



Mémoire présenté
devant l'Institut de Science Financière et d'Assurances
pour l'obtention du diplôme d'Actuaire de l'Université de Lyon

le 11 avril 2013

Par : David MALINGE

Titre: Optimisation d'un portefeuille de réassurance non-vie :

L'exemple du Property & Casualty

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Membres du jury de l'Institut des Actuaires

M. Frédéric PLANCHET

M. Pierre THEROND

Entreprise :

PartnerRe

Membres du jury I.S.F.A.

Mme Flavia BARSOTTI

M. Alexis BIENVENÜE

M. Areski COUSIN

Mme Diana DOROBANTU

Mme Anne EYRAUD-LOISEL

M. Nicolas LEBOISNE

M. Stéphane LOISEL

Mlle Esterina MASIELLO

Mme Véronique MAUME-DESCHAMPS

M. Frédéric PLANCHET

Mme Béatrice REY-FOURNIER

M. Pierre RIBEREAU

M. Christian-Yann ROBERT

M. Didier RULLIERE

M. Pierre THEROND

Directeur de mémoire en entreprise :

Mme Léa NEFUSSI

Invité :

**Autorisation de mise en ligne sur
un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de
l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise

Signature du candidat

Secrétariat

Mme Marie-Claude MOUCHON

Bibliothèque :

Mme Patricia BARTOLO

Résumé

Mots-clés: Réassurance non-vie, Optimisation, Copules, Dépendance, Portefeuille aléatoire

Ce mémoire porte sur l'optimisation du portefeuille IARD hors lignes spéciales (en anglais *Property and Casualty*) du réassureur PartnerRe. L'objectif était de déterminer quelles branches développer pour obtenir un meilleur rendement tout en diminuant le risque encouru par le portefeuille. L'optimisation nécessite la construction de la distribution de perte du portefeuille. Pour cela, une connaissance précise des branches qui le composent est essentielle. La première étape a donc été d'agréger les distributions de pertes de chaque traité pour obtenir la distribution de perte de chaque branche.

Pour l'agrégation une étude de la dépendance entre traités a été réalisée. Elle a permis, sous l'hypothèse d'un modèle gaussien, de corroborer les paramètres suggérés par l'équipe sur la base de son expérience. Une seconde étude menée sur les pertes historiques du dommage aux biens en non-proportionnel a ensuite confirmé que la copule Gaussienne était acceptable dans ce cas particulier, mais que la copule de Student semblait mieux concorder avec les dépendances de queues observées. Les distributions de perte de chaque branche (hors couverture catastrophes naturelles) ont ainsi été construites par simulation. Pour les protections catastrophes naturelles, la modélisation a été réalisée à l'aide de modèles spécialisés dont le fonctionnement est détaillé.

La méthode d'optimisation retenue a été la force brute. Nous avons introduit un algorithme dit *Hit and Run* permettant la génération uniforme de portefeuilles aléatoires. Cette méthode a l'avantage de pouvoir générer des portefeuilles de dimension quelconque et avec des contraintes de minimum et de maximum sur chacun des poids. Cet algorithme s'est révélé très efficace car il permet la génération de milliers de portefeuilles en un temps quasi instantané.

Pour optimiser, il a aussi fallu définir les mesures permettant de sélectionner parmi les milliers de portefeuilles générés ceux qui répondaient au critère de sélection au regard du risque et du rendement. Nous avons retenu le *Return on Equity* (RoE) pour le rendement et la *Tail Value at Risk* (TVaR) pour le risque. Ces mesures sont évidemment définies dans le document. Le calcul de la mesure de risque requiert la distribution de perte du portefeuille

Pour agréger les distributions des branches et ainsi obtenir la courbe du portefeuille, une analyse de leur interaction mutuelle était nécessaire. Ainsi, le problème de la dépendance a été également abordé mais cette fois-ci entre branches. Une étude, basée sur les ratios sinistres à primes historiques, a permis d'exposer l'important impact du cycle de réassurance. Une méthode simple est proposée pour décycler l'historique. Bien qu'imprécise, celle-ci permet tout de même en effectuant des mesures sur les séries décyclées de conforter la vue de l'équipe actuarielle sur le sujet.

Enfin, l'optimisation a été réalisée sous plusieurs hypothèses. Les différents résultats amènent ensuite à une discussion sur les conclusions à retenir.

Abstract

Keywords: Non-Life Reinsurance, Optimization, Copula, Dependence, Random portfolio

This work is about the optimization of PartnerRe's Property and Casualty portfolio. The goal was to find out which lines should be developed in order to get a better return while reducing the risk supported by the portfolio. The optimization requires building the annual loss distribution of the portfolio. To do so, it is essential to have a precise knowledge of each line. Thus, the first step was to aggregate the loss distributions of each and every treaty to obtain the annual loss distribution of each line.

A study of the dependence between treaties was done for the aggregation. This study allowed us, under the assumption of a Gaussian model, to corroborate the parameters proposed by the team on the basis of its experience. Then, a second study on Property non-proportional historical losses confirmed that Gaussian copula was satisfactory in this case even though Student copula seemed like a better fit. The loss distributions of each line (natural catastrophe covers excluded) were constructed by simulation. Regarding natural catastrophe risks, specialized models are used to build loss distributions. Their functioning is detailed.

The optimization method retained was brute force. We introduced a Hit and Run algorithm to generate uniformly distributed random portfolios. This method has the advantage of generating portfolios of any dimension and with constrained minimum and maximum values for each weight. This algorithm is very efficient as it can generate thousands of portfolios in almost instantaneously.

To optimize the portfolio, it was necessary to define the measures that would select the generated portfolios which satisfied return and risk criterias. We chose Return on Equity (RoE) for return and Tail Value at Risk (TVaR) for risk. These measures are defined in this document. The risk measure computation requires the loss distribution of the whole portfolio.

To obtain this distribution, it was necessary to analyze the interaction between lines, thus tackling the problem of the dependence structure between those lines. A study on historical loss ratios allowed us to expose the impact of the reinsurance cycle. A simple method to remove the effect of the cycle on these data is proposed. Although imprecise, measures taken on the "decycled" data confirm the opinion of the actuarial department.

Finally, the optimization was conducted under various hypotheses. The different results are discussed.

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pu être réalisé sans l'aide de plusieurs personnes que je tiens à remercier.

Toute ma reconnaissance va à l'ISFA et à Anne Eyraud-Loisel, ma directrice de mémoire, pour ses judicieux conseils et son écoute.

J'ai eu la chance de réaliser ce travail au sein de la compagnie de réassurance PartnerRe. Mes premiers remerciements vont à Léa Nefussi, mon maître d'apprentissage, et à Sylvain Jarrier, responsable de l'équipe de tarification, pour leur encadrement, leur suivi rigoureux, et plus encore pour leur amitié.

Je souhaite aussi remercier tous les membres de l'équipe de tarification et en particulier Railovy Boyer, Frédéric Boulliong et Patrice Fourgassie pour leurs patientes explications, leurs suggestions et leur gentillesse.

Enfin, merci à Christel et Benoit, qui se reconnaîtront, pour ces pauses-café aux discussions passionnées que nous avons partagées ensemble.

Note au lecteur

Ce mémoire a été effectué chez le réassureur PartnerRe. Il a été accepté au sein de la compagnie que ce mémoire soit rédigé en français. Cependant, du fait de la culture de l'entreprise, de nombreux acronymes ou appellations proviennent de l'anglais. Comme le lecteur pourra le constater, le vocabulaire anglais est en italique tout au long de ce mémoire et une traduction est fournie dans le texte et dans le glossaire en première page. J'ai essayé de gérer cet inconvénient au mieux pour un lecteur extérieur et espère que cette solution conviendra à la lecture. Le lecteur remarquera aussi que le format retenu pour les nombres est la virgule pour le séparateur de milliers et le point pour le séparateur décimal. Cette notation correspond à la notation américaine et les outils utilisés exportent les nombres dans ce format.

Sommaire

Notations et Acronymes

Introduction	1
1 Le portefeuille P&C de PartnerRe	2
1.1 L'actuariat P&C	2
1.2 L'actuariat groupe	2
1.3 Composition du portefeuille P&C	3
1.3.1 Traités à composante Cat et Non-Cat	3
1.3.2 Branches ou LoBs	3
2 Tarification en réassurance non-vie	4
2.1 Rappels sur les formes de réassurance obligatoire	4
2.1.1 Réassurance proportionnelle	4
2.1.2 Réassurance non-proportionnelle	7
2.2 Tarification	9
2.2.1 Méthodes utilisées en tarification	10
2.2.2 Modélisation des traités	12
3 Modélisation des branches	14
3.1 Composantes Non-Cat	14
3.1.1 Aperçu du modèle	15
3.1.2 Modules	15
3.1.3 Résultats Non-Cat	19
3.1.4 Étude des Corrélations	22
3.2 Composantes Cat	30
3.2.1 Fonctionnement des Cat-models	30
3.2.2 Résultats Cat	33
3.3 Ajustement de distributions	34
4 Optimisation du portefeuille	38
4.1 Mesure de rendement et mesure de risque	39
4.1.1 RoE	40
4.1.2 VaR et TVaR	43
4.2 Méthode d'optimisation	44
4.2.1 Génération de portefeuilles aléatoires	45
4.2.2 Dépendance inter-LoB	54
4.3 Résultats	57
Conclusion	62
Bibliographie	63
Table des figures	64
Liste des tableaux	66
Annexes	67

Notations et Acronymes

AAD	<i>Annual Aggregate Deductible</i> - Clause de franchise annuelle.
AAL	<i>Annual Aggregate Limit</i> - Clause instituant un plafond annuel.
ACR	<i>Acquisition Cost Ratio</i> - Ratio des frais d'acquisition à la prime.
AEP	<i>Aggregate Exceedance Probability</i> - Courbe donnant la perte annuelle maximum probable en fonction de la période de retour.
ALD	<i>Aggregate Loss Distribution</i> - Distribution de la perte agrégée.
ALR	<i>Attritional Loss Ratio</i> - Ratio S/P attritionnel.
Cat	Catastrophes naturelles.
CV	Coefficient de variation - rapport entre l'écart-type et la moyenne : $CV = \frac{\sigma}{\mu}$.
ELT	<i>Event Loss Table</i> - Base des pertes causées par chaque évènement.
i.i.d.	variables indépendantes et identiquement distribuées.
IPC	Indice des Prix à la Consommation.
LLR	<i>Large Loss Ratio</i> - Ratio S/P des sinistres au-dessus d'un seuil donné (au premier euro).
LoB	<i>Line of Business</i> - Branche d'activité.
LR	<i>Loss Ratio</i> - Équivalent anglais du ratio S/P..
MeX	<i>Management eXpense ratio</i> - Ratio des frais d'administration et de gestion à la prime.
Non-Cat	Hors catastrophes naturelles.
NP	Non Proportionnel - Qualifie les traités non proportionnels.
OEP	<i>Occurence Exceedance Probability</i> - Courbe donnant la perte attendu du sinistre maximum probable en fonction de la période de retour.
OP	<i>Observation Point</i> - Point d'attachement.
P	Proportionnel - Qualifie les traités proportionnels.
P&C	<i>Property and Casualty</i> - Assurance dommage, Responsabilité Civile et accident équivalent de l'assurance IARD sans les lignes spéciales.
PML	<i>Probable Maximum Loss</i> - Équivalent anglais du Sinistre Maximum Probable (SMP).
QS	<i>Quota share</i> - Quote-part.
RoE	<i>Return on Equity</i> - Taux de rendement des capitaux.
SP	<i>Surplus</i> - Excédent de plein.
SR	<i>Solvency Ratio</i> - Ratio de solvabilité $SR = \frac{\text{Capital économique}}{\text{Prime}}$.
TR	<i>Technical Ratio</i> = LR + Frais de courtage + Commission de réassurance.

- TVaR** *Tail Value at Risk* - Espérance d'une distribution (de pertes) sachant qu'elle dépasse une certaine VaR.
- v.a.** variable(s) aléatoire(s).
- VaR** *Value at Risk* - La $\text{VaR}(\alpha)$ ou Value at Risk de niveau α pour une distribution donnée correspond au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de cette distribution.
- XS** *Excess of loss* - Traité en excédent de sinistre.

Introduction

L'absence de sinistres majeurs en Europe durant la dernière décennie n'a pas incité les réassureurs à la réflexion sur les compositions optimales de portefeuille. Aujourd'hui, avec une fréquence élevée de sinistres catastrophes naturelles (Cat), combiné avec le manque de rendement financier, les compagnies doivent faire face à des résultats inférieurs. Cela amène les équipes de direction à faire le point sur leur stratégie et donc sur la composition optimale de leur portefeuille.

L'objectif de ce mémoire est l'optimisation du portefeuille IARD hors lignes spéciales (en anglais *Property and Casualty* ou P&C) du réassureur PartnerRe. C'est-à-dire, en partant du portefeuille actuel, sur quelles branches doit-on plus ou moins investir en ressources ou en capital pour obtenir un meilleur rendement à risque réduit.

L'intérêt de ce portefeuille est qu'il est composé de risques très divers à travers le monde, ce qui complique l'optimisation. Risques Cat, risques de masse, risques à développement long (jusqu'à 30 ans en RC auto!) et à développement court. Ces risques sont par ailleurs couverts sous différentes formes de réassurance (traités proportionnels et non-proportionnels) et il va falloir agréger ces risques et ces couvertures ensemble.

Avant d'optimiser le portefeuille, il faut dans un premier temps le modéliser, c'est-à-dire estimer sa distribution de perte. Pour décrire ce portefeuille, nous disposons de la base actuelle des traités tarifés avec leurs caractéristiques, notamment : conditions, prime commerciale, prime de risque et volatilité. Grâce à ces caractéristiques, nous allons pouvoir reconstituer les distributions de perte par traité puis les agréger. L'agrégation de distributions pose alors la question de la structure de dépendance entre les traités. L'étude des corrélations est l'une des problématiques de ce mémoire. Nous proposerons une méthode fondée sur les pertes historiques et nous verrons entre autres quelle copule semble le mieux décrire les corrélations inter-traités.

Puis, concernant l'optimisation en soi, se pose d'abord la question de la méthode à utiliser : théorique ? pratique ? laquelle ? Nous avons opté pour une méthode pratique basée sur la simulation de portefeuilles aléatoires, et nous introduirons pour générer ces portefeuilles un algorithme de la famille *Hit and Run*.

Optimiser un portefeuille, c'est aussi choisir les mesures qui permettront de sélectionner parmi les milliers de portefeuilles créés le ou les portefeuilles qui correspondent aux critères de sélection *risque* contre *rendement* : coefficient de variation, *Value at Risk* (VaR) ou Tail Value at Risk (TVaR) pour le risque ? Résultat technique ou RoE (*Return on Equity*) pour le rendement ?

Enfin, les compagnies doivent aussi prendre en compte leurs contraintes de solvabilité et d'engagements maximaux. L'optimisation doit donc être réalisée sous certaines contraintes qui sont à définir.

Dans un premier temps, nous familiariserons le lecteur au portefeuille étudié ainsi qu'aux méthodes utilisées en tarification pour une meilleure compréhension du mémoire. Nous verrons dans une seconde partie comment agréger les distributions de chaque traité pour construire les distributions de pertes des différentes branches. Enfin, une dernière partie traitera de l'optimisation du portefeuille par branche en termes de risque et de rendement.

1 Le portefeuille P&C de PartnerRe

Le *Property and Casualty* (P&C) est l'équivalent anglais de l'IARD sans les lignes spéciales (ou *Specialty lines*). L'unité P&C est divisée en trois pôles :

- P&C *Actuarial department*, l'équipe actuarielle ;
- *Underwriting*, l'équipe de souscription ;
- *Operating* qui gère ce qui relève de l'administratif et de la gestion

Le graphique ci-dessous présente la répartition du volume de primes annuel entre les différentes unités du groupe :

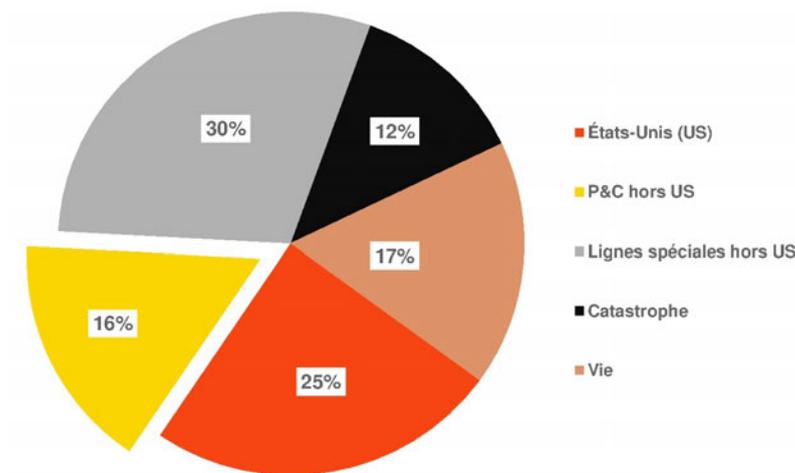


FIGURE 1.1 – Répartition du portefeuille sur les unités du groupe (en dollar américain)

Le portefeuille P&C de PartnerRe englobe un volume de primes annuel qui représente un peu plus de 15% du volume de primes émises par la compagnie. Il est donc de premier plan pour la compagnie.

1.1 L'actuariat P&C

La mission principale de ce département est de soutenir les souscripteurs dans l'acquisition de contrats de réassurance. L'actuaire est alors en charge d'établir de manière indépendante et impartiale le prix minimum d'un traité. Ces analyses sont rendues possibles grâce à la connaissance actuarielle des marchés de souscription. L'actuaire se doit en effet de suivre les tendances du marché, les changements juridiques, l'évolution des portefeuilles, des assureurs ou de tout autre élément ayant un impact potentiel sur la détermination du prix.

En parallèle, l'équipe actuarielle doit également soutenir la direction de l'unité dans ses décisions stratégiques en fournissant des études de rentabilité rétrospectives et prospectives, d'optimisation de capital, d'engagement maximal ou tous autres éléments ayant un impact potentiel sur la composition du portefeuille. C'est dans ce cadre que mon travail a été réalisé.

1.2 L'actuariat groupe

L'actuariat P&C est soumis à certaines contraintes émises par l'actuariat groupe. Ce dernier assure la cohérence et l'utilisation uniforme au sein du groupe PartnerRe de certaines hypothèses

telles que l'allocation de capital, les calculs d'engagement catastrophe naturelle ou encore la consolidation des résultats de chaque unité.

1.3 Composition du portefeuille P&C

Le portefeuille est scindé une première fois entre les traités comprenant une couverture catastrophe naturelle (Cat) et les traités excluant les catastrophes naturelles (Non-Cat). Puis les traités Non-Cat sont divisés entre les différentes *Lines of Business* (LoB) : *Property* (dommages), *Motor* (auto) et *Casualty* (RC et accident) qui sont séparées entre les traités Proportionnels (P) et Non Proportionnels (NP).

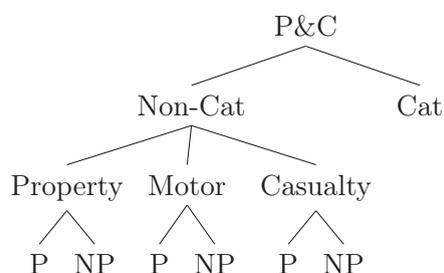


FIGURE 1.2 – Structure du portefeuille P&C

1.3.1 Traités à composante Cat et Non-Cat

Bien que les traités couvrant uniquement les catastrophes naturelles ne soient pas considérés comme du P&C, certains traités P&C incluent une couverture des risques naturels. La tarification des risques naturels est très particulière. En effet, il s'agit d'une tarification par exposition réalisée à l'aide d'outils de modélisation des catastrophes naturelles tels que *CatFocus* (modèle de PartnerRe), *RMS* ou *AIR*. Nous reviendrons plus tard sur le fonctionnement de ces modèles.

Ainsi, la modélisation des traités nécessitent de différencier ces composantes Cat et Non-Cat.

1.3.2 Branches ou LoBs

Le P&C se décompose en 3 branches principales :

Property

Le *Property*, que l'on pourrait traduire par l'assurance dommages aux biens hors assurance auto, regroupe par exemple les assurances incendie et habitation (MRH).

Casualty

Le *Casualty* comprend tout ce qui relève de la responsabilité civile et des accidents personnels (hors auto).

Motor

Le *Motor* correspond à l'assurance auto qui inclut donc les dommages aux biens et aux personnes ainsi que la responsabilité civile.

Après avoir vu comment le portefeuille est structuré, nous allons rappeler les différentes formes de réassurance et les méthodes de tarification utiles à la compréhension pour la suite.

2 Tarification en réassurance non-vie

2.1 Rappels sur les formes de réassurance obligatoire

La réassurance obligatoire ou réassurance en traité consiste en un contrat de réassurance appelé "traité" entre la compagnie d'assurance dite "cédante" et le réassureur dit "cessionnaire". La cédante s'engage à céder et le réassureur à accepter tout risque (toute police) répondant aux conditions définies dans le traité et à hauteur de limites elles aussi définies dans le traité. On distingue deux formes de réassurance obligatoire : la réassurance proportionnelle et la réassurance non-proportionnelle.

2.1.1 Réassurance proportionnelle

Ce type de réassurance est dit proportionnel car la cession est réalisée à hauteur d'un certain pourcentage par police appelé taux de cession. Cela signifie que le réassureur recevra pour chaque police ce pourcentage de la prime et prendra à sa charge ce pourcentage des sinistres. En contrepartie de la gestion et des frais d'acquisition qu'elle assume, le réassureur verse à la cédante une commission de réassurance. La réassurance proportionnelle protège les risques de fréquence. Deux formes de traité existent en proportionnel, le traité en quote-part, en anglais *Quota share* (QS) et le traité en excédent de plein ou *Surplus* (SP) en anglais.

Quota share

Les traités QS se caractérisent par un taux de cession constant à travers toutes les polices. Par conséquent, le passif, les primes et les pertes de la cédante sur le portefeuille cédé diminuent en proportion de ce même taux de cession.

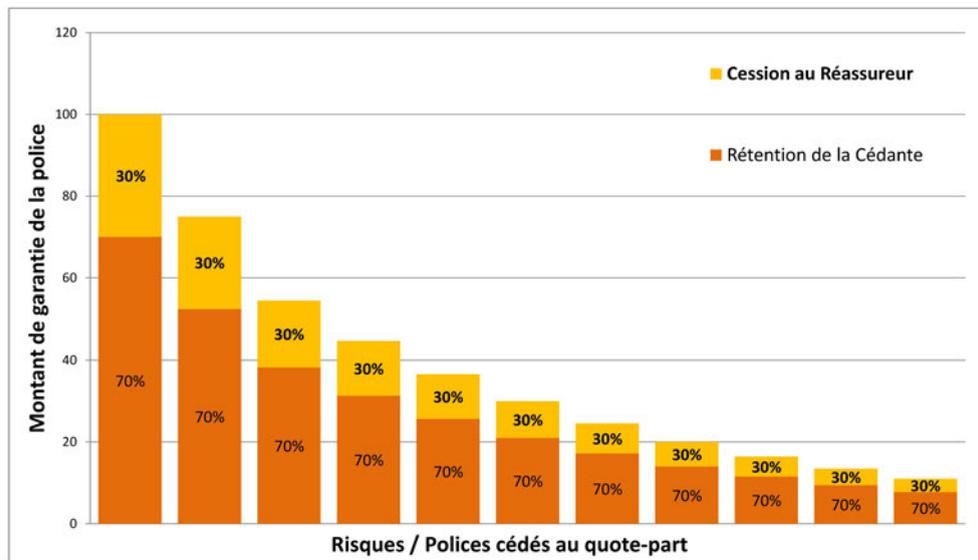


FIGURE 2.1 – Quote part 30%

Formellement, la charge du réassureur sur un QS avec un taux de cession α et une charge de sinistres X est tout simplement : αX .

Surplus

À l'inverse des traités QS, les *Surplus* (SP) ont un taux de cession différent pour chaque risque/police, fonction du montant de garantie de chaque police, du plein de rétention et de la capacité du traité. Le plein de rétention correspond à un montant fixe que la cédante conserve à sa charge pour chaque risque. La capacité du traité correspond elle au montant maximum cédé au réassureur par risque. Elle est en général exprimée en nombre de pleins de rétention. Le calcul du taux de cession par police se fait de la manière suivante. En notant R le plein de rétention, C la capacité du traité et S_i le montant de garantie de la police i , le taux de cession de la police i est égal à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } S_i \leq R \\ \frac{S_i - R}{S_i} & \text{si } 0 < S_i - R < C \\ \frac{C}{S_i} & \text{si } S_i - R \geq C \end{cases} \quad (2.1)$$

Le fonction du SP est explicité par le diagramme suivant :

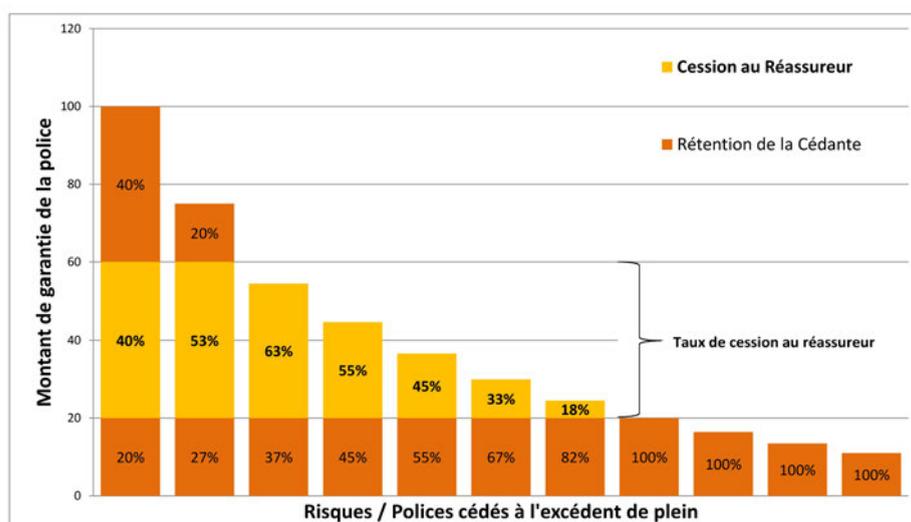


FIGURE 2.2 – Excédent de plein : 2 pleins de 20

Une fois ces taux de cession par police calculés, le surplus fonctionne comme un QS par police. Si l'on considère l'exemple de la première police du diagramme ci-dessus, la cédante versera au réassureur 40% des primes de cette police et le réassureur paiera à son tour 40% des sinistres (au premier euro) touchant cette police.

Commission de réassurance

Comme nous l'avons vu précédemment, en proportionnel, le réassureur verse à l'assureur une commission de réassurance à la cédante. Cette commission peut être fixe ce qui est le cas le plus courant mais elle peut aussi être fonction du *Loss Ratio* (LR). On parle alors de commission variable ou *sliding scale*. La volatilité des résultats d'une cédante peut encourager le réassureur à s'en protéger. Cette clause a ce double avantage de protéger le réassureur contre de mauvais résultats et d'inciter l'assureur à contrôler son LR en contrepartie d'une commission plus importante.

Loss Ratio	Commission
$LR < 60\%$	36%
$60\% \leq LR \leq 80\%$	$36\% - (LR - 60\%)$
$LR > 80\%$	16%

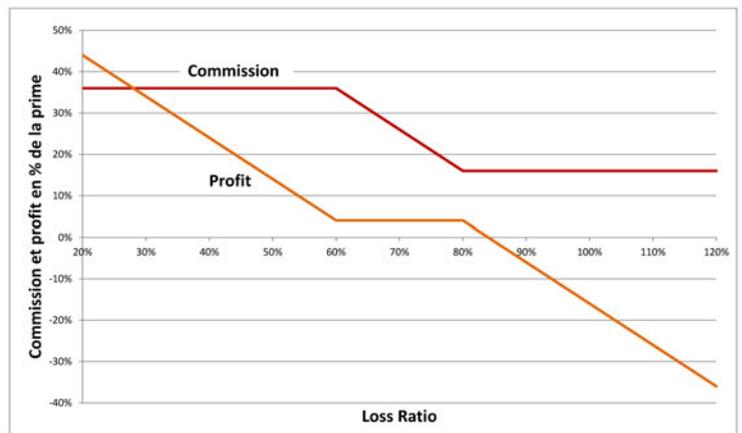
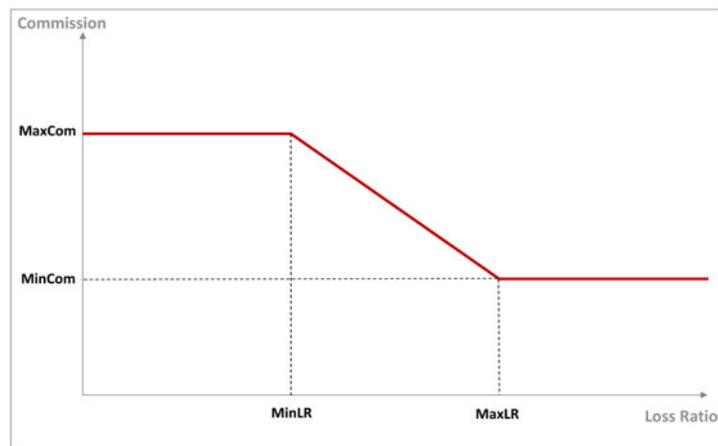


FIGURE 2.3 – Exemple de *sliding scale* classique

Formellement, le calcul est assez simple, si la commission est fonction du LR comme suit :



Alors, on peut déduire la règle de calcul suivante en fonction du LR¹ :

Loss Ratio	Commission
$LR < \text{MinLR}$	MaxCom
$\text{MinLR} \leq LR \leq \text{MaxLR}$	$\text{MaxCom} - (LR - \text{MinLR}) \frac{\text{MaxCom} - \text{MinCom}}{\text{MaxLR} - \text{MinLR}}$
$LR > \text{MaxLR}$	MinCom

1. Cette règle de calcul sera d'ailleurs réutilisée lors de la modélisation en partie deux

2.1.2 Réassurance non-proportionnelle

En non-proportionnel, le réassureur intervient à partir d'un certain seuil appelé la priorité (*deductible* en anglais) et son engagement est limité à ce qu'on appelle la portée (*limit* en anglais). La réassurance non-proportionnelle protège ainsi les risques de sévérité et l'intervention du réassureur n'est en rien proportionnelle au portefeuille cédé. Lorsque ces limites sont exprimées en montant de sinistre on parle d'excédent de sinistre ou *Excess of loss* (XS) qui est le type de traité le plus courant en non-proportionnel. Les limites peuvent aussi être exprimées en perte (c'est-à-dire en LR) et on parle alors d'excédent de perte ou *Stop-Loss* mais ce cas ne sera pas abordé ici.

Traité XS

Dans un traité XS, la priorité et la portée sont exprimées en montant. Par convention et pour simplifier l'écriture un XS est noté : *portée XS priorité*. Le diagramme ci-dessous montre l'exemple d'un 15M€ XS 5M€ c'est-à-dire un XS de priorité 5M€ et de portée 15M€ pour différents montants de sinistres.

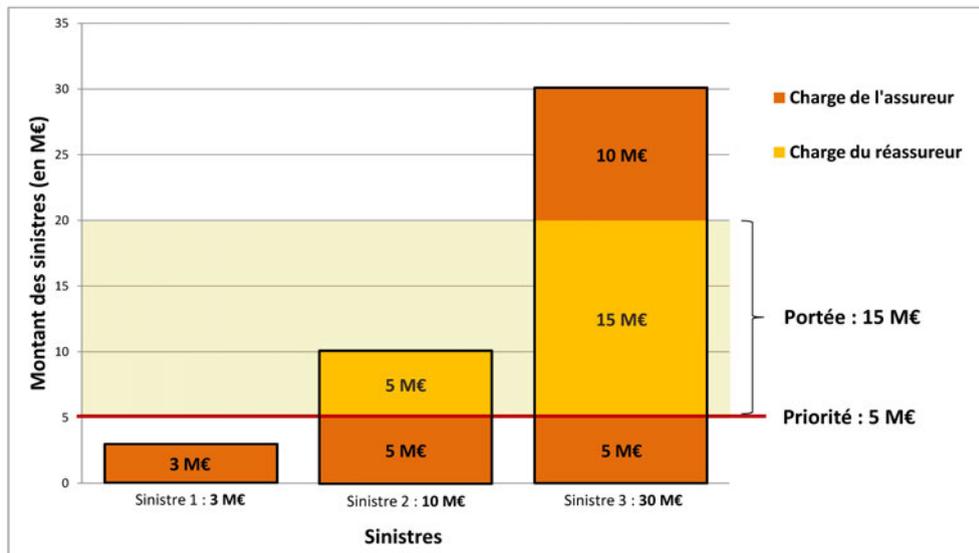


FIGURE 2.4 – Excédent de sinistre : 15 XS 5

Formellement, si on note P la priorité, L la portée et X le montant du sinistre, la charge du réassureur peut s'écrire :

$$\min(L, (X - P)_+) = (X - P) \cdot \mathbb{1}_{P < X \leq L+P} + L \cdot \mathbb{1}_{X > L+P} \quad (2.2)$$

Un traité XS peut être par risque ou par évènement. En par risque, les sinistres sont gérés individuellement par police touchée. En par évènement, les sinistres résultant d'un même évènement sont agrégés. Dans le premier cas, le traité XS s'applique aux sinistres touchant une unique police. Le réassureur interviendra donc chaque fois qu'une police est touchée par un sinistre dépassant la priorité du traité. Dans le second cas, le traité s'applique à une agrégation de sinistres de même origine. La cédante n'a donc à sa charge qu'une seule fois la rétention alors qu'en par risque elle l'aurait eue autant de fois que de polices touchées.

Le diagramme suivant expose l'impact de la différence entre un XS par risque et par évènement pour l'assureur :

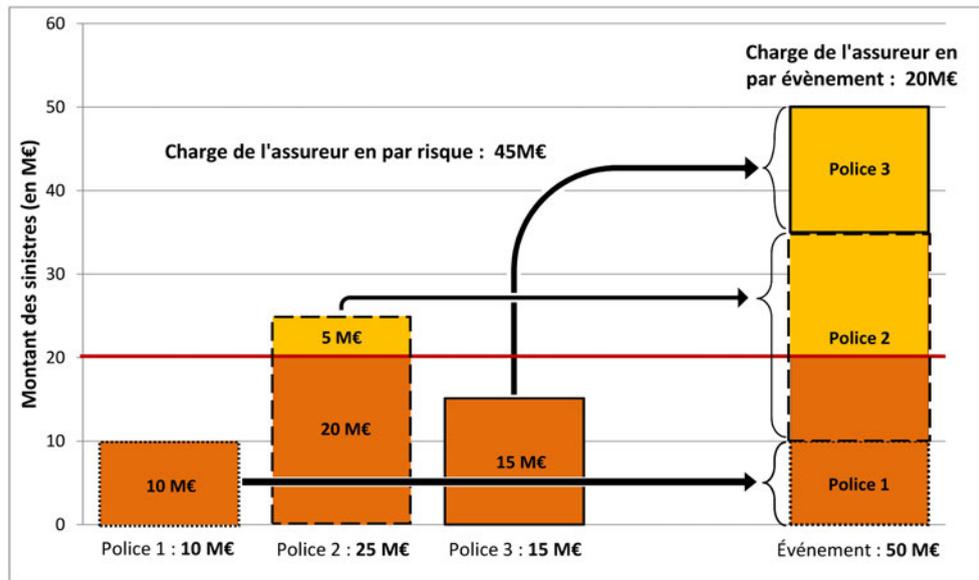


FIGURE 2.5 – Par risque et par évènement sur un 30 XS 20

Comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessus, si on considère que les sinistres touchant ces trois polices sont issus d'un même évènement, la charge de l'assureur est considérablement diminuée grâce à un traité XS par évènement passant de 45 millions d'euros (en par risque) à 20 millions d'euros. C'est pour cela que souvent les cédantes choisissent de coupler ces deux types de traité.

Clauses particulières : reconstitutions, AAL et AAD

La portée d'un XS est une garantie annuelle. Cela signifie que, par exemple, si un sinistre traverse complètement le traité, la cédante ne sera plus couverte pour les sinistres postérieurs. Pour remédier à cela, il existe des clauses de reconstitutions (ou *reinstatements* en anglais). Ces clauses permettent de reconstituer automatiquement la garantie du traité un certain nombre de fois, et cela gratuitement ou en l'échange d'une prime supplémentaire dite prime de reconstitution.

L'*Annual Aggregate Limit* (AAL) est une clause qui institue une limite annuelle à la charge du réassureur. Cela revient à considérer un traité avec un certain nombre (non nécessairement entier) de reconstitutions gratuites. Si on note S la charge annuelle d'un traité XS (à reconstitutions illimitées) alors la charge annuelle du réassureur après AAL sera :

$$\min(\text{AAL}, S)$$

La clause *Annual Aggregate Deductible* (AAD) institue elle un seuil de montant de perte de traité à partir duquel le réassureur interviendra. De même, la charge du réassureur après AAD s'écrira :

$$(S - \text{AAD})_+ = \max(S - \text{AAD}, 0)$$

Nous allons maintenant voir comment la tarification est réalisée et son intérêt pour la modélisation.

2.2 Tarification

Le but de cette partie est d'introduire les notions fondamentales liées à la tarification. La tarification consiste à estimer la prime de risque supposée couvrir les sinistres à venir pour un portefeuille cédé. Cependant, considérer un seul point (la moyenne) ne suffit pas à apprécier le risque encouru, la volatilité a son importance. Ne considérer qu'un point, par exemple un LR de 60% ici, revient à supposer que la densité de la perte est de la forme :

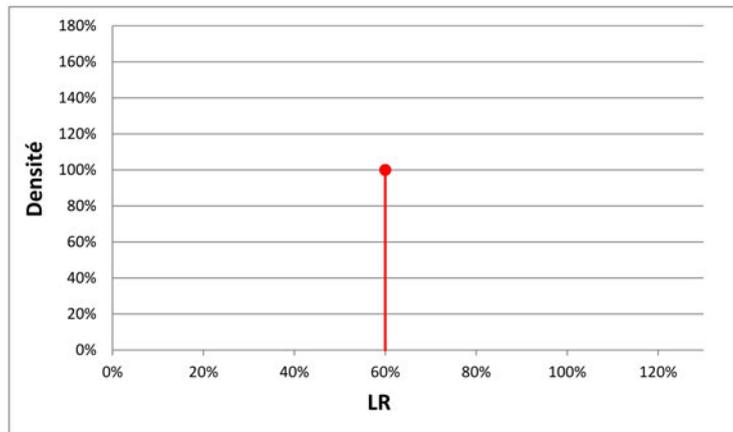


FIGURE 2.6 – Masse de probabilité en 1 point

Alors que si l'on considère une distribution log-normale de même moyenne, la perte pourrait être de la forme :

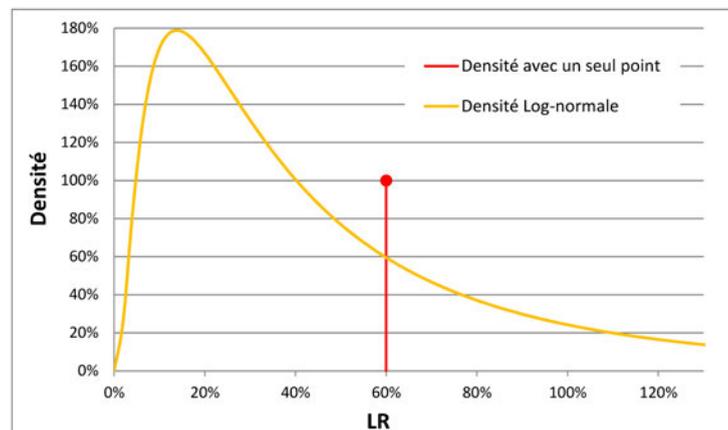


FIGURE 2.7 – Densités de même moyenne

Cela a un impact important sur le calcul des commissions en proportionnel par exemple. C'est pourquoi la distribution entière de la perte annuelle par traité doit être modélisée. Pour cela, les distributions de pertes ou de LR de chaque traité seront caractérisées par leur loi, leur moyenne et leur Coefficient de Variation (CV). Pour rappel, le CV est une mesure de volatilité défini comme le rapport entre l'écart-type et la moyenne ($CV = \frac{\sigma}{\mu}$). Ce travail réalisé lors de la tarification est d'autant plus intéressant qu'il va servir de base à la construction des distributions de pertes par LoB comme nous le verrons dans la seconde partie.

Nous allons maintenant introduire les différentes méthodes de tarification utilisées pour construire ces courbes de pertes par traité.

2.2.1 Méthodes utilisées en tarification

Préparation des données

Une phase importante de la tarification consiste en la préparation des données. La cédante fournit une statistique composée des primes annuelles et des sinistres individuels supérieurs à un certain seuil. Dans le cas du proportionnel, s'ajoutent à la statistique les charges annuelles de sinistres payés et encourus. Les triangles de développement des sinistres sont aussi fournis pour les branches à développement long mais ce cas ne sera pas abordé ici.

Que ce soit en proportionnel ou en non-proportionnel, pour rendre la statistique utilisable il est nécessaire de la modifier de sorte que toutes les années d'historique soient comparables entre elles. Les statistiques seront donc mises *as-if* c'est-à-dire actualisées suivant la situation économique de l'année à tarifier. Les facteurs considérés sont par exemple l'inflation et l'évolution du coût du risque. Une application de la mise en *as-if* est faite en partie deux.

Concernant la tarification en elle-même, il existe trois principales méthodes : la tarification par expérience, la méthode probabiliste et la tarification par exposition. Nous allons brièvement détailler ces méthodes².

Tarification par expérience ou *Burning Cost*

La tarification par expérience, plus connue sous le nom de *Burning Cost* en anglais, suppose que la sinistralité historique est représentative du comportement du portefeuille cédé. Ainsi, le LR du traité pour l'année à venir est estimé par le rapport des pertes annuelles actualisées sur les primes annuelles historiques actualisées.

Modèle probabiliste

La méthode probabiliste consiste à modéliser la charge sinistre par un modèle fréquence-coût calibré à partir des données disponibles. La sévérité et la fréquence des sinistres sont modélisées par deux variables aléatoires (v.a.) suivant des lois usuelles. La charge de sinistres à venir retenue est alors l'espérance de ce modèle.

Le plus souvent, on utilise une loi de Pareto de paramètre α pour la sévérité et une loi de Poisson de paramètre λ pour la fréquence. L'estimateur de λ retenu est une moyenne du nombre de sinistres supérieurs à un point d'attachement observés par année ramenée à la prime de l'exercice.

Le α est quant à lui estimé par maximum de vraisemblance. À noter qu'il est proposé une autre méthode d'estimation du α dans [6] BLONDEAU et PARTRAT, *La réassurance : Approche technique*, p. 41 basée sur le *Burning Cost*. Par ailleurs, en cas de manque de données c'est-à-dire un faible nombre de sinistres, on préférera des α marché (de référence) au maximum de vraisemblance car l'incertitude (l'écart-type) de l'estimateur devient trop élevée. À titre indicatif, [2] ANTAL et RE, "Quantitative methods in reinsurance" fournissent les valeurs suivantes :

2. Pour plus de détails sur ces méthodes voir [6] BLONDEAU et PARTRAT, *La réassurance : Approche technique*, p. 37-44

Risque	α
Séisme/Tempête	≈ 1
Incendie	≈ 2
Incendie industriel	≈ 1.5
RC auto	≈ 2.5
RC générale	≈ 1.8
Accident du travail	≈ 2

TABLE 2.1 – Valeur approximative des α par risque

L'équipe de tarification utilise cependant ses propres valeurs de référence qui sont plus fines que celles présentées ici puisqu'elles sont calculées par pays et par risque.

Tarification par exposition

La tarification par exposition n'utilise pas la sinistralité de la cédante mais son profil de risque. Pour tarifer, le portefeuille est comparé à des portefeuilles-marché semblables en terme de risque. On considère en fait que le portefeuille à un comportement proche d'un portefeuille marché. C'est donc l'expérience du marché qui nous permet de mesurer le risque dans cette méthode. Cela est utile quand les données historiques manquent.

Pour la tarification on utilise en général une combinaison de ces méthodes. D'une manière générale, chaque tarification requiert une approche différente au regard de ses spécificités. Ces méthodes sont simplement décrites pour que le lecteur comprenne comment est construite la base sur laquelle repose la modélisation.

Le diagramme suivant résume les différentes étapes de la tarification à travers un exemple de méthodes sélectionnées :

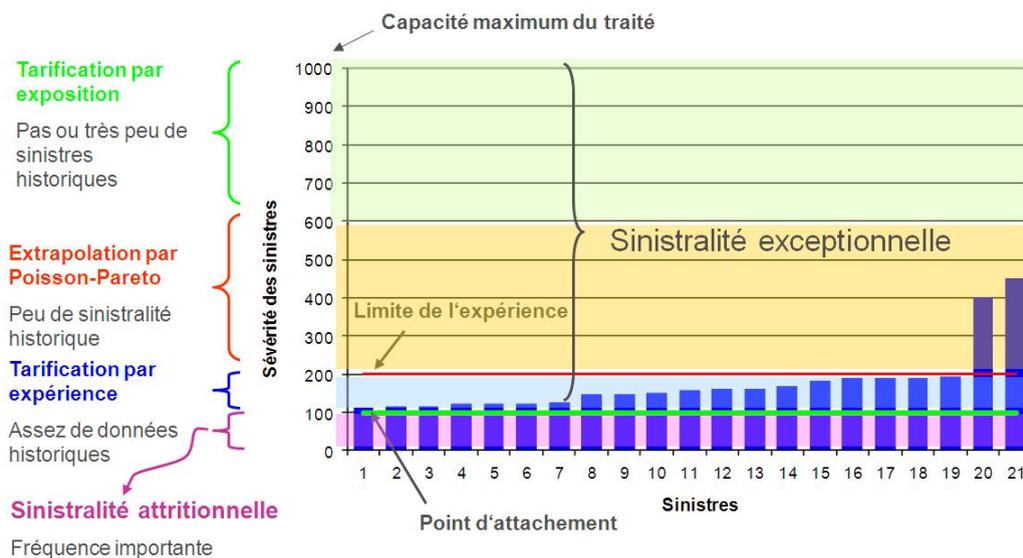


FIGURE 2.8 – Tarification en réassurance

2.2.2 Modélisation des traités

Traités proportionnels

La tarification en proportionnel se fait en plusieurs étapes. La sinistralité de fréquence (c'est-à-dire les sinistres de faible coût mais en nombre important) impacte les traités P. Il convient donc de distinguer dans l'historique des sinistres la sinistralité de fréquence dite *sinistralité attritionnelle* (*Attritional losses* en anglais) de la *sinistralité exceptionnelle* (*Large losses* en anglais) qui est moins fréquente mais plus sévère. D'une certaine façon, la charge sinistre attritionnelle va représenter la qualité d'une affaire souscrite et permettre d'évaluer au fil des ans l'évolution du portefeuille de l'assureur. La sinistralité exceptionnelle va elle plutôt représenter la composante aléatoire de ce traité.

Concernant la modélisation, de nombreuses études menées par l'équipe de tarification ont montré que la distribution log-normale modélisait le mieux le LR d'un traité proportionnel. Il peut aussi être fait l'usage de la distribution de Clark³ pour la tarification car elle donne parfois un meilleur ajustement à l'historique ; cependant la log-normale est retenue pour la modélisation. Le LR de chaque traité proportionnel est donc modélisé par une loi log-normale $LN(\mu, \sigma)$ où les paramètres μ et σ sont estimés grâce aux méthodes de tarification présentées en 2.2.1.

Il est important de retenir que la tarification fournit donc une base de données constituée des μ et σ permettant la modélisation des LR de chacun des traités proportionnels par une loi log-normale.

Traités non-proportionnels

La modélisation des traités non-proportionnels se fait par modèle fréquence-coût et par simulation. De la même façon, on se base sur les sinistres individuels transmis par la cédante et transformés as-if. Pour la fréquence, des lois possibles pour la modélisation sont la Poisson et la binomiale négative. La sévérité peut quant à elle être modélisée par une loi de Pareto, une loi log-normale ou une loi de Pareto généralisée.

Le modèle retenu pour la construction des *Aggregate Loss Distribution* (ALD) est le modèle Poisson-Pareto.

On suppose que la charge de sinistres supérieurs à un point d'attachement choisi au premier Euro suit une loi Poisson-composée où la sévérité de chaque sinistre (supérieur au point d'attachement) suit une loi de Pareto.

Formellement : soient $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ le nombre de sinistres supérieurs au point d'attachement (OP) sur la période et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. positives indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de loi commune $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \text{OP})$ représentant chacune la sévérité (le coût) du i -ème sinistre. On suppose de plus les $(X_i)_{i \geq 1}$ indépendants de N . La charge de sinistres exceptionnels sur la période, S_N , est alors définie par :

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.3)$$

On cherche à évaluer les sinistres à la charge d'un traité en excédent de sinistre (avec reconstitutions gratuites et illimitées) de priorité P et de portée $C - P$ avec $C > P$. Cela revient à évaluer la charge sinistre sur une tranche $[P, C]$. On définit alors Y_i le montant du sinistre X_i

3. [7] CLARK, "A simple tool for pricing loss sensitive features of reinsurance treaties".

à la charge du traité XS :

$$Y_i = (X_i - P)\mathbb{1}_{P < X_i \leq C} + (C - P)\mathbb{1}_{X_i > C} \quad (2.4)$$

Si on note \tilde{S}_N le montant de sinistre annuel à charge du traité XS on a donc :

$$\tilde{S}_N = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (2.5)$$

Puis on montre que (cf. démonstrations dans l'annexe 4.3 et 4.3)⁴ :

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_N] = \lambda \cdot \frac{\text{OP}^\alpha}{1 - \alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) \quad \alpha \neq 1 \quad (2.6)$$

$$\mathbb{V}[\tilde{S}_N] = 2\lambda \cdot \text{OP}^\alpha \left[\frac{1}{2 - \alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) - \frac{P}{1 - \alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) \right] \quad \alpha \notin \{1, 2\} \quad (2.7)$$

Grâce aux méthodes présentées en 2.2.1, la tarification estime $\mathbb{E}[\tilde{S}_N]$ et $\mathbb{V}[\tilde{S}_N]$. Les conditions du traité P et C sont aussi connues. Les inconnues de ces équations sont donc OP , α et λ . On choisit comme hypothèse $OP = P$ pour pouvoir estimer α et λ . On peut ensuite déterminer de manière numérique α et λ en inversant les équations ci-dessus.

La tarification fournit donc une base de données constituée des λ et α permettant la modélisation des pertes de chacun des traités NP. La modélisation des pertes permettra par la suite d'appliquer les clauses particulières à chaque traité.

4. Les cas particuliers $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ pourront également être consultés en annexe.

3 Modélisation des branches

Cette nouvelle partie explique la manière dont nous avons choisi de modéliser les ALD des différentes LoB. Pour chaque LoB, nous allons construire sa courbe de distribution de perte annuelle ou ALD. Cette construction se fait en agrégeant les distributions de perte de chacun des traités d'une LoB que l'on connaît grâce à la tarification. Une fois ces ALD construites, nous leur ajusterons des lois usuelles qui serviront à l'optimisation du portefeuille. En effet, utiliser des lois usuelles permettra un programme d'optimisation léger et rapide. Enfin, connaître les lois des ALD nous permettra de mesurer le risque et le rendement de chaque LoB et de construire l'ALD du portefeuille entier.

La construction des ALD a été faite sur le logiciel *Igloo Professional*. Il s'agit d'un logiciel de modélisation financière. *Igloo* est souvent utilisé comme plateforme de modélisation pour le développement de modèle interne. Ce logiciel est développé par *Towers Watson*⁵.

La construction des ALD diffère selon que l'on soit en Cat/Non-Cat ou en P/NP :

1. Seules les composantes Non-Cat des traités sont modélisées sous *Igloo*. Le Cat est lui modélisé à l'aide des Cat-models dont le fonctionnement sera expliqué par la suite.
2. Les méthodes de modélisation diffèrent en proportionnel et en non-proportionnel et la dépendance entre les traités joue un rôle très important.

Nous allons donc voir dans un premier temps la modélisation des composantes Non-Cat en proportionnel et en non-proportionnel ainsi que la structure de dépendance retenue. Puis dans un second temps le fonctionnement des Cat-models.

3.1 Composantes Non-Cat

La modélisation se fait donc par LoB scindées entre P et NP. *Igloo* fonctionne en module de calcul (appelé *Base unit* dans *Igloo*), ce qui va nous permettre de donner une représentation graphique du modèle. Chaque module est représenté par un rectangle comme ci-dessous. Les flèches indiquent que des données sont importées depuis d'autres modules, traitées et exportées vers d'autres modules.



FIGURE 3.1 – Module ou *Base Unit* "TR of LoB" dans *Igloo*

Comme nous allons le voir, les modèles pour les traités P et NP sont identiques à l'exception du module *Treaty Losses* en NP qui devient *Treaty LR* en P. Nous allons tout d'abord voir un aperçu rapide du modèle dans son ensemble puis nous rentrerons dans le détail de chaque module dans une seconde partie.

5. Pour plus d'informations : <http://www.towerswatson.com/france/services/software-solutions/4620>

3.1.1 Aperçu du modèle

On peut voir ci-dessous une vue d'ensemble des modèles non-proportionnel et proportionnel pour une LoB. Pour donner un aperçu rapide, regardons individuellement les modules de ces diagrammes et leur fonction :

Inputs	Importe les données nécessaires depuis un fichier <i>Excel</i>
Corrélation	Construit la matrice de corrélation entre les traités
Treaty Losses/LR	Simule les pertes/LR de chaque traité en tenant compte de la dépendance
TR of LoB	Calcule le TR (<i>Technical Ratio</i>) de la LoB à partir des pertes ou des LR
CDF & Measures	Calcule les quantiles, la moyenne et le CV de la courbe des TR
Exports	Exporte les résultats vers un fichier <i>Excel</i> ou vers un fichier <i>Igloo</i>

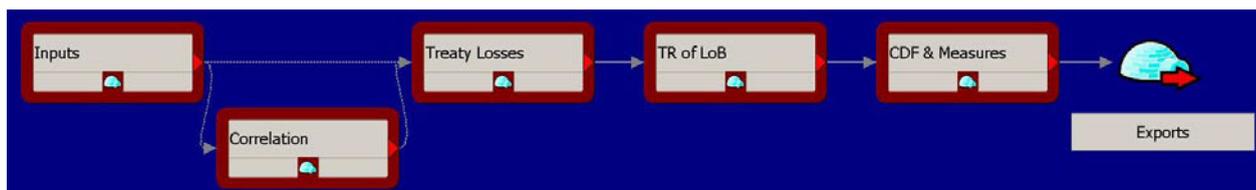


FIGURE 3.2 – Modèle non-proportionnel pour une LoB

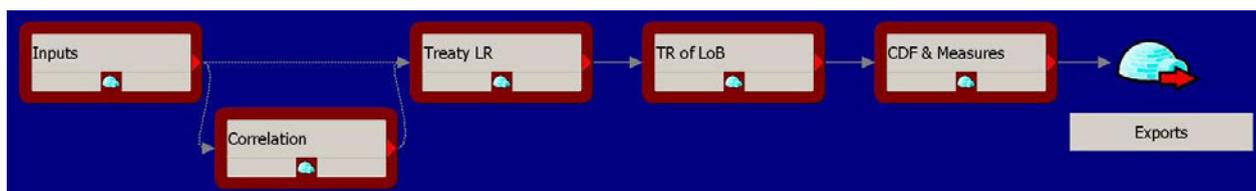


FIGURE 3.3 – Modèle proportionnel pour une LoB

Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à chacun de ces modules.

3.1.2 Modules

Inputs

Ce module importe depuis un fichier *Excel* les différentes données nécessaires à la modélisation aussi bien pour la construction de la dépendance que pour la simulation des pertes. Une partie de ces données provient de la base de tarification et comprend pour chaque traité :

- Dans les deux cas P et NP
 - Le programme, la cédante, le pays et la LoB du traité
 - La prime du traité
 - Les frais d'acquisition sauf en cas de *sliding scale*
- En NP seulement :
 - le paramètre de sévérité α (Pareto) et un paramètre de fréquence λ (Poisson)
 - les paramètres de l'XS (priorité et portée à 100% et non à la part de PartnerRe)
 - l'AAL s'il y en a une
 - la part de PartnerRe dans ce traité

- En P seulement :
 - Les paramètres μ_{LN} et σ_{LN} de la log-normale modélisant le LR
 - Les paramètres des *sliding scales* et les frais de courtage en cas de commission variable

Correlation

Le but de ce module est de construire la matrice de corrélation entre les traités d'une même LoB. Pour chaque LoB, la structure de dépendance choisie est une copule gaussienne. On rappelle que la copule gaussienne en dimension n de paramètre R est définie par :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (3.1)$$

où Φ_R désigne la fonction de répartition d'une loi normale de dimension n , centrée et de matrice de variance-covariance R et Φ^{-1} l'inverse de la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.⁶

Ici, la copule est de dimension le nombre de traités dans la LoB. Le manque de données en réassurance rend l'estimation des paramètres difficiles. C'est pourquoi les corrélations suivantes ont été choisies à partir de jugements d'experts. Il est important de noter que pour la copule gaussienne *Igloo* ne prend pas comme paramètres la matrice des paramètres de la copule mais la matrice des rhos de Spearman. La matrice est construite de la manière suivante, pour un traité i et un traité j :

$$R_{ij} = \begin{cases} 0.7 & \text{si le traité } i \text{ et le traité } j \text{ font partie d'un même programme} \\ 0.3 & \text{si les traités } i \text{ et } j \text{ sont d'une même cédante} \\ 0 \text{ à } 0.25 & \text{si les traités } i \text{ et } j \text{ sont d'un même pays selon le pays} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

Le diagramme ci-dessous résume plus visuellement ces corrélations choisies :

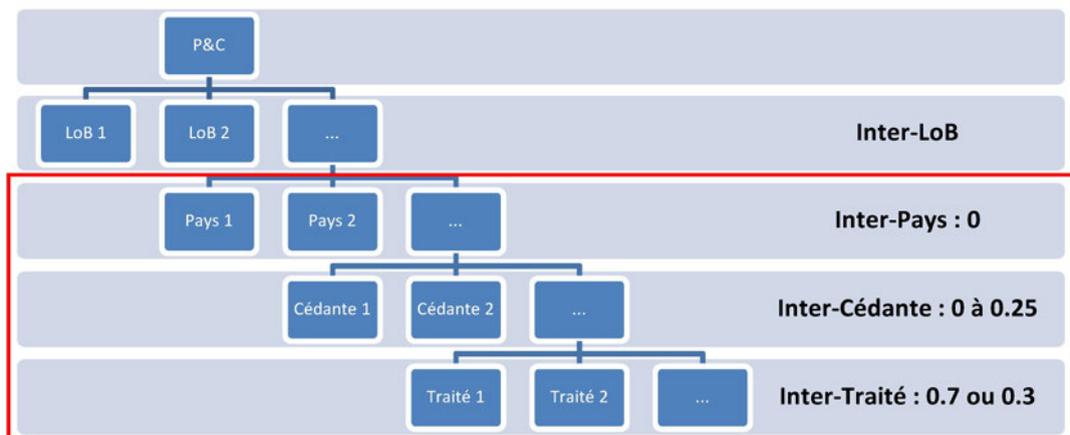


FIGURE 3.4 – Corrélations retenues

Les corrélations à l'intérieur d'un pays entre différentes cédantes vont correspondre principalement au niveau de coassurance dans ce pays. En effet, si deux cédantes assurent le même risque

6. [10] EMBRECHTS, LINDSKOG et McNEIL, "Modelling dependence with copulas and applications to risk management", p. 25

(on parle alors de coassurance), le réassureur s'expose sur deux traités différents à un unique risque ce qui va engendrer des corrélations. De gros événements peuvent aussi participer à cette corrélation mais cela reste rare en Non-Cat. La table des corrélations par pays en P et NP est consultable en annexe page 71.

Nous reviendrons sur le choix de ces corrélations dans une seconde partie page 22.

Treaty Losses et Treaty LR

Comme on a pu le voir dans la première partie sur la tarification, en non-proportionnel on dispose d'un modèle pour les pertes alors qu'en proportionnel on dispose d'un modèle pour les LR. Dans ces modules, on crée donc un tableau de la dimension du nombre de traités dans lequel chaque élément va correspondre à une loi de perte pour une LoB NP ou de LR pour une LoB P. Pour chaque traité 100 000 simulations sont réalisées et les éléments du tableau sont corrélés entre eux grâce à la matrice construite précédemment. Le nombre de simulations a été fixé à 100 000 après plusieurs essais car il offrait le meilleur rapport convergence des simulations et temps de calcul. La stabilité sera d'ailleurs examinée lors de la présentation des résultats.

En proportionnel, chaque élément du tableau correspond donc à une log-normale dont les paramètres proviennent de la tarification. On a donc en sortie du module *Treaty LR* un tableau à deux dimensions contenant pour chaque traité 100 000 simulations de LR ordonnées de sorte que la dépendance soit appliquée.

En non-proportionnel, la simulation se fait en deux étapes du fait qu'il s'agit d'un modèle Poisson-Pareto. On utilise ici une fonctionnalité intéressante d'*Igloo* qui est de pouvoir créer des tableaux de dimensions stochastiques.

Dans le modèle Poisson-Pareto, on considère que dans l'année N sinistres touchent le traité où N est une v.a. de Poisson. Le montant de ces sinistres au premier euro suit une loi de Pareto X . Pour obtenir la charge annuelle du traité, il faut donc appliquer les conditions du traité XS à chacun de ces sinistres, sommer ces N charges, puis appliquer d'éventuelles clauses particulières. Nous avons choisi pour la modélisation de ne garder comme clauses que les AAL du fait de la rareté des AAD dans le portefeuille.

En pratique, on suppose que l'on dispose des fonctions $Poisson(\lambda)$ et $Pareto(\alpha, x_{min})$ qui permettent de simuler une loi de Poisson de paramètre λ et une loi de Pareto de paramètre α et x_{min} . Prenons l'exemple d'un traité L XS P où la tarification donne une fréquence λ pour la Poisson et une sévérité α pour la Pareto. La modélisation de la charge annuelle du traité se décompose donc comme suit :

1. On fixe $n := Poisson(\lambda)$.
2. Pour i allant de 1 à n , on fixe $X_i := min(L, Pareto(\alpha, P) - P)$.
Les X_i représentent alors la charge du traité pour le sinistre i .
3. On somme les X_i pour obtenir la charge annuelle du traité : $S := \sum_{i=1}^n X_i$
4. On applique l'AAL s'il y en a une : $S := min(S, AAL)$
5. On garde en mémoire la valeur de S et on réitère le processus jusqu'à obtenir le nombre de simulations voulu.

Dans Igloo, ce processus est scindé en deux. Grâce aux tableaux de dimensions stochastiques toutes les données nécessaires à l'étape 2. de l'algorithme peuvent donc être stockées dans un seul tableau :

Treaty[225,*]	2	35519.3332	1607.96693				
Treaty[226,*]	6	80401.4634	236795.555	171018.719	19408.0636	2220.99235	40720.7912
Treaty[227,*]	0						
Treaty[228,*]	3	550000	362268.57	9214.83873			

FIGURE 3.5 – Tableaux de dimensions stochastiques

Comme on peut le voir ci-dessus sur cet échantillon de traités, la première colonne correspond à un tirage d'une loi de Poisson dont le paramètre dépend du traité (étape 1.). Les autres colonnes correspondent aux simulations de sinistres dont le nombre est égal au tirage de la première colonne. Il ne reste donc plus qu'à sommer chaque ligne à partir de la deuxième colonne pour obtenir une simulation de la charge annuelle par traité. C'est lors de cette étape qu'*Igloo* réordonne les simulations pour tenir compte de la dépendance entre traités.

comp_loss[225]	37127.30013
comp_loss[226]	550565.5843
comp_loss[227]	0
comp_loss[228]	921483.4083

FIGURE 3.6 – Charge annuelle par traité

Quand on fixe le nombre de simulations à 100 000, *Igloo* gère en fait les simulations dans une troisième dimension du tableau. On obtient donc en sortie de ce module pour chaque traité, 100 000 simulations de leur charge annuelle.

À noter que cette charge annuelle correspond à 100% du traité. Du fait des montants mis en jeu en réassurance, il est rare qu'un seul réassureur prenne en charge l'ensemble du traité qui est partagé entre plusieurs réassureurs. On applique donc à chaque ligne la part de l'entreprise pour obtenir des simulations de la charge annuelle de PartnerRe dans chacun de ces traités.

TR of LoB

Ce module a pour but de calculer le TR agrégé de la LoB. Le TR correspond simplement au LR auquel sont ajoutés les frais d'acquisition :

$$\text{Frais d'acquisition} = \begin{cases} \text{Frais de courtage} + \text{Taxes} & \text{en NP} \\ \text{Frais de courtage} + \text{Taxes} + \text{Commission de réassurance} & \text{en P} \end{cases} \quad (3.3)$$

En non-proportionnel ces frais sont donc toujours fixes alors qu'en proportionnel ils peuvent ne pas l'être si la commission est variable (*sliding scale*). En cas de commission variable ces frais sont donc calculés pour chaque simulation de LR issue du module précédent.

Le calcul utilise la formule établie en 2.1.1 page 6. En pratique, les paramètres MinCom, MaxCom, MinLR, MaxLR sont fixes pour chaque traité et importés dans *Igloo*. Le calcul de la commission variable se fait donc par traité sur chaque simulation de LR. Puis, pour obtenir le TR, il suffit d'ajouter à cette commission les frais de courtage et les taxes qui sont eux aussi constants et importés depuis *Excel*.

Une fois les frais d'acquisition calculés, l'agrégation au niveau de la LoB se fait proportionnellement à la prime. Formellement, si on note :

- LR_i , le LR du traité i
- Acq_i , les frais d'acquisition pour le traité i (exprimés en pourcentage de la prime)
- P_i , la prime du traité i
- n , le nombre de traités dans la LoB étudiée

L'agrégation se traduit pour chaque simulation par une moyenne pondérée :

$$TR_{LoB} = \frac{\sum_{i=1}^n (LR_i + Acq_i) \cdot P_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (3.4)$$

Cette formule est identique en P et en NP. Cependant, en NP le module précédent simule une charge S_i pour le traité i . Il faut donc diviser par la prime pour obtenir le LR : $LR_i = \frac{S_i}{P_i}$.

En sortie, on obtient donc 100 000 simulations de TR pour la LoB.

CDF & Measures

On récupère dans ce dernier module les 100 000 simulations de TR du module précédent. On calcule alors la moyenne, le CV et la fonction de répartition empirique de cet ensemble de simulations. Ces résultats sont ensuite exportés vers *Excel*.

3.1.3 Résultats Non-Cat

Pour chaque LoB, trois jeux de 100,000 simulations ont été réalisés sous Igloo pour vérifier la bonne convergence de la série. Pour cela j'ai sélectionné plusieurs mesures dont je souhaite vérifier l'invariance. Ces mesures sont : la moyenne, le CV, la VaR (Value-at-Risk) et TVaR (Tail-Value-at-Risk) à 99.5% et à 99.9%. On rappelle que la VaR est équivalente au quantile et que la TVaR correspond à la moyenne des simulations supérieures à la VaR⁷. Les résultats du *Property NP* sont présentés ci-dessous⁸ et les résultats complets sont disponibles en annexe page 73.

Jeu de simulations	1	2	3	CV(1,2,3)
Property P				
Moyenne	xxx	xxx	xxx	0.0%
CV	xxx	xxx	xxx	1.8%
VaR(99.5%)	124%	124%	124%	0.2%
TVaR(99.5%)	135%	134%	134%	0.6%
VaR(99.9%)	139%	139%	138%	0.3%
TVaR(99.9%)	162%	155%	159%	2.5%

TABLE 3.1 – Résultats de convergence pour le Property NP

7. La VaR et la TVaR seront abordées plus en détail dans la troisième partie.

8. Pour des raisons de confidentialité, la moyenne et le CV ne seront pas communiqués.

Les résultats sont très concluants. Les écarts entre jeux de simulations sont faibles dans toutes les LoB pour toutes les mesures effectuées comme le justifie leur CV en dernière colonne. Même si on observe de légers écarts sur les valeurs extrêmes de la queue pour la TVaR, on considère que la convergence des simulations est acquise.

Les graphiques ci-dessous présentent le tracé des distributions de TR de chaque LoB P et NP obtenues par simulation.

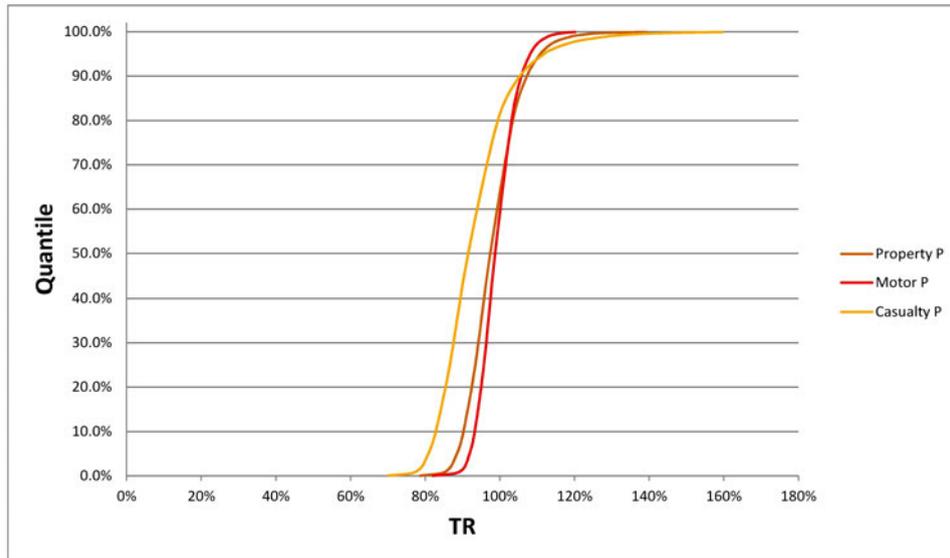


FIGURE 3.7 – Courbes de TR en proportionnel

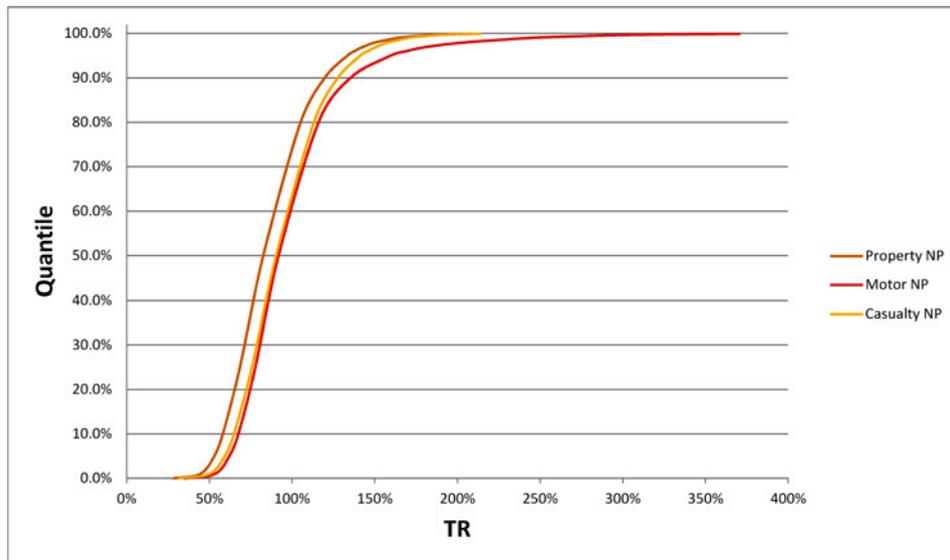


FIGURE 3.8 – Courbes de TR en non-proportionnel

Comme les CV le laissaient présumer, on peut observer que les courbes en non-proportionnel sont beaucoup plus volatiles qu'en proportionnel. Les graphiques suivants montrent les résultats de la modélisation comparés à la courbe des LR historiques. Pour pouvoir comparer ces courbes, on ajuste la moyenne des LR historiques à celle des TR simulés (on ne fait que translater la courbe historique) car on ne s'intéresse ici qu'à la volatilité de chaque LoB.

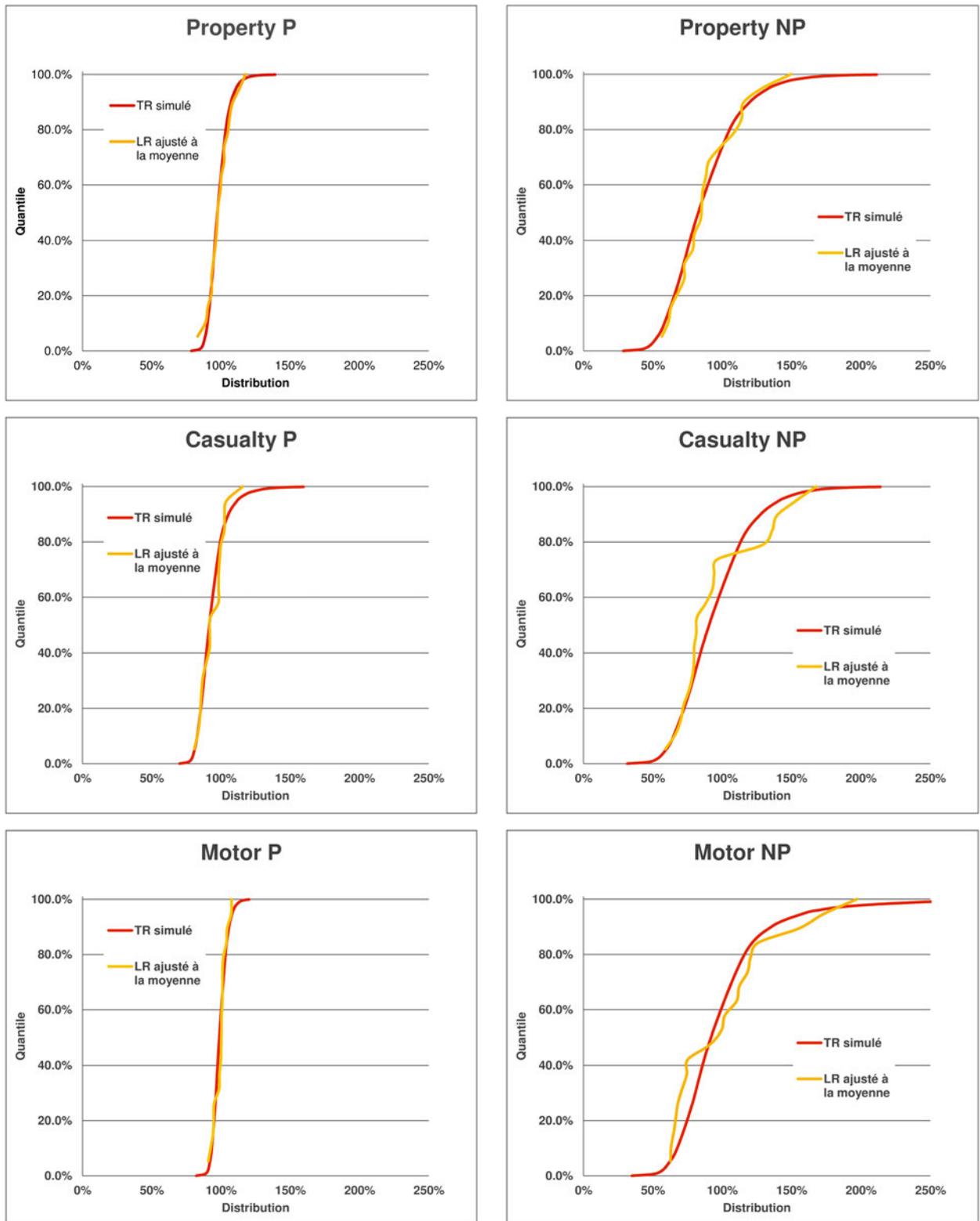


FIGURE 3.9 – Courbe historique contre courbe modélisée

La courbe des LR est construite à partir de 20 années d'historique ce qui explique le comportement irrégulier des courbes. La modélisation semble cohérente avec l'historique disponible. L'ajustement semble approximatif en Casualty NP mais la courbe modélisée étant plus prudente (plus volatile) on accepte la modélisation.

3.1.4 Étude des Corrélations

La faible quantité de données disponibles en réassurance est source de problèmes pour l'estimation des corrélations. Pour les corrélations à l'intérieur d'une LoB, il a été décidé comme je l'ai indiqué de se baser sur des jugements d'experts (des actuaires de l'équipe de tarification et des souscripteurs). J'ai tout de même voulu remettre en question ces corrélations en étudiant une base de données des sinistres que l'on a mise à ma disposition. Comme on a pu le voir, il existe plusieurs niveaux de corrélations.

Au niveau inter-traités, mon idée de base est que la dépendance entre traités d'une même cédante est principalement due aux sinistres affectant plusieurs traités. J'ai donc cherché à regarder les sinistres affectant deux traités d'une même cédante et les corrélations entre les montants de sinistres pour chacun de ces traités.

Au niveau inter-cédantes (entre cédante d'un même pays et d'une même LoB), le niveau de coassurance varie culturellement selon le pays. La coassurance peut exposer un réassureur à un risque identique sur plusieurs cédantes. Cependant, le niveau de coassurance variant beaucoup selon les pays, une étude à l'échelle mondiale n'apporterait pas grand chose et retenir les corrélations par pays recommandées par les souscripteurs semble plus fiable.

Je me suis donc concentré sur les corrélations inter-traités.

Description des données

Il s'agit d'une base des sinistres P&C dépassant 1 million de dollars américains de 1997 à 2011. Les montants considérés étant les pertes reportées pour chaque sinistre développées à l'ultime et à la part de PartnerRe. Ces montants sont de plus convertis en dollar avec un taux moyen fixe. Plusieurs problèmes se sont posés quant à cette base.

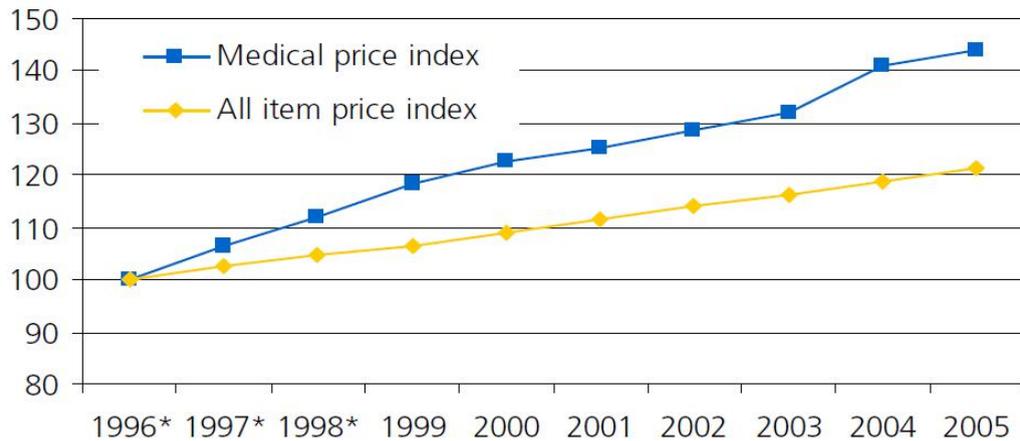
Tout d'abord, les sinistres inférieurs à 1 million de dollars ne sont pas suivis pour des raisons de gestion interne. Ces sinistres sont pourtant fréquents, et de ce point de vue la base est donc incomplète. Cela dit, on ne considère pas cela comme une gêne, les corrélations étant le plus souvent engendrées par des sinistres importants.

Ensuite, la séparation entre le Cat et le Non-Cat n'est pas définie dans la base. J'ai donc opté pour une séparation basée sur le nom du sinistre et une recherche de mots clés propre au Cat. Cette solution n'est évidemment pas parfaite mais reste acceptable pour l'étude.

Enfin, il semblait nécessaire de transformer la statistique en *as-if* pour rendre les données comparables entre elles. Il a donc été nécessaire de faire un certain nombre d'hypothèses

- le *Property* est mis *as-if* sur la base de l'Indice des Prix à la Consommation (IPC) par pays et par an⁹.
- le *Casualty* et le *Motor* utilise un IPC augmenté pour tenir compte de l'inflation des sinistres dans ces LoB qui est supérieure à l'inflation des prix. Cela est dû principalement à l'évolution de l'environnement juridique qui cherche de plus en plus à protéger la victime, et à la croissance des frais médicaux qui est plus rapide que celle des prix à la consommation (voir diagramme ci-dessous).

9. Les indices par pays et par an proviennent du FMI et de l'OCDE.



* estimate

FIGURE 3.10 – Évolution de l'index des frais médicaux
Source : Comité Européen des Assurances (CEA)

La transformation de la statistique en *as-if* est simple quand les indices sont à disposition. Imaginons un sinistre de montant S qui arrive l'année j et que l'on souhaite mettre *as-if* sur la base de l'IPC du pays concerné pour l'année 2012. En notant IPC_i l'IPC du pays de l'année i et IPC_{2012} l'IPC du pays de l'année 2012, le montant de sinistre *as-if* S_{as-if} est simplement donné par :

$$S_{as-if} = \frac{IPC_{2012}}{IPC_i} \cdot S \quad (3.5)$$

Ainsi, toutes les données sont mises *as-if* pour l'année 2012.

Hypothèses

Pour cette étude, il a été nécessaire de formuler certaines hypothèses.

1. L'étude se fait à un niveau mondial. On considère que toutes les cédantes sont équivalentes entre elles. De fait, un couple de points est formé par les pertes subies par deux traités d'une même cédante pour un même sinistre mais un autre couple sera formé par les pertes de deux autres traités d'une autre cédante pour un autre sinistre. Cela est décrit par le schéma suivant :

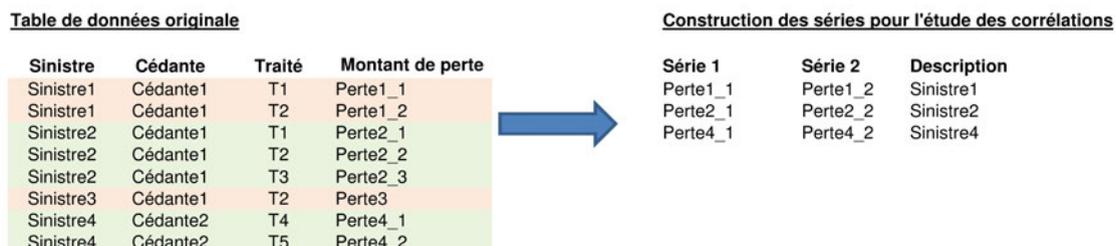


FIGURE 3.11 – Construction des couples étudiés

La raison de cette hypothèse est le manque de données en réassurance. Elle est nécessaire pour obtenir un nombre étudiable de couples car considérer deux traités spécifiques conduirait à seulement un ou deux couples de pertes.

2. Le nom du sinistre reporté dans la base est le facteur qui détermine si deux traités ont été touchés par le même sinistre. Cette hypothèse est nécessaire même si elle peut conduire à négliger les quelques cas où le nom du sinistre est manquant ou encore quand un même sinistre est reporté sous deux noms différents par inadvertance.
3. Si un sinistre touche plus de deux traités, alors il a été décidé de ne considérer que deux traités choisis aléatoirement dans l'ensemble des traités touchés.

Mesure de corrélation retenue

Il existe deux principales mesures de corrélation non-linéaire : le ρ (rho) de Spearman et le τ (tau) de Kendall. Nous avons choisi de conserver comme mesure le tau de Kendall. En effet, nous avons observé que les résultats obtenus avec le rho de Spearman en terme de paramètre estimé de la copule gaussienne en étaient très proches. De plus, il faut garder en tête que l'on ne cherche pas à estimer les paramètres de la copule mais à apprécier la cohérence des corrélations choisies par jugements d'experts.

[10] EMBRECHTS, LINDSKOG et MCNEIL, "Modelling dependence with copulas and applications to risk management" donne la définition du tau de Kendall de manière probabiliste :

Le tau de Kendall pour un couple de v.a. (X, Y) est défini comme :

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0] - \mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0] \quad (3.6)$$

où (\tilde{X}, \tilde{Y}) est une copie indépendante du couple (X, Y)

Notons (x, y) et (\tilde{x}, \tilde{y}) deux observations du couple (X, Y) . Cette paire d'observations est dite concordante si $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$ et discordante si $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$. La définition du tau de Kendall revient donc à la différence entre la probabilité d'avoir une paire concordante et la probabilité d'avoir une paire discordante.

Si l'on considère n observations du couple de variable (X, Y) , on obtient un estimateur naturel de cette mesure par :

$$\hat{\tau}(X, Y) = \frac{C - D}{\binom{n}{2}} \quad (3.7)$$

où C le nombre de paires concordantes et D le nombre de paires discordantes.

De plus, une propriété intéressante est que la distribution d'échantillonnage du tau de Kendall converge très rapidement vers une distribution normale. Pour un nombre d'observations n suffisamment grand ($n \geq 10$), on a¹⁰ :

$$Z_\tau = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.8)$$

Ce résultat permet donc un test de significativité et le calcul d'une p-value.

C'est l'estimateur ci-dessus ainsi que le calcul de la p-value que j'ai décidé d'implémenter sous *Excel*. La p-value permettra de vérifier que la dépendance est significative. Le test de significativité est expliqué en détail dans [1] ABDI, "The Kendall rank correlation coefficient". Le code VBA est lui consultable en annexe page 72.

10. [1] ABDI, "The Kendall rank correlation coefficient".

Résultats de l'étude

Les tableaux ci-dessous présentent les résultats obtenus sur les différentes branches. La première colonne intitulée "P&C" a été calculée en considérant les sinistres de toutes les LoBs ensemble. La ligne "Copule gaussienne" donne le paramètre de la copule gaussienne R obtenu par inversion du tau de Kendall. Pour une copule elliptique, on a¹¹ :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin R \quad (3.9)$$

Ce qui donne un estimateur non paramétrique pour R :

$$\hat{R} = \sin \frac{\pi \hat{\tau}}{2} \quad (3.10)$$

	P&C	Property NP	Casualty NP	Motor NP
Tau de Kendall	0.5	0.5	0.1	0.2
Copule gaussienne	0.7	0.7	0.2	0.3
p-value	0.0%	0.0%	1.2%	0.0%

	Property P	Casualty P	Motor P
Tau de Kendall	0.4	0.4	1.0
Copule gaussienne	0.6	0.6	1.0
p-value	0.0%	1.8%	31.7%

TABLE 3.2 – Résultats par LoB

On rappelle que les corrélations choisies par l'équipe actuarielle pour ce niveau sont de 0.7 entre traités d'un même programme et 0.3 entre traités d'une même cédante qui ne sont pas d'un même programme. Ce sont des rho de Spearman mais la transformation en paramètre pour la copule gaussienne donne ces mêmes valeurs à l'arrondi. Ces valeurs sont donc comparables avec les valeurs de la ligne "Copule gaussienne".

On obtient dans la plupart des colonnes un paramètre compris entre 0.6 et 0.7 avec des p-values satisfaisantes. Après consultation de l'équipe, si deux traités d'une même cédante sont touchés par un même sinistre c'est qu'il s'agit dans la majorité des cas de deux traités d'un même programme, ce qui semble corroborer les jugements faits par l'équipe. Cependant, on obtient des résultats assez surprenant dans certaines LoB.

Tout d'abord, en *Motor P*, la valeur trouvée est de 1 mais cela s'explique par le fait que seul deux sinistres étaient concernés. De plus on rappelle qu'avec seulement deux sinistres la p-value n'a pas de sens ici car la distribution d'échantillonnage de tau se rapproche réellement d'une normale avec plus de 10 observations¹².

Les résultats semblent plus surprenants en *Casualty NP* et en *Motor NP*. En effet, dans ces deux LoB, on observe des corrélations plus faibles. On remarque donc dans l'ensemble des valeurs plus faibles en *Casualty* et *Motor*. Cela peut s'expliquer par le découpage bien particulier

11. Pour la dérivation de cette formule voir [12] LINDSKOG, MCNEIL et SCHMOCK, "Kendall's tau for elliptical distributions".

12. [1] ABDI, "The Kendall rank correlation coefficient".

du portefeuille pour ces branches. Les tranches souscrites ont souvent une priorité élevée et de fait une fréquence de sinistres relativement faible¹³. Cela implique un faible nombre de points considérés pour l'étude et de fait une estimation moins fiable. Toutefois, ces corrélations plus faibles restent vraisemblables aux yeux de l'équipe.

Le choix fait par l'équipe actuarielle et les souscripteurs semble numériquement satisfaisant au vu de ces résultats. J'ai donc décidé de m'intéresser à la structure de dépendance et à ce choix de la copule Gaussienne.

Copules

Le choix de la copule Gaussienne est souvent motivé par la simplicité d'interprétation de ses paramètres à plusieurs dimensions. En effet, à l'inverse des copules Archimédiennes qui ne possèdent qu'un seul paramètre quelle que soit la dimension, la copule Gaussienne est paramétrée par une matrice de corrélation $n \times n$ où n est le nombre de marginales (c'est-à-dire le nombre de dimensions). Chaque élément de cette matrice va représenter le niveau de corrélation entre deux des marginales, ce qui rend cette matrice simple à interpréter. Cette propriété est très intéressante mais ce choix de copule est-il justifié dans notre cas ? Pour répondre à cette question, je me suis intéressé au cas du *Property NP* pour lequel nous avons à disposition un nombre intéressant de sinistres (un peu plus de 800 points).

Pour tenter de comparer les différents choix de copules entre eux, j'ai décidé d'utiliser les fonctions de concentration des queues (*tail concentration functions* $L(u)$ et $R(u)$ introduites par Gary Venter¹⁴). Ces fonctions permettent d'analyser le comportement des queues et sont définies pour deux v.a. X et Y et pour $u \in]0, 1[$ par :

$$L(u) = \mathbb{P} [X \leq F_X^{-1}(u) \mid Y \leq F_Y^{-1}(u)] = \frac{\mathbb{P} [X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u)]}{\mathbb{P} [Y \leq F_Y^{-1}(u)]} = \frac{C(u, u)}{u} \quad (3.11)$$

$$R(u) = \mathbb{P} [X > F_X^{-1}(u) \mid Y > F_Y^{-1}(u)] = \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} \quad (3.12)$$

où F_X^{-1} et F_Y^{-1} l'inverse généralisée des fonctions de répartition de X et de Y .

Comme le remarque Venter, la fonction L n'a que peu d'intérêt lorsque u tend vers 1 puisque qu'elle tend vers l'unité, et de même pour la fonction R qui tend vers 0. Cela empêche donc de comparer plusieurs copules étant donné que ce sera toujours le cas. Il propose donc de construire la fonction LR définie par :

$$LR(u) = \begin{cases} L(u) & \text{pour } u \leq 1/2 \\ R(u) & \text{pour } u > 1/2 \end{cases} \quad (3.13)$$

De plus, ces fonctions ont l'avantage d'être simples à estimer¹⁵. Si on possède un échantillon de

13. On parle alors de tranche non travaillante

14. Voir [13] VENTER, "Tails of copulas"

15. Certaines formules et le code R sont directement inspirés d'un article de Arthur Charpentier sur son site : <http://freakonometrics.blog.free.fr/index.php?post/2010/07/08/Tails-of-copulas%2C-une-lecture-graphique>

n observations, on utilise :

$$\hat{L}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq \hat{F}_X^{-1}(u), Y_i \leq \hat{F}_Y^{-1}(u))}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq \hat{F}_X^{-1}(u))} \quad (3.14)$$

$$\hat{R}(u) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i > \hat{F}_X^{-1}(u), Y_i > \hat{F}_Y^{-1}(u))}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i > \hat{F}_X^{-1}(u))} \quad (3.15)$$

C'est cette fonction que j'ai utilisée pour comparer différentes copules à la copule empirique dérivée de mes données. Cette décision se justifie en fait par l'importante place des queues de distribution dans l'évaluation du risque. Les copules que j'ai choisi de comparer ici sont la copule Gaussienne, la copule de Student et la copule de Gumbel (voir l'annexe page 74 pour les définitions). Pour ces copules, les paramètres ont été estimés par la méthode des moments c'est-à-dire par inversion du tau de Kendall. Cette méthode permet d'obtenir simplement un estimateur des paramètres. Une fois de plus, dans mon cas il s'agit de voir quelle famille de copules serait la plus adaptée plutôt que d'estimer précisément un ou des paramètres. Tout a été réalisé sous R¹⁶ (le code est consultable en annexe page 75).

Commençons tout d'abord par comparer la Gaussienne et la Gumbel à l'estimation :

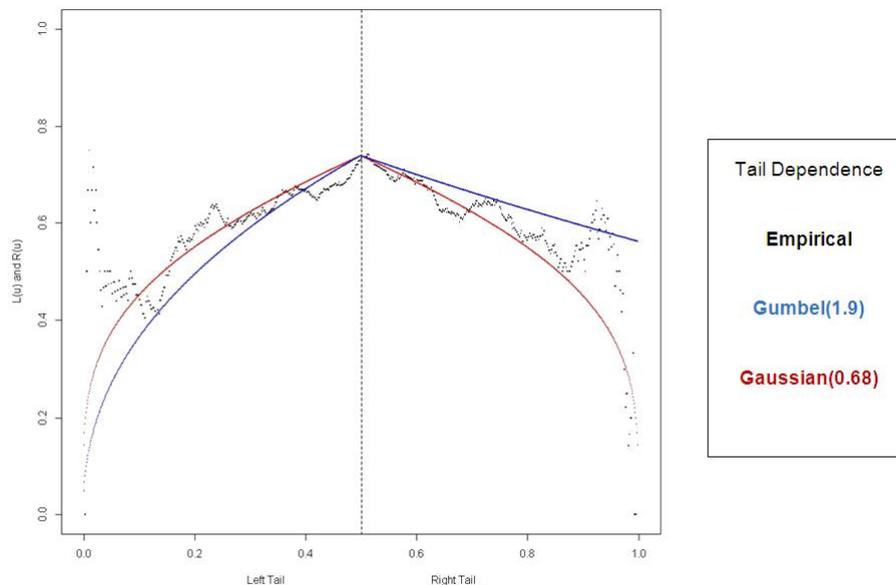


FIGURE 3.12 – Comparaison des fonctions LR pour Gaussienne et Gumbel

Comme on peut le remarquer, la fonction LR empirique a un comportement un peu erratique sur les bords 0 et 1. Cela est probablement dû à un nombre trop faible de points étudiés. À première vue, il semble que la copule de Gumbel (en bleu) sous-estime la dépendance à gauche et surestime la dépendance à droite. Dans l'ensemble, la copule Gaussienne semble mieux ajustée quoiqu'un peu faible dans les deux cas.

16. Pour plus d'informations : <http://www.r-project.org/>

J'ai donc cherché à jouer sur les paramètres pour un meilleur ajustement. On peut essayer de diminuer un peu le paramètre de la Gumbel pour mieux ajuster la queue droite, cependant, modifier le paramètre de la copule Gaussienne ne fera que translater la courbe actuelle de haut en bas ce qui n'est d'aucune utilité ici. Ce que l'on peut donc faire est introduire la copule de Student. Cette copule est semblable à la copule Gaussienne mais possède un second paramètre qui est le nombre de degrés de liberté. Plus ce paramètre est faible et plus la dépendance de queue est importante. Graphiquement, ce paramètre modifie donc l'amplitude de la courbe comme le montre le graphique ci-dessous :

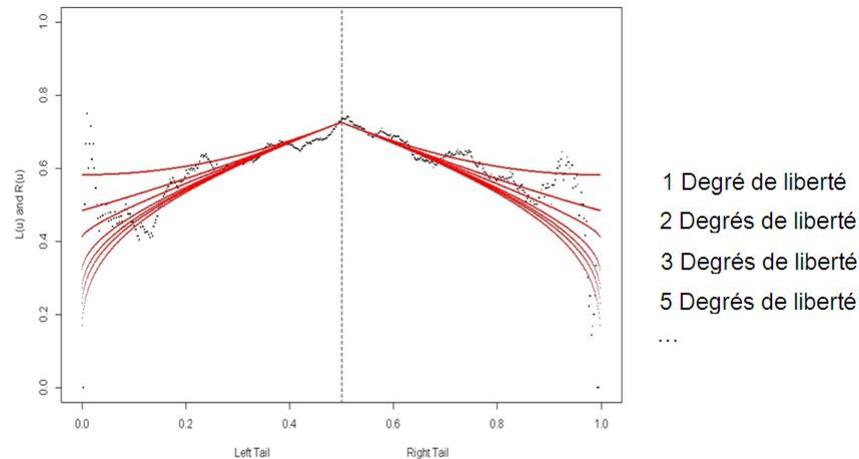


FIGURE 3.13 – Impact du nombre de degrés de liberté de la Student sur la fonction LR

Pour comparer Student et Gumbel, on diminue donc le paramètre de la copule de Gumbel à 1.7 et on introduit la copule de Student à 3 degrés de liberté, on obtient alors :

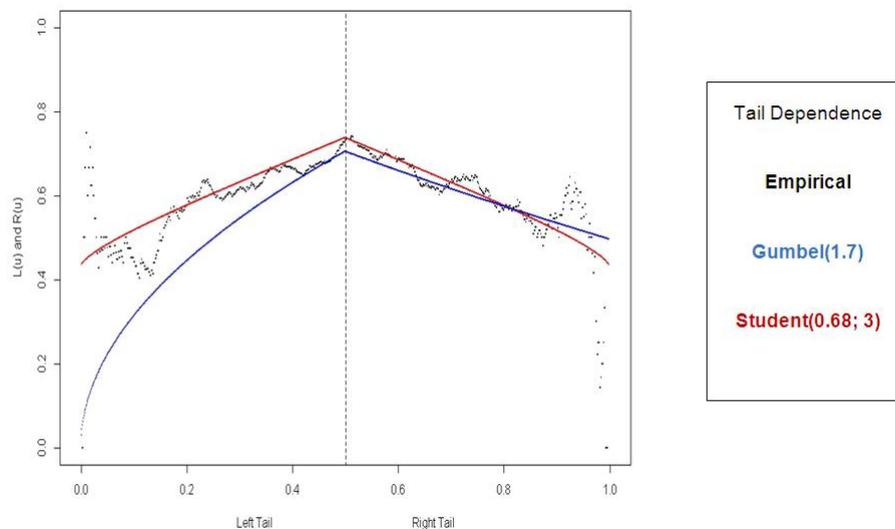


FIGURE 3.14 – Comparaison des fonctions LR pour Student et Gumbel

La copule de Gumbel semble donner un résultat plus satisfaisant sur la queue de droite mais sous-estime complètement la queue de gauche. La copule de Student paraît beaucoup plus satisfaisante (pour un meilleur ajustement on pourrait même diminuer légèrement le premier paramètre de la Student, ce qui aurait pour effet de translater légèrement la courbe vers le bas). Les fonctions L et R permettent l'étude en terme de dépendance forte mais pour confirmer ce résultat on se

propose de regarder du côté de la dépendance faible. Ces fonctions ont été introduites dans [8] COLES, HEFFERNAN et TAWN, “Dependence measures for extreme value analyses”. Elles sont définies ainsi :

$$\bar{\chi}_L(u) = \frac{2 \log \mathbb{P} [X \leq F_X^{-1}(u)]}{\log \mathbb{P} [X \leq F_X^{-1}(u), Y \leq F_Y^{-1}(u)]} - 1 = \frac{2 \log u}{\log C(u, u)} - 1 \quad (3.16)$$

$$\bar{\chi}_R(u) = \frac{2 \log \mathbb{P} [X > F_X^{-1}(u)]}{\log \mathbb{P} [X > F_X^{-1}(u), Y > F_Y^{-1}(u)]} - 1 = \frac{2 \log (1 - u)}{\log (1 - 2u + C(u, u))} - 1 \quad (3.17)$$

Les estimateurs se dérivent de la même manière qu’en (3.14) et (3.15) et on définit de la même façon la fonction $\bar{\chi}_{LR}$.

Le graphique suivant confirme le modèle de la Student à 3 degrés de liberté pour la dépendance faible :

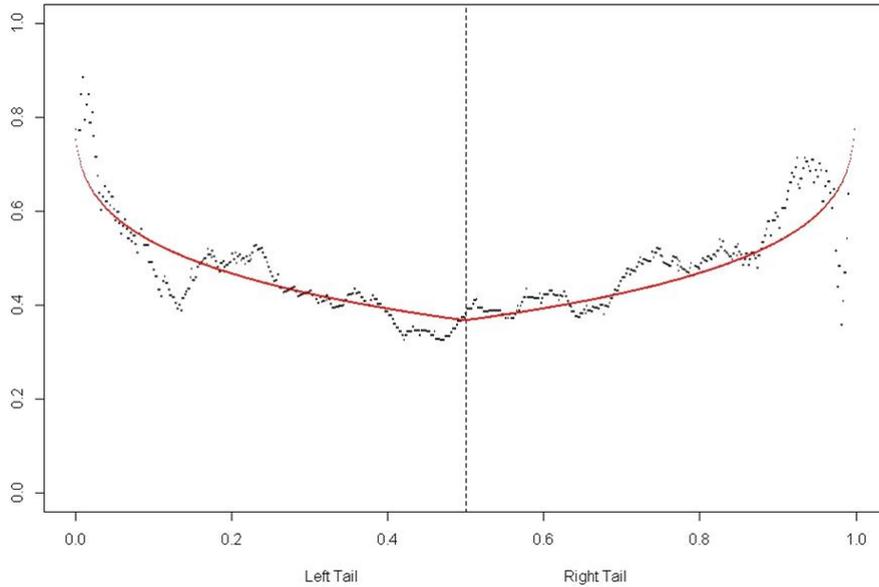


FIGURE 3.15 – $\bar{\chi}_{LR}$ estimé et $\bar{\chi}_{LR}$ de la Student à 3 degrés de liberté

En conclusion de cette étude sur les corrélations, les paramètres estimés par l’équipe semblent cohérents avec l’étude menée ici. Toutefois, l’estimation des paramètres par jugements d’experts a fait l’objet de récents travaux réalisés par des chercheurs de la *SCOR* pour essayer d’étayer cet usage par une théorie mathématique¹⁷. Une estimation de la sorte même si elle est coûteuse en temps et en personnes permettrait sûrement une meilleure justification des paramètres retenus.

Concernant la structure, dans le cas du *Property NP*, la copule Gaussienne semble satisfaisante pour modéliser la dépendance de queue bien que la copule de Student à 3 degrés de liberté semble mieux ajustée. La copule Gaussienne est pour l’instant une exigence de la compagnie pour la modélisation. À l’avenir, il pourrait être intéressant, et je le conseillerais, de modifier la structure de corrélation pour observer l’impact sur le capital en utilisant par exemple la copule de Student.

17. On pourra se référer à l’article [3] ARBENZ et CANESTRARO, “Estimating Copulas for Insurance from Scarce Observations, Expert Opinion and Prior Information : A Bayesian Approach”

3.2 Composantes Cat

3.2.1 Fonctionnement des Cat-models

Il existe plusieurs compagnies spécialisées dans la modélisation des catastrophes naturelles telles que RMS, AIR ou encore EQECat. Ces compagnies produisent des logiciels de modélisation qui, bien que différents, fonctionnent tous sur le même principe. Les catastrophes modélisées par ces modèles sont les séismes (*Earthquake* en anglais) et les tempêtes (*Windstorm* en anglais) ainsi que certaines de leurs conséquences. Parmi les conséquences modélisées, on peut citer :

- Les incendies causés par les séisme (*fire following*)
- Les ondes de tempêtes (*storm surge*) qui sont des changements du niveau de la mer dus à des vents importants qui peuvent causer d'importants dommages côtiers.
- Le *demand surge* qui est une augmentation des coûts de réparation ou de reconstruction due à une demande trop importante et une offre limitée après une catastrophes de grande ampleur.

À noter que les tsunamis ne sont pas encore modélisés, ce qui peut causer une importante sous-estimation des dommages causés (comme pour le séisme de Tōhoku au Japon en 2011). Cependant le développement de modèles tsunami est en cours dans certaines compagnies.

Pour ce qui est des autres catastrophes naturelles telles que la grêle ou les inondations certains modèles commencent à voir le jour mais leur modélisation se fait pour l'instant de la même manière que les risques Non-Cat en *Property*.

La modélisation se décompose en quatre modules : les évènements stochastiques (*stochastic event*), l'aléa (*hazard*), la vulnérabilité (*vulnerability*) et le financier (*financial*).¹⁸

Génération d'évènements stochastiques

La première étape de la modélisation consiste à générer un catalogue d'évènements stochastiques. Un évènement est défini par sa localisation ou sa trajectoire, sa puissance et sa fréquence annuelle (ou probabilité d'occurrence). La fréquence générale est modélisée par une distribution de probabilité qui est le plus souvent une loi de Poisson.

Des centaines de milliers d'évènements sont ainsi générés sur la base de données historiques et de paramètres géologiques ou météorologiques.

Le module aléa

Ce module vient évaluer, sachant qu'un évènement de la base générée se produit, l'intensité de cet évènement sur une zone géographique particulière.

Dans le cas des tempêtes, ce module va estimer la force du vent en un certain point géographique sachant l'origine, la trajectoire et les caractéristiques de cette tempête en tenant compte de l'environnement traversé (par exemple la nature du terrain).

Dans le cas des séismes, ce module estime plutôt les mouvements de terrains et la propagation des ondes sismiques dans les milieux traversés.

À l'issu de ces deux premiers modules, on obtient donc la description complète d'une série d'évènements en terme d'intensité et ce par zone géographique ainsi qu'une description probabiliste (fréquence d'occurrence).

18. Pour plus de détails voir [11] GROSSI et TEHENNEPE, "Catastrophe modelling fundamentals"

Le module de vulnérabilité

L'assurance et la réassurance s'intéressent à l'impact potentiel d'un péril naturel sur leur portefeuille. Le module de vulnérabilité a pour but de déterminer le taux de dommage moyen causé par un événement sur un portefeuille donné. Ce taux de dommage moyen correspond au ratio entre la perte espérée sur un bien suite à un événement et la valeur totale du bien. Il dépend de très nombreux paramètres tels que la nature du bien assuré, sa taille, sa localisation et les matériaux qui le constituent.

En pratique, l'exposition d'un portefeuille est décrite par la répartition géographique et la nature des sommes assurées :

- La répartition géographique se fait le plus souvent par zone CRESTA (*Catastrophe Risk Evaluating and Standardizing Target Accumulations*) qui sont des zones géographiques créées dans le but d'uniformiser la modélisation entre les différents acteurs de l'assurance.
- La nature des sommes assurées est, elle, définie par type (résidentiel, commercial ou industriel) et par nature de la couverture (bâtiments, mobiliers ou pertes d'exploitation). Pour ce qui est des matériaux et des tailles, les modèles ont leurs propres hypothèses marché selon la zone, le type et la nature de la couverture. Des courbes de vulnérabilité historiques ou modélisées donnent ensuite le taux de dommages aux biens en fonction de l'intensité de l'évènement.

Ce module simule donc l'effet d'un événement sur un portefeuille et il en ressort le dommage au portefeuille causé par cet événement. Pour prendre en compte l'incertitude liée à cette vulnérabilité que l'on appelle incertitude secondaire, le taux de dommage est en fait modélisé par une distribution de probabilité (loi Beta pour RMS par exemple).

Le module financier

Ce dernier module vient convertir le dommage physique estimé précédemment en perte monétaire. L'application des structures de réassurance permet ensuite l'estimation de la charge du réassureur.

En sortie de ces modèles on récupère ce que l'on appelle une ELT (*Event Loss Table*) qui correspond à une base des pertes causées par chaque événement. Les pertes sont décrites par une moyenne et un écart-type décrivant une distribution de probabilité. La prise en compte de l'incertitude secondaire mentionnée ci-dessus se traduit par le fait qu'il s'agit d'une distribution et non d'une perte fixe. Cela accompagné de la fréquence de chaque événement permet de constituer les courbes OEP (*Occurrence Exceedance Probability*) et AEP (*Aggregate Exceedance Probability*).

OEP

On s'intéresse pour construire l'OEP à la probabilité que la perte due à un événement soit supérieure à un certain montant x , sachant qu'un seul événement se produit.

- On note Y la variable aléatoire de ce montant de perte.
On va donc dans un premier temps calculer $\mathbb{P}[Y > x] = \overline{F}_Y(x)$. Cette probabilité permettra ensuite le calcul de la période de retour d'un tel montant de perte.
- On note X_i la perte potentielle causée par l'évènement i et λ_i la fréquence associée.
On fait l'hypothèse que : $\forall i, \mathbb{P}[X_i > 0] = 1$.
- On note $E_i := \{\text{l'évènement } i \text{ est l'évènement qui se produit}\}$.
On suppose pour tout i , E_i indépendant de X_i .
L'univers tout entier des événements est supposé décrit dans l'ELT.

- On note $\lambda = \sum_i \lambda_i$.

D'après la définition même d'une probabilité, on a donc : $\forall i, \mathbb{P}(E_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$.

On peut donc calculer :

$$\begin{aligned}\bar{F}_Y(x) &= \sum_i \mathbb{P}(\{X_i > x\} \cap E_i) \\ &= \sum_i \mathbb{P}(X_i > x) \cdot \mathbb{P}(E_i) \quad \text{par indépendance} \\ &= \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot \bar{F}_{X_i}(x)\end{aligned}$$

Le plus fréquemment les modèles ne considèrent pas cette variable seule mais regardent la perte maximum probable ou PML (*Probable Maximum Loss*) définie par la variable $Z = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ où les Y_i sont i.i.d. de loi Y et N est la distribution de fréquence qui généralement est supposée être une loi de Poisson de paramètre λ indépendante des Y_i .

L'OEP est en fait donné par la fonction de survie de cette variable : $OEP(x) = \bar{F}_Z(x)$. Pour obtenir une formule analytique, on utilise que :

$$F_Z(x) = \mathbb{E}_N [F_{Z|N}(x)]$$

Puis :

$$\begin{aligned}F_{Z|N=n}(x) &= \mathbb{P}[\max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \leq x] \\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leq x, \dots, Y_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^n P(Y_i \leq x) \quad \text{par indépendance des } Y_i \\ &= F_Y(x)^n\end{aligned}$$

On en déduit :

$$F_Z(x) = \mathbb{E}_N [F_Y(x)^N]$$

On reconnaît l'expression de la fonction génératrice de la loi de N . Dans le cas où N suit une loi de Poisson de paramètre λ on rappelle que : $E[z^N] = \exp[\lambda \cdot (z - 1)]$.

Dans le cas où la distribution de fréquence est une loi de Poisson on a donc :

$$F_Z(x) = \exp[\lambda(F_Y(x) - 1)] = \exp[-\lambda \cdot \bar{F}_Y(x)] = \exp\left[-\lambda \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} \bar{F}_{X_i}(x)\right]$$

D'où l'on conclut :

$$OEP(x) = \bar{F}_Z(x) = 1 - \exp\left[-\sum_i \lambda_i \cdot \bar{F}_{X_i}(x)\right] \quad (3.18)$$

Puis la période de retour en années est simplement donnée par : $RP(x) = \frac{1}{OEP(x)}$

AEP

Calculer l'AEP revient à s'intéresser à la distribution de la variable $S = \sum_{i=1}^N Y_i$.

Pour cela, nous allons utiliser les propriétés de la fonction caractéristique ϕ et de la fonction génératrice G . On rappelle leur définition pour une variable aléatoire X :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$$

$$G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$$

De ces fonctions découle une propriété très intéressante pour le calcul de la distribution de S :

$$\phi_S(t) = G_N(\phi_Y(t)) \quad (3.19)$$

La démonstration repose sur le fait que les Y_i sont i.i.d. :

$$\phi_S(t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(it \sum_{i=1}^N Y_i \right) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(it \sum_{i=1}^N Y_i \right) \mid N \right] \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^N \mathbb{E} [e^{itY_i}] \right] = \mathbb{E} [\phi_Y(t)^N]$$

La distribution de S peut donc être calculée en inversant sa fonction caractéristique. Pour ce faire, les modèles discrétisent la variable Y puis utilisent l'analogie entre la fonction caractéristique et la transformée de Fourier discrète pour calculer S .

3.2.2 Résultats Cat

Cette section présente les résultats des Cat-models. Le Cat est modélisé par zone (Europe, Caraïbe, ...) et par péril (séisme et tempête). Une pratique courante est de considérer que l'ALD Cat du portefeuille est l'ALD maximum sur l'ensemble des zones et des périls. Dans notre cas, il s'agit de l'ALD tempête en Europe. Les résultats sont présentés ci-dessous.

Quantiles	Période de retour (en années)	Perte Cat modélisée Prime Cat tarifée
5.0%	1	1%
25.0%	1.3	8%
50.0%	2	28%
75.0%	4	90%
90.0%	10	239%
95.0%	20	413%
99.0%	100	956%
99.5%	200	1242%
99.9%	1000	1990%
Moyenne		93%
CV		209%

TABLE 3.3 – Résultats des simulations Cat par LoB

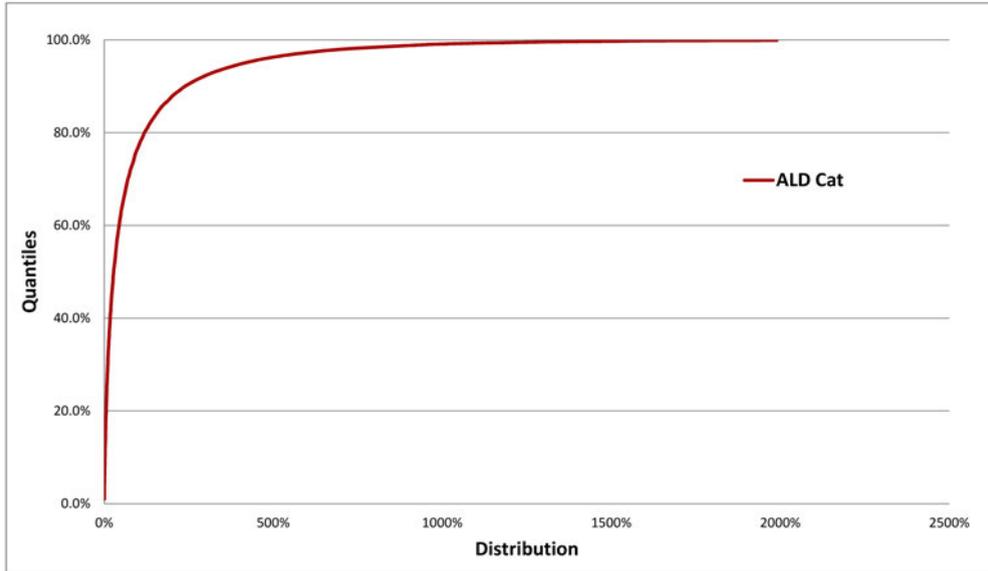


FIGURE 3.16 – ALD Cat

Comme il pouvait être anticipé, la courbe Cat est bien plus volatile que les LoB Non-Cat.

3.3 Ajustement de distributions

Pour simplifier l'optimisation, il a été décidé d'ajuster aux ALD simulées des distributions classiques. Pour cela, j'ai utilisé le logiciel *@Risk*. *@Risk* est une extension de *Excel*. Il possède un module d'ajustement très pratique qui ajuste grâce au maximum de vraisemblance un nombre important de distributions paramétriques classiques. Les résultats sont ensuite triés selon plusieurs statistiques disponibles : le Chi-deux, Kolmogorov-Smirnov et Anderson-Darling. Rappelons brièvement la définition de ces statistiques en considérant n observations $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ d'une v.a. X .

Chi-deux

Pour pouvoir utiliser ce test d'adéquation avec des distributions continues, il faut discrétiser la distribution en k probabilités. Pour cela, considérons une distribution connue de densité f . On découpe le domaine de définition de la distribution en k intervalles $([a_i, b_i])_{i=1..k}$ et on pose pour tout i :

$$p_i = \int_{a_i}^{b_i} f(x)dx \quad (3.20)$$

Enfin, la statistique du Chi-deux est définie par :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - E_i)^2}{E_i} \quad (3.21)$$

où :

- N_i le nombre d'observations dans l'intervalle $[a_i, b_i]$
- E_i le nombre espéré d'observations dans l'intervalle $[a_i, b_i]$ selon la densité f soit : $E_i = n \cdot p_i$

Kolmogorov-Smirnov

On note F_n la fonction de répartition empirique des (x_i) définie par : $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_i \mathbb{1}_{x_i \leq x}$

La statistique de Kolmogorov-Smirnov D pour une fonction de répartition F donnée est définie par :

$$D = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (3.22)$$

Cette statistique est plus sensible au centre de la distribution qu'aux queues.

Anderson-Darling

La statistique d'Anderson-Darling A^2 est donné par :

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln F(x_{(i)}) + \ln(1 - F(x_{(n-i+1)}))] \quad (3.23)$$

où $(x_{(i)})$ la suite des observations réordonnée par ordre croissant. Contrairement à la statistique de Kolmogorov-Smirnov, cette statistique se concentre plus sur les queues de la distribution.

Distributions ajustées

@Risk utilise un paramètre de translation des distributions appelé *RiskShift*. Cela permet de décaler le domaine de définition et dans la majorité des cas d'obtenir un meilleur ajustement. Si on note γ ce paramètre, la distribution X tradatée est $X + \gamma$ et il en découle que la densité et la fonction de répartition sont données par : $f_{X+\gamma}(x) = f_X(x - \gamma)$ et $F_{X+\gamma}(x) = F_X(x - \gamma)$. Deux distributions sont finalement suffisantes pour ajuster les différentes LoB : la log-normale et la log-logistique. Les résultats de l'ajustement sont présentés dans le tableau ci-dessous¹⁹.

LoB	Distribution	Translation	Paramètre 1	Paramètre 2	Chi-deux	K-S	A-D
Property P	Log-Normale	68%			277.7	0.005	3.0
Casualty P	Log-Logistique	70%			295.8	0.006	5.4
Motor P	Log-Normale	72%			304.4	0.005	5.7
Property NP	Log-Normale	11%			163.5	0.002	0.3
Casualty NP	Log-Normale	9%			174.7	0.001	0.3
Motor NP	Log-Logistique	34%			385.9	0.004	4.3

TABLE 3.4 – Résultats d'ajustement

Les paramètres 1 et 2 correspondent respectivement aux μ et σ dans le cas de la log-normale de densité :

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.24)$$

et aux α et β dans le cas de la log-logistique de densité :

$$f(x) = \frac{(\beta/\alpha)(x/\alpha)^{\beta-1}}{[1 + (x/\alpha)^\beta]^2} \quad (3.25)$$

Comme on peut le voir, les valeurs des statistiques sont plus ou moins bonnes. La statistique de Kolmogorov-Smirnov semble acceptable dans tous les cas. Elle se concentre plus sur le centre de la

19. Pour des raisons de confidentialité, les paramètres sont maintenus secrets.

distribution et comme nous allons le voir sur les *QQ-plots* les ajustements semblent effectivement toujours bons au centre. Les queues sont plus problématiques. Dans deux cas, le *Property P* et le *Motor NP*, j'ai dû recourir à une troncature de la queue droite (quantile à 99.6% et 99.5% respectivement) pour pouvoir obtenir un ajustement correct. Dans tous les cas, les *QQ-plots* montrent que les lois ajustées sont plus sévères sur la queue droite, ce qui est plus prudent. Il a donc été décidé de conserver ces ajustements pour l'optimisation.

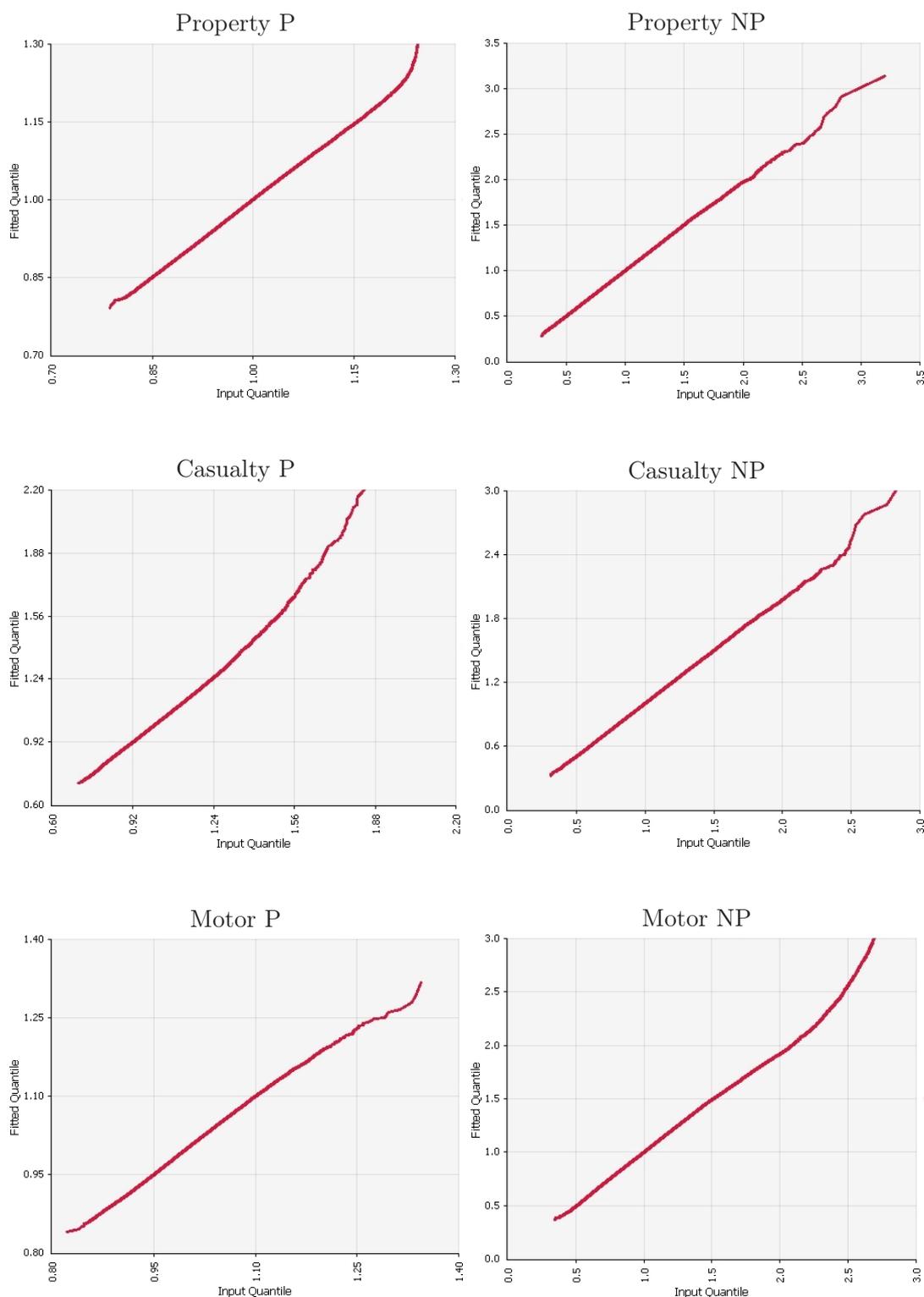


FIGURE 3.17 – QQ-plots exporté depuis @Risk

Cas particulier du Cat

L'ajustement d'une loi à la branche Cat est plus complexe. En effet, la donnée dont nous disposons pour le Cat est la fonction de répartition et non pas des observations. *@Risk* ajuste donc une distribution de manière graphique à la fonction de répartition. La seule mesure de qualité de l'ajustement fournie par *@Risk* dans ce cas est la racine de l'erreur quadratique moyenne ou *Root-Mean Square error* (RMSe) en anglais. Si l'on possède n points (x_i, y_i) de la courbe et la densité F de la distribution ajustée, on définit le RMSe comme :

$$\text{RMSe} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F(x_i) - y_i)^2} \quad (3.26)$$

Le résultat est présenté ci-dessous :

LoB	Distribution	Translation	Paramètre 1	Paramètre 2	RMSe
Cat	Log-Normale	-1%	-1.26	1.72	0.6%

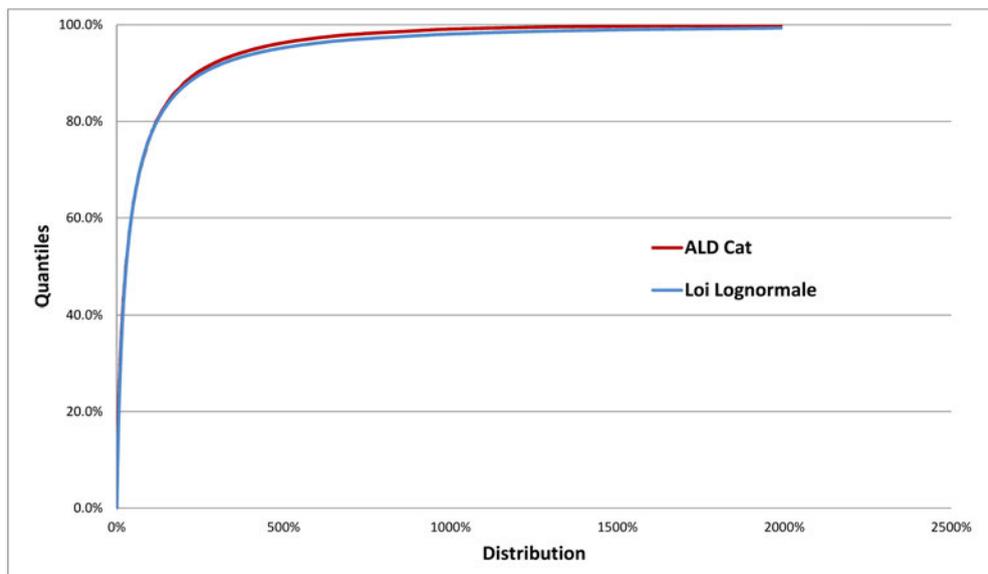


FIGURE 3.18 – Ajustement à la fonction de répartition du Cat

Le résultat obtenu n'est pas optimal mais est tout de même accepté par prudence.

4 Optimisation du portefeuille

La modélisation du portefeuille nous a permis d'obtenir l'ALD de chaque LoB. L'agrégation de ces ALDs va donc nous permettre d'obtenir l'ALD du portefeuille P&C, puis de mesurer le rendement et le risque de ce portefeuille.

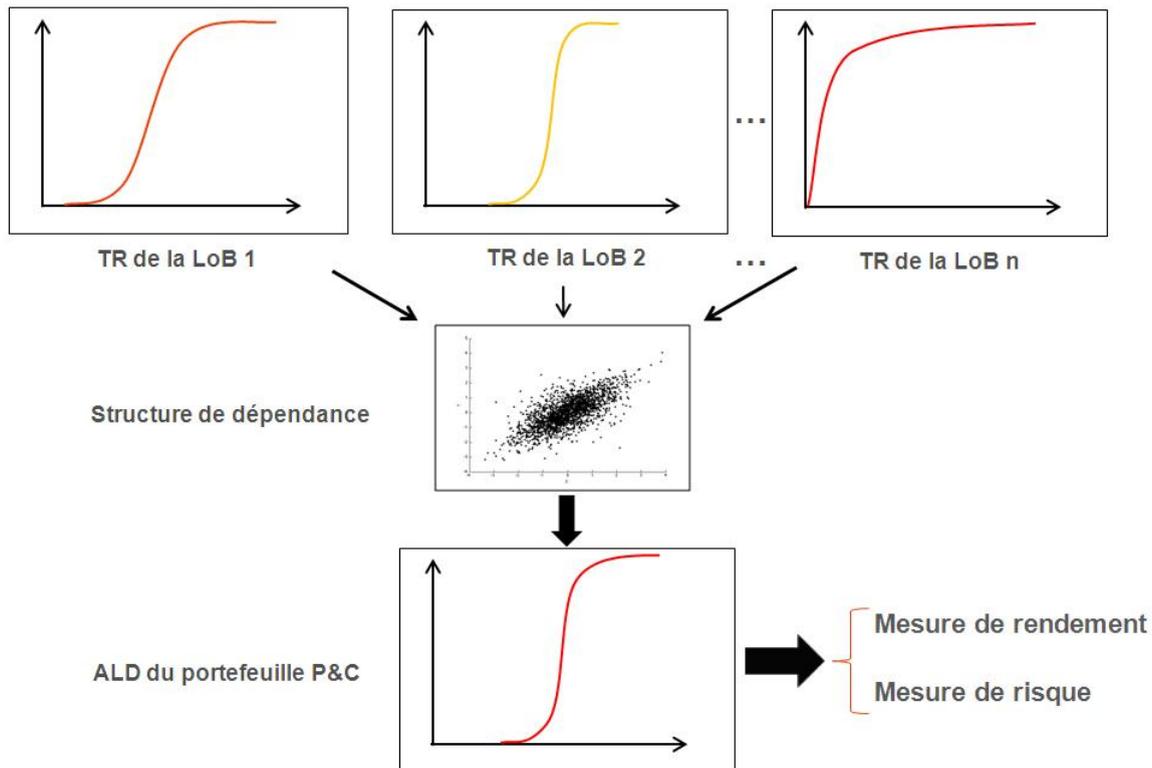


FIGURE 4.1 – Utilisation de la modélisation

Le portefeuille est composé de 7 LoBs introduites précédemment : *Property P et NP*, *Casualty P et NP*, *Motor P et NP* et *Cat*. Chacune de ces LoBs représente un certain pourcentage du portefeuille en terme de prime ou de capital économique. On cherche à déterminer la direction qu'il faudrait faire prendre au portefeuille pour être plus performant en termes de rendement et de risque. Pour fixer un cadre de recherche, on travaillera à prime constante puis à capital constant. L'optimisation à prime constante suppose que notre part de marché est maximale mais que l'on peut tout de même modifier la répartition de notre portefeuille. L'optimisation à capital constant consiste à considérer que le capital actuel est une contrainte de la direction en termes de limitation de l'exposition. L'hypothèse du capital constant est plus intéressante car plus proche de la réalité de l'entreprise. Optimiser, c'est donc ici trouver les différentes répartitions entre LoBs de la prime ou du capital qui améliorent le rendement et diminuent le risque encouru par le portefeuille.

Dans cette optique, le résultat attendu de cet exercice n'est pas un unique portefeuille optimal mais l'ensemble des portefeuilles surpassant l'actuel en termes de risque et de rendement. Nous appellerons par la suite ces portefeuilles "portefeuilles préférables".

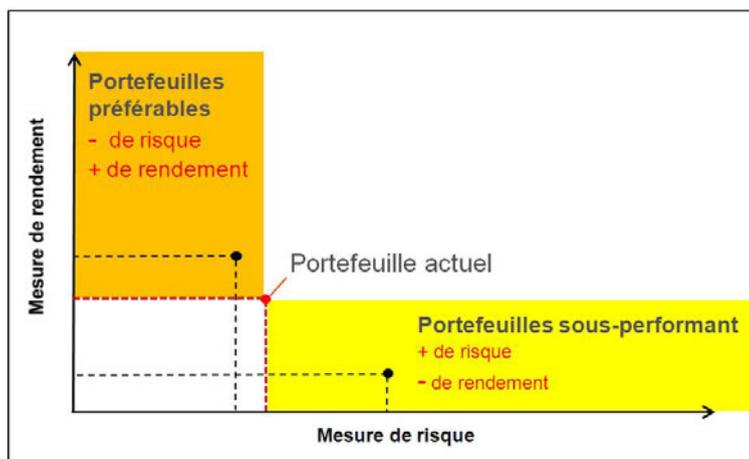


FIGURE 4.2 – Portefeuilles préférables

Il est donc nécessaire de choisir une mesure de rendement et une mesure de risque adaptées au problème.

4.1 Mesure de rendement et mesure de risque

Le choix de la mesure de rendement et de la mesure de risque est crucial pour l'optimisation. En effet, il s'agit des deux seuls facteurs qui décideront si un portefeuille est préférable ou non. Le choix classique est de considérer la moyenne du rendement de l'actif du portefeuille comme mesure de rendement et sa volatilité (écart-type) ou son CV comme mesure de risque. Ces mesures semblent mal adaptées à notre problème comme nous allons le voir.

Pour ce qui est du rendement, l'information que l'on possède est décrite par la distribution des TR. On peut à partir du TR définir $P := 1 - \text{TR}$ qui donne la distribution du profit technique. Cependant, choisir comme mesure de rendement le profit technique moyen ne semble pas idéal. En effet, le rendement réel du portefeuille est très dépendant de l'environnement de chaque LoB : taux sans risque, cadence de règlement des sinistres... Par exemple, depuis quelques années la chute des taux sans risque impacte le résultat. On choisit donc de préférer à la moyenne une mesure qui tient compte du retour sur investissement : le taux de rendement des capitaux ou *Return on Equity* (RoE).

Concernant la mesure de risque, on pourrait envisager de choisir le CV du TR P&C. Le CV a pour avantage qu'il prend en compte la totalité de la distribution mais en contrepartie ne tient pas compte de la forme de la distribution et particulièrement du type de queue.

On peut construire un très bon exemple illustrant cela. On considère X une v.a. et on pose $Y = 2 \cdot \mathbb{E}[X] - X$. On a directement par linéarité de l'espérance et invariance de l'écart-type par translation :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] \\ \sigma(Y) = \sigma(X) \end{cases} \Rightarrow CV(Y) = CV(X)$$

Le CV apporte donc la même information pour ces deux distributions. Considérons maintenant le cas où X suit une loi asymétrique comme la loi log-normale. Le graphe suivant représente la densité de X et de Y .

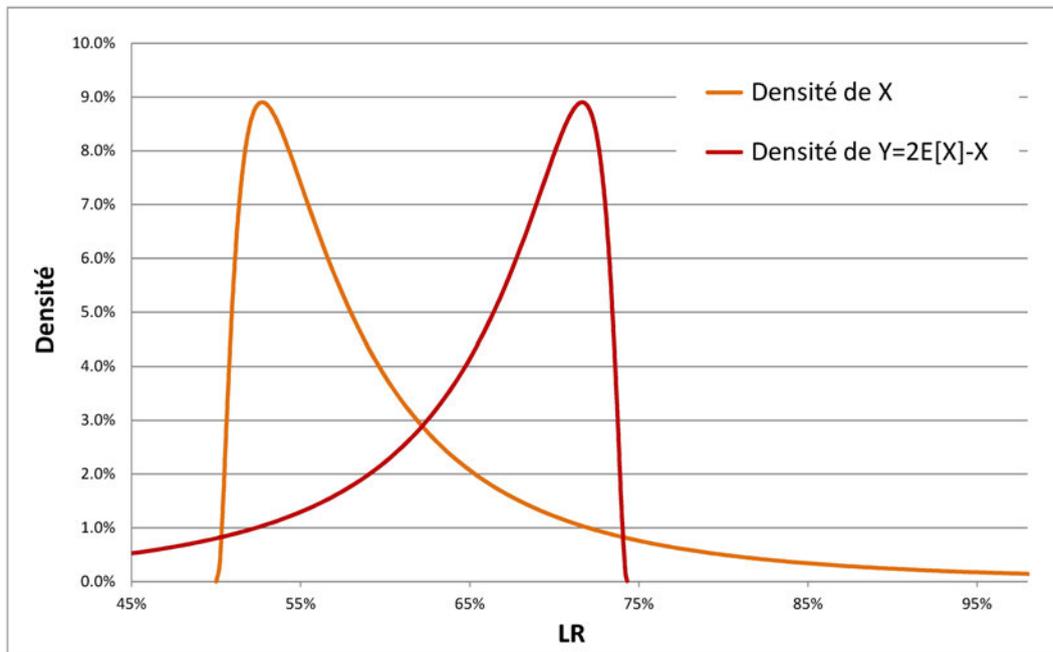


FIGURE 4.3 – Deux distributions de même moyenne et de même CV

Les densités ci-dessus correspondent donc aux densités de deux distributions de même CV. Comme on peut le voir, le CV ne capture pas l'importance des queues de distribution. En effet, si l'on considère que ces distributions sont des distributions de LR, X est susceptible de générer des LR bien supérieurs à 75% contrairement à Y . Cet exemple semble confirmer que le CV n'est pas une mesure de risque adaptée pour notre étude. Pour notre problème, des mesures liées à la queue droite de distribution semblent plus pertinentes. On pense donc à la *Value at Risk* (VaR) et *Tail Value at Risk* (TVaR).

Nous allons donc maintenant nous pencher dans un premier temps sur le RoE puis dans un second temps sur les mesures VaR et TVaR.

4.1.1 RoE

Le RoE se définit comme le ratio :

$$RoE := \frac{\text{Résultat net}}{\text{Capital}} \quad (4.1)$$

Le résultat net P&C se calcule comme la somme des résultats nets de chaque LoB.

$$\text{Résultat net P\&C} := \sum_i \text{Résultat net de la LoB } i \quad (4.2)$$

Puis le résultat net de la LoB i se décompose en deux termes que sont le résultat d'exploitation et les revenus du capital de la LoB i , auxquels on applique une taxe moyenne :

$$\text{Résultat net} := (\text{Résultat d'exploitation} + \text{Revenus du capital}) \cdot (1 - \text{Taxe}) \quad (4.3)$$

Le résultat d'exploitation s'exprime comme la valeur actuelle des flux de trésorerie de chaque LoB. Ces flux sont le montant de prime, les frais d'acquisition, les frais d'administration et de gestion et les pertes. Ces frais et pertes sont en fait connus pour chaque LoB en ratio de la prime :

- Les frais d'acquisition sont donnés par L' *Acquisition Cost Ratio* (ACR)
- Les frais d'administration et de gestion à prime sont données par le *Management eXpense ratio* (MeX)
- Les pertes sont issues du LR en considérant pour chaque LoB i que : $LR_i = TR_i - ACR_i$

On dispose de plus pour chaque LoB i de la durée de la prime DP_i , de la durée des pertes DL_i et du taux sans risque r_i .

Le taux sans risque r_i est un taux sans risque moyen représentant le rendement sans risque du capital pour la LoB i . Pour chaque monnaie, nous possédons une courbe de taux envoyée par le groupe. Ces courbes donnent le taux sans risque en fonction de la maturité. Le graphique suivant présente la courbe du dollar américain.

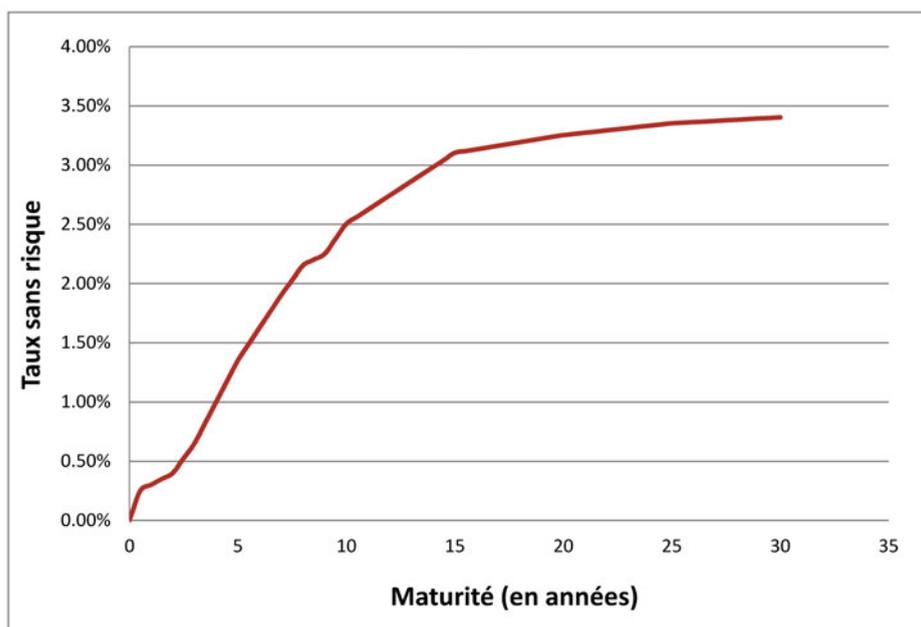


FIGURE 4.4 – Courbe de taux du dollar américain

Le capital couvre le risque de souscription et de déviation des réserves. On considère les revenus sans risque générés par le capital que l'on actualise. Puis, pour obtenir un rendement moyen, on divise cela par le capital lui aussi actualisé. On peut écrire :

$$r_i = \frac{NPV(\text{Revenus du capital de la LoB } i)}{NPV(\text{Capital de la LoB } i)} \quad (4.4)$$

La durée des pertes DL_i est telle que les pertes actualisées au taux r_i sur cette durée soient égales à la somme des pertes actualisées.

$$\frac{LR_i}{(1+r_i)^{DL_i}} = \sum_t \frac{LR_i \cdot p_{t,i}}{(1+r_{t,i})^t} \quad \text{soit} \quad DL_i = \frac{-\ln \sum_t \frac{p_{t,i}}{(1+r_{t,i})^t}}{\ln(1+r_i)} \quad (4.5)$$

où $p_{t,i}$ est la cadence de paiement des sinistres de la LoB i , et $r_{t,i}$ le taux sans risque pour une maturité t de la LoB i . La formule est équivalente pour la durée de la prime en considérant la cadence de paiement de la prime.

Les durées de la prime et des pertes peuvent être interprétées comme respectivement la durée moyenne de paiement de la prime par les cédantes et la durée moyenne de règlement total

des sinistres depuis la survenance par le réassureur. Le paiement de la prime se fait pour toutes les LoBs dans l'année ce qui se traduit par une durée variant de 0.6 à 1 an selon les LoBs. Le règlement des sinistres dépend quant à lui beaucoup du type de LoB. La durée des pertes peut varier de 1 à 10 ans²⁰ selon qu'il s'agisse d'une LoB à développement court ou long.

Ces durées et ce taux sans risque par LoB vont nous permettre d'actualiser les flux de trésorerie selon les hypothèses suivantes :

1. On suppose que la cadence de paiement des frais d'acquisition (ACR) est identique à celle de la prime. On actualise donc la prime et les frais d'acquisition sur la durée de la prime.
2. Les pertes (LR) sont actualisées sur la durée des pertes.
3. On estime que 25% des frais d'administration et de gestion (MeX) proviennent des règlements de sinistres. On actualise donc ces 25% sur la durée des pertes. On considère que les 75% restant sont eux payés en milieu de première année d'où une actualisation sur 0.5 an.

Formellement, le résultat d'exploitation de la LoB i se traduit donc par :

$$\text{Prime}_{\text{LoB } i} \cdot \left(\frac{1 - \text{ACR}_i}{(1 + r_i)^{DP_i}} - \frac{75\% \text{ MeX}_i}{(1 + r_i)^{0.5}} - \frac{\text{LR}_i + 25\% \text{ MeX}_i}{(1 + r_i)^{DL_i}} \right) \quad (4.6)$$

Les revenus du capital à la fin de l'année pour la LoB i correspondent simplement aux intérêts générés par le capital :

$$r_i \cdot \text{Capital LoB } i \quad (4.7)$$

Le capital économique pour P&C est calculé par le groupe et réparti entre chaque LoB. Pour cela, le groupe fournit pour chaque LoB un *Solvency Ratio* (SR) qui permet de calculer le capital nécessaire en fonction de la prime :

$$\text{Prime de la LoB } i \cdot \text{SR}_i = \text{Capital de la LoB } i \quad (4.8)$$

La connaissance de la prime totale (ou vice-versa du capital) et du poids de chaque LoB suffit donc à calculer le RoE.

20. Cet intervalle est une donnée moyenne car la durée des pertes peut dépasser 20 ans dans certains cas.

4.1.2 VaR et TVaR

La VaR et la TVaR sont devenues depuis quelques années des mesures de risque très utilisées en assurance et en réassurance. On rappelle leur définition si l'on suppose X une v.a. continue. On définit la VaR comme :

$$\text{VaR}_\alpha(X) := \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq x) > \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha) \quad (4.9)$$

Plus intuitivement, il s'agit du quantile d'ordre α c'est-à-dire la valeur telle que : $\alpha = \mathbb{P}[X \leq \text{VaR}_\alpha(X)]$. En ce qui concerne la TVaR, on la définit comme :

$$\text{TVaR}_\alpha(X) := \mathbb{E}[X \mid X > \text{VaR}_\alpha(X)] \quad (4.10)$$

La TVaR est donc supérieure ou égale à la VaR :

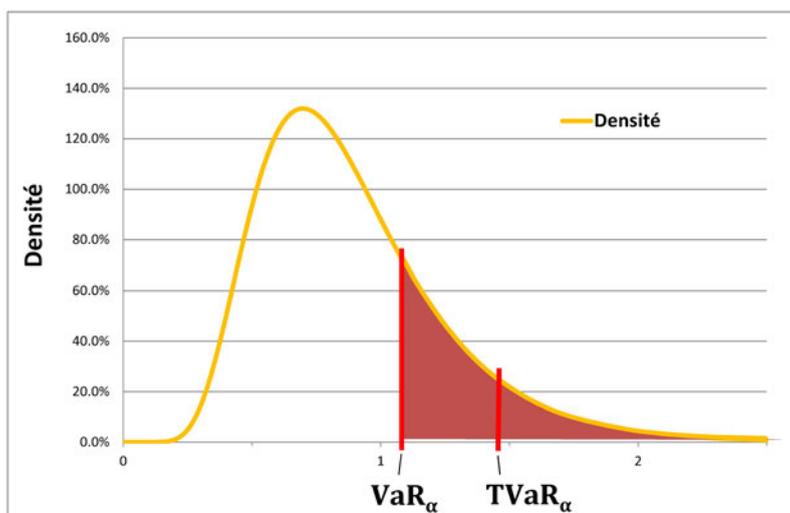


FIGURE 4.5 – Value-at-Risk et Tail-Value-at-Risk

La VaR ne tient en fait compte que d'un point de la queue alors que la TVaR tient compte de toute la queue à droite de cette VaR. Cela donne un avantage certain à la TVaR²¹. Reprenons l'exemple utilisé pour le CV ci-dessus. Le tableau ci-dessous présente la VaR et la TVaR à 90% pour X et Y :

	X	Y
$\text{VaR}_{90\%}$	76%	72%
$\text{TVaR}_{90\%}$	97%	73%

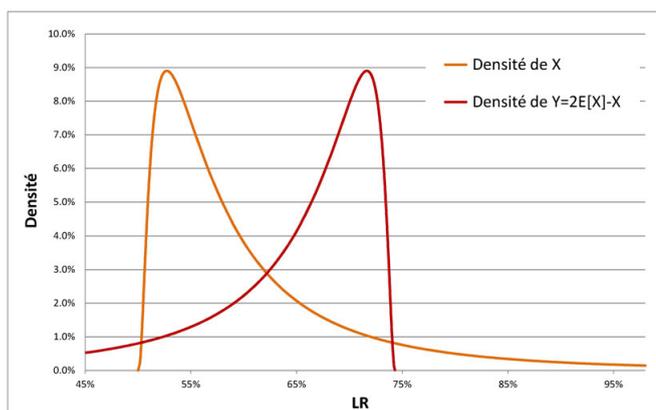


FIGURE 4.6 – VaR et TVaR pour deux distributions de même moyenne et même CV

21. Un autre avantage bien connu de la TVaR est qu'il s'agit d'une mesure de risque cohérente ce qui n'est pas le cas de la VaR. En effet, la VaR n'est pas sous-additive. Cette propriété est intéressante pour l'allocation du capital mais n'est pas majeure pour notre exercice.

Comme nous l'avions noté précédemment, la variable Y est bien moins risquée que la variable X et cela transparaît dans la TVaR qui est beaucoup plus importante pour X que pour Y alors que la VaR est très proche pour les deux.

Il a donc été décidé d'utiliser la TVaR comme mesure de risque pour l'optimisation. Le niveau $\alpha = 99\%$ (période de retour de 100 ans) a été retenu. Il s'agit en effet d'un horizon correct pour le marché de la réassurance.

4.2 Méthode d'optimisation

Pour notre problème, une solution analytique paraît beaucoup trop complexe. Il a donc été décidé de recourir à un algorithme de recherche par force brute (*brute-force search* en anglais). De manière générale et théorique, cette méthode consiste à tester l'univers des possibilités pour un problème donné et à retenir celles qui y répondent. Appliqué à notre étude, l'univers des possibilités est ici l'ensemble des portefeuilles possibles et ceux qui nous intéressent sont les portefeuilles dit préférables. Alors comment définit-on un portefeuille ?

Portefeuille

On définit un portefeuille P de dimension n comme étant un ensemble de variables $P = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ telles que :

$$P = (w_1, w_2, \dots, w_n) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ \forall i = 1, \dots, n \quad w_i \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.11)$$

Comme cité plus haut, on se place sous l'hypothèse que la prime totale P&C (ou le capital total) est constante. Sous cette hypothèse, w_i représentera le poids de la LoB i dans la prime P&C. Nous avons de plus scindé le portefeuille en 7 LoBs donc $n = 7$ dans notre cas. Cependant, il est important de noter que l'optimisation pourrait être réalisée de la même manière à un autre niveau que celui des LoBs. On pourrait par exemple optimiser par LoB et par pays en utilisant un portefeuille de dimension supérieure.

Aperçu de l'algorithme

- Mesurer le portefeuille actuel P_{2012} pour :

Rendement : RoE

Risque : TVaR de niveau 99% (100 ans)

- Générer des milliers de portefeuilles aléatoires
- Tester le rendement de chaque portefeuille aléatoire P par rapport à l'actuel P_{2012}

Si $\text{RoE}(P) \geq \text{RoE}(P_{2012})$ alors on garde P
sinon on rejette P

- Tester le risque de chaque portefeuille P restant

Si $\text{TVaR}_{99\%}(P) \leq \text{TVaR}_{99\%}(P_{2012})$ alors on garde P
sinon on rejette P

En sortie de cet algorithme on obtient l'ensemble des portefeuilles aléatoires générés qui ont un meilleur RoE et une TVaR moindre que le portefeuille actuel. Autrement dit, cet algorithme filtre les portefeuilles aléatoires pour ne garder que les portefeuilles préférables. Nous allons maintenant nous pencher sur la manière de générer des portefeuilles aléatoires.

4.2.1 Génération de portefeuilles aléatoires

Bien que intuitivement simple, la génération de portefeuilles aléatoires a été en fait un des problèmes majeurs que j'ai rencontrés au cours de ce travail. La génération de portefeuilles est en effet soumise à deux contraintes principales :

1. Premièrement, les portefeuilles générés doivent être uniformément répartis sur l'ensemble des portefeuilles possibles
2. Deuxièmement, on souhaite pouvoir contraindre les poids w_i à une valeur minimale et une valeur maximale.

La première contrainte semblait nécessaire pour d'une part, examiner l'univers tout entier des portefeuilles et d'autre part, ne pas biaiser le résultat final. En effet, si on fait le lien avec le travail réalisé ici, on ne souhaite pas favoriser une LoB particulière donc on ne veut pas qu'un des poids soit plus fréquemment que les autres proche de 1 par exemple. Formellement, le premier problème est donc de générer uniformément des n -uplets (w_1, w_2, \dots, w_n) tels :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ \forall i = 1, \dots, n \quad w_i \in]0, 1[\end{cases} \quad (4.12)$$

La seconde contrainte a pour objectif d'obtenir un résultat raisonnable, reflétant les contraintes du marché. En effet, si une LoB représente actuellement 50% du portefeuille, le marché ne nous permettra pas de doubler le volume de prime de cette LoB. À l'inverse, en vue des relations assureurs/réassureurs, il paraît peu probable que le réassureur soit en mesure de se libérer de cette LoB. C'est pourquoi l'on souhaite ajouter ces contraintes de minimum et maximum. Cela permettra par exemple de dire : pour cette LoB qui représente actuellement 50% du volume de prime du portefeuille, on considère que l'on peut arrêter de souscrire jusqu'à la moitié de la prime ou l'accroître jusqu'à 60% du portefeuille. On pourra alors imposer la contrainte que le poids de cette LoB soit compris entre 25% et 60%.

Formellement, ajouter des contraintes de minimum et de maximum pour chaque poids w_i devient simplement :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \\ \forall i = 1, \dots, n \quad \min_i \leq w_i \leq \max_i \end{cases} \quad (4.13)$$

Pour ce qui est du premier problème, il en existe une solution simple. L'équation 4.12 est en fait l'équation d'un sous-espace de \mathbb{R}^n , le $(n - 1)$ -simplexe standard. Si on se place en dimension 3 pour pouvoir l'observer, l'univers des portefeuilles est donc un sous-espace de \mathbb{R}^3 décrit par l'intérieur du triangle reliant les points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$:

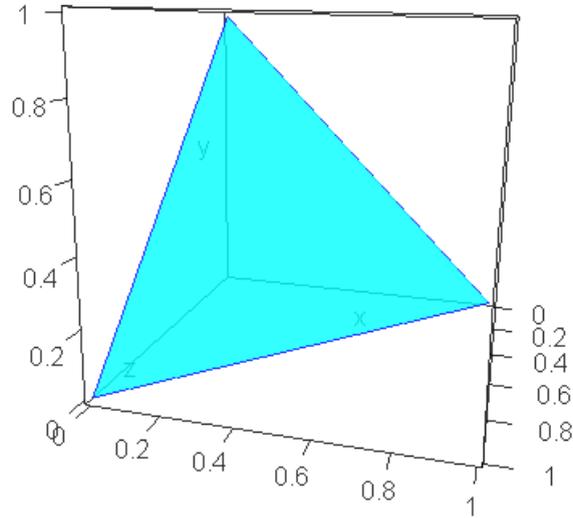


FIGURE 4.7 – 2-simplexe dans un espace euclidien à 3 dimensions

Tout point de coordonnées (x, y, z) à l'intérieur de ce triangle est donc un portefeuille c'est-à-dire que ses coordonnées vérifient $x + y + z = 1$ et sont comprises entre 0 et 1.

Il existe un algorithme simple donné dans [9] DEVROYE, *Non-uniform random variate generation* pour générer cette distribution. L'algorithme est le suivant²² :

1. Générer n variables i.i.d. U_1, U_2, \dots, U_n uniformes sur $[0, 1]$
2. Calculer pour i allant de 1 à n , $E_i := -\log[U_i]$
3. Calculer la somme des E_i : $G := E_1 + E_2 + \dots + E_n$
4. Puis calculer pour i allant de 1 à n : $S_i := \frac{E_i}{G}$

Le vecteur $(S_1, S_2, \dots, S_n)'$ est distribué uniformément sur le $(n-1)$ -simplexe standard.

Devroye montre en effet que si $(E_i)_{i=1, \dots, n}$, n variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1²³ et G leur somme, la distribution de $(\frac{E_1}{G}, \frac{E_2}{G}, \dots, \frac{E_n}{G})'$ est uniforme sur le $(n - 1)$ -simplexe standard. On note que cet algorithme est aussi un cas particulier de tirage d'une distribution de Dirichlet où tous les paramètres sont égaux à 1.

22. Le code R est consultable en annexe 4.3

23. Les étapes 1. et 2. reviennent à générer n variables i.i.d. $(E_i)_{i=1, \dots, n}$ de loi exponentielle de paramètre 1 par inversion de la fonction de répartition : $F(x) = 1 - e^{-x} \Rightarrow F^{-1}(x) = -\log(1-x)$ puis $U \sim \mathcal{U}[0, 1] \Rightarrow 1-U \sim \mathcal{U}[0, 1]$

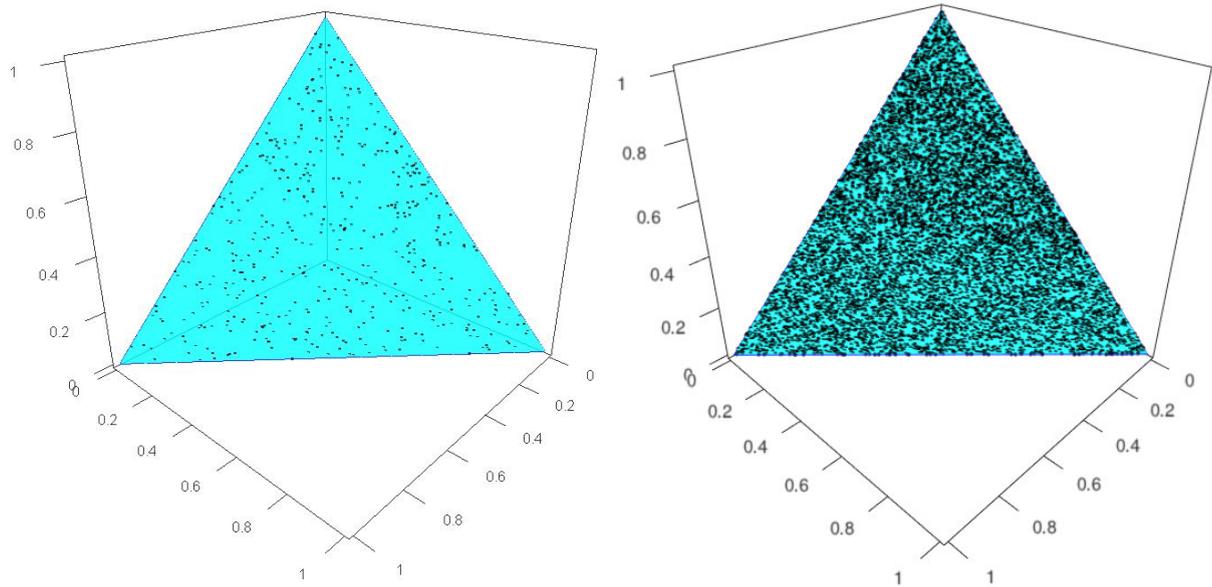


FIGURE 4.8 – 500 et 10000 points générés par l’algorithme proposé par Devroye en dimension 3

Les points semblent bien uniformément répartis sur l’ensemble des portefeuilles (c’est-à-dire le 2-simplexe standard).

Cet algorithme constitue une solution au premier problème. Cependant, j’ai pu trouver une solution plus générale répondant aussi au problème de contraintes de minimum et de maximum grâce à l’algorithme *Hit and Run*.

Algorithme *Hit and Run*

Les algorithmes *Hit and Run* (que l’on pourrait traduire par "qui réalise une action puis s’en va rapidement") sont une classe d’algorithmes puissants basés sur les marches aléatoires et utilisés pour générer des points aléatoires dans des convexes de dimension quelconque. Dans le cas général²⁴, la distribution vers laquelle les points générés convergent sur le convexe peut être choisie. Le cas qui nous intéresse ici est celui où les points générés convergent vers une distribution uniforme sur le $(n - 1)$ -simplexe standard. Nous allons utiliser la version *Hypersphere Directions* (HD ou "Directions de tirées de l’hypersphère" en français) de l’algorithme *Hit and Run* et l’adapter à notre problème.

Reprenons tout d’abord l’algorithme tel qu’il est présenté pour un convexe S dans [4] BÉLISLE, BONEH et CARON, "Convergence properties of hit-and-run samplers" et [5] BÉLISLE, ROMELIJN et SMITH, "Hit-and-run algorithms for generating multivariate distributions" et adapté au problème uniforme :

24. Le cas général est étudié dans [5] BÉLISLE, ROMELIJN et SMITH, "Hit-and-run algorithms for generating multivariate distributions". Les démonstrations s’appliquent évidemment au cas particulier de la loi uniforme.

1. **Initialisation :**

On choisit un point de départ $x_0 \in S$, le nombre de points désiré $n \in \mathbb{N}$ et on fixe $k := 0$.

2. **Hit :**

On choisit une direction aléatoire θ_k de distribution uniforme sur la sphère unité définie par $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

3. **Run :**

On choisit $\lambda_k \in \Lambda_k = \{\lambda \in \mathbb{R} : x_k + \lambda\theta_k \in S\}$ de manière uniforme.

4. **Boucle :**

On pose $x_{k+1} := x_k + \lambda_k\theta_k$.

Si $k < n$ alors on retourne en 2. sinon fin de l'algorithme.

Il est maintenant nécessaire d'adapter cet algorithme à notre problème avec contraintes de minimum et de maximum. On suppose que l'on dispose de deux vecteurs de $[0, 1]^n$, $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)'$ et $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)'$ représentant respectivement les contraintes de minimum et les contraintes de maximum sur les poids du portefeuille. On définit :

- $A_n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n : \forall i, m_i \leq x_i \leq M_i\}$.
- $S_n := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n)' \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$ l'hyperplan dans lequel réside le $(n - 1)$ -simplexe standard.

Le convexe sur lequel on souhaite générer des points est donc l'intersection $D_n := S_n \cap A_n$ qui est un sous-espace à $n - 1$ dimensions du $(n - 1)$ -simplexe standard.

Reprenons étape par étape l'algorithme ci-dessus.

Tout d'abord, le convexe S de l'algorithme est ici D_n , mais on s'intéresse dans un premier temps à S_n , les contraintes A_n seront intégrées à la démonstration dans un deuxième temps.

La difficulté majeure vient de l'étape **Hit**. En effet, S_n étant de dimension $n - 1$, on ne peut plus choisir une direction aléatoire sur la sphère unité car on risquerait alors de sortir de l'hyperplan S_n .

On cherche donc à générer des points t_k aléatoirement sur la $(n - 2)$ -sphère, de rayon 1 et de centre $x_k \in D_n$, inscrite dans l'hyperplan S_n défini ci-dessus. Cette $(n - 2)$ -sphère peut-être vue comme l'intersection de S_n avec la $(n - 1)$ -sphère de rayon 1 centrée en x_k . Ces points t_k vérifient donc l'équation²⁵ :

$$\begin{cases} \|x - x_k\| = 1 \\ A'x = 1 \text{ où } A = 1_n = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.14)$$

Cela revient finalement à générer des directions θ_k telle que : $t_k = x_k + \theta_k$ qui vérifient donc :

$$\begin{cases} \|x\| = 1 \\ A'x = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

25. Cette équation équivaut à $\sum_i x_i = 1$ mais on adopte l'écriture vectorielle pour simplifier les calculs.

Or, [9] DEVROYE, *Non-uniform random variate generation* propose une méthode très utile pour générer des vecteurs distribués uniformément sur la $(n - 1)$ -sphère unité de \mathbb{R}^n . L'algorithme est le suivant ²⁶ :

1. Générer n variables i.i.d. N_1, N_2, \dots, N_n de loi normale. On pose N le vecteur $(N_1, N_2, \dots, N_n)'$
2. Calculer $S := \|N\| = \sqrt{N_1^2 + N_2^2 + \dots + N_n^2}$
3. Le vecteur $\frac{N}{S} = (\frac{N_1}{S}, \frac{N_2}{S}, \dots, \frac{N_n}{S})$ est uniformément distribué sur la $(n - 1)$ -sphère unité de \mathbb{R}^n .

Le graphique suivant est un exemple en 2 dimensions de 100 points générés par cet algorithme ²⁷ :

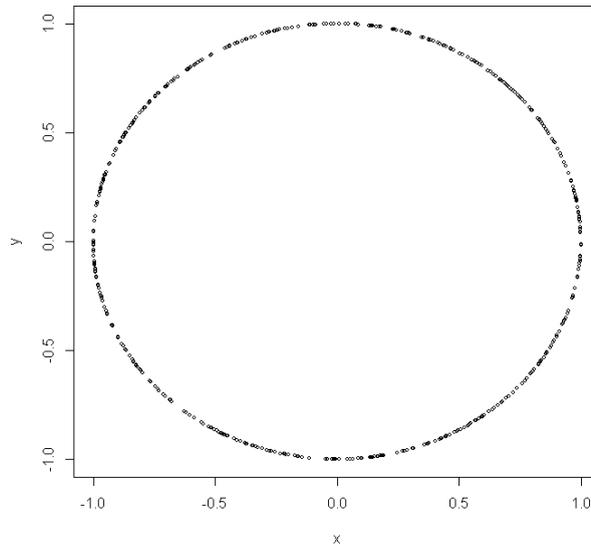


FIGURE 4.9 – Tirage uniforme de 500 points sur le cercle (1-sphère) unité

Nous allons adapter cet algorithme à l'équation 4.15 pour la génération de θ_k . Nous allons projeter N sur l'hyperplan $A'x = 0$ puis normaliser ce nouveau vecteur. La loi normale étant stable par combinaison linéaire, le projeté de N sera bien normalement distribué. En le normalisant, on obtiendra donc bien des points uniformément distribués sur une $(n-2)$ -sphère centrée en 0 et sur l'hyperplan $A'x = 0$.

Formellement, comme dans l'algorithme de Devroye, on commence par générer $N \sim \mathcal{N}(0, I_n)$. Pour projeter ce vecteur sur l'hyperplan $A'x = 0$, on cherche α tel que : $A'(x + \alpha A) = 0$. Soit :

$$\begin{aligned}
 A'(x + \alpha A) = 0 &\Leftrightarrow A'x + \alpha A'A = 0 \\
 &\Leftrightarrow A'x + \alpha n = 0 \quad \text{car } A = 1_n \Rightarrow A'A = n \\
 &\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{n} A'x \\
 &\Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j
 \end{aligned}$$

²⁶. La démonstration peut être consultée page 227-228 de [9] DEVROYE, *Non-uniform random variate generation*

²⁷. Le code R est consultable en annexe page 76

D'où en notant H le projeté de N sur l'hyperplan $A'x = 0$:

$$H = N - \frac{1}{n}AA'N \quad \text{soit} \quad \forall i, H_i = N_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_j \quad (4.16)$$

Comme vu précédemment, H est bien normalement distribué. On normalise donc pour obtenir les points voulus :

$$\theta_k = \frac{H}{\|H\|} \quad (4.17)$$

Pour une meilleur traduction graphique, on choisit de translater la sphère en le centre x_k dans l'hyperplan S_n .²⁸

$$t_k = x_k + \frac{H}{\|H\|} \quad (4.18)$$

On peut alors observer le résultat sur le simplexe²⁹ de la page 46 :

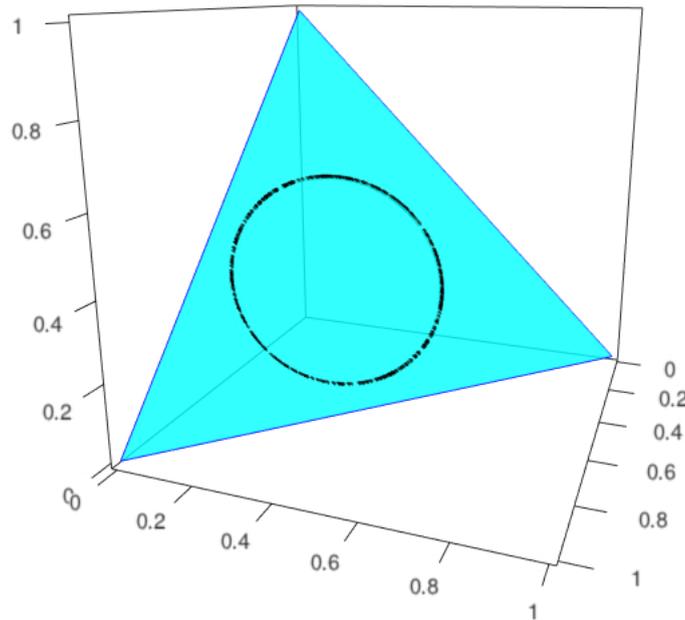


FIGURE 4.10 – Tirage uniforme de 500 points sur une 1-sphère inscrite dans le 2-simplexe standard

Nous venons donc de voir comment l'étape **Hit** allait être réalisée pour notre problème. Il ne reste plus qu'à résoudre l'étape **Run**. On cherche donc $\Lambda_k = \{\lambda \in \mathbb{R} : x_k + \lambda\theta_k \in D_n\}$. On a construit θ_k de manière à ce que : $A'\theta_k = 0$ donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, A'(x_k + \lambda\theta_k) = 1$. On a donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x_k + \lambda\theta_k \in S_n$. On rappelle que $D_n = S_n \cap A_n$. Il ne reste donc qu'à trouver l'ensemble des λ tels que $x_k + \lambda\theta_k \in A_n$.

On considère pour simplifier l'expression $x + \lambda\theta$ et x_i et θ_i la i -ème coordonnées des vecteurs x et θ . D'après la définition de A_n , cela revient donc à résoudre :

$$\forall i = 1, \dots, n, m_i \leq x_i + \lambda\theta_i \leq M_i \quad (4.19)$$

28. On peut aussi modifier le rayon R , en utilisant : $x_k + \frac{H}{\|H\|} \cdot R$

29. Le code R de l'algorithme est consultable en annexe page 76

On résout directement :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, n, m_i \leq x_i + \lambda \theta_i \leq M_i &\Leftrightarrow m_i - x_i \leq \lambda \theta_i \leq M_i - x_i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m_i - x_i}{\theta_i} \leq \lambda \leq \frac{M_i - x_i}{\theta_i} & \text{si } \theta_i > 0 \\ \frac{M_i - x_i}{\theta_i} \leq \lambda \leq \frac{m_i - x_i}{\theta_i} & \text{si } \theta_i < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On pose alors :

$$L_i = \begin{cases} \frac{m_i - x_i}{\theta_i} & \text{si } \theta_i > 0 \\ \frac{M_i - x_i}{\theta_i} & \text{si } \theta_i < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad L = \max_{1 \leq i \leq n} L_i \quad (4.20)$$

$$U_i = \begin{cases} \frac{M_i - x_i}{\theta_i} & \text{si } \theta_i > 0 \\ \frac{m_i - x_i}{\theta_i} & \text{si } \theta_i < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad U = \min_{1 \leq i \leq n} U_i \quad (4.21)$$

On en déduit :

$$\Lambda = [L, U] \quad (4.22)$$

Le choix de λ_k se fait donc simplement en faisant un tirage uniforme sur $[L, U]$.

En résumé, l'algorithme pour notre problème devient :

1. Initialisation :

On choisit un point de départ $x_0 \in D_n$, le nombre de points désiré $n \in \mathbb{N}$ et on fixe $k := 0$.

2. Hit :

On choisit une direction aléatoire θ_k de distribution uniforme sur une $(n-2)$ -sphère unité inscrite dans S_n .

3. Run :

On calcule L et U pour le vecteur x_k comme ci-dessus.

On choisit λ_k dans $\Lambda_k = [L, U]$ de manière uniforme.

4. Boucle :

On pose $x_{k+1} := x_k + \lambda_k \theta_k$.

Si $k < n$ alors on retourne en 2. sinon fin de l'algorithme.

Graphiquement, en 3 dimensions, cela donne :

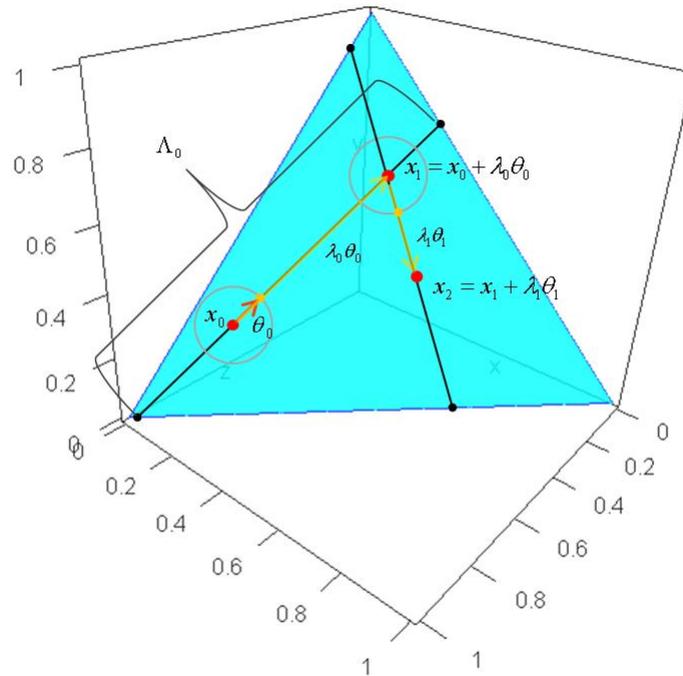


FIGURE 4.11 – Algorithme Hit and Run en dimension 3

On peut alors de la même manière que pour l'algorithme proposé par Devroye, générer des portefeuilles sans contrainte :

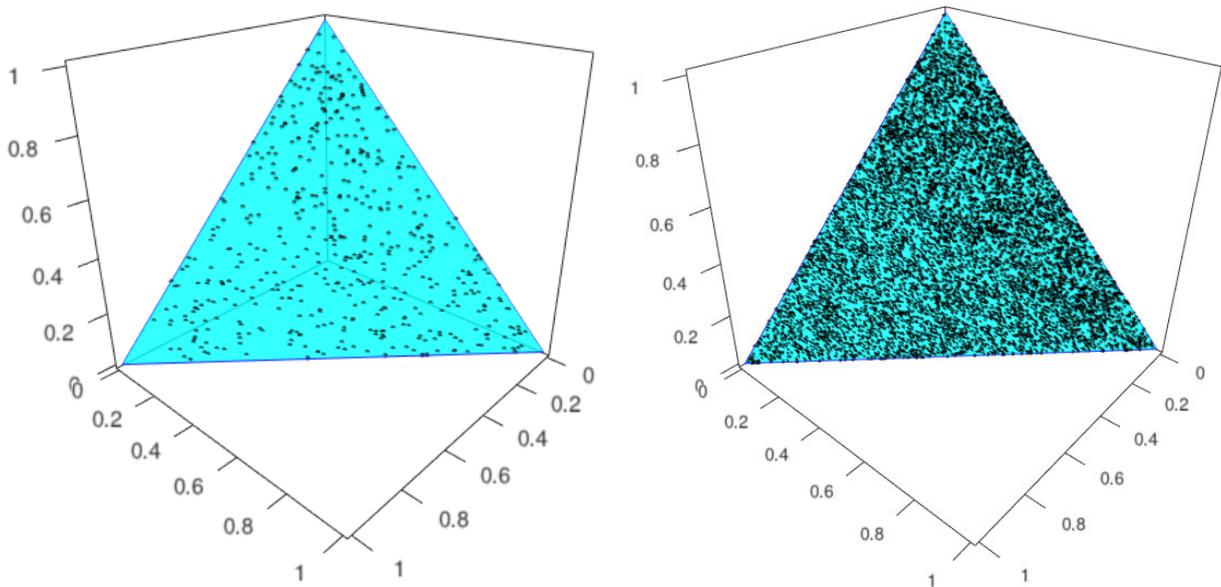


FIGURE 4.12 – 500 et 10000 portefeuilles sans contrainte générés par Hit and Run HD

Mais de plus, il est possible de générer des portefeuilles sous contraintes de minimum et de maximum par poids. Ici, un exemple en 3 dimensions avec les contraintes de minimum $m = (0.2, 0.3, 0)$ et de maximum $M = (0.4, 0.7, 0.6)$

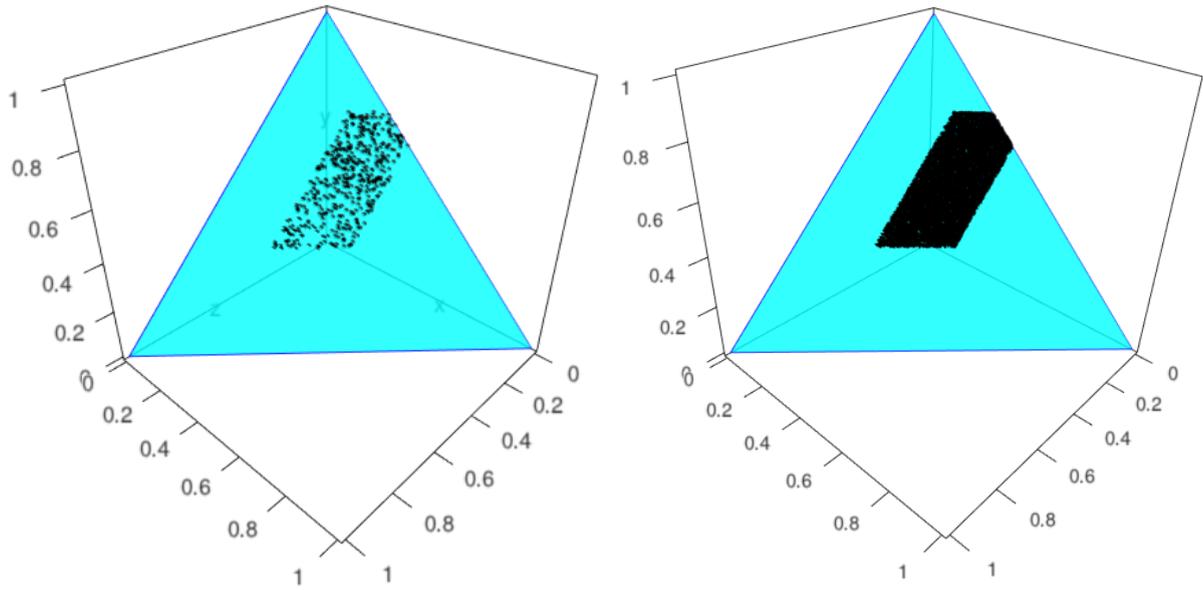


FIGURE 4.13 – 500 et 10000 portefeuilles sous contraintes générés par Hit and Run HD

Vérification de l'uniformité

On souhaite ici vérifier l'uniformité de la méthode *Hit and Run*. La solution proposée ici est incomplète et ne fonctionne que sur le simplexe entier c'est-à-dire une génération sans contrainte. Cependant, cela permet une vérification empirique rapide de l'uniformité. Cette solution repose sur le fait que si des points sont uniformément distribués sur un espace S , le nombre de points appartenant à un sous-espace de S devrait être proportionnel au volume de ce sous-espace par rapport au volume de S . Si l'on considère un $(n - 1)$ -simplexe, le sous-espace qui a été choisi ici est une $(n - 2)$ -sphère centrée en $\frac{1}{n} \cdot 1_n$ et de rayon R . Si N points sont uniformément distribués sur le simplexe, le nombre de points espéré dans la sphère est donc :

$$\frac{V_{Sphere}}{V_{Simplexe}} \cdot N \quad (4.23)$$

La vérification consiste donc à comparer ce nombre espéré au nombre de points dans l'hypersphère générés par l'algorithme *Hit and Run*. L'équation précédente est calculable car on connaît une expression analytique du volume d'une hypersphère et du volume du simplexe :

$$V_{Sphere} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} R^n \quad (4.24)$$

$$V_{Simplexe} = \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}} \quad (4.25)$$

On considère pour les dimensions de 3, 5 et 7 la moyenne pour 100 tirages de l'erreur entre le nombre de points générés et espérés : $1 - n_{\text{généré}}/n_{\text{espéré}}$.

Dimension \ N	1,000	10,000	100,000
3	9.8%	3.2%	1.20%
5	22%	6.1%	2.10%
7	32%	8.3%	3.50%

TABLE 4.1 – Test d'uniformité

Le code R est disponible en annexe en page 78. La convergence semble donc acceptable passé 10,000 points générés même à 7 dimensions.

Maintenant que nous pouvons générer des portefeuilles aléatoires, reste à savoir comment agréger les ALD des LoBs de ces portefeuilles. La seule barrière restante est la structure de dépendance.

4.2.2 Dépendance inter-LoB

Pour étudier la dépendance entre les LoBs, nous n'avons à notre disposition que très peu d'information. Pour ce qui est de la structure, le manque de données empêchant une étude théorique approfondie, nous faisons confiance au choix fait pour le modèle interne qui est la copule à gaussienne. Pour ce qui est des paramètres de cette copule, nous allons tout de même les estimer à partir des données disponibles. Ces données sont les LR historiques de 1993 à 2011. Ce sont sur ces données que nous allons travailler. L'examen du graphique combinant les rangs de chaque LoB est très instructif :

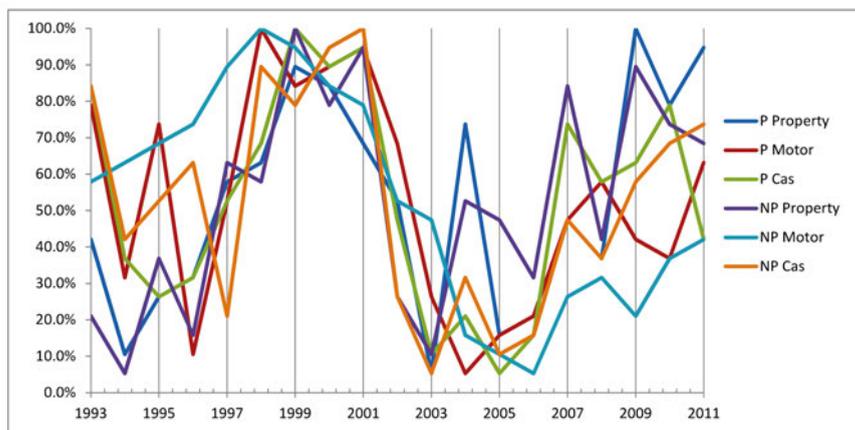


FIGURE 4.14 – Graphique combiné des rangs de chaque LoB par année

En observant ce graphique, on note tout de suite une tendance générale des rangs des LoBs qui dessinée grossièrement ressemblerait à la courbe ci-dessous :

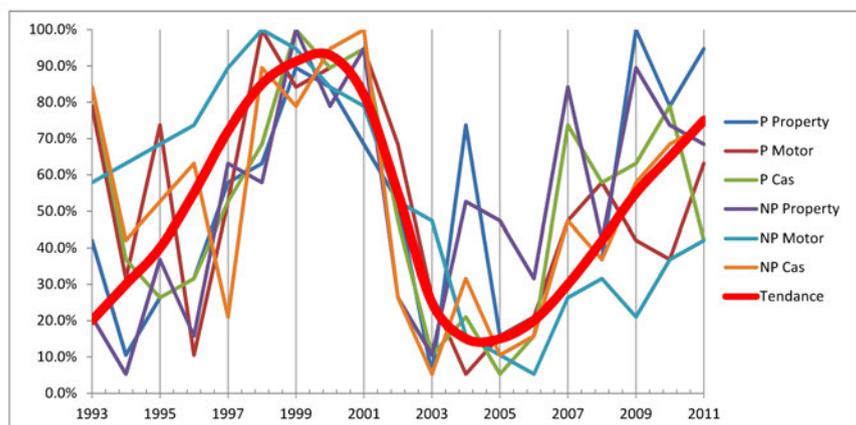


FIGURE 4.15 – Tendence des rangs des LoBs

Cette tendance est due à ce qu'on appelle le cycle de la réassurance. Le prix de la réassurance présente d'importantes variations au cours du temps. Ces variations sont souvent dues à de gros évènements. Si une longue période sans évènement se produit dans une zone particulière, les prix de la réassurance vont avoir tendance à baisser, on dit alors qu'on est en *soft market* (littéralement "marché mou"). À l'inverse, quand d'importants évènements se produisent, les prix vont avoir tendance à augmenter et on parle alors de *hard market* (littéralement "marché dur"). Chaque branche et région a son propre cycle mais on dénote tout de même une tendance du marché que l'on retrouve ci-dessus. En me référant à l'expérience de l'équipe, leurs informations confirment l'origine de la tendance sur le graphique ci-dessus :

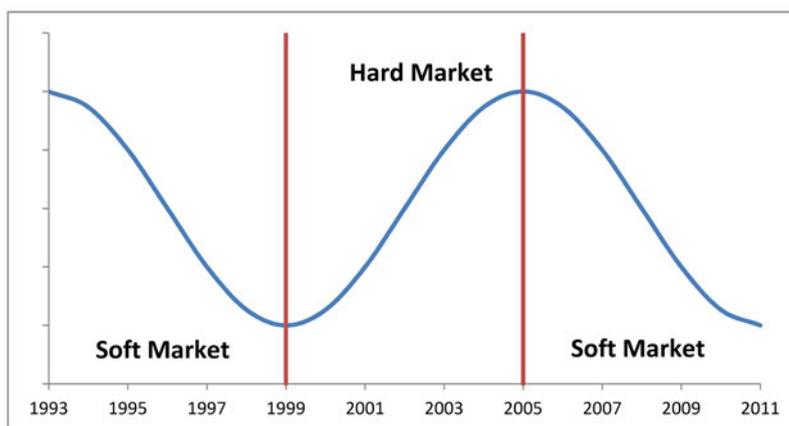


FIGURE 4.16 – Évolution qualitative du montant des primes de réassurance selon l'équipe

Le LR étant inversement proportionnel à la prime, les variations observées dans ces deux graphiques sont analogues.

Ce cycle sur la prime impacte donc fortement les LR des différentes LoBs et la dépendance entre ces LR. Cependant, cet effet du cycle a déjà été capturé lors de la tarification. Le LR moyen calculé à ce moment là est calculé pour une prime donnée et donc pour une position donnée sur le cycle.

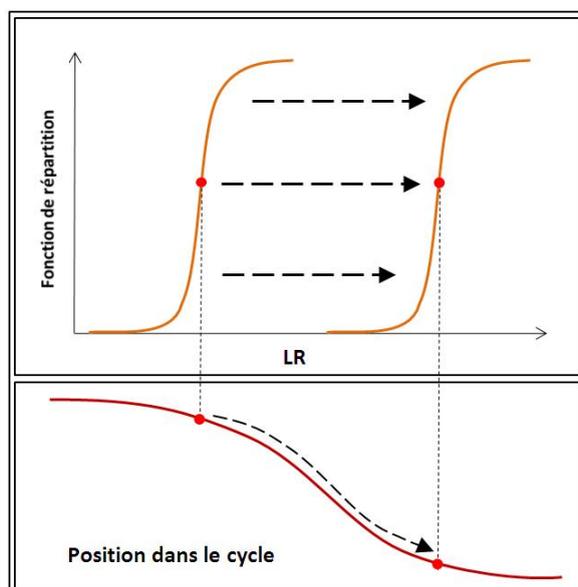


FIGURE 4.17 – Évolution du LR avec le cycle des primes

Nous ne pouvons donc pas utiliser des corrélations de rang calculées sur ces LR historiques sous peine de tenir compte deux fois de l'effet du cycle. Pour supprimer cet effet de cycle, nous avons eu recours à une méthode polynomiale sous *Excel*. Cette méthode consiste à ajuster un polynôme $P(x)$ aux LR de chaque LoB. Puis à décycler (en quelque sorte rendre *as-if* pour l'année 2011) les LR par :

$$LR_i \cdot \frac{P(\text{année 2011})}{P(i)} \quad (4.26)$$

Un exemple avec une LoB X^{30} du portefeuille. On a ajusté un polynôme de degré 5 à cette série après avoir testé graphiquement différents degrés. Le tableau et le graphique suivant présente les calculs et le résultat :

Année	i	LR_i	$P(i)$	$LR_i \cdot \frac{P(19)}{P(i)}$
1993	1	66%	65%	87.1%
1994	2	56%	57%	86.4%
1995	3	59%	58%	87.7%
1996	4	64%	65%	86.3%
1997	5	71%	72%	85.5%
1998	6	72%	77%	80.2%
1999	7	89%	80%	96.6%
2000	8	83%	79%	91.5%
2001	9	72%	75%	83.0%
2002	10	69%	70%	85.2%
2003	11	51%	65%	68.7%
2004	12	73%	60%	104.4%
2005	13	58%	58%	86.6%
2006	14	59%	60%	85.3%
2007	15	68%	64%	91.0%
2008	16	65%	72%	78.2%
2009	17	90%	81%	97.4%
2010	18	79%	87%	78.3%
2011	19	90%	87%	89.6%

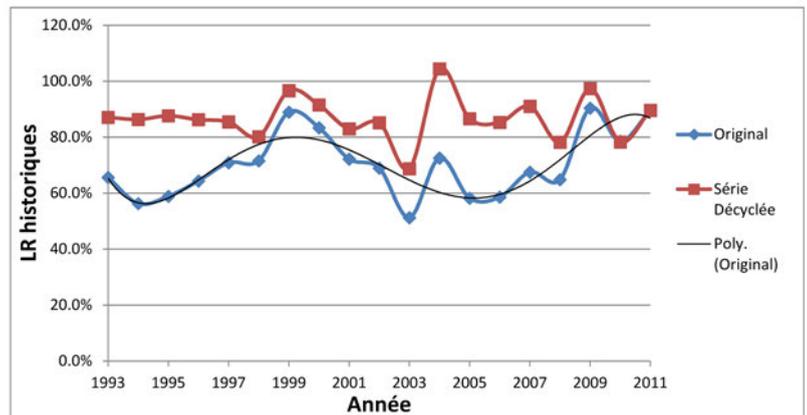


FIGURE 4.18 – Décyclage de la LoB X

Cette méthode qui paraissait intéressante en théorie s'est avérée beaucoup trop subjective en pratique. En effet, le choix de l'allure du cycle, c'est-à-dire du polynôme, est basé sur une opinion personnelle. Cela implique une incertitude trop importante quant aux résultats, d'autant plus que l'on ne possède que 19 points. Les corrélations estimées sont trop peu stables selon le choix de l'allure du cycle. Cette méthode sera probablement plus probante avec plus d'années d'historique.

Cependant, les matrices obtenues, bien que peu robustes, tendent à confirmer l'intuition

30. LoB non identifiée pour des raisons de confidentialité.

d'une plus faible corrélation une fois les LR décyclés. Par ailleurs, les corrélations intra-LoB entre P et NP restent en général supérieures aux corrélations inter-LoB. Quant aux corrélations inter-LoB, une se détache : la corrélation *Casualty-Property* qui semble plus élevée, mais ceci reste à valider.

Il a donc été décidé de garder la matrice établie par jugement d'experts et utilisée par l'équipe. Elle est présentée ci-dessous :

	Property NP	Motor NP	Casualty NP	Property P	Motor P	Casualty P	Cat
Property NP	100%	10%	10%	25%	10%	10%	40%
Motor NP		100%	25%	10%	25%	25%	25%
Casualty NP			100%	10%	25%	25%	10%
Property P				100%	10%	10%	25%
Motor P					100%	25%	25%
Casualty P						100%	10%
Cat							100%

TABLE 4.2 – Matrice des rho de Spearman inter-LoB

4.3 Résultats

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'optimisation. Bien que le programme d'optimisation fournisse l'ensemble des portefeuilles préférables parmi les portefeuilles testés, le résultat considéré est la moyenne des portefeuilles préférables. Dans un premier temps, l'optimisation a été réalisée à prime constante. Tout d'abord sur 10,000 portefeuilles générés sans contrainte, puis sur 10,000 portefeuilles générés sous contraintes de minimum et de maximum. Dans un second temps, l'optimisation a été réalisée dans les mêmes conditions mais à capital constant.

Optimisation à prime constante

La prime P&C totale est supposée être de 100 millions de dollars américains³¹. Le tableau suivant présente les contraintes qui ont été retenues pour chaque branche avec l'aide de l'équipe.

	Minimum	Maximum
Property NP	10%	30%
Motor NP	2%	20%
Casualty NP	2%	20%
Property P	30%	50%
Motor P	15%	30%
Casualty P	5%	20%
Cat	0%	4%

TABLE 4.3 – Contraintes choisies (en pourcentage de prime)

31. Prime maintenue secrète pour des raisons de confidentialité.

Les résultats de l'optimisation avec et sans contraintes sont présentés dans le tableau ci-dessous. Le capital est ici calculé à partir des SR qui nous sont fournis par le groupe.

	Portefeuille actuel	Portefeuille préférable sans contrainte	Portefeuille préférable sous contraintes
Ventilation de la prime totale			
Property NP	15%	16%	16%
Motor NP	6%	12%	8%
Casualty NP	4%	14%	8%
Property P	42%	18%	36%
Motor P	23%	15%	20%
Casualty P	8%	24%	11%
Cat	2%	1%	1%
Variations			
RoE		+230 bp	+100 bp
TVaR 99%		-16%	-17%
Capital requis		+26%	+8%

Le graphique suivant permet de mieux apprécier ces résultats :

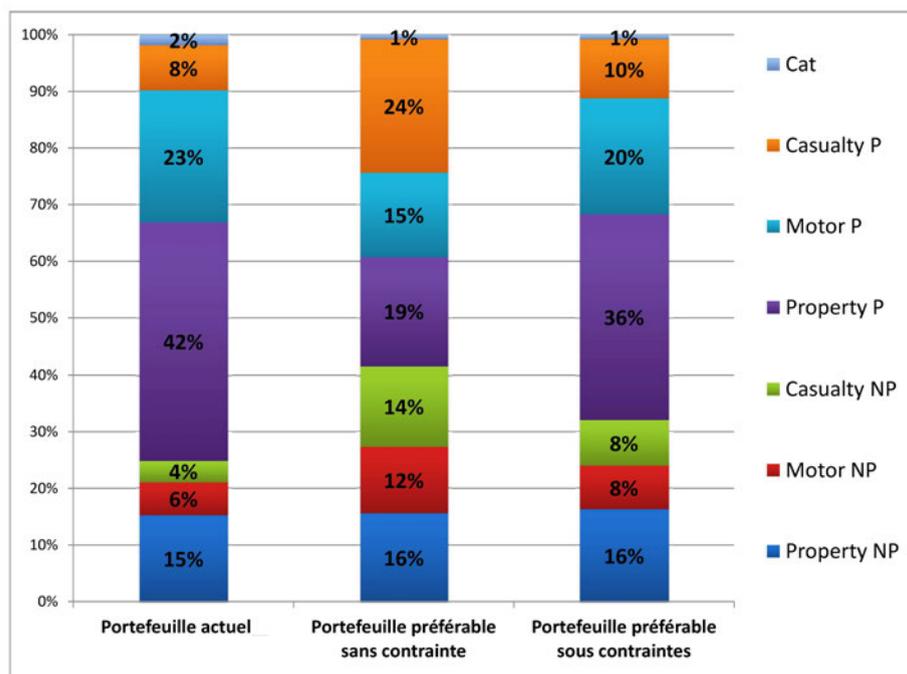


FIGURE 4.19 – Résultats de l'optimisation à prime constante

Au niveau de l'optimisation, bien qu'elles soient moins prononcées sous contraintes, les tendances sont les mêmes dans les deux cas. Les principales branches à développer sont le *Motor NP*

et le *Casualty* P et NP. À l'inverse, la branche systématiquement réduite est le *Property* P. On remarque aussi que l'optimisation accroît dans les deux cas le besoin en capital alors que la TVaR diminue. Le capital est calculé à partir des SR que l'on suppose constants. Ces SR sont calculés par le groupe sur la base de l'ALD mais aussi d'autres facteurs pour, entre autres, tenir compte des risques à développement long. Le *Motor* NP est, par exemple, une branche à développement très long. Augmenter le volume de primes de cette branche augmentera donc sensiblement le besoin en capital. Cela explique la déconnexion entre capital requis et TVaR.

Optimisation à capital constant

L'optimisation à capital constant est plus intéressante pour l'entreprise. On suppose que le capital total du P&C est constant.

Le tableau suivant présente les contraintes retenues en pourcentage du capital total.

	Minimum	Maximum
Property NP	9%	26%
Motor NP	6%	45%
Casualty NP	5%	45%
Property P	25%	45%
Motor P	7%	15%
Casualty P	4%	15%
Cat	0%	15%

TABLE 4.4 – Contraintes choisies (en pourcentage du capital)

Puis de la même manière, les résultats avec et sans contraintes en pourcentage du capital :

	Portefeuille actuel	Portefeuille préférable sans contrainte	Portefeuille préférable sous contraintes
Ventilation du capital total			
Property NP	13%	14%	16%
Motor NP	18%	21%	16%
Casualty NP	9%	18%	14%
Property P	37%	15%	32%
Motor P	11%	10%	10%
Casualty P	6%	19%	9%
Cat	6%	3%	3%
Variations			
RoE		+250 bp	+100 bp
TVaR 99%		-24%	-20%
Prime		-19%	+0.5%

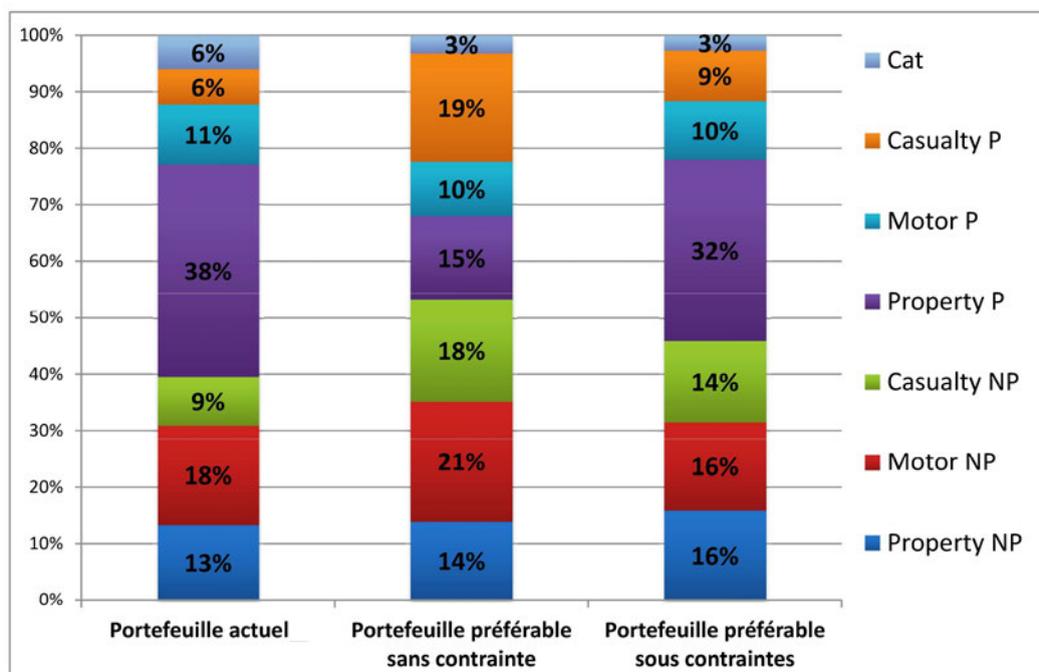


FIGURE 4.20 – Résultats de l'optimisation à capital constant

J'ai tout d'abord pu remarquer que le RoE et la TVaR du portefeuille actuel sont différents de ceux calculés à prime constante. Cette différence vient du fait qu'on ne travaille plus sur les mêmes simulations de TR. Les mesures ne convergent donc pas parfaitement, mais l'optimisation étant réalisée sur les mêmes simulations on conserve tout de même les résultats. Pour ce qui est des tendances de l'optimisation, on note de la même manière qu'à prime constante un développement du *Casualty* P et NP et une réduction du *Property* P. Le *Motor* NP est contrairement aux

résultats à prime constante légèrement réduit par l'optimisation sous contraintes. Ce résultat s'explique par la demande en capital de cette branche. Il s'agit d'une branche à développement long avec d'importantes durations des pertes, qui requiert donc beaucoup de capital de réserve. On note ici que l'optimisation sous contraintes maintient à peu près le volume de primes du portefeuille alors que sans contrainte le volume de prime diminue sensiblement.

On s'intéresse principalement aux optimisations sous contraintes. Le tableau suivant permet de comparer les optimisations sous contraintes à prime et à capital constant. Pour cela, les portefeuilles ont été transformés en pourcentage de leur prime totale. Le vert indique une tendance à la hausse par rapport au portefeuille actuel et le rouge une tendance baissière.

	Actuel	Prime constante	Capital constant
Ventilation de la prime totale			
Property NP	15%	16%	18%
Motor NP	6%	8%	5%
Casualty NP	4%	8%	6%
Property P	42%	36%	36%
Motor P	23%	21%	23%
Casualty P	8%	11%	11%
Cat	2%	1%	1%
Variations par rapport au portefeuille actuel			
RoE		+100 bp	+100 bp
TVaR		-17%	-20%
Prime totale		0	+1%
Capital total		+8%	0

TABLE 4.5 – Résultats en pourcentage de prime des optimisations sous contraintes

Les tendances sont donc les mêmes à l'exception du *Motor* NP. Les performances du portefeuille préférable moyen sont cependant meilleures à capital constant. De plus, l'optimisation à capital constant n'entraîne qu'une très légère augmentation du volume de prime.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était l'optimisation du portefeuille P&C du réassureur PartnerRe. Cette optimisation a été réalisée à un niveau LoB. La première étape a donc été d'agréger les distributions de pertes de chaque traité pour obtenir l'ALD de chaque LoB.

Pour l'agrégation une étude de la dépendance entre traités a été réalisée. Elle a permis, sous l'hypothèse d'un modèle gaussien, de corroborer les paramètres suggérés par l'équipe sur la base de son expérience. Une seconde étude menée sur les pertes historiques du *Property* NP a montré que la copule Gaussienne était acceptable dans ce cas mais que la copule de Student semblait mieux concorder avec les dépendances de queues observées. Cependant, le modèle gaussien étant actuellement exigé par la compagnie, il a été conservé. Nous avons ainsi pu construire les ALDs de chaque LoB Non-Cat par simulation. L'ALD de la LoB Cat est un cas particulier puisque la modélisation est effectuée grâce à des modèles Cat spécialisés dont nous avons détaillé le fonctionnement.

L'optimisation s'est faite par force brute sur le RoE et la TVaR. Nous avons donc introduit un algorithme dit *Hit and Run* permettant la génération uniforme de portefeuilles aléatoires. Cette méthode a l'avantage de pouvoir générer des portefeuilles de dimension quelconque et avec des contraintes de minimum et de maximum sur chacun des poids. Le problème de la dépendance a dû être également abordé mais cette fois ci entre LoBs. L'étude des LR historiques a permis d'exposer l'important impact du cycle de réassurance. Une méthode simple a été proposée pour décycler l'historique mais s'est révélée trop imprécise. Cependant, les résultats, bien que peu robustes, ont conforté la vue de l'équipe actuarielle sur les corrélations entre LoB. En particulier, le fait que les corrélations entre LoB P et NP sont plus importantes qu'entre deux LoBs quelconques.

Au regard des résultats de l'optimisation à un niveau LoB, je préconiserais pour améliorer le portefeuille actuel de s'axer sur le développement du *Casualty* aux dépens du *Property* P. Par ailleurs, toutes les méthodes et algorithmes décrits dans ce mémoire pourraient être appliqués à un niveau plus fin. On pense notamment à un niveau région ou même pays. On optimiserait alors avec l'avantage d'avoir des connaissances plus précises des pratiques de chaque marché.

Plusieurs évolutions pourrait être profitables au modèle. Tout d'abord, il serait intéressant de trouver une mesure du risque innovante combinant la TVaR avec, par exemple, la durée des pertes de chaque LoB pour tenir compte du risque encouru par des branches à développement long.

Ensuite, on pourrait ajouter une hypothèse de détérioration des ALDs avec le volume de primes. En effet, on peut considérer que si le portefeuille actuel est bien souscrit, une augmentation de notre part sur une LoB entraînerait une dégradation de la qualité du portefeuille et donc des ALDs plus sévères.

Enfin, la structure de dépendance reste, selon moi, la principale faiblesse du modèle décrit dans ce mémoire. Le manque de données en est la cause première. Pour parer à ce problème, il pourrait être bénéfique de faire des tests de sensibilité sur différentes copules et leurs paramètres pour voir l'impact d'un choix imprudent sur l'ALD P&C. Dans cette volonté de prudence, la compagnie est d'ailleurs en train d'étudier l'impact d'un passage à la copule de Student.

Bibliographie

- [1] H. ABDI. “The Kendall rank correlation coefficient”. Dans : *Encyclopedia of Measurement and Statistics*. Sage, Thousand Oaks, CA (2007), p. 508–510.
- [2] P. ANTAL et S. RE. “Quantitative methods in reinsurance”. Dans : *Lecture notes, De* (2003).
- [3] P. ARBENZ et D. CANESTRARO. “Estimating Copulas for Insurance from Scarce Observations, Expert Opinion and Prior Information : A Bayesian Approach”. Dans : *Astin Bulletin* 42.1 (2012), p. 271–290.
- [4] C. BÉLISLE, A. BONEH et R.J. CARON. “Convergence properties of hit-and-run samplers”. Dans : *Stochastic Models* 14.4 (1998), p. 767–800.
- [5] C.J.P. BÉLISLE, H.E. ROMELIJN et R.L. SMITH. “Hit-and-run algorithms for generating multivariate distributions”. Dans : *Mathematics of Operations Research* 18.2 (1993), p. 255–266.
- [6] J. BLONDEAU et C. PARTRAT. *La réassurance : Approche technique*. Assurance, audit, actuariat. Economica, 2003. ISBN : 9782717845334.
- [7] D.R. CLARK. “A simple tool for pricing loss sensitive features of reinsurance treaties”. Dans : *Casualty Actuarial Society Call Papers* (1994).
- [8] S. COLES, J. HEFFERNAN et J. TAWN. “Dependence measures for extreme value analyses”. Dans : *Extremes* 2.4 (1999), p. 339–365.
- [9] L. DEVROYE. *Non-uniform random variate generation*. T. 4. Springer-Verlag New York, 1986, p. 207–214, 227–230.
- [10] P. EMBRECHTS, F. LINDSKOG et A. MCNEIL. “Modelling dependence with copulas and applications to risk management”. Dans : *Swiss Federal Institute of Technology Zurich* (2000).
- [11] P. GROSSI et C. TEHENNEPE. “Catastrophe modelling fundamentals”. Dans : *The Review - Worldwide Reinsurance A Guide to Catastrophe Modeling* (2008), p. 6.
- [12] F. LINDSKOG, A. MCNEIL et U. SCHMOCK. “Kendall’s tau for elliptical distributions”. Dans : *Credit risk : Measurement, evaluation and management* (2003), p. 149–156.
- [13] G.G. VENTER. “Tails of copulas”. Dans : 89.171 (2002), p. 68–113.

Table des figures

1.1	Répartition du portefeuille sur les unités du groupe (en dollar américain)	2
1.2	Structure du portefeuille P&C	3
2.1	Quote part 30%	4
2.2	Excédent de plein : 2 pleins de 20	5
2.3	Exemple de <i>sliding scale</i> classique	6
2.4	Excédent de sinistre : 15 XS 5	7
2.5	Par risque et par évènement sur un 30 XS 20	8
2.6	Masse de probabilité en 1 point	9
2.7	Densités de même moyenne	9
2.8	Tarification en réassurance	11
3.1	Module ou <i>Base Unit</i> "TR of LoB" dans Igloo	14
3.2	Modèle non-proportionnel pour une LoB	15
3.3	Modèle proportionnel pour une LoB	15
3.4	Corrélations retenues	16
3.5	Tableaux de dimensions stochastiques	18
3.6	Charge annuelle par traité	18
3.7	Courbes de TR en proportionnel	20
3.8	Courbes de TR en non-proportionnel	20
3.9	Courbe historique contre courbe modélisée	21
3.10	Évolution de l'index des frais médicaux	23
3.11	Construction des couples étudiés	23
3.12	Comparaison des fonctions <i>LR</i> pour Gaussienne et Gumbel	27
3.13	Impact du nombre de degrés de liberté de la Student sur la fonction <i>LR</i>	28
3.14	Comparaison des fonctions <i>LR</i> pour Student et Gumbel	28
3.15	$\bar{\chi}_{LR}$ estimé et $\bar{\chi}_{LR}$ de la Student à 3 degrés de liberté	29
3.16	ALD Cat	34
3.17	QQ-plots exporté depuis @Risk	36
3.18	Ajustement à la fonction de répartition du Cat	37
4.1	Utilisation de la modélisation	38
4.2	Portefeuilles préférables	39
4.3	Deux distributions de même moyenne et de même CV	40
4.4	Courbe de taux du dollar américain	41
4.5	Value-at-Risk et Tail-Value-at-Risk	43
4.6	VaR et TVaR pour deux distributions de même moyenne et même CV	43
4.7	2-simplexe dans un espace euclidien à 3 dimensions	46
4.8	500 et 10000 points générés par l'algorithme proposé par Devroye en dimension 3	47
4.9	Tirage uniforme de 500 points sur le cercle (1-sphère) unité	49
4.10	Tirage uniforme de 500 points sur une 1-sphère inscrite dans le 2-simplexe standard	50
4.11	Algorithme Hit and Run en dimension 3	52
4.12	500 et 10000 portefeuilles sans contrainte générés par Hit and Run HD	52
4.13	500 et 10000 portefeuilles sous contraintes générés par Hit and Run HD	53
4.14	Graphique combiné des rangs de chaque LoB par année	54
4.15	Tendance des rangs des LoBs	54
4.16	Évolution qualitative du montant des primes de réassurance selon l'équipe	55

4.17	Évolution du LR avec le cycle des primes	55
4.18	Décyclage de la LoB X	56
4.19	Résultats de l'optimisation à prime constante	58
4.20	Résultats de l'optimisation à capital constant	60

Liste des tableaux

2.1	Valeur approximative des α par risque	11
3.1	Résultats de convergence pour le Property NP	19
3.2	Résultats par LoB	25
3.3	Résultats des simulations Cat par LoB	33
3.4	Résultats d'ajustement	35
4.1	Test d'uniformité	53
4.2	Matrice des rho de Spearman inter-LoB	57
4.3	Contraintes choisies (en pourcentage de prime)	57
4.4	Contraintes choisies (en pourcentage du capital)	59
4.5	Résultats en pourcentage de prime des optimisations sous contraintes	61

Annexes

Espérance de la perte d'un traité XS (modèle Poisson-Pareto)

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_N] = \begin{cases} \lambda \cdot \frac{\text{OP}^\alpha}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \\ \lambda \cdot \text{OP} \cdot \ln\left(\frac{C}{P}\right) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (1.7)$$

Démonstration :

$$\text{On rappelle : } \begin{cases} N \sim \text{Poisson}(\lambda) \\ X_i \sim X \sim \text{Pareto}(\alpha, \text{OP}) \text{ et } X_i \perp N \\ Y_i = (X_i - P) \mathbb{1}_{P < X_i \leq C} + (C - P) \mathbb{1}_{X_i > C} \\ \tilde{S}_N = \sum_{i=1}^N Y_i \end{cases}$$

On conditionne par rapport à N :

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{S}_N|N]]$$

Puis :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{S}_N|N = n] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n Y_i \mid N = n\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[Y_i] \\ &= n\mathbb{E}[Y_1] \quad \text{car } (Y_i)_{i \geq 1} \text{ i.i.d} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_N] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[Y_1] = \lambda \cdot \mathbb{E}[Y_1]$$

Puis :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_1] &= \mathbb{E}[(X - P) \mathbb{1}_{P < X \leq C} + (C - P) \mathbb{1}_{X > C}] \\ &= \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{P < X \leq C}] + C \cdot \mathbb{P}[X > C] - P \cdot \mathbb{P}[X > P] \end{aligned}$$

On sait que $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \text{OP})$. On a donc : $\forall x \geq \text{OP}$, $f_X(x) = \alpha \frac{\text{OP}^\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et $\bar{F}_X(x) = \left(\frac{\text{OP}}{x}\right)^\alpha$ Reste donc à calculer le premier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{P < X \leq C}] &= \int_P^C x dF_X(x) \\ &= \alpha \text{OP}^\alpha \int_P^C x^{-\alpha} dx \\ &= \begin{cases} \alpha \frac{\text{OP}^\alpha}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \\ \text{OP} \cdot \ln\left(\frac{C}{P}\right) & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où pour $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_1] &= \alpha \frac{\text{OP}^\alpha}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) + C \left(\frac{\text{OP}}{C} \right)^\alpha - \left(\frac{\text{OP}}{P} \right)^\alpha \\ &= \frac{\text{OP}^\alpha}{1-\alpha} [\alpha C^{1-\alpha} - \alpha P^{1-\alpha} + (1-\alpha)C^{1-\alpha} - (1-\alpha)P^{1-\alpha}] \\ &= \frac{\text{OP}^\alpha}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha})\end{aligned}$$

Soit :

$$\mathbb{E}[Y_1] = \begin{cases} \frac{\text{OP}^\alpha}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \\ \text{OP} \cdot \ln \left(\frac{C}{P} \right) & \alpha = 1 \end{cases}$$

□

Variance de la perte d'un traité XS (modèle Poisson-Pareto)

$$\mathbb{V}[\tilde{S}_N] = \begin{cases} 2\lambda \cdot \text{OP}^\alpha \left[\frac{1}{2-\alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) - \frac{P}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) \right] & \alpha \notin \{1, 2\} \\ 2\lambda \cdot \text{OP} \left[C - P - \ln\left(\frac{C}{P}\right) \right] & \alpha = 1 \\ 2\lambda \cdot \text{OP}^2 \left[\ln\left(\frac{C}{P}\right) + \frac{P}{C} - 1 \right] & \alpha = 2 \end{cases} \quad (1.8)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[\tilde{S}_N] &= \mathbb{V}[\mathbb{E}[\tilde{S}_N|N]] + \mathbb{E}[\mathbb{V}[\tilde{S}_N|N]] \\ &= \mathbb{V}[N]\mathbb{E}[Y_1]^2 + \mathbb{E}[N]\mathbb{V}[Y_1] \end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}[N] = \lambda$ d'où :

$$\mathbb{V}[\tilde{S}_N] = \lambda \cdot \mathbb{E}[Y_1^2]$$

$$\begin{aligned} \text{Puis : } \mathbb{E}[Y_1^2] &= \mathbb{E}[(X - P)^2 \mathbb{1}_{P < X \leq C}] + \mathbb{E}[(C - P)^2 \mathbb{1}_{X > C}] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[X^2 \mathbb{1}_{P < X \leq C}]}_{=A} - \underbrace{2P \cdot \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{P < X \leq C}]}_{=B} + \underbrace{P^2 \cdot (\mathbb{P}[X > P] - \mathbb{P}[X > C]) + (C - P)^2 \cdot \mathbb{P}[X > C]}_{=C} \end{aligned}$$

$$A = \alpha \text{OP}^\alpha \int_P^C x^{1-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{\alpha \text{OP}^\alpha}{2-\alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) & \alpha \notin \{1, 2\} \\ \text{OP} (C - P) & \alpha = 1 \\ 2 \cdot \text{OP}^2 \cdot \ln\left(\frac{C}{P}\right) & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$B = 2P \cdot \alpha \text{OP}^\alpha \int_P^C x^{-\alpha} dx = \begin{cases} 2P \cdot \frac{\alpha \text{OP}^\alpha}{1-\alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) & \alpha \notin \{1, 2\} \\ 2P \cdot \text{OP} \cdot \ln\left(\frac{C}{P}\right) & \alpha = 1 \\ -2 \cdot \text{OP}^2 \cdot \left(2\frac{P}{C} - 2\right) & \alpha = 2 \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \text{OP}^\alpha [C^{2-\alpha} + P^{2-\alpha} - 2PC^{1-\alpha}] & \alpha \notin \{1, 2\} \\ \text{OP} (C - P) & \alpha = 1 \\ 2 \cdot \text{OP}^2 \left(1 - \frac{P}{C}\right) & \alpha = 2 \end{cases}$$

Pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ on obtient directement le résultat :

$$A - B + C = \begin{cases} 2 \cdot \text{OP} \left[C - P - P \ln\left(\frac{C}{P}\right) \right] & \alpha = 1 \\ 2 \cdot \text{OP}^2 \left[\ln\left(\frac{C}{P}\right) + \frac{P}{C} - 1 \right] & \alpha = 2 \end{cases}$$

Puis pour $\alpha \notin \{1, 2\}$:

$$A + C = \frac{\alpha \text{OP}^\alpha}{2 - \alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) + \text{OP}^\alpha [C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha} + 2P^{2-\alpha} - 2PC^{1-\alpha}]$$

$$A + C = \frac{2 \cdot \text{OP}^\alpha}{2 - \alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) + 2P \cdot \text{OP}^\alpha (P^{1-\alpha} - C^{1-\alpha})$$

D'où :

$$A - B + C = \frac{2 \cdot \text{OP}^\alpha}{2 - \alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) - 2 \cdot \text{OP}^\alpha \frac{P}{1 - \alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha})$$

Soit :

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = 2 \cdot \text{OP}^\alpha \left[\frac{1}{2 - \alpha} (C^{2-\alpha} - P^{2-\alpha}) - \frac{P}{1 - \alpha} (C^{1-\alpha} - P^{1-\alpha}) \right]$$

□

Corrélation intra-pays en NP et P

Pays	NP	P	Pays	NP	P	Pays	NP	P
Albanie	0.15	0	France	0.1	0.15	Panama	0.1	0
Algérie	0.1	0.1	Gabon	0.25	0	Paraguay	0	0.25
Andorre	0.25	0.2	Allemagne	0.15	0.1	Pérou	0.1	0
Angola	0.25	0.1	Grèce	0.1	0.2	Philippines	0	0.1
Antigua-et-Barbuda	0	0.2	Guyana	0.25	0.1	Pologne	0.15	0.15
Argentine	0.15	0	Hong Kong	0	0.1	Portugal	0.1	0.15
Arménie	0	0.2	Hongrie	0.15	0.1	Porto Rico	0.15	0
Australie	0	0.2	Islande	0.15	0	Qatar	0	0.15
Autriche	0.15	0.2	Inde	0.2	0	Serbie	0.25	0
Bahamas	0	0.2	Indonésie	0	0.1	Roumanie	0.1	0.1
Bahreïn	0.05	0.1	Irlande	0.15	0.1	Russie	0.25	0.1
Barbade	0	0.2	Israël	0	0.15	Arabie saoudite	0	0.15
Bélarus	0.15	0	Italie	0.2	0.1	Singapour	0.15	0.15
Belgique	0.15	0.2	Irak	0.05	0.05	Slovaquie	0	0.15
Bermudes	0.15	0.2	Jamaïque	0	0.15	Slovénie	0.1	0
Bolivie	0	0.2	Japon	0.15	0.15	Afrique du Sud	0	0.15
Bosnie-Herzégovine	0.25	0.2	Jordanie	0.25	0.15	Espagne	0.25	0.25
Botswana	0.25	0	Kazakhstan	0.15	0.15	Soudan	0	0.1
Brésil	0.25	0.2	Corée du Sud	0.15	0.1	Swaziland	0.25	0
Bulgarie	0.15	0.1	Koweït	0	0	Suède	0.15	0
Cameroun	0.25	0.2	Lettonie	0.15	0	Suisse	0.05	0.1
Cap-Vert	0.25	0.2	Liban	0.25	0.15	Syrie	0	0.15
Îles Caïmans	0	0.2	Luxembourg	0.15	0	Taiwan	0.15	0.1
Chili	0	0.3	Malaisie	0.15	0.25	Thaïlande	0	0.15
Chine	0.2	0.2	Malte	0	0.1	Macédoine	0.25	0
Colombie	0	0.3	Maurice	0.25	0.15	Trinité-et-Tobago	0.25	0.1
Congo	0	0.1	Mexique	0.15	0.2	Tunisie	0	0.1
Croatie	0.15	0.2	Moldavie	0	0.1	Turquie	0.1	0.1
Chypre	0.25	0.2	Maroc	0.1	0.1	Ukraine	0.15	0.15
République tchèque	0.2	0.3	Pays-Bas	0.15	0.1	Émirats arabes unis	0	0.1
Danemark	0.15	0.2	Nouvelle-Zélande	0	0.15	Royaume-Uni	0.25	0.25
Égypte	0.25	0	Nicaragua	0	0.15	Venezuela	0.15	0.1
El Salvador	0.25	0	Norvège	0.15	0.1	Viêt Nam	0.15	0
Finlande	0.1	0.1	Palestine	0.25	0	Yémen	0	0.1

Code VBA : Tau de Kendall et p-value

```
Public Function KendallTau(xRange As Variant, yRange As Variant) As Double
Dim n As Double
n = xRange.Rows.Count
Dim xRange_Array() As Double
Dim yRange_Array() As Double
ReDim xRange_Array(1 To n)
ReDim yRange_Array(1 To n)
Dim i As Long, j As Long, nc, nd As Double, aux As Long
nc = 0
nd = 0

For i = 1 To n
For j = i To n
If i = 1 Then
xRange_Array(j) = xRange.Cells(j)
yRange_Array(j) = yRange.Cells(j)
End If
aux = Sgn((xRange_Array(i) - xRange_Array(j)) * (yRange_Array(i) - yRange_Array(j)))
If aux <> 0 Then
If aux = 1 Then
nc = nc + 1
Else
nd = nd + 1
End If
End If
Next j
Next i

Dim stat As Double
stat = 3 * (nc - nd) / Sqr(n * (n - 1) * (2 * n + 5) / 2)

KendallTau = (nc - nd) * 2 / n / (n - 1)
End Function
```

```
Public Function KendallTauP(xRange As Variant, yRange As Variant) As Double
Dim n As Double
n = xRange.Rows.Count
Dim xRange_Array() As Double
Dim yRange_Array() As Double
ReDim xRange_Array(1 To n)
ReDim yRange_Array(1 To n)
Dim i As Long, j As Long, nc, nd As Double, aux As Long
nc = 0
nd = 0

For i = 1 To n
For j = i To n
If i = 1 Then
xRange_Array(j) = xRange.Cells(j)
yRange_Array(j) = yRange.Cells(j)
End If
aux = Sgn((xRange_Array(i) - xRange_Array(j)) * (yRange_Array(i) - yRange_Array(j)))
If aux <> 0 Then
If aux = 1 Then
nc = nc + 1
Else
nd = nd + 1
End If
End If
Next j
Next i

Dim stat As Double
stat = 3 * (nc - nd) / Sqr(n * (n - 1) * (2 * n + 5) / 2)

KendallTauP = 2 * WorksheetFunction.NormSDist(-Abs(stat))
#Si p-value < 5% alors on rejette l'hypothese d'independance
End Function
```

Résultats de convergence

	Jeu de simulations	1	2	3	CV(1,2,3)
Property P					
	Moyenne				0.0%
	CV				1.8%
	VaR(99.5%)	124%	124%	124%	0.2%
	TVaR(99.5%)	135%	134%	134%	0.6%
	VaR(99.9%)	139%	139%	138%	0.3%
	TVaR(99.9%)	162%	155%	159%	2.5%
Casualty P					
	Moyenne				0.0%
	CV				0.3%
	VaR(99.5%)	138%	137%	137%	0.6%
	TVaR(99.5%)	152%	150%	151%	0.4%
	VaR(99.9%)	160%	160%	159%	0.2%
	TVaR(99.9%)	174%	174%	174%	0.2%
Motor P					
	Moyenne				0.0%
	CV				0.2%
	VaR(99.5%)	115%	115%	116%	0.2%
	TVaR(99.5%)	118%	119%	119%	0.2%
	VaR(99.9%)	120%	121%	120%	0.3%
	TVaR(99.9%)	123%	124%	123%	0.4%
Property NP					
	Moyenne				0.0%
	CV				0.2%
	VaR(99.5%)	179%	179%	179%	0.0%
	TVaR(99.5%)	199%	198%	197%	0.5%
	VaR(99.9%)	211%	211%	208%	0.9%
	TVaR(99.9%)	231%	229%	225%	1.2%
Casualty NP					
	Moyenne				0.2%
	CV				0.1%
	VaR(99.5%)	183%	184%	183%	0.2%
	TVaR(99.5%)	202%	201%	201%	0.4%
	VaR(99.9%)	214%	213%	213%	0.3%
	TVaR(99.9%)	231%	230%	232%	0.3%
Motor NP					
	Moyenne				0.1%
	CV				0.4%
	VaR(99.5%)	283%	287%	286%	0.7%
	TVaR(99.5%)	337%	340%	339%	0.5%
	VaR(99.9%)	370%	371%	373%	0.3%
	TVaR(99.9%)	426%	420%	425%	0.6%

Copules

Copule de Student

La copule de Student est définie de la même manière que la copule Gaussienne.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = t_{\nu, R}(t_{\nu}^{-1}(u_1), t_{\nu}^{-1}(u_2), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n)) \quad (4.27)$$

où $t_{\nu, R}$ la fonction de répartition d'une loi de Student multivariée de dimension n à ν degrés de liberté et de matrice de variance-covariance R .

Copule de Gumbel

La copule de Gumbel à 2 dimensions est définie pour $\theta \geq 1$. par :

$$C(u, v) := \exp \left[- \left\{ (-\log u)^\theta + (-\log v)^\theta \right\}^{1/\theta} \right]$$

La définition se généralise à n dimensions par :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) := \exp \left[- \left\{ \sum_{i=1}^n (-\log u_i)^\theta \right\}^{1/\theta} \right]$$

Code R : Copules, dépendance forte et faible

```
#install.packages(c("copula","actuar","fitdistrplus","nacopula","gumbel","CDVine"))

library("copula")
library("actuar")
library("fitdistrplus")
library("nacopula")
library("gumbel")
library("CDVine")
library("xlsReadWrite") # Windows-only
#####
PropNP = read.xls("PropNP.xls",colNames=FALSE, "Prop NP Claim")

Lg=log(pcopula(gumbelCopula(theta_est_gumbel),cbind(z,z)))/log(z)
Rg=log(((1-2*(1-z)+pcopula(gumbelCopula(theta_est_gumbel),cbind(1-z,1-z))))/log(z)
Lg=2/Lg-1
Rg=2/Rg-1

Ln=log(pcopula(normalCopula(0.68),cbind(z,z)))/log(z)
Rn=log(((1-2*(1-z)+pcopula(normalCopula(0.68),cbind(1-z,1-z))))/log(z)
Ln=2/Ln-1
Rn=2/Rn-1

Lt=log(pcopula(tCopula(0.65,df=3),cbind(z,z)))/log(z)
Rt=log(((1-2*(1-z)+pcopula(tCopula(0.65,df=3),cbind(1-z,1-z))))/log(z)
Lt=2/Lt-1
Rt=2/Rt-1

z=seq(0,.5,by=.001)
v <- PropNP
U=rank(v[,1])/(nrow(v)+1)
V=rank(v[,2])/(nrow(v)+1)
Lemp=rep(NA,length(z))
Remp=rep(NA,length(z))
for(i in 1:length(z)){
  Lemp[i]=log(mean((U<=z[i])&(V<=z[i])))/log(mean(U<=z[i]))
  Remp[i]=log(mean((U>=1-z[i])&(V>=1-z[i])))/log(mean(U<=z[i]))
}
Lemp=2/Lemp-1
Remp=2/Remp-1

Lempf=rep(NA,length(z))
Rempf=rep(NA,length(z))
for(i in 1:length(z)){
  Lempf[i]=sum((U<=z[i])&(V<=z[i]))/sum(U<=z[i])
  Rempf[i]=sum((U>=1-z[i])&(V>=1-z[i]))/sum(U<=z[i])
}
x = c(z,1-z)
Tail_x = c(Lempf,Rempf)

Lnf=function(param) return((pcopula(normalCopula(param),cbind(z,z)))/(z))
Rnf=function(param) return(((1-2*(1-z)+pcopula(normalCopula(param),cbind(1-z,1-z))))/(z)
)
Tailn = function(param) return(c(Lnf(param),Rnf(param)))

Ltf=function(param,df) return((pcopula(tCopula(param,df=df),cbind(z,z)))/(z))
Rtf=function(param,df) return(((1-2*(1-z)+pcopula(tCopula(param,df=df),cbind(1-z,1-z))))
/(z))
Tailt = function(param,df) return(c(Ltf(param,df),Rtf(param,df)))

Lgf=function(param) return((pcopula(gumbelCopula(param),cbind(z,z)))/(z))
Rgf=function(param) return(((1-2*(1-z)+pcopula(gumbelCopula(param),cbind(1-z,1-z))))/(z)
)
Tailg = function(param) return(c(Lgf(param),Rgf(param)))

#plot(x,Tail_x,cex=0.2)
#points(x,c(Ltg,Rtg),col="brown",cex=0.2)
#lines(rbind(c(0.5,-1),c(0.5,2)),lty=2)
```

Code R : Distribution uniforme sur simplexe (Devroye)

```
DevroyeSimplex = function(sim,dim){
  Unifs = matrix(runif(dim*sim),ncol=dim)
  Exps = -log(Unifs)
  # equivaut à Exps = matrix(rexp(sim*dim),ncol=dim)
  G = rowSums(Exps)
  res = matrix(nrow=sim,ncol=dim)
  for(i in 1:sim){
    res[i,] = Exps[i,]/G[i]
  }
  return(res)
}
```

Code R : Distribution uniforme sur une $(dim - 1)$ -sphere unité de \mathbb{R}^{dim} (Devroye)

```
DevroyeSphere = function(sim,dim){
  z = matrix(rnorm(dim*sim),ncol=dim)
  x = matrix(nrow = sim,ncol=dim)
  sum = 0
  for(i in 1:dim){
    sum = sum + z[,i]^2
  }
  Norm = sqrt(sum)
  for(i in 1:dim){
    x[,i] = z[,i]/Norm
  }
  return(x)
}
```

Code R : Distribution uniforme sur une $(dim - 1)$ -sphere inscrite dans l'hyperplan du simplexe

```
RandHypSphere = function(sim,center,radius){
  dim = length(center)
  N = matrix(rnorm(dim*sim),ncol=dim)
  t = matrix(nrow = sim,ncol=dim)
  rowSum = rowSums(N)
  for(i in 1:dim){
    N[,i] = N[,i] - rowSum/dim
  }
  sum=0
  for(i in 1:dim){
    sum = sum + N[,i]^2
  }
  NormN = sqrt(sum)
  for(i in 1:dim){
    t[,i] = center[i] + N[,i]/NormN*radius
  }
  return(t)
}
#Le package utilise pour les graphiques 3D est "rgl"
library("rgl")
clear3d()
material3d(alpha=0.8,lit=F)
axes3d()
lines3d(x=c(1,0,0,1),y=c(0,1,0,0),z=c(0,0,1,0),col="blue")
triangles3d(c(1,0,0),c(0,1,0),c(0,0,1),col="cyan")
aspect3d(1,1,1)
view3d(20)
points3d(RandHypSphere(500,c(0.3,0.3,0.4),0.4))
```

Code R : Algorithmes Hit and Run HD

```
# Generateur de direction sur le plan S_n
RandDirectionHyperSphere = function(dim){
  N = rnorm(dim)
  theta = 1:dim
  N = N - sum(N)/dim
  NormN = sqrt(sum(N^2))

  for(i in 1:dim){
    theta[i] = N[i]/NormN
  }
  return(theta)
}

# Hit and run HD sur simplexe
Hit_and_run = function(n,x0, min=rep(0,length(x0)), max=rep(1,length(x0))){
  dim = length(x0)
  x=matrix(nrow = n, ncol = dim)
  x[1,] = x0
  aux_m = 1:dim
  aux_M = 1:dim
  i=2
  while(i<=n){
    theta = RandDirectionHyperSphere(dim)
    for(j in 1:dim){
      if(theta[j]>0){
        aux_m[j] = (min[j]-x[i-1,j])/theta[j]
        aux_M[j] = (max[j]-x[i-1,j])/theta[j]
      }
      else
      {
        aux_m[j] = (max[j]-x[i-1,j])/theta[j]
        aux_M[j] = (min[j]-x[i-1,j])/theta[j]
      }
    }

    L = max(aux_m)
    U = min(aux_M)

    if(L < U){
      lambda=runif(1,L,U) #tirage de lambda dans Lambda_k
      x[i,]= x[i-1,]+lambda*theta
      i=i+1
    }
  }

  return(x)
}
```

Code R : Volume sphère, simplexe et test d'uniformité

```
hypersphere_volume=function(radius, dim){
  if(dim%%2==0) #is.even(dim)
  {
    return(1/factorial(dim/2)*pi^(dim/2)*radius^dim)
  }
  else
  {
    return(2^(((dim+1)/2)/double_fact(dim)*pi^((dim-1)/2)*radius^dim)
  }
  #equivalent to return(pi^(dim/2)/gamma(dim/2+1)*radius^dim)
}

simplex_volume=function(dim,a=sqrt(2)){
  n=dim-1
  res = a^n/factorial(n)*sqrt((n+1)/2^n)
  return(res)
}

Uniformity_ratio = function(dim,r,n,tests){
  result=1:tests
  expected =1:tests
  a = rep(1/dim,dim)
  for(j in 1:tests){
    HR=Hit_and_run(n,a)
    res=0

    for(i in 1:n){
      aux = (HR[i,]-a)
      if(norm(as.matrix(aux),"F")<=r) res=res+1
    }
    result[j]=res
    expected[j] = hypersphere_volume(r,dim-1)/simplex_volume(dim)*n
  }
  return(list(result,expected,round(abs(1-result/expected)*100,2)))
}
```