

**Mémoire présenté le :**

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : DONDJIO KENFACK Carnot

Titre Sensibilité du passif à l'inflation en assurance non-vie

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membre présents du jury de l'Institut  
des Actuaires*

signature

*Entreprise : MACSF*

Nom :

Signature :

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Nom :

Signature :

*Invité :*

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

# Table des matières

<b>Resumé</b>	<b>8</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Dédicaces</b>	<b>10</b>
<b>Remerciements</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>12</b>
<b>1 Généralités sur l'inflation</b>	<b>15</b>
1.1 Les causes de l'inflation . . . . .	16
1.2 La mesure de l'inflation . . . . .	17
1.2.1 L'indice des prix . . . . .	17
1.2.2 Les limites de l'indice du prix à la consommation . . . . .	18
1.3 Inflation en assurances non-vie (inflation spécifique) . . . . .	19
1.3.1 Inflation superposée . . . . .	19
1.3.2 Définition et causes de l'inflation assurantielle . . . . .	20
<b>2 Présentation des données</b>	<b>22</b>
2.1 Qualité de données . . . . .	22
2.2 Statistiques descriptives . . . . .	23
2.2.1 Statistiques descriptives des sinistres ouverts . . . . .	23
2.2.2 Statistiques descriptives des règlements . . . . .	25
2.3 Conclusion . . . . .	27
<b>3 Méthodes classiques de provisionnement</b>	<b>28</b>
3.1 Notations et motivations . . . . .	28
3.1.1 Les triangles de run-off . . . . .	28
3.2 Méthode déterministe . . . . .	30
3.2.1 La méthode de Chain Ladder . . . . .	31
3.2.2 Vérification de l'hypothèse d'indépendance entre les années de survenance . . . . .	31
3.2.3 Application . . . . .	33
3.3 Méthodes stochastiques . . . . .	37
3.3.1 La méthode de Mack . . . . .	37
3.3.2 Application . . . . .	39

3.4	Méthode bootstrap . . . . .	40
3.4.1	Les étapes de la méthode bootstrap . . . . .	41
3.4.2	Application . . . . .	42
3.5	Conclusion . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Modélisation de l'inflation</b> . . . . .	<b>45</b>
4.1	Mesure de l'inflation . . . . .	45
4.1.1	Description de la méthode de séparation de Verbeek-Taylor . . . . .	46
4.1.2	Méthodologie . . . . .	48
4.2	Illustration : Application sur le portefeuille de responsabilité civile automobile . . . . .	48
4.2.1	Application . . . . .	48
4.3	Version stochastique du modèle de Verbeek non paramétrique . . . . .	52
4.4	Méthode stochastique paramétrique du modèle de Verbeek . . . . .	53
4.4.1	Description de la méthode . . . . .	54
4.4.2	Mise en place de la méthode . . . . .	54
4.5	Discussion . . . . .	55
4.6	Conclusion . . . . .	57
<b>5</b>	<b>Évaluation des provisions avec prise en compte de l'inflation</b> . . . . .	<b>58</b>
5.1	Description du modèle de Vasicek . . . . .	58
5.2	Évaluation des provisions . . . . .	60
5.2.1	Description des modèles . . . . .	61
5.3	Conclusion . . . . .	76
	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>77</b>

# Liste des tableaux

3.1	Triangle de paiements incrémentaux . . . . .	29
3.2	Triangle de paiements cumulés . . . . .	29
3.3	Exemple de triangle des paiements incrémentaux . . . . .	30
3.4	Exemple de triangle de paiements cumulés . . . . .	30
3.5	D-triangle des sinistres ouverts . . . . .	34
3.6	UP-Down . . . . .	35
3.7	Vérification de l'hypothèse 2 du modèle de Chain Ladder . . . . .	35
3.8	Facteurs de développement du modèle de Chain Ladder . . . . .	36
3.9	Tardifs sinistres ouverts . . . . .	36
3.10	Tardifs des sinistres ouverts estimés avec le modèle de Mack . . . . .	40
3.11	IBNR estimés avec le modèle de Mack . . . . .	40
3.12	Paiements estimés avec la méthode bootstrap . . . . .	42
4.1	Historique des sinistres ouverts . . . . .	46
4.2	Triangle des paiements incrémentaux . . . . .	46
4.3	Triangle standardisé des paiements . . . . .	47
4.4	Inflation historique estimée . . . . .	49
4.5	Courbe de Taux d'inflation (IPC source : INSEE) . . . . .	50
4.6	Inflation historique estimée (euro constant 2017) . . . . .	51
5.1	Paramètres estimés du modèle de Vasicek . . . . .	60
5.2	Vérification de l'indépendance des années de survenance . . . . .	63
5.3	Facteurs de développement . . . . .	63
5.4	PSAP estimées par le modèle 1 . . . . .	65
5.5	Modèle 2 : vérification de l'hypothèse d'indépendance des années de survenance . . . . .	67
5.6	Modèle 2 évaluation du Passif . . . . .	68
5.7	Modèle 3 évaluation du Passif . . . . .	70
5.8	Écart entre différentes provisions en fonction du nombre de simulations . . . . .	71
5.9	Modèle 3 évaluation du Passif . . . . .	72
5.10	Intervalle de confiance à 95% . . . . .	74
5.11	Quantiles . . . . .	74
5.12	Synthèse des résultats . . . . .	75

# Table des figures

1.1	La désinflation en France . . . . .	16
1.2	La relation entre l'offre et la demande . . . . .	16
1.3	Variation de l'IPC de 1990 à 2017 (source : données INSEE) . . . . .	18
1.4	Vie d'un sinistre . . . . .	19
2.1	Complétude des sinistres . . . . .	22
2.2	Complétude des règlements . . . . .	23
2.3	Évolution des sinistres ouverts par année de survenance . . . . .	23
2.4	Évolution des sinistres ouverts par année d'inventaire . . . . .	24
2.5	Répartition des sinistres corporels et matériels . . . . .	24
2.6	Évolution des sinistres corporels par année de survenance . . . . .	25
2.7	Évolution des sinistres matériels par année d'inventaire . . . . .	25
2.8	Répartition des règlements des sinistres par année d'inventaire . . . . .	25
2.9	Évolution des règlements des sinistres par année d'inventaire (par branche) . . . . .	26
2.10	Évolution des règlements des sinistres par année d'inventaire (sur l'en- semble du portefeuille) . . . . .	26
3.1	C-C plot des sinistres ouverts pour $j=0$ . . . . .	33
3.2	C-C plot des sinistres ouverts pour $j=1$ . . . . .	34
3.3	Évolution des facteurs de développement du modèle de Chain Ladder . . . . .	35
3.4	Résultats graphiques du modèle de Mack . . . . .	39
3.5	Résultat graphique de la méthode bootstrap sur le triangle de paiements . . . . .	43
3.6	Fonctions de répartition cumulées des paiements . . . . .	44
4.1	Triangle standardisé construit . . . . .	49
4.2	Paramètres estimés du modèle de Verbeek . . . . .	49
4.3	Courbe de l'inflation historique estimée . . . . .	49
4.4	Triangle standardisé construit (euro constant 2017) . . . . .	51
4.5	Paramètres estimés du modèle de Verbeek (euro constant 2017) . . . . .	51
4.6	Courbe de taux en euro constant 2017 . . . . .	51
4.7	Courbe de taux estimés(modèle de Verbeek non paramétrique) . . . . .	53
4.8	Comparaison des différentes approches d'estimation de l'inflation par année d'inventaire . . . . .	56
5.1	Courbe d'inflation future et intervalle de confiance . . . . .	60
5.2	Représentation graphique du modèle 1 . . . . .	61
5.3	Vérification de hypothèse 1 (C-C plot pour $j=0$ ) . . . . .	62

5.4	Vérification de hypothèse 1 (C-C plot pour $j=1$ )	62
5.5	Évolution des facteurs de développement	63
5.6	Résultat du modèle de Mack	64
5.7	Représentation graphique du modèle 2	66
5.8	Représentation graphique du modèle 3	69
5.9	Sensibilité des PSAP par rapport au nombre de simulations	71
5.10	Distribution des PSAP	73
5.11	Fonctions de répartition cumulées (théorique et estimée) des PSAP	74

# Resumé

L'objectif de notre travail s'inscrit dans le cadre de Solvabilité 2 qui demande une prise en compte de l'inflation dans l'évaluation des réserves d'une part et d'autre part, de montrer l'impact que peut avoir l'inflation dans l'évaluation du Best Estimate. Le risque d'inflation s'avère donc pertinent pour les assureurs non-vie car elle peut avoir un impact sur l'actif et le passif.

Dans notre étude, nous nous limitons à un portefeuille de responsabilité civile automobile de la MACSF (Mutuelle d'Assurances du Corps de Santé Français). Toutefois, l'étude menée peut s'étendre à d'autres branches (la responsabilité civile professionnelle médicale, ...). Dans ce mémoire, nous proposons une alternative aux méthodes classiques (Chain Ladder, Mack, Munich Chain, ...) qui reposent sur l'hypothèse selon laquelle l'inflation observée dans l'historique s'étend dans le futur.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la modélisation de l'inflation dans notre portefeuille via la méthode de séparation de Verbeek-Taylor. Cette méthode fut introduite dans la littérature au cours des années 1972 par Verbeek [10]. Dans un second temps, nous estimons l'inflation future via un modèle de taux, ce qui nous permet de déduire l'estimation des réserves et une étude empirique de celles-ci [2].

Nos résultats permettent d'exhiber l'impact de la prise en compte de l'inflation sur le montant de réserves. Ils nous permettent de conclure que l'inflation spécifique observée dans un portefeuille est liée à la ligne d'activité de l'assureur et de la compagnie d'assurance.

**Mots clés :** *Actifs, Chain Ladder, Inflation, Provision, Passifs, Méthode de Mack, Méthode de séparation de Verbeek.*

# Abstract

The aim of our work follows the requirements of Solvency 2 which imposes that inflation should be included of valuation of provisions in one side in other side, we are showing the major impact of inflation on the calculation of provisions. Inflation risk is of high relevance in non-life insurers and can have an impact on asset and liability.

Our study is based on the automobile liability data provided by MACSF (La Mutuelle d'Assurances du Corps de Santé Français). However, our study can be extended in other line of business like medical liability, In this theses, we are trying to challenge the classical methods like Chain ladder, Mack and Munich Chain which consider that the inflation that we observe in run-off triangle should be extended in the future.

So, in the first time we are going to model the inflation using the separation method of Verbeek-Taylor which has been introduced in the literature since 1972 by Verbeek [10]. In the second time, we are going to estimate the future inflation, at the end we will have an estimation of our reserve and we will deduce the empirically study claims inflation as in [2].

Our results show that taking inflation into consideration in the valuation of claims reserving has a major impact on it, and also show the drivers of claim inflation depend on the line of business and the insurance company.

**Key words :** *Assets, Chain Ladder, Inflation, Provision, Method of Mack, Liabilities, separation method of Verbeek.*

# Dédicaces

Je dédie ce mémoire à mes parents, mes frères, ma grande famille de Fotetsa et d'Ako.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord, à remercier la MACSF qui m'a donné l'opportunité de faire partie de son équipe. Cela m'a permis d'accroître mes compétences et d'avoir une idée plus claire sur mon plan de carrière.

Ensuite, j'adresse mes remerciements à l'endroit de M. Jérôme DANNEQUIN et Mme. Houleye SOW pour leurs conseils, leurs implications qui ont été des éléments clefs pour mon intégration et ma progression.

Je tiens également à remercier M. Pierre RIBEREAU pour son suivi et accompagnement durant cette période d'alternance, mes amis Boris KOUEGOU, Florian SIMO, Lionel TADJOU et Patrick TIBUE pour leur encouragement.

Enfin, je souhaite remercier collègues de bureau ainsi que toute la direction technique de la MACSF qui ont rendu cette année spéciale.

# Introduction

Les assureurs de biens et/ou de responsabilités doivent constituer des réserves pour leurs branches courtes et longues (dans les lignes de responsabilité civile professionnelle par exemple) afin de pouvoir faire face à leurs engagements futurs. Ces réserves sont investies sur le marché des capitaux puis versées sur plusieurs années voire plusieurs décennies. Ainsi, pour un assureur non-vie, l'inflation associée aux branches longues représente une source majeure de risques et peut considérablement impacter sur l'estimation des provisions techniques aussi bien que sur les profits futurs de l'assureur [14]. La situation économique des assureurs dépend donc majoritairement de la relation entre taux d'intérêt et taux d'inflation.

Cet impact peut être substantiel, d'où l'intérêt de notre problématique à savoir : que pourrait être l'impact de l'inflation sur le passif d'un assureur IARD (Incendie Accidents et Risques Divers) ? Cette question a fait l'objet de plusieurs études dans la littérature. Toutefois, les connaissances approfondies sur l'impact de l'inflation dans le domaine des assurances multirisques sont rares. Cela pourrait changer à l'avenir au vu des exigences de Solvabilité 2 notamment en ce qui concerne :

- une prise en compte explicite de l'inflation dans l'estimation des provisions ;
- les risques importants qui doivent être pris en compte dans le cadre du processus ORSA (Own Risk Solvency Assessment).

Dans la pratique courante, l'inflation est souvent traitée rapidement en utilisant la méthode de Chain Ladder qui étend l'inflation historique dans le futur. Cela fonctionne certainement si nous sommes dans un environnement d'inflation plus ou moins constante. Cependant, que devient la méthode de Chain Ladder dans un environnement d'inflation instable ? Autrement dit, que devient la méthode de Chain Ladder lorsque l'inflation future s'écarte de manière significative de l'inflation historique ?

La Mutuelle d'Assurances du Corps de Santé Français (MACSF), leader sur le marché des assureurs français des professionnels de la santé est très sensible à l'inflation de part son statut d'assureur de responsabilité civile de professionnels de la santé. Outre les exigences de la norme prudentielle Solvabilité 2, l'étude de la sensibilité de l'inflation présente un enjeu important pour les assureurs de responsabilité civile en particulier la MACSF. Une bonne maîtrise de l'inflation permet à l'assureur de mieux manager son activité. Ainsi, une bonne compréhension des facteurs économiques contribuant à l'inflation pour différentes LoB (Line of Business) permet :

- de faire le distinguo entre l'inflation générale et « l'inflation assurantielle » ;
- de mieux modéliser l'inflation assurantielle et de mener une bonne étude de

son impact sur le montant des provisions.

Ces deux points sus-cités seront abordés dans ce mémoire.

Notre travail présente un double objectif :

- d'une part montrer que la méthode Chain Ladder n'est pas adéquate car elle est sensible à l'inflation (elle repose sur l'hypothèse selon laquelle l'inflation observée dans le passé s'étend dans le futur) ;
- d'autre part, proposer des solutions alternatives pour pallier aux limites des méthodes classiques (Chain Ladder, Mack, ...).

Nous étudions la sensibilité du passif à l'inflation en assurance non-vie sur la base des données de la MACSF. Nous nous intéressons uniquement aux provisions pour sinistre à payer (PSAP). Toutefois, il est possible d'étendre l'étude de l'effet de l'inflation sur les sinistres consolidés dont les versements s'effectuent sous forme de rente.

Dans la littérature, Verbeek (1972) proposa un modèle paramétrique d'estimation de l'inflation historique dans le but d'apporter une réponse aux limites des méthodes classiques. Une version plus générale du modèle de Verbeek fut introduite par Taylor (1977) [10]. Ce modèle peu connu est appelé la méthode de séparation de Verbeek-Taylor. Cummins et Powell (1980) démontrèrent également que les modèles économétriques (univariés et multivariés) qui prennent en compte les indices économiques dans le cadre du provisionnement non-vie sont plus précis que les modèles à tendance exponentielle. Wüthrich [14] via une approche bayésienne de Chain Ladder démontra l'effet des années calendaires sur la prédiction des réserves. Enfin, Björkwall et al. [1] introduisirent l'approche bootstrap de la méthode de séparation de Verbeek pour estimer les provisions sous l'hypothèse que les paiements incrémentaux suivent une loi Gamma ; Bohnert et al. (2016) [2] proposèrent une démarche qui permet de prendre en compte les facteurs économiques pour mieux modéliser l'inflation assurantielle future. Nous nous appuyons sur ces précédents résultats pour apporter une réponse aux limites présentées par le modèle de Chain Ladder. Nous allons principalement nous inspirer des travaux de Verbeek, de Björkwall et al. et les résultats récents de Bohnert et al. (2016).

Notre travail s'articule autour de trois parties organisées comme suit :

Une première partie, comportant trois chapitres qui traitent respectivement les généralités sur l'inflation, la description du portefeuille et les méthodes classiques de provisionnement.

Dans le premier chapitre, il est question de définir l'inflation économique, de présenter comment elle est mesurée et enfin montrer qu'il existe une différence entre cette inflation économique et l'inflation observée dans un triangle de règlements. Le second chapitre est dédié aux statistiques descriptives de notre portefeuille. Dans ce chapitre, nous dégageons des premières analyses quelques informations expliquant l'évolution des règlements des sinistres. Le troisième chapitre de la première partie quant à lui nous présente les méthodes classiques de provisionnement (voir [3], [5]).

La seconde partie constituée uniquement du chapitre 4 est consacrée à la modélisation de l'inflation via la méthode de séparation de Verbeek. Nous nous inspirons de la technique de forêt aléatoire développée dans les approches « machine learning » afin de proposer une méthode de modélisation de l'inflation historique. Une fois notre inflation historique modélisée, l'estimation des taux d'inflation futurs se fait

via le modèle de Vasicek dont les paramètres sont calibrés sur la base des données historiques. Plusieurs simulations de Monte Carlo sont faites, l'idée étant de prendre en compte la variabilité des taux d'inflation dans l'estimation des provisions.

La dernière partie de ce mémoire qui porte essentiellement sur le chapitre 5 est dédiée à l'évaluation des provisions avec prise en compte de l'inflation (de manière implicite et explicite). Dans cette partie, nous développons trois modèles d'évaluation des réserves :

- un premier modèle utilisant les méthodes classiques (Chain Ladder, Mack . . .). Dans ce modèle, l'inflation considérée est implicite et les modèles classiques utilisés sont sensibles à l'inflation. Ainsi, dans un environnement d'inflation instable, ce modèle conduira à une sous évaluation des provisions (voir [7]),
- un second modèle utilisant une prise en compte explicite de l'inflation. Ici, une mise en "as if" de nos triangles est nécessaire. Ensuite, une utilisation du modèle de Chain Ladder et une actualisation de la partie inférieure du triangle avec l'inflation future permet d'avoir une réserve en euro courant (voir [4, 15]),
- un troisième modèle qui utilise les hypothèses du modèle de Verbeek (voir [2]). Ce modèle nous permet de prendre l'effet empirique de l'inflation future modélisée via Vasicek (1977) [12] et de construire un intervalle de confiance de la provision.

Enfin, dans la conclusion de ce mémoire, nous présentons le bilan de l'ensemble de nos travaux, les limites de l'étude et nous terminerons par les éventuelles pistes qui pourraient contribuer à l'extension de ce travail.

# Chapitre 1

## Généralités sur l'inflation

Dans ce chapitre, nous présentons tout d'abord l'inflation au sens général en passant par les causes, comment elle est mesurée et les limites des indices des prix à la consommation. Ensuite, nous donnons une définition à l'inflation spécifique ou encore à l'inflation assurantielle. Enfin, nous dégagons les différences entre l'inflation marché et l'inflation assurantielle.

L'inflation est le résultat d'un déséquilibre sur le marché des biens et services, c'est-à-dire entre l'offre et la demande qui se manifeste par une hausse durable du niveau général des prix. Cette hausse se traduit par une baisse de la valeur de la monnaie qui perd ainsi une partie de son pouvoir d'achat. Il faut distinguer l'inflation de la déflation, de la stagflation et de la désinflation :

- la déflation représente un processus auto-entretenu de baisse générale du niveau des prix à la production comme à la consommation. La déflation est un signal de récession (contraction de l'activité économique et du PIB) qui se traduit par la baisse de la production et des revenus ;
- la stagflation est une situation caractérisée simultanément par la stagnation de la production (faible croissance économique et forte augmentation du chômage) et de l'inflation (c'était le cas de la France entre les années 1975 et 1983 par exemple) ;
- la désinflation est une diminution du taux d'inflation, c'est-à-dire par la baisse du taux de croissance des prix : les prix augmentent toujours mais à un rythme moins important qu'auparavant (cas de la France entre 1985 et 1999, Figure : [1.1](#)) ;
- On cite parfois l'hyper inflation, caractérisée par la croissance extrêmement rapide du niveau des prix (cas de l'Allemagne en 1923 par exemple).

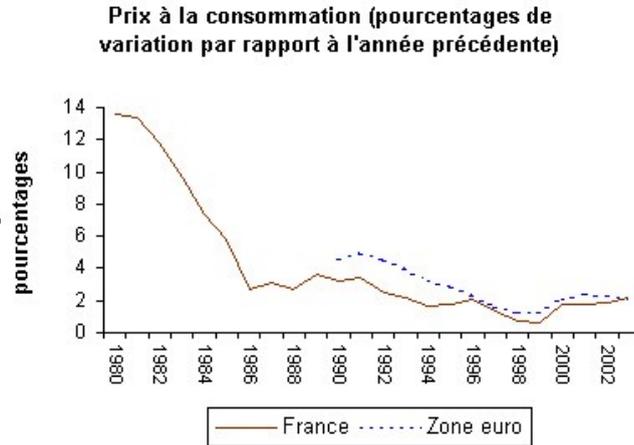


FIGURE 1.1 – La désinflation en France

## 1.1 Les causes de l'inflation

On distingue généralement trois grandes familles d'explication à l'inflation : des explications conjoncturelles, des explications structurelles et des explications monétaristes.

### 1. Les explications conjoncturelles

Elles résultent d'un déséquilibre entre une demande supérieure à l'offre. Pour rétablir l'équilibre entre l'offre et la demande, les prix augmentent (tirant la demande à la baisse car la hausse des prix décourage la consommation). Ces explications sont qualifiées de conjoncturelles car elles sont liées à un état provisoire du marché. Une augmentation rapide des revenus (salaires ou transferts sociaux) entraîne un accroissement rapide de la demande.

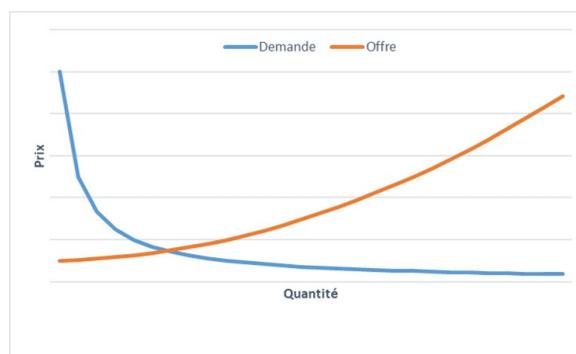


FIGURE 1.2 – La relation entre l'offre et la demande

Comme le montre la figure ci-dessus, la demande est une fonction décroissante des prix. Inversement, l'offre est une fonction croissante des prix, elle augmente avec les prix.

### 2. Les explications structurelles

Il s'agit ici de rechercher les causes structurelles, c'est-à-dire durables en fonction de l'organisation des structures du marché ou des mécanismes de répar-

tition.

- en terme de structure de marché, on constate que des marchés très concentrés (où un petit nombre de vendeurs ont le monopole de l'offre) favorisent les ententes illicites entre les producteurs (ou offreurs), pour se partager le marché à des prix minima convenu à l'avance, sans respecter les conditions de concurrence ;
- en terme de mécanisme de répartition, les entreprises fixent leurs prix en fonction de leur coût, or les coûts de production peuvent augmenter (hausse des salaires, des matières premières, des prélèvements, des taux d'intérêt...) et l'entreprise répercutera cette hausse sur le prix de vente.

### 3. Les explications monétaires

Les mécanismes de création de moyens de paiement (dont la monnaie, mais une entreprise peut payer un fournisseur avec une lettre de change qui n'est pas de la monnaie) sont aussi responsables de l'inflation. Une création excessive de monnaie, sous forme de crédits accordés aux agents, se traduit par des dépenses supplémentaires, qui peuvent être cause d'inflation si l'offre ne suit pas. Pour Milton Friedmann « l'inflation est toujours et partout un phénomène monétaire ».

## 1.2 La mesure de l'inflation

### 1.2.1 L'indice des prix

L'indice des prix à la consommation (IPC) est l'instrument utilisé pour mesurer l'inflation. Il permet d'estimer, entre deux périodes données, la variation moyenne des prix des produits consommés par les ménages sur l'ensemble du territoire français. L'ensemble de ces données sont fournis par l'INSEE. Il est basé sur l'observation d'un panier fixe de biens et services, consommés par les ménages résidents et non-résidents (touristes) et est actualisé chaque année. Chaque produit est pondéré, dans l'indice global, proportionnellement à son poids dans la dépense de consommation des ménages. L'IPC joue un rôle très important notamment :

- un rôle économique dans la mesure où il permet de suivre, mois par mois, l'inflation. Il est également utilisé comme déflateur de nombreux agrégats économiques (consommation, revenus...) pour calculer des évolutions en volume ou en termes réels (« en euros constants ») ;
- un rôle socio-économique en ce sens qu'il sert à indexer de nombreux contrats privés, des pensions alimentaires, des rentes viagères et aussi à indexer le SMIC. L'indice retenu pour le SMIC est celui des ménages urbains dont le chef est employé ou ouvrier, hors tabac ;
- un rôle monétaire et financier, à des fins de comparaison internationale. En effet, les indices de prix font l'objet d'un travail d'harmonisation entre les services statistiques nationaux sous la coordination d'Eurostat. Ces indices de prix à la consommation harmonisés (IPCH) ainsi obtenus ne se substituent pas aux IPC nationaux. Dans le cadre de l'objectif de stabilité des prix de la Banque Centrale Européenne, l'IPCH est l'indicateur majeur pour la conduite de la politique monétaire dans la zone euro.

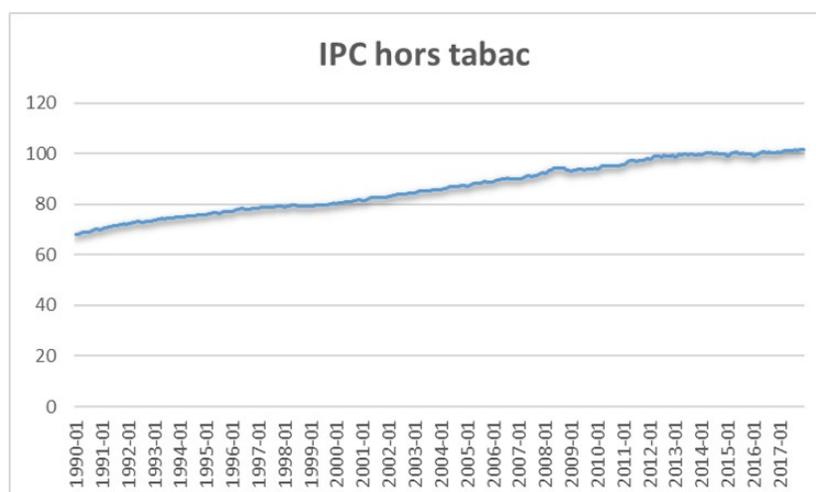


FIGURE 1.3 – Variation de l’IPC de 1990 à 2017 (source : données INSEE)

Sur le graphe ci-dessus, on peut observer une évolution de l’inflation du marché. Elle a une tendance linéaire croissante. Le léger pic peut s’expliquer par la crise de 2008 qui a connu une hausse des cours du pétrole. Malgré que l’indice de prix à la consommation reste un indicateur économique important, il présente tout de même des limites.

### 1.2.2 Les limites de l’indice du prix à la consommation

L’IPC présente des limites sur trois aspects à savoir : sa représentativité, la répartition de sa composition et son contenu même.

- cet indice représente l’ensemble des situations de consommation pour l’ensemble des ménages sur une base uniforme, c’est-à-dire les rapports de consommation sont identiques chez tous les ménages. Cette hypothèse d’uniformité est sans doute loin de la réalité. En effet, il y a peu de rapports entre la consommation du jeune cadre supérieur célibataire et la consommation d’un couple d’employés urbains avec deux enfants. Le jeune cadre célibataire, aura tendance à consommer plus de repas au restaurant ou de forfaits de ski par exemple. En revanche, le couple d’employés urbains avec deux enfants aura tendance à consommer plus de repas à domicile ou des vacances moins onéreuses que les sports d’hiver. Or, sous les hypothèses de l’INSEE, l’indice des prix des biens et services consommés est le même dans ces deux cas distincts ;
- d’autre part, la pondération des postes budgétaires peut être contestée. Le poids du loyer n’est pas le même si on est locataire ou propriétaire, si on est jeune (a priori locataire pour la plupart des cas) ou plus âgé (dans la majorité des cas propriétaire).

## 1.3 Inflation en assurances non-vie (inflation spécifique)

Dans la section précédente, nous avons présenté l'inflation générale encore appelée inflation du marché ou inflation économique. Dans cette section, il est question de présenter l'inflation au sens de l'assurance non-vie. En d'autres termes, il est question de donner une définition à l'inflation qu'on observe dans nos triangles de paiements d'une part et d'autre part, dégager quelques différences qui existent entre l'inflation marché et l'inflation spécifique contenue dans notre portefeuille.

### 1.3.1 Inflation superposée

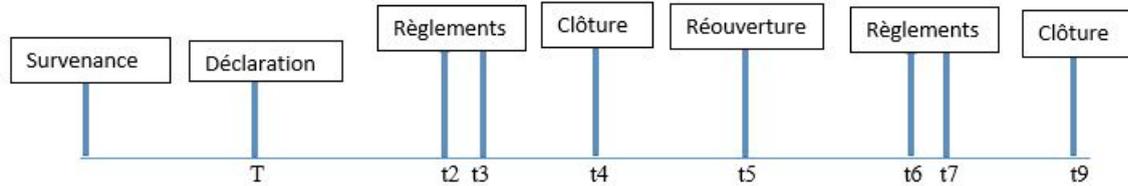


FIGURE 1.4 – Vie d'un sinistre

Sur la figure ci-dessus, on peut observer la vie d'un sinistre. Si nous désignons par  $C(t)$  le règlement effectué à la période  $t$  en supposant qu'il n'a pas d'inflation monétaire entre les différentes périodes de règlements, le montant total des règlements est donné par :

$$C = \sum_{j=2,3,6,7} C(t_j) \quad (1.1)$$

Si nous désignons par  $\lambda(t)$  l'indice qui décrit l'inflation des coûts en valeur nominale à l'instant  $t$ , le montant total des sinistres réglés est donnée par :

$$C = \sum_{j=2,3,6,7} \frac{\lambda(t_j)}{\lambda(t_2)} C(t_j) \quad (1.2)$$

De manière plus générale, considérons la suite  $(X_{t_i})_{i \in \mathbb{N}}$  l'ensemble des paiements effectués sur les périodes  $t_i$   $i \geq 1$  exprimés en monnaie de  $t_1$ , c'est-à-dire qu'on suppose qu'il n'y ait pas d'inflation (euro constant). Posons

$$C_1 = \sum_{j=1}^{\infty} X_{t_j} \quad (1.3)$$

Soit  $\lambda(t)$  l'indice qui décrit l'inflation des coûts des sinistres, alors en valeur nominale nous avons :

$$C = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda(t_j)}{\lambda(t_1)} X_{t_j} \quad (1.4)$$

Si nous supposons que  $\lambda(\cdot)$  est une fonction croissante du temps, il s'ensuit que  $C > C_1$ . En pratique, la quantité  $\frac{\lambda(t_j)}{\lambda(t_1)} X_{t_j}$  est difficile à mesurer.

Si nous disposons d'un ensemble de paiements se rapportant à des sinistres identiques mais observées à des périodes différentes (il existe une translation temporelle entre eux), le montant total de paiements en euro constant est donné par :

$$C_1 = \sum_{j=1}^{\infty} X_{t_j} = \sum_{j=1}^{\infty} X_{t_j+a} \quad (1.5)$$

où  $a$  désigne le temps qui sépare les dates de paiements des sinistres. L'équation (1.5) se traduit par le fait que deux sinistres identiques réglés à des périodes différentes ont le même coût en euro constant. En revanche, les montants en valeur nominale sont différents. En effet, sur la base qu'en valeur monétaire au temps  $t_1$   $X_{t_j+a} = X_{t_j}$ , nous pouvons réécrire le montant total en valeur nominale des sinistres identiques et réglés à des périodes différentes comme suit :

$$C' = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda(t_j + a)}{\lambda(t_1)} X_{t_j} \quad (1.6)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda(t_j + a)}{\lambda(t_1)} X_{t_j+a} \quad (1.7)$$

En supposant  $a > 0$  et  $\lambda(\cdot)$  une fonction croissante du temps, alors  $C' > C_1$ . Des équations (1.5), (1.6) et (1.7) on peut déduire que le ratio entre les montants en valeurs nominales est  $\frac{\lambda(t_j+a)}{\lambda(t_j)}$ . En pratique, il s'avère que c'est pas toujours vrai. Ce ratio se révèle être [11]

$$[1 + \phi(t_j + a, t_j)] \frac{\lambda(t_j + a)}{\lambda(t_j)}$$

ce qui signifie que sur l'intervalle de temps  $[t_j, t_j + c]$ , les coûts des sinistres sont inflatés de  $(1 + \phi(t_j + c, t_j))$  en plus de l'inflation du marché. Ce facteur est donc considéré comme étant l'inflation superposée.

### 1.3.2 Définition et causes de l'inflation assurantielle

L'inflation au sens assurantielle peut se définir comme étant l'inflation marché plus l'inflation superposée. Un point crucial sur l'inflation assurantielle est qu'elle peut continuer au-delà de la date de survenance jusqu'au règlement.

Les causes de l'inflation superposée (c'est-à-dire l'inflation superposée à l'IPC régulier abordé à la section 1.2), comprennent en particulier des modifications juridique et législatives qui augmentent les paiements moyens des sinistres. En outre, l'inflation superposée découle de l'évolution des conventions sociales et de l'inflation des coûts des soins médicaux. L'inflation des coûts des soins inclut des avancées en matière de technologie médicale qui créent de nouvelles options de traitement, le changement des coûts des traitements médicaux et une augmentation de la durée de vie des assurés gravement blessés. Cutter [6] souligne également que les pratiques de traitement des demandes d'indemnisation peuvent contribuer à une inflation superposée. Par ailleurs, l'inflation salariale et la modification de la politique

de souscription peuvent contribuer à l'inflation superposée. Conformément à toutes les observations sus-citées, il a été montré [2] que les différents indices économiques sont liés à l'inflation des paiements.

Au regard des différentes explications, il en découle que l'inflation marché et l'inflation spécifique possèdent des liens, mais n'ont pas toujours les mêmes causes. L'inflation spécifique est causée à la fois par des facteurs économiques, les facteurs réglementaires, les facteurs d'ordre technique (par exemple la profondeur de l'historique des données), l'état de la victime (cas des dommages corporels) et d'autres facteurs liés à politique d'indemnisation de l'assureur.

En somme, ce chapitre était consacré à une présentation de l'inflation marché et l'inflation spécifique. Dans la suite de notre mémoire, nous nous concentrerons sur les aspects plus techniques de notre sujet. Le chapitre suivant est destiné à une présentation des données et les statistiques de base. Dans ce chapitre, nous allons dégager de nos analyses descriptives les premiers éléments qui vont nous permettre de mieux répondre à notre problématique.

# Chapitre 2

## Présentation des données

L'objectif de ce chapitre est de présenter les données sur lesquelles porte notre étude. Dans un premier temps, nous menons une étude de cohérence de données. Ensuite, nous effectuons des statistiques descriptives dans l'optique de dégager les premières analyses de notre étude. Enfin, nous présentons une synthèse de nos premières analyses qui sont confirmées dans la suite de notre travail.

### 2.1 Qualité de données

Avant toute analyse, il est primordial de vérifier la cohérence des données sur lesquelles est basée l'étude. Les données utilisées couvrent la période allant de 2002 à 2017, soit une profondeur de 15 ans. L'analyse porte sur la branche responsabilité automobile (matérielle et corporelle) de la MACSF.

Inv \ Surv	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	Total
2002	38 694	11 119	1 510	404	166	98	65	58	44	102	17	13	13	11	9	8	52 331
2003	0	37 570	10 819	1 269	351	171	89	54	52	113	27	17	12	8	5	6	50 563
2004	0	0	38 350	10 724	1 222	323	128	81	60	119	27	23	9	10	6	2	51 084
2005	0	0	0	39 113	11 068	1 246	371	151	76	164	38	26	16	16	19	11	52 315
2006	0	0	0	0	39 277	10 640	1 366	376	179	173	75	33	25	17	14	11	52 186
2007	0	0	0	0	0	38 152	11 186	1 201	327	164	148	74	42	28	17	15	51 354
2008	0	0	0	0	0	0	38 184	10 304	1 100	323	147	137	63	30	20	10	50 318
2009	0	0	0	0	0	0	0	39 272	12 205	1 259	346	143	120	73	42	22	53 482
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	40 353	12 723	1 347	326	144	147	71	60	55 171
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0	39 281	10 996	1 194	312	137	147	89	52 156
2012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	38 939	10 791	1 139	294	137	122	51 422
2013	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37 934	11 088	1 322	335	167	50 846
2014	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	36 396	12 290	1 392	385	50 464
2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37 076	10 998	1 528	49 602
2016	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	36 100	11 963	48 063
2017	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	35 194	35 194
Total	38 694	48 689	50 679	51 510	52 084	50 630	51 389	51 497	54 397	54 421	52 107	50 711	49 379	51 459	49 312	49 593	806 551

FIGURE 2.1 – Complétude des sinistres

Dans notre étude, un sinistre ouvert est un sinistre qui a connu une suite. La figure 2.1 ci-dessus nous présente le nombre de sinistres ouverts par année de surveillance et par année d'inventaire (sur la période d'étude). Nous pouvons constater que toutes les entrées de notre tableau sont supérieures ou égales à zéro. Nous constatons également que la somme du nombre de sinistres ouverts sur la période de l'étude est égale au nombre de sinistres ouverts par année d'inventaire. Au regard de la figure 2.1, nos données sont complètes et cohérentes.

Ci-dessous nous présentons les données des règlements.

Inv \ Surv	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	Som/Surv
2002	57 860 013	23 753 611	5 595 962	2 536 802	965 936	641 587	1 213 639	510 136	1 515 154	440 685	277 520	19 060	17 258	117 981	17 169	64 089	95 546 602
2003	0	54 220 803	22 711 877	4 795 392	2 375 053	1 047 115	1 743 000	883 206	213 990	280 490	81 282	4 141 638	695 816	480 834	49 649	28 426	93 748 574
2004	0	0	54 809 756	21 569 179	4 517 930	1 401 359	2 065 288	643 485	333 008	169 616	365 057	78 640	48 519	37 134	13 703	33 048	86 085 722
2005	0	0	0	56 339 262	23 677 206	5 015 027	1 968 048	1 818 090	534 752	415 288	484 349	9 284 771	114 019	197 168	271 884	117 990	100 237 853
2006	0	0	0	0	56 020 623	22 593 077	4 464 780	1 820 010	1 625 585	1 095 006	494 914	140 038	723 872	195 985	117 671	42 755	89 334 313
2007	0	0	0	0	0	56 814 062	24 828 341	4 115 204	1 903 102	1 094 570	571 085	594 913	2 577 980	474 299	3 862 741	200 296	97 036 592
2008	0	0	0	0	0	0	66 833 908	23 155 644	4 304 495	2 013 233	1 370 625	1 185 339	1 554 734	1 060 049	1 646 223	65 824	103 190 073
2009	0	0	0	0	0	0	0	70 264 281	27 515 850	4 465 291	2 111 984	1 841 847	590 415	1 596 271	379 502	216 801	108 982 242
2010	0	0	0	0	0	0	0	0	71 432 279	27 664 344	5 968 574	2 294 482	2 970 689	1 982 660	1 150 273	607 645	114 070 944
2011	0	0	0	0	0	0	0	0	0	70 247 782	26 558 124	4 720 278	2 511 666	1 265 519	477 464	1 523 949	107 304 782
2012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	73 558 489	25 819 271	5 663 740	2 076 250	2 402 505	1 505 261	111 025 516
2013	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	72 838 652	27 188 859	5 618 287	3 104 472	2 346 944	111 097 214
2014	0	0	0	0	0	0	0	0	251	0	0	0	75 485 815	28 104 211	6 211 039	2 431 944	112 233 260
2015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	74 515 581	28 170 812	6 793 539	109 479 932
2016	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	77 068 715	32 027 095	109 095 810
2017	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	74 728 890	74 728 890
Som/Inv	57 860 013	77 974 414	83 117 595	85 240 635	87 556 747	87 512 227	103 117 004	103 210 056	109 378 466	107 886 304	111 842 001	122 958 927	120 143 380	117 722 230	124 943 822	122 734 496	1 623 198 320

FIGURE 2.2 – Complétude des règlements

Pour les mêmes raisons évoquées précédemment, notre triangle de règlement est complet et cohérent.

## 2.2 Statistiques descriptives

L'intérêt de cette section est de mieux comprendre l'évolution de nos sinistres (y compris les paiements) par année d'inventaire afin de mieux expliquer l'évolution de l'inflation historique.

### 2.2.1 Statistiques descriptives des sinistres ouverts

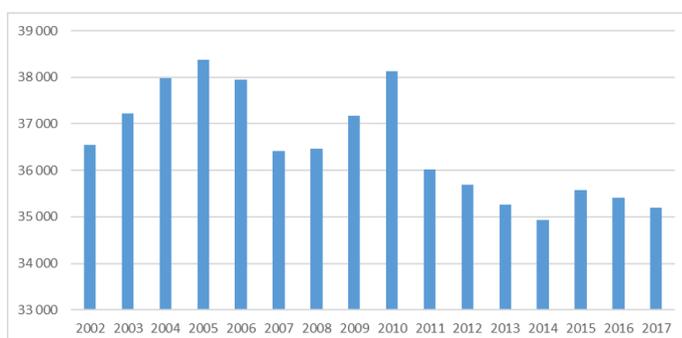


FIGURE 2.3 – Évolution des sinistres ouverts par année de survenance

De 2002 à 2005, on observe une croissance de sinistres ouverts (matériels et corporels). De 2006 à 2007, on a une baisse de sinistres ouverts puis une hausse du nombre de sinistres ouverts entre 2009 et 2010. Après 2010, on constate une baisse considérable de sinistres qui pourrait s'expliquer par plusieurs facteurs :

- l'amélioration du dispositif sécuritaire sur les axes routiers (présence des radars automatiques),
- la progression de la technologie des véhicules.

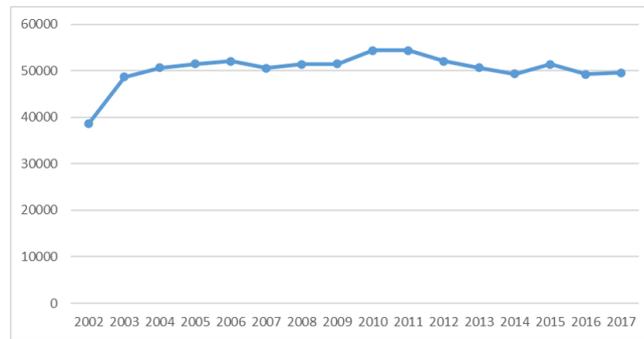


FIGURE 2.4 – Évolution des sinistres ouverts par année d’inventaire

La figure 2.4 présente l’évolution des sinistres ouverts par année d’inventaire. On peut remarquer que le nombre de sinistres ouverts oscille autour de 50K sinistres pour chaque année d’inventaire à l’exception des années 2002, 2010, et 2011.

- le nombre de sinistres ouverts dans l’année d’inventaire 2002 ne contient pas les sinistres tardifs des années antérieures, ce qui expliquerait le fait que le nombre ne soit pas proche de 50K sinistres ;
- le nombre de sinistres de l’année 2010 est élevé. Ce résultat était prévisible compte tenu des observations faites sur la figure 2.3 pour l’année de survenance 2010 ;
- l’année 2011 s’expliquerait par le nombre des sinistres tardifs survenus dans les années antérieures dont l’assureur aurait pris connaissance en 2011.

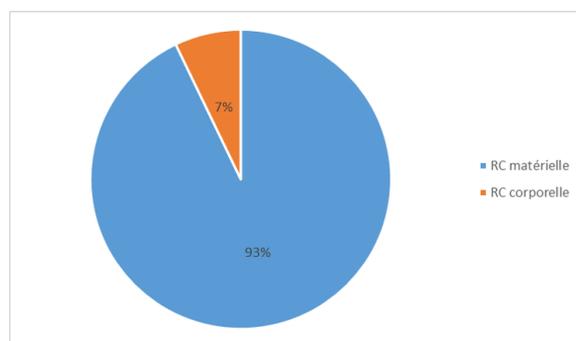


FIGURE 2.5 – Répartition des sinistres corporels et matériels

Sur la figure 2.5 ci-dessus, on peut constater que les sinistres corporels représentent 7% de l’ensemble des sinistres de notre portefeuille contre 93% de sinistres matériels.

Sur la figure 2.6 ci-dessous, à l’exception des années 2002, 2003 et 2004 où on a un nombre de sinistres corporels supérieur à celui observé en 2005, on observe une régularité du nombre sinistres corporels par année de survenance. Cette stabilité nous semble conforme car les sinistres corporels ont une fréquence faible.

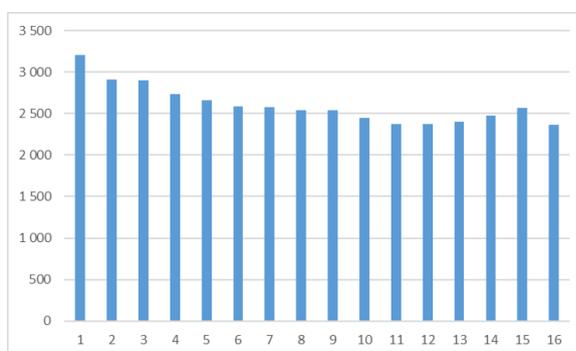


FIGURE 2.6 – Évolution des sinistres corporels par année de survenance

Au regard de l’histogramme des sinistres corporels (figure 2.6) et l’histogramme de l’ensemble du portefeuille responsabilité civile automobile (figure 2.3), on peut déduire que l’histogramme de sinistres matériels (figure 2.7) présente une certaine volatilité comme celui de l’ensemble du portefeuille. Cette volatilité nous semble conforme car les sinistres matériels ont une fréquence élevée.

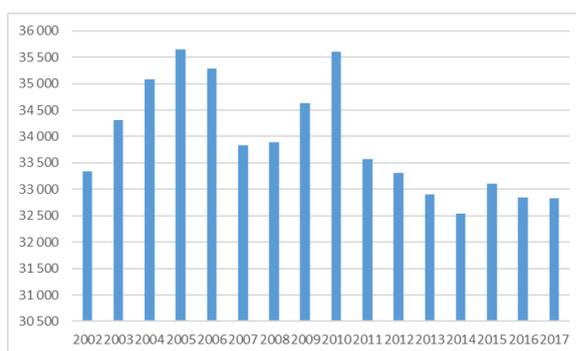


FIGURE 2.7 – Évolution des sinistres matériels par année d’inventaire

## 2.2.2 Statistiques descriptives des règlements

Notre portefeuille est constitué de sinistres matériels et corporels. La figure 2.8 ci-dessous nous donne la proportion du montant des règlements des sinistres corporels et matériels.

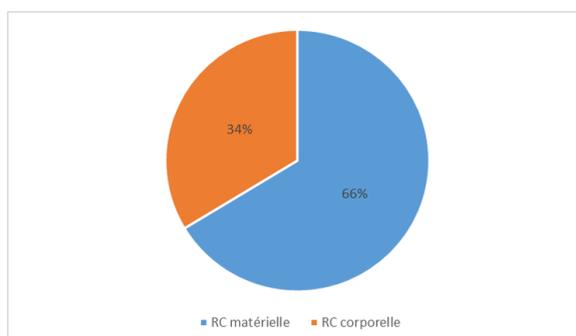


FIGURE 2.8 – Répartition des règlements des sinistres par année d’inventaire

Une analyse de cette figure nous permet de constater que 34% du montant global réglé sur la branche responsabilité automobile de MACSF sont des sinistres corporels. Malgré le fait que ces sinistres soient faiblement représentés dans le portefeuille de sinistres ouverts, ils ont un coût très important pour l'assureur.

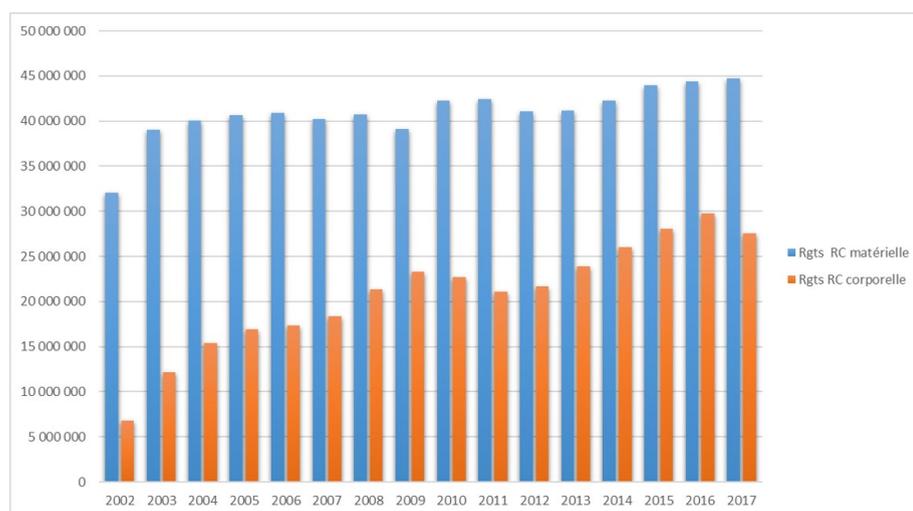


FIGURE 2.9 – Évolution des règlements des sinistres par année d’inventaire (par branche)

L’analyse de la figure 2.9 ci-dessus nous permet de constater :

- une régularité des montants réglés des sinistres matériels. Cette régularité pouvant s’expliquer par le fait que les dommages matériels sont soumis à la convention IDA (Indemnisation Directe des Assurés) ;
- que les règlements des sinistres corporels ont une tendance linéaire et croissante. Ce qui pourrait s’expliquer par le fait que les montants des règlements sont impactés par plusieurs facteurs tels que : l’état de la victime, le coût des soins médicaux, la législation . . .
- qu’excepter l’année 2002, qui représente l’année d’origine de notre étude (année qui ne prend pas en compte les tardifs antérieurs), on peut observer des hausses régulières des règlements des sinistres corporels entre 2003 et 2007.

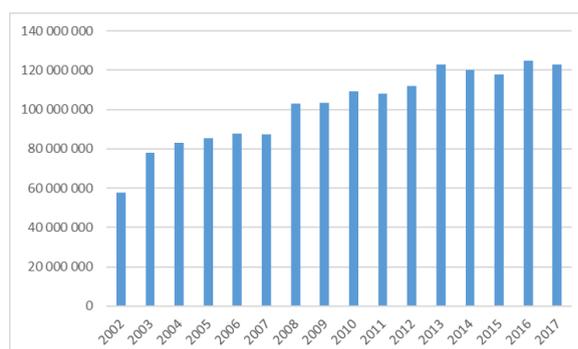


FIGURE 2.10 – Évolution des règlements des sinistres par année d’inventaire (sur l’ensemble du portefeuille)

Une analyse de la figure 2.10 ci-dessus permet de faire les observations suivantes :

- en 2008 on observe une hausse des paiements qui pourrait s’expliquer par la présence des sinistres exceptionnels dont le coût serait très élevé. La même observation peut être constatée en 2013 ;
- on constate également une saisonnalité des pics qui apparaissent en moyenne tous les 5 ans. Nous sommes plus tentés de dire qu’on observera une hausse irrégulière des paiements en 2021. Ces pics peuvent également se justifier par le système de règlement mis en place qui consiste à passer par un tribunal puis régler les sinistres (sinistres spéciaux) après décision. Il serait donc nécessaire de prendre en compte l’effet des sinistres spéciaux dans l’estimation de l’inflation.

## 2.3 Conclusion

Au regard des différentes analyses, nous pouvons conclure que les sinistres exceptionnels seraient à l’origine des différents pics observés. Nous pouvons également conclure que les sinistres corporels représentent une part importante des montants réglés et qu’il serait judicieux pour l’assureur de bien estimer ses sinistres tardifs (qui peuvent être d’ordre matériel ou corporel). Toutefois, une mauvaise estimation des tardifs (corporels et/ou matériels) entraînerait un sous-provisionnement ou un sur-provisionnement.

Dans le chapitre suivant, nous présenterons quelques techniques classiques de provisionnement (méthodes déterministes et méthodes stochastiques) et les chapitres d’après seront dédiés à la modélisation de l’inflation et l’évaluation des PSAP (Provisions pour sinistres à payer). Notre challenge consiste à montrer qu’au-delà de l’inflation du marché, il existe bel et bien une inflation superposée d’une part et d’autre part, montrer l’effet de l’inflation sur le montant global de réserves.

# Chapitre 3

## Méthodes classiques de provisionnement

Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes classiques de provisionnement. La méthode de Chain Ladder que nous présentons dans ce chapitre, est probablement la méthode la plus simple et plus utilisée dans le monde de l'actuariat [3, 8, 15]. Cette méthode de calcul de réserves encore appelée « cadence de règlements », est relativement ancienne puisqu'elle est implicitement évoquée dans le livre de ASTESAN (1938). Outre la méthode de Chain Ladder, une approche stochastique de celle-ci est présentée. Elle permet d'avoir une erreur de prédiction sur le montant de provisions.

### 3.1 Notations et motivations

Les provisions techniques sont soumises à des contraintes réglementaires. Elles doivent en particulier faire l'objet de deux évaluations. Une première dite « dossier par dossier » consiste à sommer les montants en suspend pour l'ensemble des sinistres connus. A cette évaluation, un montant forfaitaire des sinistres tardifs doit être ajoutée. La seconde évaluation repose entièrement sur la cadence de règlement.

#### 3.1.1 Les triangles de run-off

Les méthodes classiques de provisionnement sont toutes basées sur les triangles reflétant la dynamique des sinistres. Elles permettent d'avoir une vision agrégée des sinistres. Pour la suite, nous considérons les notations suivantes :

- $i$  correspond à l'indice des années de survenance  $i = 0, \dots, n$ ,
- $j$  correspond à l'indice des années de développement  $j = 0, \dots, n$ ,
- $Z_{i,j}$  correspond au montant des sinistres survenus l'année  $i$  payés l'année  $i + j$  ou bien payés après  $j$  années de développement. Les  $Z_{i,j}$  sont encore appelés incréments,
- $C_{i,j}$  correspond aux paiements agrégés des sinistres survenus l'années  $i$ , en  $j$  année de développement, c'est à dire :

$$C_{i,j} = Z_{i,1} + \dots + Z_{i,j}, \quad (3.1)$$

on parle aussi de montant cumulé.

D'après les notations ci-dessus, la sinistralité d'une branche est représentée par des triangles cumulés ou non cumulés appelés triangles de run-off. Ces triangles sont présentés ci-dessous :

	années de développement							
années d'origine	0	1	2	...	...	...	...	n
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$Z_{0,2}$	...	...	...	...	$Z_{0,n}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	...	...	...		$Z_{1,n}$
.	.	.	...	...				
.	.	.						
.	.							
n	$Z_{n,0}$							

TABLE 3.1 – Triangle de paiements incrémentaux

ou bien

	années de développement							
années d'origine	0	1	2	...	...	...	...	n
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	$C_{0,2}$	...	...	...	...	$C_{0,n}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	...	...	...	...		$C_{1,n}$
.	.	.	...	...				
.	.	.						
.	.							
n	$C_{n,0}$							

TABLE 3.2 – Triangle de paiements cumulés

Ainsi, la lecture peut se faire par ligne, par colonne ou en diagonale :

- les lignes ou années de survenance doivent en particulier refléter les changements relatifs à la souscription et les effets tailles du portefeuille ;
- les colonnes ou années de développement permettent de prendre en compte la durée des risques qui peut être plus ou moins longue en fonction de la branche d'activité ;
- les diagonales ou années calendaires reflètent quant à elles l'inflation et parfois la jurisprudence.

A titre illustratif, nous présentons ci-dessous des exemples de triangles run-off :

	0	1	2	3	4	5
2002	48 315 300	14 270 362	2 209 497	1 242 538	2 012 751	172 086
2003	38 035 672	18 527 735	9 062 623	4 421 301	1 858 026	
2004	38 020 601	9 334 198	647 791	7 791 203		
2005	38 478 899	9 611 405	464 632			
2006	37 409 191	9 165 158				
2007	37 463 551					

TABLE 3.3 – Exemple de triangle des paiements incrémentaux

On peut noter que pour l'année d'inventaire 2007, 37 463 551 ont été payés pour les sinistres survenus en 2007 et 1 858 026 pour les sinistres survenus en 2003.

	0	1	2	3	4	5
2002	48 315 300	62 585 662	64 795 159	66 037 697	68 050 448	68 222 534
2003	38 035 672	56 563 407	65 626 030	70 047 331	71 905 357	
2004	38 020 601	47 354 799	48 002 590	55 793 793		
2005	38 478 899	48 090 304	48 554 936			
2006	37 409 191	46 574 349				
2007	37 463 551					

TABLE 3.4 – Exemple de triangle de paiements cumulés

Une lecture de la table 3.4 permet de voir que jusqu'en 2007, le montant global réglé par l'assureur pour le compte des sinistres survenus en 2005 est de 48 554 936. Le calcul de provisions consiste alors de prévoir le montant final des sinistres afin de provisionner les paiements non encore effectués. Sous l'hypothèse qu'il faut  $n$  années pour clore une année d'inventaire, il est question d'estimer les  $\hat{Z}_{i,j}$  et les  $\hat{C}_{i,j}$  pour  $i + j \geq n + 1$ . Une fois ces valeurs estimées, on peut donc déduire le montant de provisions qui est donné par :

$$\hat{R}_i = C_{in} - \hat{C}_{i,n+1-i},$$

soit un montant total de réserve nécessaire de :

$$R = \sum_{i=0}^n \hat{R}_i.$$

## 3.2 Méthode déterministe

Dans cette section, nous présentons la méthode de Chain Ladder et la méthode de « the high and low diagonal test ». La méthode de " the high and low diagonal test " permet de vérifier l'hypothèse d'indépendance des années de survenance qui est une hypothèse clef de la méthode de Chain Ladder. De façon générale, les méthodes déterministes reposent sur l'hypothèse de stabilité du délai s'écoulant entre la survenance d'un sinistre et les règlements, quel que soit l'année d'exercice, en absence d'inflation, de changement de structure de portefeuille, des garanties des

contrats et plus globalement de la gestion des sinistres. Si nous sommes dans une situation où toutes ces hypothèses sont vérifiées sur une période suffisamment longue, les méthodes déterministes seraient le meilleur recours pour estimer le montant de provisions.

### 3.2.1 La méthode de Chain Ladder

Cette méthode est la plus ancienne, la plus populaire et simple à mettre en oeuvre. L'idée du modèle repose sur l'existence d'un facteur de développement  $f_j$  ne dépendant que de l'année de développement et étant tel que

$$C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}.$$

En plus de la simplicité du modèle comme mentionné plus haut, les paramètres intervenant dans la méthode de Chain Ladder ont une interprétation limpide et sont facilement estimables. La méthode de Chain Ladder est fondée sur l'utilisation de link-ratio encore appelé coefficient de passage ou coefficient de développement, entre les différentes années de développement. Les hypothèses sous-jacentes sont :

- (H1) indépendance entre les années de survenance, c'est-à-dire pour  $i \neq i'$ , les  $(C_{i,j})$  sont indépendants des  $(C_{i',j})$ ;
- (H2) les années de développement sont des variables explicatives du comportement des sinistres futurs, c'est-à-dire qu'il existe  $f_j$  tel que  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$ . Cette hypothèse se vérifie graphiquement. Il suffit de tracer les couples  $(C_{i,j}; C_{i,j+1})$  et vérifier qu'ils sont sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

Ainsi, la méthode Chain Ladder calcule un facteur de développement moyen à partir des données observées permettant d'estimer le triangle inférieur de paiements. L'estimation des  $f_j$  est donnée par :

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}} \quad (3.2)$$

pour  $k = 1, \dots, n - 1$ .

La connaissance des facteurs de développement permet de déduire les  $C_{ij}$  en considérant  $\hat{C}_{i,j} = \hat{f}_{n+1-i} \cdots \hat{f}_{j-i} C_{i,n+1-i}$ . Ces derniers représentent le taux de croissance des montants cumulés d'une année à l'autre. Ils donnent donc une prévision des montants totaux payés dans le futur. Ces facteurs de développement permettent d'introduire la notion de cadence de règlement. Une cadence de règlement représente la portion de sinistres réglés à une date  $i$  donnée. Elle est calculée par la formule suivante :

$$p_i = \frac{1}{f_i \cdots f_{n-1}} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Vérification de l'hypothèse d'indépendance entre les années de survenance

Pour vérifier l'hypothèse d'indépendance entre les années de survenance, nous utilisons la méthode de « the high and low diagonal test » introduite par Mack

en 1993 [7]. Cette méthode consiste à construire un test statistique qui confirme ou infirme l'hypothèse d'indépendance entre les années de survenance. Ce test a été conçu pour exhiber les effets de l'année calendaire. Mack l'a justifié par le fait qu'une année calendaire aura une incidence sur l'une des diagonales

$$Diag_k = \{C_{k,0}, C_{k-1,1}, \dots, C_{1,k-1}, C_{0,k}\} \quad 0 \leq k \leq n$$

et par conséquent sur les facteurs individuels  $f_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$  (pour  $i + j \leq n - 1$ ).

La technique de construction de la statistique considère le triangle de facteurs de développement individuels et les classifie en trois catégories  $U$  pour « Upper »,  $D$  pour « Down » et  $N$  pour « Neutre ». Pour chaque colonne de ce triangle, on a :

- les facteurs supérieurs à la médiane (facteurs élevés) qui sont rangés dans la catégorie  $U$ ;
- les facteurs inférieurs à la médiane (facteurs bas) qui sont rangés dans la catégorie  $D$ ;
- le facteur égal à la médiane (s'il existe un nombre impair de facteurs) qui est rangé dans la catégorie  $N$ .

Intuitivement, si nous avons une indépendance entre les années de survenance, on devrait avoir autant de facteurs dans la catégorie  $U$  que la catégorie  $D$  par diagonale. Le nombre de « facteurs bas » (respectivement le nombre de facteurs élevés) par diagonale suivrait une loi binomiale  $B(n, p)$ , où  $n$  représente la somme des éléments de la catégorie  $U$  et la catégorie  $D$ ,  $p$  la probabilité d'observer un « facteur bas » (respectivement un facteur élevé). Autrement dit, si nous désignons par  $D_j$  le nombre de « facteurs bas » et  $U_j$  le nombre de « facteurs élevés » suivant une diagonale  $j$ , alors  $U_j$  et  $D_j$  devraient suivre une loi binomiale de paramètres  $p = 1/2$  et  $n = U_j + D_j$ . La moyenne attendue devrait être

$$\mathbf{E}(U_j) = \mathbf{E}(D_j) = np$$

La variance

$$\mathbf{V}(U_j) = \mathbf{V}(D_j) = np(1 - p).$$

Dans sa méthode, Mack propose un test de la distribution binomiale se basant sur le minimum  $M_j = \min(U_j, D_j)$ . En posant  $m$  la partie entière de  $\frac{n-1}{2}$ , on déduit les caractéristiques suivantes :

- $\mathbf{E}(M_j) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2^n} C_{n-1}^m$
- $\mathbf{V}(M_j) = \frac{n(n-1)}{4} - C_{n-1}^m \frac{n(n-1)}{2^n} + \mathbf{E}(M_j) - (\mathbf{E}(M_j))^2$

### Test statistique

L'hypothèse nulle  $H_0$  consiste à considérer qu'il y a indépendance entre les années de survenance. Sous  $H_0$ , les  $M_j$  sont indépendants et on a :

$$M = \sum_{j=2}^{n-1} M_j \quad (3.4)$$

$$\mathbf{E}(M) = \sum_{j=2}^{n-1} \mathbf{E}(M_j) \quad (3.5)$$

$$\mathbf{V}(M) = \sum_{j=2}^{n-1} \mathbf{V}(M_j) \quad (3.6)$$

D'après le théorème central limite (TCL),  $M$  suit approximativement une loi normale. Par conséquent, on rejettera l'hypothèse  $H_0$  si  $M$  n'appartient pas à l'intervalle de confiance à 95% suivant :

$$\left[ \mathbf{E}(M) - 1,96\sqrt{\mathbf{V}(M)}; \mathbf{E}(M) + 1,96\sqrt{\mathbf{V}(M)} \right]$$

### 3.2.3 Application

Nous appliquons la méthode de Chain Ladder à un portefeuille de sinistres ouverts. Ces données sont issues du portefeuille responsabilité civile automobile de la MACSF. Une première étape consiste à vérifier les hypothèses du modèle de Chain Ladder. Ci-dessous, nous avons le C-C plot des sinistres ouverts.

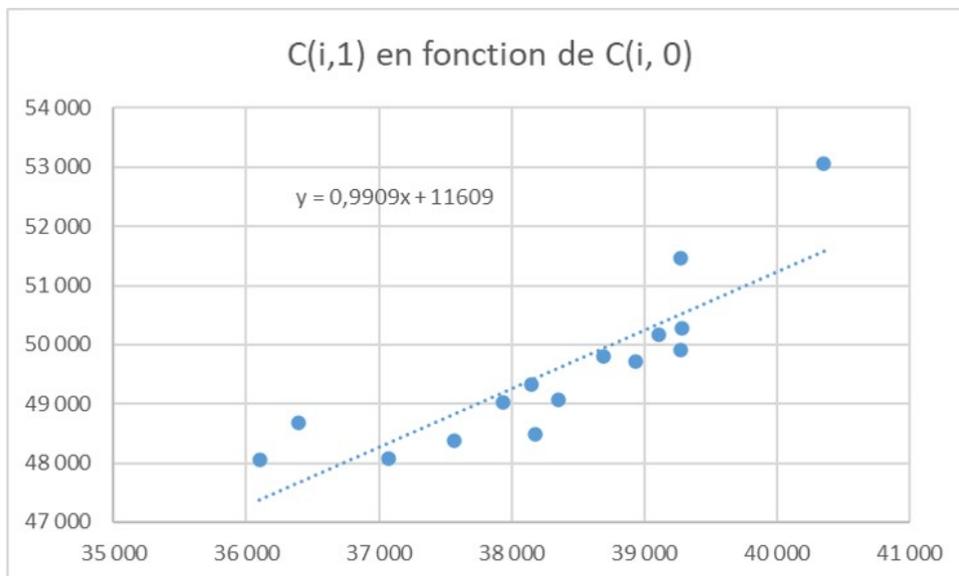


FIGURE 3.1 – C-C plot des sinistres ouverts pour  $j=0$

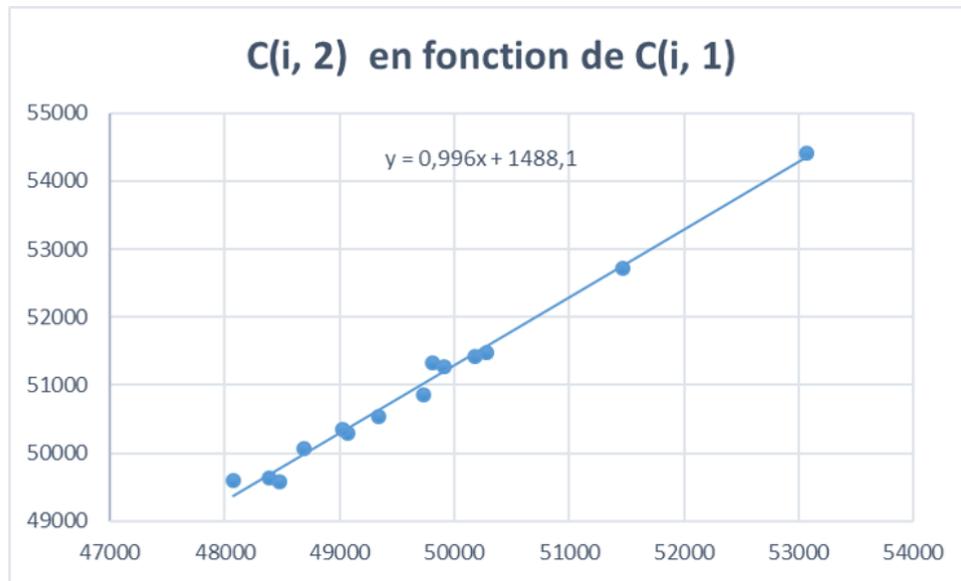


FIGURE 3.2 – C-C plot des sinistres ouverts pour  $j=1$

On peut remarquer que les droites ne passent pas nécessairement par l'origine. Toutefois, l'ordonnée à l'origine de celles-ci semble être proche de zéro. On pourrait dire que l'hypothèse ( $H2$ ) est vérifiée. Pour la validation de l'hypothèse d'indépendance des années de survenance, nous appliquons la méthode décrite à la section 3.2.2. Les tableaux ci-dessous nous présentent les différentes étapes qui conduisent à sa validation.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2002	1,29	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2003	1,29	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2004	1,28	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2005	1,28	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2006	1,27	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2007	1,29	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2008	1,27	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2009	1,31	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2010	1,32	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2011	1,28	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2012	1,28	1,02	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2013	1,29	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2014	1,34	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2015	1,30	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
2016	1,33	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Moy	1,29	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
Ecart-type	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Ecart/Moy	0,02	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Mediane	1,29	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

TABLE 3.5 – D-triangle des sinistres ouverts

Dans le tableau ci-dessus, suivant chaque année de développement, on peut observer une faible volatilité entre les facteurs individuels.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2002	D	U	U	U	D	D	U	U	U	U	U	U	U	U
2003	N	U	U	U	D	D	U	U	U	U	D	D	N	D
2004	D	D	D	D	D	D	U	U	U	D	N	D	D	
2005	D	D	U	U	D	U	D	D	D	U	U	U		
2006	D	U	U	U	U	U	D	D	N	D	D			
2007	U	D	D	U	U	U	N	U	D	D				
2008	D	D	D	D	U	D	D	D	D					
2009	U	D	N	D	D	U	D	D						
2010	U	U	D	D	U	D	U							
2011	D	D	D	D	U	U								
2012	D	D	D	D	N									
2013	U	U	U	U										
2014	U	U	U											
2015	U	U												
2016	U													

TABLE 3.6 – UP-Down

Le tableau 3.6 nous présente la classification des facteurs individuels ou link ratio dans chaque catégorie (Upper, Down et Neutral) comme le stipule la description de la méthode à la section 3.2.2.

	D	U	N	Vérif	Z=min(D;U)	n=D+U	m=ent(n-1/2)	E	Var
1	1	0	0	1	0	1	0	0,00	0,00
2	0	1	1	2	0	1	0	0,00	0,00
3	1	2	0	3	1	3	1	0,75	0,19
4	2	2	0	4	2	4	1	1,25	0,44
5	4	1	0	5	1	5	2	1,56	0,37
6	3	3	0	6	3	6	2	2,06	0,62
7	4	3	0	7	3	7	3	2,41	0,55
8	4	4	0	8	4	8	3	2,91	0,80
9	2	7	0	9	2	9	4	3,27	0,74
10	3	6	1	10	3	9	4	3,27	0,74
11	6	5	0	11	5	11	5	4,15	0,92
12	9	2	1	12	2	11	5	4,15	0,92
13	4	7	2	13	4	11	5	4,15	0,92
14	7	6	1	14	6	13	6	5,03	1,10
Total					36			34,95	8,30

Borne Inf	29,30
Borne Sup	40,60

TABLE 3.7 – Vérification de l’hypothèse 2 du modèle de Chain Ladder

Au regard du tableau de synthèse 3.7, on constate que notre statistique  $Z = 36$  est bel et bien contenue dans l’intervalle de confiance  $IC = [29 ; 41]$ . Nous pouvons donc conclure qu’il existe une indépendance entre les années de survenance de sinistre. Ainsi, les hypothèses de la méthode de Chain Ladder sont vérifiées.

Une application de la méthode de Chain Ladder nous permet d’avoir les résultats suivants :

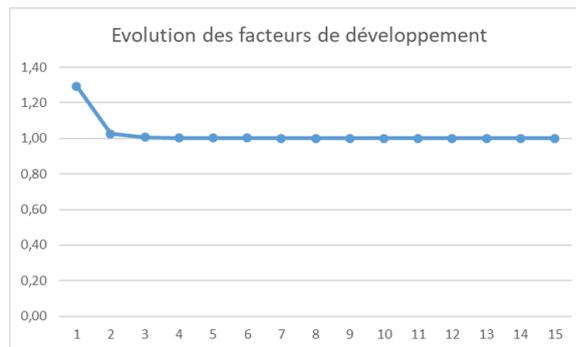


FIGURE 3.3 – Évolution des facteurs de développement du modèle de Chain Ladder

Sur la figure 3.3, nous pouvons observer une convergence rapide des facteurs de développement vers 1.

f CL	1,29	1,03	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
fact Liqui	74%	96%	98%	99%	99%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%

TABLE 3.8 – Facteurs de développement du modèle de Chain Ladder

Dans le tableau 3.8, on remarque qu’après deux années de développement, l’assureur a pris connaissance de 96% des sinistres ; après cinq années de développement, l’assureur a connaissance de la quasi totalité des sinistres.

Une projection de notre triangle nous permet d’avoir les résultats suivants :

Année survenance	Connus	Ultimes	Tardifs
2002	52 330	52 330	0
2003	50 511	50 519	8
2004	51 079	51 093	14
2005	52 300	52 320	20
2006	52 172	52 201	29
2007	51 334	52 374	40
2008	50 287	50 340	53
2009	53 454	53 541	87
2010	55 144	55 273	129
2011	52 156	52 329	173
2012	51 410	51 657	247
2013	50 846	51 209	363
2014	50 463	50 972	509
2015	49 599	50 435	836
2016	48 061	50 140	2 079
2017	35 194	47 507	12 313
Total	52 330	52 330	16 900

TABLE 3.9 – Tardifs sinistres ouverts

On constate qu’à l’ultime, les sinistres ouverts sont quasiment du même ordre, ce qui est cohérent avec l’analyse de données faite au chapitre précédent. Les sinistres non connus par l’assureur sont de 16 900 au total. Les deux années (2016 et 2017) de survenance représenteraient 85%, soit un total de 14 392 sinistres inconnus.

La méthode de Chain Ladder a cet avantage qu’elle est facile à mettre en oeuvre et facile à interpréter. Toutefois, elle présente quelques limites :

1. ses hypothèses ne sont pas toujours vérifiées en pratique ;
2. elle fournit un montant de réserves ponctuel.

D’où l’intérêt des méthodes stochastiques, qui permettent d’estimer les erreurs de prédiction pour certaines et, pour d’autres de produire les intervalles de confiance et les distributions de réserves.

### 3.3 Méthodes stochastiques

Il existe une panoplie de méthodes stochastiques permettant d'estimer les provisions pour sinistre à payer (PSAP). Au fil du temps, il est devenu primordial de faire appel à ces méthodes, en complément des méthodes déterministes, afin de pouvoir mesurer l'incertitude existante dans les résultats obtenus. Ce qui permet de palier aux manquements des méthodes déterministes. Ainsi, les méthodes stochastiques permettent d'obtenir une estimation de la variabilité des réserves, en plus de la simple estimation du montant des provisions en moyenne. D'autre part, certaines de ces méthodes permettent non seulement d'estimer la volatilité des provisions, mais aussi de déterminer leur distribution, information qui permet d'avoir une vision plus approfondie du risque.

#### 3.3.1 La méthode de Mack

La méthode de Mack est la version stochastique de la méthode de Chain Ladder introduite dans les années 1993. Le modèle de Mack est un modèle non paramétrique, elle ne fait pas d'hypothèse de loi et permet d'estimer les erreurs commises lors de l'évaluation des réserves. Elle repose sur trois hypothèses à savoir :

- (H1) indépendance entre les années de survenance, c'est-à-dire pour  $i \neq i'$  les  $(C_{i,j})$  sont indépendants des  $(C_{i',j})$  ;
- (H2) la seconde hypothèse stipule qu'il est possible de lier l'espérance conditionnelle de  $C_{i,j+1}$  sachant  $C_{i,1}, \dots, C_{i,j}$ , à la dernière observation  $C_{i,j}$ , moyennant un facteur multiplicatif près (représentant le facteur de développement). Cette hypothèse se traduit par :  
 $\mathbf{E}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = f_j C_{i,j}$ .
- (H3)  $\mathbf{V}(C_{i,j+1}|C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = C_{i,j} \cdot \sigma_j^2$ .

Sous les hypothèses (H1) et (H2), Mack (1993) a montré que le modèle stochastique induit fournit exactement les mêmes réserves que le modèle de Chain Ladder présenté à la section 3.2.1. Sous les hypothèses (H1) et (H2), les estimateurs standards de Chain Ladder

$$\hat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}},$$

pour  $k = 1, \dots, n-1$ ,

sont sans biais, c'est-à-dire  $\mathbf{E}(\hat{f}_k) = f_k$  pour  $k = 1, \dots, n-1$ . Ces estimateurs sont également non corrélés. Cette absence de corrélation entre les estimateurs peut paraître surprenante car les estimateurs sont obtenus à l'aide des mêmes observations. Elle est néanmoins centrale car elle permet d'avoir

$$\mathbf{E}(\hat{f}_j \hat{f}_{j+1} \dots \hat{f}_{n-1}) = f_j f_{j+1} \dots f_{n-1}.$$

Donc le montant de réserve  $\hat{R}_i$  est un estimateur sans biais du montant réel  $R_i$ . L'intérêt de la méthode de Mack est de pouvoir fournir l'erreur moyenne de prédiction à partir des estimateurs  $\hat{f}_k$ . Il serait donc possible d'étudier la distance

moyenne entre l'estimateur  $\hat{R}_i$  et la vraie valeur  $R_i$ . L'erreur quadratique moyenne (ou mean squared error en anglais) du montant de provisions pour l'année  $i$ , est définie par :

$$mse(\hat{R}_i) = \mathbf{E} \left[ \left( \hat{R}_i - R_i \right)^2 \mid \mathcal{H}_i \right] \quad (3.7)$$

où  $\mathcal{H}_i$  est l'ensemble des points définis par :  $\mathcal{H}_i = \{C_{i,j} \mid i + j \leq n\}$ . Cette erreur est estimée par

$$\hat{mse}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k} \left( \frac{1}{\hat{C}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right) \quad (3.8)$$

où  $\hat{C}_{i,k} = \hat{f}_{n-i+1} \cdots \hat{f}_{k-1} C_{i,n-i+1}$  pour tout  $k \geq n-i+1$  avec la convention  $\hat{C}_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1}$ ,

et

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k} \left( \frac{C_{i,k+1}}{C_{i,k}} - \hat{f}_k \right)^2, \quad k = 1, \dots, n-2.$$

La valeur de  $\hat{\sigma}_k^2$  pour  $k = n-1$  est extrapolée de telle sorte que

$$\frac{\hat{\sigma}_{n-3}^2}{\hat{\sigma}_{n-2}^2} = \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^2}{\hat{\sigma}_{n-1}^2}$$

Ce qui conduit à

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left\{ \frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min \{ \hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2 \} \right\}.$$

L'erreur quadratique moyenne du montant total de provisions,  $\hat{R} = \hat{R}_1 + \cdots + \hat{R}_n$  peut être estimée par

$$\hat{mse}(\hat{R}) = \sum_{i=2}^n \left( (mse(\hat{R}_i))^2 + \hat{C}_{i,n} \left( \sum_{j=i+1}^n \hat{C}_{j,n} \right) \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\frac{2\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \right) \quad (3.9)$$

Certes la méthode de Mack permet d'avoir les erreurs quadratiques moyennes de prédiction et le risque de provisionnement à l'ultime, elle présente tout de même des limites. En effet, elle ne permet pas d'avoir les distributions des réserves et les intervalles de confiance. Comme la méthode de Chain Ladder, ses hypothèses ne sont pas toujours vérifiées en pratique. Plusieurs raisons peuvent justifier le fait qu'en pratique l'hypothèse (H1) sur l'indépendance des années de survenance ne soit pas vérifiée, notamment :

- le changement dans l'organisation de l'équipe de gestion des sinistres, qui peut, par exemple, payer plus rapidement,
- les facteurs d'inflation (qui, certes n'interviennent pas sur les lignes du triangle, mais plutôt sur les diagonales) rendront les vecteurs non indépendants.

### 3.3.2 Application

Comme la méthode de Chain Ladder, nous appliquons le calcul de PSAP via la méthode de Mack sur le portefeuille de responsabilité civile automobile de MACSF (sinistres ouverts).

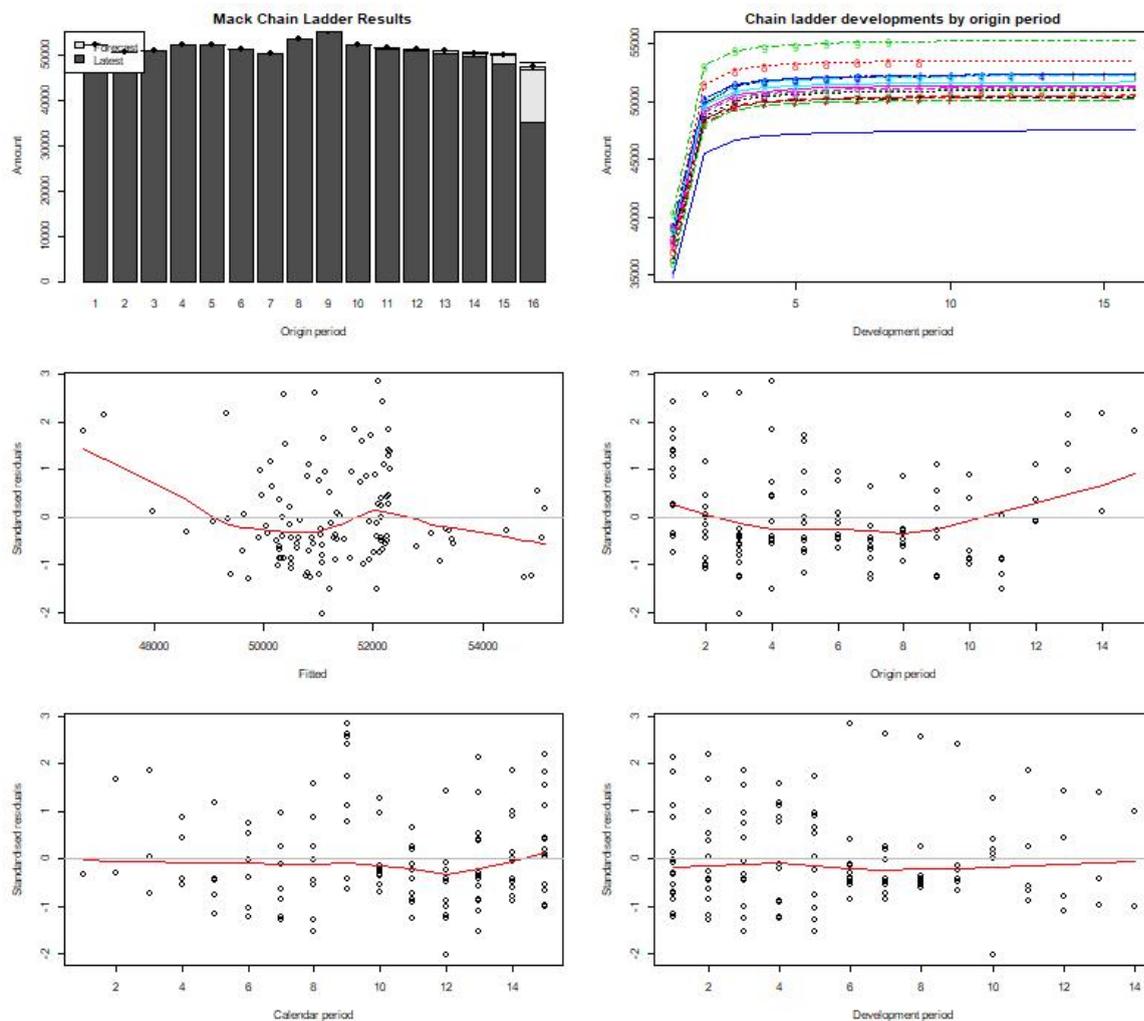


FIGURE 3.4 – Résultats graphiques du modèle de Mack

Au regard de la figure ci-dessus, les PSAP sont portées par les deux dernières années comme observé avec la méthode de Chain Ladder. On remarque également une variabilité faible du nombre de sinistres. Les résidus des années calendaires et développements ont une tendance linéaire.

Les tableaux ci-dessous présentent les résultats de la méthode de Mack :

Année Inv.	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2002	52 330	0	0	NaN
2003	50 519	7,72	2,12	0, 2742
2004	51 093	14,27	4,64	0, 325
2005	52 320	20,39	7,16	0, 3514
2006	52 201	28,95	8,2	0, 2833
2007	51 374	40,42	8,99	0, 2225
2008	50 340	53,09	9,28	0, 1748
2009	53 541	86,79	36,45	0, 42
2010	55 273	128,74	50,35	0, 3911
2011	52 329	173,1	56,98	0, 3292
2012	51 657	246,97	65,63	0, 2657
2013	51 209	362,8	73,01	0, 2013
2014	50 972	509,02	75,05	0, 1474
2015	50 435	835,85	82,46	0, 0987
2016	50 140	2 079,23	161,45	0, 0776
2017	47 507	12 312,71	827,85	0, 0672

TABLE 3.10 – Tardifs des sinistres ouverts estimés avec le modèle de Mack

Total	
Latest	806 340
Dev	0, 98
Ultimate	823 240
IBNR	16 900
Mack.S.E	879
CV(IBNR)	0, 05

TABLE 3.11 – IBNR estimés avec le modèle de Mack

Le modèle de Mack conduit à une provision globale de 16 900 sinistres, ce qui est exactement le même nombre observé avec le modèle de Chain Ladder. De plus, le modèle de Mack nous permet d'avoir une erreur d'estimation à l'ultime qui est de l'ordre de 879 sinistres.

Comme la méthode de Chain Ladder, la méthode de Mack présente des avantages et inconvénients :

- avantage : elle permet d'avoir l'incertitude d'estimation des réserves ;
- inconvénient : ses hypothèses ne sont pas toujours vérifiées (tout comme la méthode de Chain Ladder).

### 3.4 Méthode bootstrap

Le bootstrap est une méthode de simulation basée sur le rééchantillonnage des données avec un tirage aléatoire avec remise. Inventé par Efron en 1979, elle permet d'estimer la variabilité d'un paramètre. Simple à mettre en oeuvre, cette méthode

statistique est très utilisée en assurance non-vie. elle peut être associée à différentes méthodes d'estimation stochastique de provisions, en particulier les modèles MLG (Modèle linéaire généralisé).

L'hypothèse fondamentale de l'estimation par bootstrap est que les variables  $Z_{i,j}$  sur lesquelles le rééchantillonnage sera effectué doivent être indépendantes et identiquement distribuées (iid). En MLG, deux possibilités de rééchantillonnage sont possibles, l'une concerne directement les observations et l'autre concerne les résidus des estimations. Seule la deuxième possibilité peut être appliquée dans l'estimation des PSAP. En effet, les variables  $Z_{i,j}$  ne sont en général pas identiquement distribuées. Il est donc préférable d'avoir recours aux résidus du modèle, en particulier les résidus de Pearson car plus simples à calculer.

La méthode bootstrap impose de choisir un modèle d'estimation des paramètres, de définir l'expression des résidus et de déterminer une méthode de rééchantillonnage. Il est important de mentionner les remarques suivantes :

- pour corriger le biais dans la comparaison des estimateurs analytiques et bootstrap d'erreur de prédiction, il est conseillé d'ajuster les résidus en intégrant le nombre de paramètres de régression dans l'erreur de prédiction. On définit les résidus ajustés par  $r_{ij}^{aj} = \sqrt{\frac{N}{N-p}} r_{ij}^P$  où  $N$  est le nombre d'éléments de l'échantillon,  $p$  le nombre de paramètres de regression et  $r_{ij}^P$  les résidus de Pearson.
- Le modèle Log Poisson donnant les mêmes résultats que la méthode de Chain Ladder, l'utilisation de cette dernière est une solution pour réduire le temps de calcul.

### 3.4.1 Les étapes de la méthode bootstrap

- ajustement d'un modèle linéaire et estimation des valeurs  $\hat{\mu}_{ij}$ , avec  $\hat{\mu}_{ij}$  l'estimateur de vraisemblance de  $\mu_{i,j} = \mathbf{E}(Z_{i,j})$ ;
- calcul des résidus de Pearson du modèle :  $r_{ij}^P = \frac{Z_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{V}(\hat{\mu}_{ij})}}$ ;
- pour  $b = 1 \dots B$  ( $B = 5000$  par exemple)
  - rééchantillonnage avec remise des résidus. Ces résidus bootstrapés sont notés  $(r_{ij}^P)^b$
  - obtention d'un nouveau triangle appelé « pseudo-triangle », composé des valeurs  $(Z_{ij})^b = \hat{\mu}_{ij} + (r_{ij}^P)^b \sqrt{\mathbf{V}(\hat{\mu}_{ij})}$
- à l'aide d'une nouvelle modélisation MLG appliquée au pseudo triangle, on détermine une nouvelle estimation des provisions notée  $\hat{R}^b$

A partir des  $B$  échantillons de provisions  $\hat{R}^b$ , on peut déterminer la loi de la provision, estimer la moyenne, la variance et l'erreur de prédiction de provisions.

- $\mathbf{E}^b(\hat{R}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \hat{R}^b$ ;
- risque d'estimation :  $\mathbf{V}^b(\hat{R}) = \frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^B \left( \hat{R}^b - \mathbf{E}^b(\hat{R}) \right)^2$ ;
- risque de processus :  $\hat{V}_{risk}(R) = \hat{\phi} \sum_{i+j > n} \mathbf{V}(\hat{\mu}_{ij})$ , avec  $\hat{\phi}$  l'estimateur du paramètre de dispersion ;
- erreur de prédiction :  $sep(R) = \sqrt{\hat{V}_{risk}(R) + \mathbf{V}^b(\hat{R})}$

- Un intervalle de confiance du montant de réserves prédit peut être également déduit. Le théorème central limite assure une approximation de la loi des réserves par une loi normale de moyenne la moyenne estimée et d'écart type l'erreur standard de prédiction. Pour un seuil de risque à 5%, l'intervalle de confiance des réserves est donné par :

$$\left[ \mathbf{E}^b(\hat{R}) - 1,96sep(R); \mathbf{E}^b(\hat{R}) + 1,96sep(R) \right]$$

### 3.4.2 Application

Nous appliquons cette méthode à un portefeuille de responsabilité civile automobile de la MACSF. Plus précisément, sur le portefeuille des paiements. Les résultats sont présentés dans les tableaux ci-dessous :

Année	Mean Ultimate	Mean IBNR	IBNR.S.E	IBNR 75%	IBNR 95%
2002	96 300 000	0	0	0	0
2003	95 100 000	71 256	401	11	583
2004	87 700 000	90 936	465	52	828
2005	104 000 000	273 921	665 251	374 304	1 510 186
2006	93 600 000	42 383	751 094	616 153	1 914 274
2007	97 200 000	703 631	912 242	1 051 955	2 485 678
2008	109 000 000	1 775 678	1 373 636	2 494 627	4 433 826
2009	116 000 000	2 567 432	1 633 858	3 437 642	5 661 120
2010	123 000 000	5 033 570	2 271 767	6 351 979	9 218 297
2011	116 000 000	5 704 001	2 355 896	7 075 576	9 993 925
2012	121 000 000	6 939 853	2 577 560	8 455 211	11 574 606
2013	121 000 000	8 116 948	2 799 447	9 773 965	13 321 429
2014	125 000 000	10 394 582	3 206 780	12 400 347	15 987 240
2015	125 000 000	12 912 055	3 548 254	15 063 355	19 263 880
2016	130 000 000	19 707 229	4 422 313	22 524 814	27 430 258
2017	126 000 000	49 276 056	8 143 431	53 613 065	62 673 137

	Total
Latest	1 660 500 000
Mean Ultimate	1 785 900 000
Mean IBNR	123 609 531
IBNR.S.E	34 662 395
Total IBNR 75%	143 233 056
Total IBNR 95%	185 469 267

TABLE 3.12 – Paiements estimés avec la méthode bootstrap

Au regard des résultats présentés dans le tableau 3.12, nous constatons une variabilité entre les paiements de sinistres. Nous constatons également que le montant global de paiement est porté par les six dernières années.

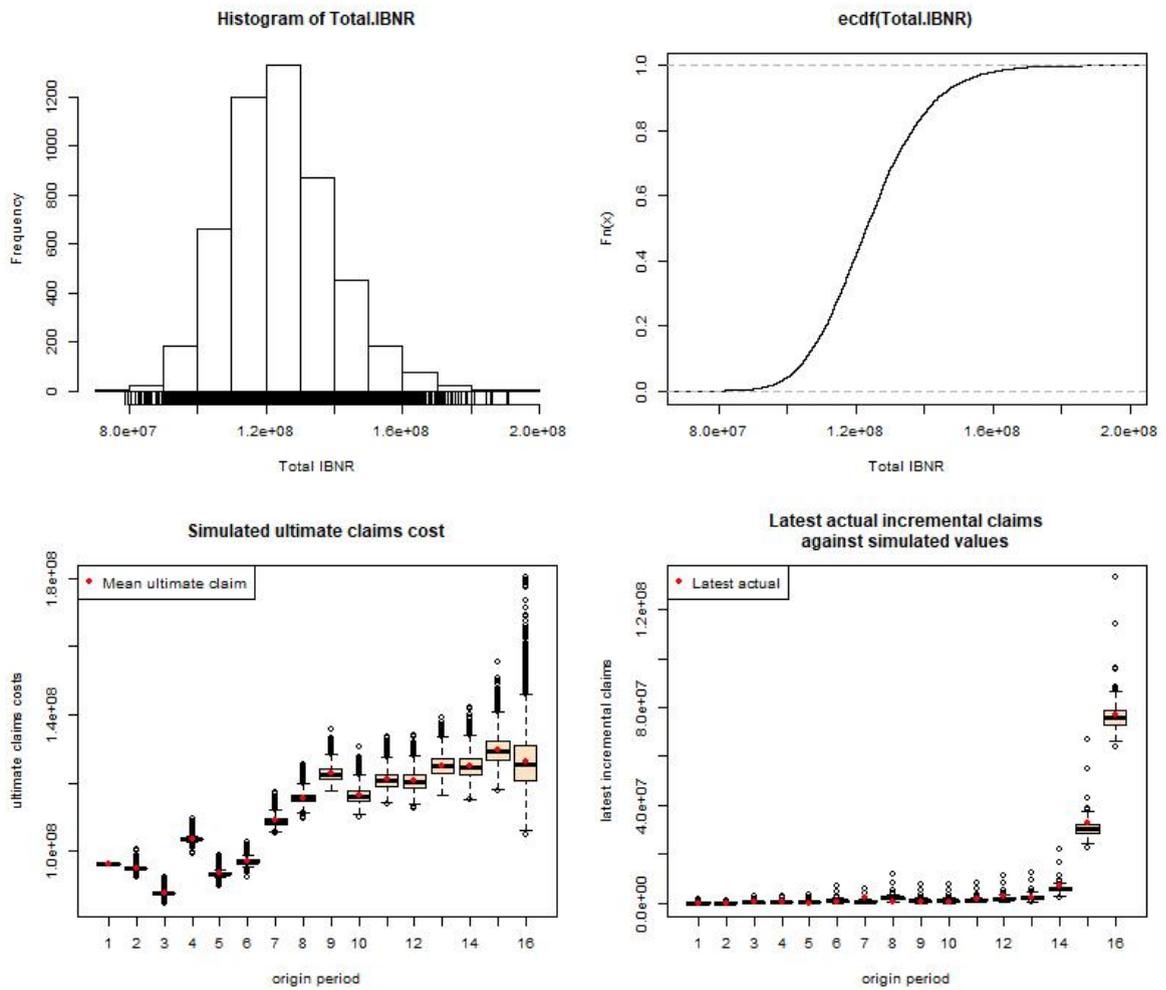


FIGURE 3.5 – Résultat graphique de la méthode bootstrap sur le triangle de paiements

Sur figure 3.5 ci-dessus, nous observons la distribution de paiements et la fonction de répartition cumulée des paiements. Nous constatons également une variabilité des paiements moyens à l'ultime.

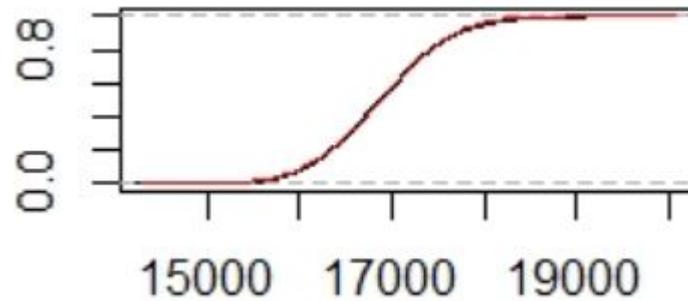


FIGURE 3.6 – Fonctions de répartition cumulées des paiements

Sur la figure 3.6 ci-dessus, on constate que la fonction de répartition cumulée estimée à partir de nos données (couleur noire) est presque confondue à la fonction de répartition cumulée théorique d’une loi normale (couleur rouge).

### 3.5 Conclusion

Ce chapitre portait sur la présentation de quelques méthodes classiques de provisionnement qui sont capitales pour la suite de ce mémoire. La méthode de Chain Ladder, tout comme le modèle de Mack, sont utilisées dans les prochains chapitres. Comme nous l’avons mentionné plus haut, ces méthodes sont faciles à implémenter malgré quelques insuffisances.

L’objectif du chapitre suivant est de s’intéresser à la modélisation de l’inflation dans nos triangles. Dans un premier temps, nous présentons la méthode de modélisation utilisée. Ensuite, nous faisons une application de ladite méthode tout en démontrant qu’en plus de l’inflation marché il existe une inflation superposée dans nos triangles qui dépend de la « Line of Business » (LoB). Enfin, nous menons une discussion sur les limites du modèle.

# Chapitre 4

## Modélisation de l'inflation

La modélisation de l'inflation reste cruciale et représente un problème majeur pour les assureurs. En général, ils détiennent dans leur portefeuille des sinistres qui vont être réglés sur plusieurs années, ce qui entraîne une période d'incertitude plus longue et un effet d'inflation important sur le montant de provisions. Une estimation efficiente de l'inflation est donc nécessaire pour minimiser le risque de sous-provisionnement.

Ce chapitre est dédié à la modélisation de l'inflation spécifique propre à une ligne de business d'une part, et d'autre part à l'estimation de l'inflation future. Nous utilisons la méthode de séparation de Verbeek [11, 13, 9] introduite dans la littérature en 1972 avec des hypothèses spécifiques limitant son champ d'application. Cette méthode fut étendue dans un contexte plus général par Taylor en 1977. Dans la suite, nous décrivons la méthode de séparation de Verbeek-Taylor. Puis, nous présentons notre méthodologie pour estimer l'inflation spécifique propre à chaque ligne d'activité. Enfin, nous estimons l'inflation future moyennant une méthode stochastique, l'idée étant de prendre en compte la variabilité des taux d'inflation sur le montant de provisions.

### 4.1 Mesure de l'inflation

Pour la mise en place du modèle de Verbeek-Taylor, nous avons besoin des informations suivantes :

1. l'historique des sinistres ouverts par année d'origine et par année d'inventaire ;
2. l'historique des paiements des sinistres par année d'origine et par année d'inventaire.

L'historique des sinistres ouverts est concilié au sein d'un triangle :

	années de développement							
années d'origine	0	1	2	...	...	...	...	k
0	$N_{0,0}$	$N_{0,1}$	$N_{0,2}$	...	...	...	...	$N_{0,k}$
1	$N_{1,0}$	$N_{1,1}$	...	...	...	...	$N_{1,k-1}$	
.	.	.	...	...				
.	.	.						
.	.							
k	$N_{k,0}$							

TABLE 4.1 – Historique des sinistres ouverts

Les  $N_{ij}$  représentent les sinistres cumulés ouverts d'année d'origine  $i$  et d'année de développement  $j$  ou bien le nombre de sinistres survenus l'année  $i$  après  $j$  années de développement.

Le triangle de paiements incrémentaux est présenté comme suit :

	années de développement							
années d'origine	0	1	2	...	...	...	...	k
0	$Z_{0,0}$	$Z_{0,1}$	$Z_{0,2}$	...	...	...	...	$Z_{0,k}$
1	$Z_{1,0}$	$Z_{1,1}$	...	...	...	...	$Z_{1,k-1}$	
.	.	.	...	...				
.	.	.						
.	.							
k	$Z_{k,0}$							

TABLE 4.2 – Triangle des paiements incrémentaux

Ici, chaque  $Z_{i,j}$  représente le montant des sinistres survenus l'année  $i$  et réglés pendant l'année d'inventaire  $i + j$ .

#### 4.1.1 Description de la méthode de séparation de Verbeek-Taylor

La méthode de séparation de Verbeek-Taylor permet d'exhiber les facteurs exogènes liés à l'année de paiement et les facteurs liés à l'année de développement. Elle repose sur deux hypothèses :

- (1) les montants des sinistres individuels sont affectés de la même manière ;
- (2) on suppose également que les ratios  $S_{i,j} = \frac{Z_{i,j}}{N_i}$  ( $N_i$  étant le nombre total de sinistres survenus pendant l'année d'origine  $i$ ) sont proportionnels à un indice  $\lambda$  qui est lié à l'année de paiement. Ici, les indices  $\lambda$  peuvent s'interpréter comme étant le coût moyen des sinistres prenant en compte l'inflation.

Suivant ces hypothèses citées plus haut, on peut déduire que les montants standardisés de sinistres sont de la forme  $S_{i,j} = r_j \lambda_{i+j}$ , où les  $r_j$  sont des facteurs constants se rapportant à l'année de développement  $j$  et sont tels que  $\sum_{j=0}^k r_k = 1$  et les  $\lambda_{i+j}$  sont des facteurs qui mesurent les influences exogènes liées à l'année de paiement. Ainsi, notre triangle standardisé est présenté comme suit :

	années de développement							
années d'origine	0	1	2	...	...	...	...	k
0	$r_0\lambda_0$	$r_1\lambda_1$	$r_2\lambda_2$	...	...	...	...	$r_k\lambda_k$
1	$r_0\lambda_1$	$r_1\lambda_2$	...	...	...	...	$r_{k-1}\lambda_k$	
.	.	.	...	...				
.	.	.						
.	.							
k	$r_0\lambda_k$							

TABLE 4.3 – Triangle standardisé des paiements

Le fait de travailler avec des montants standardisés  $S_{i,j}$  permet d'exclure l'inflation portée par la fréquence des sinistres. Toutefois, le nombre de sinistres survenus l'année d'origine  $i$  reste problématique car on ne connaît pas toujours le nombre de sinistres survenus l'année  $i$ . Il faudrait donc développer le triangle sur plusieurs années pour avoir la quasi totalité des sinistres survenus l'année  $i$  (afin de mieux capter le nombre de tardifs). Cependant, le nombre d'années de développement demeure problématique en ce sens que la réponse à la question suivante n'est pas évidente : Quel serait le seuil du nombre d'années de développement à retenir pour avoir des informations significatives ? Cette question est étroitement liée à la branche étudiée. Le seuil du nombre d'années serait plus important si nous sommes dans le cadre d'une branche longue. Sur une branche courte, on serait plus tenté à développer le triangle sur un nombre d'année plus restreint.

Notre problème actuel consiste à séparer les  $r_j$  des  $\lambda_{i+j}$ . Par définition des  $r_j$ , on a :

$$\sum_{j=0}^k r_j = 1. \quad (4.1)$$

Ainsi, en sommant suivant les diagonales de notre triangle on a :

$$d_k = \lambda_k(r_0 + \dots + r_{k-1} + r_k) = \lambda_k \quad (4.2)$$

Il s'en suit qu'un estimateur de  $\lambda_k$  est

$$\hat{\lambda}_k = d_k.$$

De même,

$$d_{k-1} = \lambda_k(r_0 + \dots + r_{k-1}) = \lambda_{k-1}(1 - r_k) \quad (4.3)$$

Une connaissance de  $r_k$  permet d'avoir un estimateur de  $\lambda_k$ . Un estimateur trivial de  $r_k$  est  $v_k$  qui est la somme de la  $k^{ime}$  colonne. Ainsi,

$$\hat{\lambda}_{k-1} = \frac{d_{k-1}}{(1 - r_k)}.$$

De manière récursive, on déduit que

$$\hat{\lambda}_h = \frac{d_h}{(1 - \hat{r}_k - \hat{r}_{k-1} - \dots - \hat{r}_{h+1})} \quad (4.4)$$

$$\hat{r}_j = v_j / (\hat{\lambda}_j + \hat{\lambda}_{j+1} \dots + \hat{\lambda}_k) \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Méthodologie

Après avoir décrit brièvement la méthode de séparation de Verbeek-Taylor, nous présentons dans cette section la démarche que nous utilisons pour estimer l'inflation dans nos triangles.

Pour estimer l'inflation dans un triangle, nous avons besoin du nombre total de sinistres par année de survenance, le triangle de règlements et l'historique de taux d'inflation monétaire obtenu à partir des indices de prix à la consommation fournis par l'INSEE.

- (1) nous estimons le nombre total de sinistres survenus par année d'origine via la méthode de Chain Ladder. Une vérification des hypothèses est nécessaire avant l'application du modèle ;
- (2) nous ramenons nos triangles de règlements en euro constant (triangle retraité de l'inflation monétaire) pour la raison suivante :
  - Isoler l'inflation monétaire dans le but de montrer qu'en dehors de l'inflation monétaire, il existe également une inflation qui dépend de la ligne d'activité qui s'ajoute à l'inflation monétaire (inflation superposée).

## 4.2 Illustration : Application sur le portefeuille de responsabilité civile automobile

Les informations dont nous disposons proviennent de la MACSF et la majorité des bases de données comprend la date de naissance, le numéro sociétaire, le sexe du sociétaire, le lieu de résidence et le type de contrat. Dans cette partie, nous nous appesantissons sur un portefeuille de responsabilité civile automobile (matérielle et corporelle). Précisons également que l'ensemble de nos études dans les deux prochains chapitres est réalisé avec la même base de données.

### 4.2.1 Application

Pour illustrer la méthode de Verbeek-Taylor, nous travaillons sur les données couvrant la période allant de 2002 à 2017. En effet, sur cette période, on a une régularité sur le nombre de sinistres ouverts. Intégrer les valeurs des années antérieures pourraient ainsi créer un biais sur nos taux d'inflation dont l'estimation est liée à la connaissance de l'ensemble des sinistres par année d'origine.

#### Application sur les paiements en euro courant

Dans un premier temps, nous travaillons avec le paiement en euro courant (euro en valeur nominale). Le triangle standardisé est alors présenté comme suit :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	1 122	469	110	40	18	9	8	9	22	9	5	15	0	1	0	1
2003	1 105	456	98	46	21	24	17	6	7	3	84	3	10	1	1	1
2004	1 117	442	87	30	16	12	9	3	7	2	1	1	1	7		
2005	1 122	478	86	45	64	8	10	6	192	1	3	7	2			
2006	1 093	435	96	35	22	19	10	47	18	4	2	1				
2007	1 136	499	85	39	25	14	10	34	11	21	4					
2008	1 361	459	89	41	37	13	31	23	32	44						
2009	1 349	535	86	41	39	14	38	6	4							
2010	1 395	527	110	41	60	27	21	11								
2011	1 371	522	90	51	28	35	13									
2012	1 459	528	111	46	26	36										
2013	1 442	539	123	42	53											
2014	1 505	578	120	47												
2015	1 513	571	133													
2016	1 545	648														
2017	1 618															

FIGURE 4.1 – Triangle standardisé construit

Les estimateurs des paramètres du modèle sont récapitulés dans le tableau suivant :

$\alpha_k$	1 122	1 574	1 683	1 701	1 723	1 716	2 048	2 031	2 065	2 099	2 216	2 502	2 367	2 406	2 431	2 623
$v_k$	21 193	7 686	1 423	543	410	210	168	145	293	83	100	27	13	9	1	1
$\lambda_k$	1 798	1 823	1 849	1 831	1 824	1 801	2 133	2 100	2 101	2 125	2 228	2 510	2 372	2 407	2 432	2 623
$r_k$	0,62	0,24	0,05	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

FIGURE 4.2 – Paramètres estimés du modèle de Verbeek

Les  $r_k$  peuvent être vus comme une pondération des années de développement. Au regard du tableau ci-dessus (4.2), nous constatons que l'importance de la pondération est directement proportionnelle à la disponibilité de l'information. Les  $\lambda_k$  représentent le coût moyen des sinistres qui prennent en compte l'inflation. Les taux d'inflation sont obtenus en effectuant le calcul  $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} - 1$ . La courbe de taux d'inflation historique obtenue est présentée dans le tableau suivant :

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Taux Inf	0,00	0,02	-0,02	0,00	0,00	0,16	-0,02	0,04	-0,01	0,05	0,08	0,00	0,01	0,05	0,02

TABLE 4.4 – Inflation historique estimée

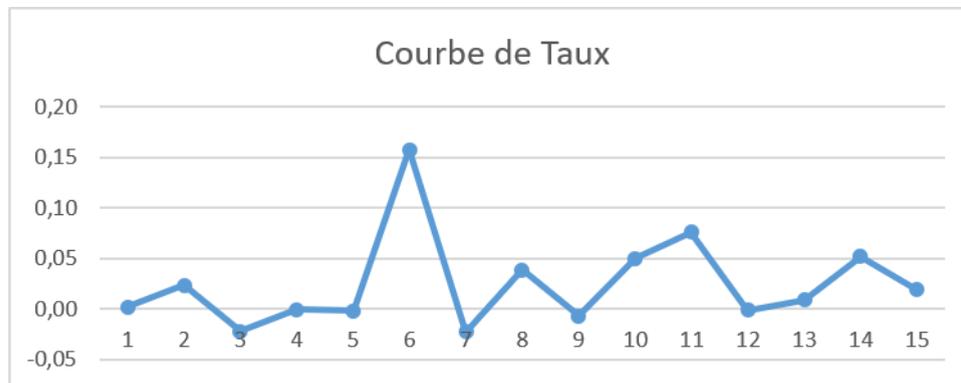


FIGURE 4.3 – Courbe de l'inflation historique estimée

Les pics observés (2008 et 2013) sont liés aux paiements exceptionnels des sinistres corporels, qui ont un impact considérable sur les taux d'inflation. Il convient donc que la courbe de taux d'inflation obtenue par application direct du modèle de

Verbeek à nos données ne reflète pas l'inflation réelle contenue dans nos triangles. Celle-ci étant influencée par des paiements exceptionnels survenus lors des années 2008 et 2013. Il serait alors judicieux de trouver un palliatif qui prendra en compte l'effet des paiements exceptionnels.

### Application sur les paiements en euro constant

Dans cette seconde approche, nous retraits notre triangle de l'inflation monétaire à l'aide des taux d'inflation fournis par l'INSEE. Cette approche a un double objectif :

- montrer qu'en dehors de l'inflation marché, il existe bel et bien une inflation superposée ;
- montrer que l'indice de prix à la consommation n'est pas toujours le meilleur indicateur de l'évolution de l'inflation.

Ci-dessous, nous présentons les taux utilisés pour retraiter notre triangle de l'inflation marché.

Historique Infl. Marché		
	Indice	Taux en euro 2017
2002	81,44	1,26
2003	82,82	1,24
2004	84,50	1,21
2005	86,39	1,19
2006	87,98	1,17
2007	90,68	1,13
2008	92,08	1,11
2009	92,81	1,11
2010	94,79	1,08
2011	97,34	1,05
2012	99,46	1,03
2013	100,22	1,02
2014	99,99	1,03
2015	100,16	1,02
2016	101,26	1,01
2017	102,57	1,00

TABLE 4.5 – Courbe de Taux d'inflation (IPC source : INSEE)

Une observation de la courbe ci-dessus permet de constater que les indices d'inflation sont croissants avec l'année d'inventaire jusqu'à 2013. En 2014, on a une légère baisse et entre 2015 et 2017 une hausse est observée. Une utilisation de ces indices nous permet d'avoir les taux en euro 2017 présent dans le tableau. Ces taux nous permettent de construire notre triangle en euro constant.

Notre triangle standardisé en euro constant (euro 2017) est présenté dans le tableau ci-dessous :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2002	1413	581	133	47	21	10	9	10	24	9	6	16	0	1	0	1
2003	1368	554	116	54	24	26	19	6	7	3	86	3	10	1	1	
2004	1355	525	102	34	17	14	10	3	8	2	1	1	1	7		
2005	1331	557	97	50	71	9	10	6	196	1	3	7	2			
2006	1274	491	107	39	24	20	10	48	18	4	2	1				
2007	1285	556	94	42	27	14	10	35	11	21	4					
2008	1516	507	96	44	38	13	32	23	33	44						
2009	1491	579	90	42	40	14	39	6	4							
2010	1445	556	113	42	61	27	21	11								
2011	1445	539	92	52	29	36	13									
2012	1505	540	114	48	27	36										
2013	1476	553	126	42	53											
2014	1544	591	121	47												
2015	1550	579	133													
2016	1565	648														
2017	1618															

FIGURE 4.4 – Triangle standardisé construit (euro constant 2017)

Les paramètres du modèle de Verbeek sont consignés dans le tableau ci-dessous :

d_k	1413	1949	2043	2019	2008	1941	2281	2244	2234	2212	2285	2560	2428	2464	2462	2623
v_k	23181	8356	1535	582	432	219	174	149	301	84	102	27	13	9	1	1
Lambda_k	2266	2258	2244	2173	2126	2037	2375	2320	2273	2239	2297	2569	2433	2465	2463	2623
r_k	0,62	0,24	0,05	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,02	0,00	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

FIGURE 4.5 – Paramètres estimés du modèle de Verbeek (euro constant 2017)

Une comparaison des paramètres du modèle de Verbeek en euro constant (l'inflation monétaire neutralisée) d'une part et en euro courant d'autre part nous permet de constater que les pondérations  $r_k$  sont sensiblement égales, les indices d'inflation  $\lambda_k$  en euro constant (euro 2017) sont plus élevés qu'en euro courant. Cette hausse s'explique par les taux d'inflation fournis par les indices de prix à la consommation (cf : table 4.5) qui sont très élevés et croissants avec l'année d'inventaire. La courbe de taux ainsi obtenue est donnée dans le tableau ci-dessous :

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Taux Inf	0,00	-0,01	-0,03	-0,02	-0,04	0,17	-0,02	-0,02	-0,02	0,03	0,12	-0,05	0,01	0,00	0,06

TABLE 4.6 – Inflation historique estimée (euro constant 2017)

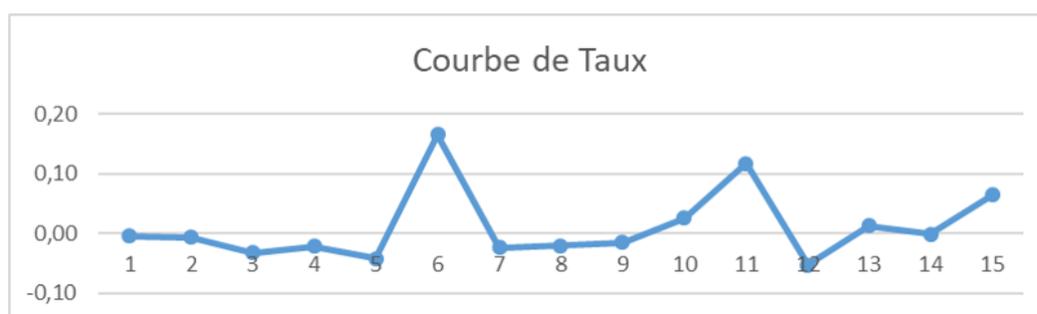


FIGURE 4.6 – Courbe de taux en euro constant 2017

On constate que la courbe de taux en euro constant à la même tendance que la courbe de taux en euro courant. Ceci permet de conclure qu'en dehors de l'inflation

portée par l'indice du prix à la consommation, il existe une autre inflation (Inflation superposée). De plus, l'indicateur du prix à la consommation fourni par l'INSEE n'est pas le meilleur indicateur pour mesurer l'inflation dans notre triangle.

### 4.3 Version stochastique du modèle de Verbeek non paramétrique

Dans section, nous présentons la principale contribution que nous apportons dans ce mémoire. En effet, nous allons proposer une version palliative (non paramétrique) au modèle de Verbeek, dans l'optique de corriger les pics constatés (Comme il a été mentionné ci-dessus à la section 4.2.1) tout en tenant compte des paiements exceptionnels effectués en 2008 et 2013. Ci-dessous, nous proposons une description de notre méthode :

1. constituer après retraitement une base ligne à ligne de nos sinistres par année de survenance, année d'inventaire et montant réglé ;
2. pour chaque ligne, créer une clé avec le numéro contrat, le code sinistre, l'année de de survenance ;
3. pour chaque année de survenance, effectuer  $n$  ( $n$  étant le nombre de sinistres survenus lors de ladite année de survenance) tirages avec remise ;
4. construire une base agrégée de paiement en trois dimensions : année de survenance, année d'inventaire et paiement ;
5. construire le triangle de paiement ;
6. déterminer la courbe de taux via le modèle de séparation de Verbeek ;
7. répéter les étapes 3, 4, 5 et 6 un nombre de fois  $B$  suffisamment grand ;
8. déterminer la courbe de taux d'inflation « moyenne » ;

L'étape 3 de notre méthode nous permet de conserver la distribution du nombre de sinistres survenus. Conserver la distribution du nombre de sinistre par année de survenance reste une hypothèse majeure. Un tirage par année d'inventaire entraînerait une dégradation du nombre de sinistres et également des coûts de sinistres. Pour la mise en place de cette méthode, nous avons effectué plusieurs simulations et les différentes courbes de taux obtenues sont dans la figure ci-dessous :

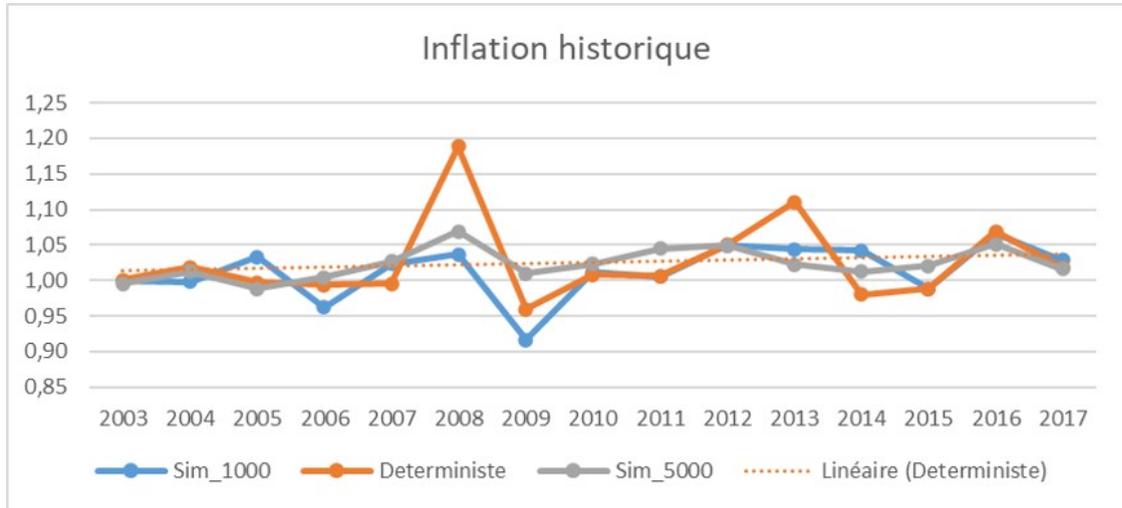


FIGURE 4.7 – Courbe de taux estimés(modèle de Verbeek non paramétrique)

On constate que la courbe obtenue après plusieurs simulations (5000 simulations) corrige les pics observés via la méthode directe de Verbeek. Comme observé sur la version déterministe, on constate qu'en 2008 il y a bel et bien une inflation élevée que toutes les autres années. Une partie de cette inflation peut s'expliquer par la crise de 2008 et la seconde partie par l'état des victimes qui n'est pas encore stable. Le pic observé en 2013 est quasiment proche de 1.

## 4.4 Méthode stochastique paramétrique du modèle de Verbeek

Comme la méthode de Chain Ladder, la méthode de séparation de Verbeek a été formulée dans un cadre déterministe. La version stochastique de la méthode de séparation de Verbeek découle des travaux de thèse de Susanna Björkwall [1]. Cette méthode a été introduite dans la littérature en 2013, par Susanna Björkwall and al. Dans cette section, nous présentons la méthode. Tout le long de cette section, les notations suivantes seront utilisées :

- $\Delta$  désigne le triangle inférieur ;
- $\nabla$  désigne le triangle supérieur ;
- $\Delta Z_{ij}$  désigne le triangle inférieur de paiement incrémental ;
- $\nabla Z_{ij}$  désigne le triangle supérieur de paiement incrémental ;
- $N_i$  désigne le nombre de sinistre à l'ultime survenu au cours de l'année d'origine  $i$  ;
- $n_{ij}$  désigne le nombre de sinistres ouverts pour le compte de l'année d'origine  $i$  et année de développement  $j$  ;
- $Z_{ijl}$  un paiement individuel et  $Z_{ij} = \sum_{l=0}^{n_{ij}} Z_{ijl}$ .

### 4.4.1 Description de la méthode

Dans cette sous-section, nous présentons la version bootstrap paramétrique de la méthode de séparation de Verbeek-Taylor. Premièrement, les hypothèses sur lesquelles repose le modèle seront présentées et deuxièmement une description des différentes étapes conduisant à la mise en place de la méthode bootstrap paramétrique.

- La méthode bootstrap paramétrique implémentée repose sur deux hypothèses :
- (H1) les sinistres incrémentaux  $n_{ij}$  sont indépendants et suivent une loi de Poisson ;
  - (H2) les montants de paiements individuels  $Z_{ijl}|N_i$  sont indépendants et suivent une loi Gamma, c'est-à-dire

$$Z_{ijl}|N_i \in \Gamma\left(\frac{1}{\phi}, r_j \lambda_h \phi\right).$$

De l'hypothèse (H2) il s'en suit que :

$$Z_{ij}|N_i \in \Gamma\left(\frac{N_i}{\phi}, r_j \lambda_h \phi\right), \quad (4.6)$$

Ainsi, on a

$$\mathbf{E}(Z_{ij}|N_i) = N_i r_j \lambda_h \quad (4.7)$$

$$\text{Var}(Z_{ij}|N_i) = \phi N_i r_j^2 \lambda_h^2 = \phi \frac{\mathbf{E}^2(Z_{ij}|N_i)}{N_i} \quad (4.8)$$

Un estimateur de  $\phi$  est donné par :

$$\hat{\phi} = \frac{1}{|\nabla| - q} \sum_{\nabla} \hat{N}_i \frac{(Z_{ij} - \hat{N}_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_h)^2}{(\hat{N}_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_h)^2} \quad (4.9)$$

où  $|\nabla| = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  désigne le nombre d'observation du triangle supérieur de paiement. L'estimateur de  $N_i$  est donné par la méthode de Chain Ladder. Les estimateurs  $\hat{r}_j$  et  $\hat{\lambda}_h$  sont obtenus à partir des équations (4.4) et (4.5) et  $q = 2k + 1$  est le nombre de paramètres à estimer via la méthode de séparation de Verbeek.

### 4.4.2 Mise en place de la méthode

La mise en place de la méthode paramétrique suit les étapes suivantes :

**étape 0** déterminer  $\hat{R}_i$  et  $\hat{R}$  par la méthode de séparation de Verbeek-Taylor en utilisant les données initiales ;

**étape 1** estimer tous les sinistres ouverts  $\hat{n}_{ij}$  ;

**étape 2** estimer le pseudo-triangle des sinistres ouverts  $\nabla N^*$  comme suit :

- pour tout  $i, j \in \nabla$ , tirer un échantillon  $N_{ij}^*$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\hat{n}_{ij}$  pour obtenir le triangle supérieur de sinistres ouverts  $\nabla n_{ij}$ .
- déterminer le nombre de sinistres à l'ultime  $\hat{N}_i^*$  suivant chaque année d'origine par la méthode de Chain Ladder ;

**étape 3** construire le pseudo-triangle  $\nabla Z^*$  :

- pour tout  $i, j \in \Delta$ , tirer un échantillon  $N_{ij}^*$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\hat{n}_{ij}$ .
- déterminer le nombre de sinistres à l'ultime  $\hat{N}_i^{**}$  suivant chaque année d'origine à partir des triangles  $\nabla N^*$  et  $\Delta N^{**}$ , c'est-à-dire

$$N_i^{**} = \sum_{\nabla_i} N_{ij}^* + \sum_{\Delta_i} N_{ij}^{**}.$$

- pour  $i, j \in \nabla$ , construire des pseudo-réalisations  $C_{ij}^* | N_i^{**}$  en simulant un échantillon de loi Gamma de paramètres  $\frac{N_i^{**}}{\phi}$ ,  $\hat{r}_j \hat{\lambda}_h \hat{\phi}$
- appliquer la méthode de séparation de Verbeek-Taylor sur les triangles  $\nabla N^*$  et  $\nabla Z^*$  pour obtenir respectivement les réserves suivant l'année d'origine  $R_i^*$  et la réserve totale  $R^* = \sum R_i^*$ ;

**étape 4** estimation de  $R^{**}$  :

- pour  $i, j \in \Delta$ , construire des pseudo-réalisations  $Z_{ij}^{**} | N_i^{**}$  en simulant un échantillon de loi Gamma de paramètres  $\frac{N_i^{**}}{\phi}$ ,  $\hat{r}_j \hat{\lambda}_h \hat{\phi}$ .
- calculer les réserves  $R_i^{**} = \sum_{j \in \Delta_i} Z_{ij}^{**}$  et déduire  $R^{**} = \sum R_i^{**}$ .
- calculer l'erreur de prédiction non standardisée  $pe_i = R_i^{**} - R_i^*$  et  $pe = R^{**} - R^*$ ;

**étape 5** répéter les étapes 2, 3 et 4 un nombre de fois  $B$  suffisamment grand ;

**étape 6** déduire la distribution de prédiction de  $R_i$  et  $R$  à l'aide des  $B$  quantités  $\hat{R}_i^B = \hat{R}_i + pe_i$  et  $\hat{R}^B = \hat{R} + pe$ .

## 4.5 Discussion

La méthode de séparation de Verbeek comme la méthode de Chain Ladder fut implémentée comme une méthode déterministe. La version stochastique de Chain Ladder fut introduite par Mack (1993) [7] qui proposa une expression analytique de l'erreur quadratique de prédiction (MSEP).

La figure ci-dessous présente une comparaison entre les règlements réellement effectués et les règlements évalués par différente méthode d'estimation (méthode directe et méthode bootstrap non paramétrique). La comparaison ci-dessous est faite par année d'inventaire.

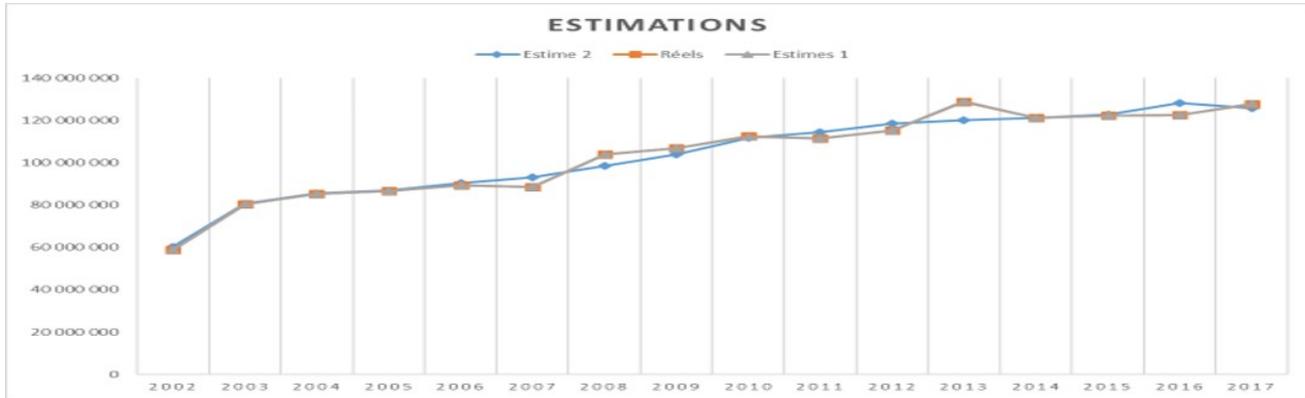


FIGURE 4.8 – Comparaison des différentes approches d’estimation de l’inflation par année d’inventaire

Selon la méthode d’estimation, nous pouvons faire les remarques suivantes :

— Pour la méthode directe (estimés 1)

A l’exception des années 2002, 2005, 2008 et 2013 où on a une surestimation des paiements historiques, les autres années sont sous-estimées par cette méthode. L’utilisation de cette méthode conduit à un mali qui est de l’ordre de  $-282K$ . Deux facteurs peuvent expliquer cette discordance qui existe entre le modèle et les paiements réellement observés

1. les paiements exceptionnels constatés en 2008 et 2013 qui impactent à la fois les colonnes et les diagonales et par conséquent les paramètres du modèle ;
2. les hypothèses du modèle de Verbeek qui ne tiennent pas compte de l’année de survenance ;

— Pour la méthode bootstrap non paramétrique (estimés 2)

A l’exception des années 2008 et 2013 où on a des écarts importants, ce modèle surestime les paiements historiques. Ce qui conduit à un boni de l’ordre de  $685K$ . Comme le premier modèle, les surestimations sont dues aux hypothèses du modèle de Verbeek qui ne prennent pas en compte les effets exogènes liés à l’année de survenance. Pour des raisons de prudence, ce modèle semble adéquat. Nous l’utiliserons pour la suite de notre étude.

Pour la version stochastique paramétrique que nous avons présenté à la sous-section 4.4.1, l’erreur de prédiction reste problématique. Ceci étant dû à la complexité d’estimation des matrices de variance-covariance des paramètres  $r_j$ ,  $\lambda_h$  et tous les paramètres liés à l’estimation de  $\mathbf{E}(N_i)$ . Dans les années 2000, England et Verrall [4] proposèrent la méthode bootstrap dans le but d’obtenir la distribution des réserves moyennant les outils des modèles linéaires généralisés. Dans le contexte actuel, nous ne pouvons pas utiliser les techniques de modèles linéaires généralisés pour la simple raison que les  $Z_{ij}$  partagent le même  $N_i$  d’où la dépendance entre les  $Z_{ij}$ .

La méthode que nous proposons découle des travaux de Björkwall et al [1] dont la mise en place suppose que les montants des sinistres incrémentaux suivent une loi

Gamma. Cette hypothèse n'est pas toujours vérifiée, auquel cas il faudra estimer les paramètres de la nouvelle loi qui reste problématique car ils sont liés aux paramètres  $r_j$  et  $\lambda_h$  de Verbeek. Toutefois, cette méthode peut être utilisée dans un contexte où les paiements historiques sont moins volatiles. En effet, elle permet d'avoir une projection du triangle de paiement en se basant sur la moyenne géométrique des taux d'inflation.

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté nos différentes techniques de modélisation de l'inflation historique. Ces méthodes sont toutes greffées sur le modèle de séparation de Verbeek. Une application directe de cette méthode sur un portefeuille en euro courant et euro constant nous a permis de constater la présence d'une inflation superposée (l'inflation additionnelle provenant généralement de la législation, l'état des victimes, la politique de règlement ...). Toutefois, avec un historique important de données, on pourrait répondre à la question de dépendance entre les taux d'inflation fournis par l'INSEE et ceux mesurés par le modèle de Verbeek.

Comme il a été mentionné à la section 4.2.1, la méthode dite directe (méthode déterministe) ne génère pas une courbe de taux adéquate avec l'évolution de nos règlements. En effet, les résultats sont biaisés dans le sens où certains paiements extrêmes impactent la diagonale des triangles et par conséquent les paramètres du modèle de séparation de Verbeek. Cette méthode serait plus adaptée à un portefeuille où les paiements sont moins volatiles. Comme alternative, nous avons proposé deux méthodes basées sur le bootstrap :

- bootstrap non paramétrique ;
- bootstrap paramétrique.

De part son caractère prudent (présence de boni), le modèle non paramétrique nous paraît adéquat. En effet, cette méthode ne fait aucune hypothèse de loi et nous donne des résultats qui nous semblent plus cohérents et prudents. Toutefois, elle présente un inconvénient dans sa mise en place qui est coûteuse en temps de calcul. Quant à la seconde méthode (bootstrap paramétrique), sa mise en place nécessite une validation des hypothèses, ce qui n'a pas été le cas pour notre jeu de données. En dehors de la validation des hypothèses, plusieurs points d'ombre ont été mentionnés dans la section discussion en 4.5 notamment l'estimation des paramètres et l'erreur de prédiction. Dans la suite de notre mémoire, la première méthode est utilisée pour l'évaluation des provisions et des études de sensibilité.

# Chapitre 5

## Évaluation des provisions avec prise en compte de l'inflation

Dans ce chapitre, nous utilisons les résultats précédents pour évaluer les provisions pour sinistres à payer (PSAP) sur la branche de responsabilité civile automobile de la MACSF. Dans un premier temps, nous allons estimer les taux d'inflation à l'aide du modèle de Vasicek [12]. Ensuite, nous allons présenter nos différentes méthodes d'évaluation de provisions. Enfin, une comparaison des différentes méthodes et conclusion seront présentées.

### 5.1 Description du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek (1977) est un modèle de taux généralement utilisé pour la modélisation des taux courts possédant la propriété de retour à la moyenne.

Le modèle de Vasicek (1977) est décrit par le processus stochastique de Ornstein-Uhlenbeck donné par :

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dw_t \quad (5.1)$$

Où

- $r_t$  représente le taux d'inflation à l'instant  $t$ ;
- $k$  la vitesse de retour à la moyenne sur le long terme ;
- $\sigma$  la volatilité des taux d'inflation ;
- $w_t$  un mouvement Brownien.

Le terme en  $dt$  du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long terme  $\theta$  avec une vitesse de retour à la moyenne  $k$ . La variable  $\sigma$  est la volatilité du taux court.

**Proposition 1** *La solution de l'équation différentielle stochastique (5.1) est donnée par :*

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dw_u \quad (5.2)$$

Pour la résolution on applique le Lemme de Itô à  $Y_t = r(t)exp(kt)$ .

**Corollaire 1** *Conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$ ,  $s < t$ ,  $r(t)$  est un processus gaussien de moyenne et variance :*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{P}}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \quad (5.3)$$

$$\mathbf{Var}_{\mathbf{P}}[r_t|\mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2k(t-s)})}{2k} \quad (5.4)$$

Les propriétés de  $r_t$  découle du fait que  $\int_s^t e^{-k(t-u)} dw_u$  est, conditionnellement à  $\mathcal{F}_s$ , une martingale gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\int_s^t e^{-2k(t-u)} du$ . Ainsi,  $r_t$  peut être négatif ou positif. Ce modèle nous paraît donc mieux adapté pour notre étude dans le sens où nous pouvons avoir des taux d'inflation négatifs. Nous constatons également que pour un  $t$  suffisamment grand, la moyenne conditionnelle tend vers  $\theta$  et la variance vers  $\frac{\sigma^2}{2k}$ . Par conséquent, la propriété de retour à la moyenne est obtenue analytiquement.

De l'équation (5.2), on peut déduire :

$$r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \sqrt{\frac{\sigma^2(1 - e^{-2k(t-s)})}{2k}} \epsilon_t \quad (5.5)$$

où  $\epsilon$  est un bruit blanc.

Cette dernière formulation permet de calibrer le modèle de Vasicek à partir des données historiques. Cette calibration se fait à l'aide d'une régression linéaire sur deux jeux de données créés à partir des données historiques. Cette régression donne un modèle de la forme

$$r_{t+1} = \beta_1 r_t + \beta_0 + \epsilon_t \quad (5.6)$$

A partir des paramètres de la régression, on déduit les paramètres du modèle de Vasicek comme suit :

$$k = -Ln(\beta_1)$$

$$\theta = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\mathbf{Var}(\epsilon)}{\frac{1 - e^{-2k}}{2k}}$$

Le modèle de Vasicek présente de nombreux avantages :

- il permet d'avoir des formules fermées ;
- la résolution de l'équation différentielle stochastique (5.1) permet d'avoir une discrétisation de Euler ;
- ce modèle est facile à mettre en oeuvre.

Comme tout modèle, le modèle de Vasicek n'est pas adéquat dans certaines études dans le sens où il peut produire des taux négatifs. Cependant, dans un contexte de taux bas voire négatifs apparus ces dernières années, cet inconvénient peut être vu comme un avantage.

Les résultats de la calibration de la courbe de taux d'inflation historique obtenue par la méthode bootstrap sur la base des données en euro courant sont présentés dans le tableau ci-dessous :

k	1.76
$\theta$	0.03
$\sigma$	0.06

TABLE 5.1 – Paramètres estimés du modèle de Vasicek

La courbe de taux d’inflation future obtenue par le modèle de Vasicek est donnée par la figure ci-dessous :

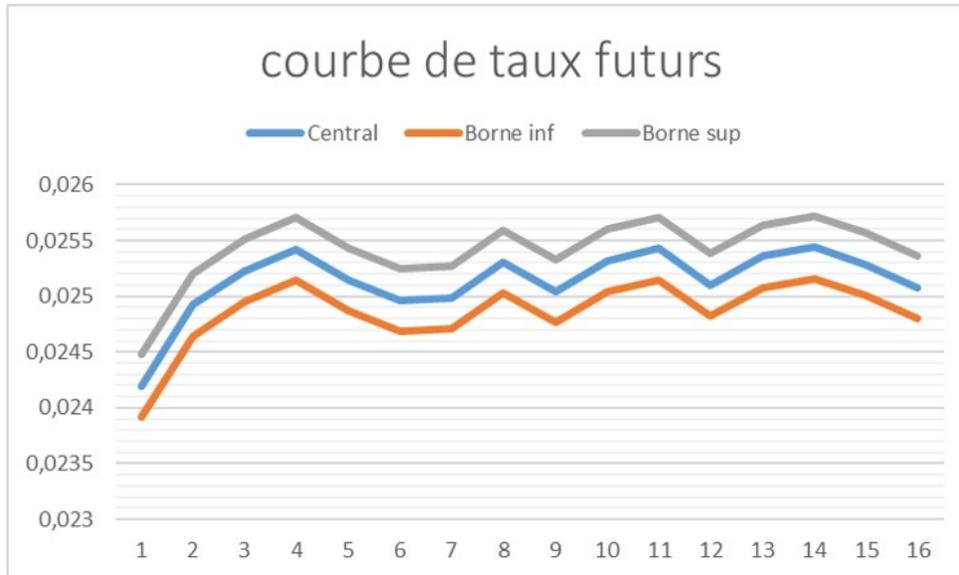


FIGURE 5.1 – Courbe d’inflation future et intervalle de confiance

Sur la figure 5.1, on peut observer la courbe de taux d’inflation future estimée via le modèle de Vasicek avec 50000 simulations et l’intervalle de confiance à 95%. On observe une hausse des taux sur les 4 prochains exercices puis une stabilité de la courbe entre 0,025 et 0,0255. On peut également observer des pics sur les quatrième, huitième et onzième maturité, ce qui serait une réflexion des pics observés dans notre historique respectivement en 2008 et 2013.

## 5.2 Évaluation des provisions

Dans cette section, nous présentons nos différentes méthodes d’évaluation des provisions avec une prise en compte explicite de l’inflation. Nous allons détailler chacun des modèles, présenter des applications, des avantages et des inconvénients. Nous distinguons trois modèles d’évaluation des provisions :

- modèle 1 : nommé modèle Statu Quo  
Ici, nous projetons l’inflation implicite contenue dans nos triangles via les modèles classiques (Chain Ladder, Mack, ...);
- modèle 2 : nommé modèle CL-Verbeek  
Dans ce modèle, nous effectuons deux retraitements des triangles. Un premier retraitement pour neutraliser l’effet inflation et un second retraitement

- pour réajuster la partie inférieure du triangle obtenue en utilisant un modèle classique de provisionnement (Chain Ladder, Mack, ...);
- modèle 3 : nommé modèle de Verbeek-Vasicek  
Ici, aucun retraitement du triangle initiale n'est effectué. Une décomposition des paiements incrémentaux est effectuée [2] d'une part et d'autre part, une estimation des paramètres est faite pour constituer la partie inférieure de nos triangles.

## 5.2.1 Description des modèles

### Modèle 1 : modèle statu quo

Le schéma ci-dessous donne une représentation du modèle. Le modèle 1 encore appelé Statu Quo est un modèle simple dans le sens où sa mise en place repose sur des hypothèses simples. En effet, dans ce modèle on suppose que l'inflation est quasiment constante et que l'inflation implicite constatée dans notre historique doit s'étendre dans le futur.

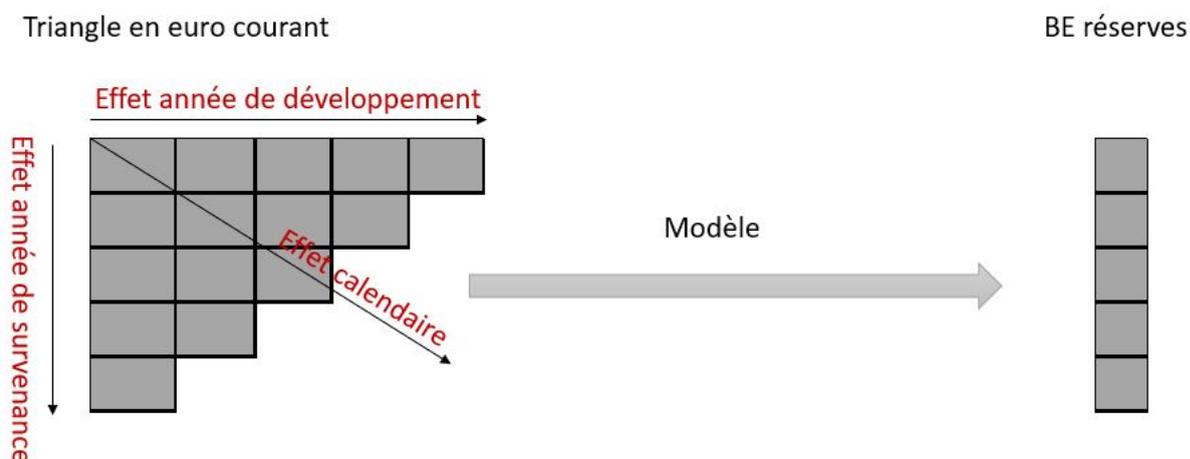


FIGURE 5.2 – Représentation graphique du modèle 1

Dans le contexte d'inflation quasiment constante, une application de ce modèle associé aux modèles classiques (Chain ladder, Mack ou Munich Chain qui sont des méthodes qui reposent sur l'hypothèse selon laquelle l'inflation observée dans nos triangles s'étend dans le futur) semblerait adéquate. Dans le modèle 1, nous travaillons uniquement en euro courant, la nécessité de faire le distinguo entre l'euro constant et l'euro courant ne se pose pas. Dans un environnement d'inflation instable, ce modèle présente des limites. Pour pallier à celles-ci, nous avons développé deux autres modèles qui feront l'objet des sous sections suivantes.

## Application du modèle 1 sur un jeu de données

Dans cette partie, nous présentons une application du modèle Statu Quo sur un jeu de données. Pour l'application du modèle 1, nous utiliserons le modèle de Chain Ladder. Dans un premier temps, nous validerons les hypothèses du modèle de Chain Ladder. Ensuite, nous présenterons les résultats de nos calculs et nous finirons par une analyse des résultats. Comme nous l'avons mentionné au Chapitre 3, le modèle de Chain Ladder repose sur deux hypothèses fortes :

- l'existence d'un facteur  $f_j$  tel que  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$  ;
- indépendance des années de survenance.

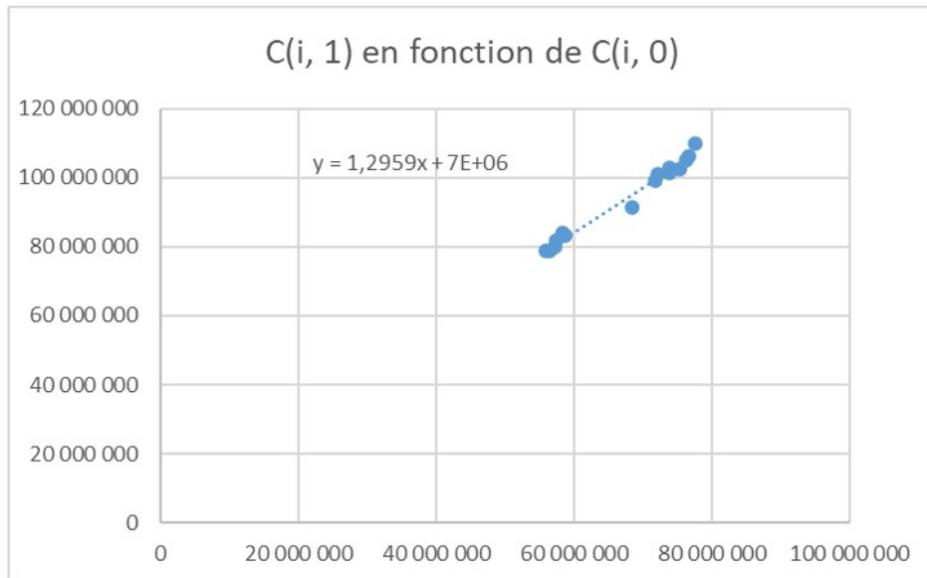


FIGURE 5.3 – Vérification de hypothèse 1 (C-C plot pour  $j=0$ )

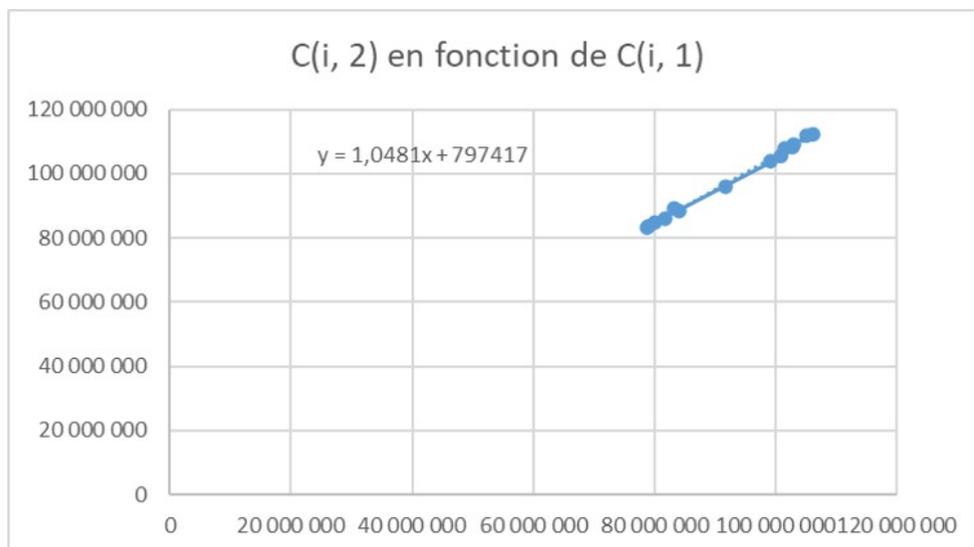


FIGURE 5.4 – Vérification de hypothèse 1 (C-C plot pour  $j=1$ )

Comme nous pouvons le constater, sur les figures 5.3 et 5.4, les  $C_{ij}$  ne passent pas forcément pas l'origine.

	D	U	N	Vérif	Z=min(D;U)	n=D+U	m=ent(n-1/2)	E	Var
1	0	1	0	1	0	1	0	0,00	0,00
2	0	2	0	2	0	2	0	0,50	0,25
3	0	2	1	3	0	2	0	0,50	0,25
4	2	2	0	4	2	4	1	1,00	0,75
5	4	1	0	5	1	5	2	0,94	1,31
6	2	4	0	6	2	6	2	1,59	1,87
7	4	3	0	7	3	7	3	1,59	3,01
8	5	3	0	8	3	8	3	2,25	3,53
9	5	3	1	9	3	8	3	2,25	3,53
10	6	3	1	10	3	9	4	2,29	5,22
11	6	5	0	11	5	11	5	3,02	7,87
12	6	5	1	12	5	11	5	3,02	7,87
13	5	6	2	13	5	11	5	3,02	7,87
14	8	6	0	14	6	14	6	4,43	11,21
Total					38			26,39	54,54

TABLE 5.2 – Vérification de l'indépendance des années de survénance

Au regard de la table 5.2, nous déduisons l'intervalle de confiance de notre statistique qui va nous permettre d'infirmer ou de confirmer l'hypothèse d'indépendance des années de survénance. Notre intervalle de confiance à 95% est donné par :

$$[11, 92 ; 40, 87]$$

Notre statistique  $Z = 38$  est dans l'intervalle de confiance, par conséquent, l'hypothèse d'indépendance d'année de survénance est vérifiée.

Une application du modèle de Chain Ladder permet d'avoir les résultats suivants :

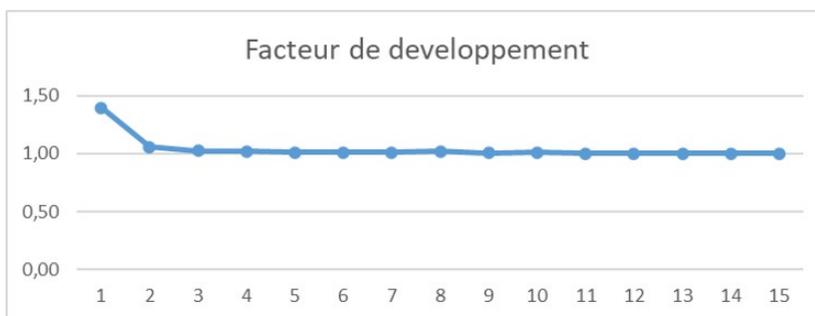


FIGURE 5.5 – Évolution des facteurs de développement

On constate que la convergence vers 1 des facteurs de développement n'est pas rapide. Cette convergence lente des facteurs de liquidation s'explique par le fait que la branche RC auto est vue ici comme branche longue donc la période d'incertitude est grande.

f CL	1,39	1,06	1,02	1,02	1,01	1,01	1,01	1,02	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
cadence_Liq	61%	85%	90%	92%	94%	95%	95%	96%	98%	98%	99%	100%	100%	100%	100%

TABLE 5.3 – Facteurs de développement

Au regard des cadences de règlement, on constate qu'après quatre années de développement, on a liquidé 94% de notre portefeuille et qu'au bout de neuf années de développement on a liquidé 98% de notre portefeuille. Nous pouvons conclure

que la garantie RC auto est une branche à développement long. Ainsi, la période d'incertitude est grande, ce qui conduirait à des montants de provisions volatiles.

Ci-dessous, nous présentons les résultats du modèle de Mack.

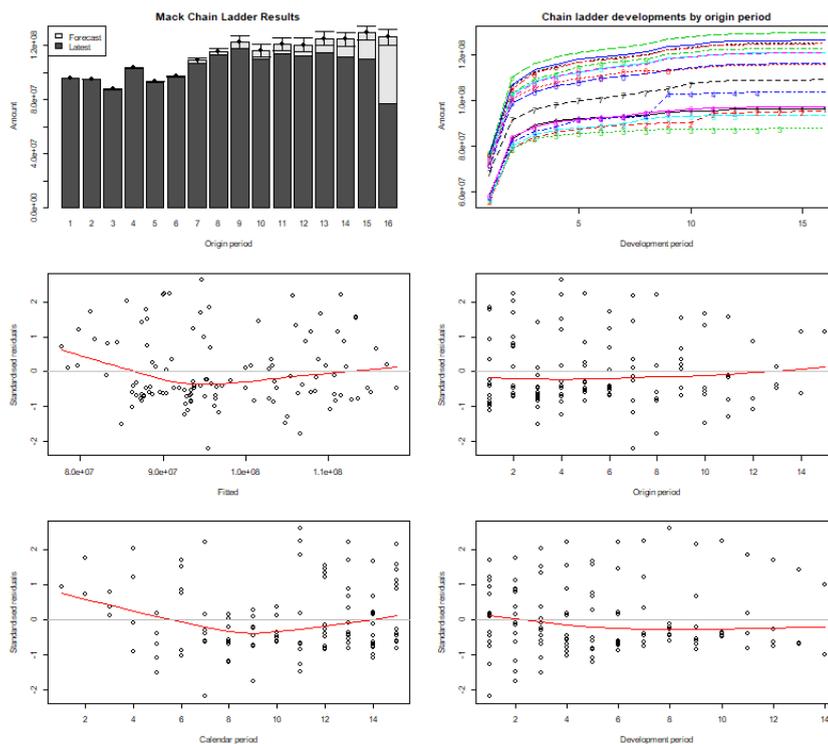


FIGURE 5.6 – Résultat du modèle de Mack

Ces résultats nous permettent de constater que les cinq dernières années représentent une part importante du montant de réserves globale. Nous pouvons également constater une variation importante des montants des réserves par année de survenance.

Évaluation du Passif	
Année Surv	Chain Ladder
2002	0
2003	64 273
2004	91 266
2005	274 796
2006	409 406
2007	706 292
2008	1 753 193
2009	2 575 840
2010	5 046 512
2011	5 718 769
2012	6 975 329
2013	8 102 312
2014	10 492 704
2015	12 965 707
2016	19 713 730
2017	49 375 762
Total	124 265 891

TABLE 5.4 – PSAP estimées par le modèle 1

Au regard du tableau 5.4, on constate également que les cinq dernières années représentent 85% du montant global de provisions et les huit dernières années représentent 95% de la réserve globale. Un résultat qui confirme que nous sommes bel et bien sur une branche longue. La duration et l'inflation implicite (contenue dans notre triangle qui a été étendue par la méthode de Chain Ladder) pourraient alors expliquer la volatilité des réserves. Cette approche est facile et pourrait être suffisante dans des environnements d'inflation stable (marché calme). Cependant, elle est inadéquate si l'inflation des sinistres futurs s'écarte sensiblement des niveaux passés. Dans ce contexte, cette approche ne permet pas de réagir de manière appropriée aux changements de l'environnement du marché.

Dans la sous section suivante, nous présentons la seconde méthode d'évaluation (méthode 2). Dans ce modèle, on effectue une prise en compte explicite de l'inflation (inflation modélisée).

### Description du modèle 2 : CL-Verbeek

Le modèle 2 est une combinaison des modèles de Verbeek, Chain Ladder et Vasicek. Ici, le modèle de Verbeek nous permet de mesurer l'inflation intrinsèque de notre triangle (non cumulé de paiements). Celui de Vasicek nous permet de projeter l'inflation historique mesurer à l'aide du modèle de Verbeek afin de déterminer les taux futurs d'inflation. Enfin, le modèle de Chain Ladder nous permet d'évaluer le montant de provisions en euro constant. Le schéma ci-dessous illustre notre approche de modélisation.

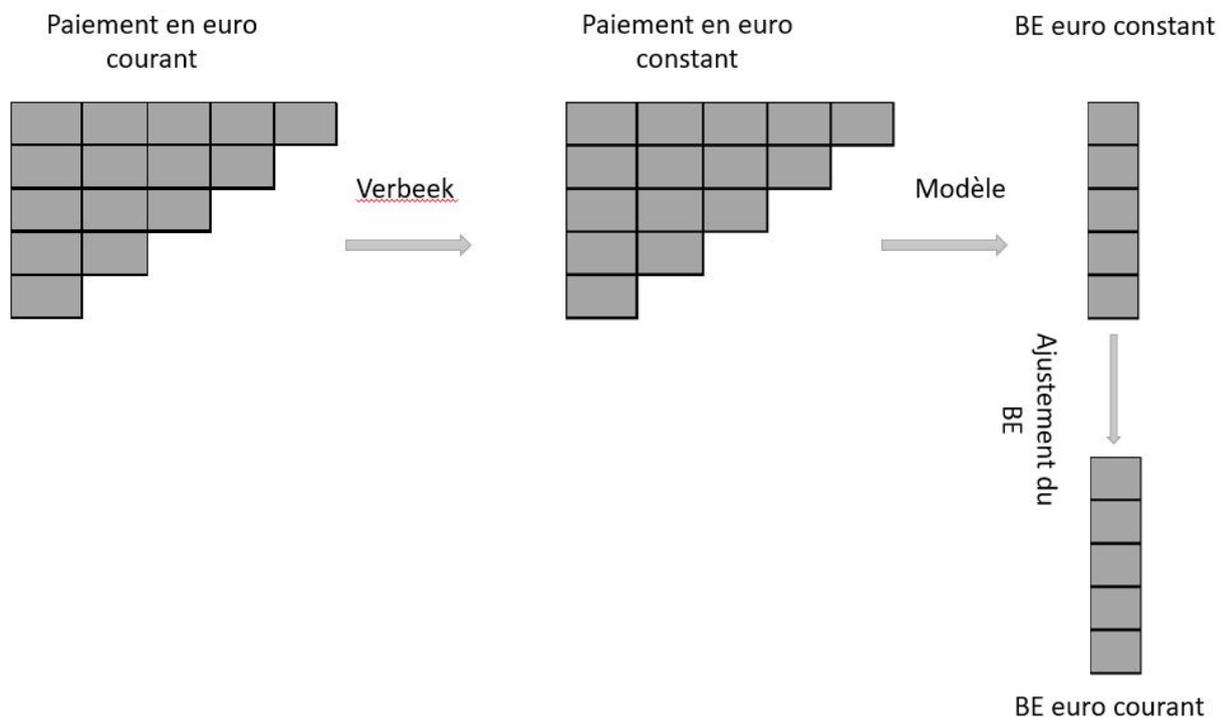


FIGURE 5.7 – Représentation graphique du modèle 2

Notre démarche est décrite comme suit :

1. dans un premier temps, nous modélisons l'inflation à l'aide du modèle de Verbeek développé au Chapitre 4. Cette étape nous permet d'estimer l'inflation historique contenue dans notre triangle ;
2. dans un second temps, nous effectuons un retraitement de notre triangle supérieur non cumulé pour obtenir un triangle en euro constant (euro 2017). Cette étape permet de neutraliser l'effet de l'inflation, les montants étant exprimés en euro constant.  
Une fois notre triangle en euro constant, il faut vérifier l'hypothèse d'indépendance des années de survenance. Le tableau 5.5 nous donne les éléments pour construire notre intervalle de confiance.
3. on applique le modèle de Chain Ladder sur le triangle cumulé actualisé pour évaluer la provision. Les estimations obtenues sont hors effets de l'inflation ;
4. on utilise le modèle de Vasicek pour projeter l'inflation historique afin d'obtenir notre courbe de taux futurs ;
5. on utilise la courbe de taux futurs pour ajuster les montants de provisions et on déduit les provisions en valeur nominale.

	D	U	N	Vérif	$Z=\min(D;U)$	$n=D+U$	$m=\text{ent}(n-1/2)$	E	Var
1	0	1	0	1	0	1	0	0,00	0,00
2	0	2	0	2	0	2	0	0,50	0,25
3	1	2	0	3	1	3	1	0,38	0,23
4	1	3	0	4	1	4	1	1,00	0,75
5	4	0	1	5	0	4	1	1,00	0,75
6	2	4	0	6	2	6	2	1,59	1,87
7	3	3	1	7	3	6	2	1,59	1,87
8	5	3	0	8	3	8	3	2,25	3,53
9	4	5	0	9	4	9	4	2,29	5,22
10	5	4	1	10	4	9	4	2,29	5,22
11	6	5	0	11	5	11	5	3,02	7,87
12	6	5	1	12	5	11	5	3,02	7,87
13	6	5	2	13	5	11	5	3,02	7,87
14	9	5	0	14	5	14	6	4,43	11,21
Total					38			26,37	54,51

TABLE 5.5 – Modèle 2 : vérification de l’hypothèse d’indépendance des années de survenance

Des informations ci-dessus, on déduit l’intervalle de confiance suivant :

$$[11, 90 ; 40, 84].$$

Notre statistique  $Z = 38$  est contenue dans l’intervalle de confiance par conséquent, l’hypothèse d’indépendance des années de survenance est vérifiée. Nous pouvons remarquer que notre statistique reste identique aussi bien en euro courant qu’en euro constant. Ce résultat pourrait s’expliquer par le fait que l’euro courant est lié à l’euro constant par un facteur multiplicatif. Les intervalles de confiance étant sensiblement identiques. Une fois l’hypothèse d’indépendance des années de survenance vérifiée, une application successive des modèles de Chain Ladder et celui de Vasicek nous permet d’obtenir le montant de nos provisions en euro constant puis en euro courant. Ces résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

Année Surv.	PSAP
2002	0
2003	65 586
2004	94 821
2005	283 212
2006	445 712
2007	768 612
2008	1 920 339
2009	3 011 999
2010	6 022 599
2011	6 829 251
2012	8 091 613
2013	9 152 459
2014	11 676 992
2015	14 491 792
2016	21 004 969
2017	51 007 349
Total	134 867 307

TABLE 5.6 – Modèle 2 évaluation du Passif

Au regard des résultats présentés dans la table 5.6 ci-dessus, il en ressort qu'en euro courant les PSAP des 8 dernières années constituent 95% de la réserve globale, les PSAP des 5 dernières années représentent les 80% de la provision globale. En euro constant, les PSAP des 8 dernières années et les 5 dernières années représentent respectivement 94% et 79% de la provision globale. On constate également que l'approche d'évaluation par le modèle 2 est plus conservatrice que l'approche d'évaluation par le modèle 1.

En sus, l'approche par le modèle 2 est plus prudente du point de vue de Solvabilité 2. L'écart qui existe entre le modèle 1 (où nous avons supposé que l'inflation historique s'étend dans le futur) et le modèle 2 (où nous avons modélisé l'inflation historique et futur) est de 10 601 415. Cet écart s'expliquerait par le fait que le modèle 1 reste un modèle sensible à l'inflation. Il nous permet de constater que dans le cas d'une branche longue, une mise en "as if" des données reste incontournable car, sur l'ensemble de la période d'évaluation, l'inflation n'est pas constante. Cet écart nous permet également de mesurer l'impact de la prise en compte de l'inflation dans l'évaluation des PSAP. Il vient aussi justifier le fait que l'inflation pourrait causer une sous-estimation (resp. une surestimation) des provisions.

Les modèles 1 & 2 utilisent la méthode basée sur les facteurs de règlement et donnent des provisions ponctuelles. Dans la suite de ce mémoire, nous présentons un troisième modèle qui repose sur les hypothèses du modèle de Verbeek d'une part et d'autre part, nous permet d'avoir la distribution des provisions et de construire un intervalle de confiance.

### Description du modèle 3 : modèle de Verbeek-Vasicek

Cette méthode utilise les hypothèses du modèle de Verbeek c'est-à-dire qu'on décompose le paiement incrémental  $Z_{i,j} = N_i r_j \lambda_{i+j}$  où :

- $N_i$  le nombre de sinistres à l'ultime survenus l'année  $i$  ;
- $r_j$  la pondération de l'année de développement  $j$  ;
- $\lambda_{i+j}$  le coût moyen des sinistres qui contient l'inflation.

L'idée ici est de mesurer l'inflation historique via le modèle de Verbeek, projeter via le modèle de Vasicek et déduire les  $\lambda_{i+j}$  futurs à partir des taux d'inflation futurs.

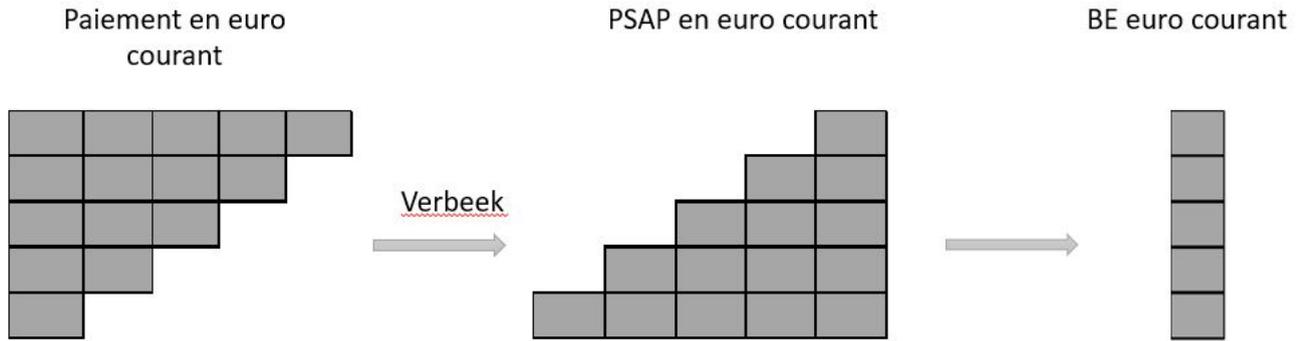


FIGURE 5.8 – Représentation graphique du modèle 3

Une connaissance des taux d'inflation permet de déduire les estimateurs  $\hat{\lambda}_h$  via l'équation

$$\hat{\lambda}_h = \hat{\lambda}_{h-1}(1 + tx_t) \quad (5.7)$$

Ainsi, les  $Z_{ij}$  ( $i, j \in \Delta = \{i = 1, \dots, k; j = k - i + 1, \dots, k\}$ ) de la partie inférieure du triangle peuvent être déduits via la méthode de séparation en calculant  $\hat{Z}_{ij} = \hat{N}_i \hat{r}_j \hat{\lambda}_{i+j}$ , où  $\hat{N}_i$  représente le nombre de sinistres à l'ultime d'origine  $i$ ,  $\hat{r}_j$  et  $\hat{\lambda}_{i+j}$  sont donnés respectivement par les équations (4.5) et (4.4). Ce qui conduit à un montant de provision total donné par :

$$\hat{R} = \sum_{\Delta} \hat{Z}_{ij}. \quad (5.8)$$

### Application du Modèle 3 : Verbeek-Vasicek

Une application du modèle 3 en effectuant 50 000 simulations de Monte Carlo du modèle de Vasicek nous permet d'avoir les résultats suivants :

Évaluation par simulation	
Année Surv.	PSAP
2002	0
2003	70 499
2004	113 802
2005	302 314
2006	512 842
2007	843 746
2008	1 861 719
2009	2 811 948
2010	5 513 056
2011	6 419 685
2012	7 605 061
2013	9 006 665
2014	11 501 063
2015	14 500 884
2016	21 704 452
2017	54 504 954
Total	137 272 689

TABLE 5.7 – Modèle 3 évaluation du Passif

Une analyse du tableau ci-dessus nous permet de constater que les 8 dernières années représentent les 95% de la réserve totale. Les cinq dernières années représentent les 81% de la réserve globale. L'écart entre le modèle 3 et le modèle 2 est de 2 380 365. Cet écart s'expliquerait par le fait que ces méthodes ne reposent pas sur les mêmes hypothèses. L'écart entre le modèle 1 et le modèle 3 est de 12 981 780. Comme nous pouvons constater, la méthode 3 estime au mieux les PSAP de la dernière année, elle est également la méthode la plus conservatrice.

### **Sensibilité du nombre de simulation sur les PSAP modèle 3 : Verbeek-Vasicek**

Nous avons mené une étude de sensibilité du nombre de simulation de Monte Carlo du modèle de Vasicek sur le montant global de provisions. L'intérêt de cette étude étant de déterminer le seuil du nombre de simulation (via Monte Carlo dans l'estimation des taux futurs via Vasicek) qui permet d'avoir une convergence du montant de PSAP.

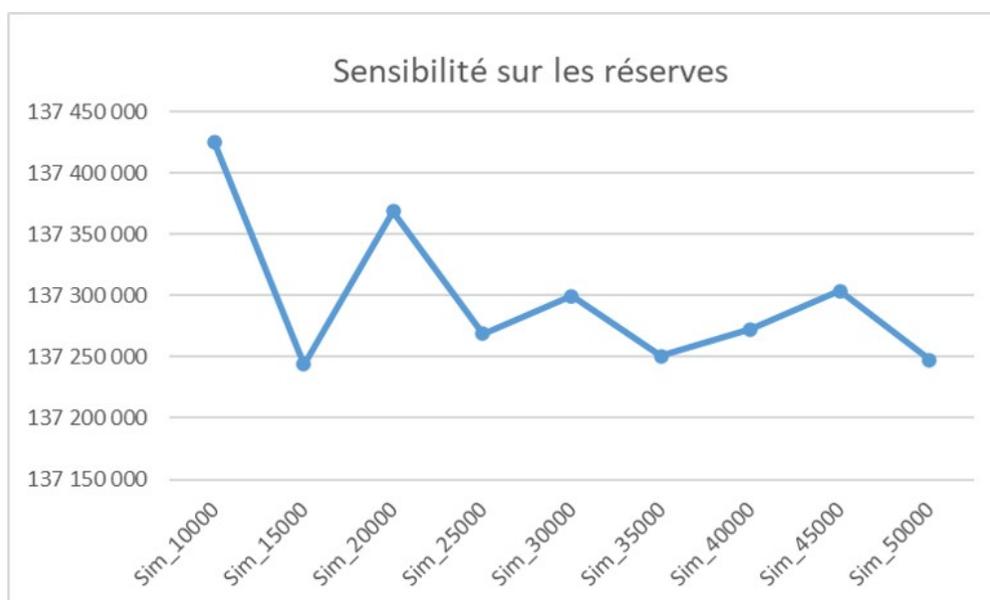


FIGURE 5.9 – Sensibilité des PSAP par rapport au nombre de simulations

L'analyse de la figure ci-dessus (5.9) nous permet de constater qu'à partir de 25 000 simulations de Monte Carlo, les provisions évaluées avec le modèle 3 se trouvent dans la fourchette : [137 247 671 ; 137 303 775]. Les écarts entre les provisions évaluées en effectuant 50 000 simulations de Monte Carlo du modèle de Vasicek et les provisions évaluées en effectuant moins de simulations de Monte Carlo sont conciliés dans le tableau ci-dessous :

Tableau des écarts							
Nbre Sim	Sim 20000	Sim 25000	Sim 30000	Sim 35000	Sim 40000	Sim 45000	Sim 50000
PSAP	137 368 623	137 269 102	137 299 841	137 250 668	137 272 583	137 303 775	137 247 671
Ecart	120 952	21 431	52 169	2 997	24 911	56 104	0

TABLE 5.8 – Écart entre différentes provisions en fonction du nombre de simulations

A partir de 25 000 simulations de Monte Carlo, les écarts se trouvent entre 21K et 56K.

Pour la suite de notre étude, nous effectuons 50 000 simulations de Monte Carlo du modèle de Vasicek. Afin de prendre en compte la volatilité de l'inflation future sur le montant global de provisions, nous effectuons une version simulée du modèle 3. La description de notre démarche est comme suit :

1. évaluer l'inflation historique via le modèle de Verbeek,
2. effectuer une simulation de Monte Carlo du modèle de Vasicek,
3. déterminer les  $\lambda$  futurs du modèle de Verbeek,
4. déterminer le montant total de provision par année de survenance  $R_{sim\_i}$ ,
5. répéter les étapes 2, 3 et 4 un nombre  $N = 50\ 000$  fois pour avoir un échantillon exhaustif de provisions.
6. obtenir le montant des PSAP par année de survenance en effectuant le calcul suivant  $\hat{R}_i = \frac{1}{50000} R_{sim\_i}$

Un échantillon exhaustif de provisions nous permet de nous poser plusieurs questions entre autres : quelle est la distribution des provisions ? Quel est l'intervalle de confiance des provisions ? Quels sont les quantiles à 95% des provisions par année de survenance ? Une partie des réponses aux questions ci-dessus est conciliée dans le tableau ci-dessous :

Évaluation par simulation		
Année Surv.	PSAP	Quantile 95%
2002	0	0
2003	70 499	74 064
2004	113 802	121 233
2005	302 314	320 520
2006	512 842	547 336
2007	843 746	903 102
2008	1 861 719	1 980 629
2009	2 811 948	3 020 718
2010	5 513 056	5 895 350
2011	6 419 685	6 953 652
2012	7 605 061	8 316 723
2013	9 006 665	9 918 739
2014	11 501 063	12 666 001
2015	14 500 884	15 972 493
2016	21 704 452	23 679 644
2017	54 504 954	58 058 597
Total	137 272 689	148 233 481

TABLE 5.9 – Modèle 3 évaluation du Passif

Les quantiles à 95% des provisions par année de survenance pour les 4 premières années sont du même ordre que les réserves estimées par la méthode 3. Les écarts commencent à être important à partir de 2007.

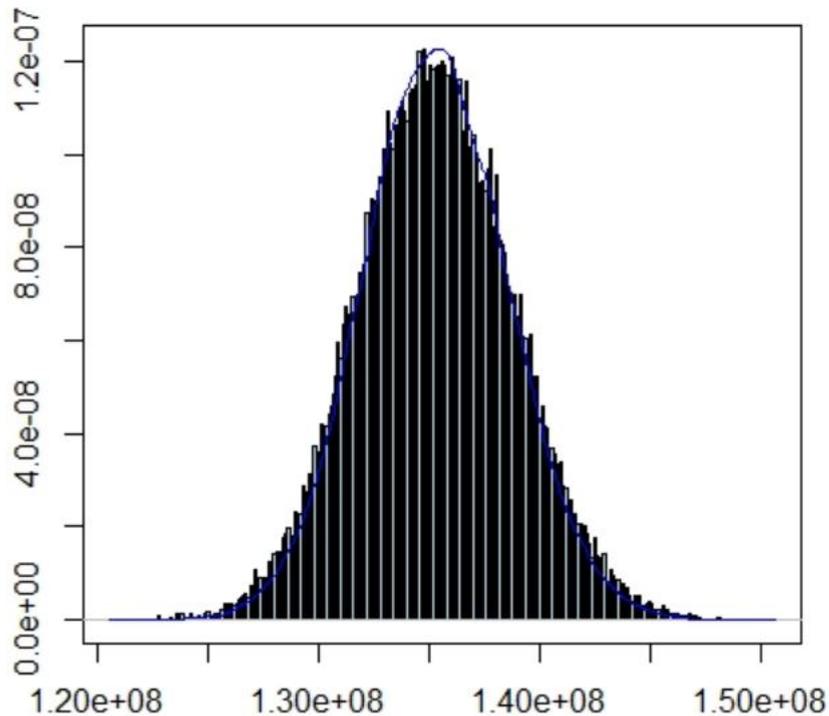


FIGURE 5.10 – Distribution des PSAP

Sur la figure 5.10 ci-dessus, nous avons la distribution de la réserve obtenue avec les taux d'inflation modélisés via le modèle de Vasicek. On peut observer que la moyenne est de 137 millions, qui est largement au-dessus des provisions évaluées par le modèle 1 et légèrement au-dessus des provisions évaluées par le modèle 2. Le test de Kolmogorov-Smirnov montre que la distribution des réserves serait proche d'une loi normale ( $D = 0,00813$   $p.value = 0,002$ ). Une analyse du test de Kolmogorov-Smirnov nous permet de constater que la distance entre la loi normale théorique et la distribution de nos données est de 8%. Une évaluation du skewness (0,1) nous permet également de constater que la distribution de nos données ne serait pas loin d'une loi normale. La figure ci-dessous nous présente la distribution des paiements (couleur noire) et celle d'une loi normale (couleur rouge). On peut remarquer que les deux distributions sont très proches.

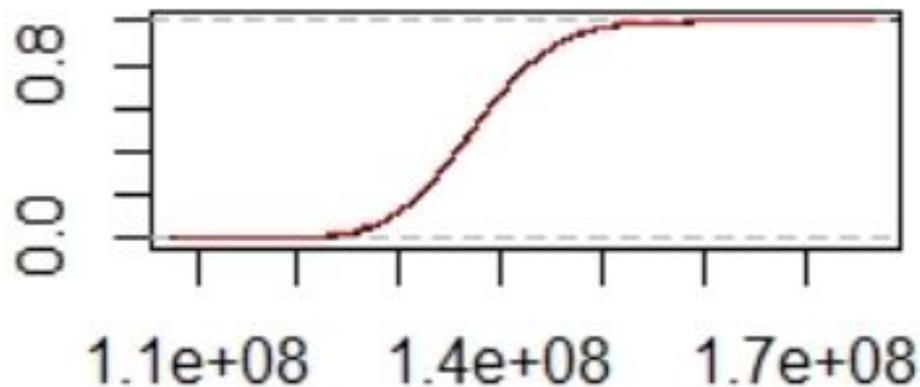


FIGURE 5.11 – Fonctions de répartition cumulées (théorique et estimée) des PSAP

Ces différents résultats étaient prévisibles. En effet, du point de vue théorique les taux d'inflation sont gaussiens de part les propriétés du modèle de Vasicek. Nous pouvons également déduire l'intervalle de confiance à 95% qui est donné par :

Intervalle de confiance	
Borne Inf	Borne Sup
137 235 577	137 349 033

TABLE 5.10 – Intervalle de confiance à 95%

On peut constater que les provisions évaluées via le modèle 1 et le modèle 2 ne sont pas contenues dans l'intervalle de confiance. Les différents quantiles des PSAP sont consiliés dans le tableau ci-dessous :

Quantile 25%	Quantile 50%	Quantile 75%	Quantile 99,5%
132 834 955	137 206 312	141 602 261	154 599 797

TABLE 5.11 – Quantiles

## Synthèse

Dans cette section, nous présentons une synthèse des résultats obtenus dans ce chapitre.

Année Surv	Déterministe		Stochastique	
	Chain Ladder	Modèle 2	Modèle 3	Modèle 3 95%
2002	0	0	0	0
2003	64 273	65 586	70 541	74 064
2004	91 266	94 821	112 557	121 233
2005	274 796	283 212	295 354	320 520
2006	409 406	445 712	514 170	547 336
2007	706 292	768 612	843 865	903 102
2008	1 753 193	1 920 339	1 862 156	1 980 629
2009	2 575 840	3 011 999	2 812 042	3 020 718
2010	5 046 512	6 022 599	5 513 778	5 895 350
2011	5 718 769	6 829 251	6 419 042	6 953 652
2012	6 975 329	8 091 613	7 603 398	8 316 723
2013	8 102 312	9 152 459	9 003 748	9 918 739
2014	10 492 704	11 676 992	11 496 690	12 666 001
2015	12 965 707	14 491 792	14 493 816	15 972 493
2016	19 713 730	21 004 969	21 696 575	23 679 644
2017	49 375 762	51 007 349	54 509 940	58 058 597
Total	124 265 891	134 867 307	137 247 671	148 233 481

TABLE 5.12 – Synthèse des résultats

Une observation de la table 5.12 nous permet de constater que le montant de provisions évalué par la méthode de Chain Ladder (modèle 1) est largement en dessous de celui évalué par le modèle de Verbeek (bootstrap non-paramétrique) ainsi que celui de Vasicek (modèle 2).

Une observation des montants de provisions sur la période allant de 2002 à 2008 nous permet de constater que les provisions obtenues avec la méthode de Chain Ladder sont proches de celles modélisées avec les méthodes Verbeek (modèle 2) et Verbeek-Vasicek (modèle 3). Entre 2009 et 2017, les écarts entre les provisions évaluées avec le modèle 1 et les modèles 2 & 3 sont importants. Plus nous nous rapprochons de la date d'inventaire (2017), plus la méthode de Chain Ladder sous-estime la provision. Cette sous-estimation est due à la duration et au fait que la méthode de Chain Ladder étend l'inflation passée dans le futur. Ainsi, elle a du mal à capter l'effet des facteurs exogènes qui impactent les paiements futurs.

Une observation du modèle 2 et la version stochastique Verbeek-Vasicek (modèle 3) permet de constater un rapprochement entre les deux montants. Le rapprochement des deux modèles s'expliquerait par le fait que ces modèles reposent sur les mêmes méthodes (modèles de Verbeek et de Vasicek). Les paramètres du modèle de Vasicek sont estimés sur la base des données historiques obtenues via le modèle de Verbeek d'une part et d'autre part, les taux futurs sont estimés sans tenir compte des facteurs exogènes. L'écart existant entre les deux modèles pourrait se justifier par le fait que les méthodes de projection ne sont pas les mêmes. En effet, le modèle 2 utilise la méthode de Chain Ladder pour obtenir la partie inférieure du triangle tandis que le modèle 3 utilise les hypothèses du modèle de Verbeek.

## 5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté plusieurs méthodes d'évaluation des PSAP. L'approche 1 étend l'inflation historique dans le futur. Ce modèle ne peut prendre en compte les changements imprévus des années calendaires qui peuvent être dus à l'état de la victime, la jurisprudence, la législation, ... Dans ce cas, le modèle 1 sous-estime les montants de provisions.

Les approches 2 et 3 utilisent le modèle de Vasicek (1977) pour modéliser l'inflation future. Ce modèle (Vasicek) étant calibré sur la base des données historiques obtenues via le modèle de Verbeek. Bien que ces deux dernières approches permettent d'obtenir des meilleurs résultats dans la mesure où elles nous permettent d'avoir des provisions ponctuelles (plus conservatrices) et des intervalles de confiance, elles présentent tout de même des limites :

- La partie supérieure de notre triangle estimée via la méthode de Verbeek ne colle pas toujours au triangle initial. Les écarts peuvent se justifier par le fait que les hypothèses du modèle de Verbeek ne tiennent pas compte de l'année d'origine du sinistre d'une part et d'autre part, l'assureur n'a pas toujours connaissance de tous les sinistres survenus au cours d'une année d'origine spécifique.
- Le nombre d'année de projection du triangle reste problématique. Plus la profondeur du triangle sera importante, plus le nombre de sinistres estimé sera proche de la réalité d'une part et d'autre part, notre historique d'inflation sera important. Ainsi, le modèle de Vasicek sera plus robuste.

Le modèle 3 a cet avantage qu'il permet de contourner une hypothèse du modèle de Chain Ladder (l'hypothèse d'existence d'un facteur  $f_j$  tel que  $C_{i,j+1} = f_j C_{i,j}$ ) qui est rarement vérifiée.

# Conclusion

Ce mémoire s'inscrit dans l'optique de Solvabilité 2 qui demande une prise en compte explicite de l'inflation dans l'évaluation des provisions en assurance non-vie. Notre travail a été l'occasion d'aborder la problématique de provisionnement du risque automobile à travers le cas de la garantie Responsabilité Civile (RC).

Une partie importante de ce mémoire a donc été consacrée au cadrage du sujet. Nous sommes partis d'une compréhension de l'inflation d'un point de vue économique puis d'un point de vue assurantiel et, nous avons pu expliciter l'effet de l'inflation sur le passif d'un assureur non-vie à travers les méthodes classiques (Chain Ladder, Mack, Munich Chain, ...). Ces méthodes sont sensibles à l'inflation. Une bonne compréhension de ces sujets et des modèles d'évaluation d'inflation a permis de mieux cadrer le sujet et de proposer plusieurs modèles répondant à la problématique.

Pour réaliser nos travaux, nous avons été amenés à utiliser plusieurs techniques actuarielles : quelques méthodes classiques de provisionnement (modèle de Chain Ladder et celui de Mack), le modèle de Verbeek (1972), le modèle de Vasicek (1977), les simulations de Monte Carlo et le bootstrap. Bien que l'application de ces méthodes soit pour la plupart simple, leur utilisation nécessite un travail de fond en amont sur la préparation des données (extraction, fiabilité, cohérence, complétude, exhaustivité, ...) et des analyses descriptives. Ces analyses, souvent réalisées à partir d'outils courants, sont quasiment incontournables. En effet, elles permettent de s'appropriier les données, se forger une intuition et également de pouvoir justifier une instabilité des résultats.

Une étape essentielle pour une meilleure estimation de l'inflation historique est de pouvoir combiner le modèle de Verbeek et la méthode bootstrap. En effet, une combinaison de ces deux techniques permet de prendre en compte l'effet des sinistres exceptionnels, qui ont tendance à se répéter (2008 et 2013) tous les 5 ans voire un peu plus.

Nous avons utilisé les données provenant de la MACSF. Celles-ci ont été agrégées pour constituer les run-off triangles de paiements et de sinistres ouverts de la line of business (LoB) RC automobile. Il va de soi qu'un sinistre de cette garantie (garantie RC auto) peut être de deux natures différentes (matérielle ou corporelle). Ainsi, l'inflation dans les deux cas serait différente en fonction des contextes, et donc modéliser séparément les composantes «RC matérielle» et «RC corporelle» pourrait améliorer les estimations et également les analyses. Cependant, compte tenu de la structure des données et de la carence de données corporelles, nous avons utilisé un jeu de données contenant à la fois la RC matérielle et la RC corporelle. Nos run-off triangles contiennent les paiements incrémentaux des années 2002 – 2017. Les

résultats obtenus avec le modèle de Verbeek nous permettent d'avoir les facteurs inflationnistes  $\lambda$  de 2002 – 2017 et les taux d'inflation spécifiques de 2003 – 2017.

La sensibilité du passif à l'inflation qui fut notre objectif a été atteint avec des résultats satisfaisants. En effet, les modèles utilisant l'inflation intrinsèque contenue dans les triangles de paiements se sont avérés plus conservateurs que les modèles classiques qui sont pour la plupart sensible à l'inflation. Ces résultats ont été démontrés pour la branche RC automobile et pourraient s'étendre à d'autres branches. L'inflation observée pourrait varier d'une garantie à une autre. Il en ressort que l'inflation dépend de la line of business (LoB) mais également de la politique de règlement de la compagnie d'assurance. Ainsi, une analyse minutieuse des différents facteurs influençant les paiements serait un atout majeur pour le management du risque. Dans ce sens, il serait donc judicieux d'étudier la sensibilité de l'actif à l'inflation ainsi que la réconciliation actif-passif. Une étude de l'effet de l'inflation sur le capital de solvabilité pourrait alors être envisagée.

Enfin, une revue des hypothèses du modèle de Verbeek pourrait être envisageable afin de prendre en compte l'effet des années de survenance dans l'estimation des taux d'inflation spécifiques. Il serait également nécessaire de définir un seuil de profondeur pour lequel la robustesse des résultats pourrait être garantie.

# Bibliographie

- [1] Susanna Björkwall, Ola Hössjer, and Esbjörn Ohlsson. Bootstrapping the separation method in claims reserving. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 40(2) :845–869, 2010.
- [2] Alexander Bohnert, Nadine Gatzert, and Andreas Kolb. Assessing inflation risk in non-life insurance. *Insurance : Mathematics and Economics*, 66 :86–96, 2016.
- [3] Michel Denuit and Arthur Charpentier. *Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome II : Tarification et Provisionnement*. 2005.
- [4] Verrall England. Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving. *Insurance Math, Econom.*, 25 :281–293, 1999.
- [5] S. Habib, I. et Riban. *Quelle méthode de provisionnement pour des engagements non-vie dans Solvabilité 2*. Ressources actuarielles, 2012.
- [6] Cutter K. measuring and understanding superimposed inflation in ctp schemes. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 21(2) :213–225, 2009.
- [7] Mack. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimate. *Astin Bull*, 23(2) :213–225, 1993.
- [8] Thomas Mack. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 23(2) :213–225, 1993.
- [9] Karsten Paetzmann. Discontinued german life insurance portfolios : rules-in-use, interest rate risk, and solvency ii. *Journal of Financial Regulation and Compliance*, 19(2) :117–138, 2011.
- [10] Greg C Taylor. Separation of inflation and other effects from the distribution of non-life insurance claim delays. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 9(1-2) :219–230, 1977.
- [11] Gregory Taylor. *Loss reserving : an actuarial perspective*, volume 21. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *J. Financ. Econ.*, 5 :177–188, 1977.
- [13] H. Verbeek. An approach to the analysis of claims experience in motor liability excess of loss reinsurance. *Astin Bull*, 9(1) :195–202, 1972.
- [14] Mario V Wüthrich and Michael Merz. *Stochastic claims reserving methods in insurance*, volume 435. John Wiley & Sons, 2008.
- [15] M.V. Wüthrich. Accounting year effects modeling in the stochastic chain ladder reserving method. *N, Am, Actuar, J.*, 14(2) :235–255, 2010.