

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} \mathbf{1}_{]t; \infty[} (T_x)$$

ressources-actuarielles.net



Quelques observations sur la modélisation du risque de taux

Version 1.2

Septembre 2016

Frédéric PLANCHET
frederic@planchet.net

Marc JUILLARD
marc.juillard@socgen.com



Préambule

Dans le prolongement des points abordés dans la précédente présentation, on discute ici les deux questions suivantes :

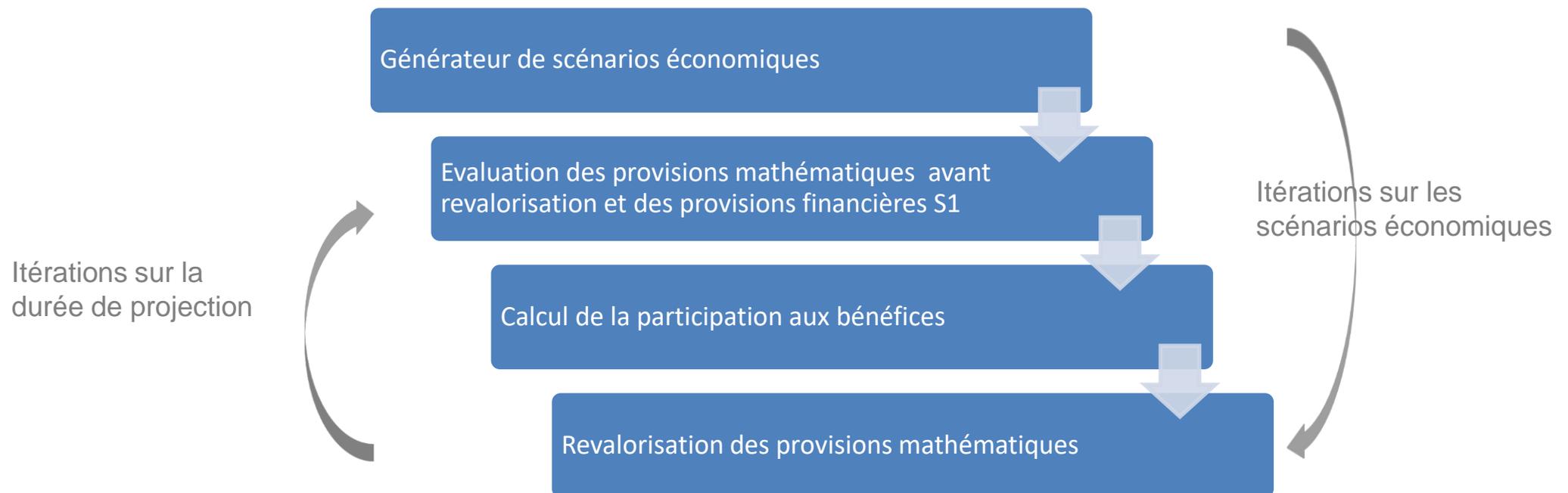
- le choix du modèle de taux pour le calcul de la meilleure estimation dans le cadre du Pilier 1 ;
- l'ajout d'une dimension prospective à la représentation de la structure par termes pour répondre à la seconde évaluation de l'ORSA (cf. ACPR [2014]).

L'objectif de cette présentation est de fournir quelques points d'accroche pour sélectionner des modèles adaptés à la représentation de la structure par termes des taux d'intérêt (cf. RONCALLI [1997] pour une étude détaillée de la notion de SSTI).

Il s'agit plus précisément de contribuer à la construction d'outils pertinents pour alimenter le volet quantitatif du dispositif ERM en limitant le risque opérationnel.

1. Modèles de taux pour le Pilier 1

Le calcul de la meilleure estimation des engagements en assurance-vie est effectué dans le cadre suivant :

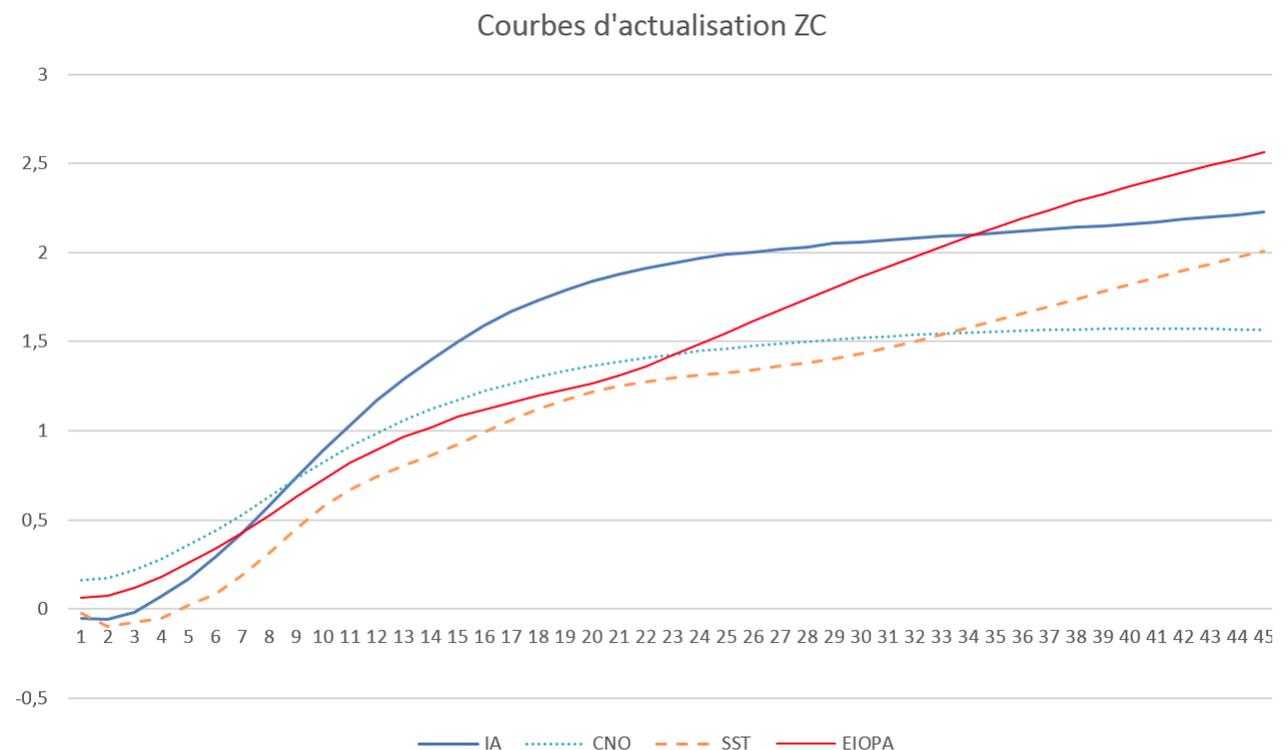


Le GSE est utilisé pour calculer des prix en AOA et fournir une évaluation du passif cohérente avec des prix de marché. La SSTI est une composante importante du GSE, qui détermine notamment le processus d'actualisation.

1. Modèles de taux pour le Pilier 1

La SSTI n'est pas observée mais construite, comme l'illustrent les courbes obtenues au 31/12/2014 :

Le *spread* entre émissions d'État et *swaps* est, à fin 2014, de l'ordre de 40 bp à 30 ans. L'impact sur les engagements est important ; pour un passif de retraite la valeur actualisée des flux augmente de 4 % en passant de la courbe IA à la courbe CNO, de 4 % avec la courbe EIOPA et de 9 % en utilisant la courbe SST.





1. Modèles de taux pour le Pilier 1

Par ailleurs, on peut noter que les fonctions de réaction incluses dans le modèle de projection s'appuient souvent sur des comparaisons de taux pour, par exemple, décider de la réalisation de plus ou moins-values latentes.

Mais dans la construction de ces règles de décision, des niveaux de taux extrêmes n'ont en général pas été pris en compte, car considérés comme impossibles. Il s'agit donc d'adapter le modèle pour prendre en compte des situations très hypothétiques dont la probabilité réelle d'occurrence est négligeable.

On conçoit que la crédibilité d'une telle règle soit inévitablement discutable.

Pour un plus ample développement sur ce point, voir

<http://actudactulaires.typepad.com/laboratoire/2013/05/engagement-best-estimate-dun-contrat-d%C3%A9pargne-en-.html>



1. Modèles de taux pour le Pilier 1

Au-delà de ces remarques préalables, le choix d'un modèle de taux pertinent peut être guidé par les considérations suivantes :

Actu d'actuaire

L'actualité des techniques actuarielles

[« Logique Floue | Accueil](#)

11 septembre 2016

Quel modèle de taux pour un calcul de best estimate en assurance-vie ?

Le calcul de la valeur économique (*best estimate*) des engagements en assurance-vie nécessite de construire un générateur de scénarios économiques "risque neutre" (voir par exemple [ce billet](#)). Le modèle pour le risque de taux constitue un élément central de ce générateur.

De nombreux modèles sont envisageables, de complexité variée (les modèles HJM, les modèles de marché de type [LMM](#), les modèles AFDNS, etc.). Si choisir un modèle pertinent est complexe, on peut en revanche assez facilement éliminer les modèles inadaptés.

Ainsi, les modèles "de marché" de type LMM sont très mal adaptés au calcul de la valeur économique d'un contrat d'assurance.

<http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2016/09/quel-mod%C3%A8le-de-taux-pour-un-calcul-de-best-estimate-en-assurance-vie-.html>

2. Les modèles pour l'ORSA

Dans le cadre de la seconde évaluation de l'ORSA, il s'agit non plus seulement de calculer la valeur nette d'actif (NAV), donc les provisions, et le SCR, mais de fournir une information sur la distribution de ces valeurs dans le futur.

Cela nécessite de concevoir une approche robuste et opérationnelle pour mesurer l'incertitude sur le taux de couverture des engagements prenant en compte les principales sources d'incertitude, le risque financier étant ici plus particulièrement considéré.

On utilise le modèle de BONNIN et *al.* [2015], qui repose sur :

$$PT = \frac{(1 + \tau_{RM}) \times (1 + \tau_P)}{1 - \gamma \frac{\beta \times \sigma_{\Delta}^2}{\mu}} \times \sum_{j \geq 1} \Omega(0, j) E^{P^a}(P_j) - \sum_{j \geq 1} P_n(0, j) E^{P^a}(C_j)$$



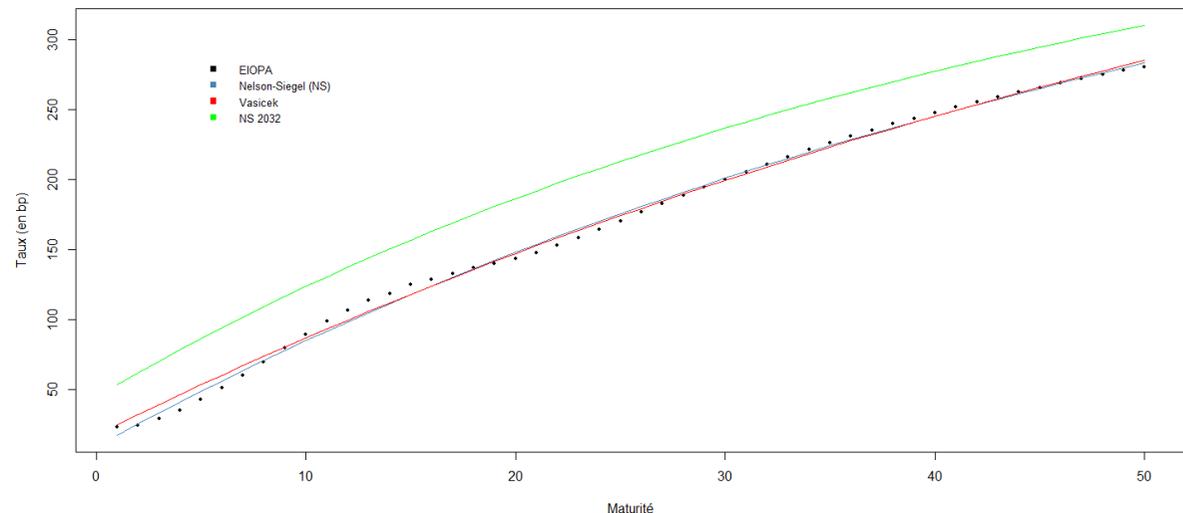
$$\Omega(0, j) = E^{Q^f} \left(\prod_{k=1}^j \frac{1 + i + [\lambda(1 - \beta)r_k + \lambda\beta r_0 - \lambda R_r(0, 1) - i]^+}{1 + r_k} \right)$$

2. Les modèles pour l'ORSA

L'utilisation des expressions précédentes nécessite une double représentation « historique » et « risque neutre » des facteurs de risque (typiquement ici du taux court).

La courbe initiale est obtenue en ajustant le modèle de Nelson-Siegel sur les 50 premières années de la courbe fournie par l'EIOPA ; Cette courbe se déplace régulièrement vers le haut jusqu'à la courbe verte au terme de la projection

Un ajustement par le modèle de Vasicek est également effectué pour le calcul des provisions « économiques ».



2. Les modèles pour l'ORSA

Projection de la courbe initiale

Un modèle de référence pour la projection de la courbe de taux est le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel (NELSON et SIEGEL [1987] et BONNIN et *al.* [2010]). Le taux zéro-coupon se décompose par hypothèse selon :



$$R(t, \tau) = \mu_1 + \mu_2 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} + \mu_3 \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right)}{\frac{\tau}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \right)$$

$$R(t, \tau) = r_0(t) \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right) + l(t) \left(1 - \varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right) + c(t) \psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)$$

Ce modèle peut être vu comme un modèle d'arbitrage dans la classe des modèles de taux affines (cf. CHRISTENSEN et *al.* [2010]).

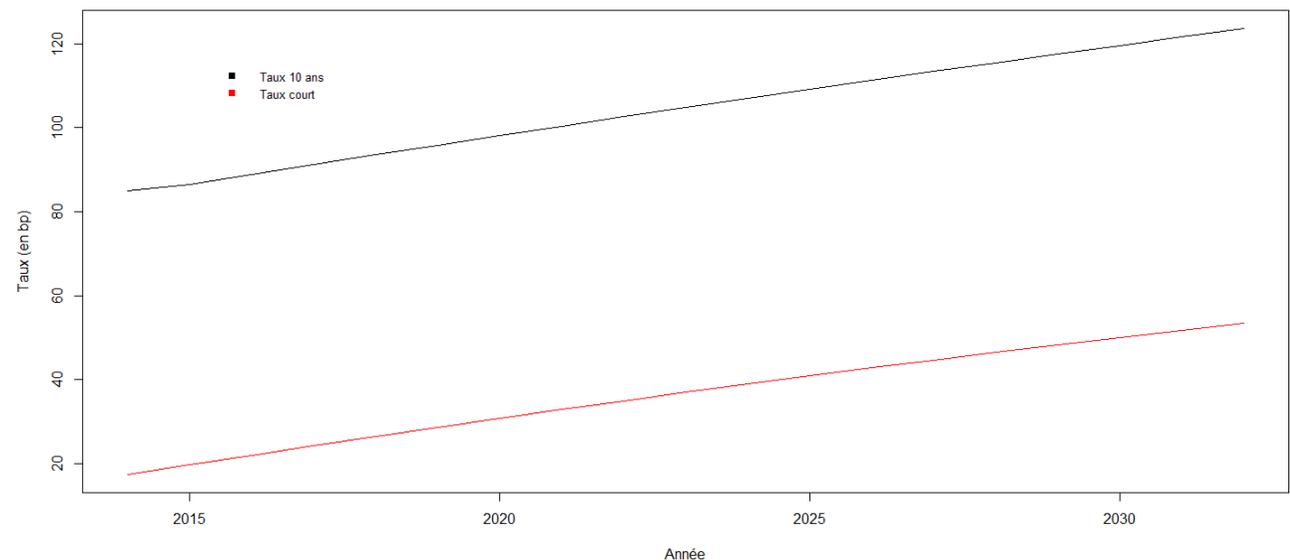
2. Les modèles pour l'ORSA

Projection de la courbe initiale

Une fois le modèle choisi, il s'agit de le paramétrer à partir d'un historique (cf. TURC et *al.* [2009]). Les choix effectués à ce niveau ont un impact fort sur les résultats obtenus.

Avec un ajustement sur les 50 premières années de la courbe, on trouve ainsi :

Le taux 10 ans passe ainsi de 0,85 % à fin 2014 à 1,24 % à fin 2032.

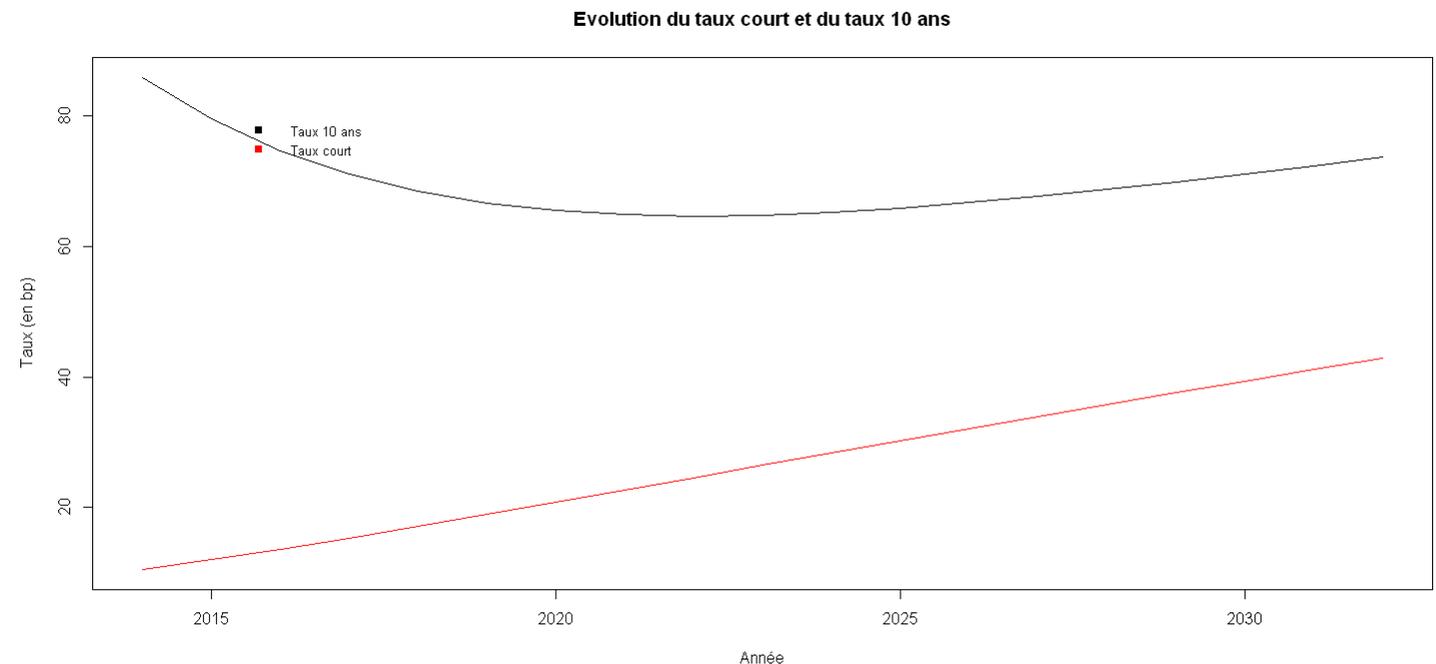


2. Les modèles pour l'ORSA

Projection de la courbe initiale

En considérant les 150 maturités disponibles, on aboutit à un comportement très différent :

Le taux 10 ans passe ici de 0,85 % à fin 2014 à 0,80 % à fin 2032 avec une période de taux très bas entre les 2 dates.



2. Les modèles pour l'ORSA

On a ainsi :

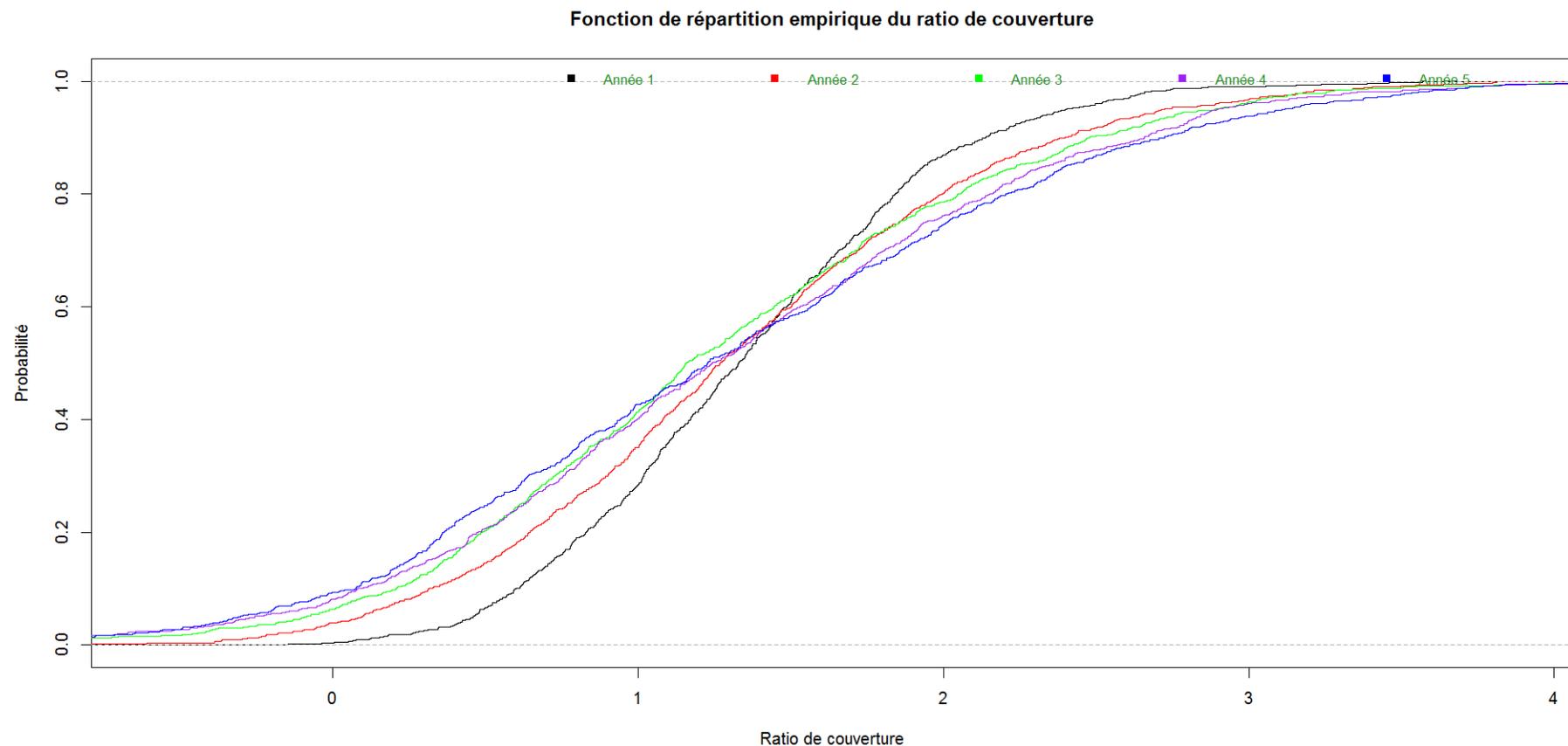
- La courbe initiale fournie par l'EIOPA qui est utilisée pour calibrer l'ajustement de la forme paramétrique de Nelson-Siegel (projetée sous P) ;
- Cette forme paramétrique est utilisée à chaque pas de projection pour calibrer le modèle de Vasicek à partir duquel sont projetés (sous Q) les taux courts utilisés pour le calcul des déflateurs.

Dans ce contexte il est important d'assurer une certaine cohérence entre ces différentes représentations. Le calibrage est ainsi déterminé pour minimiser les écarts entre ces différentes courbes.

Afin d'assurer la cohérence du calcul des valeurs actuelles entre la courbe initiale et la courbe issue du modèle de Vasicek, on corrige cette dernière pour assurer *ex-post* que la valeur actuelle des prestations non revalorisée soit identique avec les ZC de la courbe EIOPA et ces mêmes coefficients issus du modèle de Vasicek.

2. Les modèles pour l'ORSA

De telles approches permettent d'obtenir des résultats non triviaux et utiles pour le pilotage des risques :



Conclusion

La projection de taux sur longue période, que ce soit en probabilité historique ou en probabilité risque neutre, est un exercice délicat.

La complexité d'un modèle (en termes de nombre de paramètres) le pénalise très fortement dans ce contexte et privilégier un modèle parcimonieux est indispensable.

Cela permet de focaliser son attention sur quelques points particulièrement importants et délicats :

- choix du calibrage (voir par exemple LAÏDI et PLANCHET [2015]),
- équilibre dans la complexité des choix de modélisation pour les différents composants du modèle (notamment taux, crédit et inflation, qui sont trois facteurs liés) et leur structure de dépendance (cf. ARMEL et *al.* [2011]),
- définition des fonctions de réaction du modèle de projection pour le calcul de la meilleure estimation et analyse de la composante non répliquable, sans ajouter de la complexité inutilement *via* des choix inappropriés.

- ACPR [2014] « Préparation à Solvabilité II : enseignements de l'exercice d'ORSA pilote », Document d'information, Version 1.0.
- ARMEL K., PLANCHET F., KAMEGA A. [2011] « Quelle structure de dépendance pour un générateur de scénarios économiques en assurance ? », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.
- BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2015] « Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'ORSA », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 14, n°28..
- BONNIN F., PLANCHET F., JUILLARD M. [2010] « Applications de techniques stochastiques pour l'analyse prospective de l'impact comptable du risque de taux. », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°21.
- CHRISTENSEN J.H.E.; DIEBOLD F.X.; Rudebush G.D. [2010] « The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models », Federal Reserve Bank of San Francisco, WP n°2007-20.
- HEATH D., JARROW R., MORTON K. [1990] « Bond pricing and the term structure of interest rate: a discret time approximation », *Journal of financial and quantitative analysis*, vol. 25, 419-440.
- HULL J., WHITE A. [1990] « Pricing Interest-Rate-Derivative Securities », *Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4, (Winter 1990), pp. 573-592.
- KAMEGA A., PLANCHET F., THEROND P.E. [2009] Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation, Paris : Economica.
- LAIDI Y., PLANCHET F. [2015] « Calibrating LMN Model to Compute Best Estimates in Life Insurance », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 15, n°29.
- NELSON C.R., SIEGEL A.F. [1987] « Parsimonious modelling of yield curves », *Journal of Business*, 60, 473-489.
- PLANCHET F., THÉRON P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.
- RONCALLI T. [1998] La structure par terme des taux zéro : modélisation et implémentation numérique, Thèse Université Montesquieu - Bordeaux IV
- TURC J., UNGARI S., HUANG C. [2009] « Filtering the interest rate curve – The MENIR framework », Fixed Income, Quantitative Special, Société Générale/.

Références

Packages et codes R

Les GSE peuvent être mis en œuvre avec différents packages R, parmi lesquels :

- ESG (<https://cran.r-project.org/web/packages/ESG/index.html>)
- ESGtoolkit (<https://cran.r-project.org/web/packages/ESGtoolkit/index.html>)
- ycinterextra (<https://cran.r-project.org/web/packages/ycinterextra/index.html>)



Les codes R de cette présentation sont disponibles ici :

<http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/A5E99E9ABF5D3674C125772F00600F6C>



Frédéric PLANCHET

frederic@planchet.net

PRIM'ACT

42 avenue de la Grande Armée
75017 Paris
+33-1-42-22-11-00

ISFA

50 avenue Tony Garnier
F - 69007 Lyon
+33-4-37-38-74-37

<http://www.primact.fr>

<http://www.ressources-actuarielles.net>

<http://blog.ressources-actuarielles.net>