Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2008-2009 - Première session

6 mars 2009 - Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$. Le coût des sinistres est constant, égal à 1.

1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré.

Lors de la première année d'observation, l'assuré a causé un sinistre.

2. Quelle prime de Bayes lui réclameriez-vous pour la seconde année ?
3. Utilisez le modèle de Bühlmann, pour estimer la prime de cet assuré pour la deuxième année. Commentez.

Exercice n°2

Un portefeuille de 340 assurés a produit 210 déclarations de vol au cours d'une année. La répartition des sinistres est la suivante :

Nombre de sinistres	Nombre d'assurés
0	200
1	80
2	50
3	10

En supposant que le nombre de sinistres déclarés par un assuré suit une loi de Poisson dont le paramètre peut varier d'un assuré à l'autre, déterminez le facteur de crédibilité (selon le modèle de Bühlmann) pour un assuré de ce portefeuille. Déduisez-en l'augmentation de la prime d'un assuré qui aurait déclaré un sinistres.

Exercice n°3

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à Θ, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité 0,8 ;} \\ 0,2, & \text{avec la probabilité 0,2.} \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée d'un niveau.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

Exercice n°4

Considérons la famille des distributions de Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta, \theta > 0 \right\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.