul des provisions mathématiques et redéfinit les conditions tarifaires en supposant que la provision mathématique au moment de la cessation de paiement de la prime périodique correspond à la prime unique du "nouveau" contrat réduit. Le champ d'application de la réduction reste pour autant limité car, par exemple, les assurances temporaires en cas de décès ainsi que les rentes viagères immédiates ou en cours de service ne peuvent comporter ni réduction ni rachat (Article L132-23 du Code des Assurances).

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au risque de défaut d'un réassureur. Plus précisément, nous proposons une méthode d'ajustement tarifaire d'un traité de réassurance

[7] Selon l'APREF, le coût économique des pertes induites par les ouragans de 2017 se sont élevés à près de 140 milliards de dollars.

8 PDG du groupe SCOR, cité par *lesechos.fr* en septembre 2017, à l'article « Denis Kessler : L'assurance de certaines régions pourrait devenir insoutenable ».

[9] En effet, le Code des Assurances, à son article L. 132-20, mentionne que l'entreprise d'assurance ou de capitalisation n'a pas d'action pour exiger le paiement des primes.

permettant de capter le risque de défaut du réassureur. Pour ce faire, nous nous tournons vers le monde bancaire en vue de lui emprunter une notion déjà répandue en matière de valorisation de produits dérivés échangés de gré à gré[10] : la *Credit Valuation Adjustment* (*CVA*). Ce clin d'oeil aux paradigmes de la finance n'est pas le premier du genre en assurance. Il emboîte le pas aux désormais nombreuses adaptations de modèles financiers à l'assurance-vie, dont le très célèbre modèle de Black-Scholes utilisé pour le calcul de certaines provisions (*Variables Annuities*).

La *CVA* se définit comme la valeur de marché du risque de défaut d'une contrepartie. Il s'agit d'un ajustement du prix des produits dérivés (échangés de gré à gré) permettant de prendre en compte le défaut de paiement éventuel d'une contrepartie. En effet, dans la pratique, la valeur de la *CVA* est directement ajoutée au prix sans risque du produit dérivé, agissant ainsi comme une prime de risque. On la mesure par la différence entre la valeur sans risque du dérivé et la valeur de ce dernier en tenant compte du défaut potentiel de la contrepartie. Dans le domaine du *Risk Management* bancaire, la *CVA* permet de déterminer la *«fair value»* d'un produit dérivé et de constituer un capital réglementaire en vue de se prémunir contre l'avènement du défaut de la contrepartie. Il est donc primordial de distinguer entre, d'une part, la *CVA*, dont la valeur ajuste le prix de marché du produit dérivé, et, d'autre part, le capital réglementaire découlant de la *CVA*.

L'objectif de ce mémoire est de proposer une révision des tarifs de la réassurance à leur *fair-value*[11] via l'inclusion d'une décote[12] reflétant la probabilité de défaut du réassureur. Par souci de simplification, l'ajustement portera uniquement sur la prime pure et ignorera par conséquent les frais supportés par l'assureur, de même que les commissions versées par le réassureur.

Pour atteindre notre objectif, nous appliquons la notion de *CVA* à la réassurance. En effet, tout contrat de réassurance pourrait être perçu comme un produit dérivé d'assurance échangeant des flux contingents (i.e., les primes cédées par l'assureur, tant que l'assuré est en vie) contre d'autres flux variables (la charge des sinistres devant être payée par le réassureur).
Les flux associés au traité de réassurance décrivent donc implicitement un contrat de swap conclu de gré à gré entre l'assureur et le réassureur. Nous assimilons le sous-jacent de ce swap au risque assuré de base ; c'est-à-dire, la sinistralité (mortalité, longévité, etc) inhérente au portefeuille cédé.

L'assimilation du traité de réassurance à un accord de swap nous permettra de modéliser la *fair-value* du traité pour l'assureur ; c'est-à-dire, la prime de réassurance ajustée du risque de défaut du réassureur. Dans la modélisation du défaut, nous distinguons les trois grandeurs suivantes : la prime cédée au titre du traité, les prestations pour sinistres et la valeur du contrat (traité). La valeur du contrat est la valeur du swap modélisant l'accord d'échanges entre

[10] Dans la suite, nous utilisons de façon équivalente les expressions « OTC » (Over The Counter) et « de gré à gré » pour désigner les opérations conclues entre les opérateurs exerçant en dehors des marchés organisés.

[11] La prime de réassurance ajustée du risque de défaut.

[12] Une sous-prime si elle est calculée par l'assureur et une surprime si elle est mesurée pour le réassureur.

assureur et réassureur. Pour calculer la valeur du contrat, nous nous plaçons **du point de vue de l'assureur**, et, la valeur du contrat est calculée comme la somme des flux futurs probables actualisés au taux sans risque.

A partir des flux échangés, nous définissons pour l'assureur, à chaque période *t*, une notion de *payoff* instantané matérialisant la valeur du flux probable reçu (prestation pour sinistres éventuels survenus en *t*) nette du flux probable payé (prime cédée conditionnellement à la survie de l'assuré en *t*). Ainsi, si en *t* l'assureur attend un *payoff* instantané positif, il aura tout intérêt à ce que le réassureur ne fasse pas défaut. Un *payoff* positif signifiant en effet que la prime perçue au titre du portefeuille cédé est inférieure aux charges des sinistres recensés sur ce portefeuille en *t*. Réciproquement, si le *payoff* en *t* est négatif, alors il sera insensible au défaut du réassureur en *t* car la prestation du réassureur serait anticipée à la baisse par rapport à la prime cédée.

La *CVA* sera appliquée en vue de capturer tous les cas de figure possibles où l'assureur se retrouverait dans un cas de *payoff* positif, pour toutes dates *t* se situant dans les limites de la durée du traité. Dans la pratique, pour un swap, deux options[13] se présentent en matière de prise en compte du prix du défaut par la *CVA* :

- Soit, la *CVA* calculée est versée en début de contrat (par exemple, à la signature) à la contrepartie qui la calcule en vue de compenser le risque de défaut
- Soit, le paiement de la *CVA* est lissé dans le temps et affecte régulièrement la jambe du swap que l'on souhaite impacter du risque de défaut. Cette seconde option est choisie dans de nombreux cas, lorsqu'une contrepartie du swap est soucieuse d'ajuster un paramètre pendant la vie du swap (par exemple, le taux de swap, si ladite contrepartie reçoit le taux fixe).

L'option choisie dans le cadre de notre mémoire est la seconde, car nous souhaitons pouvoir ajuster la prime de réassurance du défaut du réassureur, à chaque pas de temps entre la date de signature du traité et l'échéance.

Nous structurerons ce document en trois parties. Dans un premier temps, nous définirons la notion de réassurance et en rappellerons les principes généraux. Dans un second temps, nous présenterons quelques modèles de défaut existant dans la littérature. Cette seconde étape traitera aussi de la *CVA*, dispositif qui servira ensuite au calcul du prix du défaut inhérent au swap de sinistralité. Enfin, la troisième étape présentera la modélisation des valeurs théoriques de cinq swaps de sinistralité dont on calculera les *CVA* respectives en vue d'ajuster les primes cédées. Ces primes seront ajustées au fil de l'eau.

[13] Voir Vrins et Gregory (2011) dans la section Bibliographie.

1.1. Définition et problématique

La réassurance se définit comme l'assurance des compagnies d'assurance. C'est l'activité par laquelle un assureur primaire cède tout ou partie de ses risques à un assureur secondaire, moyennant le versement d'une prime.

L'assureur primaire recourt à la réassurance lorsque ce dernier, ayant commercialisé des contrats auprès de ses assurés, estime que les garanties indexées à ces contrats comportent un risque trop élevé pour lui tout seul. L'assureur primaire est communément appelé la « cédante » car il cède ses risques, et, le réassureur s'appelle également le « cessionnaire ».

A noter que l'assureur qui se réassure reste seul responsable vis-à-vis de l'assuré (article L.111-3).

La réassurance est essentielle pour l'assureur pour trois raisons majeures :

- Elle protège l'assureur contre une mauvaise estimation de la sinistralité
- Elle le protège contre la survenance d'un événement rare et coûteux
- Elle le protège, enfin, contre la survenance d'un cumul de sinistres corrélés

1.2. Acteurs de la réassurance

Le schéma ci-dessous présente un synopsis des acteurs de la réassurance.

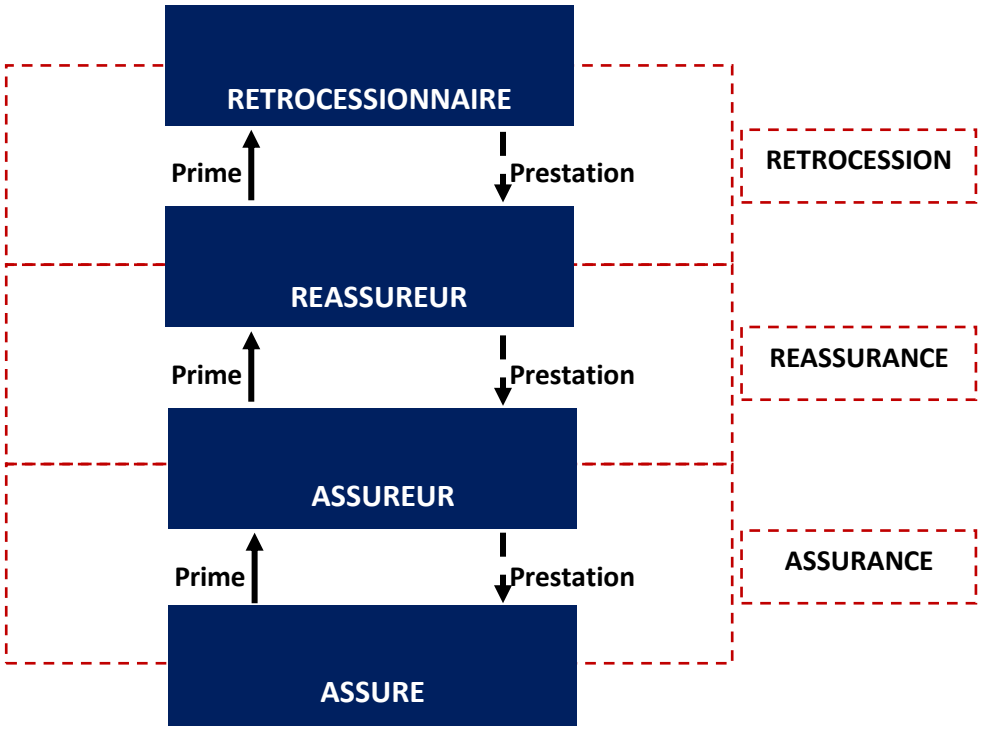


Figure 5 : Synopsis des acteurs de la réassurance

Les acteurs intervenant autour d'un contrat de réassurance sont au moins au nombre de trois :

- L'assuré : c'est l'individu au nom de qui le contrat est souscrit. C'est donc la personne qui supporte les risques liés à ce contrat et sur qui porte la garantie.
- L'assureur (cédante) : c'est la société qui couvre le risque pesant sur l'assuré. Cette protection s'effectue en échange d'une prime.
- Le réassureur (cessionnaire) : c'est l'assureur de l'assureur. Il accepte le risque transmis par l'assureur moyennant le paiement d'une prime par l'assureur.

A ces trois acteurs, on peut aussi ajouter le rétrocessionnaire qui agit comme le réassureur du réassureur.

Ci-après, nous définissons quelques mots clés utilisés dans le jargon de la réassurance.

Cession

La cession est l'opération par laquelle la cédante (l'assureur) fait couvrir une partie de son risque par le réassureur. C'est l'opération réciproque de l'acceptation.

Acceptation

Il s'agit de l'opération à travers laquelle un réassureur accepte de couvrir une partie du risque encouru par l'assureur.

Rétrocession

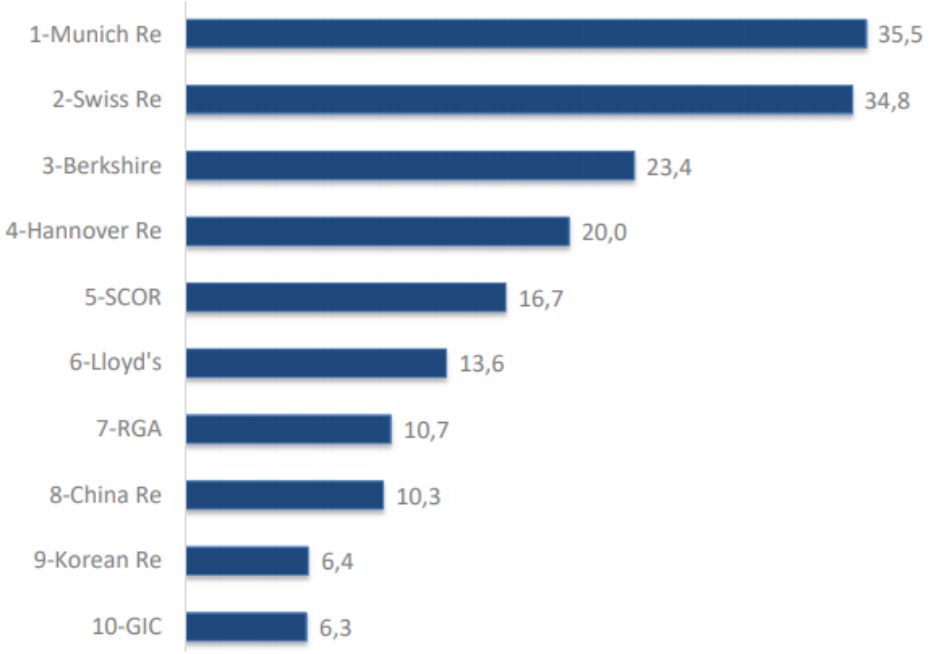
C'est lorsque le réassureur cède à un autre réassureur (le rétrocessionnaire) une partie du risque pris vis-à-vis de l'assureur.

1.3. Le marché de la réassurance en bref

Les informations fournies dans cette section sont issues des publications de l'APREF, l'Association des Professionnels de la Réassurance en France.

Sur le marché mondial

La figure 6 liste les dix premiers réassureurs mondiaux en 2017. Les données sont estimées sur la base des taux de change disponibles en fin d'année.



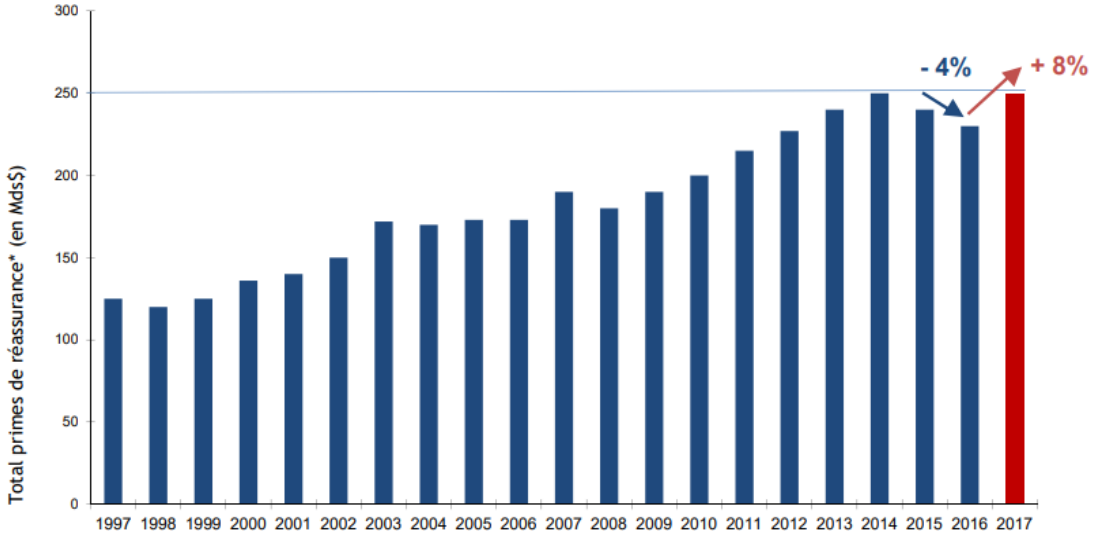
Taux de change à la fin de l'année
*Munich Re prime du segment réassurance et prime réassurance du segment santé
**Berkshire = GenRe + Berkshire Hathaway Reinsurance Group

Source : estimations de SCOR à partir des rapports annuels des réassureurs / S&P

Figure 6 : Les 10 premiers réassureurs mondiaux en 2017 par primes brutes émises en Mds $.

Le premier réassureur français, SCOR, arrive en 5ème place à l'échelle mondiale.

La figure 7 présente l'évolution du chiffre d'affaires mondiale du marché de la réassurance.



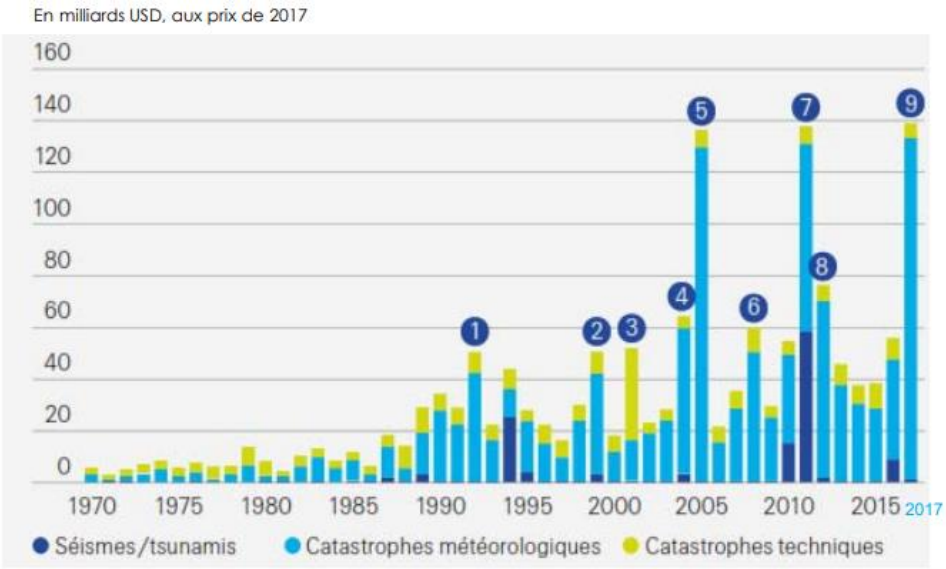
** Taux de change courants*

Source : estimations de SCOR à partir des rapports annuels des réassureurs et des rapports "S&P Global Reinsurance Highlights"

Figure 7 : Evolution du chiffre d'affaires mondial de la réassurance de 1997 à 2017

Le chiffre d'affaires de la réassurance a connu une progression de plus de 90% sur les 20 dernières années. En 2017, ce chiffre connaît une hausse de 8% par rapport à son niveau de 2016 et revient à son niveau de 2014.

Par ailleurs, l'année 2017 a enregistré des charges de sinistres exceptionnels du fait des ouragans Harvey, Irma et Maria (figure 8).



Source : Swiss Re Institute sigma N 1/2018

Figure 8 : Dommages assurés dus aux catastrophes de 1970 à 2017

Dans le sillage de 2017, on note également de fortes sinistralités aux titres des années 2005 (ouragans Katrina, Rita et Wilma) et 2011(séisme au Japon, en Nouvelle-Zélande, inondations en Thaïlande).

Les catastrophes récensées aux fins de l'établissement de la figure 8 ont été sélectionnées selon les critères suivants :

- Maritime > 20,3 M $
- Aviation > 40,7 M $
- Autres dommages > 50,5 M $

Sur le marché français

En 2017, le chiffre d'affaires du secteur de la réassurance dans l'Hexagone s'élevait à 5,397 Mds € en termes de primes acceptées, contre 5,364 Mds € en 2016.

Ce chiffre se répartit à hauteur de 3,399 Mds € d'acceptations en non vie, contre 1,998 Mds € d'acceptations en vie. Les figures suivantes illustrent la répartition de ces acceptations par branche d'activité et par type de traité.

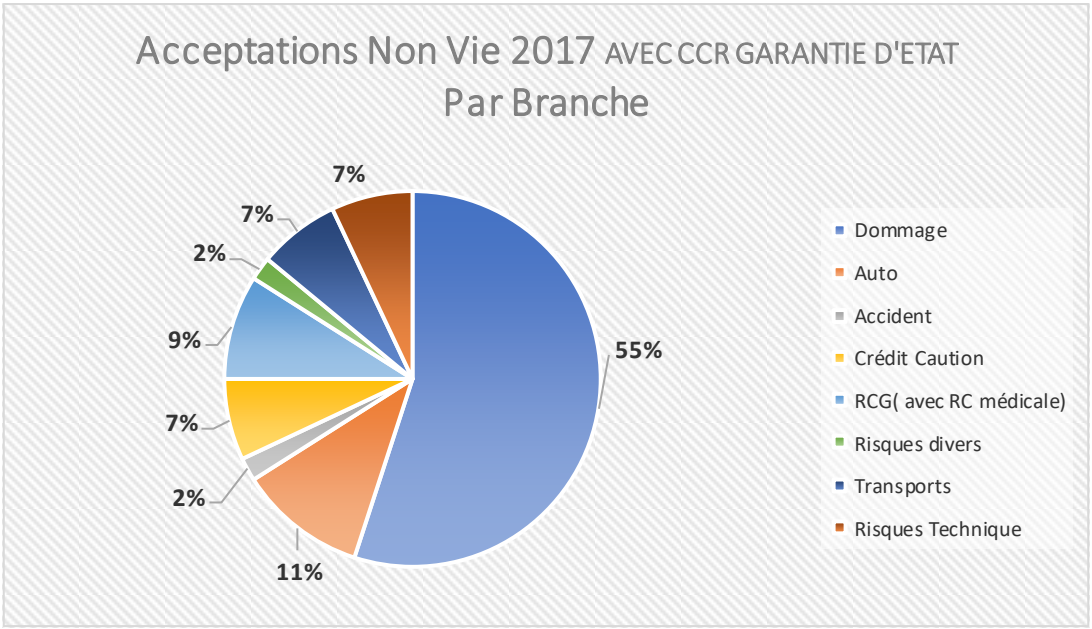


Figure 9 : Acceptations non vie 2017 par branche d'activité, incluant la garantie d'Etat CCR (Source : APREF)

La branche ayant connu le plus grand nombre d'opérations de réassurance est la branche dommage, comptant pour 55% des acceptations. Elle est suivie de loin, et dans l'ordre, par les branches auto, RCG, crédit caution, risques techniques et transports.

On remarque aussi (figure 10) que les opérations de réassurance en non vie effectuées sur le marché français ont essentiellement porté sur des traités de type proportionnel (53%) et non proportionnel (41%).

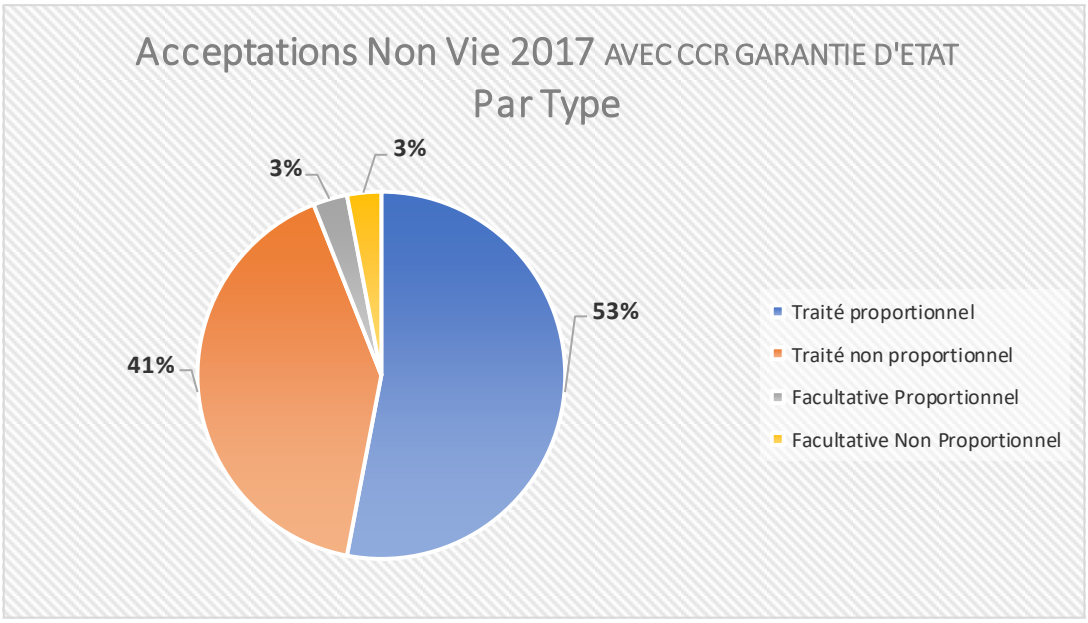


Figure 10 : Acceptations non vie 2017 par type de traité, incluant la garantie d'Etat CCR (Source : APREF)

Par ailleurs, les acceptations en vie, d'une valeur totale de 2,050 Mds € en 2016, ont connu une baisse de 2,5% en 2017. Elles sont réparties par branche d'activité, conformément à la figure 11.

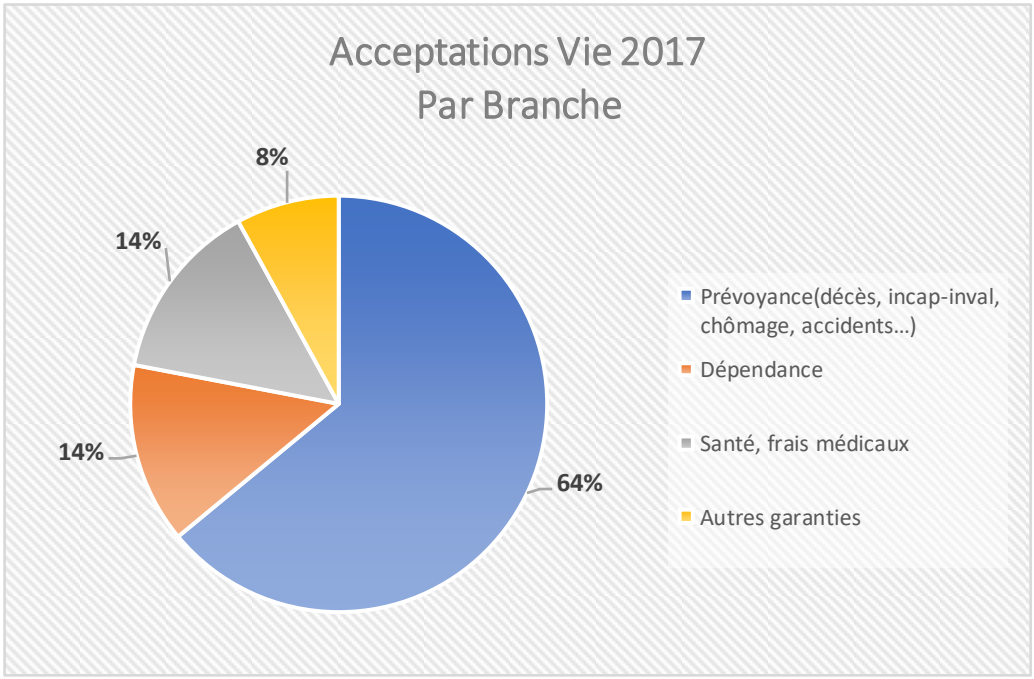


Figure 11 : Acceptations vie 2017 par branche d'activité (Source : APREF)

L'essentiel des acceptations a porté sur la branche prévoyance, à hauteur de 64% des opérations. Venaient ensuite les branches dépendance, santé et ainsi que les autres garanties.

Par ailleurs, les traités sur lesquels portaient ces acceptations étaient tous, ou presque, de type proportionnel (figure 12).

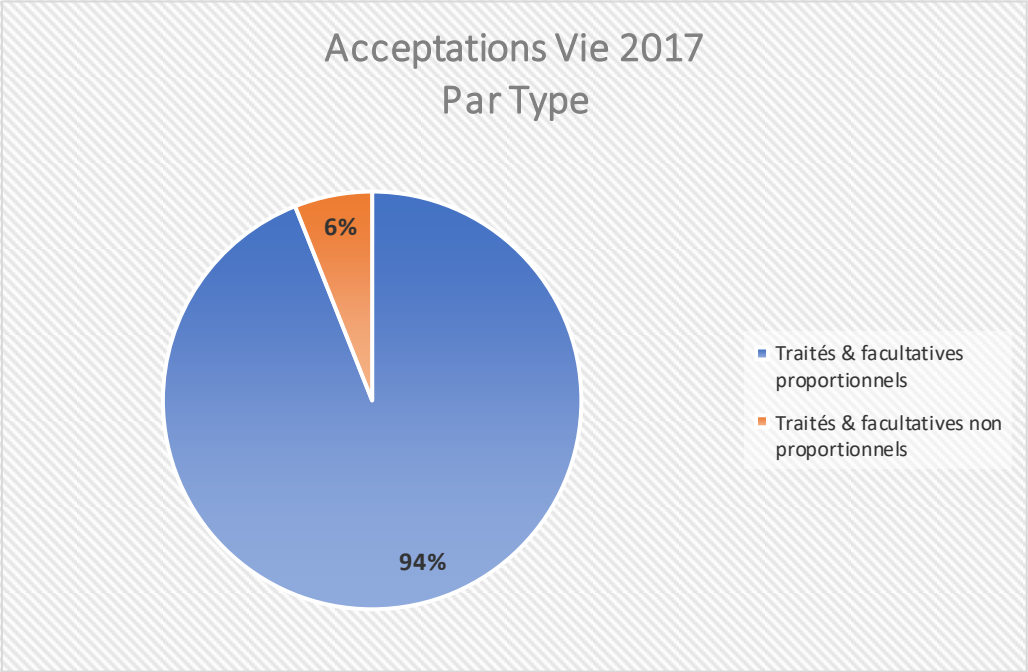


Figure 12 : Acceptations vie 2017 par type de traité (Source : APREF)

1.4. Formes juridiques d'un contrat de réassurance

Il existe trois formes juridiques d'un contrat de réassurance : le traité, la facultative et la facultative obligatoire.

1.4.1. Le traité

Dans le cas du traité, la cession est rendue obligatoire pour l'assureur et, réciproquement, l'acceptation est obligatoire pour le réassureur.

1.4.2. La facultative

Le contrat est dit facultatif lorsque la cession et l'acceptation sont facultatives respectivement pour l'assureur et pour le réassureur.

1.4.3. La facultative obligatoire

La facultative obligatoire revêt un caractère facultatif en ce qui concerne la cession de l'assureur et obligatoire pour ce qui est de l'acceptation du côté du réassureur

Dans la pratique, le traité est utilisé pour des risques homogènes cédés dans leur totalité. C'est le type de réassurance le plus fréquemment utilisé. La facultative porte le plus souvent sur des risques spécifiques clairement identifiés (risques industriels notamment). La facultative obligatoire n'est pas très répandue en raison du risque d'antisélection.

1.5. Deux formes techniques de réassurance

Un contrat de réassurance revêt deux formes techniques possibles : la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle.

1.5.1. Les traités proportionnels

Dans ce traité, le réassureur participe aux sinistres assumés par l'assureur proportionnellement aux primes qu'il a perçues.

On distingue deux types de traités proportionnels ; à savoir, les traités en quote-part et ceux en excédent de plein (ou de capitaux) :

Le traité en quote-part

L'assureur transfère une portion de chaque prime au réassureur. En retour, le réassureur prend à sa charge la même portion de chaque sinistre et reverse une commission de réassurance. Ces traités offrent une grande simplicité de gestion.

Le traité en excédent de plein

Ce traité proportionnel permet à l'assureur de céder une partie de son risque, au-delà d'un seuil prédéterminé appelé le plein de rétention. Par exemple, pour un risque où le plein de rétention vaut 30 €, si la charge d'un sinistre s'élève à 20 €, alors il n'y a pas de réassurance. Par contre, si le sinistre monte à 40 €, alors la réassurance couvrira 10 €.

1.5.2. Les traités non-proportionnels

Ici, le réassureur s'engage à participer aux sinistres pour un montant maximum donné, au-delà de la somme conservée par l'assureur (la priorité). La prime de réassurance est alors calculée pour l'ensemble du portefeuille couvert.

On distingue le traité en excédent de sinistre et le traité en *stop-loss.*

Le traité en excédent de sinistre

Dans ce type de traité, le réassureur ne prend en charge qu'une partie du sinistre : celle au-delà d'un seuil appelé la priorité (P). Cependant, la protection offerte par le réassureur est bornée par un montant de sinistre maximal (M) au-delà duquel la responsabilité du réassureur n'est plus engagée. L'étendue de la couverture offerte par le réassureur, partant de la priorité (P) jusqu'au sinistre maximal (M), s'appelle la portée. Par exemple, si la priorité est de 30 € et que la portée est de 20 €, alors, pour un sinistre de valeur 15 €, il n'y a pas de réassurance. Mais, pour un sinistre de 40 € il y a une réassurance de 10 €. Enfin, si le sinistre s'élève à 62 €, alors la réassurance prend en charge 20 € (soit, 20 € au-delà de la priorité) et l'assureur assume une charge de 42 €, soit 30 € jusqu'à la priorité et 12 € supplémentaires au-delà de 50 € (priorité plus portée).

On note une similarité entre le traité en excédent de sinistres et le traité en excédent de plein. Il existe toutefois une différence entre ces deux contrats, notamment du point de vue des méthodes de tarification de la prime de réassurance.

Le traité en stop-loss

Le traité en *stop-loss* vise à couvrir l'assureur contre des sinistres exceptionnellement élevés. C'est une forme de réassurance globale couvrant un ensemble d'affaires et qui se déclenche dès lors que les sinistres sont supérieurs à un certain pourcentage fixé lors de la signature du traité.

Supposons un *stop-loss* fixé à 130% d'un rapport S/P. Dans ce cas, le réassureur ne prend en charge que les sinistres d'une valeur supérieure à 130% de la prime. Si le sinistre réalisé est de 110 € pour une prime de 100 €, soit un ratio S/P de 110%, alors il n'y a pas de couverture par le réassureur. Cependant, si le sinistre a une charge de 170 €, alors le réassureur intervient pour les 40% de sinistre au-delà du *stop-loss*, soit une prise en charge de 40€.

Dans le chapitre 3, nous parlerons de la tarification des traités proportionnels en vie pour des contrats mixtes et des garanties temporaires décès.

2.1. Modèles de défaut structurels

2.1.1. Modèle de Merton

Les modèles de défaut structurels s'appuient sur une idée commune véhiculée par les travaux de Merton [1974]. En effet, dans son modèle, Merton part de l'hypothèse qu'un défaut survient dès lors qu'une entreprise ne parvient plus à rembourser ses dettes.

Dans son article original, Merton modélise la valeur V de l'entreprise par un mouvement brownien géométrique identique à celui de Black-Scholes.

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dW_t \qquad \textbf{(2.1)}$$

Où μ et σ sont des paramètres constants représentant le rendement et la volatilité de l'actif de l'entreprise, et où W est mouvement brownien.

Merton montre, à travers son modèle, comment modéliser la probabilité de défaut d'une entreprise en utilisant le modèle de Black-Scholes et les spreads de crédit.

Soient D et E respectivement la valeur de la dette et la valeur des fonds propres de l'entreprise. A l'équilibre du bilan, on a l'égalité : $V = E + D$.

Le défaut de l'entreprise à l'échéance T de sa dette survient lorsque $V_T \leq D_T$. Ici, le défaut est uniquement tributaire de la valeur terminale V_T de l'entreprise et non de la trajectoire empruntée jusqu'à T. De même, le défaut est étudié uniquement à l'échéance T de la dette.

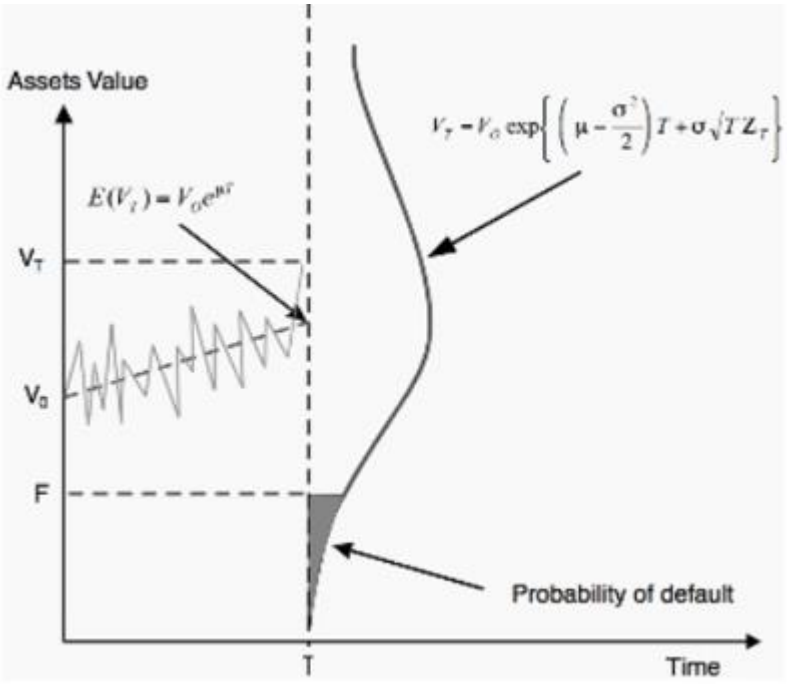


Figure 13 : Modèle Structurel de Merton (source : Crouhy et al., *A comparative analysis of current credit risk models, Journal of Banking and Finance*, 2000 [59-117])

La résolution de l'équation (2.1) donne l'expression suivante pour la grandeur *V :*

$$V_T = V_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\varepsilon\right) \quad \textbf{(2.2)}$$

$$\text{où } \varepsilon \sim N(0,1)$$

A l'échéance *T*, si $V_T \geq D$, alors il n'y a pas de défaut et la valeur des fonds propres de l'actionnaire vaut $E_T = V_T - D$.

Mais, si $V_T < D$, on a un défaut et la valeur des fonds propres de l'actionnaire est nulle.

Par conséquent, la valeur des fonds propres (*E*) se comporte comme un call de strike *D* et de maturité *T*. Par analogie aux options, on a les égalités suivantes :

$$E_T = \left(V_T - D\right)^+$$

$$D_T = D - \left(D - V_T\right)^+$$

La probabilité de défaut[14] de l'entreprise au sens de Merton est égale à la probabilité que le call E (maturité *T*, strike *D*) soit en dehors de la monnaie en *T*.

La probabilité de défaut *p* vaut donc :

$$p = \Pr ob\left(V_T < D\right)$$

$$p = \Pr ob\left(\varepsilon < -\frac{Ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$p = N\left(\frac{Ln\left(\frac{D}{V_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad \textbf{(2.3)}$$

Dans cette formule, *N* est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

[14] Aussi appelée « distance par rapport au défaut ».

Par déduction, la valeur *E* en *t* s'écrit :

$$E_t = Call^{BS}(t, V_t, \sigma_V, r, T, D)$$

$$E_t = V_t N\left(\frac{Ln\left(\frac{V_t}{D}\right)+\left(r+\frac{{\sigma_V}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right) - D\exp\left(-r(T-t)\right)N\left(\frac{Ln\left(\frac{V_t}{D}\right)+\left(r-\frac{{\sigma_V}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right)$$

Par ailleurs, le modèle de Merton établit un lien entre, d'une part, les grandeurs observables que sont la valeur des fonds propres *E* et leur volatilité σ_e, et d'autre part, les grandeurs théoriques que sont les valeurs V_t et σ_V :

$$\sigma_e = \frac{V_t}{E_t} N\left(\frac{Ln\left(\frac{V_t}{D}\right)+\left(r+\frac{{\sigma_V}^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right)\sigma_V$$

2.1.2. Modèle KMV

Ce modèle de défaut a été développé dans les années 90 par Kealhofer, McQuown et Vasicek. Il s'agit d'une extension du modèle de Merton. Trois nouveautés sont introduites par rapport au modèle de Merton :

- La probabilité de défaut est calculée en se basant sur des taux de défauts historiques.
- Il n'est plus besoin de recourir à la théorie des options pour modéliser le risque de crédit.
- L'approche KMV ne modélise que le défaut et non les spreads de crédit.

L'un des concepts clés introduits par le modèle KMV est la fréquence de défaut attendue (*EDF*, Expected Default Frequency). Il s'agit de la probabilité de défaut à 1 an de l'émetteur d'une dette.

Dans le cadre du modèle de Merton, on a :

$$EDF_t^{Merton} = 1 - N\left(\frac{Ln\left(\frac{V_t}{D}\right)+\left(\mu_V-\frac{{\sigma_V}^2}{2}\right)}{\sigma_V}\right)$$

Dans le modèle KMV, *l'EDF* s'écrit comme dans le modèle de Merton, à la différence que :

- La fonction 1-*N* est remplacée par une fonction de KMV estimée,
- La variable μ_V est ignorée et les variables V_t et σ_V découlent de la valeur des fonds propres observée.

- La valeur limite de la dette *D* vaut la moitié de la dette de court terme (< *1 an*) et 100% de la dette de long terme.

Dynamique du modèle KMV - *DD*

Un autre élément central du modèle *KMV* est la notion de distance au défaut (*DD*, Distance to Default). Une *DD* élevée signifie qu'une entreprise a peu de chance de faire défaut et une *DD* faible signifie l'inverse :

- La *DD* est comparée à *l'EDF* en utilisant des bases de données empiriques de Moody's/KMV.
- La *DD* dans le modèle KMV est égale à :

$$DD = \frac{V_t - F}{\sigma_V V_t}$$

F est le seuil de défaut.

Moody's/KMV établit ainsi une relation entre *l'EDF* et la *DD*. Cette relation est illustrée par la courbe ci-dessous :

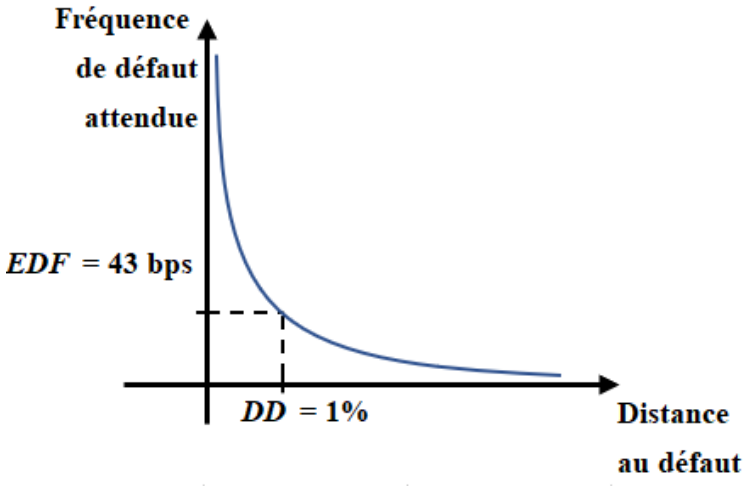


Figure 14 : Lien entre la fréquence de défaut attendue et la distance au défaut dans le modèle KMV

La distance au défaut *DD* est d'autant plus élevée que la fréquence de défaut attendue *EDF* est faible, et inversement.

La distance au défaut est une mesure d'écart. Il est possible de la traduire en probabilité de défaut via l'égalité :

$$P_{defaut} = N(-DD)$$

Par exemple, si *DD* = 2,978 cela signifie que l'émetteur de la dette se trouve à environ 3 écarts-types du défaut et a une probabilité de 0,15% = $\frac{1 - 0,997}{2}$ de faire défaut dans l'année qui suit[15].

2.1.3. Modèle basé sur les ratings

Le rating permet de mesurer la qualité du crédit d'une entreprise à tout moment. Les modèles à base de ratings proposent de calculer les probabilités de passage d'un rating à un autre. Ces probabilités sont habituellement fournies par des agences de notation telles que Moody's et Standard and Poor's.

Le modèle CreditMetrics de JP Morgan est un exemple des plus célèbres des modèles basés sur les ratings.

Dans le modèle KMV, la variable d'état fondamentale est le DD, tandis qu'ici cette variable est le rating.

2.1.4. Modèles factoriels

Ils permettent d'étendre le modèle de Merton sur de larges portefeuilles. Pour ce faire, ces modèles introduisent l'usage de facteurs servant à modéliser la structure de dépendance entre les actifs de dette du portefeuille.

Soit un portfolio de n entreprises étudié sur la période $[0,T]$.

Soit Y_i la variable indicatrice du défaut

- Si $Y_i = 0$, alors on n'a pas de défaut
- Si $Y_i = 1$, alors il y a un défaut

On suppose que le défaut est modélisé par une variable aléatoire X_i suivant une loi normale. Soit d_i le seuil en dessous duquel on a un défaut.

On a :

$$P(Y_i = 1) = P(X_i \leq d_i) = F(d_i)$$

On trouve parmi ces modèles celui de Vasicek à un facteur.

[15] La division par 2 vient du fait que le test statistique associé est unilatéral et non bilatéral.

2.2. Les modèles à intensité de défaut

Aussi appelés modèles à forme réduite, les modèles à intensité de défaut ont été proposés par Jarrow et Turnbull (1995) d'une part, et Madan et Unal (1998) d'autre part.

Contrairement aux modèles structurels qui lient le défaut à la valeur de l'actif, les modèles réduits sont gouvernés par un processus d'intensité (stochastique ou déterministe) dans lequel le défaut est modélisé par sauts.

Soit λ le processus d'intensité et $\lambda(t)$ sa valeur en *t*.

La probabilité de défaut, étudiée sur un intervalle Δt, est égale au produit $\lambda(t)\,\Delta t$ dans l'intervalle de temps $[t, t+\Delta t]$, conditionnellement à la survie de l'entreprise à la date t.

Si $H(t)$ désigne la probabilité de survie cumulée jusqu'à *t*, alors :

$$H(t+\Delta t) - H(t) = -\lambda(t)H(t)\Delta t$$

Soit,

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\lambda(t)H(t)\text{, après passage à la limite.}$$

Alors,

$$H(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)$$

En désignant par $\bar{H}(t)$ la probabilité de défaut, il vient que :

$$\bar{H}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)$$

$$\bar{H}(t) = 1 - \exp\left(-\bar{\lambda}(t)t\right)$$

Où $\bar{\lambda}(t)$ étant défini comme l'intensité de défaut moyen entre 0 et *t*.

La probabilité de défaut dans les modèles réduits est représentée par des modèles de sauts permettant de capturer les changements brusques de la qualité de crédit d'une entreprise, soit du fait d'une dégradation de son rating, soit du fait de son défaut de paiement.

Parmi les modèles de sauts les plus utilisés, on trouve la loi de Poisson.

La fonction de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ est donnée par :

$$P(X = k) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$$

Avec $k \in \mathbb{N}$.

Soit $N(t)$ une variable aléatoire mesurant le nombre de défauts survenus sur un intervalle de temps $]0,t[$.

Le nombre de défauts sur l'intervalle est assimilable au nombre de sauts enregistrés sur la période d'observation du risque de défaut.

Soit λ l'intensité du défaut modélisé (aussi appelé taux de hasard) ; c'est-à-dire, la probabilité de défaut instantanée de la contrepartie.

Alors, la probabilité de défaut de la contrepartie entre 0 et t est modélisable par une loi de Poisson de paramètre λt .

La probabilité d'occurrence de k défauts entre 0 et t s'écrit :

$$P(N(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

Pour $k=0$, on obtient que la probabilité de survie de la contrepartie au-delà de la date t vaut :

$$P(\tau > t) = P(N(t)=0)$$

$$P(N(t)=0)=e^{-\lambda t}$$

D'où, la valeur suivante de la probabilité de défaut sur $]0,t[$:

$$P(\tau < t)=1-e^{-\lambda t}$$

2.3. La Credit Valuation Adjustment

2.3.1. Contexte et définition

La valorisation des produits dérivés en finance a pendant longtemps ignoré le risque de défaut propre aux contreparties traitant sur les marchés de gré à gré. Certes, des accords de collatéral existaient en vue de réduire ce risque via des appels de marge réguliers exigeant la couverture des positions à risque, mais le prix d'une option par exemple n'incluait pas de facto de paramètres de défaut.

Il aura fallu attendre le début des années 90 pour que de nouveaux modèles d'évaluation proposent d'inclure le risque de contrepartie au *pricing* des dérivés OTC. La notion de *CVA* (*Credit Valuation Adjustment*) vit ainsi le jour et son utilisation fut vulgarisée par les banques JP Morgan et Goldman Sachs.

La *CVA*[16] est une composante du prix des produits ou contrats financiers (swaps, options,...) échangés entre opérateurs de marché exerçant de gré à gré. Elle permet de refléter le risque qu'une contrepartie soit en défaut de paiement au moment d'honorer ses engagements.

[16]En français, Ajustement de Valeur de Crédit.

Typiquement, le prix à payer par l'une des contreparties est ajusté au risque de défaut de l'autre contrepartie via la *CVA*. C'est bien ce principe d'ajustement que nous exploitons dans la suite du mémoire en vue d'ajuster le tarif d'un traité de réassurance au risque de défaut du réassureur. Le traité sera alors assimilé à un accord de swap conclu entre le réassureur et l'assureur et nous nous placerons du point de vue de l'assureur en vue de modéliser la *CVA*.

2.3.2. Notion de risque de contrepartie

Dans un contrat synallagmatique[17], il arrive que l'une des parties au contrat fasse défaut et ne parvienne pas à honorer ses engagements vis-à-vis de sa contrepartie. Le risque de contrepartie est le risque permettant de capturer ce risque de défaut.

Aujourd'hui, les marchés financiers intègrent le risque de contrepartie de deux manières :

- A travers le *pricing* du risque de défaut (*CVA*)
- Par la constitution d'un capital économique immobilisé en vue de faire face à un défaut éventuel de la contrepartie.

Le premier point est très important car il permet de capter la baisse des prix des produits dérivés dans un environnement de crise de confiance affectant le P&L des opérateurs de marché. En effet, comme l'a démontré la crise des *subprimes* (2008-2009), bien que la plupart des contreparties aux contrats de dérivés n'aient pas été en défaut de paiement, la crise de confiance sur les marchés rendait illiquides les produits échangés, faisant ainsi baisser mécaniquement les prix.

2.3.3. Différents types de CVA

Comme vu précédemment, la *CVA* représente le prix du risque de défaut d'une contrepartie.

On la modélise par l'écart entre deux éléments centraux :

- La valeur du contrat en absence de risque de défaut (V)
- La valeur du même contrat en cas de défaut de l'une des contreparties ($\tilde{V}$)

Il vient alors que :

$$CVA = V - \tilde{V} \qquad \textbf{(2.4)}$$

La valeur d'un contrat (et non le prix du dérivé sous-jacent[18]) incluant le risque de défaut de contrepartie est intuitivement plus faible que la valeur de ce contrat en absence du risque.

La *CVA* est donc une grandeur positive se rajoutant au prix sans risque d'un dérivé et permettant d'en déterminer la « *fair value*» .

[17] Impliquant des obligations réciproques entre les deux contreparties du contrat.
[18] Le prix sans risque du dérivé sera en effet complété de la valeur de la *CVA* > 0.

La CVA dite unilatérale

La *CVA* unilatérale (*UCVA*) d'un contrat est égale à la valeur actuelle des pertes futures résultant d'une annulation du contrat du fait du défaut de l'une des contreparties. La *UCVA* ne s'intéresse par conséquent qu'aux flux futurs positifs pour l'entité qui la calcule.

Cette section propose donc une formule de *pricing* de la *UCVA* calculée du point de vue de l'entité dont la contrepartie fait l'objet d'un risque de défaut. Les formules qui suivront sont inspirées des travaux de Brigo[6].

Soit T la maturité d'un contrat bilatéral. Ce contrat sera plus tard assimilé à un swap de sinistralité (la réassurance) dans le cadre de nos travaux.

Soit τ la date du défaut éventuel de la contrepartie à risque. Si $\tau \leq T$, alors cette contrepartie réalise un défaut.

Soit $VAN(\tau)$, la valeur actuelle nette du contrat pour l'entité non risquée à la date du défaut de la contrepartie. $VAN(\tau)$ est en réalité le *payoff* (gain) résiduel de l'entité non défaillante entre les dates τ et T :

- Si $VAN(\tau) > 0$, alors l'entité non risquée ne recouvrira qu'une portion *1-R* de son *payoff*, où *R* désigne le taux de recouvrement.
- Si $VAN(\tau) < 0$, alors le montant $VAN(\tau)$ est intégralement versé à la contrepartie défaillante

Dans Brigo[6], la formule de calcul de $VAN(\tau)$ est la suivante :

$$VAN(\tau) = \mathrm{E}_{\tau}\left[\Pi(\tau, T) \mid F_{\tau}\right] \qquad \textbf{(2.5)}$$

Où F_{τ} est une filtration en date τ .

$\forall \tau,\ \Pi(\tau, T)$ représente un *payoff* F_{τ}-mesurable comme somme actualisée des flux nets futurs.

En désignant par $\Pi^{D}(\tau, T)$ l'équivalent de ce *payoff* en présence de défaut , on a :

$$\Pi^{D}(t,T) = 1_{\{\tau > T\}}\Pi(t,T) + 1_{\{t < \tau \leq T\}}\left[\Pi(t,\tau) + D(t,\tau)R^{ec}\left(VAN(\tau)\right)^{+} - \left(-VAN(\tau)\right)^{+}\right] \qquad \textbf{(2.6)}$$

$D(t,\tau)$ est le facteur d'actualisation applicable aux flux de la date τ .

$$D(t,T) = \frac{B_t}{B_{t+T}}$$

B_t est le numéraire unité de compte (*money market account*) valant :

- Un euro en date 0
- $B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$

  B_t représente la valeur en *t* d'un euro investi en date 0. r_u désigne le taux court instantané.

Il en découle la formule générale de *pricing* d'un contrat risqué définie ci-dessous[19] :

$\forall t < \tau$,

$$E_t\left[\Pi^D(t,T)\right] = E_t\left[\Pi(t,T)\right] - LGD.E_t\left[1_{\{t<\tau\leq T\}} D(t,T)\left(VAN(\tau)\right)^+\right] \qquad \textbf{(2.7)}$$

Avec *LGD* le *Loss Given Default*, c'est-à-dire, le pourcentage de perte en cas de défaut.

$$LGD = 1 - R^{ec}$$

R^{ec} sera considéré constant.

L'égalité (2.4) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} UCVA &= E_t\left[\Pi(t,T)\right] - E_t\left[\Pi^D(t,T)\right] \\ &= (1 - R^{ec})\int_t^T D(t,s)\left(EE^*(s)\right)^+ d\bar{Q}(t,s) \end{aligned}$$

En discrétisant l'intégrale[20], on a :

$$\text{UCVA} = (1 - R^{ec})\sum_{k=1}^{N} D(t,T_k)\left(EE^*(T_k)\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1},T_k) \qquad \textbf{(2.8)}$$

Où

- $EE^*(T_k) = \text{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} E(T_k)\middle| F_{T_k}\right)$ pour chaque pas de projection T_k vu en *t*

  Il s'agit de la moyenne actualisée des flux nets projetés en T_k .

- Ω désigne ici la probabilité risque-neutre associée au numéraire B de maturité $t+T_k$
- E^{Ω} l'espérance mathématique sous la mesure de probabilité Ω
- $\bar{Q}$ la probabilité de défaut de la contrepartie

[19] Pour la démonstration, voir Hoffman [2011]

[20] En admet par hypothèse une indépendance entre l'exposition au risque et la probabilité de défaut de la contrepartie.

- E_t l'espérance mathématique sous la mesure de probabilité de défaut $\bar{Q}$
- R^{ec} le taux de recouvrement en cas de défaut
- T l'échéance du contrat
- $E(t)$ l'exposition au risque de défaut à la date t
- F_t le filtre d'information disponible en date t

La CVA bilatérale et la notion de DVA

La *CVA* bilatérale permet de tenir compte du risque de défaut de deux contreparties de façon symétrique.

Si A et B sont deux parties à un contrat, alors si A calcule une *CVA* unilatérale pour impacter le prix d'un produit vendu par B, alors B pourrait calculer une *CVA* unilatérale afin de tarifer le risque qu'il encourt en cas de défaut de A.

La *CVA* unilatérale calculée par B est alors une *DVA* (*Debit Valuation Adjustment*) pour A, et vice-versa.

2.3.4. Eléments de calcul de la CVA

Dans cette section, nous donnons les principaux paramètres nécessaires au calcul de la *CVA*.

Probabilité de défaut

Introduction à la modélisation

Les praticiens de la *CVA* se réfèrent à deux approches pour le calibrage de la probabilité de défaut : une approche *risque neutre* basée sur le recours aux spreads de *CDS* constatés à la date du calcul, et une approche *monde réel* basées sur des données historiques. La méthode monde réel permet de calibrer la *CVA* sur un historique de données de marché, alors que la méthode risque neutre ne prend en compte que les données spots.

La méthode monde réel est de moins en moins utilisée au profit de l'approche risque neutre. En effet, la méthode risque neutre reposant sur un calibrage des probabilités de défaut en fonction des prix de produits dérivés relativement liquides (*CDS*), elle satisfait mieux le principe de *fair-value* des actifs et des passifs requis par la plupart des normes comptables internationales et par la directive Solvabilité 2. En plus, la méthode risque-neutre permet d'avoir des paramètres qui ne sont pas biaisés par des valeurs historiques ne reflètant pas la réalité actuelle du marché.

Il existe plusieurs approches de type *risque neutre* pour calculer la probabilité de défaut. Avant de les passer en revue, nous définissons d'abord deux concepts de probabilité de défaut fournis par la littérature.

Probabilités conditionnelles et inconditionnelles

On distingue deux types de probabilités de défaut : les probabilités inconditionnelles et les probabilités conditionnelles.

La probabilité de défaut inconditionnelle

Cette mesure de probabilité modélise le défaut d'une contrepartie sur un intervalle de temps donné sans considérer[21] ce qui s'est passé avant.

Dans cette approche, on fait fi de la survie préalable de la contrepartie avant l'événement du défaut.

Soient p la probabilité de défaut et τ le temps du défaut d'une contrepartie.

Pour tout $t \in \left\{0, \frac{T}{n}, 2\frac{T}{n}, ..., T\right\}$, si le défaut se réalise sur l'intervalle de temps $]t, t+\delta[$, alors par définition, la probabilité de défaut inconditionnelle s'écrit :

$$p_{incond} = p(\tau > t) - p(\tau > t + \delta)$$

La probabilité de défaut conditionnelle

Cette probabilité calcule le risque de défaut conditionnellement aux événements précédant le défaut.

La probabilité de défaut calculée sur l'intervalle $]t, t+\delta[$ est égale à la probabilité de faire défaut sur cet intervalle de temps sachant qu'il n'y a eu aucun défaut avant la date t, soit :

$$p_{cond} = \frac{p(\tau > t) - p(\tau > t + \delta)}{p(\tau > t)}$$

[21] D'où la notion de défaut inconditionnel

Calcul de la probabilité de défaut

La probabilité de défaut est généralement représentée par des modèles de saut permettant de capturer les changements brusques de la qualité de crédit d'une entreprise, soit du fait d'une dégradation de son rating, soit du fait de son défaut de paiement.

La loi de Poisson est majoritairement utilisée pour modéliser les sauts.

Rappel de la loi de Poisson

La fonction de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ est donnée par :

$$P(X = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$$

Avec $k \in \mathbb{N}$.

Soit $N(t)$ une variable aléatoire mesurant le nombre de défauts survenus sur un intervalle de temps $]0, t[$.

Le nombre de défauts sur l'intervalle est assimilable au nombre de sauts enregistrés sur la période d'observation du risque de défaut.

Soit λ l'intensité du défaut modélisé (aussi appelé taux de hasard) ; c'est-à-dire, la probabilité de défaut instantanée de la contrepartie.

Alors, la probabilité de défaut de la contrepartie entre 0 et t est modélisable par une loi de Poisson de paramètre λt.

La probabilité d'occurrence de k défauts entre 0 et t s'écrit :

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Pour $k = 0$, on obtient que la probabilité de survie de la contrepartie au-delà de la date t vaut :

$$P(\tau > t) = P(N(t) = 0)$$

$$P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

D'où, la valeur suivante de la probabilité de défaut sur $]0, t[$:

$$P(\tau < t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Approche par spreads de CDS observables sur le marché

Elle est recommandée lorsque la contrepartie est référençable par des *CDS* liquides observés sur le marché. Afin de calculer les probabilités de défaut, des hypothèses sont émises quant au taux de recouvrement à considérer[22].

Approche simplifiée

Elle utilise une formule (simplifiée) proposée par Brigo et Mercurio[23] pour le calcul d'un taux de hasard représentant une probabilité de défaut instantané.
Soit λ, ce taux de hasard.
Etant donné un spread de *CDS* noté s, λ est alors obtenu par l'égalité suivante :

$$\lambda = \frac{s}{1-R}$$

Avec R le taux de recouvrement.

Cette formule repose sur une approximation car, pour l'établir, Brigo et Mercurio font l'hypothèse d'un paiement continu de la prime de *CDS*. Ce qui n'est pas le cas dans la réalité, ce paiement étant en moyenne trimestriel. Enfin, cette méthode n'utilise qu'un seul spread et non pas une structure par termes des spreads de *CDS*. Elle nécessite donc des interpolations linéaires supplémentaires entre les niveaux des taux de hasard calculés entachant ainsi leur la qualité de l'estimation en comparaison à la méthode du *bootstrapping*.

Approche par bootstrapping

La mise en œuvre de cette approche passe par le *bootstrapping* de la courbe des *CDS* observée en vue de calibrer des probabilités de défaut et des taux de hasard. Pour appréhender la méthode du *bootstrapping*, il est important de comprendre le *pricing* d'un *CDS*. En effet, l'égalité entre la jambe de prime et la jambe de défaut à l'origination du swap sera exploitée afin de déduire des probabilités de survie et des taux de hasard, pour chaque ténor du *CDS*.

Considérons le système d'équations ci-dessous, représentant les jambes d'un *CDS* :

$$\begin{cases} Jambe_{prime} = S_N \sum_{n=1}^{N} P(t,T_n)Q(t,T_n)D_n \\ Jambe_{défaut} = (1-R^{ec}) \sum_{n=1}^{N} P(t,T_n)(Q(t,T_{n-1}) - Q(t,T_n)) \end{cases}$$

Avec S_N le spread du *CDS*, R^{ec} le taux de recouvrement, $P(t,T_n)$ le facteur d'actualisation à l'horizon T_n vue en *t*, $Q(t,T_n)$ la probabilité de survie à T_n et Δ_n l'intervalle de temps entre T_{n-1} et T_n.

[22] Voir la section *Loss Given Default.*
[23] Brigo et Mercurio [1], page 733.

En supposant le taux de recouvrement R^{ec} et la courbe des déflateurs $(P(t,T_n))_{n=1,\dots,N}$ connus, et en posant l'égalité entre les jambes de prime et de défaut, on parvient à déduire les probabilités de survie de façon récursive :

- $Q(t,T_0)=1$[24], avec $T_0 = t$
- $Q(t,T_1)=\dfrac{1-R^{ec}}{S_1+1-R^{ec}}$
- Et :

  $\forall$ *CDS* de maturité $N \geq 2$,

  $\forall$ Maturité inférieure n, telle que $2 \leq n \leq N$,

  $\forall i \leq n$,

$$
\begin{aligned}
& Jambe_{prime} = Jambe_{défaut} \\
\Leftrightarrow\ & S_n \sum_{i=1}^{n} P(t,T_i)Q(t,T_i)\Delta_i = (1 - R^{ec}) \sum_{i=1}^{n} P(t,T_i)(Q(t,T_{i-1}) - Q(t,T_i)) \\
\Leftrightarrow\ & S_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} P(t,T_i)Q(t,T_i)\Delta_i + P(t,T_n)Q(t,T_n)\Delta_n \right) \\
& = (1 - R^{ec}) \left(\sum_{i=1}^{n-1} P(t,T_i)\,(Q(t,T_{i-1}) - Q(t,T_i)) + P(t,T_n)\,(Q(t,T_{n-1}) - Q(t,T_n)) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow Q\left(t,T_n\right) = \frac{-S_n \sum_{i=1}^{n-1} P(t,T_i)Q(t,T_i)\Delta_i + (1-R^{ec}) \left(\sum_{i=1}^{n-1} P(t,T_i)\left(Q(t,T_{i-1}) - Q(t,T_i)\right) + P(t,T_n)Q(t,T_{n-1}) \right)}{\left(S_n\Delta_n + (1-R^{ec})\right)P(t,T_n)} \qquad \textbf{(2.9)}
$$

Cette méthode récursive décrit un système de *n* égalités linéaires.

Et, les taux de hasard, constants par intervalle de temps $[T_{n-1}, T_n]$ dérivent de la formule :

$$
\lambda\left(t,T_n\right) = \frac{-\ln Q\left(t,T_n\right)}{\Delta_n} - \sum_{i=1}^{n} \lambda\left(t,T_{i-1}\right) \qquad \textbf{(2.10)}
$$

Dans la suite du mémoire, nous utiliserons cette méthode. Mais, avant de dérouler le processus du *bootstrapping*, nous effectuerons une interpolation par *spline* cubique de la courbe de crédit afin d'estimer des spreads de *CDS* pour les maturités manquantes. A cette étape, nous admettrons que l'interpolation directe des données de marché n'induit pas d'opportunités d'arbitrage. En effet, afin d'éviter d'éventuelles opportunités d'arbitrage, il aurait fallu postuler une intensité constante par morceaux de temps. La technique de la *spline* sera détaillée dans la partie consacrée à la mise en œuvre du calibrage des probabilités de défaut.

[24] On admet que l'entité de référence est solvable à la date $t = 0$.

Technique du krigeage

Également appelé Régression de Processus Gaussiens ou encore Prédiction de Wiener-Kolmogorov, le krigeage[25] est une technique d'estimation linéaire non biaisée et de variance minimale répandue en géostatistique. Il permet de réaliser des interpolations spatiales[26] dans le cadre des prospections géologiques en vue d'avoir des estimateurs pour des données inobservables directement. Les valeurs interpolées avec cette technique sont modélisées à l'aide de processus gaussiens gouvernés par des fonctions de covariances désignées par le vocable *prior*. La puissance du krigeage réside dans la précision de ses estimateurs. C'est d'ailleurs la méthode d'estimation linéaire sans biais offrant la plus petite erreur de prédiction.

Aujourd'hui, cette méthode d'estimation est appliquée à des domaines tels que la météorologie, l'hydrologie et l'étude de la pollution atmosphérique.

Son utilisation en finance[27] et en actuariat est assez récente. En finance, le krigeage permet, entre autres applications, de construire des courbes de taux en environnement bruité (prise en compte des spreads de cotation dits *bid-ask*). En actuariat, il permettrait par exemple de construire des tables de mortalité générationnelles.

Soit *S* la valeur de marché d'un spread de *CDS* de maturité *T* et de dates de paiements $\tau_1 < ... < \tau_n = T$. Si R^{ec} désigne le taux de recouvrement attendu d'une contrepartie en cas de défaut et si Δ_i a la même définition qu'au point précédent (cf. Approche par *bootstrapping*), alors la valeur du *CDS* à l'équilibre du contrat vaut :

$$S \sum_{i=1}^{n} P\left(t,\tau_i\right) Q\left(t,\tau_i\right) \Delta_i = - (1-R^{ec}) \int_0^T P\left(t,\tau\right) dQ(t,\tau)$$

On admet que les taux de recouvrement, de défaut et les taux d'intérêt sont indépendants. En intégrant par parties la jambe de défaut ci-dessus (partie droite de l'égalité), on montre que les probabilités de défaut $Q(t,\tau)$, $0 < \tau < T$, sont liées par la relation linéaire suivante :

$$S \sum_{i=1}^{n} P\left(t,\tau_i\right) Q\left(t,\tau_i\right) \Delta_i + \left(1-R^{ec}\right) P\left(t,T\right) Q(t,T)$$
$$+ (1-R^{ec}) \int_0^T f\left(t,\tau\right) P\left(t,\tau\right) Q(t,\tau)\, d\tau = 1-R^{ec}$$

avec $f\left(t,\tau\right)$ le taux forward instantané en date t de maturité τ. Ce taux s'obtient à partir du taux d'actualisation en τ via l'égalité

$$f\left(t,\tau\right) P\left(t,\tau\right) = -\frac{\partial P}{\partial \tau}\left(t,\tau\right).$$

[25] Ce terme est aussi référencé dans la littérature par les expressions Kriging, « Gaussian Processes Regression » ou « Machine Learning ».

[26] Le krigeage est plus précis que l'interpolation par *spline*.

[27] Areski Cousin, Hassan Maatouk, Didier Rullière, 2016, Kriging of financial term-structures

En discrétisant la relation précédente, il vient que :

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(S\Delta_i P\left(t,\tau_i\right)+\left(1-R^{ec}\right)\left(P\left(t,\tau_{i-1}\right)-P\left(t,\tau_i\right)\right)\right)Q\left(t,\tau_i\right) + \left(S\Delta_n P(t,T)+\left(1-R^{ec}\right)P\left(t,\tau_{n-1}\right)\right)Q(t,T) = 1-R^{ec} \quad \textbf{(2.11)}$$

La méthode du krigeage permet d'exploiter :

- Le système défini par les *n* égalités linéaires existant entre les probabilités de survie (*formes linéaires*) (2.11).
- La décroissance des probabilités de survie, caractéristique propre à toute fonction de survie (*propriété de monotonie*)

Le phénomène modélisé par la technique peut s'écrire :

$$y = f(x)$$

Dans le cas qui nous concerne, la fonction *f* pourrait désigner le phénomène gouvernant les lois de survie et prenant en input des spreads de *CDS*. Etant donné que le marché fournit des informations incomplètes du fait des « trous » d'observations existant dans la cotation des *CDS* (maturités manquantes), la technique du krigeage se prête alors bien au jeu de l'estimation. Elle permet de prédire la valeur de la fonction *f* en un point donné à estimer, en se servant de la moyenne pondérée des valeurs connues de la fonction dans le voisinage de ce point.

Le krigeage part de l'hypothèse que la fonction *f* est la réalisation d'un processus gaussien *Y* défini par :

$$Y(x) = \mu(x) + Z(x)$$

Avec μ une fonction déterministe représentant la moyenne de *Y* et définie par :

$$\mu \ : \ x \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mu(x) \in \mathbb{R}$$

Et *Z* un processus gaussien de moyenne nulle et de covariance la fonction *K* :

$$K : (x, x') \in \mathbb{R}^n \ \text{x} \ \mathbb{R}^n \rightarrow K(x, x') = Cov(Y(x), Y(x')) \in \mathbb{R}$$

Méthode proxy via CDS implicites

Elle permet de déduire des spreads de *CDS* implicites pour les contreparties non référencées sur le marché.

Le proxy le plus répandu chez les praticiens consiste à utiliser un modèle factoriel permettant de construire une surface de spreads de *CDS* en fonction des critères propres aux entreprises référencées par des *CDS* observés (utilisés comme proxy) :

- Le secteur d'activité
- La situation géographique
- Le rating
- La maturité du contrat

La contrepartie non référencée avec laquelle l'on traite peut ainsi être affectée à la courbe de *CDS* proxy qui la représente le mieux, compte tenu de ses critères propres (taux de recouvrement, rating, secteur, etc.).

La technique du *bootstrapping* peut ensuite être utilisée pour chaque courbe de *CDS* ainsi obtenue.

Approche par spreads d'obligations risquées implicites

L'idée ici est de déduire une surface de spreads à partir des instruments de dette d'une contrepartie non référencée sur le marché des *CDS*. Elle est parfois utilisée conjointement avec l'approche des spreads de *CDS* implicites pour définir les courbes de spreads vues à la section précédente.

Mesure de l'exposition au risque

Il n'y a pas si longtemps, les banquiers faisaient l'hypothèse que les expositions futures sur un produit dérivé, en vue du calcul de la *CVA*, revêtaient deux composantes :

- Un montant constant égal à la valeur de marché du dérivé au moment du calcul
- Une valeur d'ajustement permettant de capturer les conditions de la transaction, le type de produit dérivé et la maturité du contrat.

Cette méthode, purement déterministe, ne reflétait pas l'optionalité sous-jacente à certains produits et ne capturait pas la volatilité des marchés financiers. On lui préfère aujourd'hui des techniques plus robustes : les méthodes de simulation.

Méthodes par simulations

L'approche par simulations permet de générer une multitude de scénarios dans lesquels l'exposition au risque prend différentes valeurs sur l'intervalle de durée du contrat. Les méthodes de simulation constituent un standard de marché pour les établissements financiers détenant des portefeuilles de dérivés importants. La méthode communément utilisée sur le marché est la simulation de Monte Carlo.

Rappel de la méthode de Monte Carlo

Soit P_0 le prix en $t=0$ d'un produit dérivé de maturité T et de sous-jacent S (une action, par exemple).

Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction de *payoff* du produit dérivé.

P_0 s'écrit :

$$P_0 = e^{-rT} E^Q \left[\phi(S_T) \right]$$

Où Q est la mesure de *pricing* associée au zéro coupon de maturité T.

Considérons la séquence de *payoff* suivante $\{\phi(S_T^1), ..., \phi(S_T^N)\}$ à l'échéance T, avec $S_T^1, ..., S_T^N$ des variables *i.i.d.*[28]

La quantité $\hat{m}_N = \frac{\phi(S_T^1) + ... + \phi(S_T^N)}{N} e^{-rT}$ est l'estimateur Monte Carlo de P_0.

(*loi des grands nombres*)

$$\hat{m}_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} P_0$$

(*Théorème Central Limite*)

$$\sqrt{N}(\hat{m}_N - P_0) \xrightarrow[N \to +\infty]{} N(0, Var(e^{-rT}\phi(S_T)))$$

$\hat{m}_N$ converge vers P_0 à la vitesse $\sqrt{N}^{-1}$.

(Intervalle de confiance au seuil alpha)

Soit IC^α cet intervalle.

On cherche le réel d tel que :

$$P\left(P_0 \in [\hat{m}_N - d, \hat{m}_N + d] \right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(P_0 \in [\hat{m}_N - d, \hat{m}_N + d] \right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \; P\left(|\hat{m}_N - P_0| \leq d \right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \; P\left(\sqrt{\frac{N}{Var(e^{-rT}\phi(S_T))}} |\hat{m}_N - P_0| \leq d \sqrt{\frac{N}{Var(e^{-rT}\phi(S_T))}} \right) = 1 - \alpha$$

[28] Indépendantes, identiquement distribuées

Où,

$$d\sqrt{\frac{N}{Var(e^{-rT}\phi(S_T))}} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Alors,

$$IC^{\alpha} = \left[\hat{m}_N \pm q_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{Var(e^{-rT}\phi(S_T))}{N}} \right]$$

Facteurs d'actualisation

Les facteurs d'actualisation découlent de la courbe des taux. Nous présentons ci-dessous quelques modèles de référence en matière de simulation de taux d'intérêt.

Trois cadres de modélisation seront analysés : les modèles de taux court, les modèles fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage et les modèles de marché.

Dans l'ensemble, les notations reprises dans cette section sont inspirées des travaux de J. Hull[29].

Les modèles de taux court

<u>Le modèle de Vasicek(1977)</u>

Dans ce modèle, le taux court suit la dynamique suivante :

$$dr = a(b-r)dt + \sigma dz$$

Où *a* et *b* sont des paramètres constants. En mettant en œuvre ce modèle, on observe un phénomène de retour à la moyenne du taux court *r* vers le paramètre *b,* à un rythme défini par *a. b* est le taux de long terme et *a* est la force de retour à la moyenne.

Avec le modèle de Vasicek, le taux court peut prendre des valeurs négatives parce que la volatilité du taux ne dépend pas de la valeur atteinte par le taux.

Le prix du zéro coupon vaut :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$\text{Avec} \begin{cases} A(t,T) = \exp\left(\dfrac{\left(B(t,T) - T + t\right)\left(a^2 b - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)}{a^2} - \dfrac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4a} \right) \\ B(t,T) = \dfrac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \end{cases}$$

[29] Livre « Options, futures et autres actifs dérivés », 6ème édition.

Dans le cas particulier où $a = 0$, on a :

$$B(t,T) = T - t$$

$$A(t,T) = \exp\left(\frac{\sigma^2 (T-t)^3}{6}\right)$$

Le modèle CIR

Le modèle *CIR* (Cox-Ingersoll et Ross) est un peu similaire au modèle de Vasicek, dans le sens où le processus suivi par le taux court est également soumis au principe du retour à la moyenne. Mais, à la différence de Vasicek, dans le modèle *CIR*, l'écart-type du taux court est dépendant de la racine carrée du taux. Le taux est par conséquent positif dans ce modèle.

La dynamique d'un taux court modélisé en approche *CIR* s'écrit :

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

Pour $r = 0$, le processus conserve un drift égal à $abdt$.

Les auteurs du modèle montrent que la valeur d'un zéro coupon s'écrit :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$\text{Avec} \begin{cases} A(t,T) = \left(\dfrac{2\gamma e^{\frac{(a+\gamma)(T-t)}{2}}}{(\gamma+a)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \\ B(t,T) = \dfrac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+a)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma} \end{cases}$$

Les modèles de taux fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage

Le modèle de Hull et White (1990)

Le modèle de Hull et White est un modèle de taux court fondé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage. Il s'agit d'une extension du modèle de Vasicek.

La dynamique du taux est :

$$\begin{aligned} dr &= \left(\theta(t) - ar\right)dt + \sigma dz \\ &= a\left(\frac{\theta(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dz \end{aligned}$$

Tout comme dans le cas de Vasicek, a et σ sont constants et le modèle est soumis au phénomène de retour à la moyenne. La moyenne de long terme est ici déterministe.

$$\theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)$$

Le prix d'une obligation zéro coupon s'écrit :

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

$$\text{Avec} \begin{cases} \ln A(t,T) = \ln\dfrac{P(0,T)}{P(0,t)} + B(t,T)F(0,t) - \dfrac{1}{4a^3}\sigma^2\left(e^{-aT} - e^{-at}\right)^2\left(e^{2at} - 1\right) \\ B(t,T) = \dfrac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \end{cases}$$

Le modèle de Black et Karasinski (1991)

Ce modèle a été introduit par Fischer Black et Piotr Karasinski. Il s'agit d'un modèle de taux court appartenant à la catégorie des modèles sans arbitrage s'intéressant à la dynamique du logarithme du taux court :

$$d\ln r = \left(\theta(t) - a(t)\ln(r)\right)dt + \sigma(t)dz$$

Pour ce modèle, on ne dispose pas de formule analytique d'évaluation des obligations en fonction du taux *r*.

Les modèles de marché

Le modèle LMM

Le modèle *LMM* (*Libor Market Model*) est un modèle de marché. Il propose une dynamique du taux forward de maturité *k* en date *t*, selon l'équation :

$$dF_k(t) = F_k(t)\left(\left(\sum_{j=m(t)}^{k} \frac{\Delta F_j(t)\sum_{q=1}^{2}\xi_j{}^q(t)\xi_k{}^q(t)}{1+\Delta F_j(t)}\right)dt + \sum_{q=1}^{2}\xi_k{}^q(t)dZ^q(t)\right)$$

Où :

- *m(t)* est la plus petite maturité des taux forward modélisés en *t*
- $F_k(t)$ désigne la valeur en *t* du taux forward associé à l'intervalle $[T_k, T_{k+1}]$
- ξ est la structure de volatilité des taux forwards, de forme paramétrique :

$$\xi_j^q(t) = f(t)g_j(t)\beta_j^q(t)$$

Avec :

$$\begin{cases} \beta_j^1(t)^2 + \beta_j^2(t)^2 = 1 \\ g_j(t) = \left(a + bT_{j-m(t)}\right)e_j^{-cT_{j-m(t)}} + d(t) \\ f(t) = (f_\infty + (f_0 - f_\infty)e_j^{-\alpha_{vol}T_{m(t)}}) \end{cases}$$

$\xi_k{}^q(t)$ est la volatilité du *k*-ème taux forward pour le facteur de risque numéro *q*. Le nombre de facteurs est ici arbitrairement fixé à 2, les mouvements browniens associés à chaque facteur *q* étant indépendants.

Le modèle LMM+

Contrairement au *LMM*, le modèle *LMM+* inclut une volatilité stochastique évoluant selon un processus *CIR*. Le *LMM+* intègre un dispositif d'ajustement (le facteur de déplacement ou *Displacement Factor*) permettant de générer des taux négatifs bornés inférieurement par la valeur de ce facteur.

La dynamique du taux forward en approche LMM+ est donnée par :

$$dF_k(t) = \left(F_k(t) + \delta\right)\left(\left(\sum_{j=m(t)}^{k} \frac{\Delta\left(F_j(t)+\xi\right)\sum_{q=1}^{2}\xi_j{}^q(t)\xi_k{}^q(t)}{1+\Delta F_j(t)}\right)dt + \sum_{q=1}^{2}\xi_k{}^q(t)dZ^q(t)\right)$$

Où :

- δ désigne le facteur de déplacement

- *m(t)* la plus petite maturité des taux forward modélisés en *t*
- $F_k(t)$ désigne la valeur en *t* du taux forward associé à l'intervalle $[T_k, T_{k+1}]$
- ξ est la structure de volatilité des taux forwards, de forme paramétrique :

Forme paramétrique de la volatilité des taux forwards :

$$\xi_j^q(t) = \sqrt{V(t)}\, g_j(t) \beta_j^q(t)$$

Avec

$$\beta_j^1(t)^2 + \beta_j^2(t)^2 = 1$$

$$g_j(t) = \left(a + bT_{j-m(t)}\right) e_j^{-cT_{j-m(t)}} + d(t)$$

$$dV(t) = K(\theta + V(t))dt + \varepsilon\sqrt{V(t)}\, dW(t)$$

Les mouvements browniens *Z* des facteurs de risque du taux forward sont corrélés au brownien de la variance *V* des taux.

Chapitre 3 : Tarification d'un traité de réassurance intégrant le risque de défaut

3.1. Spécification du modèle

3.1.1. Hypothèses de modélisation

La modélisation proposée se fonde sur un certain nombre d'hypothèses que nous prenons le soin de lister ci-dessous :

i. Nous utilisons de façon équivalente les expressions « prix du traité », « tarif du traité », « prime de réassurance », « prime cédée » pour désigner la prime reversée par l'assureur au réassureur afin de jouir de la couverture de réassurance. Le modèle proposé vise à ajuster cette prime du risque de défaut du réassureur.

ii. Par souci de simplification, le modèle proposé se fonde sur une tarification en prime pure. Il ne tient, de ce fait, pas compte des frais de gestion des contrats cédés et encore moins des commissions de réassurance.

iii. La protection offerte par la réassurance couvre toute la durée de la garantie.

iv. Nous assimilons (par analogie au *crédit default swap*) le contrat de réassurance à un swap de sinistralité dont l'entité de référence est l'assuré. Ce swap, payeur d'une *jambe de prime* pour l'assureur, échange une séquence de primes contre une séquence de charges de sinistres probables payables par le réassureur (*jambe de sinistre*).

v. Nous sommes conscients que, dans la pratique, le paiement des flux peut faire l'objet de litiges ou peut connaître des retards importants du fait des procédures administratives chronophages. Toutefois, dans notre modélisation, nous occultons cette réalité et nous plaçons dans un cadre théorique de modélisation où les sinistres surviennent à la mi-année et sont payés à ce moment-là.

vi. De même, nous faisons l'hypothèse que les primes de réassurance sont versées au réassureur en début d'année. De la sorte, notre modélisation reste conforme aux hypothèses de modélisation d'une prime pure traditionnelle.

vii. Un taux de recouvrement de 40% sera utilisé pour calculer la *Loss Given Default* de l'exposition vis-à-vis du réassureur. Il s'agit du taux communément admis pour le calcul de la *CVA*.

viii. La *CVA* sera calculée du point de vue de l'assureur.

ix. Les probabilités de défaut découlent d'une courbe de spreads de *CDS* et sont formulées dans le cadre d'un modèle à intensité.

x. On admet qu'aucun collatéral n'est exigible entre l'assureur et le réassureur. En effet, par le passé, les réassureurs intervenant auprès des compagnies françaises d'assurance étaient tenus de donner une garantie, par le biais d'un nantissement d'actifs ou d'un dépôt en espèces. Ce système de collatéral n'a plus lieu d'être depuis la transposition

en droit français de la directive réassurance 2005/68/CE approuvée par le parlement européen le 7 juin 2005.

xi. On considère un réassureur dont on étudiera le prix du défaut en faisant varier les caractéristiques suivantes :
   - Le taux de recouvrement
   - Le taux de collatéralisation

xii. En cas de réalisation, les défauts ont lieu en cours d'année après le paiement de la première prime. Et, la probabilité de défaut du réassureur est indépendante de la structure par termes des taux d'intérêt (propriété d'atomicité).

xiii. Les contrats étudiés sont considérés en *run-off* durant la modélisation.

3.1.2. La réassurance perçue sous l'angle d'un produit dérivé d'assurance

Analogie entre un contrat de swap et un traité de réassurance

En souscrivant un contrat d'assurance, l'assuré achète une protection contre un risque. Ce risque peut être de plusieurs types : risque d'invalidité, risque de mortalité, risque de dépendance, etc.

Ce faisant, l'assuré se couvre financièrement, ou couvre ses bénéficiaires, en cas d'occurrence du risque. Il décide ainsi de transférer le risque encouru à l'assureur, moyennant le paiement d'une somme d'argent communément appelée « prime ».

Cependant, sur certains contrats d'assurance à gros risques, l'assureur, de peur d'être en faillite en cas de réalisation des sinistres assurés, ou de peur d'immobiliser beaucoup de ses fonds propres en prévision du règlement des sinistres, va recourir à la réassurance.

La réassurance se définit comme un accord d'échanges de flux financiers conditionnels conclu de gré à gré entre, d'une part, l'assureur qui reverse au réassureur une partie des primes payées par les assurés au titre de leurs garanties, et, d'autre part, le réassureur qui s'engage à payer les sinistres réalisés sur le portefeuille des contrats réassurés.

La réassurance est donc à l'assureur ce que l'assurance est à l'assuré. L'assureur achète une protection contre un risque moyennant le versement d'un spread (ici une prime) : le principe est similaire à celui d'un *CDS*, avec :

- L'entité de référence, incarnée par l'assuré dont le sinistre déclenche la protection
- L'élément déclencheur de la protection : la réalisation du sinistre assuré[30] (décès, invalidité, incapacité, …).

Ainsi, nous assimilons un contrat de réassurance à un swap de sinistralité permettant l'échange de flux contingents, conditionnés par l'occurrence d'un sinistre (pour la jambe de sinistre) et la survie de l'assuré[31] (pour la jambe de prime).

[30]Assimilable à l'événement du défaut de l'entité de référence, dans le cas d'un *CDS*.

Par exemple, dans le cas de la réassurance d'un portefeuille ne contenant que des garanties décès temporaires, le risque sous-jacent au swap de sinistralité est le risque de mortalité de l'assuré.

Illustration du traité de réassurance par un CDS

Nous établissons ici un parallèle entre un traité de réassurance et un *crédit default swap* (*CDS*). Le *CDS* est probablement la meilleure illustration possible d'un contrat de réassurance par un swap.

Le schéma ci-dessous met en lumière les similitudes entre un *CDS* et un traité de réassurance.

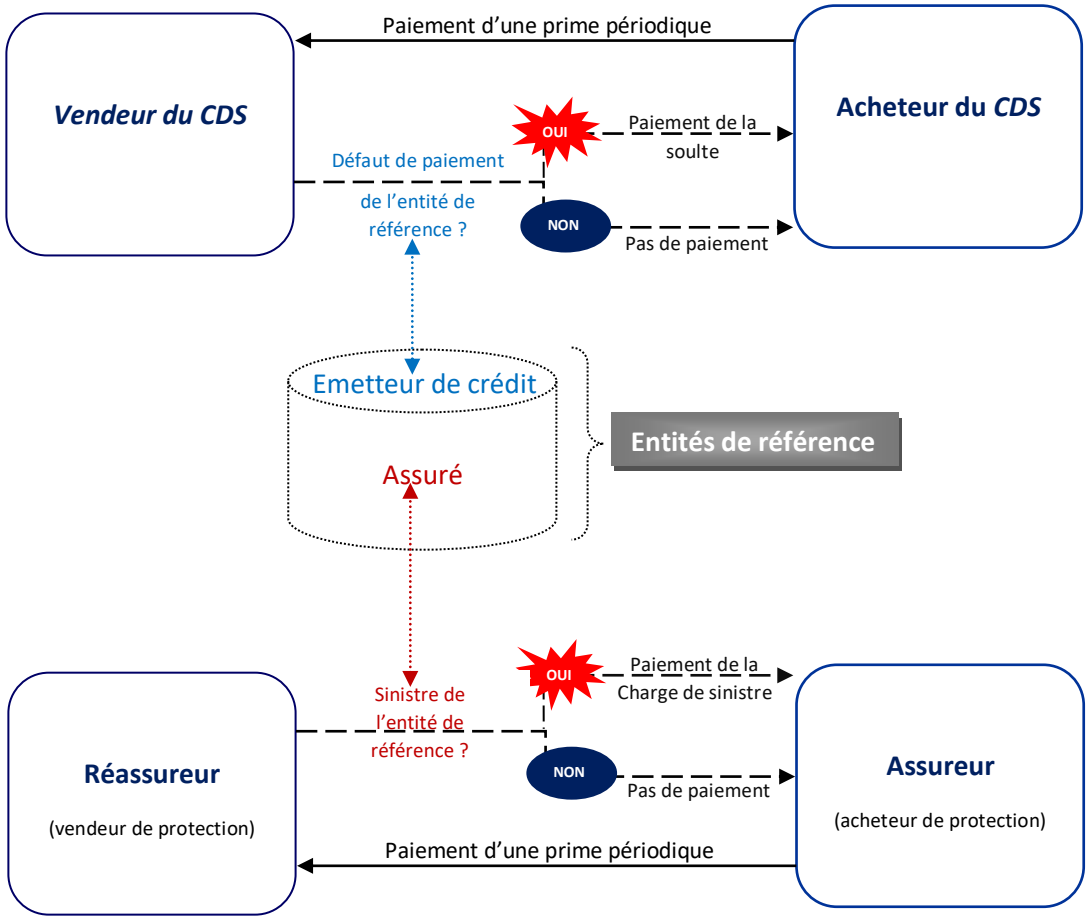


Figure 15 : Similitudes entre un *CDS* et un traité de réassurance

Un contrat de *CDS* est un instrument de couverture permettant à une entreprise ayant acheté un instrument de crédit (obligation) de se couvrir contre le défaut de l'émetteur de crédit. Le *CDS* est donc une protection mettant en jeu trois parties :

- le vendeur du *CDS*, réciproquement appelé acheteur du risque de défaut

[31] En effet, la prime n'est reversée au réassureur que conditionnellement à la survie de l'assuré.

- l'acheteur du *CDS*, réciproquement appelé vendeur du risque de défaut
- l'entité de référence, dont le défaut déclenche le remboursement (par le vendeur du *CDS* à l'acheteur du *CDS*) de la partie de l'exposition au risque non couverte par le taux de recouvrement.

En effet, en achetant une obligation auprès de son émetteur (entité de référence), l'acheteur de l'obligation (aussi acheteur du *CDS*) est assuré de recouvrer une partie de sa dette en cas de défaut. Cette partie dépend de la qualité de la dette de l'émetteur (séniorité de la dette), plus précisement du taux de recouvrement. En désignant par R^{ec} ce taux, en cas de défaut de l'émetteur, l'acheteur de l'obligation perd une proportion $1-R^{ec}$ de sa créance.

Le *CDS* fonctionne alors comme une protection activant le remboursement de la proportion $1-R^{ec}$ au détenteur de l'obligation. Pour bénéficier de cette couverture, l'acheteur de l'obligation doit s'acquitter d'une prime périodique versée au vendeur du *CDS* jusqu'à l'événement de défaut éventuel ou jusqu'à la maturité de l'obligation.

De facon identitique, le contrat de réassurance met en jeu trois parties :

- le réassureur, acheteur d'un risque de sinistralité
- l'assureur, vendeur d'un risque de sinistralité
- l'assuré, incarnant l'entité de référence dont le sinsitre déclenche le versement, par le réassureur à l'assureur, de la charge de sinistre couverte par le traité. Ce flux servant ensuite à l'indeminisation de l'assuré ou de ses bénéficiaires.

Dans un *CDS*, comme dans un contrat de réassurance, le risque couvert est négocié entre le vendeur et l'acheteur du risque. La protection effective est déclenchée par la réalisation d'un événement de risque (défaut pour le *CDS* et sinistre pour le traité) issu de l'entité de référence.

3.1.3. Caractéristiques du swap de sinistralité

Dans cette section, nous caractérisons le traité de réassurance comme un accord de swap entre le réassureur et l'assureur. Nous définissons le swap en nous plaçant du point de vue de l'assureur, puis, nous en établissons une valorisation à une date *t* quelconque.

- Direction : payeuse ou receveuse. Le swap sera dit payeur (de la prime) si l'on se trouve du côté de l'assureur. Il sera dit receveur (de la prime) si l'on raisonne du point de vue du réassureur.
- Le swap présente deux jambes : une jambe de prime (ou jambe payeuse) matérialisant les versements de primes effectués par l'assureur à destination du réassureur, et une jambe de sinistre (ou jambe receveuse) représentant les prestations pour sinistres à destination de l'assureur.
- Date d'échéance : Il s'agit de la date de maturité du swap. Dans la suite, nous représentons sa valeur par la variable *N*.

- L'acheteur du risque de sinistralité, réciproquement vendeur de la protection : le réassureur.

- Le vendeur du risque de sinistralité, réciproquement acheteur de la protection : l'assureur.

- Un swap ayant une valeur initiale nulle (émission au pair), nous faisons l'hypothèse que la contrepartie pour qui la soulte de l'opération est positive à la signature du contrat reverse cette soulte à l'autre contrepartie[32]. Dans la suite, la soulte sera désignée par l'expression *ajustement de marché*. Elle sera directement ajoutée au montant de la *CVA* calculée du point de vue de l'assureur.

- Par hypothèse, l'assureur paie les primes en début d'année et reçoit les prestations du réassureur à la mi-année. Tout comme pour les hypothèses de tarification traditionnelles, nous supposons que les sinistres au titre de l'année *t* surviennent en milieu d'année.

- Dans un swap de taux classique, les contreparties peuvent convenir de n'échanger que la différence de flux à payer. Dans le cadre de la réassurance, les flux dus au titre de chaque jambe (côté réassureur et côté assureur) sont effectivement payés.

- Le dernier paiement a lieu à la date d'échéance *T* du traité**,** en absence de défaut**.**

- Notionnel : c'est le montant à partir duquel sont déterminés les flux à payer dans un swap de taux. Pour notre modèle, aucune référence ne sera faite au notionnel car les flux échangés ne reposent pas sur les mêmes assiettes de calcul et sont sujets à des aléas tels que la survie du portefeuille assuré (pour le paiement des primes) et la sinistralité de ce portefeuille (pour le paiement des prestations).

- Devise : il s'agit de la devise dans laquelle le swap est libellé. Par exemple, les parties prenantes à un swap peuvent convenir de s'échanger des flux libellés en Euro si elles exercent leurs activités dans la zone Euro, ou, convenir de s'échanger des flux en Euro pour l'une et en Dollar pour l'autre partie en fonction de leurs besoins de liquidité dans la devise reçue. Dans notre modèle nous étudions le cas d'un traité de réassurance conclu entre deux opérateurs exerçant dans la zone Euro.

- Date d'opération : elle désigne la date de négociation du swap. Ce sera donc la date de signature du traité par l'assureur et son réassureur.

- Risque de référence : c'est le risque sous-jacent au swap et contre lequel chacune des contreparties se couvre. Dans ce mémoire, nous nous plaçons du point de vue de l'assureur. De fait, le risque de référence sera la sinistralité (mortalité, invalidité, longévité, etc.) du portefeuille que l'assureur transfère au réassureur.

- Entité de référence : il s'agit de l'entité dont le sinistre déclenche la protection. C'est donc l'assuré.

[32] C'est le cas par exemple pour les swaps de taux.

- Périodicité : Par hypothèse de tarification, les flux sont payés à une fréquence annuelle. La fréquence de paiement peut être différente sur les deux jambes du swap. Les primes sont versées en début d'année et les sinistres se réalisent en milieu d'année. Toutefois, à des fins purement de modélisation, nous supposons que la comptabilisation des flux s'effectue en fin d'année.

Dans le modèle proposé, bien que la prime cédée soit tarifée à l'assuré de sorte à ce que la différence entre les valeurs actuelles probables initiales soient nulles[33], il existera tout de même une soulte à payer par l'une ou l'autre des contreparties. Cet ajustement, que nous appelons *ajustement de marché*, permettrait ainsi au swap de sinistralité d'être émis au pair. En effet, les taux d'actualisation ne sont pas identiques entre la valorisation du swap aux taux de marché stochastiques ou déterministes (notre approche) et la tarification sur le marché primaire[34] au taux du tarif (*fonction du TME*). A la signature du traité, l'ajustement de marché (soulte) devrait être versé à la contrepartie dont la valeur actuelle probable des engagements futurs sera la plus élevée. A $t = 0$ (date de signature du traité) :

- En se plaçant du point de vue de l'assureur, si la soulte calculée est négative, alors cela signifie que l'assureur supporte plus d'engagements que le réassureur, du fait des taux d'intérêt des marchés. Le réassureur devra de ce fait reverser le différentiel des engagements à l'assureur. Toutefois, dans la pratique, nous préconisons de rajouter ce montant à la valeur de la *CVA*. Ainsi, si *UCVA* est le montant réel de la *CVA* et $\varepsilon < 0$ est la soulte négative calculée par l'assureur, alors la nouvelle valeur de la *CVA*, dénotée $UCVA_{Adjust}$ est égale à $UCVA\text{-}\varepsilon > UCVA$

- Si la soulte calculée par l'assureur est positive, alors l'assureur devra s'acquitter de ce montant au profit du réassureur. Tout comme dans le cas précédent, nous préconisons dans la pratique de réduire la valeur de la *CVA* de ce montant. En reprenant les notations précédentes avec $\varepsilon > 0$ (soulte positive), alors la nouvelle valeur de la *CVA* est $UCVA_{Adjust} = UCVA\text{-}\varepsilon < UCVA$.

3.2. Pricing du risque de contrepartie sous-jacent à un traité de réassurance

Cette partie expose notre approche de modélisation du risque de défaut dans le cadre de la tarification d'un traité de réassurance. La méthode proposée est adaptée aux traités tarifés contrat par contrat. Ainsi, dans la pratique, les traités se prêtant facilement à cette approche seront les traités en excédent de plein ou en excédent de sinistre[35]. Nous appliquerons aussi la

[33] Ce qui se traduirait par un contrat de swap de valeur nulle à la souscription
[34] Entre l'assureur et l'assuré
[35] Le mémoire n'abordant que les traités proportionnels, les traités en excédent de sinistre ne seront pas abordés.

méthode à un traité en quote-part ne portant que sur un seul contrat[36]. En effet, dans la réalité, les traités en quote-part portent sur des portefeuilles de contrats réassurés avec un même taux de cession.

La modélisation portera uniquement sur les traités proportionnels :

- Un traité en quote-part réassurant une garantie temporaire décès et un autre traité portant sur un contrat mixte
- Un traité en excédent de plein réassurant une garantie temporaire décès et un autre traité portant sur un contrat mixte

La formalisation du modèle impliquera le versement d'une soulte de swap (i.e., l'ajustement de marché vu à la section 3.1.3) en date de signature du traité. Cela pour que le swap de sinistralité soit émis au pair.

Puis, pour chacun de ces deux traités, nous calculons une *CVA* qui servira à ajuster *la* prime de réassurance au défaut probable du réassureur.

Dans la suite, nous utilisons de façon équivalente les expressions « swap de sinistralité » et « traité ».

3.2.1. Tarification en prime pure sur le marché primaire

Le marché primaire dont il est question ici est celui défini entre l'assureur et l'assuré. Pour calculer les tarifs, nous raisonnement par le truchement d'une société d'assurance fictive.

Présentation de la compagnie d'assurance Sofia

Pour les besoins de nos travaux, nous considérons une société d'assurance fictive dénommée Sofia (Société fictive d'assurance).

Sofia, dont le cœur de métier est l'assurance vie, exerce sur le marché français.

Le rating moyen attribué par les agences de notation est la note A en raison de la bonne qualité du crédit de la compagnie. Par ailleurs, en investissement dans la dette émise par Sofia, les opérateurs sont certains de recouvrer 40% de leur mise en cas de défaut de l'assureur. Ce taux est communément admis à 40% dans le contexte du calcul de la *CVA*. Il s'agit du taux de recouvrement moyen estimé par l'agence de notation Moody's pour les pays d'Europe.

Pour l'exercice de tarification de chacune des garanties évoquées en introduction de la section 3.2, nous considérons un contrat Sofia nouvellement souscrit pour lequel nous établissons une tarification au marché primaire entre l'assureur et l'assuré. Puis, nous proposons une tarification au marché secondaire incluant le prix du défaut dans le cadre d'une réassurance.

[36] Pour les grandes bases de contrats cédés en quote-part, un raisonnement par *Model Point* pourrait aider à l'application de la méthode.

Produits commercialisés par l'assureur Sofia

Sofia commercialise un contrat d'assurance en cas de décès appelé *GarDeces.* Ce produit propose à l'assuré de verser un capital G aux bénéficiaires dans le cas où l'assuré décède avant l'échéance du contrat.

De même, Sofia propose le produit *GarMixte.* Ce produit propose de verser un capital *C* si l'assuré est encore en vie au terme du contrat. Si l'assuré venait à décéder avant le terme, Sofia s'engagerait à rembourser la totalité des primes pures versées jusqu'au moment du décès. *GarMixte* est donc la conjonction d'un capital différé et d'une temporaire décès.

La figure 16 ci-après récapitule les caractéristiques des deux produits pour une tête *x* souscrivant au 01/01/2018.

Société	Type de garantie	NomProduit	Durée Contrat	Date Souscription	Fréquence Prime/An	Age	Réassurance Envisagée
Sofia	Mixte	*GarMixte*	N	01/01/2018	1	*x*	Quote-part
Sofia	Temporaire décès	*GarDeces*	N	01/01/2018	1	*x*	Quote-part
Sofia	Mixte	*GarMixte*	N	01/01/2018	1	*x*	Excédent de plein
Sofia	Temporaire décès	*GarDeces*	N	01/01/2018	1	*x*	Excédent de plein

Figure 16 : Caractéristiques des contrats vendus par l'assureur Sofia

La tarification sur le marché primaire des contrats *GarMixte* et *GarDeces* se fera en primes pures uniques et périodiques (en recourant aux nombres de commutation[37]).

Notons $VAP_{Assureur}$ et $VAP_{Assuré}$ respectivement les valeurs actuelles probables des engagements de Sofia et de l'assuré (tête x).

Le calcul de la *CVA* dans le cadre de la tarification secondaire, entre le réassureur et l'assureur, se fera de sorte à avoir le facteur v^k en commun entre les $VAP_{Assureur}$ et $VAP_{Assuré}$.

Rappel des principes de tarification

La tarification repose sur 3 paramètres clés :

- Un taux technique
- Une table de mortalité
- Des chargements

L'article A. 132-18 du code des assurances encadre les aspects techniques de la tarification. Il définit le taux technique ainsi que la table de mortalité appropriés en fonction du type de garantie à valoriser.

[37] Rappel de la définition des nombres de commutation à l'annexe 1.

Pour les garanties vie et décès autres que les rentes viagères, l'article A. 335-1 du code des assurances suggère une tarification par l'une ou l'autre des tables réglementaires TH 00-02 et TF 00-02.

Par ailleurs, pour le taux technique, le code des assurances (article A.132-1) fixe un taux du tarif maximum:

$$TauxTechnique_{\max} = \begin{cases} 75\%TME_{\frac{1}{2}}, \text{ si T} \leq 8\text{ans} \\ Min(60\%TME_{\frac{1}{2}}; 3.5\%), \text{ si T} > 8\text{ans} \end{cases}$$

Où $TME_{\frac{1}{2}}$ désigne le taux moyen des emprunts d'Etat (OAT 10ans) observé sur les 6 derniers mois. Et T est la durée de la garantie.

Nota Bene : Quelle que soit la durée d'un contrat à primes périodiques, le taux technique utilisé pour le calcul du tarif ne peut excéder la quantité :

$$Min(60\%TME_{\frac{1}{2}}; 3.5\%)$$

Le taux technique est garanti pour toute la durée du contrat.

Dans notre modèle, nous utilisons la table TH 00-02, en raison de la prédominance de la garantie décès dans les deux contrats (*GarDeces* et *GarMixte*).

De façon générale, la tarification abordée dans ce mémoire ne concerne que la prime pure. Les chargements ne seront de fait pas abordés.

Tarification du contrat mixte en prime pure unique

La prime pure permet à l'assureur Sofia de faire face à ses prestations, dans l'hypothèse d'un coût de gestion nul. Le tarif du contrat découle de l'égalité entre, d'une part, la valeur actuelle probable des engagements de l'assureur et, d'autre part, la valeur actuelle probable des engagements de l'assuré.

Valeur actuelle probable des engagements de l'assuré

Notons $VAP_{Assuré}$ cette valeur. Soit π, la prime pure unique payée par la tête x. Alors,

$$VAP_{Assuré} = \pi$$

Valeur actuelle probable des engagements de l'assureur

Soit $VAP_{Assureur}$ cette valeur.

L'assureur Sofia propose un contrat mixte :

- Une garantie en cas de vie au terme du contrat, dont la valeur $VAP^{1}_{Assureur}$ vaut :

$$VAP^{1}_{Assureur} = C\frac{D_{x+N}}{D_x}$$

- Une garantie en cas de décès en cours de contrat, de valeur $VAP^{2}_{Assureur}$:

$$VAP^{2}_{Assureur} = \pi\frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}$$

D'où,

$$VAP_{Assureur} = C\frac{D_{x+N}}{D_x} + \pi\frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}$$

$$VAP_{Assureur} = VAP_{Assuré}$$

$$\Leftrightarrow \pi = C\frac{D_{x+N}}{D_x - M_x + M_{x+N}} \quad \textbf{(3.1)}$$

Tarification du contrat mixte en prime pure périodique

Dans le cadre de cette tarification, on suppose que le contrat *GarMixte* est à prime périodique constante.

Le contrat prévoit alors de verser un capital *C* en cas de vie au terme du contrat. Sinon, si la tête x décède avant le terme, l'assureur Sofia rembourse à ses bénéficiaires les primes périodiques déjà versées. Les primes sont versées en début de période jusqu'à l'année N-1 incluse.

Reprenons les notations $VAP_{Assureur}$ et $VAP_{Assuré}$ pour désigner respectivement les valeurs actuelles probables des engagements de Sofia et de l'assuré (tête x).

Valeur actuelle probable des engagements de l'assuré

Soit π_p, la prime pure périodique constante payée par la tête x.

Alors :

$$VAP_{Assuré} = \pi_p\frac{D_x + D_{x+1} + ... + D_{x+N-1}}{D_x}$$

$$VAP_{Assuré} = \pi_p\frac{N_x - N_{x+N}}{D_x}$$

Valeur actuelle probable des engagements de l'assureur

L'assureur Sofia propose un contrat mixte :

- Une garantie en cas de vie au terme du contrat, dont la valeur $VAP^{1}_{Assureur}$ vaut :

$$VAP^{1}_{Assureur} = C\frac{D_{x+N}}{D_x}$$

- Une garantie en cas de décès en cours de contrat, de valeur $VAP^{2}_{Assureur}$:

$$VAP^{2}_{Assureur} = \pi_p \frac{R_x - R_{x+N} - N.M_{x+N}}{D_x}$$

D'où,

$$VAP_{Assureur} = C\frac{D_{x+N}}{D_x} + \pi_p \frac{R_x - R_{x+N} - N.M_{x+N}}{D_x}$$

$$VAP_{Assureur} = VAP_{Assuré}$$

$$\Leftrightarrow \pi = C\frac{D_{x+N}}{N_x - N_{x+N} - R_x + R_{x+N} + N.M_{x+N}} \quad \textbf{(3.2)}$$

Tarification de la garantie décès en prime pure unique

Valeur actuelle probable des engagements de l'assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi$$

Valeur actuelle probable des engagements de l'assureur

$$VAP_{Assureur} = G\left(\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}v^{\frac{1}{2}} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x}v^{1+\frac{1}{2}} + ... + \frac{l_{x+N-1} - l_{x+N}}{l_x}v^{N-1+\frac{1}{2}}\right)$$

$$VAP_{Assureur} = G\left(\frac{d_x}{l_x}v^{\frac{1}{2}} + \frac{d_{x+1}}{l_x}v^{1+\frac{1}{2}} + ... + \frac{d_{x+N-1}}{l_x}v^{N-1+\frac{1}{2}}\right)$$

Avec l_x le nombre de survivants d'âge *x* lu dans une table de mortalité, et $d_x = l_x - l_{x+1}$, le nombre de décès d'individus d'âge *x* au bout d'une année, tel que lu dans la même table. $v^{t+\frac{1}{2}}$ est le facteur d'actualisation calculé pour les flux de sinistres à venir en année de projection *t*. En effet, les sinistres survenant en cours de projection, pour un exercice comptable $[t, t+1]$ donné, sont actualisés en milieu d'année.

$$VAP_{Assureur} = G\left(\frac{d_x v^{x+\frac{1}{2}}}{l_x v^x} + \frac{d_{x+1} v^{x+1+\frac{1}{2}}}{l_x v^x} + ... + \frac{d_{x+N-1} v^{x+N-1+\frac{1}{2}}}{l_x v^x}\right)$$

$$VAP_{Assureur} = G\frac{C_x + C_{x+1} + ... + C_{x+N-1}}{D_x}$$

$$VAP_{Assureur} = G\frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}$$

D'où le montant de la prime pure unique :

$$\pi = G\frac{M_x - M_{x+N}}{D_x} \quad \textbf{(3.3)}$$

Tarification de la garantie décès en prime pure périodique

Valeur actuelle probable des engagements de l'assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi_p \frac{D_x + D_{x+1} + ... + D_{x+N-1}}{D_x}$$

$$VAP_{Assuré} = \pi_p \frac{N_x - N_{x+N}}{D_x}$$

*Valeur actuelle probable des engagements de l'*assureur

Les engagements de l'assureur restent identiques au cas de la prime pure unique.

$$VAP_{Assureur} = G\frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}$$

D'où le montant de la prime pure unique :

$$\pi_p = G\frac{M_x - M_{x+N}}{N_x - N_{x+N}} \quad \textbf{(3.4)}$$

Dans la suite, le contrat souscrit par la tête x fera l'objet d'une réassurance. La prime cédée au réassureur[38] sera ajustée via le *pricing* de la *CVA* afin d'y inclure le risque de défaut de ce dernier.

Seuls les traités proportionnels en quote-part et en excédent de plein seront abordés.

La *CVA* s'appliquant pour un *pricing* contrat par contrat, la méthode d'ajustement de la prime de réassurance au défaut du réassureur ne sera applicable dans la vraie vie qu'aux traités de types excédents de plein ou de sinistre pour lesquels les primes de réassurance sont définies police par police.

3.2.2. Réassurance des contrats de Sofia et tarification traditionnelle des traités

On admet à présent que les contrats commercialisés par l'assureur Sofia font l'objet d'une réassurance.

Les traités négociés sont de type proportionnel. Ne seront donc concernés que les traités en quote-part et les traités en excédent de plein.

Par l'expression « tarification sans risque », nous entendrons la tarification traditionnelle des traités de réassurance car elle ne fait pas intervenir le risque de défaut de contrepartie dans la détermination de la prime de réassurance.

[38] Prime découlant de la tarification vue plus haut.

Pour valoriser les traités et les rendre propices au cadre conceptuel de calcul du risque de défaut par la *CVA*, nous procédons à une réécriture des formules de tarification des contrats vues à la section 3.2.1 (sans recourir aux nombres de commutation).

Traité en quote-part

Les traités portent sur les garanties commercialisées par l'assureur Sofia. Nous étudierons les cessions en quote-part des garanties décès et des contrats mixtes.

Cession en quote-part de la garantie décès temporaire

<u>Cas de la prime pure unique</u>

<u>Flux futurs probables payables par l'assuré</u>

$$VAP_{Assuré} = \pi$$

Notons λ_t^a le flux futur probable (non actualisé) payable en toute date *t* par l'assuré.

La tarification s'effectuant en prime pure, alors ce flux vaut :

$$\begin{cases} \lambda^a{}_t = \pi, \text{ pour } t = 0 \\ \lambda^a{}_t = 0, \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$

La prime est payée en début de période.

<u>Flux futurs probables payables par l'assureur</u>

$$VAP_{Assureur} = G\left(\frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} v^{\frac{1}{2}} + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} v^{1+\frac{1}{2}} + ... + \frac{l_{x+N-1} - l_{x+N}}{l_x} v^{N-1+\frac{1}{2}} \right)$$

$$VAP_{Assureur} = G \sum_{t=0}^{N-1} \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} v^t$$

Notons λ_t^A le flux futur probable (actualisé d'une demi-année) payable en toute date *t* par l'assureur.

Par conséquent,

$$\begin{cases} \lambda_t^A = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G, \ pour \ 0 \le t \le N-1, \\ \lambda_t^A = 0 \ , \ pour \ t \ge N \end{cases}$$

Où *t* désigne la date de début de chaque exercice comptable.

Réassurance du contrat en quote-part

Soit η le taux de cession.

Une proportion η de la prime π payée par l'assuré est reversée au réassureur afin que ce dernier fournisse une protection couvrant une proportion η des sinistres à venir.

Si π^R désigne la prime de réassurance, alors :

$$\pi^R = \eta\pi \tag{3.5}$$

L'engagement du réassureur peut alors s'illustrer comme sur la figure 17.

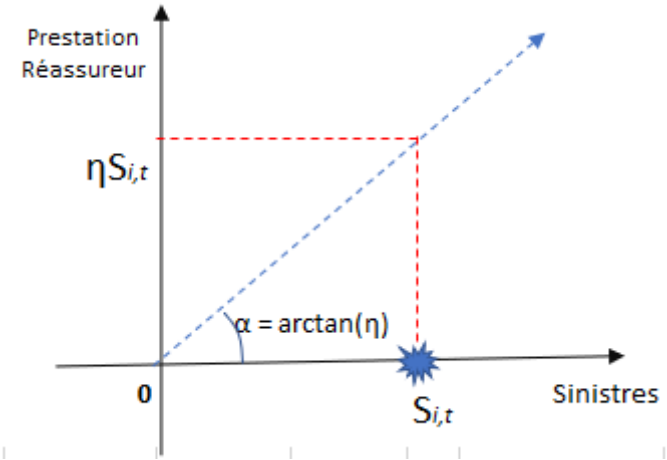


Figure 17 : Prestation du réassureur en fonction de l'ampleur du sinistre

Pour un euro de sinistre à payer, le réassureur prend en charge la quantité η.

Cas de la prime pure périodique

Flux futurs probables payables par l'assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi \sum_{t=0}^{N-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t$$

Le flux futur probable (non actualisé) payable en toute date t par l'assuré vaut :

$$\begin{cases} \lambda^a{}_t = \pi \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, \text{ pour } 0 \le t \le N-1 \\ \lambda^a{}_t = 0, \text{ pour } t \ge N \end{cases}$$

La prime est payée en début de période.

Flux futurs probables payables par l'assureur

$$VAP_{Assureur} = G\sum_{t=0}^{N-1} \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} v^t$$

Le flux futur probable (actualisé d'une demi-année) payable en toute date *t* par l'assureur reste inchangé par rapport au cas précédent de la prime unique.

$$\begin{cases} \lambda_t^A = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G, \ pour \ 0 \le t \le N-1, \\ \lambda_t^A = 0 \ , \ pour \ t \ge N \end{cases}$$

Où *t* désigne la date de début de chaque exercice comptable.

Réassurance du contrat en quote-part

La prime de réassurance périodique π^R :

$$\pi^R = \eta\pi$$

Cession en quote-part du contrat mixte

Cas de la prime pure unique

Flux futurs probables payables par l'assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi$$

$$\text{Et} \begin{cases} \lambda^a{}_t = \pi, \ \text{pour } t = 0 \\ \lambda^a{}_t = 0, \ \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

Flux futurs probables payables par l'assureur

$$VAP_{Assureur} = VAP^1_{Assureur} + VAP^2_{Assureur}$$

Deux garanties sont à considérer :

- La garantie en cas de décès avant *N*
- La garantie en cas de vie en année *N*

Le flux futur probable (actualisé d'une demi-année pour la garantie décès, pour $t \le N-1$) payable en toute date *t* par l'assureur vaut :

$$\begin{cases} \lambda_t^A = \dfrac{d_{x+t}}{l_x} v^{\frac{1}{2}} \pi, \ pour \ 0 \le t \le N-1, \\ \lambda_t^A = \dfrac{l_{x+N}}{l_x} C \ , \ pour \ t = N \\ \lambda_t^A = 0 \ , \ pour \ t > N \end{cases}$$

Où *t* désigne la date de début de chaque exercice comptable.

Réassurance du contrat en quote-part

La prime unique de réassurance s'écrit :

$$\pi^R = \eta\pi$$

Cas de la prime pure périodique

Flux futurs probables payables par l'assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi \sum_{t=0}^{N-1} \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t$$

D'où,

$$\begin{cases} \lambda^a{}_t = \pi \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, \ \text{pour } 0 \le t \le N-1 \\ \lambda^a{}_t = 0, \ \text{pour } t \ge N \end{cases}$$

La prime est payée en début de période.

Flux futurs probables payables par l'assureur

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{d_x}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}} \pi + \frac{d_{x+1}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{1+\frac{1}{2}}} 2\pi + ... + \frac{d_{x+N-1}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{N-1+\frac{1}{2}}} N\pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{\frac{1}{2}} (t+1)\pi v^t$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \lambda_t^A = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(t+1)\pi, \ pour \ 0 \le t \le N-1, \\ \lambda_t^A = \dfrac{l_{x+N}}{l_x} C \ , \ pour \ t = N \\ \lambda_t^A = 0 \ , \ pour \ t > N \end{cases}$$

Traités en excédent de plein

Dans le cadre des traités en excédent de plein, nous ne nous focalisons que sur la tarification en prime périodique pure pour les deux garanties étudiées.

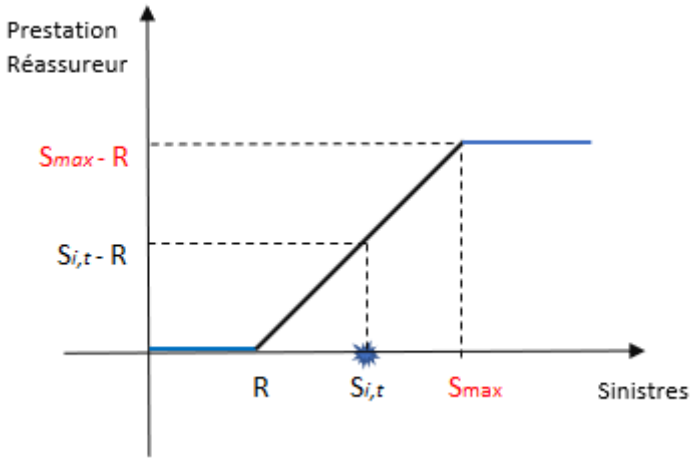


Figure 18 : Représentation de la charge de sinistre du réassureur

Pour tout sinistre i et pour toute date t future appartenant à $[T_k, T_{k+1}[$ avec $k \in \{0,1,2,...,N-1\}$, si

- R désigne le montant de la rétention
- C_a désigne la partie du capital total garanti prise en charge par l'assureur en-dessous de la rétention
- C_r est le montant de la garantie pris en charge par le réassureur au-delà de la rétention
- P_a est la prime payée sur le marché primaire par l'assuré pour bénéficier de la garantie
- P_r représente la prime de réassurance

Alors, pour toute charge de sinistre $S_{i,t}$ telle que $0 \le S_{i,t} \le S_{\max}$, on a :

$$\begin{cases} C_a = Min(S_{i,t}, R) \\ C_r = Max(0, S_{i,t} - R) \\ P_r = \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a \end{cases}$$

Avec i correspondant à un évènement de sinistre (décès, survie, *etc*).

P_a étant la prime assurée, elle correspondra à la prime périodique π.

Cession en excédent de plein de la garantie temporaire décès

<u>Cas de la prime pure périodique</u>

<u>Flux futurs probables payables par l'assuré</u>

Le montant payable à t reste inchangé par rapport au cas vu en réassurance en quote-part. Donc :

$$\begin{cases} \lambda^a{}_t = \pi \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, \text{ pour } 0 \le t \le N-1 \\ \lambda^a{}_t = 0, \text{ pour } t \ge N \end{cases}$$

<u>Flux futurs probables payables par l'assureur</u>

$$\begin{cases} \lambda^A_t = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G, \ pour \ 0 \le t \le N-1, \\ \lambda^A_t = 0 \ , \ pour \ t \ge N \end{cases}$$

<u>Réassurance du contrat en excédent de plein</u>

On reprend les notations vues en introduction de la section.

Pour tout *t* élément de $[T_k, T_{k+1}[\ avec \ k \in \{0,1,2,...,N-1\}$,

$$\begin{cases} C_a = Min(S_{i,t}, R) \\ C_r = Max(0, S_{i,t} - R) \\ P_r = \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a \end{cases}$$

Avec $i \equiv 1$ pour l'évènement « décès de l'assuré ».

Dans le cas de la garantie étudiée (temporaire décès), en cas de sinistre, $S_{i,t} = S_{\max} = G$. Autrement dit, la charge du sinistre vaut le montant de la garantie *G*.

Par conséquent,

$$\begin{cases} C_a = Min(G, R) \\ C_r = Max(0, G - R) \\ P_r = \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a \end{cases}$$

On en déduit que sur le marché de la réassurance :

$$\begin{cases} VAP_{Réassureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} C_r v^t \\ VAP_{Assureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{l_{x+t}}{l_x} P_r v^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} VAP_{Réassureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} Max(0, G - R) v^t \\ VAP_{Assureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{l_{x+t}}{l_x} \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a v^t \end{cases}$$

Avec P_a est la prime périodique versée par l'assuré.

Les flux futurs probables payables par le réassureur en *t* s'élèvent à :

$$\begin{cases} \lambda_t^R = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} Max(0, G - R), \ pour \ 0 \le t \le N - 1, \\ \lambda_t^R = 0 \ , \ pour \ t \ge N \end{cases}$$

Par ailleurs, les flux futurs probables payables par l'assureur en *t* valent :

$$\begin{cases} \lambda_t^A = \dfrac{l_{x+t}}{l_x} \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a, \ pour \ 0 \le t \le N - 1, \\ \lambda_t^A = 0 \ , \ pour \ t \ge N \end{cases}$$

D'où la valeur sans risque d'un traité en excédent de plein, du point de vue de l'assureur :

$$V = \sum_{t=0}^{N-1} \left[\frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} (G - R)^+ - \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{C_r}{C_a + C_r} P_a \right] v^t \qquad \textbf{(3.6)}$$

Cession en excédent de plein du contrat mixte

<u>Cas de la prime pure périodique</u>

<u>Flux futurs probables payables par l'assuré</u>

Le flux $\lambda^a{}_t$ à la charge de l'assuré en *t vaut toujours :*

$$\begin{cases} \lambda^a{}_t = \pi \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, \text{ pour } 0 \le t \le N-1 \\ \lambda^a{}_t = 0, \text{ pour } t \ge N \end{cases}$$

<u>Flux futurs probables payables par l'assureur</u>

Pour rappel, les flux probables λ_t^A de l'assureur (sur le marché primaire) dans le cadre du contrat *GarMixte* s'élèvent à :

$$\begin{cases} \lambda_t^A = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(t+1)\pi, \ pour \ 0 \le t \le N-1, \\ \lambda_t^A = \dfrac{l_{x+N}}{l_x} C \ , \ pour \ t = N \\ \lambda_t^A = 0 \ , \ pour \ t > N \end{cases}$$

<u>Réassurance du contrat en excédent de plein</u>

Pour tout t élément de $\left[T_k, T_{k+1}\right[\ avec \ k \in \{0,1,2,...,N-1\}$,

$$\begin{cases} C_a = Min(S_{i,t}, R) \\ C_r = Max(0, S_{i,t} - R) \\ P_r = \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a \end{cases}$$

La charge de sinistre $S_{i,t}$ pour la garantie mixte vaut :

$$\begin{cases} S_{i,t} = (t+1)\pi, \text{ pour } t \in \left[T_k, T_{k+1}\right[\text{ avec } k \in \{0, N-1\} \\ S_{i,t} = C, \text{ pour } t = \mathrm{T}_N \end{cases}$$

Avec

- $i \equiv 1$ pour l'évènement « décès de l'assuré »
- $i \equiv 2$ pour l'évènement « survie de l'assuré »

Ainsi,

$$\begin{cases} C_a = Min((t+1)\pi, R).1_{\{t<T_N\}} + Min(C, R).1_{\{t=T_N\}} \\ C_r = Max(0,(t+1)\pi - R).1_{\{t<T_N\}} + Max(0, C-R).1_{\{t=T_N\}} \\ P_r = \dfrac{C_r}{C_a + C_r} P_a \end{cases}$$

On en déduit que sur le marché de la réassurance :

$$\begin{cases} VAP_{Réassureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} C_r(t) v^t + \dfrac{l_{x+N}}{l_x} C_r(T_N) v^N \\ VAP_{Assureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{l_{x+t}}{l_x} P_r v^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} VAP_{Réassureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \left((t+1)\pi - R\right)^+ v^t + \dfrac{l_{x+N}}{l_x} \left(C-R\right)^+ v^N \\ VAP_{Assureur} = \sum_{t=0}^{N-1} \dfrac{l_{x+t}}{l_x} \dfrac{\left((t+1)\pi - R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi, R\right) + \left((t+1)\pi - R\right)^+} P_a v^t \end{cases}$$

La valeur sans risque du traité en excédent de plein, du point de vue de l'assureur donc :

$$V = \sum_{t=0}^{N-1} \left[\frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \left((t+1)\pi - R\right)^+ - \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{\left((t+1)\pi - R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi, R\right) + \left((t+1)\pi - R\right)^+} P_a \right] v^t + \frac{l_{x+N}}{l_x} \left(C-R\right)^+ v^N \qquad \textbf{(3.7)}$$

3.2.3. Introduction du risque de défaut dans la tarification des traités

Le payoff de l'assureur à la date de défaut du réassureur

Soit Π et Π^D respectivement les valeurs du contrat en absence et en présence du risque de défaut.

Soit τ la date du défaut éventuel du réassureur.

Désignons par $VAN(\tau)$ la valeur actuelle nette du contrat de swap pour l'assureur à la date de défaut éventuel τ du réassureur. $VAN(\tau)$ serait en réalité le *payoff* résiduel de l'assureur entre les dates τ et T_N, si le réassureur ne faisait pas défaut.

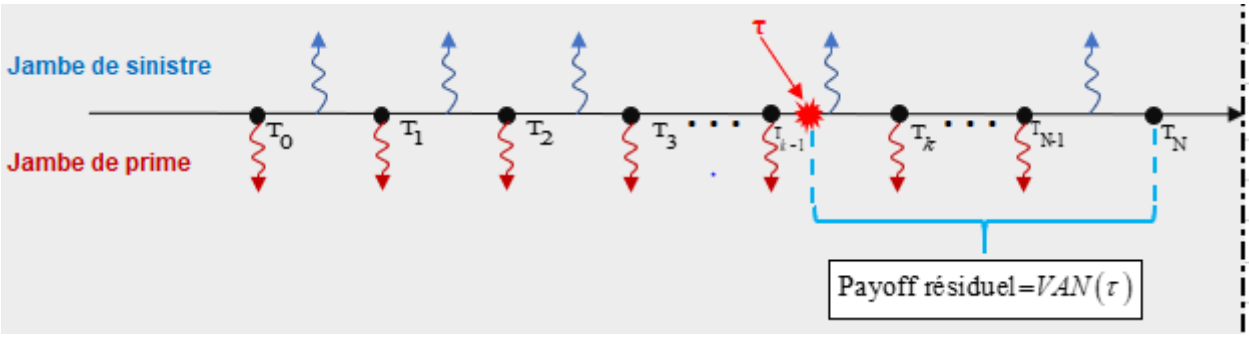


Figure 19 : Swap de sinistralité entre l'assureur et le réassureur

- Si $VAN(\tau) > 0$, alors l'assureur ne recouvre qu'une proportion $1 - R^{ec}$ de son *payoff*, où R^{ec} désigne le taux de recouvrement.
- Le cas $VAN(\tau) < 0$ ne nous intéresse pas ici car si le réassureur fait défaut, l'assureur arrête tout simplement le versement des primes. Les flux futurs positifs en faveur du réassureur ne font logiquement pas l'objet d'un remboursement par l'assureur.

Formulation générale de la *CVA* unilatérale

Dans cette partie du mémoire, nous présentons un cadre général de modélisation dans lequel la *CVA* se calcule en utilisant des déflateurs stochastiques. Le calcul avec des déflateurs déterministes, comme ceux obtenus avec la courbe des taux EIOPA, en est déduit de façon immédiate.

D'après l'égalité (2.8), la *CVA* unilatérale calculée du point de vue de l'assureur vaut :

$$\begin{aligned} UCVA &= E_t\left[\Pi(t,N)\right] - E_t\left[\Pi^D(t,N)\right] \\ &= LGD.E_t\left[1_{\{t<\tau\le T_N\}} D(t,\tau)\left(VAN(\tau)\right)^+\right] \\ &= (1-R^{ec})\sum_{k=1}^{T_N} D(t,T_k)\left(E(T_k)\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1},T_k) \end{aligned}$$

$$UCVA = (1-R^{ec})\sum_{k=1}^{T_N}\left(EE^*(t,T_k)\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1},T_k)$$

Où :

- $D(t,T_k)$ est le facteur d'actualisation applicable aux flux de la date $t+T_k$.

$$D(t,T_k) = \frac{B_t}{B_{t+T_k}}$$

Pour chaque date de projection $t+T_k$, on vérifiera, à travers un test martingale dédié, si la variable $D(t,T_k)$ simulée par la méthode de Monte Carlo convergent vers le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T_k, noté $P(t,t+T_k)$.

B_t est le numéraire unité de compte (*money market account*) valant :

- Un euro en date *t = 0*
- $B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$

  B_t représente la valeur en *t* d'un euro investi en date 0. r_u désigne le taux court instantané.

- $EE^*(t,T_k) = \mathrm{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} E(T_k)\middle| F_{T_k}\right)$ pour chaque pas de projection T_k compté à partir de *t*. Dans la pratique, la quantité $\mathrm{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} E(T_k)\middle| F_{T_k}\right)$ sera obtenue par des simulations de Monte Carlo, dans le cas de scénarios stochastiques.
- Ω la probabilité risque-neutre associée au numéraire B de maturité $t+T_k$
- E^{Ω} l'espérance mathématique sous la mesure de probabilité Ω
- $\bar{Q}$ la probabilité de défaut de la contrepartie
- E_t l'espérance mathématique du *payoff* de l'assureur sous la mesure de probabilité de défaut $\bar{Q}$
- R^{ec} le taux de recouvrement en cas de défaut
- T_N l'échéance du contrat
- *E(t)* l'exposition au risque de défaut à la date *t*
- F_t le filtre d'information disponible en date *t*

Nota Bene : La valeur de la *CVA* devra être mise à jour annuellement dans le cadre de la modélisation sur les swaps.

Prise en compte du collatéral dans la formulation de la CVA

Dans notre modélisation, nous utilisons le collatéral en vue d'ajuster le *LGD* (et non l'exposition nette positive).

Soit *A* une exposition sujette au risque de défaut d'une contrepartie.

Soit *c* le taux de collatéralisation. Par exemple, *c* peut être égal au rapport entre la valeur des actifs nantis dans le cadre de la réassurance et le BEL cédé.

Soit *chc* le *collateral haircut*, c'est-à-dire la décote appliquée au collatéral en vue de refléter la baisse éventuelle de la valeur boursière des titres nantis au moment du défaut.

Si *Z* désigne la valeur de l'exposition recouvrée à la suite d'un défaut, alors on a les cas de figure suivants :

- $Z = R^{ec}.A$ en cas de défaut, en absence de collatéral,
- $\begin{cases} Z = R^{ec}A + (1-chc)cA, \text{ si } (1-chc)cA < \left(1-R^{ec}\right)A \\ Z = A, \text{ si } (1-chc)cA \geq \left(1-R^{ec}\right)A \end{cases}$ en cas de défaut, en présence d'un collatéral,
- $Z = A$ si l'assureur ne fait pas défaut.

En résumé :

$$Z = A.1_{\{survie\}} + \left(R^{ec} + Min\left((1-chc)c, 1-R^{ec}\right)\right)A.1_{\{défaut\}} \quad \textbf{(3.8)}$$

On en déduit le taux de recouvrement ajusté :

$$R^{ec}{}_{Adj} = R^{ec} + Min\left((1-chc)c, 1-R^{ec}\right) \quad \textbf{(3.9)}$$

Et, la formule de la *CVA* unilatérale (hors soulte) se réécrit :

$$UCVA = (1-R^{ec} - Min\left((1-chc)c, 1-R^{ec}\right))\sum_{k=1}^{T_N}\left(EE^*(t,T_k)\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1},T_k)$$

$$UCVA = (1-R^{ec}{}_{Adj})\sum_{k=1}^{T_N}\left(EE^*(t,T_k)\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1},T_k) \quad \textbf{(3.10)}$$

Schéma de calcul de l'UCVA de l'assureur

Le processus de calcul de la *CVA* unilatérale peut être résumé en 5 grandes étapes :

i- Calculer les déflateurs stochastiques ou déterministes.

ii- Calibrer les probabilités de défaut sur l'horizon du traité.

iii- Pour chaque année de projection T_k, calculer les flux assureurs et réassureurs.

iv- En déduire les flux positifs nets $\left(EE^*(T_k)\right)^+$ en faveur de l'assureur.

v- Implémenter la formule de l'égalité (3.10).

CVA unilatérale d'un traité en Quote-Part

Cas de la garantie décès temporaire

<u>Prime unique pure</u>

D'après la section 3.2.2, la valeur sans risque Π du swap de sinistralité se formalise comme suit :

$$\Pi(t,N)=\sum_{t=0}^{N-1}\eta\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}G-\pi 1_{t=0}\right]v^t$$

Avec η le taux de cession. En particulier pour *t = 0,* $\Pi(0,N)$ représente la soulte à verser par l'assureur au réassureur si $\Pi(0,N)>0$, ou à recevoir du réassureur si $\Pi(0,N)<0$. Cette soulte impactera la valeur de la *CVA*, comme décrit à la section 3.1.3.

- La jambe de prime :

Pour tout $t\in\{0,1,2,...,N\}$, la prime de réassurance annuelle payée par l'assureur s'élève à

$$\begin{cases} J_p^{\ Y}(t)=\eta\pi, \text{ pour } t=0 \\ J_p^{\ Y}(t)=0, \text{ pour } 0<t\le N \end{cases}$$

Ce montant reflète l'obligation qu'a l'assureur de reverser à *t* une portion de la prime initialement payée par l'assuré. La jambe de prime totale vaut :

$$J_p(t)=\sum_{t=0}^{N-1}\eta\pi 1_{t=0}v^t=\eta\pi$$

- La jambe de sinistre :

Pour tout $t\in\{0,1,2,...,N\}$, la prestation pour sinistres annuelle honorée par le réassureur s'élève à

$$\begin{cases} J_s^{\ Y}(t)=\dfrac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}\eta G \quad \text{, pour } 0\le t\le N\text{-}1 \\ J_s^{\ Y}(t)=0, \text{ pour } t=N \end{cases}$$

Ces montants matérialisent l'ensemble des prestations dues par le réassureur à l'assureur en cas d'occurrence du sinistre. On en déduit la jambe de sinistre totale :

$$J_s(t)=\sum_{t=0}^{N-1}\eta\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}Gv^t$$

- L'exposition nette (*payoff*) γ_t de l'assureur, dans le cadre de l'accord d'échanges, sur la seule année *t vaut*:

$$\gamma_t = J_s^{\ Y}(t) - J_p^{\ Y}(t)$$

D'après l'égalité (3.10), on a

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} \left(EE_\gamma^{\ *}(t, T_k) \right)^+ \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

Avec

$$EE_\gamma^{\ *}(t, T_k) = \mathrm{E}^{\Omega} \left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} (\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k} \right)$$

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} \mathrm{E}^{\Omega} \left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} (\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k} \right) \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

On admettra dans la suite que les mesures de probabilité Ω et $\bar{Q}$ sont indépendantes. Cette hypothèse suppose l'atomicité du marché : le défaut du réassureur n'impacte pas la structure par termes des taux d'intérêt.

En tenant compte de la soulte, on a :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0, N) \right)^+ \qquad \textbf{(3.11)}$$

Calcul de la CVA au fil de l'eau

Pour les produits financiers tels que les swaps, il est d'usage que la valeur de la *CVA* calculée en date de valorisation *t* soit lissée dans le temps. Cela permet d'ajuster l'un ou l'autre des coupons échangés du prix du défaut de la contrepartie. Le montant de cet ajustement est appelé la *CVA* au fil de l'eau, ou *running CVA* en anglais.

Dans le cadre du mémoire, nous proposons d'impacter la prime cédée d'un montant $\varepsilon < 0$ représentant la *CVA* au fil de l'eau.

On rappelle la relation :

$$CVA(.) = V(.) - \tilde{V}(.)$$

Où V et $\tilde{V}$ sont respectivement les valeurs sans risque et risquée du swap.

Pour la prime unique, on a vu précédemment que la prime cédée valait $\eta\pi$. Ainsi, la prime cédée ajustée du risque de défaut vaut $\eta\pi + \varepsilon$. Pour que la *CVA* capture parfaitement le risque de contrepartie, [Arvanitis et Gregory (2001)] montrent que la relation suivante devrait être respectée :

$$V(\eta\pi) = \tilde{V}(\eta\pi + \varepsilon)$$

La relation ci-dessus est assez intuitive. En effet, elle rappelle que la valeur risquée du swap corrigée du risque de défaut devrait équivaloir à la valeur sans risque du swap

On obtient donc que :

$$\begin{aligned}
CVA(\eta\pi + \varepsilon) &= V(\eta\pi + \varepsilon) - \tilde{V}(\eta\pi + \varepsilon) \\
CVA(\eta\pi + \varepsilon) &= V(\eta\pi + \varepsilon) - V(\eta\pi) \\
CVA(\eta\pi + \varepsilon) &= \sum_{t=0}^{N-1} \left[\eta \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G - (\eta\pi + \varepsilon) 1_{t=0} \right] v^t - \sum_{t=0}^{N-1} \eta \left[\frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G - \pi 1_{t=0} \right] v^t \\
&= \sum_{t=0}^{N-1} -\varepsilon 1_{t=0} v^t \\
CVA(\eta\pi + \varepsilon) &= -\varepsilon
\end{aligned}$$

La *CVA* au fil de l'eau se déduit donc, de façon itérative, de la dernière égalité. Pour éviter la complexité liée à la méthode itérative, Vrins et Gregory, dans *Getting CVA Up and Running*, proposent la simplification[39] suivante adaptable dans notre cas par l'égalité :

$$\varepsilon_{proxy} = -CVA(\eta\pi) \qquad \textbf{(3.12)}$$

En effet, pour un contrat à prime unique, la *CVA* au fil de l'eau est égale à la *CVA* dite *upfront*, c'est-à-dire la *CVA* non lissée dans le temps.

Prime périodique pure

D'après la section 3.2.2, la valeur sans risque Π du swap de sinistralité est :

$$\Pi(t, N) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta \left[\frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G - \pi \frac{l_{x+t}}{l_x} \right] v^t$$

Avec η le taux de cession. En particulier pour *t = 0,* $\Pi(0, N)$ représente la soulte à verser par l'assureur au réassureur si $\Pi(0, N) > 0$, ou à recevoir du réassureur si $\Pi(0, N) < 0$. Cette soulte impactera la valeur de la *CVA*, comme décrit à la section 3.1.3.

- La jambe de prime :

Pour tout $t \in \{0, 1, 2, ..., N\}$, la prime de réassurance annuelle payée par l'assureur s'élève à

[39] Cette simplification s'appelle l'approche par la duration. Dans la suite, la duration sera approchée par la valeur actuelle probable d'une rente sur *N* années versant 1€ annuellement.

$$\begin{cases} J_p{}^{Y}(t) = \eta\pi \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, \text{ pour } 0 \le t \le N-1 \\ J_p{}^{Y}(t) = 0, \text{ pour } t = N \end{cases}$$

Et la jambe de prime totale vaut :

$$J_p(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta\pi \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t$$

- La jambe de sinistre :

Pour tout $t \in \{0,1,2,...,N\}$, la prestation pour sinistres annuelle honorée par le réassureur s'élève à

$$\begin{cases} J_s{}^{Y}(t) = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \eta G \text{ , pour } 0 \le t \le N\text{-}1 \\ J_s{}^{Y}(t) = 0, \text{ pour } t = N \end{cases}$$

$$\text{Et } J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} G v^t$$

- L'exposition nette de l'assureur, dans le cadre de l'accord d'échanges, sur la seule année *t vaut*:

$$\gamma_t = J_s{}^{Y}(t) - J_p{}^{Y}(t)$$

On retrouve :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} \mathrm{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} (\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k} \right) \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

En tenant compte de la soulte, on a :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0,N) \right)^+$$

Calcul de la CVA au fil de l'eau

En reprenant les notations de la *CVA* au fil de l'eau du traité précédent, on a :

$$CVA(\eta\pi+\varepsilon)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\eta\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}G-(\eta\pi+\varepsilon)\frac{l_{x+t}}{l_x}\right]v^t-\sum_{t=0}^{N-1}\eta\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}G-\pi\frac{l_{x+t}}{l_x}\right]v^t$$

$$=\sum_{t=0}^{N-1}-\varepsilon\frac{l_{x+t}}{l_x}v^t$$

$$CVA(\eta\pi+\varepsilon)=-\varepsilon\sum_{t=0}^{N-1}\frac{l_{x+t}}{l_x}v^t$$

D'où, par simplification,

$$\varepsilon_{proxy}=\frac{CVA(\eta\pi)}{-\sum_{t=0}^{N-1}\frac{l_{x+t}}{l_x}v^t}$$

ε_{proxy} peut encore s'écrire :

$$\varepsilon_{proxy}=\frac{CVA(\eta\pi)}{-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \textbf{(3.13)}$$

Où $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ est la valeur actuelle probable d'une rente temporaire de *N* années à versements de 1 €, effectués d 'avance. Cette valeur matérialise la duration des flux de paiement de la *CVA* dans le temps.

Cas du contrat mixte

Prime unique pure

D'après la section 3.2.2, la valeur sans risque Π du swap de sinistralité se formalise comme suit :

$$\Pi(t,N)=\sum_{t=0}^{N-1}\eta\pi\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}-1_{t=0}\right]v^t+\frac{l_{x+N}}{l_x}\eta Cv^N$$

Avec η le taux de cession. En particulier pour *t = 0,* $\Pi(0,N)$ représente la soulte à verser par l'assureur au réassureur si $\Pi(0,N)>0$, ou à recevoir du réassureur si $\Pi(0,N)<0$. Cette soulte impactera la valeur de la *CVA*, comme décrit à la section 3.1.3.

- La jambe de prime :

Pour tout $t\in\{0,1,2,...,N\}$, la prime de réassurance annuelle payée par l'assureur s'élève à

$$\begin{cases} J_p^{\,Y}(t) = \eta\pi, \text{ pour } t = 0 \\ J_p^{\,Y}(t) = 0, \text{ pour } 0 < t \le N \end{cases}$$

La jambe de prime totale vaut :

$$J_P(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta\pi 1_{t=0} v^t = \eta\pi$$

- La jambe de sinistre :

$$\begin{cases} J_s^{\,Y}(t) = \dfrac{d_{x+t}}{l_x} v^{\frac{1}{2}} \eta\pi, \text{ pour } 0 \le t \le N\text{-}1 \\ J_s^{\,Y}(t) = \dfrac{l_{x+N}}{l_x} \eta C, \text{ pour } t = N \end{cases}$$

$$\text{Et } J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta\pi \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{\frac{1}{2}} v^t + \frac{l_{x+N}}{l_x} \eta C v^N$$

- L'exposition nette de l'assureur :

$$\gamma_t = J_s^{\,Y}(t) - J_p^{\,Y}(t)$$

On retrouve :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} \mathrm{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} (\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k} \right) \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

En tenant compte de la soulte, on a :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0, N) \right)^+$$

Calcul de la CVA au fil de l'eau

Tout comme pour la garantie temporaire décès à prime pure unique, on montre que :

$$\varepsilon_{proxy} = -CVA(\eta\pi) \qquad \textbf{(3.14)}$$

Prime périodique pure

D'après la section 3.2.2, la valeur sans risque Π du swap de sinistralité est :

$$\Pi(t, N) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta\pi \left[\frac{d_{x+t}}{l_x} v^{\frac{1}{2}} (t+1) - \frac{l_{x+t}}{l_x} \right] v^t + \frac{l_{x+N}}{l_x} \eta C v^N$$

Avec η le taux de cession. En particulier pour *t = 0,* $\Pi(0,N)$ représente la soulte à verser par l'assureur au réassureur si $\Pi(0,N) > 0$, ou à recevoir du réassureur si $\Pi(0,N) < 0$. Cette soulte impactera la valeur de la *CVA*, comme décrit à la section 3.1.3.

Pour tout $t \in \{0,1,2,...,N\}$,

- La jambe de prime :

$$\begin{cases} J_p^{\,Y}(t) = \eta\pi \dfrac{l_{x+t}}{l_x}, \text{ pour } 0 \le t \le N-1 \\ J_p^{\,Y}(t) = 0, \text{ pour } t = N \end{cases}$$

D'où la jambe de prime totale :

$$J_p(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta\pi \frac{l_{x+t}}{l_x} v^t$$

- La jambe de sinistre est :

$$\begin{cases} J_s^{\,Y}(t) = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \eta(t+1)\pi \\ J_s^{\,Y}(t) = \dfrac{l_{x+N}}{l_x} \eta C, \text{ pour } t = N \end{cases} \quad \text{, pour } 0 \le t \le N\text{-}1$$

La jambe de sinistre totale est donc :

$$J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1} \eta\pi \frac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} (t+1) v^t + \frac{l_{x+N}}{l_x} \eta C v^N$$

- L'exposition nette de l'assureur, dans le cadre de l'accord d'échanges, sur la seule année *t vaut*:

$$\gamma_t = J_s^{\,Y}(t) - J_p^{\,Y}(t)$$

On retrouve :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} \mathrm{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} (\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k} \right) \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

En tenant compte de la soulte, on a :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0,N)\right)^+$$

Calcul de la CVA au fil de l'eau

En reprenant les notations de la *CVA* au fil de l'eau de la garantie temporaire décès à prime pure unique, on a :

$$CVA(\eta\pi+\varepsilon)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\eta\pi\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(t+1)-(\eta\pi+\varepsilon)\frac{l_{x+t}}{l_x}\right]v^t+\frac{l_{x+N}}{l_x}\eta Cv^N$$

$$-\sum_{t=0}^{N-1}\eta\pi\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(t+1)-\frac{l_{x+t}}{l_x}\right]v^t-\frac{l_{x+N}}{l_x}\eta Cv^N$$

$$CVA(\eta\pi+\varepsilon)=-\varepsilon\sum_{t=0}^{N-1}\frac{l_{x+t}}{l_x}v^t$$

D'où, par simplification,

$$\varepsilon_{proxy}=\frac{CVA(\eta\pi)}{-\ddot{a}_{x:\overline{n}}}$$

Où $\ddot{a}_{x:\overline{n}}$ est la valeur actuelle probable d'une rente temporaire de *N* années à versements de 1 €, effectués d 'avance. Cette valeur matérialise la duration des flux de paiement de la *CVA* dans le temps.

CVA unilatérale d'un traité en excédent de plein

Cas de la garantie décès temporaire

Prime périodique pure

D'après 3.2.2, la valeur sans risque Π du swap de sinistralité s'écrit :

$$\Pi(t,N)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(G-R)^+-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{C_r}{C_a+C_r}P_a\right]v^t$$

$$\text{Avec}\begin{cases}C_a=Min(G,R)\\ C_r=Max(0,G-R)\text{ ,et } R \text{ la rétention.}\\ P_r=\dfrac{C_r}{C_a+C_r}P_a\end{cases}$$

En particulier pour *t = 0,* $\Pi(0,N)$ représente la soulte à verser par l'assureur au réassureur si $\Pi(0,N)>0$, ou à recevoir du réassureur si $\Pi(0,N)<0$. Cette soulte impactera la valeur de la *CVA*, comme décrit à la section 3.1.3.

P_a étant la prime assurée, elle correspond à la prime périodique π.

Pour tout *t* élément $\{0,1,2,...,N-1\}$, calculons :

- La jambe de prime :

La prestation annuelle du réassureur vaut

$$J_p^{\ Y}(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{C_r}{C_a + C_r}\pi$$

Soit, une jambe de prime égale à :

$$J_p(t) = \sum_{t=0}^{N-1}\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{C_r}{C_a + C_r}\pi v^t$$

- La jambe de sinistre, quant à elle, vaut :

$$J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1}\frac{d_{x+t}}{l_x}v^{\frac{1}{2}}(G-R)^+ v^t$$

Pour une prestation de réassurance annuelle de :

$$J_s^Y(t) = \frac{d_{x+t}}{l_x}v^{\frac{1}{2}}(G-R)^+$$

- L'exposition nette de l'assureur, dans le cadre de l'accord d'échanges, sur la seule année *t vaut*:

$$\gamma_t = J_s^{\ Y}(t) - J_p^{\ Y}(t)$$

Et , $$UCVA = (1-R^{ec}{}_{Adj})\sum_{k=1}^{T_N}\mathrm{E}^{\Omega}\left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}}(\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k}\right)\bar{Q}(T_{k-1},T_k)$$

En tenant compte de la soulte, on a :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0,N)\right)^+$$

Calcul de la CVA au fil de l'eau

En reprenant les notations de la *CVA* au fil de l'eau de la garantie temporaire décès à prime pure unique, on a :

$$CVA\left(\frac{C_r}{C_a+C_r}\pi+\varepsilon\right)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(G-R)^+-\frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{C_r}{C_a+C_r}\pi+\varepsilon\right)\right]v^t$$

$$-\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}(G-R)^+-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{C_r}{C_a+C_r}\pi\right]v^t$$

$$CVA\left(\frac{C_r}{C_a+C_r}\pi+\varepsilon\right)=-\varepsilon\sum_{t=0}^{N-1}\frac{l_{x+t}}{l_x}v^t$$

D'où, par simplification,

$$\varepsilon_{proxy}=\frac{CVA\left(\frac{C_r}{C_a+C_r}\pi\right)}{-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Où $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ est la valeur actuelle probable d'une rente temporaire de *N* années à versements de 1 €, effectués d 'avance. Cette valeur matérialise la duration des flux de paiement de la *CVA* dans le temps.

Cas du contrat mixte

<u>Prime périodique pure</u>

D'après 3.2.2, la valeur sans risque Π du swap de sinistralité se formalise comme suit :

$$\Pi(t,N)=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}\left((t+1)\pi-R\right)^+-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^+}\pi\right]v^t$$

$$+\frac{l_{x+N}}{l_x}\left(C-R\right)^+v^N$$

En particulier pour *t = 0,* $\Pi(0,N)$ représente la soulte à verser par l'assureur au réassureur si $\Pi(0,N)>0$, ou à recevoir du réassureur si $\Pi(0,N)<0$. Cette soulte impactera la valeur de la *CVA*, comme décrit à la section 3.1.3.

- La jambe de prime :

$$\begin{cases} J_p{}^Y(t)=\dfrac{l_{x+t}}{l_x}\dfrac{\left((t+1)\pi-R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^+}\pi, \text{ pour } 0\le t\le N\text{-}1 \\ J_p{}^Y(t)=0, \text{ pour } t=N \end{cases}$$

Et :

$$J_p(t) = \sum_{t=0}^{N-1} J_p{}^{Y}(t) v^t$$

- La jambe de sinistre:

$$\begin{cases} J_s{}^{Y}(t) = \dfrac{d_{x+t} v^{\frac{1}{2}}}{l_x} \left((t+1)\pi - R\right)^+, \text{ pour } 0 \le t \le N\text{-}1 \\ J_s{}^{Y}(t) = \dfrac{l_{x+N}}{l_x} \left(C - R\right)^+, \text{ pour } t = N \end{cases}$$

$$\text{Et } J_s(t) = \sum_{t=0}^{N-1} J_s{}^{Y}(t) v^t$$

- L'exposition nette de l'assureur, dans le cadre de l'accord d'échanges, sur la seule année *t vaut*:

$$\gamma_t = J_s{}^{Y}(t) - J_p{}^{Y}(t)$$

On obtient, tout comme dans le cas de la garantie décès, l'égalité :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} \mathrm{E}^{\Omega} \left(\frac{B_t}{B_{t+T_k}} (\gamma_t)^+ \middle| F_{T_k} \right) \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

En tenant compte de la soulte, on a :

$$UCVA_{Adjust} = \left(UCVA - \Pi(0, N)\right)^+$$

Détermination de la CVA au fil de l'eau

En reprenant les notations de la *CVA* au fil de l'eau de la garantie temporaire décès à prime pure unique, on a :

$$CVA\left(\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}\pi+\varepsilon\right)$$

$$=\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}\left((t+1)\pi-R\right)^{+}-\frac{l_{x+t}}{l_x}\left(\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}\pi+\varepsilon\right)\right]v^{t}$$

$$+\frac{l_{x+N}}{l_x}\left(C-R\right)^{+}v^{N}$$

$$-\sum_{t=0}^{N-1}\left[\frac{d_{x+t}v^{\frac{1}{2}}}{l_x}\left((t+1)\pi-R\right)^{+}-\frac{l_{x+t}}{l_x}\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}\pi\right]v^{t}$$

$$-\frac{l_{x+N}}{l_x}\left(C-R\right)^{+}v^{N}$$

$$CVA\left(\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}\pi+\varepsilon\right)=-\varepsilon\sum_{t=0}^{N-1}\frac{l_{x+t}}{l_x}v^{t}$$

D'où, par simplification :

$$\varepsilon_{proxy}=\frac{CVA\left(\frac{\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}{Min\left((t+1)\pi,R\right)+\left((t+1)\pi-R\right)^{+}}\pi\right)}{-\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad \textbf{(3.16)}$$

Où $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ est la valeur actuelle probable d'une rente temporaire de *N* années à versements de 1 €, effectués d 'avance. Cette valeur matérialise la duration des flux de paiement de la *CVA* dans le temps.

3.3. Calibrage des paramètres de tarification du risque de défaut du réassureur

3.3.1. Calibrage des probabilités de défaut

Dans le cadre de ce document, nous calculons des probabilités de défaut gouvernées par un modèle d'intensité basé lui-même sur un processus de Poisson.

La mise en œuvre du calcul est relativement simple et pour calibrer les probabilités de défaut, nous recourons à la méthode du *bootstrapping* des spreads de *CDS* vue en section 2.1.4.

Nous nous intéresserons à des traités de maturités variant entre 1 et 10 ans. En conséquence, nous nous limiterons à une courbe de crédit de maturité maximale égale 10.

Nous supposerons que la société Sofia est une entité de référence pour des *CDS* directement observables sur le marché. Pour les gros assureurs de la place européenne, il est possible d'avoir de telles données directement sur le marché ou de manière indirecte en utilisant les données des indices de *CDS* sectoriels et géographiques équivalents. Pour rappel, la méthode indirecte est appelée approche par *CDS* implicite et procède par une cartographie sectorielle des *CDS* des entreprises ayant les mêmes caractéristiques que la société Sofia (secteur d'activité, situation géographique, rating, maturité du contrat assuré)

Dans la pratique, il est impossible, pour une entité de référence donnée, d'observer des *CDS* cotés pour chaque maturité (de 1 à 10 ans par exemple). Et plus la maturité du *CDS* sera importante, moins liquide sera le swap.

Sur notre fenêtre d'étude, les données de *CDS* ne sont disponibles que pour les maturités 1, 3, 5, 7 et 10 ans. Afin de déduire les probabilités de défaut pour toutes les années de 1 à 10, nous employons la technique d'interpolation par *splines* cubiques.

Une fois l'interpolation achevée et la courbe de crédit ainsi reconstituée pour toutes les maturités, nous utilisons la méthode du *bootstrapping* pour dériver les probabilités de survie et de défaut ainsi que les intensités de défaut (*hazard rates*, constantes par intervalle de temps).

Bootstrapping sur données interpolées par splines

La compagnie Sofia est l'entité de référence d'une série de *CDS* dont les ténors varient entre 1 an et N ans.

A la date de valorisation t, l'on observe une suite de valeurs de marché des spreads de *CDS*. Notons $\left(\hat{S}_{i,t}\right)_{i=1,\ldots,N}$ cette suite.

D'après la section 2.1.4, les probabilités de survie Q peuvent alors être calculées de façon récursive :

- $Q(0)=1$[40]
- $Q(t,T_1)=\dfrac{1-R^{ec}}{S_1+1-R^{ec}}$
- Et :

  $\forall$ *CDS* de maturité $N \geq 2$,

  $\forall$ Maturité inférieure n, telle que $2 \leq n \leq N$,

  $\forall i \leq n$,

$$Jambe_{prime} = Jambe_{défaut}$$

$$\Leftrightarrow Q(t,T_n) = \frac{A\left(t,\ S_n,\ Q(t,T_i)_{i=1,\ldots,n-1}\right)+B\left(t,\ R,\ Q(t,T_i)_{i=1,\ldots,n-1}\right)}{\left(S_n\Delta_n+(1-R)\right)D(t,T_n)}$$

$$\begin{cases} A\left(t,\ S_n,\ Q(t,T_i)_{i=1,\ldots,n-1}\right) = -S_n\sum_{i=1}^{n-1} D(t,T_i)Q(t,T_i)\Delta_i \\ B\left(t,\ R,\ Q(t,T_i)_{i=1,\ldots,n-1}\right) = (1-R)\left(\sum_{i=1}^{n-1} D(t,T_i)\left(Q(t,T_{i-1})-Q(t,T_i)\right)+D(t,T_n)Q(t,T_{n-1})\right) \end{cases}$$

Les intensités de défaut, constantes par morceaux temporels $[T_{n-1},T_n]$, dérivent quant à elles de la formule :

$$\lambda\left(T_n\right)=\frac{-\ln Q\left(t,T_n\right)}{\Delta_n}-\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(T_{i-1}\right)$$

[40] On admet que l'entité de référence est solvable à la date $t=0$.

Données de marché

On observe sur une période de 5 jours les spreads de *CDS* suivants dont l'entité de référence est la compagnie Sofia.

Date	1Y	3Y	5Y	7Y	10Y
28/12/2017	153	183	206	219	230
27/12/2017	156	184	207	220	230
26/12/2017	156	185	208	221	231
21/12/2017	152	181	204	217	228
20/12/2017	148	177	200	213	223

Figure 20 : Cotation des spreads de CDS en points de base (*bp*) pour l'entité de référence Sofia (source : données de marché adaptées à notre modèle)

La représentation graphique des spreads est donnée par la figure 21.

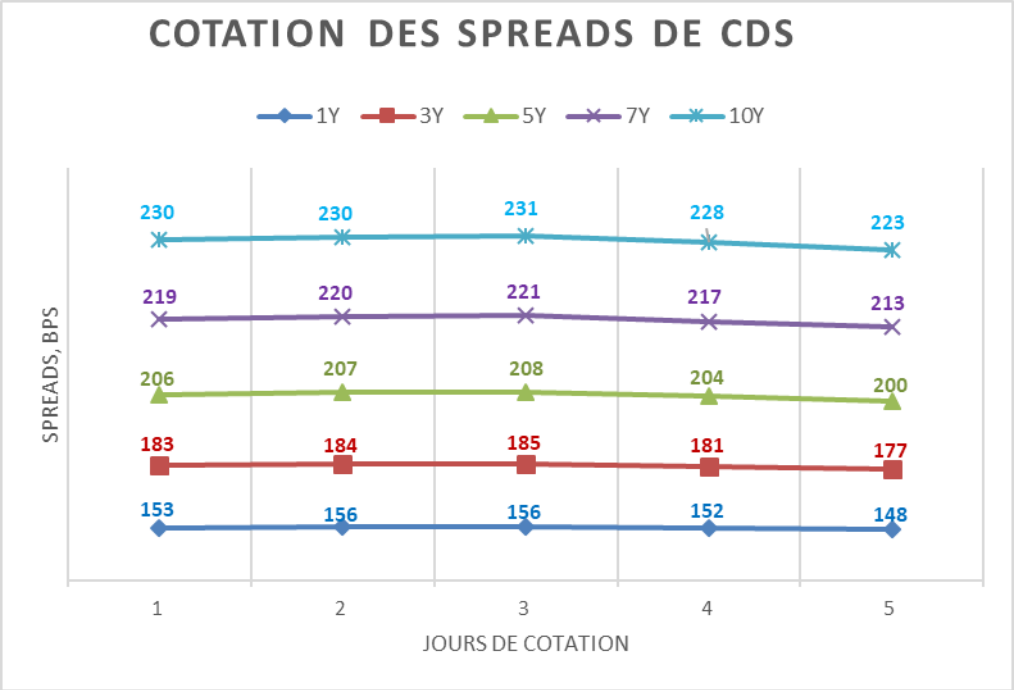


Figure 21 : Cotation des spreads de CDS de Sofia (Source : données de marché adaptées à notre modèle)

La figure 21 montre que la prime (*spread*) payée par une contrepartie se protégeant contre un défaut éventuel de la société Sofia augmente à mesure que la durée de la protection s'étale dans le temps. En effet, en désignant par S_1, S_3, S_5, S_7 et S_{10} respectivement les spreads de *CDS* de maturité 1, 3, 5, 7 et 10 ans, on a bien la relation d'ordre $S_1 > S_3 > S_5 > S_7 > S_{10}$, quel que soit le jour de cotation observé.

Le *CDS* de maturité 1 an permet de calibrer une probabilité de survie à 1 an.

De façon générale, un *CDS* de maturité *N*, *N* >1, servira au calcul d'une probabilité de survie à *N* ans, conditionnellement à une survie sur les *N-1* années précédentes.

On en déduit une structure par termes de probabilités de défaut, de même que des intensités de défaut (*taux de hasard*) constantes par morceau.

Afin de calculer les probabilités de survie telles que formulées par l'égalité (2.9), il est nécessaire de disposer du taux de recouvrement et de la courbe des taux observés sur la même période. Cependant, le calibrage se faisant sur les données spots, nous ne retiendrons que la courbe de taux observée au 28/12/2017.

La courbe des taux sans risque

Taux Zéros-Coupons *EIOPA* (%)	
1Y	-0,318
2Y	-0,210
3Y	-0,048
4Y	0,109
5Y	0,249
6Y	0,387
7Y	0,509
8Y	0,625
9Y	0,735
10Y	0,842

Figure 22 : Courbe des taux sans risque au 28 décembre 2017 (source : EIOPA)

Il s'agit de la courbe des taux sans risque telle qu'observée au 31/12/2017 (clôture effective des marchés le 28/12/2017)

Cette courbe des taux zéros-coupons est communiquée par l'*EIOPA* et découle de la courbe des taux swaps. Sa construction tient compte de plusieurs éléments :

- Ajustements (volatilité, risque de crédit) : l'ajustement de volatilité *(Volatility Adjustment)* permet aux assureurs vie de corriger les perturbations du *BEL* dues à la volatilité des taux courts. En effet, de cette manière, le *BEL* reflète mieux l'activité d'assurance pour ces compagnies ayant des durations longues du passif. L'ajustement de crédit quant à lui transcrit l'idée selon laquelle les taux swap observés ne sont pas complètement sans risque et incluent implicitement un risque de crédit sous-jacent. D'où l'application d'un *CRA (Credit Risk Adjustment)* venant corriger à la baisse le niveau des taux.

- Un *LLP* : au-delà d'une certaine maturité (*Last Liquid Point), l'EIOPA* considère que les taux ne sont pas liquides. Dans la méthodologie *EIOPA*, les taux ne sont plus liquides à compter de 20 ans.

- *UFR* : *Ultimate Forward Rate*. Il s'agit du taux vers lequel doivent converger les taux *forward* au-delà du *LLP*. Ce taux correspond à la somme d'un taux d'inflation attendu déterminé par la BCE (2%) et d'un taux réel attendu à long terme (2,2%, moyenne des taux réels long terme connus depuis 1961). La valeur de l'*UFR* était ainsi de 4,2%, figée depuis 2010, même si sa valeur théorique calculée en 2016 valait 3,65%. Pour les comptes de 2018, l'*UFR* est passé à 4,05% (i.e., 4,2% - 15bps, car 3,65%≤[4,2% -

15bps], cf. formule ci-dessous) afin de tenir compte de la baisse des taux réels attendus à long terme. Désormais, un taux *UFR* théorique (UFR_t) sera calculé chaque année, et la valeur du taux *UFR* appliquée dans l'extrapolation des taux forwards respectera la consigne suivante :

$$UFR_t^L = \begin{cases} UFR_{t-1} + 15bps \text{ si } UFR_t \geq UFR_{t-1} + 15bps \\ UFR_{t-1} - 15bps \text{ si } UFR_t \leq UFR_{t-1} - 15bps \\ UFR_{t-1} \text{ sinon} \end{cases}$$

- Extrapolation des taux forward vers *l'UFR*, pour les maturités considérées comme non liquides (méthode *Smith-Wilson*)[41].

Le taux de recouvrement sera fixé à 40%, comme généralement pratiqué par les desks de *pricing* de la *CVA*.

Les probabilités de défaut calculées (date de valorisation, le 28/12/2017) seront utilisées pour la tarification des traités souscrits au 1er janvier 2018, le 31 décembre 2017 étant un jour non ouvré.

Interpolation de la courbe de crédit

La méthode utilisée est celle des *splines* cubiques. Partant des observations S_1, S_3, S_5, S_7 et S_{10}, elle permet de construire des fonctions polynômiales par morceaux entre deux nœuds initiaux consécutifs S_i et S_{i+1}. Les nœuds concernés sont marqués en bleu dans le graphique ci-après :

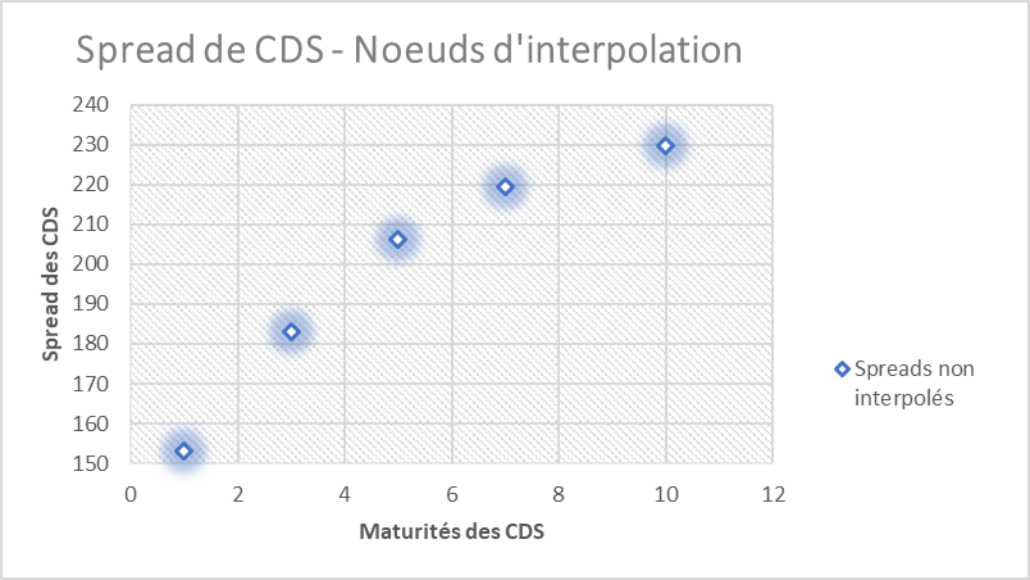


Figure 23 : Spreads de CDS – nœuds d'interpolation initiaux

[41] Cf. Pierre Thérond, cours sur les Taux, http://www.therond.fr

Soit $S_i = (x_i, y_i)_{i=1,..,5}$ les 5 nœuds de départ, où *x* désigne les années et *y* les niveaux de spread. Le problème d'interpolation revient à estimer des couples *(x,y)* intermédiaires, en s'aidant d'une *spline* .

Pour se faire, il convient de résoudre l'équation matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}}_{\text{Matrice A}} \quad \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

Vecteur K *Vecteur B*

Où

$$a_{11} = \frac{2}{x_1 - x_0},\ a_{12} = \frac{1}{x_1 - x_0},\ a_{13} = 0, a_{14} = 0,\ a_{15} = 0$$

$$\forall 1 < i \le 4,\ a_{ii} = 2\left(\frac{1}{x_{i-1} - x_{i-2}} + \frac{1}{x_i - x_{i-1}}\right),\ a_{ii+1} = \frac{1}{x_i - x_{i-1}},\ (a_{ij})_{j > i+1} = 0$$

$$\forall 1 < i, j \le 4,\ (a_{ij})_{j < i} = (a_{ji})_{j > i}$$

$$a_{54} = a_{45} = \frac{1}{x_4 - x_3}, et,\ a_{55} = \frac{2}{x_4 - x_3}$$

$$b_1 = 3\frac{y_1 - y_0}{(x_1 - x_0)^2},\ et,\ \forall 1 < i < 5,\ b_i = 3\frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{(x_{i-1} - x_{i-2})^2} + \frac{y_i - y_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2},\ et,\ b_5 = 3\frac{y_4 - y_3}{(x_4 - x_3)^2}$$

A est donc une matrice symétrique tridiagonale.

Les paramètres k_i se déduisent par la méthode de *Cramer* utilisant le déterminant de *A*, le vecteur *B* étant connu au même titre que A à l'étape ci-dessus.

Pour *N* nœuds initiaux, l'interpolation permettra d'estimer *N-1* morceaux de polynômes constitutifs de la *spline*.

On définit les variables *aa* et *bb* par :

$$\forall\ 1 < i < N\text{-}1,$$

$$\begin{cases} aa_i = k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - (y_i - y_{i-1}) \\ bb_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + (y_i - y_{i-1}) \end{cases}$$

Les coefficients polynomiaux entre les nœuds (x_{i-1}, y_{i-1}) et (x_i, y_i) s'obtiennent comme suit :

$$\begin{cases} Coef^{TermeOrdre3}(i) = \dfrac{aa_i - bb_i}{\left(x_i - x_{i-1}\right)^3},\ monôme\ concerné \equiv (X - x_{i-1})^3 \\ Coef^{TermeOrdre2}(i) = \dfrac{bb_i - 2aa_i}{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2},\ monôme\ concerné \equiv (X - x_{i-1})^2 \\ Coef^{TermeOrdre1}(i) = \dfrac{aa_i + y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ monôme\ concerné \equiv (X - x_{i-1}) \\ Coef^{TermeOrdre0}(i) = y_{i-1},\ monôme\ concerné \equiv la\ cons\tan te \end{cases}$$

La méthode d'interpolation a été implémentée pour un nombre N de nœuds initiaux, avec $N \geq 5$ (cf. code VBA à l' annexe 3).

Le résultat des estimations est présenté dans la suite.

Résultat de l'interpolation par spline cubique des spreads de CDS des maturités manquantes

N° Polynôme	Intervalle		Constante	*2nd* terme	*3ème* terme	*4ème* terme
1	[1,3]	Coefficient	153,2	15,5	0,0	-0,1
		Monôme	1	$(X-1)$	$(X-1)^2$	$(X-1)^3$
2	[3,5]	Coefficient	*183,0*	*13,7*	*-0,9*	*-0,1*
		Monôme	1	$(X-3)$	$(X-3)^2$	$(X-3)^3$
3	[5,7]	Coefficient	*206,1*	*9,0*	*-1,5*	*0,1*
		Monôme	1	$(X-5)$	$(X-5)^2$	$(X-5)^3$
4	[7,10]	Coefficient	*219,3*	*4,7*	*-0,6*	*0,1*
		Monôme	1	$(X-7)$	$(X-7)^2$	$(X-7)^3$

Figure 24 : Les polynômes obtenus pour la *spline* calibrée (source : résultats de notre modèle)

On en déduit les niveaux de spreads suivants pour les maturités manquantes dans le jeu de données initiales (figures 25 et 26).

Maturités interpolées			
Maturité Manquante	*Intervalle*	*Spline Activée*	*Spread Interpolé*
2	[1,3]	1	168
4	[3,5]	2	196
6	[5,7]	3	214
8	[7,10]	4	223
9	[7,10]	4	227

Figure 25 : Interpolation des spreads pour les maturités manquantes (source : résultats de notre modèle)

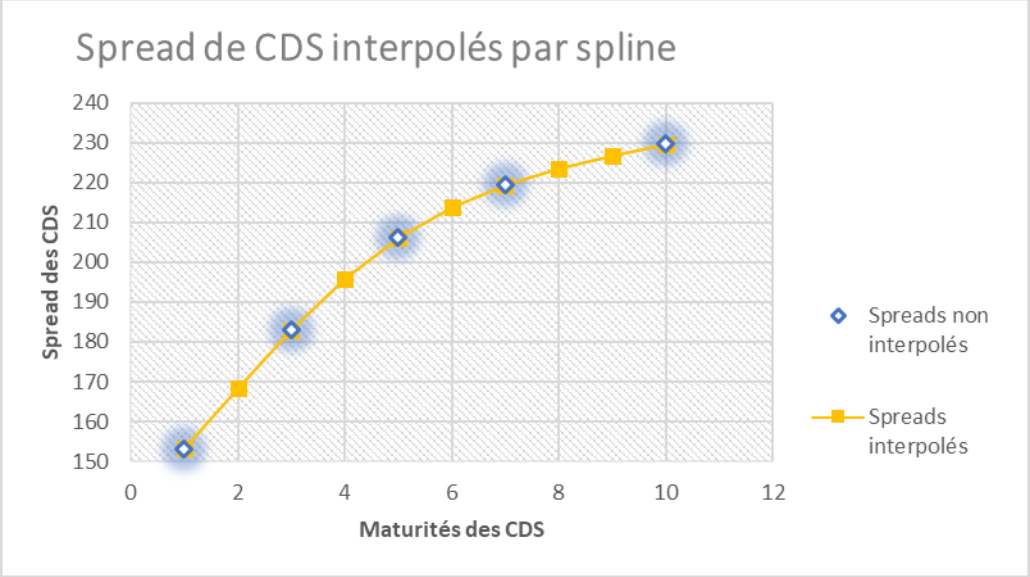


Figure 26 : Fitting des points initiaux et interpolation des spreads de CDS manquants(source : résultats de notre modèle)

Erreur d'estimation

Soit f une fonction réelle quelconque et $I_4 f$ son interpolation par *spline* cubique sur h. De Boor (2001) montre que l'erreur d'interpolation vaut :

$$\left\| f - I_4 f \right\| \leq \frac{1}{16} |h|^4 \left\| f^{(4)} \right\|$$

Avec $f^{(4)}$ la dérivée d'ordre 4 de la fonction f.

La méthode par *spline* a l'avantage de proposer de meilleurs résultats d'interpolation (en termes d'erreurs d'estimation) comparativement à une interpolation linéaire ou à une interpolation polynomiale classique. Cependant, lorsque le fonction f n'est pas connue, il est difficile voire impossible de mesurer l'erreur d'interpolation. Des méthodes heuristiques peuvent être proposées dans ce cas afin de se faire une idée de la qualité du *fitting*. On peut

par exemple retirer itérativement des noeuds intérieurs initiaux et refaire l'interpolation, puis observer comment les nouvelles *splines* se comportent par rapport à la première. Cependant, ces sensibilités ne permettront pas de capter dans l'absolu l'erreur d'estimation entre la *spline* initiale et la vraie fonction f inconnue.

Les lignes ci-dessous fournissent des résultats de sensibilités performées relativement à la *spline* retenue.

La sensibilité *i* consiste à retirer le nœud intérieur *i* et à observer l'erreur commise par rapport à la *spline* initiale.

Dans le jeu de données de l'étude, trois nœuds intérieurs sont disponibles :

- *Nœud intérieur 1* est le point de coordonnées (3;183)
- *Nœud intérieur 2* est le point de coordonnées (5;206)
- *Nœud intérieur 1* est le point de coordonnées (7;219)

	***Spline* estimée**	**Test Retait Nœud 1**	**Test Retait Nœud 2**	**Test Retait Nœud 3**	***Erreur relative 1***	***Erreur relative 2***	***Erreur relative 3***
1	153	153	153	153	0,0%	0,0%	0,0%
2	168	168	169	169	0,1%	0,1%	0,0%
3	183	183	183	183	0,1%	0,0%	0,0%
4	196	196	195	196	0,1%	0,3%	0,0%
5	206	206	205	206	0,0%	0,4%	0,0%
6	214	214	213	214	0,0%	0,3%	0,1%
7	219	219	219	220	0,0%	0,0%	0,2%
8	223	223	224	224	0,0%	0,1%	0,2%
9	227	227	227	227	0,0%	0,1%	0,1%
10	230	230	230	230	0,0%	0,0%	0,0%

Figure 27 : Tests de sensibilité effectués sur la fonction d'interpolation (source : résultats de notre modèle)

On remarque que la *spline* estimée est assez stable. En effet, le fait de retirer un nœud intérieur du jeu de données initial n'altère pas significativement la précision de la *spline* (cf. figure 27 et figure 28).

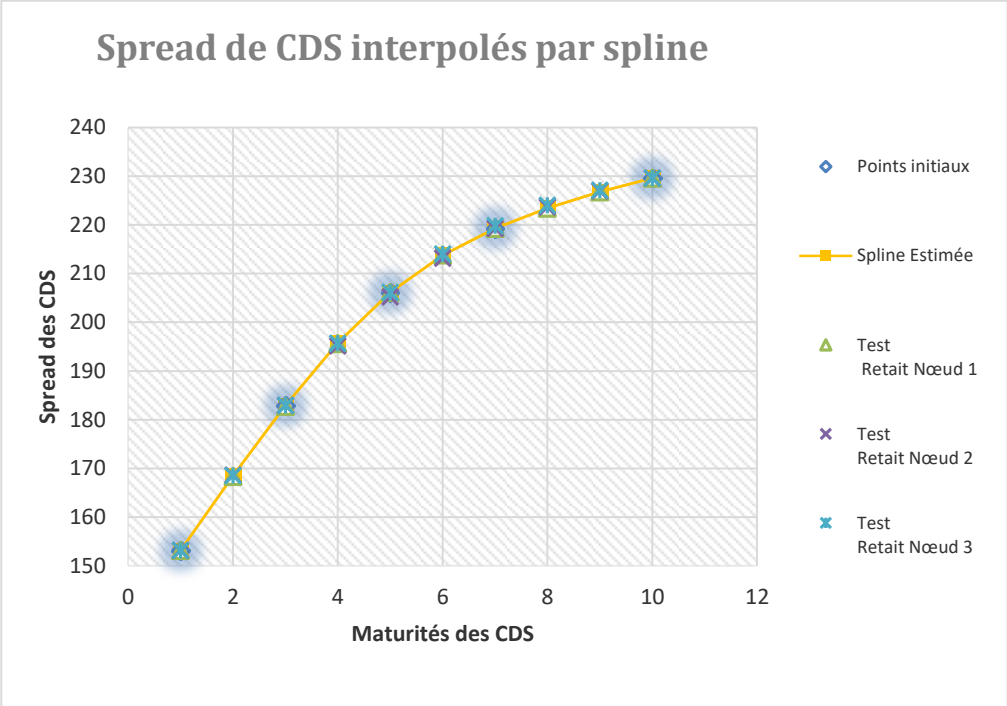


Figure 28 : Sensibilité de la *spline* estimée au retrait d'un nœud intérieur

Résultats du calibrage des probabilités

Ces résultats sont obtenus en appliquant, de façon itérative, l'égalité (2.9) à la courbe des spreads obtenue après interpolation des maturités manquantes. Nous présentons aussi bien les probabilités de survie que les probabilités de défaut et les intensités de défaut (figure 29).

Probabilités de survie						
Date	***Taux de recouvrement***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11/06/2018	40,00%	98,31%	95,69%	92,51%	89,32%	86,04%
12/06/2018	40,00%	98,27%	95,65%	92,46%	89,30%	86,00%
13/06/2018	40,00%	98,26%	95,63%	92,42%	89,23%	85,94%
14/06/2018	40,00%	98,32%	95,76%	92,59%	89,45%	86,17%
15/06/2018	40,00%	98,40%	95,89%	92,81%	89,69%	86,53%
Probabilités de défaut						
Date	***Taux de recouvrement***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11/06/2018	40,00%	1,69%	4,31%	7,49%	10,68%	13,96%
12/06/2018	40,00%	1,73%	4,35%	7,54%	10,70%	14,00%
13/06/2018	40,00%	1,74%	4,37%	7,58%	10,77%	14,06%
14/06/2018	40,00%	1,68%	4,24%	7,41%	10,55%	13,83%
15/06/2018	40,00%	1,60%	4,11%	7,19%	10,31%	13,47%
Taux de hasard (intensités λ)						
Date	***Taux de recouvrement***	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
11/06/2018	40,00%	1,70%	2,70%	3,38%	3,51%	3,74%
12/06/2018	40,00%	1,75%	2,70%	3,39%	3,48%	3,78%
13/06/2018	40,00%	1,75%	2,71%	3,42%	3,51%	3,76%
14/06/2018	40,00%	1,69%	2,64%	3,37%	3,45%	3,74%
15/06/2018	40,00%	1,62%	2,58%	3,26%	3,43%	3,59%

Figure 29 : Résultats du calibrage des probabilités (source : résultats de notre modèle)

Les probabilités de défaut sont des probabilités conditionnelles obtenues pour un taux de recouvrement fixé à 40%.

3.3.2. Calcul des facteurs d'actualisation

Nous proposons trois approches pour calculer les facteurs d'actualisation servant à la valorisation de la *fair-value* des traités. Mais nous n'en retiendrons qu'une seule.

L'approche par le taux technique

Il s'agit de la méthode habituelle utilisée pour la tarification sur le marché primaire, entre l'assureur et l'assuré. Le code des assurances (article A.132-1) définit un taux maximum :

$$TauxTechnique_{\max} = \begin{cases} 75\% TME_{\frac{1}{2}}, \text{ si T} \leq 8\text{ans} \\ Min(60\% TME_{\frac{1}{2}}; 3.5\%), \text{ si T} > 8\text{ans} \end{cases}$$

Où $TME_{\frac{1}{2}}$ désigne le taux moyen des emprunts d'Etat (OAT 10ans) observé sur les 6 derniers mois. T est la durée de la garantie.

Ainsi, le déflateur associé à chaque année de projection $t \in [0,T]$, vaut :

$$D(0,t) = \begin{cases} v^t = \dfrac{1}{(1+TauxTechnique)^t}, \text{ pour une garantie en cas de vie} \\ v^{t+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(1+TauxTechnique)^{t+\frac{1}{2}}}, \text{ pour une garantie en cas de décès} \end{cases}$$

Remarque : le taux technique est constant pour toutes les années de projection.

L'approche par déflateurs déterministes

Ces facteurs d'actualisation sont calculés à partir de la courbe des taux zéros-coupons, sans ajustement de volatilité, fournie par l'EIOPA au 31/12/2017.

Soit $(ZCR_1, ZCR_2, ..., ZCR_t, ..., ZCR_T)$ la structure par termes des taux zéros-coupons.

Pour tout $t \in [0,T]$, le déflateur vaut :

$$D(0,t) = \begin{cases} v^t = \dfrac{1}{(1+ZCR_t)^t}, \text{ pour une garantie en cas de vie} \\ v^{t+\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(1+ZCR_t)^{t+\frac{1}{2}}}, \text{ pour une garantie en cas de décès} \end{cases}$$

L'approche par déflateurs stochastiques

Dans cette approche, le taux 1 an est simulé sur la durée du traité.

$\forall k \in \{0,1,..,T\}$, on admettra que $T_{k+1} - T_k = \Delta_k = 1$, car les projections étudiées dans le cadre de nos travaux sont à pas annuels.

Si $ZCR_1(s, T_k, T_{k+1})$ représente le taux zéro-coupon 1 an dans T_k années, pour un scénario *s* donné, et si $P(s, T_k, T_{k+1})$ est le prix du zéro-coupon associé, alors le déflateur en date *t* telle que $t \geq k+1 > k \geq 0$ pour le scénario *s* vaut :

$$D(0,t) = \begin{cases} v^t = \prod_{k=0}^{t} P(T_k, T_{k+1}), \text{ pour une garantie en cas de vie} \\ v^{t+\frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=0}^{t} P(T_k, T_{k+1}) \right)^{1+\frac{1}{2t}}, \text{ pour une garantie en cas de décès} \end{cases}$$

En effet, dans le cas d'une garantie en cas de décès, l'actualisation s'effectue en milieu d'année et comme :

$$v^t = \prod_{k=0}^{t} P(T_k, T_{k+1}) \Leftrightarrow v = \left(\prod_{k=0}^{t} P(T_k, T_{k+1}) \right)^{\frac{1}{t}}$$

$$\text{alors, } \begin{cases} v^{t+\frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=0}^{t} P(T_k, T_{k+1}) \right)^{1+\frac{1}{2t}} \\ v^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_{k=0}^{t} P(T_k, T_{k+1}) \right)^{\frac{1}{2t}} \end{cases}$$

Les déflateurs retenus

Pour l'ajustement de tarification proposé dans ce mémoire, nous ne retiendrons que les déflateurs déterministes car les flux des engagements assureurs et assurés sont déterministes. En cas de recours à une modélisation stochastique pour le collatéral, par exemple, l'utilisation des déflateurs stochastiques serait fortement recommandée.

On déduit de ce choix que la formule de la *CVA* unilatérale vue à l'égalité (3.10) se réduit à :

$$UCVA = (1 - R^{ec}{}_{Adj}) \sum_{k=1}^{T_N} D(0, T_k) \left(\gamma_t\right)^+ \bar{Q}(T_{k-1}, T_k)$$

$D(0, T_k)$ est le facteur d'actualisation déterministe applicable aux flux $\left(\gamma_t\right)^+$ à la date T_k.

3.4. Résultats de la tarification du risque de défaut du réassureur

3.4.1. CVA unilatérale hors soulte

Pour chacune des garanties commercialisées par l'assureur Sofia et faisant l'objet d'une réassurance, nous utilisons les résultats des estimations précédentes (probabilités de défaut, déflateurs, etc.) pour calculer la *CVA* unilatérale, du point de vue de l'assureur.

Les *CVA* ainsi obtenues sont présentées dans la figure 30. Elles incorporent, le cas échéant, une soulte dont le paiement permet d'assurer la parité du swap de sinistralité à la date de signature du traité.

Garantie	Type de traité	Prime	Maturité	Interpolation	*UCVA* upfront (hors soulte)
Mixte	Quote-Part	PPU	10	*Spline*	470
Mixte	Quote-Part	PPP	10	*Spline*	466
Mixte	Excédent de Plein	PPP	10	*Spline*	466
Temporaire Décès	Quote-Part	PPP	10	*Spline*	120
Temporaire Décès	Excédent de Plein	PPP	10	*Spline*	100

Figure 30 : CVA unilatérale calculée par garantie pour un taux de recouvrement de 40 %

La figure 30 affiche les résultats de la *CVA* unilatérale hors soulte calculée du point de vue de l'assureur Sofia pour les garanties décès et mixtes cédées à la réassurance. Pour chacune des garanties, différents types de traités et de primes sont proposés par le réassureur. Tous les traités ont la même maturité.

Comme vu à la section 3.3.1, l'interpolation par *spline* et le *bootstrapping* des spreads de *CDS* manquants sont utilisés pour déduire les probabilités de défaut implicites du marché.

Le taux de recouvrement utilisé pour le calcul est de 40% (*peers pratcice*[42]), pour un taux de collatéralisation supposé nul.

Partant des *CVA* unilatérales obtenues, on déduira la valeur de la *CVA* au fil de l'eau. Il s'agit du montant qui viendra impacter le prix du traité afin de l'ajuster du prix du risque de défaut du réassureur (cf. section 3.2.3). En effet, la *CVA* se définit comme le prix du risque de défaut d'une contrepartie. Une fois déterminé en date de valorisation *t*, le montant de la *CVA* peut être exigée en intégralité au réassureur en *t* (*UCVA upfront*). On remarque que la *CVA* calculée dans le cadre d'un traité de maturité 1 an est nécessairement égale à une *CVA upfront*, car, dans ce cas, la *CVA* ne peut être lissée que sur 1 an. Pour des produits financiers comme les swaps de maturité supérieure à 1 an, l'intégralité de la valeur de la *CVA* n'est pas exigible en *upfront*. Il est alors recommandé de la lisser sur toute la durée du swap : la part de la *CVA* totale payée annuellement est la *CVA* au fil de l'eau, désignée par l'expression *running CVA* en anglais.

[42] Comme pratiqué par le marché.

Vrins et Gregory, dans *Getting CVA Up and Running*, proposent quelques méthodes de calcul de la *CVA* au fil de l'eau. Dans la suite, la *running CVA* sera affectée d'un signe négatif pour une question d'affichage.

La valeur de la *CVA* doit se mettre à jour annuellement, tant et si bien que la valeur de l'ajustement n'est pas la même entre deux dates de valorisation t et $t+j$, j > 0.

3.4.2. Evolution de la CVA en fonction du taux de recouvrement ajusté

On s'intéresse à présent au comportement de la *CVA* en fonction des paramètres que sont le taux de recouvrement, le taux de collatéralisation et le *haircut* du collatéral. Pour cela, nous définissons la fonction ψ.

$$\begin{aligned} \psi : \quad & \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+ \\ & \left(R^{ec}, c, chc\right) \mapsto \psi\left(R^{ec}, c, chc\right) = UCVA_{Adjust} \end{aligned}$$

Nous reprenons la notion de taux de recouvrement ajusté proposée dans la section sur le calcul de la *CVA* unilatérale (*UCVA*).

Pour rappel, ce taux est fonction de R^{ec}, c et chc et se détermine par la formule :

$$R^{ec}{}_{Adj} = R^{ec} + Min\left((1-chc)c, 1-R^{ec}\right)$$

Dans la suite, nous ne présentons que les résultats des traités en excédent de plein pour les deux garanties (temporaire décès et mixte). Les résultats des traités en quote-part sont disponibles en annexes 4, 5 et 6.

Les graphiques ci-dessous représentent le comportement de la *CVA* unilatérale, hors soulte, en fonction du taux de recouvrement ajusté.

La représentation est effectuée en dimension 3 :

- L'axe de profondeur correspond à celui du taux de recouvrement non ajusté, variant de 0% à 100%.
- L'axe horizontal principal est celui du taux de collatéralisation impacté par le *collateral haircut*. Etant donné qu'il est impossible de visionner le graphique dans un hypercube de dimension 4, nous considérons une valeur figée pour le *collateral haircut*. Les graphiques ont ainsi été construits en considérant un *haircut* arbitraire de 5%.
- L'axe vertical fournit l'ampleur de la *CVA* unilatérale *upfront*, hors soulte.

Résultat pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein

Pour ce swap de sinistralité en excédent de plein, nous utilisons les valeurs numériques suivantes découlant, pour la plupart, de la figure 16 :

- Age de l'assuré : 30 ans

- Maturité : 10 ans
- Table de mortalité : nous utilisons la table TH00-02 du fait de la prépondérance des garanties décès dans les contrats commercialisés par l'assureur Sofia. Cette table est prise sans décalage d'âge.
- Le taux technique : au 31/12/2017, le TME moyen des 6 derniers mois s'élevait à 0,75%. Etant donné que le contrat mixte couvre une période de 10 ans (> 8 ans) alors, le taux technique utilisé pour la tarification du contrat d'assurance sur le marché primaire est de 0,45% ; soit 60% du TME moyen.
- La garantie en cas de décès : le cumul des primes versées à la date du décès.
- La garantie en cas de vie : 4 500 €
- La prime périodique : il découle des caractéristiques du contrat (maturité, taux technique, table de mortalité, etc) et de la formule de tarification du contrat mixte vue à la section 3.2.1 sur le marché primaire que le tarif est égal à 439 €
- Le plein de rétention *R* : fixé arbitrairement à 1 800 €.

La figure 31 ci-dessous donne l'ensemble des flux échangés entre l'assureur Sofia et son réassureur pour le contrat mixte à prime périodique réassuré en excédent de plein.

On rappelle que la jambe de prime est payée par l'assureur et que la jambe de sinistre est versée par le réassureur.

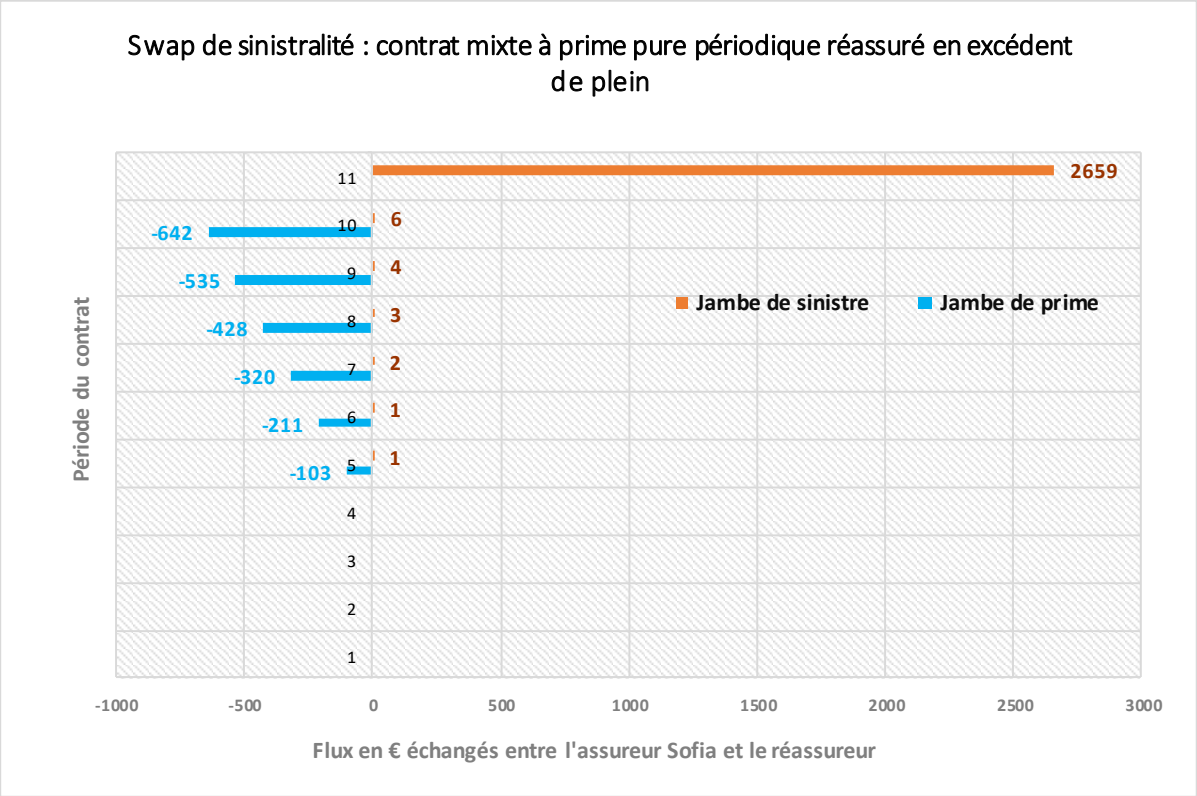


Figure 31 : Flux liés à la réassurance en excédent de plein du contrat mixte à prime pure périodique

Les flux de la jambe de prime sont volontairement affectés d'un signe négatif pour signifier que ces montants sont payés par l'assureur. Le contrat mixte garantit le remboursement des primes périodiques en cas de décès de l'assuré avant le terme du contrat. En cas de survie, l'assuré reçoit un capital.

Pour une entité de référence (l'assuré) âgée de 30 ans, la figure permet d'effectuer les constats suivants :

- Sur la jambe de sinistre :

  On note un flux maximal à l'échéance du contrat. Il s'agit du flux contingent perçu par l'assuré en cas de survie dans 10 ans. Cette valeur maximale est précédée de quelques flux d'un montant faible mais croissant. En effet, entre 0 et 9 ans, la faible probabilité de décès de l'assuré d'âge 30 impacte fortement à la baisse la valeur de l'engagement futur probable du réassureur. Ces flux sont par ailleurs croissants car la charge de sinistre du réassureur est croissante avec le temps, celui-ci devant rembourser le cumul des primes versées en cas de décès.

- Sur la jambe de prime :

  On constate également des flux contingents croissants versés par l'assureur car la charge de sinistre du réassureur est croissante avec le temps. En effet, à mesure que le temps s'écoule, la charge excède le plein de rétention R selon la formule suivante[43], accroissant ainsi la prime cédée proportionnellement au risque couvert par le réassureur :

$$J_p^{\ Y}(t) = \frac{l_{x+t}}{l_x} \frac{\left((t+1)\pi - R\right)^+}{Min\left((t+1)\pi, R\right) + \left((t+1)\pi - R\right)^+} \pi$$

  Où $J_p^{\ Y}(t)$ représente la composante de la jambe de prime versée à t par l'assureur Sofia au réassureur et π la prime pure périodique.

Pour chacune de ces deux jambes, on remarque qu'aucun flux n'est échangé avant le pas de temps $t = 5$ car avant cette date, la charge de sinistre est inférieure au plein de rétention R.

Les expositions nettes positives découlant des jambes du swap (le traité) sont combinées avec les probabilités de défaut et les facteurs d'actualisation calculés précédemment. On obtient ainsi le prix du risque de contrepartie (*UCVA*) pour un taux de recouvrement, un taux de collatéralisation et un *haircut* donnés. Dans la figure 32 ci-dessous, on étudie les variations de *UCVA* en fonction du taux de recouvrement ajusté.

[43] Voir la section 3.2.2, sur la partie consacrée aux traités en excédent de plein.

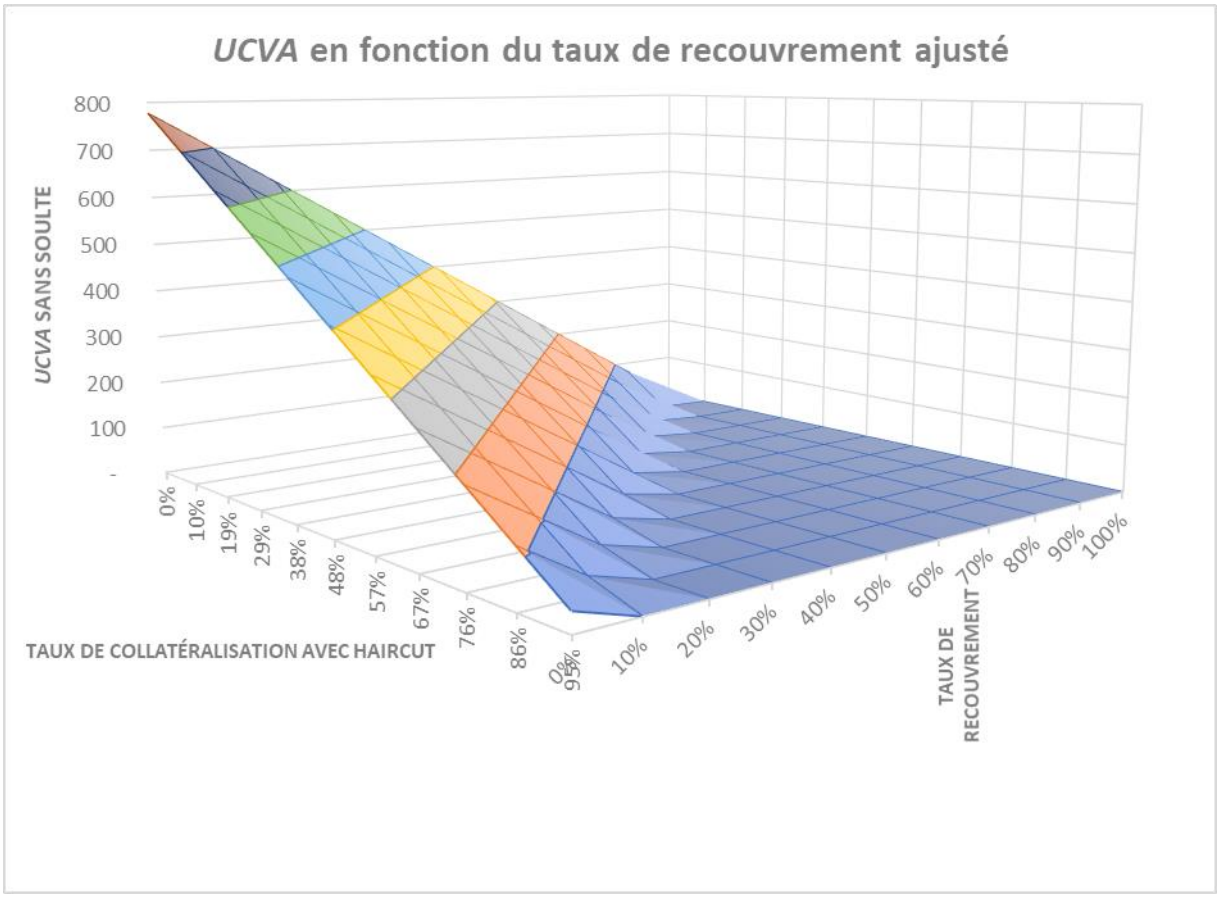


Figure 32 : Variations de UCVA hors soulte en fonction du taux de recouvrement ajusté

La figure 32 confirme que le prix du risque de contrepartie (*UCVA*) est maximal pour l'assureur Sofia lorsque les taux de recouvrement et de collatéralisation sont nuls. Ce prix est une fonction décroissante de ces deux taux. On remarque par ailleurs l'annulation du prix du risque à partir d'un certain seuil. Comme vu à la section 3.2.3, ce seuil est atteint lorsque la relation $(1-chc)c \geq \left(1-R^{ec}\right)$ est satisfaite ; où R^{ec} est le taux de recouvrement, c le taux de collatéralisation et *chc* le *haircut* du collatéral.

Résultats pour la garantie décès à prime pure périodique réassurée en excédent de plein

- Age de l'assuré : 30 ans
- Maturité : 10 ans
- Table de mortalité : nous utilisons la table TH00-02 du fait de la prépondérance des garanties décès dans les contrats commercialisés par l'assureur Sofia. Cette table est prise sans décalage d'âge.
- Le taux technique : il est identique à celui du contrat précédent ; soit 0,45%.
- La garantie en cas de décès : 1 million €.

- La prime périodique : Il découle des caractéristiques du contrat (maturité, taux technique, table de mortalité, etc) et de la formule de tarification du contrat mixte sur le marché primaire que le tarif est égal à 1 540 €

- Le plein de rétention R : fixé arbitrairement à 500 K€.

La figure 33 ci-dessous donne l'ensemble des flux contingents (vus en t) à échanger entre l'assureur Sofia et son réassureur pour la garantie décès à prime périodique réassuré en excédent de plein.

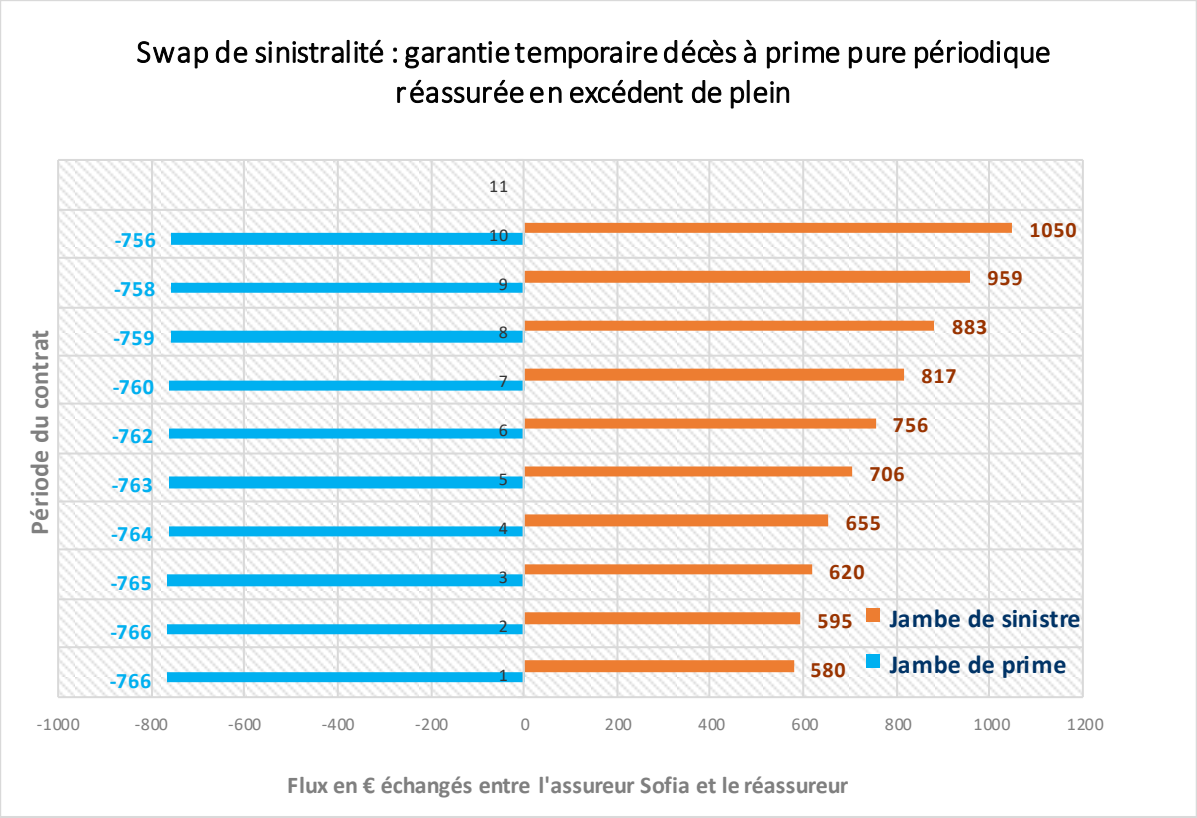


Figure 33 : Flux contingents en t liés à la réassurance en excédent de plein pour la garantie temporaire décès à prime pure périodique

La garantie propose le paiement d'un capital décès en cas de décès de l'assuré avant les 10 prochaines années.

Pour une entité de référence (l'assuré) âgée de 30 ans, la figure 33 permet d'effectuer les constats suivants :

- Sur la jambe de sinistre :

  Le capital décès étant supérieur au plein de rétention, les flux contingents payés par le réassureur sont positifs, strictement, dès la première année du swap. Ces flux sont croissants du fait de la probabilité de décès croissante de la tête assurée.

- Sur la jambe de prime :

  Contrairement au contrat mixte vu précédemment, la temporaire décès offre un capital fixe au bénéficiaire en cas de décès de l'assuré. Ceci, couplé à la faible décroissance de la probabilité de survie de l'assuré entre 30 et 40 ans, justifie la faible décroissance des flux contingents payables par l'assureur à son réassureur.

Les expositions nettes positives découlant des jambes du swap sont combinées avec les probabilités de défaut et les facteurs d'actualisation calculés précédemment. On obtient ainsi le prix du risque de contrepartie (*UCVA*) pour un taux de recouvrement donné et un taux de collatéralisation avec *haircut* donné.

La figure 34, ci-dessous, donne les variations de *UCVA* en fonction du taux de recouvrement ajusté.

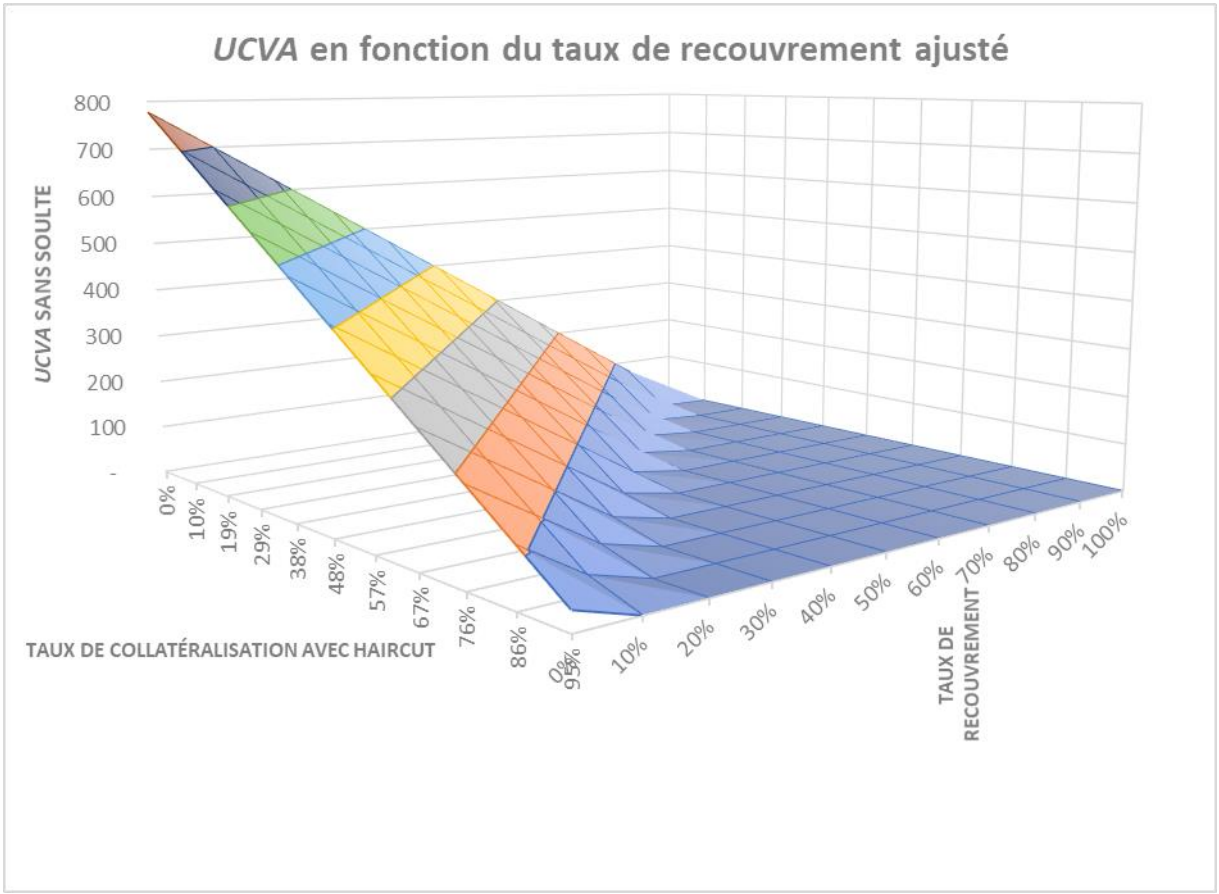


Figure 34 : Variations de UCVA hors soulte en fonction du taux de recouvrement ajusté

Tout comme pour la garantie mixte, la figure 34 montre que le prix du risque de contrepartie atteint son maximum quand les taux de recouvrement et de collatéralisation sont nuls. Ce prix est une fonction décroissante de ces deux paramètres. On remarque aussi l'annulation du prix du risque lorsque la relation $(1-chc)c \geq \left(1-R^{ec}\right)$ est satisfaite.

3.4.3. Présentation détaillée des primes de réassurance ajustées du prix du risque de contrepartie

Les résultats figurant dans les tableaux ci-dessous sont obtenus pour un taux de collatéralisation nul et un taux de recouvrement de 40%.

L'une des idées sous-jacentes à l'hypothèse de collatéral nul est de proposer des tarifs de réassurance renégociés pour les réassureurs ne garantissant aucun collatéral[44] en échange du portefeuille cédé.

- La colonne *« Ajustement du tarif en t = 0 »* donne la *CVA* au fil de l'eau, calculée en date de valorisation *t = 0*, selon les formules vues en section 3.2.3. Il s'agit d'une photographie en date de valorisation des valeurs à déduire du tarif du traité, sur la période du contrat. Cette *CVA* doit être actualisée chaque année.

- La colonne « *Prime pure* » fournit la valeur de la prime d'assurance tarifée sur le marché primaire par l'assureur Sofia.

- Le colonne « *Prime cédée* » donne le tarif de la réassurance, c'est-à-dire la prime reversée par l'assureur Sofia au réassureur afin de bénéficier de la protection contre la sinistralité de l'assuré.

- Le champ « *UCVA upfront (avec soulte)* » donne les valeurs calculées pour la variable *UCVA* ajustée (cf. formule de calcul à la section 3.2.3). Il s'agit du prix du risque de contrepartie (incluant la soulte) à déduire de la prime de réassurance. La déduction se fait par lissage dans le temps, via la *CVA* au fil de l'eau.

- Le champ « *Prix du traité ajusté du risque de contrepartie (Prime cédée ajustée)* » : dans cette colonne figure le tarif du traité ajusté du risque de défaut du réassureur

- Le champ « $\ddot{a}_{30:40}$ » donne la valeur actuelle probable d'une rente temporaire de 10 années à versements de 1 €, effectués d'avance. Cette valeur matérialise la duration des flux de paiement de la *CVA* dans le temps. En divisant la *CVA upfront* par cette duration, on obtient la valeur approchée ε_{proxy} de la *CVA* au fil de l'eau (cf. section 3.2.3).

  La duration $\ddot{a}_{30:40}$ calculée dans le cadre de nos travaux vaut 9,76 ans. Et cela, indépendamment de la nature des garanties cédées car cette duration est uniquement tributaire des probabilités de survie de l'assuré.

[44] Ou encore aux réassureurs offrant peu de collatéral

CAS 1 : Contrat Mixte/ Quote-Part 60%/Prime Unique						
t	$\ddot{a}_{30:10}$	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* upfront (avec soulte)	Ajustement du tarif en t=0	Prix du traité ajusté du risque de contrepartie (Prime cédée ajustée)
0	1,00	4 301	2 580	568	-568	2 012
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0

Figure 35 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure unique réassuré en quote-part

Pour le contrat mixte à prime unique, le paiement de la prime s'effectue uniquement en date *t = 0*. Il ressort des résultats de la figure 35 que l'assureur Sofia devrait négocier un tarif du traité ajusté de la *CVA upfront* pour se couvrir contre un éventuel défaut de l'assureur sur une période d'un an. Cela se traduit par une décote de 568 € appliquée sur une prime cédée de 2 580 €. Ce coût élevé pour le réassureur est justifié par l'absence de collatéral dans les hypothèses de calcul et par l'impossibilité de lissage temporel (prime unique). Ce coût se résorbe progressivement, à mesure que le taux de collatéralisation s'améliore.

La *CVA upfront* ou *CVA* ajustée (telle que désignée dans la section 3.2.3) se décompose en deux éléments : une *CVA* unilatérale *UCVA* sans soulte de valeur 470 € et une soulte négative pour l'assureur Sofia de valeur -98 €.

CAS 2 : Contrat Mixte/ Quote-Part 60%/Prime Pure Périodique						
t	$\ddot{a}_{30:10}$	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* upfront (avec soulte)	Ajustement du tarif en t=0	Prix du traité ajusté du risque de contrepartie (Prime cédée ajustée)
0	9,76	439	263	569	-58	205
1	9,76	439	263	0	-58	205
2	9,76	439	263	0	-58	205
3	9,76	439	263	0	-58	205
4	9,76	439	263	0	-58	205
5	9,76	439	263	0	-58	205
6	9,76	439	263	0	-58	205
7	9,76	439	263	0	-58	205
8	9,76	439	263	0	-58	205
9	9,76	439	263	0	-44	219
10	9,76	0	0	0	0	0

Figure 36 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en quote-part

La prime périodique de 439 € est cédée à 60% au réassureur, comme dans le cas précédent. Il ressort des résultats de la figure 36 que l'ajustement du tarif du traité par la *CVA* au fil de

l'eau devrait s'opérer par une décote annuelle de 58 € de la prime cédée pendant 9 ans, suivie d'une décote de 44 € sur la 10ème année. Ces chiffres sont à mettre à jour chaque année.

La *CVA upfront* se décompose ici en deux éléments : une *CVA* unilatérale (*UCVA*) sans soulte de valeur 466 € et une soulte négative pour l'assureur Sofia d'une valeur de -103 €.

CAS 3 : Contrat Mixte/ Excédent de Plein/Prime Pure Périodique						
t	ä30:10	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* upfront (avec soulte)	Ajustement du tarif en t=0	Prix du traité ajusté du risque de contrepartie (Prime cédée ajustée)
0	9,76	439	0	77	-8	0
1	9,76	439	0	0	-8	0
2	9,76	439	0	0	-8	0
3	9,76	439	0	0	-8	0
4	9,76	439	96	0	-8	88
5	9,76	439	203	0	-8	195
6	9,76	439	310	0	-8	302
7	9,76	439	417	0	-8	409
8	9,76	439	524	0	-8	516
9	9,76	439	631	0	-6	625
10	9,76	439	0	0	0	0

Figure 37 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein

La *CVA* au fil de l'eau s'élève ici à un montant annuel de 8 € sur 9 ans et 6 € sur la 10ème année de prime. On constate que du fait de l'absence de prime cédée avant les 4 premières années (car la charge de sinistre est inférieure au plein de rétention sur cette période), le premier ajustement de la prime cédée non nulle devrait s'opérer à l'année 5. Le prix du traité ajusté du risque de contrepartie recommandé à l'assureur Sofia sera alors de 88 €, au lieu de 96 €, et il croîtrait jusqu'à 625 € à la 10ème année de prime, au lieu de 631 €.

La *CVA upfront* affichée se décompose en deux éléments : une *CVA* unilatérale sans soulte de valeur 467 € et une soulte positive pour l'assureur Sofia de valeur 390 €.

CAS 4 : Garantie Temporaire Décès/ Quote-Part 60%/Prime Pure Périodique						
t	ä30:10	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* upfront (avec soulte)	Ajustement du tarif en t=0	Prix du traité ajusté du risque de contrepartie (Prime cédée ajustée)
0	9,76	1 540	924	120	-12	912
1	9,76	1 540	924	0	-12	912
2	9,76	1 540	924	0	-12	912
3	9,76	1 540	924	0	-12	912
4	9,76	1 540	924	0	-12	912
5	9,76	1 540	924	0	-12	912
6	9,76	1 540	924	0	-12	912
7	9,76	1 540	924	0	-12	912
8	9,76	1 540	924	0	-12	912
9	9,76	1 540	924	0	-9	915
10	9,76	0	0	0	0	0

Figure 38 : Résultats pour la garantie décès à prime pure périodique réassurée en quote-part

La duration reste identique aux cas précédents et la valeur de la *CVA* au fil de l'eau s'élève annuellement à 12 € sur 9 ans et à 9 € sur la 10ème année. La prime à céder devrait de ce fait valoir 912 € sur les 9 premières années du traité, puis 915 € en dernière année.

Ici, la *CVA upfront* ou ajustée équivaut à la une *CVA* unilatérale sans soulte, car la soulte est nulle.

CAS 5 : Garantie Temporaire Décès/ Excédent de Plein/Prime Pure Périodique						
t	ä30:10	Prime pure	Prime cédée	*UCVA* upfront (avec soulte)	Ajustement du tarif en t=0	Prix du traité ajusté du risque de contrepartie (Prime cédée ajustée)
0	9,76	1 540	770	100	-10	760
1	9,76	1 540	770	0	-10	760
2	9,76	1 540	770	0	-10	760
3	9,76	1 540	770	0	-10	760
4	9,76	1 540	770	0	-10	760
5	9,76	1 540	770	0	-10	760
6	9,76	1 540	770	0	-10	760
7	9,76	1 540	770	0	-10	760
8	9,76	1 540	770	0	-10	760
9	9,76	1 540	770	0	-8	762
10	9,76	0	0	0	0	0

Figure 39 : Résultats pour la garantie décès à prime pure périodique réassurée en excédent de plein

La *CVA upfront* est à lisser sur 10 années, à raison de 10 € par an sur les 9 premières années, et 8 € sur la 10ème année. La prime cédée sans ajustement pour risque de défaut s'élève à 770 €.

Comme dans le cas précédent, la soulte est de valeur nulle. Par conséquent, la *CVA* ajustée est aussi égale à la *CVA* unilatérale hors soulte.

Conclusion

A travers ce mémoire, nous avons proposé un modèle de tarification d'un contrat de réassurance vie incorporant le risque de défaut du réassureur. En effet, la valorisation traditionnelle d'un traité n'inclut pas directement la probabilité de défaut des contreparties. Ce qui peut paraître injustifié quand on sait, d'une part, l'ampleur des sinistres causés par les catastrophes naturelles récentes, et, d'autres part, le nombre d'assureurs ayant fait faillite au cours des dernières années.

Certes, la réglementation impose à l'assureur de constituer un capital visant à se prémunir contre un défaut éventuel du réassureur. Cependant, ce capital n'est jamais plus qu'une immobilisation de fonds propres permettant à l'assureur de faire face à ses obligations vis-à-vis des assurés et ne protège donc pas directement contre le réassureur. Pour se couvrir contre le défaut du réassureur, l'assureur pourrait exiger un collatéral en échange du portefeuille des contrats cédés. Cependant, la marge de manœuvre dont dispose l'assureur en la matière est faible. Et pour cause ; la réglementation européenne (directive réassurance 2005/68/CE) est défavorable à l'exigibilité du collatéral.

Afin de proposer une tarification incluant le risque de défaut du réassureur, nous avons modélisé le contrat de réassurance sous l'angle d'un swap de sinistralité. Pour ce faire, une analogie a été établie entre le contrat de réassurance et un *CDS* (*Credit Default Swap*). Ce raisonnement nous a ensuite permis de caractériser le swap de sinistralité, d'en spécifier la valeur théorique avant ajustement par le risque de défaut et de proposer un cadre de modélisation pour le prix du défaut.

Ensuite, l'ajustement du tarif de la réassurance au risque de défaut s'est fait en s'aidant de la notion de *CVA* (*Credit Valuation Adjustment*). Il s'agit d'un artifice dont la particularité est de capturer le prix du risque de défaut d'une contrepartie. La *CVA* est très utilisée en banque en matière de valorisation des produits dérivés échangés de gré à gré. Elle permet, en effet, de répercuter le prix du risque (la *CVA*) sur la valeur sans risque de ces produits et ainsi d'en déterminer le prix risqué. En dehors des paramètres actuariels nécessaires au calcul de la *CVA* pour nos swaps de sinistralité, nous avons eu besoin de calibrer des probabilités de défaut sur la période du contrat en nous servant des spreads de *CDS*.

L'application de la *CVA* s'est faite en considérant cinq traités de réassurance sur la vie :

- Un traité en quote-part portant sur un contrat mixte à prime pure unique
- Un traité en quote-part portant sur un contrat mixte à prime pure périodique
- Un traité en excédent de plein relatif à un contrat mixte à prime pure périodique
- Un traité en quote-part sur une garantie décès à prime pure périodique
- Un traité en excédent de plein sur une garantie décès à prime pure périodique

Le mémoire montre que le risque de contrepartie est complétement neutralisé (*CVA* nulle) dès lors que le *Loss Given Default*[45]est dominé par le taux de collatéralisation réduit du *haircut*. Cependant, étant donné l'inexigibilité[46] du collatéral, l'ajustement proposé par le mémoire pourrait servir lors de la négociation des tarifs de réassurance, notamment face aux réassureurs fournissant peu ou pas de collatéral. Par ailleurs, la *CVA* atteint son maximal en absence de collatéral, pour un taux de recouvrement nul.

Pour chacun des cinq swaps de sinistralité énumérés ci-dessus, la *CVA* calculée a été lissée dans le temps pour obtenir une *CVA* au fil de l'eau, dont le montant prélevé annuellement, constitue l'ajusteur de la prime de réassurance par le risque de défaut. Dans le cas d'un contrat à prime unique, cette valeur est maximale du fait du prélèvement en une seule fois de la valeur de la *CVA*. La *CVA* au fil de l'eau doit être mise à jour chaque année.

La méthode de tarification proposée est applicable à tout contrat prévoyant des échanges de flux entre deux contreparties. Par voie de conséquence, son application est extensible à des domaines tels que la réassurance non vie, les swaps de longévité ou encore les Cat Bonds. En matière de tarification traditionnelle de produits d'assurance entre l'assureur et l'assuré, l'assuré pourrait exiger que sa prime d'assurance soit corrigée du risque de défaut de l'assureur.

[45] Le pourcentage de pertes en cas de défaut, matérialisé par un moins le taux de recouvrement.

[46] Le système de collatéral n'a plus lieu d'être depuis la transposition en droit français de la directive réassurance 2005/68/CE approuvée par le parlement européen le 7 juin 2005.

Table des illustrations

Figure 1 : Similitudes entre un *CDS* et un traité de réassurance 8

Figure 2 : Caractéristiques des contrats étudiés 9

Figure 3 : Nappe de *CVA* en fonction du taux de recouvrement ajusté 11

Figure 4 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein 12

Figure 5 : Synopsis des acteurs de la réassurance 24

Figure 6 : Les 10 premiers réassureurs mondiaux en 2017 par primes brutes émises en Mds $. 26

Figure 7 : Evolution du chiffre d'affaires mondial de la réassurance de 1997 à 2017 27

Figure 8 : Dommages assurés dus aux catastrophes de 1970 à 2017 27

Figure 9 : Acceptations non vie 2017 par branche d'activité, incluant la garantie d'Etat CCR (Source : APREF) .. 28

Figure 10 : Acceptations non vie 2017 par type de traité, incluant la garantie d'Etat CCR (Source : APREF) 29

Figure 11 : Acceptations vie 2017 par branche d'activité (Source : APREF) 29

Figure 12 : Acceptations vie 2017 par type de traité (Source : APREF) 30

Figure 13 : Modèle Structurel de Merton (source : Crouhy et al., *A comparative analysis of current credit risk models, Journal of Banking and Finance*, 2000 [59-117]) 33

Figure 14 : Lien entre la fréquence de défaut attendue et la distance au défaut dans le modèle KMV 36

Figure 15 : Similitudes entre un *CDS* et un traité de réassurance 59

Figure 16 : Caractéristiques des contrats vendus par l'assureur Sofia 64

Figure 17 : Prestation du réassureur en fonction de l'ampleur du sinistre 70

Figure 18 : Représentation de la charge de sinistre du réassureur 73

Figure 19 : Swap de sinistralité entre l'assureur et le réassureur 78

Figure 20 : Cotation des spreads de CDS en points de base (*bp*) pour l'entité de référence Sofia (source : données de marché adaptées à notre modèle) 95

Figure 21 : Cotation des spreads de CDS de Sofia (Source : données de marché adaptées à notre modèle) 95

Figure 22 : Courbe des taux sans risque au 28 décembre 2017 (source : EIOPA) 96

Figure 23 : Spreads de CDS – nœuds d'interpolation initiaux 97

Figure 24 : Résultat du calibrage des spreads par une *spline* cubique (source : résultats de notre modèle) 99

Figure 25 : Interpolation des spreads pour les maturités manquantes (source : résultats 100

Figure 26 : Fitting des points initiaux et interpolation des spreads de CDS manquants(source : résultats de notre modèle) 100

Figure 27 : Tests de sensibilité effectués sur la fonction d'interpolation (source : résultats de notre modèle) ... 101

Figure 28 : Sensibilité de la *spline* estimée au retrait d'un nœud intérieur 102

Figure 29 : Résultats du calibrage des probabilités (source : résultats de notre modèle) 102

Figure 30 : CVA unilatérale calculée par garantie pour un taux de recouvrement de 40 % 105

Figure 31 : Flux liés à la réassurance en excédent de plein du contrat mixte à prime pure périodique 107

Figure 32 : Variations de UCVA hors soulte en fonction du taux de recouvrement ajusté 109

Figure 33 : Flux contingents en t liés à la réassurance en excédent de plein pour la garantie temporaire décès à prime pure périodique 110

Figure 34 : Variations de UCVA hors soulte en fonction du taux de recouvrement ajusté 111

Figure 35 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure unique réassuré en quote-part..... 113

Figure 36 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en quote-part..... 113

Figure 37 : Résultats pour le contrat mixte à prime pure périodique réassuré en excédent de plein 114

Figure 38 : Résultats pour la garantie décès à prime pure périodique réassurée en quote-part 115

Figure 39 : Résultats pour la garantie décès à prime pure périodique réassurée en excédent de plein 115

Annexe 0 : Quelques défauts d'assureurs

- Quelques cas de défauts en assurance[47]

Compagnies (1/2)	Année de défaut (1/2)	Compagnies (2/2)	Année de défaut (2/2)
AA Mutual International Insurance Services Ltd	01/05/2007	UIC Insurance Company Ltd	12/08/1996
Alpha Insurance A/S	11/05/2018	Gable Insurance AG	22/11/2016
Andrew Weir Insurance Company Ltd	12/11/1992	Highlands Insurance Company (UK) Ltd	01/11/2007
Anglo American Insurance Company Ltd	10/03/1997	HIH Casualty and General Insurance Company Ltd	16/03/2001
BAI Ltd (Builders Accident)	30/07/1998	Horizon Insurance Company Ltd	19/12/2018
Balva AAS Insurance	04/07/2014	Independent Insurance Company Ltd	18/06/2001
Bermuda Fire and Marine Insurance Company Ltd	16/12/1994	KWELM Group of Companies	17/11/1993
Black Sea and Baltic General Insurance Company Ltd	24/08/1998	Lemma Europe Insurance Company Limited	05/10/2012
Bryanston Insurance Company Ltd	23/03/1992	Marina Mutual Insurance Association Ltd	14/11/1997
CBL	2018	Millburn Insurance Company Ltd	11/12/2013
Chester Street Insurance Holdings Ltd	09/01/2001	Municipal General Insurance Ltd	09/03/1994
Continental Assurance Company of London plc	27/03/1992	North Atlantic Insurance Company Ltd	06/03/1997
Cotton Trades	N/A	OIC Run Off Ltd / London and Overseas	21/10/1994
Drake Insurance plc	11/05/2000	Pacific and General Insurance Company Ltd	15/11/1985
EISL	2017	Paramount Insurance Company Ltd	24/06/1996
Elite	2017	Qudos Insurance A/S	20/12/2018
English and American Insurance Company Ltd	19/03/1993	Scan Re Insurance Company Ltd	10/03/1994
Enterprise Insurance Company PLC	28/07/2016	SFS	2018
Eurolife Assurance (International)Ltd	24/04/2009	Sovereign Marine and General Insurance Company Ltd	11/07/1997
European Risk Insurance Company hf.	28/04/2014	The Aldgate Insurance Company Ltd	12/11/2009
Trinity Insurance Company Ltd	23/03/1992	The Exchange Insurance Company Ltd	06/10/2010

Les compagnies Alpha, Qudos, Gable, CBL, EISL, Elite et SFS opéraient sur le marché de l'assurance construction. Elles travaillaient en libre prestation de service (LPS).

[47] Liste disponible sur le site du *Financial Services Compensation Scheme* : https://www.fscs.org.uk/what-we-cover/insurance/insurance-insolvencies

- **Exemple chiffré de défauts**

Le graphique ci-dessous est tiré des travaux de Roger Massey et *al*., dans « *Insurance Company Failure* ».

La base de données utilisée est constituée de 700 compagnies d'assurance ayant fait faillite sur une période de 35 ans, de 1966 à 2002. Les entreprises recensées sont de différentes nationalités et les raisons des faillites sont diverses et variées.

Source : Roger Massey et al. , « Insurance Company Failure »

Annexe 1 : Rappel des nombres de commutation

Pour un assuré d'âge x, on définit les nombres de commutation suivants, selon le type de garantie proposé par l'assureur :

- Pour les garanties en cas de vie :
  - D_x est le premier nombre de commutation vie

$$D_x = l_x v^x$$

Avec l_x le nombre de survivants d'âge *x* lu dans une table de mortalité, et v^x le facteur d'actualisation calculé pour les flux à venir en année de projection *x*.

  - N_x est le second nombre de commutation vie

$$N_x = \sum_{k=0}^{w-x} D_{x+k}$$

Où *w* est l'âge maximal atteignable avec la table de mortalité.

- S_x est le troisième nombre de commutation vie

$$S_x = \sum_{k=0}^{w-x} N_{x+k}$$

- Pour les garanties en cas de décès :
  - C_x est le premier nombre de commutation décès

$$C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}}$$

Avec $d_x = l_x - l_{x+1}$, le nombre de décès d'individus d'âge *x* au bout d'une année, tel que lu dans une table de mortalité, et $v^{x+\frac{1}{2}}$ le facteur d'actualisation calculé pour les flux de sinistres à venir en année de projection *x*. En effet, les sinistres survenant en cours de projection, pour un exercice comptable $[t, t+1]$ donné, sont actualisés en milieu d'année.

  - M_x est le second nombre de commutation décès

$$M_x = \sum_{k=0}^{w-x} C_{x+k}$$

  - R_x est le troisième nombre de commutation décès

$$R_x = \sum_{k=0}^{w-x} M_{x+k}$$

Annexe 2 : Démonstration détaillée de la tarification du contrat mixte

Tarification en prime unique pure

La garantie décès

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}} \pi + \frac{l_{x+1} - l_{x+2}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{1+\frac{1}{2}}} \pi + \ldots + \frac{l_{x+N-1} - l_{x+N}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{N-1+\frac{1}{2}}} \pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{d_x}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}} \pi + \frac{d_{x+1}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{1+\frac{1}{2}}} \pi + \ldots + \frac{d_{x+N-1}}{l_x} \frac{1}{(1+i)^{N-1+\frac{1}{2}}} \pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{d_x}{l_x} v^{\frac{1}{2}} \pi + \frac{d_{x+1}}{l_x} v^{1+\frac{1}{2}} \pi + \ldots + \frac{d_{x+N-1}}{l_x} v^{N-1+\frac{1}{2}} \pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d_{x+k} v^{x+k+\frac{1}{2}}}{l_x v^x} \pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} C_{x+k}}{D_x}\pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}\pi$$

La garantie en cas de vie

$$VAP^2_{Assureur} = \frac{l_{x+N}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^N}C$$

$$VAP^2_{Assureur} = \frac{l_{x+N}v^{x+N}}{l_x v^x}C$$

$$VAP^2_{Assureur} = \frac{D_{x+N}}{D_x}C$$

La garantie totale

$$VAP_{Assureur} = VAP^1_{Assureur} + VAP^2_{Assureur}$$

$$VAP_{Assureur} = \frac{D_{x+N}}{D_x}C + \frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}\pi$$

Engagement côté assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi$$

Le tarif

$$VAP_{Assureur} = VAP_{Assuré}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi = C\frac{D_{x+N}}{D_x - M_x + M_{x+N}}$$

Tarification en prime pure périodique

La garantie décès

$$VAP^1_{Assureur} = \frac{d_x}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}\pi + \frac{d_{x+1}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{1+\frac{1}{2}}}2\pi + \ldots + \frac{d_{x+N-1}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^{N-1+\frac{1}{2}}}N\pi$$

$$VAP^1_{Assureur} = \pi\left(\frac{d_x v^{x+0+\frac{1}{2}}}{l_x v^x} + 2\frac{d_{x+1}v^{x+1+\frac{1}{2}}}{l_x v^x} + 3\frac{d_{x+2}v^{x+2+\frac{1}{2}}}{l_x v^x} + \ldots + N\frac{d_{x+N-1}v^{x+N-1+\frac{1}{2}}}{l_x v^x}\right)$$

$$VAP^1_{Assureur} = \pi\left(\frac{C_x}{D_x} + 2\frac{C_{x+1}}{D_x} + 3\frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots + N\frac{C_{x+N-1}}{D_x}\right)$$

$$VAP^1_{Assureur} = \pi\left(\begin{array}{l}\frac{C_x}{D_x}+\frac{C_{x+1}}{D_x}+\frac{C_{x+2}}{D_x}+\ldots+\frac{C_{x+N-1}}{D_x}\\ \quad +\frac{C_{x+1}}{D_x}+\frac{C_{x+2}}{D_x}+\frac{C_{x+3}}{D_x}+\ldots+\frac{C_{x+N-1}}{D_x}\\ \quad +\frac{C_{x+2}}{D_x}+\frac{C_{x+3}}{D_x}+\frac{C_{x+4}}{D_x}+\ldots+\frac{C_{x+N-1}}{D_x}\\ \quad +\ldots+\frac{C_{x+N-2}}{D_x}+\frac{C_{x+N-1}}{D_x}\\ \quad +\frac{C_{x+N-1}}{D_x}\end{array}\right\}\text{N fois}$$

$$VAP^1_{Assureur} = \pi\left(\frac{M_x - M_{x+N}}{D_x}+\frac{M_{x+1}-M_{x+N}}{D_x}+\frac{M_{x+2}-M_{x+N}}{D_x}+\ldots+\frac{M_{x+N-2}-M_{x+N}}{D_x}+\frac{M_{x+N-1}-M_{x+N}}{D_x}\right)$$

$$VAP^1_{Assureur} = \pi\left(\frac{M_x + M_{x+1}+M_{x+2}+\ldots+M_{x+N-2}+M_{x+N-1}-N.M_{x+N}}{D_x}\right)$$

$$VAP^1_{Assureur} = \pi\left(\frac{R_x - R_{x+N}-N.M_{x+N}}{D_x}\right)$$

La garantie en cas de vie

$$VAP^2_{Assureur} = \frac{l_{x+N}}{l_x}\frac{1}{(1+i)^N}C$$

$$VAP^2_{Assureur} = \frac{D_{x+N}}{D_x}C$$

La garantie totale

$$VAP_{Assureur} = VAP^1_{Assureur} + VAP^2_{Assureur}$$

$$VAP_{Assureur} = \pi\left(\frac{R_x - R_{x+N}-N.M_{x+N}}{D_x}\right)+\frac{D_{x+N}}{D_x}C$$

Engagement côté assuré

$$VAP_{Assuré} = \pi + \pi\frac{l_{x+1}}{l_x}v^1 + \pi\frac{l_{x+2}}{l_x}v^2 + \ldots + \pi\frac{l_{x+N-1}}{l_x}v^{N-1}$$

$$VAP_{Assuré} = \pi\sum_{k=0}^{N-1}\frac{l_{x+k}v^{x+k}}{l_x v^x}$$

$$VAP_{Assuré} = \pi\sum_{k=0}^{N-1}\frac{l_{x+k}v^{x+k}}{l_x v^x}$$

$$VAP_{Assuré} = \pi\sum_{k=0}^{N-1}\frac{D_{x+k}}{D_x}$$

$$VAP_{Assuré} = \pi \frac{N_x - N_{x+N}}{D_x}$$

Le tarif

$$VAP_{Assureur} = VAP_{Assuré}$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi = C \frac{D_{x+N}}{N_x - N_{x+N} - R_x + R_{x+N} + N.M_{x+N}}$$

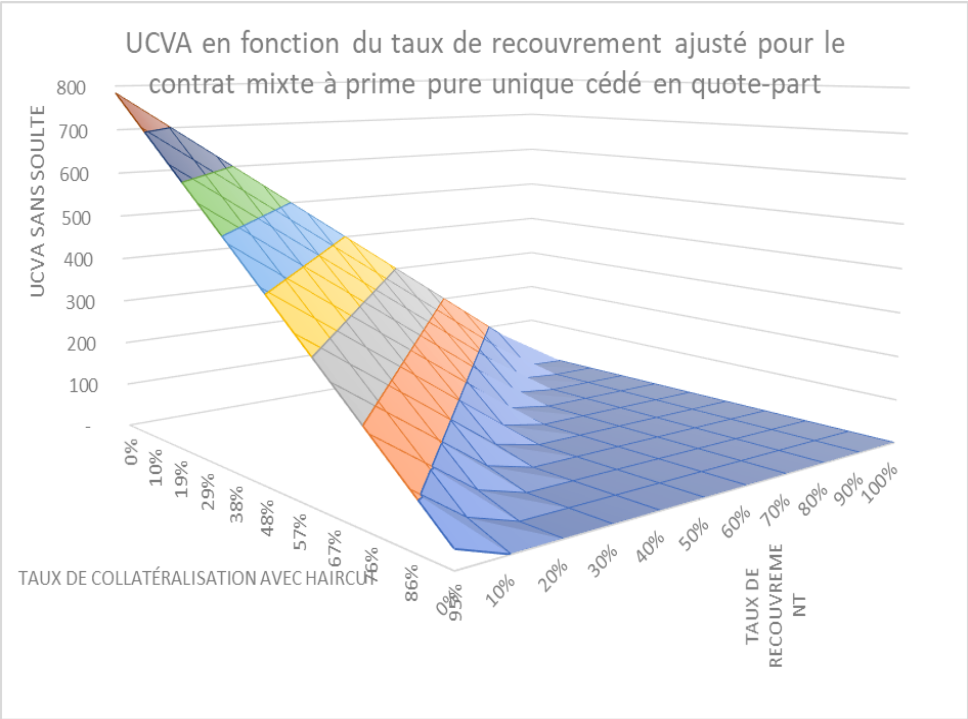
Annexe 3 : Notre algorithme VBA de l'interpolation par *splines* cubiques

```
Sub S_Cubique()
Dim wksht As Worksheet, wkshtqx As Worksheet, wkshtm As Worksheet
Dim wkbk As Workbook
Dim NbElements As Long, row1 As Long, row2 As Long, i As Long, nq As Long, Nb_qx As Long, j As Long,
vv As Long
ReDim x(0 To 1000) As Double, y(0 To 1000) As Double, b(1 To 1000) As Double
ReDim a(1 To 1000, 1 To 1000) As Double
ReDim aa(1 To 1000) As Double, bb(1 To 1000) As Double, K(0 To 1000) As Double, determA(1 To 1000) As
Double, range_mat(1 To 1000) As Variant
Dim coefx0 As Double, coefx1 As Double, coefx2 As Double, coefx3 As Double
Dim range_matr As Range
Dim determAa As Double

Set wkbk = Workbooks("My Cubic Spline Interpolation.xls")
Set wksht = wkbk.Worksheets("Points_Initiaux")
Set wkshtqx = wkbk.Worksheets("qx_functions")
Set wkshtm = wkbk.Worksheets("EMatrices_AK=B")

'Effaçage des données dans la feuille "EMatrices_AK=B"
wkshtm.Select; Cells.ClearContents ;
wkshtqx.Select; Cells.ClearContents

'Activation Feuil1
wksht.Activate

Cells(2, 1).Select
row1 = Selection.Row
row2 = Cells(2, 1).End(xlDown).Row

NbElements = row2 - row1 + 1
For i = 1 To NbElements
x(i - 1) = Cells(1 + i, 1).Value
y(i - 1) = Cells(1 + i, 2).Value
Next i

"Construction de la matrice symétrique des coef Amn des Kj,j=0...n-1
'Activation "EMatrices_AK=B"
wkshtm.Activate
For i = 1 To NbElements
For j = 1 To NbElements
a(i, j) = 0
wkshtm.Cells(i, j).Value = a(i, j)
Next j
Next i

'Remplissage 1ère ligne de la matrice A et du vecteur B
```

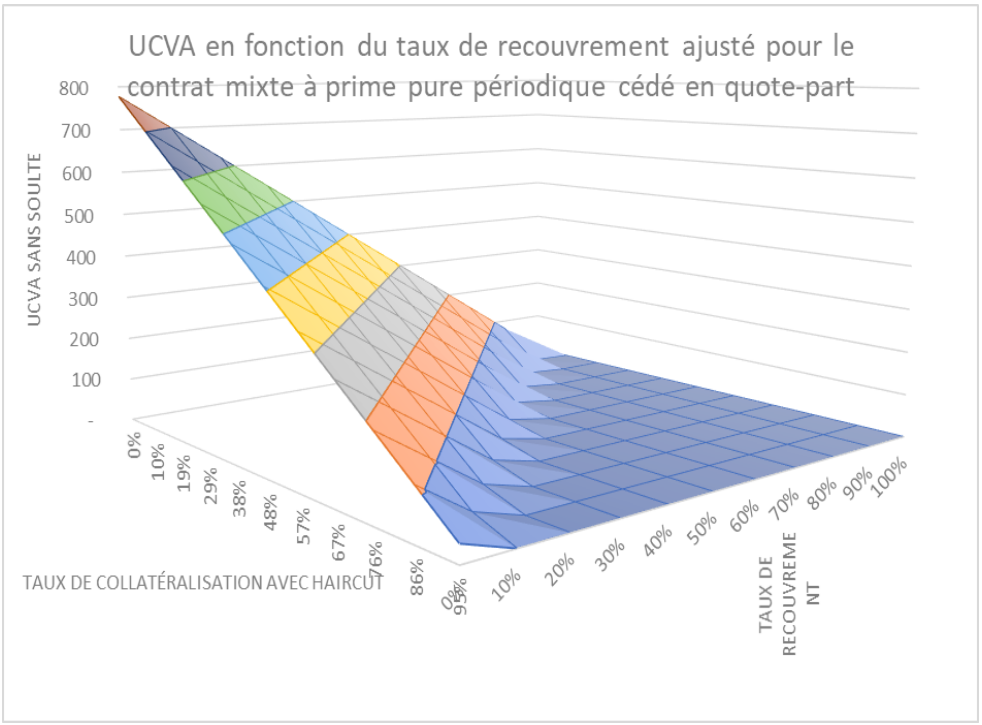
```
a(1, 1) = 2 / (x(1) - x(0))
a(1, 2) = 1 / (x(1) - x(0))
b(1) = 3 * (y(1) - y(0)) / ((x(1) - x(0)) ^ 2)

'Remplissage dernière ligne de la matrice A et du vecteur B
a(NbElements, NbElements - 1) = 1 / (x(NbElements - 1) - x(NbElements - 2))
a(NbElements, NbElements) = 2 / (x(NbElements - 1) - x(NbElements - 2))

b(NbElements) = 3 * (y(NbElements - 1) - y(NbElements - 2)) / ((x(NbElements - 1) - x(NbElements - 2)) ^ 2)

'Remplissage des lignes intermédiaires de la matrice A et du vecteur B
For i = 2 To NbElements - 1 'en dehors des extrêmes, on a trois éléments non nuls par ligne
'le 2ème indice j dans a(i,j)doit donc varier de(i - 1) à (i + 1)
a(i, i - 1) = 1 / (x(i - 1) - x(i - 2))
a(i, i) = 2 * (1 / (x(i - 1) - x(i - 2)) + 1 / (x(i) - x(i - 1)))
a(i, i + 1) = 1 / (x(i) - x(i - 1))

b(i) = 3 * ((y(i - 1) - y(i - 2)) / ((x(i - 1) - x(i - 2)) ^ 2) + (y(i)
- y(i - 1)) / ((x(i) - x(i - 1)) ^ 2))
Next i

‘Calcul des réels K0, K1,…,Kn-1, via la résolution de l'équation AK=B
'Pour rappel, il s'agit respectivement des nombres dérivés de q1(x) en x0 pour K0, q1'(x1) =q2'(x1) =K1, q2'(x2)
=q3'(x2) =K2, ...
wkshtm.Activate

For j = 1 To NbElements 'ici la matrice sera tjrs carrée,donc i et j partent tous 2 de 1 à NbElements
wkshtm.Cells(1, j + 1).Value = "C" & j 'remplissage des noms de colonnes
wkshtm.Cells(j + 1, 1).Value = "L" & j 'remplissage des noms de lignes
Next j

For i = 1 To NbElements
For j = 1 To NbElements
wkshtm.Cells(i + 1, j + 1).Value = a(i, j)
Next j
Next i

Set range_matr = Range(Cells(2, 2), Cells(NbElements + 1, NbElements + 1))
determAa = WorksheetFunction.MDeterm(range_matr)

For j = 1 To NbElements
For i = 1 To NbElements
Cells(i + 1, j + 1).Value = b(i) 'passage du vecteur b() à la jème colonne de A pour Cramer
If j > 1 Then
For vv = 1 To j - 1
Cells(i + 1, vv + 1).Value = a(i, vv) 'on conserve les valeurs des colonnes précédentes pour le Cramer, afin de ne
pas annuler le déterminant
Next vv
End If

Next i
range_mat(j) = Range(Cells(2, 2), Cells(NbElements + 1, NbElements + 1))
determA(j) = WorksheetFunction.MDeterm(range_mat(j))

K(j - 1) = determA(j) / determAa 'calcul des coef K0,K1,...,Kn-1

'Mettre les 2 lignes ci-dessous en comm après ce test
wkshtm.Cells(20 + j, 1).Value = "K" & (j - 1)
wkshtm.Cells(20 + j, 2).Value = K(j - 1)
Next j
```

```
Nb_qx = NbElements - 1 'nombre de fonctions q(x)entre les noeuds. Si NbElements (xi,yi) alors NbElements-1 qi(x)

For nq = 1 To Nb_qx
aa(nq) = K(nq - 1) * (x(nq) - x(nq - 1)) - (y(nq) - y(nq - 1))
bb(nq) = -K(nq) * (x(nq) - x(nq - 1)) + (y(nq) - y(nq - 1))
Next nq


'traitements dans la feuille qx_functions
wkshtqx.Activate
'ici la matrice sera tjrs carrée,donc i et j partent tous 2 de 1 à NbElements
For nq = 1 To Nb_qx

'remplissage des noms de fonction
wkshtqx.Cells(nq, 1).Value = "q" & nq & "(x)="
'écriture de (X-Xi-1)^3
wkshtqx.Cells(nq, 3).Value = " (X-" & x(nq - 1) & ")^3 + "
'écriture de (X-Xi-1)^2
wkshtqx.Cells(nq, 5).Value = " (X-" & x(nq - 1) & ")^2 + "
'écriture de (X-Xi-1)
wkshtqx.Cells(nq, 7).Value = " (X-" & x(nq - 1) & ") + "
'coef de(X-Xi-1)^3
coefx3 = (aa(nq) - bb(nq)) / ((x(nq) - x(nq - 1)) ^ 3)
'coef de(X-Xi-1)^2
coefx2 = (bb(nq) - 2 * aa(nq)) / ((x(nq) - x(nq - 1)) ^ 2)
'coef de(X-Xi-1)
coefx1 = (aa(nq) + y(nq) - y(nq - 1)) / (x(nq) - x(nq - 1))
'coef du terme constant
coefx0 = y(nq - 1)

'affichage du coef de(X-Xi-1)^3 dans la feuille
wkshtqx.Cells(nq, 2).Value = coefx3
'affichage du coef de(X-Xi-1)^3 dans la feuille
wkshtqx.Cells(nq, 4).Value = coefx2
'affichage du coef de(X-Xi-1)^3 dans la feuille
wkshtqx.Cells(nq, 6).Value = coefx1
'affichage du coef de(X-Xi-1)^3 dans la feuille
wkshtqx.Cells(nq, 8).Value = coefx0
'intervalle d'appartenance de x
wkshtqx.Cells(nq, 10).Value = "x in [" & x(nq - 1) & ";" & x(nq) & "]"
Next nq
End Sub
```

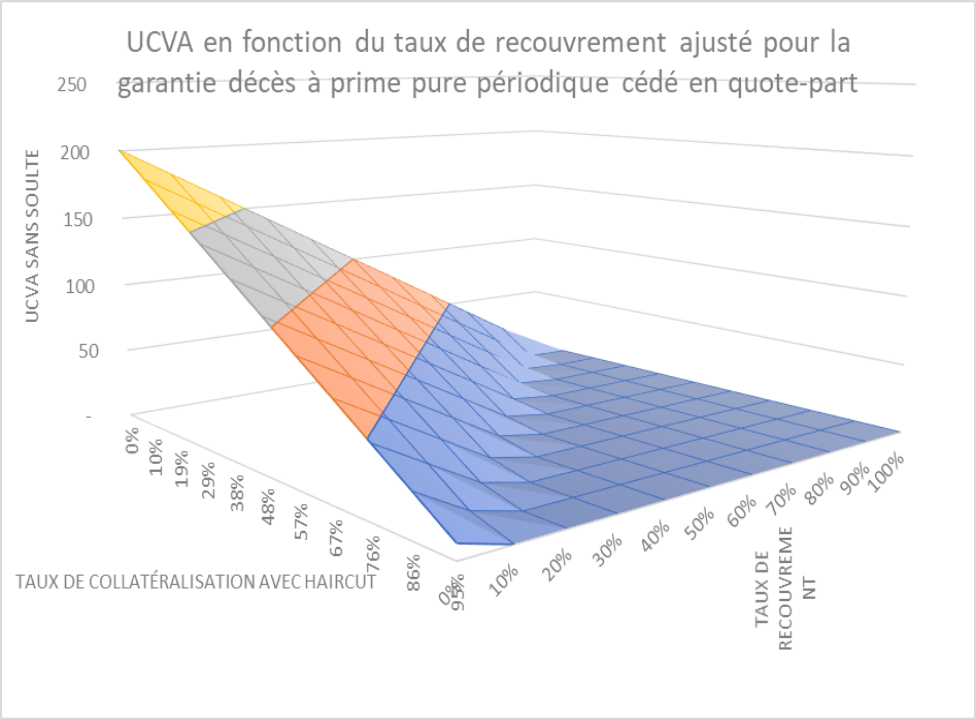
Annexe 4



Annexe 5



Annexe 6



Annexe 7 : Variations de la CVA unilatérale hors soulte - cas du contrat mixte à prime pure périodique cédé en excédent de plein

		Taux de collatéralisation										
		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
		(1-chc)c										
		0%	10%	19%	29%	38%	48%	57%	67%	76%	86%	95%
Taux de recouvrement	0%	777	703	629	556	482	408	334	260	186	113	39
	10%	699	625	552	478	404	330	256	183	109	35	-
	20%	622	548	474	400	326	253	179	105	31	-	-
	30%	544	470	396	322	249	175	101	27	-	-	-
	40%	466	392	319	245	171	97	23	-	-	-	-
	50%	388	315	241	167	93	19	-	-	-	-	-
	60%	311	237	163	89	16	-	-	-	-	-	-
	70%	233	159	85	12	-	-	-	-	-	-	-
	80%	155	82	8	-	-	-	-	-	-	-	-
	90%	78	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Annexe 8 : Variations de la *CVA* unilatérale hors soulte - cas du contrat mixte à prime pure unique cédé en excédent de plein

		Taux de collatéralisation										
		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
		(1-chc)c										
		0%	10%	19%	29%	38%	48%	57%	67%	76%	86%	95%
Taux de recouvrement	0%	783	709	634	560	485	411	337	262	188	114	39
	10%	705	630	556	481	407	333	258	184	110	35	-
	20%	626	552	478	403	329	254	180	106	31	-	-
	30%	548	474	399	325	251	176	102	27	-	-	-
	40%	470	395	321	247	172	98	23	-	-	-	-
	50%	391	317	243	168	94	20	-	-	-	-	-
	60%	313	239	164	90	16	-	-	-	-	-	-
	70%	235	160	86	12	-	-	-	-	-	-	-
	80%	157	82	8	-	-	-	-	-	-	-	-
	90%	78	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

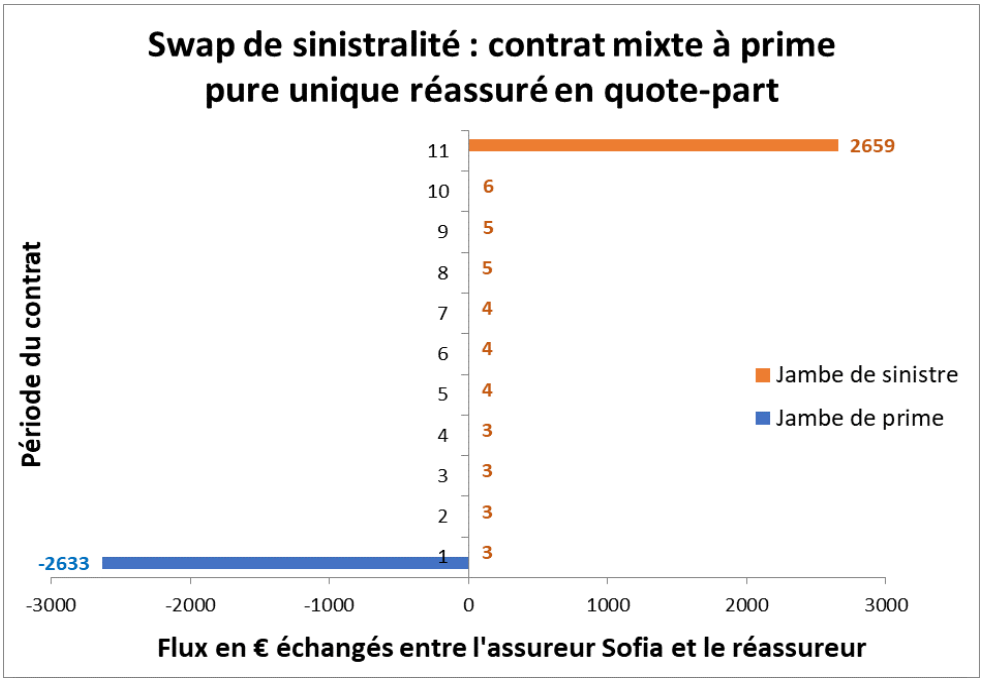
Annexe 9 : Variations de la CVA unilatérale hors soulte - cas de la garantie décès à prime pure périodique cédée en quote-part

		Taux de collatéralisation										
		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
		(1-chc)c										
		0%	10%	19%	29%	38%	48%	57%	67%	76%	86%	95%
Taux de recouvrement	0%	200	181	162	143	124	105	86	67	48	29	10
	10%	180	161	142	123	104	85	66	47	28	9	-
	20%	160	141	122	103	84	65	46	27	8	-	-
	30%	140	121	102	83	64	45	26	7	-	-	-
	40%	120	101	82	63	44	25	6	-	-	-	-
	50%	100	81	62	43	24	5	-	-	-	-	-
	60%	80	61	42	23	4	-	-	-	-	-	-
	70%	60	41	22	3	-	-	-	-	-	-	-
	80%	40	21	2	-	-	-	-	-	-	-	-
	90%	20	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

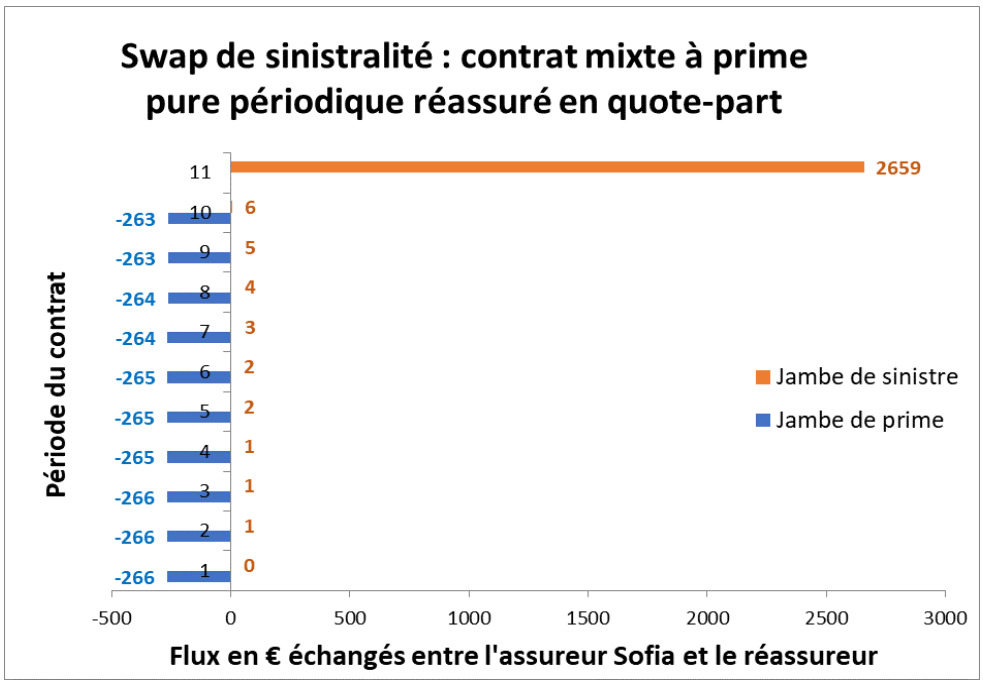
Annexe 10 : Variations de la CVA unilatérale hors soulte - cas de la garantie décès à prime pure périodique cédée en excédent de plein.

		Taux de collatéralisation										
		0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
		(1-chc)c										
		0%	10%	19%	29%	38%	48%	57%	67%	76%	86%	95%
Taux de recouvrement	0%	167	151	135	119	104	88	72	56	40	24	8
	10%	150	134	119	103	87	71	55	39	23	8	-
	20%	134	118	102	86	70	54	38	23	7	-	-
	30%	117	101	85	69	53	38	22	6	-	-	-
	40%	100	84	69	53	37	21	5	-	-	-	-
	50%	84	68	52	36	20	4	-	-	-	-	-
	60%	67	51	35	19	3	-	-	-	-	-	-
	70%	50	34	18	3	-	-	-	-	-	-	-
	80%	33	18	2	-	-	-	-	-	-	-	-
	90%	17	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	100%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

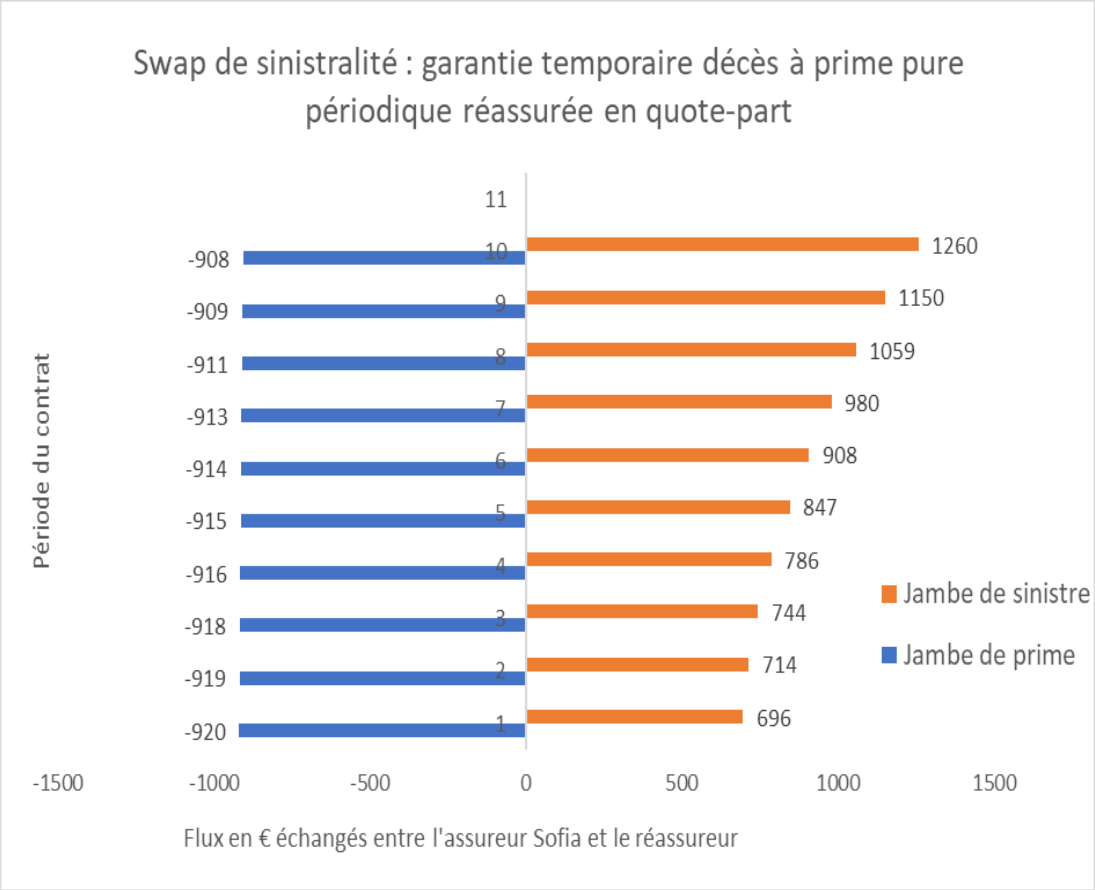
Annexe 11



Annexe 12



Annexe 13



Annexe 14 : Différence entre CVA et CDA

Le principe de la *CVA* est quelque peu proche de celui de la *CDA* (*Counterparty Default Adjustment*), à la différence que :

- La *CDA* est une provision, tandis qu'ici la *CVA* impacte concrètement le prix du traité.
- La *CDA* est calculée en tenant compte de l'exposition nette totale au risque et non pas de l'exposition nette positive. Si bien que l'on observe des effets de mutualisation entre les expositions de deux dates différentes.
- La *CDA* est utilisée pour ajuster la valeur du *Best Estimate* des créances de réassurance. Plus précisément, ce *Best Estimate* est diminué de ce montant.

Bibliographie

Mémoires

DELACROIX A. [2014] « Evaluation du risque de contrepartie : Credit Valuation Adjustment ».

EL MADHI B. [2013] « Tarification des traités en excédant de sinistres de la branche Responsabilité Civile : une approche entre expérience et exposition ».

MECHAHOUGUI K. [2011] « Intégration des contraintes de capital en réassurance non-proportionnelle vie, ISFA ».

POULIN M. [2012] « Analyses des solutions actuarielles en tarification des traités de réassurance non proportionnels Non-Vie, CEA ».

EPIFANOV P., SZTERMER D. [2006] « Mesure du risque de contrepartie des réassureurs, CEA ».

Livres

PLANCHET F., THEROND P. [2006] « Modèles de durée : Applications actuarielles », Economica.

DALBARADE J-M. [2000] « *Mathématiques des marchés financiers* », ESKA.

MAUMY-BERTRAND M., BERTRAND F. [2010] « *Initiation à la statistique avec R* », Dunod.

TRIBOUT B. [2007] « *Statistiques pour économistes et gestionnaires* », Pearson Education.

BRIGO D., MERCURIO F. [2006] « Interest Rate Models –Theory and Practise », Springer Finance.

GREGORY J. [2009] « Being Two-Faced Over Counterparty Credit Risk? », Risk magazine.

HULL J. [2008] « Options, futures et autres actifs dérivés », 6ème édition.

Articles

VRINS F., GREGORY J. [2011] « Getting CVA Up and Running ».

HOFFMAN F. [2011] « Credit Valuation Adjustment ».

FORSIDES [2017] « Solvabilité 2 : Publication de la méthodologie de calcul de l'UFR ».

PLANCHET F., JUILLARD M. [2007] « Mesure de l'incertitude tendancielle sur la mortalité : Application à un régime de rentes en cours de service », *Assurance et gestion des risques.*

MODRY J. [2003] « Construction de table de mortalité par génération pour la population française », *Bulletin Français d'Actuariat,* Vol 6.

SWISS Re [2007] « Les produits de rente : une solution privée au risque de longévité ».

RICHARDS S.D, CURRIE I.D [2009] « Longevity risk and annuity pricing with the Lee-Carter Model », *Presented to the Faculty of Actuaries.*

QUASHIE A., DENUIT M. [2005] « Modèles d'extrapolation de la mortalité aux grands âges ».

PLANCHET F., LELLIEUR V. [2005] « Utilisation des méthodes de Lee-Carter et Log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons », *ICA*.

LEVANTESI S., MENZIETTI M., TORRI T. [2008] « Longevity Bond pricing models : an application to the italian annuity market and pension schemes », *18th international AFIR colloquium*.

COWLEY A., CUMMINS J-D. [2005] « Securitization of Life Insurance Assets and Liabilities », *Journal of Risk Insurance*, Vol 72, n°2, 193-226.

Sites Internet

https://www.apref.org/sites/default/files/espacedocumentaire/le_petit_glossaire_de_la_reassurance.pdf

http://www.aprecialis.fr/images/publications-noueau/Le-vocabulaire-technique-de-la-rassurance.pdf

https://www.argusdelassurance.com/acteurs/reassureurs/reassurance-croissance-en-panne-pour-le-marche-francais.120328

https://www.slideshare.net/SwatiMital1/credit-default-models

http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Manchester/Presentations/Chenut.pdf

http://www.cii.co.uk/knowledge/resources/articles/basic-concepts-and-techniques-of-the-pricing-process/43681

https://fr.scribd.com/document/248455768/Bootstrapping-Default-Probabilities-From-CDS-Quotes

https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem/bb24e3f1b210d4e5c99b5ab3f3105594.pdf&fg=1

http://www.forsides.fr/wp-content/uploads/2017/04/Flash-Actu-53-UFR-v3.pdf

http://www.therond.fr/wp-content/uploads/cours/Taux.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation

http://www.giref.ulaval.ca/~afortin/mat17442/documents/splines.pdf

http://fr.milliman.com/insight/2017/Fast-calibration-of-the-Libor-Market-Model-with-Stochastic-Volatility-and-Displaced-Diffusion/

https://uglyduckling.nl/blog/financial-engineering/credit-risk/bootstrap-approach-for-cds-spreads/

http://freakonometrics.free.fr/slides-2040-8.pdf

http://www.ey.com/Publication/vwLUAssets/EY-credit-valuation-adjustments-for-derivative-contracts/$FILE/EY-Applying-FV-April-2014.pdf

http://www.nomura.com/resources/europe/pdfs/cva-cross-section.pdf

https://www.mocaxintelligence.com/wp-content/uploads/2016/02/iRuiz_CVA_PD_aint_matter_v1.1.pdf

http://knowledge.freshfields.com/h/Global/r/1826/insurance_and_reinsurance_news_-_february_2017_-_the_eu-us

https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem/a0192db403514e45729a2cb04c974bb1.pdf&fg=1

https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?news_link=mem/bb24e3f1b210d4e5c99b5ab3f3105594.pdf&fg=1

https://www.youtube.com/watch?v=1f2u9vbVNWg

https://www.youtube.com/watch?v=7T3_Cg956_E

https://arxiv.org/pdf/1212.3716.pdf

https://fr.scribd.com/document/248455768/Bootstrapping-Default-Probabilities-From-CDS-Quotes

https://www.institutdesactuaires.com/global/gene/link.php?doc_id=7845&fg=1