

Mémoire présenté le : 19 septembre 2018
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaire

Par : Leila WAMBA KENFACK

Titre : **Analyse du risque de primes et réserves d'une mutuelle à l'aide des
« Undertaking Specific Parameters »** dans le cadre de l'ORSA

Confidentialité : ☐ NON ☐ (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

*Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaire*

Eric LECOEUR

Nicolas BOURE

Stéphane JASSON

*Membres présents du jury de
l'ISFA*

Frédéric PLANCHET

.....

.....

Entreprise : GIE HUMANIS

Nom :

Signature :

*Directeur de mémoire en entre-
prise :*

Nom : Nathalie GASTE

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et
de mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actua-
riels (après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Résumé

Mots clés : *SCR, formule standard, USP, paramètres spécifiques, ORSA, risque de primes et réserves, Non-SLT*

Dans le cadre de la réforme Solvabilité II, les USP (*Undertaking Specific Parameters*) peuvent remplacer, sous conditions, certains paramètres de la formule standard. Ils sont calibrés sur des données internes de l'entreprise permettant ainsi de prendre en compte ses risques propres. Ils peuvent, après accord du régulateur, être utilisés lors de la détermination du SCR (*Solvency Capital Requirement*) à l'aide de la formule standard. Il est également possible de les calculer lors de la troisième évaluation de l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) pour vérifier si le profil de risque du portefeuille étudié est en adéquation avec les hypothèses qui sous-tendent la formule standard du SCR.

Dans ce mémoire, les USP ont été calibrés pour le risque de primes et réserves en santé Non-SLT (*Non-Similar to Life Techniques*) d'une mutuelle. Pour la mutuelle étudiée, ce risque est le plus significatif en termes de volume de SCR. Son suivi est donc nécessaire pour mieux évaluer le risque réel auquel est exposée l'entreprise et permet un meilleur pilotage du SCR. Dans un premier temps, le calibrage des paramètres spécifiques a été effectué à l'aide des méthodes précisées dans le Règlement délégué de 2015 (2015/035/CE). Ces méthodes ont ensuite été challengées par d'autres méthodes proposées lors de la cinquième étude quantitative d'impact (QIS5 - *Fifth Quantitative Impact Study*). Au préalable, une étude de qualité des données utilisées ainsi que la validation des hypothèses sous-jacentes aux différentes méthodes utilisées ont été réalisées.

Les résultats ont permis de mettre en évidence que le risque de primes de cette mutuelle est en adéquation avec les hypothèses qui sous-tendent la formule standard du SCR primes et réserves. En effet, les hypothèses de calibrage de l'écart-type standard du risque de primes sont vérifiées sur notre portefeuille. De plus, le paramètre spécifique au risque de primes obtenu est légèrement inférieur au paramètre standard. Le risque de réserves quant à lui s'écarte des hypothèses de calibrage de la formule standard, et sa volatilité est environ trois fois plus importante que celle du marché européen. Néanmoins, l'impact de l'utilisation des paramètres spécifiques au lieu des paramètres standards pour déterminer le SCR primes et réserves est négligeable car le volume de primes est huit fois plus grand que le volume de réserves, ce qui neutralise l'impact de la forte volatilité du risque de réserves. Finalement, la vision ORSA du risque de primes et réserves permet de montrer que le suivi périodique de ce risque s'avère nécessaire au vu de l'impact considérable du risque de primes sur le SCR et de la forte volatilité du risque de réserves.

Abstract

Keywords : *SCR, standard formula, USP, specific parameters, ORSA, premium and reserve risk, Non-SLT*

As part of the Solvency II reform, the Undertaking Specific Parameters (USP) may replace, under certain conditions, a subset of parameters used in calculating the SCR (Solvency Capital Requirement) with the standard formula. They are calibrated using companies' internal data which enables them to take into account their own risks. After supervisory approval, the specific parameters can be used to determine the SCR with the standard formula. They can also be used for the Own Risk and Solvency Assessment (ORSA) to challenge the underlying assumptions for the standard formula calibration.

In this thesis, the specific parameters were calculated for the premium and reserve risk linked to the non-similar to life techniques health risk module of a mutual fund. For the company under review, this risk is the most significant in terms of SCR amount. Its monitoring is hence necessary so as to assess the real risk to which the company is exposed as well as a better SCR management. Firstly, the specific parameters were determined using standardized methods prescribed in the Commission Delegated Regulation of 2015 (2015/35). They were then challenged with methods proposed in the Fifth Quantitative Impact Studies (QIS5). Prior to this, a reprocessing of the data used was realised, as well as a backtesting of the assumptions underlying the different USP calibration methods.

The calibration results enabled to highlight the fact that the premium risk of this company fits with the underlying assumptions of standard formula of premium and reserves risk SCR. Indeed, the hypotheses for the standard premium risk parameter calibration are in line with the risk profile of the studied portfolio. Moreover, the specific calculated is slightly less than the standard volatility. On the other hand, the reserve risk diverges from the calibration hypotheses of the standard formula and its volatility is more than that of the European market. Nevertheless, the impact of using its specific parameters to determine the premium and reserves risk SCR is insignificant because the premium volume is eight times bigger than the reserves volume. This neutralises the impact of the strong volatility of the reserves risk. Finally, the ORSA vision of the premium and reserve risk shows the significant impact of the premium risk and the high volatility of the reserve risk makes it necessary for this mutual fund to control periodically its premium and reserve risk.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Nathalie GASTE et Laurent VIBERT pour m'avoir permis de réaliser mon apprentissage au sein de la Direction Technique d'HUMANIS.

Je souhaite ensuite remercier tout particulièrement Cédric BRABANT ainsi que Bingyi HE, de m'avoir fait confiance, encadré et pour leurs conseils qui m'ont permis d'apprendre et de progresser tout au long de mon apprentissage.

Je tiens également à remercier toutes les personnes de l'équipe Pilotage Technique et Inventaire pour leur disponibilité, leurs précieux conseils ainsi que pour l'accueil qui m'a été réservé et la très bonne ambiance au sein de l'équipe.

Je remercie Nathalie HAVET, ma tutrice, ainsi que l'ensemble du corps professoral de l'Institut de Science Financière et d'Assurances pour la qualité de leurs enseignements et leurs conseils.

Enfin, je remercie ma famille, mes amis et mes collègues de m'avoir soutenu et aidé tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Sommaire

Introduction	7
I Contexte et périmètre étudié	8
1 Chiffres clés du portefeuille étudié	9
2 Solvabilité II et le calcul du SCR	12
2.1 Présentation du SCR	12
2.2 Présentation de la formule standard	12
2.3 Risque de primes et réserves	14
3 <i>Own Risk and Solvency Assessment - ORSA</i>	18
3.1 Hypothèses qualitatives	18
3.2 Hypothèses quantitatives	19
4 Les <i>Undertaking Specific Parameters - USP</i>	21
4.1 Procédure pour l'approbation des USP	21
4.2 Exigences concernant la qualité des données	23
4.3 Formule de calibrage des USP	24
5 Démarche de ce mémoire	27
II Méthodes et données pour le calibrage des USP	28
6 Méthodes pour le risque de primes	29
6.1 Méthode Log-Normale	30
6.2 Méthode Log-Normale Simplifié	32
6.3 Méthode des Moindres Carrés	34
6.4 Validation des hypothèses	36
7 Méthodes pour le risque de réserves	40
7.1 Méthode Log-Normale	41
7.2 Méthode des Moindres Carrés	42
7.3 Méthode Merz-Wüthrich avec provisionnement Chain-Ladder	43
7.4 Méthode de Merz-Wüthrich avec provisions comptables	45

<i>SOMMAIRE</i>	6
7.5 Vérification des hypothèses	46
8 Données et retraitements nécessaires pour les USP	48
8.1 Données requises pour les USP du risque de primes et réserves	48
8.2 Retraitements des données	49
III Application à un portefeuille santé	51
9 Périmètre de l'étude et retraitements	52
9.1 Données retenues pour l'étude	53
9.2 Données pour le risque de primes	55
9.3 Données pour le risque de réserves	56
10 Backtesting qualitatif dans le cadre de l'ORSA	60
10.1 Hypothèses non applicables au périmètre étudié	60
10.2 Hypothèses alignées avec le profil de risque de la mutuelle étudiée	61
10.3 Hypothèses nécessitant une analyse quantitative	62
11 Analyse du risque de primes	63
11.1 Validation d'hypothèses avec données brutes de réassurance	63
11.2 Validation d'hypothèses pour le risque de primes avec données nettes de réassurance	67
11.3 Présentation des résultats	69
11.4 Tests de sensibilités	71
11.5 Impact des USP du risque de primes sur le SCR	72
11.6 Conclusion sur le risque de primes	73
12 Analyse du risque de réserves	74
12.1 Validation d'hypothèses pour le risque de réserves	74
12.2 Résultats pour le risque de réserves	80
12.3 Tests de sensibilités	81
12.4 Impact des USP du risque de réserves sur le SCR	84
12.5 Conclusion sur le risque de réserves	84
Conclusion	86
Bibliographie	88
Glossaire	89
Annexes	92

Introduction

Le pilier I de la directive Solvabilité II adopté en 2009 demande aux entreprises d'assurance européennes de calculer le SCR (Capital de Solvabilité Requis) suivant la formule standard ou un modèle interne (partiel ou total). L'article 45 de cette directive exige également de chaque organisme assureur européen la mise en place d'un processus interne d'évaluation de son profil de risques appelé l'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*). Un des premiers objectifs de l'ORSA est d'analyser l'écart entre le profil de risque de leurs entreprises et les hypothèses utilisées pour le calcul du SCR à l'aide de la formule standard : c'est la troisième évaluation ORSA.

Le règlement délégué de 2015 permet aux assureurs utilisant la formule standard, sous certaines conditions et après approbation de l'autorité de contrôle nationale, d'adopter des paramètres alternatifs pour remplacer les paramètres de la formule standard. Ces paramètres sont plus communément appelés USP (*Undertaking Specific Parameters*). Les USP sont autorisés uniquement pour certains sous-modules de risques, et notamment le risque de primes et réserves¹. Les paramètres spécifiques peuvent également être utilisés dans le cadre de l'étude quantitative permettant de réaliser la troisième évaluation ORSA.

L'organisme pour lequel l'étude a été réalisée commercialise principalement des contrats santé. Le calcul de son SCR avec la formule standard a révélé que le SCR primes et réserves en santé représente environ 60% de son SCR de base. Une meilleure appréhension de ce risque permettra à cette entreprise de mieux piloter son SCR. Ainsi, l'objectif de ce mémoire est d'analyser dans quelle mesure le calibrage des USP du risque de primes et réserves à l'aide des méthodes décrites dans le règlement délégué s'inscrit dans le cadre de la troisième évaluation ORSA pour l'entreprise à l'étude. Il sera également étudié dans quelle mesure la mise en place des USP optimiserait le besoin en fonds propres pour cette entreprise.

Dans une première partie, sera présenté le contexte réglementaire du périmètre étudié. L'accent sera mis sur le risque de primes et de réserves, la formule standard associée, les hypothèses sous-jacentes à ce risque et la procédure d'approbation des USP.

La deuxième partie exposera les méthodes retenues pour cette étude, proposées dans le QIS5 et les actes délégués. De plus, les données nécessaires à l'application des méthodes de calibrage seront recensées et leur qualité sera étudiée.

Enfin, dans une troisième partie, sera réalisé le calibrage des USP sur le portefeuille à l'étude ainsi que l'évaluation de l'impact sur le SCR dans le cadre de l'ORSA.

1. risque de sous-tarification et de sous-provisionnement

Première partie

Contexte et périmètre étudié

Chapitre 1

Chiffres clés du portefeuille étudié

L'entreprise étudiée est une mutuelle qui commercialise essentiellement des contrats santé individuels et collectifs en France. Elle est issue de la fusion entre plusieurs mutuelles, la dernière fusion ayant eu lieu en 2010. Pour des raisons de gestion, le portefeuille est subdivisé en sections, une section correspondant à une entreprise (ou à un groupe), à une gamme de produits ou à un ensemble homogène de contrats.

Chiffre d'affaires et provisions techniques

Le chiffre d'affaires brut de réassurance de notre cette entreprise, au 31.12.2016 est d'environ 167 M€. Les provisions techniques en normes comptables françaises pour les principales lignes d'activité s'élèvent à 37 M€. Ces chiffres (en K€) sont répartis en lignes d'activité de la manière suivante :

Ligne d'activité	Chiffre d'affaires	Provisions techniques
Santé Non-SLT	166 172	37 151
Vie	547	50

Tableau 1.1 – Décomposition du chiffre d'affaires et des provisions techniques bruts de réassurance en fonction des lignes d'activité

Les données présentées ci-dessus montrent que les cotisations santé de cette entreprise représentent 99,6% du chiffre d'affaires global. En outre, les provisions pour sinistres à payer (PSAP) en santé représente 56% des provisions techniques totales, soit 20 729K€. Une analyse du chiffre d'affaires et des PSAP nets de réassurance dans le temps a permis de montrer que le volume de primes est beaucoup plus important que le volume de PSAP, comme le montre le graphique ci-dessous.

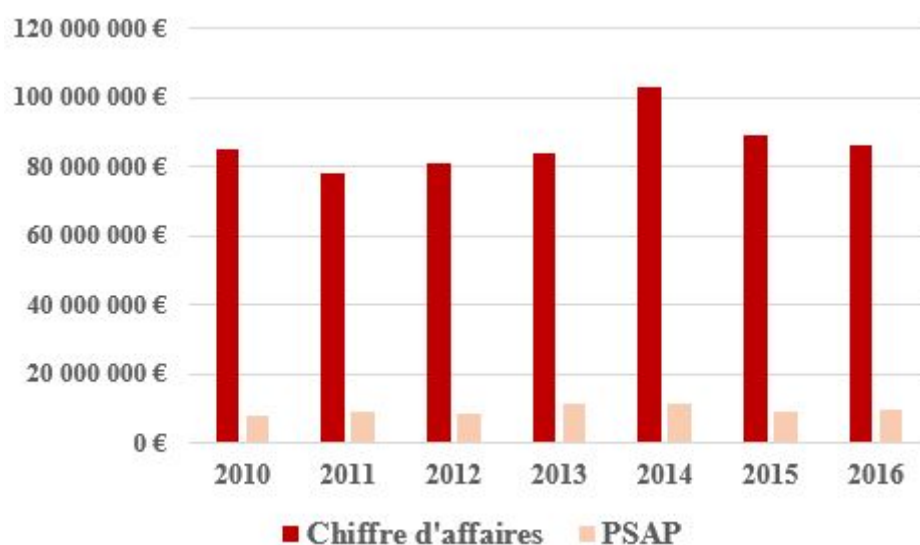


FIGURE 1.1 – Évolution du chiffre d'affaires et des provisions techniques nets de réassurance en santé

Il est observé que depuis 2010, le volume des PSAP est faible devant le volume de chiffre d'affaires. Ceci est cohérent en santé car c'est une branche d'activité pour laquelle l'essentiel des sinistres sont réglés au cours de l'année de survenance. Ce graphique permet aussi de voir qu'une sous-tarification aura plus d'impact qu'un sous-provisionnement.

SCR de base

A ce jour, l'entreprise étudiée utilise la formule standard pour déterminer son SCR. Dans le cadre de l'évaluation de sa solvabilité, il est observé que notre mutuelle affiche un taux de couverture du SCR de 188% au 31/12/2016. Par ailleurs, la décomposition du SCR de base (BSCR) brut par sous-module de risque avant effet de diversification est présentée ci-dessous.

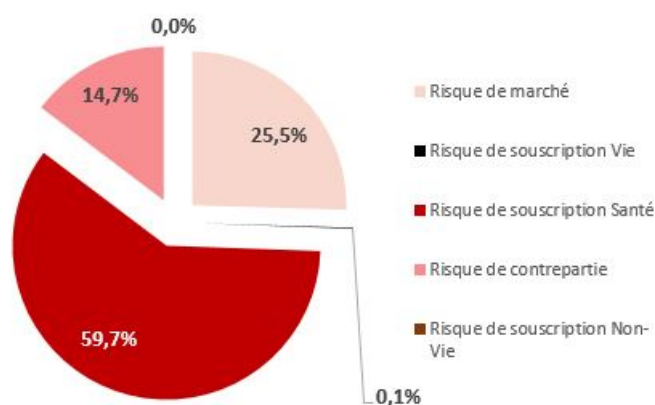


FIGURE 1.2 – Répartition du BSCR avant effet de diversification

Il est constaté que le risque de santé est le plus significatif (environ 60% du BSCR avant effet de diversification). Ainsi, dans le cadre des travaux ORSA de cette entreprise, l'accent est mis sur ce sous-module. Comme cité au début de ce chapitre, cette mutuelle commercialise uniquement des contrats santé et décès. Ainsi, elle n'est pas concernée par le risque de santé SLT.

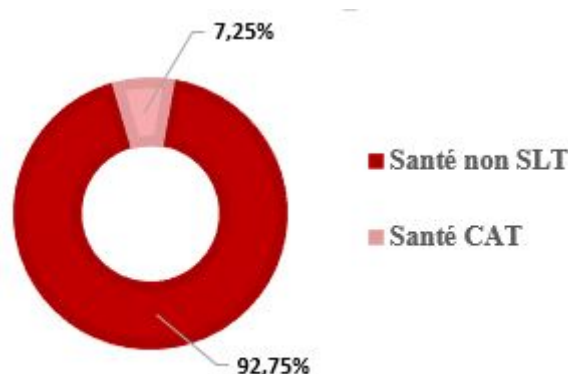


FIGURE 1.3 – Décomposition du SCR santé avant effet de diversification

La décomposition du SCR souscription santé met en évidence que le sous-module de santé non SLT est beaucoup plus important que le sous-module santé CAT. Le SCR santé non-SLT correspond au montant de capital qui doit être immobilisé pour faire face aux risques de primes et réserves ainsi que de rachat. Cependant, le SCR rachat a été valorisé à zéro car notre mutuelle n'est pas concernée par ce risque. Le SCR santé non-SLT est donc égal au SCR primes et réserves pour cet organisme. Au regard de ces éléments, cette entreprise souhaite évaluer dans quelle mesure son profil de risque est en adéquation avec les hypothèses qui sous-tendent le calcul de la formule standard du SCR primes et réserves. Pour cela, elle souhaite utiliser les USP pour quantifier la volatilité de son risque de primes et réserves. Ceci lui permettra d'avoir une meilleure connaissance de son risque, et donc de mieux piloter son SCR.

Cependant, avant d'analyser le risque de santé NSLT, nous allons d'abord poser le cadre réglementaire dans lequel s'inscrit le calcul du SCR, la réalisation de l'ORSA et le calibrage des USP.

Chapitre 2

Solvabilité II et le calcul du SCR

2.1 Présentation du SCR

La directive Solvabilité II exige des organismes assureurs de disposer d'un niveau suffisant de fonds propres à travers, entre autres, le SCR (*Solvency Capital Requirement* ou Capital de Solvabilité Requis). Le SCR est le capital minimum qu'un assureur doit disposer pour couvrir ses pertes majeures avec l'hypothèse d'une probabilité de non-ruine de 99,5% à l'horizon d'un an. Ces fonds permettront à l'assureur de couvrir les risques auxquels il est exposé à savoir :

- le risque de marché,
- le risque opérationnel,
- le risque de contrepartie,
- le risque de souscription.

Le calcul du SCR peut se faire à l'aide des deux méthodes suivantes :

- ▶ Le modèle interne (total ou partiel)
- ▶ la formule standard (classique, simplifiée ou avec paramètres spécifiques).

2.2 Présentation de la formule standard

La formule standard a été définie et calibrée par l'EIOPA pour les organismes assureurs de l'union Européenne. Cette formule peut être exploitée de 3 manières différentes :

- La formule standard classique
 - La formule standard simplifiée (pour les petites structures n'étant pas en mesure de fournir des modèles complets.)
 - La formule standard avec des paramètres spécifiques aux entreprises appelés **USP**- « *Undertaking Specific Parameters* ». Il s'agit de remplacer des paramètres de la formule standard, sous certaines conditions et pour certains risques, par des paramètres calibrés par l'entreprise d'assurance qui utilise cette méthode.
-

La formule standard pour calculer le SCR est la suivante :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{Op} \quad (2.1)$$

où :

BSCR est le capital de solvabilité requis de base,

Adj représente l'ajustement visant à tenir compte de la capacité d'absorption de pertes des provisions techniques et des impôts différés,

SCR_{Op} est le capital exigé pour risque opérationnel.

Les exigences quantitatives de Solvabilité II reposent sur une approche modulaire du risque et sur la segmentation des risques. Cette segmentation des risques est effectuée par branche d'activité (*Line of Business*(LoB)) en fonction de la nature de l'activité et des engagements de l'organisme assureur. L'idée sous-jacente à l'approche modulaire est que chaque module représente une exigence en capital, et le SCR représente l'agrégation de ces différents capitaux. Ces modules sont eux-mêmes subdivisés en sous-modules, comme le montre le schéma suivant.

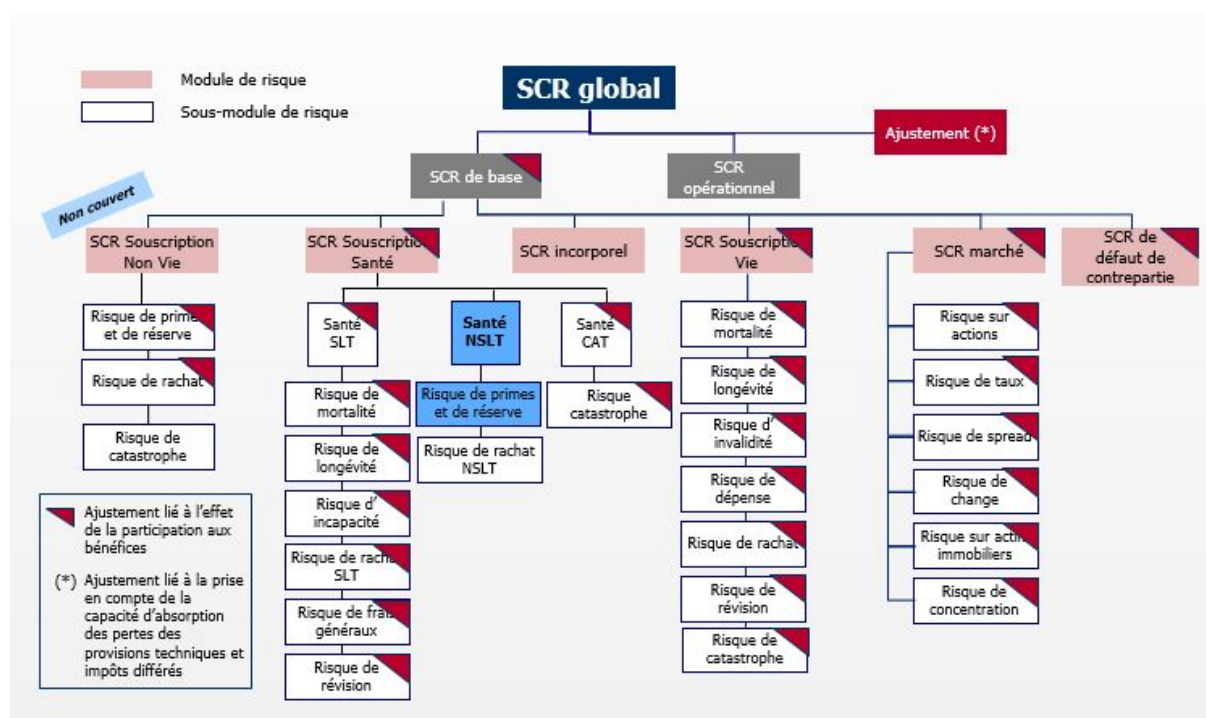


FIGURE 2.1 – Structure générale de la formule standard

Les risques dont il est question dans ce mémoire sont bleutés sur la figure ci-dessus.

Le BSCR est calculé selon la formule qui suit :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j + SCR_{intangibles}} \quad (2.2)$$

Où :

$\text{Corr}_{i,j}$ représente la matrice de corrélation entre les différents modules de risques,

SCR_i et SCR_j représentent les SCR des modules de risque i et j,

$\text{SCR}_{\text{intangible}}$ représente l'exigence de capital pour le risque lié aux immobilisations incorporelles.

Le sous-module le plus important pour l'organisme assureur étudié est le risque de souscription en santé.

Le SCR du risque de souscription santé est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\text{SCR}_{\text{santé}} = \sqrt{\sum_{x,y} \text{Corr}S_{x,y} \times \text{SCR}_x \times \text{SCR}_y} \quad (2.3)$$

Où :

$\text{Corr}S_{x,y}$ représente la matrice de corrélation entre les différents sous-modules de risque du module souscription santé,

SCR_x et SCR_y représentent les SCR des modules de risque x et y du module de souscription santé.

Comme mentionné au chapitre 1, notre étude porte sur le portefeuille santé d'une mutuelle. Ainsi, le sous-module de risque santé vie ne concerne pas notre étude. Par ailleurs, l'entreprise n'est pas assujettie au risque de rachat. Le SCR santé non-vie (NSLT - *Non similar to life techniques*) est donc égal au SCR primes et réserves.

2.3 Risque de primes et réserves

Risque de Primes

Le risque de primes correspond au risque de sous-tarification des contrats. Il résulte de l'incertitude liée aux cadences de développement, à la fréquence/nombre et à la sévérité/coût relatifs aux sinistres à venir. Il se traduit par une insuffisance des provisions pour primes constituées pour couvrir les sinistres. Il est mesuré à l'aide du *loss ratio* ou ratio $\mathbf{P/C}$ ($\frac{\text{prestations}}{\text{cotisations}}$) de la survenance courante i.e. pour chaque année de comptable N , on compare le volume des primes acquises nettes de réassurance au titre de l'année N avec la charge ultime après un an (prestations + provisions) en vision Best Estimate au titre de la survenance N , nettes de réassurance, intégrant les frais de gestions et retraitées des événements de type CAT.

Risque de Réserves

Le risque de réserves correspond au risque de sous-provisionnement des sinistres. Il résulte de l'incertitude liée aux cadences de développement et aux montants de charges ultimes (montant de charges à la fin du développement) des sinistres déjà survenus. Il se traduit par une insuffisance des provisions pour sinistres constituées. Il est mesuré à l'aide du ratio « *run-off* » qui compare la provision Best Estimate de début d'année, nette de réassurance avec la somme des prestations et de provisions *Best Estimate* de fin d'année. Cette comparaison peut s'effectuer par année comptable ou par année de survenance, selon la méthode utilisée pour calculer le ratio *run-off*.

Le SCR lié au risque de primes et de réserves sous la formule standard est calculé à l'aide d'une formule fermée. Cette formule exprime l'exigence de capital au titre du risque de primes et de réserves (ci-après $SCR_{P \& R}$), comme un produit entre le volume d'exposition (primes + réserves) et l'écart type global du risque :

$$SCR_{P \& R} = 3 \cdot \sigma_{P \& R} \cdot V_{P \& R} \quad (2.4)$$

Où :

$V_{P \& R}$ représente le volume global de primes et de réserves de l'entreprise. Ce volume est obtenu en agrégeant les volumes de primes et les volumes de réserves pour chaque branche d'activité (LoB),

$\sigma_{P \& R}$ représente la volatilité globale de primes et de réserves, et est déterminé par les volatilités standards fixées par l'EIOPA, en fonction de la ligne d'activité.

le tableau ci-dessous présente les écarts-types standards pour tous les LoB concernés par le risque de primes et de réserves en santé non-vie, précisés à l'annexe XIV des actes délégués.

Ligne d'activité	σ_P	σ_R
Frais médicaux	5%	5%
Protection de revenus	8,5%	14%
Indemnisation des travailleurs	8%	11%
Réassurance Santé Non-Proportionnelle	17%	20%

Tableau 2.1 – Volatilités standards de primes et de réserves en santé non SLT

Le coefficient **3** présent dans la formule (2.4) est un arrondi de 2.576, qui est le quantile à 99,5% d'une normale centrée réduite. En effet, la calibration de la formule du SCR primes et réserves repose sur l'hypothèse que le risque sous-jacent suit une loi log-normale.

Pour obtenir l'exigence en fonds propres liée à ce risque, il s'agit donc de multiplier le volume de primes et réserves par le choc pour la VaR à 99,5%. Ce choc est noté $\rho(\sigma)$ et est défini à l'aide de la formule suivante :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(N_{99,5\%}\sqrt{\log(1+\sigma^2)}\right)}{\sqrt{1+\sigma^2}} - 1 \quad (2.5)$$

En effectuant un développement limité de ρ , on obtient :

$$\rho(\sigma) \approx N_{99,5\%} \times \sigma$$

Le calcul exposé ci-dessus est réalisé au global, i.e. toutes LoB confondues. Les quantités en jeu ($\sigma_{P \& R}$ et $V_{P \& R}$) sont le résultat de deux niveaux d'agrégations.

Agrégation par LoB

La première agrégation est effectuée à la maille LoB.

$V_{P \& R}$ est donné par :

$$V_{P \& R} = V_{P \& R, LoB_1} + V_{P \& R, LoB_2} + \dots + V_{P \& R, LoB_N}$$

$\sigma_{P \& R}$ est donné par :

$$\sigma_{P \& R} = \frac{1}{V_{P \& R}} \cdot \sqrt{\sum_{LoB_s, LoB_t} CorrHS_{LoB_s, LoB_t} \cdot \sigma_{P \& R, LoB_s} \cdot V_{P \& R, LoB_s} \cdot \sigma_{P \& R, LoB_t} \cdot V_{P \& R, LoB_t}}$$

où $CorrHS_{LoB_s, LoB_t}$ représente le coefficient de corrélation entre les LoB s et t. La matrice de corrélation entre les différentes branches d'activités est donnée à l'annexe XV des actes délégués.

Agrégation par LoB et par risque

La section agrégation est effectuée à la maille LoB x risque.

Pour une LoB s donnée, $V_{P \& R, LoB_s}$ est donnée par :

$$V_{P \& R, LoB_s} = V_{P, LoB_s} + V_{R, LoB_s}$$

V_{P, LoB_s} correspond à la mesure de volume pour le risque de primes pour une ligne d'activité s. Ce volume est calculé à l'aide de la formule suivante :

$$V_{P, LoB_s} = \max(P_s; P_{(last, s)}) + FP_{(existing, s)} + FP_{(future, s)}$$

où :

- P_s représente une estimation des primes à acquérir au cours des 12 prochains mois,
- $P_{(last,s)}$ représente les primes acquises au cours des 12 derniers mois,
- $FP_{(existing,s)}$ représente la valeur actuelle probable des primes à acquérir après les 12 mois à venir pour les contrats existants,
- $FP_{(future,s)}$ représente la valeur actuelle probable des primes à acquérir pour les contrats dont la date de comptabilisation initiale survient dans les 12 mois à venir, mais à l'exclusion des primes à acquérir au cours des 12 mois qui suivent cette date initiale.

V_{R,LoB_s} correspond à la mesure de volume pour le risque de réserves pour une ligne d'activité s . Ce volume est calculé à l'aide de la formule suivante :m :

$$V_{R,LoB_s} = \max(0, PSAP_s)$$

où $PSAP_s$ est la meilleure estimation de la provision pour les sinistres à payer(PSAP) du segment s .

Il faut noter que depuis 2015, l'ACPR préconise que les organismes d'assurance du marché français basent leur calcul du volume de primes sur 14 mois de cotisations. Pour cette étude il est retenu un volume de 12 mois pour se conformer au niveau de l'entreprise étudiée.

$\sigma_P \& R,LoB_s$ est donnée par :

$$\sigma_{P \& R,LoB_s} = \frac{1}{V_{P \& R,LoB_s}} \cdot \sqrt{\sigma_{P,LoB_s}^2 \cdot V_{P,LoB_s}^2 + \sigma_{R,LoB_s}^2 \cdot V_{R,LoB_s}^2 + \sigma_{P,LoB_s} \cdot V_{P,LoB_s} \cdot \sigma_{R,LoB_s} \cdot V_{R,LoB_s}}$$

Une des principales limites de la formule standard du calcul du SCR primes et réserves est l'utilisation de paramètres fixés pour prendre en compte la volatilité liée à des portefeuilles différents.

Si une entreprise ayant recours à la formule standard pour calculer son risque de primes et réserves estime que les paramètres standards ne sont pas adaptés à son profil de risque, la directive solvabilité II prévoit la possibilité de calibrer des paramètres propres à l'entreprise, les USP. Cependant, les USP s'inscrivent dans la formule standard donc, leurs hypothèses de calibrage doivent rester cohérentes avec les hypothèses sous-jacentes à la formule standard. De plus, les USP peuvent être également calculés dans le cadre de l'ORSA pour estimer la volatilité réelle de son portefeuille. Cette meilleure connaissance du risque propre de l'entreprise permettra d'améliorer le pilotage des risques.

Chapitre 3

Own Risk and Solvency Assessment - ORSA

L'ORSA est un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité mis en place par chaque entreprise d'assurance. Il doit illustrer la capacité de l'organisme ou du groupe à identifier, mesurer et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité ou sa situation financière. Comme précisé dans l'article 45 de la directive Solvabilité II, l'ORSA s'articule autour de 3 études :

- l'évaluation du besoin global de solvabilité en fonction du profil de l'entreprise,
- l'évaluation du respect permanent des exigences en capital et en provisions techniques,
- l'évaluation de l'écart entre le profil de risque de l'entreprise et les hypothèses utilisées pour le calcul du SCR sous la formule standard.

Pour le risque de primes et de réserves, l'EIOPA précise treize hypothèses sur lesquelles repose le calibrage de la formule standard. Ces hypothèses sont reprises ci-dessous comme énoncées dans la traduction de l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution). Nous avons choisi de classer ces hypothèses en deux catégories : qualitatives et quantitatives. Les hypothèses quantitatives seront challengées en amont du calibrage des USP.

3.1 Hypothèses qualitatives

1. Ce sous-module tient compte uniquement des pertes survenant régulièrement. Les événements rares ne sont pas pris en compte lors du calibrage des facteurs de ce sous-module. De tels événements doivent être pris en compte dans le sous-module du risque Santé CAT.
 2. Le risque d'accumulation d'un grand nombre de sinistres similaires couverts par un engagement d'assurance responsabilité civile n'est pas significatif.
 3. Les facteurs finaux sont représentatifs de la taille et des performances moyennes des portefeuilles des assureurs sur le marché européen.
-

4. Pour simplifier le calcul des exigences en fonds propres pour le risque de primes et de réserves en non-vie pour les entreprises captives, nous supposons que la segmentation des engagements d'assurance par les entreprises captives peut être considérée comme substantiellement moins diversifiée en termes de lignes d'activité que le portefeuille utilisé pour le calibrage de la formule standard.
5. Dans le calcul du coefficient de diversification géographique qui permet d'ajuster la mesure du volume pour le risque de primes et de réserves en non-vie, on suppose que des portefeuilles géographiquement diversifiés sont diversifiés en termes de taille et de moment des pertes qu'une entreprise d'assurance supporte.
6. La réassurance non proportionnelle réduit la volatilité du risque de primes de 20 % sur les segments frais médicaux, protection de revenus et réassurance non-proportionnelle. Aucune réduction n'est permise sur les autres segments dans le cas de non-utilisation de paramètres spécifiques à l'entreprise.
7. Les relations complexes existantes entre différents risques et susceptibles de donner lieu à des dépendances dans le profil de risque sont implicitement prises en compte dans les paramètres de corrélation entre les segments, secteurs d'activité et entre les risques de primes et de réserves de chaque secteur d'activité.

3.2 Hypothèses quantitatives

8. Le risque sous-jacent suit une loi log-normale.
 9. La prime acquise nette peut être utilisée comme une approximation de l'exposition au risque de primes.
 10. Les provisions nettes pour sinistres à payer peuvent être utilisées comme une approximation de l'exposition au risque de réserves.
 11. La valeur attendue du ratio combiné du portefeuille reste relativement stable dans le temps.
 12. La valeur attendue du ratio de liquidation du portefeuille reste relativement stable dans le temps.
 13. Les frais n'évoluent ni de manière indépendante ni de manière inverse au risque sous-jacent.
-

Dans le cadre de la 3^{ème} évaluation de l'ORSA, l'EIOPA préconise¹ dans un premier temps d'utiliser une analyse qualitative. Dans le cas où cette analyse indique des écarts significatifs, une analyse quantitative devra être menée. Cette étude quantitative consiste à calculer des paramètres alternatifs à ceux fixés par la formule standard, sur la base du portefeuille d'assurance et du risque considérés. Par conséquent, la démarche retenue pour la troisième évaluation de l'ORSA au 31.12.2016 de l'organisme étudié est la suivante :

- Réalisation d'une analyse qualitative complète sur le périmètre sélectionné. Celle-ci consiste à comparer les hypothèses sous-jacentes à la formule standard avec le dispositif adopté en interne sur le portefeuille, pour le risque de primes et de réserves.
- Réalisation d'une analyse quantitative sur ce même périmètre en calibrant les USP.

Cette démarche en deux temps a pour objectif d'illustrer la bonne appréhension des principes sous-jacents de la formule standard et d'étudier la possibilité de mise en place des USP.

1. Cette préconisation relève de l'orientation 16 du texte [2]

Chapitre 4

Les *Undertaking Specific Parameters* - USP

Les *Undertaking Spécific Paramètres*-USP correspondent à des paramètres que chaque entreprise peut calibrer en interne pour remplacer certains paramètres standards du calcul du SCR. Cette approche est moins coûteuse et moins complexe que la mise en place d'un modèle interne. Les actes délégués autorisent le calibrage des USP pour les paramètres suivants :

- les écart-types du risque de primes et réserves (risque relevant des modules non-vie ou santé non-vie),
- le coefficient choc du risque de révision (risque relevant des modules vie et santé vie),
- le facteur d'ajustement pour la réassurance non proportionnelle des modules santé et non-vie.

L'utilisation des USP requiert un nombre de conditions et une procédure précise.

4.1 Procédure pour l'approbation des USP

Pour pouvoir utiliser les USP, il faut au préalable obtenir une autorisation officielle auprès du régulateur. La procédure d'approbation des USP est précisée par le règlement d'exécution (UE) 2015/498 du 24 mars 2015. Ce règlement établit les normes techniques d'exécution ou ITS (*Implementing Technical Standards*) des USP et contient 6 articles sur la procédure d'approbation des USP, présentés ci-dessous.

Demande d'approbation des USP

Un dossier d'approbation doit être rédigé par l'entreprise d'assurance voulant adopter les USP. Une validation doit au préalable être effectuée en interne avant d'être soumis à l'autorité de contrôle nationale. Ce dossier doit contenir :

- Les documents attestant que la demande d'utilisation des USP a été validée en interne.
-

- La date précise à partir de laquelle les USP entreront en vigueur dans l'entreprise.
- La liste des paramètres de la formule standard qui seront remplacés par les USP.
- Les résultats du calibrage des USP et la preuve que ces calculs ont été effectués avec des méthodes standards.
- La preuve que les données utilisées sont « exhaustives », « exactes » et « appropriées ».
- La première méthode de calcul des USP pour chaque segment donne le résultat le plus fin par rapport aux exigences réglementaires sur le calcul du SCR.
- La liste des demandes soumises ou à soumettre dans les six mois auprès de l'autorité de contrôle.

Vérification de l'exactitude des résultats

L'entreprise d'assurance doit vérifier l'exactitude de ses résultats en :

- évaluant la pertinence de la méthode standard par rapport à ses données ;
- vérifiant les hypothèses émises pour l'application de la méthode ;
- vérifiant la pertinence des données par rapport au profil de risque de l'entreprise.

Evaluation des paramètres choisis et la méthode de calcul

L'autorité de contrôle évalue le choix des USP en s'assurant que l'utilisation des USP sur les segments retenus reflète mieux le risque de souscription.

Evaluation de la demande

Après réception de la demande par l'autorité de contrôle, elle doit accuser réception puis l'évaluer. Cette évaluation se fait en plusieurs étapes :

- La confirmation par l'autorité de contrôle de la complétude du dossier dans un délai de 30 jours.
 - Si le dossier n'est pas complet, le régulateur informe l'entreprise d'assurance concernée sur les raisons de l'incomplétude du dossier, et demande les éléments nécessaires pour compléter le dossier (pendant cette période, le délai d'approbation n'est pas commencé).
-

- Toute modification de la demande d’approbation par l’entreprise d’assurance entraîne une nouvelle demande sauf pour les cas particuliers suivants :
 - si ces modifications concernent un complément et/ou un ajustement d’informations de la part de l’autorité de contrôle
 - si l’autorité de contrôle estime que les modifications sont peu significatives
- L’autorité de contrôle dispose d’un délai de 6 mois après réception du dossier complet pour donner son approbation.

Décision sur la demande

L’autorité de contrôle approuve la demande si elle estime que les justifications pour remplacer les paramètres standards sont suffisantes. En cas de non approbation, le régulateur indique les motifs à l’entreprise d’assurance concernée.

La réponse de l’autorité de contrôle est établie par écrit dans la langue de la demande.

Le régulateur peut donner son approbation sur un sous-ensemble de paramètres et/ou un sous ensemble de segments présents dans la demande.

Révocation de la demande

L’autorité de contrôle a la possibilité de révoquer une approbation d’utilisation des USP octroyée à une entreprise d’assurance. Cela est possible dans les cas suivants :

- Lorsque l’entreprise concernée ne respecte plus les spécifications de Solvabilité II sur le calcul du SCR et le calcul des USP.
- Lorsque l’assureur concerné souhaite revenir à l’utilisation des paramètres standards.

L’analyse de cette procédure permet de souligner l’importance de la qualité des données pour le calibrage des USP. Ainsi, un des pré-requis pour le calibrage des USP est le respect des critères réglementaires en matière de qualité des données.

4.2 Exigences concernant la qualité des données

Les données utilisées pour le calibrage des USP doivent respecter les exigences réglementaires en matière de qualité de données. Comme précisé dans la directive solvabilité II et le règlement délégué de 2015, les données doivent être évaluées selon 3 critères : l’exhaustivité, la précision et la pertinence.

- L'exhaustivité signifie que l'historique contient suffisamment d'informations nécessaires à l'appréciation du risque et à l'identification de sa tendance d'évolution. Il faudrait également que toute donnée pertinente exclue fasse l'objet de justification.
- En ce qui concerne la précision, les données utilisées ne doivent pas contenir d'erreurs importantes et elles doivent être cohérentes pour des périodes de temps différentes si elles sont utilisées pour la même estimation.
- Enfin, les données sont considérées pertinentes si elles représentent adéquatement le portefeuille qui doit être évalué, si elles sont adaptées aux fins pour lesquelles elles doivent être utilisées et si elles sont utilisées de manière cohérente avec les hypothèses effectuées.

Les actes délégués autorisent également l'utilisation des sources externes de données pour calibrer les USP. Si tel est le cas, des critères supplémentaires à ceux précisés ci-dessus sont alors à respecter, entre autres, l'entreprise doit préciser l'origine des données et démontrer qu'elles sont adaptées au profil de risque du portefeuille concerné.

4.3 Formule de calibrage des USP

La formule de calibrage des USP a été définie dans les actes délégués([5]). Le calibrage des USP tient compte de la profondeur de l'historique de données que l'entreprise possède, et ce pour le risque de primes et de réserves. Ainsi, pour chaque risque, l'USP final ($\sigma_{final_risque_LoB}$) est obtenu en pondérant l'USP calculé ($\sigma_{USP_risque_LoB}$) et le paramètre standard ($\sigma_{FS_risque_LoB}$) avec un facteur de crédibilité c fourni par l'EIOPA. La formule de l'USP final est la suivante :

$$\sigma_{final_risque_LoB} = c \times \sigma_{USP_risque_LoB} + (1 - c) \times \sigma_{FS_risque_LoB} \quad (4.1)$$

Plus l'entreprise possède un historique profond, plus le facteur de crédibilité est proche de 1, comme le montre le tableau ci-dessous.

Profondeur de l'historique	≤ 4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	≥ 10 ans
c	0%	34%	51%	67%	81%	92%	100%

Tableau 4.1 – Facteurs de crédibilité pour la branche santé non-vie

Plusieurs méthodes ont été présentées par l'EIOPA pour le calibrage des USP dans les spécifications techniques du QIS5 et les actes délégués (méthodes officielles).

Le tableau ci-après (tableau 4.2) indique pour chaque risque les méthodes que nous avons retenues pour notre étude.

Risque	Méthode	Officiel (2015)	QIS5 (2010)	Etudié
Risque de primes	Log-Normale	Oui	Non	✓
	Log-Normale Simplifiée	Non	Oui	✓
	Moindres Carrés	Non	Oui	✓
	<i>Swiss Solvency Test</i>	Non	Oui	✗
Risque de réserves	Log-Normale	Oui	Non	✓
	Moindres Carrés	Non	Oui	✓
	Merz-Wüthrich avec provisions <i>Chain Ladder</i>	Oui	Non	✓
	Merz-Wüthrich avec provisions déterminées autrement	Non	Oui	✓

Tableau 4.2 – Liste des Méthodes de Calibrage des USP

Le *Swiss Solvency Test* pour l'analyse du risque de primes n'a pas été retenu car nous n'avions pas à notre disposition les données concernant le nombre et la fréquence de sinistres. En effet, notre portefeuille santé est majoritairement constitué de contrats collectifs, comme le montre le graphique ci-dessous :

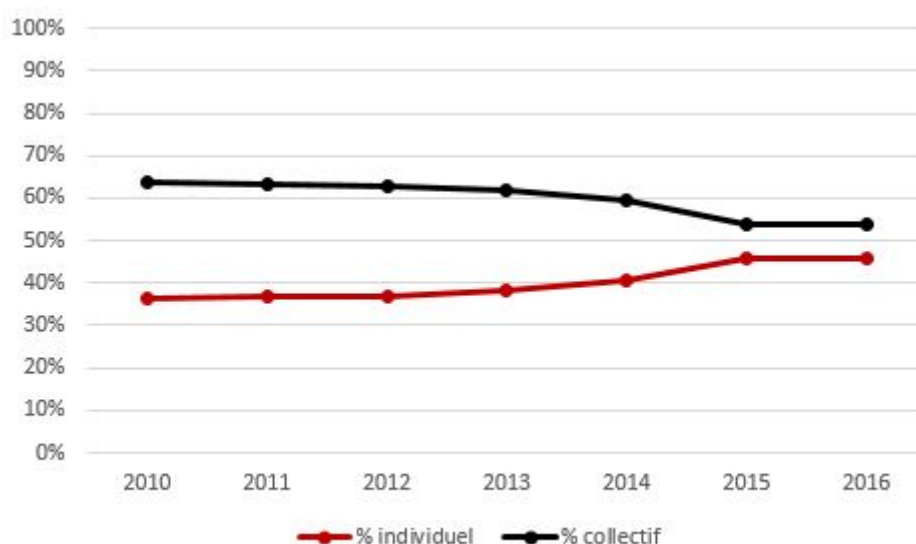


FIGURE 4.1 – Evolution de la répartition entre les contrats collectifs et individuels dans le temps

De plus, comme mentionné au chapitre 1, pour des raisons de gestion, le portefeuille a été réparti en sections. De ce fait, les bases de données de prestations sont disponibles à la maille contrat juridique et non sinistre.

Il faut noter que dans le cadre du calcul du SCR à l'aide des USP, seules les méthodes présentes dans les actes délégués peuvent être utilisées. Cependant, dans le cadre de l'ORSA le choix de la méthode de calibrage des USP est laissé à l'appréciation de l'organisme assureur.

Chapitre 5

Démarche de ce mémoire

Dans le chapitre 1, le périmètre étudié a été présenté. Ceci nous a permis de comprendre que dans le cadre de la troisième évaluation ORSA, l'entreprise sous revue s'intéresse à son risque de primes et réserves car il est le plus significatif en termes d'exigence de fonds propres.

Les chapitres 2 à 4 ont posé le contexte réglementaire dans lequel s'inscrit le calcul du SCR primes et réserves à l'aide de la formule standard. Le calcul du SCR doit être suivi de l'ORSA, qui est un processus de suivi des risques en interne visant à optimiser le pilotage du besoin en fonds propres. Les USP sont également présentés. Il en ressort qu'ils sont des paramètres qui permettent de prendre en compte le risque propre à l'entreprise lors de la détermination de son besoin en fonds propres à l'aide de la formule standard. Ils peuvent être calibrés en interne par chaque entreprise pour certains risques (notamment le risque de primes et réserves) et sous certaines conditions. Néanmoins, même sans les adopter pour calculer le SCR, chaque entreprise peut les calculer dans le cadre de l'ORSA.

Le suivi du risque de primes et réserves par le calcul de paramètres spécifiques nécessite au préalable une analyse de la qualité des données utilisées. Ensuite, il faut s'assurer que les données retenues vérifient les hypothèses sous-jacentes aux méthodes de calibrage de ces paramètres.

Le calcul des paramètres spécifiques aux risques de primes et réserves sera suivi de tests de sensibilités permettant de mesurer la fiabilité des paramètres obtenus. Il sera ensuite question de mesurer l'impact que ces paramètres pourraient avoir sur le SCR.

Si les USP obtenus sont conformes aux paramètres standards, ceci confortera l'utilisation de la formule standard par l'entreprise concernée. Dans le cas contraire, il sera question d'identifier les facteurs engendrant cet écart, et étudier quels actions peuvent être menées pour adapter au mieux le SCR au profil de risque de l'entreprise.

Deuxième partie

Méthodes et données pour le calibrage
des USP

Chapitre 6

Méthodes pour le risque de primes

Comme évoqué précédemment, pour le calibrage de l'écart-type du risques de primes, quatre méthodes ont été proposées : une méthode pour les actes délégués et 3 pour le QIS5. Au vu des données à notre disposition, nous avons retenu 3 méthodes pour notre étude, à savoir :

1. la méthode log-normale (présente dans les actes délégués),
2. la méthode log-normale simplifiée,
3. la méthode des moindres carrés.

Ces méthodes seront présentées et comparées ci-après. Par simplification, les méthodes seront présentées sans préciser la branche d'activité.

Remarque : Les méthodes de calibrage pour le risque de primes doivent suivre le mieux possible les hypothèses sous-jacentes au calcul de la formule standard en rapport avec le risque de tarification précisé à la section 3.2.

Les données utilisées pour calibrer l'écart-type du risque de primes doivent remplir les conditions suivantes :

- Les données doivent être annuelles.
 - Il faut qu'elles reflètent le risque sur les 12 prochains mois.
 - L'historique de données doit couvrir au minimum 5 années consécutives.
 - La charge sinistre doit inclure les frais de gestion et être retraitée des sinistres de type catastrophe.
-

6.1 Méthode Log-Normale

C'est la méthode réglementaire (du le risque de primes) présente dans les actes délégués de janvier 2015. Elle consiste à estimer la volatilité du risque de primes propre à l'entreprise par la méthode du maximum de vraisemblance.

I) Notations

Notation	Définition
J	Nombre d'années d'historique
j	Année de survenance
V_j	Primes acquises pour l'année de survenance j
U_j	Charge ultime après un an
$I_{i,j}$	Paievements incrémentaux pour la survenance j et l'année de développement i
$b PCO_{i,j}$	Best Estimate de réserves pour la survenance j et l'année de développement i
β	Loss Ratio attendu (S/P)
σ	Ecart-type du risque de primes
δ	Paramètre de mélange

Tableau 6.1 – Notations pour la méthode Log-Normale - risque de primes

En supposant la ligne d'activité fixé, U_j est déterminé par :

$$U_j = I_{j,1} + PCO_{j,1}$$

II) Hypothèses

1. La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(U_j) = \beta \times V_j$.
2. Le loss ratio β est constant.
3. La variance de U_j est quadratique au risque de primes : $V(U_j) = \sigma^2[(1-\delta)\bar{V}V_j + \delta V_j^2]$, avec $\bar{V} = \sum_{j=1}^J V_j / J$.
4. La distribution de U_j suit une loi log-normale de moyenne μ_j et de variance ω_j^2 .
5. La méthode du maximum de vraisemblance est appropriée.

III) Démarche

1. A partir des expressions de l'espérance et la variance de la charge ultime U_j , on réécrit la moyenne et la variance théorique de la loi de U_j en fonction des paramètres que l'on cherche à estimer (β , σ) et du paramètre que l'on souhaite optimiser (δ) :

$$\begin{cases} E(U_j) = \beta \times V_j = \exp(\mu_j + \frac{\omega_j^2}{2}) \\ V(U_j) = \sigma^2[1 - \delta|\bar{V}V_j + \delta V_j^2] = (e^{\omega_j^2} - 1) \times (\beta V_j)^2 \end{cases}$$

ce qui donne,

$$\begin{cases} \mu_j = \ln(\beta V_j) - \frac{\omega_j^2}{2} \\ \omega_j^2 = \frac{1}{\pi_j} = \ln\left(1 + e^{2\gamma} \left[\frac{1-\delta|\bar{V}}{V_j} + \delta\right]\right), \text{ où } \gamma = \ln\left(\frac{\sigma}{\beta}\right). \end{cases}$$

2. On minimise ensuite la log-vraisemblance de la fonction de densité de la loi log-normale :

$$\begin{aligned} \ln L(U_1, \dots, U_J | \sigma, \delta, \beta) &= \ln \prod_j \frac{1}{U_j \omega_j \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(\ln(U_j) - \mu_j)^2}{2\omega_j^2}} \\ &= \sum_j -\ln(U_j \sqrt{2\pi}) + \ln\left(\frac{1}{\omega_j}\right) - \frac{(\ln(U_j) - \ln(\beta V_j) + \frac{\omega_j^2}{2})^2}{2\omega_j^2} \\ &= \sum_j -\ln(U_j \sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2} \ln(\pi_j) - \frac{1}{2} \pi_j \left(\ln\left(\frac{U_j}{V_j}\right) - \ln(\beta) + \frac{1}{2\pi_j}\right)^2 \end{aligned}$$

La minimisation de l'expression ci-dessus revient à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial \ln L(U_1, \dots, U_J | \sigma, \delta, \beta)}{\partial \sigma} = 0$$

Ceci donne lieu à une fonction de l'écart-type en fonction de γ et δ :

$$\hat{\sigma}(\delta, \gamma) = \exp\left(\gamma + \frac{\frac{1}{2}J + \sum_{j=1}^J \pi_j \times \ln\left(\frac{U_j}{V_j}\right)}{\sum_{j=1}^J \pi_j}\right)$$

3. Enfin,

$$\sigma_{USP_primes_LoB} = \hat{\sigma} \times \sqrt{\frac{J+1}{J-1}}$$

Le facteur de correction $\sqrt{\frac{J+1}{J-1}}$ permet de trouver un estimateur sans biais de $\sigma_{USP_primes_LoB}$.

6.2 Méthode Log-Normale Simplifié

Cette méthode a été présentée dans les spécifications techniques du QIS5. Elle est similaire à la méthode log-normale. Cependant, l'hypothèse sur la variance a été simplifiée et la relation entre U_j et V_j est posée explicitement.

I) Notations

Notation	Définition
J	Nombre d'années d'historique
j	Année de survenance
V_j	Primes acquises pour l'année de survenance j
U_j	Charge ultime après un an
β	Loss Ratio (S/P)
σ	Ecart-type du risque de primes
ϵ_j	Variable aléatoire centrée réduite ($E(\epsilon_j)=0$ et $V(\epsilon_j)=1$) dont la loi n'est pas précisée

Tableau 6.2 – Notations pour la méthode log-normale simplifiée - risque de primes

La sinistralité s'exprime en fonction des primes à l'aide de la formule suivante :

$$U_j \sim \beta \times V_j + \sigma \times \sqrt{V_j} \times \epsilon_j$$

II) Hypothèses

1. La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(U_j) = \beta \times V_j$.
2. Le loss ratio β est constant.
3. La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $V(U_j) = \sigma^2 \times V_j$.
4. La distribution de U_j suit une loi log-normale de moyenne μ_j et de variance ω_j^2 .
5. La méthode du maximum de vraisemblance est adaptée.

III) Démarche

1. A partir des expressions de l'espérance et la variance de la charge ultime U_j , on réécrit la moyenne et la variance théorique de U_j en fonction des paramètres que l'on cherche à estimer (β, σ) :

$$\begin{cases} E(U_j) = \beta \times V_j = \exp(\mu_j + \frac{\omega_j^2}{2}) \\ V(U_j) = \sigma^2 V_j = (e^{\omega_j^2} - 1) \times (\beta V_j)^2 \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir,

$$\begin{cases} \mu_j = \ln(\beta V_j) - \frac{\omega_j^2}{2} \\ \omega_j^2 = \ln \left(1 + \frac{\sigma^2}{\beta^2 V_j} \right) \end{cases}$$

2. Ensuite, on obtient une expression de la fonction de log-vraisemblance l que l'on maximise numériquement pour obtenir l'estimateur de σ

$$l = \sum_{j=1}^J \left(-\ln(\omega_j) - \frac{(\ln(U_j) - \mu_j)^2}{2\omega_j^2} \right)$$

3. En remplaçant μ et ω par leurs expressions en fonction de β et σ , et en maximisant l , $\sigma_{USP_primes_LoB}$ est calculé par :

$$\sigma_{USP_primes_LoB} = \frac{\hat{\sigma}_{EMV}}{\sqrt{V_p}}$$

avec $\hat{\sigma}_{EMV}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de σ .

6.3 Méthode des Moindres Carrés

Cette méthode a également été présentée dans les spécifications techniques du QIS5. Cette méthode est similaire à la méthode log-normale simplifiée, sauf que la méthode d'estimation de la constante de proportionnalité β est différente.

I) Notations

Notation	Définition
J	Nombre d'années d'historique
j	Année de survenance
V_j	Primes acquises pour l'année de survenance j
U_j	Charge ultime après un an
β	Loss Ratio attendu (S/P)
σ	Ecart-type du risque de primes
ϵ_j	Variable aléatoire centrée réduite ($E(\epsilon_j)=0$ et $V(\epsilon_j)=1$) dont la loi n'est pas précisée

Tableau 6.3 – Notations pour la méthode des moindres carrés - risque de primes

La distribution de la sinistralité suit la loi suivante :

$$U_j \sim \beta \times V_j + \sigma \times \sqrt{V_j} \times \epsilon_j$$

II) Hypothèses

1. La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(U_j) = \beta \times V_j$.
2. Le loss ratio β est constant.
3. La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $V(U_j) = \sigma^2 \times V_j$.
4. La méthode des moindres carrés est adaptée.

III) Démarche

1. La distribution des U_j , permet d'obtenir un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $\sigma \times \epsilon_j$ données par :

$$\forall j \in \{1, \dots, J\}, \sigma \times \epsilon_j \sim \frac{U_j - \beta \times V_j}{\sqrt{V_j}}$$

En posant $X_j = \sigma^2 \times \epsilon_j^2$, nous obtenons une variable aléatoire de moyenne σ^2 .

2. En supposant β fixé, l'estimation par la méthode des moindres carrés revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{(\sigma^2) \in \mathbb{R}^{+2}} \sum_{j=1}^J (X_j - \sigma^2)^2$$

Ce qui revient à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\hat{\sigma}^2 = \underset{\sigma^2 \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmin}} f(\sigma^2), \text{ où } f(\sigma^2) = \sum_{j=1}^J \left(\frac{(U_j - \beta V_j)^2}{V_j} - \sigma^2 \right)^2$$

La résolution de ce problème nous permet d'obtenir l'estimateur sans biais suivant :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{J-1} \times \sum_{j=1}^J \left(\frac{U_j - \beta V_j}{\sqrt{V_j}} \right)^2$$

En minimisant cet estimateur par rapport à β , nous trouvons l'expression suivante pour $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{j=1}^J U_j}{\sum_{j=1}^J V_j}$$

Ainsi, $\hat{\sigma}^2$ devient :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J \left(\frac{U_j - V_j \times \frac{\sum_{j=1}^J U_j}{\sum_{j=1}^J V_j}}{\sqrt{V_j}} \right)^2$$

3. A partir de ces résultats, $\sigma_{USP_primes_LoB}$ est donné par :

$$\sigma_{USP_primes_LoB} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{V_p}}$$

avec V_p qui correspond au volume de primes estimé pour la formule standard.

6.4 Validation des hypothèses

Pour pouvoir appliquer les différentes méthodes de calibrage du risque de primes, il faut en amont s'assurer que nos données vérifient les différentes hypothèses liées à chacune des méthodes. Dans cette partie, nous présenterons quelles méthodes et tests il est nécessaire d'utiliser pour valider ces hypothèses. Le tableau ci-dessous récapitule les hypothèses à valider pour les différentes méthodes de calibrage des volatilités liées au risque de primes.

Méthode	Hypothèses
Log-normale	1) La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(U_j) = \beta \times V_j$. 2) Le loss ratio β est constant. 3) La variance de U_j est quadratique au risque de primes : $V(U_j) = \sigma^2[(1 - \delta)\bar{V}V_j + \delta V_j^2]$, avec $\bar{V} = \sum_{j=1}^J V_j/J$. 4) La distribution de U_j suit une loi log-normale de moyenne μ_j et de variance ω_j^2 . 5) La méthode du maximum de vraisemblance est appropriée.
Log-normale simplifiée	1) La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(U_j) = \beta \times V_j$. 2) Le loss ratio β est constant. 3) La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $V(U_j) = \sigma^2 \times V_j$. 4) La distribution de U_j suit une loi log-normale de moyenne μ_j et de variance ω_j^2 . 5) La méthode du maximum de vraisemblance est appropriée.
Moindres Carrés	1) La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(U_j) = \beta \times V_j$. 2) Le loss ratio β est constant. 3) La variance de la charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $V(U_j) = \sigma^2 \times V_j$. 4) La méthode des moindres carrés est adaptée.

Tableau 6.4 – Hypothèses de calibrage du risque de primes

Proportionnalité entre la charge sinistre et les primes acquises

L'approche classique pour vérifier cette hypothèse est d'effectuer une **régression linéaire** puis, **tester la nullité de l'ordonnée à l'origine**.

Dans ce cas, la régression linéaire consiste à considérer que la charge ultime à un an s'exprime à l'aide d'une équation du type :

$$U_j = a \times V_j + b$$

Ensuite, pour chaque méthode de calibrage, nous estimons les paramètres a et b à l'aide de la méthode d'estimation imposée par la méthode de calibrage utilisée.

Enfin, nous testons la nullité du paramètre b à l'aide d'un test statistique. L'écart-type des erreurs de cette régression étant inconnu, la statistique de test suit une loi de Student à $n - 2$ degré de liberté . Ce test est statistiquement robuste lorsqu'il est effectué sur un échantillon de données assez grand.

Critère sur la variance

Relation linéaire entre la variance de la charge sinistre et les primes acquises

Cette hypothèse correspond aux méthodes log-normale simplifiée et moindres carrés.

Pour vérifier la relation entre la variance de la charge sinistre et les primes acquises, nous pouvons utiliser une approche en deux temps de type moindres carrés quasi-généralisée (MCQG). Cette méthode qui consiste à analyser les résidus de la régression linéaire précédente que nous noterons λ_j .

La distribution de U_j initiale s'écrit :

$$U_j \sim \beta \times V_j + \sigma \times \sqrt{V_j} \times \epsilon_j$$

Nous pouvons donc supposer que les résidus λ_j obtenus à l'aide de notre régression linéaire s'exprime par $\lambda_j = \sigma \times \sqrt{V_j} \times \epsilon_j$. En élevant au carré, nous obtenons :

$$\lambda_j^2 = \sigma^2 \times V_j \times \epsilon_j^2$$

Puis, en appliquant le logarithme, nous avons :

$$\ln(\lambda_j^2) = \ln(\sigma^2) + \ln(V_j) + \ln(\epsilon_j^2) \quad (6.1)$$

En posant $X_j = \ln(V_j)$ et $Y_j = \ln(\lambda_j^2)$, nous pouvons ensuite réaliser une nouvelle régression linéaire des Y_j en fonction des X_j et effectuer un test de Shapiro-Wilk pour valider le modèle.

Relation quadratique entre la variance de la charge sinistre et les primes acquises

Cette hypothèse correspond à la méthode log-normale. La vérification de cette hypothèse peut se faire en effectuant une régression du carré des résidus issus de la régression linéaire entre U_j et V_j , en supposant que

$$\lambda_j^2 = \sigma^2[(1 - \delta)\bar{V}V_j + \delta V_j^2] \times \epsilon_j^2$$

En factorisant par rapport à V , puis en passant au logarithme,

$$\ln(\lambda_j^2) + \ln(\sigma^2) + \ln(V_j) + \ln([(1 - \delta)\bar{V} + \delta V_j]) + \ln(\epsilon_j^2) \quad (6.2)$$

L'optimum de σ^2 est en général observé lorsque $\delta = 0$ ou $\delta = 1$, nous allons nous restreindre à ces 2 cas.

- Pour $\delta = 0$, nous retombons sur une équation similaire à l'équation (6.1).
- Pour $\delta = 1$, l'équation (6.2) devient :

$$\ln(\lambda_j^2) = \ln(\sigma^2) + \ln(V_j^2) + \ln(\epsilon_j^2)$$

En posant $X'_j = \ln(V_j^2)$ et $Y_j = \ln(\lambda_j^2)$, nous pouvons de nouveau réaliser une régression linéaire des Y_j en fonction des X'_j et effectuer un test de Shapiro-Wilk pour valider le modèle. Il faut noter que le test de modèle pour les cas où $\delta = 1$ et $\delta = 0$ est le même. En effet, si $\delta = 1$, $X'_j = \ln(V_j^2) = 2 \times \ln(V_j) = 2 \times X_j$. De ce fait, si le modèle est significatif pour le cas $\delta = 0$, il le sera aussi pour le cas $\delta = 1$.

Méthode d'estimation

L'estimation par maximum de vraisemblance est appropriée

Pour les méthodes log-normale et log-normale simplifiée présentées précédemment, il est considéré que la méthode du maximum de vraisemblance est adaptée pour l'estimation de notre volatilité USP. Pour valider cette hypothèse, il faut que nos sinistres soient indépendants et identiquement distribués (iid).

L'estimation par la méthode des moindres carrés est appropriée

La méthode des moindres carrés est basée sur l'hypothèse que l'estimation à l'aide des moindres carrés est appropriée. Pour valider cette hypothèse, il suffit de montrer que l'espérance de U_j est une fonction bijective des paramètres de sa distribution.

Caractère log-normal de la sinistralité

Pour pouvoir appliquer les méthodes log-normale et log-normale simplifiée, il faut au préalable vérifier que la distribution de la charge ultime à un an suit une loi log-normale : ($U_j \sim LN(\mu_j, \omega_j)$). Puisque nous n'avons aucune information sur les paramètres de la loi de U_j mais savons qu'il existe une relation entre U_j et V_j , nous allons poser $X_j = \frac{U_j}{V_j}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
U_j \sim LN(\mu_j, \omega_j) &\Rightarrow LN(U_j) \sim \mathcal{N}(\mu_j, \omega_j) \\
&\Rightarrow LN(X_j) + LN(V_j) \sim \mathcal{N}(\mu_j, \omega_j) \\
&\Rightarrow LN(X_j) \sim \mathcal{N}(\mu_j - LN(V_j), \omega_j)
\end{aligned}$$

On en déduit que montrer que U_j suit une loi log-normale revient à montrer que $LN(X_j)$ suit une loi normale.

Pour cela, nous effectuerons un test statistique pour vérifier si le log des ratio S/P ($\frac{U_j}{V_j}$) suit une loi normale. Puisque nos échantillons de données contiennent peu d'observations, le test statistique de normalité retenu est le test de **Shapiro-Wilk**, qui est détaillé en annexe.

Chapitre 7

Méthodes pour le risque de réserves

Quatre méthodes ont été proposées dans les actes délégués (2 méthodes) et le QIS5 (2 méthodes) pour le calibrage de l'écart-type du risques des réserves. Au vu des données à notre disposition, nous avons retenu les quatre méthodes pour notre étude, à savoir :

1. la méthode log-normale (présente dans les actes délégués),
2. la méthode des moindres carrés (présente dans le QIS5),
3. la méthode de Merz-Wüthrich avec provisions *Chain Ladder* (présente dans les actes délégués),
4. la méthode de Merz-Wüthrich avec provisions déterminées autrement (présente dans le QIS5).

Ces méthodes seront présentées et comparées ci-après. Par simplification, les méthodes seront présentées sans préciser la branche d'activité.

Remarque : Les méthodes de calibrage pour le risque de réserves doivent suivre le mieux possible les hypothèses sous-jacentes au calcul de la formule standard en rapport avec le risque de provisionnement.

Les données utilisées pour calibrer l'écart-type du risque de réserves doivent être remplir les conditions suivantes :

- Les données doivent être annuelles.
 - Il faut qu'elles reflètent le risque sur les 12 prochains mois.
 - L'historique de données doit couvrir au minimum 5 années comptables successives.
 - Pour la méthode de Merz-Wüthrich, le triangle de prestations utilisés doit contenir au moins 5 années de survenance et de développement successives.
 - Les données ne doivent pas inclure les frais de gestion et doivent être retraitées des sinistres de type catastrophe.
-

7.1 Méthode Log-Normale

Cette méthode est une des deux méthodes réglementaires (pour le risque de réserves) présentes dans les actes délégués de janvier 2015.

I) Notations

Notation	Définition
T	Année calendaire
j	Année de survenance
i	Année de développement
$I_{i,j}$	Paiements incrémentaux pour la survenance j et l'année de développement i
$PCO_{i,j}$	Best Estimate de réserves pour la survenance j et l'année de développement i
V_T	Best Estimate de réserves au début de l'année de T
R_T	Somme des paiements incrémentaux et des Best Estimates de réserves à horizon un an
β	Ratio de liquidation
σ	Ecart-type du risque de réserves
δ	Paramètre de mélange

Tableau 7.1 – Notations pour la méthode Log-Normale - risque de réserves

On définit : $V_T = \sum_{i+j=T} PCO_{i,j}$ et $R_T = \sum_{\substack{i+j=T+1 \\ i < Y}} PCO_{i,j} + \sum_{\substack{i+j=T+1 \\ i < Y}} I_{i,j}$

II) Hypothèses

1. La somme des paiements incrémentaux et Best Estimate de réserves à l'horizon un an est égale au Best Estimate actuel : $E(R_T) = \beta \times V_T$.
2. Le loss ratio β est constant.
3. la variance de R_T est quadratique au risque de réserves :
 $E(R_T) = \sigma^2[1 - \delta|\bar{V}V_T + \delta V_T^2]$, avec $\bar{V} = \sum_{j=1}^J V_j / \text{Card}(T)$.
4. La distribution de R_T suit une loi log-normale de moyenne μ_T et de variance ω_T^2 .
5. La méthode du maximum de vraisemblance est appropriée.

III) Démarche

La démarche est identique à la démarche pour le risque de prime, à la différence que l'expression finale de $\sigma_{USP_réerves_LoB}$ s'écrit :

$$\sigma_{USP_réerves_LoB} = \hat{\sigma} \times \sqrt{\frac{\text{card}(T) + 1}{\text{card}(T) - 1}}$$

7.2 Méthode des Moindres Carrés

Cette méthode est une des trois méthodes proposées dans le QIS5. Comme la méthode log-normale elle consiste à mesurer la volatilité du ratio liquidation dans le temps.

I) Notations

Notation	Définition
T	Année calendaire
j	Année de survénance
i	Année de développement
$I_{i,j}$	Paielements incrémentaux pour la survénance j et l'année de développement i
$PCO_{i,j}$	Best Estimate de réserves pour la survénance j et l'année de développement i
V_T	Best Estimate de réserves au début de l'année de T
R_T	Somme des paielements incrémentaux et des Best Estimates de réserves à horizon un an
σ^2	Constante de proportionnalité de la variance de R_T
ϵ_T	Variable aléatoire centrée réduite : $E(\epsilon_T)=0$ et $V(\epsilon_T)=1$
N	Nombre d'années d'historique où V_T et R_T sont disponibles

Tableau 7.2 – Notations pour la méthode des moindres carrés - risque de réserves

On définit : $V_T = \sum_{i+j=T} PCO_{i,j}$ et $R_T = \sum_{\substack{i+j=T+1 \\ i < Y}} PCO_{i,j} + \sum_{\substack{i+j=T+1 \\ i < Y}} I_{i,j}$

Par ailleurs, la distribution de R_T est donnée par :

$$R_T \sim V_T + \sigma \times \sqrt{V_T} \times \epsilon_T$$

II) Hypothèses

1. La somme des paiements incrémentaux et Best Estimate de réserves à l'horizon un an est égale au Best Estimate actuel : $E(R_T) = V_T$
2. la variance de R_T est proportionnelle V_T : $Var(R_T) = \sigma^2 \times V_T$
3. La méthode des moindres carrés est appropriée

III) Démarche

La démarche est identique à la démarche pour le risque de primes, à la différence que l'expression finale de $\sigma_{USP_réserves_LoB}$ s'écrit :

$$\sigma_{USP_réserves_LoB} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{V_R}}$$

avec V_R qui correspond au volume de réserves estimé pour la formule standard.

7.3 Méthode Merz-Wüthrich avec provisionnement Chain-Ladder

Cette méthode est la deuxième méthode réglementaire (pour le risque de réserves) préconisée dans les actes délégués de janvier 2015. Elle repose sur la détermination de l'erreur de prédiction du résultat de développement des sinistres (*Claim Development Result-CDR*) à un an. Il s'agit de mesurer le risque engendré par la ré-évaluation des provisions *Best Estimate* tous les ans. Cette méthode a été introduite en 2008 par Michael Merz et Mario Wüthrich dans les articles [6] et [7] , et représente une vision à un an du modèle de Mack.

I) Notations

Notation	Définition
i	Année de survenance de 0 à I
j	Année de développement de 0 à J
$C_{i,j}$	Paielements cumulés
$PSAP_{CL}$	Estimation de la PSAP par la méthode de Chain Ladder
MSEP	<i>Mean Squared Error of Prediction</i> - Ecart-type de l'erreur de prédiction

Tableau 7.3 – Notations pour la méthode de Merz-Wüthrich - risque de réserves

II) Hypothèses

1. Les paiements cumulés $C_{i,j}$ des différentes années de survenances sont indépendants.
2. Les paiements cumulés $C_{i,j}$ de la même année de survenance sont des processus de Markov et il existe une constante $f_j > 0$ et σ_j telle que :
 Pour $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ et $C_{i,j} \geq 0$,
 - a $\forall i, E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1} \times C_{i,j-1}$;
 - b $\forall i, Var[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 \times C_{i,j-1}$.

III) Démarche

1. A partir du triangle des paiements cumulés, on estime la charge ultime à l'aide de la méthode de Chain Ladder avec les facteurs de développements donnés par :

$$\begin{cases} f_{j \leq J-1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \\ f_J = 1 \end{cases}$$

2. Ensuite, nous déterminons les estimateurs de la volatilité des facteurs de développement et le ratio Q_j

$$\begin{cases} \sigma_j^2 = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - f_j \right)^2, \text{ pour } j = 1, \dots, J-2 \\ \sigma_j^2 = \min \left(\sigma_{j-2}^2, \sigma_{j-3}^2, \frac{\sigma_{j-2}^4}{\sigma_{j-3}^2} \right), \text{ pour } j = J-1 \\ Q_j = \frac{\sigma_j^2}{f_j^2}, \text{ pour } j = 1, \dots, J-1 \\ Q_J = \sigma_J = 0 \end{cases}$$

3. On calcule par ailleurs l'erreur quadratique moyenne de prédiction (MSEP) du CDR :

$$M\hat{SEP} = \sum_{i=1}^I C_{i,j}^2 \times \frac{Q_{I-i}}{C_{i,I-i}} + \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^I C_{i,J} \times C_{k,J} \times \left(\frac{Q_{I-i}}{S_{I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{S'_j} \times \frac{Q_j}{S_j} \right)$$

4. Enfin, $\hat{\sigma}_{USP_reserves_LoB}$ est donné par :

$$\sigma_{USP_reserves_LoB} = \frac{\sqrt{MSEP}}{\sum_{i=0}^I C_{i,J} - C_{i,I-i}}$$

7.4 Méthode de Merz-Wüthrich avec provisions comptables

Il s'agit de la même démarche que la méthode précédente, à la différence que la volatilité USP se calcule de la manière suivante :

$$\sigma_{USP_reserves_LoB} = \frac{\sqrt{MSEP}}{\sum_{i+j=T} PCO_{i,j}}$$

7.5 Vérification des hypothèses

Méthode	Hypothèses
Log-normale	1) La charge ultime est proportionnelle aux primes acquises : $E(R_T) = \beta \times V_T$. 2) Le loss ratio β est constant. 3) La variance de R_T est quadratique au risque de réserves : $V(R_T) = \sigma^2[(1 - \delta)\bar{V}V_j + \delta V_T^2]$, avec $\bar{V} = \sum_{j=1}^J V_j / \text{Card}(T)$. 4) La distribution de R_T suit une loi log-normale de moyenne μ_T et de variance ω_T^2 . 5) La méthode du maximum de vraisemblance est appropriée.
Moindre carré	1) La somme des paiements incrémentaux et Best Estimate de réserves à l'horizon un an est égale au Best Estimate actuel : $E(R_T) = V_T$ 2) la variance de R_T est proportionnelle V_T : $\text{Var}(R_T) = \sigma^2 \times V_T$ 3) La méthode des moindres carrés est appropriée
Merz-Wuthrich	1) Les paiements cumulés $C_{i,j}$ des différentes années de survénances sont indépendants. 2) Les paiements cumulés $C_{i,j}$ de la même année de survénance sont des processus de Markov et il existe une constante $f_j > 0$ et σ_j telle que : Pour $1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$ et $C_{i,j} \geq 0$, a $\forall i, E[C_{i,j} C_{i,j-1}] = f_{j-1} \times C_{i,j-1}$; b $\forall i, \text{Var}[C_{i,j} C_{i,j-1}] = \sigma_{j-1}^2 \times C_{i,j-1}$.

Tableau 7.4 – Hypothèses de calibrage du risque de réserves

Hypothèses des méthodes log-normale et moindres carrés

La vérification des hypothèses des la méthodes log-normale et moindres carrés pour le risque de réserves est effectuée de la même manière que pour le risque de primes à savoir :

- régression linéaire et test de Student pour le caractère constant du ratio de liquidation,
- vérification du caractère iid pour l'utilisation de la méthode du maximum de vraisemblance,
- approche de type MCQG pour la relation entre la variance de la charge sinistre et les cotisations acquises,

- test de Shapiro-Wilk sur le log des ratios d'écoulement pour le caractère log-normal de la distribution des provisions de fin d'année.

Hypothèses de la méthode de Merz-Wuthrich

Existence de facteurs de développement

Il s'agit de montrer que les facteurs de développement ne varient pas en fonction des années de survenance mais uniquement en fonction des années de développement :

$$\forall i, E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1} \times C_{i,j-1} \text{ avec } i + j \leq n + 1.$$

La validation de cette hypothèse peut se faire à l'aide d'un *C-C plot*, qui consiste à vérifier si pour une année de développement j , les couples $C_{i,j}, C_{i,j+1}$ sont alignés sur une même droite.

Indépendance des années de développement

Il s'agit de vérifier que les coefficients de passage individuels sont bien répartis de manière aléatoire autour de la valeur moyenne, sans présenter ni tendance (linéaire, exponentielle...) ni corrélation. En pratique, la vérification de cette hypothèse se fait en deux temps. Nous posons $f_{j/j+1} = \frac{C_{I,j}}{C_{I,j+1}}$, le vecteur de coefficients de passage individuels entre j et $j+1$ et nous vérifions :

- l'absence de tendance : elle consiste à ajuster une régression linéaire de ces coefficients sur les années de survenance ;
- l'absence d'autocorrélation : elle consiste à calculer la corrélation linéaire entre les deux vecteurs de coefficients de passage individuels entre j et $j+1$.

Existence de facteurs de variance

La validation de cette hypothèse est effectuée en analysant à l'aide d'un nuage de points si les résidus $r_{i,j}$ sont fonctions des $C_{i,j}$. Les résidus sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \frac{C_{i,j} - \widehat{C_{i,j}}}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{C_{i,j}})}} \\ &= \frac{C_{i,j} - \widehat{f_{i,j}} \times C_{i,j-1}}{\sqrt{\text{Var}(\widehat{C_{i,j}})}} \end{aligned}$$

Chapitre 8

Données et retraitements nécessaires pour les USP

8.1 Données requises pour les USP du risque de primes et réserves

Les estimateurs des risques de primes et de réserves sont calculés selon les méthodes précisées dans les chapitres 6 et 7. L'application de ces méthodes nécessite les données présentées ci-après.

Données pour le risque de primes

Les actes délégués autorisent de calculer l'écart-type du risque de primes brut ou net de réassurance. Ainsi, pour le risque de primes, les données suivantes doivent être récupérées à la maille LoB S2 x année de survenance :

- Primes acquises brutes ou nettes de réassurance.
- Charges ultimes après un an en vision Best Estimate, nettes de frais de gestion, brutes ou nettes de réassurance et retraitées des événements de type CAT.

Données pour le risque de réserves

Le calcul de l'écart-type du risque de réserves dans le cadre des USP peut se faire uniquement avec les données nettes de réassurance. Les données suivantes doivent être à la maille LoB S2 x année de développement x année de survenance, en fonction de la méthode utilisée.

Méthode log-normale

- Triangles de paiements incrémentaux nets de réassurance.
 - Estimation des provisions pour sinistres à la fin de chaque année comptable, nettes de réassurance.
-

Méthode de Merz-Wüthrich

Triangles de paiements cumulés nets de réassurance intégrant les frais de gestion.

Le recensement des données ci-dessus fait apparaître plusieurs enjeux, notamment :

- les données de sinistralité requises (paiements + provisions) doivent intégrer les montants de provisions techniques en vision *Best Estimate* ;
- les données utilisées doivent être nettes de réassurance. Les mécanismes de réassurance appliqués aux montants bruts doivent de plus reproduire le profil de risque sur l'exercice à venir ;
- les données doivent être agrégées à la maille LoB.

8.2 Retraitements des données

Retraitements liés à l'historique des provisions *Best Estimate*

Les provisions utilisées pour calibrer les USP doivent être en vision *Best Estimate*, et à la maille année comptable x année de survenance. Cependant, les données historiques de provisions en vision *Best Estimate* ne sont pas toujours disponibles sur tout l'historique. En revanche, elles sont accessibles sur tout l'historique en vision comptable. Trois possibilités sont donc envisageables :

- a) Nous pouvons supposer que les provisions *Best Estimate* sont égales aux provisions comptables. Ceci traduit le fait qu'aucune marge de prudence n'est intégrée aux PSAP, calculées via l'approche *Chain Ladder*. L'impact de l'actualisation au taux sans risque sous S2 est mineur si la garantie possède une faible duration et des taux sans risques sont faibles. De plus, dans le cas des USP, ce n'est pas le niveau absolu des provisions qui est important mais leur variation.
 - b) Appliquer un taux de passage aux provisions pour estimer la transition entre la vision comptable et la vision *Best Estimate*. Cependant, cette méthode ne permet pas de capter la duration par exercice due aux anciennetés différentes des contrats. Par ailleurs, elle engendrerait un biais important si l'historique de données en vision *Best Estimate* est faible. Néanmoins, elle a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre.
 - c) Recalculer les provisions passées en vision *Best Estimate*, en s'assurant de l'homogénéité des méthodes de provisionnement. Cette méthode nécessite un historique important dans la mesure où pour chaque survenance, la charge ultime après la première année de développement doit être calculée à partir des données et fichiers issus des arrêtés précédents.
-

Retraitements liés à la réassurance

Le calcul des écarts-types (σ) doit être basé sur les volumes nets de réassurance. La solution la plus simple pour se conformer à cette exigence consiste à calculer les cotisations, prestations et provisions nettes ligne à ligne, à partir des informations de cession fournies dans les fichiers sources. Cette méthode, néanmoins, a pour inconvénient de ne pas forcément capter le profil de risque de l'exercice à venir. Par contre, l'information de cession n'est pas toujours dans ces fichiers.

Il est ainsi possible d'appliquer une des deux solutions :

- a) Appliquer un taux moyen de cession estimé à partir des comptes de résultats techniques par année comptable aux volumes bruts. Avec cette méthode, on ne peut pas obtenir des taux de cession à la maille année comptable x année de survenance. Ainsi, l'application engendre un biais significatif sur les données si l'essentiel des flux pour une année de survenance ne sont pas réglés en première année de développement.
- b) Recalculer le flux cédés à partir de l'historique de réassurance disponible. L'avantage de cette méthode est la possibilité d'avoir les flux cédés à la maille année comptable x année de survenance. Cependant, cette méthode possède l'inconvénient majeur d'introduire un biais significatif pour le risque de réserve, basé sur un backtesting des provisions nettes présentes dans les fichiers d'arrêtés (et non retravaillées avec des données de réassurance globales ou des données de réassurance plus récentes) par année calendaire et par année de survenance.

Après avoir vu les données et retraitements nécessaires, nous allons présenter les données dont nous disposons et analyser quels retraitements nous effectuerons au vu des moyens dont nous disposons.

Troisième partie

Application à un portefeuille santé

Chapitre 9

Périmètre de l'étude et retraitements

Comme précisé à la partie I, les données utilisées proviennent d'une mutuelle qui propose principalement des garanties santé individuelles et collectives. Cette mutuelle résulte de la fusion de plusieurs mutuelles, la dernière fusion ayant eu lieu en 2010. Ainsi, l'historique de données utilisé est entre 2010 et 2016.

Le graphique ci-dessous permet d'observer l'évolution du chiffre d'affaires ainsi que des prestations dans le temps.

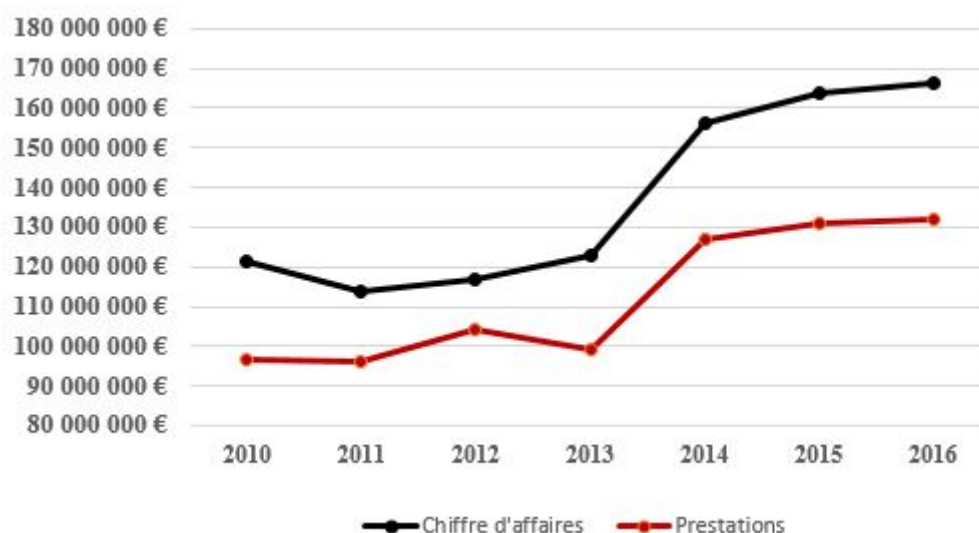


FIGURE 9.1 – Évolution du chiffre d'affaires et des prestations bruts de réassurance

Ce graphique permet de remarquer que les volumes de cotisations et les prestations présentent la même tendance. Par exemple, la forte hausse de prestations entre 2013 et 2014, s'explique par une hausse du chiffre d'affaires. Ceci permet de montrer qu'aucun sinistre grave ou aucun évènement de type catastrophe n'a impacté le portefeuille, donc aucun retraitement des prestations n'est nécessaire à ce niveau.

Les données brutes de réassurance ont été collectées à la maille LoB x survenance x année comptable pour l'application des méthodes de calcul d'écarts types USP.

9.1 Données retenues pour l'étude

Les sources de données disponibles sont les suivantes :

- Les comptes de résultats techniques non-vie à la maille section du portefeuille analysé pour chaque année comptable. La notion d'année de survenance n'est pas présente dans ces comptes.
- Les bases de données de prestations et de cotisations brutes de réassurance extraites du système de gestion de l'entreprise, à la maille contrat juridique x mois de survenance x mois comptable.
- Le résultat technique détaillé de cette mutuelle établi par le service inventaire à partir de 2016.
- La transcodification de réassurance à la maille contrat juridique x exercice des sinistres.

Une comparaison par année comptable entre les flux (prestations et cotisations) issus des comptes techniques et ceux des bases de données de l'entreprise est effectuée. Le graphique suivant présente l'évolution de cet écart dans le temps.

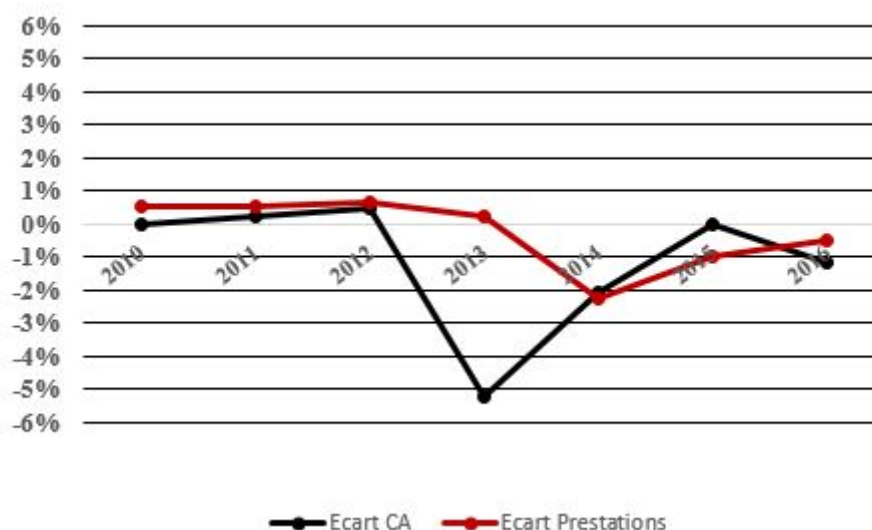


FIGURE 9.2 – Ecarts entre les flux de la base de données et des comptes de résultats

Il est observé que l'écart entre les volumes des prestations présentes dans la base de données et celles inscrites dans les comptes de résultats techniques pour chaque arrêté est inférieur à 1% à l'exception de l'année 2014 pour laquelle il est de l'ordre de 2%. Cet écart est principalement lié à l'effet *fast-close*. En effet, pour chaque année comptable, les

prestations au titre du quatrième trimestre sont estimées pour la clôture comptable. Les bases de données sont quant à elles alimentées à l'aide des flux réels.

En ce qui concerne les volumes de chiffre d'affaires, ce graphique montre que l'écart entre les deux sources est plus volatil au cours du temps. Par exemple, l'écart au titre de l'année 2014 est de l'ordre de 5%. Pour les autres années comptables, l'écart est relativement faible.

En fonction du risque étudié, des retraitements particuliers ont été effectués pour respecter au mieux les critères d'exhaustivité, de pertinence et de précision. Ces différents retraitements seront présentés dans la suite.

Les cotisations (risque de primes)

Pour calculer la volatilité du risque de sous-tarification, il faut disposer des cotisations à la maille année de survenance. Deux éléments sont à prendre en compte lors de la détermination de ces flux :

- La cohérence avec les calculs de CAE (cotisations à émettre) établies par année comptable,
- Le respect de la frontière des contrats retenue pour les calculs S2 (pour la santé, une année de primes futures est projetée sur la base des conditions générales des contrats les plus matériels).

De ce fait, les cotisations acquises par année comptable issues des comptes techniques ont été utilisées, sans effectuer le découpage par survenance.

Notre hypothèse s'écrit selon la formule suivante :

$$\text{Primes acquises}_{AS} = \text{Primes acquises}_{AC} = \text{Primes émises}_{AC} + \Delta \text{CAE}_{AC}^1 \quad (9.1)$$

Ce choix représente une simplification forte mais il a pour considérable avantage le respect du calcul de CAE et de la frontière des contrats.

Les charges ultimes (risque de primes)

Nous avons supposé que la charge ultime après un an en vision *Best Estimate* est la somme entre les paiements de la première année et la PSAP en vision comptable. Cette hypothèse reste cohérente au vu de la faible durée de la garantie santé. En effet, le calcul d'un taux de passage entre les provisions en normes comptables et les provisions

1. AC : année comptable, AS : année de survenance

Best Estimate n'a pas été retenu car l'historique en vision Solvabilité II est de 2 ans sur les 7 années utilisées pour l'étude. Par ailleurs, le recalcul des provisions *Best Estimate* pour les années antérieures n'a pas été effectué car le modèle présent en entreprise calcule les provisions uniquement à la maille année comptable.

Les triangles de provisions *Best Estimate* (risque de réserves)

Pour obtenir le triangle de provisions comptables à la maille année de survenance x année comptable, les provisions techniques ont été recalculées selon la méthode utilisée en interne, à savoir, un *Chain Ladder* mensuel sur 3 ans. Puisque les données sont uniquement disponibles entre 2010 et 2016, les provisions ont pu être recalculées uniquement entre 2012 et 2016. Pour les années 2010 et 2011 une approximation de la ventilation par année de survenance a été effectuée.

9.2 Données pour le risque de primes

Données brutes de réassurance

Cette section présente les données finales obtenues pour le risque de primes en suivant les différents principes énumérés ci-dessus. Les mentions AC et AS représentent l'année comptable et l'année de survenance respectivement.

Exercice	Primes acquises		Prestations payées		Provisions de fin d'année	
	AC	AS	AC	AS	AC	AS
2010	121 192	121 192	97 388	86 673	11 288	10 856
2011	114 008	114 008	96 463	85 697	13 180	12 676
2012	117 465	117 465	105 109	92 611	14 208	13 637
2013	116 310	116 310	99 458	88 215	13 303	12 704
2014	153 133	153 133	124 163	110 506	17 101	16 524
2015	163 768	163 768	129 049	114 724	19 714	19 005
2016	164 291	164 291	131 222	117 515	20 729	19 979

Tableau 9.1 – Données santé brutes de réassurance en K€

Intégration des frais de gestion

Les frais de gestion sont modélisés via l'application d'un taux de frais aux prestations seules, les PSAP comptabilisées étant déjà chargées. Les taux de frais de prestations prestations appliqués par années comptables de 2010 à 2016 sont ceux déterminés par le contrôle de gestion de cette mutuelle. Il a été appliqué 5% de 2010 à 2014, puis 3,8% en 2015 et 2016. Cette baisse du taux de frais est liée à une politique de baisse des frais au sein de cette entreprise.

Passage en net de réassurance

Contrairement aux frais de gestion, les quotes-parts sont appliquées par survenance. Cela signifie que pour chaque année comptable, un découpage supplémentaire par survenance est nécessaire. Puisque les volumes de cotisations cédées ne sont pas directement disponibles dans les bases de données, les taux de cession moyens par année comptable sont calculés à partir des comptes de résultats techniques des différents arrêts.

En ce qui concerne la charge sinistre (prestations + provisions), les flux de prestations cédées étant disponibles dans les bases de données à disposition, les taux de quotes-parts à la maille année comptable x année de survenance ont pu être obtenus. L'information de cession des prestations a été utilisée pour les provisions.

Année	Cotisations	Prestations et Provisions
2010	29,7%	30,2%
2011	31,1%	30,9%
2012	30,3%	30,3%
2013	33,3%	30,1%
2014	34,9%	32,8%
2015	27,9%	45,5%
2016	48,8%	48,4%

Tableau 9.2 – Quote-parts de réassurance de la survenance N pour le risque de primes

Nous pouvons constater que la réassurance n'est pas homogène en 2015. Pour les autres années, les quotes-parts appliquées aux cotisations et à la charge ultime ont le même ordre de grandeur. Cette incohérence en 2015 est liée à des retards d'enregistrements comptables des flux de cotisations cédées.

Pour ajuster cette donnée, la transcodification de réassurance a été appliquée aux flux bruts de réassurance des cotisations des comptes de résultats techniques de chaque section. Ensuite, les flux de cession ont été agrégés pour obtenir le taux de cession moyen réellement observé en 2015 sur l'ensemble du portefeuille. Cet ajustement permet d'obtenir un taux moyen de cession de 45,6%. Dans la suite de l'étude, c'est ce taux de cession qui sera utilisé pour obtenir les cotisations cédées au titre de l'année 2015.

9.3 Données pour le risque de réserves

Cette section présente les données finales obtenues pour le risque de réserves en suivant les différents principes énumérés ci-dessus.

Triangles brutes de réassurance

Il s'agit des triangles de prestations et de provisions à la maille année de survenance x année de développement.

Triangle de prestations non cumulées

Ce triangle est obtenu en effectuant une extraction de la base de données de prestations. L'extraction a été effectuée à la maille contrat juridique x année comptable x année de survenance.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6
2010	86 674	10 534	239	21	1	10	5
2011	85 698	12 260	255	9	11	8	
2012	92 611	10 954	270	0	25		
2013	88 2015	13 373	402	25			
2014	110 506	14 753	349				
2015	114 724	13 293					
2016	117 515						

Tableau 9.3 – Triangle de prestations brutes de réassurance en K€

Ce triangle est construit à la maille année de survenance x année de développement. La lecture des prestations au titre d'une année comptable est effectuée en diagonale. Par exemple, la dernière diagonale correspond aux prestations payées en 2016 au titre des différentes années de survenance disponibles à gauche de ce triangle.

Pour pouvoir appliquer la méthode de Merz-Wüthrich, il faut construire un triangle de prestations cumulées à partir de ce triangle. Une analyse de ce triangle à la maille année comptable est présentée dans le tableau ci-dessous. Ceci permet de montrer que pour chaque année comptable N, l'essentiel des paiements sont effectués au titre des survenances N, N-1 et N-2.

Année	Prestations AC	Prestations des 3 premières années de développement	Proportion
2012	105 110	105 110	100%
2013	99 447	99 426	99,98%
2014	124 159	124 149	99,99%
2015	129 900	129 879	99,98%
2016	131 220	131 156	99,95%

Tableau 9.4 – Comparaison des prestations des trois premières années de développement en fonction des prestations de l'année comptable brutes de réassurance en K€

Triangle de provisions

A partir des provisions recalculées, un triangle de provisions est construit. Puisque le calcul des provisions est effectué à l'aide d'un *Chain Ladder* mensuel sur 3 ans, seulement 3 années de développement sont disponibles pour chaque diagonale. Néanmoins, cela reste cohérent car on observe qu'au bout de trois ans 99,9% des prestations au titre d'une année sont réglées. On suppose donc que les provisions au titre des années de développements N+3 et au-delà sont nulles.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6
2010	10 856	45	62	0	0	0	0
2011	12 676	6509	63	0	0	0	
2012	13 637	535	66	0	0		
2013	12 704	512	62	0			
2014	16 523	647	79				
2015	19 004	671					
2016	19 979						

Tableau 9.5 – Triangle de provisions brutes de réassurance en K€

Taux de cession à la maille année de survenance x année de développement

Les données de réassurance utilisées sont les taux de quotes-parts moyens de cession des prestations. Ils sont obtenus à partir des flux de prestations cédés présents dans la base de données.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6
2010	30,20%	30,05%	30,60%	8,64%	324,87%	38,78%	58,52%
2011	30,97%	30,17%	29,76%	16,66%	34,58%	76,99%	
2012	30,32%	27,20%	26,55%	0,00%	42,11%		
2013	30,18%	27,51%	48,86%	54,12%			
2014	32,79%	43,84%	50,19%				
2015	45,53%	53,72%					
2016	48,37%						

Tableau 9.6 – Triangle des quotes-parts moyennes

Nous pouvons constater que les taux de cessions pour les 3 premières années de développement de chaque diagonale ont le même ordre de grandeur, mais au-delà, les taux sont différents. En effet, cela résulte du fait que les flux après 3 années de développement concernent plus des régularisations que des règlements de sinistres.

L'analyse des données à disposition révèle que les sources de données ne cadrent pas exactement. Cet écart est en partie expliqué par l'effet *fast-close*. Nous observons que pour la plupart des années, les volumes de chiffre d'affaires et prestations sont cohérents entre

les deux sources. Cependant, pour les années où l'écart est significatif, il est compliqué de faire un ajustement sur les flux bruts de réassurance.

De ce fait, pour respecter les critères de pertinence, d'exhaustivité et de précision, nous avons retenu les cotisations par année comptable issues des comptes techniques car elles respectent mieux la notion de frontière des contrats et elles sont cohérentes avec le calcul de CAE. En ce qui concerne les données de prestations, nous avons retenu les flux issus du système de gestion car les données sont disponibles à une maille assez fine. Enfin, pour les provisions, puisque les fichiers de calculs des provisions n'étaient pas disponibles, nous avons recalculé les provisions à l'aide de la méthode adoptée en interne.

Une fois les données retraitées, les modalités de calibrage des standards pour le calcul du SCR primes et réserves seront challengées qualitativement avec le dispositif adopté en interne. Ensuite une validation des hypothèses quantitatives sera effectuée. Ces modalités se retrouvent également dans certaines hypothèses sous-jacentes aux méthodes de calcul des paramètres spécifiques.

Chapitre 10

Backtesting qualitatif dans le cadre de l'ORSA

L'objectif de l'analyse qualitative préconisée par l'EIOPA est d'évaluer l'adéquation du profil de risque de l'entreprise aux hypothèses de calibrage de la formule standard. De ce fait, les hypothèses sous-jacentes à la formule standard du risque de primes ont été challengées avec les dispositifs adoptés en interne. Cette section résume les modalités de calibrage de la formule standard pour le risque de primes et de réserves, et commente pour chacune l'adéquation du profil de risque de la mutuelle concernée.

Sur les sept modalités qualitatives présentées au chapitre 3 ,

- quatre aspects de la calibration ne sont pas applicables au périmètre à l'étude (hypothèses 2, 4, 5 et 6).
- Le profil de risque est aligné avec trois aspects de la calibration (hypothèses 1, 3 et 7).

10.1 Hypothèses non applicables au périmètre étudié

Parmi les 13 modalités de calibrage de la formule standard du risque de primes et réserves, les hypothèses 2, 4, 5 et 6 ne sont pas applicables au portefeuille de la mutuelle étudiée. En effet :

- La garantie responsabilité civile (RC) n'est pas couverte par ce portefeuille. Ceci rend sans objet le risque d'accumulation d'un grand nombre de sinistres similaires couverts par un contrat d'assurance de responsabilité civile (hypothèse 2).
 - L'entreprise à l'étude ne détient aucune compagnie d'assurance captive (hypothèse 4).
 - Ce portefeuille ne fait l'objet d'aucune diversification géographique car l'activité est exercée uniquement en France (hypothèse 5).
 - Aucun traité de réassurance non proportionnelle ne couvre pas la garantie santé, rendant inapplicable la réduction de volatilité du risque de primes sur ce segment (hypothèse 6).
-

10.2 Hypothèses alignées avec le profil de risque de la mutuelle étudiée

- Aucun évènement de type « CAT » n'est présent dans l'historique (hypothèse 1). Cela signifie que les écarts types calibrés sous la Formule Standard excluent tout évènement de type « CAT ». En ce qui concerne la mutuelle à l'étude, depuis la dernière fusion en 2010, elle n'a pas été affectée par une surconsommation ponctuelle de prestations santé. Le profil de risque est donc en adéquation avec cette hypothèse.
- Le volume du portefeuille considéré est supérieur au volume moyen retenu par l'EIOPA pour le calibrage de la formule standard (hypothèse 3). Les volatilités standards ont été calibrées sur la base de données sources au 31.12.2009, sur des portefeuilles d'assurance présentant une profondeur d'historique supérieure à 3 ans. Pour la Santé, le chiffre d'affaires du portefeuille moyen est compris entre 70 M€ et 114 M€ (en fonction du type de données sources considéré). Comme énoncé au chapitre 1, le chiffre d'affaires de l'entreprise dont il est question dans ce mémoire est d'environ 166 M€ au 31.12.2016. Ce constat incite à anticiper une volatilité inférieure à celle calibrée pour la formule standard : en effet, des volumes importants s'accompagnent en général d'une meilleure mutualisation du risque, et donc d'une volatilité plus faible. Le profil de risque semble donc aligné à cet aspect de la calibration.
- Les dispositifs en place permettent de réduire le risque de dépendance entre les risques de primes et le risque de réserves (hypothèse 7). En effet, la dépendance entre le risque de primes et le risque de réserves (exemple : relation directe entre une sous-tarification et un sous-provisionnement en cas d'une gestion ou d'un outil de calcul défaillants) n'est pas prise en compte dans les écarts-types σ_P et σ_R , car elle est reflétée dans les coefficients de corrélation utilisés pour le calcul de la volatilité globale σ . Au sein de la mutuelle étudiée, les travaux de tarification et de provisionnement sont menés de manière indépendante par deux équipes distinctes utilisant des méthodes et des outils différents et retenant, dans certains cas, des hypothèses distinctes (exemple : application d'abattements sur les tables de mortalité du tarif). Ceci contribue à réduire le risque de dépendance entre les deux risques. En outre, il a été mis en place un service qui s'occupe du pilotage du résultat technique (y compris analyse de boni-mali), ce qui permet d'anticiper les risques de sous-tarification et de sous-provisionnement sur les contrats en cours et d'adapter la stratégie d'entreprise en conséquence sur les affaires nouvelles (priorisation d'un segment donné, souscription d'une couverture de réassurance, revue des bases tarifaires, etc.)

Ces dispositifs permettent donc de suivre les risques de tarification et de provi-

sionnement, d'anticiper toute apparition de dépendance, ce qui est cohérent avec l'hypothèse considérée.

10.3 Hypothèses nécessitant une analyse quantitative

Sur les six hypothèses relatives aux données de calibration :

- Le profil de risque est aligné avec trois aspects de la calibration (hypothèses 9, 11 et 13).
- Le profil de risque n'est pas aligné avec un aspect de la calibration, rendant indispensable la réalisation d'une analyse quantitative pour cette modalité (hypothèse 12).
- Enfin, deux aspects de la calibration doivent être couverts uniquement une analyse quantitative (hypothèses 8 et 10).

L'analyse quantitative des six hypothèses relatives aux données de calibration sera effectuée dans les chapitres 11 et 12.

Analyse du risque de primes

Une fois les données nécessaires à l'utilisation des méthodes USP prêtes, les hypothèses sous-jacentes aux différents modèles doivent être vérifiées pour pouvoir les utiliser. Il faut noter qu'en général, les résultats de tests statistiques effectués sur des échantillons de petites tailles ne sont pas robustes au vu de la sensibilité de ces résultats. En ce qui concerne l'ORSA, les hypothèses relatives au calibrage de l'écart-type standard du risque de primes sont les suivantes :

- La sinistralité suit une loi log-normale.
- La sinistralité totale est exprimée en fonction du niveau de la prime acquise nette, via une constante de proportionnalité égale au *loss ratio* (P/C).
- La valeur attendue du ratio de sinistralité reste relativement stable dans le temps.

11.1 Validation d'hypothèses avec données brutes de réassurance

Présentation des données

Nous avons ci-dessous les données brutes de réassurance. En reprenant les notations du chapitre 6, V_j représente le volume de primes acquises pour l'année de survenance j , tandis que U_j représente la somme des prestations intégrant les frais de gestion et des provisions pour l'année comptable j et l'année de survenance j . Nous avons également le ratio P/C (U_j/V_j) et le log du ratio P/C ($\ln(U_j/V_j)$), qui sont utilisés pour la validation des hypothèses.

Année	V_j	U_j	U_j/V_j	$\ln(U_j/V_j)$
2010	121 191	101 864	84%	-17%
2011	114 008	102 658	90%	-10%
2012	117 465	110 879	94%	-6%
2013	116 310	105 331	91%	-10%
2014	153 133	132 555	87%	-14%
2015	163 767	138 088	84%	-17%
2016	164 291	141 959	86%	-15%

Tableau 11.1 – Données finales brutes de réassurance pour le risque de primes

Validation des méthodes d'estimation

Comme mentionné au chapitre 9, notre portefeuille ne contient pas de sinistres de type CAT. Il est donc supposé que les sinistres sont indépendants et identiquement distribués. Ceci permet de réaliser l'estimation par maximum de vraisemblance. Dans le cadre de la méthode des moindres carrés, en calculant l'espérance de U_j à partir de l'expression de la sinistralité, nous obtenons une fonction bijective de β , ceci rend possible l'utilisation de l'estimation par moindres carrés.

Constance du ratio de sinistralité

Cette hypothèse concerne les trois méthodes du risque de primes. Il s'agit de vérifier que la charge ultime à un an est proportionnelle aux primes acquises. Pour cela, nous effectuons une régression linéaire de la charge brute de réassurance en fonction de la prime acquise brute de réassurance par survenance.

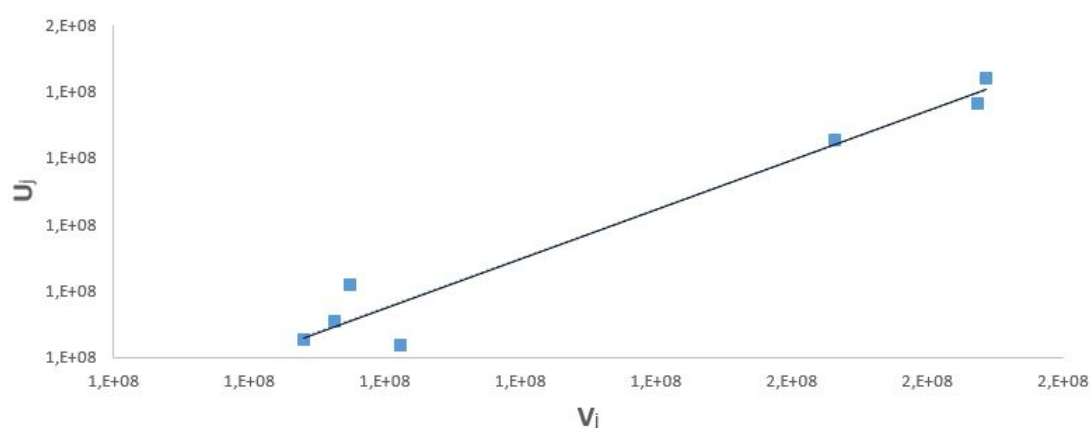


FIGURE 11.1 – Charge sinistre après un an en fonction des primes acquises

Ce graphique représente la droite de régression linéaire de la charge sinistre après un an en fonction des primes acquises. L'équation de la droite de régression et le coefficient de détermination R^2 associé sont :

$$U_j = 0,7411 \times V_j + 2 * 10^7 \text{ et } R^2 = 0,96$$

Par ailleurs, la nullité de l'ordonnée à l'origine est testée à l'aide du test de Student à $n-p-1$ degré de liberté, avec n le nombre d'observations et p le nombre de paramètres. Un test de Shapiro Wilk est également effectué sur les résidus du modèle pour valider notre modèle.

```
Call:
lm(formula = U_p_sr ~ V_p_sr)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7
-6403223 -284725 5373505 681886 615200 -1732789 1750147

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.845e+07   9.384e+06   1.966 0.106483
V_p_sr      7.411e-01   6.827e-02  10.856 0.000115 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3921000 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9593,    Adjusted R-squared:  0.9512
F-statistic: 117.9 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.0001151

    1      2      3      4      5      6      7
-6403222.7 -284725.3 5373504.6 681886.3 615199.6 -1732789.3 1750147.0

Shapiro-Wilk normality test

data:  lm_p_srea$residuals
W = 0.94659, p-value = 0.6986
```

FIGURE 11.2 – Test de proportionnalité pour le risque de primes

Les résultats ci-dessus montre que l'ordonnée à l'origine n'est pas significative. En effet, sa p -value est de 0,11, ce qui est supérieur à 5%. Ainsi, l'hypothèse de nullité est vérifiée. Ceci permet d'accepter l'hypothèse de proportionnalité entre U_j et V_j , et donc la constance du ratio de sinistralité. De plus, le test de Shapiro-Wilk a un p -value supérieur à 5%, ce qui permet d'accepter le modèle.

Relation entre la variance de la charge de sinistre et les cotisations acquises

A la section 6.4, il a été mis en évidence que l'hypothèse selon laquelle la relation entre la variance de la charge ultime à un an et les primes acquises est linéaire est un cas particulier de la relation quadratique donnée par l'équation 6.2 pour le cas $\delta = 0$. Il a

aussi été question de restreindre l'analyse aux cas $\delta = 0$ et $\delta = 1$, puisque l'optimum est atteint pour lorsque δ prend une de ces valeurs.

Il est ici question d'effectuer une régression linéaire entre les $X_j = \ln(V_j)$ et les $Y_j = \ln(\lambda_j^2)$, où les λ_j représentent les résidus de la régression linéaire précédente.

Pour $\delta = 0$ et $\delta = 1$ (le test de modèle est le même), les résultats ci-dessous ont été obtenus.

```
Call:
lm(formula = Y ~ X)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7
3.0019 -3.2187  2.6540 -1.4738 -1.7044  0.3607  0.3804

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 26.67270   113.35270   0.235    0.823
X            0.08973    6.05698   0.015    0.989

Residual standard error: 2.521 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  4.389e-05, Adjusted R-squared:  -0.1999
F-statistic: 0.0002194 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.9888
```

FIGURE 11.3 – Test de sur variance de la charge sinistre brut de réassurance

L'hypothèse de linéarité entre les X_j et les Y_j est ici rejetée au vu de la *p-value* de notre régression qui est égale à 0,99. Ainsi, la variance de la charge sinistre de notre portefeuille n'a ni une relation linéaire ni une relation quadratique avec les primes acquises.

Caractère log-normal de la sinistralité

Un test de **Shapiro-Wilk** est effectué sur l'historique du log des S/P présenté précédemment.

```
Shapiro-Wilk normality test

data:  s_p_pr
W = 0.92097, p-value = 0.477
```

FIGURE 11.4 – Test de log-normalité pour le risque de primes

On obtient 0,92 pour la statistique du test W, et la valeur W critique de la statistique, pour une p-value de 5%, est 0,8 (pour un échantillon contenant 7 observations). Notre W est supérieur au W critique et donc on accepte l'hypothèse de normalité du log des S/P.

En somme, seule l'hypothèse sur la variance n'est pas vérifiée, lorsque nous effectuons nos tests sur les données brutes de réassurance.

11.2 Validation d'hypothèses pour le risque de primes avec données nettes de réassurance

Présentation des données

Nous reprenons les mêmes notations que dans la section précédente. Nous avons ci-dessous les données nettes de réassurance.

Année	V_t	U_t	U_t/V_t	$\ln(U_j/V_j)$
2010	85 1623	71 096	83%	-18%
2011	78 554	70 868	90%	-10%
2012	81 858	77 261	94%	-6%
2013	77 492	73 542	95%	-5%
2014	99 592	89 088	89%	-11%
2015	89 101	75 215	84%	-17%
2016	84 125	73 294	87%	-14%

Tableau 11.2 – Données finales nettes de réassurance pour le risque de primes

Constance du ratio de sinistralité

Nous effectuons une régression linéaire de la charge nette de réassurance en fonction de la prime acquise nette de réassurance par survenance.

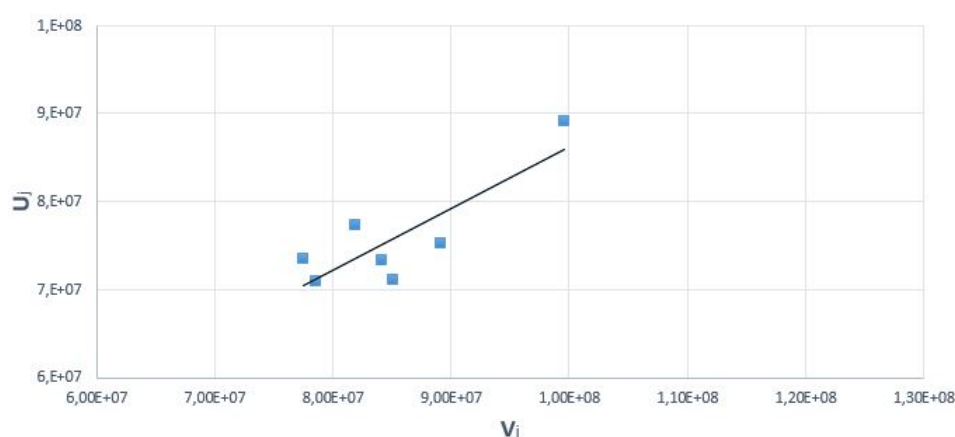


FIGURE 11.5 – Charge sinistre après un an en fonction des primes acquises

Ce graphique représente la droite de régression de la charge sinistre à un an nette de réassurance en fonction des primes acquises nettes de réassurance. L'équation de la droite

de régression et le coefficient de détermination R^2 correspondant sont donnés par :

$$U_j = 0,7011 \times V_j + 2 * 10^7 \text{ et } R^2 = 0,70$$

En ce qui concerne la nullité de l'ordonnée et l'acceptation du modèle, nous effectuons le test de Student puis un test de Shapiro-Wilk comme précédemment.

```
Call:
lm(formula = U_p ~ V_p)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6      7
-4694984 -290851 3785850 3128092 3180454 -3338276 -1770286

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 1.609e+07   1.746e+07   0.922   0.3990
V_p          7.011e-01   2.044e-01   3.430   0.0186 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3759000 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7018,    Adjusted R-squared:  0.6421
F-statistic: 11.77 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.01863

Shapiro-Wilk normality test

data:  lm_p_net$residuals
W = 0.89497, p-value = 0.3016
```

FIGURE 11.6 – Test de proportionnalité pour le risque de primes

Nous observons que la p -value de l'ordonnée à l'origine est de 0,39, ce qui est supérieure à 5%. Ainsi, nous acceptons l'hypothèse de nullité de l'ordonnée à l'origine. En ce qui concerne le test de modèle à l'aide du test de Shapiro-Wilk, la p -value est de 0,3%.

Cette analyse nous permet de vérifier la relation de proportionnalité entre les cotisations acquises nettes et la charge sinistre nette et la stabilité de β , ces hypothèses étant communes aux trois méthodes du risque de primes. Ce résultat nous permet également de valider deux hypothèses sous-jacentes à la formule standard pour le SCR primes et réserves, à savoir que la prime acquise nette peut être utilisée comme une approximation de l'exposition au risque de primes, et que le ratio de sinistralité est stable dans le temps.

Relation entre la variance de la charge de sinistre et les cotisations acquises

Comme à la section précédente, la régression linéaire testant la relation entre la variance de la charge de sinistre et les cotisations acquises a été réalisée.

```

Call:
lm(formula = Y ~ X1)

Residuals:
    1     2     3     4     5     6     7 
1.4284 -3.4355  1.3403  1.4330 -0.7050  0.3551 -0.4163

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -128.715    168.129  -0.766   0.478
X1           4.327     4.605   0.940   0.391

Residual standard error: 1.923 on 5 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1501,    Adjusted R-squared:  -0.0199 
F-statistic: 0.8829 on 1 and 5 DF,  p-value: 0.3905

```

FIGURE 11.7 – Test de proportionnalité sur variance de la charge sinistre brute de réassurance

Comme précédemment, ce modèle linéaire est rejeté. Ceci n'est pas aberrant au vu de la taille de notre échantillon.

Caractère log-normal de la sinistralité

On effectue un test de **Shapiro-Wilk** sur l'historique du log des P/C (on teste la normalité du log des P/C et donc la log-normalité des P/C).

```

Shapiro-Wilk normality test

data:  s_p_pr
W = 0.93033, p-value = 0.5537

```

FIGURE 11.8 – Test de log-normalité pour le risque de primes

On obtient 0,93 pour la statistique du test W, et la valeur W critique de la statistique, pour une p-valeur de 5%, est 0,8 (pour un échantillon contenant 7 observations). Notre W est supérieur au W critique et donc on accepte l'hypothèse de normalité du log des P/C. Ce résultat permet de vérifier le caractère log-normal de la distribution des ratios de sinistralité, hypothèse qui est également posée pour calibrer le paramètre standard du risque de primes et de réserves.

11.3 Présentation des résultats

A partir des méthodes USP illustrées dans la partie II, il a été possible d'évaluer des paramètres d'écarts-types alternatifs pour les risques de primes. Les écarts-types (USP et finaux associés) obtenus sont présentés dans ce chapitre.

Écarts-types pour le risque de primes avec données brutes de réassurance

A partir des données présentées à la section 11.1, nous avons obtenu les volatilités présentées dans le tableaux ci-dessous.

Méthode	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
Moindres Carrés	5%	3,31%	3,87%
Log-normale Simplifiée	5%	3,03%	3,68%
Log-normale	5%	4,08%	4,38%

Tableau 11.3 – Risque de primes : Écarts-types calibrés bruts de réassurance

Les écarts-types finaux (σ_{final}) obtenus ci-dessus résultent de la pondération par le facteur de crédibilisation de 67% des écarts-types USP (cf section 4.3).

A partir de ces résultats, on observe que lorsqu'on utilise les données brutes de réassurance pour calibrer l'écart-type du risque de primes, on obtient des écarts-types inférieurs au paramètre standard de 5% . On remarque également que la méthode log-normale, qui est la méthode réglementaire, donne des résultats légèrement au-dessus des deux autres méthodes. Cet écart s'explique par la différence d'hypothèse entre les trois méthodes, et notamment, le critère de variance. En effet, pour la méthode log-normale, la variance de la charge sinistre a une relation quadratique aux primes acquises, tandis que pour les deux autres méthodes, la variance de la charge sinistre est proportionnelle aux primes acquises.

Résultats pour le risque de primes avec données nettes de réassurance

Les écarts-types du risque de primes présentés ci-dessous ont été calibrés à partir des données présentées à la section 11.2

Méthode	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
Moindres Carrés	5%	4,44%	4,63%
Log-normale Simplifiée	5%	4,11%	4,40%
Log-normale	5%	4,72%	4,81%

Tableau 11.4 – Risque de primes : Écarts-types calibrés nets de réassurance

Les écarts-types finaux (σ_{final}) obtenus ci-dessus résultent de la pondération par le facteur de crédibilisation de 67% des écarts-types USP (cf section 4.3).

A partir de ces résultats, on observe que les écarts-types finaux obtenus pour le risque de primes sont assez proches de l'écart-type standard pour la LoB santé. Comme pour les résultats avec les primes brutes de réassurance, la méthode log-normale donne des résultats légèrement au-dessus des deux autres méthodes.

11.4 Tests de sensibilités

Il a été effectué différents tests de sensibilités sur les résultats de la méthode log-normale afin de déceler les potentielles sources de biais.

1) Sensibilité au nombre d'années d'historique

Risque de primes brut

Nous avons calibré les USP sur des sous-ensembles de nos données brutes de réassurance.

Nombre d'années	Facteur de crédibilité	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
7 ans	67%	5%	4,08%	4,38%
6 dernières années	51%	5%	3,98%	4,48%
5 dernières années	34%	5%	3,97%	4,65%
6 premières années	51%	5%	4,67%	4,83%
5 premières années	34%	5%	4,97%	4,99%

Tableau 11.5 – Risque de primes : Sensibilités de USP « bruts » à l'historique

Il est observé que les USP calibrés sur les premières années sont plus élevés que ceux calibrés sur les dernières années. Par ailleurs, l'impact de cette variation est atténué par le facteur de crédibilité, ce qui permet d'avoir un écart-type final relativement stable pour tous les sous-ensembles de données utilisés.

Risque de primes net

Nombre d'années	Facteur de crédibilité	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
7 ans	67%	5%	4,72%	4,81%
6 dernières années	51%	5%	4,37%	4,68%
5 dernières années	34%	5%	4,91%	4,97%
6 premières années	51%	5%	5,15%	5,08%
5 premières années	34%	5%	5,12%	5,04%
6 années sans 2015	51%	5%	4,66%	4,83%

Tableau 11.6 – Risque de primes : Sensibilités de USP « nets » à l'historique

L'analyse du tableau ci-dessus nous permet de constater que pour les données nettes de réassurance, les dernières années sont moins volatiles que les premières. Par ailleurs, l'année 2015 augmente la volatilité du risque de primes. Néanmoins en ordre de grandeur, les résultats sont relativement proches de l'écart-type standard. Ceci permet de conforter l'hypothèse selon laquelle le risque de primes de notre portefeuille est en adéquation avec les hypothèses qui sous-tendent le calcul du SCR primes et réserves.

2) Sensibilité sur la réassurance

Pour calibrer nos USP avec les données nettes de réassurance, nous avons corrigé le taux de cession des cotisations de 2015. En utilisant le taux de cession des cotisations de l'année 2015 sans le corriger, on obtient les résultats suivants.

Nombre d'années	Cession des cotisations 2015	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
Réassurance sans ajustement	27,9%	5%	12,69%	10,15%
Réassurance ajustée	45,6%	5%	4,72%	4,81%

Tableau 11.7 – Risque de primes : Sensibilités des USP « nets » à la réassurance

Cet ajustement de la réassurance a permis de considérablement améliorer l'écart-type obtenu.

Les résultats présentés ci-dessus nous permettent de constater que l'écart-type standard du risque de primes surestime légèrement le risque de notre portefeuille. Nous allons mesurer l'impact sur le SCR.

11.5 Impact des USP du risque de primes sur le SCR

Afin d'obtenir le SCR à l'aide de l'équation (2.4), il faut déterminer l'écart-type et le volume de primes et de réserves. Pour cela, nous avons besoin du volume de primes et du volume de réserves, qui sont 84 126Ke et 10 665Ke respectivement. L'écart-type de risque de réserves utilisé est l'écart-type standard fixé à 5%. Le tableau ci-après présente le SCR obtenu en fonction des différentes mesures de l'USP du risque de primes.

Méthode	σ_P	$\sigma_{P\&R}$	SCR(K€)	variation(K€)
Formule standard	5%	5%	13 490	
Réassurance non-ajustée	10,15%	9,3%	26 459	12 969
Réassurance ajustée	4,81%	4,58%	13 015	-474
Sans réassurance	4,38%	4,20%	11 938	-1 552

Tableau 11.8 – Impact des USP primes sur le SCR primes et réserves

Ces résultats montrent que le SCR primes et réserves est très sensible à l'écart-type du risque de primes. En effet, le volume de primes est environ huit fois plus grand que le volume de réserves, donc il a un plus grand impact sur l'écart-type primes et réserves $\sigma_{P\&R}$. En terme de suivi de risque, cette analyse permet de montrer que le SCR primes et réserves de cette mutuelle est très sensible à la volatilité du risque de primes. Ainsi, pour un meilleur pilotage de cette entreprise, ce risque nécessite un suivi périodique. De plus, si au fil du temps la volatilité de ce risque venait à être beaucoup plus faible, il pourrait être intéressant de mettre en place des USP pour optimiser le SCR.

11.6 Conclusion sur le risque de primes

L'analyse du risque de primes a permis d'arriver aux conclusions suivantes :

- Dans le cadre de l'ORSA, notre analyse quantitative permet de montrer que les hypothèses de calibrage de l'écart-type standard pour le risque de primes sont vérifiées sur notre portefeuille. De plus, le paramètre spécifique calibré est assez proche du paramètre standard. Ceci conforte l'utilisation de la formule standard au sein de cette mutuelle.
- Le calibrage des USP de primes avec la méthode log-normale engendrerait au maximum une baisse d'environ de 1,6M€ car nos paramètres spécifiques sont proches du paramètre standard. Cependant, cet écart ne compensera pas la charge liée à la procédure de mise en place des USP. De ce fait, cette étude permet de mettre en exergue l'importance du suivi périodique du risque de primes.
- Malgré notre historique de sept années, les tests statistiques réalisés nous ont permis de vérifier nos hypothèses. Néanmoins, ces résultats ne sont pas robustes au vu de la petite taille de notre échantillon de données. Au fil des années, la profondeur de l'historique permettra de confirmer ou infirmer s'il est nécessaire pour pour cette mutuelle de lancer la procédure d'adoption des USP.

Chapitre 12

Analyse du risque de réserves

Ce chapitre a pour objectif de vérifier les hypothèses relatives au calibrage des USP du risque de réserves, présenter les paramètres spécifiques obtenus et mesurer leur potentiel impact sur les SCR primes et réserves. De plus, les hypothèses de calibrage de l'écart-type standard du risque de réserves sont les suivantes :

- La liquidation des provisions suit une loi log-normale.
- Il existe une relation de proportionnalité entre les charges de début et de fin d'année. La constante de proportionnalité entre ces deux variables correspond au ratio d'écoulement.
- La valeur attendue du ratio de liquidation reste relativement stable dans le temps.

12.1 Validation d'hypothèses pour le risque de réserves

Présentation des résultats pour les méthodes log-normale et moindres carrés

Données pour les méthodes log-normale et moindres carrés

En reprenant les notations du chapitre 7, V_j représente les provisions *Best Estimate* de début d'année j au titre des sinistres de survenance $j - 1$, et R_j représente la somme des prestations et des provisions *Best Estimate* de fin d'année j au titre des sinistres de survenance $j - 1$. Nous avons également le ratio de liquidation (R_j/V_j) ainsi que le log du ratio de liquidation que nous utiliserons pour la validation des hypothèses. Ces données sont nettes de réassurance, et n'intègrent pas les frais de gestion.

Année	V_j	R_j	R_j/V_j	$\ln(R_j/V_j)$
2011	7 577	7 689	101%	1%
2012	9 070	9 126	101%	1%
2013	9 901	8 607	87%	-14%
2014	9 304	10 317	111%	10%
2015	11 524	8 898	77%	-26%
2016	10 747	6 706	62%	-47%

Tableau 12.1 – Données retraitées pour la méthode log-normal du risque de réserves

Constance du ratio de liquidation

Nous effectuons une régression linéaire de la charge sinistre de clôture en fonction des provisions d'ouverture.

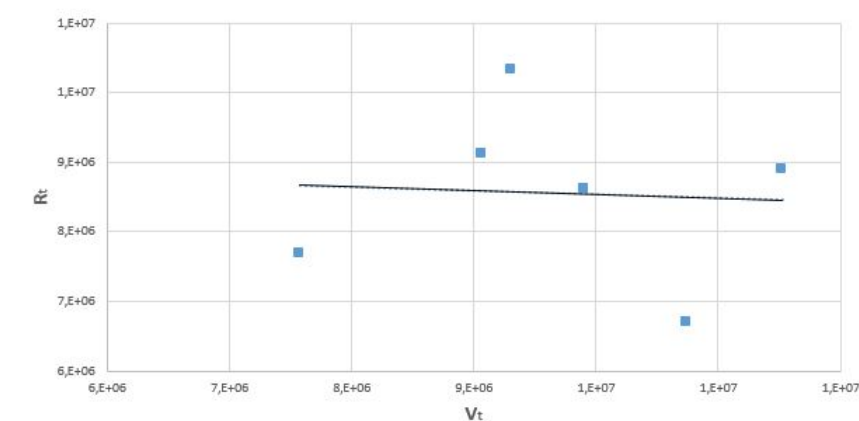


FIGURE 12.1 – Charge sinistre de clôture en fonction des provisions d'ouverture

Le graphique ci-dessus représente la droite de régression linéaire de la charge sinistre de fin d'année (provisions de fin d'année + prestations en cours d'année) en fonction des provisions d'ouverture. Il est question dans la suite d'analyser la significativité des coefficients de cette régression.

```

Call:
lm(formula = R ~ V)

Residuals:
    1      2      3      4      5      6
-982923  535059  61766 1739540  440828 -1794269

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  9.084e+06  4.391e+06   2.069   0.107
V           -5.435e-02  4.495e-01  -0.121   0.910

Residual standard error: 1387000 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.003642, Adjusted R-squared:  -0.2454
F-statistic: 0.01462 on 1 and 4 DF, p-value: 0.9096

```

FIGURE 12.2 – Test de proportionnalité pour le risque de réserves

La figure 12.2 présente le résultat de la régression de la charge sinistre de fin d'année sur les provisions d'ouverture. Au regard de la *p-value* de *l'intercept* (0,107) et celle du coefficient β (0,910), nous rejetons la présence d'une relation de proportionnalité entre la charge sinistre de fin d'année et les provisions d'ouverture. Ceci rend inapplicable la vérification de l'hypothèse sur la variance.

Caractère log-normal de l'écoulement des provisions

```

Shapiro-Wilk normality test

data:  s_p_res
W = 0.9291, p-value = 0.5732

```

FIGURE 12.3 – Test de log-normalité pour le risque de réserves

Nous obtenons 0,93 pour la statistique du test W, et la valeur critique de la statistique, pour une *p-value* de 5%, est 0,79 (pour un échantillon contenant 6 observations). Notre W est supérieur au W critique et donc valide l'hypothèse de normalité du log des ratios de liquidation.

Présentation des résultats pour la méthode Merz-Wüthrich

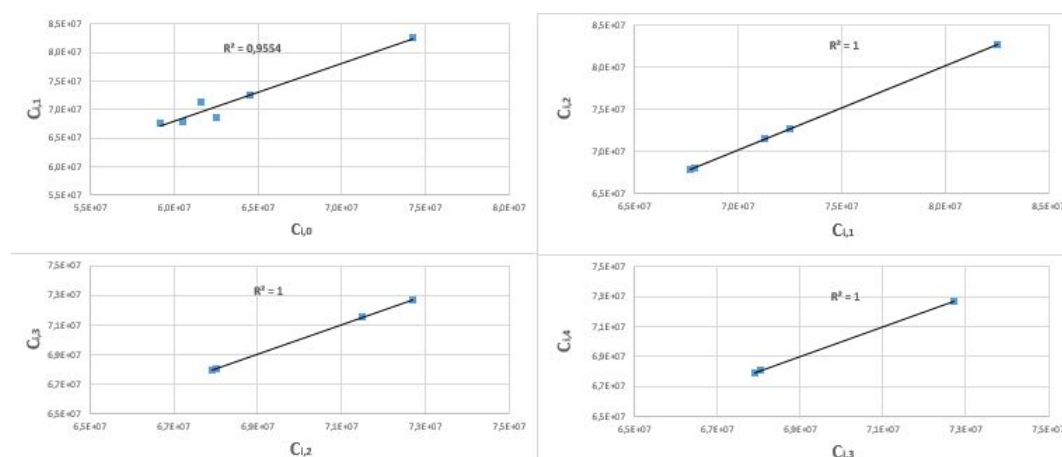
Existence des facteurs de développement

Le triangle ci-dessous contient les données de prestations cumulées nettes de réassurance et n'inclut pas les frais de gestion. Il permet de valider l'hypothèse d'existence de facteurs de développement. Comme mentionné à la section 7.5, la validation de cette hypothèse peut se faire à partir d'un *C-C plot*. Il s'agit pour une année de développement j , de vérifier si les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ sont alignés sur une droite.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6
2010	60 495	67 864	68 030	68 050	68 048	68 053	68 055
2011	59 160	67 721	67 900	67 908	67 915	67 918	
2012	64 533	72 507	72 706	72 706	72 721		
2013	61 592	71 287	71 492	71 504			
2014	74 269	82 555	82 728				
2015	62 489	68 640					
2016	60 673						

Tableau 12.2 – Triangle de prestations cumulées nettes de réassurance en K€

Les graphiques ci-dessous représentent les *C-C plot* des 4 premières années de développement.

FIGURE 12.4 – *C-C plot* pour les 4 premières années de développement

Nous observons que pour les 4 premières années de développement, les couples $(C_{i,j}, C_{i,j+1})$ semblent bien passer par les droites représentées sur les graphiques ci-avant, d'autant plus que les coefficients R^2 pour ces 4 graphiques sont très proches de 1.

Indépendance des années de développement

La validation de cette hypothèse se fait en deux temps comme définis à la section 7.5. Nous commençons par vérifier l'absence de tendance entre les coefficients de chaque colonne et les années de survenance.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
2010	1,1218	1,0024	1,0003	1,0000	1, 0001	1,0000
2011	1,1447	1,0027	1,0001	1,0001	1,0000	
2012	1,1236	1,0027	1,0000	1,0002		
2013	1,1574	1,0029	1,0002			
2014	1,1116	1,0021				
2015	1,0984					

Tableau 12.3 – Triangle des facteurs de développement

La tableau 12.3 présente les coefficients de passage individuels en j et $j+1$. Au vu de la profondeur de notre triangle, nous ne vérifions l'absence de tendance que pour la première colonne.

```
Call:
lm(formula = Y_1 ~ X_1)

Residuals:
    2010     2011     2012     2013     2014     2015 
-0.017467  0.010637 -0.005282  0.033753 -0.006874 -0.014767 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  11.620640   10.348130   1.123   0.324
X_1          -0.005215    0.005142  -1.014   0.368

Residual standard error: 0.02151 on 4 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.2045,    Adjusted R-squared:  0.005661 
F-statistic: 1.028 on 1 and 4 DF,  p-value: 0.3679
```

FIGURE 12.5 – Test de tendance sur les coefficients de passage

La figure 12.5 présente le résultat de la régression des coefficients de passage sur les années de survenances. Au regard de la p -value de *l'intercept* (0,324) et celle du coefficient sur les années de survenance (0,368), nous acceptons l'absence de tendance entre les coefficients de passage et les années de survenance.

Il est question par la suite de vérifier l'absence de corrélation entre deux vecteurs de coefficients de passage. Pour cela, nous calculons le coefficient de corrélation linéaire entre deux vecteurs et mesurons sa significativité.

```

Pearson's product-moment correlation

data: x2 and y2
t = 1.1789, df = 3, p-value = 0.3234
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.6346535  0.9655925
sample estimates:
cor
0.5626716

```

FIGURE 12.6 – Test de d'absence d'autocorrélation entre coefficients

La figure 12.6 présente le test de corrélation de *Pearson* entre deux vecteurs de coefficients. Au regard de la *p-value* du test (0.323), notre coefficient de corrélation $\rho = 0.56$ entre ces deux vecteurs n'est pas significatif. Nous acceptons donc l'hypothèse d'absence d'autocorrélation entre les vecteurs de coefficients de passage.

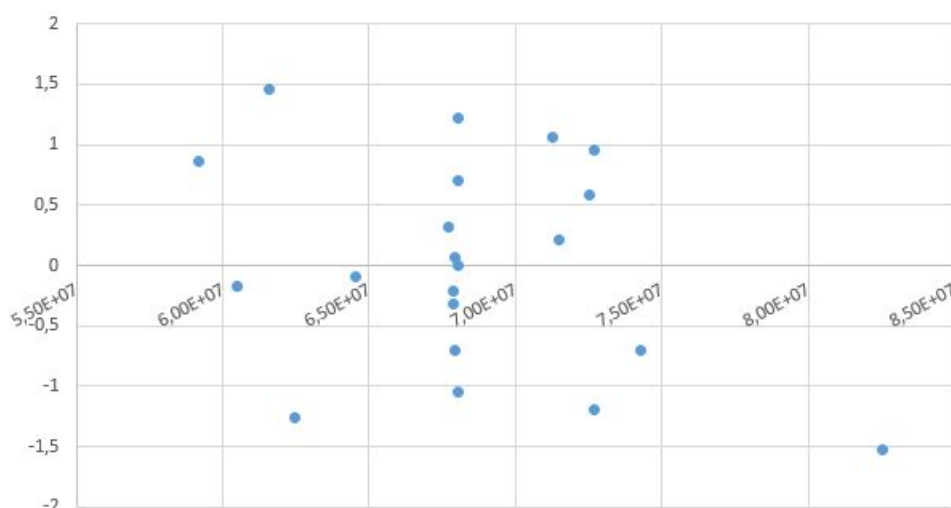
Existence des facteurs de variance

Le triangle ci-dessous nous présentes les résidus $r_{i,j}$. Le graphiques des $r_{i,j}$ en fonction des $C_{i,j}$ nous permettra de déceler si les résidus ont une tendance aléatoire. Si tel est le cas, alors nous validerons l'hypothèse d'existence des facteurs de variance.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5
2010	-0,1709	-0,3213	1,2209	-1,0456	0,7068	0
2011	0,8622	0,3167	-0,2090	0,06355	-0,7075	
2012	- 0,09398	0,5886	-1,1915	0,95013		
2013	1,4629	1,0557	0,2144			
2014	-0,7077	-1,5282				
2015	-1,2560					

Tableau 12.4 – Triangle des résidus

Sur le graphique ci-dessous, les résidus ne semblent présenter aucune tendance. Ainsi, l'hypothèse d'existence de facteurs variance est validée.

FIGURE 12.7 – Présentation des $r_{i,j}$ en fonction des $C_{i,j}$

Puisque les trois hypothèses sont validées, nous allons appliquer la méthode de Merz-Wüthrich avec une réserve, au vu de la faible taille de notre échantillon.

Les résultats de cette section ont permis de valider les hypothèses sous-jacentes aux méthodes de calibrage des USP pour le risque de réserves à l'aide de la méthode Merz-Wüthrich. Ainsi, l'application des deux méthodes basées sur le provisionnement *Chain Ladder* va être effectuée dans la suite de ce chapitre. Par ailleurs, les résultats des méthodes log-normale et moindres carrés ne sont pas concluants, car le test de modèle pour la régression linéaire entre R_j et V_j est rejeté.

Nous allons néanmoins calculer les paramètres spécifiques avec toutes les méthodes à titre d'illustration. En matière de calibrage des paramètres spécifiques, le résultat de la méthode de Merz-Wüthrich pourra être retenu, puisque les hypothèses ont pu être vérifiées. .

12.2 Résultats pour le risque de réserves

A partir des données présentées à la section 12.1, nous avons calibré les paramètres spécifiques présentés ci-après. Les écarts-types finaux (σ_{final}) obtenus ci-dessous résultent de la pondération des écarts-types USP par le facteur de crédibilité de 51% pour les méthodes log-normale et moindres carrés, et de 67% pour les méthodes de Merz-Wüthrich. En effet, nous retenons seulement 6 ans d'historique pour les méthodes log-normales et moindres carrés car nous ne disposons pas des provisions d'ouverture pour l'année 2010.

Méthode	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
Log-normale	5%	20,91%	13,12%
Moindres carrés	5%	21,2%	13,27%
Merz-Wüthrich avec provisions Chain Ladder	5%	23,41%	17,34%
Merz-Wüthrich avec provisions comptables	5%	17,69%	13,50%

Tableau 12.5 – Risque de réserves : Ecart-types calibrés pour le LoB santé

A partir de ces résultats, il est observé que les écart-types finaux obtenus pour le risque de réserves sont environ trois fois plus grands que l'écart-type standard pour la LoB santé.

Cet écart avec la volatilité standard était attendu pour les méthodes log-normale et moindres carrés car leurs hypothèses n'ont pas pu être vérifiées. En effet, la relation de proportionnalité, entre le provisions de début d'année et la somme entre les provisions de fin d'année et les sinistres réglés en cours d'année au titre des survenances antérieures est une des modalités de calibrage du paramètre standard du risque de réserves. Il faut noter que nous ne disposons que de 6 années pour appliquer les méthodes log-normale et moindres carrés. Ceci explique pourquoi les estimateurs qui en résultent baissent de manière significative après application du facteur de crédibilité.

En outre, la méthode de Merz-Wuthrich avec provisions comptables donne un meilleur résultat car les provisions comptables sont plus élevées que celles obtenues à l'aide d'un *Chain Ladder* sur 7ans.

Les paramètres spécifiques calculés pour le risque de réserves nets de réassurance étant largement au dessus de l'écart-type standard, nous effectuerons des tests des sensibilités pour essayer de trouver des potentielles sources de biais.

12.3 Tests de sensibilités

Nos tests de sensibilités sont effectués uniquement pour le calibrage des USP à l'aide des méthodes réglementaires.

1) Sensibilité au nombre d'années d'historique

Résultats pour la méthode log-normale

Puisque nous disposons de données pour 6 années pour la méthode log-normale, nous calibrons également les USP sur des sous-ensembles de 5 années consécutives.

Nombre d'années	Facteur de crédibilité	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
6 ans	51%	5%	20,91%	13,12%
5 dernières années	34%	5%	21,90%	10,75%
5 premières années	34%	5%	12,30%	7,48%

Tableau 12.6 – Risque de réserves : Sensibilité au nombre d'années pour la méthode log-normale

Nous remarquons que les écart-types obtenus sont tous au-dessus de l'écart-type standard. Nous observons également que la dernière année augmente d'environ 9 points le paramètre spécifique obtenu.

Résultats pour la méthode de Merz-Wüthrich

Nous disposons d'un historique de 7 ans, ainsi nous pouvons étudier la sensibilité pour des sous-ensembles de 5 et 6 années consécutives.

Nombre d'années	Facteur de crédibilité	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
7 ans	67%	5%	23,41%	17,34%
6 dernières années	51%	5%	25,99%	15,71%
5 dernières années	34%	5%	28,11%	12,86%
6 premières années	51%	5%	19,54%	12,42%
5 premières années	34%	5%	15,80%	8,67%

Tableau 12.7 – Risque de réserves : Sensibilité au nombre d'années pour la méthode de Merz-Wüthrich

Il est constaté que les écart-types calibrés sont tous au-dessus de 5%. De plus, nous remarquons que les premières années sont moins volatiles que les dernières années. En outre, le facteur de crédibilité permet d'atténuer l'écart-type pour les années les plus volatiles et d'améliorer l'écart-type final pour les années les moins volatiles.

Cette étude de sensibilité sur le nombre d'années d'historique permet de montrer qu'une partie du biais est contenu dans les dernières années comptables.

2) Sensibilité sur la réassurance

Méthode	Type de réassurance	$\sigma_{standard}$	σ_{USP}	σ_{final}
Log-normale	Réassurance actuelle	5%	20,91%	13,12%
	Sans réassurance	5%	14,23%	9,70%
Merz-Wüthrich	Réassurance actuelle	5%	23,41%	17,34%
	Sans réassurance	5%	13,53%	10,72%

Tableau 12.8 – Risque de réserves : Sensibilités des écarts-types calibrés à la réassurance

Les résultats du tableau ci-avant montrent qu'avec et sans réassurance, nous obtenons des écarts-types supérieurs à 5% et que l'application de la réassurance augmente la volatilité de la liquidation des provisions. Le changement de plan de réassurance en 2015, pourrait en partie expliquer le biais engendré par la réassurance. Ce changement de plan de réassurance conforte la conclusion du test précédent selon laquelle les deux dernières années apportent un biais à l'évolution des provisions nettes de réassurance. Cependant, la réassurance seule ne suffit pas à expliquer cette forte volatilité du risque de provisionnement.

Cette étude de permet de montrer la volatilité significative du risque de provisionnement. Ces résultats soulèvent des questions concernant :

- le comportement du portefeuille dans le temps,
- la qualité des données,
- la robustesse des tests statistiques effectuées.

Comportement du portefeuille dans le temps : L'évolution des cotisations acquises, des prestations et des provisions par année comptable dans temps est présentée sur le graphique ci-après.

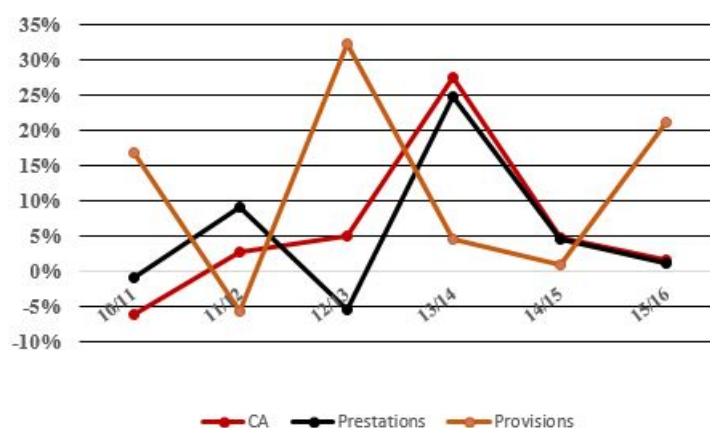


FIGURE 12.8 – Évolution du chiffre d'affaires, des prestations et des PSAP dans le temps

Cette évolution concerne les volumes bruts de réassurance. Nous pouvons remarquer que l'évolution des PSAP n'est pas en phase avec l'évolution du chiffre d'affaires et des prestations. Ceci montre que le pilotage du risque de réserves de cette mutuelle jusqu'ici n'est pas effectué de manière efficace.

Qualité des données : Pour calibrer les paramètres spécifiques à l'aide de la méthode de Merz-Wüthrich, il était observé que l'écart à la maille année comptable entre les volumes de prestations issus des comptes de résultats techniques et ceux provenant du

système de gestion (cf figure 9.2) était de maximum 2%, que nous avons supposé acceptable. Le résultat de notre calibrage remet en question cette hypothèse. Il se pourrait que la base de données utilisée ne rende pas compte du comportement réel du portefeuille. Ceci remet donc les méthodes d'alimentation de cette base de données.

Robustesse des tests statistiques : Le calibrage des paramètres spécifiques à l'aide de la méthode de Merz-Wüthrich remet en cause les résultats des tests statistiques effectués. En effet, nous avons pu vérifier toutes les hypothèses sous-jacentes à cette méthode. Cependant, les résultats obtenus avec cette méthode sont moins concluants que ceux de la méthode log-normale. Ceci permet de voir ce qui a été rappelé tout au long de ce mémoire, à savoir que les résultats de tests statistiques effectués sur un échantillon de données faible ne permet pas de conclure sur la validité du résultat.

12.4 Impact des USP du risque de réserves sur le SCR

Méthode	σ_R	$\sigma_{P\&R}$	SCR(K€)	variation(K€)
Formule standard	5%	5%	13 490	
log-normale	13,12%	5,33%	15 159	1 669
Merz-Wüthrich	17,34%	5,67%	16 124	2 634

Tableau 12.9 – Impact des USP réserves sur le SCR

Ces résultats montrent que le risque de réserves a un impact faible sur le SCR primes et réserves calculé à l'aide de la formule standard. Comme mentionné au chapitre précédent, le volume de primes étant plus conséquent que le volume de réserves, la formule standard néglige fortement la volatilité du risque de réserves. L'adoption des USP pour le risque de réserves ne permettra pas de rendre compte de la forte volatilité du risque de réserves.

12.5 Conclusion sur le risque de réserves

L'analyse du risque de réserves du portefeuille santé étudié a permis de souligner les points suivants :

- Dans le cadre de l'ORSA, la validation des hypothèses sous-jacentes au calibrage de l'écart-type standard du risque de primes est partielle. En effet, nous avons pu montrer que les ratios d'écoulement suivent une loi normale. Cependant, les ratios de liquidation ne sont pas stables dans le temps. Cette instabilité est confortée par les paramètres spécifiques obtenus. Ceci est donc une alerte pour la mutuelle, car l'utilisation de la formule standard pour calculer le SCR primes et réserves ne rend

pas assez compte du risque de réserves de cette entreprise. Un pilotage plus rigoureux de ce risque s'avère donc nécessaire.

- Le calibrage des USP pour le risque de réserves nous permet d'observer que le paramètre standard de 5% sous-estime le risque de réserve de ce portefeuille. Cependant l'impact sur le SCR étant faible, l'adoption des USP n'est pas conseillée et ne permettra pas de capter suffisamment le risque de réserves de cette entreprise. "
- L'échantillon de données utilisé pour calibrer ce risque est de petite taille. Il sera pertinent de réaliser cette étude avec un historique plus profond où en ayant recours à des données externes sous réserve que celles-ci respectent les exigences réglementaires en matière de qualité des données.

Conclusion

Les écarts-types fournis par l'EIOPA pour le calcul du SCR primes et réserves à l'aide de la formule standard ont été calibrés sur le marché européen. L'utilisation des USP est un moyen approprié pour évaluer l'adéquation du profil de risque d'une entreprise avec les hypothèses qui sous-tendent la formule standard du SCR primes et réserves. Notre étude a permis de challenger ces hypothèses sur le portefeuille santé de la mutuelle sous revue.

L'utilisation des données du portefeuille concerné a permis de montrer que le risque de primes en santé non-vie pour cette mutuelle vérifie les hypothèses qui sous-tendent le calibrage de la formule standard. En effet, le ratio de sinistralité est relativement stable dans le temps. Il a également été démontré que la distribution de la sinistralité suit une loi log-normale et que la charge de sinistre totale est proportionnelle aux primes acquises. De plus, le paramètre spécifique obtenu au titre du risque de primes est légèrement inférieur à celui calibré à l'échelle du marché européen (4,81% contre 5%). Ceci conforte l'utilisation de la formule standard au sein de cette mutuelle.

En ce qui concerne le risque de réserves, il a été constaté que le ratio de liquidation était instable dans le temps. Par ailleurs, les hypothèses relatives au risque de réserves utilisées pour calibrer les paramètres de la formule standard ne sont pas vérifiées. L'écart-type du risque de réserves déterminé est plus élevé que celui fixé dans les actes délégués (17,34% contre 5%).

Les paramètres spécifiques obtenus permettent donc d'avoir une vision réelle du risque de l'entreprise. Cependant, l'impact sur le SCR primes et réserves est faible car l'écart-type global passe de 4,74% (écart-type standard global sur ce portefeuille) à 5,17%. Ceci est lié au fait que le volume de primes représente environ 89% du volume de primes et réserves. En effet, la formule standard du SCR primes et réserves consiste à agréger les écarts-types de primes et de réserves en les pondérant par leurs volumes respectifs. Ainsi, la forte volatilité du risque de réserves est neutralisée par le poids conséquent du risque de primes qui a une faible volatilité. Par ailleurs, à ce jour, si l'ACPR autorise l'adoption des USP calibrés, ils engendreraient une hausse du SCR d'environ 16% soit 2,2M €. Au vu de l'impact significatif du risque de primes sur le SCR primes et réserves et de la forte volatilité du risque de réserves, un suivi périodique de ce sous-module par la mise en place d'indicateurs s'avère donc nécessaire pour un meilleur pilotage de la mutuelle.

Cette étude a permis de mettre en évidence certaines limites. Au vu des données à disposition, les retraitements réalisés pour calibrer nos USP sont basés sur des hypothèses simplificatrices comme le choix d'utiliser les provisions sociales au lieu des provisions *Best Estimate* comme assiette de provisions. Un test de sensibilité sur cette hypothèse pourrait être réalisé en utilisant les méthodes proposées au chapitre 8. En outre, au vu de l'historique de données limité, les tests statistiques ne permettent pas de vérifier les hypothèses de manière robuste. En effet, nous ne pouvons pas assurer la convergence des estimateurs utilisés dans nos tests statistiques. La petite taille de l'échantillon rend les résultats très sensibles à l'ajout ou au retrait d'une année dans l'historique. La reconstruction de l'historique de données du portefeuille s'avérant difficile, l'utilisation de sources externes de données peut être envisagée.

Bibliographie

- [1] **EIOPA (Décembre 2011)** - Calibration of the Premium and Reserve Risk Factors in the Standard Formula of Solvency II
 - [2] **EIOPA (Septembre 2013)** - Orientations relatives à l'évaluation prospective des risques propres (basée sur les risques de l'ORSA)
 - [3] **EIOPA (Juillet 2014)** - The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation
 - [4] **Journal Officiel de la Commission Européenne (Décembre 2009)** - Directive 2009/138/CE du parlement Européen et du conseil du 25 novembre 2009 (Solvabilité II)
 - [5] **Journal Officiel de la Commission Européenne (Janvier 2015)** - Règlement délégué UE 2015/38
 - [6] **Michael Merz, Mario Wüthrich et Natalia Lysenko (2008)** - Uncertainty of the Claims Development Result in the Chain Ladder Method
 - [7] **Michael Merz et Mario Wüthrich (2008)** - Modelling the claims development result for Solvency purpose
 - [8] **Cindy MULLER (2016)** - Utilisation des USP dans le cadre de l'ORSA pour une mutuelle de santé, Mémoire d'actuaire, Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg
 - [9] **Hersent M. (2013)** - Modélisation du risque de prime sous Solvabilité II, Mémoire d'actuaire, Dauphine/Deloitte
 - [10] **Marie BENIER (2014)** - Évaluation des besoins en fonds propres dans le cadre de Solvabilité II : utilisation de paramètres spécifiques au sein de la formule standard, Mémoire d'actuaire, Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA)
 - [11] **Fabien BESSEYRE (2015)** - Le calibrage des « Undertaking Specific Parameters » en prévoyance, Mémoire d'actuaire, Centre d'Etudes Actuarielles (CEA).
 - [12] **Shapiro S.S. et Wilk M.B. (1965)** - An analysis of variance test for normality. Biometrika, Volume 52, Issue 3-4
-

Glossaire

BSCR (*Basic Solvency Capital Requirement*) C'est le capital de solvabilité requis de base exigé par Solvabilité 2 . 10

EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*) C'est l'autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles réunissant à l'échelle européenne les organismes de contrôle nationaux. 20

ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) C'est un processus interne d'évaluation des risques et de la solvabilité mis en place par chaque entreprise d'assurance. Il doit illustrer la capacité de l'organisme ou du groupe à identifier, mesurer et gérer les éléments de nature à modifier sa solvabilité ou sa situation financière. 7

QIS5 (*Quantitative Impact Studies*) Ce sont des études quantitatives d'impact réalisées par l'EIOPA. L'objectif du QIS5 était de définir l'impact de Solvabilité II sur le bilan des entreprises et de vérifier la cohérence des propositions faites face aux objectifs visés. . 7

SCR (*Solvency Capital Requirement*) C'est le capital de solvabilité requis exigé par Solvabilité 2. 7

Liste des tableaux

1.1	Décomposition du chiffre d'affaires et des provisions techniques bruts de réassurance en fonction des lignes d'activité	9
2.1	Volatilités standards de primes et de réserves en santé non SLT	15
4.1	Facteurs de crédibilité pour la branche santé non-vie	24
4.2	Liste des Méthodes de Calibrage des USP	25
6.1	Notations pour la méthode Log-Normale - risque de primes	30
6.2	Notations pour la méthode log-normale simplifiée - risque de primes	32
6.3	Notations pour la méthode des moindres carrés - risque de primes	34
6.4	Hypothèses de calibrage du risque de primes	36
7.1	Notations pour la méthode Log-Normale - risque de réserves	41
7.2	Notations pour la méthode des moindres carrés - risque de réserves	42
7.3	Notations pour la méthode de Merz-Wüthrich - risque de réserves	44
7.4	Hypothèses de calibrage du risque de réserves	46
9.1	Données santé brutes de réassurance en K€	55
9.2	Quote-parts de réassurance de la survenance N pour le risque de primes	56
9.3	Triangle de prestations brutes de réassurance en K€	57
9.4	Comparaison des prestations des trois premières années de développement en fonction des prestations de l'année comptable brutes de réassurance en K€	57
9.5	Triangle de provisions brutes de réassurance en K€	58
9.6	Triangle des quotes-parts moyennes	58
11.1	Données finales brutes de réassurance pour le risque de primes	64
11.2	Données finales nettes de réassurance pour le risque de primes	67
11.3	Risque de primes : Ecart-types calibrés bruts de réassurance	70
11.4	Risque de primes : Ecart-types calibrés nets de réassurance	70
11.5	Risque de primes : Sensibilités de USP « bruts » à l'historique	71
11.6	Risque de primes : Sensibilités de USP « nets » à l'historique	71
11.7	Risque de primes : Sensibilités des USP « nets » à la réassurance	72
11.8	Impact des USP primes sur le SCR primes et réserves	72
12.1	Données retraitées pour la méthode log-normal du risque de réserves	75

12.2 Triangle de prestations cumulées nettes de réassurance en K€	77
12.3 Triangle des facteurs de développement	78
12.4 Triangle des résidus	79
12.5 Risque de réserves : Ecarts-types calibrés pour le LoB santé	81
12.6 Risque de réserves : Sensibilité au nombre d'années pour la méthode log- normale	82
12.7 Risque de réserves : Sensibilité au nombre d'années pour la méthode de Merz-Wüthrich	82
12.8 Risque de réserves : Sensibilités des ecarts-types calibrés à la réassurance .	82
12.9 Impact des USP réserves sur le SCR	84
12.10 Table des coefficients a_i pour $2 \leq n \leq 30$	93
12.11 Table des valeurs seuil de W pour $3 \leq n \leq 30$	94

Annexes

Test de Shapiro-Wilk

Le test de Shapiro-Wilk fait parti des tests de normalité les plus utilisés. En comparaison aux autres tests, il est particulièrement efficace pour les petits effectifs ($n \leq 50$). Il est basé sur la statistique W qui s'écrit :

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_i (x_{(n-i+1)} - x_{(i)}) \right)^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

où :

- $x_{(i)}$ correspond à la série triée
- $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ est la partie entière du rapport $\frac{n}{2}$
- a_i sont des constantes générées à partir de la moyenne et de la matrice de variance co-variance des quantiles d'un échantillon de taille n suivant la loi normale. Ces constantes sont fournies dans des tables spécifiques (cf. table 12.10).

La statistique W peut donc être interprétée comme le coefficient de détermination R^2 entre la série des quantiles générées à partir de la loi normale et les quantiles empiriques obtenues à partir des données.

L'hypothèse H_0 de normalité est vérifiée quand la valeur de W est supérieur à la valeur seuil W_{crit} . Les valeurs seuils W_{crit} pour différents risques α et effectifs n sont lues dans la table de Shapiro-Wilk (cf. table 12.11 ci-dessous).

Ainsi,

- Si $W > W_{crit}$, on accepte l'hypothèse de normalité de la série de mesure, au risque choisi α .
 - Si $W < W_{crit}$, on rejette l'hypothèse de normalité de la série de mesure, au risque choisi α .
-

$\begin{smallmatrix} n \\ \backslash i \end{smallmatrix}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0,7071	0,7071	0,6872	0,6646	0,6431	0,6233	0,6052	0,5888	0,5739	
2		0	0,1677	0,2413	0,2806	0,3031	0,3164	0,3244	0,3291	
3				0	0,0875	0,1401	0,1743	0,1976	0,2141	
4						0	0,0561	0,0947	0,1224	
5								0	0,0399	

$\begin{smallmatrix} n \\ \backslash i \end{smallmatrix}$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0,5601	0,5475	0,5359	0,5251	0,515	0,5056	0,4963	0,4886	0,4808	0,4734
2	0,3315	0,3325	0,3325	0,3318	0,3306	0,329	0,3273	0,3253	0,3232	0,3211
3	0,226	0,2347	0,2412	0,246	0,2495	0,2521	0,254	0,2553	0,2561	0,2565
4	0,1429	0,1586	0,1707	0,1802	0,1878	0,1939	0,1988	0,2027	0,2059	0,2085
5	0,0695	0,0922	0,1099	0,124	0,1353	0,1447	0,1524	0,1587	0,1641	0,1686
6	0	0,0303	0,0539	0,0727	0,088	0,1005	0,1109	0,1197	0,1271	0,1334
7			0	0,024	0,0433	0,0593	0,0725	0,0837	0,0932	0,1013
8					0	0,0196	0,0359	0,0496	0,0612	0,0711
9							0	0,0163	0,0303	0,0422
10									0	0,014

$\begin{smallmatrix} n \\ \backslash i \end{smallmatrix}$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0,4643	0,459	0,4542	0,4493	0,445	0,4407	0,4366	0,4328	0,4291	0,4254
2	0,3185	0,3156	0,3126	0,3098	0,3069	0,3043	0,3018	0,2992	0,2968	0,2944
3	0,2578	0,2571	0,2563	0,2554	0,2543	0,2533	0,2522	0,251	0,2499	0,2487
4	0,2119	0,2131	0,2139	0,2145	0,2148	0,2151	0,2152	0,2151	0,215	0,2148
5	0,1736	0,1764	0,1787	0,1807	0,1822	0,1836	0,1848	0,1857	0,1864	0,187
6	0,1399	0,1443	0,148	0,1512	0,1539	0,1563	0,1584	0,1601	0,1616	0,163
7	0,1092	0,115	0,1201	0,1245	0,1283	0,1316	0,1346	0,1372	0,1395	0,1415
8	0,0804	0,0878	0,0941	0,0997	0,1046	0,1089	0,1128	0,1162	0,1192	0,1219
9	0,053	0,0618	0,0696	0,0764	0,0823	0,0876	0,0923	0,0965	0,1002	0,1036
10	0,0263	0,0368	0,0459	0,0539	0,061	0,0672	0,0728	0,0778	0,0822	0,0862
11	0	0,0122	0,0228	0,0321	0,0403	0,0476	0,054	0,0598	0,065	0,0697
12			0	0,0107	0,02	0,0284	0,0358	0,0424	0,0483	0,0537
13					0	0,0094	0,0178	0,0253	0,032	0,0381
14							0	0,0084	0,0159	0,0227
15									0	0,0076

Tableau 12.10 – Table des coefficients a_i pour $2 \leq n \leq 30$

n	$W_{5\%}$	$W_{1\%}$
3	0,767	0,753
4	0,748	0,687
5	0,762	0,686
6	0,788	0,713
7	0,803	0,73
8	0,818	0,749
9	0,829	0,764
10	0,842	0,781
11	0,85	0,792
12	0,859	0,805
13	0,856	0,814
14	0,874	0,825
15	0,881	0,835
16	0,837	0,844
17	0,892	0,851
18	0,897	0,858
19	0,901	0,863
20	0,905	0,868
21	0,908	0,873
22	0,911	0,878
23	0,914	0,881
24	0,916	0,884
25	0,918	0,888
26	0,92	0,891
27	0,923	0,894
28	0,924	0,896
29	0,926	0,898
30	0,927	0,9

Tableau 12.11 – Table des valeurs seuil de W pour $3 \leq n \leq 30$