

Mémoire présenté le : 19 septembre 2018
pour l'obtention du diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Pierre Cart

Titre : Calcul de l'UFR (*Ultimate Forward Rate*) à partir de données de marché et impact Solvabilité 2

Confidentialité : ☒ Non ☐ Oui (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires*

M. Tahmoor QURESHI
M. Axel JAMES

Entreprise :

Nom : Humanis

Signature :

Directeur de Mémoire en entreprise :

Nom : Papa Maguette Guèye

Signature :



Membre présent du Jury de l'ISFA

M. Stéphane LOISEL

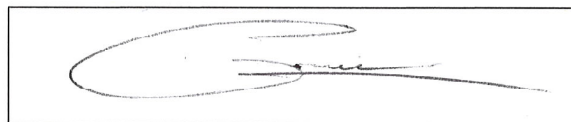
Invité :

Nom :

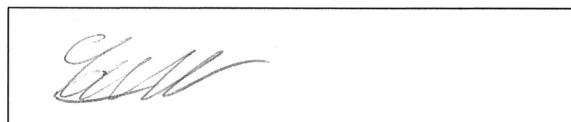
Signature :

*Autorisation de publication et de mise en
ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai
de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

Mots-clés : Solvabilité 2, UFR, Smith-Wilson, market-consistent

Dans le cadre de Solvabilité 2, l'EIOPA fournit mensuellement une courbe de taux de rendement sans risque. Ces taux servent notamment à l'actualisation des flux de passif et au rendement des réinvestissements. Ils sont calibrés à l'aide de la méthode de Smith-Wilson à partir de données observées sur les marchés. Un des avantages de cette méthode est qu'elle interpole exactement les taux du marché. Cependant, au-delà d'un horizon, le dernier point liquide, les taux ne sont plus observables. Avec cette méthode, ils convergent ensuite vers un taux ultime fixé à l'avance : l'UFR (*Ultimate Forward Rate*).

Ce taux ultime doit correspondre à des taux long terme et sans effets de cycle, c'est pourquoi il est fixe. Il a été calibré par l'EIOPA à 4,2 % en 2010, ce qui correspond au rendement moyen observé sur un historique de données plus l'inflation. Cependant, en 2016, lors de l'entrée en vigueur de la norme Solvabilité 2, le contexte de taux bas a amené l'EIOPA à faire évoluer sa méthodologie. A partir de 2018, l'UFR est recalculé annuellement.

L'objet de ce mémoire est d'utiliser une méthode alternative proposée par J. De Kort et M. H. Vellekoop (voir [2]) pour calculer l'UFR à partir de données de marché. Ces mêmes données de marché sont utilisées par la méthode de Smith-Wilson pour calibrer la courbe. Les formules de Smith-Wilson sont obtenues par une optimisation du lissage de la fonction de prix tout en interpolant les taux du marché. En repartant de ces calculs, et en rendant l'UFR variable, il est possible d'optimiser le lissage de la courbe de manière similaire afin de déduire un UFR optimal. De plus, les auteurs proposent de calculer un UFR en lissant cette fois les courbe de rendement et *forward*. En fonction de la courbe lissée, il est donc possible de calculer 3 UFR pour chaque jeu de données.

Ces calculs sont appliqués sur un historique de données de 2002 à 2016. Les 3 UFR calculés sont relativement proches sur la période, bien que l'UFR *forward* soit très volatile. Cependant, une forte tendance baissière est observée, et si en 2002 les valeurs calculées sont supérieures à 4,2 %, elles tombent sous 1 % à plusieurs reprises en 2015 et 2016. En changeant le dernier point liquide (20 ans pour l'euro), il apparaît que les UFR calculés sont plutôt stables, mais des groupes se forment distinctement de 2008 à 2011, au moment de la crise. Les valeurs calculées, bien que très inférieures à 4,2 % fin 2016, peuvent être envisagées comme des chocs.

Aussi, les 3 UFR obtenus au 31/12/2016 sont utilisés pour projeter un portefeuille d'assurance vie fictif. Ce portefeuille contient des garanties Arrêt de Travail, PRC Santé, Dépendance et Vie Entière. L'âge des assurés donne une longue durée pour le portefeuille. En effet, la prise en compte des UFR calculés a surtout une influence sur la courbe au-delà de la dernière valeur observée sur les marchés. Aussi, les flux actualisés ne sont déformés qu'au-delà de cette limite. Ces déformations résultent en une hausse des BEL, mais qui a finalement peu d'impact sur le SCR. Cependant, au bilan, la hausse des BEL et de la Marge pour Risque (via la durée) vient diminuer les fonds propres et provoque une dégradation importante du ratio de couverture.

Abstract

Keywords : Solvency 2, UFR, Smith-Wilson, market-consistent

With Solvency 2 framework, EIOPA publishes a risk-free interest rate term structure monthly. These rates are used for the discounting of liabilities cash flows and returns of reinvestments. They are fitted through the Smith-Wilson method from market data. One of the advantages of this method is the exact interpolation of the market rates. However, beyond an horizon, the last liquid point, rates cannot be observed on markets. With this method, they then converge toward an ultimate rate fixed prior : the UFR (Ultimate Forward Rate).

This ultimate rate must match with long term rates without cycling effects, and this is why it is constant. EIOPA has fitted it to 4.2% in 2010, which corresponds to the average return witnessed on historical data plus inflation. However, in 2016, by the time Solvency 2 was coming into force, the low rates context has led EIOPA to revamp its methodology. From 2018, the UFR is recalculated annually.

The point of this study paper is to apply an alternative methodology suggested by J. De Kort and M. H. Vellekoop (see [\[2\]](#)) to compute the UFR from market data. These same market data are used by the Smith-Wilson method to fit the curve. The Smith-Wilson formulas are obtained by optimising the price function smoothness, while interpolating market data. From these formulas, and by letting the UFR variable, it is possible to optimise the smoothness of the curve in a similar fashion and deduct an optimal UFR. Furthermore, the authors suggest to compute a UFR by smoothing yield and forward curves this time. Depending on the smoothed curved, it is then possible to compute 3 UFR for every data set.

These calculations are applied to historical data ranging from 2002 to 2016. The 3 computed UFR are relatively close on the period, but the forward UFR is very volatile. However, a strong downtrend can be seen, and while calculated valued were above 4.2% in 2002, they drop below 1% at multiple times between 2015 and 2016. By changing the last liquid point (20 years for euro), it appears that calculated UFR are rather stable, but groups can be distinguished between 2008 and 2011, during the crisis. The computed values, while way below 4.2% in 2016, can still be regarded as shocks.

Also, the 3 UFR on the 31/12/2016 are used to forecast a fictive life insurance portfolio. This portfolio contains the following guarantees : Workers' Compensation, Health provisions for increasing risk, Dependancy and Whole Life. The age of the insurees gives a long duration to the portfolio. Indeed, taking into account a calculated UFR mostly influences the curve beyond the last value in market data. Also, the discounted cash flows are distorted only beyond this limit. These distortions result in rising the BEL, which eventually has a low impact on the SCR. However, on the balance sheet, the rise of the BEL and of the Risk Margin (through duration) decreases own funds and induce an important fall of the coverage ratio.

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement mon maître d'apprentissage, Papa Maguette Guèye, pour son aide précieuse.

Je remercie également Christian Robert, mon tuteur ISFA, pour son encadrement.

Enfin, je remercie toute l'équipe MDS et les équipes d'Humanis pour les retours et discussions enrichissantes.

Table des matières

Notations générales	6
Introduction	7
1 Pratique actuelle de l'EIOPA	8
1.1 Problématique	8
1.2 Choix de l'UFR	9
1.3 Notations et extrapolation de la courbe des taux	9
1.4 Interpolation des données de marché	13
1.5 Optimisation de α	14
1.6 Critiques de la méthode	15
1.7 Révision de l'UFR	16
2 Projection de l'UFR	22
2.1 Formulation mathématique de la méthode de Smith-Wilson	22
2.2 Extrapolation de l'UFR suivant la fonction de prix	25
2.3 Extrapolation en fonction du rendement ou du taux <i>forward</i>	26
3 Application	31
3.1 Présentation des données de marché utilisées	31
3.1.1 Données utilisées par l'EIOPA	31
3.1.2 Données de marché	32
3.2 Application (pas à pas) de la méthode de Smith-Wilson	33
3.3 Résultats	35
3.4 Optimisation numérique de la fonction L	36
3.5 Présentation des résultats	37
3.6 Limites	41
4 Impacts prudentiels	45
4.1 Présentation du portefeuille	45
4.2 Bilan	45
4.2.1 Vision S1	46
4.2.2 Détermination des BEL	46
4.2.3 Détermination des SCR	47
4.2.4 Bilan S2 et Taux de couverture	49
4.3 Impact de l'UFR : Etudes de sensibilités	49
4.3.1 Hypothèses de taux	49
4.3.2 Flux de BEL par garantie	51
4.3.3 Synthèse	58
Conclusion	62
Annexe	63
A1 - Rappels mathématiques	63
A2 - Démonstration de la proposition (page 13)	65
A3 - Démonstration de la proposition (page 15)	66
A4 - Démonstration du théorème 1 (Smith-Wilson) (page 24)	68
A5 - Démonstration du théorème 2 (De Kort-Vellekoop) (page 26)	75
A6 - Complément de la démonstration du théorème 2 (page 76)	79
A7 - Démonstration du théorème 3 (De Kort-Vellekoop) (page 28)	80
A8 - Preuve du corollaire 1 (page 29)	83
A9 - Preuve du corollaire 2 (page 29)	85

Notations générales

Ce rapport utilisera le terme « *forward* » pour désigner le taux à terme, car ce terme est couramment utilisé en actuariat.

Le document reprend les notations de l'EIOPA. Cela peut amener des différences de notations importantes notamment par rapport aux papiers originaux dont sont extraits des théorèmes et des démonstrations.

Les vecteurs et matrices seront notés en gras (exemple : $\mathbf{v}$ et $\mathbf{A}$). La transposée est notée avec ' (exemple : $\mathbf{A}'$).

- Rappels de la notation continue pour les taux :
 - t la date d'évaluation
 - T la maturité
 - Prix des zéro-coupons : $p(t) = e^{-t \cdot y(t)} = e^{-\int_0^t f(u) du}$
 - Taux de rendement annuel ou *yield* (habituellement noté r) : $y(t) = -\frac{\ln(p(t))}{t}$
 - Taux *forward* : $f(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln(p(t))$
- Les relations suivantes utilisent la notation discrète :
 - $p(t) = \frac{1}{(1+y(t))^t} = (1+y(t))^{-t}$
 - $y(t) = \frac{1}{(p(t))^{\frac{1}{t}}} - 1 = (p(t))^{-\frac{1}{t}} - 1$

Introduction

La norme Solvabilité II demande aux assureurs d'évaluer leur bilan au plus juste. Pour cela, les flux de passif et d'actif sont actualisés à l'aide d'une courbe dite « sans risque » fournie mensuellement par l'EIOPA. Cette courbe est déterminée avec la méthode de Smith-Wilson. Il s'agit d'une méthode d'interpolation et d'extrapolation des taux :

- Les taux à court terme observés sur les marchés sont parfaitement interpolés ;
- Les taux à long terme non observables sont extrapolés à l'aide d'un taux ultime.

Ce taux ultime, ou UFR (*Ultimate Forward Rate*) est un paramètre de la méthode. Il doit être stable et ne pas dépendre d'un contexte économique à court terme ou moyen terme. Aussi, l'EIOPA suppose l'UFR constant et l'a fixé à 4,2 % pour l'euro en 2010. Cependant, dans le contexte actuel de taux durablement bas, cette valeur pouvait sembler élevée. Par conséquent, une consultation publique a été menée par l'EIOPA d'avril à juillet 2016 sur la méthode utilisée pour déterminer l'UFR, et sur la possibilité de le faire varier annuellement. En mai 2017, une nouvelle méthode de calcul de l'UFR a été présentée avec mise en application à partir de 2018. La nouvelle valeur calculée est de 3,65 %, mais pour garantir une certaine stabilité, l'UFR varie au plus de 0,15 % par an. Après application du corridor, la valeur utilisée pour 2018 sera de 4,05 %.

Pour les assureurs, une baisse de l'UFR reviendrait d'une part à augmenter leurs provisions pour des engagements à long terme, et d'autre part à limiter les produits financiers futurs dans le cadre des projections.

L'UFR est calculé à partir de données macroéconomiques historiques, afin de rester cohérent à long terme. Quant à la partie observable de la courbe, elle est issue de données de marché. Aussi, un décrochage net est observé entre les 2 phases de la courbe. Ce décrochage reste visible avec le nouvel UFR, bien qu'il soit atténué.

L'objet de ce mémoire est de calculer l'UFR à partir des données de marché, dans le but de garder une certaine cohérence avec le marché pour les taux à long terme. Nous débuterons par une description de la méthode telle qu'elle a été originalement proposée par l'EIOPA et les modifications récemment apportées. Nous aborderons au passage les principales critiques de la méthode. Ensuite, nous présenterons les fondements théoriques de la méthode de Smith-Wilson, qui s'appuie sur un UFR fixé. Nous verrons que ces éléments mathématiques amènent de manière naturelle au calcul de l'UFR proposé par De Kort et Vellekoop. La méthode se décline en 3 approches, selon la fonction à optimiser : fonction de prix, fonction de rendement ou fonction *forward*. Puis, sur la bases de données de marché fournies par Bloomberg, nous présenterons de manière détaillée les étapes de calcul de la courbe. Nous appliquerons enfin la théorie développée afin de projeter l'UFR sur un historique de données réelles. Cette partie abordera également les principales limites de la méthode.

Enfin, une dernière partie est consacrée à l'application des résultats sur une base prudentielle. Cette partie présente les impacts de la prise en compte d'un UFR extrapolé sur un portefeuille d'assurance fictif. L'étude présente les déformations des flux du passif en fonction de la courbe utilisée, et ensuite les impacts sur les BEL, les SCR, les fonds propres et l'évolution du taux de couverture.

1 Pratique actuelle de l'EIOPA

Cette partie vise à introduire la méthode de Smith-Wilson, qui utilise l'UFR, et décrire la construction de la courbe de taux sans risque par l'EIOPA.

1.1 Problématique

Lors de la construction d'une courbe de taux, seule une partie des maturités est observable. Au-delà, il est nécessaire d'extrapoler la courbe. Les assureurs, qui peuvent avoir des engagements sur plusieurs dizaines d'années, ont besoin de ces taux pourtant non observés.

La méthode de Smith-Wilson permet de répondre à ce besoin. Elle a été introduite en 2001 et est utilisée par l'EIOPA pour construire la courbe de taux sans risque.

Cette méthode permet de modéliser une courbe de prix zéro-coupon. Disposer de cette courbe revient à avoir la courbe des taux *forward* ou celle du rendement (cf. notations de la page 6). En général, la courbe de taux fournie est celle du rendement.

La particularité de la méthode de Smith-Wilson est qu'elle ajuste parfaitement les taux fournis en données. Cependant, son intérêt est avant tout de modéliser les taux « longs », qui ne sont pas observables directement.

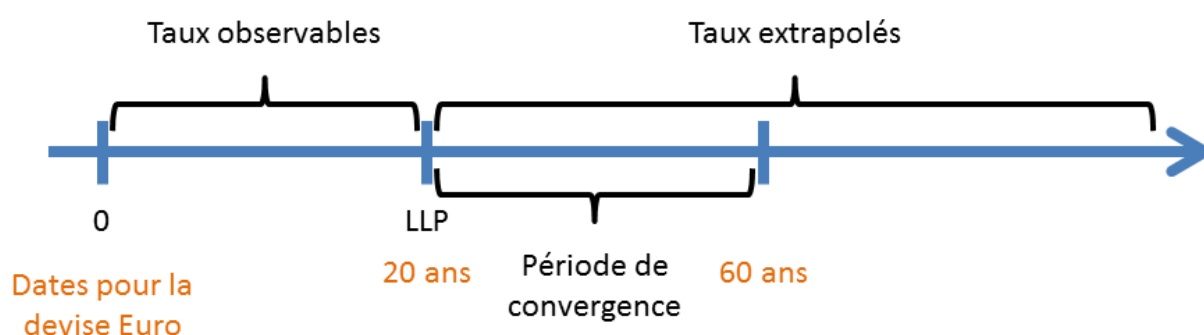


FIGURE 1 – Les différentes périodes considérées

Les taux sont observables jusqu'au LLP (*Last Liquid Point*). Au-delà, ils sont extrapolés. Le modèle, tel qu'utilisé par l'EIOPA, prévoit ensuite une période de convergence au-delà de laquelle les taux *forward* tendent vers l'UFR. Cette contrainte permet de régler le paramètre de vitesse de convergence noté α , aussi appelé *mean reversion parameter*.

L'EIOPA a fixé le point de convergence à :

$$\max(LLP + 40; 60)$$

Cette méthode prend donc en paramètres :

- LLP : la dernière maturité observable ;
- Les prix et taux observés sur la période liquide ;
- UFR : le taux instantané ultime vers lequel la méthode converge ;
- α : vitesse de convergence vers l'UFR.

Remarques :

- Toutes les maturités précédant le LLP ne sont pas toujours observables ou utilisables ;
- L'EIOPA a sélectionné les maturités utilisables en se basant sur le critère DLT. Les marchés doivent, à ces maturités, être profonds, liquides et transparents (DLT : *Deep, Liquid, Transparent*) ;
- Pour ces taux manquants, il existe de nombreuses méthodes d'interpolation (par exemple : bootstrap) mais la méthode de Smith-Wilson permet si besoin de calculer ces maturités (les formules restent applicables avant le LLP) ;
- α est optimisé par l'EIOPA. Son calcul est présenté plus loin (page 14).

1.2 Choix de l'UFR

L'UFR (*Ultimate Forward Rate*) ou taux ultime correspond au taux *forward* après la période de convergence. La valeur retenue par l'EIOPA est justifiée dans le document 3.

Il est calculé comme la somme :

- du taux d'inflation moyen ;
- du rendement sans risque moyen.

D'après l'équation de Fisher, il s'agit donc du taux d'intérêt nominal :

$$\text{taux d'intérêt nominal} = \text{taux d'intérêt réel} + \text{inflation}$$

La valeur ainsi calculée peut paraître élevée dans un contexte de taux bas. Nous observons de plus un net décrochage au niveau de la dernière maturité interpolée (20 ans) sur les taux fournis par l'EIOPA, comme par exemple au 31/12/2016 :

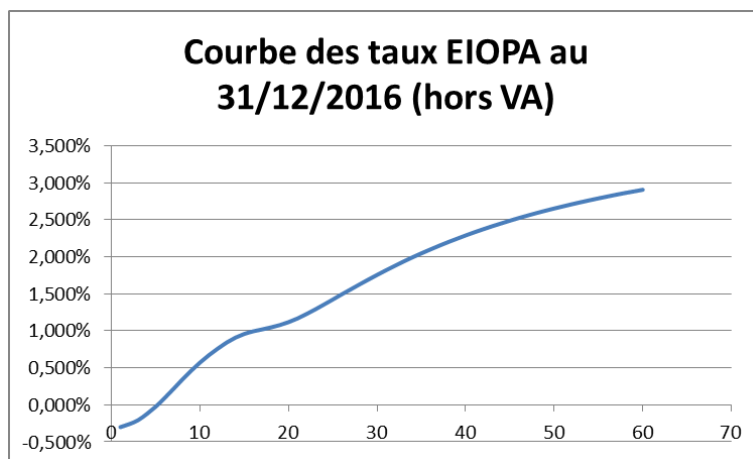


FIGURE 2 – Courbe de taux EIOPA au 31/12/2016 (hors VA)

A partir de 2018, l'UFR devient variable et est recalculé annuellement. Ces changements seront détaillés plus loin (voir page 16).

1.3 Notations et extrapolation de la courbe des taux

Nous allons voir ici la méthode de Smith-Wilson telle qu'elle est utilisée par l'EIOPA. Elle est décrite dans le document 8, notamment aux pages 41 à 45. Nous verrons d'abord les principales notations et ensuite les formules pour extrapoler le prix des zéro-coupons.

La méthode de Smith-Wilson s'utilise en deux temps :

- Interpolation : calibration des prix observés et calcul d'un vecteur d'interpolation ;
- Extrapolation : calcul des prix à toutes les maturités.

Notations

Commençons par introduire les paramètres de la méthode. Ils se composent de variables servant à décrire les instruments financiers utilisés, du taux ultime et d'un paramètre réglant la vitesse de convergence vers le taux ultime :

- $\mathbf{p}$ le vecteur des prix des instruments financiers, de taille n , à ne pas confondre avec la fonction de prix notée p ;
- $\mathbf{u}$ le vecteur des dates de versement des flux (en années), de taille m ;
- $\mathbf{C}$ la matrice des flux attendus, notés c_{ij} . La matrice est de taille $m \times n$, donc c_{ij} est le flux de l'instrument j à la date u_i ;
- $\omega = \ln(1 + UFR)$ le taux ultime (*Ultimate Forward Rate*) en notation exponentielle ;
- $\alpha > 0$ le paramètre contrôlant la vitesse de convergence (ou *mean reversion parameter*).

Flux de
l'instrument 1

Flux à
maturité u_1

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \begin{array}{ccccc} 0,01 & 0,02 & \dots & 0 & 0,03 \\ 1 & 0,02 & \dots & 0 & 0,03 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0,03 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

FIGURE 3 – Schéma illustrant la forme de $\mathbf{C}$

Remarques :

- Les maturités u_i ne sont pas forcément annuelles. Elles peuvent par exemple être biannuelles (cas de la livre sterling), ou être plus longues (cas de la kuna croate, qui passe de la maturité 4 ans à la maturité 10 ans) ;
- Il est demandé pour appliquer les formules que les colonnes de $\mathbf{C}$ soient linéairement indépendantes (pas d'information redondante), donc $m \geq n$ (plus de maturités que d'instruments).

Des notations précédentes, il découle que :

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}'\mathbf{p}(\mathbf{u})$$

Ce qui revient simplement à dire que le prix des instruments financiers utilisés correspond exactement à la somme des flux qu'ils génèrent, actualisés par la fonction de prix.

En plus des paramètres, nous introduisons des notations supplémentaires afin de simplifier les formules :

- $H(u, v) = \alpha \cdot \min(u, v) - \frac{1}{2}e^{-\alpha|u-v|} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(u+v)}$, correspond à la fonction de cœur de Wilson ;
- $W(u, v) = e^{-\omega(u+v)}H(u, v)$, correspond à la fonction de Wilson ;
- $\mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (W(u_k, v_m))_{km} = \mathbf{W}'(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ la matrice de Wilson, aussi : $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$;
- De même, $\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (H(v_k, u_m))_{km}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$;
- $\mathbf{d} = \exp[-\omega\mathbf{u}]$ un vecteur auxiliaire ;
- $\mathbf{d}_\Delta$ la matrice diagonale contruite à partir de $\mathbf{d}$, notons que $\mathbf{W} = \mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta$ (la démonstration n'est pas donnée ici) ;
- $\mathbf{Q} = \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C}$ matrice auxiliaire pour simplifier les notations, ce qui revient à multiplier chaque ligne i de la matrice $\mathbf{C}$ par $e^{-\omega u_i}$;
- $\mathbf{q} = \mathbf{Q}'\mathbf{1} = \mathbf{C}'\mathbf{d}$ avec $\mathbf{1}$ un vecteur de 1 ;
- $\mathbf{b}$ un vecteur de taille n servant à calibrer la courbe sur les données observées. Nous verrons qu'un vecteur similaire noté $\tilde{\mathbf{b}}$, de taille m , peut être utilisé de manière plus pratique.

Les graphiques suivants permettent d'illustrer le comportement des fonctions W et H pour un u fixé, avec α fixé à 0,1 :

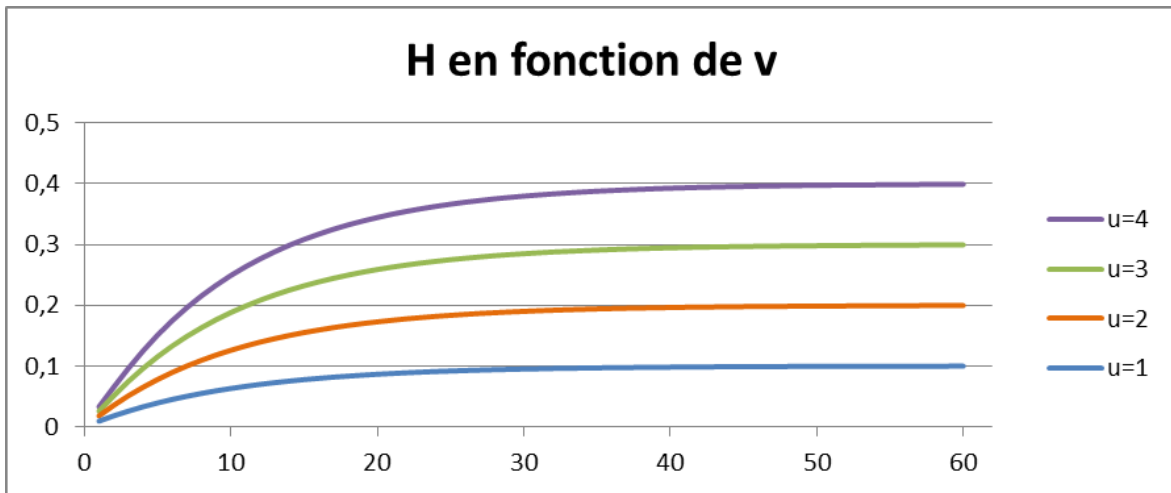


FIGURE 4 – H tracé pour différents u

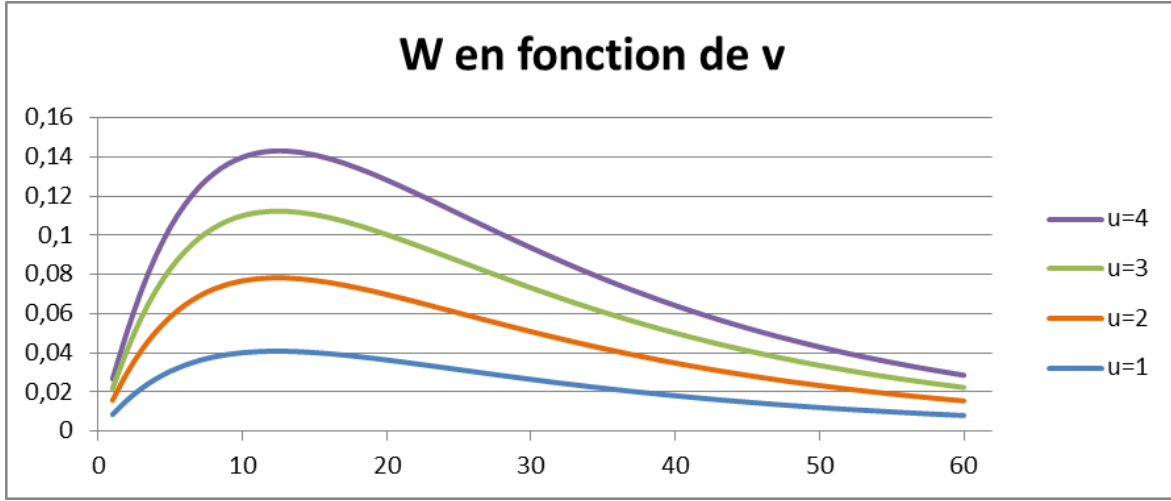


FIGURE 5 – W tracé pour différents u

Il apparait clairement que la fonction H pour u fixé converge rapidement vers une valeur limite. En fait, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{v \rightarrow \infty} H(u, v) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\alpha \cdot \min(u, v) - \frac{1}{2} e^{-\alpha|u-v|} + \frac{1}{2} e^{-\alpha(u+v)} \right) \\
 &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\alpha \cdot u - \frac{1}{2} e^{-\alpha(v-u)} + \frac{1}{2} e^{-\alpha(u+v)} \right) \\
 &= \alpha \cdot u + \lim_{v \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{-\alpha \cdot v} (-e^{\alpha \cdot u} + e^{-\alpha \cdot u}) \right) \\
 &= \alpha \cdot u + \frac{1}{2} (-e^{-\alpha \cdot u} + e^{-\alpha \cdot u}) \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-\alpha \cdot v} \\
 &= \alpha \cdot u
 \end{aligned}$$

Aussi, la fonction W , pour u fixé, semble converger vers 0, ce qui est vérifié analytiquement :

$$\lim_{v \rightarrow \infty} W(u, v) = \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-\omega(u+v)} \cdot H(u, v) = \alpha \cdot u \cdot \lim_{v \rightarrow \infty} e^{-\omega(u+v)} = 0$$

Formules

Nous pouvons maintenant introduire les formules. La méthode de Smith-Wilson s'applique directement à la fonction de prix des zéro-coupons p . La formule d'extrapolation est :

$$\begin{aligned}
 \boxed{p(v) = e^{-\omega \cdot v} + \mathbf{W}(v, \mathbf{u}) \mathbf{C} \mathbf{b}} \\
 &= e^{-\omega \cdot v} + e^{-\omega \cdot v} \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) d_{\Delta} \mathbf{C} \mathbf{b} \\
 &= e^{-\omega \cdot v} + e^{-\omega \cdot v} \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Q} \mathbf{b}
 \end{aligned}$$

Ou encore (sans matrices) :

$$\begin{aligned}
 p(v) &= e^{-\omega.v} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j W(v, u_i) \\
 &= e^{-\omega.v} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j e^{-\omega.(v+u_i)} H(v, u_i) \\
 &= e^{-\omega.v} \left(1 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j e^{-\omega.u_i} H(v, u_i) \right)
 \end{aligned}$$

De plus, en notant $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{Q}\mathbf{b}$, soit $\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j e^{-\omega.u_i}$, un vecteur de taille m , alors la fonction de prix s'écrit :

$$\begin{aligned}
 p(v) &= e^{-\omega.v} + e^{-\omega.v} \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{b}} \\
 p(v) &= e^{-\omega.v} \left(1 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i H(v, u_i) \right)
 \end{aligned}$$

Cette notation permet de faire disparaître les c_{ij} de la formule finale utilisée pour tous les prix. Ils ne sont plus utilisés que pour calculer $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m)$. L'EIOPA fournit d'ailleurs ce vecteur avec les courbes de taux RFR (fichier dont le nom finit par _Qb_SW).

Notons que la fonction de prix est la somme d'un terme indépendant des données de marché ($e^{-\omega.v}$) et d'un terme dépendant de $\mathbf{b}$, qui permet d'ajuster les données observées. Aussi, ce premier terme correspond à une courbe « support », décalée par le second terme pour interpoler les observations.

1.4 Interpolation des données de marché

Le chapitre précédent donne les formules à appliquer pour calculer la fonction de prix des zéro-coupons en connaissant $\mathbf{b}$. Nous allons voir dans ce chapitre comment le déterminer.

Rappel

Soit $\mathbf{I}$ est la matrice identité.

Une matrice $\mathbf{A}$ est dite inversible s'il existe une matrice $\mathbf{B}$ telle que :

$$\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

De plus, si une telle matrice $\mathbf{B}$ existe, alors elle est unique et est notée $\mathbf{A}^{-1}$.

Le vecteur $\mathbf{b}$ est calculé à l'aide de la proposition suivante :

Proposition

Si $\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}$ est inversible, alors il existe une solution unique et :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{q})$$

Remarques :

- Pour que $\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q} = \mathbf{C}'\mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{d}_\Delta\mathbf{C}$ soit inversible, il suffit que $\mathbf{H}$ soit inversible et que les colonnes de $\mathbf{C}$ soient linéairement indépendantes ;
- La matrice $\mathbf{H}$ est supposée inversible. La démonstration ne sera pas détaillée, mais des éléments faisant intervenir la matrice de covariance d'un processus Gaussien sont proposés dans le document [2].

La démonstration est en annexe (voir page 65).

Remarques :

- En plus des prix, la solution dépend de α et ω ;
- La solution peut aussi s'écrire : $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{Q}\mathbf{b} = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$;
- Dans le cas où les instruments financiers utilisés sont des zéro-coupons, alors $\mathbf{C}$ est la matrice identité (bien ordonnée) et l'équation se simplifie :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{d}_\Delta)^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{d}) = (\mathbf{W})^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{d})$$

1.5 Optimisation de α

Jusqu'ici, nous avons présenté la méthode sachant :

- Le taux ultime ou UFR ;
- $\alpha > 0$, le paramètre réglant la vitesse de convergence.

Par défaut, la valeur de α est de 0,1. Il est précisé dans [3] que cette valeur a été calibrée empiriquement sur des courbes de taux australiennes en assurant des « résultats sensés et des courbes économiquement cohérentes dans la plupart des cas ».

Nous allons maintenant voir comment régler le paramètre α . Nous avons vu page 8 que l'EIOPA prévoit une période de convergence d'au moins 40 ans. Au-delà, le taux *forward* doit coïncider avec l'UFR.

Commençons par remarquer que :

- Plus α est grand, plus la convergence du taux *forward* vers l'UFR est rapide ;
- L'UFR n'est jamais parfaitement atteint, si bien que certains auteurs préfèrent parler de taux asymptotique plutôt que de taux ultime. Nous garderons la dénomination de taux ultime utilisé par l'EIOPA.

Choisir α permet de régler la vitesse de convergence pour l'UFR. L'EIOPA propose de caractériser cette vitesse de convergence par l'écart entre la fonction *forward* au point de convergence T (60 ans pour l'euro) et l'UFR. Notons cet écart (absolu) par :

$$g(\alpha) = |\omega - f(T)|$$

Rappel : $\omega = \ln(1 + UFR)$, soit l'UFR en convention continue. L'écart étudié est donc mesuré en convention continue.

L'EIOPA a choisi comme critère de convergence que l'écart soit inférieur à 1 bp. Comme la vitesse de convergence augmente avec α , nous devons chercher le plus petit α solution de :

$$g(\alpha) < 10^{-4}$$

α est cherché avec une précision de 6 décimales.

Proposition

Soit :

$$\kappa = \frac{1 + \alpha u' Q b}{\sinh(\alpha u' Q b)}$$

Nous avons alors :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha}{|1 - \kappa \cdot e^{\alpha T}|}$$

La preuve est en annexe (page 66).

Cette formule permet de tester l'écart de convergence en T . La recherche de α consiste finalement à trouver le plus petit α vérifiant $g(\alpha) < 10^{-4}$.

Cependant, l'EIOPA impose $\alpha \geq 0,05$. Si cette valeur vérifie la condition, alors elle est gardée. Sinon, la valeur optimale peut être approchée en incrémentant graduellement un α candidat, puis en optimisant la solution avec des pas de plus en plus fin.

Cette optimisation peut poser problème. Il peut arriver par exemple que $1 - \kappa \cdot e^{\alpha T}$ soit nul en un point, ce qui donne une singularité pour la fonction $g(\alpha)$. Notons h la fonction de tolérance :

$$g(\alpha) = |\omega - f(T)| = |h(\alpha)|$$

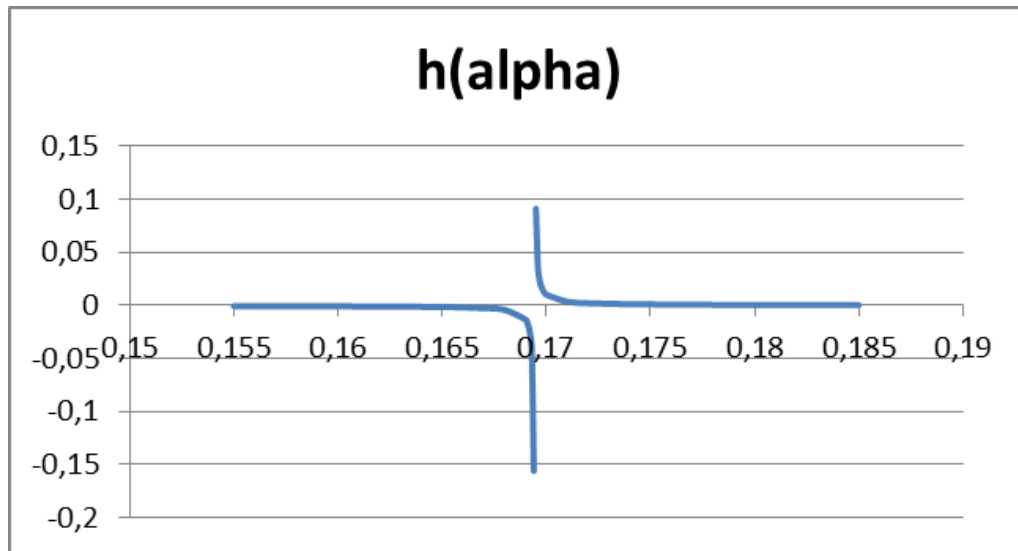


FIGURE 6 – h la fonction de tolérance

Ce graphique est tracé avec des données particulières (voir 12), mais permet d'illustrer que $g(\alpha)$ peut avoir une singularité. Ce n'est pas forcément le cas, par exemple avec les données du 31/12/2016, il ne semble pas y avoir de singularité (le dénominateur semble toujours négatif).

1.6 Critiques de la méthode

La méthode de Smith-Wilson et son implémentation par l'EIOPA ont été largement commentées. Aussi nous pouvons lister les principaux avantages et inconvénients relevés.

Les avantages de la méthode sont :

- Un ajustement exact des données de marché sur la période liquide ;
- Elle ne fait pas (peu) intervenir de jugement d'expert ;
- La méthode est dans le domaine public, elle est donc accessible et transparente pour tous les assureurs ;
- Elle est simple à implémenter et peut être utilisée sous Excel (sans VBA) ;
- La solution du système est analytique et ne fait pas appel à une optimisation, ce qui évite des sauts entre des solutions très différentes lorsque les données sont légèrement modifiées.

Du côté des inconvénients :

- La fonction de prix des zéro-coupons peut prendre des valeurs négatives ;
- La fonction de prix n'est pas forcément décroissante sur la partie liquide (voir [10]) : la solution analytique peut être telle qu'entre 2 maturités avec des prix suffisamment proches (mais décroissants) la fonction devient localement croissante, ce qui contredit l'hypothèse généralement admise en finance mathématique d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) ;
- Le paramètre α , contrôlant la vitesse de convergence, est fixé hors du modèle ;
- Les prix projetés ne correspondent pas à des prix utilisables par les assureurs : il est en effet impossible de couvrir les engagements aux maturités éloignées avec des obligations correspondant aux prix projetés, car ces obligations n'existent pas ou ne sont pas en nombre suffisant.

1.7 Révision de l'UFR

Lors de la mise en place de Solvabilité II, l'UFR a été pensé comme une valeur fixe. Le régime est en vigueur depuis peu, mais, dans un contexte de taux bas, l'UFR fixé en 2010 peut sembler trop élevé.

Aussi, l'EIOPA a lancé une consultation en 2016 sur une proposition de méthode de calcul annuel de l'UFR (voir [4]). Finalement, en mai 2017, l'EIOPA a annoncé la méthode retenue et sa mise en application dès 2018 (voir [7]).

Ce chapitre présentera d'abord la méthode proposée en 2016 puis la méthode finalement retenue. Une dernière partie reviendra sur les principales remarques collectées lors de la consultation.

Proposition originale

L'UFR reste la somme de l'inflation et du taux d'intérêt moyen. Cependant il est recalculé annuellement, et ajusté via l'utilisation d'un corridor.

Cela se formalise avec les formules et notations suivantes :

- UFR_t est l'UFR calculé pour l'année t ;
- UFR_t^L est l'UFR calculé pour l'année t après application de la limite ;

$$UFR_t^L = \max(UFR_{t-1}^L - 20 \text{ bps}; \min(UFR_t; UFR_{t-1}^L + 20 \text{ bps}))$$

Cette formule revient à dire que l'UFR utilisé évolue au plus de 20 bps par an. Le calcul de l'UFR pour l'année t est donnée par :

$$UFR_t = \text{taux d'intérêt réel} + \text{inflation} = R + I$$

Le taux d'inflation I est déterminé « par seau » en fonction de la politique de la banque centrale dont dépend la monnaie. Les « seaux » sont de 1 %, 2 %, 3 % et 4 %. Pour l'euro, comme l'objectif de la BCE (Banque Centrale Européenne) est une inflation inférieure à 2 %, mais restant proche, le taux de 2 % est retenu.

R est le taux d'intérêt réel pondéré par rapport aux taux d'intérêt réel r_i de chaque année depuis 1960. Les w_i sont les poids associés aux années, et l'EIOPA propose d'avoir $w_i = \beta^{n-i}$, et $\beta = 0,99$. Cette pondération donne plus d'importance aux taux les plus récents.

La formule permettant de calculer R est alors :

$$R = \exp \left(\frac{\sum_{i=0}^n w_i \ln(1 + r_i)}{\sum_{i=0}^n w_i} \right) - 1$$

Le graphique suivant permet de visualiser l'évolution des poids, calculés à la fin de l'année 2016 :

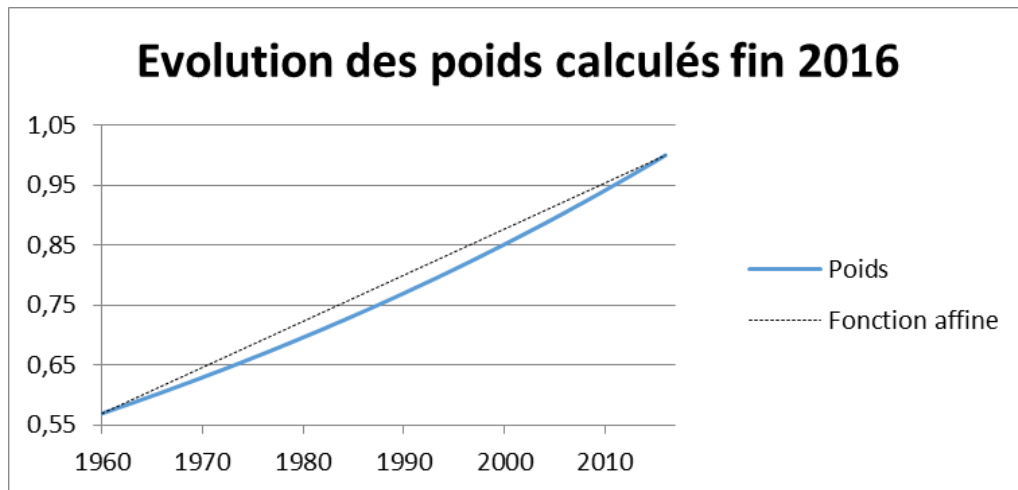


FIGURE 7 – Evolution des poids, calculés fin 2016

La courbe en pointillé est une droite qui permet de mettre en avant la convexité de la courbe.

Notons que le taux d'intérêt réel est calculé comme :

$$\text{taux réel} = \frac{\text{taux court} - \text{inflation}}{1 + \text{inflation}}$$

Les statistiques utilisées sont issues de l'OCDE (voir <http://stats.oecd.org>) et de l'AMECO (voir http://ec.europa.eu/economy_finance/ameco/user/serie/SelectSerie.cfm). Le taux réel utilisé est une moyenne sur 7 pays : Belgique, France, Allemagne, Italie, Pays-Bas, Royaume-Uni et Etats-Unis.

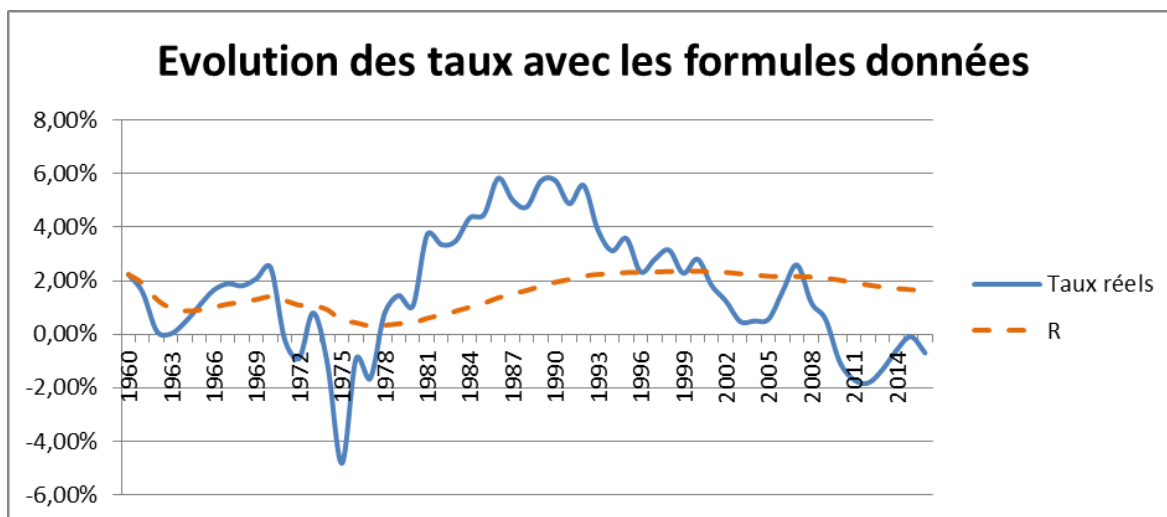


FIGURE 8 – Evolution des taux avec les formules données

Si les formules proposées avaient été appliquées depuis 2010, les UFR seraient :

TABLE 1 – Projection de l'UFR avec les formules proposées

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
UFR sans corridor	4,20 %	3,93 %	3,84 %	3,77 %	3,71 %	3,67 %	3,61 %
UFR final	4,20 %	4,00 %	3,84 %	3,77 %	3,71 %	3,67 %	3,61 %

L'UFR de 2010 est ici fixé. L'UFR calculé serait sinon à 4,02 %. Notons que le corridor n'est appliqué que la première année dans cet exemple. Les formules données semblent ne pas produire de choc excessif. Cependant, en les appliquant aujourd'hui, à partir d'un UFR à 4,20 %, le corridor serait vraisemblablement activé plusieurs années (passage de 4,20 %, à 3,61 %, voire moins par la suite).

Le graphique suivant reprend les données du tableau précédent, et représente les limites du corridor :

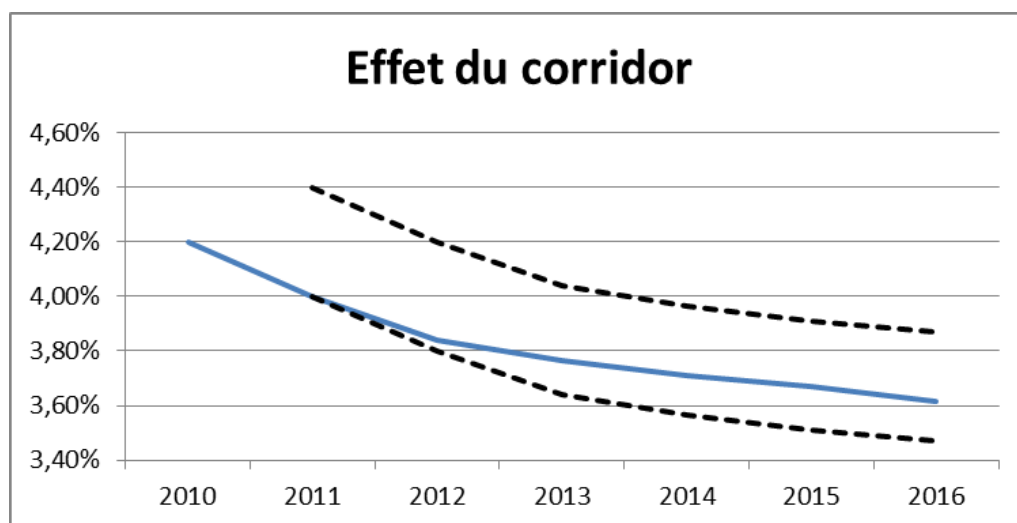


FIGURE 9 – Evolution de l'UFR avec les formules proposées

Méthode retenue

L'EIOPA a annoncé en 2017 la méthode retenue pour le calcul de l'UFR avec application dès 2018.

Les principales différences avec la version initialement présentée sont :

- La diminution du corridor de 20 bps à 15 bps ;
- L'abandon du système de pondération des rendements, les rendements anciens ne sont plus pénalisés (poids d'environ 0,55 en 1961) ;
- L'année 1960 n'est plus prise en compte. Certaines données n'étant pas disponibles, elle était calculée avec des règles spéciales.

Les 2 premières modifications ont tendance à augmenter l'UFR :

- La diminution du corridor va effectivement ralentir chaque année de 5 bps la baisse de l'UFR vers sa valeur recalculée ;
- Sans la pondération, l'UFR calculé augmente de quelques points de base.

L'UFR à utiliser pour 2018 sera de 4,05 %, pour un UFR calculé de 3,65 % (avant corridor).

L'EIOPA a mené une étude d'impact d'un changement d'UFR sur un échantillon d'assureurs (voir [6]). Le premier scénario retenait une baisse de 20 bps de l'UFR (UFR à 4,00 %). Le taux de couverture du SCR est alors passé en moyenne de 203 % à 201 %. Dans un scénario plus adverse, avec une baisse de 50 bps de l'UFR, le taux de couverture a reculé jusqu'à 198 %. Ces impacts sont considérés comme très faibles par l'EIOPA.

Résultats de la consultation

Les réponses à la consultation ont pointé certains défauts importants. Nous allons maintenant détailler les principaux.

Incohérence d'un changement la première année

L'incohérence d'un changement d'UFR une année après l'entrée en vigueur de Solvabilité 2 alors que cette valeur devait être stable sur 100 ans. Changer ce paramètre donnerait l'impression que Solvabilité 2 est un régime instable. En particulier, il y a pour l'instant peu de données pour évaluer son fonctionnement.

L'EIOPA a déjà prévu une évaluation du régime (voir [5]), et notamment des vérifications pour :

- La formule standard à partir de 2018 ;
- Les garanties long terme (LTG *package* : *Long Term Guarantees*) à partir de 2021.

Les taux d'intérêts restent bas

Malgré un UFR à 4,2 %, les taux projetés restent bas sur une longue période car l'UFR n'est que le taux *forward* après 60 ans, le taux d'actualisation restant bien en-dessous.

Les graphiques suivant reprennent la courbe de taux de l'EIOPA au 31 décembre 2016 par rapport à une courbe ajustée sur les prix donnés, mais avec un UFR de 3,65 %. Notons que les courbes restent identiques sur la partie liquide, et dévient ensuite.

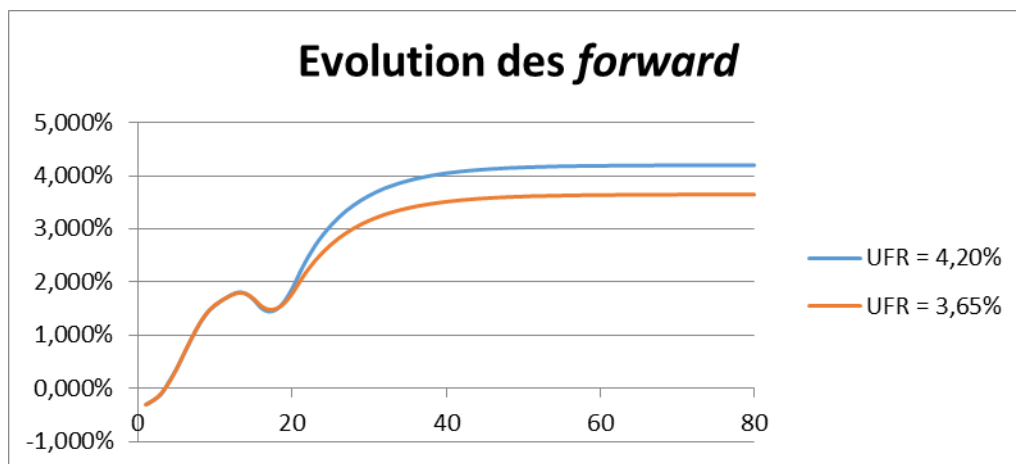


FIGURE 10 – Evolution des taux forward selon 2 UFR

Les taux *forward* (Figure 10) convergent comme attendu vers l'UFR. L'écart se creuse rapidement entre les courbes et se stabilise à mesure que les courbes approchent de leur UFR respectif.

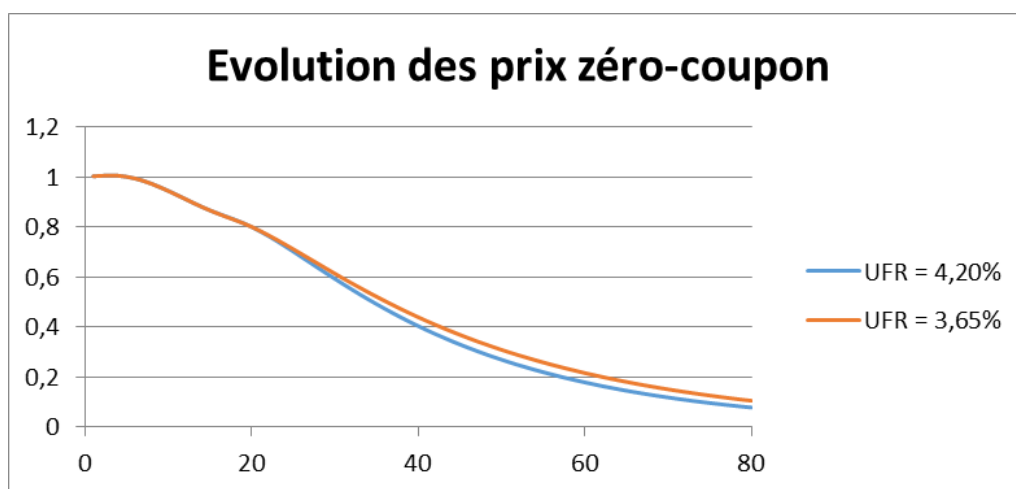


FIGURE 11 – Evolution des prix zéro-coupon selon 2 UFR

Sur ce graphique (Figure 11), les courbes semblent très proches. Il s'agit cependant d'un effet d'échelle, et il est intéressant pour le faire apparaître de tracer l'écart relatif entre les courbes de prix avec pour référence la courbe ayant l'UFR à 4,2 % :

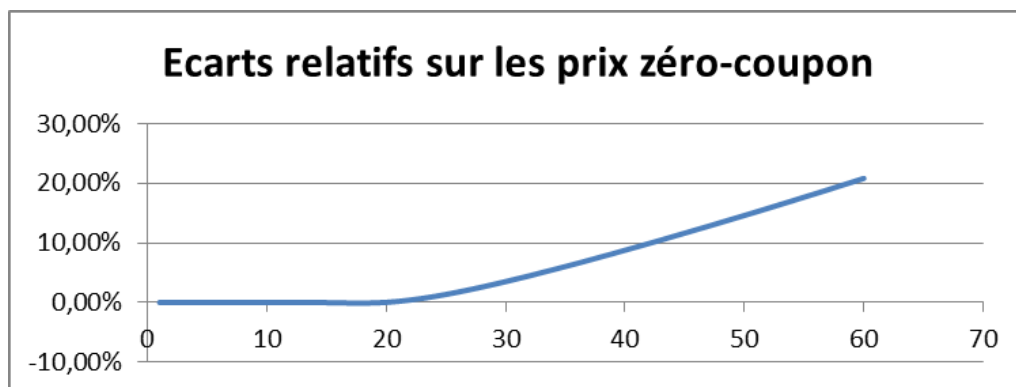


FIGURE 12 – Ecart relatif sur les prix zéro-coupon

L'écart relatif semble augmenter de manière quasi-linéaire à partir de 20 ans. De plus il atteint presque 20 % à 60 ans, ce qui signifie qu'un zéro-coupon à 60 ans coûtera 20 % plus cher avec un UFR à 3,65 % qu'avec un UFR à 4,2 %. Les écarts relatifs continuent d'augmenter avec le temps, atteignant 44 % à 100 ans.

Cependant, ces écarts restent contenus à moyen terme, et l'écart est de 5 % à 35 ans. L'impact réel sur les assureurs de ce changement pourrait donc être plus mesuré.

Le risque de taux est déjà pris en compte par Solvabilité 2

Le risque de taux est pris en compte par Solvabilité 2 via notamment le SCR, et le risque est donc déjà couvert.

Plus généralement, les différents paramètres de Solvabilité 2 ont été réglés de manière cohérente entre eux. Changer l'UFR pourrait nécessiter de revoir tous les autres paramètres du régime pour s'assurer qu'ils sont cohérents avec la nouvelle méthodologie (voir [5](#)). Gabriel Bernardino, président de l'EIOPA, rejette cette idée.

Cependant, l'Institut des Actuaire rappelle dans son commentaire que la baisse des taux de ces dernières années a dépassé 2 fois le niveau des scénarios prudentiels de stress ces dernières années.

2 Projection de l'UFR

La partie précédente visait à présenter la méthode de Smith-Wilson de manière concrète, telle qu'elle est utilisée par l'EIOPA. Cette partie s'attachera à présenter la méthode sous un angle différent afin d'aller plus loin et d'extrapoler l'UFR à partir de données de marché.

Cette partie repose essentiellement sur l'article de De Kort-Vellekoop (voir [2]), néanmoins les notations de l'EIOPA ont été utilisées pour que le lecteur fasse le lien plus naturellement avec la documentation de l'EIOPA.

2.1 Formulation mathématique de la méthode de Smith-Wilson

But du chapitre :

Dans ce chapitre, nous supposons que l'UFR est fixé, et nous allons voir comment la fonction de prix telle que proposée par Smith-Wilson, est déterminée. L'EIOPA se base sur cette méthode pour projeter la courbe de taux sans risque.

Idée générale :

Les éléments présentés dans ce chapitre permettront de mieux comprendre la méthode de Smith-Wilson, qui s'appuie sur un UFR fixé *a priori*. Nous verrons que ces éléments amènent logiquement à introduire l'idée d'un UFR variable, qui pourra ensuite être projeté avec une approche similaire à celle utilisée pour la courbe de prix.

En général, la modélisation du prix des zéro-coupons p revient à chercher une fonction g telle que :

$$p(v) = g(v)$$

Ici, nous commençons par poser un cadre pour la fonction cherchée :

$$p(v) = (1 + g(v)) e^{-\omega \cdot v}$$

Rappel : ω est l'UFR en notation exponentielle, $\omega = \ln(1 + UFR)$. Avec un UFR à 4,2 %, ω vaut environ 0,0411.

Nous cherchons toujours à déterminer p , mais en supposant en partie sa forme. Notons que si $g = 0$, alors $p(v) = e^{-\omega \cdot v}$. Cette fonction de prix correspond à un taux de rendement et un taux *forward* constant à 4,2 %, d'après les formules rappelées page [6] :

$$p(t) = e^{-t \cdot y(t)} = e^{\int_0^t f(u) du}$$

Il apparait aussi dans ces formules que la fonction de prix devrait être positive et continue. La positivité est donnée par l'exponentielle, et la continuité par l'intégrale. Dans cette section, nous n'imposerons pas la positivité de la fonction de prix comme contrainte. Il s'agit en effet d'un défaut de la méthode de Smith-Wilson : la fonction de prix peut prendre des valeurs négatives. La régularité de la fonction sera par contre utilisée par la suite.

La fonction recherchée est donc g , mais en posant des contraintes bien choisies nous allons aboutir à une solution. Nous avons vu précédemment que la méthode de Smith-Wilson interpole parfaitement les taux observés fournis. Cependant, la contrainte d'interpolation peut être vérifiée par de nombreuses fonctions, mais qui peuvent être très irrégulières entre les maturités ou aux extrémités (voir l'interpolation de Lagrange pour certaines données). Nous souhaitons avoir une courbe régulière, aussi nous commençons par poser les contraintes suivantes :

Objectif 1

Trouver g tel que :

- a - Les prix observés sont parfaitement ajustés ;
- b - La fonction de prix est aussi lisse que possible.

(a) Prix observés ajustés

Par cette contrainte, nous souhaitons que les prix observés des instruments correspondent aux prix recalculés. Le prix des instruments est calculé comme la somme de ses flux, évalués comme des zéro-coupons.

En gardant les notations introduites page 9, cette contrainte se formalise par :

$$\forall j \in [1, n], p_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} p(u_i) = \sum_{i=1}^m c_{ij} (1 + g(u_i)) e^{-\omega \cdot u_i}$$

(b) Lissage de la fonction de prix

Cette contrainte vise à obtenir une fonction g régulière. Afin d'assurer cela, nous allons minimiser les valeurs quadratiques de :

- la dérivée première g' pour éviter les variations brutales de g : les valeurs prises par g varieront donc progressivement ;
- la dérivée seconde g'' pour éviter des changements de tendance brutaux de g : la courbe a une « inertie » et sa « direction » évolue progressivement.

Aussi nous introduisons le coefficient α (à la fonction identique à celle du α présenté dans le chapitre précédent), pour pondérer le poids relatif donné aux valeurs des deux dérivées. Dans la méthodologie de l'EIOPA, sa valeur est optimisée selon un critère de convergence (voir page 14). Par défaut, sa valeur est de 0,1.

La quantité à optimiser est donc :

$$L_\alpha[g] = \int_0^{+\infty} (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds$$

En pratique, $\alpha \in]0, 1]$ et est rarement supérieur à 0,2, ce qui revient à dire que la quantité à minimiser est beaucoup plus sensible aux valeurs prises par g'' qu'aux valeurs prises par g' .

Notons par ailleurs que l'intégrale va de 0 à $+\infty$. Toute la courbe est donc lissée, bien que les irrégularités concernent surtout les points interpolés.

Nous cherchons g minimisant la quantité à optimiser. Cette contrainte se formalise par :

$$\min_g L_\alpha[g] = \min_g \int_0^{+\infty} (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds$$

Espace de fonctions approprié

La solution recherchée doit posséder certaines caractéristiques qui permettent de formaliser l'espace de fonctions auquel la solution g appartient :

- Le prix d'un zéro-coupon en 0 devrait être de 1, puisqu'il n'y-a pas de risque en théorie car le nominal est immédiatement restitué : $p(0) = 1$. Aussi, comme $p(0) = (1 + g(0))$, nous imposons $g(0) = 0$;
- La courbe doit être la plus lisse possible, donc nous pouvons poser $g''(0) = 0$;
- La fonction g doit tendre vers une valeur ultime, donc g' et g'' tendent vers 0 à l'infini.

Commençons par poser :

$$E = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}_+) : \lim_{v \rightarrow \infty} g(v) = 0 \right\}$$

$L^2(\mathbb{R}_+)$ est l'espace des fonctions de carré intégrable définies sur $\mathbb{R}_+$.

Nous pouvons maintenant noter :

$$F_a = \left\{ g \in C^2(\mathbb{R}_+) : g(0) = a, g''(0) = 0, g' \in E, g'' \in E \right\}$$

Cette notation sera réutilisée plus loin. Pour ce problème, nous utiliserons F_0 comme nous imposons un prix en 0 de 1, soit $g(0) = 0$.

$$F_0 = \left\{ g \in C^2(\mathbb{R}_+) : g(0) = 0, g''(0) = 0, g' \in E, g'' \in E \right\}$$

F_0 contient des fonctions dont les dérivées et dérivées secondes sont de carré intégrables, et nulles en $+\infty$. F_0 est l'espace approprié pour chercher une solution.

Reformulation de l'objectif 1

Trouver $g \in F_0$ tel que :

- a - $\forall j \in [1, n], p_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} p(u_i) = \sum_{i=1}^m c_{ij} (1 + g(u_i)) e^{-\omega \cdot u_i}$;
- b - $\min_{g \in F_0} L_\alpha[g]$.

La solution de ce problème a été donnée par Smith-Wilson (voir [\[15\]](#)) :

Théorème 1 (Smith-Wilson)

S'il existe une solution au problème 1, alors elle est de la forme :

$$g(v) = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\omega \cdot u_i} H(v, u_i)$$

Avec $(b_1, \dots, b_n)$ un vecteur de poids.

Remarquons que cela revient à écrire :

$$\begin{aligned} p(v) &= e^{-\omega \cdot v} (1 + g(v)) \\ &= e^{-\omega \cdot v} \left(1 + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j c_{ij} e^{-\omega \cdot u_i} H(v, u_i) \right) \end{aligned}$$

Soit la formule utilisée par l'EIOPA.

Pour rappel, H est le cœur de la fonction de Wilson (défini dans les notations pages 9 et suivantes) :

$$H(u, v) = \alpha \cdot \min(u, v) - \frac{1}{2} e^{-\alpha|u-v|} + \frac{1}{2} e^{-\alpha(u+v)}$$

La démonstration du théorème est en annexe (voir page 68).

Ce chapitre permet de montrer les bases mathématiques sur lesquelles repose la fonction de Smith-Wilson. Cette dernière résulte d'une optimisation d'un problème précis.

Aussi, cette formalisation amène logiquement à l'extrapolation de l'UFR.

2.2 Extrapolation de l'UFR suivant la fonction de prix

But du chapitre :

Le chapitre précédent a permis d'exposer comment la courbe de prix est déterminée, sachant un UFR fixé. Nous allons voir qu'en étendant la méthode présentée, et en ne fixant pas l'UFR, il est possible de le définir sur la base des données à notre disposition.

Idee générale :

La fonction de prix a été obtenue en cherchant la fonction la plus lisse possible vérifiant certaines contraintes. En reprenant les mêmes contraintes et en connaissant l'expression de la fonction de prix (Smith-Wilson), nous pouvons étendre la méthode de manière à déduire l'UFR tel que la fonction soit la plus lisse possible.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'expression de p se déduisait d'une série de contraintes bien posées. La principale contrainte portait sur le lissage de la courbe. Dans ce chapitre, nous allons voir que nous pouvons étendre la méthode précédente afin de projeter l'UFR. Il s'agira d'introduire une contrainte supplémentaire au problème précédemment posé.

Dans cette extension, nous allons à nouveau choisir la solution (g au chapitre précédent, l'UFR ici) de manière à obtenir la courbe la plus lisse possible, tout en respectant des contraintes. Nous connaissons déjà la forme de g et les contraintes ne changent pas. Aussi, la formulation de l'objectif ne varie que légèrement :

Objectif 2

Trouver ω tel que :

a - $\min_{\omega} \min_{g \in F_0} L_{\alpha}[g]$;

b - $\forall j \in [1, n], p_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} p(u_i) = \sum_{i=1}^m c_{ij} (1 + g(u_i)) e^{-\omega \cdot u_i}$.

La seule différence par rapport à l'objectif 1 du chapitre précédent est l'apparition de $\min_{\omega}$ sur la contrainte (a) pour spécifier que nous cherchons maintenant ω . Aussi, avec cette formalisation, il apparaît clairement que ω est cherché sachant la forme de p puisque la contrainte sur ω « englobe » l'objectif 1. Le théorème suivant donne un moyen de calculer un ω optimal :

Théorème 2 (De Kort-Vellekoop)

Le paramètre ω cherché résout l'équation :

$$(p - C'd_{\Delta}1)'(C'd_{\Delta}Hd_{\Delta}C)^{-1}C'd_{\Delta}u_{\Delta} \times (1 + Hd_{\Delta}C(C'd_{\Delta}Hd_{\Delta}C)^{-1}(p - C'd_{\Delta}1) = 0$$

De plus, si C est inversible, en notant $\pi = (C')^{-1}p$, alors l'équation se simplifie en :

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^n (u_i \pi_i e^{\omega \cdot u_i}) (H^{-1})_{ij} (\pi_j e^{\omega \cdot u_j} - 1) = 0$$

Remarque : cette équation n'a pas de solution explicite mais peut être résolue numériquement. Sa résolution peut être implémentée sous Excel (calcul non chronophage).

La démonstration est en annexe (voir page [75](#)).

Conclusion

Ce chapitre montre qu'en repartant de la contrainte utilisée pour trouver la méthode de Smith-Wilson, il est possible de calculer un UFR optimal. Cette solution est d'autant plus intéressante qu'elle est dans la continuité du problème posé initialement.

Cependant, si la fonction de prix est bien lissée par ce calcul, ce n'est pas nécessairement le cas pour les fonctions de rendement y et *forward* f , et la méthode de Smith-Wilson peut fournir des prix négatifs.

2.3 Extrapolation en fonction du rendement ou du taux *forward*

But du chapitre :

Ce chapitre présente une méthode de projection de l'UFR par rapport aux fonctions de rendement et *forward*, et non plus par rapport à la fonction de prix. En d'autres termes, il s'agira dans ce chapitre d'appliquer la méthodologie appliquée aux chapitres précédents en ayant recours à la fonction rendement (respectivement *forward*) en lieu et place de la fonction prix.

Idée générale :

Dans un premier temps, nous allons déterminer les fonctions *forward* et de rendement pour un UFR fixé (théorème 3). Cette partie est analogue au traitement de la fonction de prix qui amène au théorème 1. Dans un second temps, nous verrons comment, à partir de ces nouvelles expressions, nous pouvons calculer un UFR tel que les courbes soient les plus lisses possibles.

L'optimisation des fonctions de rendement et *forward* sera traitée en parallèle, car les formules et démonstrations restent comparables à quelques changements près.

Le chapitre précédent présentait une optimisation sur la courbure de la fonction de prix p . Cette partie présente une alternative visant à optimiser cette fois selon la fonction *forward* f ou selon la fonction de rendement y . Rappelons que ces fonctions sont liées :

$$p(v) = e^{-v \cdot y(v)} = e^{-\int_0^v f(u) du}$$

L'utilisation de ces formules permet, de plus, d'assurer que le prix soit positif. Aussi, la méthode de Smith-Wilson optimise le lissage de la fonction de prix, mais les fonctions de rendement et *forward* ne sont pas nécessairement les plus régulières possibles, notamment autour des maturités ajustées. Par exemple, les taux *forward* de l'EIOPA pour décembre 2016 présentent un creux significatif autour de 20 ans, qui correspondent à d'importantes variations de la dérivée seconde :

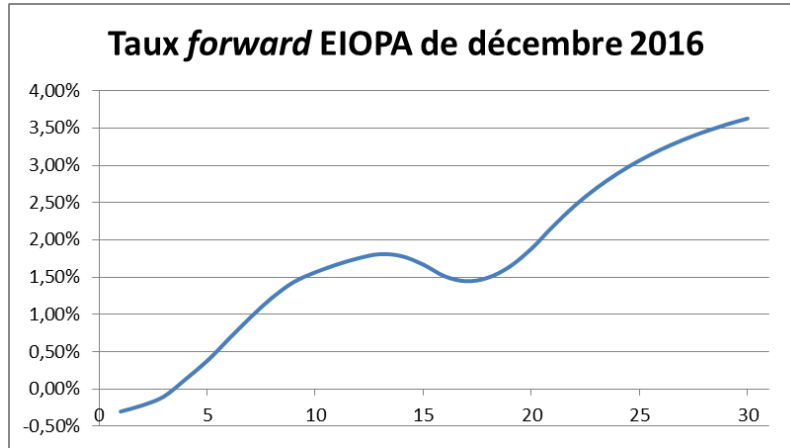


FIGURE 13 – Courbe de taux *forward* de l'EIOPA de décembre 2016

Le principe général reste le même, mais nous allons maintenant chercher l'UFR en optimisant $g = f$ (la fonction *forward*) ou $g = y$ (la fonction de rendement), que nous noterons parfois g^f et g^y pour lever l'ambiguïté. Remarquons qu'ici, la forme de f ou y n'est pas imposée comme pour la fonction de prix.

Ce changement de fonction lissée intervient notamment dans la quantité à optimiser :

$$L_\alpha[g] = \int_0^{+\infty} (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds$$

De manière similaire à ce qui a été fait avec la fonction de prix, nous posons des contraintes sur l'espace de fonctions approprié pour chercher g . Il s'agit pour g^f et g^y respectivement de H^f et H^y :

$$H^f = \left\{ g \in C^2(\mathbb{R}_+) : g \in F_a, \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\int_0^{u_i} g(s) ds} = p_j \right\}$$

$$H^y = \left\{ g \in C^2(\mathbb{R}_+) : g \in F_a, \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-u_i g(u_i)} = p_j \right\}$$

Notons que la contrainte d'interpolation des maturités connues est ici intégrée directement à l'espace de fonctions. La notation F_a a été introduite avant le théorème 1 (voir page 24). Elle assure notamment que les dérivées première et seconde sont de carré intégrable. De plus, comme les fonctions étudiées sont le rendement et le *forward*, $g(0) = a$ est le taux court :

$$F_a = \{g \in C^2(\mathbb{R}_+) : g(0) = a, g''(0) = 0, g' \in E, g'' \in E\}$$

Avec :

$$E = \left\{ g \in L^2(\mathbb{R}_+) : \lim_{v \rightarrow \infty} g(v) = 0 \right\}$$

Optimiser l'expression de f et y de manière à avoir une courbe lisse tout en interpolant les maturités connues peut maintenant s'exprimer de la façon suivante :

Objectif 3

Trouver g tel que :

$$\min_{g \in H^f} L_\alpha[g] \text{ et } \min_{g \in H^y} L_\alpha[g]$$

Afin de répondre à l'objectif, commençons par introduire la notation supplémentaire :

$$\bar{H}(u, v) = 1 - e^{-\alpha u} \frac{\cosh(\alpha v) - 1}{\frac{1}{2}\alpha^2 v^2} + \mathbb{1}_{u \leq v} \left(\frac{\cosh(\alpha(v - u)) - 1 - \frac{1}{2}\alpha^2(v - u)^2}{\frac{1}{2}\alpha^2 v^2} \right)$$

$\bar{H}$ peut être écrite comme une somme affine d'intégrales de H , et est donc plus lisse que H . Il est utilisé dans l'expression de la fonction *forward* donné dans le théorème suivant :

Théorème 3 (De Kort-Vellekoop)

Commençons par noter :

- π_i^y et π_i^f les prix de zéro-coupons de maturité u_i dans le modèle ;
- ζ_j^f et ζ_j^y des multiplicateurs de Lagrange issus de l'optimisation. Ils ne sont pas explicités, et ne sont pas utiles afin de déduire un UFR.

S'il existe des solutions au problème 3, alors elles sont de la forme :

$$\begin{aligned} f(v) = g^f(v) &= g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^f \sum_{i=1}^m \pi_i^f c_{ij} u_i^2 \bar{H}(v, u_i) \\ y(v) = g^y(v) &= g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^y \sum_{i=1}^m \pi_i^y c_{ij} u_i H(v, u_i) \end{aligned}$$

De plus, les π_i et ζ_j doivent vérifier les équations suivantes.

Pour f :

$$\begin{aligned} \forall j \in [1, n], \quad p_j &= \sum_{i=1}^m c_{ij} \pi_i^f \\ \forall k \in [1, m], \quad -\frac{(\ln \pi_k^f)}{u_k} &= g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^f \sum_{i=1}^m \pi_i^f c_{ij} u_i^2 \times \frac{1}{u_k} \int_0^{u_k} \bar{H}(s, u_i) ds \end{aligned}$$

Pour y :

$$\begin{aligned} \forall j \in [1, n], \quad p_j &= \sum_{i=1}^m c_{ij} \pi_i^y \\ \forall k \in [1, m], \quad -\frac{(\ln \pi_k^y)}{u_k} &= g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^y \sum_{i=1}^m \pi_i^y c_{ij} u_i H(u_k, u_i) \end{aligned}$$

Notons que :

- π_k correspond aux prix de zéro-coupons de maturité u_k , aussi $-\frac{(\ln \pi_k)}{u_k}$ est le rendement en u_k (voir page 6) ;
- Pour f et y , la première équation revient à demander des prix parfaitement ajustés ;
- Pour f et y , la deuxième équation permet de relier les prix et les rendements ou *forward* (application des formules précédentes).

La démonstration de ce théorème est placée en annexe (page 80).

Ce théorème donne l'expression de f et y . Nous pouvons maintenant chercher un UFR optimal pour chacune de ces fonctions. Contrairement à la fonction de prix, nous allons obtenir ici une formule directe pour trouver l'UFR (et non une formule à optimiser). Commençons par noter les matrices suivantes :

$$G_{kj}^f = \frac{1}{u_k} \int_0^{u_k} \overline{H}(s, u_j) ds$$

$$G_{kj}^y = \frac{1}{\alpha u_j} H(u_k, u_j)$$

Ces matrices servent à calculer :

$$v_k = \sum_{j=1}^m [G^{-1}]_{jk}$$

Notons bien que la formule utilise l'inverse de G . La matrice utilisée dépendra de la fonction optimisée (f ou y). Nous aurons également besoin de noter le rendement y et u_k :

$$y_k = -\frac{\ln(p(u_k))}{u_k}$$

Corollaire 1 : Détermination de l'UFR

ω , l'UFR en notation exponentielle, est donné par :

$$\omega = \sum_{k=0}^m v_k y_k$$

Remarque : la somme commence bien à 0, avec v_0 tel que la somme des poids v_k vaut 1 et y_0 le taux court. En général, ce terme est faible, et presque négligeable. Le corollaire suivant donne une formule pour calculer y_0 .

La démonstration est en annexe (page 83).

Corollaire 2 : Détermination du taux court

y_0 , le taux instantané, est calculable avec :

$$y_0 = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{1}{u_j} \sum_{k=1}^m [G^{-1}]_{jk} \frac{y(u_j) + y(u_k)}{2}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{u_j} \sum_{k=1}^m [G^{-1}]_{jk}}$$

Ces formules donnent ω de manière explicite pour les 2 cas, cependant en pratique :

- pour f , il sera nécessaire de calculer une intégrale numériquement ;
- il faut connaître les prix (ou rendements) à toutes les maturités, donc utiliser autant d'instruments que de maturités. Comme ce n'est pas le cas pour l'euro, il sera nécessaire d'interpoler les maturités manquantes.

De même, la démonstration est en annexe (page 85).

3 Application

Cette partie vise à présenter des applications des méthodes étudiées dans les parties précédentes. D'abord, nous présenterons les données utilisées, puis nous détaillerons l'application numérique de la méthode de Smith-Wilson à des données réelles. Ensuite, nous donnerons une illustration numérique des résultats prouvés théoriquement. Enfin, nous appliquerons la projection de l'UFR sur un historique de données réelles, et pour finir, nous présenterons quelques limites pratiques de la méthode.

3.1 Présentation des données de marché utilisées

Ce chapitre a pour but de présenter succinctement les données utilisées pour mettre en application la théorie développée dans les parties précédentes.

3.1.1 Données utilisées par l'EIOPA

L'EIOPA se sert de données de marché sur la partie liquide pour ajuster la courbe RFR. La base de données Bloomberg est utilisée pour les taux swaps. Néanmoins, l'EIOPA précise qu'elle n'a pas la preuve qu'un fournisseur de données est supérieur du point de vue de la qualité des données.

Pour l'euro, l'EIOPA utilise des swaps de taux EURIBOR :

TABLE 2 – Extrait de la documentation technique portant sur les swaps observés

Country	ISO 3166	ISO 4217	Swaps Ticker	Swapsfreq	Swap Float Ticker
Euro	-	EUR	EUSA CMPL Curncy	1	EUR006M Index
France	FR	EUR	EUSA CMPL Curncy	1	EUR006M Index
Country	Government Bond Ticker Id		Govts/Swaps		
Euro	ECB curve all governments-spot		SWP		
France	I014 CMPL Index		SWP		

Le CRA (*Credit Risk Adjustment*) est appliqué sur les prix observés pour les ajuster au risque de crédit.

TABLE 3 – Extrait de la documentation technique concernant le CRA

Currency	ISO 4217	Bloomberg ticker (PX_LAST)	
Euro	EUR	EUR003M	EUSWEC CMPL Curncy

Le CRA est calculé comme étant 50% de la moyenne sur un an de l'écart entre les taux d'intérêts de swap flottant et des taux OIS (*Overnight Index Swap*) de même maturité. Pour l'euro, la maturité utilisée est de 3 mois. La CRA est au moins de 0,10 % et au plus de 0,35 %. Il ne sera pas recalculé sur toute la période, et fixé à 0,10%. Il s'agit de la valeur donnée par l'EIOPA pour les courbes fournies depuis l'entrée en vigueur de Solvabilité 2. En définitive, il ne s'agit que d'un décalage de la courbe qui influe d'autant sur l'UFR projeté. Ses variations sont négligeables dans le cadre de la projection de l'UFR.

La documentation donne également les maturités à utiliser pour interpoler les prix. Pour l'euro, il s'agit de :

- maturités de 1 à 10 ans ;
- maturités 12 ans, 15 ans et 20 ans.

3.1.2 Données de marché

Les données proviennent de Bloomberg. Elles ont été extraites à l'aide du « ticker » fourni par l'EIOPA. Les données vont du 31/12/2002 au 31/12/2016. Elles incluent les maturités utilisées par l'EIOPA, mais aussi :

- Taux EONIA (*Euro OverNight Index Average*) ;
- Taux 1 semaine ;
- Taux 1 mois, 2 mois, ..., 12 mois ;
- Taux 1 an, 2 ans, ..., 12 ans ;
- Taux 15 ans, 20 ans, 25 ans, ..., 50 ans.

Notons que les prix ne sont pas directement observés par le fournisseur, mais construits à partir d'un modèle SABR (voir [14]). Les prix n'existent pas de manière objective, et sont influencés par le modèle choisi.

Nous n'avons cependant pas de raison de douter de la qualité des données. Pour tester la validité des outils Excel-VBA que nous avons développés, la méthode de Smith-Wilson a été appliquée aux données du 31/12/2015, 30/06/2016 et 31/12/2016, avec les mêmes maturités que l'EIOPA. Il en ressort :

- Aucun écart constaté lors de l'extrapolation des prix avec le $\tilde{b}$ et le α fournis par l'EIOPA ;
- Ecart notable pour le recalcul de $\tilde{b}$ et α (optimisation) à partir des données de marché ;

TABLE 4 – Ecart sur $\tilde{b}$ pour les données de décembre 2016

Maturité/ α	$\tilde{b}$ recalculé	$\tilde{b}$ EIOPA	Ecart relatif
1	-1,09	-0,93	-17 %
2	-0,12	-0,68	83 %
3	0,12	1,03	89 %
4	-0,02	-0,69	96 %
5	0,45	0,56	19 %
6	-0,06	0,10	157 %
7	0,36	0,15	-149 %
8	0,12	0,44	74 %
9	-0,12	-0,56	79 %
10	-0,25	0,08	389 %
11	0,01	0,00	-14 %
12	0,61	0,53	-24 %
13	0,00	0,00	68 %
14	0,00	0,00	68 %
15	-1,59	-1,55	-3 %
16	0,01	0,01	-1 %
17	0,01	0,01	-1 %
18	0,01	0,01	-1 %
19	0,01	0,01	-1 %
20	1,14	1,14	-1 %
α	0,13	0,13	0 %

Les écarts sont très importants, mais en utilisant un outil fourni par l'EIOPA avec nos données, nous ne constatons que des écarts négligeables par rapport à nos valeurs. Les écarts proviennent donc de données en entrée légèrement différentes.

- Ces écarts n'entraînent cependant des écarts relatifs que de quelques points de base (4-5 bps sur des maturités isolées) sur la fonction de prix.

Les graphiques suivants illustrent que les valeurs recalculées sont très proches de celles fournies par l'EIOPA, puisque les courbes se confondent :

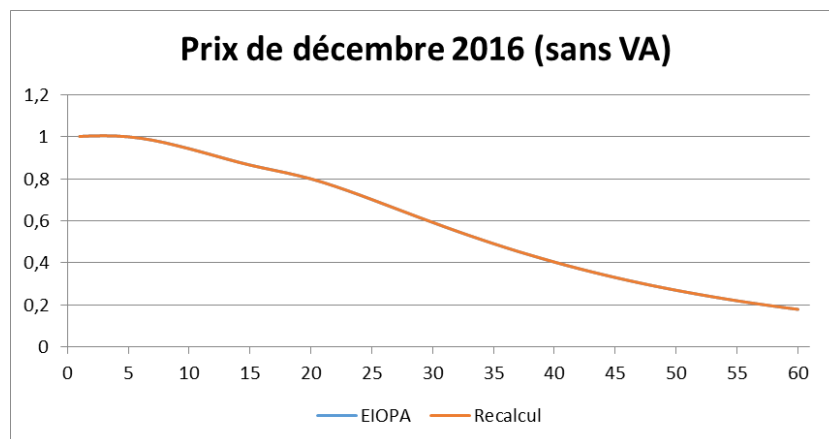


FIGURE 14 – Prix de décembre 2016 (sans VA) - Valeurs EIOPA / Valeurs recalculées

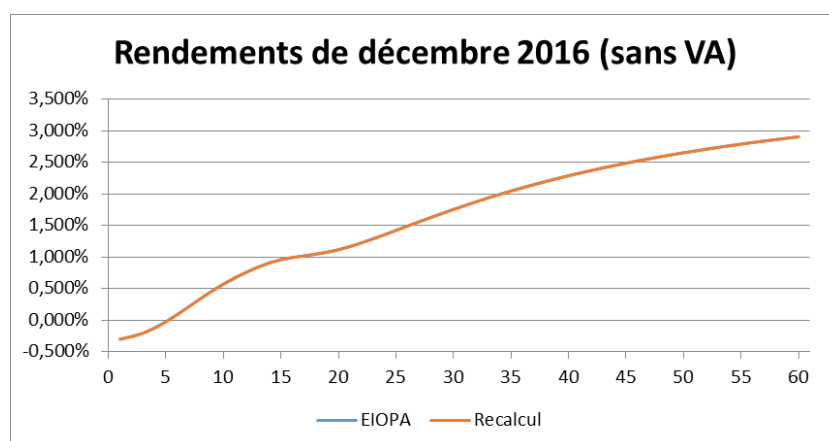


FIGURE 15 – Rendements de décembre 2016 (sans VA) - Valeurs EIOPA / Valeurs recalculées

Les taux 35 et 45 ans sont manquants au début de la période couverte par les données (jusqu'au 31/05/2004 et au 31/10/2003 respectivement). De même, la valeur pour le taux 45 ans du 31/12/2007 est manquante. Afin de garder des méthodes cohérentes sur toute la période, les taux 35 et 45 ans ne seront pas utilisés. Il ne s'agit de toute façon pas de maturités exploitées par l'EIOPA, mais des maturités plus longues seront utilisées pour observer le comportement des résultats (notamment les UFR extrapolés).

3.2 Application (pas à pas) de la méthode de Smith-Wilson

Nous allons appliquer l'algorithme de Smith-Wilson à des données réelles du 31/12/2016. Les taux swaps observés sont :

TABLE 5 – Taux swaps observés au 31/12/2016

Maturité	1	2	3	4	5	6	7
Euro	-0,202 %	-0,160 %	-0,104 %	-0,025 %	0,075 %	0,191 %	0,314 %
Prix	1	1	1	1	1	1	1
Maturité	8	9	10	12	15	20	
Euro	0,438 %	0,556 %	0,663 %	0,843 %	1,030 %	1,176 %	
Prix	1	1	1	1	1	1	

Les prix sont par convention de 1 pour tous les swaps. Notons que toutes les maturités ne sont pas observées (par exemple : 19 ans). Le LLP (*Last Liquid Point*) est à 20 ans, et le point de convergence $T = \max(LLP + 40; 60)$ à 60 ans. Notons qu'avec ces données, $n = 13$ (nombre d'instruments) et $m = 20$ (nombre de maturités).

Nous prenons également en paramètres :

- L'UFR à 4,2 %, ce qui donne un paramètre $\omega = \ln(1 + UFR) \simeq 0,0411$;
- α , fixé par défaut à 0,1, cette valeur est ensuite optimisée (non détaillée ici, voir page 14) ;
- Le CRA (*Credit Risk Adjustment*) de 0,1 % (donné par l'EIOPA) retiré aux taux observés.

Nous pouvons maintenant donner la matrice des flux $\mathbf{C}$:

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	99,698%	-0,260%	-0,204%	-0,125%	-0,025%	0,091%	0,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
2	0	99,740%	-0,204%	-0,125%	-0,025%	0,091%	0,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
3	0	0	99,796%	-0,125%	-0,025%	0,091%	0,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
4	0	0	0	99,875%	-0,025%	0,091%	0,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
5	0	0	0	0	99,975%	0,091%	0,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
6	0	0	0	0	0	100,091%	0,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
7	0	0	0	0	0	0	100,214%	0,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
8	0	0	0	0	0	0	0	100,338%	0,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
9	0	0	0	0	0	0	0	0	100,456%	0,563%	0,743%	0,930%	1,076%
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100,563%	0,743%	0,930%	1,076%
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100,743%	0,930%	1,076%
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	100,930%	1,076%
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	101,076%
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE 16 – Matrice C

Pour rappel, les instruments sont en colonne et les maturités de versement en ligne. Les coupons valent le taux du swap (avec CRA), complété du principal (donc de 1) à la maturité.

Ensuite, $\mathbf{d} = \exp(-\omega \cdot \mathbf{u})$ est calculé :

TABLE 6 – Vecteur $\mathbf{d}$ (arrondi)

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	0,96	0,92	0,88	0,85	0,81	0,78	0,75	0,72	0,69	0,66
u	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	0,64	0,61	0,59	0,56	0,54	0,52	0,50	0,48	0,46	0,44

La matrice $\mathbf{Q} = \mathbf{d}_\Delta \cdot \mathbf{C}$ et le vecteur $\mathbf{q} = \mathbf{C}' \cdot \mathbf{d}$ peuvent ensuite être calculés.

La matrice $\mathbf{H}$ (de taille 20 par 20) est calculée assez directement par la formule :

$$H(u, v) = \alpha \cdot \min(u, v) - \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha|u-v|} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha(u+v)}$$

La formule $\mathbf{b} = (\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{q})$ peut maintenant être utilisée :

TABLE 7 – Vecteur $\mathbf{b}$ (arrondi)

Instrument	1	2	3	4	5	6	7
b	-1,146	-0,136	0,127	-0,036	0,552	-0,080	0,479
Instrument	8	9	10	11	12	13	
b	0,154	-0,175	-0,390	1,072	-2,957	2,578	

Ce vecteur correspond à l'interpolation des données de marché, et peut être directement utilisé pour calculer la fonction de prix :

$$p(v) = e^{-\omega \cdot v} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j e^{-\omega \cdot (v+u_i)} H(v, u_i)$$

Cependant, cette formule fait encore appel à la matrice $\mathbf{C}$ et à une double somme. Le calcul de $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{Q}\mathbf{b}$ permet de simplifier la formule :

TABLE 8 – Vecteur $\tilde{\mathbf{b}}$ (arrondi)

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tilde{b}$	-0,85	-0,21	0,17	-0,02	0,50	-0,06	0,39	0,13	-0,18	-0,17
u	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\tilde{b}$	0,00	0,50	0,00	0,00	-1,30	0,01	0,01	0,01	0,01	0,89

Ce vecteur s'utilise avec la formule suivante :

$$p(v) = e^{-\omega \cdot v} \left(1 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i H(v, u_i) \right)$$

Nous pouvons finalement calculer les prix pour toute la courbe (y compris les maturités manquantes avant le LLP, comme par exemple 19) et en déduire les rendements à l'aide de la formule :

$$y(t) = (p(t))^{-\frac{1}{(t)}} - 1$$

3.3 Résultats

Les calculs précédents permettent d'arriver aux résultats suivants :

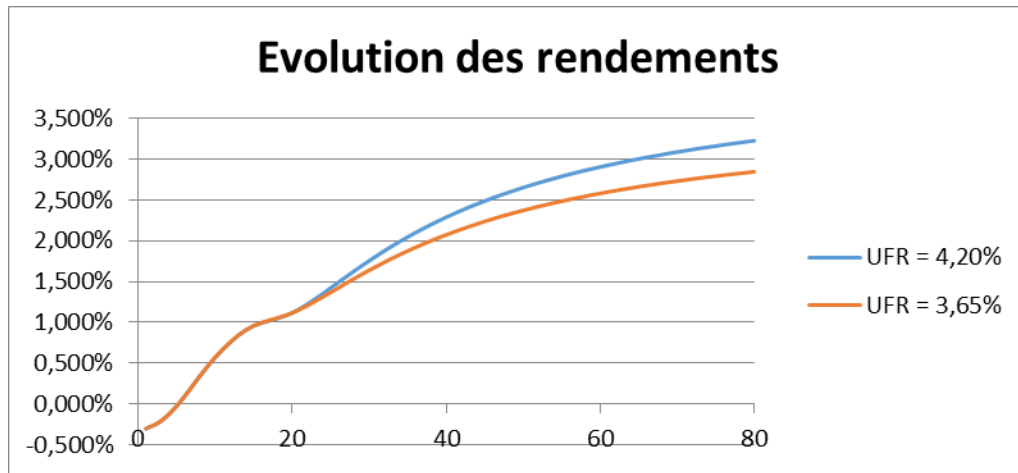


FIGURE 17 – Evolution des rendements au 31/12/2016 selon 2 UFR

La courbe des rendements (figure 17) a été tracée simultanément pour un UFR à 4,2 % et un UFR à 3,65 % afin de comparer les tendances.

Les courbes dévient à partir du LLP, et s'éloignent de manière croissante. Nous pouvons cependant conjecturer que les rendements convergent vers l'UFR mais bien plus lentement, et donc leur écart finira aussi par se stabiliser.

3.4 Optimisation numérique de la fonction L

Ce chapitre illustre les résultats prouvés théoriquement.

L'objectif 2 (page 25) consiste à chercher un UFR minimisant la fonction :

$$L_{\alpha}[g] = \int_0^{\infty} g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2 ds$$

A l'aide de méthodes numériques, la fonction a été tracée pour un UFR variable avec les taux swap EURIBOR de décembre 2016 :

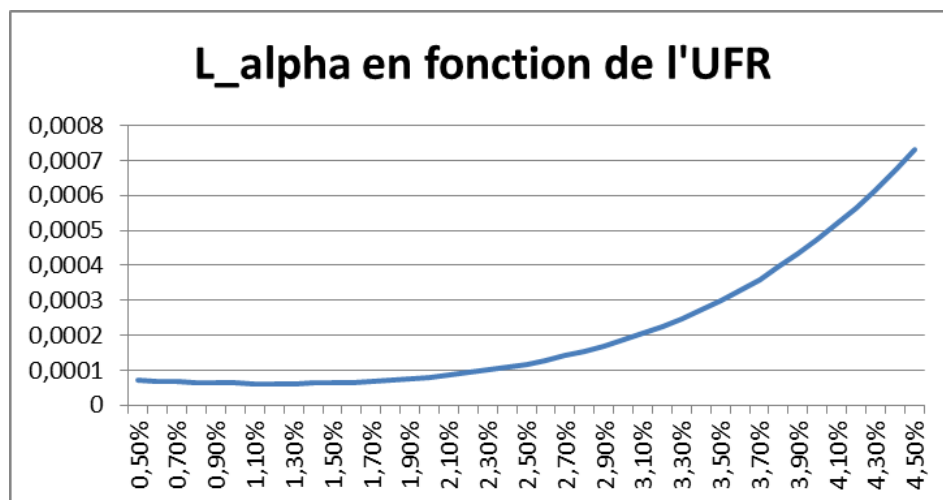


FIGURE 18 – L_{α} en fonction de l'UFR

Ce premier graphique (figure 18) a été tracé avec un pas de 0,1 %. La présence d'un minimum n'est pas très claire mais semble être aux environs de 1,20 %.

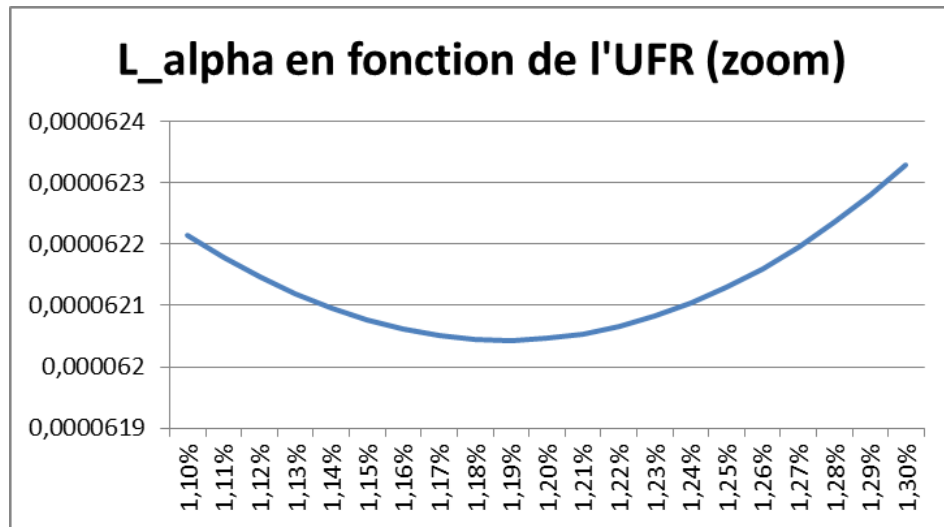


FIGURE 19 – L_α en fonction de l'UFR (zoom)

Ce deuxième graphique (figure 19) utilise un pas de 0,01 % sur un intervalle réduit. La fonction possède bien un minimum unique vers 1,19 %.

Trouver ce minimum revient donc à trouver le point pour lequel la dérivée s'annule. Nous avons justement vu dans la démonstration de la solution du problème 2 que la fonction à ajuster est en fait la dérivée de L_α (voir démonstration page 75) :

$$\frac{dL_\alpha[g]}{d\omega} = 0$$

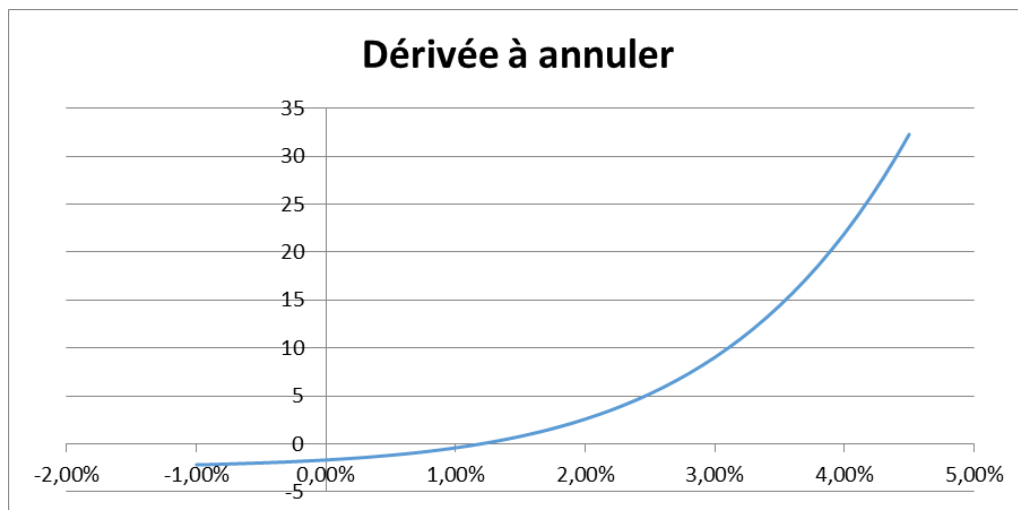


FIGURE 20 – Fonction à annuler pour l'UFR prix

Nous observons une valeur nulle de la dérivée, qui correspond à la solution cherchée.

3.5 Présentation des résultats

Cette partie présente les résultats de l'extrapolation d'UFR sur les données de marché.

Tout d'abord, intéressons-nous aux UFR « prix », « rendement » et « *forward* » calculés mensuellement entre décembre 2002 et décembre 2016 :

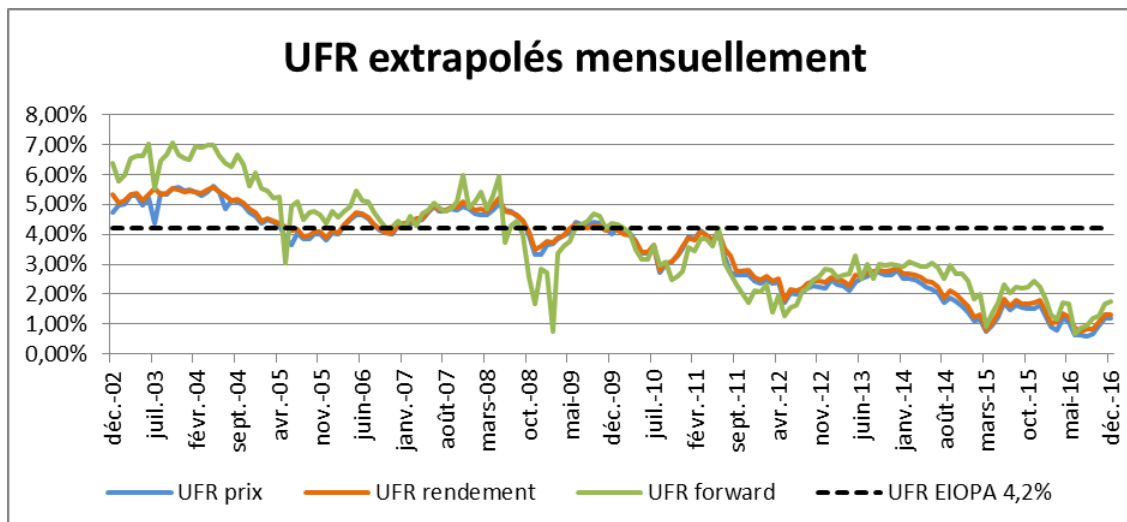


FIGURE 21 – UFR extrapolés mensuellement

Remarque : octobre 2011 a été retiré du graphique car l'UFR « prix » n'est pas cohérent. Voir la section dédiée, page [41](#)

Notons que les UFR « prix » et « rendement » ont des valeurs très proches, alors que l'UFR « *forward* » est clairement détaché. Il suit des variations comparables, mais avec une plus grande amplitude. L'amplitude diminue à partir de 2009.

De 2002 à 2011, les UFR « prix » et « rendement » fluctuent autour de la valeur donnée par l'EIOPA, mais le décrochage est net à partir de 2011. La valeur de 4,2 % utilisée par l'EIOPA semble cohérente avec les valeurs obtenues jusqu'à 2011, mais ce n'est plus le cas ensuite.

Remarque : le graphique suivant montre que les variations de l'UFR (nous parlons uniquement de variation, pas de niveau) sont comparables aux variations du taux Euribor de maturité 10 ans :

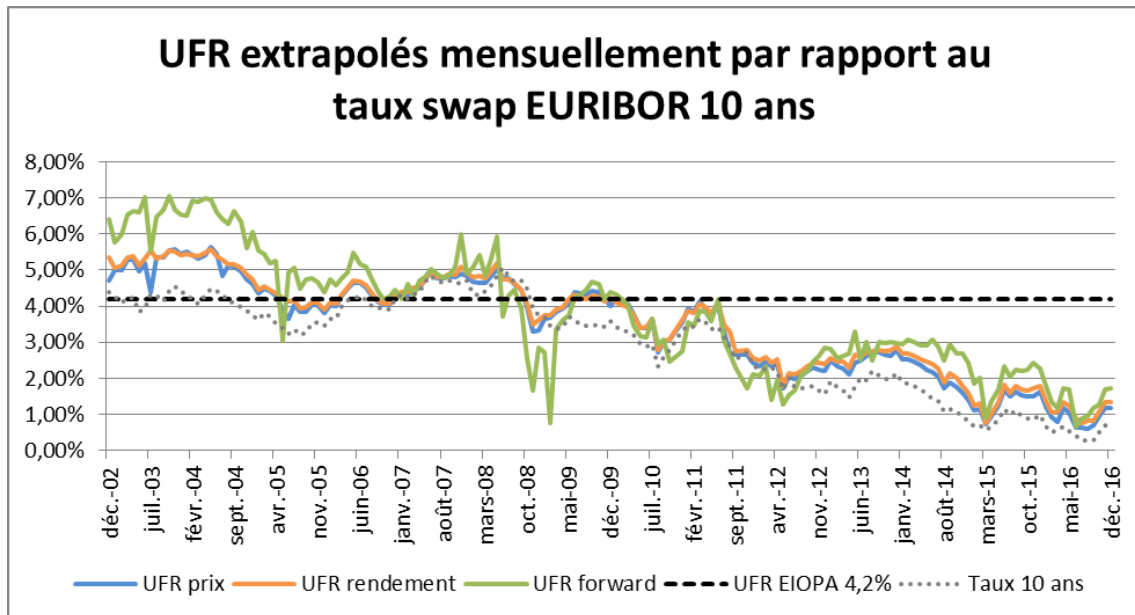


FIGURE 22 – UFR extrapolés mensuellement, comparés au taux EURIBOR 10 ans

Notons que le taux EURIBOR 10 ans se retrouve à plusieurs reprises au-dessus de taux extrapolés.

Intéressons-nous maintenant aux UFR extrapolés, mais en changeant la dernière maturité disponible (LLP) :

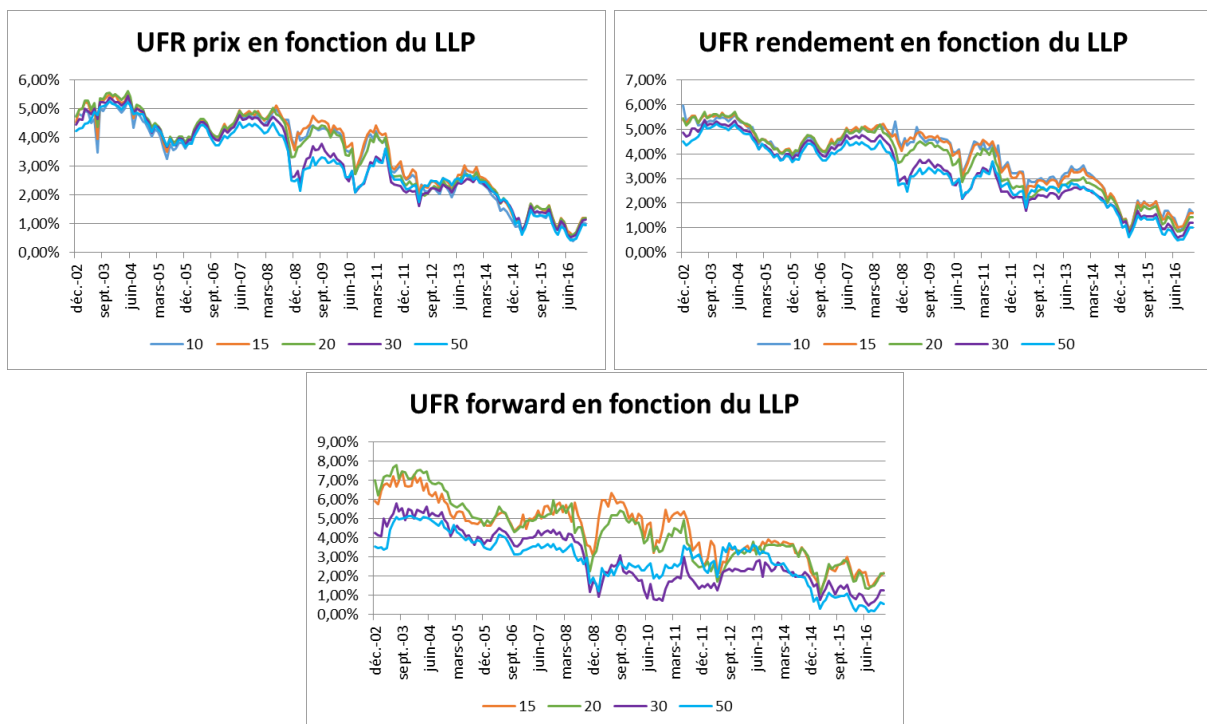


FIGURE 23 – UFR « prix », « rendement » et « forward » par LLP

La courbe pour un LLP à 10 ans a été retirée du graphique « forward » car les résultats sont trop variables (valeurs comprises entre -5 % et 15 %).

Sur les 3 graphiques, les courbes se scindent globalement en 2 groupes :

- 10, 15 et 20 ans ;
- 30 et 50 ans.

En période de taux bas, les valeurs projetées se rapprochent, sauf pour L'UFR « *forward* » qui reste très dispersé. Globalement, plus le LLP est éloigné, plus la valeur projetée est faible. Remarquons que, en repoussant le LLP, les maturités utilisables se raréfient et sont plus volatiles, aussi la projection utilise relativement moins de données.

En conclusion, nous conserverons les valeurs projetées avec un LLP à 20 ans comme l'EIOPA. Le tableau suivant reprend les différents UFR projetés en fin d'année de 2010 à 2016 suivant la fonction lissée :

TABLE 9 – UFR prix, rendement et *forward* projetés annuellement depuis décembre 2010

Date	déc. 2010	déc. 2011	déc. 2012	déc. 2013	déc. 2014	déc. 2015	déc. 2016
UFR Prix	3,54 %	2,43 %	2,21 %	2,79 %	1,39 %	1,63 %	1,19 %
UFR Rendement	3,84 %	2,68 %	2,52 %	3,04 %	1,64 %	1,89 %	1,43 %
UFR <i>Forward</i>	3,80 %	2,49 %	3,35 %	3,63 %	2,64 %	2,76 %	2,13 %

3.6 Limites

Cette partie présente les limites des méthodes présentées. Nous verrons tout d'abord une application sur des données réelles pour lesquelles l'algorithme ne se comporte pas comme attendu, ensuite comment le choix de α peut poser problème.

Cas particulier d'échec de l'algorithme : Données d'octobre 2011

Les données de marché d'octobre 2011 ne permettent pas d'extrapoler un UFR satisfaisant en lissant la fonction de prix. A cette date, les taux EURIBOR sont particulièrement irréguliers.

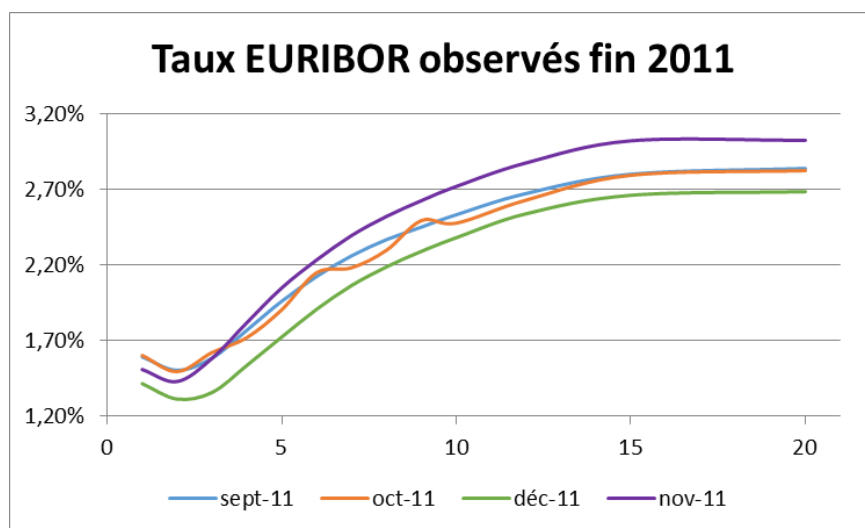


FIGURE 24 – Taux EURIBOR observés fin 2011

TABLE 10 – Taux EURIBOR d'octobre 2011

Maturité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux	1,60 %	1,49 %	1,62 %	1,72 %	1,90 %	2,15 %	2,18 %	2,30 %	2,49 %	2,48 %
Maturité	12	15	20							
Taux	2,63 %	2,79 %	2,83 %							

Notons tout d'abord que le taux pour la maturité 1 an est supérieur au taux pour la maturité 2 ans, et c'est également le cas pour les taux 9 ans et 10 ans. Les taux de septembre et novembre 2011 présentent également un taux 1 an supérieur au taux 2 ans, mais ce n'est pas le cas pour les taux 9 ans et 10 ans.

La fonction à annuler pour trouver l'UFR en lissant la courbe de prix a été tracée avec ces données :

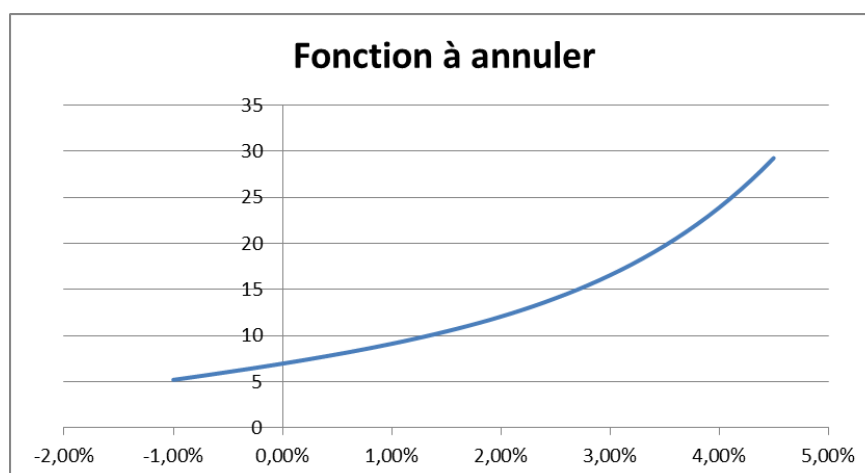


FIGURE 25 – Fonction à annuler avec les données de marché d'octobre 2011

La fonction est tracée avec un α de 0,1. L'optimisation consiste à trouver le point pour lequel la fonction s'annule. Ici, nous observons que la fonction ne s'annule pas sur l'intervalle $[-1\%; 4\%]$, qui semblerait raisonnable.

L'optimisation de la fonction donne finalement un UFR de -4,3 %. Il s'agit d'une valeur aberrante au vu du taux EURIBOR à 20 ans. En changeant la dernière maturité (LLP), les valeurs de l'UFR optimisé restent aberrantes pour certaines maturités à cause de l'irrégularité de la courbe.

TABLE 11 – UFR prix avec les données d'octobre 2011 pour différents LLP

LLP	UFR
5 ans	2,18 %
6 ans	2,49 %
7 ans	0,59 %
8 ans	-0,11 %
9 ans	-1,00 %
10 ans	-3,25 %
15 ans	-4,28 %
20 ans	-4,29 %
30 ans	-4,32 %
50 ans	-4,34 %

Il est à noter qu'en octobre 2011, la Commission européenne a mené des inspections surprises dans différentes banques suite au scandale de manipulation de l'EURIBOR.

Cette valeur étant aberrante, les données d'octobre 2011 ont été retirées de l'analyse (voir page 37).

Problème du choix du α

Dans la proposition originale de l'EIOPA, α était fixé à 0,1. La version actuelle prévoit qu'il soit obtenu par une optimisation, donc sa valeur peut varier (voir page 14), bien qu'elle reste proche de 0,1.

Rappelons tout d'abord que α contrôle la vitesse de convergence des taux vers l'UFR. Plus il est élevé, plus les taux vont converger rapidement. Il peut également être vu comme un coefficient

de courbure. Le graphique suivant illustre l'effet de α sur la vitesse de convergence des taux vers l'UFR, avec les données de décembre 2016 avec un UFR à 4,2 % :

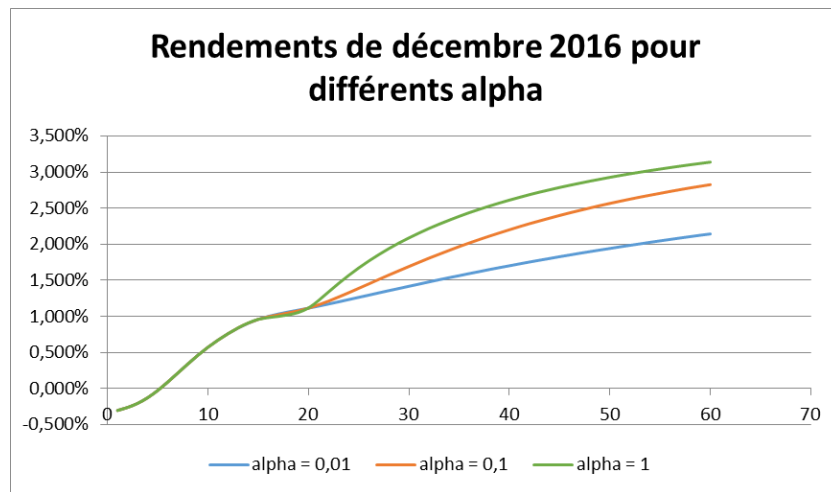


FIGURE 26 – Rendements de décembre 2016 en fonction de α

De manière similaire, α agit sur la projection de l'UFR :

- Si α est trop faible, la courbe va « moins » varier, aboutissant à un UFR plus élevé ;
- Si α est trop élevé, la courbe va varier « trop vite », aboutissant à un UFR sous-estimé.

Plus concrètement, α agit sur la quantité à optimiser :

$$L_{\alpha}[g] = \int_0^{+\infty} g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2 ds$$

Cette formule peut s'interpréter comme suit :

- Plus α est faible, moins la dérivée première aura de poids par rapport à la dérivée seconde, qui prendra des valeurs plus faibles ;
- Plus α est élevé, plus la dérivée première aura de poids par rapport à la dérivée seconde, qui prendra des valeurs plus grandes ;

La question du choix du « bon » α se pose. Commençons par observer son impact sur les données de marché au 31/12/2016 :

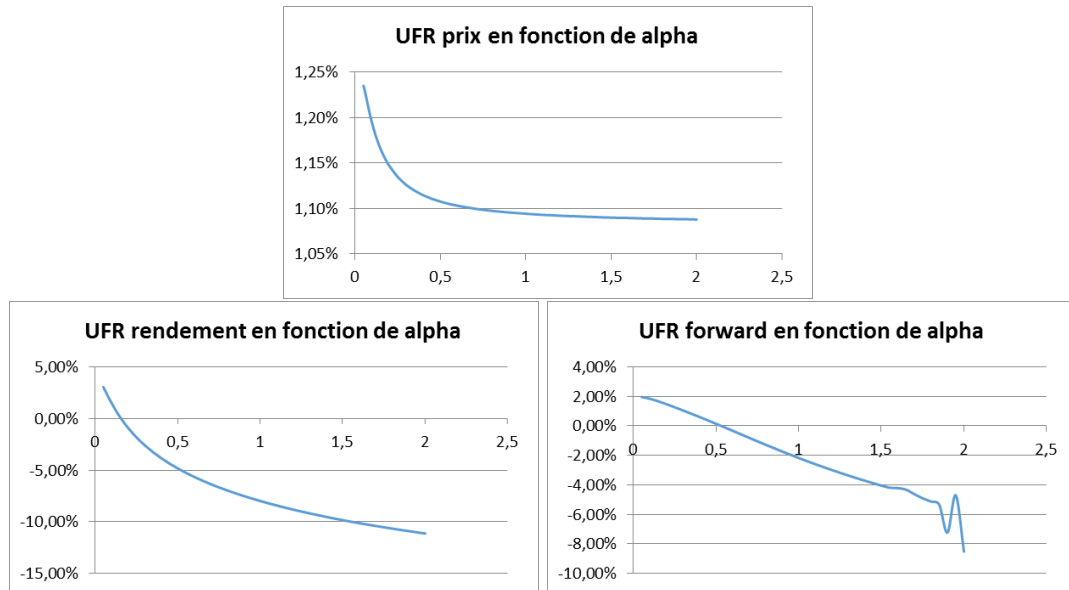


FIGURE 27 – UFR extrapolés à partir des données de marché du 31/12/2016 en fonction de α

Les graphiques précédents sont obtenus avec α variant de 0,05 à 2. La valeur de 0,05 est donnée par l'EIOPA comme minimum pour α . Le maximum de 2 utilisé ici est choisi car il semble suffisamment grand pour illustrer l'effet de α .

Nous observons que l'UFR « prix » semble converger lorsque α augmente, et à l'inverse augmenter lorsque α diminue. Ce comportement pourrait faire penser que la valeur « idéale » de l'UFR serait le taux asymptotique. Cependant, les UFR « rendement » et « *forward* » sont décroissants, jusqu'à des UFR négatifs. Le choix de α ne devrait donc pas être trop grand.

Les auteurs De Kort et Vellekoop (voir [2]) recommandent de fixer α à 0,1 pour extrapoler l'UFR puisqu'il s'agit de la valeur utilisée par l'EIOPA dans sa proposition originale.

4 Impacts prudentiels

Cette partie a pour but d'exposer l'impact de la prise en compte d'un UFR extrapolé.

Pour cela, nous allons utiliser un portefeuille fictif. Les flux, BEL et SCR sont calculés à l'aide d'un modèle développé par Humanis. Ce modèle est déterministe et en formule standard.

4.1 Présentation du portefeuille

Afin de rendre compte des impacts d'un changement d'UFR en termes prudentiels, nous avons constitué un portefeuille fictif. S'agissant d'un portefeuille « sur mesure », il est volontairement simplifié avec un nombre réduit de garanties. Cela permet de le rendre plus clair et de mieux analyser les impacts.

Le portefeuille est projeté au 31/12/2016.

Notons également qu'il s'agit d'un portefeuille d'assureur de type Vie. Les portefeuilles Non-Vie ont en général une duration plus courte et sont moins sensibles à la courbe de taux.

Le portefeuille inclut les garanties suivantes :

- Arrêt de travail (ITIP) : les assurés peuvent recevoir des prestations temporaires en cas d'Incapacité ou des rentes viagères en cas d'Invalidité ;
- Provision pour Risque Croissant en santé (PRC Santé) : cette garantie correspond à un engagement de couverture des frais de santé sans primes jusqu'au décès ;
- Dépendance : les assurés paient une prime annuelle tant qu'ils sont valides. Si ils deviennent dépendants, ils recevront un capital et une rente viagère pour couvrir les frais ;
- Vie Entière : les assurés versent des primes périodiques. Les assurés peuvent choisir de racheter le contrat. De plus, en cas de décès de l'assuré, le bénéficiaire désigné recevra des prestations.

Le tableau suivant fournit quelques informations sur les lignes du portefeuille :

TABLE 12 – Garanties du portefeuille (montants en k€)

Garantie	Age moyen	Ancienneté	Prime unique	Prime annuelle	Rente
ITIP	34,0		100		
Invalidité	32,0	2,1			14
PRC Santé	40,2				
Dépendance	44,9			202	5
Vie Entière	51,5	16,5		100	

Notons que :

- La prime unique en arrêt de travail correspond à la prime reçue pour l'année suivante. La frontière des contrats ne permet pas de projeter plus loin sur cette garantie ;
- Les assurés en dépendance versent une prime jusqu'à leur entrée en dépendance ou leur décès.

4.2 Bilan

Nous verrons dans cette partie la vision S1 puis le passage à la vision S2 via le calcul des BEL, du SCR et du taux de couverture.

4.2.1 Vision S1

La vision S1 du portefeuille valorise les actifs en valeur comptable et les provisions techniques incluent une marge de prudence.

Commençons par voir les provisions techniques mises en face des garanties présentes dans le portefeuille :

TABLE 13 – Détails du passif en vision S1 (k€)

Garantie	Provisions S1
Arrêt de travail	577
PRC Santé	2 720
Dépendance	985
Vie entière	115
TOTAL	4 397

Les provisions en Arrêt de travail correspondent à des PSI et PSAP à écouler via une cadence de règlement et à des provisions pour le versement de rentes pour invalidité. L'âge moyen relativement jeune en PRC Santé et en Dépendance donne à ces garanties une longue durée, et leur poids dans les provisions assure au portefeuille une longue durée.

Le bilan est construit de manière simplifiée pour la clarté, et n'inclut pas de bas de bilan par exemple :

TABLE 14 – Bilan en vision S1 (k€)

Actif		Passif	
Obligations	14 669	Fonds Propres	12 719
Actions	2 447	Provisions techniques	4 397
TOTAL	17 116	TOTAL	17 116

Les actions représentent 14 % du total de l'actif. Les obligations sont à taux fixe sans options particulières.

Notons que le bilan S1 n'est pas impacté par un changement de courbe de taux (ou d'UFR), au contraire du bilan en vision S2.

4.2.2 Détermination des BEL

Les BEL sont la première étape du passage en vision S2. Ils représentent les provisions techniques évaluées au plus juste (*Best Estimate*) et donc sans marge de prudence :

TABLE 15 – Détails du passif en vision S2 (k€)

Garantie	Provisions S1	BEL (S2)
Arrêt de travail	594	573
PRC Santé	2 708	1 867
Dépendance	1 001	-281
Vie entière	115	-41
TOTAL	4 418	2 118

Notons que les provisions sont positives en S1 mais peuvent être négatives en S2 du fait de l'inclusion notamment des primes futures. Selon la frontière des contrats, cela ne concerne que les primes de l'année à venir (par exemple en Arrêt de travail) ou des versements pluri-annuels (Dépendance et Vie Entière).

4.2.3 Détermination des SCR

L'étape suivante est le calcul des SCR (*Solvency Capital Requirement*), qui représente le besoin en capital pour assurer la solvabilité au sens S2. Les différents SCR s'aggrègent via des matrices de corrélation dans le BSCR (*Basic Solvency Capital Requirement*) qui permet ensuite de calculer le SCR global (dans la partie suivante).

Pour ce portefeuille, le BSCR se décompose de la façon suivante :

TABLE 16 – Ventilation du BSCR (k€)

Marché	4 508
Vie	0,07
Santé	1 895
Défaut	38
Diversification	-1 120
BSCR	5 320

Le SCR Marché vient en face aux risques de l'actif et des marchés financiers :

TABLE 17 – Focus sur le SCR Marché

Sous-SCR	Montant (k€)
Taux d'intérêt	1 221
Actions	929
Actifs Immobiliers	0
Spread	3 513
Concentration	856
Change	0
Diversification	-2 010
Total	4 508

Notons que :

- Le nombre volontairement réduit de lignes d'actifs amène à la présence d'un SCR Concentration relativement important ;
- La part très importante d'obligations dans le portefeuille induit un SCR Spread élevé, car son calcul est quasi forfaitaire et dépend notamment de la duration ;
- Le SCR Taux d'intérêt est très élevé, notamment à cause de la duration longue et des jambes actif/passif asymétriques malgré des durations proches ;
- L'absence d'actifs immobiliers réduit potentiellement l'effet diversification du SCR, mais l'optimisation de l'allocation du portefeuille ne fait pas partie des objectifs de cette étude ;
- Les actifs sont en euros et les engagements aussi, il n'y-a donc logiquement pas de risque de change pour ce portefeuille.

Le SCR Santé est scindé en 3 parties :

- SLT : *Similar To Life techniques* ;

- nSLT : *non Similar To Life technics* ;
- CAT : Catastrophe (santé).

TABLE 18 – Focus sur le SCR Santé

	Sous-SCR	Montant (k€)
SLT	Mortalité	0
SLT	Longévité	312
SLT	Invalidité	1 175
SLT	Chute	0
SLT	Frais	391
SLT	Révision	19
nSLT	Prime et provisionnement	30
nSLT	Chute	0
CAT	Catastrophe Santé	859
	Diversification	-891
	Total	1 895

Les garanties sélectionnées rendent le portefeuille particulièrement exposé au risque santé :

- Le portefeuille n'est pas exposé au risque mortalité mais il est exposé au risque longévité ;
- Le risque catastrophe est élevé mais cela correspond à l'absence de réassurance contre les catastrophes.

le SCR Vie est détaillé dans le tableau suivant :

TABLE 19 – Focus sur le SCR Vie

Sous-SCR	Montant (k€)
Mortalité	0,07
Longévité	0
Invalidité	0
Dépenses en vie	0
Révision	0
Cessation	0
Catastrophe en vie	0
Diversification	0
Total	0,07

Ce SCR est très faible, mais cohérent au regard des garanties sélectionnées pour le passif. Le sous-SCR Mortalité est dû à la garantie Vie Entière.

Enfin, le SCR défaut :

TABLE 20 – Focus sur le SCR Défaut

Sous-SCR	Montant (k€)
Type 1	2
Type 2	36
Diversification	0,5
Total	38

Pour ce portefeuille, le SCR Défaut est dû à :

- Type 1 : des avoirs en banque (compte courant) ;
- Type 2 : des créances diverses.

S'agissant d'un portefeuille fictif, ces éléments ont été intégrés pour la cohérence générale du SCR. Ce SCR prend notamment en compte les dépôts auprès de cédantes et les BEL cédés à des réassureurs. La réassurance n'intervient pas dans ce portefeuille.

4.2.4 Bilan S2 et Taux de couverture

Nous pouvons finalement établir le bilan en vision S2 et calculer le taux de couverture.

Le bilan S2 est en *Best Estimate*, donc les actifs sont valorisés à leur valeur de marché :

TABLE 21 – Bilan en vision S2 du scénario central (k€)

Actif		Passif	
Obligations	15 167	Fonds Propres	12 371
Actions	2 541	Marge pour Risque	3 216
		BEL	2 119
TOTAL	17 707	TOTAL	17 707

Maintenant que nous avons les fonds propres et le BSCR, nous pouvons calculer le taux de couverture :

TABLE 22 – Calcul du taux de couverture (k€)

BSCR	5 320
Ajustement PT	1
Risque opérationnel	15
SCR	5 336
Taux de couverture	232 %

Note : tous les actifs sont considérés comme des fonds propres de niveau 1.

4.3 Impact de l'UFR : Etudes de sensibilités

Les résultats précédents ont été obtenus avec la courbe de taux standard au 31/12/2016 (sans VA) avec un UFR de 4,2 %. Nous allons voir les impacts d'un changement d'UFR sur le portefeuille.

4.3.1 Hypothèses de taux

Nous allons utiliser les UFR calculés fin 2016 avec les méthodes de De Kort-Vellekoop (voir page 40) :

- UFR prix : 1,19% ;
- UFR rendement : 1,43% ;
- UFR *forward* : 2,13%.

Le graphique suivant présente les UFR calculés pour les 24 mois précédents. Il apparaît que les valeurs calculées au 31/12/2016 sont cohérentes avec les valeurs calculées précédentes :

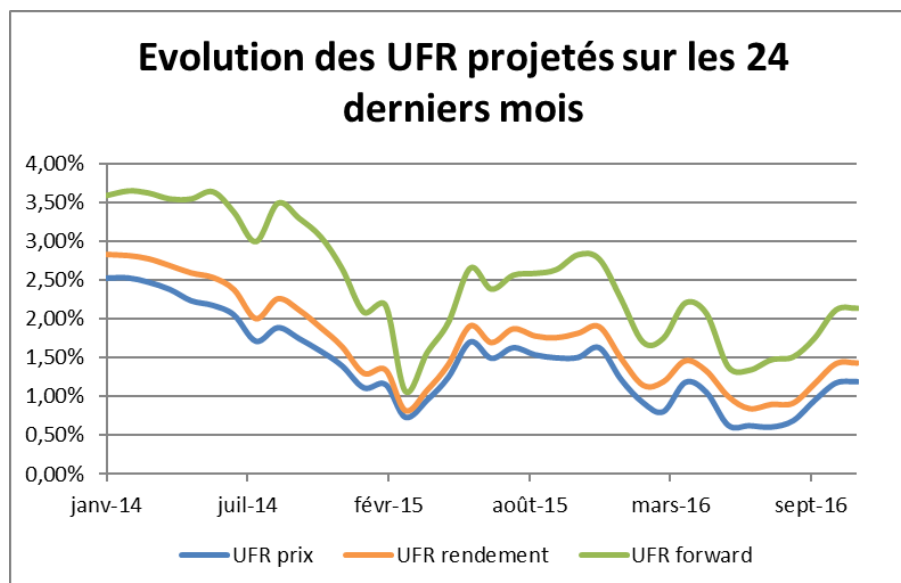


FIGURE 28 – UFR calculés sur les 24 derniers mois

De plus, pour mieux observer l'impact de la baisse de l'UFR, nous utiliserons des UFR intermédiaires avec un pas de 0,30%. Les courbes utilisées pour la valorisation S2 sont les suivantes :

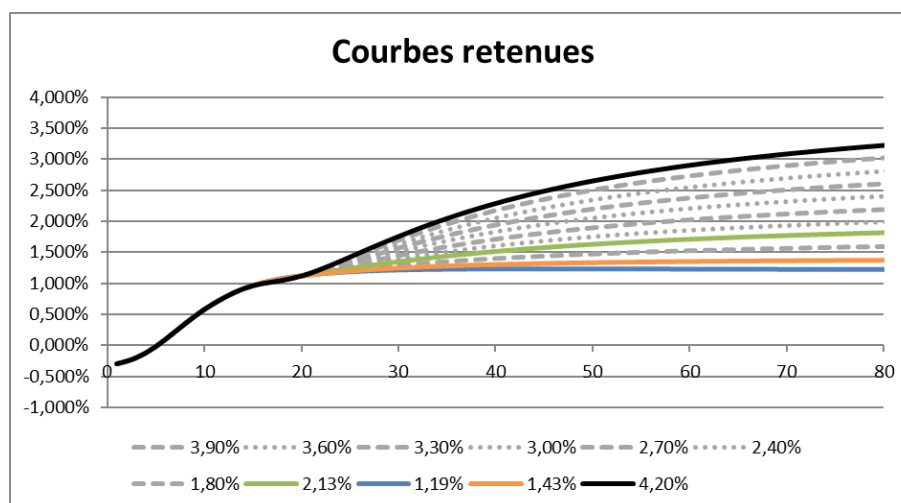


FIGURE 29 – Courbes retenues

Les courbes en pointillés sont les courbes intermédiaires. Nous observons que les écarts sont réguliers entre les courbes, ce qui permettra de voir une évolution graduelle du bilan.

Note : nous choisissons de ne pas prendre en compte la VA (*Volatility Adjustment*) pour les courbes. Elle correspond à un ajustement permettant aux assureurs de lisser les changements de la courbe de taux. Dans le cas d'un portefeuille fictif construit pour être utilisé à une date fixe, il n'est pas pertinent de l'utiliser.

4.3.2 Flux de BEL par garantie

Nous allons voir comment le changement d'UFR influe sur les flux actualisés pour les différentes garanties du portefeuille.

Arrêt de travail

La présentation des flux de la garantie se fera en 2 temps :

- Les nouvelles primes, écoulées via un S/P de 84,8 % et une cadence de règlement ;
- Les invalides déjà en portefeuille, projetés avec des tables de maintien.

Tout d'abord, les prestations liées aux primes :

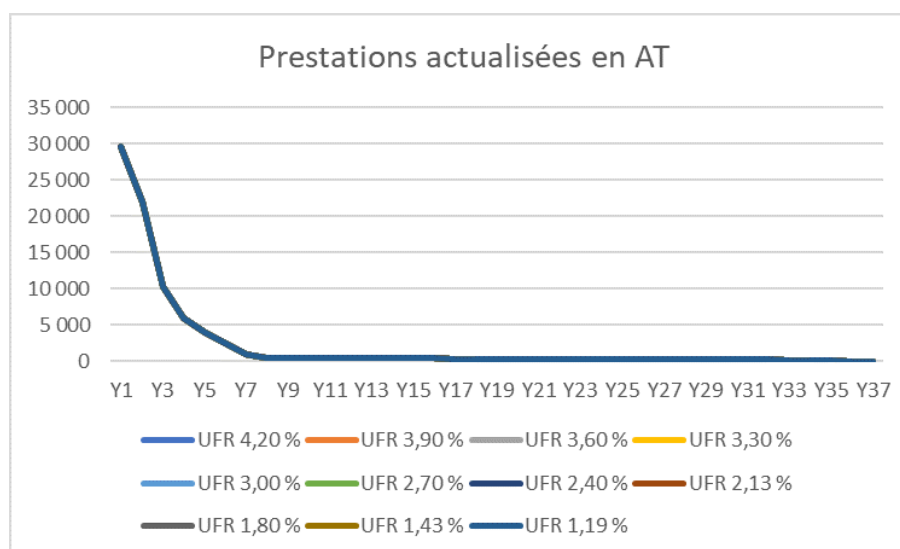


FIGURE 30 – Prestations en AT

Les prestations projetées correspondent à un contrat couvrant une seule année. Les primes sont reçues d'avance en une fois. Les assurés peuvent recevoir des prestations pour :

- Incapacité temporaire : les assurés reçoivent des prestations tant qu'ils sont en situation d'Incapacité, pour au plus 3 ans. Au-delà ou si leur situation l'exige, ils peuvent passer en Invalidité ;
- Invalidité en attente : les assurés ne sont pas encore reconnus comme en invalidité et ne sont plus en incapacité. Cela génère des flux notamment entre 3 ans et 8 ans ;
- Invalidité permanente : les assurés reçoivent des prestations viagères jusqu'à la retraite à 62 ans.

Les courbes ne sont pas clairement distinctes car les flux sont principalement versés en début de projection du fait de la cadence :

- 77 % des flux sont versés les 3 premières années ;
- 90 % des flux sont versés dans les 10 premières années ;
- 95 % des flux sont versés dans les 20 premières années.

Les évolutions sont en conséquence très faibles, comme le montre le graphique suivant :

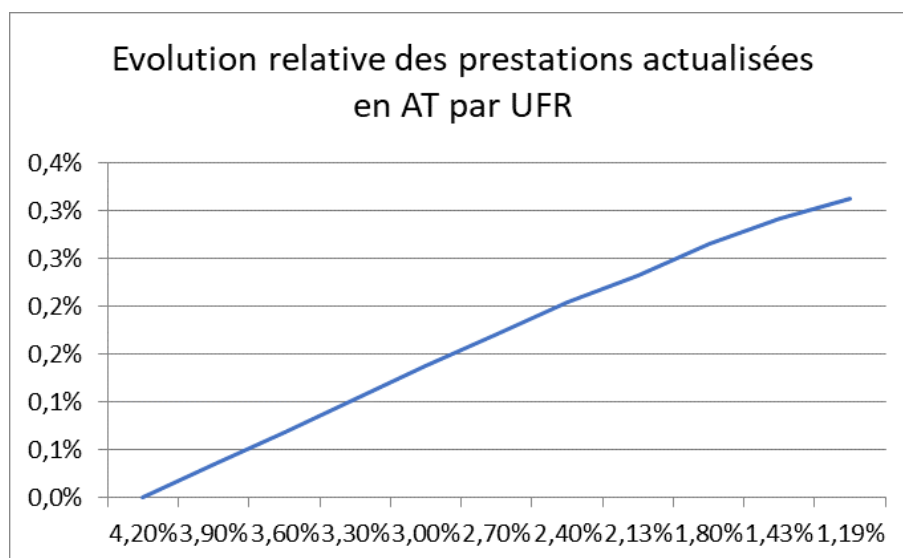


FIGURE 31 – Evolution relative des prestations AT par UFR

Le total des flux actualisés n'augmente que de 0,4 % au plus. En effet, la majorité des flux est concentrée sur les premières années du fait de personnes en Incapacité. Seule une petite fraction des assurés passe en invalidité et occasionne des flux sur une longue période. Les flux au-delà de 8 ans sont exclusivement des prestations aux personnes passées en invalidité et sont de l'ordre de 400 € par an. Il n'y a plus de prestations après 35 ans.,

Les personnes déjà en invalidité au 31/12/2016 sont en revanche projetées via des tables de maintien.

Les flux de prestations sont alors :

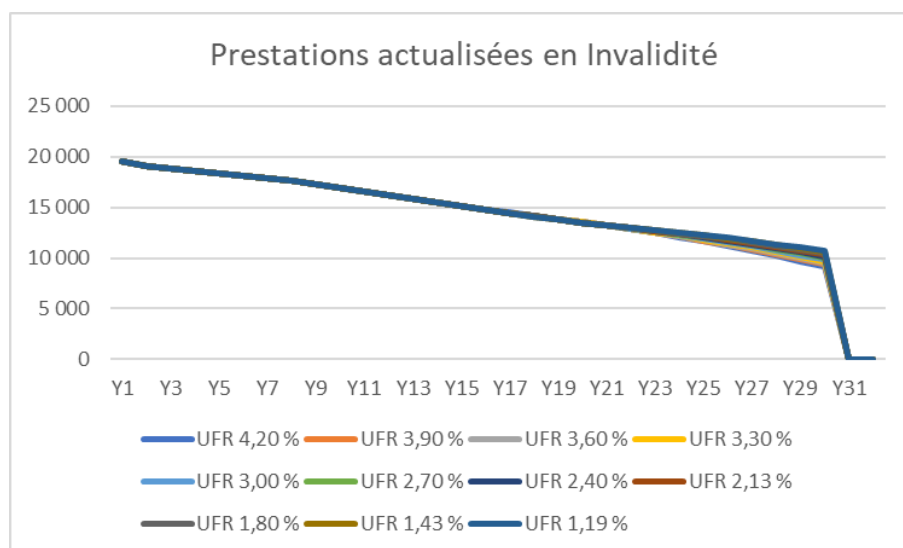


FIGURE 32 – Prestations en Invalidité (stock)

L'effet de l'UFR sur l'actualisation et sur les flux est visible après 20 ans. Cependant, les flux s'arrêtent après 30 ans du fait du passage à la retraite des bénéficiaires. Bien que le portefeuille soit relativement jeune, les écarts sur les flux apparaissent alors que l'actualisation et la mortalité

du portefeuille ont nettement réduit le volume des flux d'environ 19,5 k € l'année 1 à environ 13,5 k € l'année 20. Les écarts restent faibles au global sur le BEL :

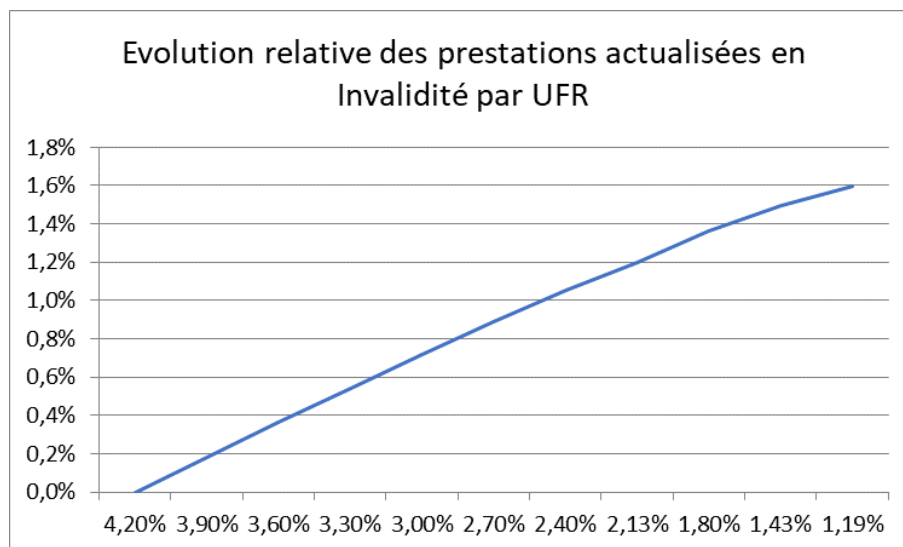


FIGURE 33 – Evolution relative des prestations pour Invalidité par UFR

PRC Santé

La PRC (Provision pour Risque Croissant) vient en face d'engagements de l'assureur dont le coût est croissant. En santé par exemple, elle vient du fait de l'évolution générale des frais de soins et d'un besoin croissant avec l'âge des assurés. Cette garantie peut également être utilisée pour modéliser des assurés exemptés de cotisations qui restent en portefeuille, ce qui correspond alors à un contrat pluriannuel.

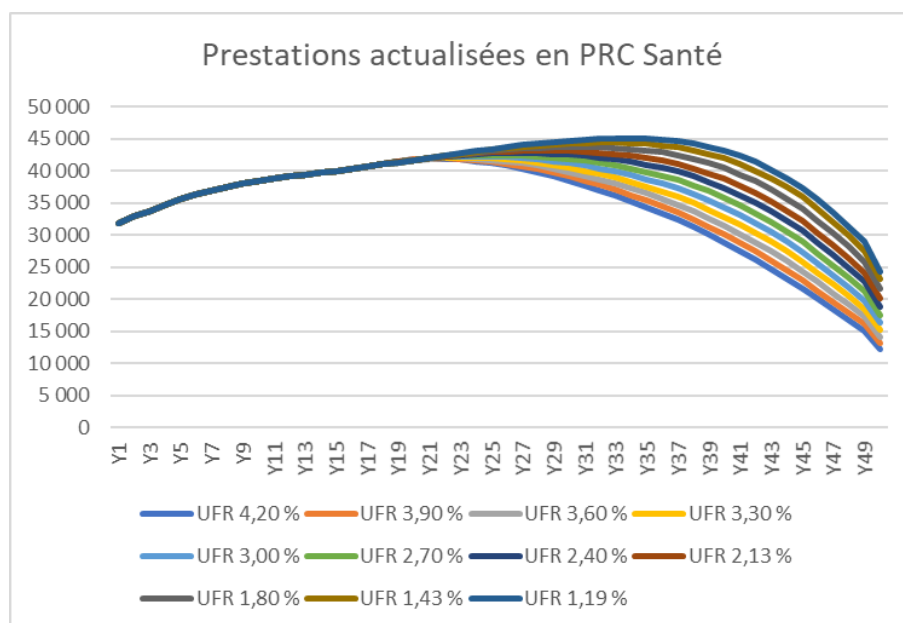


FIGURE 34 – Prestations en PRC Santé

La nature de cette garantie engendre une augmentation des prestations même avec la prise en compte de l'actualisation. Les prestations s'étalant sur toute la durée de projection, elles sont sensibles à l'UFR comme le montre le graphique, avec des prestations pouvant doubler en

fin de projection selon l'UFR retenu. Cependant, l'impact sur le BEL reste mesuré puisque les premières années de projections restent identiques :

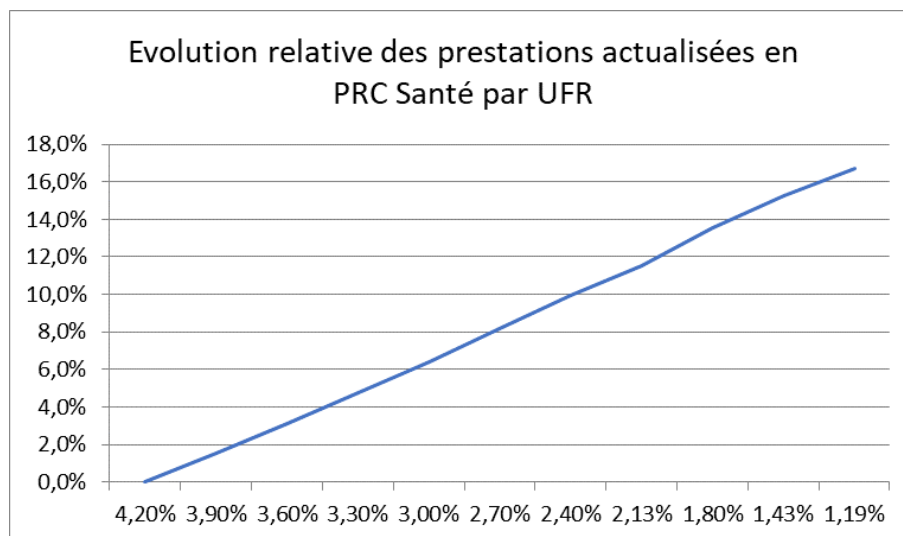


FIGURE 35 – Prestations en PRC Santé

Dépendance

Lors de la projection, sont distingués :

- Les assurés actifs en début de projection qui versent des primes ;
- Les assurés déjà passés en dépendance.

Cette première partie du portefeuille modélise des assurés actifs qui versent des primes (contrat pluriannuel) et peuvent résilier leur contrat. Ils reçoivent une rente viagère si ils deviennent dépendants. Aussi, les prestations sont très faibles en début de projection (peu d'assurés sont passés en dépendance) mais à mesure que la projection avance un stock de dépendants est constitué ce qui amène à une figure de cloche vers 40 ans sur le graphique. Après le pic de prestations, les nouveaux passages en dépendance sont moins importants que les décès des personnes déjà en dépendance, donc le stock diminue.

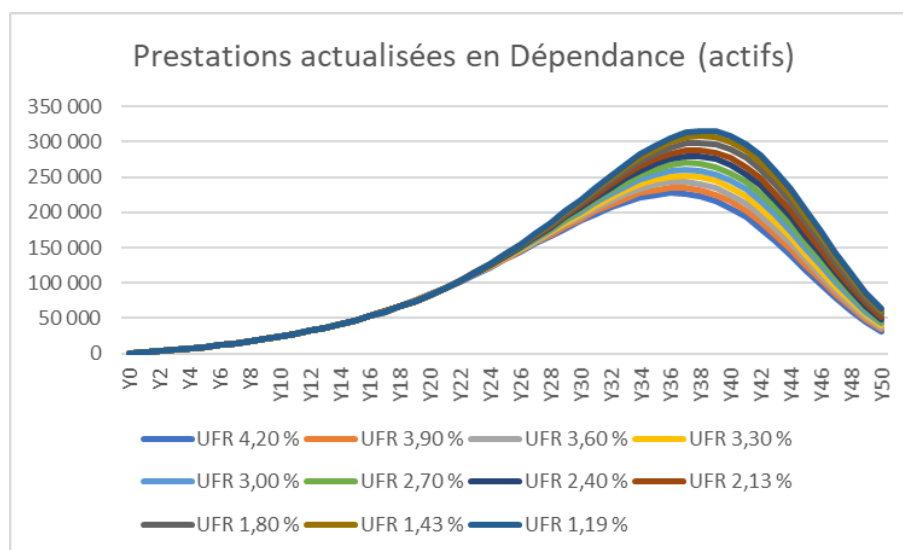


FIGURE 36 – Prestations en Dépendance (actifs)

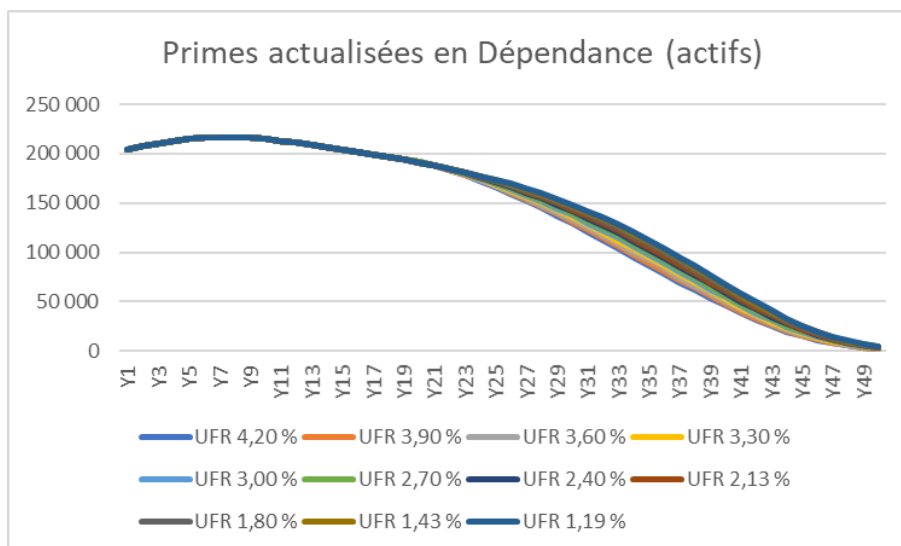


FIGURE 37 – Primes en Dépendance

La forme de cloche des prestations a pour effet que la majorité des prestations sont payées alors que le changement d'UFR a un effet (après 20 ans). Cette garantie a une durée très longue et est particulièrement sensible au changement d'UFR pour les prestations. En ce qui concerne les primes, l'effet est visiblement moins important du fait de l'érosion des actifs dans le portefeuille (décès, passage en dépendance, résiliation) malgré l'indexation annuelle des primes, qui explique une légère hausse en début de projection.

Le graphique suivant permet de rendre compte des impacts sur le total des flux actualisés :

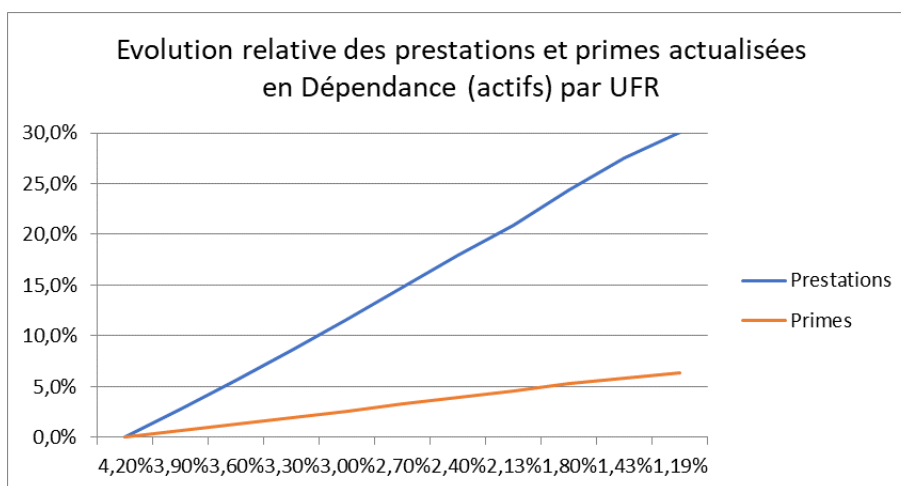


FIGURE 38 – Evolution relative des prestations et primes en Dépendance (actifs) par UFR

Ce graphique confirme notamment une progression plus rapide des prestations que des primes.

Cette deuxième partie concerne les assurés déjà dépendants au début de la projection. Ils reçoivent donc une rente viagère :

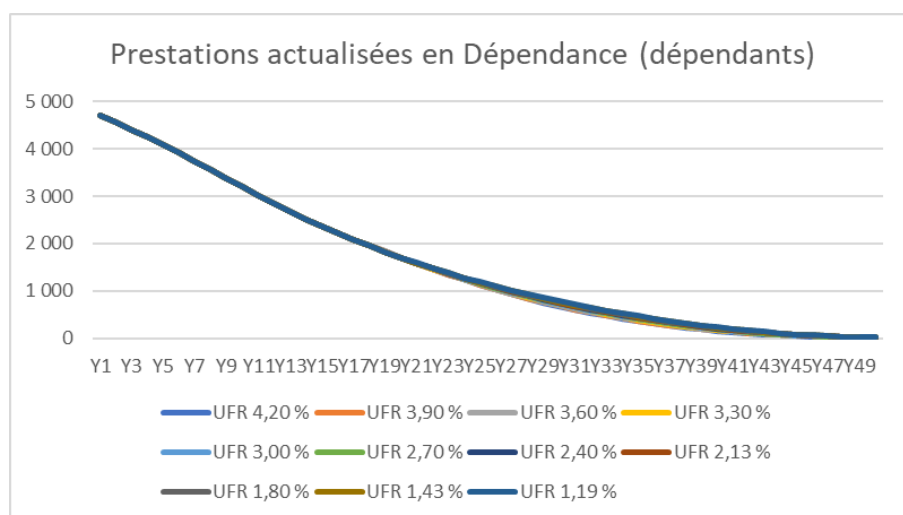


FIGURE 39 – Prestations en Dépendance (dépendants)

La mortalité pour les dépendants est plus importante que pour les actifs, ce qui combiné à l'absence de nouveaux dépendants sur ce segment explique une diminution rapide des prestations. L'effet du changement d'UFR est faible :

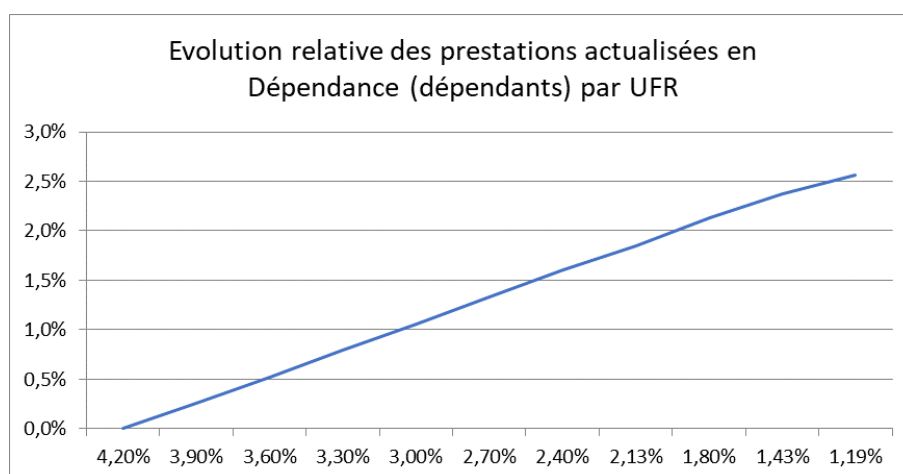


FIGURE 40 – Evolution relative des prestations et primes en Dépendance (dépendants) par UFR

Vie Entière

Les assurés ayant souscrit un contrat en Vie Entière versent des primes à l'assureur. En cas de décès, un bénéficiaire reçoit un capital ou une rente. Les assurés peuvent également décider de racheter leur contrat.

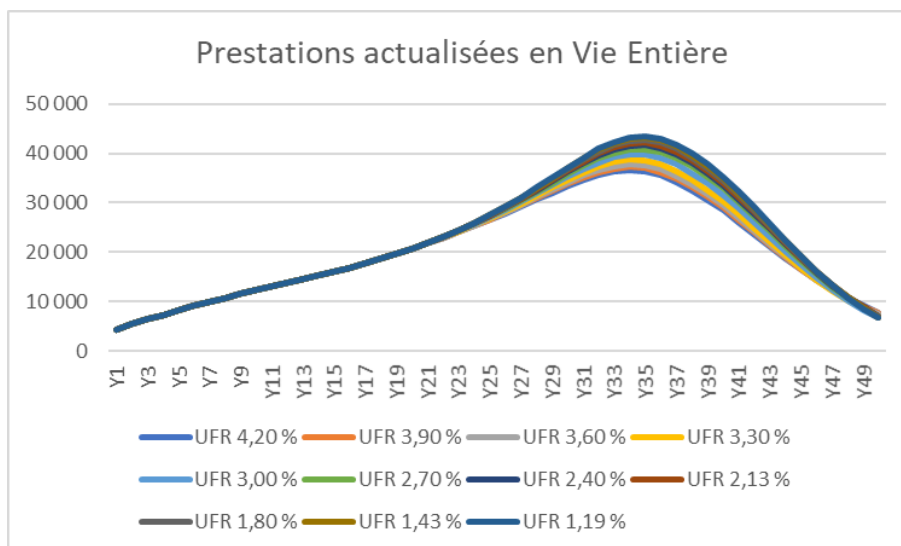


FIGURE 41 – Prestations en Vie Entière

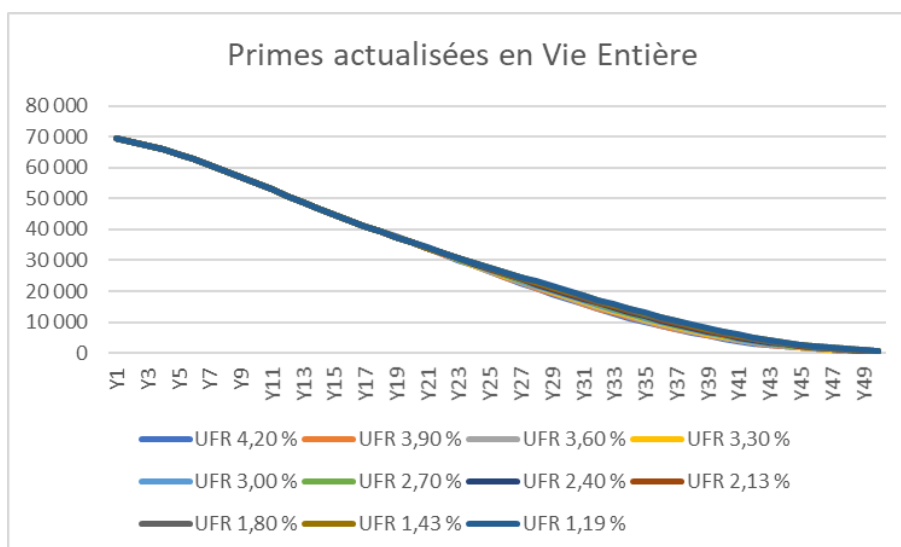


FIGURE 42 – Primes en Vie Entière

Les prestations décrivent une cloche du fait de l'augmentation de la mortalité avec l'âge. Après le pic de prestations, l'augmentation de la mortalité est plus lente que l'érosion des cotisants (décès ou rachat). La garantie est sensible à l'UFR retenu pour les prestations, mais pour les primes, les écarts apparaissent faibles :

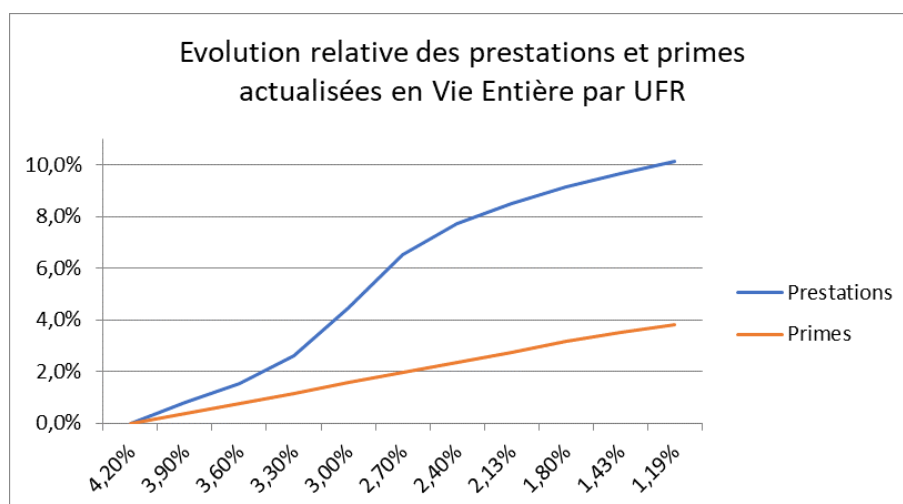


FIGURE 43 – Evolution relative des prestations et primes en Vie Entière par UFR

Ce graphique permet d'observer que la courbe des prestations n'est pas aussi linéaire que pour les garanties précédentes. En effet, l'UFR et donc la courbe de taux ont un effet sur le rendement du réinvestissement, ce qui crée un double effet qui explique ce mouvement de baisse puis de hausse sur le BEL :

- Les flux avant actualisation diminuent avec la baisse du taux servi ;
- L'actualisation est moins importante et augmente les prestations (à valeur identique).

4.3.3 Synthèse

La partie précédente a permis de décrire l'impact d'un changement d'UFR sur les flux du passif. Cette partie vise à présenter les impacts au niveau du bilan.

Pour commencer, étudions l'évolution des BEL calculés par garantie :

TABLE 23 – Evolution des BEL par UFR (k€)

	Arrêt de travail	PRC Santé	Dépendance	Vie Entière	Total
4,20 %	573	1 867	-281	-41	2 119
3,90 %	574	1 895	-165	-40	2 264
3,60 %	575	1 924	-45	-42	2 412
3,30 %	576	1 953	78	-46	2 562
3,00 %	577	1 984	206	-38	2 729
2,70 %	578	2 015	340	-21	2 912
2,40 %	579	2 048	477	-15	3 088
2,13 %	579	2 077	602	-12	3 246
1,80 %	580	2 113	755	-12	3 435
1,43 %	581	2 145	892	-13	3 606
1,19 %	581	2 171	1 002	-13	3 741

La figure suivante aide à visualiser les évolutions. Les BEL sont tracés par rapport à leur valeur pour l'UFR de référence (4,20 %) :

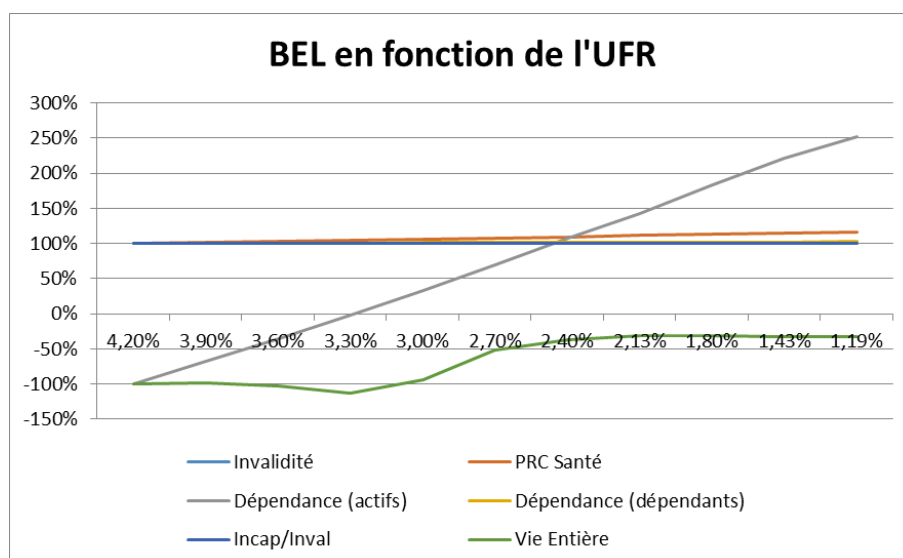


FIGURE 44 – BEL en fonction de l'UFR

Tout d'abord, nous observons que la plupart des BEL ont une évolution quasi-linéaire par rapport à l'UFR utilisé. Cependant, la Vie Entière est plus irrégulière, comme vu lors de la présentation des flux.

Ces évolutions du BEL ont un impact relativement faible sur le SCR :

TABLE 24 – Evolution des SCR par UFR (k€)

	4,20 %	3,90 %	3,60 %	3,30 %	3,00 %	2,70 %
SCR Marché	4 508	4 495	4 483	4 471	4 459	4 447
SCR Vie	0	0	0	0	0	0
SCR Santé	1 895	1 927	1 960	1 994	2 030	2 066
SCR Défaut	38	38	38	38	38	38
Diversification	-1 120	-1 133	-1 146	-1 160	-1 174	-1 188
BSCR	5 320	5 327	5 334	5 343	5 352	5 363
Ajustement PT	1	1	1	2	1	1
Risque opérationnel	15	15	15	15	15	15
SCR	5 336	5 343	5 351	5 360	5 369	5 379

	2,40 %	2,13 %	1,80 %	1,43 %	1,19 %
SCR Marché	4 447	4 435	4 424	4 412	4 402
SCR Vie	0	0	0	0	0
SCR Santé	2 104	2 138	2 179	2 216	2 245
SCR Défaut	38	38	38	38	38
Diversification	-1 202	-1 215	-1 230	-1 243	-1 254
BSCR	5 374	5 385	5 399	5 412	5 423
Ajustement PT	1	1	1	1	1
Risque opérationnel	15	15	16	16	17
SCR	5 390	5 401	5 415	5 429	5 441

Le SCR marché baisse notamment via le SCR taux d'intérêt. En effet, la baisse des courbes de taux avec l'UFR réduit également les chocs qui sont exprimés en pourcentage. Cela a pour effet de réduire les chocs appliqués et donc ce SCR. Il passe ainsi de 1 221 k€ pour un UFR à 4,2 % à 929 k€ pour un UFR à 1,19 %, de manière quasi-linéaire. Notons de plus que le portefeuille reste sensible à la hausse quel que soit l'UFR utilisé.

L'augmentation du SCR Santé via les BEL est en partie compensée par la baisse du SCR marché, et les effets de diversification atténuent les écarts.

Bien que le SCR soit stable, la Marge pour Risque augmente nettement. Notons que le modèle utilise la simplification suivante pour la calculer :

$$MargePourRisque = Duration \times SCR_{RU} \times CoutDuCapital$$

Le coût du capital a été fixé à 6 % par l'EIOPA. La hausse de la marge pour risque est donc due à :

- La hausse relativement plus rapide du SCR RU (*Reference Undertaking*), comme le SCR marché n'absorbe plus une partie de la hausse ;
- L'augmentation de la durée liée à l'actualisation moins importante des flux, ce qui donne plus de poids aux flux futurs.

TABLE 25 – Evolution de la Marge pour Risque (k€)

	4,20 %	3,90 %	3,60 %	3,30 %	3,00 %	2,70 %
SCR RU	1 920	1 952	1 986	2 021	2 055	2 091
Duration	27,91	28,15	28,38	28,62	28,85	29,09
Coût du Capital	6%	6%	6%	6%	6%	6%
Marge pour Risque	3 216	3 297	3 382	3 470	3 558	3 650

	2,40 %	2,13 %	1,80 %	1,43 %	1,19 %
SCR hors marché	2 129	2 163	2 205	2 242	2 272
Duration	29,32	29,52	29,76	29,97	30,13
Coût du Capital	6%	6%	6%	6%	6%
Marge pour Risque	3 745	3 831	3 937	4 032	4 108

Nous pouvons maintenant voir les impacts sur le bilan. Note : l'actif est évalué en valeur de marché à l'origine, aussi sa valeur ne change pas avec l'UFR. La taille du bilan reste donc la même.

TABLE 26 – Evolution du bilan en fonction de l'UFR (k€)

	4,20%	3,90%	3,60%	3,30%	3,00%	2,70%
Fonds propres	12 397	12 145	11 913	11 676	11 420	11 145
Marge pour Risque	3 191	3 297	3 382	3 470	3 558	3 650
BEL net	2 119	2 264	2 412	2 562	2 729	2 912
Total Bilan	17 707	17 707	17 707	17 707	17 707	17 707
SCR	5 328	5 343	5 351	5 360	5 369	5 379
Ratio	232,69%	227,31%	222,65%	217,84%	212,71%	207,21%

	2,40%	2,13%	1,80%	1,43%	1,19%
Fonds propres	10 874	10 630	10 335	10 069	9 858
Marge pour Risque	3 745	3 831	3 937	4 032	4 108
BEL net	3 088	3 246	3 435	3 606	3 741
Total Bilan	17 707	17 707	17 707	17 707	17 707
SCR	5 390	5 401	5 415	5 429	5 441
Ratio	201,76%	196,82%	190,85%	185,47%	181,18%

Le graphique suivant permet d'observer que la tendance du ratio de couverture est quasi linéaire en fonction de l'UFR.

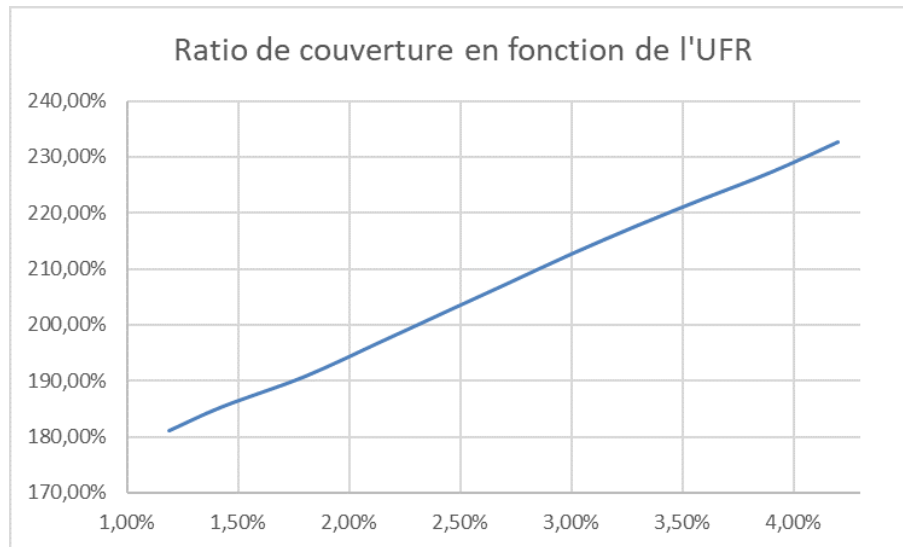


FIGURE 45 – Ratio de couverture en fonction de l'UFR

Le SCR évoluant relativement peu, la baisse du ratio s'explique surtout par la baisse des fonds propres, dûe à :

- La hausse du BEL via une actualisation plus faible ;
- La hausse de la Marge pour Risque via la hausse de la duration et du SCR RU.

La calibration d'une courbe de tendance linéaire sur ce graphique donne :

$$Ratio = 1,6078 + 17,1 \times UFR$$

Cette équation s'écarte au plus de 0,8 points du ratio de couverture donné par le bilan pour l'UFR à 4,20 %. Ce calibrage confirme la quasi-linéarité des résultats

Les impacts en prenant l'UFR le plus bas sont de l'ordre de 50 points sur le ratio de couverture. Ce portefeuille est particulièrement sensible à la courbe de taux du fait notamment de sa duration. Le portefeuille d'un assureur classique est en général moins long et sera moins exposé à un changement d'UFR. Notons cependant que si globalement la tendance était linéaire sur les BEL et sur le ratio de couverture du SCR, certaines garanties comme la Vie Entière, peuvent avoir des réactions plus complexes.

Conclusion

La courbe de taux réglementaire imposée aux assureurs est un élément central de Solvabilité 2. Il existe plusieurs méthodes pour construire une telle courbe, et l'EIOPA a choisi de se baser sur la méthode de Smith-Wilson, qui permet à la fois d'interpoler les maturités connues et d'extrapoler à plus long terme à l'aide de l'UFR.

Dans la première approche retenue par l'EIOPA, l'UFR a été calibré à 4,2 % et supposé constant, afin de projeter les bilans assurantiels de manière cohérente sur le long terme avec l'historique. Suite à la chute des taux, il est apparu dès 2016, année d'entrée en application de la nouvelle norme, que l'UFR pouvait sembler trop élevé au regard des perspectives économiques et de la faiblesse des taux observés. Aussi, une nouvelle approche impliquant un recalcul annuel de l'UFR a été retenue. Pour l'euro, l'inflation prise en compte ne change pas, mais le rendement moyen des actifs est pris au niveau mondial, et baisse sensiblement. Le nouvel UFR calculé pour l'euro est de 3,65 %, mais la valeur retenue évolue dans un corridor pour garantir une certaine stabilité, et sera de 4,05 % pour 2018.

Cependant, l'UFR reste fixé par des données macro-économiques, en dehors du modèle de Smith-Wilson. Aussi, un net décrochage est observé par rapport aux données de marché récentes. En repartant des bases théoriques de la méthode, De Kort et Vellekoop ont proposé de projeter l'UFR à partir des données de marché. L'intérêt de cette approche est d'utiliser les données réelles immédiatement observées, pour plus de cohérence. Leur méthode aboutit à 3 manières de calculer l'UFR, selon que l'optimisation se fasse par rapport à :

- La fonction de prix ;
- La fonction de rendement ;
- La fonction *forward*.

Une fois appliquées à des données réelles, les méthodes de détermination de l'UFR aboutissent dans un premier temps à des taux en ligne avec ce qui est attendu par l'EIOPA (autour de 4,2 %), mais chutent ensuite brutalement à des taux extrêmement bas à partir de 2015. Ces valeurs ne sont pas en phase avec la remontée des taux attendue à long terme. Les UFR extrapolées subissent de plus une forte volatilité. Il ne semble donc pas pertinent de les utiliser tels quels pour projeter un bilan économique sur des dizaines d'années. Ils peuvent cependant avoir un sens, d'abord d'un point de vue mathématique, mais surtout parce qu'ils se basent sur des données réelles, et peuvent être envisagés comme des chocs.

Afin d'étudier l'impact de ces chocs, nous avons constitué un portefeuille fictif. Il contient des garanties en Arrêt de travail, en PRC Santé, en Dépendance et en Vie Entière. De plus, l'âge des assurés a permis de garantir une duration importante. En effet, le changement d'UFR a un effet surtout après le dernier point liquide (à 20 ans pour l'euro). Ce portefeuille a mis en évidence une évolution quasi-linéaire du ratio de couverture par rapport à l'UFR. Les garanties étudiées montraient également une évolution quasi-linéaire des BEL. Cette tendance impacte de la même manière les SCR liés aux BEL. Le risque marché a au contraire une corrélation opposée et absorbe une partie de la hausse, en plus de l'effet de diversification. Les variations du SCR sont finalement très faibles mais les impacts sur les BEL et la Marge pour Risque amènent une diminution des fonds propres et une dégradation du taux de couverture.

Annexe

A1 - Rappels mathématiques

R1. Méthode des multiplicateurs de Lagrange :

La méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de minimiser une quantité sous contrainte. Ici seule la version en dimension 1 avec une contrainte d'égalité est présentée pour un rappel.

Soit une fonction :

$$L(x, \lambda) = \phi(x) + \lambda\psi(x)$$

Avec :

- $L(x, \lambda)$ est la fonction pour laquelle un extremum local est recherché ;
- $\psi(x)$ est la contrainte d'optimisation à annuler ;
- $\phi(x)$ est la fonction à optimiser ;
- λ est le multiplicateur de Lagrange (dimension 1).

Les fonction ϕ et ψ sont supposées différentiables. Un extremum local x^* doit vérifier :

$$\nabla L(x^*, \lambda) = \nabla \phi(x^*) + \lambda \nabla \psi(x^*) = 0$$

Où ∇ désigne le vecteur gradient. En dimension 1, la condition peut s'écrire :

$$\frac{dL}{dx}(x^*, \lambda) = \frac{d\phi}{dx}(x^*) + \lambda \frac{d\psi}{dx}(x^*) = 0$$

Dans le cas où la contrainte comprend k fonctions à annuler, il y-a k multiplicateurs de Lagrange.

R2. Résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 :

Une équation différentielle d'ordre 2 s'écrit :

$$y'' + a.y' + b.y = z$$

Où :

- y est la fonction cherchée ;
- z est une fonction connue ;
- a et b sont des coefficients réels.

La résolution d'une équation différentielle peut être réalisée en 2 étapes :

- Trouver une solution particulière à l'équation (une fonction qui vérifie l'équation), il n'existe pas de méthode générale pour trouver une telle solution, et elle est généralement notée y_0 ;
- Trouver l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :

$$a.y'' + b.y' + c.y = 0$$

Il s'agit d'un espace vectoriel.

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est alors la somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Il s'agit d'un espace affine.

Les fonctions solution d'une équation différentielle homogène d'ordre 2 dépend du signe de Δ , le discriminant de l'équation caractéristique associée :

$$a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$: il existe 2 solutions λ_1 et λ_2 à l'équation caractéristique, et l'espace vectoriel des fonctions solution de l'équation est généré par $e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$;
- Si $\Delta = 0$: il existe une unique solution λ_0 à l'équation caractéristique, et l'espace vectoriel des fonctions solution de l'équation est généré par $e^{\lambda_0 x}$ et $x e^{\lambda_0 x}$;
- Si $\Delta < 0$: il existe 2 solutions complexes λ_1 et λ_2 à l'équation caractéristique, et l'espace vectoriel des fonctions solution de l'équation est généré par $e^{\lambda_1 x}$ et $e^{\lambda_2 x}$, mais à valeurs complexes. Il existe cependant une méthode pour se limiter aux fonctions à valeurs réelles, mais qui ne sera pas détaillée ici.

R3. Fonctions hyperboliques :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ces fonctions sont les dérivées l'une de l'autre :

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

A2 - Démonstration de la proposition (page 13)

Commençons par rappeler que les prix s'écrivent :

$$p(v) = e^{-\omega.v} + \mathbf{W}(v, \mathbf{u})\mathbf{C}b$$

En évaluant les prix pour tout $v = u_i$, il vient :

$$p(\mathbf{u}) = e^{-\omega.\mathbf{u}} + \mathbf{W}\mathbf{C}b = \mathbf{d} + \mathbf{W}\mathbf{C}b$$

Rappelons les notations suivantes :

- $\mathbf{d} = e^{-\omega.\mathbf{u}}$
- $\mathbf{d}_\Delta$ est une matrice diagonale construite à partir de $\mathbf{d}$
- $\mathbf{q} = \mathbf{C}'\mathbf{d}$
- $\mathbf{W} = \mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{d}_\Delta$
- $\mathbf{Q} = \mathbf{d}_\Delta\mathbf{C}$

Ce qui permet d'écrire :

$$p(\mathbf{u}) = \mathbf{d} + \mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{d}_\Delta\mathbf{C}b = \mathbf{d} + \mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{Q}b$$

$p(\mathbf{u})$ est de taille m et représente le prix d'un zéro-coupon pour les maturités présentes dans le vecteur $\mathbf{u}$. Cela revient à se donner m équations linéaires. Comme nous devons ajuster n variables $(b_1, \dots, b_n)$, l'équation est composée par $\mathbf{C}'$ (de taille $n \times m$) à gauche :

$$\mathbf{C}'.p(\mathbf{u}) = \mathbf{C}'.\mathbf{d} + \mathbf{C}'.\mathbf{W}\mathbf{C}b$$

Ce qui se réécrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'.p(\mathbf{u}) &= \mathbf{q} + \mathbf{C}'.\mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{d}_\Delta\mathbf{C}b \\ &= \mathbf{q} + \mathbf{C}'.\mathbf{d}_\Delta\mathbf{H}\mathbf{Q}b \\ &= \mathbf{q} + \mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}b \end{aligned}$$

$\mathbf{C}'.p(\mathbf{u})$ est bien un vecteur de dimension n . Il correspond aux prix des instruments financiers.

En effet, par cette multiplication à gauche, chaque flux présent dans $\mathbf{C}'$ (instruments en ligne et maturités en colonne) est multiplié par la valeur d'un zéro-coupon donnant 1 à la maturité correspondante au flux. Cela revient à évaluer le prix des instruments financiers utilisés comme la somme du prix de leurs flux. Nous avons donc :

$$\mathbf{C}'.p(\mathbf{u}) = \mathbf{p}$$

Pour rappel, $\mathbf{p}$ est le vecteur des prix des instruments. En utilisant ce résultat dans l'équation trouvée plus haut, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'.p(\mathbf{u}) &= \mathbf{q} + \mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}b \\ \Longleftrightarrow \mathbf{p} &= \mathbf{q} + \mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}b \\ \Longleftrightarrow \mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}b &= \mathbf{p} - \mathbf{q} \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse du théorème que $\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}$ est inversible, nous obtenons finalement :

$$\boxed{\mathbf{b} = (\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{p} - \mathbf{q})}$$

□

A3 - Démonstration de la proposition (page 15)

Afin de calculer l'écart entre la fonction *forward* et ω , il faut commencer par réécrire les formules de Smith-Wilson mais avec la fonction *forward*.

Nous avons introduit dans les notations (page 6) que :

$$p(v) = e^{-\int_0^v f(u)du}$$

Cette formule permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^v f(u)du &= -\ln(p(v)) \\ f(v) &= -\frac{d(\ln(p(v)))}{dv} \end{aligned}$$

Avec la méthode de Smith-Wilson la fonction de prix s'écrit :

$$\begin{aligned} p(v) &= e^{-\omega.v} + e^{-\omega.v} \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb} \\ &= e^{-\omega.v} (1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb}) \end{aligned}$$

Rappelons que :

$$\begin{aligned} H(u, v) &= \alpha \cdot \min(u, v) - \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha|u-v|} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha(u+v)} \\ H(u, v) &= \begin{cases} \alpha.v - \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha(u-v)} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha(u+v)} & \text{si } v \leq u \\ \alpha.u - \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha(v-u)} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\alpha(u+v)} & \text{si } u \leq v \end{cases} \end{aligned}$$

Notons :

$$G(u, v) = \frac{dH(u, v)}{dv} = \begin{cases} \alpha - \alpha e^{-\alpha u} \cosh(\alpha v) & \text{si } v \leq u \\ \alpha e^{-\alpha u} \sinh(\alpha u) & \text{si } u \leq v \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant écrire :

$$\begin{aligned} f(v) &= -\frac{d(\ln(p(v)))}{dv} \\ &= -\frac{d(\ln(e^{-\omega.v}(1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb})))}{dv} \\ &= -\frac{d(\ln(e^{-\omega.v}) + \ln(1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb}))}{dv} \\ &= -\frac{d(-\omega.v)}{dv} - \frac{d(\ln(1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb}))}{dv} \\ &= \omega - \frac{d(1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb})}{dv} \cdot \frac{1}{1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb}} \end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne est obtenu avec : $(\ln(g(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\mathbf{Q}$ et $\mathbf{b}$ étant indépendants de v , nous obtenons ensuite :

$$f(v) = \omega - \frac{\mathbf{G}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb}}{1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) \mathbf{Qb}}$$

Comme nous nous intéressons au taux *forward* à la fin de la période de convergence, nous avons que $u \leq v$. En effet, le u le plus grand correspond au LLP (dernier point liquide), forcément antérieur à la fin de la convergence (voir graphique page 8).

Dans ce cas particulier, nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 H(u, v) &= \alpha.u - \frac{1}{2}.e^{-\alpha(v-u)} + \frac{1}{2}.e^{-\alpha(u+v)} \\
 &= \alpha.u - e^{-\alpha.v} \left(\frac{e^{\alpha u} - e^{-\alpha u}}{2} \right) \\
 &= \alpha.u - e^{-\alpha.v} - e^{-\alpha.v} \sinh(\alpha u) \\
 G(u, v) &= \alpha e^{-\alpha v} \sinh(\alpha u)
 \end{aligned}$$

Ces formules se généralisent en forme matricielle (attention à la transposée sur $\mathbf{u}$) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}(v, \mathbf{u}) &= \mathbf{H}'(\mathbf{u}, v) = \alpha.\mathbf{u}' - e^{-\alpha.v} \sinh(\alpha \mathbf{u}') \\
 \mathbf{G}(v, \mathbf{u}) &= \mathbf{G}'(\mathbf{u}, v) = \alpha e^{-\alpha v} \sinh(\alpha \mathbf{u}')
 \end{aligned}$$

Notons que le vecteur est transposé pour correspondre aux formules ci-dessus, avec le premier terme (u) inférieur au second (v).

Ces résultats permettent de simplifier l'équation obtenue plus haut :

$$\begin{aligned}
 f(v) &= \omega - \frac{\mathbf{G}(v, \mathbf{u})\mathbf{Qb}}{1 + \mathbf{H}(v, \mathbf{u})\mathbf{Qb}} \\
 &= \omega - \frac{\alpha e^{-\alpha v} \sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}}{1 + (\alpha.\mathbf{u}' - e^{-\alpha.v} \sinh(\alpha \mathbf{u}'))\mathbf{Qb}} \\
 &= \omega - \frac{\alpha e^{-\alpha v} \sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}}{1 + \alpha.\mathbf{u}'\mathbf{Qb} - e^{-\alpha.v} \sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}} \\
 &= \omega - \frac{\alpha \sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}}{e^{\alpha v} + e^{\alpha v} \alpha.\mathbf{u}'\mathbf{Qb} - \sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}} \\
 &= \omega - \frac{\alpha}{e^{\alpha v} \frac{1 + \alpha.\mathbf{u}'\mathbf{Qb}}{\sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}} - 1} \\
 &= \omega + \frac{\alpha}{1 - e^{\alpha v} \frac{1 + \alpha.\mathbf{u}'\mathbf{Qb}}{\sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}}}
 \end{aligned}$$

Rappelons la notation introduite dans la proposition :

$$\kappa = \frac{1 + \alpha \mathbf{u}'\mathbf{Qb}}{\sinh(\alpha \mathbf{u}')\mathbf{Qb}}$$

Ce terme ne dépend pas de v et permet de noter plus simplement :

$$f(v) = \omega + \frac{\alpha}{1 - \kappa.e^{\alpha v}}$$

Cette écriture permet d'isoler ω , ce qui nous amène à la dernière étape : caractériser l'écart de convergence en T :

$$g(\alpha) = |\omega - f(T)| = \frac{\alpha}{|1 - \kappa.e^{\alpha T}|}$$

□

A4 - Démonstration du théorème 1 (Smith-Wilson) (page 24)

La démonstration utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange, rappelée page 63. Commençons par noter :

$$\tilde{L}_\alpha[g] = L_\alpha[g] + \sum_{j=1}^n \lambda_j \psi_j(g)$$

Avec :

- $L_\alpha[g]$ la quantité à optimiser (voir page 23) ;
- λ_j les multiplicateurs de Lagrange ;
- $\psi_j(g)$ les n fonctions à annuler. La contrainte formulée plus haut peut s'écrire :

$$p_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} p(u_i) = 0 \iff p_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\omega u_i} (1 + g(u_i)) = 0$$

En notant $\bar{p}_j = p_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\omega u_i}$, nous pouvons simplifier l'écriture en :

$$\bar{p}_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\omega u_i} g(u_i) = 0$$

Donc :

$$\psi_j(g) = \bar{p}_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\omega u_i} g(u_i)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\tilde{L}_\alpha[g] = \int_0^{+\infty} (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds + \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\bar{p}_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} g(u_i) \right)$$

En changeant la notation des λ_j pour $\alpha^3 \cdot b_j$, la fonction s'écrit :

$$\tilde{L}_\alpha[g] = \int_0^{+\infty} (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds + \alpha^3 \sum_{j=1}^n b_j \left(\bar{p}_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} g(u_i) \right)$$

Le changement de notation permet d'introduire les poids b_j qui apparaissent dans la formule du théorème, et le terme α^3 se simplifie dans la suite des calculs.

Tout minimum local doit vérifier :

$$\frac{d(\tilde{L}_\alpha)}{dg}[g] = 0$$

Comme g est inconnue, en prenant $h \in F_0$ l'équation équivaut à :

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_\alpha[g + \epsilon h] \Big|_{\epsilon=0}$$

L'introduction du coefficient $\frac{1}{2}$ permet de simplifier l'équation plus loin. En développant, il vient :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_\alpha[g + \epsilon h] \Big|_{\epsilon=0} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_0^{+\infty} ((g + \epsilon h)''(s)^2 + \alpha^2 (g + \epsilon h)'(s)^2) ds + \alpha^3 \sum_{j=1}^n b_j \left(\bar{p}_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} (g + \epsilon h)(u_i) \right) \right) \Big|_{\epsilon=0} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\epsilon} \left(\int_0^{+\infty} (g''(s)^2 + 2g''(s)\epsilon h''(s) + \epsilon^2 h''(s)^2 + \alpha^2 (g'(s)^2 + 2g'(s)\epsilon h'(s) + \epsilon^2 h'(s)^2) ds \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^3 \sum_{j=1}^n b_j \left((\bar{p}_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} (g(u_i) + \epsilon h(u_i))) \right) \right) \Big|_{\epsilon=0} \\
 &= \left(\int_0^{+\infty} (g''(s)h''(s) + \epsilon h''(s)^2 + \alpha^2 (g'(s)h'(s) + \epsilon h'(s)^2)) ds - \frac{1}{2} \alpha^3 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} h(u_i) \right) \Big|_{\epsilon=0} \\
 &= \int_0^{+\infty} [g''(s)h''(s) + \alpha^2 g'(s)h'(s)] ds - \frac{1}{2} \alpha^3 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} h(u_i)
 \end{aligned}$$

En réalisant une intégration par partie sur $g''(s)h''(s)$, il vient :

$$\begin{aligned}
 u &= g'' & u' &= g''' \\
 v &= h'' & v &= h'
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} g''(s)h''(s)ds = [g''(s)h'(s)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} [g'''(s)h'(s)] ds$$

De plus, comme $h \in F_0$, $h(0) = 0$ et nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
 h(u_i) &= h(u_i) - h(0) \\
 &= \int_0^{u_i} h'(s) ds \\
 &= \int_0^{+\infty} h'(s) \mathbb{1}_{s \leq u_i} ds
 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'équation suivante à résoudre :

$$\begin{aligned}
 0 &= [g''(s)h'(s)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} [g'''(s)h'(s)] ds + \int_0^{+\infty} [\alpha^2 g'(s)h'(s)] ds \\
 &\quad - \frac{1}{2} \alpha^3 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} \int_0^{+\infty} h'(s) \mathbb{1}_{s \leq u_i} ds
 \end{aligned}$$

Nous avons supposé que $h \in F_0$ et $g \in F_0$. Donc :

- $\lim_{s \rightarrow \infty} g''(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} h'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} h''(s) = 0$;
- $g''(0) = 0$;
- $h \in C^2(\mathbb{R}_+)$.

Cela permet d'obtenir :

$$[g''(s)h'(s)]_0^\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} g''(s)h'(s) - g''(0)h'(0) = 0$$

NB : comme $h \in C^2(\mathbb{R}_+)$, h' est bien défini en 0 et prend une valeur finie.

L'équation devient alors :

$$0 = - \int_0^{+\infty} [g'''(s)h'(s)] ds + \int_0^{+\infty} [\alpha^2 g'(s)h'(s)] ds - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} \int_0^{+\infty} h'(s) \mathbb{1}_{s \leq u_i} ds$$

Nous pouvons à présent factoriser $h'(s)$ et obtenir :

$$0 = \int_0^{+\infty} h'(s) \left[-g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} \mathbb{1}_{s \leq u_i} \right] ds$$

Notons que la partie entre crochets ne dépend pas de h . Cependant, l'équation est valable pour tout $h \in F_0$. Sa dérivée h' n'est connue qu'en 0 : $h'(s) = 0$. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $h'(s)$ peut prendre toutes les valeurs.

Par conséquent, pour que l'intégrale soit nulle pour tout $h \in F_0$, il est nécessaire que la partie entre crochets soit nulle partout, sauf en 0. Cela amène une nouvelle équation :

$$\forall s > 0, -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{\omega \cdot u_i} \mathbb{1}_{s \leq u_i} = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 en fonction de g' , et g''' est la dérivée seconde. Elle peut s'écrire plus simplement :

$$\forall s > 0, -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbb{1}_{s \leq u_i} = 0$$

Avec $\tilde{b}_i = \sum_{j=1}^n b_j c_{ij} e^{-\omega \cdot u_i}$.

NB : la notation de $\tilde{b}_i$ coïncide avec celle de l'EIOPA (voir page [13](#)).

Une solution particulière de l'équation différentielle est :

$$g'_0(t) = \frac{1}{2}\alpha \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\mathbb{1}_{t \leq u_i} + \cosh(\alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{t > u_i})$$

En effet, en dérivant cette fonction, il vient :

$$\begin{aligned} g''_0(t) &= \frac{1}{2}\alpha^2 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\sinh(\alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{t > u_i}) \\ g'''_0(t) &= \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\cosh(\alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{t > u_i}) \end{aligned}$$

Ce qui devient, dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
 & -g_0'''(t) + \alpha^2 g_0'(t) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbb{1}_{t \leq u_i} \\
 &= -\frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\cosh(\alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{t > u_i}) \\
 & \quad + \alpha^2 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\mathbb{1}_{t \leq u_i} + \cosh(\alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{t > u_i}) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbb{1}_{t \leq u_i} \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\mathbb{1}_{t \leq u_i}) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbb{1}_{t \leq u_i} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Donc g_0' est bien une solution particulière.

Etudions maintenant l'équation homogène associée :

$$\forall s > 0, -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) = 0$$

Son équation caractéristique s'écrit :

$$-\lambda^2 + \alpha^2 = 0$$

Et son discriminant est :

$$\Delta = 4\alpha^2 = (2\alpha)^2$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont donc :

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= -\frac{2\alpha}{-2} = \alpha \\
 \lambda_2 &= -\frac{2\alpha}{2} = -\alpha
 \end{aligned}$$

Les fonctions générant l'espace vectorielle sont par conséquent :

$$e^{\alpha t} \text{ et } e^{-\alpha t}$$

Il suit que l'équation différentielle linéaire de degré 2 a pour solution générale :

$$g'(t) = a_1 e^{\alpha t} + a_2 e^{-\alpha t} + \frac{1}{2}\alpha \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\mathbb{1}_{t \leq u_i} + \cosh(\alpha(t - u_i)) \mathbb{1}_{t > u_i})$$

Avec a_1, a_2 des coefficients réels, comme la solution est un espace affine.

Nous pouvons maintenant chercher à intégrer g' pour trouver g :

$$\int_0^t g'(s) ds = [g(s)]_0^t = g(t) - g(0)$$

Comme $g \in F_0$, nous avons $g(0) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \int_0^t g'(s) ds \\
 \Leftrightarrow g(t) &= \int_0^t \left[a_1 e^{\alpha s} + a_2 e^{-\alpha s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \alpha (\mathbb{1}_{s \leq u_i} + \cosh(\alpha(s - u_i)) \mathbb{1}_{s > u_i}) \right] ds \\
 \Leftrightarrow g(t) &= a_1 \int_0^t e^{\alpha s} ds + a_2 \int_0^t e^{-\alpha s} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \left[\sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \alpha (\mathbb{1}_{s \leq u_i} + \cosh(\alpha(s - u_i)) \mathbb{1}_{s > u_i}) \right] ds \\
 \Leftrightarrow g(t) &= a_1 \int_0^t e^{\alpha s} ds + a_2 \int_0^t e^{-\alpha s} ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \int_0^t \alpha (\mathbb{1}_{s \leq u_i} + \cosh(\alpha(s - u_i)) \mathbb{1}_{s > u_i}) ds \\
 \Leftrightarrow g(t) &= a_1 \int_0^t e^{\alpha s} ds + a_2 \int_0^t e^{-\alpha s} ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\int_0^t \alpha \mathbb{1}_{s \leq u_i} ds + \int_0^t \alpha \cosh(\alpha(s - u_i)) \mathbb{1}_{s > u_i} ds \right)
 \end{aligned}$$

Ces intégrales peuvent être calculées séparément :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t e^{\alpha s} ds &= \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha s} \right]_0^t = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \\
 \int_0^t e^{-\alpha s} ds &= \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha s} \right]_0^t = -\frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t} - 1) = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \\
 \int_0^t \alpha \mathbb{1}_{s < u_i} ds &= \int_0^{\min(t, u_i)} \alpha ds = [\alpha s]_0^{\min(t, u_i)} = \alpha \min(t, u_i) \\
 \int_0^t \alpha \cosh(\alpha(s - u_i)) \mathbb{1}_{s > u_i} ds &= \int_0^{\max(t, u_i)} \alpha \cosh(\alpha(s - u_i)) ds \\
 &= [\sinh(\alpha(s - u_i))]_{u_i}^{\max(t, u_i)} \\
 &= \sinh(\alpha(\max(t, u_i) - u_i)) - \sinh(\alpha(u_i - u_i)) \\
 &= \sinh(\alpha(\max(t, u_i) - u_i)) - \sinh(0)
 \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0$$

Ce résultat peut s'utiliser 2 fois pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \alpha \cosh(\alpha(s - u_i)) \mathbb{1}_{s > u_i} ds &= \sinh(\alpha(\max(t, u_i) - u_i)) - \sinh(0) \\
 &= \sinh(\alpha(\max(t, u_i) - u_i)) \\
 &= \mathbb{1}_{t > u_i} \sinh(\alpha(t - u_i)) + \mathbb{1}_{t \leq u_i} \sinh(\alpha(u_i - u_i)) \\
 &= \mathbb{1}_{t > u_i} \sinh(\alpha(t - u_i))
 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire :

$$g(t) = a_1 \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) + a_2 \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\alpha \min(t, u_i) + \mathbb{1}_{t > u_i} \sinh(\alpha(t - u_i)))$$

Les deux premiers termes peuvent s'écrire autrement :

$$\begin{aligned}
 a_1 \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) + a_2 \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) &= \frac{1}{\alpha} [a_1 e^{\alpha t} - a_1 + a_2 - a_2 e^{-\alpha t}] \\
 &= \frac{a_2 - a_1}{\alpha} + \left(\frac{a_1}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{a_2}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) \\
 &= \frac{a_2 - a_1}{\alpha} + \left(\frac{a_1}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{a_2}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) + \frac{1}{\alpha} (a_1 e^{-\alpha t} - a_1 e^{-\alpha t}) \\
 &= \frac{a_2 - a_1}{\alpha} + \left(\frac{a_1}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{a_1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right) - \frac{a_2}{\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{a_1}{\alpha} e^{-\alpha t} \\
 &= \frac{a_1}{\alpha} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) + \frac{a_2 - a_1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) \\
 &= \frac{2a_1}{\alpha} \sinh(\alpha t) + \frac{a_2 - a_1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})
 \end{aligned}$$

Notons $a_3 = \frac{2a_1}{\alpha}$ et $a_4 = \frac{a_2}{\alpha} - \frac{a_1}{\alpha}$. Trouver ces coefficients revient à trouver a_1 et a_2 . Nous pouvons maintenant écrire :

$$g(t) = a_3 \sinh(\alpha t) + a_4 (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (\alpha \min(t, u_i) + \sinh(\alpha(t - u_i)) \mathbf{1}_{t > u_i})$$

a_3 et a_4 ne sont pas connus car la solution de l'équation différentielle est un espace affine. Nous allons maintenant déterminer ces coefficients à l'aide de contraintes. Commençons par noter :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[a_3 \frac{e^{\alpha t}}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha u_i + \frac{e^{\alpha(t-u_i)}}{2} \right) \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[e^{\alpha t} \left(\frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i e^{-\alpha u_i} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \alpha u_i \right]
 \end{aligned}$$

Or $g(t)$ doit être constante lorsque $t \rightarrow +\infty$. a_3 est donc choisi de façon à faire disparaître le terme variable en $e^{\alpha t}$:

$$a_3 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i e^{-\alpha u_i}$$

La fonction peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= a_4 (1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha \min(t, u_i) + \frac{1}{2} e^{\alpha(t-u_i)} (\mathbf{1}_{t > u_i} - 1) - \frac{1}{2} e^{-\alpha(t-u_i)} \mathbf{1}_{t > u_i} + \frac{1}{2} e^{-\alpha(t+u_i)} \right) \\
 &= a_4 (1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha \min(t, u_i) - \frac{1}{2} e^{-\alpha|t-u_i|} + \frac{1}{2} e^{-\alpha(t+u_i)} \right)
 \end{aligned}$$

Le coefficient a_4 est fixé avec la dérivée seconde et comme g est cherché dans F_0 , il faut avoir $g''(0) = 0$.

Rappelons que g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Comme cette fonction n'est pas dérivable en u_i , mais que seul $g''(0)$ est cherché, nous supposons que $t \in [0; \min_i(u_i)[$ pour simplifier les calculs :

$$\begin{aligned}
 g(t) &= a_4(1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha \min(t, u_i) - \frac{1}{2}e^{-\alpha|t-u_i|} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(t+u_i)} \right) \\
 \forall t \in [0; \min_i(u_i)[\quad g(t) &= a_4(1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha t - \frac{1}{2}e^{-\alpha(u_i-t)} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(t+u_i)} \right) \\
 \forall t \in [0; \min_i(u_i)[\quad g(t) &= a_4(1 - e^{-\alpha t}) + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha t - \frac{1}{2}e^{\alpha(t-u_i)} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(t+u_i)} \right) \\
 \forall t \in [0; \min_i(u_i)[\quad g'(t) &= \alpha a_4 e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha - \frac{1}{2}\alpha e^{\alpha(t-u_i)} - \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha(t+u_i)} \right) \\
 \forall t \in [0; \min_i(u_i)[\quad g''(t) &= -\alpha^2 a_4 e^{-\alpha t} + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 e^{\alpha(t-u_i)} + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha(t+u_i)} \right)
 \end{aligned}$$

La dérivée seconde peut maintenant être calculée en 0 :

$$\begin{aligned}
 g''(0) &= -\alpha^2 a_4 + \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha u_i} + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha u_i} \right) \\
 g''(0) &= -\alpha^2 a_4 \\
 \implies a_4 &= 0
 \end{aligned}$$

Cela permet de trouver la fonction attendue :

$$g(v) = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \left(\alpha \min(v, u_i) - \frac{1}{2}e^{-\alpha|v-u_i|} + \frac{1}{2}e^{-\alpha(v+u_i)} \right) = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i H(v, u_i)$$

□

A5 - Démonstration du théorème 2 (De Kort-Vellekoop) (page 26)

Nous savons d'après le théorème 1 que g est de la forme :

$$g(v) = \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i H(v, u_i)$$

Avec (cf. proposition page 13) :

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= (\mathbf{Q}' \mathbf{H} \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \mathbf{Q} \mathbf{b} = \mathbf{Q} (\mathbf{Q}' \mathbf{H} \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant repartir de la quantité à minimiser :

$$L_\alpha[g] = \int_0^\infty (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds = \int_0^\infty g''(s)^2 ds + \alpha^2 \int_0^\infty g'(s)^2 ds$$

En réalisant une intégration par partie sur $g''(s)^2 = g''(s) \cdot g''(s)$, la quantité s'écrit :

$$\begin{aligned} L_\alpha[g] &= [g'(s)g''(s)]_0^\infty - \int_0^\infty g'(s)g'''(s)ds + \alpha^2 \int_0^\infty g'(s)^2 ds \\ &= \int_0^\infty g'(s) (-g'''(s) + \alpha^2 g'(s)) ds \end{aligned} \quad (1)$$

Les conditions d'optimalité pour g vues dans la démonstration précédente impliquent que :

$$\begin{aligned} \forall s > 0, \quad -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbf{1}_{s \leq u_i} &= 0 \\ \iff \forall s > 0, \quad -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) &= \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbf{1}_{s \leq u_i} \end{aligned} \quad (2)$$

Avec les équations 1 et 2 il vient :

$$L_\alpha[g] = \int_0^\infty g'(s) \left(\frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \mathbf{1}_{s \leq u_i} \right) ds = \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \int_0^{u_i} g'(s) ds = \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i (g(u_i) - g(0))$$

Or $g \in F_0$ donc $g(0) = 0$, et nous obtenons en appliquant la formule trouvée pour g que $g(u_i) = \sum_{k=1}^m \tilde{b}_k H(u_i, u_k)$. Donc :

$$\begin{aligned} L_\alpha[g] &= \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i g(u_i) = \frac{1}{2}\alpha^3 \sum_{i=1}^m \tilde{b}_i \sum_{k=1}^m \tilde{b}_k H(u_i, u_k) \\ \iff L_\alpha[g] &= \frac{1}{2}\alpha^3 \tilde{\mathbf{b}}' \mathbf{H} \tilde{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Nous notons le vecteur $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ pour alléger la notation. Nous avons :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Q}' \mathbf{H} \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) = (\mathbf{Q}' \mathbf{H} \mathbf{Q})^{-1} \bar{\mathbf{p}}$$

Ou encore que :

$$\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{Q} \mathbf{b} = \mathbf{Q} (\mathbf{Q}' \mathbf{H} \mathbf{Q})^{-1} \bar{\mathbf{p}}$$

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 L_\alpha[g] &= \frac{1}{2}\alpha^3 \tilde{\mathbf{b}}' \mathbf{H} \tilde{\mathbf{b}} \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^3 \cdot (\mathbf{Q}(\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1}\bar{\mathbf{p}})' \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1}\bar{\mathbf{p}} \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^3 \cdot \bar{\mathbf{p}}' \cdot (\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}(\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1}\bar{\mathbf{p}} \\
 &= \frac{1}{2}\alpha^3 \cdot \bar{\mathbf{p}}' (\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1} \bar{\mathbf{p}}
 \end{aligned}$$

Notons $\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q}$ pour alléger la notation. L'équation s'écrit maintenant :

$$L_\alpha[g] = \frac{1}{2}\alpha^3 \cdot \bar{\mathbf{p}}' (\mathbf{A})^{-1} \bar{\mathbf{p}}$$

Rappelons quelques règles de calcul matriciel :

— Dérivée de l'inverse d'une matrice :

$$\frac{d(\mathbf{A})^{-1}}{d\omega} = -\mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \mathbf{A}^{-1}$$

— Dérivée d'un produit de matrices :

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{d\omega} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{d\omega} + \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \cdot \mathbf{B}$$

— Dérivée d'une transposée :

$$\frac{d(\mathbf{A}')}{d\omega} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \right)'$$

Nous cherchons ω tel que :

$$\frac{dL_\alpha[g]}{d\omega} = 0$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{dL_\alpha[g]}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}}) \\
 &= \bar{\mathbf{p}}' \frac{d}{d\omega} (\mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}}) + \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}') \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \\
 &= \bar{\mathbf{p}}' \frac{d}{d\omega} (\mathbf{A}^{-1}) \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}) + \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}') \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \\
 &= -\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}) + \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}') \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}}
 \end{aligned}$$

Pour simplifier davantage l'équation, nous devons remarquer que :

$$\frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}') \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}})$$

Une preuve détaillée de cette égalité est placée dans l'annexe suivante (page [79](#)).

En remplaçant dans l'équation trouvée plus haut, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 0 &= -\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}) + \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}') \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \\
 &= 2\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d}{d\omega} (\bar{\mathbf{p}}) - \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \\
 &= \bar{\mathbf{p}}' \left(2\mathbf{A}^{-1} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\omega} - \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \right)
 \end{aligned}$$

Les dérivées sont remplacées avec :

$$\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{C}'\mathbf{u}_\Delta \mathbf{d}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} &= \frac{d(\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})}{d\omega} \\ &= \frac{d(\mathbf{C}'\mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C})}{d\omega} \\ &= \mathbf{C}' \frac{d(\mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta)}{d\omega} \mathbf{C} \\ &= \mathbf{C}' \frac{d(\mathbf{d}_\Delta)}{d\omega} \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C} + \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \frac{d(\mathbf{d}_\Delta)}{d\omega} \mathbf{C} \\ &= -\mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C} - \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{C} \end{aligned}$$

La dernière égalité vient en remarquant :

$$\frac{d(\mathbf{d})}{d\omega} = \frac{d(\exp(-\omega \mathbf{u}))}{d\omega} = -\exp(-\omega \mathbf{u}) \mathbf{u}_\Delta = -\mathbf{d} \mathbf{u}_\Delta$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\mathbf{p}}' \left(2\mathbf{A}^{-1} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\omega} - \mathbf{A}^{-1} \frac{d\mathbf{A}}{d\omega} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \right) \\ &= 2\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}' \mathbf{d} \mathbf{u}_\Delta + \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta (\mathbf{u}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C} + \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \\ &= 2\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{C}' \mathbf{d} \mathbf{u}_\Delta + \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

NB : les 3 termes sommés sont bien des scalaires.

Les 2 derniers termes s'écrivent de manière identique à l'exception de la place de $\mathbf{u}_\Delta$:

$$\bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}} \text{ et } \bar{\mathbf{p}}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \bar{\mathbf{p}}$$

Cependant, comme :

- les matrices diagonales sont leur propre transposée ;
- $\mathbf{H}$ est symétrique ;
- $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{Q}'\mathbf{H}\mathbf{Q})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$

Alors ces matrices sont transposées l'une de l'autre :

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{d}_\Delta \mathbf{H} \mathbf{d}_\Delta \mathbf{u}_\Delta \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1})' = \mathbf{M}$$

Les 2 derniers termes de l'équation peuvent donc s'écrire comme $\bar{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{p}}$ et $\bar{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{M}' \cdot \bar{\mathbf{p}}$, ce qui devient en développant :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{M} \cdot \bar{\mathbf{p}} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i M_{ij} p_j \\ &= \bar{\mathbf{p}}' \cdot \mathbf{M}' \cdot \bar{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

Ces termes sont donc égaux, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= 2\bar{p}' A^{-1} \cdot C' du_{\Delta} + \bar{p}' \cdot M \cdot \bar{p} + \bar{p}' \cdot M' \cdot \bar{p} \\ &= 2\bar{p}' A^{-1} \cdot C' du_{\Delta} + 2\bar{p}' \cdot M \cdot \bar{p} \end{aligned}$$

Finalement, en simplifiant le facteur 2 et en redéveloppant, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{p}' A^{-1} C' du_{\Delta} + \bar{p}' \cdot M \cdot \bar{p} \\ &= \bar{p}' A^{-1} C' u_{\Delta} d + \bar{p}' A^{-1} C' d_{\Delta} u_{\Delta} H d_{\Delta} C A^{-1} \bar{p} \\ &= \bar{p}' A^{-1} C' u_{\Delta} d_{\Delta} (1 + H d_{\Delta} C A^{-1} \bar{p}) \\ &= (p - q)' (Q' H Q)^{-1} \cdot C' d_{\Delta} u_{\Delta} (1 + H d_{\Delta} C (Q' H Q)^{-1} (p - q)) \\ &= (p - C' d)' (C' d_{\Delta} H d_{\Delta} C)^{-1} \cdot C' d_{\Delta} u_{\Delta} (1 + H d_{\Delta} C (C' d_{\Delta} H d_{\Delta} C)^{-1} (p - C' d)) \\ \iff &\boxed{0 = (p - C' d)' (C' d_{\Delta} H d_{\Delta} C)^{-1} \cdot C' d_{\Delta} u_{\Delta} \times (1 + H d_{\Delta} C (C' d_{\Delta} H d_{\Delta} C)^{-1} (p - C' d))} \end{aligned}$$

Ce qui est bien l'équation donnée par le théorème.

De plus, en supposant que C est inversible, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= (p - C' d)' C^{-1} d_{\Delta}^{-1} H^{-1} d_{\Delta}^{-1} (C')^{-1} C' d_{\Delta} u_{\Delta} \times (1 + H d_{\Delta} C \cdot C^{-1} d_{\Delta}^{-1} H^{-1} d_{\Delta}^{-1} (C')^{-1} (p - C' d)) \\ &= (p - C' d)' C^{-1} d_{\Delta}^{-1} H^{-1} u_{\Delta} \times (1 + d_{\Delta}^{-1} (C')^{-1} (p - C' d)) \\ &= (d' C - p') C^{-1} d_{\Delta}^{-1} H^{-1} u_{\Delta} \times (1 + d_{\Delta}^{-1} (C')^{-1} (p - C' d)) \\ &= (d' - p' C^{-1}) d_{\Delta}^{-1} H^{-1} u_{\Delta} \times (1 + d_{\Delta}^{-1} ((C')^{-1} p - d)) \\ &= (d' d_{\Delta}^{-1} - p' C^{-1} d_{\Delta}^{-1}) H^{-1} u_{\Delta} \times (1 + d_{\Delta}^{-1} (C')^{-1} p - d_{\Delta}^{-1} d) \\ &= (1 - p' C^{-1} d_{\Delta}^{-1}) H^{-1} u_{\Delta} \times (d_{\Delta}^{-1} (C')^{-1} p) \end{aligned}$$

En utilisant la notation $\pi = (C')^{-1} p$, l'équation devient :

$$0 = (1 - \pi' d_{\Delta}^{-1}) H^{-1} u_{\Delta} \times (d_{\Delta}^{-1} \pi)$$

Finalement, cette équation revient à écrire (en réordonnant) :

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (u_i \pi_i e^{\omega \cdot u_i}) (H^{-1})_{ij} (\pi_j e^{\omega \cdot u_i} - 1) = 0}$$

□

A6 - Complément de la démonstration du théorème 2 (page 76)

Nous voulons démontrer que :

$$\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}')\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}'\mathbf{A}^{-1}\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}})$$

Cette égalité est plus évidente si détaillée avec les indices. Rappelons déjà que :

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{C}'\mathbf{d} = \mathbf{p} - \mathbf{C}'e^{-\omega\mathbf{u}}$$

Cela permet d'obtenir :

$$\frac{d\bar{\mathbf{p}}}{d\omega} = \frac{d(\mathbf{p} - \mathbf{q})}{d\omega} = \frac{d(\mathbf{p} - \mathbf{C}'\mathbf{d})}{d\omega} = -\mathbf{C}'\frac{d(\mathbf{d})}{d\omega} = \mathbf{C}'\mathbf{d}\mathbf{u}_\Delta$$

Donc :

$$\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{C}'\mathbf{u}_\Delta\mathbf{d} \text{ et } \frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}') = \mathbf{u}_\Delta\mathbf{d}'\mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}')\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{p}} \right) &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{u}_\Delta\mathbf{d}'\mathbf{C})_k (\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{p}})_k = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n u_l d_l c_{lk} \sum_{m=1}^n (\mathbf{A}^{-1})_{km} \bar{\mathbf{p}}_m \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n u_l d_l c_{lk} (\mathbf{A}^{-1})_{km} \bar{\mathbf{p}}_m \\ \left(\bar{\mathbf{p}}'\mathbf{A}^{-1}\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}) \right) &= \sum_{k=1}^n (\bar{\mathbf{p}}'\mathbf{A}^{-1})_k (\mathbf{C}'\mathbf{u}_\Delta\mathbf{d})_k = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n (\mathbf{A}^{-1})_{km} \bar{\mathbf{p}}_m \sum_{l=1}^n c_{lk} u_l d_l \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n u_l d_l c_{lk} (\mathbf{A}^{-1})_{km} \bar{\mathbf{p}}_m \end{aligned}$$

D'où l'égalité :

$$\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}}')\mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}}'\mathbf{A}^{-1}\frac{d}{d\omega}(\bar{\mathbf{p}})$$

□

A7 - Démonstration du théorème 3 (De Kort-Vellekoop) (page 28)

1) Cas de g^f

De la même manière que pour les précédentes démonstrations, rechercher le meilleur $g = g^f$ revient à optimiser :

$$\tilde{L}_\alpha[g] = \frac{1}{2} \int_0^\infty g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2 ds + 2\alpha^2 \times \sum_{j=1}^n \zeta_j \left(-m_j + \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-\int_0^{u_i} g(s) ds} \right)$$

Avec ζ_j les multiplicateurs de Lagrange. La condition suivante doit également être vérifiée :

$$g''(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} g''(t) = 0$$

$g(0)$ est supposé connu et $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ est laissé libre.

Pour tout h vérifiant ces conditions, la solution perturbée doit être telle que :

$$\frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_\alpha[g + \epsilon h] = 0$$

Ce qui amène :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty [g''(s)h''(s) + \alpha^2 g'(s)h'(s)] ds - 2\alpha \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} \pi_i \int_0^{u_i} h(v) dv \\ &= [h'(s)g''(s)]_{s=0}^\infty + \int_0^\infty h'(s)[-g'''(s) + \alpha^2 g'(s)] ds - 2\alpha \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} \pi_i \left([h(t)t]_0^{u_i} - \int_0^{u_i} h'(v) dv \right) \\ &= \int_0^\infty h'(s) \left[-g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - 2\alpha \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} \pi_i (u_i - s) \mathbb{1}_{s \leq u_i} \right] ds \end{aligned}$$

Finalement cela donne :

$$-g'''(s) + \alpha^2 g'(s) = 2\alpha \times \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} \pi_i (u_i - s) \mathbb{1}_{s \leq u_i} = 2\alpha \times \sum_{i=1}^m e_i^f (u_i - s) \mathbb{1}_{s \leq u_i}$$

En notant $e_i^f = \pi_i \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij}$.

La solution de cette équation différentielle est alors :

$$g(s) = a_0 + a_1 e^{-\alpha s} + a_2 e^{\alpha s} + \sum_{i=1}^m \eta_i^f \bar{H}(s, u_i)$$

Avec $\eta_i^f = u_i^2 e_i^f = u_i^2 \pi_i \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij}$ et des constantes à déterminer a_0, a_1, a_2 . Ces constantes sont déterminées à l'aide des équations suivantes :

$$g''(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} g''(t) = 0 \text{ donne } a_1 = a_2 = 0$$

Ce qui donne ensuite que $a_0 = g(0)$. Nous obtenons donc que :

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + \sum_{i=1}^m u_i^2 \pi_i \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} \overline{H}(s, u_i) \\ &= g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^f \sum_{i=1}^m \pi_i^f c_{ij} u_i^2 \overline{H}(v, u_i) \end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne est obtenu en réarrangeant les termes, et permet de retrouver l'expression attendue.

2) Cas de g^y

Cette fois, la quantité à minimiser pour trouver $g = g^y$ s'écrit :

$$\tilde{L}_\alpha = \frac{1}{2} \int_0^\infty g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2 ds + 2\alpha^2 \times \sum_{i=1}^n \zeta_j \left(m_j - \sum_{i=1}^m c_{ij} e^{-u_i g(u_i)} \right)$$

Sous les contraintes :

$$g''(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} g''(t) = 0$$

Avec $g(0)$ donné et $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ laissé libre.

Nous posons encore, pour tout h respectant ces conditions :

$$\frac{d}{d\epsilon} \tilde{L}_\alpha[g + \epsilon h] = 0$$

Ce qui amène :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty [g''(s)h''(s) + \alpha^2 g'(s)h'(s)] ds - \alpha^3 \sum_{j=1}^n \zeta_j \sum_{i=1}^m u_i c_{ij} e^{-u_i g(u_i)} h(u_i) \\ &= \int_0^\infty h'(s) \left[-g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - \alpha \sum_{j=1}^n \zeta_j \sum_{i=1}^m u_i c_{ij} e^{-u_i g(u_i)} \mathbb{1}_{s \leq u_i} \right] ds \end{aligned}$$

Donc :

$$0 = -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) - \alpha^3 \sum_{i=1}^m e_i^y u_i \mathbb{1}_{s \leq u_i}$$

Avec $e_i^y = \pi_i \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij}$ et $\pi_i = e^{-u_i g(u_i)}$.

La solution de cette équation différentielle est :

$$\begin{aligned} g(s) &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^y H(s, u_i) \\ &= g(0) + \sum_{i=1}^m u_i \pi_i \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} H(s, u_i) \end{aligned}$$

Avec $\eta_i^y = u_i \cdot e_i^y$.

De cette manière, si les π_i et ζ_j sont solutions de :

$$-\frac{\ln(\pi_k)}{u_k} = g(0) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \zeta_j c_{ij} u_i \pi_i H(u_k, u_i)$$

$$p_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \pi_i$$

Alors les conditions optimales sont remplies.

□

A8 - Preuve du corollaire 1 (page 29)

En prenant la notation $\eta_i^f = \sum_{j=1}^n \zeta_j^f c_{ij} \pi_i^f u_i^2$ et $\eta_i^y = \sum_{j=1}^n \zeta_j^y c_{ij} \pi_i^y u_i$, les équations que doivent vérifier ζ_j et π_i s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{Pour } f : \quad y_k &= -\frac{\ln(p(u_k))}{u_k} = -\frac{\ln(\pi_k)}{u_k} = g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^f \sum_{i=1}^m \pi_i^f c_{ij} u_i^2 \times \frac{1}{u_k} \int_0^{u_k} \overline{H}(s, u_i) ds \\ &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^f G_{ki}^f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } y : \quad y_k &= -\frac{\ln(p(u_k))}{u_k} = -\frac{\ln(\pi_k)}{u_k} = g(0) + \sum_{j=1}^n \zeta_j^y \sum_{i=1}^m \pi_i^y c_{ij} u_i H(u_k, u_i) = g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^y H_{ki}^y \\ &= g(0) + \sum_{i=1}^m (\eta_i^y \alpha u_i) G_{ki}^y \end{aligned}$$

Pour rappel :

$$G_{kj}^f = \frac{1}{u_k} \int_0^{u_k} \overline{H}(s, u_i) ds \text{ et } G_{kj}^y = \frac{1}{\alpha u_j} H(u_k, u_j)$$

Donc :

$$y_k - g(0) = \sum_{i=1}^m \eta_i^f G_{ki}^f \text{ et } y_k - g(0) = \sum_{j=1}^m (\eta_i^y \alpha u_i) G_{ki}^y$$

De plus, en passant la formule du théorème 3 à la limite :

$$\begin{aligned} \omega^f &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^f \\ \omega^y &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^y (\alpha u_i) \end{aligned}$$

Ce qui permet de trouver :

$$\begin{aligned} \omega^f &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^f = g(0) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [G^f]_{ik}^{-1} (y_k - g(0)) \\ \omega^y &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^y (\alpha u_i) = g(0) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [G^y]_{ik}^{-1} (y_k - g(0)) \end{aligned}$$

Cette égalité est vérifiée car :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [G^f]_{ik}^{-1} (y_k - g(0)) &= \sum_{k=1}^m (y_k - g(0)) \sum_{i=1}^m [G^f]_{ik}^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \eta_j^f G_{kj}^f \sum_{i=1}^m [G^f]_{ik}^{-1} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \eta_j^f G_{kj}^f [G^f]_{ik}^{-1} = \sum_{j=1}^m \eta_j^f \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m G_{kj}^f [G^f]_{ik}^{-1} \\ &= \sum_{j=1}^m \eta_j^f \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{i=j} = \sum_{j=1}^m \eta_j^f \end{aligned}$$

De la même manière pour y :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [G^y]_{ik}^{-1} (y_k - g(0)) = \sum_{k=1}^m (y_k - g(0)) \sum_{i=1}^m [G^y]_{ik}^{-1} \\
 &= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\eta_j^y \alpha u_j \right) G_{kj}^y \sum_{i=1}^m [G^y]_{ik}^{-1} = \sum_{j=1}^m \left(\eta_j^y \alpha u_j \right) \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m G_{kj}^f [G^f]_{ik}^{-1} \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\eta_j^y \alpha u_j \right) \sum_{i=1}^m \mathbb{1}_{i=j} = \sum_{j=1}^m \left(\eta_j^y \alpha u_j \right)
 \end{aligned}$$

Notons que, pour f comme pour y , $g(0) = y_0$. Aussi :

$$\begin{aligned}
 \omega &= g(0) \left(1 - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [G^{-1}]_{ik} \right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m [G^{-1}]_{ik} y_k = g(0) \left(1 - \sum_{k=1}^m v_k \right) + \sum_{k=1}^m y_k v_k \\
 &= y_0 \left(1 - \sum_{k=1}^m v_k \right) + \sum_{k=1}^m y_k v_k
 \end{aligned}$$

D'où l'introduction de $v_0 = (1 - \sum_{k=1}^m v_k)$, autrement dit v_0 est tel que la somme des poids vaut 1. Ce qui permet finalement d'écrire le résultat attendu :

$$\omega = \sum_{k=0}^m y_k v_k$$

□

A9 - Preuve du corollaire 2 (page 29)

Pour tout g dans H^f ou H^y , et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons (voir équation 1 page 75) :

$$L_\alpha[g] = \int_0^\infty (g''(s)^2 + \alpha^2 g'(s)^2) ds = \int_0^\infty g'(s) (-g'''(s) + \alpha^2 g'(s)) ds$$

Cas de f :

Pour f , nous avons déjà obtenu (voir démonstration du théorème 3 page 80) :

$$g(s) = g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^f \bar{H}(s, u_i)$$

$$y_k - g(0) = \sum_{i=1}^m \eta_i^f G_{ki}^f$$

$$-g'''(s) + \alpha^2 g'(s) = 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m e_i^f (u_i - s) \mathbf{1}_{s \leq u_i}$$

Avec $\eta_i^f = u_i^2 e_i^f$ donc $e_i^f = \eta_i^f u_i^{-2}$.

Remarquons que, avec la deuxième équation, nous avons finalement un système de m équations (sur k). Nous supposons qu'il est inversible (non démontré), aussi nous obtenons :

$$\eta_i^f = \sum_{k=1}^m [G^f]_{ik}^{-1} (y_k - g(0))$$

Repartons de la quantité à optimiser :

$$\begin{aligned} L_\alpha[g] &= \int_0^\infty g'(s) \left(2\alpha^2 \sum_{i=1}^m e_i^f (u_i - s) \mathbf{1}_{s \leq u_i} \right) ds = 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m \eta_i^f u_i^{-2} \int_0^{u_i} g'(s) (u_i - s) ds \\ &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m \eta_i^f u_i^{-2} \int_0^{u_i} (g(s) - g(0)) ds \end{aligned}$$

La dernière égalité utilise une intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^{u_i} g'(s) (u_i - s) ds &= [g(s)(u_i - s)]_0^{u_i} - \int_0^{u_i} -1 \cdot g(s) ds = \int_0^{u_i} g(s) ds - u_i g(0) \\ &= \int_0^{u_i} (g(s) - g(0)) ds \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} L_\alpha[g] &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m \eta_i^f u_i^{-2} \int_0^{u_i} (g(s) - g(0)) ds = 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m \eta_i^f u_i^{-1} (y_i - g(0)) \\ &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (y_k - g(0)) (y_i - g(0)) \\ &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (y_k y_i - y_k g(0) - y_i g(0) + g(0)^2) \end{aligned}$$

Dérivée cette équation par rapport à $g(0)$ permet ensuite d'obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{dL_\alpha[g]}{d(g(0))} &= 0 = 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (-y_k - y_i + 2g(0)) \\ 0 &= \alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (-y_k - y_i + 2g(0))\end{aligned}$$

Cas de y :

Pour y , de la même manière nous avons :

$$\begin{aligned}g(s) &= g(0) + \sum_{i=1}^m \eta_i^y H(s, u_i) \\ y_k - g(0) &= \sum_{j=1}^m \left(\eta_j^y \alpha u_j \right) G_{kj}^y \\ -g'''(s) + \alpha^2 g'(s) &= \alpha^3 \sum_{i=1}^m e_i^y u_i \mathbb{1}_{s \leq u_i}\end{aligned}$$

Avec $\eta_i^y = u_i \cdot e_i^y$.

Comme pour G^y , nous pouvons écrire à l'aide de la deuxième équation :

$$\eta_i^y = \frac{1}{\alpha u_i} \sum_{k=1}^m [G^y]_{jk}^{-1} (y_k - g(0))$$

Développons à la quantité à optimiser :

$$\begin{aligned}L_\alpha[g] &= \int_0^{+\infty} g'(s) (-g'''(s) + \alpha^2 g'(s)) ds = \int_0^\infty g'(s) \alpha^3 \sum_{i=1}^m \eta_i^y \mathbb{1}_{s \leq u_i} ds \\ &= \alpha^3 \sum_{i=1}^m \eta_i^y \int_0^\infty g'(s) \mathbb{1}_{s \leq u_i} ds = \alpha^3 \sum_{i=1}^m \eta_i^y (g(u_i) - g(0)) = \alpha^3 \sum_{i=1}^m \eta_i^y (y_i - g(0)) \\ &= \alpha^3 \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha u_i} \sum_{k=1}^m [G^y]_{jk}^{-1} (y_k - g(0)) (y_i - g(0)) = \alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^y]_{jk}^{-1} (y_k - g(0)) (y_i - g(0))\end{aligned}$$

Dérivée cette équation par rapport à $g(0)$ permet ensuite d'obtenir :

$$\frac{dL_\alpha[g]}{d(g(0))} = 0 = \alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (-y_k - y_i + 2g(0))$$

Cette équation est identique à celle trouvée pour le cas f , avec un G différent.

Rappelons que $g(0) = y_0$, que ce soit dans le cas de f ou de y . L'équation devient alors :

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (-y_k - y_i + 2y_0) \\
 \iff 2y_0 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} &= 2\alpha^2 \sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} (y_i + y_k) \\
 \iff y_0 &= \frac{\sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1} \frac{(y_i + y_k)}{2}}{\sum_{i=1}^m u_i^{-1} \sum_{k=1}^m [G^f]_{jk}^{-1}}
 \end{aligned}$$

□

Références

- [1] CNO. (1^{er} août 2017). Courbe des taux zéro-coupon, adresse : <http://www.cnofrance.org/fr/courbes-des-taux-zero-coupon.cfm>.
- [2] J.DE KORT et M.H. VELLEKOOP, “Term structure extrapolation and asymptotic forward rates”,
- [3] EIOPA. (2 août 2010). QIS 5 - Risk-free interest rates - Extrapolation method, adresse : https://eiopa.europa.eu/Publications/QIS/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en-20100802.pdf.
- [4] —, (6 avr. 2016). Consultation Paper on the methodology to derive the UFR and its implementation, adresse : <https://eiopa.europa.eu/Pages/Consultations/EIOPA-CP-16-003-Consultation-Paper-on-the-methodology-to-derive-the-UFR-and-its-implementation-.aspx>.
- [5] —, (17 mar. 2016). Published interview part 2, adresse : <http://eiopa.europa.eu/Publications/Interviews/Published%20interview%20Part%202.pdf>.
- [6] —, (30 mar. 2017). Results of the impact analysis of changes to the UFR, adresse : <https://eiopa.europa.eu/Publications/Reports/Results%20of%20the%20impact%20analysis%20of%20changes%20to%20the%20UFR.pdf>.
- [7] —, (17 mai 2017). Risk-free interest rate term structure - Calculation of the UFR for 2018, adresse : <https://eiopa.europa.eu/Publications/Consultations/Updated%20calculation%20of%20the%20UFR%20for%202018.pdf>.
- [8] —, (30 jan. 2017). Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures, adresse : <https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/Technical%20documentation%20of%20the%20methodology%20to%20derive%20EIOPA%E2%80%99s%20risk-free%20interest%20rate%20term%20structures.pdf>.
- [9] N. EL KAROUÏ, S. LOISEL, J.-L. PRIGENT et J. VEDANI. (11 déc. 2015). Market inconsistencies of the market-consistent European life insurance economic valuations : pitfalls and practical solutions, adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01242023/document>.
- [10] FINANSTILSYNET (NORWAY). (1^{er} juil. 2010). A Technical Note on the Smith-Wilson Method, adresse : http://www.finanstilsynet.no/Global/Forsikring%20og%20pensjon/Skedeforsikring/Tilsyn%20og%20overv%C3%A5king/Rapportering/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf.
- [11] P. FULCHER. (16 oct. 2013). A fixed UFR - a costly mistake ?, adresse : <http://www.solvencyiiwire.com/fixed-ufr-costly-mistake/119088>.
- [12] A. LAGERAS et M. LINDHOLM, “Issues with the Smith-Wilson method”, adresse : <https://arxiv.org/pdf/1602.02011.pdf>.
- [13] Y. LAÏDI, “Mémoire d'actuaire : risque de taux, risque de spread et risque de liquidité”, 2013. adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01242023/document>.
- [14] F. PLANCHET. (11 sept. 2016). Quel modèle de taux pour un calcul de best estimate en assurance vie, adresse : <http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2016/09/quel-mod%C3%A8le-de-taux-pour-un-calcul-de-best-estimate-en-assurance-vie.html>.
- [15] A. SMITH et T. WILSON, “Fitting Yield curves with long Term Constraints”, 2001.