

**PROVISIONNEMENT DE LA COUVERTURE DECES DES PERSONNES EN ARRET DE TRAVAIL :
NOTE TECHNIQUE**

Cette note décrit (section I), avec une méthode statistique simple à mettre en œuvre, la construction de lois de mortalité des personnes en arrêt de travail, puis propose les résultats obtenus à partir de portefeuilles de certaines sociétés d'assurance et institutions de prévoyance (sections II et III).

L'étude débouche (section IV) sur différentes méthodes d'évaluation des provisions mathématiques destinées à couvrir le maintien de la garantie décès aux personnes en arrêt de travail.

I.- ESTIMATION DES LOIS DE MORTALITE

I.1.- Construction de l'estimateur

Pour les N individus observés, T désigne la variable aléatoire « temps écoulé entre l'entrée en arrêt de travail ou en invalidité et sa sortie du risque ».

Il est donc possible qu'un individu sorte du champ d'observation du phénomène étudié, sans pour autant décéder ou retrouver sa validité : c'est par exemple le cas des invalides qui liquident leur retraite ou des en-cours à la date de l'étude. Dans ce cas, l'observation est dite "censurée à droite" : si t_i désigne la période durant laquelle l'individu i a été observé en invalidité, la variable aléatoire T ne peut être exactement mesurée et appartient à l'intervalle $[t_i, w]$ (w désigne la plus grande période possible).

Dans le cas où l'observation n'est pas censurée, la variable aléatoire T prend la valeur t_i .

Pour unifier ces deux cas sous une seule notation, désignons par A_i l'ensemble $[t_i, w]$ en cas de censure et l'ensemble $\{t_i\}$ dans l'autre cas.

Le même type de problème se pose lorsque l'on souhaite utiliser les informations concernant les invalides reconnus comme tels avant le début de la période d'observation (le "stock" à la création des fichiers informatiques enregistrant tous les mouvements d'entrée-sortie d'invalidité). Dans ce cas, le terme d'"observation tronquée à gauche" est utilisé. Si b_i désigne la durée écoulée entre l'entrée en invalidité et le début de la période d'étude, pour que l'individu i

soit observé, il faut que T soit supérieur ou égal à b_i . En cas d'observation non tronquée, il suffit de poser $b_i = 0$.

Dans la suite, l'ensemble D_i est défini par $[b_i, w]$.

La taille souvent réduite des fichiers impose de regrouper les données en classes et de "discrétiser" la variable aléatoire T , ainsi l'unité de temps peut être, par exemple, le trimestre pendant les deux premières années, puis l'année. En désignant par j le rang d'une période déterminée, dans cette nouvelle échelle des temps, on définit deux séries de nombres binaires en posant :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la } j^{\text{ème}} \text{ période appartient à } A_i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la } j^{\text{ème}} \text{ période appartient à } D_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec l'ensemble des notations précédentes et en notant $(s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1})$ la loi de probabilité (discrète) de T , la vraisemblance du modèle s'écrit :

$$L(s_1, s_2, \dots, s_{m+1}) = \sum_{i=1}^N \frac{\left(\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_{ij} s_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^{m+1} \beta_{ij} s_j \right)}.$$

Sous certaines conditions, le vecteur $(s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1})$ qui maximise cette vraisemblance est aussi solution du système d'équations suivant :

$$s_j = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_{ij} s_j}{\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{ik} s_k} + \frac{(1 - \beta_{ij}) s_j}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k} \right)}{\sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^{m+1} \left(\frac{\alpha_{ip} s_p}{\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{ik} s_k} + \frac{(1 - \beta_{ip}) s_p}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k} \right)}, \text{ pour } j = 1, \dots, m+1$$

ou encore, après simplification du dénominateur :

$$s_j = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_{ij} s_j}{\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{ik} s_k} + \frac{(1 - \beta_{ij}) s_j}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k} \right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k} \right)}, \text{ pour } j = 1, \dots, m+1.$$

La solution de ce système ne peut être déterminée algébriquement, aussi faut-il avoir recours à un algorithme itératif de manière à pouvoir approcher la solution théorique. Les étapes en sont simples :

1- Initialiser $s_1, \dots, s_{m+1}$, de façon à définir une distribution de probabilité, par exemple avec la loi uniforme discrète sur $\{1, \dots, m+1\}$.

2- A partir des approximations issues d'une étape h , les nouvelles estimations sont obtenues en appliquant :

$$s_j^{h+1} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_{ij} s_j^h}{\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{ik} s_k^h} + \frac{(1 - \beta_{ij}) s_j^h}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k^h} \right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k^h} \right)}, \text{ pour } j = 1, \dots, m+1$$

jusqu'à ce que l'amélioration soit minime (selon un critère à définir).

Cet algorithme est simple à appliquer et converge rapidement vers la solution qui est l'estimateur du maximum de vraisemblance. A ce titre, l'estimateur ainsi construit est asymptotiquement normal et efficace.

I.2.- Forme opérationnelle de l'estimateur

La description de l'estimateur faite ci-dessus ne le présente pas sous sa forme la plus directement utilisable. Par contre, en adoptant les notations suivantes, il est possible de singulièrement réduire les temps de calcul.

Soient, pour i variant de 1 à $m+1$:

- n_i : nombre d'individus sortis à la i ème période,
- l_i : nombre d'observations censurées de la période i ,
- B_i : nombre d'observations tronquées de la période i ,
- $S(i) = 1 - F(i) = 1 - \sum_{j=1}^i s_j$, la fonction de survie au point i .

Les sorties, les censures et les troncatures s'étalent sur m périodes au maximum, toutefois, $(s_1, \dots, s_m)$ estime une partie d'une distribution de probabilité discrète, il faut donc compléter la densité avec une période virtuelle de poids :

$$s_{m+1} = 1 - \sum_{i=1}^m s_i.$$

A la $h + 1$ ème itération, on a :

$$s_j^{h+1} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_{ij} s_j^h}{\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_{ik} s_k^h} + \frac{(1 - \beta_{ij}) s_j^h}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k^h} \right)}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{m+1} \beta_{ik} s_k^h} \right)}.$$

En décomposant ces sommes selon la nature de l'observation (censure ou troncature), puis en remplaçant les termes α et β par leurs valeurs, il vient :

$$s_j^{h+1} = \frac{n_j + \left(\frac{\lambda_1}{s(1)} + \dots + \frac{\lambda_j}{s(j)} + \frac{B_{j+1}}{s(j+1)} + \frac{B_{j+2}}{s(j+2)} + \dots + \frac{B_m}{s(m)} \right) s_j^h}{N_0 + \frac{B_1}{s(1)} + \frac{B_2}{s(2)} + \dots + \frac{B_m}{s(m)}}, \text{ pour } j = 1, \dots, m+1.$$

N_0 désigne le nombre d'observations non tronquées.

Cette forme est beaucoup plus facile à utiliser que la précédente, il suffit de classer les données dans un tableau du type suivant:

PERIODE	SORTIES	CENSURES	TRONCATURES
1	n_1	λ_1	B_1
2	n_2	λ_2	B_2
3	n_3	λ_3	B_3
:	:	:	:
j	n_j	λ_j	B_j
:	:	:	:
m	n_m	λ_m	B_m
m + 1	0	0	0

Jusqu'à présent, la sortie du risque *arrêt de travail* ou *invalidité* désignait le décès de l'assuré ou son retour à un l'état de validité.

L'estimateur décrit ci-dessus permet de construire des lois de maintien selon le motif de sortie. Pour cela, il suffit de décomposer les probabilités $(s_1, s_2, \dots, s_m, s_{m+1})$ en

$$s_j = {}_1 s_j + {}_2 s_j, \text{ pour } j = 1, \dots, m + 1,$$

où ${}_1 s_j$ désigne la probabilité de sortie pour cause de décès au cours de la période j et ${}_2 s_j$ la probabilité de sortie lors de cette même période pour un autre motif (retour validité).

En décomposant de la même manière le nombre de sorties n_j , à chaque étape h du processus itératif utilisé, on obtient une estimation des deux séries de probabilités définies ci-dessus.

II.- LES DONNEES

L'étude a porté sur des groupes d'incapables et d'invalides couverts par des contrats collectifs de salariés souscrits auprès de sociétés d'assurances ou d'institutions de prévoyance. Au total, ils comptent 218 710 personnes, dont 172 484 en incapacité temporaire et 46 226 en invalidité.

Les deux tableaux ci-dessous regroupent les effectifs ayant servi à la construction des différentes lois de mortalité. Le détail figure en annexe 1.

INCAPACITE TEMPORAIRE

	20/40	41/50	51/60	TOTAL
Nombre d'assurés	82 945	47 228	42 311	172 484
Nombre de décès	1 286	2 624	3 166	7 076

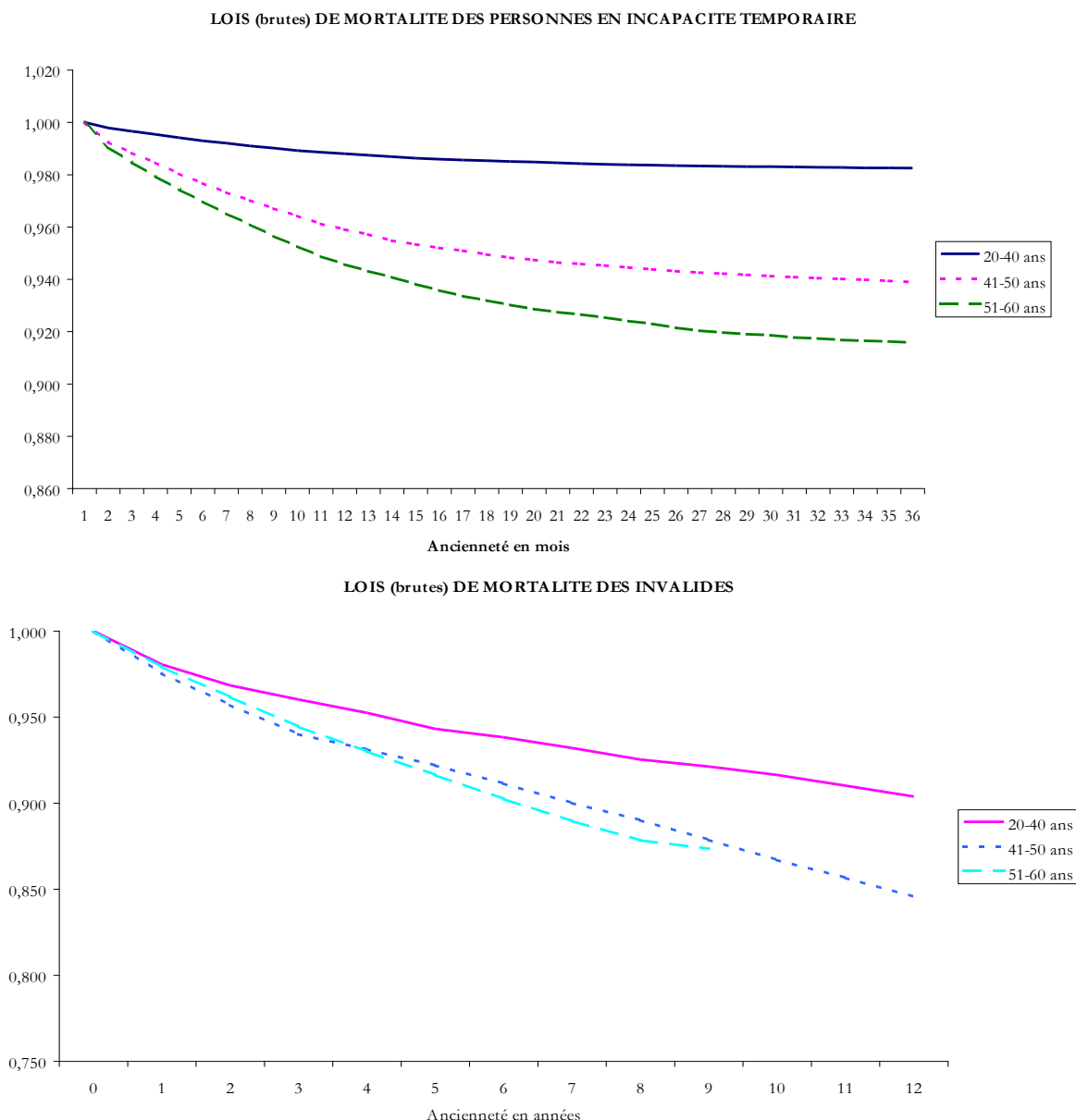
INVALIDITE

	20/40	41/50	51/60	TOTAL
Nombre d'assurés	6 270	15 083	24 873	46 226
Nombre de décès	475	1 487	1 680	3 642

III.- TABLES DE MORTALITE D'EXPERIENCE**III.1.- Lois brutes**

Les invalides, au sens large, ont été regroupés en trois classes d'âges : 20/40 ans, 41/50 ans et 51/60 ans. Le choix de ces classes représente un compromis entre deux contraintes : d'une part, la fiabilité de l'estimation nécessite un grand nombre de données car le phénomène observé, ici le décès, est de faible occurrence, d'autre part, la nature même du risque étudié dépend a priori de l'âge des individus.

Les lois de mortalité qui en résultent figurent dans les graphiques suivants :



Ces lois font apparaître, pour les trois groupes considérés, trois périodes d'ancienneté :

✓ [0,3] la première débute à l'entrée en invalidité et se termine 3 ans après. La plupart des décès est observée durant ces trois années. Dans cette tranche d'ancienneté les quotients de mortalité seront, comme on le verra par la suite, jusqu'à 12 fois supérieurs à ceux de la population générale ;

✓ [4,9] la deuxième s'étale entre la quatrième et la neuvième année d'ancienneté en invalidité. La fréquence des décès diminue environ de moitié par rapport à la première période, mais demeure élevée au regard de la troisième tranche ;

✓ [10,20] la troisième tranche traduit des niveaux de mortalité très inférieurs à ceux des périodes précédentes.

Il est intéressant de constater que la mortalité d'un invalide dépend principalement du temps passé dans le risque, et que le facteur âge ne commence à compter que lorsque celui-ci atteint 50 ans (âge atteint et non âge à l'entrée).

III.2.- Surmortalité exprimée par rapport à la table TD 88/90

Dans cette section, les quotients de mortalité sont comparés à ceux issus de la TD 88/90 afin d'en dégager des coefficients de surmortalité.

Notations

✓ x : âge moyen du groupe à l'entrée dans le risque ;

✓ l_t^x : estimation de la loi de mortalité du groupe d'âge x , en fonction de l'ancienneté t dans le risque ;

✓ l_x^{TD} : table de mortalité TD 88/90 ;

✓ $l_t^{TD,x}$: loi de mortalité construite à partir de la TD 88/90 :

$$l_0^{TD,x} = 10000,$$

$$l_{t+1}^{TD,x} = l_t^{TD,x} \times \frac{l_{x+t+1}^{TD}}{l_{x+t}^{TD}},$$

✓ a , b et c : paramètres d'ajustement, chacun correspondant à une période d'ancienneté ([0,3], [4,9], [10,20]) ;

✓ $l_t^{*x}(a,b,c)$ ou simplement l_t^{*x} : loi de mortalité obtenue par majoration (ou minoration) des taux annuels de mortalité de la TD.

Ainsi,

$$l_0^{*x} = 10\ 000 ;$$

$$l_t^{*x} = l_{t-1}^{*x} \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{l_t^{TD,x}}{l_{t-1}^{TD,x}} \right) \times a \right\} \text{ si } 0 \leq t \leq 3 ;$$

$$l_t^{*x} = l_{t-1}^{*x} \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{l_t^{TD,x}}{l_{t-1}^{TD,x}} \right) \times b \right\} \text{ si } 4 \leq t \leq 9 ;$$

$$l_t^{*x} = l_{t-1}^{*x} \times \left\{ 1 - \left(1 - \frac{l_t^{TD,x}}{l_{t-1}^{TD,x}} \right) \times c \right\} \text{ si } 0 \leq t \leq 20.$$

Le critère de choix de a, b et c est celui des moindres carrés, c'est à dire que u, v et w réalisent le minimum de la quantité suivante lorsque $u = a$, $v = b$ et $w = c$:

$$\sum_{t=0}^{20} \left(\frac{l_t^{TD,x} - l_t^{*x}(u, v, w)}{l_t^{TD,x}} \right)^2.$$

Les résultats des ajustements sont donnés dans le tableau suivant :

INCAPACITE TEMPORAIRE

Périodes d'ancienneté	Paramètres	Classes d'âge		
		20/40	41/50	51/60
0	a	5,98	9,84	5,38
1	b	1,73	2,99	1,86
2	c	0,46	1,03	0,64

INVALIDITE

Périodes d'ancienneté	Paramètres	Classes d'âge		
		20/40	41/50	51/60
0-3	a	6,28	4,00	1,02
4-9	b	2,70	1,66	0,75
10-20	C	1,43	1,23	-

Les coefficients ci-dessus traduisent donc la surmortalité des personnes en arrêt de travail selon l'âge d'entrée dans le risque et son ancienneté.

III.3.- Lissage et extrapolation aux autres âges

Afin de pouvoir extrapoler les résultats obtenus précédemment à tous les âges, il convient d'atténuer les faibles irrégularités liées à la taille des effectifs pour certaines périodes.

•*Incapacité temporaire*

Les quotients de mortalité ($q_j^{DC,I,35}$, $q_j^{DC,I,45}$ et $q_j^{DC,I,55}$, pour $j=0$ à 35) des trois lois issues de l'estimation ont été lissées selon la méthode de Whittaker-Anderson.

Les quotients relatifs aux autres âges, compris entre 25 et 60 ans, ont été déduits :

✓ pour les âges inférieurs à 35 ans, de manière proportionnelle par rapport aux de taux de mortalité issus de la table TD 88/90 . Les taux sont ainsi obtenus par aggravation des quotients de la table TD88/90 dans la même proportion que celle qui existe entre $q_j^{DC,I,35}$ et $q_j^{TD,35}$ pour $j=0$ à 35 ;

✓ pour les âges compris entre 36 et 44 ans , puis entre 46 et 54 ans, de manière linéaire ;

✓ enfin, pour les âges supérieurs à 55 ans, de manière équivalente à celle retenue aux âges inférieurs à 35 ans.

•*Invalidité*

Les quotients de mortalité relatifs aux invalides ont été ajustés selon une famille de fonctions de polynômes du second degré pour la variable j (l'ancienneté). Ainsi, les quotients lissés $q_j^*(x)$ s'écrivent :

$$q_j^*(x) = a(x)j^2 + b(x)j + c(x), \text{ pour } j=0 \text{ à } 35 \text{ et } x=25 \text{ à } 60,$$

où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont eux mêmes des polynômes du second degré en x .

IV.- *CALCUL DES PROVISIONS MATHÉMATIQUES*

A partir des lois de mortalité des personnes en invalidité (annexe 2) ou percevant des indemnités journalières (annexe 3), il est théoriquement possible de déterminer le montant de la provision mathématique correspondant au maintien de la garantie décès. Ce calcul devrait faire intervenir en principe le montant des capitaux sous risque, capitaux eux-mêmes et capitaux constitutifs des rentes d'éducation ou de conjoint survivant le cas échéant, à la date du décès de l'assuré en arrêt de travail. Un tel calcul ne peut être mené, faute de disposer de l'ensemble des éléments nécessaires. Dès lors, deux familles de méthodes peuvent être utilisées : celle qui considère que le capital sous risque est constant dans le futur et égal au capital au jour du calcul de la provision, et celle qui consiste à provisionner la prime que devrait payer une personne en arrêt de travail pour bénéficier de la couverture décès, le risque étant mutualisé sur l'ensemble du portefeuille.

IV.1- Provisions exprimées en fonction des capitaux sous risque

La provision mathématique d'un euro de capital versé en cas de décès de l'assuré bénéficiant de prestations au titre d'une incapacité de travail s'écrit en fonction des éléments suivants :

- ✓ $l_j^{DC,INV}$: loi de mortalité en invalidité au bout de j années d'ancienneté dans le risque ;
- ✓ l_j^{INV} : loi de maintien en invalidité (arrêté du 28 mars 1996) ;
- ✓ i : taux technique annuel ; im : le taux technique mensuel
- ✓ $l_j^{DC,IJ}$: loi de mortalité en incapacité temporaire au bout de j mois d'ancienneté dans le risque ;
- ✓ l_j^{IJ} : loi de maintien en incapacité temporaire (arrêté du 28 mars 1996) ;
- ✓ f_j : probabilité de passage de l'état d'incapacité temporaire à l'invalidité au bout de j mois d'ancienneté ;
- ✓ n : nombre initial d'années de la période de couverture du risque (par exemple $n = 60 - x$, si x est l'âge de l'assuré à l'entrée dans le risque).

La provision mathématique, pour un euro de capital versé en cas de décès d'un invalide, au bout de k années d'ancienneté ($k=0, 1, \dots, n-1$) dans le risque est égale alors à :

$$\Pi^{INV}(k) = \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{l_{k+j}^{INV}}{l_k^{INV}} \times q_{k+j}^{DC} (1+i)^{-j-1/2}.$$

En ce qui concerne les provisions mathématiques pour un euro de capital versé en cas de décès d'une personne en arrêt de travail au bout de k mois d'ancienneté ($k=0, 1, 2, \dots, 35$), l'expression est la suivante :

$$\Pi^{IJ}(k) = \sum_{j=1}^{36-k} \frac{(l_{k+j}^{DC,IJ} - l_{k+j+1}^{DC,IJ})}{l_k^{DC,IJ}} \times (1+im)^{-j} + \Pi^{INV}(0) \times \sum_{j=1}^{36-k} \frac{f_{k+j}}{l_k^{IJ}} \times (1+im)^{-j}.$$

Ainsi, si x désigne l'âge de l'assuré, k son ancienneté dans le risque (incapacité temporaire ou invalidité) et C le capital décès garanti, la provision mathématique notée $PM(x,k)$ (égale à $\Pi^{INV}(x,k)$ ou à $\Pi^{IJ}(x,k)$), s'écrit alors :

$$PM(x,k) = \text{Coeffl}(x,k) \times C.$$

Les coefficients **Coeffl(x,k)** figurent en annexe 4 et 5.

Cette méthode, outre qu'elle nécessite la connaissance de la situation de famille de l'assuré à la date du calcul, ne permet pas d'utiliser des lois de maintien en arrêt de travail ou des taux techniques spécifiques sans avoir à refaire de nouveaux barèmes. Le calcul proposé ci-dessous devrait éviter cet écueil.

IV.-2 Provisions exprimées en fonction des capitaux sous risque et des barèmes de provisionnement du risque arrêt de travail

Selon cette modalité, les provisions s'obtiennent par la formule suivante :

$$PM(x,k) = \text{Coeff2}(x,k) \times \text{CoeffIncapInval}(x,k) \times C,$$

où $\text{CoeffIncapInval}(x,k)$ désigne le coefficient de provisionnement du risque incapacité / invalidité pour l'âge x et l'ancienneté k .

L'annexe 6 donne les coefficients $\text{Coeff2}(x,k)$ pour les assurés en invalidité et l'annexe 7 pour ceux qui perçoivent des indemnités journalières.

Ces coefficients représentent l'équivalent d'un taux de prime lissé sur la durée probable d'arrêt de travail, ils sont peu sensibles à un changement de taux technique dans les formules. Par ailleurs si l'on utilise les lois de maintien réglementaires, les deux calculs ci-dessus conduisent au même résultat.

IV.-3 Provisionnement de la prime exonérée

Lorsque l'information permettant d'approcher les capitaux sous risque, et notamment la situation de famille de l'ensemble des personnes en arrêt de travail, n'est pas disponible et que le portefeuille de l'organisme d'assurance est suffisamment large, il est possible de provisionner la prime exonérée.

Dans ce cas, on suppose que la mortalité des invalides dépend du secteur professionnel, on peut donc raisonner en terme de surmortalité, fonction bien entendu de l'âge et de l'ancienneté dans l'arrêt de travail.

Les barèmes des points IV.1 et IV.2 ci-dessus, rapportés au taux de mortalité moyen observé sur les portefeuilles ayant servi de support à l'étude, conduisent à de nouvelles séries de coefficients (données dans les annexes 8 à 11) qui s'appliquent alors au taux de prime des actifs du groupe dont est issu l'assuré en arrêt de travail.

Ces méthodes de calcul des provisions techniques sont actuariellement équivalentes aux précédentes.