Assurance de biens et de responsabilité

Enjeux actuariels

Version 1.3

Septembre 2012

Frédéric PLANCHET
fplanchet@winter-associes.fr

Préambule

L'objectif de cette présentation est de présenter et de discuter les points techniques (actuariels) plus particulièrement destinés à évoluer au regard des modifications en cours des cadres réglementaires et comptables, des techniques et des pratiques commerciales.

Après un rappel du contexte, on aborde successivement les thèmes suivants :

- les logiques de tarification
- les évolutions du cadre de provisionnement
- la détermination du SCR
- la prise en compte de la réassurance
- les aspects quantitatifs de l'ORSA.

La présentation est délibérément synthétique et pour des développements plus détaillés le lecteur est renvoyé aux références bibliographiques citées.

Préambule

L'assurance non-vie, et plus particulièrement l'assurance dommage, a connu une évolution marquée et contrastée de son activité compte tenu de :

- la réduction des marges, notamment les marges financières qui permettaient à certains opérateurs de sous-tarifer certaines offres (branche de responsabilité civile),

- une technicité actuarielle ayant fortement évolué compte tenu de l'introduction de mécanismes financiers (actualisation des provisions), et de la prise en compte de la structure du risque de manière générale (Solvabilité 2),

- une évolution réglementaire qui à la marge vise à réduire les temps de règlement (*cf*. RC Médicale avec la mise en œuvre des Lois About et Kouchner),

- des marchés saturés qui recherchent des relais de croissance *via* des gains sur les réseaux et une offre beaucoup plus complexe (marché automobile),

- des partenaires et notamment les réassureurs qui durcissent leur critères de participation dans un monde plus risqué (risques climatiques).

Préambule

La réduction des marges des branches longues

Pour les branches longues et au-delà même de problématiques de gestion actif-passif, les revenus financiers issus du placement des provisions ont souvent eu pour impact une insuffisance tarifaire structurelle compensée par les produits financiers.

Le retournement de tendance accompagné de difficultés de gestion d'actif-passif ont pour effet de créer des difficultés pour certains opérateurs qui ont dû à la fois augmenter leurs tarifs et réduire les pertes par prélèvement sur fonds propres.

Exemples : la responsabilité civile médicale ou les rentes RC automobile (fréquence faible, sévérité importante et duration importante).

Préambule

La réduction des marges des branches longues

Pour une telle garantie, les provisions de sinistres peuvent représenter jusqu'à 90% de la charge finale et 25 % de cette charge au bout de dix ans.

Si les revenus des placements atteignent 5 %, les produits financiers issus du placement des provisions représentent plus de 33 % de la charge totale.

Un placement de 3 % au lieu de 5 % réduit ce ratio à environ 20 % de la charge totale.

Préambule

Une complexité technique croissante

Le caractère déterministe des provisions est revu avec une vision de calculs probabilistes et de la *VaR*, notions qui se sont développées avec Solvabilité 2.

On observe aussi une offre plus segmentée nécessitant une décomposition plus fine des bases de données (aujourd'hui rendue possible par les outils informatiques).

La mise en œuvre de certains processus « très financiers » tels que les DFA dans une logique proche de l'assurance vie contribue à cette complexité et induit un recours plus systématique au calcul financier et stochastique ainsi la prise en compte des problématiques liées à la volatilité (*cf*. Planchet et *al*. [2011]).

Enfin, la prise en compte de l'actualisation vient s'ajouter à cette liste.

Préambule

Une offre plus complexe

Dans un contexte de concurrence vive, les assureurs ont développé des offres complémentaires notamment de services, les offres combinées.

Les canaux de distribution ont aussi fortement évolué avec internet qui permet de comparer les offres (souscription en ligne, comparateurs). On peut toutefois noter que la souscription en ligne est encore limitée et que la part de marché des assureurs directs est seulement de 3 %.

Enfin, de nouveaux entrants (banques, sociétés étrangères) sont venus s'implanter sur les marchés IARD.

Les bancassureurs ont notamment augmenté leurs parts de marché sur le marché des particuliers (Auto / MRH) dont ils détiennent environ 10 % aujourd'hui et visent 20 % dans 10 ans.

cf. http://www.revue-banque.fr/banque-detail-assurance/article/assurances-iard-fruit-convoite-par-les-bancassureu

Préambule

Des perspectives nouvelles : les données massives

Aujourd'hui le monde des données connait une profonde révolution, évolution en fonction des capacités technologiques (numérisation) dont on dispose pour les produire, les conserver, les traiter. On utilise pour désigner ce phénomène le terme de données massives (*Big Data*).

Ces données peuvent être internes ou externes (*Open Data*).

Une nouvelle économie des données apparaît : eu égard au monde précédent, on est entré dans un monde de données abondantes (surabondantes), faciles à manipuler, peu couteuses.

Question : comment cette nouvelle économie des données peut-elle, va-t-elle modifier, bouleverser les modèles mathématiques nés du monde précédent, changer les pratiques de transferts de risques, transformer les marchés d'assurances et la vente des protections financières ?

cf. http://www.lajauneetlarouge.com/article/les-donnees-massives-du-%C2%AB-big-data-%C2%BB-un-nouvel-or-noir

Préambule

Des perspectives nouvelles : les données massives

Elles sont utilisées dans le monde de la santé :

- comme outil d'aide au diagnostic ;
- comme outil de relation client pour les assureurs.

L'utilisation de données massives est déjà effectif en assurance :

- en assurance automobile (systèmes PAYD) ;
- en assurance pour la détection des fraudes ;
- pour les modèles climatiques (avec des applications en assurance agricole).

L'utilisation des données massives offre également des perspectives à la gestion des risques :

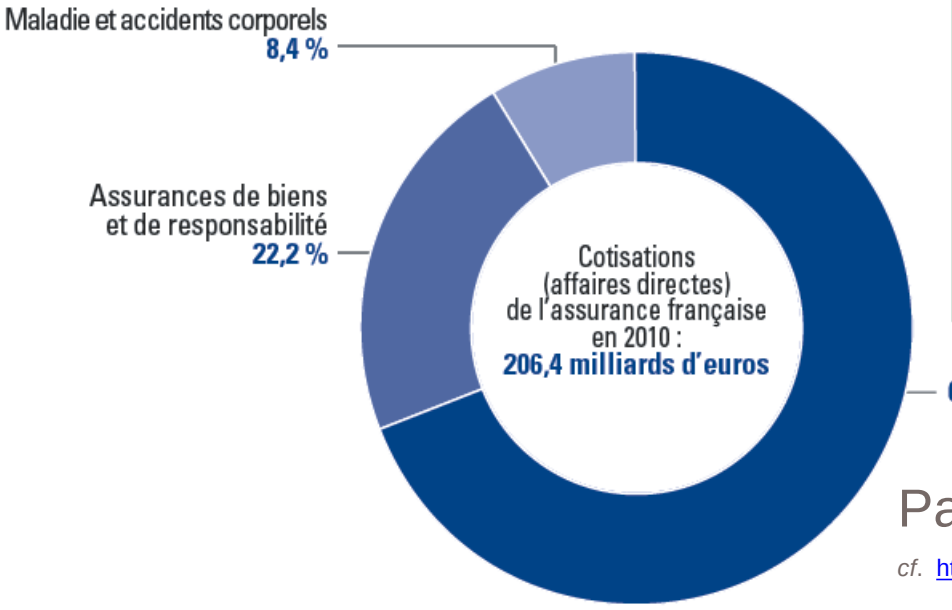
http://www.rmmagazine.com/MGTemplate.cfm?Section=MagArchive&NavMenuID=304&template=/Magazine/DisplayMagazines.cfm&Archive=1&IssueID=365&AID=4536&Volume=59&ShowArticle=1

http://www.riskandinsurance.com/story.jsp?storyId=533346922

Préambule

Quelques chiffres…

Le marché de l'assurance française en 2010 a la structure de cotisations suivante (*cf.* FFSA 2011]) :



Évolution des cotisations (1) (affaires directes) selon le périmètre du marché

(en milliards d'euros)	2006	2007	2008	2009	2010	Variation
Automobile	17,7	17,7	17,9	17,8	18,3	+ 2,5 %
Dommages aux biens des particuliers	6,4	6,8	7,2	7,5	7,9	+ 4,8 %
Dommages aux biens des professionnels	5,7	5,8	5,8	5,9	5,9	+ 0,5 %
Responsabilité civile générale	3,3	3,3	3,4	3,5	3,4	- 1,8 %
Construction	2,3	2,5	2,5	2,4	2,3	- 2,1 %
Catastrophes naturelles	1,3	1,3	1,4	1,3	1,3	+ 0,7 %
Transports	1,1	1,1	1,1	1,0	1,0	- 2,6 %
Dommages aux biens agricoles	0,9	0,9	1,0	1,0	1,0	- 0,5 %
Crédit-caution, PJ, PP, assistance	4,0	4,3	4,5	4,5	4,7	+ 3,1 %
Total assurances de biens et responsabilité	**42,7**	**43,6**	**44,7**	**45,0**	**45,8**	**+ 1,9 %**
Variation des cotisations	**+ 1,9 %**	**+ 2,4 %**	**+ 2,5 %**	**+ 0,4 %**	**+ 1,9 %**	

(1) y compris les succursales de l'U.E.

Particuliers : 60 % des primes

cf. http://www.ffsa.fr/sites/upload/docs/application/pdf/2012-01/assurancesbiensresponsabilitedonneescles2010.pdf

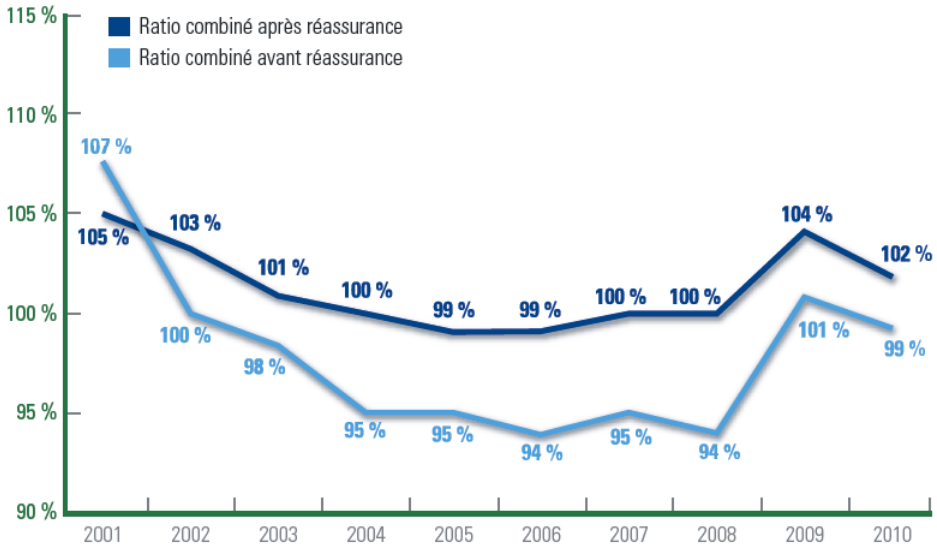
Préambule

Quelques chiffres…

Une situation économique tendue…

Principaux ratios comptables (états C1) **en pourcentage des primes nettes**

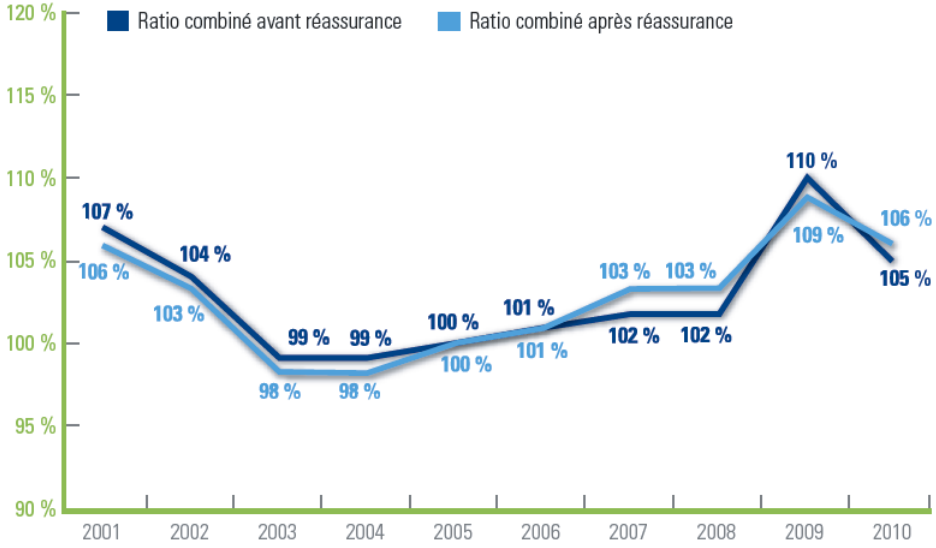
	2006	2007	2008	2009	2010
Dotation des PPNA	- 0,4	- 0,4	- 0,3	- 0,4	- 0,6
Produits financiers nets	10,1	9,6	7,6	6,7	7,4
Prestations	54,2	54,0	55,4	62,6	62,7
Frais de gestion des sinistres	8,2	8,2	8,2	8,4	8,3
Dotation provisions	9,1	10,5	7,0	7,2	4,8
Frais acquisition	14,9	15,6	15,9	16,3	15,8
Frais administration	7,2	7,1	7,6	7,4	7,6
Charge réassurance	5,7	5,0	5,5	2,3	3,1
Résultat technique	10,2	8,7	7,7	2,1	4,5
Total des provisions	**212,5**	**218,6**	**221,3**	**228,3**	**233,9**

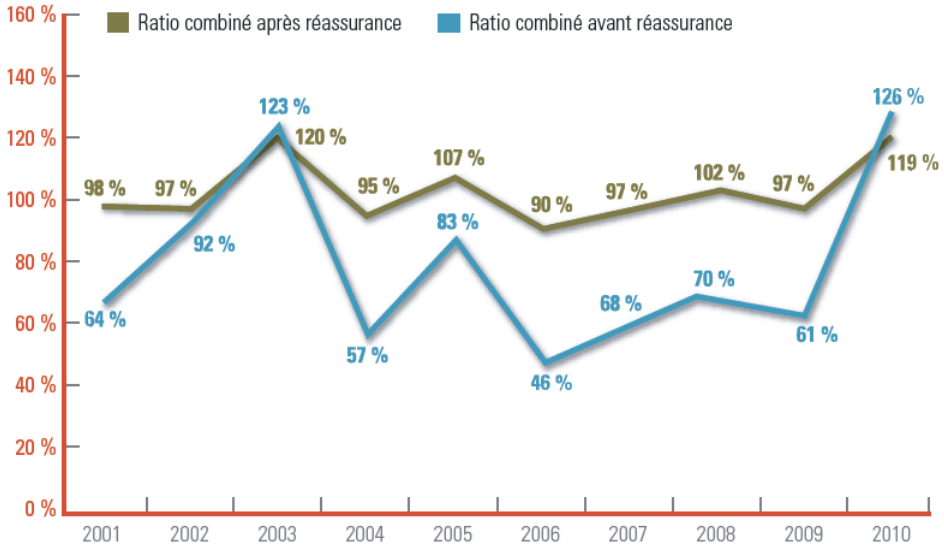


Préambule

Quelques chiffres…

… et contrastée entre les branches (ex. : automobile et cat. nat.) :



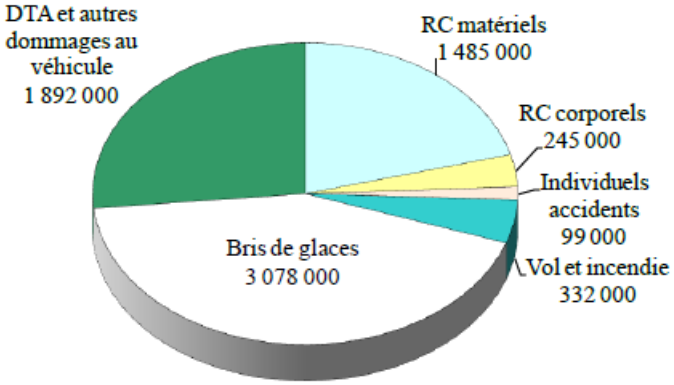


Préambule

Quelques chiffres…

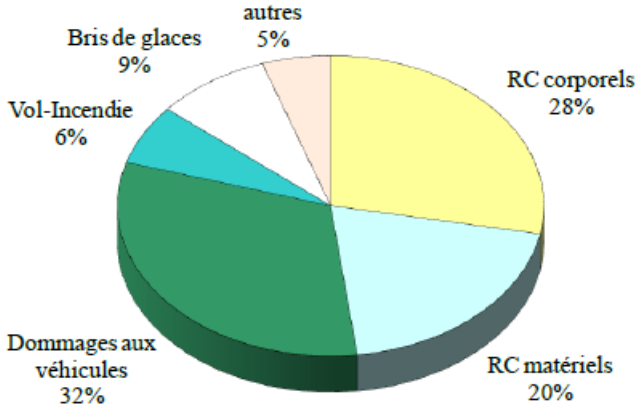
A l'intérieur d'une branche donnée, le comportement des différentes garanties est très hétérogène (*cf*. FFSA [2010]) :

Répartition du nombre de sinistres avec suite



7 131 000 sinistres

Répartition de la charge des sinistres



Les sinistres RC corporels représentent 3,4 % du nombre total de sinistres automobile et leur coût représente 28 % de l'ensemble de la charge automobile (soit 4,4 Md€ en 2008 vue en fin de 1ère année).

Préambule

Au global

Au niveau des activités, les enjeux sont variés entre les différentes branches mais le secteur automobile est de loin le secteur le plus important des assurances de biens et de responsabilité. Il représentait 40 % du marché en 2010.

Les marchés de l'assurance de bien et en particulier les marchés automobiles sont saturés et très concurrentiels. Il existe par conséquent une grande compétitivité au niveau des prix qui se traduit par différents phénomènes :

- une baisse des prix,

- une multiplication des offres ;

- des services complémentaires (ex. : assistance psychologique dans un contrat d'assurance auto).

Préambule

L'impact de la directive Solvabilité 2

La mise en œuvre du nouveau cadre prudentiel imposé par Solvabilité 2 a des conséquences importantes à plusieurs niveaux :

- technique : recours plus systématique aux modèles stochastiques de provisionnement, analyse prospective des risques, prise en compte explicite des risques financiers ;

- organisationnel : mise en place d'un système de gestion des risques, réforme de la gouvernance, relations avec les tiers (publication d'informations) ;

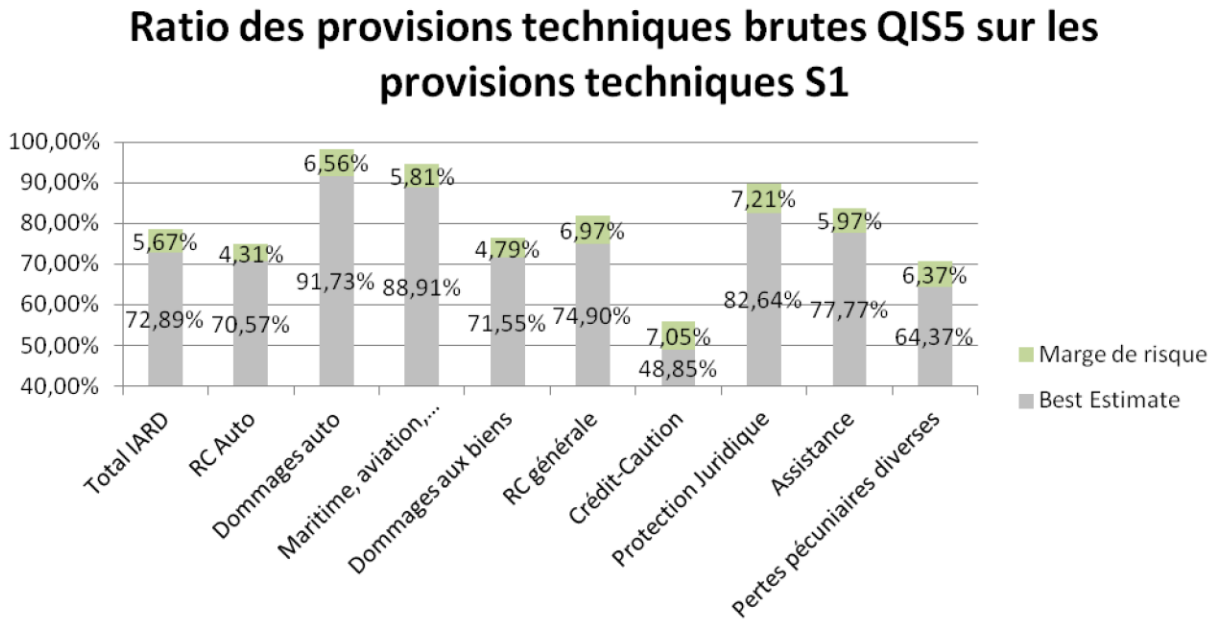
- pilotage des risques : nouvelle prise en compte de la réassurance, coût du capital modifié du fait d'une mesure différente du capital réglementaire (SCR) ; impact potentiel sur la sélection de portefeuille.

L'impact financier (associé aux risques d'actifs) est également un élément important à considérer (40 % de l'exigence de marge S2 en non-vie).

Préambule

L'impact de la directive Solvabilité 2

Du point de vue de la mesure des provisions techniques, le nouveau dispositif conduit globalement à une baisse :

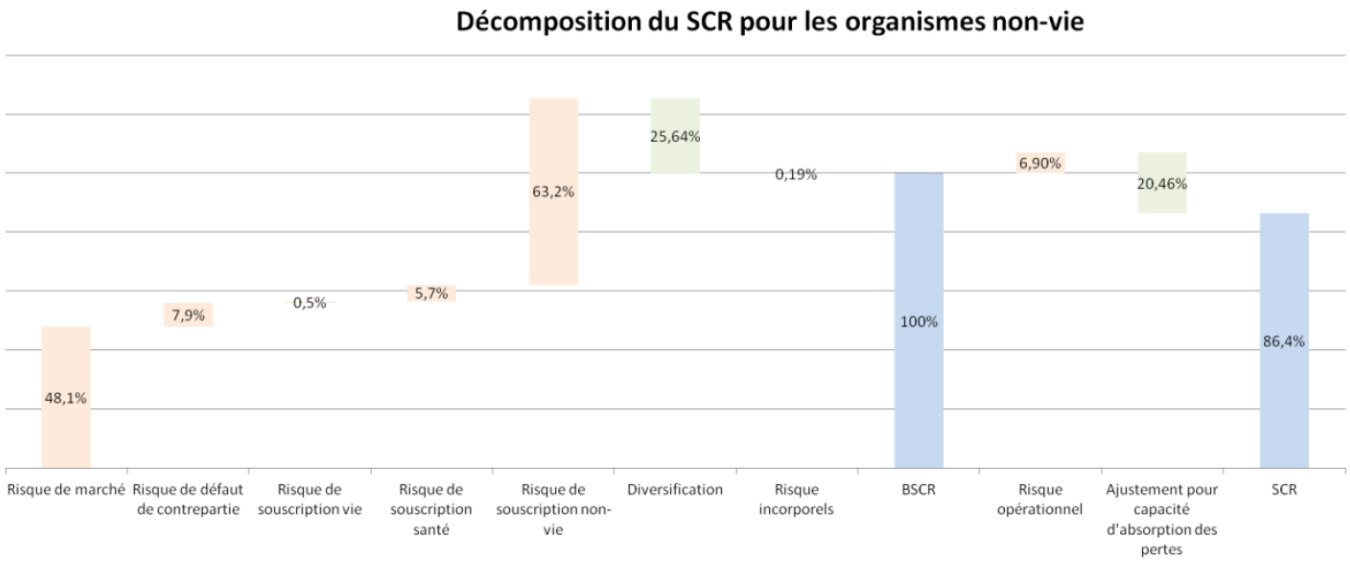


http://www.acp.banque-france.fr/fileadmin/user_upload/acp/publications/documents/201103-ACP-solvabilite-2-enseignements-de-QIS5.pdf

Préambule

L’impact de la directive Solvabilité 2

Les facteurs explicatifs de l’exigence de marge sont majoritairement les risques de souscription et de marché :



Le taux de couverture du SCR est pour l’exercice QIS5, globalement, d’environ 180 %.

SOMMAIRE

Assurance IARD

1. **Les logiques de tarification**
2. Les évolutions du cadre de provisionnement
3. La détermination du SCR
4. La prise en compte de la réassurance
5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

1. Les logiques de tarification

La tarification en assurance IARD est basée sur la logique de mutualisation, légitimée théoriquement par la loi des grands nombres

$$\Lambda_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \longrightarrow \quad n^{-1}\Lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \mu = E(X)$$

et le théorème de la limite centrée :

$$\sqrt{n}\frac{n^{-1}\Lambda_n - \mu}{\sigma} = \frac{\Lambda_n - E(\Lambda_n)}{\sigma(\Lambda_n)} \underset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$$

Aussi sur la base de la connaissance de l'espérance et de la variance de Λ, la formule précédente permet d'approximer la distribution de la charge future actualisée avec lesquelles on peut aisément calculer des quantiles ou des intervalles de confiance. Par exemple, l'intervalle de confiance à 95 % pour Λ est de la forme :

$$IC(\Lambda) = \left[E(\Lambda) - 1{,}96 \times \sigma(\Lambda), E(\Lambda) + 1{,}96 \times \sigma(\Lambda)\right]$$

1. Les logiques de tarification

Les résultats précédents s'appliquent traditionnellement à l'intérieur d'une « classe de risque homogène », *i.e.* telle que les variables X_i soient iid.

Il est utile d'observer que le résultat fondamental

$$\frac{\Lambda_n - E(\Lambda_n)}{\sigma(\Lambda_n)} \underset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$$

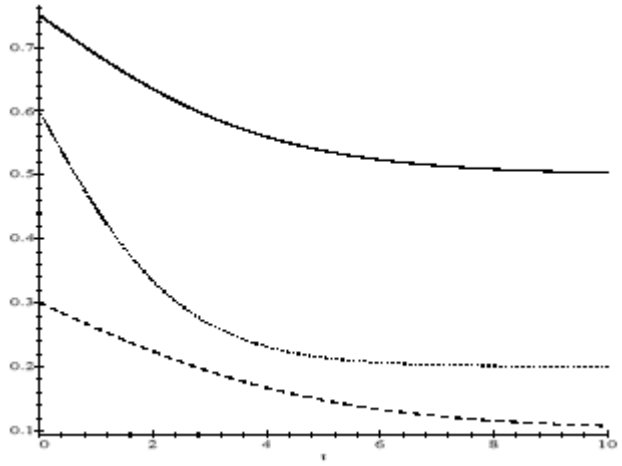
reste valable sous des conditions assez faibles dès lors que les variables X_i sont indépendantes. Il suffit par exemple qu'elles soient uniformément bornées.

Cela a des conséquences pratiques pour la gestion d'un portefeuille de risque hétérogène, y compris dans le cas limite d'une tarification strictement individualisée (*cf*. les réflexions sur les données massives).

1. Les logiques de tarification

En pratique la tarification est donc un exercice associé à la prise en compte de l'hétérogénéité. L'hétérogénéité (mélange de populations de caractéristiques différentes vis-à-vis du phénomène étudié) a un impact important sur la perception de la fonction de risque du modèle.

Par exemple un mélange de populations exponentielles (donc à risque constant) conduit à un risque agrégé décroissant :



1. Les logiques de tarification

La prise en compte de cette hétérogénéité est donc importante pour la tarification. Cette prise en compte nécessite *a priori* 2 étapes :

- la détermination des classes homogènes de risque à partir de facteurs observables ;
- la construction d'une structure tarifaire permettant de rendre compte des différences de comportement entre les différentes classes.

Le premier sujet se traite avec les outils de l'analyse des données (ACP, *clustering*, *etc*.)

Le second mêle des aspects statistiques et commerciaux (conduisant à accepter une certaine dose de mutualisation entre les classes de risque).

1. Les logiques de tarification

Impact des choix en termes de mutualisation

Les choix en termes de mutualisation entre les classes de risque sont extrêmement structurants pour le marché :

- prise en compte de l'âge dans les tarifs automobiles (*cf*. les choix de la MAIF par exemple) ;

- mutualisation entre les marchés particuliers et professionnels (*cf*. la création de la MACIF en 1960 et de la MATMUT en 1962) ;

- finesse de la grille tarifaire (*cf*. Direct Line Insurance créée en 1985).

Les choix en termes de segmentation (et donc de mutualisation entre les classes de risque) sont donc mouvant et conditionnés par les pratiques du marché (qu'ils peuvent contribuer à faire évoluer comme le montrent les exemples ci-dessus).

Remise en cause de l'hypothèse d'indépendance

Le remise en cause de l'hypothèse d'indépendance entre les sinistres est beaucoup plus problématique et ne sera pas abordée ici. On peut toutefois noter qu'une situation assez courante en pratique est celle de l'effet d'un facteur de risque systématique affectant l'ensemble du portefeuille.

En présence d'autres facteurs de risque seule la distribution conditionnelle à ces risques présente un caractère (asymptotiquement) gaussien. Autrement dit, en notant Z la variable aléatoire synthétisant les risques pris en compte, on a la convergence en loi :

$$\frac{\Lambda_n | Z - E\left(\Lambda_n | Z\right)}{\sigma\left(\Lambda_n | Z\right)} \underset{n\to\infty}{\to} N(0,1)$$

La détermination de la loi de la charge globale est dans ce contexte plus délicate.

1. Les logiques de tarification

Remise en cause de l'hypothèse d'indépendance

Asymptotiquement, cette loi est un mélange de loi gaussiennes, qui n'a en général pas d'expression explicite. Lorsque *n* est grand on peut utiliser une approximation de la forme :

$$E\left(e^{-u\times n^{-1}\Lambda_n}\right)\approx E\left(\exp\left(-\frac{u}{n}E\left(\Lambda_n\middle|Z\right)+\frac{u^2\sigma^2\left(\Lambda_n\middle|Z\right)}{2n}\right)\right)$$

En notant $\mu(Z)=n^{-1}E\left(\Lambda_n\middle|Z\right)$ et $\sigma(Z)=n^{-1/2}\sigma\left(\Lambda_n\middle|Z\right)$ on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}E\left(e^{-u\times n^{-1}\Lambda_n}\right)=E\left(\exp\left(-u\mu(Z)+\frac{u^2\sigma^2(Z)}{2}\right)\right)$$

Le calcul explicite est rarement possible.

Remise en cause de l'hypothèse d'indépendance

Toutefois, le calcul de la volatilité de la charge reste dans ce cas relativement simple en utilisant l'équation de décomposition de la variance :

$$V(\Lambda_n) = V\left(E(\Lambda_n|Z)\right) + E\left(V(\Lambda_n|Z)\right)$$

Cela fournit une première information sur la « dangerosité » de la distribution.

1. Les logiques de tarification

Le cadre usuel de tarification

En pratique la tarification IARD est en général effectuée dans le cadre très général des modèles fréquence-coût :

$$S = \sum_{i=1}^{N} C_i + I_G \times G$$

avec N le nombre de sinistres (souvent supposé suivre une loi de Poisson), C le coût unitaire d'un sinistre (en général gamma ou log-normal), I_G l'indicatrice de survenance d'un sinistre grave et G le coût d'un sinistre grave (par exemple de type Pareto).

1. Les logiques de tarification

Le cadre usuel de tarification

Sous réserve de l'indépendance de la fréquence et des coûts, la prime pure à l'intérieur d'une classe de risque est de la forme :

$$E\left[S\middle|X\right]=E\left[N\middle|X\right]\times E\left[C\middle|X\right]+P\left(I_G=1\middle|X\right)\times E\left(G\middle|X\right)$$

On se ramène ainsi à modéliser l'espérance conditionnelle du nombre de sinistres et l'espérance conditionnelle du coût unitaire.

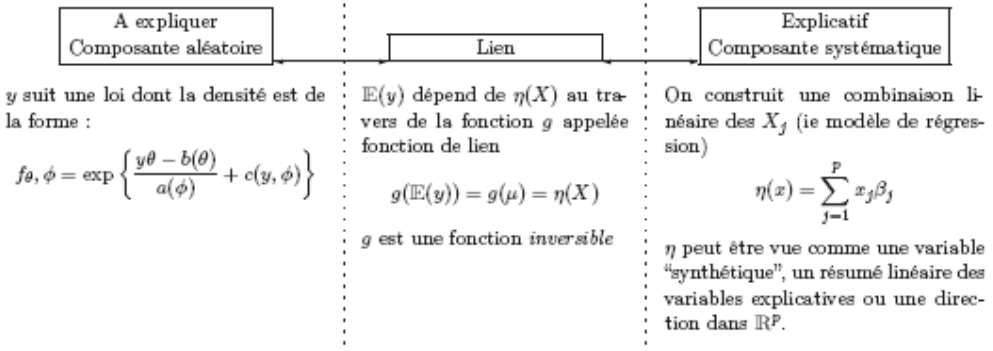
Il s'agit donc de prédire des espérances conditionnelles, ce qui est le cadre général des modèles de régression, et plus particulièrement des modèles de régression non linéaires (GLM).

1. Les logiques de tarification

On a donc souvent recours aux modèles linéaires généralisés (*Generalized Linear Models*, GLM) pour les aspects de segmentation de l'offre.

Les GLM ont fait leur apparition dans Nelder et Wedderburn [1972]. Ils sont adaptés à de nombreuses problématiques et sont d'utilisation courante dans le domaine de la statistique et de l'actuariat (*cf*. Denuit et Charpentier [2005]).

La théorie des GLM bénéficie d'un avantage par rapport aux modèles linéaires classiques : le caractère normal de la variable à expliquer Y n'est plus imposé, seule l'appartenance à une famille exponentielle est indispensable.



1. Les logiques de tarification

Dans le contexte d'un modèle GLM, on considère que pour une variable aléatoire *Y*, qui correspond à la variable à expliquer, il existe une relation de la forme suivante :

$$g\left(\mathbf{E}\left[Y \middle| x_1, \ldots x_p\right]\right) = \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_k$$

entre avec *p* variables explicatives X_i (i = 1, …, p) et l'espérance conditionnelle de la variable à expliquer. La fonction *g* (strictement monotone et dérivable) est appelée fonction de lien du modèle. Elle détermine la relation entre le prédicteur linéaire et l'espérance de la variable expliquée. Par exemple le choix (classique) $g(u) = \mathbf{ln}(u)$ conduit au modèle multiplicatif suivant :

$$\mathbf{E}\left[Y \middle| x\right] = \mathbf{exp}\left(\sum_{k=1}^{p} \beta_k x_k\right) = \mathbf{exp}\left(\beta' x\right)$$

1. Les logiques de tarification,

Il reste à spécifier la loi de la variable *Y*. On retient une famille dite exponentielle, pour laquelle la densité s'écrit :

$$f_{\theta,\varphi}(y) = \exp\left(\frac{y\times\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y,\varphi)\right)$$

avec *b* une fonction définie sur R deux fois dérivable et de dérivée première injective et *c* une fonction définie sur R^2. De nombreuses distributions classiques appartiennent à cette famille. On a en particulier :

$$\mathbf{E}(Y) = b'(\theta)$$

$$\mathbf{V}(Y) = b''(\theta)\varphi = b''\left(b'^{-1}\left(\mathbf{E}[Y]\right)\right)\varphi = \upsilon\left(\mathbf{E}[Y]\right)\varphi$$

Le lien entre le paramètre et les variables explicatives est donc de la forme :

$$\theta = b'^{-1}\left(E\left(Y|x\right)\right) = b'^{-1}\left(g^{-1}\left(\sum_{k=1}^{p}\beta_k x_k\right)\right)$$

1. Les logiques de tarification,

Exemples : lois Poisson et Gamma

Loi de probabilité	$\mathbf{Pr}(Y=y)=\mathbf{exp}\left(y\ln(\lambda)-\lambda+c(y)\right)$
θ	$\ln\lambda$
Φ	1
$b(\theta)$	$\mathbf{exp}(\theta)$
$\mathbf{E}[Y]$	λ
Fonction variance	$v(\lambda)=\lambda$

Loi de probabilité	$f(y)=\mathbf{exp}\left(\frac{-\frac{\mu}{\upsilon^2}y+\ln\frac{\mu}{\upsilon^2}}{\frac{1}{\upsilon}}+c(y,\upsilon)\right)$
θ	$-\frac{\mu}{\upsilon^2}$
Φ	$\frac{1}{\upsilon}$
$b(\theta)$	$\ln\frac{-1}{\theta}$
$\mathbf{E}[Y]$	μ
Fonction variance	$v(\mu)=\mu^2$

Remarque : des travaux spécifiques proposent des modèles prenant en compte les phénomènes de sous-déclaration des petits sinistres dans la fréquence. Les modèles « à inflation de zéros » font ainsi l'objet d'applications directe en tarification non-vie (*cf*. Vasechko et *al*. [2009])

1. Les logiques de tarification,

Les modèles « à inflation de zéros » (*cf*. Vasechko et *al*. [2009])

Le nombre de sinistres observé est décomposé en produit de deux variables :

$$Y = B \times Y^*$$

B est une indicatrice égale à 1 si le sinistre est déclaré et 0 sinon (elle n'est donc pas observable). Y^* est supposé suivre une loi de Poisson (modèle ZIP) ou binomiale négative (ZINB). On a donc typiquement des équations du type :

$$P\left(Y = 0 \middle| X\right) = q + (1-q)e^{-\lambda} \qquad q = \frac{\exp\left(X'\beta\right)}{1+\exp\left(X_i'\beta\right)}$$

$$P\left(Y = y \middle| X\right) = (1-q)e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!}$$

1. Les logiques de tarification,

Utilisation et limites

La lecture et l'interprétation des résultats présentent l'avantage d'être aisés et directs :

(Ici un exemple d'un tarification

santé)

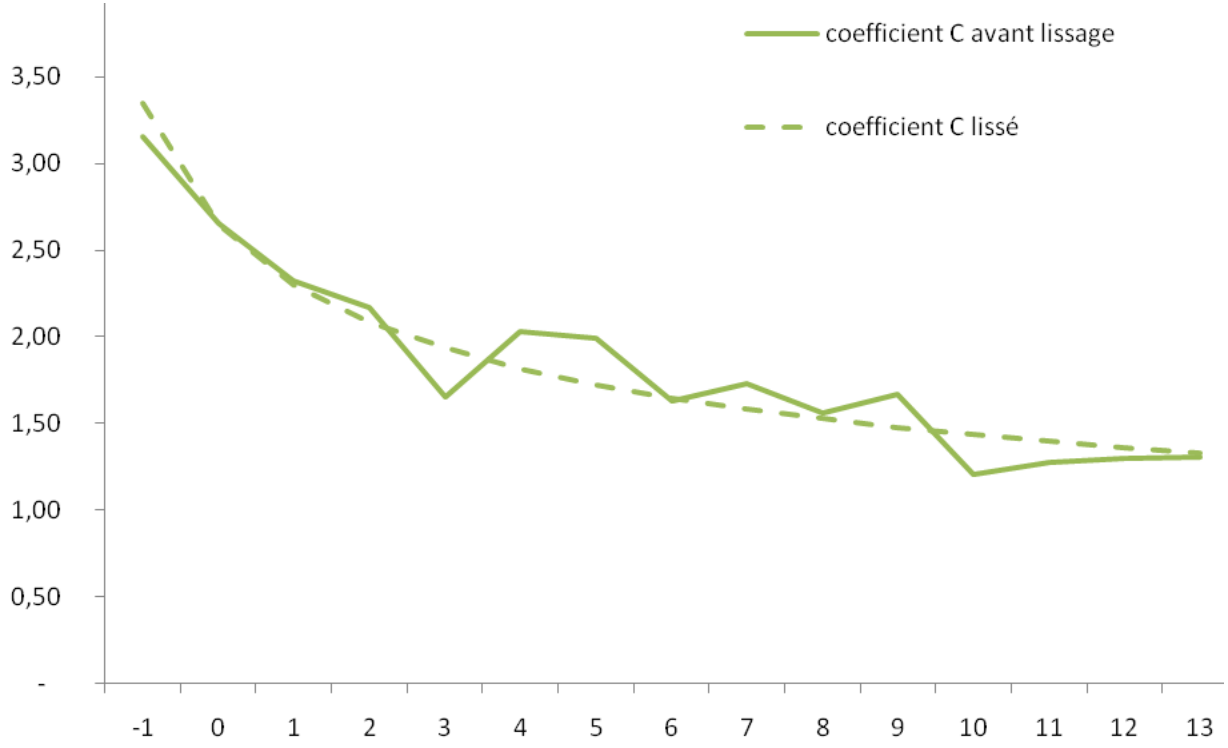
```
Call:
glm(formula = Remboursement ~ ClasseAgeBEN + CSP + NiveauGarantie +
    NAF + Regime + DepartementAgrege, family = Gamma(link = "log"),
    data = t, subset = (FraisReel > 0))

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3.2074  -1.0712  -0.3675   0.2608   6.9369

Coefficients:
                                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)                     5.378793   0.033385 161.114  < 2e-16 ***
ClasseAgeBEN[35,45[             0.144091   0.008938  16.121  < 2e-16 ***
ClasseAgeBEN[45,51[             0.260581   0.010726  24.294  < 2e-16 ***
ClasseAgeBEN[51,max[            0.366888   0.009871  37.169  < 2e-16 ***
CSPNon cadre                   -0.011473   0.008051  -1.425 0.154139
NiveauGarantieTONIC1            0.237275   0.032496   7.302 2.86e-13 ***
NiveauGarantieTONIC2            0.418380   0.031211  13.405  < 2e-16 ***
NiveauGarantieTONIC3            0.650076   0.031785  20.452  < 2e-16 ***
NiveauGarantieTONIC4            0.933393   0.031894  29.266  < 2e-16 ***
NAFSectionD                    -0.046667   0.013061  -3.573 0.000353 ***
NAFSectionF                    -0.104415   0.016869  -6.190 6.05e-10 ***
NAFSectionG                    -0.056415   0.011904  -4.739 2.15e-06 ***
NAFSectionH                    -0.090310   0.019276  -4.685 2.80e-06 ***
NAFSectionI                    -0.032902   0.018644  -1.765 0.077607 .
NAFSectionK                    -0.061291   0.012196  -5.025 5.03e-07 ***
RegimeRégime agricole          -0.078938   0.024518  -3.220 0.001284 **
RegimeRégime Alsace-Moselle    -0.426173   0.020929 -20.363  < 2e-16 ***
DepartementAgregeMoinsMoins    -0.076798   0.013871  -5.537 3.09e-08 ***
DepartementAgregeMoinsPlus     -0.025212   0.010264  -2.456 0.014040 *
DepartementAgregeNeutrePlus     0.029815   0.008722   3.419 0.000630 ***
DepartementAgregePlus           0.091857   0.013626   6.741 1.58e-11 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 1.305819)

    Null deviance: 119340  on 106630  degrees of freedom
Residual deviance: 109662  on 106610  degrees of freedom
AIC: 1503570

Number of Fisher Scoring iterations: 6
```

1. Les logiques de tarification,

Utilisation et limites

Les résultats issus du modèle ne sont jamais utilisés directement et constituent une base ajustée ensuite pour tenir compte de contraintes diverses (commerciales, gestion, *etc*.) ; par exemple pour le coefficient CRM d'un contrat automobile :

CRM	ACRM
>100	-1
96-100	0
91-95	1
86-90	2
81-85	3
77-80	4
73-76	5
69-72	6
65-68	7
64	8
60	9
57	10
54	11
51	12
50 52 53 55 56 58 59 62 63	13



Utilisation et limites

L'approche GLM impose de faire une hypothèse sur la forme de la loi conditionnelle de la variable expliquée Y en fonction des explicatives. Cette hypothèse peut s'avérer fausse et on prend donc un risque de modèle.

On peut alors chercher à modéliser directement la forme de l'espérance conditionnelle, mais sans faire d'hypothèse sur la loi complète de la variable expliquée (régression non paramétrique, modèles GAM).

Une telle démarche est de nature à faire diminuer le risque de modèle, les hypothèses sur lesquelles reposent l'évaluation de la prime pure étant moins restrictives.

Elle a été mise en œuvre par exemple dans Dupin et *al*. [2003].

1. Les logiques de tarification

Perspectives d'évolution méthodologiques

L'intérêt pour les données massives conduit les actuaires à s'intéresser à d'autres approches issues de la théorie statistique de l'apprentissage.

Paglia et Phelippe-Guinvarc'h [2011] proposent ainsi, dans la situation classique de la tarification d'un contrat d'assurance automobile, une comparaison entre les approches classiques par GLM et une méthode fondée sur la théorie de l'apprentissage.

La classification automatique (*clustering*) est un outil très utilisé en fouille de données (*data mining*) permet d'extraire d'un grand jeu de données des classes où les individus ont des caractéristiques similaires.

Lorsque les données sont très volumineuses ou parviennent en temps réel, les méthodes habituelles de classification doivent être adaptées pour pouvoir répondre rapidement (*cf*. Samé et *al*. [2009]).

Perspectives d'évolution méthodologiques

Théorie de l'apprentissage

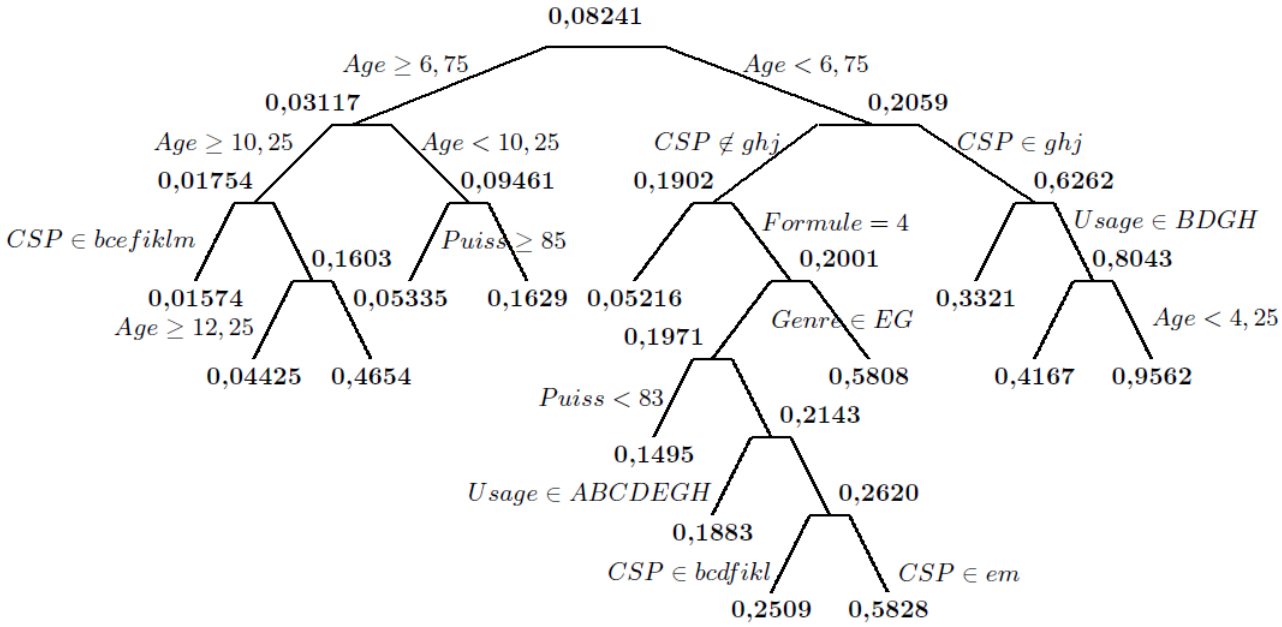
La statistique classique nécessite de formuler des hypothèses sur la distribution des données. La théorie de l'apprentissage statistique ne formule qu'une seule hypothèse : les données à prédire Y sont générées de façons identiques et indépendantes par un processus P à partir du vecteur des variables explicatives X.

On cherche alors à construire un algorithme qui va apprendre à prédire la valeur de Y en fonction des valeurs explicatives X (i.e. $E[Y|X]$). Le résultat de cet apprentissage est une fonction $f(X,c)$. Elle fait intervenir les variables X et un paramètre de complexité c. Ce paramètre désigne par exemple le nombre de neurones dans un réseau de neurones (*cf*. Aouizerate [2012]) ou le nombre de nœuds dans un arbre de décision.

Perspectives d'évolution méthodologiques

Théorie de l'apprentissage

Le tarif obtenu par une méthode de type CART (*Classification And Regression Tree*) présente une structure arborescente. Voici un exemple de modélisation de la fréquence des sinistres reprise de Paglia et Phelippe-Guinvarc'h [2011] :



SOMMAIRE

Assurance IARD

1. Les logiques de tarification
2. **Les évolutions du cadre de provisionnement**
3. La détermination du SCR
4. La prise en compte de la réassurance
5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Définition et calcul des provisions techniques

L'article 76 de la Directive Solvabilité 2 précise :

« La valeur des provisions techniques correspond au montant actuel que les entreprises d'assurance et de réassurance devraient payer si elles transféraient sur le champ leurs engagements d'assurance et de réassurance à une autre entreprise d'assurance ou de réassurance. »

Cependant, le calcul étant mené sur la base d'hypothèses propres à la compagnie (notamment les frais), il ne s'agit pas d'une *Current Exit Value.*

Le mode de calcul des provisions techniques dépend de la réplicabilité du contrat d'assurance (art. 77-4).

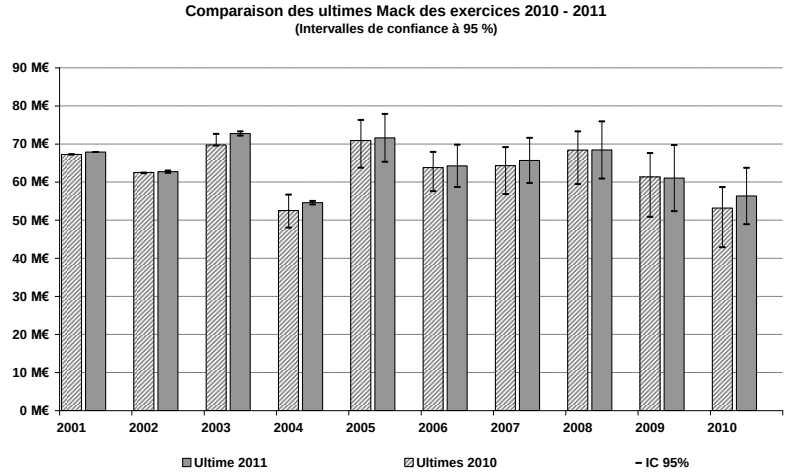
2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Définition et calcul des provisions techniques

De manière générale les provisions techniques sont constituées de la somme du *best estimate* (vision en espérance) et d'une marge pour risque.

L'ambition (et la difficulté) de Solvabilité 2 est en pratique de passer d'un système dans lequel la prudence est implicite (introduite au travers d'hypothèses prudentes et de l'absence d'actualisation) à une quantification explicite de la prudence intégrée dans le provisions.

Ce dispositif conduit ainsi à devoir quantifier l'incertitude autour de l'évaluation *best estimate* :



2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Définition et calcul des provisions techniques

La Directive Solvabilité 2 (art. 77) et l'EIOPA (*cf.* CP n°26 et TS.V.2.2 des spécifications techniques du QIS5) retiennent comme définition du *best estimate* :

« La moyenne pondérée en fonction de leur probabilité des futurs flux de trésorerie compte tenu de la valeur temporelle de l'argent, laquelle est estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente. »

La directive européenne stipule que le *best estimate* doit être calculé brut de réassurance, en contrepartie un actif de réassurance, tenant compte des probabilités de défaut du réassureur est reconnu à l'actif (art. 77-2 et art. 81).

Dans le cas de contrats de coassurance, seule la partie propre à l'assureur doit être valorisée.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Définition et calcul des provisions techniques

Flux à prendre en compte

Le calcul du BEL (*best estimate liabilities*) doit prendre en compte l'intégralité des flux de trésorerie qui seront payés afin d'honorer l'engagement d'assurance :

- ✓ prestations ;
- ✓ primes (*cf.* primes futures) ;
- ✓ frais (y compris financiers). Dans le cas des frais généraux, l'application du « *going concern* » conduit à n'en retenir qu'une quote part (TP.2.28) ;
- ✓ chargements.

Cas particulier des contrats non vie

L'évaluation du *best estimate* des provisions pour sinistres à payer (sinistres déjà survenus) et celles des provisions pour primes non acquises sont à effectuer séparément (*best estimate* de sinistralité et *best estimate* de primes).

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Définition et calcul des provisions techniques

Hypothèses à retenir

Les hypothèses de calcul des provisions *best estimate* reposent sur des informations actuelles, crédibles, propres à la compagnie et cohérentes avec les données de marché. Ces hypothèses doivent présentées un caractère réalistes.

Selon le CP n°40, la courbe retenue pour l'actualisation doit vérifier 4 critères à savoir :

- ✓ pas de risque de crédit ;
- ✓ présenter des taux réalistes ;
- ✓ estimer *via* une méthode robuste ;
- ✓ être très liquides.

En pratique, l'EIOPA insiste sur l'utilisation de la courbe de taux *swap*.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Définition et calcul des provisions techniques

Le dispositif distingue une provision pour sinistres et une provision pour primes.

La provision *best estimate* pour sinistres à payer est l'actualisation des flux futurs engendrés par les sinistres survenus avant la date d'inventaire (31/12/*N*), mais non encore réglés. Ces flux comprennent donc les prestations et les frais liés à ces prestations.

La provision *best estimate* pour primes est l'actualisation des flux entrants et sortants résultant d'une nouvelle année d'activité (dans le cadre des contrats annuels renouvelés dès le 01/01/*N*+1). Ces flux comprennent donc les cotisations qui seront reçues en *N*+1, les prestations qui seront versées dans les années futures au titre des sinistres survenus en *N*+1, ainsi que les frais engendrés par ces cotisations et prestations. La provision *best estimate* pour primes est négative si le contrat est rentable.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Les triangles déterministes – Chain Ladder

	Durée de règlement				
Année de survenance	1	2	…	n – 1	n
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	…	$X_{1,n-1}$	$X_{1,n}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	…	$X_{2,n-1}$	$\hat{X}_{2,n}$
…	…	…	…	…	…
n - 1	$X_{n-1,1}$	$X_{n-1,2}$	…	$\hat{X}_{n-1,n-1}$	$\hat{X}_{n-1,n}$
n	$X_{n,1}$	$\hat{X}_{n,2}$	…	$\hat{X}_{n,n-1}$	$\hat{X}_{n,n}$
Cadences de règlement		C_2	…	C_{n-1}	C_n

En l'absence de tendance liée à l'inflation ou à l'évolution de la sinistralité (sinon un retraitement est nécessaire), on a l'estimateur naturel :

$$\hat{C}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j-1}}$$

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Les triangles déterministes – Chain Ladder

Les éléments inconnus du triangle de liquidation sont obtenus de la manière suivante :

$$\hat{X}_{i,j} = X_{i,An_{calcul}+1-i} \times \prod_{k=An_{calcul}-i+2}^{j} \widehat{C}_k$$

Les flux de trésorerie futurs sont calculés sur la base de l'évolution des charges ultimes de sinistralité :

$$s_{i,j} = \hat{X}_{i,j} - \hat{X}_{i,j-1}$$

	Année de règlement				
Année de survenance	1	2	…	n – 1	n
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	…	$X_{1,n-1}$	$X_{1,n}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	…	$X_{2,n-1}$	$\hat{X}_{2,n}$
…	…	…	…	…	…
n - 1	$X_{n-1,1}$	$X_{n-1,2}$			$\hat{X}_{n-1,n}$
n	$X_{n,1}$	$\hat{X}_{n,2}$		$s_{2,n} = \hat{X}_{2,n} - X_{2,n-1}$	$\hat{X}_{n,n}$

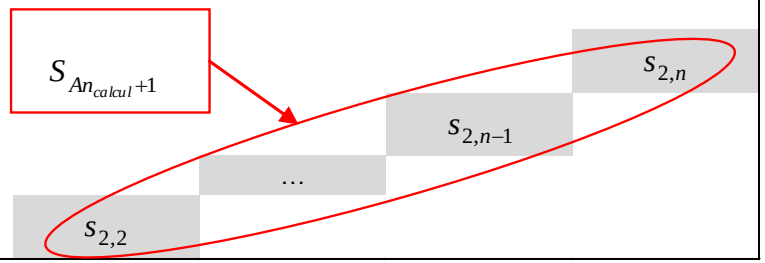
2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Les triangles déterministes – Chain Ladder

On notera que les règlements effectués au cours d'une même année au titre de toutes les années de survenance sont situés sur les diagonales du tableau :

	Durée de règlement				
Année de survenance	1	2	…	n – 1	n
1					
2					
…					
n - 1					
n					



Le montant réglé au cours d'une même année au titre de toutes les années de survenance est de la forme suivante :

$$S_{An_{calcul}+j} = \sum_{i=1}^{n} s_{i,An_{calcul}+j-i+1}$$

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Les modèles stochastiques – Le modèle de Mack

On observe que le modèle standard de Chain Ladder vérifie :

$$E\left[X_{i,j+1}\right] = C_j \times E\left[X_{i,j}\right]$$

MACK (1993) a proposé un modèle non paramétrique, permettant d'estimer les erreurs commises lors de l'évaluation des réserves (sous 2 hypothèses):

(H1) les années de sinistralité sont indépendantes (ce point n'étant pas vérifié en cas changements importants dans la gestion des sinistres ou dans le cas de taux d'inflation spécifique de la branche).

(H2) il existe un paramètre C_i tel que, pour $i=1,\ldots, n$, on ait conditionnellement

$$E\left(X_{i,j+1} / X_{i1},\ldots, X_{ij}\right) = C_j X_{ij}$$

Les méthodes de calcul

Les modèles stochastiques – Le modèle de Mack

On notera que les hypothèses (**H1**) et (**H2**) assurent au modèle stochastique de Mack de fournir exactement les mêmes réserves que la méthode standard de Chain Ladder.

$$E\left(X_{i,k}\left|X_{i,1},\ldots,X_{i,n+1-i}\right.\right)=\prod_{z=n-i+1}^{k-1}C_z\times X_{i,n+1-i}$$

Le coefficient de passage C_j est estimé *via* la variable $\hat{C}_j$ avec :

$$\hat{C}_j=\frac{1}{n-j+1}\times\sum_{i=1}^{n-j+1}\frac{X_{i,j}}{X_{i,j-1}}$$

Cet estimateur est sans biais et les coefficients sont non corrélés :

$$E\left[\hat{C}_j\right]=C_j \qquad\qquad E\left[\hat{C}_j\times\hat{C}_k\right]=E\left[\hat{C}_j\right]\times E\left[\hat{C}_k\right]$$

Les méthodes de calcul

Les modèles stochastiques – Le modèle de Mack

On s'intéresse maintenant à l'erreur de provisionnement. Pour ce faire on pose :

- ✓ $R_i = X_{in} - X_{i,n-i+1}$ où R_i correspond au vrai montant de provision à constituer.
- ✓ $\hat{R}_i = \hat{X}_{i,n} - X_{i,n-i+1}$ qui est un estimateur sans biais de R_i.

  où $\hat{X}_{i,k} = \prod_{z=n-i+1}^{k-1} \hat{C}_z \times X_{i,n+1-i}$

On s'intéresse à l'erreur quadratique moyenne de provisionnement :

$$mse\left(\hat{R}_i\right) = E\left[\left(\hat{R}_i - R_i\right)^2 \middle| H_i\right] = E\left[\left(\hat{X}_{in} - X_{i,n-i+1}\right)^2 \middle| H_i\right]$$

Les méthodes de calcul

Les modèles stochastiques – Le modèle de Mack

Afin de calculer ce montant, il est nécessaire de poser une troisième hypothèse :

(**H3**) : Il existe un paramètre σ_j^2 tel que

$$V\left(X_{i,j+1} / X_{i1},...,X_{ij}\right) = \sigma_j^2 X_{ij}$$

Sur la base des hypothèses (**H1**), (**H2**) et (**H3**) on montre que :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1}\sum_{i=1}^{n-j} X_{i,j}\left(\frac{X_{i,j+1}}{X_{i,j}} - \hat{C}_j\right)^2$$

est un estimateur sans biais de $\sigma_{i,j}^2$

Les méthodes de calcul

Les modèles stochastiques – Le modèle de Mack

Le cas $j = n-1$ pose problème. Parmi d'autres choix possibles, T. Mack propose d'utiliser

$$\hat{\sigma}^2_{n-1} = \min\left(\hat{\sigma}^4_{n-2} \Big/ \hat{\sigma}^2_{n-3}, \hat{\sigma}^2_{n-2}, \hat{\sigma}^2_{n-3}\right)$$

Une fois σ_j^2 défini, on obtient :

$$\hat{mse}\left(\hat{R}_i\right) = \hat{X}^2_{i,n} \sum_{k=n-i+1}^{n-k} \frac{\hat{\sigma}^2_k}{\hat{C}^2_k}\left(\frac{1}{\hat{X}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} X_{j,k}}\right)$$

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Les modèles stochastiques – Utilisation des GLM

Le cadre général des GLM permet de construire des versions stochastiques des modèles factoriels en écrivant typiquement (Renshaw et Verrall [1998]) :

$$\ln X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Avec une loi d'erreurs poissonnienne on généralise CL et on a :

$$\ln L(\alpha, \beta) = c + \sum_{i,j} \left(-\alpha_i \beta_j + x_{i,j} \ln \left(\alpha_i \beta_j \right) \right)$$

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^{n-i+1} x_{i,j}}{\sum_{j=1}^{n-i+1} \beta_j} \qquad \beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}$$

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Approche par S/P

Les calculs présentés ci-après font appel aux notations suivantes :

- ✓ *PPNA* : montant de la provision pour primes au 31/12/*N* ;
- ✓ S/P_{moy} : ratio S/P moyen, calculé à partir des données historiques ;
- ✓ S_{primes} : charge ultime de sinistres.

Le ratio S/P utilisé pour la détermination des prestations en représentation des PPNA est calculé de la manière suivante :

$$S/P_{moy} = \frac{1}{h+1} \times \sum_{k=N-h}^{N} \frac{X_{k,n}}{P_k}$$

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Approche par S/P

Dans le cas où aucune primes futures n'est retenue, la charge ultime de sinistres est calculée de la manière suivante :

$$S_{primes} = PPNA \times S/P_{moy}$$

Par la suite, le *best estimate* est calculé en appliquant une cadence de liquidation actualisée à ce montant.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Approche par S/P stochastique (*cf*. Félix et Planchet [2009])

Dans certains cas, il est nécessaire de connaitre la distribution de la valeur actuelle des flux de trésorerie :

- ✓ dans une optique modèle interne ;
- ✓ de part la présence de mécanisme de rémunération des apporteurs ou bien la présence de fonds de revalorisation.

Dans ce cas, un modèle à S/P stochastique peut être retenu. L'idée du modèle présentée ici est le suivant :

- ✓ simuler sur le premier pas de projection des réalisations du S/P;
- ✓ ajuster un processus d'évolution conditionnelle pour les pas >1.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Approche par S/P stochastique

Parmi les réflexions actuelles sur les modèles internes, la modélisation des actions du management nous amène à penser à l'idée d'un retour à la moyenne des ratios de sinistralité actuariels après un choc.

A ce stade il est alors nécessaire de mettre en place un modèle de projection des S/P. On peut se tourner vers des approches simples :

- ✓ réaliser un tirage de *N* valeurs du ratio de sinistralité actuariel à la date *t*=1, suivant une loi Log Normale ;
- ✓ modéliser un retour à l'espérance des ratios de sinistralité actuariel avec paramètres simplifiés sachant le ratio de sinistralité en 1.

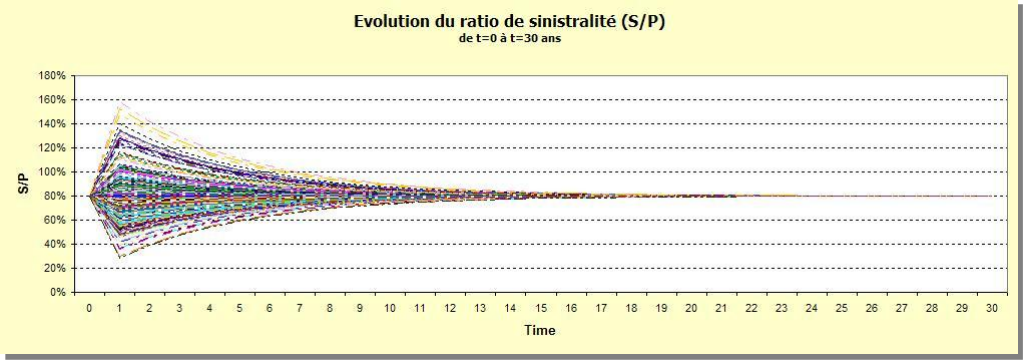
2. Les évolutions du cadre de provisionnement

Les méthodes de calcul

Approche par S/P stochastique

$$\frac{S}{P_{i,j}}(t) = E\left[\frac{S}{P}(t)\right] + \left(\frac{S}{P_{i,j}}(1) - E\left[\frac{S}{P}(1)\right]\right) \times v^{t-1}$$

Sur la base de l'historique disponible dans la compagnie, les paramètres μ et σ de la loi log-normale sont ajustés (-28% et 33%, soit un *S/P* moyen de 80%). *In fine* ceci conduit aux projections suivantes :



2. Les évolutions du cadre de provisionnement

La marge pour risque

Comme indiqué *supra*, Les provisions techniques sont constituées de la somme du *best estimate* et, le cas échéant, d'une marge pour risque.

L'article 77-3 de la directive Solvabilité 2 indique que :

La marge de risque est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les entreprises d'assurance et de réassurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements d'assurance et de réassurance.

Elle est calculée séparément du *best estimate* des flux de trésorerie.

Elle est nulle dans le cas d'une valorisation menées sur la base de portefeuilles de réplication. Plus précisément dans ce cas elle est incluse dans le calcul du *best estimate*.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

La marge pour risque

L'article 77-4 de la directive Solvabilité 2 dispose que :

« Les entreprises d'assurance et de réassurance calculent la marge de risque en déterminant le cout que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance pendant toute la durée de ceux-ci »

En théorie, la RM est calculée globalement à partir du coût d'immobilisation des fonds propres éligibles nécessaires pour atteindre le SCR (*cf*. TP.5.3):

$$CoCM = CoC \times \sum_{t \geq 0} \frac{E\left[SCR(t) \right]}{\left(1 + r_{t+1}\right)^{t+1}}$$

- ✓ *CoCM* désigne la marge pour risque ;
- ✓ *r* désigne le taux d'intérêt de maturité *t* (courbe fournie par l'EIOPA) ;
- ✓ *SCR*(*t*) désigne le SCR pour l'année *t* ;
- ✓ *CoC* est le taux de coût du capital, fixé à 6%.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

La marge pour risque

Les SCR à considérer retiennent comme risque :

- ✓ les risques de souscription selon les activités transférées ;
- ✓ le risque de contrepartie concernant les contrats de réassurance et de titrisation ;
- ✓ le risque opérationnel ;
- ✓ les risques de marché non évitable.

La **capacité d'absorption des pertes** des provisions techniques dans l'entreprise de référence correspond à celle de l'entreprise d'origine.

En revanche, il n'y a pas de capacité d'absorption des impôts différés.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

La marge pour risque

D'une manière générale, la définition suivante peut être proposée au sujet des risques de marché non évitables :

Risque associé, pour un passif donné, au choix de l'allocation d'actif conduisant au SCR marché minimal.

En pratique, l'EIOPA considère que ces risques se résument au risque de duration pour les passifs longs. Cependant, il pourrait sembler logique de retenir le risque d'illiquidité (et ce pour les mêmes raisons que le risque de taux).

La marge pour risque

La complexité de la définition de la RM nécessite, on l'a vu, de recourir à des simplifications pour son évaluation. La simplification la plus couramment utilisée :

$$RM_0 = CoC \times Dur(0) \times SCR(0)$$

On suppose que $SCR_t = k \times BEL_t$ ce qui implique avec $RM_0 = CoC \times \sum_{t \geq 0} E\left(SCR_t\right) \times e^{-rt}$

$$RM_0 = CoC \times k \times \sum_t E\left(BEL_t\right) \times e^{-rt} = CoC \times k \times \sum_t E\left(\sum_{u \geq t} E_t\left(F_u\right) \times e^{-r(u-t)}\right) \times e^{-rt}$$

$$= CoC \times k \times \sum_t \left(\sum_{u \geq t} E\left(F_u\right) \times e^{-ru}\right)$$

Mais $\sum_t \left(\sum_{u \geq t} E\left(F_u\right) \times e^{-ru}\right) = \sum_u uE\left(F_u\right)e^{-ru} = D_0 \times BEL$

La marge pour risque

On en déduit donc l'égalité $RM_0 = \alpha \times k \times D_0 \times BEL$ qui conduit au résultat puisqu'en appliquant la relation de proportionnalité entre les BEL et le SCR en 0 on trouve :

$$k = \frac{SCR}{BEL}$$

La complexité du calcul de la marge pour risque n'est pas sans conséquence sur le calcul du SCR dans le cadre d'un modèle interne, qui va nécessiter des approximations spécifiques, notamment :

- la non prise en compte de la RM dans le SCR ;
- la prise en compte au travers de simplifications *ad'hoc* en fonction du contexte.

2. Les évolutions du cadre de provisionnement

La marge pour risque

Enfin, une fois la marge calculée globalement, il reste à la ventiler par ligne d'affaires. Cela revient à appliquer une mesure d'allocation de capital. Il existe de nombreuses manières de le faire.

L'approche proposée par le régulateur est une simple affectation au prorata :

$$CoCM_{lob} = \frac{BEL_{lob}}{\sum_{l \in lob} BEL_l} \times CoCM$$

Le paradoxe de la marge pour risque est que la grande complexité de mise en œuvre du principe de base conduit à utiliser des simplifications drastiques à chacune des étapes du calcul…

SOMMAIRE

Assurance IARD

1. Les logiques de tarification
2. Les évolutions du cadre de provisionnement
3. **Détermination du SCR**
4. La prise en compte de la réassurance
5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

3. Détermination du SCR

La détermination de l'exigence minimale de marge (EMS) dans le dispositif réglementaire actuel est particulièrement simple, puisqu'il s'agit de calculer le maximum entre :

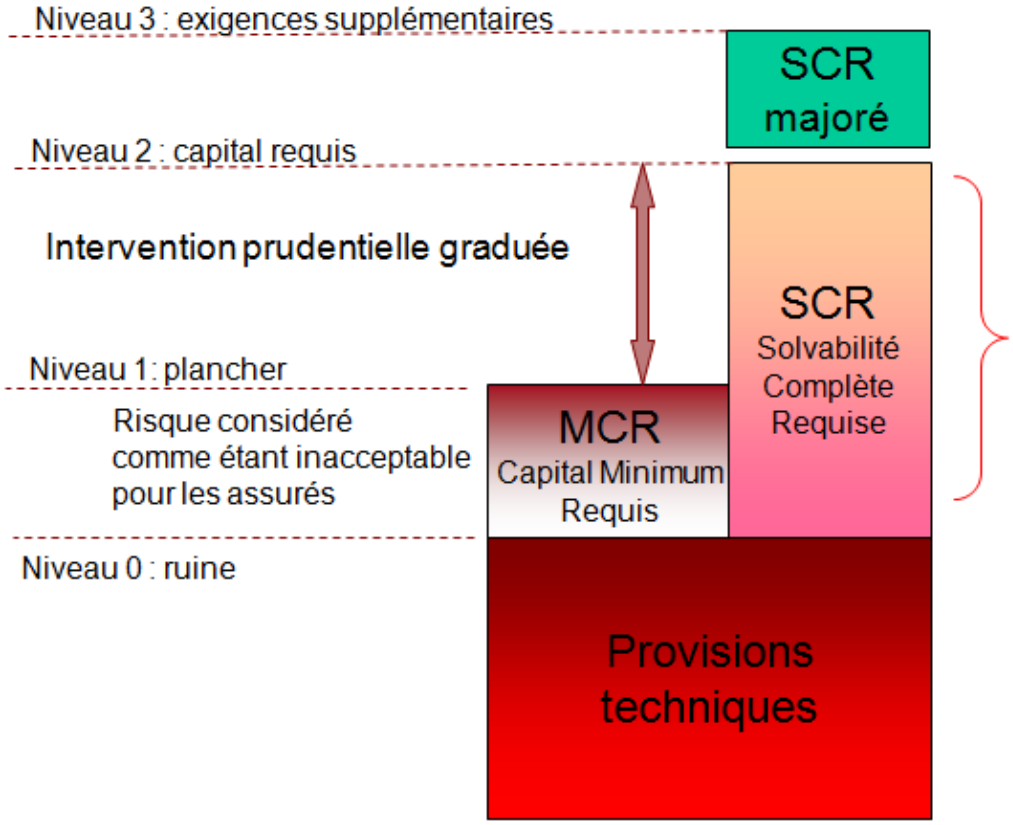
- un calcul basé sur les cotisations brutes (ratio entre 18% et 16%) ;
- un calcul basé sur la sinistralité moyenne (ratio de 26% et 23%).

En particulier le risque d'actif n'est pas pris en compte dans cette formule.

Le nouveau dispositif Solvabilité 2 modifie sensiblement cette situation et rend le calcul plus complexe.

3. Détermination du SCR

Le cadre général du calcul du capital réglementaire est le suivant :



SCR majoré
Capital add-on à la discrétion des autorités de contrôle (risques, gouvernance)

3) SCR
Capital nécessaire pour ne pas être en ruine à horizon de un an avec une probabilité de 99,5% (une ruine tous les 200 ans). Calcul selon modèle standard ou modèle interne

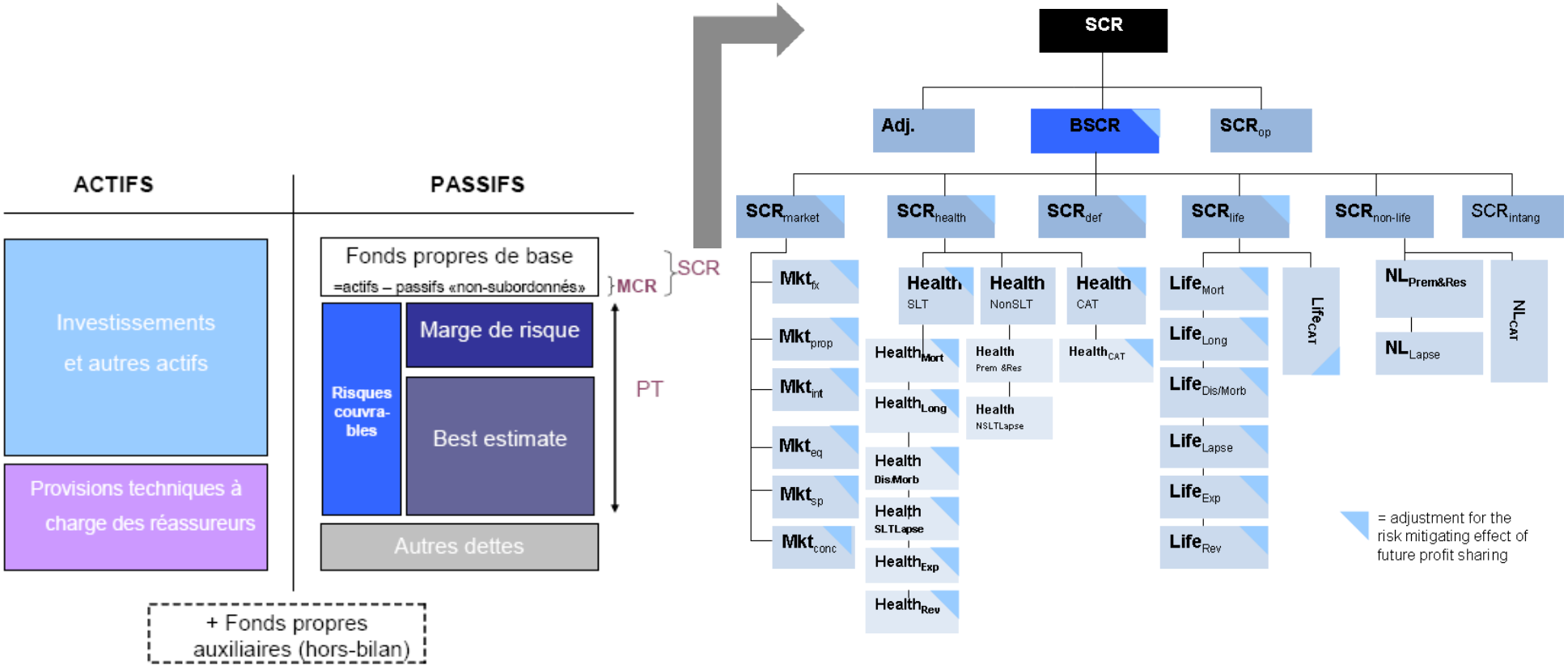
2) MCR
Capital minimum requis

1) Provisions techniques
Calcul basé sur une approche économique = Best Estimate + Marge de prudence (« coût du capital »)

NB : pertinence de l'interprétation « une fois sur 200 » ?

3. Détermination du SCR

Ce cadre est en particulier décliné dans la formule standard (CEIOPS [2010]) :



3. Détermination du SCR

En plus des risques de marché, les modules de risque pris en compte dans le pilier 1 sont :

- le risque de souscription (tarification et provisionnement) ;
- le risque de résiliation ;
- le risque catastrophe.

S'agissant majoritairement de contrats annuels le risque de résiliation est faible (peu de problématiques de primes futures).

L'essentiel de l'enjeu porte donc sur les modules souscription, marché et, dans une moindre mesure catastrophe.

On peut noter que ce dernier module est particulièrement complexe (34 pages dans les spécifications techniques du QIS5 lui sont consacrées). Il ne sera pas détaillé ici.

Le risque de souscription

Compte tenu de la complexité du calcul du quantile à 99,5 % dans le cadre des modules non-vie (primes et provisions + santé « non-vie »), le QIS 5 propose d'utiliser le quantile calculé sous l'hypothèse de log-normalité. Pour cela il introduit le coefficient :

$$\rho(\sigma) = \frac{\exp\left(u_{0,995} \times \sqrt{\ln\left(\sigma^2 + 1\right)}\right)}{\sqrt{\sigma^2 + 1}} - 1$$

On peut montrer que si X est une variable log-normale d'espérance m et de variance v alors :

$$F_X^{-1}(99,5\%) = \rho\left(\frac{v}{m}\right) \times m$$

3. Détermination du SCR

Le risque de souscription

La forme du choc sur le S/P est justifiée par le fait que, pour les lois normales et log-normales l'écart entre le quantile d'ordre *p* et l'espérance s'écrit :

$$SCR_p = x_p - \mu = \rho_p\left(\frac{\sigma}{\mu}\right)\times\mu$$

avec :

- $\rho_p(x) = \dfrac{\exp\left(u_p \times \sqrt{\ln\left(x^2+1\right)}\right)}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ pour une loi log-normale

- $\rho_p(x) = u_p \times x$ pour la loi normale.

3. Détermination du SCR

Le risque de souscription

ρ est donc un coefficient « pour un € d'exposition », l'exposition étant mesurée par le *best estimate*. Il dépend du coefficient de variation de la distribution sous-jacente, *v/m*.

Comme on a $\rho(x) \approx 3 \times x$ on en déduit une expression simplifiée du SCR ne faisant appel qu'à la volatilité (pour 1€ d'exposition) de la variable qui est largement utilisée dans le QIS 5 :

$$SCR \approx 3 \times \sqrt{v}$$

Incidemment, on observe que cette approximation néglige l'effet de la marge pour risque, qui n'est pas prise en compte et est donc incluse dans le SCR ainsi calculé.

3. Détermination du SCR

Les spécificités de l'assureur : les USP

Objectifs des USP (*Undertaking Specific Parameters*)

Comme le stipule le paragraphe SCR.10.1. des spécifications techniques du QIS5, les USP ont pour objectif d'améliorer l'adéquation entre le risque de la compagnie et le besoin de fonds propres associé. Ceci permet *in fine* d'optimiser le processus de gestion des risques de la compagnie. Cette optimisation est effectuée en adaptant aux spécificités de la compagnie certains modules de calcul de la formule standard

A ce titre, et quand bien même l'utilisation des USP présuppose une autorisation de l'Autorité de contrôle, l'EIOPA encourage les compagnies à appliquer cette méthode.

3. Détermination du SCR

Les spécificités de l'assureur : les USP

Les USP peuvent être retenus pour 5 sous-modules de risques :

- risque de provisionnement non vie et santé non vie : l'USP consiste à recalibrer le paramètre de volatilité renseigné par l'EIOPA dans les spécifications techniques du QIS5 ;

- risque de tarification non vie et santé non vie : l'USP consiste à recalibrer le paramètre de volatilité renseigné par l'EIOPA dans les spécifications techniques du QIS5 ;

- risque de révision.

Ici seuls les modules de provisionnement et tarification non-vie nous intéressent.

3. Détermination du SCR

Les spécificités de l'assureur : les USP

Pour les modules de provisionnement et tarification non-vie, les USP fixent des règles pour recalculer, sur la base de l'expérience du portefeuille, les coefficients de volatilité utilisés pour le calcul des besoins en capital unitaires.

Il s'agit donc d'être capable de quantifier la volatilité des risques considérés à un an.

Cela pose des difficultés particulières pour le risque de réserve.

3. Détermination du SCR

Les spécificités de l'assureur : les USP

De nombreux modèles statistiques (dont le modèle de Mack) s'intéressent au calcul de l'incertitude relative à la prédiction de la charge ultime. Dans le cas d'une projection à un an, la question est de mesurer l'incertitude relative aux variations, entre deux exercices, des prédictions de charge ultime.

Cette incertitude vient du fait que chaque année, une nouvelle diagonale vient alimenter le triangle des paiements incrémentaux et modifie de ce fait l'estimation des cadences de passage. Ceci revient *in fine* à quantifier l'incertitude relative aux boni-mali.

L'EIOPA propose de retenir le modèle proposé dans Merz et Wüthrich [2008], qui constitue un prolongement du modèle de Mack et intègre une formule fermée permettant d'estimer la variance relative aux boni-mali.

3. Détermination du SCR

Le risque de marché

Le capital réglementaire au titre du risque de marché tient compte des risques suivants :

- taux (chocs sur la courbe des taux) ;
- actions (perte de valeur) ;
- immobilier (perte de valeur) ;
- crédit (augmentation des *spreads*) ;
- change ;
- concentration ;
- illiquidité.

NB : le risque d'illiquidité est spécifique.

3. Détermination du SCR

Le risque de marché

Les calculs associés ne nécessitent pas, dans le cadre du pilier 1, de mettre en place d'outils très élaborés et sont assez directs. Les dérivés et structurés nécessitent un peu d'attention pour déterminer des valeurs choquées cohérentes (l'usage de sensibilités est de ce point de vue peu adapté).

La mise en place d'un modèle interne, ou simplement d'un processus d'ORSA un peu élaboré, impliquent par contre de devoir projeter des distributions de prix d'actifs, ce qui passe par la construction de générateurs de scénarios économique.

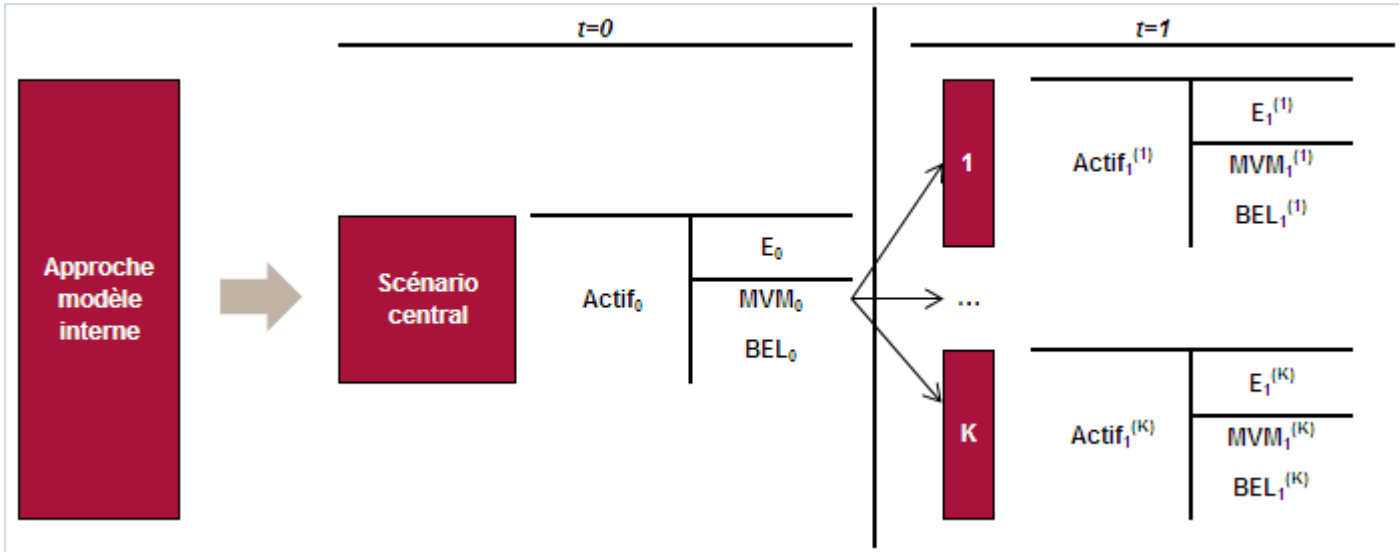
Cette tâche est complexe (*cf*. Planchet et *al*. [2009]) et on en donne ici un bref aperçu.

http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/55835FDC208286C5C1257139002E598C/$FILE/IA20120710.pdf?OpenElement

3. Détermination du SCR

Le risque de marché

Le calcul du SCR s'appuie sur la projection du bilan à un an (*cf*. Guibert et *al*. [2010]) :



La projection des facteurs de risque sur un an est effectuée en probabilité historique et le SCR est solution de :

$$P\left(E_1 < 0 \middle| E_0 = x\right) \leq 0{,}5\%$$

approché en pratique par $SCR \approx E_0 - VaR_{0,5\%}\left(\delta(1) \times E_1\right) \approx E_0 - P(0{,}1) \times VaR_{0,5\%}\left(E_1\right)$

3. Détermination du SCR

Le risque de marché

Dans le cadre d'une modélisation globale dont l'ambition est de fournir des distributions de prix, on est donc formellement conduit à utiliser une approche à deux niveaux :

- la construction d'une fonctionnelle *g* fournissant le vecteur des prix en fonction des variables d'état *Y* à la date du calcul, $\pi_0 = g\left(Y_0\right)$

- la construction d'une dynamique pour les facteurs de risque, Y_t

On peut alors déterminer des prix à n'importe quelle date *via* :

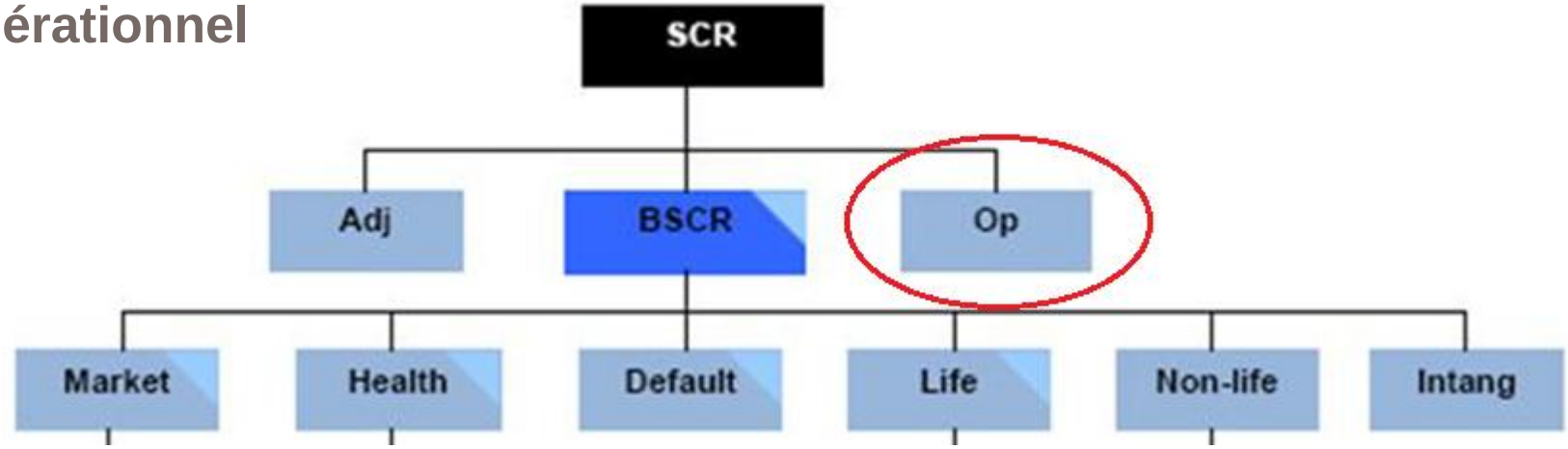
$$\pi_t = g\left(Y_t\right)$$

La construction de la fonctionnelle *g* s'appuie sur les hypothèses classiques de la finance de marché et notamment l'AOA qui conduit à construire des probabilités « risque neutre » qui rendent les processus de prix actualisés martingales.

La construction de la dynamique de *Y* est un problème d'économétrie.

3. Détermination du SCR

Le risque opérationnel



Le risque opérationnel donne lieu à une exigence de capital spécifique, calculée de manière forfaitaire (en fonction des cotisations et des provisions) qui vient s'ajouter *ex-post* au BSCR.

$$SCR_{op} = \mathbf{min}\{30\% BSCR; OP_{lnul}\} + 25\% Exp_{ul}$$

3. Détermination du SCR

Le risque opérationnel

Du fait de son caractère forfaitaire, le risque opérationnel est *a priori* évalué à un niveau relativement élevé (6,5 % de l'exigence globale dans l'exercice QIS5) et il peut donc être utile de considérer la mise en place d'un modèle interne partiel sur ce point.

Les techniques de quantification du risque opérationnel développée depuis quelques années dans le monde bancaire reprennent largement les outils de base de l'assurance non-vie (modulo des problématiques de seuil de collecte associées aux bases d'incidents qui introduisent des problématiques de troncature gauche des distributions).

Plus de références :

http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/3F307B5818DD94FFC12578410055D3EB

SOMMAIRE

Assurance IARD

1. Les logiques de tarification
2. Les évolutions du cadre de provisionnement
3. Détermination du SCR
4. **La prise en compte de la réassurance**
5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

4. La prise en compte de la réassurance

La situation actuelle

Dans la réglementation actuelle, l'exigence de marge est évaluée à partir des cotisations encaissées et des charges de sinistres (la sinistralité étant mesurée sur une période de 3 à 7 ans).

La réassurance permet de réduire l'exigence de marge jusqu'à 50 % en non-vie.

Dans ce cadre, la réassurance proportionnelle a pour caractéristique de réduire le risque porté par l'organisme assureur à concurrence des cotisations et des prestations transférées.

Son intérêt est donc marqué dans le cadre du droit prudentiel actuel.

La situation est différente pour la réassurance non proportionnelle, qui n'est prise en compte que les années suivant un sinistre majeur. Son impact sur l'exigence de marge est donc erratique.

Cette situation évolue avec Solvabilité 2.

4. La prise en compte de la réassurance

Principes de prise en compte de la réassurance dans Solvabilité 2

L'existence d'un dispositif de réassurance est prise en compte dans les différentes étapes du calcul :

- détermination d'un *best estimate* brut de réassurance ;
- calcul d'un actif de réassurance tenant compte de la diminution du risque ;
- prise en compte de la réassurance dans le calcul du SCR de souscription ;
- calcul d'un SCR spécifique pour rendre compte du défaut du réassureur.

Ces différentes étapes sont détaillées dans la suite.

4. La prise en compte de la réassurance

Principes de prise en compte de la réassurance dans Solvabilité 2

Le *best estimate* doit être calculé brut de réassurance, sans déduire les créances découlant des contrats de réassurance et des véhicules de titrisation et sans tenir compte des montants couverts par la réassurance.

En contrepartie, on reconnaît un actif de réassurance égal à la différence entre les *best estimate* brut et net de réassurance.

Cet actif génère une charge en capital au titre du risque de contrepartie.

Par ailleurs, dans le cas de la formule standard, la marge pour risque doit être calculée nette de réassurance, ce qui est cohérent avec l'article 101-5 de la Directive stipulant que le SCR doit être calculé net de réassurance.

4. La prise en compte de la réassurance

Best estimate : la probabilité de défaut

L'actif de réassurance doit être calculé selon les mêmes principes que le calcul du *best estimate* en intégrant la probabilité de défaut du réassureur.

Cette prise en compte se traduit par un ajustement de la valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs qui est calculé sur la base de la probabilité de défaut des contreparties et du montant moyen des pertes qui en résulteraient.

Année	Probabilité de défaut annuelle	Recovery rate
1	PDA1	RR1
2	PDA2	RR2
2	PDA3	RR3

$$Adj_{CD} = PDA_1 \times (1\text{-}RR_1) \times F_1 + PDA_2 \times (1\text{-}RR_2) \times F_2 + PDA_3 \times (1\text{-}RR_3) \times F_3$$

Le calcul doit être mené pour chaque contrepartie et pour chaque *LoB*.

4. La prise en compte de la réassurance

Best estimate : la probabilité de défaut

En toute logique, la probabilité de défaut du réassureur doit évoluer au cours du temps.

Global Corporate Cumulative Average Default Rates (1981 - 2008) (%)

	Horizon (années)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0,00	0,00	0,09	0,18	0,27	0,37	0,40	0,47	0,51	0,55
AA	0,03	0,08	0,14	0,25	0,34	0,45	0,56	0,65	0,73	0,83
A	0,08	0,20	0,34	0,52	0,72	0,95	1,21	1,45	1,69	1,94
BBB	0,24	0,68	1,17	1,79	2,43	3,06	3,59	4,12	4,63	5,16

Source : S&P "Default, Transition, and Recovery: 2008 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions" April 2009

4. La prise en compte de la réassurance

Best estimate : le taux de recouvrement

Ce taux représente la partie de la dette qui sera recouvrée en cas de défaut du réassureur.

S'il n'existe pas d'estimation fiable de ce taux, aucun taux supérieur à 50 % ne pourra être utilisé.

Le calcul de ce taux doit tenir compte du risque de crédit porté par le réassureur ainsi que de l'ensemble des couvertures de risques que le réassureur garanti à l'assureur (nantissements, *etc*.).

4. La prise en compte de la réassurance

Best estimate : simplifications possibles

Lorsque la contrepartie bénéficie d'une notation élevé, l'ajustement pour défaut de contrepartie doit être assez faible comparé au recouvrement de réassurance. Dans ce cas, l'ajustement pour défaut de contrepartie peut être évalué de façon simplifiée par la formule suivante :

$$Adj_{CD} = -\mathbf{max}\left((1-RR) \times BE_{Rec} \times Dur \times \frac{PD}{1-PD}; 0 \right)$$

avec *RR* le taux de recouvrement, *PD* la probabilité de défaut à un an, *Dur* la duration et BE_{Rec} le *best estimate* des montants récupérables. *PD* et *RR* sont fixés par le QIS 5 :

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	Autre
RR	50 %	45 %	40 %	35 %	20 %	10 %
PD	0,05 %	0,10 %	0,20 %	0,50 %	2,00 %	10,0 %

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de souscription (formule standard)

On rappelle que si X suit une loi log-normale d'espérance M et de volatilité Ω, alors on sait que

$$e^{-m} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{M}\right)^2} \qquad m = E\left(\ln\left(\frac{X}{M}\right)\right)$$

Où m est l'espérance de la loi normale sous-jacente à X/M. On en déduit que le rapport des *best estimate* net et brut est, dans le cadre log-normal supposé par le régulateur, de la forme :

$$NP = \exp\left(m^{gross} - m^{net}\right)$$

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de souscription (formule standard)

Le calcul du SCR non vie fait un intervenir la réassurance non proportionnelle *via* un coefficient NP_{lob} de pondération de la volatilité liée au risque de tarification.

$$NP_{lob} = \sqrt{\frac{1+\left(\Omega_{lob}^{net} \middle/ M_{lob}^{net}\right)^2}{1+\left(\Omega_{lob}^{gross} \middle/ M_{lob}^{gross}\right)^2}}$$

où $\left(\Omega_{lob}^{net}, M_{lob}^{net}\right)$ correspondent à l'écart-type et à la moyenne de la charge de sinistre nette de réassurance de la ligne d'activité.

Cette formule est critiquée pour sa simplicité qui rend peu compte de la complexité des traités en place en pratique.

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de souscription (formule standard)

On doit donc évaluer le coefficient de variation de l'engagement net de réassurance. On suppose que *X* suit une loi log-normale d'espérance M_{gross} et de volatilité Ω_{gross}. L'engagement après prise en compte du traité de réassurance s'écrit :

$$Y = \min\left(b; \left[X - a\right]^{+}\right)$$

On peut montrer que :

$$E(Y) = E\left((a+b) \wedge X\right) - E\left((a+b) \wedge X \wedge a\right) = E\left((a+b) \wedge X\right) - E\left(a \wedge X\right)$$

Par ailleurs on sait (*cf*. Partrat et Besson [2005]) que, pour une loi log-normale :

$$E\left(\delta \wedge X\right)^{k} = M_k \times N\left(\frac{\ln(\delta) - m}{\sigma} - k \times \sigma\right) + \delta^{k} \times N\left(\frac{\ln(\delta) - m}{\sigma}\right)$$

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de souscription (formule standard)

Aussi, en notant $F_{a,b}(x)$ la fonction de répartition d'une loi log-normale de paramètre (a,b) et en notant que le moment d'ordre k d'une loi log-normale est :

$$M_k = E\left(X^k\right) = \exp\left(k \times a + \frac{k^2 \times b^2}{2}\right)$$

On obtient $E\left(\delta \wedge X\right)^k = M_k \times F_{m+k\times\sigma^2,\sigma}\left(x\right) + \delta^k \times F_{m,\sigma}\left(x\right)$

D'où l'on déduit les formules renseignées dans l'annexe *N* du QSI5 :

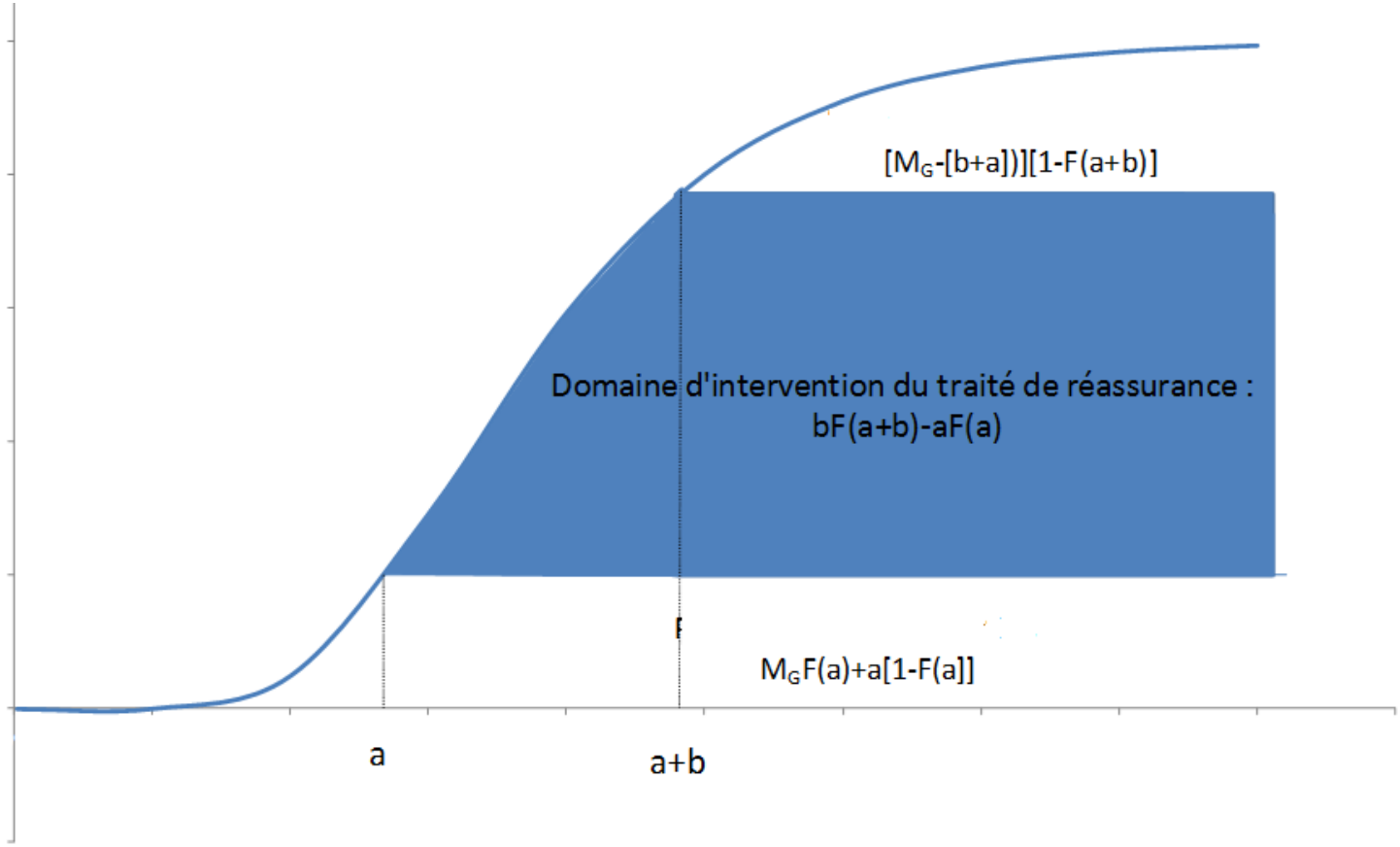
$$M_{lob}^{net} = M_{lob}^{gross} \times \left[1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b) + F_{m+\sigma^2,\sigma}(a)\right] + a \times \left[F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)\right] - b \times \left[1 - F_{m,\sigma}(a+b)\right]$$

$$\Omega_{lob}^{net} = \left(\left(\left(\Omega_{lob}^{gross}\right)^2 + \left(\mathrm{M}_{lob}^{gross}\right)^2\right) \times \left[1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b) + F_{m+\sigma^2,\sigma}(a)\right] + a^2 \times \left[F_{m,\sigma}(a+b) - F_{m,\sigma}(a)\right] - 2b \times M_{lob}^{gross} \times \left[1 - F_{m+\sigma^2,\sigma}(a+b)\right] + b^2 \times \left[1 - F_{m,\sigma}(a+b)\right] - \left(M_{lob}^{net}\right)^2\right)^{1/2}$$

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de souscription (formule standard)

De manière synthétique on a



4. La prise en compte de la réassurance

Le risque de défaut des contreparties de réassurance

Le risque de contrepartie est le risque de pertes résultant d'une défaillance imprévue ou d'une dégradation de la note de crédit des contreparties ou des débiteurs de contrats de réduction des risques, tels que des dispositifs de réassurance.

Le risque de contrepartie doit couvrir les contrats de réduction des risque, tels que

- ✓ les traités de réassurance ;
- ✓ les produits dérivés et de titrisation ;
- ✓ les créances auprès d'intermédiaires ;
- ✓ toute autre exposition de crédit non couverte dans le sous-module risque de *spread*.

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de contrepartie (formule standard)

L'approximation présentée *supra* est notamment utilisée pour le risque de contrepartie, pour les expositions de type 1 (sur des contreparties généralement notées et non diversifiables) :

$$SCR = \mathbf{min}\left(\sum_{i=1}^{N} LGD_i, q \times \sqrt{V}\right)$$

La distribution de la charge est complexe et le QIS suppose que l'on obtient une approximation valide dans un cadre log-normal, qui permet alors d'approcher le SCR avec q=3 si le risque n'est pas trop volatile ($\sqrt{V} \leq 5\% \sum LGD_i$) et que donc l'approximation log-normale apparaît raisonnable et q=5 sinon (SCR.6.55). Tout se ramène alors à déterminer la variance des pertes en cas de défaut. Pour cela le QIS 5 propose un modèle probabiliste prenant en compte un facteur de risque systématique affectant les probabilités de défaut, introduisant ainsi de la dépendance entre les contreparties.

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de contrepartie (formule standard)

La quantité LGD_i correspond à l'exposition globale. Elle est calculée selon la formule :

$$LGD_i = \mathbf{max}\left(50\% \times \left(Recoverables_i + RM_{re,i} - Collateral_i\right); 0\right)$$

- ✓ $RM_{re,i}$ désigne l'effet de réduction des risques sur le risque de souscription de la couverture en réassurance auprès de la contrepartie *i*.
- ✓ *Recoverables* correspond à l'actif de réassurance ;
- ✓ *Collateral* désigne les garanties éventuellement disponibles.

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de contrepartie (formule standard)

La formule standard fournit l'expression suivante (on désigne ici par *Y* la perte en cas de défaut) :

$$V = \sum_{i=1}^{N}\left(p_i\left(1-p_i\right)+\left(p_i-b_i\right)^2-u_{ii}\right)Z_i+\sum_{i,j=1}^{N}u_{ij}Y_iY_j-\left(\sum_{i=1}^{N}\left(p_i-b_i\right)Y_i\right)^2$$

avec $u_{ij}=\dfrac{\alpha\left(1-b_i\right)\left(1-b_j\right)}{\alpha+\dfrac{\tau}{b_i}+\dfrac{\tau}{b_j}}$

Cette expression découle directement de l'utilisation d'un modèle « à choc commun » permettant de prendre en compte un facteur de risque systématique venant affecter les probabilités de défaut des contreparties.

Ce modèle est présenté succinctement ci-après.

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de contrepartie (formule standard)

Plus précisément, on suppose que, pour une notation donnée, la probabilité de défaut est de la forme :

$$p(S) = b + (1-b)S^{\tau/b}$$

où *S* est un facteur de risque systématique (stress) distribué selon :

$$P(S \leq x) = x^{\alpha}$$

Le calcul de la matrice de covariance entre les contreparties est alors simple à effectuer ; il permet de calculer la variance de la perte en cas de défaut globale. Un regroupement par *rating* conduit alors à l'expression fournie par le QIS 5.

4. La prise en compte de la réassurance

Le calcul du SCR de contrepartie (formule standard)

Dans ce modèle on trouve facilement $p = E\left[p(S)\right] = \dfrac{(\tau+\alpha)b}{\tau+\alpha b}$

En pratique, on considère que *p* est la probabilité de défaut observable et on en déduit *b* en inversant cette égalité :

$$b = \frac{p\tau}{\alpha(1-p)+\tau}$$

On considère alors un ensemble de *k* contreparties ; la probabilité de défaut marginale est p_i, qui est égale à l'espérance de la variable indicatrice du défaut. La variance de cette variable de Bernoulli est $\omega_{ii} = p_i(1-p_i)$. Les contreparties sont supposées indépendantes conditionnellement à *S*, ce qui permet de calculer la covariance :

$$\omega_{ij} = \frac{\alpha(1-b_i)(1-b_j)}{\alpha+\dfrac{\tau}{b_i}+\dfrac{\tau}{b_j}} - (p_i-b_i)(p_j-b_j)$$

Le calcul du SCR de contrepartie (formule standard)

En effet, si D_i est l'indicatrice du défaut de la contrepartie *i*, on a

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= E\left(D_iD_j\right)-E\left(D_i\right)E\left(D_j\right)\\ &= E\left(\left(D_i-b_i\right)\left(D_j-b_j\right)\right)-E\left(D_i-b_i\right)E\left(D_j-b_j\right)\\ &= E\left(\left(D_i-b_i\right)\left(D_j-b_j\right)\right)-\left(p_i-b_i\right)\left(p_j-b_j\right)\end{aligned}$$

et donc en utilisant $E\left(\left(D_i-b_i\right)\left(D_j-b_j\right)\right)=E\left(E\left[\left(D_i-b_i\right)\left(D_j-b_j\right)|S\right]\right)$ on trouve

$$E\left(\left(D_i-b_i\right)\left(D_j-b_j\right)\right)=\left(1-b_i\right)\left(1-b_j\right)\alpha\int_0^1 s^{\frac{\tau}{b_1}+\frac{\tau}{b_2}}s^{\alpha-1}ds$$

ce qui donne la résultat cherché.

4. La prise en compte de la réassurance

Choix du traité non proportionnel optimal

Solvabilité 2 autorise donc une prise en compte assez fine des dispositifs de réassurance non proportionnels et se pose donc naturellement la question de l'optimisation du plan de réassurance (arbitrage entre coût des fonds propres et coût de la rétrocession).

Le choix du traité optimal en réassurance non proportionnelle est particulièrement délicat car il nécessite une prise en compte de la structure de dépendance entre les branches.

Les hypothèses effectuées à ce niveau peuvent influer sensiblement sur le résultat, comme le montre l'exemple ci-après.

4. La prise en compte de la réassurance

Choix du traité non proportionnel optimal

On considère par exemple un traité simple :

$$E\left(S\right)=E\left(\min\left(S_1+S_2,m\right)\right)$$

dans le cas où S_1 et S_2 ne sont pas indépendantes.

Un exemple type de cette situation est un dispositif de réassurance en *stop-loss* sur un contrat automobile avec la partie « dommage » et une protection juridique.

La modélisation de cette situation nécessite de décrire la structure de dépendance entre S_1 et S_2, ce qui peut être fait *via* la théorie des copules.

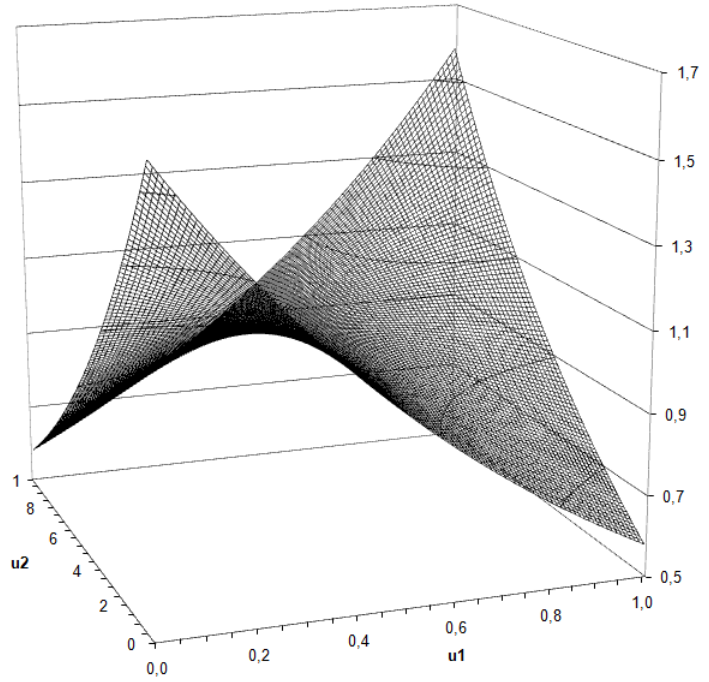
4. La prise en compte de la réassurance

Choix du traité non proportionnel optimal

On peut par exemple retenir la copule de Franck, qui permet de modéliser des dépendances négatives et positives.

$$C(u,v,\theta) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

$$C_{2|1}^{-1}(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{v\left(e^{-\theta}-1\right)}{v+(1-v)e^{-\theta u}}\right)$$



4. La prise en compte de la réassurance

Choix du traité non proportionnel optimal

Pour l'illustration numérique on retient le modèle suivant, avec des marginales log-normales et une copule de Franck :

$$S_i \sim \mathbf{LN}(\mu_i, \sigma_i) \qquad \mathbf{Pr}[S_1 \le s_1, S_2 \le s_2] = C_\alpha\left(F_1(s_1), F_2(s_2)\right)$$

et les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$\mu_1 = 5,0099 \quad \sigma_1 = 0,2000 \quad \alpha = 10$$
$$\mu_2 = 3,8421 \quad \sigma_2 = 0,3740$$

de sorte que

$m = 250$

Indépendance	200,51
Dépendance	197,66
Ecart	-1,42%
P(S>m)	10,58%

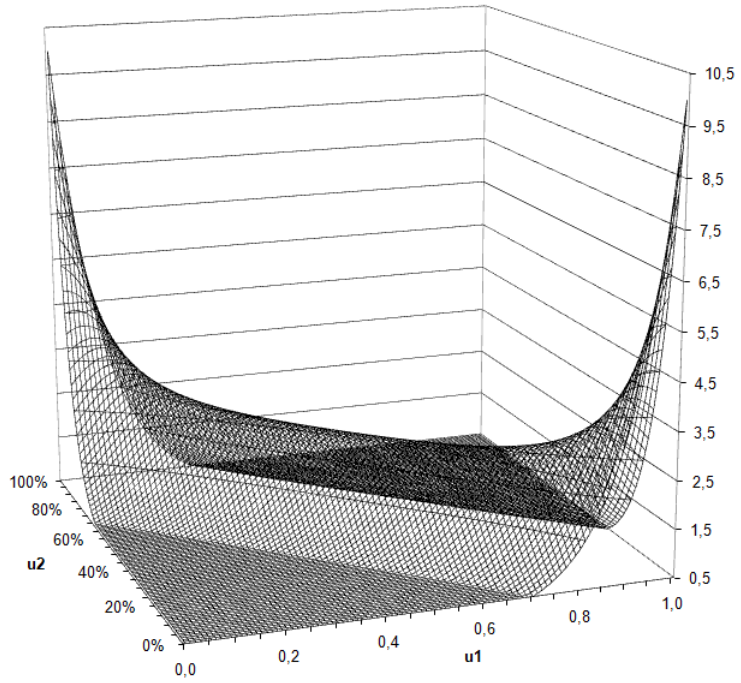
$m = 200$

Indépendance	186,95
Dépendance	182,19
Ecart	-2,55%
P(S>m)	49,38%

4. La prise en compte de la réassurance

Choix du traité non proportionnel optimal

Avec une structure de dépendance différente, par exemple α = - 10 :



$m = 250$

Indépendance	200,01
Dépendance	202,15
Ecart	1,07%
P(S>m)	10,13%

$m = 200$

Indépendance	186,95
Dépendance	193,93
Ecart	3,73%
P(S>m)	49,44%

Le seuil est ici un paramètre déterminant (il mesure la rétention de la cédante).

SOMMAIRE

Assurance IARD

1. Les logiques de tarification
2. Les évolutions du cadre de provisionnement
3. Détermination du SCR
4. La prise en compte de la réassurance
5. **Aspects quantitatifs de l'ORSA**

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Cadre général

Les objectifs du pilier 2, qui se traduit en pratique par la mise en place d'un système de gestion des risques et de l'ORSA, sont les suivants :

- s'assurer que la compagnie est bien gérée et est en mesure de calculer et maîtriser ses risques ;

- s'assurer qu'elle est bien capitalisée.

Le premier de ces points constitue un développement majeur par rapport à Solvabilité 1.

Il encourage les compagnies à adopter la démarche ERM (*Enterprise Risk Management*) afin qu'elles soient en mesure par elles-mêmes d'apprécier et de mesurer leurs risques.

De fait, le pilier 2 comporte de nombreux aspects quantitatifs.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Cadre général

L'ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) est un processus d'évaluation interne et un outil de contrôle. Il est une composante du système global de gestion des risques :

- l'art. 44 (Gestion des risques) de la directive décrit le cadre général de la gestion des risques ;

- l'art. 45 (Évaluation interne des risques et de la solvabilité) de la même directive précise le cadre de l'ORSA, plus spécifiquement consacré au contrôle de la solvabilité.

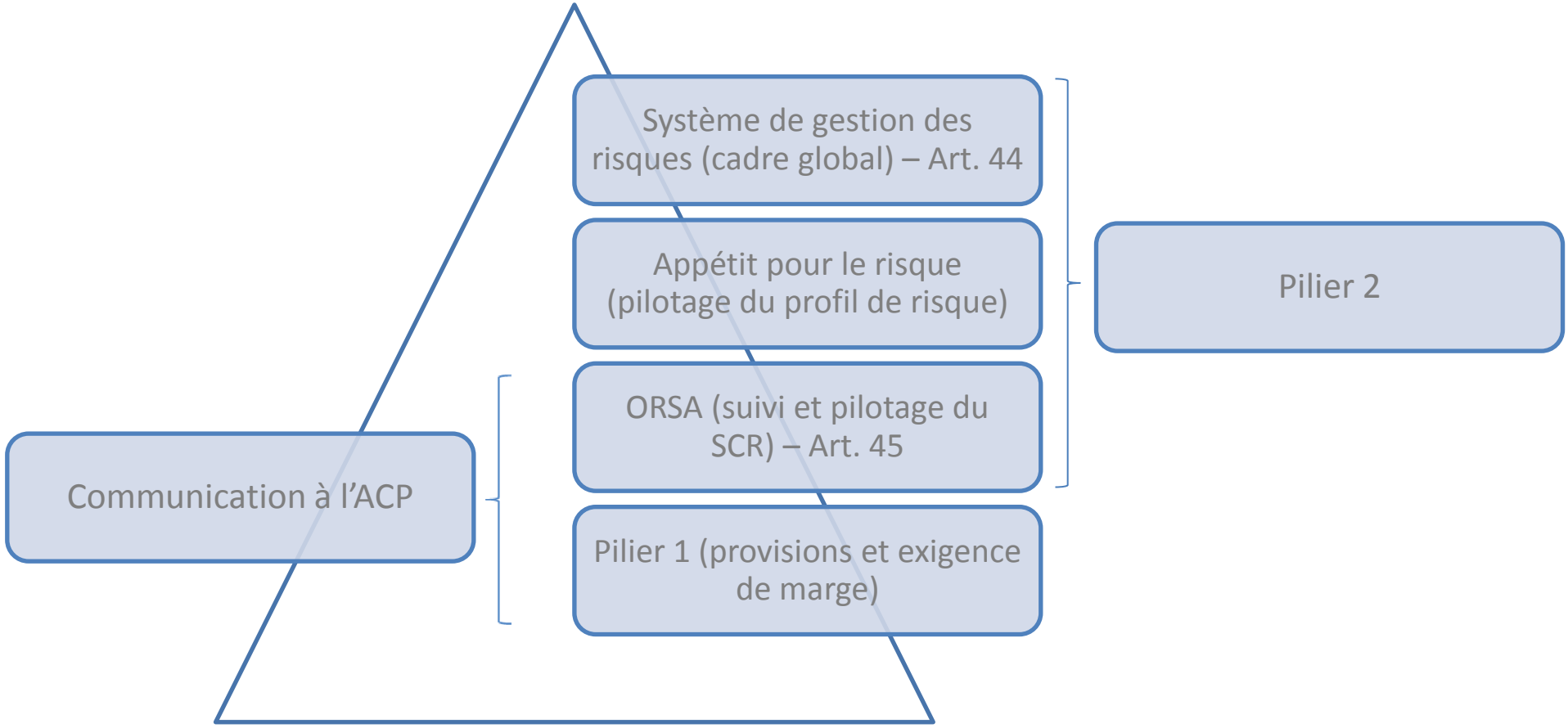
Les résultats de l´ORSA doivent être communiqués à l´autorité de contrôle sous la forme d'un rapport.

Agenos [2010] constitue une référence très complète pour la description d'un ORSA en assurance non-vie.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Cadre général

L'articulation entre les piliers 1 et 2 peut être schématisée comme suit :



5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Cadre général

L'entreprise d'assurance doit donc prouver au régulateur qu'elle est en mesure d'intégrer les contraintes réglementaires associées aux objectifs du plan stratégique.

Elle doit en particulier le convaincre :

- de sa capacité à couvrir l'exigence minimale de marge avec une probabilité suffisante ;

- de sa capacité à augmenter ses fonds propres le cas échéant.

Pour répondre à ces demandes du régulateur, il convient donc de projeter le bilan sur l'horizon du plan stratégique, ce qui est un exercice potentiellement complexe.

On présente ci-après le modèle simple proposé par Guibert et *al*. [2012] qui fournit un cadre simple.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Un modèle simple

Le modèle considéré est un modèle à temps discret dans lequel on suppose que :

- le SCR est proportionnel au niveau du *best estimate* ;
- les prestations payées sont proportionnelles au *best estimate*.

La première hypothèse implique en particulier que la marge pour risque est égale à :

$$RM_t = \alpha \times D_t \times SCR_t$$

où D désigne la duration du passif.

Un modèle simple

En reprenant le cadre et les notations de Guibert et *al*. [2010], l'équation générale définissant le SCR :

$$SCR_t = VaR_t\left(\frac{F_{t+1} + L_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99{,}5\%\right) - L_t$$

devient avec l'hypothèse de proportionnalité du SCR au BEL :

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \times D_t}\left(VaR_t\left(\frac{F_{t+1} + \left(1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_{t+1}\right) \times BEL_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99{,}5\%\right) - BEL_t\right)$$

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Un modèle simple

Il s'agit maintenant de spécifier les différents facteurs intervenants dans l'équation précédente.

Quatre facteurs de risque sont retenus dans le modèle : les cotisations, le *best estimate* (risque de tarification passée), le ratio combiné (risque de tarification future et risque de frais) et le rendement de l'actif

Les calculs sont menés en deux étapes :

- dans un premier temps on choisit une dynamique temporelle pour les facteurs de risque,

- dans un second temps, on en déduit les équations d'évolution des autres variables d'intérêt telles que les prestations et la valeur de l'actif.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

La dynamique des facteurs de risque

On définit l'évolution des facteurs de risque à la date *t* par :

$$C_{t+1} = C_t \times \exp\left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2} + \sigma_c \times \varepsilon_{t+1,c}\right)$$

$$\beta_{t+1} = \beta \times \exp\left(-\frac{\sigma_\beta^2}{2} + \sigma_\beta \times \varepsilon_{t+1,\beta}\right)$$

$$BEL_{t+1} = BEL_t \times \exp\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t+1,p}\right) + \beta_{t+1} \times C_{t+1}$$

$$S_{t+1} = S_t \times \exp\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2} + \sigma_a \times \varepsilon_{t+1,a}\right)$$

avec la contrainte $\mu_p(t) = r + \ln(1-\varphi_{t-1})$ et les ε des bruits blancs gaussiens indépendants.

Autres équations d'évolution

On doit calculer le montant de prestations réglées ; pour cela on observe que, du fait de la définition du *best estimate*, on doit avoir :

$$BEL_t = E_t\left(e^{-r} \times \left(F_{t+1} + BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \times C_{t+1}\right)\right)$$

Comme on a supposé que $F_{t+1} = \varphi_t \times BEL_{t+1}$ on en déduit que :

$$\varphi_t = \frac{e^r BEL_t + \beta e^{\mu_c} C_t}{e^{\mu_p(t)} BEL_t + \beta e^{\mu_c} C_t} - 1$$

Autres équations d'évolution

On peut alors modéliser l'ensemble des éléments du bilan simplifié :

$$A_t = A_{t-1} \times (1 + R_t) - F_t + C_t$$

$$L_t = BEL_t + RM_t = BEL_t + \alpha \times D_t \times SCR_t$$

et construire la distribution du taux de couverture des engagements réglementaires :

$$\pi_t = \frac{A_t - L_t}{SCR_t}$$

Mais pour que le modèle soit utilisable en pratique il faut être capable de calculer le SCR de manière analytique.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Formule explicite pour le SCR projeté

Tout se ramène donc à déterminer la loi conditionnelle en *t* de :

$$\chi_{t+1} = \frac{\left(c_t + \varphi_t\right) \times BEL_{t+1} - C_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

avec $c_t = 1 + \alpha \times \frac{SCR_t}{BEL_t} \times D_t$

Compte tenu de la forme des lois conditionnelles des variables *BEL*, *C* et 1+*R*, on approche la loi de *xhi* par une loi log-normale dont les paramètres sont choisis pour que les deux premiers moments soient exacts.

Formule explicite pour le SCR projeté

On trouve après quelques calculs :

$$\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2} \qquad \sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 + \sigma_a^2$$

avec :

$$\sigma_t^2 = \ln\left(1+\omega_t^2\right) \qquad \mu_t = \ln\left(\frac{e^r \times BEL_t + \left(\beta e^r - e^{\mu_c}\right)\times C_t}{\sqrt{1+\omega_t^2}}\right)$$

$$\omega_t = \frac{\sqrt{\begin{array}{l}\left(c_t+\varphi_t\right)^2 \times BEL_t^2 \times e^{2\mu_p(t)} \times \left(e^{\sigma_p^2}-1\right) \\ + C_t^2 \times e^{2\mu_c} \times \left(\left(c_t+\varphi_t\right)^2 \times \beta^2 \times \left(e^{\left(\sigma_c^2+\sigma_\beta^2\right)}-1\right) + \left(e^{\sigma_c^2}-1\right)\left(1-2\beta\left(c_t+\varphi_t\right)\right)\right)\end{array}}}{e^r \times BEL_t + \left(\beta \times e^r - e^{\mu_c}\right)\times C_t}$$

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Formule explicite pour le SCR projeté

Le SCR est alors solution de l'équation implicite :

$$SCR_t = \frac{1}{1+\alpha \times D_t}\left(\exp\left(\mu_t(\chi)+\sigma_t(\chi)\times\phi^{-1}(99{,}5\%)\right)-BEL_t\right)$$

Cette équation se résout rapidement par dichotomie par exemple.

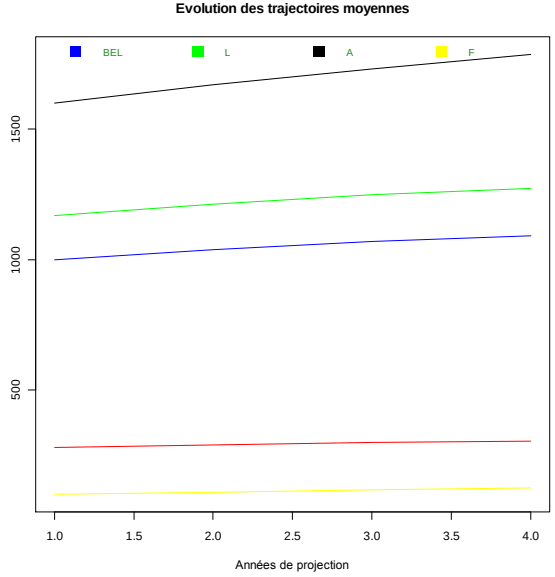
Remarque : vu de la date de calcul, SCR_t est une variable aléatoire dont la distribution n'est pas simple.

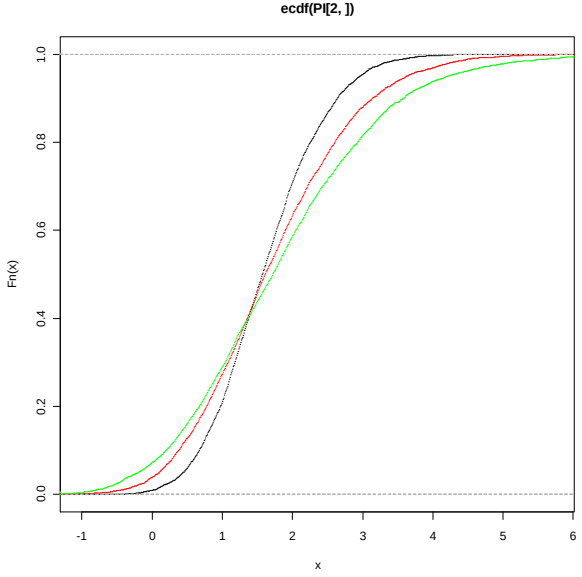
5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Un exemple

```
#-------------------------------------------------------------------------------
#Paramètres de la simulation

#Valeurs initiales
BEL0=1000           #valeur de BEL(0)
A0=1600             #valeur de l'actif
R0=0                #valeur du rendement de l'actif, normalisée à 0
C0=100              #montant des cotisations perçues l'année initiale
B0=1                #Valeur du ratio combiné initial
D0=10               #duration

#Paramètres
alpha=.06           #Taux de rémunération du capital réglementaire
beta=1              #Valeur du coefficient S/P
s_p=.1              #volatilité pour la loi normale du passif : correspond à une volatilité du passif d'environ 10%
s_b=.02             #volatilité pour la loi normale du ratio combiné
mu_c=0              #Taux de croissance des cotisations
s_c=.01             #Volatilité des cotisations
mu_a=.046           #allocation 20% d'actif risqué de rendement 7% et 80 de sans risque 4%
s_a=.09             #allocation 20% d'actif risqué de volatilité 20% et 80 de sans risque
r=.04               #taux sans risque
T=3                 #horizon de projection
n=10000             #nombre de simulations
```

```
[1] "ratio de couverture initial : 1.54731323722149"
[1] "Taux de couverture minimal projeté :"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1.5650  0.6704  1.3800  1.4490  2.1520  6.4090
[1] "Taux de couverture de l'année 2"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-0.5672  1.0850  1.5710  1.6200  2.1050  5.2770
[1] "Taux de couverture de l'année 3"
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
-1.2640  0.9301  1.6130  1.7110  2.4170  6.4090
```





Extension n°1 : prise en compte de plusieurs lignes d'affaires

L'utilisation pratique du modèle proposé ici implique de pouvoir prendre en compte plusieurs lignes d'affaires adossées à un actif général, autrement dit de distinguer des BEL et des cotisations par ligne. Dans ce cas on a :

$$\chi_{t+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\left(\left(c_t^j + \varphi_t^j\right) BEL_{t+1}^j - C_{t+1}^j\right)}{1 + R_{t+1}}$$

et on peut donc utiliser encore une approximation par une loi log-normale de la loi conditionnelle de *xhi*, seul le calcul des deux premiers moments du numérateur est modifié. Il est simple de prendre en compte la dépendance entre les branches, pour autant que celle-ci soit mesurée par des coefficients de corrélation entre les lois normales sous-jacentes. On prend ainsi en compte l'effet de l'évolution des primes sur le *mix-produit* et peut identifier des arbitrages dans le politique de souscription.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Extension n°2 : prise en compte d'une provision de primes

Le QIS 5 prévoit une décomposition du *best estimate* entre un *best estimate* de sinistres, relatifs aux sinistres déjà survenus à la date d'inventaire, et un *best estimate* de primes relatifs aux sinistres futurs découlant des contrats en portefeuille à la date d'inventaire et des probables primes futures que ces contrats émettront.

Les règles de prise en compte des primes futures sont relativement complexes dans le dispositif Solvabilité 2. En particulier, celles-ci varient en fonction du processus de détermination des tarifs de chaque assureur et elles conduisent donc à une grande hétérogénéité de situations, même en présence de risques par ailleurs identiques.

Extension n°2 : prise en compte d'une provision de primes

On peut toutefois observer que, dans les calculs du pilier 1, et dans le contexte de l'assurance IARD retenu ici, l'horizon de prise en compte des primes futures est d'un an. Comme dans le modèle présenté dans ce travail la situation est projetée sur plusieurs exercices, le seul impact de la non prise en compte rigoureuse des règles de détermination du montant des primes futures à intégrer dans le calcul de l'exigence de marge de l'exercice est un décalage dans le temps de la perception de la prime considérée.

En conséquence, le niveau absolu de l'exigence de marge issue du modèle peut être biaisé, mais sa variation ne l'est pas et ce sont les variations de cette valeur (et du taux de couverture) que l'on cherche à décrire.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

Extension n°2 : prise en compte d'une provision de primes

Ceci étant précisé, l'ajout de primes futures au sens de Solvabilité 2 peut être introduit simplement en modifiant comme suit la dynamique de la variable *BEL* :

$$BEL_{t+1} = BEL_t \times \mathbf{exp}\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \times \varepsilon_{t,p}\right) + \beta_{t+1} \times C_{t+1} + \delta \times e^{\mu} \times \left(\beta_{t+1} - 1\right) \times C_{t+1}$$

avec δ le taux de reconduction des contrats et μ le taux de revalorisation annuel du tarif.

On peut noter que cet ajustement n'a qu'un effet limité sur les résultats du modèle lorsque le ratio combiné est proche de un.

En conclusion

On a décrit ici un modèle simple permettant, sur la base de la prise en compte des caractéristiques synthétiques des facteurs de risque (provisions, primes et risque financier), de déterminer la distribution du taux de couverture de l'exigence de marge réglementaire sur l'horizon d'un plan stratégique.

Un tel modèle trouve sa place dans l'ensemble des outils à déployer dans le cadre de l'ORSA en fournissant à un organisme assureur le moyen de mesurer l'impact de choix de gestion (relatifs au niveau des primes, à l'allocation d'actifs, au mix-produit, *etc*.) sur sa couverture de la marge.

5. Aspects quantitatifs de l'ORSA

En conclusion

Il lui permet notamment d'évaluer la probabilité de non couverture sur un horizon donné ou, plus généralement, de non respect d'un seuil minimal de couverture qu'imposerait la gouvernance interne. Il s'agit donc d'un outil d'aide à la décision précieux.

Cet outil, qui conduit à répondre à l'exigence du régulateur de mesurer l'effet de la production future sur l'exigence de marge et sa couverture, intervient en aval du modèle utilisé dans le cadre du pilier 1, qu'il vient compléter.

En particulier, il peut être déployé sur la base du modèle standard comme d'un modèle interne.

Synthèse

L'actuariat IARD est traditionnellement fondée sur une grande expertise technique. L'évolution de la technologie, d'une part, et de l'environnement réglementaire, d'autre part, induisent des modifications des techniques mises en œuvre :

- données massives et techniques de tarification ;
- modèles stochastiques de provisionnement ;
- prise en compte des risques majeurs (catastrophes) ;
- analyse dynamique des risques (ORSA).

Enfin, il est probable que l'application de Solvabilité 2 conduise à une modification de la structure des programmes de réassurance.

Références bibliographiques

AGENOS X. [2010] *Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie*, Mémoire d'actuaire, CEA

AOUIZERATE J.M. [2012] «Alternative neuronale en tarification santé », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 12, n°23.

CEIOPS [2010] *Technical specifications for QIS 5*

DENUIT M., CHARPENTIER A. [2005] *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome II : tarification et provisionnement,* Paris : Economica.

DUPIN G.; MONFORT A.; VERLÉ J.P. [2003] « Robust inference in rating models » *Proceedings of the 34th ASTIN Colloquium*.

FÉLIX J.P., PLANCHET F. [2009] « Mesure des risques de marché et de souscription vie en situation d'information incomplète pour un portefeuille de prévoyance. », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°18.

FFSA [2011] Les assurances de biens et de responsabilité – Données clé 2010, FFSA / GEMA

FFSA [2010] Assurance automobile : les sinistres corporels en 2008 – Etude, FFSA / GEMA

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2012] « Measuring Uncertainty of Solvency Coverage Ratio in ORSA for Non-Life Insurance », *European Actuarial Journal*, A paraître.

GUIBERT Q., JUILLARD M., PLANCHET F. [2010] « Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 10, n°20.

MACK T. [1993] « Distribution-Free Calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates », ASTIN Bull., Vol. 23, n°2.

MERTZ. M., WÜTHRICH M. [2008] « Modelling the claims development result for solvency purposes », Casualty Actuarial Society

NELDER J., WEDDERBURN R. [1972] « Generalized linear models », *Journal of Roy. Stat. Soc.* B, vol. 135, 370-384.

PAGLIA A., PHELIPPE-GUINVARC'H M.V. [2011] « Tarification des risques en assurance non-vie, une approche par modèle d'apprentissage statistique », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 11, n°22.

Références bibliographiques

PARTRAT C., BESSON J.L., [2004] *Assurance non-vie – modélisation, simulation*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉROND P.E., KAMEGA A. [2009] *Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation*, Paris : Economica.

PLANCHET F., THÉROND P.E., JUILLARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance*, seconde édition, Paris : Economica.

RENSHAW, VERRALL R.J. [1998] « A stochastic model underlying the chain ladder technique », British Actuarial Journal, Vol. 4.

SAME A., GOVAERT G., AMBROISE C. [2009] Les modèles de mélange pour la classification de données massives en temps réel, actes des 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux.

VASECHKO O.A.; GRUN-REHOMME M.; BENLAGHA N. [2009] « Modélisation de la fréquence des sinistres en assurance automobile », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 9, n°18.

Contact

Frédéric PLANCHET

fplanchet@winter-associes.fr

WINTER & Associés

43-46 avenue de la Grande Armée

F - 75116 Paris

+33-1-45-72-63-00

ISFA

50 avenue Tony Garnier

F - 69007 Lyon

+33-4-37-38-74-37

http://www.winter-associes.fr

http://www.ressources-actuarielles.net

http://blog. ressources-actuarielles.net