



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 25 Juin 2013

Par : Marion GREMILLET

Titre: Provisionnement non-vie : la méthode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

M. David DUBOIS

M. Pierre THEROND

Entreprise :

ACTUARIS International

Membres du jury I.S.F.A.

Mme Flavia BARSOTTI

M. Alexis BIENVENÛE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

Directeur de mémoire en entreprise :

M. Pierre MIEHE

Invité :

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

CONTENU

<i>Résumé</i>	3
<i>Abstract</i>	4
<i>Remerciements</i>	5
<i>Introduction</i>	6
<u>PARTIE I : PROVISIONNEMENT EN ASSURANCE NON VIE</u>	
CHAPITRE 1 : GENERALITES	8
CHAPITRE 2 : FOCUS SUR LA METHODE CHAIN LADDER	15
CHAPITRE 3 : METHODES STOCHASTIQUES	19
<u>PARTIE II : LA METHODE RJMCMC</u>	
CHAPITRE 1 : PREREQUIS STATISTIQUES	26
CHAPITRE 2 : L'ALGORITHME RJMCMC	30
<u>PARTIE III : EXTENSIONS DE LA METHODE</u>	
CHAPITRE 1 : MODELISATION DES EXCLUSIONS ET DES VALEURS NEGATIVES	42
CHAPITRE 2 : EXTENSIONS DE LA QUEUE DE DISTRIBUTION	45
CHAPITRE 3 : OUVERTURE VERS LA VOLATILITE A UN AN	49
<u>PARTIE IV : APPLICATIONS DE LA METHODE ET DE SES EXTENSIONS</u>	
CHAPITRE 1 : COMPARAISONS DE LA METHODE RJMCMC CLASSIQUE AUX METHODES TRADITIONNELLES	54
CHAPITRE 2 : COMPARAISONS DE LA METHODE RJMCMC AVEC LES EXTENSIONS SUR LA QUEUE DE DISTRIBUTION	57
CHAPITRE 3 : COMPARAISONS DE LA METHODE RJMCMC AVEC LE CALIBRAGE DE SOLVABILITE II ..	65
<i>Conclusion</i>	71
<i>Bibliographie</i>	72
<u>ANNEXES</u>	

RESUME

Mots clés : assurance IARD, réserves, provisions non-vie, IBNR, provisionnement stochastique, distribution des provisions, Chain Ladder, Mack, Bootstrap, Metropolis-Hastings, Gibbs, modèles Bayésien, Poisson sur-dispersé, chaîne de Markov, Monte Carlo, RJMCMC, queue de distribution, Value-at-Risk, Tail Value-at-Risk, volatilité à un an, Solvabilité II.

Les organismes assureurs non vie sont de plus en plus amenés à utiliser des modèles de provisionnement stochastiques. En effet, la mise en place progressive de l'Enterprise Risk Management en général, ainsi que le cadre de la directive « Solvabilité II » en particulier, incitent les assureurs à évaluer l'incertitude et le risque liés aux estimations des réserves, ces dernières représentant une part importante de leur bilan. L'objet de ce mémoire est d'étudier et de mettre en application un modèle novateur d'évaluation stochastique des provisions, basé sur l'analyse de triangles de liquidations de sinistres : le modèle Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC), et de le comparer aux méthodologies stochastiques usuelles appliquées aux triangles.

Les deux principales ruptures par rapport aux modèles conventionnels sont : d'une part, qu'elle est basée sur des triangles incrémentaux (par opposition aux cumulés), et surtout qu'elle opère un découpage automatisé (« troncature verticale ») du triangle en deux parties, avec un modèle adapté pour chacune d'elles. Ainsi, la méthodologie applique un modèle fortement paramétré pour la partie gauche du triangle, comportant le plus de données, et un modèle paramétrique à seulement deux paramètres, pour la partie droite du triangle qui comporte le moins de données.

Basée sur le papier de Verrall et Wüthrich (2012), la méthodologie présentée dans ce mémoire propose des extensions à la méthode originelle, permettant de s'affranchir de ses principales limites, et notamment la gestion des incréments nuls et négatifs. De plus, pour permettre d'utiliser RJMCMC pour le calibrage du risque de réserve sous Solvabilité II, un algorithme de calcul permettant d'évaluer l'incertitude à un an sera proposé et testé.

Une comparaison de la méthode résultante, non seulement avec les méthodologies stochastiques usuelles, Bootstrap, Mack, Merz et Wüthrich, mais aussi avec les calibrages proposés par la formule standard de Solvabilité II, réalisée sur un panel « marché » de triangles, permet de conclure sur la robustesse de la méthode dans les cas testés, et d'émettre un avis sur ses avantages et inconvénients principaux.

ABSTRACT

Keywords: non-life insurance, reserves, non-life provisions, IBNR, stochastic reserving, provisions distribution, Chain Ladder, Mack, Bootstrap, Metropolis-Hastings, Gibbs, Bayesian models, Poisson over-dispersed, Markov chain, Monte Carlo, RJMCMC, tail distribution, Value-at-Risk, Tail Value-at-Risk, one year volatility, Solvency II.

Insurance companies are more and more often led to use stochastic reserving models for reserving. Indeed, the growing implementation of Enterprise Risk Management, and Solvency II directive framework in particular, encourage insurers to evaluate uncertainty and risk linked to reserves estimates, which represents an important weight in their balance sheet. The aim of this paper is to study and set up an innovative stochastic model for provisions valuation, based on the claims run-off triangles analysis: the Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC) model, and to compare it with traditional stochastic methodologies applied on triangles.

The two mains breaking points with respect to traditional models are: on the one hand, the method being based on incremental triangles (in opposition of cumulative triangles), and, on the other hand, that it manages an automatic split (“vertical truncation”) of the triangle into two parts, with one model adapted for each. Thus, the methodology applies a highly parameterized model for the left part of the triangle, which contains more data, and one parametric model with two parameters for the right part of the triangle.

Based on Verrall and Wüthrich (2012), the methodology presented in this paper proposes extensions to the original method, which allows freeing itself from the main issues and in particular the management of negative increments or increments equal to zero. Moreover, in order to allow the use of RJMCMC for the reserve risk calculation under Solvency II, an algorithm which allows evaluating the one-year uncertainty will be proposed and tested.

A comparison of the resulting method not only with the traditional stochastic methodologies, Bootstrap, Mack Merz and Wüthrich, but also with the calibrations proposed by the Solvency II standard formula, performed on a “market” triangles sample, allows us to conclude with the robustness of the method in the tested cases, as well as its main advantages and disadvantages.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Pierre Miehé, Directeur Général délégué du cabinet Actuaris International et aussi mon maître de stage, pour m'avoir fait bénéficier tout au long de mon stage et de mon alternance de son expérience et de ses précieux conseils.

Je remercie également l'ensemble du cabinet Actuaris International, particulièrement Stéphanie Dausque et Mathieu Le Goff pour l'aide, le soutien et la confiance qu'ils m'ont témoignés sur ce sujet, ainsi que Fabrice Guillaume, informaticien, pour son aide, sa compréhension et sa patience lors de l'implémentation de la méthode et enfin Marion Bodichon pour ses conseils esthétiques lors de la rédaction du mémoire.

Je remercie José Luis Vilar Zanon, membre du comité scientifique d'Actuaris International, ainsi que Mario V. Wüthrich, pour leur patience et leur aide tout au long de la compréhension de la méthode.

Je remercie également Patrick Hennion, Directeur Général d'Actuaris Belgium, ainsi que la Banque Nationale Belge, pour le prêt des données.

Et je tiens naturellement à remercier Esterina Masiello, ma tutrice académique, pour ses suggestions, ses commentaires et l'encadrement du mémoire.

INTRODUCTION

Les modèles de provisionnement stochastiques sont présents depuis plus de vingt ans dans le monde de l'actariat. Jusqu'à récemment, ils n'ont cependant été utilisés que secondairement dans la pratique, ce qui pourrait s'expliquer par diverses raisons, en particulier le manque de flexibilité ou de transparence de ces types de modèles, le manque d'outils informatiques nécessaires à leur exécution ou encore la barrière que constituent les complexités techniques et mathématiques de certains modèles. Mais c'est surtout le manque d'intérêt pour de tels modèles, provenant du fait que les méthodes traditionnelles, déterministes, suffisaient le plus souvent à estimer le montant des provisions que les organismes assureurs devaient constituer en normes locales.

Cependant, avec l'avènement de l'Enterprise Risk Management en général, et de Solvabilité II en particulier, les compagnies d'assurance sont de plus en plus incitées à utiliser des modèles stochastiques d'évaluation des risques. Ces modèles, et notamment dans le cadre du risque lié aux provisions, permettent en particulier de réaliser une évaluation interne du capital requis, plus proche de la spécificité du risque de l'organisme assureur que le calibrage « moyenne de marché » proposé par les autorités européennes.

Pour répondre à ce besoin croissant d'évaluation stochastique du risque de provisions, la société ACTUARIS International réalise de manière continue une veille sur les dernières méthodologies publiées par les chercheurs en actuariat, afin d'être en mesure de les proposer dans les logiciels qu'elle développe.

C'est dans le cadre de cette veille que j'ai été amenée à réaliser des recherches sur l'une des dernières méthodes publiées en provisionnement stochastique non vie : la méthode de Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC).

Le présent mémoire présente les conclusions de cette recherche, en rappelant tout d'abord, dans la partie I, les bases du provisionnement non-vie, afin de définir le contexte d'application de la méthode. Les notions mathématiques complémentaires, indispensables quant à la compréhension de la méthode, ainsi que la méthode elle-même seront détaillées pas à pas dans la partie II. Dans la partie III, plusieurs extensions seront présentées, ces dernières permettant une application de la méthode à un plus large panel de triangles ainsi qu'une évaluation de la volatilité à un horizon de un an, pour pouvoir appliquer RJMCMC dans le cadre des hypothèses de la directive Solvabilité II. Enfin, la partie IV est dédiée à des applications pratiques permettant d'établir un comparatif des résultats obtenus par rapport aux méthodes traditionnellement employées, mais aussi par rapport à la formule standard de Solvabilité II.

PARTIE I :
PROVISIONNEMENT EN
ASSURANCE NON VIE

CHAPITRE 1 : GENERALITES

1.1 DEFINITIONS

a) Les provisions techniques

Afin d'être en mesure d'honorer leurs engagements vis-à-vis des assurés, c'est-à-dire le règlement des déroulés de sinistres relatifs aux contrats d'assurance et les frais afférents, les assureurs doivent constituer des provisions comptables au passif du bilan : les provisions techniques.

Le mode calculatoire des provisions techniques diffère en fonction du domaine d'activité : les méthodologies sont en effet sensiblement différentes selon que les contrats sous-jacents sont dits d'assurance « Vie » ou d'assurance « Non vie ».

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous concentrerons en particulier sur les provisions techniques « Non vie », qui peuvent être regroupées dans trois principales catégories, comme mentionné en France par l'article R331-6 du Code des Assurances¹ :

- Les **Provisions pour Primes Non Acquises (PPNA)** : « provision [...] destinée à constater, pour l'ensemble des contrats en cours, la part des primes émises et des primes restant à émettre se rapportant à la période comprise entre la date de l'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime. » Cela signifie que si un contrat offre une couverture d'un an mais est signé le 01/04/N, date à laquelle correspond un versement d'une prime de montant A, la sinistralité de l'année N est couverte par $\frac{3}{4}A$. Au 31/12/N l'assureur devra donc établir une PPNA de montant $\frac{1}{4}A$.
- Les **Provisions pour Risques En Cours (PREC)** : « provision [...] destinée à couvrir, pour l'ensemble des contrats en cours, la charge des sinistres et des frais afférents aux contrats, [...] pour la part de ce coût qui n'est pas couvert par les PPNA. » Cette provision est établie dans le but de compenser une tarification insuffisante.
- Les **Provisions pour Sinistres A Payer (PSAP)** : « valeur estimative des dépenses en principal et en frais, [...] nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés. » Cette provision concerne les sinistres qui sont survenus mais qui ne sont pas encore tous résolus et réglés à la date d'inventaire.

La dénomination de « PSAP » est en fait utilisée le plus souvent abusivement comme étant liée au provisionnement dit « dossier à dossier » réalisé par les départements indemnisation, soit selon des méthodes forfaitaires, soit selon l'expérience de la société d'assurance. Dans le cas de cette dénomination, il convient d'évaluer les provisions manquantes, dites *Incurred But Not Reported* (notées IBNR).

Les IBNR correspondent ainsi au différentiel entre les PSAP et la sinistralité finale (dite « ultime »), et comportent eux-mêmes deux sous-composantes :

¹ LEGIFRANCE (2012). *Code des Assurances, Partie réglementaire*

- Les **Incurred But Not Enough Reserved (IBNER)** : ces sinistres sont connus de l'assureur mais ont été sujets à une inexactitude lors de l'établissement des provisions les concernant.
- Les **Incurred But Not Yet Reported (IBNYR)** : ces sinistres n'ont pas été déclarés à l'assureur. Les provisions dossier/dossier concernant ce type de sinistres sont donc inexistantes, et il convient de les provisionner intégralement.

Le graphique suivant représente l'évolution des termes définis précédemment, pour une année de survenance, au cours des années de développement :

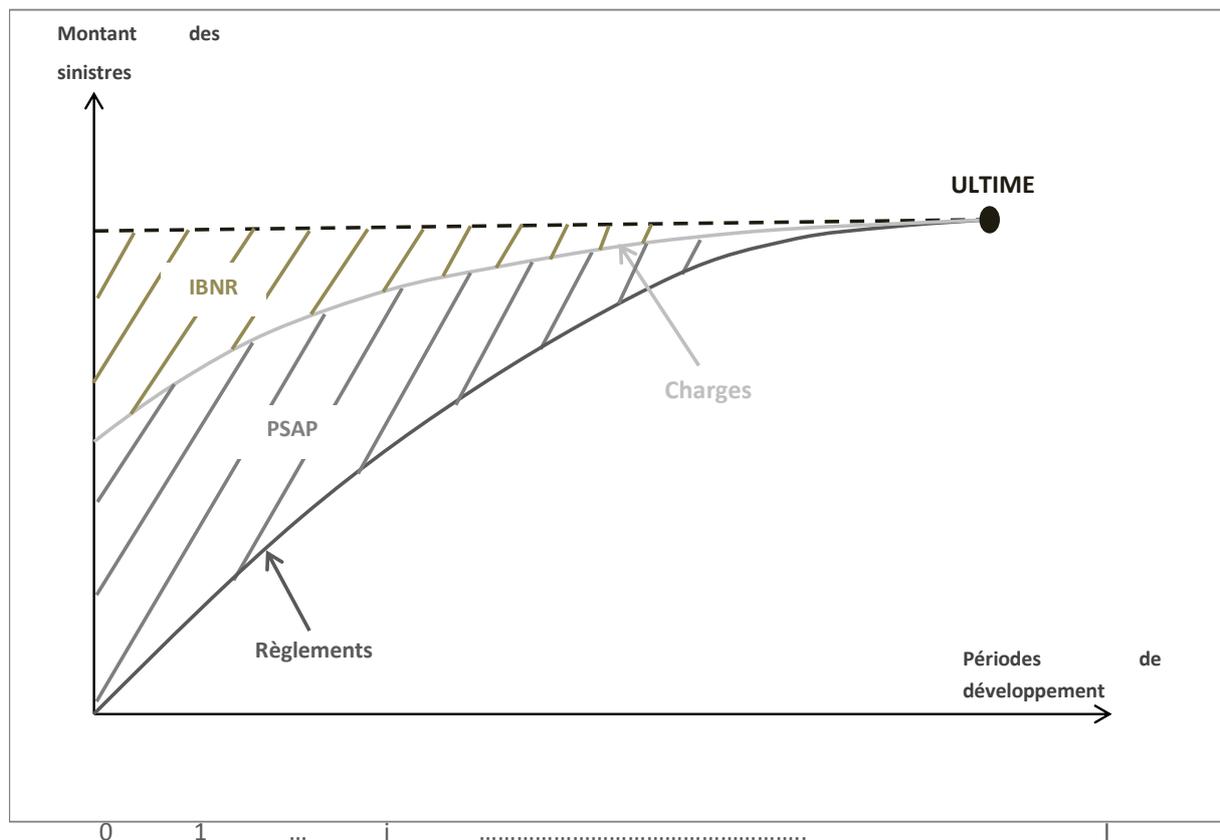


FIGURE 1 : Exemple d'évolution des différentes valeurs de référence au fil des périodes de développement pour une date d'origine (ex. année de souscription)

Il convient naturellement de noter qu'à l'ultime, c'est-à-dire une fois que tous les règlements sont réalisés, les courbes de règlements rejoignent celles des charges (les PSAP tombant à 0), et les IBNR sont à 0 également, car il n'y a plus de règlement à venir.

Conformément à la directive Solvabilité I en vigueur depuis les années 70, les provisions correspondent aux sinistres futurs non actualisés en norme comptable française.

L'approche Solvabilité II présentée ci-après est quant à elle plus orientée « valeur économique » et intègre l'actualisation, ainsi qu'une notion complémentaire dite de « marge de risque ».

b) Les provisions techniques en norme « Solvabilité II » (aussi appelées « Best Estimate »)

Dans le cadre du projet Solvabilité II, l'organisme en charge de proposer un « modèle standard » d'évaluation de la solvabilité des acteurs de l'assurance à la commission européenne, l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*), a publié des spécifications assez différentes quant à l'évaluation des provisions techniques comparativement à Solvabilité I (et à la norme française).

En effet, l'estimation des réserves préconisée par l'EIOPA est basée sur le calcul d'un montant de provisions techniques actualisé (*Best Estimate*) par rapport à une courbe des taux, auquel s'ajoute une « marge de risque », pour obtenir la provision totale Solvabilité II.

Best Estimate

L'estimation *Best Estimate* des Provisions Techniques doit être réalisée en brut de réassurance, ainsi qu'en net de réassurance (c'est-à-dire en soustrayant la part des sinistres futurs que le réassureur s'est engagé à régler).

Pour l'estimation du *Best Estimate* de la part des provisions techniques cédée aux réassureurs, il convient de considérer la probabilité de défaut de ces différents réassureurs, et d'en tenir compte dans le calcul de l'espérance des montants réassurés (on parle de *Best Estimate* « cédé »).

Pour ce faire, l'EIOPA propose le calcul d'un *Loss adjustment*, dont la formule est basée sur une projection des différentes probabilités de défaut sous-jacentes, fonction des notations des réassureurs, qui permet de définir la probabilité de défaut et le taux de recouvrement de chacun. La méthode classique du calcul du *Loss Adjustment* pour un réassureur A fait intervenir l'écoulement des réserves et se calcule pour chaque année d'origine *i* avec la formule suivante :

$$Coef_Adj_i(A) = \sum_{j=0}^{I-i} \left\{ \frac{\sum_{k=j}^{I-i} Flux(k)}{\sum_{k=0}^{I-i} Flux(k)} \times Reserves_Cédées(i) \times Part_i(A) \times (1 - RR(A)) \right. \\ \left. \times Pd(A) \times (1 - Pd(A))^{j-1} \right\}$$

NB : le nombre de dates d'origine est ici supposé égal au nombre de périodes de développement, *I*.

Le premier terme fait intervenir l'écoulement des réserves, calculées à partir du triangle complété des règlements actualisé. Le second terme correspond au montant des réserves cédées pour l'année d'origine *i*. Le terme suivant représente la part du réassureur A. Les trois derniers termes font intervenir le taux de recouvrement (*Recovery Rate*) et la probabilité de défaut du réassureur (*Pd*).

Marge de risque

La marge de risque est calculée selon une notion de *Cost of Capital* : il s'agit en effet d'anticiper le coût de l'immobilisation du capital nécessaire pour écouler le *Best Estimate*.

Si l'EIOPA n'impose pas de méthode particulière de calcul, trois méthodes semblent aujourd'hui faire référence sur le marché Européen :

- L'approche proportionnelle : cette méthode consiste à projeter une partie du SCR alloué à la branche d'assurance considérée, calculé en 0, à le faire décroître au prorata de la décroissance des provisions techniques au fur et à mesure du temps, puis à lui appliquer un pourcentage qui correspond au coût du capital et enfin à actualiser ces flux estimés ;
- La méthode des durations : cette méthode utilise un proxy calculé avec la duration modifiée, par exemple la duration de Macaulay actualisée ;
- L'approche par branche : cette méthode utilise des taux directement fournis par l'EIOPA en fonction de la branche considérée, qui sont alors appliqués au *Best Estimate* :

Line of business	Risk margin (Rate_RM)
Medical expenses	8,50%
Income protection	12,00%
Workers' compensation	10,00%
Motor, vehicule liability	8,00%
Motor, other classes	4,00%
Marine, aviation, transport	7,50%
Fire and other damage	5,50%
General liability	10,00%
Credit and suretyship	9,50%
Legal expenses	6,00%
Assistance	7,50%
Miscellaneous non-life insurance	15,00%
Health business	17,00%
Property business	7,00%
Casualty business	17,00%
Marine, aviation and transport business	8,50%

FIGURE 2 : Tableau récapitulatif des pourcentages de marge de risque en fonction des branches considérées

Réserve totale Solvabilité II

La réserve totale Solvabilité II est alors la somme du *Best Estimate* net de réassurance et de la marge de risque.

1.2 EVALUATION

L'estimation des Provisions Techniques (ou réserves à constituer) est basée sur l'étude du déroulement de la sinistralité passée de la branche étudiée : il s'agit d'une approche basée sur l'historique.

a) Contexte

Les données passées sont traditionnellement réparties dans un triangle dit de liquidation. Pour cela, les notations suivantes sont introduites :

- i la date d'origine. La date d'origine peut correspondre à la date de souscription, la date de déclaration ou la date de survenance du sinistre. Dans la plupart des cas c'est la date de survenance du sinistre qui est utilisée (c'est notamment le cas pour la norme comptable française) ;
- j la période de développement. Les périodicités de développement et d'origine peuvent être annuelles, semestrielles, trimestrielles ou mensuelles. Dans la suite, la périodicité de développement sera considérée annuelle.
- $X_{i,j}$ la mesure étudiée pour la date d'origine i et la période de développement j . Elle peut être de différente nature, notamment : règlement, PSAP, charge, prime, nombre de sinistres, etc.

La représentation usuelle d'un triangle de liquidation non cumulé est la suivante :

		Années de développement						
		0	1	...	j	l
Années de survenance	0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$		$X_{0,j}$			$X_{0,l}$
	1	$X_{1,0}$						
	...							
	i				$X_{i,j}$			
	...							
	...							
	l	$X_{l,0}$						

FIGURE 3 : Représentation d'un triangle de liquidation non cumulé

$X_{i,j}$ correspond au règlement effectué la $j^{\text{ème}}$ année de développement pour les sinistres survenus l'année i .

Il est aussi parfois utile de travailler avec les montants cumulés. Les notations suivantes sont alors introduites :

$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}$ ce qui équivaut à la relation suivante $X_{i,j} = C_{i,j+1} - C_{i,j}$

Le montant cumulé $C_{i,j}$ correspond alors à la somme des règlements effectués les $j + 1$ premières années pour les sinistres survenus l'année i .

L'objectif du provisionnement est d'estimer la sinistralité future à partir de la sinistralité passée, c'est-à-dire estimer l'ensemble $D_I^c = \{X_{i,j} | i + j > I\}$ à partir de l'ensemble $D_I = \{X_{i,j} | i + j \leq I\}$.

De manière plus schématique, cela revient à estimer le triangle inférieur à partir du triangle supérieur :



FIGURE 4 : Schéma représentant l'estimation des données futures à partir des données du passé

Le montant de la provision pour sinistre à payer est d'abord calculé pour chaque année d'origine en sommant la partie inférieure du triangle qui vient d'être estimée :

$$R_i = \sum_{j=i-1}^I X_{i,j}$$

La réserve totale est ensuite obtenue en sommant les réserves estimées pour chaque année d'origine :

$$R = \sum_{i=0}^I R_i$$

b) Méthodes déterministes

Une méthode déterministe ne tient pas compte du caractère aléatoire des variables à expliquer : son but sera donc d'évaluer l'espérance (parfois référencée comme « moyenne » ou « *best estimate* ») des provisions. Les principales méthodes utilisées en déterministe (notamment en France) sont les suivantes : Chain Ladder, Bornhuetter Ferguson (1972), ou coût moyen.

Les avantages de ces modèles déterministes sont leur facilité d'implémentation, et la possibilité de les affiner / corriger aisément, au moyen de lissages / exclusions de points etc.

Si l'on ne s'intéresse qu'à l'espérance des provisions, leur utilisation est naturellement recommandée.

Ils présentent également l'avantage de pouvoir s'appliquer à tous types de données d'entrée : règlements, charges, primes, nombre de sinistres, etc., pour estimer les valeurs ultimes correspondantes. L'évaluation des

Provisions pour Primes Non Acquisées peut ainsi se faire par le biais de ces méthodes, appliquées au triangle de primes.

Par contre, elles ne donnent pas d'idée de la distribution des réserves, c'est-à-dire de l'incertitude liée à l'estimation des provisions.

c) Méthodes stochastiques

Dans un modèle stochastique, les éléments composant le triangle de liquidation sont considérés comme des réalisations de variables aléatoires réelles. L'estimation consiste alors à choisir les distributions supposées de ces variables aléatoires, et de les calibrer tout en évaluant le risque d'erreur de modèle.

L'estimation des paramètres, notamment, se base sur l'information fournie par le triangle supérieur.

Une fois le modèle calibré, il est alors possible d'évaluer des informations supplémentaires sur les réserves telles que leur variabilité ou encore leurs Value-at-Risk (comme préconisé par Solvabilité II), Tail Value-at-Risk ou autres mesures de risque.

Les principales méthodes stochastiques utilisées à ce jour sont :

- Le modèle de Thomas Mack (1993) pour l'évaluation de l'écart-type. Il convient ensuite de sélectionner une distribution paramétrique à deux paramètres, qui sera calibrée sur la base de l'espérance, provenant d'une analyse déterministe Chain Ladder classique, et de l'écart-type en question ;
- Le modèle non paramétrique du Bootstrap (cf. Merz et Wüthrich 2008) : sur base des résidus de Mack, ou selon l'hypothèse de Poisson sur-dispersée.

L'objet de ce mémoire est d'étudier une toute nouvelle méthode stochastique, assez novatrice : la méthode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo (RJMCMC), présentant la particularité par rapport aux méthodes ci-dessus de pouvoir s'appliquer à des données incrémentales, et de proposer un modèle différent pour les parties droites et gauches du triangle, complétant ainsi les méthodes « classiques » détaillées dans les paragraphes ci-après.

CHAPITRE 2 : FOCUS SUR LA METHODE CHAIN LADDER

2.1 DEROULEMENT DE LA METHODE

La méthode Chain Ladder est une des méthodes les plus utilisées en provisionnement non-vie, et ce notamment du fait de sa simplicité, et de la facilité d'interprétation de ses résultats.

Cette méthode, de type déterministe, est un modèle de développement par cadences qui se base sur le triangle de liquidation cumulé.

Soit $C_{i,j}$ le montant cumulé correspondant à l'année de survenance i et l'année de développement j .

Les ratios qui lient deux périodes de développement consécutives sont notés :

$$F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad \forall i \in \{0, \dots, I\} \text{ et } \forall j \in \{0, \dots, I-1\}$$

La principale hypothèse de la méthode est l'indépendance des facteurs de développement par rapport à l'année d'origine des sinistres i . Il est alors possible de définir les coefficients de passage suivants :

$$C_{i,j+1} = f_j \times C_{i,j} \quad \forall i \in \{0, \dots, I\} \text{ et } \forall j \in \{0, \dots, I-1\}$$

La méthode Chain Ladder propose une estimation de ces coefficients de développement par différentes méthodes de calcul : moyenne simple, pondérée, maximum, minimum, etc., la méthode la plus courante étant celle de la moyenne pondérée. On obtient alors les estimateurs des coefficients de développement par la formule suivante :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \times F_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}}$$

Il est ensuite possible d'estimer les valeurs du triangle inférieur grâce aux estimateurs :

$$\hat{C}_{i,j} = C_{i,I-i} \prod_{k=I-i}^{j-1} \hat{f}_k \quad \forall i, j \text{ tels que } i + j > I$$

Une fois le triangle inférieur complété, les réserves par année d'origine et la réserve totale peuvent alors être estimées par simple différence des éléments.

2.2 INTERETS ET LIMITES DE LA METHODE

a) Intérêts

Le principal avantage de la méthode Chain Ladder est qu'elle n'est pas restrictive au niveau des données d'entrée : les valeurs incrémentales négatives, notamment, sont acceptées donc elle est applicable aux triangles de charges par exemple – en effet les provisions comportant souvent une marge de prudence, il est fréquent pour un assureur de constater des bonis de liquidation, pouvant impliquer ces fameuses valeurs incrémentales négatives.

Lorsque l'historique disponible sur le triangle ne permet pas d'évaluer l'ensemble des cadences, autrement dit lorsque le déroulé des sinistres est supérieur à l'historique disponible dans le triangle, il est également possible de compléter la méthode avec des « queues de développement », ie la projection des facteurs de développement au-delà de la taille du triangle.

Augmenter cette période ultime consiste ainsi à estimer les données au-delà du triangle inférieur habituellement considéré :

		Années de développement							Année ultime = l+3		
		0	1	...	j	l	l+1	l+2	l+3
Années de survenance	0	$X_{0,0}$	$X_{0,1}$		$X_{0,j}$			$X_{0,l}$	$X_{0,l+1}$...	$X_{0,l+3}$
	1	$X_{1,0}$						$X_{1,l}$			
	...										
	j				$X_{i,j}$	$X_{i,j+1}$...		$X_{i,l+1}$...	$X_{i,l+3}$
	...										
	l	$X_{l,0}$	$X_{l,1}$...	$X_{l,j}$	$X_{l,l}$	$X_{l,l+1}$...	$X_{l,l+3}$

FIGURE 5 : Exemple de prise en compte d'une queue de développement

Afin d'estimer les valeurs complémentaires du triangle inférieur, il faut définir autant de nouveaux facteurs de développement que nécessaire. N'ayant pas de données réelles pour les calculer dans la queue de développement, l'une des possibilités traditionnellement utilisée par les actuaires consiste à régresser une courbe de référence dépendant de la période j sur les facteurs connus, puis d'en déduire les facteurs de développement futurs.

Il s'agit ainsi de sélectionner la courbe ou fonction qui s'ajustera au mieux aux coefficients de développement estimés du triangle supérieur, puis d'estimer les paramètres de ladite fonction, par exemple par la méthode des moindres carrés. Les fonctions les plus couramment utilisées sont : la fonction puissance inverse, la fonction exponentielle, la fonction puissance et la fonction de Weibull. Une fois que les paramètres de la fonction choisie ont été estimés, il est alors possible de calculer les facteurs de développement manquants et de projeter le triangle inférieur au-delà de l'historique disponible.

L'autre avantage de Chain Ladder est qu'elle permet d'appliquer les méthodes de Mack (1993) et de Merz et Wüthrich (2008) afin d'estimer les erreurs standards des réserves correspondantes. Si la méthode de Mack est utilisée depuis de nombreuses années pour estimer la volatilité totale dite « à l'ultime », celle de Merz et Wüthrich (2008), plus récente, vise à estimer les erreurs standards des réserves à horizon d'une année, conformément aux préconisations du projet Solvabilité II. Ces méthodes se basent sur les résultats de Chain Ladder, sans supposer que les réserves suivent une loi de distribution en particulier : il conviendra ensuite à l'expert de sélectionner la fonction de distribution qui lui semble s'ajuster le mieux.

b) Limites

La simplicité de mise en place de la méthode Chain Ladder est certes un atout majeur mais il ne faut pas oublier l'hypothèse fondamentale sur laquelle elle repose : l'existence de coefficients de passage entre les $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$. Cela suppose qu'elle ne prévoit pas d'« effet diagonale » des valeurs : la progression des règlements cumulés est supposée identique, quelle que soit l'année d'origine. Cette hypothèse est facilement vérifiable graphiquement : pour chaque période de développement j , il faut s'assurer que les points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont sensiblement alignés.

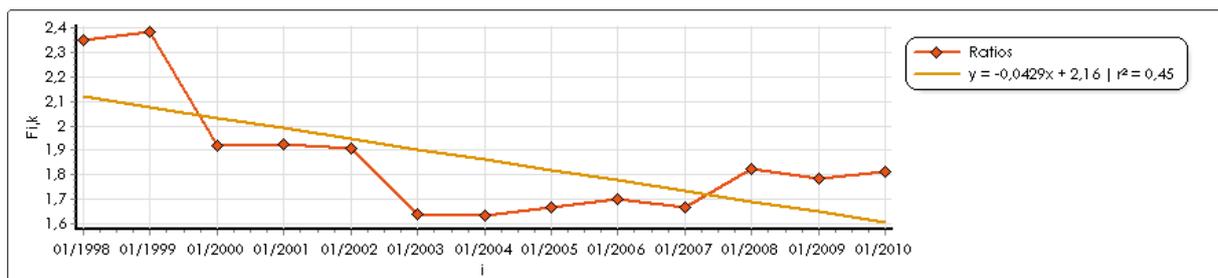


FIGURE 6 : Vérification des hypothèses sur un triangle de la BNB pour le passage de la période de développement 1 à la période de développement 2

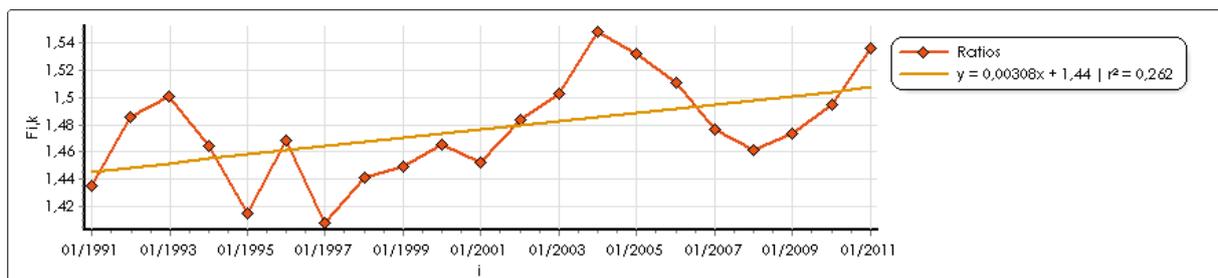


FIGURE 7 : Vérification des hypothèses sur le triangle de Merz & Wüthrich (2012) pour le passage de la période de développement 1 à la période de développement 2

Bien que le R^2 ne soit pas très proche de 1 nous pouvons observer que les points sont globalement alignés, notamment pour le triangle de la BNB. Certains triangles, en revanche, ne permettent pas de dégager de droite générale et ainsi l'application de la méthode de Chain Ladder sans ajustement pourrait être remise en cause dans ces cas précis.

L'autre limite de Chain Ladder concerne l'estimation des coefficients de passage et en particulier le dernier paramètre \hat{f}_I qui n'est estimé qu'à l'aide de deux données : $C_{0,I-1}$ et $C_{0,I}$. Et ce, d'autant plus que, le modèle étant multiplicatif, cette erreur d'estimation peut présenter une distorsion importante du résultat final.

CHAPITRE 3 : METHODES STOCHASTIQUES

Dans ce chapitre, nous analyserons deux méthodes de modélisation stochastique, toutes deux basées sur Chain Ladder et qui sont fréquemment utilisées dans le cadre du provisionnement non vie. La première est une méthode paramétrique qui se base sur une loi dont l'évaluation des paramètres est analytique : Thomas Mack, tandis que la seconde est une méthode non paramétrique : le Bootstrap.

3.1 METHODE PARAMETRIQUE

a) Choix de la loi

Deux fonctions sont majoritairement utilisées pour modéliser les provisions techniques non vie : la loi normale et la loi log normale. La « formule standard » proposée par l'EIOPA pour le projet Solvabilité II étant basée sur la loi log-normale, c'est cette dernière qui tend à devenir un standard de marché.

Ci-dessous, nous rappelons les particularités de chacune de ces lois.

- Loi normale :

Supposons que la variable X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ .

La fonction de densité de X est alors : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Le graphique suivant représente la distribution d'une loi normale de moyenne $\mu = 200\ 000$ et d'écart type $\sigma = 80\ 000$:

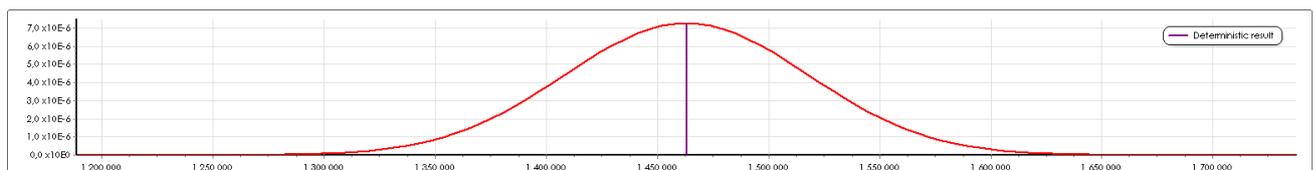


FIGURE 8 : graphique représentant la fonction de répartition de la loi normale

- Loi log-normale :

Supposons maintenant que la variable Y suive une loi log-normale de moyenne m et d'écart type v . Cela signifie que la variable aléatoire $\ln(Y)$ suit la loi normale suivante $\ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $v^2 = \sqrt{\ln\left(\frac{\sigma^2}{\mu^2} + 1\right)}$ et $m = \ln(\mu) - \frac{v^2}{2}$.

Le graphique suivant représente la fonction de distribution de la loi log-normale de moyenne $m = 200\ 000$ et d'écart type $\nu = 80\ 000$:

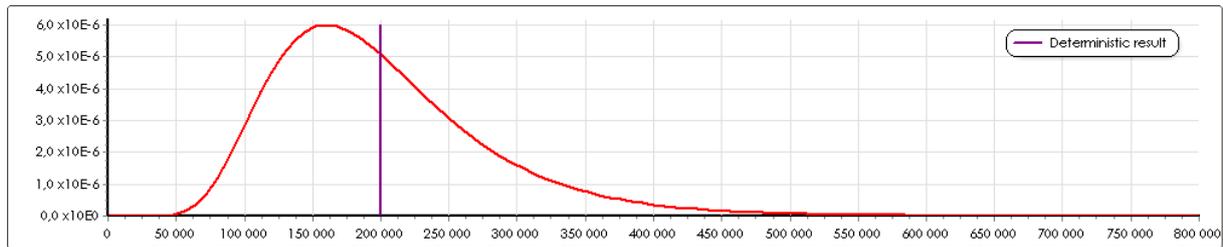


FIGURE 9 : graphique représentant la fonction de répartition de la loi log-normale

Le tableau suivant regroupe les estimations de la Value-at-Risk et de la Tail Value-at-Risk à 99.5 % pour chaque fonction :

	Loi normale	Loi log normale
VaR 99.5 %	406 066	500 924
TVaR 99.5 %	431 356	569 650

TABLE 1 : Tableau récapitulatif des VaR et Tail VaR obtenues pour chaque fonction avec les mêmes paramètres

L'écart entre les valeurs obtenues avec ces deux fonctions est important : la loi log normale conduit à une VaR 19 % plus grande que celle obtenue avec la loi normale ; la Tail VaR obtenue avec la loi log normale est quant à elle 24 % plus élevée que celle de la loi normale.

Le choix de la distribution a donc une importance fondamentale dans l'évaluation de l'incertitude liée au risque, et le risque d'erreur lié au choix de cette distribution n'est souvent pas considéré, ce qui constitue le principal inconvénient des méthodes paramétriques.

b) Estimation des paramètres de la loi

Une fois le choix de la fonction effectué, il est nécessaire d'estimer les paramètres de la loi : sa moyenne ainsi que sa volatilité.

- Moyenne :

Afin de rester dans la continuité de cette partie, il est classique de retenir l'estimation des réserves par la méthode de Chain Ladder comme moyenne de la distribution.

- Ecart type : méthode de Thomas Mack

Cette méthode permet d'évaluer la volatilité de l'estimation des réserves par la méthode de Chain Ladder.

Ce modèle (Mack 1993) repose sur plusieurs hypothèses :

- Hypothèse 1 : $\forall i_1 \neq i_2 \quad \forall j = 0, \dots, I$ les variables $C_{i_1 j}$ et $C_{i_2 j}$ sont indépendantes. Cette hypothèse illustre l'indépendance des années d'origine.
- Hypothèse 2 : $\forall j = 0, \dots, I - 1 \quad \exists f_j$ tel que $\forall i = 0, \dots, I \quad E(C_{i, j+1} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$. Cette hypothèse implique l'existence de coefficients de passage entre chaque année de développement.
- Hypothèse 3 : $\forall j = 0, \dots, I - 1 \quad \exists \sigma_j$ tel que $\forall i = 0, \dots, I \quad Var(C_{i, j+1} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \sigma_j^2$. Cette dernière hypothèse fait référence à la volatilité interne du triangle, désignée par σ_j pour l'année de développement j .

Il est ensuite possible de définir un estimateur sans biais de σ_j^2 grâce à la formule suivante : $\forall j = 0, \dots, I - 2$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2$$

Puis $\hat{\sigma}_{I-1}^2$ peut être estimé par l'égalité suivante : $\frac{\hat{\sigma}_{I-3}}{\hat{\sigma}_{I-2}} = \frac{\hat{\sigma}_{I-2}}{\hat{\sigma}_{I-1}}$ tant que $\hat{\sigma}_{I-3} > \hat{\sigma}_{I-2}$

Cette égalité mène à la formule suivante : $\hat{\sigma}_{I-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{I-2}^4}{\hat{\sigma}_{I-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{I-3}^2, \hat{\sigma}_{I-2}^2) \right)$

Sous ces trois hypothèses, nous pouvons alors appliquer le théorème de T. Mack qui permet d'estimer les volatilités des réserves (notée « mse » pour *Mean Square Error*) pour chaque année d'origine :

$$mse(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,I}^2 \sum_{j=I-i}^{I-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{I-j} C_{k,j}} \right)$$

Où $\hat{C}_{i,I-i}$ correspond à la dernière diagonale du triangle supérieur donc $\hat{C}_{i,I-i} = C_{i,I-i}$ et les $\hat{C}_{i,j}$ correspondent aux valeurs estimées du triangle inférieur.

En s'appuyant à nouveau sur les trois hypothèses, il est aussi possible d'estimer l'erreur standard de la provision totale grâce à la seconde formule de T. Mack :

$$mse(\hat{R}) = \sum_{i=1}^I \left[mse(\hat{R}_i) + \hat{C}_{i,I} \left(\sum_{j=i+1}^I \hat{C}_{i,j} \right) \right]$$

Après le choix de la fonction de distribution, le calcul de la moyenne et l'estimation de la volatilité des réserves, il est possible de calculer les Value-at-Risk et Tail Value-at-Risk pour différents niveaux de risque.

Le principal inconvénient de la méthode de T. Mack est qu'elle n'est pas facilement interprétable. De plus, dans le cas de données irrégulières, cette méthode s'avère assez peu robuste et peut mener à des résultats aberrants.

3.2 METHODE NON PARAMETRIQUE : LE BOOTSTRAP

La méthode du Bootstrap (cf. Merz et Wüthrich 2008) est plus facilement interprétable et plus robuste, et surtout ne nécessite pas d'hypothèse à réaliser sur la distribution sous-jacente.

Comme son nom l'indique (idée de « s'auto hisser en utilisant ses lacets »), cette méthode permet, à partir d'un échantillon initial, de simuler N nouveaux échantillons de même taille que l'échantillon de départ. C'est pourquoi, le Bootstrap est aussi vu comme une méthode de « ré-échantillonnage ».

Dans le cas du provisionnement, l'échantillon initial est le triangle supérieur des règlements et le but est d'estimer un intervalle de confiance de l'estimation de la Provision Technique totale.

L'hypothèse fondamentale du Bootstrap est que les éléments de l'échantillon sont indépendants et identiquement distribués (iid). Or cette hypothèse n'est pas vérifiée par les règlements incrémentaux qui ne sont pas mutuellement indépendants. Pour cela, l'échantillonnage ne va pas se faire sur les incréments mais sur les résidus de Pearson calculés à partir de ces données.

Les notations utilisées dans la suite sont présentées ci-dessous :

- Règlement incrémental prédit pour l'année d'origine i et l'année de développement j : $\hat{X}_{i,j}$
- Règlement cumulé prédit pour l'année d'origine i et l'année de développement j : $\hat{C}_{i,j}$
- Résidus de Pearson calculé pour l'année d'origine i et l'année de développement j : $r_{i,j}$
- Nouveau résidus de Pearson calculé après ré-échantillonnage pour l'année d'origine i et l'année de développement j : $r_{i,j}^*$

a) Prédiction du triangle supérieur

Dans un premier temps, il est nécessaire d'estimer le triangle supérieur obtenu avec la sélection faite des coefficients de passage. Pour cela, nous repartons de la dernière diagonale cumulée du triangle initial puis nous appliquons les coefficients de passage afin d'estimer la partie supérieure gauche du triangle.

Pour la dernière diagonale, nous appliquons la formule suivante :

$$\forall i = 0, \dots, I \quad \hat{C}_{i,I-i} = C_{i,I-i}$$

Pour les autres termes du triangle supérieur gauche, nous utilisons les coefficients de passage utilisés à l'inverse par rapport au développement du triangle inférieur dans Chain Ladder :

$$\forall i + j < I \quad \hat{C}_{i,j} = \frac{\hat{C}_{i,j+1}}{f_j}$$

A partir du triangle des règlements cumulés prédits, il est possible de prédire le triangle des règlements incrémentaux. La première colonne des montants incrémentaux est égale à la première colonne des montants cumulés : $\forall i = 0, \dots, I \quad \hat{X}_{i,0} = \hat{C}_{i,0}$

Puis les montants incrémentaux restants du triangle supérieur sont calculés par la formule suivante :

$$\forall 0 < i + j \leq I \quad \hat{X}_{i,j} = \hat{C}_{i,j} - \hat{C}_{i,j-1}$$

b) Calcul des résidus de Pearson

Les résidus de Pearson « bruts », sans ajustement, correspondent à la différence entre les montants incrémentaux du triangle supérieur d'origine et les montants incrémentaux du triangle supérieur prédit divisée par la racine carrée du montant incrémental prédit correspondant :

$$\forall i + j \leq I \quad r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{X}_{i,j}}{\sqrt{\hat{X}_{i,j}}}$$

Les résidus des deux extrémités de la diagonale ($r_{0,I}$ et $r_{I,0}$) sont nuls par construction et non i.i.d : Actuaris International a ainsi choisi de les exclure par défaut du ré-échantillonnage, à l'inverse des publications anglo-saxonnes qui les retiennent systématiquement.

Il est aussi possible d'ajuster les résidus de Pearson en corrigeant chaque terme par le nombre de degrés de liberté. Pour ce faire, chaque résidu est multiplié par le facteur suivant :

$$DoF = \sqrt{\frac{B}{B - p}}$$

Où B correspond au nombre de résidus non exclus, dans le cas présent : $B = \frac{I(I+1)}{2} - 2$

Et p correspond au nombre de paramètres, dans le cas présent : $p = 2I - 1$

c) Mécanisme du Bootstrap

A chaque itération du Bootstrap, le triangle de résidus de Pearson est ré-échantillonné : pour chaque cellule un tirage aléatoire avec remise est effectué parmi les valeurs des résidus non exclus. De ce fait, une même valeur peut se retrouver plusieurs fois dans le triangle.

De nouveaux triangles supérieurs de montants incrémentaux sont alors calculés à chaque itération. Chaque terme est estimé par la formule suivante :

$$\forall i + j \leq I \quad X_{i,j}^* = r_{i,j}^* \times \sqrt{\hat{X}_{i,j}} + \hat{X}_{i,j}$$

Pour chaque itération, à partir du triangle incrémental supérieur, il est possible de calculer le triangle cumulé supérieur correspondant et de le développer en utilisant la méthode classique de Chain Ladder. Ceci permet alors d'obtenir un vecteur de réserves par année de survénance ainsi que la réserve totale pour chaque itération.

Les échantillons ainsi obtenus permettent de construire une courbe de distribution des réserves :

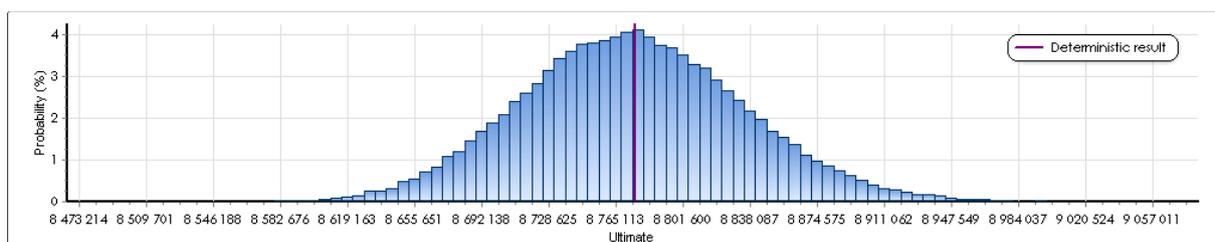


FIGURE 10 : Exemple de fonction de répartition des réserves obtenues avec le Bootstrap

En utilisant cette distribution probabiliste, il est non seulement possible de calculer la moyenne des réserves mais aussi différentes mesures de risque telles que l'écart type, les VaR et TVaR pour les niveaux de risque souhaités.

Les deux méthodes précédemment détaillées présentent des inconvénients communs puisqu'ils reposent tous deux non seulement sur les hypothèses sous-jacentes de Chain Ladder mais aussi sur les montants cumulés. Le fait de devoir s'appliquer sur les montants cumulés présente notamment l'inconvénient suivant : pour les triangles comportant des incréments inconnus pour les années de survenance les plus anciennes A_1, \dots, A_x , il n'est pas possible de calculer les valeurs cumulées dans la partie droite du triangle pour les lignes 1 à x , or ces dernières sont capitales pour l'évaluation des facteurs de développement à droite du triangle.

A l'inverse, les méthodes basées sur des incréments peuvent s'appliquer sur la partie droite du triangle, les données correspondantes étant disponibles car correspondant à des exercices comptables récents.

La méthode RJMCMC présentée dans les parties suivantes s'affranchit des hypothèses de Chain Ladder et est basée sur les montants incrémentaux, ce qui en fait une méthode stochastique novatrice.

PARTIE II : LA METHODE RJMCMC

CHAPITRE 1 : PREREQUIS STATISTIQUES

1.1 NOTIONS BAYESIENNES

a) Définitions

Dans cette partie, les principales notions d'une approche Bayésienne (Bayes et Price (1763)) seront rappelées ainsi que quelques définitions fondamentales.

Soit x un évènement. La connaissance initiale dont on dispose est $p(x)$, elle est appelée distribution a priori.

On note y une observation de cet évènement. On note alors $f(y|x)$ la vraisemblance de y sachant x .

Enfin, on définit la probabilité a posteriori de x par $p(x|y)$. Cette densité représente l'information obtenue de l'observation y pour le paramètre réellement observé x .

b) Théorème de Bayes

Afin d'estimer la distribution a posteriori de la variable x connaissant l'observation y , le théorème de Bayes fournit la formule suivante :

$$p(x|y) = \frac{f(y|x)p(x)}{f(y)}$$

$f(y)$ représente la fonction de densité de l'observation y . La valeur de cette fonction étant indépendante de x , l'expression simplifiée suivante est souvent utilisée :

$$p(x|y) \propto f(y|x)p(x)$$

Où le signe \propto signifie que la distribution a posteriori de x est proportionnelle au produit de la vraisemblance de y sachant x et de la distribution a priori de x .

1.2 ALGORITHME DE METROPOLIS HASTINGS

a) Contexte

L'algorithme de Metropolis Hastings (1970) est une Chaîne de Markov dite de Monte Carlo, dont l'objet est d'obtenir une réalisation d'échantillons aléatoires à partir d'une distribution dont l'échantillonnage direct est difficile.

Soit f la densité de la loi cible.

On définit une loi de proposition, aussi appelée loi instrumentale, $q(y|x)$ qui permettra de proposer une nouvelle valeur à partir de la valeur de la chaîne de Markov à l'état précédent. Cette loi définit un tirage aléatoire sur l'univers des valeurs Ω .

La nouvelle valeur proposée est alors « acceptée » ou « rejetée » à l'aide de l'élaboration d'une probabilité d'acceptation.

Une des caractéristiques principales de l'algorithme de Metropolis Hastings est qu'il ne nécessite pas la connaissance exacte de la loi cible f mais sa connaissance à une constante multiplicative près.

b) Algorithme de Metropolis Hastings à une dimension

Dans cette partie, le déroulement de l'algorithme de Metropolis Hastings est décrit pas à pas.

Chaque simulation de l'algorithme sera représentée par l'exposant (t)

(1) Initialisation de l'algorithme avec une valeur $x^{(0)}$

(2) Proposition d'une nouvelle valeur y à partir de l'ancienne valeur $x^{(t)}$ en utilisant la densité de proposition $q(y|x^{(t)})$

(3) Calcul de la probabilité d'acceptation à partir de la formule suivante :

$$\alpha(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{f(y) q(x^{(t)}|y)}{f(x^{(t)}) q(y|x^{(t)})} \right\}$$

(4) Deux cas sont alors possible

On accepte la nouvelle simulation :	On rejette la nouvelle simulation :
Etablir $x^{(t+1)} = y$	Etablir $x^{(t+1)} = x^{(t)}$

L'algorithme est réitéré à partir de l'étape (2).

c) Remarques

Dans le cas particulier d'une fonction de proposition symétrique :

$$q(x|y) = q(y|x)$$

La probabilité d'acceptation peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\alpha(x^{(t)}, y) = \min \left\{ 1, \frac{f(y)}{f(x^{(t)})} \right\}$$

Par exemple si la loi de proposition est une loi normale centrée en $x^{(t)} : y \sim \mathcal{N}(x^{(t)}, \sigma^2)$ alors l'expression de sa fonction de densité est :

$$q(y|x^{(t)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-x^{(t)})^2}{2\sigma^2}}$$

On a aussi :

$$q(x^{(t)}|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x^{(t)}-y)^2}{2\sigma^2}}$$

Or $(x^{(t)} - y)^2 = (y - x^{(t)})^2$ donc $q(y|x^{(t)}) = q(x^{(t)}|y)$

Le second ratio calculé dans la probabilité d'acceptation peut alors être supprimé.

La deuxième remarque concerne le choix de la variance de la loi de proposition. En effet, son choix est très important. Deux caractéristiques fondamentales en découlent :

- Si l'on choisit une variance faible : les valeurs simulées seront proches des valeurs de départ, la probabilité d'acceptation sera par conséquent, proche de 1. La distribution stationnaire sera plus rapidement atteinte.
- Si l'on choisit une variance grande : l'espace des valeurs sera plus largement parcouru. Il faut que la chaîne représente un bon mélange des valeurs de l'échantillonnage : c'est ce qui est appelé un « *good mixing* ». Un bon mélange impliquera un temps de convergence vers la distribution stationnaire plus long.

Il est difficile de maximiser ces deux objectifs à la fois. Il faut prendre un bon compromis pour la variance pour que les valeurs proposées soient proches des valeurs précédentes et pas trop grande pour que la probabilité d'acceptation soit proche de 1.

Par ailleurs, il est en général pertinent d'ignorer les premiers échantillons générés par l'algorithme, qui correspondent à une période appelée *Burn-in*, afin d'effectuer les calculs de mesure de risque sur les échantillons suivant cette période.

Comme vu précédemment, le choix de la loi de proposition q a donc un impact sur la rapidité de convergence, et donc sur le *Burn-in*.

1.3 RE-ECHANTILLONNAGE DE GIBBS

a) Contexte

Le ré-échantillonnage de Gibbs (Casella et George 1992) est une méthode Markov Chain Monte Carlo qui consiste à obtenir des échantillons aléatoires à partir d'une distribution aléatoire multivariée.

Il est très utile lorsque le ré-échantillonnage direct n'est pas possible. Il permet d'obtenir une approximation de la distribution jointe de l'ensemble des variables.

Il se base sur le rafraichissement de certains paramètres conditionnellement à l'ensemble du reste des paramètres.

Le rafraichissement des paramètres s'effectue au fur et à mesure, en tenant compte des nouvelles valeurs des premiers paramètres qui ont été rafraichis.

b) Algorithme de Gibbs

Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_I\}$ le vecteur initial dont on souhaite obtenir plusieurs échantillons afin d'en estimer la distribution.

On introduit les notations suivantes pour définir les valeurs du $t^{\text{ème}}$ échantillon du vecteur X :

$$X^{(t)} = \{x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_I^{(t)}\}$$

On définit l'ensemble suivant : $X_{-k} = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_I\}$ qui correspond à l'ensemble des éléments du vecteur excepté la valeur x_k .

Le rafraichissement de la valeur x_k dépendra ainsi du vecteur X_{-k} .

Le déroulement du ré-échantillonnage de Gibbs est le suivant (l'exposant $^{(t)}$ représente la simulation t de l'algorithme) :

(1) Le vecteur X est initialisé :

$$X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_I^{(0)}\}$$

(2) La valeur de chaque élément du vecteur $X^{(t)}$ est rafraîchie grâce à la probabilité conditionnelle suivante :

$$x_k^{(t+1)} \sim p(x_k^{(t+1)} | x_1^{(t+1)}, x_2^{(t+1)}, \dots, x_{k-1}^{(t+1)}, x_{k+1}^{(t)}, \dots, x_I^{(t)})$$

A la fin de cette étape, un nouveau vecteur $X^{(t+1)} = \{x_1^{(t+1)}, x_2^{(t+1)}, \dots, x_I^{(t+1)}\}$ est ainsi obtenu.

(3) L'étape (2) est répétée afin d'obtenir autant d'échantillons souhaités du vecteur X : les $X^{(t)}$ avec $t = 0, \dots, N$ où N est le nombre d'itérations.

Cet algorithme permet de rafraîchir les valeurs du vecteur une par une en utilisant les nouvelles valeurs des éléments précédents qui viennent d'être ré-échantillonnés.

c) Remarques

Les échantillons ainsi obtenus permettent d'approximer la densité jointe de toutes les variables.

Il est aussi possible d'approximer la distribution marginale d'un sous ensemble en considérant simplement les échantillons qui concernent ce sous ensemble des variables.

L'espérance de chaque variable peut être obtenue en effectuant une moyenne sur tous les échantillons.

Le ré-échantillonnage de Gibbs nous fournissant une distribution d'un vecteur de variables aléatoires, il est aussi possible d'utiliser d'autres mesures de risque telles que l'écart type, les Value-at-Risk et Tail-Value-at-Risk à différents niveaux de risques.

Tout comme pour l'algorithme de Metropolis-Hastings, il est en général pertinent d'ignorer les premiers échantillons générés par l'algorithme, de *Burn-in*. Ceci se justifie par le fait que la distribution stationnaire de la chaîne de Markov générée correspond à la distribution jointe des variables, et que cette distribution peut prendre du temps avant d'être atteinte.

CHAPITRE 2 : L'ALGORITHME RJMCMC

2.1 CONTEXTE ET APPROCHE

a) Présentation du contexte initial

Comme pour toute méthode de provisionnement, le point de départ est un triangle supérieur initial, noté $D_I = \{X_{ij}; i + j \leq I, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$ par la suite.

X_{ij} correspond au montant incrémental pour l'année de survenance i et la $j^{\text{ème}}$ année de développement.

C'est ce triangle incrémental qui constituera la source des données servant de base aux projections, contrairement aux méthodes usuelles (Chain Ladder, Bootstrap, Bornhuetter-Ferguson etc.) qui sont, elles, basées sur des données cumulées, comme vu précédemment.

Cela permet d'appliquer la méthode notamment lorsque les données incrémentales en haut à gauche du triangle (c'est-à-dire celles correspondant aux exercices comptables les plus anciens) sont manquantes.

Le but de la méthode est d'obtenir une distribution des provisions pour chaque année de survenance ainsi que pour les provisions totales. Pour ce faire, il faut dans un premier temps estimer le triangle inférieur, noté $D_I^C = \{X_{ij}; i + j > I, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$.

Le modèle de Verrall et Wüthrich (2012) repose sur l'existence de paramètres spécifiques pour chaque ligne μ_i et des paramètres pour chaque colonne γ_j . Les montants incrémentaux sont alors supposés indépendants et chaque incréments suit une loi de Poisson sur-dispersée avec les paramètres suivants :

$$\left(\frac{X_{ij}}{\varphi} \mid \vartheta\right) \sim Poi\left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi}\right)$$

φ étant le paramètre de sur dispersion de la loi.

Les spécificités des lois de Poisson sur-dispersées mènent aux propriétés suivantes :

$$E[X_{ij}] = \mu_i \gamma_j \text{ et } Var[X_{ij}] = \varphi \mu_i \gamma_j$$

$\vartheta = \{\mu_0, \dots, \mu_I, \gamma_0, \dots, \gamma_I, \varphi\}$ représente alors le vecteur de paramètres nécessaires afin d'estimer le triangle inférieur.

b) Hypothèses du modèle

Dans cette partie, les différentes hypothèses concernant les distributions de chacun des paramètres sont présentées.

- Concernant les paramètres des lignes μ_i , il est admis que ces paramètres sont mutuellement indépendants et identiquement distribués selon la loi gamma suivante :

$$\forall i \in \{0, \dots, I\} \quad \mu_i \sim \Gamma\left(s, \frac{s}{m_i}\right)$$

s et m_i sont des paramètres a priori dont le calcul est expliqué dans la section suivante de ce mémoire.

- La seconde hypothèse établit l'existence de deux modèles afin d'estimer le vecteur des paramètres des colonnes $(\gamma_0, \dots, \gamma_I)$. Jusqu'à un certain indice de troncature, les paramètres des colonnes sont indépendants et suivent une loi Gamma, et à partir de cet indice de troncature, une décroissance exponentielle est utilisée pour estimer les paramètres des colonnes. Soit k l'indice de troncature :

$$\forall j \in \{0, \dots, k-1\} \quad \gamma_j \sim \Gamma\left(v, \frac{v}{c_j}\right)$$

$$\forall j \in \{k, \dots, I\} \quad \gamma_j = \exp(\alpha - j\beta)$$

L'utilisation de la fonction exponentielle pour modéliser la queue de distribution implique l'estimation des deux paramètres α et β . Pour cela, une hypothèse est faite sur les distributions a priori de ces paramètres :

$$\alpha \sim N(a, \sigma^2) \text{ et } \beta \sim N(b, \tau^2)$$

v, c_j, σ and τ sont des paramètres a priori, positifs et a et b sont des paramètres a priori, réels. Le choix de ces estimateurs est décrit dans la section suivante.

Comme détaillé dans le Chapitre 2 de la partie III, il est possible d'utiliser une autre fonction à deux paramètres plutôt que la fonction exponentielle.

Le vecteur de paramètres initial $\vartheta = (\mu_0, \dots, \mu_I, \gamma_0, \dots, \gamma_I, \varphi)$ peut alors être remplacé par un nouveau vecteur à estimer : $\theta_k = (\alpha, \beta, \mu_0, \dots, \mu_I, \gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}, \varphi)$.

Il est alors possible d'exprimer la densité jointe des données $(X_{i,j})_{(i,j) \in \{0, \dots, I\}^2}$ et du vecteur de paramètres θ_k :

$$f_k \left((X_{i,j})_{(i,j) \in \{0, \dots, I\}^2}, \theta_k \right) = f_k \left((X_{i,j})_{(i,j) \in \{0, \dots, I\}^2} \mid \theta_k \right) p_k(\theta_k)$$

Où

$$f_k \left((X_{i,j})_{(i,j) \in \{0, \dots, I\}^2} \mid \theta_k \right) = \prod_{(i,j) \in \{0, \dots, I\}^2} e^{-\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi}} \frac{\left(\frac{\mu_i \gamma_j}{\varphi} \right)^{\frac{X_{ij}}{\varphi}}}{\left(\frac{X_{ij}}{\varphi} \right)!}$$

Et

$$\begin{aligned}
 p_k(\theta_k) &\propto \prod_{i=0}^I \mu_i^{s-1} e^{-\frac{s}{m_i} \mu_i} && \left. \begin{array}{l} \text{Densité a priori de l'ensemble des} \\ \mu_i \sim \Gamma\left(s, \frac{s}{m_i}\right) \end{array} \right\} \\
 &\times \prod_{j=0}^{k-1} \gamma_j^{v-1} e^{-\frac{v}{c_j} \gamma_j} && \left. \begin{array}{l} \text{Densité a priori de l'ensemble des} \\ \gamma_j \sim \Gamma\left(v, \frac{v}{c_j}\right) \end{array} \right\} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (\alpha - a)^2\right\} && \left. \begin{array}{l} \text{Densité a priori du paramètre} \\ \alpha \sim N(a, \sigma^2) \end{array} \right\} \\
 &\times \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2} (\beta - b)^2\right\} && \left. \begin{array}{l} \text{Densité a priori du paramètre} \\ \beta \sim N(b, \tau^2) \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

2.2 FONCTIONNEMENT DE L'ALGORITHME

A partir du papier de Verrall et Wüthrich (2012), nous allons résumer dans cette partie les différentes étapes de l'algorithme de RJMCMC.

a) Initialisation de l'algorithme

Les paramètres des lignes et des colonnes sont dans un premier temps estimés par la méthode du maximum de vraisemblance. Ils sont ensuite normalisés de sorte que la somme des paramètres des colonnes est égale à 1. Ce choix n'a pas d'impact dans la suite des calculs. Avec cette convention, les paramètres des colonnes peuvent être assimilés à des cadences de développement et les paramètres des lignes peuvent être considérés comme les montants ultimes prédicts.

A partir de ces estimateurs, plusieurs paramètres a priori peuvent être calculés avec le maximum de vraisemblance (une autre approche acceptable mais moins précise pourrait être l'approche des moindres carrés de De Vylder) :

$$\begin{aligned}
 m_i &= \mu_i^{MLE} \\
 c_j &= \gamma_j^{MLE}
 \end{aligned}$$

Ces paramètres a priori sont utilisés dans les distributions des paramètres des lignes et des colonnes :

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \{0, \dots, I\} \quad \mu_i &\sim \Gamma\left(s, \frac{s}{m_i}\right) \\
 \forall j \in \{0, \dots, k-1\} \quad \gamma_j &\sim \Gamma\left(v, \frac{v}{c_j}\right)
 \end{aligned}$$

Les paramètres s et ν reflètent l'incertitude a priori associée aux estimateurs des paramètres des lignes et des colonnes respectivement.

Ils doivent être choisis de manière à refléter au mieux l'incertitude liée aux estimations a priori. Par exemple, les coefficients de variation suivants peuvent être alloués : 10% pour les paramètres des lignes et 100% pour les paramètres des colonnes. Il semble plus convenable de choisir une incertitude plus grande pour les paramètres des colonnes puisque l'effet de lissage n'est pas pris en compte dans l'estimation a priori des γ_j .

Une fois que l'initialisation est faite, nous pouvons nous concentrer sur la récursivité de l'algorithme.

b) Déroulement de l'algorithme

Supposons que le calcul des paramètres à l'état t est terminé. A partir de ce point, et en se basant sur le principe de la chaîne de Markov, les calculs de l'état $t + 1$ peuvent être effectués.

La méthode d'origine de Verrall et Wüthrich (2012) fait intervenir les étapes suivantes :

Etape A : le choix d'un nouvel indice de troncature

Un nouvel indice de troncature k^* est choisi à partir de l'indice de troncature précédent $k^{(t)}$. Pour ce faire, la distribution de probabilité discrète suivante est utilisée :

$$\begin{aligned} \forall k^{(t)} \in \{2, \dots, I - 1\} \quad q(k^* = k^{(t)} - 1 | k^{(t)}) &= q(k^* = k^{(t)} + 1 | k^{(t)}) = q(k^* = k^{(t)} | k^{(t)}) = \frac{1}{3} \\ q(k^* = 1 | k^{(t)} = 1) &= \frac{2}{3} \quad q(k^* = 2 | k^{(t)} = 1) = \frac{1}{3} \\ q(k^* = I | k^{(t)} = I) &= \frac{2}{3} \quad q(k^* = I - 1 | k^{(t)} = I) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Cette distribution implique qu'il est possible de « sauter » d'un modèle à un modèle voisin. Cela signifie que la dimension du vecteur de paramètres peut changer d'une unité ou rester inchangée.

L'initialisation de cet indice de troncature est aléatoire et peut par exemple correspondre à la période de développement centrale du triangle. Cette initialisation n'a pas d'impact sur les résultats finaux puisque l'algorithme va lui-même tester toutes les valeurs possibles pour l'indice de troncature.

Etape B : Mise à jour de l'ensemble des paramètres lorsque $k^* = k^{(t)}$

Si $k^* = k^{(t)}$ alors l'égalité suivante est immédiatement établie $k^{(t+1)} = k^{(t)}$.

L'échantillonnage par blocs de Metropolis Hastings est ensuite utilisé afin de mettre à jour chaque paramètre. Il se décompose en trois étapes :

- La mise à jour des paramètres des lignes ($\mu_0^{(t)}, \dots, \mu_I^{(t)}$) par l'application du ré-échantillonnage de Gibbs. Conditionnellement aux autres paramètres, ils sont mutuellement indépendants et suivent des lois gamma :

$$\mu_i^{(t+1)} \sim \Gamma\left(s_i^{post}, \left(\frac{s}{m_i}\right)_i^{post}\right)$$

Où $s_i^{post} = s_i + \frac{1}{\varphi} \sum_{j=0}^{I-i} X_{ij}$ et $\left(\frac{s}{m_i}\right)_i^{post} = \frac{s}{m_i} + \frac{1}{\varphi} \sum_{j=0}^{I-i} \gamma_j^{(t)}$

Nous remarquons que la mise à jour des paramètres des lignes μ_i fait intervenir les valeurs des paramètres des colonnes de l'état précédent, $\gamma_j^{(t)}$, comme ces derniers n'ont pas encore été mis à jour.

- La mise à jour des paramètres des colonnes $(\gamma_0^{(t)}, \dots, \gamma_{k^{(t)}-1}^{(t)})$ par l'application du ré-échantillonnage de Gibbs. Conditionnellement aux autres paramètres, ils sont mutuellement indépendants et suivent des lois gamma :

$$\gamma_j^{(t+1)} \sim \Gamma\left(v_j^{post}, \left(\frac{v}{c_j}\right)_j^{post}\right)$$

Où $v_j^{post} = v + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=0}^{I-j} X_{ij}$ et $\left(\frac{v}{c_j}\right)_j^{post} = \frac{v}{c_j} + \frac{1}{\varphi} \sum_{i=0}^{I-j} \mu_i^{(t+1)}$

Nous remarquons que la mise à jour des paramètres des colonnes γ_j fait intervenir les valeurs des paramètres des lignes, mais de l'état actuel, $\mu_i^{(t+1)}$, comme ces derniers ont déjà été mis à jour.

- La mise à jour de $(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})$ par l'application de l'algorithme de Metropolis Hastings. De nouvelles valeurs sont proposées pour ce vecteur grâce à la génération aléatoire d'une distribution gaussienne bi-variée :

$$(\alpha^*, \beta^*) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \alpha^{(t)} \\ \beta^{(t)} \end{pmatrix}, \Sigma\right)$$

Où Σ représente la matrice de variance covariance. Pour plus de simplicité, nous considérons que α et β sont indépendants :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} Var_{\alpha} & 0 \\ 0 & Var_{\beta} \end{pmatrix}$$

Une probabilité d'acceptation est ensuite calculée en utilisant la formule générale de Green (1995) :

$$\alpha(t \rightarrow *) = \min\left(1, \frac{f(\alpha^*, \beta^*) \times q\left((\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) | (\alpha^*, \beta^*)\right)}{f(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) \times q\left((\alpha^*, \beta^*) | (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})\right)}\right)$$

Les derniers termes correspondent à la densité de proposition. Ici, ces termes utilisent la densité de la loi gaussienne bi-variée qui est une fonction paire². Nous pouvons donc écrire (preuve en annexe 3) :

$$q\left((\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) | (\alpha^*, \beta^*)\right) = q\left((\alpha^*, \beta^*) | (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})\right)$$

La probabilité d'acceptation peut donc être écrite comme :

$$\alpha(t \rightarrow *) = \min\left(1, \frac{f(\alpha^*, \beta^*)}{f(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})}\right)$$

La densité f est proportionnelle à :

² Voir annexe 3 pour la preuve de la simplification

$$f(\alpha, \beta) \propto \prod_{j=k^{(t)}}^I \left[e^{-\exp(\alpha - j\beta) \sum_{i=0}^{I-j} \frac{\mu_i^{(t+1)}}{\varphi}} (\exp(\alpha - j\beta))^{\sum_{i=0}^{I-j} \frac{X_{ij}}{\varphi}} \right] \times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\alpha - a)^2\right\} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\tau^2}(\beta - b)^2\right\}$$

Deux cas sont ensuite possibles :

- Si les valeurs proposées sont acceptées, il est établi que : $(\alpha^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) = (\alpha^*, \beta^*)$
- Si les valeurs proposées sont rejetées, il est établi que : $(\alpha^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}) = (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})$

Ces trois étapes fournissent l'ensemble des paramètres mis à jour :

$$\Theta^{(t+1)} = \left(k^{(t+1)}, \theta_{k^{(t+1)}}^{(t+1)} \right) = \left(k^{(t+1)}, \left(\alpha^{(t+1)}, \beta^{(t+1)}, \mu_0^{(t+1)}, \dots, \mu_I^{(t+1)}, \gamma_0^{(t+1)}, \dots, \gamma_{k^{(t+1)}-1}^{(t+1)} \right) \right)$$

Etape C : Cas pour lesquels $k^* \neq k^{(t)}$

Ils correspondent aux cas pour lesquels la dimension du vecteur de paramètres change. Le seul paramètre à considérer est le paramètre de la colonne qui est supposé sauter d'un modèle à l'autre.

▪ Cas 1 : $k^{(t)} < I$ et $k^* = k^{(t)} + 1$

Cela signifie que le paramètre de colonne $\gamma_{k^{(t)}}^{(t)}$ quitte la queue de distribution et rejoint la partie gauche du vecteur des paramètres des colonnes.

L'ensemble des autres paramètres ne sont pas mis à jour et restent égaux à leur valeur de l'état précédent. Une nouvelle valeur est proposée pour le paramètre qui passe d'un modèle à l'autre :

$$\gamma_{k^{(t)}}^* \sim \Gamma\left(v^*, \frac{v^*}{\exp\{\alpha^{(t)} - k^{(t)}\beta^{(t)}\}}\right)$$

La probabilité d'acceptation suivante est ensuite calculée :

$$\alpha(t \rightarrow *) = \min \left\{ 1, \prod_{i=0}^{I-k^*} \left[\frac{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_{k^{(t)}}^*}{\varphi}} (\gamma_{k^{(t)}}^*)^{\frac{X_{ik^{(t)}}}{\varphi}}}{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_{k^{(t)}}^{(t)}}{\varphi}} (\gamma_{k^{(t)}}^{(t)})^{\frac{X_{ij}}{\varphi}}} \right] \frac{\left(\frac{v}{c_{k^{(t)}}}\right)^v \Gamma(v) (\gamma_{k^{(t)}}^*)^{v-1} e^{-\frac{v}{c_{k^{(t)}}} \gamma_{k^{(t)}}^*}}{\left(\frac{v^*}{\gamma_{k^{(t)}}^{(t)}}\right)^{v^*} \Gamma(v^*) (\gamma_{k^{(t)}}^*)^{v^*-1} e^{-\frac{v^*}{\gamma_{k^{(t)}}^{(t)}} \gamma_{k^{(t)}}^*}} \right\}$$

Deux cas sont possibles :

- Si la valeur proposée est acceptée, il est établi que : $\gamma_{k^{(t)}}^{(t+1)} = \gamma_{k^{(t)}}^*$
- Si la valeur proposée est rejetée, il est établi que : $\gamma_{k^{(t)}}^{(t+1)} = \gamma_{k^{(t)}}^{(t)}$, ce qui signifie que c'est la valeur de l'état précédent dans la chaîne de Markov qui est conservée.

▪ Cas 2 : $k^{(t)} > 1$ et $k^* = k^{(t)} - 1$

Cela signifie que le paramètre de colonne $\gamma_{k^*}^{(t)}$ quitte la partie gauche du vecteur des paramètres des colonnes et rejoint la queue de distribution.

L'ensemble des autres paramètres ne sont pas mis à jour et restent égaux à leur valeur de l'état précédent. Une nouvelle valeur est proposée pour le paramètre qui passe d'un modèle à l'autre :

$$\gamma_{k^*}^* = \exp(\alpha^{(t)} - k^* \beta^{(t)})$$

La probabilité d'acceptation suivante est calculée :

$$\alpha(t \rightarrow *) = \min \left\{ 1, \prod_{i=0}^{l-k^*} \left[\frac{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_{k^*}^*}{\varphi}} (\gamma_{k^*}^*)^{\frac{X_{ik^*}}{\varphi}}}{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_{k^*}^{(t)}}{\varphi}} (\gamma_{k^*}^{(t)})^{\frac{X_{ik^*}}{\varphi}}} \right] \frac{\left(\frac{v^*}{\gamma_{k^*}^*}\right)^{v^*} (\gamma_{k^*}^{(t)})^{v^*-1} e^{-\frac{v^*}{\gamma_{k^*}^*} \gamma_{k^*}^{(t)}}}{\Gamma(v^*)} \frac{\left(\frac{v}{\gamma_{k^*}^{(t)}}\right)^v (\gamma_{k^*}^{(t)})^{v-1} e^{-\frac{v}{\gamma_{k^*}^{(t)}} \gamma_{k^*}^{(t)}}}{\Gamma(v)} \right\}$$

Deux cas sont ensuite possibles :

- Si la valeur proposée est acceptée, il est établi que : $\gamma_{k^*}^{(t+1)} = \gamma_{k^*}^*$
- Si la valeur proposée est rejetée, il est établi que : $\gamma_{k^*}^{(t+1)} = \gamma_{k^*}^{(t)}$, ce qui signifie que c'est la valeur de l'état précédent dans la chaîne de Markov qui est conservée.

Une fois que toutes ces étapes ont été effectuées, nous obtenons un nouveau vecteur de paramètres :

$$\Theta^{(t+1)} = \left(k^{(t+1)}, \theta_{k^{(t+1)}}^{(t+1)} \right)$$

Remarque : Utilisation de la probabilité d'acceptation

Lorsque l'on définit une probabilité d'acceptation $\alpha(* \rightarrow t)$ il faut décider si la valeur proposée est acceptée ou rejetée.

Pour ce faire, nous procédons à un tirage aléatoire d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Notons x la réalisation de ce tirage aléatoire : $x \sim \mathcal{U}[0,1]$

Les états suivants sont alors définis :

Si $x \leq \alpha(* \rightarrow t)$ alors on accepte la valeur proposée ;

Si $x > \alpha(* \rightarrow t)$ alors on rejette la valeur proposée.

Le schéma ci-dessous récapitule l'ensemble des étapes qui permettent de passer de l'état t à l'état $t + 1$ de la chaîne de Markov.

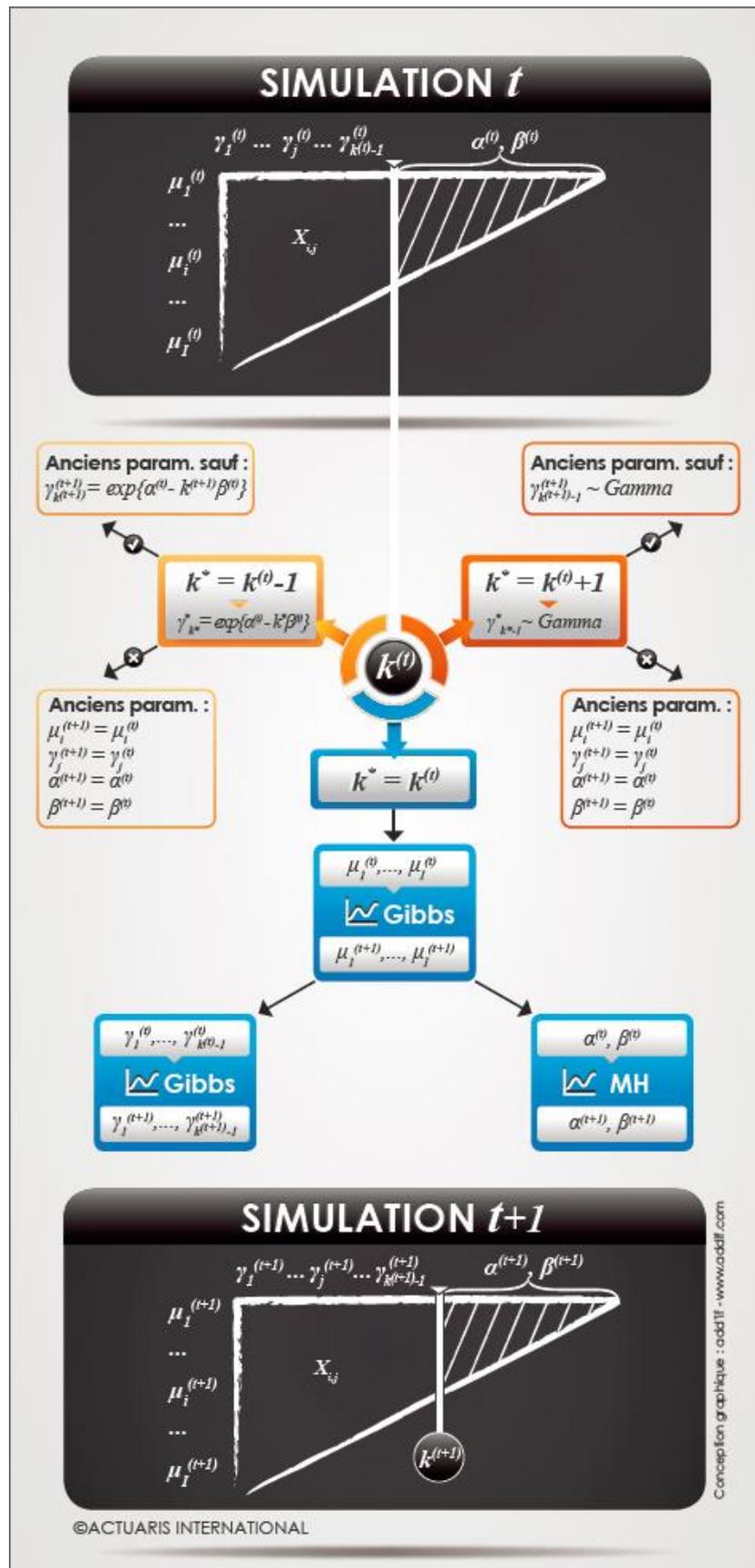


FIGURE 11 : Fonctionnement du cœur de l'algorithme de RJMCMC

2.3 IMPACT DU NOMBRE DE SIMULATIONS

L'implémentation de la méthode dans le logiciel de provisionnement non-vie d'Actuaris International³ a permis de facilement tester la méthode avec différentes graines aléatoires pour différents générateurs aléatoires : le congruentiel (générateur le plus couramment utilisé mais avec une période proche de 2^{31}) et le Mersenne Twister (avec une période importante, de $2^{19937}-1$).

a) Etude du nombre de simulations nécessaire

Les résultats qui suivent correspondent à l'exemple de données réelles (« *Real data example* ») utilisé dans le papier de Verrall et Wüthrich (2012).

L'algorithme a été lancé dix fois avec différentes graines aléatoires, et ce pour différents nombres de simulations : 10 000, 100 000, 500 000, 1 000 000, 2 000 000.

Pour la série des 10 000 simulations, le *Burn-in* a été fixé à 2 000 mais pour les autres séries, il était fixé à 20 000.

Les résultats de cette étude, en particulier les moyennes, les coefficients de variations ainsi que la VaR 99,5 % des réserves obtenues sont récapitulés dans les graphiques ci-dessous :

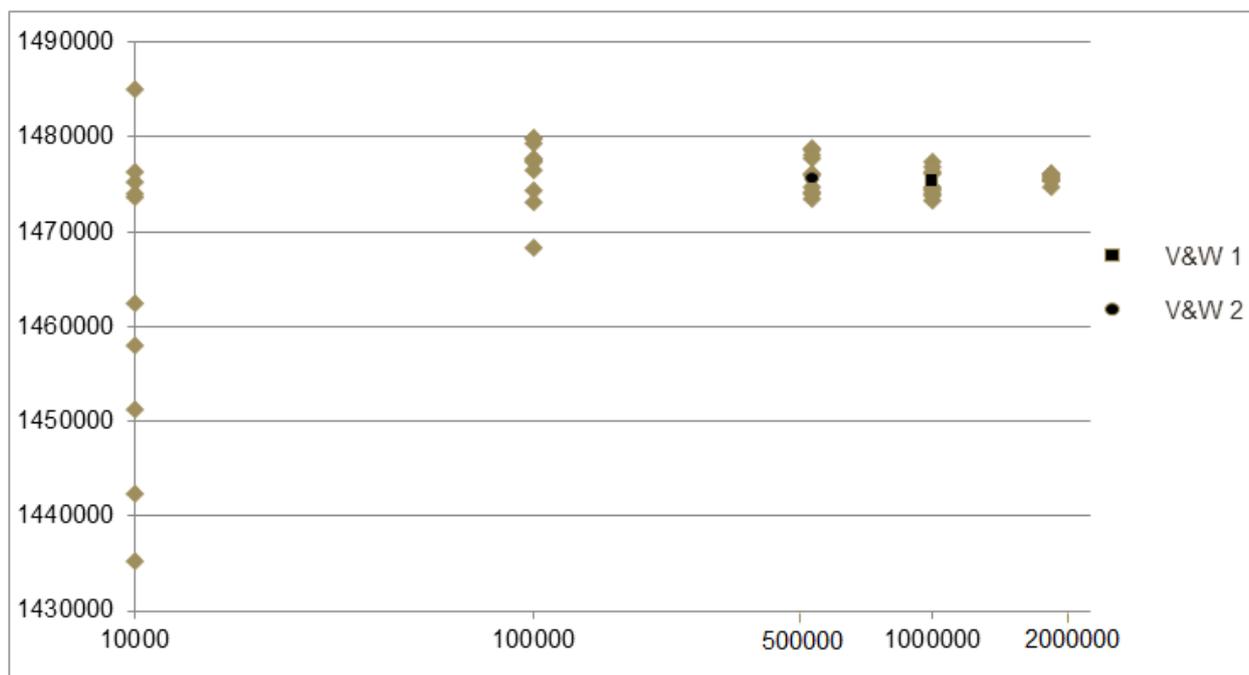


FIGURE 12 : Moyennes des réserves (axe des ordonnées) obtenues pour différents nombres de simulations (axe des abscisses)

³ IBNRS™

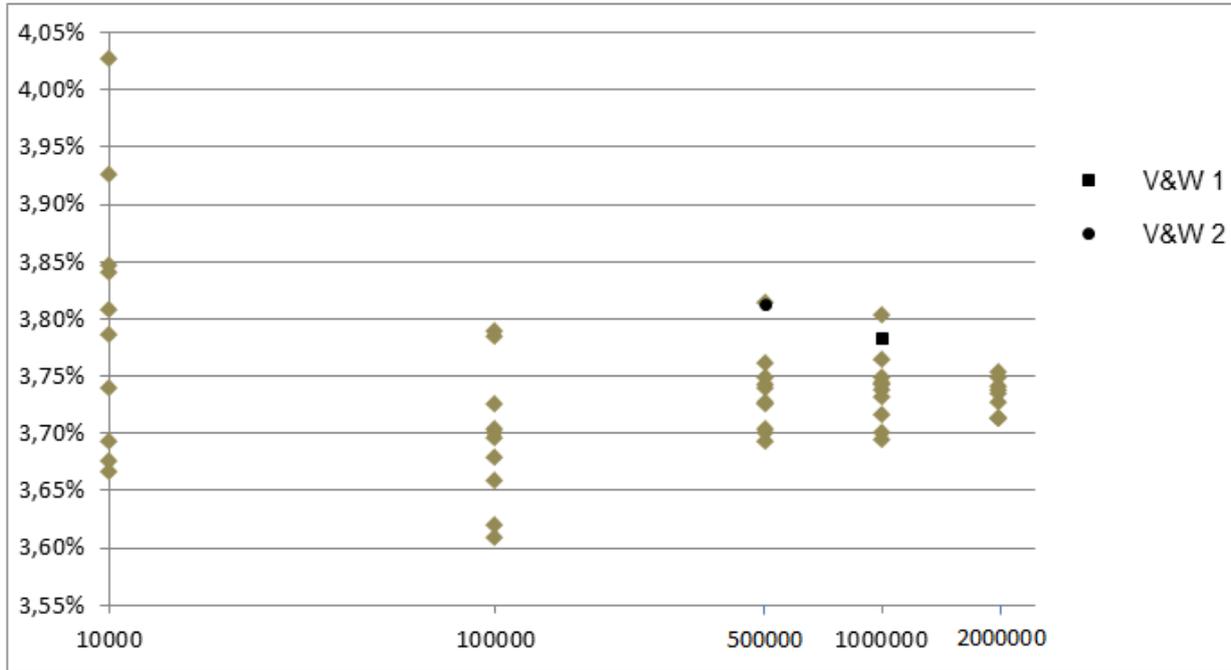


FIGURE 13 : Coefficients de variations (axe des ordonnées) des réserves obtenus pour différents nombres de simulations (axe des abscisses)

Sur les figures 12 et 13, deux points ont été rajoutés : V&W 1 qui correspond aux valeurs fournies par Verrall et Wüthrich dans leur premier papier sur la méthode RJMCMC et V&W 2 correspond aux valeurs fournies par les mêmes auteurs dans leur second papier sur RJMCMC. Les premiers résultats ont été calculés sur 1 000 000 de simulations et les seconds résultats ont été calculés sur 500 000.

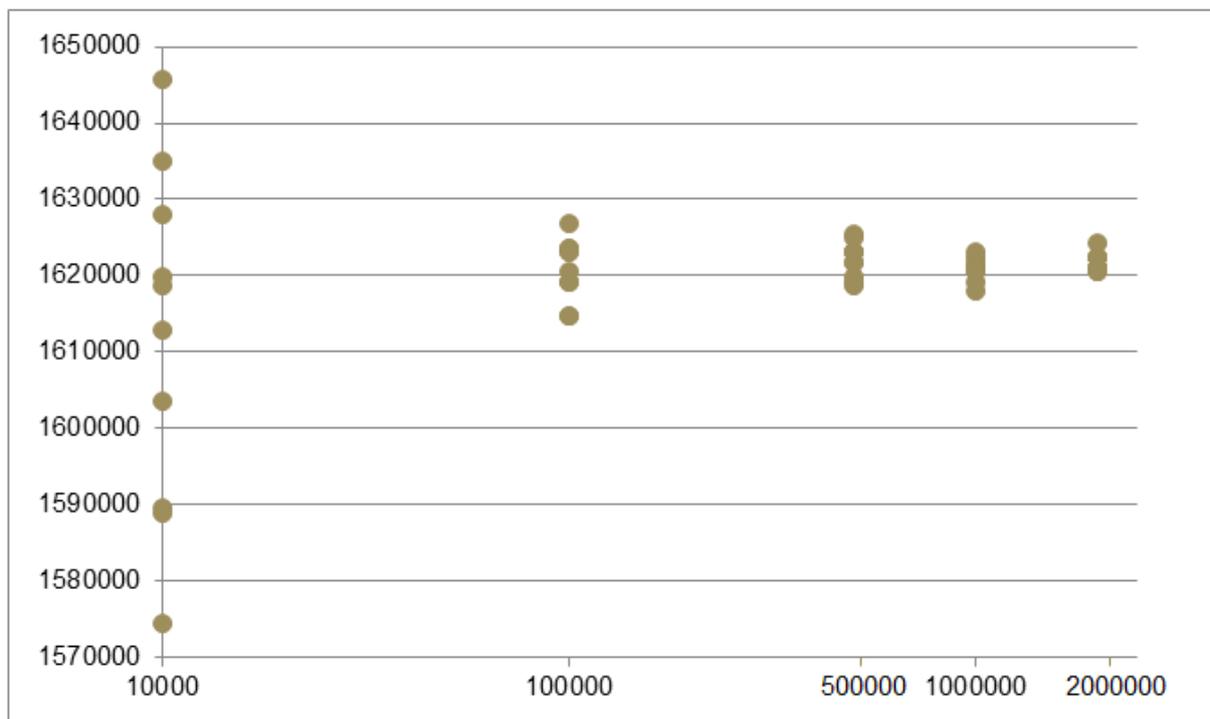


FIGURE 14 : VaR 99,5 % (axe des ordonnées) des réserves obtenues pour différents nombres de simulations (axes des abscisses)

Nous observons une convergence rapide des résultats. Ceci est particulièrement remarquable lorsque le nombre de simulations varie de 10 000 à 500 000. Au-delà de 500 000 simulations, augmenter le nombre de simulations a un impact plus minime sur la convergence.

Cette tendance a été aussi observée sur d'autres triangles du marché que nous avons étudiés. Il semblerait que 500 000 simulations soient un bon compromis entre vitesse et précision de calcul.

b) Choix du burn-in

L'autre aspect important des simulations concerne le *Burn-in*. Pour aider l'expert dans le choix de la limite de cette zone, le graphique représentant l'évolution de l'indice de troncature au fil des simulations peut être étudié :

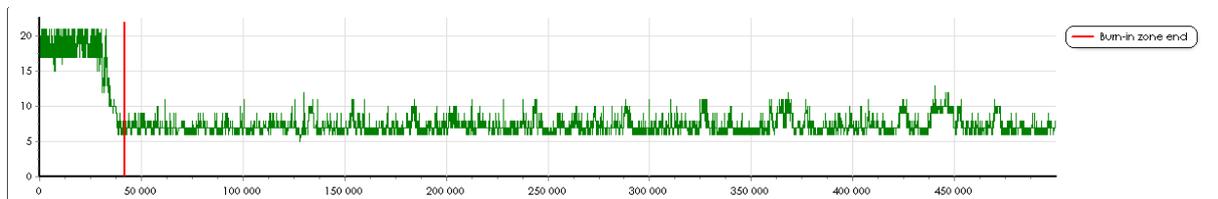


FIGURE 15 : Evolution de la valeur de l'indice de troncature au fil des simulations

La barre verticale rouge représente la fin de la zone de *Burn-in*. Dans certains cas, le placement de cette barre peut se révéler délicat. Il est donc recommandé de considérer le graphique de l'évolution de l'indice de troncature puisqu'il reflète assez bien la stabilité de l'algorithme : placer la fin de *Burn-in* à partir de la simulation où la distribution de k se stabilise semble alors pertinent.

Après avoir détaillé le fonctionnement de base de la méthode RJMCMC, nous mettrons en place, dans la partie suivante, différentes extensions de la méthode qui ont été nécessaires :

- afin de pouvoir s'affranchir des limites de la méthode, et ainsi l'appliquer à un plus large panel de triangles ;
- pour pouvoir réaliser le calcul de la volatilité à un an, ce qui permet ainsi d'utiliser RJMCMC pour calculer le risque de réserve sous l'hypothèse de travail de la norme européenne Solvabilité II.

PARTIE III : EXTENSIONS DE LA METHODE

CHAPITRE 1 : MODELISATION DES EXCLUSIONS ET DES VALEURS NEGATIVES

Les incréments négatifs ou égaux à zéros représentent une des principales limites des modèles de Poisson sur-dispersés. Or ce type de montants incrémentaux est souvent rencontré, notamment dans les triangles de charges. Dans ce chapitre, nous proposons des solutions à ces problèmes afin de pouvoir appliquer l’algorithme RJMCMC à n’importe quel triangle d’entrée.

1.1 EXCLUSION DE VALEURS

Le but de cette section est de proposer une méthodologie qui permet d’exclure certaines valeurs des données initiales. Il est en effet souvent utile de ne pas tenir compte de certaines cellules des données d’entrée qui ne sont pas représentatives de la poids pour chaque montant du triangle initial.

Le triangle suivant représente les poids pour chaque cellule du triangle :

$w_{0,0}$	$w_{0,1}$	$w_{0,I}$
$w_{1,0}$	$w_{1,1}$...	$w_{1,I-1}$	
...		
...	$w_{I-1,0}$			
$w_{I,0}$				

FIGURE 16: Triangle représentant les poids de chacune des cellules du triangle initial

Les valeurs des termes $w_{i,j}$ peuvent être 1 si le montant correspondant n’est pas exclu ou 0 si le montant est à exclure des calculs.

Ces poids sont utilisés dans chaque formule où les montants initiaux $X_{i,j}$ sont impliqués : chaque $X_{i,j}$ est alors remplacé par le produit $w_{i,j}X_{i,j}$. Ainsi, si la valeur du poids est 1, il n’y aura pas de changement dans les formules. Inversement, si le poids est égal à 0, le montant correspondant n’aura pas d’impact dans les formules de l’algorithme.

Nous calculons ensuite les fonctions indicatrices pour chaque ligne et pour chaque colonne entières. Si toutes les cellules d’une ligne ou d’une colonne sont exclues, alors la fonction indicatrice de la ligne ou colonne correspondante sera égale à 0.

Soit w_c_j la fonction indicatrice de la colonne j . Si l’ensemble des cellules de la colonne j sont exclues, alors la colonne j sera à exclure des calculs. Si $\forall i \ w_{i,j} = 0$ alors $w_c_j = 0$, sinon la colonne j est incluse et $w_c_j = 1$.

Soit w_r_i la fonction indicatrice de la ligne i . Si l’ensemble des cellules de la ligne i sont exclues, alors la ligne i sera à exclure des calculs. Si $\forall j \ w_{i,j} = 0$ alors $w_r_i = 0$, sinon la ligne i est incluse et $w_r_i = 1$.

A chaque fois qu'une somme sur les lignes est calculée, chaque terme de la somme est multiplié par wr_i . Par exemple, les sommes suivantes sont modifiées :

$$\sum_{i=0}^I \mu_i^{(t)} \text{ devient } \sum_{i=0}^I wr_i \mu_i^{(t)}.$$

A chaque fois qu'un produit sur les lignes est effectué, une puissance est rajoutée à chaque facteur. Par exemple, les produits suivants sont modifiés :

$$\prod_{i=0}^I \left[\frac{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_k^*(t)}{\varphi}} \left(\gamma_k^*(t) \right)^{\frac{X_{ik}^{(t)}}{\varphi}}}{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_k^{(t)}}{\varphi}} \left(\gamma_k^{(t)} \right)^{\frac{X_{ik}^{(t)}}{\varphi}}} \right] \text{ devient } \prod_{i=0}^I \left[\frac{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_k^*(t)}{\varphi}} \left(\gamma_k^*(t) \right)^{\frac{w_{i,k}^{(t)} X_{ik}^{(t)}}{\varphi}}}{e^{-\frac{\mu_i^{(t)} \gamma_k^{(t)}}{\varphi}} \left(\gamma_k^{(t)} \right)^{\frac{w_{i,k}^{(t)} X_{ik}^{(t)}}{\varphi}}} \right]^{wr_i}$$

De la même manière, des changements sont effectués sur les formules qui font intervenir les colonnes. C'est-à-dire que pour les calculs de sommes ou produits sur les colonnes, les fonctions indicatrices wc_j sont utilisées en tant que facteur ou exposant en fonction du cas.

Cas des sommes sur les lignes ou les colonnes égales à zéros :

L'une des principales limites des distributions de Poisson sur-dispersées est que les sommes des montants incrémentaux pour chaque ligne et chaque colonne du triangle initial doivent être différentes de zéro.

Il est alors possible de généraliser la méthodologie d'exclusion présentée ci-dessus à des colonnes ou lignes pour résoudre le problème. Si une colonne ou ligne ne contient que des incréments égaux à zéro, nous l'excluons automatiquement des calculs et établissons l'indicateur correspondante égale à zéro. Ceci permet de pouvoir appliquer la méthode sur tout type de triangle, même ceux contenant des sommes d'incrémentaux égaux à zéros (ces zéros n'apportant pas d'information aux autres colonnes du modèle).

1.3 MODELISATION DES VALEURS NEGATIVES

a) Limite des modèles de Poisson sur-dispersés

Non seulement les montants incrémentaux nuls peuvent poser des problèmes lors de l'utilisation de modèles de Poisson sur-dispersés, mais les montants incrémentaux négatifs représentent aussi une limite non négligeable de ces modèles. En effet, l'utilisation des modèles de Poisson sur-dispersés nécessite aussi que la somme des montants incrémentaux du triangle d'entrée, pour chaque période de développement et pour chaque date d'origine, soit strictement positive.

L'une des solutions pourrait consister à exclure les incréments négatifs du modèle. Mais les sinistres seraient alors sous-estimés puisque les incréments négatifs seraient modélisés comme des points égaux à zéro ; ce qui ne représente pas la réalité. Nous avons donc dû trouver une alternative.

La méthodologie que nous proposons d'utiliser s'appuie sur l'ouvrage de Kunkler (2006).

b) Calcul de la probabilité d'acceptation et du pseudo triangle

Pour chaque colonne (année de développement), les valeurs sont réparties dans deux ensembles :

- Le premier ensemble contient les valeurs incrémentales strictement négatives de la colonne j considérée : $S_j^{(-)} = \{X_{i,j} \mid 0 \leq i \leq I - j \text{ et } X_{i,j} < 0\}$. Soit $n_j^{(-)}$ le nombre de valeurs contenues dans l'ensemble $S_j^{(-)}$;
- Le second ensemble contient les valeurs incrémentales positives ou nulles de la colonne j considérée : $S_j^{(+)} = \{X_{i,j} \mid 0 \leq i \leq I - j \text{ et } X_{i,j} \geq 0\}$. Soit $n_j^{(+)}$ le nombre de valeurs contenues dans l'ensemble $S_j^{(+)}$.

Pour chaque colonne, il est alors possible de calculer ce que nous introduisons comme la probabilité d'être négatif. Cette probabilité correspond au ratio entre le nombre de valeurs négatives et le nombre total de valeurs contenues dans la colonne :

$$\forall 0 \leq j \leq I, p_j^{(-)} = \frac{n_j^{(-)}}{n_j^{(-)} + n_j^{(+)}} \text{ représente la probabilité d'être négatif pour la colonne } j.$$

Cette probabilité est alors calculée pour chaque colonne.

A partir du triangle d'entrée, il est possible de calculer le *pseudo triangle* qui est composé des valeurs absolues du triangle initial.

Soit $\mathcal{P}_I = \{|X_{i,j}|; i + j \leq I, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$ ce *pseudo triangle*.

c) Méthodologie

Nous pouvons alors appliquer l'algorithme de RJMCMC sur le *pseudo triangle* comme toutes les valeurs incrémentales sont positives dans ce triangle.

Soient $\hat{X}_{i,j}^P, i + j > I, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I$ les montants estimés pour la partie inférieure du triangle après avoir appliqué RJMCMC au *pseudo triangle* \mathcal{P}_I .

A chaque itération, afin de tenir compte des valeurs négatives présentes dans le triangle d'entrée, nous appliquons la *probabilité d'être négatif* calculée par la formule présentée précédemment.

Pour ce faire, nous utilisons des distributions de Bernoulli de paramètres $p_j^{(-)}$. Pour chaque montant du triangle inférieur, un nombre aléatoire est généré : égal à 1 avec la probabilité $p_j^{(-)}$ et égal à 0 avec la probabilité $1 - p_j^{(-)}$. Soit $t_{i,j}$ le nombre aléatoire généré pour la cellule de la ligne i et colonne j .

La formule suivante est ensuite appliquée :

$$\hat{X}_{i,j} = (-1)^{t_{i,j}} \times \hat{X}_{i,j}^P \text{ pour } i + j > I, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I$$

Cette méthodologie permet de prendre en compte toutes les informations contenues dans le triangle supérieur et de reproduire les valeurs négatives dans le triangle estimé.

Les deux extensions présentées dans cette section permettent de pouvoir appliquer l'algorithme de RJMCMC sur plus de triangles, en particulier les triangles qui ont des valeurs incrémentales négatives ou nulles. Ces améliorations nous ont permis d'appliquer la méthodologie à des triangles représentatifs du marché dans la partie IV de ce mémoire.

CHAPITRE 2 : EXTENSIONS DE LA QUEUE DE DISTRIBUTION

L'un des principaux avantages reconnus de la méthode RJMCMC est qu'elle ne nécessite pas de procédure manuelle d'un expert puisque l'algorithme lui-même teste l'ensemble des valeurs possibles de l'indice de troncature et choisit automatiquement la valeur qui s'adapte le mieux aux données.

Néanmoins, limiter la queue de distribution à une fonction exponentielle pour la partie droite du triangle semble quelque peu restrictif ; de nombreuses autres fonctions pourraient être plus adaptées dans certains cas.

C'est ce que nous proposons d'étudier dans ce chapitre en introduisant une mesure de risque qui permet d'évaluer la qualité du lissage pour chaque fonction utilisée.

2.1 CHOIX DE DIFFERENTES FONCTIONS POUR LA QUEUE DE DISTRIBUTION

Cette section est dédiée aux tests d'autres fonctions que la fonction exponentielle pour modéliser la queue de distribution. En effet, il semblerait pertinent de comparer cette fonction avec les fonctions puissance, puissance inverse et Weibull.

a) Parallèle entre Chain Ladder et RJMCMC

Nous proposons de baser notre travail sur les lissages traditionnellement utilisés pour estimer les facteurs de développement dans Chain Ladder. Il est en effet possible de construire un parallèle entre les formules des facteurs de développement de Chain Ladder et les paramètres des colonnes de RJMCMC.

La principale différence est que la méthode de Chain Ladder est basée sur les montants cumulés alors que RJMCMC se base sur les montants incrémentaux.

Afin d'illustrer ce parallélisme, nous introduisons les notations suivantes :

Soit U_i le montant ultime pour l'année de survenance i

Soit $C_{i,j}$ le montant cumulé pour l'année de survenance i et la $j^{\text{ème}}$ année de développement

Soit f_j le facteur de développement qui permet de passer de l'année de développement $j - 1$ à l'année de développement j , avec $f_0 = 1$

Nous construisons maintenant une comparaison entre les estimations des montants cumulés par les deux méthodes.

Avec la méthode de Chain Ladder, le montant cumulé de l'année de survenance i et de l'année de développement j est estimé par :

$$\hat{C}_{i,j} = X_{i,0} \times f_0 \times \dots \times f_j$$

Avec les hypothèses de la méthode RJMCMC, le montant incrémental de l'année de survenance i et l'année de développement j est estimé par :

$$\hat{X}_{i,j} = U_i \times \gamma_j$$

L'estimation du montant cumulé associé est alors :

$$\hat{C}_{i,j} = U_i \times \sum_{n=0}^j \gamma_n$$

Il est ensuite possible d'établir l'égalité entre ces deux estimations, nous obtenons alors :

$$X_{i,0} \times f_0 \times \dots \times f_j = U_i \times \sum_{n=0}^j \gamma_n$$

Or $X_{i,0} \times f_0 = U_i \times \gamma_0$, nous pouvons donc simplifier et éliminer le terme U_i . La formule ci-dessus devient :

$$\gamma_0 \times f_1 \times \dots \times f_j = \sum_{n=0}^j \gamma_n$$

Qui peut s'écrire :

$$f_j \times \sum_{n=0}^{j-1} \gamma_n = \sum_{n=0}^j \gamma_n$$

Nous pouvons enfin conclure que $\gamma_j = (f_j - 1) \times \sum_{n=0}^{j-1} \gamma_n$ pour $j > 0$.

Ce qui signifie que γ_j est proportionnel à $(f_j - 1)$ à un facteur multiplicatif près $g(j)$, g étant une fonction discrète croissante de $[1, 2, \dots, I]$ dans $[a, 1]$, $0 < a \leq 1$. Pour des valeurs élevées de j (ce qui correspond à la partie droite du triangle), $g(j)$ est en général proche de 1 et donc γ_j est approximable par $(f_j - 1)$.

b) Choix des fonctions

A partir de la conclusion précédente, nous proposons d'utiliser les lissages de courbes traditionnellement employés dans Chain Ladder avec les modifications suivantes :

- Fonction exponentielle : $\forall j \in \{k, \dots, I\} \gamma_j = \exp(\alpha - j\beta)$, qui est la fonction choisie par Verrall et Wüthrich (2012)
- Fonction puissance : $\forall j \in \{k, \dots, I\} \gamma_j = \alpha^{\beta^j} - 1$
- Fonction puissance inverse : $\forall j \in \{k, \dots, I\} \gamma_j = \frac{\alpha}{j^\beta}$
- Fonction Weibull : $\forall j \in \{k, \dots, I\} \gamma_j = \frac{1}{1 - e^{-\alpha \times j^\beta}} - 1$

Où α et β sont des nombres réels.

Ces fonctions présentent le même comportement en considération des hypothèses du modèle. Elles sont décroissantes en j , convexes et leur limite lorsque $j \rightarrow +\infty$ est égale à 0.

Pour chaque fonction, nous devons choisir des valeurs a priori pour les deux paramètres α et β . Ces valeurs a priori n'ont pas d'impact sur les résultats finaux comme le but de l'algorithme de Metropolis Hastings (utilisé dans RJMCMC pour estimer ces paramètres) est de converger vers les vrais estimateurs, mais un bon choix de ces valeurs permettrait d'accélérer la convergence.

Nous avons retenu les valeurs suivantes :

- Fonction exponentielle : $\mathbf{a} = -1$ and $\mathbf{b} = 0.5$
- Fonction puissance : $\mathbf{a} = 1.5$ and $\mathbf{b} = 0.5$

- Fonction puissance inverse : $a = 0.5$ and $b = 1.5$
- Fonction Weibull : $a = 1$ and $b = 0.5$

2.2 CALCUL DU COEFFICIENT DE DETERMINATION AJUSTE POUR LES DIFFERENTES FONCTIONS

a) Coefficient de détermination

Le but est d'exécuter l'algorithme une fois pour chaque fonction. Dans notre cas, nous l'exécutons quatre fois, en changeant la fonction de la queue de distribution à chaque exécution. Pour chacune des fonctions, il est possible de calculer le coefficient de détermination ajusté correspondant. Pour ce faire, deux termes doivent d'abord être calculés.

- Le premier terme peut être calculé dès l'initialisation de l'algorithme puisqu'il fait intervenir uniquement le triangle d'entrée.

Ce terme est appelé *Total Sum of Squares* et il consiste à évaluer la variabilité du triangle de données initial. Il se calcule en effectuant la somme des différences au carré entre chaque montant et la moyenne des montants :

$$SS_{Total} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (X_{i,j} - \bar{X})^2$$

Où \bar{X} représente la moyenne de l'ensemble des montants incrémentaux contenus dans le triangle d'entrée. Ce dernier est calculé avec la formule suivante :

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} X_{i,j}}{\frac{I(I+1)}{2}}$$

- Le second terme nécessaire pour le calcul du coefficient de détermination ajusté est appelé *Residual Sum of Squares*. Il consiste à évaluer la variabilité de l'estimation des résidus. Il est égal à la somme des écarts au carré entre chaque résidu et le montant initial. Il doit alors être calculé à chaque itération :

$$SS_{Residual}^{(t)} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} (\hat{X}_{i,j}^{(t)} - X_{i,j})^2$$

Où $\hat{X}_{i,j}^{(t)}$ correspond aux montants attendus du triangle supérieur. Pour le calcul du coefficient de détermination, seule la moyenne des montants attendus est nécessaire. Nous utiliserons donc la formule suivante pour estimer le triangle supérieur :

$$\hat{X}_{i,j}^{(t)} \approx \mu_i^{(t)} \gamma_j^{(t)}$$

Le coefficient de détermination fait intervenir le ratio entre la *Total Sum of Squares* et la *Residual Sum of Squares* :

$$R^{2(t)} = 1 - \frac{SS_{Residual}^{(t)}}{SS_{Total}}$$

b) Coefficient de détermination ajusté

Le principal défaut du coefficient de détermination est qu'il ne tient pas compte du nombre de paramètres. De ce fait, plus le nombre de paramètres est élevé, meilleur est le coefficient de détermination, alors que l'erreur liée à l'estimation des paramètres est plus importante. Il est donc nécessaire d'ajuster ce coefficient afin de prendre en compte le nombre de paramètres :

$$R_{adj}^{2(t)} = 1 - \left(1 - R^{2(t)}\right) \times \frac{n - 1}{n - p^{(t)} - 1}$$

Où n désigne la taille de l'échantillon : $n = \frac{(I+1)(I+2)}{2}$

Le terme $p^{(t)}$ correspond au nombre de paramètres ; cette valeur varie donc à chaque simulation en fonction de la valeur de l'indice de troncature : $p^{(t)} = k^{(t)} + 2 + I$

Le coefficient de détermination ajusté étant estimé à chaque itération, nous obtenons une distribution de cet indicateur. Il est alors possible de calculer la moyenne, l'écart type ainsi que de nombreuses autres mesures de risque pour ce coefficient de détermination ajusté.

Le but de cette méthodologie est d'aider l'expert à choisir la fonction qui lisse le mieux les données. Ceci peut être fait en suivant des règles simples comme par exemple : plus le coefficient de détermination ajusté est proche de 1, plus la fonction lisse correctement les données. Il semble alors pertinent d'établir une comparaison entre les moyennes des coefficients de détermination ajustés obtenues pour chaque fonction afin de sélectionner la fonction dont l'indice est le plus proche de 1.

CHAPITRE 3 : OUVERTURE VERS LA VOLATILITE A UN AN

Le calcul des capitaux préconisé par la Directive européenne Solvabilité II se base sur l'évaluation de la volatilité à horizon un an. Or, à ce stade, RJMCMC est une méthodologie qui permet d'évaluer la volatilité à l'ultime. Dans ce chapitre, nous allons donc proposer une extension de l'algorithme afin d'estimer la volatilité à un an, en nous appuyant notamment sur le papier de Diers (2010).

3.1 CONTEXTE

Dans un premier temps, nous allons rappeler l'origine de l'estimation de la volatilité à horizon une année.

a) Bilan et Compte de Résultat

Le bilan d'une société d'assurance, et notamment l'étude de l'actif et du passif de cette dernière, donne une image détaillée de son état de solvabilité. à la date d'inventaire. Les principaux éléments constitutifs du bilan sont les biens et les créances à l'actif, les dettes et engagements (en particulier les provisions techniques) au passif. La différence de ces deux composantes constitue les capitaux propres qui sont aussi inscrits au passif : ces derniers garantissent notamment la solvabilité future de l'entreprise, même si cette dernière subit une perte durant l'année n+1.

Considérons une compagnie d'assurance au 31/12/n, son bilan peut alors se schématiser de manière simpliste par les postes suivants :

ACTIF	PASSIF
Placements	Capitaux propres : Capital, Réserves et Résultat de l'exercice
Réassurance : part dans les provisions techniques	Provisions Techniques
Créances et autres actifs	Dettes et autres passifs

TABLE 2 : Exemple de bilan simplifié d'une compagnie d'assurance

Le compte de résultat en n+1, permettant de relier le bilan n au bilan n+1, récapitule les flux qui ont eu lieu au cours de l'année n+1. Le compte de résultat spécifique au déroulement des sinistres, plus connu sous le nom de *Claims Development Results* et noté CDR par la suite, est la base de l'estimation de la volatilité à un an.

En effet, à la fin de l'année n+1, le CDR représente le compte de résultat propre au déroulement des sinistres, il prend donc en compte :

- Les règlements des sinistres au cours de l'année n+1 ;
- La variation des provisions techniques au cours de l'année n+1, notées PT ;

Or, en provisionnement non-vie, nous utilisons le déroulement des triangles afin d'estimer les provisions futures. A la fin de l'année n+1, nous disposons d'une année de données supplémentaire : l'estimation des provisions techniques à la fin de l'année n+1 se base donc sur un triangle qui contient une diagonale de plus que le triangle utilisée pour l'estimation de l'année n.

Pour une année de survenance i fixée, le CDR_i correspondant peut s'écrire sous la forme suivante :

$$CDR_i = (PT_{i,n}^D - PT_{i,n+1}^{D+1}) - (C_{i,n+1} - C_{i,n})$$

Où $PT_{i,n}^D$ correspond aux estimations des provisions à la fin de l'année n , pour l'année de survenance i , c'est-à-dire sur le triangle composé de D diagonales.

$PT_{i,n+1}^{D+1}$ correspond aux estimations des provisions à la fin de l'année $n+1$, pour l'année de survenance i , c'est-à-dire sur le triangle composé de $D + 1$ diagonales.

La différence des montants cumulés $C_{i,n+1} - C_{i,n}$ correspond au montant incrémental $X_{i,n+1}$.

L'égalité ci-dessus est souvent notée de manière différente, en particulier dans le papier de Merz et Wüthrich (2008) :

$$CDR_i = PT_{i,n}^D - (C_{i,n+1} - C_{i,n} + PT_{i,n+1}^{D+1}) = PT_{i,n}^D + C_{i,n} - (PT_{i,n+1}^{D+1} + C_{i,n+1}) = \hat{C}_{i,l}^D - \hat{C}_{i,l}^{D+1}$$

Où $\hat{C}_{i,l}^D$ correspond à l'estimation de l'ultime à partir du triangle comprenant D diagonales et $\hat{C}_{i,l}^{D+1}$ correspond à l'estimation de l'ultime à partir du triangle comprenant $D + 1$ diagonales.

La méthode de Merz et Wüthrich (2008), qui est une évolution de la méthode de Mack, consiste à estimer le terme $MSEP(CDR_i)$ (*Mean Square Error Prediction*) afin d'évaluer la volatilité à un an des réserves calculées par Chain Ladder.

b) Conséquences : calcul de la VaR 99,5 %

Le QIS 5 (test quantitatif d'impact n°5) de l'EIOPA préconise une évaluation de la volatilité du résultat à un an. Pour déterminer cette volatilité, le seuil de confiance qui sert d'hypothèse de travail est fixé à 99,5 % et la mesure de risque choisie est la Value-at-Risk. Ce capital nécessaire, consolidé au niveau de la compagnie et intégrant l'ensemble des risques, est connu sous le nom de SCR (*Solvency Capital Requirement*). Nous nous intéressons ici à la sous-composante du SCR, liée au risque de réserve, que nous noterons par simplification SCR par la suite. Ainsi, pour le SCR réserve (correspondant au risque de réserve et donc à la volatilité du CDR), dans le pire scénario sur les 200 considérés, le CDR est négatif et tout le capital « réserve » de la compagnie est écoulé, on a alors l'égalité suivante $SCR = -CDR$.

Notons $VaR_\alpha(X)$ la Value-at-Risk de la variable X pour le quantile α .

Quelques propriétés mathématiques, utiles pour la suite, sont rappelées ci-après :

- Pour toute fonction g strictement croissante et continue à gauche : $VaR_\alpha(g(X)) = g(VaR_\alpha(X))$;
- Pour toute fonction g strictement décroissante et continue à droite : $VaR_\alpha(g(X)) = g(VaR_{1-\alpha}(X))$;
- La fonction VaR est invariante par translation : $VaR_\alpha(X + c) = VaR_\alpha(X) + c$, pour toute constante c ;
- La fonction VaR est homogène : $VaR_\alpha(c \cdot X) = c \cdot VaR_\alpha(X)$ pour toute constante c ;

Pour une illustration plus concrète, plaçons nous au 31/12/n. Le but est de calculer le SCR, c'est-à-dire d'estimer le CDR de l'année $n+1$ et en particulier la VaR 99,5 % de ce montant, qui correspond au pire scénario sur les 200 considérés.

Nous pouvons établir les égalités suivantes :

$$SCR = VaR_{99,5\%}(-CDR) = -VaR_{0,5\%}(CDR)$$

Appliquons alors cette Value-at-Risk à la formule détaillée précédemment, pour une année d'origine i :

$$-VaR_{0,5\%}(CDR) = VaR_{99,5\%}(X_{i,n+1} + PT_{i,n+1}^{D+1} - PT_{i,n}^D)$$

Qui peut s'écrire :

$$SCR = VaR_{99,5\%}(X_{i,n+1} + PT_{i,n+1}^{D+1}) - PT_{i,n}^D$$

$X_{i,n+1} + PT_{i,n+1}^{D+1}$ correspond à l'estimation de la première diagonale du triangle inférieur à laquelle est ajoutée l'estimation des autres diagonales du triangle inférieur, mais basée sur le triangle comportant $D + 1$ diagonales.

C'est de cette égalité que nous partirons, pour la détermination de la volatilité à un an, en utilisant la méthodologie « Actuary in the Box » détaillée ci-après.

3.2 « ACTUARY IN THE BOX »

Cette méthodologie est celle habituellement utilisée pour estimer la volatilité à horizon un an dans la méthode stochastique du Bootstrap, comme expliqué dans le papier de Diers (2010) mais aussi dans le mémoire de Menard (2009). Nous proposerons une application de cette même méthodologie à l'algorithme de RJMCMC.

a) Application classique : le Bootstrap

L'idée de base sous-jacente à la méthodologie « Actuary in the box » consiste à évaluer la première diagonale du triangle inférieur par la méthode du Bootstrap, puis à chaque simulation, les diagonales restantes du triangle inférieur sont complétées par un nouveau Bootstrap qui se base sur le triangle à $D + 1$ diagonales. Pas à pas, elle consiste au sein d'une même simulation à :

- Estimer la première diagonale avec la méthode du Bootstrap ;
- Construire le triangle qui contient $D + 1$ diagonales : le triangle initial auquel est rajoutée la diagonale qui vient d'être estimée ;
- Sur le triangle à $D + 1$ diagonales, appliquer un nouveau Bootstrap, avec autant de simulations que nécessaire, afin d'estimer les diagonales restantes du triangle inférieur. A chaque itération de ce Bootstrap, calculer les réserves correspondantes ;
- Stocker la moyenne des réserves obtenues.

Ces étapes sont à répéter pour le nombre de simulations choisi. A la fin de ce Bootstrap, il est alors possible de calculer la « moyenne des moyennes » des réserves obtenues pour obtenir un estimateur des réserves.

Il est aussi possible d'appliquer plusieurs mesures de risque sur la distribution des moyennes des réserves finale telles que l'écart type ou les Value-at-Risk et Tail Value-at-Risk.

L'inconvénient de l'« Actuary in the box » est que cette méthode est très couteuse en temps de calcul. C'est pour cette raison, qu'en pratique, l'application de « Actuary in the box » au Bootstrap ne fait pas intervenir les simulations dans les simulations mais utilise une approximation. En effet, l'espérance donnée par le Bootstrap peut être approchée par la méthode Chain Ladder. Dans ce cadre, l'estimation de la première diagonale est établie par le Bootstrap mais le reste des diagonales du triangle inférieur est estimé par Chain Ladder, dont les coefficients de développement auront été calculés sur le triangle à $D + 1$ diagonales. Cette approximation courante présente l'avantage de minimiser drastiquement les temps de calcul, le nombre de simulations requis n'étant pas de N^2 mais de N . Dans le cas de $N = 100\,000$, l'approximation permet de ne simuler que 100 000 Bootstrap (qui tourne en quelques secondes sur le logiciel d'Actuaris International⁴), là où les simulations dans les simulations en imposeraient 10 000 000 000 soit environ 28 heures de calcul.

⁴ IBNRS™

b) Nouvelle application proposée : méthode RJMCMC

Dans le papier officiel de Verrall et Wüthrich (2012), la volatilité à un an n'est pas évoquée, ce qui nous a amené à étudier une méthodologie applicable à RJMCMC. Dans cette partie, nous proposons ainsi l'application de la méthode « Actuary in the box » à l'algorithme RJMCMC.

Le fonctionnement d'origine consisterait à appliquer un nouvel algorithme RJMCMC à chaque simulation, lorsqu'un nouveau triangle avec $D + 1$ diagonales aura au préalable été estimé par RJMCMC. Le schéma ci-dessous décrit les différentes étapes de la méthode « Actuary in the box » appliquée à l'algorithme RJMCMC :

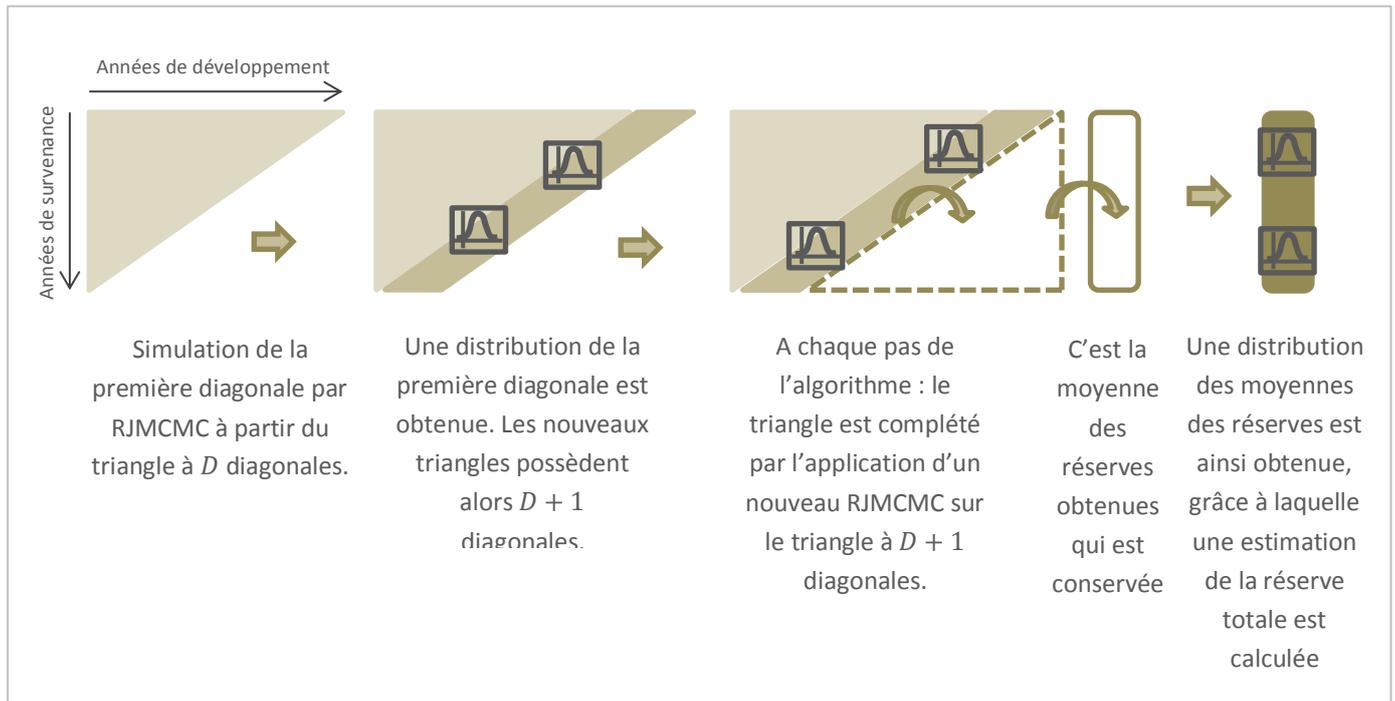


FIGURE 17 : Schéma décrivant le fonctionnement de la méthode « Actuary in the box » appliquée à l'algorithme RJMCMC

En théorie donc, la méthode d'origine nécessiterait un nombre important de simulations (le fameux problème des simulations dans les simulations évoqué précédemment), ce qui implique des temps de calculs très longs. Pour la mise en application du Chapitre 3 de la partie IV, nous avons donc fait la même hypothèse que pour le Bootstrap, et nous avons ainsi utilisé l'approximation de Chain Ladder pour estimer les diagonales restantes à partir du triangle à $D + 1$ diagonales (l'écart sur les études réalisées et présentées en partie IV étant inférieur à 1%). Cette hypothèse nous a permis de pouvoir étudier cette nouvelle méthodologie sur un large panel de triangles, à un coût de temps réduit.

PARTIE IV :
APPLICATIONS DE LA
METHODE ET DE SES
EXTENSIONS

CHAPITRE 1 : COMPARAISONS DE LA METHODE RJMCMC CLASSIQUE AUX METHODES TRADITIONNELLES

Grâce aux améliorations présentées dans le chapitre 1 de la partie III, nous avons pu appliquer l'algorithme de RJMCMC à un ensemble de triangles anonymes du marché belge fournis par la Banque Nationale Belge (superviseur belge), sans limitations liées à la méthode, puisque même les triangles présentant des incréments négatifs ou nuls ont pu être traités.

RJMCMC a ainsi été exécuté sur 17 triangles de règlements, numérotés de A à Q et disponibles en annexe, provenant des branches suivantes : RC Auto, RC Générale, Protection juridique et Incendie.

RJMCMC a été lancé pour chacun de ces triangles ; les moyennes des réserves et les coefficients de variations sont récapitulés dans les graphiques ci-dessous. Les résultats obtenus avec l'algorithme RJMCMC sont ensuite comparés aux méthodes traditionnelles de Chain Ladder / Mack et du Bootstrap.

1.1 MOYENNES DES RESERVES

Afin de comparer les méthodes entre elles, nous avons tracé les résultats des moyennes des trois méthodes. L'axe des abscisses correspond aux différents triangles et l'axe des ordonnées représente, pour chacun des triangles, les écarts (en pourcentage) de chaque méthode par rapport à la moyenne des trois méthodes.

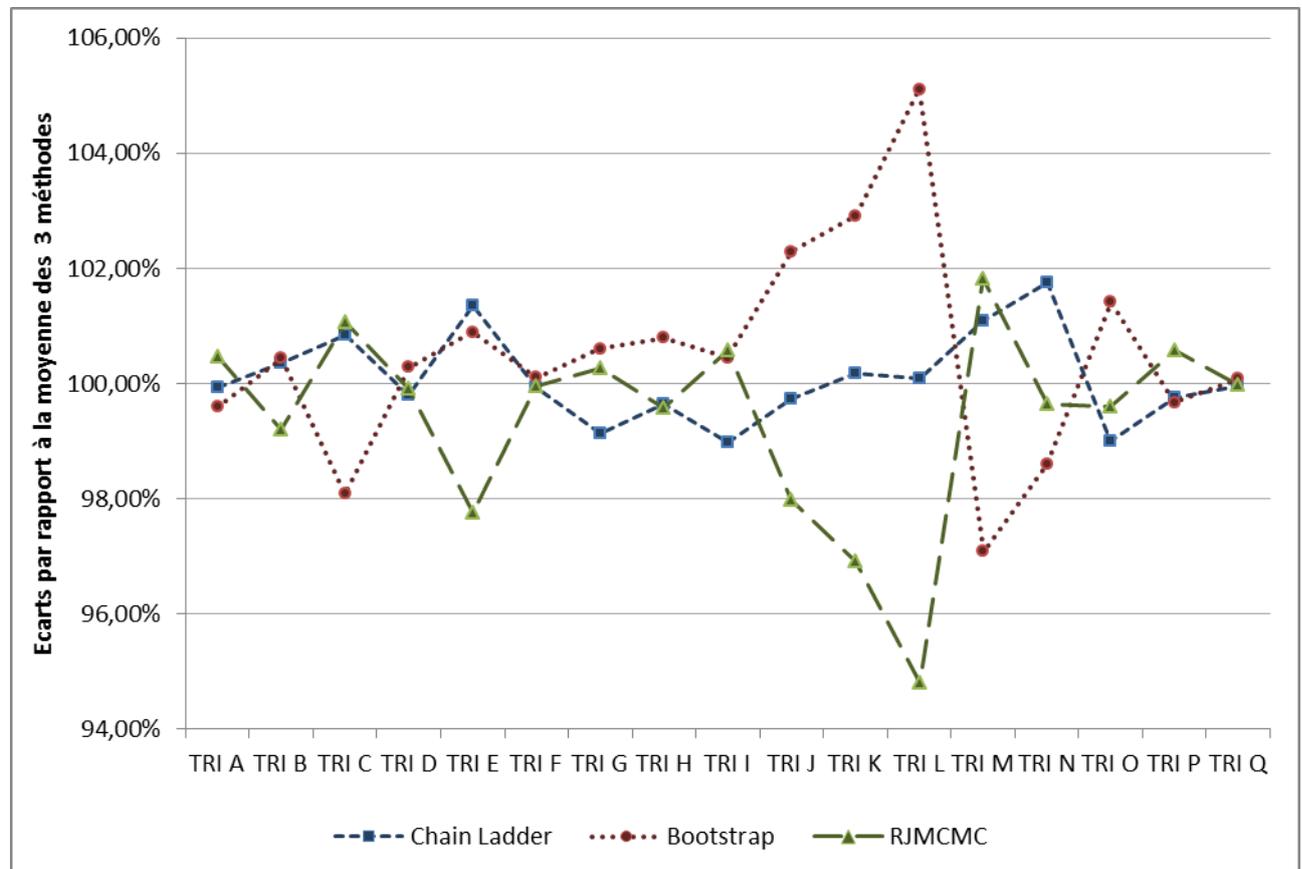


FIGURE 18 : Comparaison des moyennes des réserves obtenues

En considérant l'échelle de l'axe vertical, nous constatons que les résultats d'évaluation des moyennes sont assez similaires pour les différentes méthodes, l'écart maximal observé étant 10% entre RJMCMC et le Bootstrap pour le triangle L. Ceci peut s'expliquer par des résidus de Pearson anormalement grands qui, lors du ré-échantillonnage peuvent mener à des réserves importantes du Bootstrap.

1.2 COEFFICIENTS DE VARIATIONS DES RESERVES

Considérons maintenant les coefficients de variations des réserves obtenus avec les différentes méthodes. Nous avons fait le choix de représenter les coefficients de variations plutôt que l'écart type directement puisqu'il nous paraît plus pertinent de tenir compte de la valeur de la moyenne associée à un certain écart type. Le coefficient de variations se calcule en effectuant le ratio entre la moyenne et l'écart type.

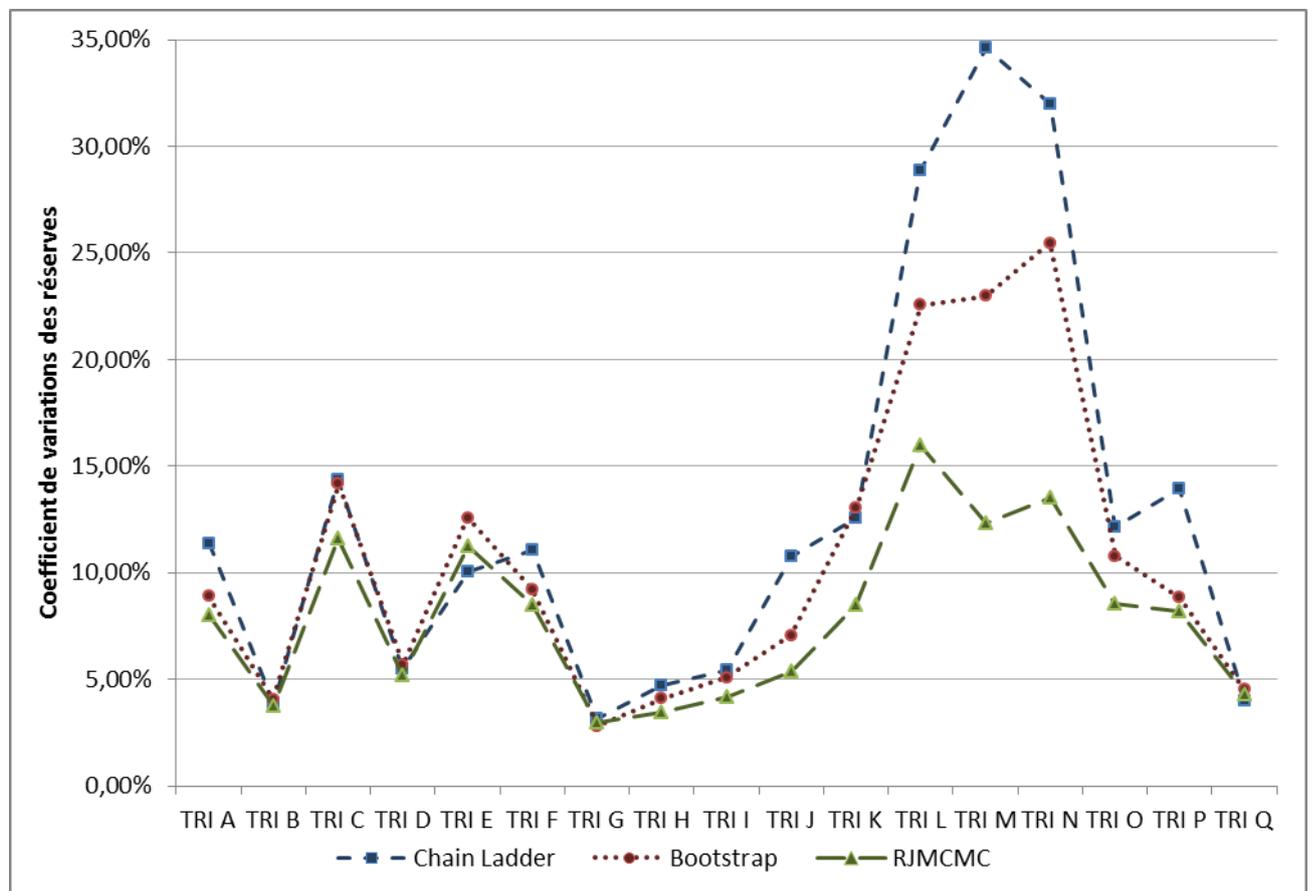


FIGURE 19 : Coefficients de variations des réserves

Nous pouvons constater que pour l'ensemble des triangles, les coefficients de variations des réserves estimées avec l'algorithme de RJMCMC sont inférieurs à ceux calculés avec le Bootstrap. C'est aussi vrai lorsque l'on compare avec les résultats de Chain Ladder / Mack, excepté pour le triangle E.

Cette observation semble assez intuitive puisque l'algorithme RJMCMC utilise deux modèles différents : un pour la partie droite et un autre pour la partie gauche du triangle, ces modèles étant adaptés à la quantité de données disponible. Ceci explique que la volatilité soit réduite par rapport aux autres méthodes pour lesquelles

un seul et unique modèle est appliqué sur tout le triangle, ce qui augmente le risque d'incertitude, en particulier pour la queue de distribution.

En conclusion, sans ajustement manuel nécessaire :

- La méthode RJMCMC mène à des moyennes similaires à celles obtenues avec les méthodes traditionnelles, et toujours robustes ;
- Les coefficients de variations obtenus avec RJMCMC sont en général inférieurs à ceux obtenus avec Mack ou le Bootstrap.

CHAPITRE 2 : COMPARAISONS DE LA METHODE RJMCMC AVEC LES EXTENSIONS SUR LA QUEUE DE DISTRIBUTION

Dans ce chapitre, les méthodes précédemment décrites⁵ sont testées sur deux exemples de données réelles. Nous comparons les résultats obtenus avec les différentes fonctions paramétriques pour la queue de distribution. L'algorithme de RJMCMC a été utilisé quatre fois : une fois pour chaque fonction. Nous avons utilisé 500 000 simulations suite aux conclusions de l'étude sur l'impact du nombre de simulations⁶. D'autre part, comme montré précédemment, il est possible que des graines aléatoires différentes peuvent mener à des résultats finaux différents. Nous avons donc choisi, pour les exemples suivants, de calculer la moyenne de cinq exécutions, chacune de 500 000 simulations.

2.1 EXEMPLE DE R. VERRALL ET M. WÜTHRICH

Pour ce premier exemple, nous choisissons d'appliquer les extensions de ce mémoire à l'exemple réel fourni par Verrall et Wüthrich (2012), fourni en annexe.

a) Indice de troncature

L'utilisation de différentes queues de distribution implique que dans certains cas, l'indice de troncature ne converge pas vers la même valeur.

Il est possible de constater que la fonction exponentielle et la fonction puissance ont un comportement semblable par rapport au choix de l'indice de troncature, tandis que la fonction puissance inverse et la fonction Weibull se comportent de la même manière mais différemment des deux premières fonctions.

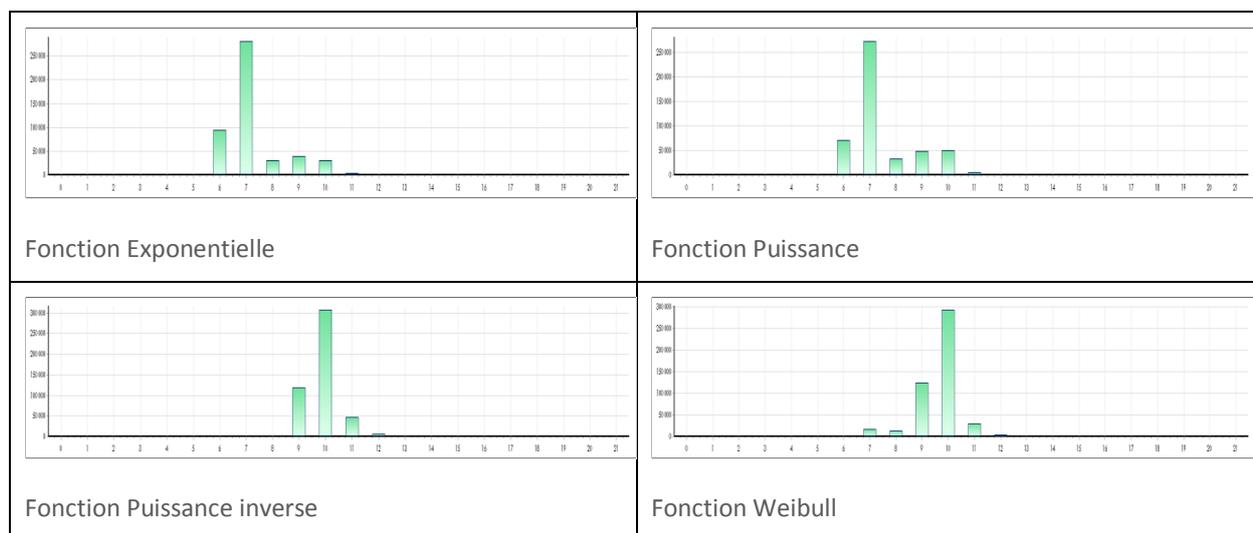


FIGURE 20: Distribution de l'indice de troncature pour les différentes fonctions

⁵ Partie III / Chapitre 2

⁶ Partie II / Chapitre 2 / 2.3

Concernant les fonctions exponentielle et puissance, l'indice de troncature semble se stabiliser pour la valeur $k = 7$, alors que pour les fonctions puissance inverse et Weibull, la plus grande probabilité est obtenue pour $k = 10$.

b) Réserves

Il est alors possible de calculer la moyenne, l'écart type et le coefficient de variations des réserves pour chaque fonction.

	Moyenne	Ecart type	Coefficient de variations
Exponentielle	1 476 794	54 840	3,71%
Puissance	1 470 727	55 889	3,80%
Puissance inverse	1 485 757	52 608	3,54%
Weibull	1 460 584	55 260	3,78%

TABLE 3: Moyennes, écarts types et coefficients de variations des réserves obtenus avec les différentes fonctions de queue de distribution

Les résultats sont assez proches, bien que la fonction puissance inverse donne la plus haute estimation de la moyenne alors que la fonction Weibull en fournit la plus petite estimation, ceci s'explique par la structure des fonctions. Quant à l'écart type, la qualité du lissage semble être le point qui impacte le plus les résultats.

c) Comportement des fonctions

Afin d'illustrer le comportement des fonctions, nous avons estimé les moyennes des paramètres α et β pour chaque fonction. Nous avons ensuite construit l'évolution de chacune des courbes en fonction de l'évolution de l'indice de colonne j .

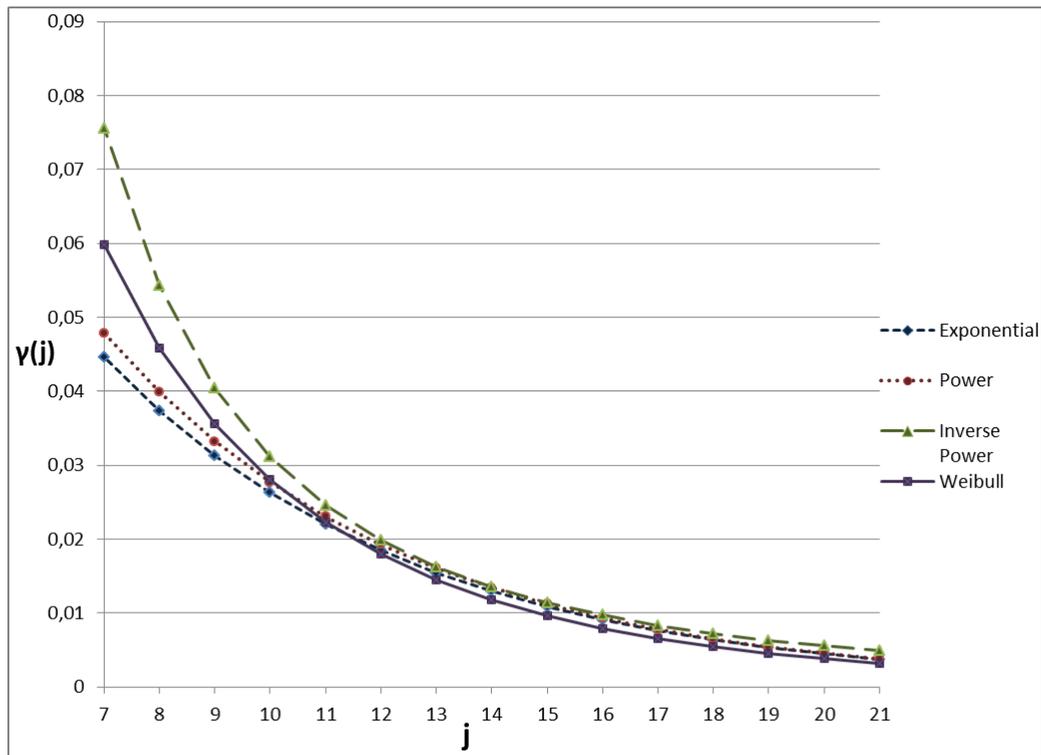


FIGURE 21: Graphique représentant les évolutions de chaque fonction pour différentes valeurs de j

Le graphique a été tracé pour différentes valeurs de j variant de 7 à 21 puisque le plus petit indice de troncature est $k = 7$. La fonction puissance inverse et la fonction Weibull ont des comportements assez proches, ce qui confirme la tendance observée précédemment concernant le choix de l'indice de troncature. Inversement, les fonctions puissance et exponentielle sont proches l'une de l'autre, en particulier pour $j = 7, \dots, 10$. La fonction puissance inverse est toujours supérieure aux autres fonctions, ce qui explique pourquoi la plus grande moyenne des réserves est obtenue avec cette fonction.

d) Etude comparative : coefficient de variations et coefficient de détermination ajusté

Afin de choisir la meilleure fonction pour lisser la partie droite des données, nous avons construit une comparaison entre le coefficient de variations, qui est égal au ratio de l'écart type par la moyenne ; et la moyenne de $1 - R_{adj}^2$. Nous avons alors pu étudier une éventuelle corrélation entre ces valeurs.

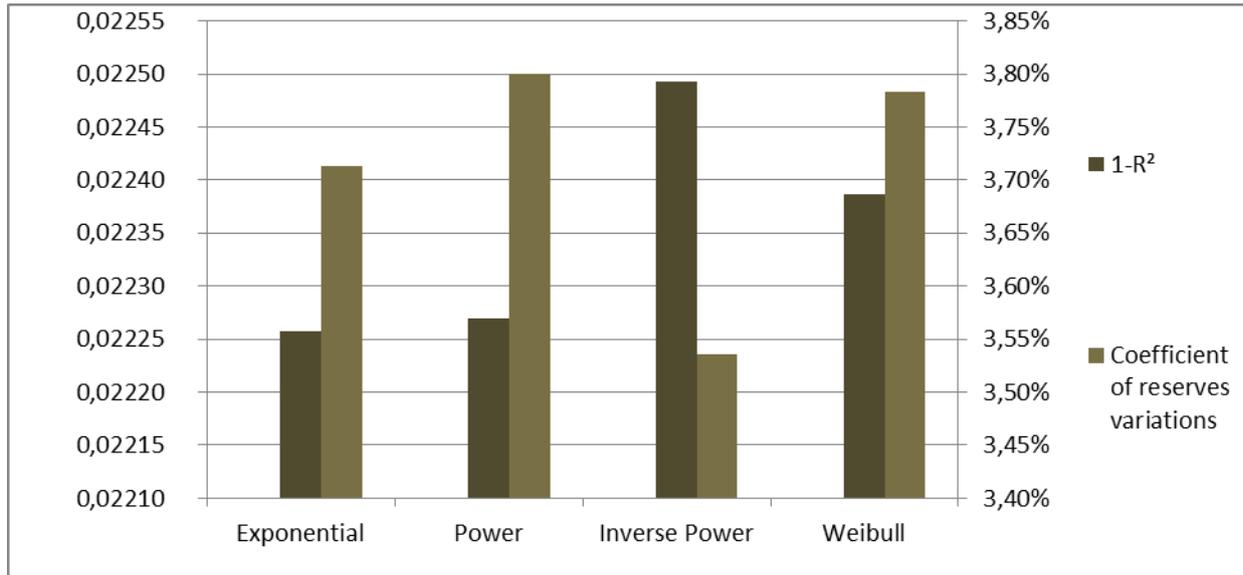


FIGURE 22 : Graphique représentant le coefficient de variations et $1 - R_{adj}^2$ pour chaque fonction

Les moyennes des coefficients de détermination sont très proches, ce qui est normal étant donné que le calcul est effectué sur l'ensemble du triangle et non pas uniquement sur la partie droite. C'est pourquoi, il ne faut pas comparer les R_{adj}^2 de manière absolue mais bien de façon relative. Les R_{adj}^2 calculés lorsque la queue de distribution est modélisée par la fonction exponentielle ou puissance sont légèrement plus grands que ceux calculés lorsque la fonction utilisée est la puissance inverse ou Weibull, d'environ 0,02 %. Dans cet exemple, cela signifie que la fonction exponentielle est celle qui lisse le mieux les données comme le coefficient de détermination ajusté est le plus grand pour cette fonction.

En considérant le coefficient de détermination, nous pouvons distinguer deux groupes de lissage : la fonction puissance inverse et la fonction Weibull d'une part, la fonction exponentielle et puissance d'autre part. La moyenne de k étant différente pour ces deux groupes de fonctions et le coefficient de détermination étant dépendant du nombre de paramètres, il est assez intuitif d'obtenir des résultats différents pour ce dernier.

Ce graphique peut aider l'expert à choisir la fonction la plus adaptée pour lisser la partie droite des paramètres des colonnes. La fonction qui présente le meilleur coefficient de détermination ajusté (le plus proche de 1) et le plus petit coefficient de variations des réserves est la meilleure fonction à utiliser.

Pour cet exemple, il est difficile d'établir des différences entre toutes les fonctions parce qu'elles sont très proches les unes des autres, en particulier concernant les valeurs des R_{adj}^2 . Nous pouvons alors nous concentrer sur les valeurs des coefficients de variations qui est le plus petit pour la fonction puissance inverse ; cette fonction semblerait donc être un choix logique pour l'étude considérée.

2.2 EXEMPLE DE LA BANQUE NATIONALE BELGE

Pour le second exemple, nous avons choisi d'utiliser un portefeuille de données réelles fourni par la Banque Nationale Belge. Ce triangle, disponible en annexe, a été sélectionné parmi ceux de la branche RC Auto, il est basé sur 14 années d'historique.

a) Indice de troncature

Encore une fois, nous observons que les fonctions exponentielle et puissance ont un comportement similaire quant au choix de l'indice de troncature. Inversement, les résultats obtenus avec les fonctions puissance inverse et Weibull sont proches mais assez différents des deux autres fonctions.

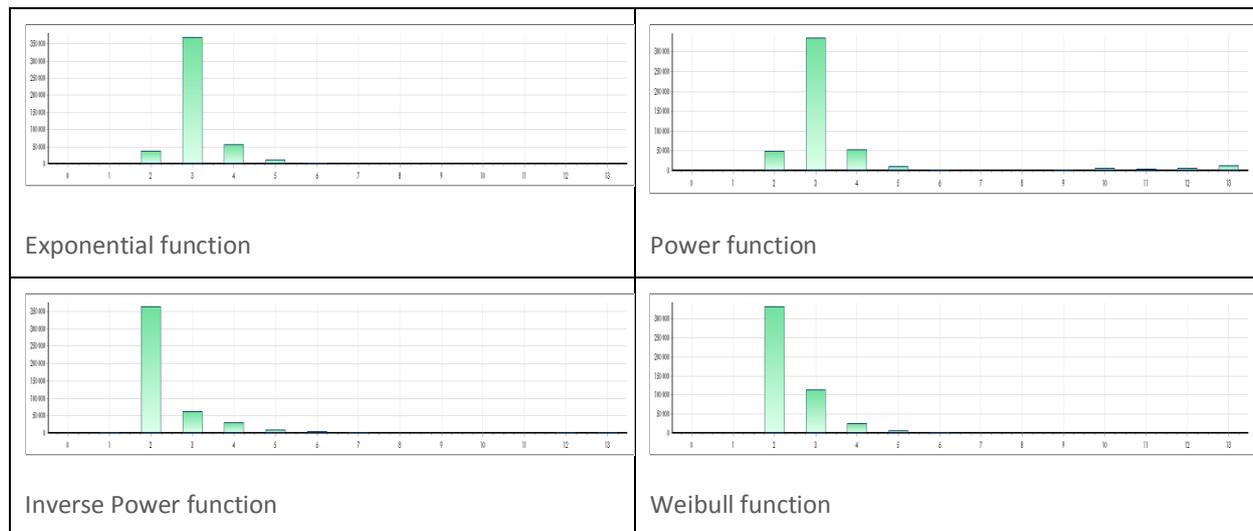


FIGURE 23 : Distribution de l'indice de troncature pour les différentes fonctions

Les comportements observés dans cet exemple diffèrent quelque peu de ceux observés pour le premier exemple. En effet, les fonctions exponentielle et puissance présentent la plus grande probabilité pour l'indice de troncature $k = 3$, alors qu'avec les fonctions puissance inverse et Weibull, l'indice de troncature qui apparaît le plus souvent est $k = 2$.

b) Réserves

Considérons maintenant les moyennes, écarts types et coefficients de variations des réserves obtenus avec les différentes fonctions.

	Moyenne	Ecart type	Coefficient de variations
Exponentielle	17 735 033	1 534 723	8,65%
Puissance	17 620 910	1 528 349	8,67%
Puissance inverse	18 342 090	1 479 051	8,06%
Weibull	18 169 488	1 515 304	8,34%

TABLE 4 : Moyennes, écarts types et coefficients de variations des réserves obtenus avec les différentes fonctions de queue de distribution

Le plus petit coefficient de variations est obtenu avec la fonction puissance inverse, alors que la valeur la plus élevée pour cette mesure est obtenue avec la fonction exponentielle. Quant aux réserves, elles sont assez proches bien que la moyenne des réserves calculées avec la fonction puissance inverse est plus grande que celles obtenues avec les autres fonctions. Elle est notamment 4% plus grande que celle calculée avec la fonction puissance.

c) Comportement des fonctions

Comme pour l'exemple 1, nous avons estimé ici les moyennes des paramètres α et β pour chaque fonction. Nous avons ainsi pu dessiner les courbes suivantes :

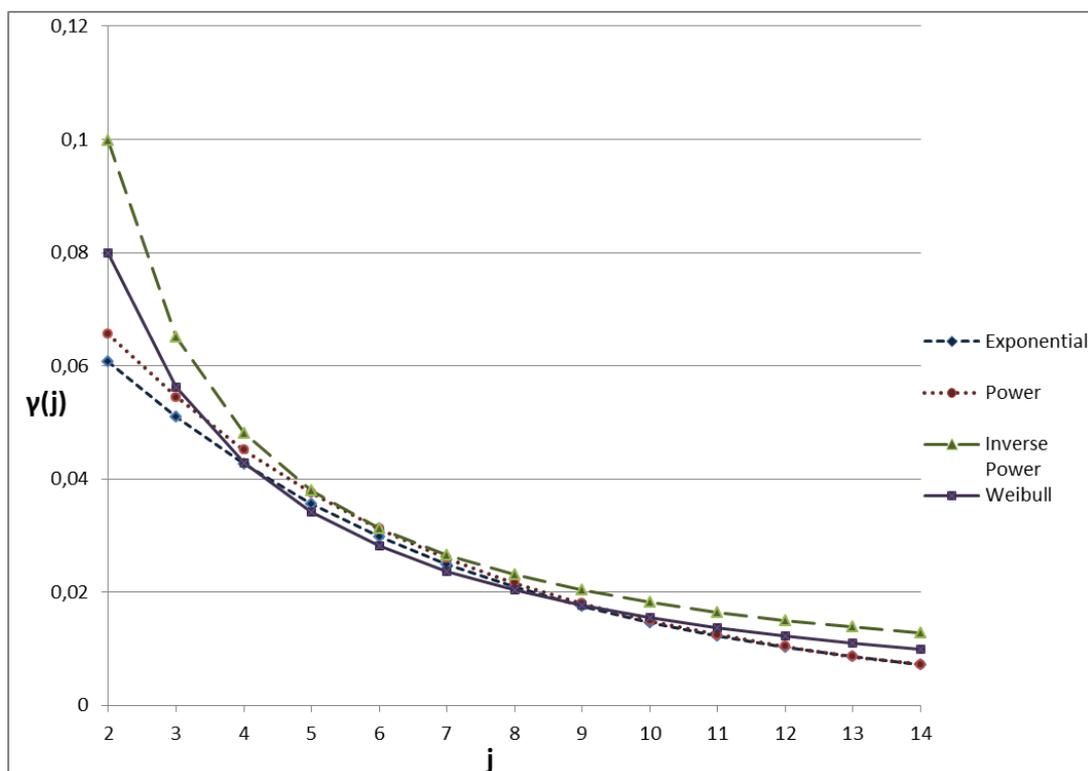


FIGURE 24 : Graphique représentant les évolutions de chaque fonction pour différentes valeurs de j

Pour cet exemple, le plus petit indice de troncature observé est $k = 2$, donc sur ce graphique j varie de 2 à 14. Encore une fois, les différences de comportement entre le groupe des fonctions puissance inverse et Weibull et le groupe des fonctions puissance et exponentielle justifie les différents indices de troncature obtenus précédemment. La fonction puissance inverse est la courbe la plus prudente étant donné qu'elle présente les valeurs les plus élevées. Cela explique pourquoi la moyenne la plus élevée est obtenue avec cette fonction.

d) Etude comparative : coefficient de variations et coefficient de détermination ajusté

Dans cette partie, nous comparons les valeurs obtenues pour les coefficients de variations de réserves et celles obtenues pour les coefficients de détermination ajustés.

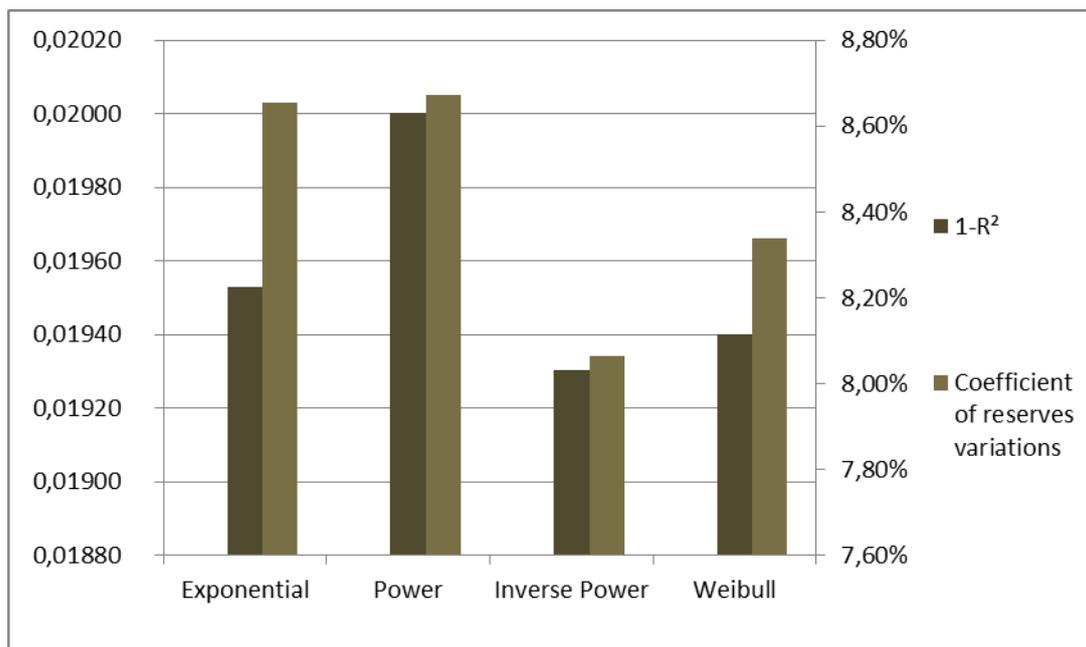


FIGURE 25 : Graphique représentant le coefficient de variations et $1 - R_{adj}^2$ pour chaque fonction

Dans cet exemple, la fonction puissance inverse est celle qui présente le coefficient de détermination le plus proche de 1, bien que la moyenne du R_{adj}^2 calculé avec la fonction Weibull soit juste 0,01 % plus petite. La fonction puissance semble être celle qui lisse le moins bien les données comme elle présente la plus petite moyenne pour le coefficient de détermination ajusté. Pour cet exemple, une corrélation négative entre les coefficients de détermination ajustés et les coefficients de variations des réserves est observée.

Pour cet exemple, le choix de la fonction la plus adaptée est assez facile comme la fonction puissance inverse présente à la fois le R_{adj}^2 le plus élevé et le plus petit coefficient de variations des réserves.

2.3 ETUDE DES DIFFERENTES FONCTIONS POUR LA QUEUE DE DISTRIBUTION

Afin de faire des tests sur un ensemble complet de données réelles, nous avons appliqué la méthodologie, développée dans le Chapitre 2 de la partie III, sur les 17 triangles fournis par le superviseur belge. Le but est d'identifier quelle fonction, avec le coefficient de détermination ajusté le plus élevé, apparaît le plus de fois. Nous avons donc compté combien de fois chacune des fonctions semblait être le meilleur choix pour chaque triangle.

Nous avons récapitulé les occurrences que nous avons obtenues dans le tableau suivant :

Fonction utilisée	Occurrences sur les 17 triangles
Exponentielle	7
Puissance	0
Puissance Inverse	8
Weibull	2

TABLE 5 : Nombre de fois où chaque fonction a présenté le meilleur coefficient de détermination ajusté

Nous pouvons constater que pour la plupart des triangles considérés, la fonction qui présente le coefficient de détermination le plus proche de 1 est la fonction puissance inverse. La fonction exponentielle arrive en deuxième position avec simplement une occurrence de moins que la fonction puissance inverse. La fonction Weibull n'est apparue que trois fois en tant que meilleure modélisation de la queue de distribution. Enfin, il semble que la fonction puissance est celle qui lisse le moins bien la partie droite des paramètres de colonnes comme elle n'a présenté, pour aucun triangle, le meilleur coefficient de détermination ajusté.

CHAPITRE 3 : COMPARAISONS DE LA METHODE RJMCMC AVEC LE CALIBRAGE DE SOLVABILITE II

Dans cette section, nous allons comparer les estimations de la volatilité des réserves, obtenues avec différentes méthodologies, pour les dix-sept triangles du marché Belge.

3.1 DONNEES DU QIS 5 DE L'EIOPA

En fonction de chaque branche, le QIS 5 de l'EIOPA fournit directement des taux à appliquer au *Best Estimate* afin d'obtenir une estimation de l'écart type ainsi que de la VaR 99,5 %.

Pour le calcul de l'écart type, l'EIOPA fournit les taux suivants, spécifiques à chaque branche et basés sur une pondération entre les résultats du Bootstrap et de Mack :

Standard deviation calculation per lob Reserve risk	Standard deviation for reserve risk			
	sres		Market	USP
Motor vehicle liability	9,5%		9,5%	
Motor, other classes	10,0%		10,0%	
Marine, aviation, transport (MAT)	14,0%		14,0%	
Fire and other property damage	11,0%		11,0%	
Third-party liability	11,0%		11,0%	
Credit and suretyship	19,0%		19,0%	
Legal expenses	9,0%		9,0%	
Assistance	11,0%		11,0%	
Miscellaneous	15,0%		15,0%	
Non-proportional reinsurance - property	20,0%		20,0%	
Non-proportional reinsurance - casualty	20,0%		20,0%	
Non-proportional reinsurance - MAT	20,0%		20,0%	

FIGURE 26 : Table fournie par l'EIOPA concernant les écarts types par branche

Le *Best Estimate* des réserves est alors multiplié par le taux de la branche correspondante afin d'obtenir la valeur de l'écart type.

Pour le calcul de la VaR 99,5 %, l'EIOPA fournit une formule qui permet de déduire des nouveaux coefficients. Ces coefficients simulent l'utilisation d'une distribution log normale et se basent sur les valeurs des écarts types :

$$Coef_{VaR\ 99,5} = \frac{\text{Exp}\left(\mathcal{N}_{0,995} \times \sqrt{\text{LN}(Coef_{Ecart\ type}^2 + 1)}\right)}{\sqrt{\text{LN}(Coef_{Ecart\ type}^2 + 1)}} - 1$$

$Coef_{Ecart\ type}$ étant le coefficient correspondant fourni par l'EIOPA dans la figure 26.

$\mathcal{N}_{0,995}$ étant le quantile d'ordre 99,5% de la loi Normale centrée réduite.

Dans le tableau suivant, les valeurs de l'écart type et de la VaR 99,5 % par branche sont récapitulées :

Calcul de l'écart type par branche Risque de réserve	Ecart type pour le risque de réserve	VaR 99,5% pour le risque de réserve
Motor vehicle liability	9,5 %	27 %
Motor, other classes	10,0 %	29 %
Marine, aviation, transport (MAT)	14,0 %	42 %
Fire and other property damage	11,0 %	32 %
Third-party liability	11,0 %	32 %
Credit and suretyship	19,0 %	60 %
Legal expenses	9,0 %	26 %
Assistance	11,0 %	32 %
Miscellaneous	15,0 %	45 %
Non-proportional reinsurance - property	20,0 %	63 %
Non-proportional reinsurance - casualty	20,0 %	63 %
Non-proportional reinsurance - MAT	20,0 %	63 %

TABLE 6 : Tableau récapitulant les coefficients fournis par l'EIOPA pour calculer l'écart type et la VaR 99,5 % des réserves

L'EIOPA fournit donc des taux directement applicables à l'estimation de la moyenne des réserves afin de calculer l'écart type ainsi que la VaR 99,5 % des réserves. Ces coefficients sont basés sur l'estimation de la volatilité à un an.

3.2 VOLATILITE A L'ULTIME

La première étude consiste à comparer la volatilité à l'ultime de la méthode RJMCMC avec les volatilités à l'ultime des autres méthodes.

Quatre méthodologies vont être comparées :

- Mack : la moyenne des réserves est l'estimation de Chain Ladder ; l'écart type est celui calculé par la méthode de Mack ; et enfin la fonction utilisée pour modéliser la distribution des réserves est la fonction log normale ;
- Bootstrap : la moyenne, l'écart type ainsi que la distribution utilisée sont ceux estimés par la méthodologie du Bootstrap elle-même ;
- RJMCMC : la moyenne, l'écart type ainsi que la distribution utilisée sont ceux estimés par la méthodologie RJMCMC elle-même ;

- Solvabilité II : la moyenne des réserves est estimée par Chain Ladder ; l'écart type et la VaR sont estimés par des formules fournies par l'EIOPA⁷.

Solvabilité II se base sur des montants actualisés. Pour plus de cohérence, nous considérons donc ici ainsi que dans la section suivante, non pas les moyennes brutes des réserves, mais les moyennes actualisées. Pour ce faire, les taux d'actualisation préconisés par l'EIOPA ont été appliqués aux *cash flows* (flux de trésorerie) futurs pour chacune des méthodes. Nous nous basons aussi sur des triangles hors inflation.

Plusieurs mesures de risque ont été ensuite calculées : l'écart type et la VaR 99,5 %. En annexe 4, figurent les détails des résultats concernant les estimations des espérances, écarts types et VaR 99,5 % pour chaque méthode et chaque triangle traité.

Les résultats numériques de cette étude sont détaillés dans l'annexe 4.

Le graphique ci-dessous représente les capitaux correspondant au risque de réserve, hors effet de diversification, qu'une compagnie d'assurance devrait inscrire au passif de son bilan, en fonction de la méthode de calcul utilisée. Ces capitaux se calculent par la différence entre la VaR 99,5 % des réserves et leur moyenne, comme démontré précédemment⁸ ; ils sont ici représentés en pourcentage de l'espérance des réserves.

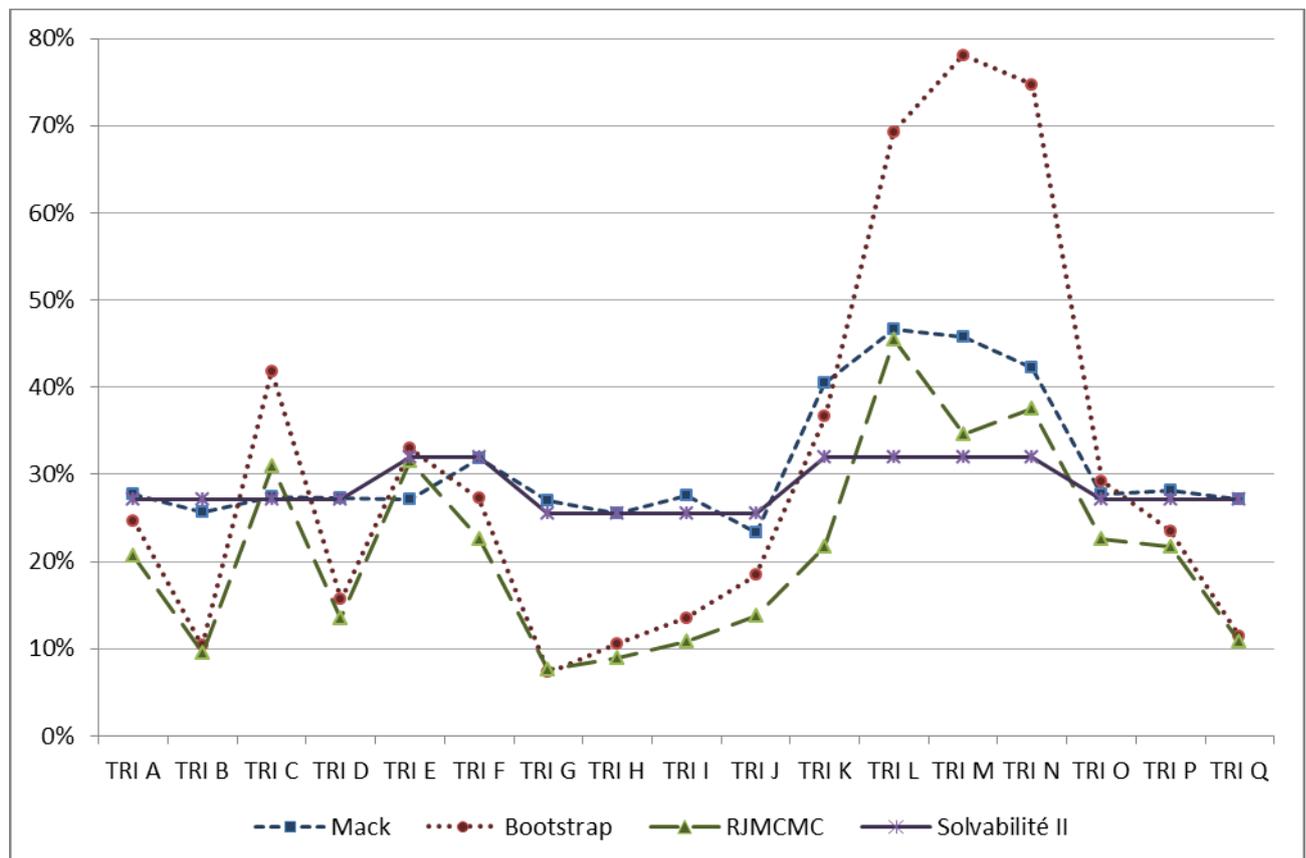


FIGURE 27 : graphique représentant les capitaux en pourcentage des réserves pour l'ensemble des triangles étudiés

⁷ European Insurance and Occupational Pensions Authority

⁸ Partie III / Chapitre 3 / 3.1

Pour treize des dix-sept triangles étudiés, l'estimation des capitaux par la méthode RJMCMC est inférieure à l'estimation de Solvabilité II. Les résultats de RJMCMC amènent également toujours à des estimations des capitaux plus faibles que par la méthode du Bootstrap, c'est aussi le cas par rapport à la méthode de Mack, excepté pour deux des triangles.

Le tableau suivant représente les capitaux (en pourcentage de la moyenne des réserves) obtenus en moyenne sur les dix-sept triangles, pour chacune des méthodes. Sur la seconde ligne, une comparaison est faite avec les capitaux obtenus par Solvabilité II.

	Mack	Bootstrap	RJMCMC	Solvabilité II
<i>Capitaux</i> <i>Moyennes des réserves</i>	31 %	31 %	21 %	28 %
Ecart par rapport à Solvabilité II	+ 9 %	+ 9 %	- 25 %	—

TABLE 7 : tableau représentant les capitaux obtenus en moyenne sur les dix-sept triangles pour les différentes méthodes

D'après ce tableau récapitulant les résultats sur l'ensemble des triangles représentatifs du marché Belge, la méthode RJMCMC permettrait d'économiser 25 % de capital par rapport à l'application directe des coefficients fournis par l'EIOPA. Les méthodes de Mack et du Bootstrap étant assez proches et menant à une estimation 9 % plus élevée que Solvabilité II.

Cependant, ceci peut s'expliquer par le fait que Solvabilité II estime une volatilité à horizon un an seulement. Alors que dans cette étude, la méthode de Mack, du Bootstrap et de RJMCMC évalue la volatilité à l'ultime, qui est un majorant de la volatilité à un an. C'est pour cette raison que, dans la partie suivante, nous avons établi les mêmes calculs que précédemment tout en se basant sur les méthodologies permettant d'évaluer la volatilité à un an.

3.3 VOLATILITE A HORIZON UN AN

Chacune des méthodes précédemment étudiée possède une extension qui permet d'évaluer la volatilité à horizon un an :

- Pour la méthode de Mack (1993), c'est l'évolution apportée par Merz et Wüthrich (2008) qui permet d'évaluer la volatilité à un an à partir de Chain Ladder ;
- Pour le Bootstrap, l'application de la méthode « Actuary in the box » permet d'estimer cette volatilité. Pour la mise en pratique dans cette section, nous avons utilisé l'approximation de Chain Ladder au lieu d'appliquer les simulations dans les simulations ;

Pour RJMCMC enfin, nous avons mis en application les extensions proposées précédemment⁹ : l'« Actuary in the box ». De même que pour le Bootstrap, nous avons fait l'approximation simplificatrice correspondant à utiliser Chain Ladder pour l'estimation du *Best Estimate* en n+1.

Les résultats de cette étude sont détaillés dans l'annexe 5.

Le graphique ci-dessous représente les capitaux obtenus grâce à ces méthodes d'évaluation à un an :

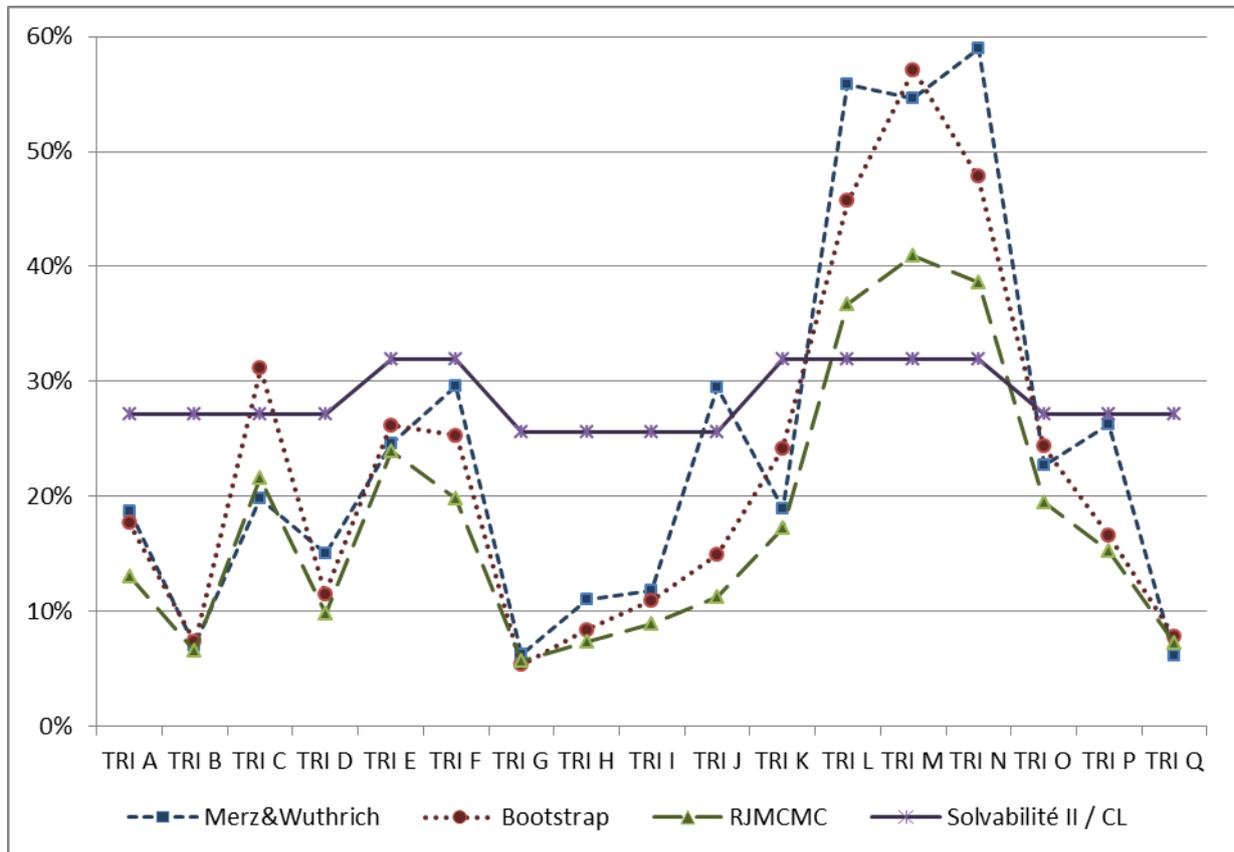


FIGURE 28 : graphique représentant les capitaux en pourcentage des réserves pour l'ensemble des triangles étudiés

Sur ce graphique, la courbe correspondant à Solvabilité II est identique à celle de la figure 27, ce qui est cohérent puisque l'évaluation de la moyenne des réserves par Chain Ladder ne varie pas lorsque l'on passe en volatilité à un an. Par contre, l'ensemble des autres courbes présente des capitaux plus petits que ceux évalués à l'ultime : la volatilité à horizon une année est plus faible que la volatilité à l'ultime. Il n'y a ainsi plus que trois des dix-sept triangles pour lesquels l'évaluation des capitaux par Solvabilité II est inférieure à celle de RJMCMC.

⁹ Partie III / Chapitre 3 / 3.2

Le tableau ci-dessous récapitule les moyennes des capitaux sur l'ensemble des triangles, ils sont exprimés en pourcentage des moyennes des réserves.

	Merz & Wüthrich	Bootstrap	RJMCMC	Solvabilité II
<i>Capitaux</i> <i>Moyennes des réserves</i>	23 %	20 %	16 %	28 %
Ecart par rapport à Solvabilité II	- 20 %	- 29 %	- 42 %	–

TABLE 8 : tableau représentant les capitaux obtenus en moyenne sur les dix-sept triangles pour les différentes méthodes

Lorsque l'on compare ces capitaux qui tiennent compte de la volatilité à un an, nous remarquons que l'économie de capital réalisée grâce à la méthode RJMCMC est encore plus importante : -42 % en moyenne par rapport à l'application du calibrage standard de Solvabilité II. Les capitaux constitués avec le Bootstrap arrivent en seconde position, avec une économie de 29 % tandis que la méthode de Merz et Wüthrich représente une économie de 20%.

CONCLUSION

Nous ne sommes qu'au début de l'utilisation pratique de la méthode de RJMCMC : s'il est ainsi peut-être un peu tôt pour émettre un jugement définitif sur son intérêt, il semble en tous cas qu'elle donne des résultats tout à fait cohérents, sans nécessiter de paramétrage préalable.

Il s'agit d'une méthode novatrice, qui n'est pas basée sur Chain Ladder et permet donc de s'affranchir des limites de cette méthode, tout en permettant d'évaluer directement la distribution complète de sinistralité : elle semble donc prometteuse dans un cadre réglementaire où les instances européennes incitent les organismes assureurs à évaluer de plus en plus l'incertitude liée à leurs engagements.

Manifestement, cette méthodologie présente certains inconvénients : elle repose sur une distribution de Poisson sur-dispersée. Cependant, les extensions proposées dans ce mémoire concernant le traitement des incréments négatifs ou nuls permettent de contourner la principale limite des modèles de Poisson sur-dispersés.

Dans ce mémoire, nous avons aussi testé l'utilisation d'autres fonctions paramétriques pour la partie droite du triangle : nous avons souvent observé que la fonction puissance inverse donne de meilleurs résultats que la décroissance exponentielle utilisée dans le papier original de Verrall et Wüthrich.

Enfin, la dernière évolution apportée à la méthode est l'évaluation de la volatilité à horizon une année et sa comparaison aux calculs découlant de Solvabilité II. Lors de la mise en application de cette méthodologie, nous avons constaté que RJMCMC permet une économie substantielle de capitaux, pouvant s'expliquer de manière intuitive par la nature de la méthode, appliquant des modèles adaptés à droite et à gauche du triangle.

Il est évidemment trop tôt pour affirmer que cette méthode est une véritable alternative à Chain Ladder : à ce stade, elle est assez nouvelle et n'a pas encore été intensivement testée par les compagnies d'assurance.

Néanmoins, les résultats obtenus en appliquant l'algorithme à un panel de triangles représentatif du marché belge nous sont apparus encourageants. Il nous reste néanmoins à appliquer la méthode à un nombre plus grand de triangles, et à vérifier que l'hypothèse simplificatrice réalisée sur la volatilité à 1 an, bien que similaire à celle communément réalisée sur Chain Ladder, n'implique pas de distorsion significative des résultats. Enfin, nous prévoyons de mettre RJMCMC à l'épreuve de l'analyse rétrospective (« Backtesting »), ce qui permettra de conclure sur sa stabilité dans le temps.

BIBLIOGRAPHIE

Publications

- BAYES, T. et R. PRICE (1763) : *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chance. By the late Rev. Mr. Bayes, communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, M.A. and F.R.S.* Philosophical Transactions of the Royal Society of London 53 : 370-418
- BORNHUETTER, R.L., et R.E. FERGUSON (1972) : *The Actuary and the IBNR*. Proceedings of the CAS 59 : 181-195
- CAMBARROT, T. (2009) : *Provisionnement Non-Vie : Le modèle de Poisson sur-dispersé*. Institut des Actuaires
- CASELLA, G., et E. GEORGE (1992) : *Explaining the Gibbs Sampler*. The American Statistician, Vol. 46, No. 3 : 167-174
- DIERS, D. (2010) : *Stochastic re-reserving in multi-year models – An approach based on simulations*. ICA 2010, Cape Town
- ENGLAND, P.D. (2010) : *Bootstrapping: Lessons Learnt in the Last 10 Years*. Swiss Association of Actuaries
- ENGLAND, P.D., et R.J. VERRALL (2001) : *A Flexible Framework for Stochastic Claims Reserving*. Proceedings of the CAS 88 : 1-38
- ENGLAND, P.D., et R.J. VERRALL (2002) : *Stochastic Claims reserving in General Insurance*. British Actuarial Journal 8/3 : 443-518
- ENGLAND, P.D., VERRALL, R.J. et WÜTHRICH, M.V. (2012) : *Bayesian Overdispersed Poisson Model and the Bornhuetter Ferguson Claims Reserving method*. Annals of Actuarial Science, in press
- EVERS, L. et JOHANSEN, A. M. (2007) : *Monte Carlo Methods*. Lecture Notes
- GEMAN et GEMAN (1984), GELFAND et SMITH (1990): *Gibbs Sampling*
- GREEN, P.J (1995) : *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Computation and Bayesian Model Determination*. Biometrika 82 : 711-732
- GREMILLET, M., P. MIEHE, J.L. VILAR ZANON (2013) : *A deep dive into RJMCMC, a practical alternative to Chain Ladder*. ASTIN Colloquium, May 2013
- HASTINGS, W.K. (1970) : *Monte Carlo Sampling Using Markov Chains and Their Applications*. Biometrika 57 : 97-109
- JOHANSEN, A.M., L. EVERS et WHITELEY, N. (2010) : *Monte Carlo Methods*. Lecture Notes, Department of Mathematics, University of Bristol
- KUNKLER, M. (2006) : *Modeling Negatives in Stochastic Reserving Models*. Insurance: Mathematics and Economics 38 : 540-555
- MACK, T. (1993) : *Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates*. ASTIN Bulletin 23 : 213-225
- MACK, T. (1999) : *The standard error of Chain Ladder reserve estimate: recursive calculation and inclusion of a tail factor*. ASTIN Bulletin 29, n°2 : 361-366
- MENARD, D. (2009) : *Mesure de la variabilité des provisions sur un horizon d'une année*. Institut des Actuaires
- MIEHE, P. (2001) : *La gestion Actif/Passif au sein d'une institution de prévoyance : Elaboration d'un outil actuariel opérationnel*. Institut des Actuaires

MERZ, M. et M.V. WÜTHRICH (2008) : *Modeling the claims development result for Solvency purposes*. ASTIN Colloquium, July 2008

TAYLOR, G. (2000) : *Loss reserving – An actuarial perspective*. Kluwer Academic Press

SAUVET, C. (2006) : *Solvency II – Quelle modélisation stochastique des provisions techniques prévoyance et non vie ?* Institut des Actuaire, 8-22

VERRALL, R.J., HÖSSJER, O. et BJÖRKWALL (2012) : *Modeling Claims Run-off with Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Methods*. ASTIN Bulletin, in press.

WÜTHRICH, M.V. et M. MERZ (2008) : *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. New York: Wiley

WÜTHRICH, M.V., M. MERZ et N. LYSENKO (2008) : *Uncertainty in the claims development result in the Chain Ladder method*. Scandinavian Actuarial Journal 2008, 1-22

WÜTHRICH, M.V. et R.J. VERRALL (2012) : *Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo Method for Parameter Reduction in Claims Reserving*. North American Actuarial Journal vol 16, number 2 : 240-259

Autres

EUROPEAN COMMISSION (2010). *QIS5 Technical Specifications*.

LEGIFRANCE (2012). *Code des Assurances, Partie réglementaire*.

ANNEXES

ANNEXE 1 : EXEMPLE DE VERRALL ET WÜTHRICH

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	136 367	59 390	18 031	13 757	12 591	9 511	10 613	10 947	14 640	4 967	9 221	5 953	6 942	3 594	3 464	3 280	2 530	433	1 491	894	2 108	1 413
1	143 135	69 523	21 331	18 166	15 104	13 410	15 194	14 721	12 354	9 083	9 649	8 254	6 984	4 218	6 669	2 753	2 503	3 891	1 372	1 402	1 672	
2	146 469	73 290	22 224	15 080	15 785	12 589	27 961	16 505	10 320	12 852	8 940	9 027	4 052	4 336	2 955	6 672	2 411	4 356	1 707	2 193		
3	158 518	73 610	24 624	19 841	16 214	17 950	12 080	16 914	12 862	14 094	12 028	6 659	9 111	8 113	6 426	3 378	3 202	5 785	2 708			
4	158 633	65 824	25 340	17 879	17 779	18 093	16 734	20 694	11 511	8 813	13 200	13 949	9 399	5 141	5 162	5 865	2 082	3 430				
5	153 215	71 859	24 614	18 065	17 541	21 822	17 675	16 447	12 182	16 129	12 467	8 285	4 905	8 428	2 668	1 517	3 263					
6	153 185	62 514	19 910	19 775	17 365	18 239	13 093	15 636	14 740	18 535	19 887	10 766	10 989	6 560	6 183	3 010						
7	150 974	66 571	24 855	18 073	18 963	20 361	18 194	18 688	16 250	20 410	24 203	9 603	8 991	13 309	6 535							
8	141 432	63 586	20 321	15 976	18 783	16 963	19 225	16 359	17 893	8 091	10 392	8 754	8 693	6 045								
9	141 554	65 956	23 087	19 796	22 145	21 470	27 245	25 583	20 029	14 840	9 973	12 614	7 478									
10	141 899	64 258	23 353	17 200	16 025	17 436	23 785	20 398	18 687	13 833	11 289	12 459										
11	145 037	70 090	25 843	19 487	20 067	23 594	18 213	23 298	11 452	13 592	13 327											
12	135 739	68 260	28 177	17 838	27 486	21 476	24 579	16 298	12 245	12 785												
13	135 350	74 195	26 675	20 490	19 866	16 891	11 969	14 893	15 814													
14	132 847	70 745	24 310	22 012	20 563	15 652	15 218	16 454														
15	135 951	69 499	24 412	20 762	15 747	13 831	20 672															
16	131 151	62 484	21 730	18 837	13 123	14 709																
17	130 188	60 074	23 324	12 529	16 653																	
18	118 505	56 117	18 230	13 956																		
19	118 842	58 829	22 201																			
20	121 011	64 845																				
21	132 116																					

Tableau représentant l'exemple des règlements incrémentaux utilisé par Verrall et Wüthrich dans leurs papiers

ANNEXE 2 : EXEMPLE DE LA BNB

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	136 367	59 390	18 031	13 757	12 591	9 511	10 613	10 947	14 640	4 967	9 221	5 953	6 942	3 594
1	143 135	69 523	21 331	18 166	15 104	13 410	15 194	14 721	12 354	9 083	9 649	8 254	6 984	4 218
2	146 469	73 290	22 224	15 080	15 785	12 589	27 961	16 505	10 320	12 852	8 940	9 027	4 052	4 336
3	158 518	73 610	24 624	19 841	16 214	17 950	12 080	16 914	12 862	14 094	12 028	6 659	9 111	8 113
4	158 633	65 824	25 340	17 879	17 779	18 093	16 734	20 694	11 511	8 813	13 200	13 949	9 399	5 141
5	153 215	71 859	24 614	18 065	17 541	21 822	17 675	16 447	12 182	16 129	12 467	8 285	4 905	8 428
6	153 185	62 514	19 910	19 775	17 365	18 239	13 093	15 636	14 740	18 535	19 887	10 766	10 989	6 560
7	150 974	66 571	24 855	18 073	18 963	20 361	18 194	18 688	16 250	20 410	24 203	9 603	8 991	13 309
8	141 432	63 586	20 321	15 976	18 783	16 963	19 225	16 359	17 893	8 091	10 392	8 754	8 693	6 045
9	141 554	65 956	23 087	19 796	22 145	21 470	27 245	25 583	20 029	14 840	9 973	12 614	7 478	
10	141 899	64 258	23 353	17 200	16 025	17 436	23 785	20 398	18 687	13 833	11 289	12 459		
11	145 037	70 090	25 843	19 487	20 067	23 594	18 213	23 298	11 452	13 592	13 327			
12	135 739	68 260	28 177	17 838	27 486	21 476	24 579	16 298	12 245	12 785				
13	135 350	74 195	26 675	20 490	19 866	16 891	11 969	14 893	15 814					

Tableau représentant l'exemple réel des règlements incrémentaux fourni par la BNB

ANNEXE 3 : PREUVE DE LA SIMPLIFICATION DANS PARTIE 2 / CHAPITRE 2 / 2.2

Dans cette annexe, nous détaillons la preuve de l'égalité :

$$q\left((\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) \mid (\alpha^*, \beta^*)\right) = q\left((\alpha^*, \beta^*) \mid (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})\right)$$

Cette preuve est similaire à celle proposée dans le cas uni dimensionnel, mais étendue au cas bi-varié.

Rappelons le contexte : il s'agit de rafraichir le couple $(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})$ grâce à la loi de proposition normale bi-variée suivante :

$$(\alpha^*, \beta^*) \sim N\left(\begin{pmatrix} \alpha^{(t)} \\ \beta^{(t)} \end{pmatrix}, \Sigma\right)$$

Où Σ représente la matrice de variance covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \text{Var}_\alpha & 0 \\ 0 & \text{Var}_\beta \end{pmatrix}$$

Nous pouvons alors écrire la formule de la densité conditionnelle de proposition :

$$q\left((\alpha^*, \beta^*) \mid (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^* - \alpha^{(t)} & \beta^* - \beta^{(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{Var}_\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{Var}_\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* - \alpha^{(t)} \\ \beta^* - \beta^{(t)} \end{pmatrix}\right)$$

Après développement du terme de l'exponentielle, nous obtenons la formule simplifiée suivante :

$$q\left((\alpha^*, \beta^*) \mid (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha^* - \alpha^{(t)})^2}{\text{Var}_\alpha} + \frac{(\beta^* - \beta^{(t)})^2}{\text{Var}_\beta} \right)\right)$$

L'évaluation de cette fonction en $(\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})$ s'écrit :

$$q\left((\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) \mid (\alpha^*, \beta^*)\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{(\alpha^{(t)} - \alpha^*)^2}{\text{Var}_\alpha} + \frac{(\beta^{(t)} - \beta^*)^2}{\text{Var}_\beta} \right)\right)$$

Or $(\alpha^{(t)} - \alpha^*)^2 = (\alpha^* - \alpha^{(t)})^2$ et $(\beta^{(t)} - \beta^*)^2 = (\beta^* - \beta^{(t)})^2$ donc

$$q\left((\alpha^*, \beta^*) \mid (\alpha^{(t)}, \beta^{(t)})\right) = q\left((\alpha^{(t)}, \beta^{(t)}) \mid (\alpha^*, \beta^*)\right)$$

Ainsi, le deuxième terme qui intervient dans la probabilité d'acceptation peut se simplifier.

ANNEXE 4 : RESULTATS AVEC VOLATILITE A L'ULTIME

Dans cette annexe, nous récapitulons les détails des résultats obtenus lors de l'application des méthodes avec volatilité à l'ultime. Le premier tableau représente les moyennes des réserves, le second les écarts types et enfin le dernier tableau fournit les résultats de la VaR 99,5%.

	Chain Ladder	Bootstrap	RJMCMC
Triangle A	46 677 750	46 523 015	46 874 233
Triangle B	69 488 720	69 537 934	68 957 305
Triangle C	8 435 595	8 215 337	8 463 471
Triangle D	52 278 371	52 515 192	52 318 941
Triangle E	27 215 361	27 095 373	26 374 772
Triangle F	42 633 969	42 706 278	42 643 231
Triangle G	187 591 858	190 186 506	189 375 829
Triangle H	104 805 800	105 950 892	104 890 365
Triangle I	51 763 419	52 490 250	52 474 076
Triangle J	78 522 047	80 412 409	77 567 231
Triangle K	46 650 469	47 842 438	45 894 027
Triangle L	94 646 432	99 313 310	89 337 459
Triangle M	53 464 121	51 309 854	53 596 424
Triangle N	72 192 202	69 658 891	70 896 805
Triangle O	16 013 584	16 388 528	16 068 878
Triangle P	131 316 376	131 210 265	132 217 760
Triangle Q	279 760 282	280 130 247	279 829 035

Moyennes des réserves obtenues avec chaque méthode pour les différents triangles

	Mack	Bootstrap	RJMCMC	Solvabilité II
Triangle A	5 313 709	3 878 081	3 491 909	4 434 386
Triangle B	2 707 819	2 679 984	2 480 837	6 601 428
Triangle C	1 212 580	1 114 796	946 436	801 382
Triangle D	2 868 867	2 900 508	2 650 410	4 966 445
Triangle E	2 729 135	3 238 758	2 830 007	2 993 690
Triangle F	4 705 744	3 897 839	3 598 091	4 689 737
Triangle G	5 889 164	5 127 153	5 424 074	16 883 267
Triangle H	4 937 340	4 178 317	3 531 106	9 432 522
Triangle I	2 824 164	2 600 745	2 144 994	4 658 708
Triangle J	8 464 280	5 397 347	4 054 790	7 066 984
Triangle K	5 867 274	5 727 334	3 670 699	5 131 552
Triangle L	27 333 139	20 596 300	13 012 186	10 411 108
Triangle M	18 524 298	10 922 489	6 226 067	5 881 053
Triangle N	23 076 500	16 069 140	8 841 769	7 941 142
Triangle O	1 940 902	1 617 478	1 306 562	1 521 290
Triangle P	18 305 202	10 940 703	10 120 996	12 475 056
Triangle Q	11 088 134	11 755 453	11 178 996	26 577 227

Ecarts types des réserves obtenues avec chaque méthode pour les différents triangles

	Mack	Bootstrap	RJMCMC	Solvabilité II
Triangle A	59 636 326	57 982 610	56 554 987	59 342 458
Triangle B	87 298 822	76 738 795	75 549 033	88 342 549
Triangle C	10 742 307	11 652 353	11 081 676	10 724 359
Triangle D	66 503 577	60 720 175	59 371 796	66 462 651
Triangle E	34 612 177	36 026 018	34 700 418	35 899 198
Triangle F	56 218 242	54 338 136	52 288 052	56 237 553
Triangle G	238 183 397	203 996 715	203 801 152	235 560 268
Triangle H	131 476 131	117 197 468	114 287 581	131 605 298
Triangle I	66 022 693	59 580 307	58 134 853	64 999 649
Triangle J	96 841 623	95 262 416	88 214 668	98 600 624
Triangle K	65 535 120	65 354 581	55 848 106	61 535 631
Triangle L	138 816 284	168 079 866	130 003 699	124 846 075
Triangle M	77 963 100	91 380 362	72 056 178	70 523 373
Triangle N	102 661 255	121 703 112	96 999 008	95 227 182
Triangle O	20 440 293	21 182 488	19 725 553	20 358 423
Triangle P	168 248 349	162 083 398	160 864 384	166 945 417
Triangle Q	355 619 635	312 038 410	310 035 281	355 665 443

VaR 99,5% des réserves obtenues avec les différentes méthodes pour chaque triangle

ANNEXE 5 : RESULTATS AVEC VOLATILITE A UN AN

Dans cette annexe, nous récapitulons les détails des résultats obtenus lors de l'application des méthodes avec volatilité à horizon une année. Le premier tableau représente les moyennes des réserves, le second les écarts types et enfin le dernier tableau fournit les résultats de la VaR 99,5%.

	Chain Ladder	Bootstrap	RJMCMC
Triangle A	46 677 750	46 629 152	46 082 741
Triangle B	69 488 720	69 502 203	69 289 621
Triangle C	8 435 595	8 365 587	8 469 599
Triangle D	52 278 371	52 363 022	52 291 539
Triangle E	27 215 361	27 148 614	26 717 321
Triangle F	42 633 969	42 686 650	42 675 117
Triangle G	187 591 858	188 714 693	188 882 525
Triangle H	104 805 800	105 286 522	105 177 118
Triangle I	51 763 419	52 048 314	52 272 128
Triangle J	78 522 047	79 321 792	78 325 814
Triangle K	46 650 469	47 117 006	47 152 121
Triangle L	94 646 432	97 000 069	92 917 671
Triangle M	53 464 121	51 488 884	53 459 240
Triangle N	72 192 202	70 326 763	71 284 456
Triangle O	16 013 584	16 210 741	16 115 407
Triangle P	131 316 376	131 281 424	131 959 642
Triangle Q	279 760 282	279 887 079	279 777 766

Moyennes des réserves obtenues avec chaque méthode pour les différents triangles

	Mack	Bootstrap	RJMCMC	Solvabilité II
Triangle A	3 145 094	2 548 666	2 200 515	4 434 386
Triangle B	1 851 689	1 833 886	1 733 466	6 601 428
Triangle C	601 003	741 632	655 701	801 382
Triangle D	1 671 128	2 058 864	1 933 899	4 966 445
Triangle E	2 366 635	2 507 209	2 229 090	2 993 690
Triangle F	4 394 071	3 431 226	3 195 210	4 689 737
Triangle G	4 447 290	3 740 742	4 076 851	16 883 267
Triangle H	4 305 528	3 226 802	2 896 710	9 432 522
Triangle I	2 253 451	2 027 613	1 763 594	4 658 708
Triangle J	8 059 430	4 192 639	3 261 785	7 066 984
Triangle K	3 182 903	3 560 671	2 888 241	5 131 552
Triangle L	17 019 894	12 983 125	10 578 773	10 411 108
Triangle M	9 432 211	7 562 764	7 082 669	5 881 053
Triangle N	13 605 261	9 957 920	9 173 599	7 941 142
Triangle O	1 295 623	1 230 938	1 057 743	1 521 290
Triangle P	12 115 836	7 170 189	6 908 454	12 475 056
Triangle Q	6 508 081	7 712 321	7 453 576	26 577 227

Ecarts types des réserves obtenues avec chaque méthode pour les différents triangles

	Mack	Bootstrap	RJMCMC	Solvabilité II
Triangle A	55 387 989	54 858 738	52 110 258	59 342 458
Triangle B	74 398 539	74 598 622	73 840 548	88 342 549
Triangle C	10 106 859	10 970 306	10 298 154	10 724 359
Triangle D	60 119 012	58 388 826	57 398 386	66 462 651
Triangle E	33 905 797	34 262 619	33 116 223	35 899 198
Triangle F	55 265 293	53 483 906	51 119 572	56 237 553
Triangle G	199 346 593	198 792 371	199 691 274	235 560 268
Triangle H	116 400 761	114 090 728	112 885 117	131 605 298
Triangle I	57 848 018	57 737 438	56 945 883	64 999 649
Triangle J	101 679 730	91 167 557	87 112 984	98 600 624
Triangle K	55 473 330	58 486 501	55 273 223	61 535 631
Triangle L	147 489 373	141 330 189	127 014 660	124 846 075
Triangle M	82 652 036	80 889 595	75 127 535	70 523 373
Triangle N	114 788 386	103 963 730	99 704 383	95 227 182
Triangle O	19 653 190	20 153 540	19 176 375	20 358 423
Triangle P	165 757 390	153 022 830	152 029 608	166 945 417
Triangle Q	296 953 678	301 776 673	300 093 439	355 665 443

VaR 99,5% des réserves obtenues avec les différentes méthodes pour chaque triangle