

**CONSTRUCTION DES TABLES DE MORTALITE
D'EXPERIENCE
POUR LES PORTEFEUILLES DE RENTIER**

Présentation de la méthode de construction

Frédéric PLANCHET

SOMMAIRE

1. Introduction	3
2. L'ajustement des tables du moment brutes	3
3. La projection des taux de mortalité futurs	4
4. La fermeture des tables	5
5. Les choix techniques influençant les tables prospectives.....	5
6. Conclusion.....	6

1. Introduction

Cette note a pour objet de présenter les méthodes retenues par Daniel SERANT au sein du laboratoire SAF (ISFA) pour construire les tables de mortalité d'expérience à partir des données de marché collectées par l'Institut des Actuaire. Elle s'appuie pour l'essentiel sur le document de travail SERANT [2005] rédigé dans le cadre de la construction de tables prospectives sur des données INSEE et sur la note méthodologique PLANCHET [2005] rédigée dans le cadre des travaux de l'Institut des Actuaire sur le sujet dont elle constitue le prolongement.

Afin d'alléger autant que possible la présentation, seules les formules essentielles à la compréhension des modèles sont reprises ici. Le détail des modèles et des algorithmes de résolution numérique est accessible dans les documents cités en référence (voir par exemple SERANT [2005] ou PLANCHET [2005] pour ces questions).

On rappelle que l'objectif de l'étude conduite par Daniel SERANT est de construire des tables de mortalité prospectives pour des portefeuilles de rentiers à partir des données de place transmises par les différents intervenants du marché. Les modèles proposés se doivent donc d'intégrer non seulement l'ajustement des taux de mortalité passés, mais aussi la projection de leur évolution dans les années à venir. Cette projection est abordée d'un point de vue inférentiel, au sens où le modèle doit détecter une éventuelle tendance passée pour l'extrapoler dans le futur.

Compte tenu des contraintes fortes imposées par les données disponibles, il a été retenu des *modèles utilisant une référence externe de mortalité* : une solution pour pallier les difficultés associées à des échantillons de taille réduite est en effet de positionner la mortalité du groupe considéré par rapport à une référence externe. Disposant d'un ensemble de tables de moments INSEE (féminine et masculine) historiques et prospectives l'idée est alors de « référencer » les tables du moment d'expérience dans cet ensemble de tables.

Les différentes étapes de la construction sont reprises ci-après. Il est précisé que la détermination des taux bruts de mortalité n'est pas décrite ici, le lecteur pourra se reporter à SERANT [2005] sur ce point.

2. L'ajustement des tables du moment brutes

Les taux bruts ont été ajustés en les positionnant par rapport aux taux prospectifs INSEE précédemment construits par Daniel SERANT (*cf.* SERANT [2005]). La construction des tables de place s'appuie donc sur la construction préalable des tables prospectives pour la population générale. Les conséquences de cette démarche sur les tables de place sont évoquées *infra*.

Plus précisément, le positionnement est effectué via la régression des logits des taux bruts sur les logits de la table de référence, ce qui conduit formellement au modèle suivant :

$$\ln(q_{xt} / (1 - q_{xt})) = a_x \ln(q_{xt}^{ref} / (1 - q_{xt}^{ref})) + b_x + \varepsilon_{xt}$$

ou encore :

$$\lg_x(t) = a_x \lg_x^{ref}(t) + b_x + \varepsilon_{xt}$$

La mise en œuvre de cette approche si l'on retient un critère de type « moindres carrés » est très simple, puisqu'il s'agit d'une régression linéaire dans le cadre d'un modèle linéaire ordinaire. On dispose donc d'une expression explicite des paramètres a et b .

On notera que l'approche usuelle dans ce type de modèles consiste à faire dépendre les paramètres a et b du temps et non de l'âge ; dans le cas présent cette approche s'est avérée inopérant

La régression est effectuée sur la plage 1994-2004 pour laquelle des tables du moment sont disponibles. Une régression est effectuée pour chaque valeur de x , les âges disponibles étant de 40 à 95 ans.

Les résultats montrent une forte corrélation entre les paramètres a et b , ce qui conduit à contraindre le modèle en posant $a_x = \alpha + \beta b_x$. L'estimation des paramètres est finalement effectuée dans ce contexte (le modèle étant alors non linéaire), sur la plage d'âge 40-95 ans, et pour les années 1994-2004.

3. La projection des taux de mortalité futurs

Une fois les tables d'expérience ajustée sur le période 1994-2004, sur la plage d'âges 40-95 ans, une extrapolation de la mortalité future est effectuée.

Les paramètres α , β et les b_x obtenus à la section précédente permettent simplement de prolonger les tables de place sur la dimension temporelle pour obtenir les taux prospectifs de 2005 à 2100 en appliquant la formule :

$$\lg_x(t) = (\alpha + \beta b_x) \lg_x^{ref}(t) + b_x$$

Toutefois l'application directe de cette formule d'extrapolation conduit à des taux de mortalité de la population d'assurés supérieurs à la population générale à partir de 2015, ce qui apparaît peu vraisemblable.

La dynamique de projection des taux de la table de place a donc été ajustée pour converger progressivement vers les taux de la population générale. En pratique l'écart entre les logits de la population d'assurés et les logits de la population générale :

$$\Delta_x(t) = \lg_x(t) - \lg_x^{ref}(t)$$

ont été modélisés selon :

$$\Delta_x(t) = -\exp(t \times \theta_x + \rho_x)$$

avec $\theta_x < 0$.

A l'issue de cette étape, on dispose donc d'un ensemble de tables prospectives de 2005 à 2100, pour la plage d'âges 40-95 ans. Il reste à extrapoler les taux de décès aux âges postérieurs à 95 ans pour finaliser ces tables.

La méthode retenue pour cette opération est décrite à la section suivante.

4. La fermeture des tables

L'expérience montre que si on ferme chaque table à t fixé, les taux aux grands âges peuvent être incohérents d'une table du moment à l'autre. Il convient d'assurer la cohérence globale des différentes tables du moment aux âges supérieurs à 95 ans. La méthode retenue consiste à réaliser un prolongement sur la base d'une expression analytique, en intégrant des contraintes.

En pratique la première méthode testée a consisté à donner une forme quadratique aux logits aux grands âges en assurant un raccordement de classe C^1 à 95 ans (*ie* continuité et dérivabilité à cet âge) et en imposant également la valeur $\frac{1}{2}$ au taux de décès à 110 ans. Ces contraintes définissent les paramètres de la forme quadratique de manière unique.

Toutefois cette méthode laisse subsister certaines incohérences (croisements de taux).

Une version affinée de la méthode a été mise en œuvre, consistant à faire dériver l'âge pivot auquel le taux de décès est égal à $\frac{1}{2}$. Formellement cela conduit à poser pour l'âge pivot :

$$x_p = at + b$$

Les paramètres a et b sont déterminés au moyen d'un critère de type « moindre carrés », sur les âges et les années (la plage d'âge retenue pour cette optimisation étant 85-95 ans). Le modèle précédent appliqué avec les âges pivot dérivant ainsi ne présente plus d'incohérence.

On peut noter qu'une expression polynômiale sur les logits des taux de décès conduit à une forme exponentielle sur les taux de décès.

5. Les choix techniques influençant les tables prospectives

Un certain nombre de choix doivent être effectués aux différentes étapes de construction des tables, et certains d'entre eux peuvent avoir des conséquences importantes sur les tables obtenus *in fine*.

Ces éléments sont évoqués ici.

En premier lieu, et comme cela a été évoqué à la section 2 ci-dessus, les tables construites ici pour les populations d'assurés s'appuient sur des tables élaborées sur la base de données

INSEE. Ces tables « population générales » sont construites de manière intrinsèque, et 4 modèles peuvent être retenus :

- ✓ Le modèle de Lee-Carter par moindres carrés ordinaires ;
- ✓ Le modèle log-linéaire ;
- ✓ Le modèle log-linéaire avec contraintes ;
- ✓ Les splines.

Les modèles 1 et 2, d'une part et 3 et 4, d'autre part, conduisent à des tables proches. Mais les deux groupes de modèles conduisent à des résultats sensiblement différents (le groupe 1-2 étant globalement plus prudent que le groupe 3-4).

En ce qui concerne la construction des tables de populations d'assurés proprement dites, deux facteurs peuvent être considérés :

- ✓ Les tables brutes de référence utilisées : il est envisageable de travailler directement sur des tables année par année, ou sur des tables construites sur des blocs de 3 années glissantes.
- ✓ Avant ajustement, les taux bruts peuvent être lissés ou non ; dans le cas d'un lissage, on peut proposer un lissage « Gompertz local » ou l'utilisation de la procédure LOESS du logiciel SAS (qui donne la possibilité d'introduire à ce niveau une référence externe).

Les choix effectués sur ces points impactent les projections de mortalité ; en effet, de petits écarts sur les tables historiques génèrent potentiellement des dérives importantes dans les projection sur plusieurs dizaines d'années.

6. Conclusion

Les principales étapes de construction des tables de place sont maintenant arrêtées ; il subsiste toutefois un certain nombre de degrés de libertés, plusieurs approches étant justifiables lors de certaines étapes importantes de la construction.

Les tables définitives pourront être calibrées une fois les choix définitifs effectués sur ces différents points.

Bibliographie

FFSA [2005] *Demande de données relatives aux populations d'assurés*, Document de travail FFSA.

PLANCHET F. [2005] *Tables de mortalité d'expérience pour des portefeuilles de rentiers*, Note méthodologique de l'Institut des Actuaire.

SERANT D. [2005] « Construction de tables prospectives de mortalité », *Document interne FFSA*.