

Modèles stochastiques de taux d'intérêts

Ioane Muni Toke

Draft

Version du 11 janvier 2011

Table des matières

1	Concepts fondamentaux	7
1.1	Taux de base “spot”	7
1.1.1	Définitions et notations des taux de base	7
1.1.2	Conventions	8
1.1.3	Taux spot de référence dans la zone euro	8
1.1.4	Structure par terme	9
1.2	Taux à terme (<i>forward</i>)	10
1.3	Taux swap	12
1.3.1	Définition du contrat swap	12
1.3.2	Définition du taux swap	12
1.3.3	Lien avec les taux forward simples	13
1.4	Produits dérivés simples	13
1.4.1	Caps et floors	13
1.4.2	Swaptions	14
1.5	Evaluation par arbitrage dans un modèle de taux	15
2	Modèles de taux courts	17
2.1	Le modèle de Vasicek	17
2.1.1	Définition du modèle et distribution du taux court	17
2.1.2	Prix des obligations zéro-coupon	18
2.1.3	Limites du modèle de Vasicek	20
2.2	Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	20
2.2.1	Définition du modèle et distribution du taux court	20
2.2.2	Prix des obligations zéros-coupon	22
2.2.3	Prix d’une option sur zéro-coupon	23
2.3	Le modèle de Hull et White (ou Vasicek étendu)	23
2.3.1	Prix d’une option sur zéro-coupon	27
2.4	Une remarque sur les modèles affines	28

3	Les modèles multifactoriels	29
3.1	Quelques observations empiriques	29
3.2	Les modèles taux longs - taux courts invalidés	30
3.3	Un modèle gaussien à deux facteurs	31
4	Le cadre Heath-Jarrow-Morton(HJM)	35
4.1	Définition du cadre	35
4.2	Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage	36
4.3	Caractère markovien d'un cadre HJM	38
4.4	Lien avec les modèles affines	38
4.5	Spécifications usuelles de volatilité	39
4.5.1	Volatilité de type Ho & Lee	39
4.5.2	Volatilité de type Vasicek / Hull & White	40
4.6	Evaluation d'un caplet	40
5	Les modèles de marché Libor	43
5.1	La formule de Black	43
5.2	Modèles de marché Libor	44
5.2.1	Définitions	44
5.2.2	Volatilité Libor, volatilité zéro-coupon	45
5.2.3	Evaluation des caplets	46
5.2.4	Spécification des volatilités Libor	46
5.2.5	Dynamique des taux Libor forward sous une même mesure	48
5.2.6	La mesure spot Libor	49
5.3	Le modèle de marché Swap	50
A	Formule de Feynman-Kac	53
B	Changement de numéraire	55
C	Sujet de Travaux Pratiques : Modèle de Hull & White	57
C.1	Construction de l'arbre trinomial	57
C.2	Calibration	59
C.3	Questions	60

Introduction

Ce document rassemble de brèves notes de cours. Ces notes ne forment ni un document d'introduction à la modélisation mathématique des taux d'intérêt, ni un ouvrage de référence sur les modèles stochastiques de taux. Elles ne sont qu'un support à l'exposé de ces modèles en amphi.

Ces notes de cours sont également très avares en informations pratiques sur les marchés de taux. Ces aspects seront abordés dans des conférences dédiées, données par des professionnels invités à l'issue de ce cours théorique.

On suppose le lecteur familier avec les notions de base sur les processus stochastiques et le calcul d'Itô, ainsi qu'avec la théorie de l'évaluation par arbitrage et les modèles financiers classiques comme le modèle de Black & Scholes. Citons parmi les manuels de référence sur ces sujets les ouvrages de Lamberton & Lapeyre (1998) ou Shreve (2004). Des références plus générales sur le calcul stochastique, comme Karatzas & Shreve (2000) ou Oksendal (2003), sont parfois données au fil du texte.

Le déroulement de l'exposé est très classique. On commence par décrire simplement les produits de taux échangés sur les marchés. L'exposé des grands types de modélisation est ensuite (quasi-)chronologique. On débute avec les modèles mono-factoriels, puis ayant exposé leurs avantages pratiques et leurs défauts conceptuels, on décrit rapidement les modèles multi-factoriels dérivés. Un chapitre entier est ensuite consacré au cadre HJM, dont le principe de modélisation diffère assez nettement de celui des modèles précédents. Finalement, la dernière partie est consacrée aux modèles de marchés Libor les plus récents.

Le présent exposé n'est ainsi en rien original. Il s'inspire très largement de Brigo & Mercurio (2005), dont il suit de nombreux développements, et cette référence n'est certainement pas citée aussi souvent qu'elle devrait l'être. On ne peut qu'encourager le lecteur à s'y reporter pour approfondir ce qui n'est que survolé ici. D'autres ouvrages de références sont donnés en bibliographie.

Chapitre 1

Concepts fondamentaux

1.1 Taux de base “spot”

1.1.1 Définitions et notations des taux de base

L’outil de base d’un modèle de taux est l’obligation zéro-coupon, produit financier versant 1 euro à la maturité T . On notera $P(t, T)$ son prix à la date $t \in [0, T]$. A partir de ce prix de l’obligation zéro-coupon on peut définir plusieurs types de taux :

Définition 1.1. On appelle taux d’intérêt instantané continûment composé la quantité $R(t, T)$ définie par

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}. \quad (1.1)$$

$R(t, T)$ est parfois dit “taux zéro-coupon” : c’est le taux continu constant sur la période $[t, T]$ tel que

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1.2)$$

Définition 1.2. On appelle taux d’intérêt simplement composé la quantité $L(t, T)$ définie par

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{P(t, T)(T - t)}. \quad (1.3)$$

$L(t, T)$ le taux simple constant tel que

$$P(t, T) = \frac{1}{1 + L(t, T)(T - t)}. \quad (1.4)$$

Les taux interbancaires de type Euribor et Libor sont définis de la sorte. Par abus de langage, on appellera souvent dans la suite taux Libor n’importe quel taux de composition simple.

Définition 1.3. On appelle taux d'intérêt composé annuellement la quantité $Y(t, T)$ définie par

$$Y(t, T) = \frac{1}{P(t, T)^{1/(T-t)}} - 1. \quad (1.5)$$

$Y(t, T)$ est aussi appelé taux actuariel et vérifie

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + Y(t, T))^{(T-t)}}. \quad (1.6)$$

Définition 1.4. On appelle taux court (ou taux instantané) la limite de tous ces taux lorsque T tend vers t . On la note $r(t)$.

1.1.2 Conventions

Les définitions précédentes montrent que le temps restant à maturité $T - t$ est une grandeur essentielle pour la modélisation de taux d'intérêts. Différentes conventions sont utilisées sur les marchés de taux afin que tous les intervenants mesurent cette quantité de la même manière. Les conventions les plus courantes sont les suivantes :

- **Actuel/365** : une année compte 365 jours,
- **Actuel/360** : une année compte 360 jours,
- **30/360** : une année compte 360 jours et un mois 30 jours.

Pour plus de détails voir Brigo & Mercurio (2005, Définitions 1.2.1).

1.1.3 Taux spot de référence dans la zone euro

Deux taux de référence sont publiés quotidiennement dans la zone euro. Ce sont des taux interbancaires calculés à partir de taux effectivement pratiqués par un panel de grandes banques européennes.

Eonia

Le premier taux de référence est baptisé EONIA pour "Euro OverNight Index Average". C'est une moyenne pondérée des taux de toutes les transactions de prêt jusqu'au lendemain ouvré, initiées au sein de la zone euro par les banques du panel. La convention de l'EONIA est "Actuel/360" et il est calculé à 3 décimales. Le taux est publié chaque soir entre 18h45 et 19h00 (CET)¹.

1. <http://www.euribor-ebf.eu/assets/files/EoniaTechnicalFeatures.pdf>, consulté au 22 novembre 2010.

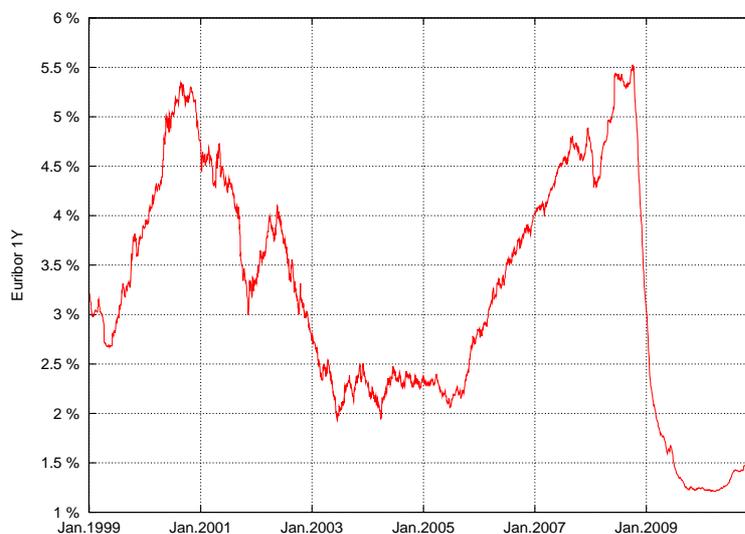


FIGURE 1.1 – Historique du taux de référence Euribor 1 an. Source des données : <http://www.euribor-ebf.eu> au 14 décembre 2010.

Euribor

Le second taux de référence est baptisé Euribor, pour “Euro Interbank Offered Rate”. Le taux Euribor est publié pour les trois maturités hebdomadaires de une semaine à trois semaines, et les douze maturités mensuelles de un mois à un an. Pour le calcul des taux Euribor, on regroupe pour chaque maturité les cotations proposées sur le marché interbancaire par les banques du panel, et on retire des ces données les 15% des taux les plus hauts et les 15% les plus bas. Le taux publié est la moyenne à trois décimales de l'échantillon final. Les taux Euribor sont publiés chaque matin à 11 heures (CET)².

La figure 1.1 présente l'historique du cours de l'Euribor 1 an, de la création du taux de référence au 14 décembre 2010.

1.1.4 Structure par terme

On appelle *courbe des taux* ou *structure par terme des taux* la fonction associant à une maturité T un taux R , L ou Y . De telles courbes sont construites à partir des prix d'obligations observés sur les marchés étudiés.

La courbe de référence est la courbe dite “zéro-coupon”. Les zéros-coupons

2. http://www.euribor-ebf.eu/assets/files/Euribor_tech_features.pdf, consulté le 22 novembre 2010.

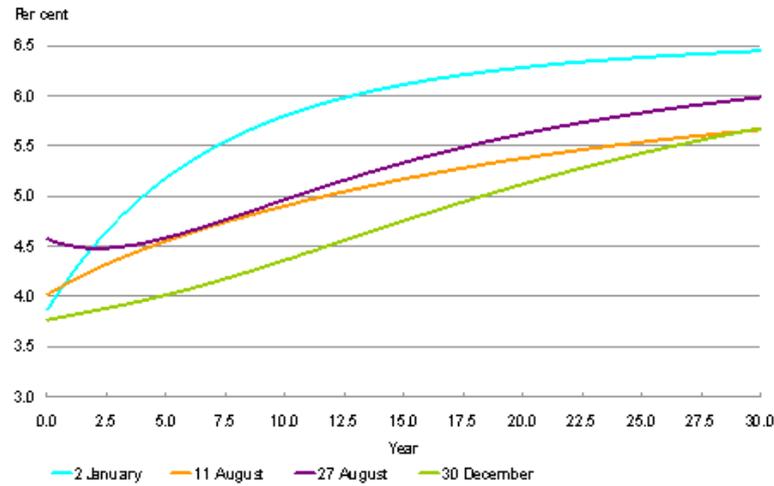


FIGURE 1.2 – Courbes de taux zéro-coupon des obligations d’Etat danoises pour l’année 1998. Tiré de “Danish Government Borrowing and Debt 1998”, Danmarks National Bank, 1999.

étant des instruments théoriques (ou très peu liquides s’ils existent), on reconstruit cette courbe à partir des obligations réelles (couponnées) échangées sur les marchés. Les problématiques essentiellement rencontrées lors de cette reconstruction sont le “stripping” des obligations (i.e. le calcul théorique du zéro-coupon à partir d’une obligation couponnée) et le lissage de la courbe obtenue (utilisation fréquente de splines). Un exemple pratique de reconstruction se trouve dans l’ouvrage de Martellini & Priaulet (2000, Chapitre 6, sections 1 et 2).

La figure 1.2 reproduit à titre d’illustration les courbes de taux zéro-coupon obtenues pour différentes journées de 1998 à partir des obligations de l’Etat danois. On note la variété des formes observées (concavité/convexité).

1.2 Taux à terme (*forward*)

On appelle *forward rate agreement* (FRA), de nominal N , d’expiration T et de maturité S , un contrat qui donne à son souscripteur un versement à la date S au taux fixe (simplement composé) K pour la période $[T, S]$ contre le paiement à cette même date S d’un taux variable $L(T, S)$ fixé en T pour cette même période $[T, S]$. Le payoff versé au détenteur d’un FRA à la date

S est donc :

$$\Pi^{FRA}(S; T, S) = NK(S - T) - NL(T, S)(S - T). \quad (1.7)$$

Par définition du taux L et en remarquant que les quantités $P(t, S)$ et $P(t, T)P(T, S)$ sont “équivalentes” (en un sens à préciser, il n’y a pas égalité) pour $t < T < S$, on montre que la valeur du contrat à la date t s’écrit :

$$\Pi^{FRA}(t; T, S, N, K) = N[(S - t)P(t, S)K - P(t, T) + P(t, S)]. \quad (1.8)$$

Par absence d’opportunité d’arbitrage, le “juste prix” de ce contrat à la date t doit être nul. En conséquence, on peut définir le taux à terme (ou taux *forward*) comme étant la valeur de K annulant le prix du FRA.

Définition 1.5. On appelle taux forward (simple) expirant à la date T et de maturité $S > T$, la quantité définie à la date t par

$$L(t, T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right). \quad (1.9)$$

Le prix du FRA s’écrit donc en fonction du taux forward :

$$\Pi^{FRA}(t; T, S, N, K) = NP(t, S)(S - T)[K - L(t, T, S)]. \quad (1.10)$$

En faisant tendre S vers T dans la définition (1.9) du taux Libor forward, on obtient une définition naturelle du taux forward instantané.

Définition 1.6. On appelle taux forward instantané à la date t pour la maturité T la quantité

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} \quad (1.11)$$

i.e. telle que

$$P(t, T) = \exp \left(- \int_t^T f(t, u) du \right) \quad (1.12)$$

On peut définir alors de façon cohérente les prix de zéro-coupon forward à la date t pour l’expiration T et la maturité S par

$$P(t, T, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}, \quad (1.13)$$

ou encore

$$P(t, T, S) = \exp \left(- \int_T^S f(t, u) du \right). \quad (1.14)$$

$P(t, T, S)$ est la valeur vue à la date t du montant à payer à la date T pour acheter l’obligation zéro-coupon qui versera un euro à la date S .

1.3 Taux swap

1.3.1 Définition du contrat swap

Le contrat *swap* est un produit de taux courant qui peut être vu comme une généralisation du contrat FRA à un échéancier de plusieurs dates de paiement.

Soit un calendrier de dates $T_i, i = 0, \dots, M$. On note $\tau_i = T_i - T_{i-1}$. Soient α et β deux entiers de $\{0, \dots, M\}$. Le swap de nominal N et de strike K sur la période d'investissement (α, β) est un contrat échangeant à chaque date $T_i, i = \alpha + 1, \dots, \beta$ un flux fixe $NK\tau_i$ et un flux variable $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$.

Chaque flux (fixe ou variable) est appelé *jambe* ou *patte* (de l'anglais *leg*). Le swap est dit "receveur" si l'on reçoit la jambe fixe et paie la jambe variable, et "payeur" dans le cas contraire.

Il apparaît que le swap s'écrit facilement comme une somme de FRA. Ainsi, le prix $\Pi^{SR}(t; \alpha, \beta, N, K)$ du swap receveur de paramètres (α, β, N, K) à la date t vaut

$$\Pi^{SR}(t; \alpha, \beta, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \Pi^{FRA}(t; T_{i-1}, T_i, N, K). \quad (1.15)$$

En utilisant l'équation (1.10) donnant le prix du FRA, on a :

$$\Pi^{SR}(t; \alpha, \beta, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} NP(t, T_i)(T_i - T_{i-1})[K - L(t, T_{i-1}, T_i)]. \quad (1.16)$$

La somme des flux variables se simplifie en utilisant la définition (1.9) du taux Libor forward. On obtient par calcul direct que :

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i L(T_{i-1}, T_i) P(t, T_i) = P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta). \quad (1.17)$$

Finalement, on écrit le prix du swap receveur sous la forme :

$$\Pi^{SR}(t; \alpha, \beta, N, K) = -N(P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i). \quad (1.18)$$

1.3.2 Définition du taux swap

Par un raisonnement similaire à celui mené dans le cas du FRA, cette équation permet de définir le *taux swap forward* $S_{\alpha, \beta}(t)$ comme la valeur de

K donnant au contrat swap son “juste prix” à la date t , i.e. un prix nul. On a donc la définition suivante du taux swap :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}. \quad (1.19)$$

1.3.3 Lien avec les taux forward simples

En divisant numérateur et dénominateur de l'équation (1.19) par $P(t, T_\alpha)$, et en remarquant que pour tout $k > \alpha$,

$$\frac{P(t, T_k)}{P(t, T_\alpha)} = \prod_{j=\alpha+1}^k \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_{j-1})} = \prod_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{1 + \tau_j L(t, T_{j-1}, T_j)}, \quad (1.20)$$

on peut exprimer les taux swap en fonction des taux forward simples :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1 - \prod_{j=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + \tau_j L(t, T_{j-1}, T_j)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1 + \tau_j L(t, T_{j-1}, T_j)}}. \quad (1.21)$$

Cette écriture permet de montrer que si l'on travaille dans un modèle où les taux forward Libor $L(t, T_{j-1}, T_j)$ sont log-normaux, le taux swap $S_{\alpha,\beta}(t)$ ne peut pas être également log-normal. Se reporter au chapitre 5 pour les implications en termes de modélisation.

1.4 Produits dérivés simples

Plusieurs types de produits dérivés sont proposés sur les marchés pour offrir à leur acheteur une protection contre la variation des taux.

1.4.1 Caps et floors

Un *cap* est un swap payeur pour lequel seuls les flux positifs pour l'acheteur du contrat son échangés. Le payoff du cap s'écrit donc :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) [L(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K]^+. \quad (1.22)$$

Dans le cas du swap receveur, ce contrat est appelé *floor* et son payoff s'écrit :

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) [K - L(T_\alpha, T_{i-1}, T_i)]^+. \quad (1.23)$$

La forme des payoff indique que le cap permet de protéger son détenteur d'une hausse des taux Libor, et symétriquement que le floor protège d'une éventuelle baisse de ces taux.

Le payoff du cap (resp. floor) est naturellement additif, on peut le décomposer en flux indépendants à chaque date de paiement $T_i, i = \alpha + 1, \dots, \beta$. Chacun de ces flux est appelé *caplet* (resp. *floorlet*). Ainsi, le caplet de nominal N , de strike K sur le taux $L(T_{i-1}, T_i)$ paie à la date T_i le flux

$$N\tau_i [L(T_{i-1}, T_i) - K]^+ . \quad (1.24)$$

1.4.2 Swaptions

Les *swaptions* introduisent un second niveau d'optionnalité de produits dérivés. Une swaption payeuse européenne est une option permettant d'entrer, à une date T appelée maturité de la swaption, dans un swap payeur pour la période (α, β) , de nominal N et de strike K . On suppose ici $T = T_\alpha$ par souci de simplification.

A la date T_α , la valeur $\Pi^{SP}(t; \alpha, \beta, N, K)$ du swap payeur sous-jacent s'écrit en adaptant l'équation (1.16)

$$\Pi^{SP}(t; \alpha, \beta, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} NP(T_\alpha, T_i)(T_i - T_{i-1})[L(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K]. \quad (1.25)$$

Par définition de la swaption, le payoff de la swaption payeuse s'écrit donc à la date T_α :

$$N \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) [L(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K] \right)^+ . \quad (1.26)$$

Ce payoff à la date T_α se réécrit en fonction du taux swap défini à l'équation (1.19) sous la forme

$$N \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \right) (S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - K)^+ . \quad (1.27)$$

On définit symétriquement la swaption receveuse. Les swaptions sont structurellement très sensibles à la corrélation des taux Libor de différentes maturités.

1.5 Evaluation par arbitrage dans un modèle de taux

Les définitions à la section précédente des grandeurs “forward” sont construites de manière à ne pas créer dans le modèle d’opportunités d’arbitrage. Cependant, le cadre théorique de l’évaluation par arbitrage connu sur les modèles d’actifs n’est pas immédiatement transposable dans le cas des marchés de taux.

En effet, dans le cas d’un marché financier de type Black-Scholes sur un actif échangé S de dynamique

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t, \quad (1.28)$$

avec W mouvement brownien, l’évaluation par arbitrage repose sur la notion de couverture d’un produit financier. Cette couverture est réalisée par la constitution d’un portefeuille d’actifs contenant une certaine quantité d’actif risqué S et une certaine quantité d’actif non risqué S^0 croissant au taux continu constant $r > 0$: $S_t^0 = e^{rt}$ à la date t . Mais dans le cas d’un modèle financier marché de taux, définissant par exemple une dynamique de taux court de la forme

$$dr_t = \alpha(t, r_t)dt + \beta(t, r_t)dW_t, \quad (1.29)$$

le taux r n’est pas un produit échangé sur le marché que l’on peut mettre en portefeuille. On ne peut donc pas construire de couverture d’un produit donné de la même manière que dans un modèle d’action, et ce malgré la similitude des modèles mathématiques.

Les modèles de taux que nous allons étudier ne sont donc pas a priori des modèles complets. On postule par absence d’opportunité d’arbitrage l’existence d’une mesure martingale sous laquelle toute la modélisation stochastique est faite. L’unicité de cette mesure martingale n’étant pas acquise de façon endogène au modèle, on reporte classiquement sa détermination sur la calibration du modèle. On pourra se reporter à (Björk 1997) pour un exposé détaillé.

Relation fondamentale Une obligation zéro-coupon paie 1 à la date T . La relation fondamentale d’absence d’opportunité d’arbitrage pour l’évaluation d’une obligation zéro-coupon s’écrit donc :

$$e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T) = E_{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_u du} \times 1 | \mathcal{F}_t \right], \quad (1.30)$$

i.e.

$$P(t, T) = E_{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} | \mathcal{F}_t \right], \quad (1.31)$$

pour \mathbf{Q} mesure martingale.

Chapitre 2

Modèles de taux courts

2.1 Le modèle de Vasicek

2.1.1 Définition du modèle et distribution du taux court

Ce modèle a été proposé par Vasicek (1977). On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. On suppose que sous une probabilité risque-neutre \mathbf{Q} le taux court instantané r suit un processus d'Ornstein-Uhlenbeck à coefficients constants :

$$\begin{cases} dr_t &= \kappa[\theta - r_t]dt + \sigma dW_t \\ r(0) &= r_0 \quad \mathbf{Q} - p.s. \end{cases}, \quad (2.1)$$

avec r_0, κ, θ et σ constantes positives et W un \mathbb{Q} -mouvement brownien \mathcal{F}_t -adapté. Le terme en dt du processus d'Ornstein-Uhlenbeck s'interprète classiquement comme un retour à la moyenne long-terme θ avec une vitesse de retour à la moyenne κ . σ est la volatilité du taux court.

Proposition 2.1. *La solution de l'EDS (2.1) s'écrit :*

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u. \quad (2.2)$$

Démonstration. On applique le lemme d'Itô à $Y_t = r(t)e^{\kappa t}$. □

Corollaire 2.2. *$r(t)$ est distribué normalement conditionnellement à \mathcal{F}_s , $s < t$, de moyenne et variance :*

$$E_{\mathbf{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}), \quad (2.3)$$

$$\text{Var}_{\mathbf{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa(t-s)}). \quad (2.4)$$

Démonstration. $\int_s^t e^{-\kappa(t-u)} dW_u$ est conditionnellement à \mathcal{F}_s une martingale gaussienne de moyenne nulle et de variance $\int_s^t e^{-2\kappa(t-u)} du$. \square

Corollaire 2.3. $(r_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus gaussien.

Ainsi, le taux instantané $r(t)$ peut être négatif dans le modèle de Vasicek. C'est là un premier défaut important du modèle.

2.1.2 Prix des obligations zéro-coupon

Proposition 2.4. Dans le modèle de Vasicek, le prix à la date t du zéro-coupon de maturité T s'écrit :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{cases} A(t, T) = \exp \left[\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} \right) (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4\kappa} B(t, T)^2 \right], \\ B(t, T) = \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Démonstration. Plusieurs méthodes permettent d'aboutir à ce résultat. La méthode classique consiste à résoudre l'équation aux dérivées partielles obtenue par application du théorème de Feynman-Kac à

$$P(t, T) = E_{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.7)$$

Cette méthode sera utilisée par exemple dans l'exposé du modèle de Hull & White à la section 2.3. Une autre méthode, que l'on expose ici, consiste à calculer directement l'espérance en montrant que le paramètre de l'exponentielle est un processus gaussien.

Pour r_t processus gaussien à trajectoires continues, l'intégrale $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ est également gaussienne conditionnellement à \mathcal{F}_t (écrire la convergence des sommes de Riemann de cette intégrale). On peut calculer directement la moyenne $m(t, T)$ et la variance $v(t, T)$ conditionnellement à \mathcal{F}_t du processus $I(t, T)$ sous la mesure \mathbf{Q} :

$$m(t, T) = \theta(T - t) + (r_t - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}, \quad (2.8)$$

$$v(t, T) = \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \left[(T - t) - 2 \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa} \right]. \quad (2.9)$$

Le prix du zéro-coupon s'écrit donc :

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.10)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[e^{-I(t, T)} | \mathcal{F}_t \right] \quad (2.11)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[-m(t, T) + \frac{1}{2}v(t, T) | \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.12)$$

On conclut par calcul direct de cette quantité.

Notons que l'on peut également obtenir le résultat sur la distribution gaussienne et les moments de $I(t, T)$ en écrivant

$$I(t, T) = \int_t^T r(s) ds \quad (2.13)$$

$$= \int_t^T r(t) e^{-\kappa(u-t)} + \int_t^T \theta(1 - e^{-\kappa(u-t)}) \\ + \int_t^T \sigma \int_t^u e^{-\kappa(u-s)} dW_s du, \quad (2.14)$$

et en admettant qu'un théorème de Fubini stochastique¹ permet l'inversion de l'intégrale brownienne et de l'intégrale de Riemann dans le dernier terme. On obtient dans ces conditions

$$I(t, T) = (r_t - \theta) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} + \theta(T-t) + \int_t^T \sigma \frac{1 - e^{-\kappa(T-s)}}{\kappa} dW_s, \quad (2.15)$$

ce qui permet bien de conclure que $I(t, T)$ est conditionnellement gaussien de premiers moments $m(t, T)$ et $v(t, T)$. \square

Du prix d'un zéro-coupon on peut extraire directement le taux zéro-coupon.

Proposition 2.5. *Dans le modèle de Vasicek, le taux zéro-coupon de maturité T s'écrit à la date t :*

$$R(t, T) = R_{\infty} + (r_t - R_{\infty}) \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\kappa^3(T-t)} (1 - e^{-\kappa(T-t)})^2, \quad (2.16)$$

avec

$$R_{\infty} = \theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}. \quad (2.17)$$

1. du type (Protter 2004, Théorème 64).

Le taux zéro-coupon dans le modèle de Vasicek est donc somme de trois facteurs. Le premier, $R_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T)$ s'interprète comme un taux zéro-coupon long-terme. Le second facteur est fonction de l'écart entre le taux instantané r_t et le taux zéro-coupon long-terme R_∞ . Son importance décroît avec la maturité, d'autant plus vite que la dynamique de r comporte un paramètre de retour à la moyenne élevé.

2.1.3 Limites du modèle de Vasicek

Le modèle de Vasicek présente de nombreux éléments intéressants : distribution connues et facile à manipuler (gaussiennes), formules explicites pour les obligations et taux zéro-coupon, simulation aisée, etc. Cette simplicité ne va pas sans inconvénients.

Le premier inconvénient du modèle de Vasicek est dû à son caractère gaussien (équation (2.2)), qui ne garantit pas la positivité du taux court $r(t)$.

En outre, la courbe des taux zéro-coupon obtenue à l'équation (2.16) n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes de courbes observées sur les marchés. En particulier, les formes dites "inversées" ne sont pas rendues par un modèle de Vasicek.

Enfin, le modèle de Vasicek est un modèle dit *endogène*, puisque la courbe de taux zéro-coupon est entièrement définie par le modèle (par l'équation (2.16)). On ne peut donc pas passer les observations de marché en entrée du modèle.

Le modèle CIR présenté à la section suivante cherche à répondre au problème de la positivité du taux court.

2.2 Le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

2.2.1 Définition du modèle et distribution du taux court

Ce modèle (CIR) a été proposé par Cox, Ingersoll & Ross (1985). On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. On suppose que sous une probabilité risque-neutre \mathbf{Q} le taux court instantané r est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = \kappa[\theta - r_t]dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (2.18)$$

avec κ, θ, σ constantes positives vérifiant

$$\sigma^2 < 2\kappa\theta. \quad (2.19)$$

Le terme en dt processus CIR s'interprète comme dans le cas du modèle de Vasicek comme un retour à la moyenne. La condition (2.19) permet de s'assurer de la stricte positivité du processus $r(t)$ ².

Proposition 2.6. *Dans le modèle CIR, le taux court $r(t)$ suit une loi du χ^2 décentrée.*

Démonstration. On admet ce résultat dans le cas général. On peut cependant, en suivant Shreve (2004), montrer ce résultat dans le cas d'une construction particulière du processus CIR.

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit W un mouvement brownien d -dimensionnel \mathcal{F}_t -adapté sous la mesure \mathbf{Q} . Soient β, σ et r_0 deux constantes positives. Soient les X_j d processus solutions des équations différentielles stochastiques

$$dX_j(t) = -\frac{1}{2}\beta X_j(t) + \frac{1}{2}\sigma dW_j(t) \quad \forall j = 1, \dots, d, \quad (2.20)$$

avec les conditions $X_1(0) = X_2(0) = \dots = X_{d-1}(0) = 0, X_d(0) = \sqrt{r_0}$. On pose alors

$$r(t) = \sum_{j=1}^d X_j^2(t). \quad (2.21)$$

Par application du lemme d'Itô, on peut montrer que r ainsi défini est solution d'une EDS de la forme

$$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma dZ_t, \quad (2.22)$$

avec $\alpha = \frac{d\sigma^2}{4}$ et $Z_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{X_i(u)}{\sqrt{r_u}} dW_i(u)$. Z est une martingale continue

\mathcal{F}_t -adaptée de variation quadratique $\langle Z \rangle_t = t$, donc Z est un mouvement brownien sous \mathbf{Q} (caractérisation de Lévy³). On retrouve donc que r est solution d'un processus CIR (construit dans un cas particulier).

Finalement, les X_j étant d processus d'Ornstein-Uhlenbeck, pour $j = 0, \dots, d-1$, $X_j(t)$ est gaussienne de moyenne nulle et de variance $v(t) = \frac{\sigma^2}{4\beta}(1 - e^{-\beta t})$, et $X_d(t)$ est gaussienne de moyenne $e^{\frac{1}{2}\beta t} \sqrt{r_0}$ et de variance $v(t)$. Par la définition (2.21), $r(t)$ est la somme de d gaussiennes indépendantes, l'une d'entre elle étant non-centrée : $r(t)$ suit donc une loi du χ^2 non centrée à d degrés de liberté. \square

2. (Feller 1951) est la référence originale souvent citée pour cette condition, voir aussi (Lamberton & Lapeyre 1998).

3. Karatzas & Shreve (2000, Theorem 3.16).

On peut calculer les premiers moments de r :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-\kappa(t-s)} + \theta(1 - e^{-\kappa(t-s)}), \quad (2.23)$$

$$\text{Var}_{\mathbb{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s \frac{\sigma^2}{\kappa} (e^{-\kappa(t-s)} - e^{-2\kappa(t-s)}) + \theta \frac{\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa(t-s)})^2. \quad (2.24)$$

La perte du caractère gaussien du processus r empêche l'obtention des prix de zéro-coupon par un calcul direct similaire à celui présenté dans le cas du modèle de Vasicek. On obtient ces prix par résolution de l'équation aux dérivées partielles d'évaluation du modèle.

2.2.2 Prix des obligations zéros-coupon

Par application du théorème de Feynman-Kac⁴, il existe une fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ mesurable telle que

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} | \mathcal{F}_t \right] = f(t, r_t), \quad (2.25)$$

et qui soit solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \kappa(\theta - r) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 r \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = r f, \quad (2.26)$$

avec la condition terminale $f(T, r) = P(T, T) = 1$. Cette équation possède une solution explicite donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.7. *Dans le modèle CIR, le prix du zéro-coupon de maturité T s'écrit à la date t*

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.27)$$

avec

$$\begin{cases} A(t, T) = \left[\frac{2\gamma e^{\frac{\kappa+\gamma}{2}(T-t)}}{2\gamma + (\kappa + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1)} \right]^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}, \\ B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{2\gamma + (\kappa + \gamma)(e^{\gamma(T-t)} - 1)}, \\ \gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Démonstration. Le modèle CIR fait partie des modèles de la classe des *modèles affines de taux*. La section 2.4 donne quelques éléments généraux et références sur ces modèles. En cherchant une solution sous la forme

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.29)$$

4. Voir l'annexe A ou Oksendal (2003, Theorem 8.2.1).

on obtient par substitution dans l'équation (2.26) une équation différentielle ordinaire de Riccati et une dépendance simple de A en fonction de B . La résolution de l'équation de Riccati permet de conclure. Voir par exemple Boyle, Tian & Guan (2002) pour plus de détails. \square

2.2.3 Prix d'une option sur zéro-coupon

Cox et al. (1985, Section 4) indiquent que la connaissance des résultats précédents suffit à évaluer par calcul direct les espérances intervenant dans l'évaluation de produits dérivés sur les obligations zéro-coupon. Le résultat suivant est en particulier mentionné.

Proposition 2.8. *Dans le modèle CIR, le prix $C_{ZC}^{CIR}(t; K, T, S)$ à la date t d'une option d'achat, au prix K et à la date $T > t$, d'une obligation zéro-coupon de maturité $S > T$ s'écrit :*

$$\begin{aligned} & C_{ZC}^{CIR}(t; K, T, S) \\ &= P(t, S) \Phi_{\chi^2} \left(2\rho[\phi + \psi + B(T, S)]; \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\phi^2 \rho e^{\gamma(T-t)}}{\phi + \psi + B(T, S)} \right) \\ & - KP(t, T) \Phi_{\chi^2} \left(2\rho[\phi + \psi]; \frac{4\kappa\theta}{\sigma^2}, \frac{2\phi^2 \rho e^{\gamma(T-t)}}{\phi + \psi} \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

avec

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma^2}, \quad (2.31)$$

$$\phi = \frac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}, \quad (2.32)$$

$$\psi = \frac{\kappa + \gamma}{\sigma^2}, \quad (2.33)$$

$$\rho = \frac{1}{B(T, S)} \left[\ln \left(\frac{A(T, S)}{K} \right) \right], \quad (2.34)$$

et où Φ_{χ^2} est la fonction de répartition de la loi du χ^2 décentrée.

2.3 Le modèle de Hull et White (ou Vasicek étendu)

Ce modèle a été proposé par Hull & White (1990). On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. On suppose que sous une probabilité risque-neutre \mathbf{Q} le taux court instantané r est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dr_t = (b(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t, \quad (2.35)$$

avec a constante positive et $b : [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ fonctionnelle déterministe. Il s'agit donc d'un modèle de type Vasicek étendu au cas d'une moyenne long-terme fonction déterministe du temps.

L'intérêt de ce modèle est de proposer une calibration naturelle, alors que la calibration des modèles précédents nécessite une procédure numérique (minimisation de l'écart entre les prix théoriques et les prix de marchés, estimation par maximum de vraisemblance ou par une méthode des moments, etc.). Pour $T > 0$ fixé, notons $P^M(0, T)$ le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T observé sur le marché à la date 0, et $f^M(0, T)$ le taux forward instantané associé :

$$f^M(0, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P^M(0, T). \quad (2.36)$$

Proposition 2.9. *Le modèle de Hull et White reproduit exactement la courbe des taux zéro-coupon de marché si l'on pose*

$$b(t) = \frac{\partial f^M}{\partial T}(0, t) + af^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (2.37)$$

Démonstration. Il s'agit simplement de trouver une relation entre $b(t)$ et $f(0, t)$ dans le modèle, et de déclarer que le modèle est calibré sur les données de marché si $f(0, T) = f^M(0, T)$ pour toutes les maturités T . La mise en œuvre est calculatoire. En généralisant ce qui a été fait dans le modèle de Vasicek, on peut écrire le taux court sous forme intégrale. Ensuite, on calcule le prix des obligations zéro-coupon en résolvant l'équation aux dérivées partielles de pricing. Enfin, on obtient l'expression de $f(t, T)$ en différentiant le résultat obtenu pour $P(t, T)$.

Mettons ce raisonnement en pratique. Par application du lemme d'Itô au processus $r_t e^{at}$, on montre que le taux court s'écrit

$$r(t) = r(s)e^{-\kappa(t-s)} + \int_s^t b(u)e^{-a(t-u)} du + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u. \quad (2.38)$$

Par application du théorème de Feynman-Kac⁵, le prix $P(t, T)$ du zéro-coupon de maturité T à la date t s'écrit $P(t, T) = f(t, r_t)$, où $f : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ est une application mesurable solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (b(t) - ar) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = rf, \quad (2.39)$$

avec la condition terminale $f(T, r) = P(T, T) = 1$. En cherchant une solution de la forme

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.40)$$

5. Voir l'annexe A ou Oksendal (2003, Theorem 8.2.1).

on obtient le système d'équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} - b(t)AB + \frac{1}{2}\sigma^2 AB^2 = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t} - aB + 1 = 0 \end{cases}, \quad (2.41)$$

avec les conditions $A(T, T) = 1$ et $B(T, T) = 0$. La seconde équation donne aisément

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}), \quad (2.42)$$

et la première s'intègre alors en

$$\ln A(t, T) = - \int_t^T b(u)B(u, T)du - \frac{\sigma^2}{2a^2}(B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t, T). \quad (2.43)$$

On a donc l'expression des prix de zéro-coupon dans le modèle de Hull & White, et on en déduit une expression des taux forward à la date 0 :

$$f(0, T) = - \frac{\partial}{\partial T} \ln P(0, T) \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^T b(u) \frac{\partial B}{\partial T}(u, T)du + \frac{\partial B}{\partial T}(0, T)r_0 \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2a}B(0, T) \left(1 - \frac{\partial B}{\partial T}(0, T)\right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

En dérivant encore une fois par rapport à T , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T}(0, T) &= b(T) + \int_0^T b(u) \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}(u, T)du + \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}(0, T)r_0 \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{2a} \left(\frac{\partial B}{\partial T}(0, T) - \left(\frac{\partial B}{\partial T}(0, T) \right)^2 B(0, T) - \frac{\partial^2 B}{\partial T^2}(0, T) \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

En combinant ces deux résultats, puis en remplaçant B par l'expression calculée à l'équation (2.42), et en simplifiant, on obtient :

$$af(0, T) + \frac{\partial f}{\partial T}(0, T) = b(T) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2aT}). \quad (2.47)$$

Finalement, on considère que le modèle est calibré sur les données de marché si $f(0, T) = f^M(0, T)$ pour toutes les maturités T . L'équation (2.47) permet donc de retrouver la condition de calibration (2.37). \square

Dans toute la suite, on supposera l'équation (2.37) vérifiée. On a au cours de la démonstration précédente obtenu indirectement plusieurs résultats intéressants. Nous les rappelons maintenant.

Proposition 2.10. *Dans le modèle de Hull et White, le taux court s'écrit :*

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u, \quad (2.48)$$

avec

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2. \quad (2.49)$$

Démonstration. Il suffit de remplacer b par son expression (2.37) dans l'expression intégrale du taux court r obtenue à l'équation (2.38), et de montrer par calcul direct que dans ce cas

$$\int_s^t e^{au} b(u) du = e^{at} \alpha(t) - e^{as} \alpha(s), \quad (2.50)$$

où α est défini comme à l'équation (2.49). \square

Remarque 2.1. L'écriture de r avec les équations (2.48)-(2.49) n'est pas anodine. En particulier, elle montre que l'on peut simuler r dans un modèle de Hull & White calibré sans avoir à évaluer $\frac{\partial f^M}{\partial T}(0, T)$, comme le suggère a priori la calibration (2.37). C'est un gain numérique non négligeable.

On conclut de l'expression (2.48) que dans le modèle de Hull & White, le taux court $r(t)$ est gaussien, de moyenne et variance :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s) e^{-a(t-s)}, \quad (2.51)$$

$$\text{Var}_{\mathbf{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}). \quad (2.52)$$

La probabilité d'avoir des taux courts négatifs est donc non nulle, comme dans le cas du modèle de Vasicek standard. Dans la pratique, cette éventualité se rencontre cependant plus rarement dans le cas Hull & White quand dans le cas de Vasicek.

Proposition 2.11. *Dans le modèle de Hull et White, le prix $P(t, T)$ du zéro-coupon de maturité T à la date t s'écrit*

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.53)$$

avec

$$\begin{cases} A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp \left[B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B(t, T)^2 \right], \\ B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}). \end{cases} \quad (2.54)$$

Démonstration. $B(t, T)$ a déjà été calculé sous cette forme à l'équation (2.42). Pour $A(t, T)$, on repart de l'équation (2.43) et on remplace b par l'expression (2.37). Par le calcul direct de $\int_s^t b(u)du$ et en observant en particulier que $\ln \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} = - \int_t^T f^M(0, u)du$, on obtient le résultat voulu. \square

2.3.1 Prix d'une option sur zéro-coupon

La caractéristique gaussienne du taux court r permet de calculer le prix de produits dérivés simples sur l'obligation zéro-coupon. Dans le cas du call européen, le prix est donnée par la proposition suivante.

Proposition 2.12. *Dans le modèle de Hull & White, le prix $C_{ZC}^{HW}(t; K, T, S)$ à la date t d'une option d'achat, au prix K et à la date $T > t$, d'une obligation zéro-coupon de maturité $S > T$ s'écrit :*

$$C_{ZC}^{HW}(t; K, T, S) = P(t, S)\mathcal{N}(d_1) - KP(t, T)\mathcal{N}(d_2), \quad (2.55)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(t, S)}{KP(t, T)}\right) + \frac{1}{2}\Sigma_{t, T}^2(T-t)}{\Sigma_{t, T}\sqrt{T-t}} \quad (2.56)$$

$$d_2 = d_1 - \Sigma_{t, T}\sqrt{T-t} \quad (2.57)$$

$$\Sigma_{t, T} = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\sigma\sqrt{\frac{1 - e^{-2a(T-t)}}{2a}}B(T, S), \quad (2.58)$$

et où \mathcal{N} est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Démonstration. Le prix $C_{ZC}^{HW}(t; K, T, S)$ s'écrit par évaluation par arbitrage sous la forme

$$C_{ZC}^{HW}(t; K, T, S) = E_{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_u du} (P(T, S) - K)^+ | \mathcal{F}_t \right], \quad (2.59)$$

avec \mathbf{Q} probabilité risque-neutre. Par changement de numéraire⁶, on définit la probabilité \mathbf{Q}^T dite “ T -forward”, associée au numéraire $P(\cdot, T)$, de dérivée de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbf{Q}^T}{d\mathbf{Q}} = \frac{e^{-\int_t^T r_u du}}{P(t, T)}. \quad (2.60)$$

6. Voir l'annexe B.

Il vient alors :

$$C_{ZC}^{HW}(t; K, T, S) = E_{\mathbf{Q}^T} [(P(t, T)A(T, S)e^{-B(T, S)r_T} - KP(t, T))^+ | \mathcal{F}_t], \quad (2.61)$$

Or, la distribution de r_T sous \mathbf{Q}^T reste gaussienne conditionnellement à \mathcal{F}_t , de variance $\frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(T-t)})$. Le processus $P(t, T)A(T, S)e^{-B(T, S)r_T}$ est donc bien un processus log-normal conditionnellement à \mathcal{F}_t , de log-variance $\Sigma_{t, T}(T - t)$ définie à l'équation (2.58). L'espérance de l'équation (2.61) se calcule donc par une formule "à la Black-Scholes", qui, tous calculs faits, donne le résultat cherché. \square

2.4 Une remarque sur les modèles affines

Les modèles présentés jusqu'à présent appartiennent à la classe des modèles dits "à structure affine". Dans ces modèles, le prix des obligations zéro-coupon s'écrit sous la forme

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}, \quad (2.62)$$

autrement dit le taux zéro-coupon $R(t, T)$ est une fonction *affine* du taux court :

$$r(T, t) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t} = -\frac{1}{T - t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T - t} B(t, T)r(t). \quad (2.63)$$

Dans ce qui précède, on a souvent cherché les prix des obligations sous la forme de l'équation (2.62). La proposition suivante justifie cette démarche.

Proposition 2.13. *Si un modèle de taux court s'écrit sous la forme*

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \quad (2.64)$$

avec μ et σ^2 fonctions affines de r , alors ce modèle est à structure affine.

Démonstration. Voir Björk (1997, Proposition 3.5 p.83) \square

Ce résultat sera utilisé pour faire le lien entre les modèles de taux court et le cadre de modélisation HJM présenté au chapitre 4.

Chapitre 3

Les modèles multifactoriels

3.1 Quelques observations empiriques

Les modèles monofactoriels apparaissent très vite limités lorsque l'on s'intéresse à des produits de taux faisant intervenir différentes maturités. En effet, dans les modèles monofactoriels précédents, la corrélation de deux taux zéro-coupon de maturité T_1 et T_2 distinctes est égale à 1. Ceci est bien évidemment en contradiction flagrante avec des données empiriques. La figure 3.1 reproduit une matrice de corrélation par terme de variations quotidiennes de taux zéro-coupon. Il apparaît très clairement que des taux de maturités proches, comme le taux de maturité 3 ans et celui de maturité 4 ans, sont très corrélés, tandis que des taux de maturité éloignées (par exemple le taux 1 mois et le taux 10 ans) le sont très peu.

Ce type d'observation est courant et général sur les marchés de taux. La figure 3.2 montre les résultats d'analyses en composantes principales réalisées en 1997 sur des matrices de corrélation par terme de taux observés sur le mark

	1M	3M	6M	1A	2A	3A	4A	5A	7A	10A
1M	1									
3M	0.999	1								
6M	0.908	0.914	1							
1A	0.546	0.539	0.672	1						
2A	0.235	0.224	0.31	0.88	1					
3A	0.246	0.239	0.384	0.808	0.929	1				
4A	0.209	0.202	0.337	0.742	0.881	0.981	1			
5A	0.163	0.154	0.255	0.7	0.859	0.936	0.981	1		
7A	0.107	0.097	0.182	0.617	0.792	0.867	0.927	0.97	1	
10A	0.073	0.063	0.134	0.549	0.735	0.811	0.871	0.917	0.966	1

FIGURE 3.1 – Matrice de corrélation de taux par terme sur le marché français, donnée 1998. Tiré de Martellini & Priaulet (2000).

No. of factors	By correlation matrix				
	1	2	3	4	5
DEM	67.7	83.9	93.7	97.1	98.5
JPY	75.8	91.2	94.3	96.6	98.1
USD	75.8	85.1	93.0	97.0	98.9

FIGURE 3.2 – Analyse en composantes principales de trois matrices de corrélations par terme de taux. Tiré de Jamshidian & Zhu (1996).

allemand, le yen japonais et le dollar américain. Sur les trois marchés, deux facteurs permettent d'expliquer plus de 80% des variations observées, trois facteurs plus de 90%.

Ces observations plaident pour l'introduction de modèles multifactoriels.

3.2 Les modèles taux longs - taux courts invalidés

Afin de prendre en compte cette différence de corrélation entre des taux court terme et des taux long terme, les premiers modèles multifactoriels ont proposé d'ajouter à l'équation différentielle stochastique du taux court $r(t)$ une dynamique régissant un taux long-terme $l(t)$. Citons par exemple les travaux de Brennan & Schwartz (1982), qui proposent un modèle bi-factoriel de la forme

$$dr_t = (a_1 + b_1(l_t - r_t))dt + \sigma_1 r_t dW_1(t), \quad (3.1)$$

$$dl_t = l_t(a_2 + b_2 r_t + c_2 l_t)dt + \sigma_2 l_t dW_2(t), \quad (3.2)$$

ou ceux de Schaefer & Schwartz (1984), qui modélisent un taux court r et un spread taux long - taux court $s = r - l$ de la forme

$$dr_t = m(\mu - s_t)dt + \sigma_1 dW_1(t), \quad (3.3)$$

$$dl_t = \beta(s, l, t)dt + \sigma_2 \sqrt{l_t} dW_2(t). \quad (3.4)$$

Ce type de modèles a été abandonné pour plusieurs raisons. D'abord, contrairement aux modèles mono-factoriels, ils n'offrent pas d'évaluation simple et pratique des obligations zéro-coupon, sauf au prix d'approximations analytiques. Mais surtout, ils sont en contradiction avec un résultat (postérieur) de Dybvig, Ingersoll & Ross (1996), montrant qu'en l'absence d'opportunité

d'arbitrage, le taux long terme ne peut pas diminuer. On pourra consulter à ce sujet Martellini & Priaulet (2000, p.212)).

Ainsi, les modèles factoriels utilisés aujourd'hui n'introduisent pas de facteur long-terme explicite, mais postulent plutôt des dynamiques de taux court à plusieurs facteurs stochastiques.

3.3 Un modèle gaussien à deux facteurs

Nous exposons ici le modèle tel qu'il est présenté par Brigo & Mercurio (2005, section 4.2). On suppose ici que sous la mesure risque-neutre \mathbf{Q} le taux court s'écrit

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), \quad r(0) = r_0, \quad (3.5)$$

où les deux facteurs x et y sont solutions des équations différentielles stochastiques :

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0, \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec W_1 et W_2 deux mouvements browniens de variation croisée $d\langle W_1, W_2 \rangle_t = \rho$ et ϕ une fonction *déterministe* vérifiant $\phi(0) = r_0$.

ϕ permettra de calibrer ce modèle à la courbe $P^M(0, T), T > 0$ des prix d'obligations zéro-coupon observés sur le marché. Son rôle est similaire à celui joué par la fonctionnelle $b(t)$ dans le modèle de Vasicek étendu. Nous ne donnons dans cette section aucune démonstration : leur esprit est similaire à celles présentées dans l'exposé des modèles de Vasicek et Hull & White, mais leur écriture avec deux facteurs est considérablement alourdie. Se reporter à Brigo & Mercurio (2005) pour plus de détails.

x et y sont des processus de Ornstein-Uhlenbeck, donc on écrit aisément le taux court dans ce modèle sous la forme :

$$\begin{aligned} r(t) &= x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} \\ &+ \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_2(u) + \phi(t). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le taux court $r(t)$ est donc gaussien, de moyenne et variance :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \phi(t), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathbf{Q}}[r_t | \mathcal{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{\eta^2}{2b}(1 - e^{-2b(t-s)}) \\ &+ 2\rho \frac{\eta\sigma}{a+b}(1 - e^{-2(a+b)(t-s)}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

On peut donc calculer le prix de l'obligation zéro-coupon par la méthode déjà utilisée dans le cas du modèle de Vasicek.

Proposition 3.1. *Dans le modèle gaussien à deux facteurs, le prix $P(t, T)$ à la date t de l'obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit*

$$P(t, T) = \exp \left\{ - \int_0^T \phi(u) du - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} x(t) - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right\}, \quad (3.10)$$

où

$$\begin{aligned} V(t, T) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ &+ \frac{\eta^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ &+ 2\rho \frac{\sigma\eta}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) permet alors d'obtenir la fonction ϕ permettant de calibrer le modèle gaussien à deux facteurs sur la courbe $P^M(0, T), T > 0$ de prix d'obligations zéro-coupon observés sur le marché. En égalisant les prix observés et théoriques, on obtient le résultat suivant.

Proposition 3.2. *Le modèle gaussien à deux facteurs est calibré sur la courbe $P^M(0, T), T > 0$ de prix d'obligations zéro-coupon observés sur le marché si et seulement si ϕ est définie par :*

$$\phi(T) = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{bT})^2 + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{aT})(1 - e^{bT}). \quad (3.12)$$

Démonstration. Brigo & Mercurio (2005, Corollaire 4.2.1). \square

En bref, le modèle gaussien à deux facteurs n'est qu'une généralisation en 2 dimensions d'un modèle de Vasicek étendu. Ce modèle appartient lui aussi à la classe des modèles affines, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.3. *Dans le modèle gaussien à deux facteurs calibré par l'équation (3.12), le prix $P(t, T)$ à la date t de l'obligation zéro-coupon de maturité T s'écrit*

$$P(t, T) = A(t, T) \exp\{-B_a(t, T)x(t) - B_b(t, T)y(t)\} \quad (3.13)$$

where

$$\begin{cases} A(t, T) &= \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp\left\{\frac{1}{2}(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t))\right\}, \\ B_i(t, T) &= \frac{1 - e^{-i(T-t)}}{i}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Ainsi, les propriétés permettant d'obtenir des formules explicites sur les produits courants (caractère affine du modèle, caractère gaussien du taux court $r(t), \dots$) sont conservées. On peut en particulier donner une formule explicite pour le prix du call européen sur obligation zéro-coupon, qui généralise naturellement la proposition 2.12.

L'intérêt de cette généralisation réside dans la possibilité d'un premier réglage de la corrélation entre les maturités grâce au paramètre ρ . Nous invitons le lecteur à consulter Brigo & Mercurio (2005, Chapitre 4) où ces développements sont détaillés.

Chapitre 4

Le cadre Heath-Jarrow-Morton(HJM)

Heath, Jarrow & Morton (1992) proposent un cadre de travail plus large que les modèles précédemment étudiés, dans lequel la courbe de taux forward observée aujourd'hui est fournie en entrée du modèle et n'est plus un objectif de calibration.

4.1 Définition du cadre

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq \bar{T}}$ avec \bar{T} réel positif fixé. Soit W un \mathbf{P} -mouvement brownien \mathcal{F}_t -adapté de dimension $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour une maturité T donnée, le taux forward instantané $f(t, T)$ est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} df(t, T) &= \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T) \cdot dW_t, \\ f(0, T) &= f^M(0, T). \end{cases} \quad (4.1)$$

où α et σ sont supposés \mathcal{F}_t -adaptés, et $f^M(0, T)$ est le taux forward de maturité T observé sur le marché. On omettra parfois dans la suite la notation vectorielle.

Dans ces conditions, la relation (1.12) définissant le taux forward f par $P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right)$ permet d'obtenir la dynamique des obligations zéro-coupon.

Proposition 4.1. *Dans un cadre HJM, le prix $P(t, T)$ à la date t de l'obli-*

gation zéro-coupon de maturité T est solution de l'EDS :

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[r_t - \alpha^*(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^*(t, T)^2 \right] dt - P(t, T) \sigma^*(t, T) \cdot dW_t, \quad (4.2)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha^*(t, T) &= \int_t^T \alpha(t, u) du, \\ \sigma^*(t, T) &= \int_t^T \sigma(t, u) du. \end{cases} \quad (4.3)$$

Démonstration. Posons $I(t, T) = - \int_t^T f(t, u) du$. Par différentiation et en admettant que l'inversion des intégrations est possible¹, on obtient sous forme différentielle

$$dI(t, T) = r_t dt - \int_t^T \alpha(t, u) du dt - \int_t^T \sigma(t, u) du dW_t, \quad (4.4)$$

soit, avec les notations (4.3),

$$dI(t, T) = r_t dt - \alpha^*(t, T) du dt - \sigma^*(t, T) du dW_t. \quad (4.5)$$

Une application du lemme d'Itô à $P(t, T) = e^{I(t, T)}$ donne

$$dP(t, T) = P(t, T) dI(t, T) + \frac{1}{2} P(t, T) d\langle I(\cdot, T) \rangle_t \quad (4.6)$$

et permet de conclure. \square

4.2 Condition d'absence d'opportunités d'arbitrage

Maintenant, connaissant la dynamique (4.2) des prix des obligations zéro-coupon, on peut s'assurer que le cadre HJM construit respecte l'absence d'opportunités d'arbitrage.

Proposition 4.2. *Dans le cadre HJM, il y a absence d'opportunités d'arbitrage si il existe un processus $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ adapté vérifiant*

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) [\sigma^*(t, T) + \theta(t)] \quad (4.7)$$

1. (Protter 2004, Théorème 64) est une forme générale d'un théorème de Fubini stochastique. Heath et al. (1992, Annexe) énonce sans démonstration la forme utilisée pour ce calcul.

Démonstration. \mathbf{Q} est une mesure risque-neutre si le prix actualisé des obligations zéro-coupon est martingale. Par le lemme d'Itô, la dynamique de ces prix actualisés s'écrit :

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T)\right) = e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T) \times \left[\left(-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 \right) dt - \sigma^* dW_t \right]. \quad (4.8)$$

Par ailleurs, pour un processus θ adapté, le théorème de Girsanov donne l'existence d'une mesure de probabilité \mathbf{Q} sous laquelle le processus $W_t^{\mathbf{Q}} = W_t + \int_0^t \theta(u) du$ est un mouvement brownien. Ainsi, si on a un processus θ tel que

$$-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 dt - \sigma^* dW_t = -\sigma^*(t, T) [\theta(t) dt + dW_t], \quad (4.9)$$

i.e.

$$-\alpha^*(t, T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t, T))^2 dt = -\sigma^*(t, T)\theta(t) dt, \quad (4.10)$$

alors on aura une mesure \mathbf{Q} sous laquelle la dynamique des prix actualisés des obligations zéro-coupon s'écrit

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T)\right) = -e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T) \sigma^*(t, T) dW_t^{\mathbf{Q}}. \quad (4.11)$$

L'existence de ce processus θ permet donc de construire une mesure martingale. On conclut en remarquant que la condition (4.7) s'obtient de l'équation (4.10) par dérivation par rapport à T . \square

Dans ces conditions, on peut réécrire les dynamiques du modèles sous une mesure risque-neutre. Autrement dit, soit \mathbf{Q} une mesure risque-neutre et $W^{\mathbf{Q}}$ un mouvement brownien d -dimensionnel sous la mesure \mathbf{Q} . Les taux forward $f(t, T)$ sont alors solutions des EDS :

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \sigma^*(t, T) dt + \sigma(t, T) \cdot dW_t^{\mathbf{Q}}, \quad (4.12)$$

et les prix des obligations zéro-coupon $P(t, T)$ sont solutions des EDS :

$$dP(t, T) = r_t P(t, T) dt - P(t, T) \sigma^*(t, T) \cdot dW_t^{\mathbf{Q}}. \quad (4.13)$$

La solution de cette dernière équation s'écrit classiquement

$$P(t, T) = P(0, T) \exp \left[\int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2} \int_0^T (\sigma^*(u, T))^2 \right) du - \int_0^t \sigma^*(u, T) dW_u^{\mathbf{Q}} \right]. \quad (4.14)$$

On supposera dans toute la suite que l'on se place sous une mesure martingale \mathbf{Q} , même si, par souci de simplicité, les notations ne le reflètent pas explicitement.

4.3 Caractère markovien d'un cadre HJM

Dans un cadre HJM sans arbitrage, le taux court $r(t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T)$ s'écrit :

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^t \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(u, t) \cdot dW_u. \quad (4.15)$$

Le caractère markovien de $r(t)$ dépend donc de la forme de $\sigma(t, T)$. Dans le cas général, $r(t)$ n'est donc pas un processus de Markov, puisque les intégrales dépendent de t dans l'intégrande et dans les bornes.

Le caractère markovien est pourtant essentiel à l'exploitation pratique d'un modèle de taux. Il est donc nécessaire, au moment de spécifier la volatilité σ des taux forward dans un modèle de type HJM, de choisir une forme permettant d'obtenir un taux r markovien. Plusieurs solutions sont possibles. La plus simple est probablement de spécifier une volatilité à variable séparable. Si on a une volatilité de la forme

$$\sigma(t, T) = \xi(t)\phi(T) \quad (4.16)$$

alors le taux r est markovien. Le résultat suivant spécifie une condition nécessaire et suffisante sur la forme de la volatilité dans le cas monodimensionnel $d = 1$ pour avoir un taux court markovien.

Proposition 4.3. *Dans un cadre HJM de dimension 1 tel que $\sigma(t, T)$ est dérivable par rapport à T , le prix de tout produit dérivé est complètement spécifié à la date t par un processus de Markov bidimensionnel si et seulement si*

$$\sigma(t, T) = \eta(t)e^{-\int_t^T \kappa(u) du} \quad (4.17)$$

où η est un processus adapté et κ une fonction déterministe.

Démonstration. Ritchken & Sankarasubramanian (1995, Proposition 1 et Annexe). \square

La forme (4.17) est souvent appelée "volatilité de Ritchken & Sankarasubramanian".

4.4 Lien avec les modèles affines

Soit un modèle de taux court défini par l'équation différentielle stochastique

$$dr_t = b(t, r_t)dt + \gamma(t, r_t)dW_t. \quad (4.18)$$

Supposons ce modèle à structure affine. Suivant les remarques de la section 2.4 il existe deux fonctions A et B telle que

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r_t} \quad (4.19)$$

En appliquant le lemme d'Itô à $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T)$, il vient

$$df(t, T) = \dots dt + \frac{\partial}{\partial T} B(t, T) \gamma(t, r_t) dW_t \quad (4.20)$$

Ceci définit un modèle de type HJM spécifié par la volatilité des taux forward

$$\sigma(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} B(t, T) \gamma(t, r_t). \quad (4.21)$$

De plus, par identification avec la dynamique des taux forward sous une mesure risque-neutre donnée par l'équation (4.12), on peut facilement obtenir une condition sur A , B et γ pour que le modèle HJM ainsi spécifié soit sans opportunité d'arbitrage.

On peut vérifier de la sorte que les modèles de taux courts précédemment présentés (Vasicek, CIR, Hull & White) sont des modèles de type HJM à un facteur sans arbitrage.

4.5 Spécifications usuelles de volatilité

Le cadre HJM recouvre donc une infinité de modèles, chacun d'entre eux étant associé à une forme spécifique de la volatilité des taux forward $\sigma(t, T)$. La section 4.3 précise des formes générales permettant de préserver le caractère markovien du taux court. Une fois la forme de $\sigma(t, T)$ choisie, les dynamiques risque-neutre des taux forward et des prix d'obligations zéro-coupon s'écrivent immédiatement sous la forme des expressions (4.12) et (4.13). On présente ici les deux choix les plus simple de volatilité des taux forward.

4.5.1 Volatilité de type Ho & Lee

On choisit ici une volatilité constante :

$$\sigma(t, T) = \sigma \quad (\text{constant}) \quad (4.22)$$

Dans ce cas, on obtient pour les taux forward, les prix d'obligations zéro-coupon et le taux court :

$$df(t) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma dW_t^{\mathbf{Q}}, \quad (4.23)$$

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[r_t dt - \sigma(T-t)dW_t^{\mathbf{Q}} \right], \quad (4.24)$$

$$dr(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial T}(0, t) + \sigma^2 t \right] dt + \sigma dW_t^{\mathbf{Q}}. \quad (4.25)$$

Ce type de volatilité est baptisé par analogie avec les travaux de Ho & Lee (1986) qui proposent un modèle de taux prenant en entrée la courbe des taux observée sur le marché et dans lequel le taux court est semblable à l'équation (4.25). Cette spécification souffre d'un défaut majeur : le taux court ne dispose pas de mécanisme de retour à la moyenne.

4.5.2 Volatilité de type Vasicek / Hull & White

Une autre spécification courante de la volatilité des taux forward s'écrit :

$$\sigma(t, T) = \gamma(t)e^{-\lambda(T-t)} \quad (4.26)$$

Dans ce cas, on obtient pour les taux forward, les prix d'obligations zéro-coupon et le taux court :

$$df(t) = \gamma^2(t)e^{-\lambda(T-t)} \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} dt + \gamma(t)e^{-\lambda(T-t)} dW_t^{\mathbf{Q}}, \quad (4.27)$$

$$dP(t, T) = P(t, T) \left[r_t dt - \gamma(t) \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} dW_t^{\mathbf{Q}} \right], \quad (4.28)$$

$$dr(t) = \left[\frac{\partial f}{\partial T}(0, t) + \int_0^t \gamma^2(u)e^{-2\lambda(T-u)} du + \lambda(f(0, t) - r(t)) \right] dt + \gamma(t)dW_t^{\mathbf{Q}}. \quad (4.29)$$

On voit ici apparaître un modèle de Hull & White général, avec une volatilité du taux court fonction déterministe du temps. Dans le cas $\gamma(t) = \gamma$ constante, on retrouve le modèle de Hull & White à un facteur.

4.6 Evaluation d'un caplet

Proposition 4.4. *Dans un modèle HJM sans arbitrage, le prix $C(t, T, K, \theta)$ à la date t d'un caplet de maturité T et de strike K , payé $T + \theta$ s'écrit :*

$$C(t, T, K, \theta) = P(t, T + \theta) [(1 + \theta L(t, T, T + \theta))\mathcal{N}(d_1) - (1 + \theta K)\mathcal{N}(d_0)] \quad (4.30)$$

avec

$$\begin{cases} d_0 &= \frac{1}{\Sigma(t, T)} \ln \frac{1 + \theta L(t, T, T + \theta)}{1 + \theta K} - \frac{1}{2} \Sigma^2(t, T) \\ d_1 &= d_0 + \Sigma(t, T) \\ \Sigma(t, T) &= \int_t^T (\sigma^*(u, T + \theta) - \sigma^*(u, T))^2 du \end{cases} \quad (4.31)$$

Démonstration. Par changement de numéraire², on définit la probabilité $\mathbf{Q}^{T+\theta}$ dite “ $(T + \theta)$ -forward”, associée au numéraire $P(\cdot, T + \theta)$, de dérivée de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbf{Q}^{T+\theta}}{d\mathbf{Q}} = \frac{e^{-\int_t^{T+\theta} r_u du}}{P(t, T + \theta)}. \quad (4.32)$$

Il vient alors :

$$C(t, T, K, \theta) = P(t, T + \theta) E_{\mathbf{Q}^{T+\theta}} [(L(T, T + \theta) - K)^+ | \mathcal{F}_t], \quad (4.33)$$

ou encore

$$C(t, T, K, \theta) = P(t, T + \theta) E_{\mathbf{Q}^{T+\theta}} \left[\left(\frac{P(T, T)}{P(T, T + \theta)} - (1 + \theta K) \right)^+ | \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.34)$$

Or, par un calcul classique,

$$\frac{dP(t, T)}{dP(t, T + \theta)} = (\sigma^*(t, T) - \sigma^*(t, T + \theta)) dW_t^{\mathbf{Q}^{T+\theta}}, \quad (4.35)$$

d'où le résultat. \square

2. Voir l'annexe B.

Chapitre 5

Les modèles de marché Libor

5.1 La formule de Black

Les professionnels des marchés de taux ont pris l'habitude (simplicité, similarité avec les marchés action, ...) d'évaluer les options vanille avec une formule "à la Black & Scholes". Plus précisément, on appelle formule de Black pour le prix du caplet, de strike K et de maturité T , sur le Libor $L(., \theta)$ de maturité θ l'évaluation suivante :

$$C(t, T, K, \theta) = P(t, T + \theta) [L(t, T, T + \theta)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)] \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{cases} d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln \frac{L(t, T, T + \theta)}{K} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Autrement dit, les professionnels de marché de taux font l'hypothèse implicite que les taux Libor forward sont log-normaux sous la mesure forward associée à leur échéance. La formule de Black est cohérente avec un "modèle" de Black de la forme

$$\frac{dL(t, T, T + \theta)}{L(t, T, T + \theta)} = \sigma dW_t^{\mathbf{Q}^{T+\theta}}. \quad (5.3)$$

Cet hypothèse n'est pas vérifiée dans les modèles étudiés jusqu'à présent. Par exemple, dans le modèle de Hull & White, on a la dynamique (directement tirée de la relation (4.35) du chapitre précédent) :

$$\frac{dL(t, T, T + \theta)}{\frac{1}{\theta} + L(t, T, T + \theta)} = [\sigma^*(t, T) - \sigma^*(t, T + \theta)] dW_t^{\mathbf{Q}^{T+\theta}}. \quad (5.4)$$

i.e. le taux Libor forward est "log-normal décalé" sous sa mesure forward.

Le modèle de marché Libor que nous allons maintenant présenter présente, entre autres innovations, la particularité d'être compatible avec la formule de Black.

5.2 Modèles de marché Libor

La modélisation que nous présentons ici a été en particulier proposée par Brace, Gatarek & Musiela (1997), d'où le nom de "modèles BGM" parfois donné à ce type de modèles de taux d'intérêts.

5.2.1 Définitions

Soit $0 < T_0 < T_1 < \dots < T_M$ un échéancier discret de M maturités. Le modèle BGM définit la dynamique du M -uplet de taux Libor forward $(L(t, T_0, T_1), \dots, L(t, T_{M-1}, T_M))$, de maturité $\theta_i = T_i - T_{i-1}$. Dans la suite du texte, on utilisera la notation $L_i(t) = L(t, T_{i-1}, T_i)$ pour tout $i = 1, \dots, M$ afin d'alléger les écritures.

On suppose que chaque Libor forward L_i s'écrit sous sa probabilité forward associée \mathbf{Q}^{T_i} :

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \gamma_i(t) dW^{i, \mathbf{Q}^{T_i}}(t), \quad (5.5)$$

avec $\gamma_i(t)$ une fonction déterministe du temps.

Remarque 5.1. Contrairement au cadre HJM, un modèle BGM ne simule pas l'intégralité de la courbe des taux.

Remarque 5.2. $L_i(t)$ doit par définition être martingale sous la mesure forward \mathbf{Q}^{T_i} associée à l'obligation zéro-coupon $P(t, T_i)$, puisque c'est, aux constantes près, le prix de l'obligation zéro-coupon $P(t, T_{i-1})$ actualisé par le prix de l'obligation zéro-coupon $P(t, T_i)$.

Remarque 5.3. $L_i(t)$ défini comme à l'équation (5.5) est log-normal sous la mesure forward \mathbf{Q}^{T_i} , d'où la compatibilité avec la formule de Black.

Remarque 5.4. L'équation (5.5) s'écrit sous forme vectorielle

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \vec{\gamma}_i(t) \cdot dW^{\mathbf{Q}^{T_i}}(t), \quad (5.6)$$

avec $\vec{\gamma}_i(t) = (0, \dots, 0, \gamma_i(t), 0, \dots, 0)$ et $W^{\mathbf{Q}^{T_i}}$ vecteur de M mouvements browniens corrélés de matrice de corrélation $R = (\rho_{ij})_{i,j=1\dots M}$.

5.2.2 Volatilité Libor, volatilité zéro-coupon

Une condition d'absence d'opportunités d'arbitrage permet de fixer les volatilités des prix des obligations zéro-coupon en fonction des volatilités des Libor forward spécifiées par le modèle.

Proposition 5.1. *Dans un modèle BGM, l'absence d'opportunités d'arbitrage entraîne pour les volatilités γ_i des taux Libor forward et les volatilités Γ_i des prix des obligations zéro-coupon $P(t, T_i)$ la relation suivante :*

$$\gamma_i(t) = \frac{1 + \theta_i L_i(t)}{\theta_i L_i(t)} [\Gamma_i(t) - \Gamma_{i-1}(t)]. \quad (5.7)$$

Démonstration. Par définition du modèle,

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \vec{\gamma}_i(t) \cdot dW^{\mathbf{Q}^{T_i}}(t), \quad (5.8)$$

On développe ici un raisonnement similaire à celui présenté à la section 4.2 pour le modèle HJM. S'il y a absence d'opportunités d'arbitrage, alors on veut pouvoir écrire que, sous la mesure risque-neutre \mathbf{Q} associée au numéraire localement sans risque $e^{-\int_0^t r_u du}$, le prix $P(t, T_i)$ de l'obligation zéro-coupon de maturité T_i est solution de l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt - \Gamma(t, T_i) \cdot dW_t^{\mathbf{Q}}, \quad (5.9)$$

avec $W_t^{\mathbf{Q}}$ un vecteur de M mouvements browniens sous la mesure \mathbf{Q} de matrice de corrélation $R = (\rho_{ij})_{i,j=1\dots M}$. On peut écrire ce vecteur sous la forme $W_t^{\mathbf{Q}} = \Lambda^T \tilde{W}_t^{\mathbf{Q}}$ avec \tilde{W} mouvement brownien M -dimensionnel et Λ racine de la matrice R symétrique définie positive : $R = \Lambda \Lambda^T$. Il vient :

$$\frac{dP(t, T_i)}{P(t, T_i)} = r_t dt - \sigma^*(t, T_i) \cdot d\tilde{W}_t^{\mathbf{Q}}, \quad (5.10)$$

avec $\sigma^*(t, T_i) = \Lambda \Gamma(t, T_i)$.

Or, par changement de numéraire¹,

$$\begin{aligned} d\left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)}\right) &= \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} (\sigma^*(t, T_i) - \sigma^*(t, T_{i-1})) \cdot (d\tilde{W}_t^{\mathbf{Q}} - \sigma^*(t, T_i) dt) \\ &= \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} (\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_{i-1})) \cdot dW_t^{\mathbf{Q}^{T_i}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

1. Voir l'annexe B.

Puisque par définition des taux Libor forward

$$L_i(t) + \frac{1}{\theta_i} = \frac{1}{\theta_i} \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)}, \quad (5.12)$$

il vient

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \frac{1 + \theta_i L_i(t)}{\theta_i L_i(t)} [\Gamma_i(t) - \Gamma_{i-1}(t)] \cdot dW^{\mathbf{Q}^{T_i}}(t), \quad (5.13)$$

et l'on conclut par identification. \square

5.2.3 Evaluation des caplets

Le modèle a été construit pour rester compatible avec une formule de type Black. C'est donc tout naturellement que l'on retrouve le résultat suivant.

Proposition 5.2. *Dans un modèle BGM, le prix à la date 0 d'un caplet post-payé, de strike K et de maturité T_{i-1} , sur le taux Libor $L(T_{i-1}, T_i)$ est donné par :*

$$C(0, T_{i-1}, K, \theta_i) = P(0, T_i) [L_i(0)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)] \quad (5.14)$$

avec

$$\begin{cases} d_1 &= \frac{1}{v} \ln \frac{L_i(0)}{K} + \frac{1}{2}v, \\ d_2 &= d_1 - v, \\ v &= \int_0^{T_{i-1}} \gamma_i^2(t) dt. \end{cases} \quad (5.15)$$

La volatilité implicite de la formule de Black est alors

$$\sigma_{\text{imp}}^{\text{Black}}(L_i) = \sqrt{\frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \gamma_i^2(t) dt}. \quad (5.16)$$

5.2.4 Spécification des volatilités Libor

Volatilités constantes

Le choix le plus simple pour spécifier un modèle BGM est de choisir des volatilités γ constantes :

$$\forall i = 1, \dots, M, \quad \gamma_i(t) = \gamma_i \text{ constante positive fixée.} \quad (5.17)$$

Le tableau 5.1 résume l'évolution temporelle pour ce choix de volatilités. La calibration d'un tel modèle est direct : en choisissant $\gamma_i = \sigma_{\text{imp}}^{\text{Black}}(L_i)$, on obtient un modèle cohérent avec les prix observés sur le marché.

	$[0, T_0]$	$]T_0, T_1]$	$]T_1, T_2]$	\dots	$]T_{M-2}, T_{M-1}]$
$L_1(t)$	γ_1	dead	dead	\dots	dead
$L_2(t)$	γ_2	γ_2	dead	\dots	dead
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L_M(t)$	γ_M	γ_M	γ_M	\dots	γ_M

TABLE 5.1 – Volatilités des Libor forward constantes pour un modèle BGM.

Volatilités constantes par morceaux

Pour obtenir plus de souplesse, on peut choisir de rendre les volatilités constantes par morceaux :

$$\forall i = 1, \dots, M, \quad \gamma_i(t) = \gamma_{i,\beta(t)} \text{ constante positive fixée,} \quad (5.18)$$

où l'indice courant β est défini par

$$\beta(t) = i \text{ si } t \in]T_{i-2}, T_{i-1}]. \quad (5.19)$$

Le tableau 5.2 résume l'évolution temporelle pour ce choix de volatilités.

	$[0, T_0]$	$]T_0, T_1]$	$]T_1, T_2]$	\dots	$]T_{M-2}, T_{M-1}]$
$L_1(t)$	$\gamma_{1,1}$	dead	dead	\dots	dead
$L_2(t)$	$\gamma_{2,1}$	$\gamma_{2,2}$	dead	\dots	dead
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L_M(t)$	$\gamma_{M,1}$	$\gamma_{M,2}$	$\gamma_{M,3}$	\dots	$\gamma_{M,M}$

TABLE 5.2 – Volatilités des Libor forward constantes par morceaux pour un modèle BGM.

La calibration sur les seuls prix de caplets n'est plus immédiate. On peut considérer que cette spécification introduit trop de degré de liberté, et simplifier la spécification en considérant que la volatilité ne dépend pas à la fois de t et T_i , mais uniquement du temps restant à maturité $T_i - t$. Il vient :

$$\forall i = 1, \dots, M, \quad \gamma_i(t) = \gamma_{i,\beta(t)} = \eta_{i-(\beta(t)-1)} \text{ constante positive fixée.} \quad (5.20)$$

Le tableau 5.3 résume l'évolution temporelle pour ce choix de volatilités.

	$[0, T_0]$	$]T_0, T_1]$	$]T_1, T_2]$	\dots	$]T_{M-2}, T_{M-1}]$
$L_1(t)$	η_1	dead	dead	\dots	dead
$L_2(t)$	η_2	η_1	dead	\dots	dead
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$L_M(t)$	η_M	η_{M-1}	η_{M-2}	\dots	η_1

TABLE 5.3 – Volatilités des Libor forward constantes par morceaux et ne dépendant que de temps restant à maturité.

Formes paramétriques de volatilités

De nombreuses autres spécifications de volatilités peuvent être envisagées au-delà de ces cas simples de volatilités constantes par morceaux. Différents types de formes paramétriques permettant de reproduire des observations empiriques ont été suggérées, par exemple

$$\gamma_i(t) = [a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c, \quad (5.21)$$

ou

$$\gamma_i(t) = \eta_i [[a(T_{i-1} - t) + d] e^{-b(T_{i-1}-t)} + c]. \quad (5.22)$$

On se reportera à l'ouvrage de Brigo & Mercurio (2005) pour plus de détails sur ces formes.

5.2.5 Dynamique des taux Libor forward sous une même mesure

Le modèle BGM spécifie la dynamique de chaque taux Libor sous sa mesure forward associées. Cependant, il est indispensable d'un point de vue pratique – calibration, simulation, évaluation de produits dépendant de plusieurs maturités, \dots – de pouvoir exprimer les taux Libor forward sous une même mesure. Le théorème suivant montre ce que devient la dynamique d'un taux Libor forward de maturité $T_i, i \in \{1, \dots, M\}$ sous la mesure forward associée au prix de zéro-coupon $P(., T_k), k \in \{1, \dots, M\}$.

Proposition 5.3. *Soit $i \in \{1, \dots, M\}$. Sous la mesure forward $\mathbf{Q}^{T_k}, k = 1, \dots, M$ associée au prix de zéro-coupon $P(., T_k)$, la dynamique du taux Libor*

forward L_i s'écrit :

$$\begin{aligned}
\text{si } k < i, \quad \frac{dL_i(t)}{L_i(t)} &= \gamma_i(t)dW^{i, \mathbf{Q}^{T_k}} - \sum_{j=k}^i \rho_{ij} \gamma_i(t) \gamma_j(t) \frac{\theta_j L_j(t)}{1 + \theta_j L_j(t)} dt, \\
\text{si } k = i, \quad \frac{dL_i(t)}{L_i(t)} &= \gamma_i(t)dW^{i, \mathbf{Q}^{T_i}}, \\
\text{si } k > i, \quad \frac{dL_i(t)}{L_i(t)} &= \gamma_i(t)dW^{i, \mathbf{Q}^{T_k}} + \sum_{j=i+1}^k \rho_{ij} \gamma_i(t) \gamma_j(t) \frac{\theta_j L_j(t)}{1 + \theta_j L_j(t)} dt.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, M\}$. La relation de changement de numéraire de la probabilité risque-neutre \mathbf{Q} à la probabilité forward \mathbf{Q}^{T_i} s'écrit² :

$$d\tilde{W}^{\mathbf{Q}^{T_i}} = d\tilde{W}^{\mathbf{Q}} - \sigma^*(t, T_i)dt, \tag{5.24}$$

i.e

$$dW^{\mathbf{Q}^{T_i}} = dW^{\mathbf{Q}} - R\Gamma(t, T_i)dt. \tag{5.25}$$

Par soustraction des égalités (5.25) pour les indices $i = j + 1$ et $i = j$, il vient :

$$dW^{\mathbf{Q}^{T_{j+1}}} - dW^{\mathbf{Q}^{T_j}} = -R[\Gamma(t, T_{j+1}) - \Gamma(t, T_j)]dt. \tag{5.26}$$

En utilisant la relation (5.7) liant les volatilités des forward et celles des obligations zéro-coupon et en sommant de l'indice i à l'indice $k > i$, on obtient :

$$dW^{\mathbf{Q}^{T_k}} - dW^{\mathbf{Q}^{T_i}} = - \sum_{j=i+1}^k \frac{\theta_j L_j(t)}{1 + \theta_j L_j(t)} R\bar{\gamma}_j(t)dt. \tag{5.27}$$

Le résultat suit pour $k > i$ suit. Le cas $k < i$ s'obtient de la même manière. Le cas $k = i$ est la définition du modèle. \square

5.2.6 La mesure spot Libor

Diffuser des taux Libor de différentes maturités sous une même mesure forward peut introduire des distorsions lors du traitement numérique. En effet, les équations (5.23) montrent que plus la maturité T_k de la mesure utilisée pour diffuser un taux Libor forward L_i est éloignée de T_i , plus le terme de tendance est important, et par conséquent plus l'erreur numérique due à une approximation pour calculer cette tendance risque d'être importante. L'introduction de la mesure dite "spot Libor" permet de proposer une solution ce problème.

2. Voir l'annexe B.

Définition 5.1. Le numéraire spot Libor est défini par :

$$B(t) = \frac{P(t, T_{\beta(t)-1})}{\prod_{j=0}^{\beta(t)-1} P(T_{j-1}, T_j)}. \quad (5.28)$$

Remarque 5.5. $B(t)$ correspond à la valeur d'un portefeuille de valeur initiale $B(0) = 1$ construit par investissement roulant sur les obligations zéro-coupon de maturités successives. A la date 0, tout est investi dans l'obligation zéro-coupon de maturité T_0 , autrement dit une quantité $X_0 = \frac{1}{P(0, T_0)}$ d'obligations est mise en portefeuille. A la date T_0 , tout est réinvesti dans l'obligation zéro-coupon de maturité T_1 , autrement dit une quantité $X_1 = \frac{1}{P(0, T_0)P(T_0, T_1)}$ d'obligations est mise en portefeuille. En procédant de proche en proche et en notant β l'indice courant défini à l'équation (5.19), on obtient la relation (5.28).

Remarque 5.6. $B(t)$ peut-être vu comme une version discrète du numéraire sans-risque $e^{-\int_0^t r_u du}$.

Proposition 5.4. Sous la mesure spot Libor \mathbf{Q}^B associée au numéraire $B(t)$, la dynamique du taux forward $L_i(t)$ de maturité T_i s'écrit :

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \gamma_i(t) dW^{\mathbf{Q}^B}(t) + \sum_{j=\beta(t)}^i \rho_{ij} \gamma_i(t) \gamma_j(t) \frac{\theta_j L_j(t)}{1 + \theta_j L_j(t)} dt. \quad (5.29)$$

Remarque 5.7. La forme du drift montre que l'on n'a plus un nombre de terme de tendance croissant avec les écarts de maturité.

5.3 Le modèle de marché Swap

Jamshidian (1997) propose un modèle de marché pour les taux swap définis à l'équation (1.19). En effet, les praticiens des marchés financiers ont l'habitude d'utiliser une formule de Black pour les swaptions, formellement semblable à la formule de Black pour les caplets présentée à la section 5.1.

On rappelle qu'à la section 1.4.2, le taux swap est défini à l'équation (1.19) par :

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}, \quad (5.30)$$

et le payoff à la date T_α d'une swaption payeuse est donné par l'équation (1.27) sous la forme :

$$N \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \right) (S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - K)^+. \quad (5.31)$$

Il apparaît donc que si l'on veut évaluer une swaption avec une formule de Black, il suffit que le taux swap soit log-normal sous la probabilité considérée. Le modèle de marché swap satisfait à cette condition en écrivant la dynamique du taux swap $S_{\alpha,\beta}$ sous la forme :

$$\frac{dS_{\alpha,\beta}(t)}{S_{\alpha,\beta}(t)} = \gamma_{\alpha,\beta}(t)dW^{\mathbf{Q}^{\alpha,\beta}}(t), \quad (5.32)$$

avec $\gamma_{\alpha,\beta}$ fonction *déterministe* du temps et $W^{\mathbf{Q}^{\alpha,\beta}}$ un mouvement brownien sous la mesure $\mathbf{Q}^{\alpha,\beta}$ liée au numéraire $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)$ (voir la remarque 5.9 ci-dessous).

Remarque 5.8. L'équation (5.32) est le pendant de l'équation (5.5) pour le modèle de marché Libor. La mesure $\mathbf{Q}^{\alpha,\beta}$ est appelée mesure swap.

Remarque 5.9. La forme de l'équation (5.30) montre clairement que sous le numéraire

$$N_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i), \quad (5.33)$$

le taux swap est martingale, puisqu'il s'écrit comme une différence de prix d'obligations zéro-coupon actualisés par $N_{\alpha,\beta}$.

Ainsi, on dispose de modèles de taux Libor et de taux swap compatibles avec l'emploi de formules de Black par les praticiens de marchés. Mais ces modèles sont a priori incompatibles. Si l'on utilise un modèle de marché Libor définissant les dynamiques de taux forward L_i log-normales comme à l'équation (5.6), il n'y a aucune raison pour que le taux swap $S_{\alpha,\beta}$ défini à l'équation (5.30) soit également log-normal, comme cela est pourtant supposé par le modèle de marché swap à l'équation (5.32).

Dans la pratique, cette incompatibilité théorique est souvent négligée, puisque les résultats numériques des modèles sont suffisamment cohérents pour les besoins des praticiens. Voir Brigo & Mercurio (2005, Section 6.8) pour plus de détails.

Annexe A

Formule de Feynman-Kac

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Soit $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ un processus stochastique solution d'une équation différentielle stochastique de la forme

$$\begin{cases} dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \\ X_0 &= x, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

avec x réel, W un mouvement brownien d -dimensionnel \mathcal{F}_t -adapté, et $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^d$ vérifient les conditions usuelles permettant de s'assurer de l'existence et de l'unicité de X ¹.

Théorème A.1. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fois continûment dérivable et $q : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continûment dérivable et bornée inférieurement. Soit*

$$v(t, x) = E \left[e^{-\int_0^t q(X_s)ds} f(X_t) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Alors v est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) &= b(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{1}{2} \sigma^2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) - q(x)v(x), \\ v(0, x) &= f(x), \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Démonstration. Voir Oksendal (2003, Théorème 8.2.1 p.143). □

1. Voir par exemple Lamberton & Lapeyre (1998, Théorème 5.3 p.58) ou Oksendal (2003, Théorème 5.2.1 p.68).

Annexe B

Changement de numéraire

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. On définit sur cet espace un modèle financier à d actifs, de prix $(S^i(t))_{i=1, \dots, d}$.

Rappelons tout d'abord la définition suivante.

Définition B.1. On appelle numéraire tout processus de prix presque sûrement strictement positif.

La technique dite changement de numéraire repose sur un lien fort entre "actualisation" des prix et existence d'une mesure martingale. Geman, El Karoui & Rochet (1995) ont formalisé ce lien sous la forme du théorème suivant.

Théorème B.1. *Supposons qu'il existe un actif $(M_t)_{t \geq 0}$ ne payant pas de dividendes et une mesure martingale équivalente \mathbf{Q}^M telle que le prix de chaque actif actualisé par le processus M soit une \mathbf{Q}^M -martingale, i.e.*

$$\forall i = 1, \dots, d, \quad \frac{S_t^i}{M_t} = E_{\mathbf{Q}^M} \left[\frac{S_T^i}{M_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{B.1})$$

Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un numéraire ne payant pas de dividendes.

Alors il existe une mesure de probabilité \mathbf{Q}^N telle que le prix de chaque actif actualisé par le processus N soit une \mathbf{Q}^N -martingale, i.e.

$$\forall i = 1, \dots, d, \quad \frac{S_t^i}{N_t} = E_{\mathbf{Q}^N} \left[\frac{S_T^i}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (\text{B.2})$$

\mathbf{Q}^N est définie par sa dérivée de Radon-Nykodym

$$\frac{d\mathbf{Q}^N}{d\mathbf{Q}^M} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{N_T}{N_0} \frac{M_0}{M_T}. \quad (\text{B.3})$$

Démonstration. Geman et al. (1995, Theorème 1). \square

Les conséquences de ce théorème sont très importantes. Ce résultat montre que l'on peut construire autant de mesures martingales que de numéraires disponibles dans le modèle. Or, la théorie de l'évaluation par arbitrage montre que le "juste prix" d'un actif financier ne dépend pas de la mesure martingale utilisée pour l'évaluation. On peut donc, au moment d'évaluer un produit dérivé de payoff actualisé \tilde{h} sous la forme générale $E_{\mathbf{R}}[\tilde{h}(S)]$, choisir l'actualisation et la mesure \mathbf{R} associée permettant l'évaluation la plus aisée de l'espérance. Cette technique est par exemple utilisée aux sections 2.3.1 ou 4.6.

Dans le cas général où l'on définit un modèle financier en spécifiant des dynamiques de prix sous la mesure risque-neutre associée à l'actif sans-risque, le changement de numéraire prend la forme du corollaire suivant.

Corollaire B.1. *Soit un modèle financier construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Supposons qu'il existe \mathbf{Q} la mesure risque-neutre associée au numéraire localement sans-risque $e^{\int_0^t r_u du}$. Soit X un actif échangé, de dynamique sous la mesure \mathbf{Q} :*

$$dX_t = r_t X_t dt + \sigma^X(t, X_t) dW_t^{\mathbf{Q}}. \quad (\text{B.4})$$

Soit N un autre actif échangé, de dynamique :

$$dN_t = r_t N_t dt + \sigma^N(t, N_t) dW_t^{\mathbf{Q}}. \quad (\text{B.5})$$

Alors le prix actualisé $\frac{X_t}{N_t}$ est une \mathbf{Q}^N -martingale de dynamique :

$$d\left(\frac{X_t}{N_t}\right) = \frac{X_t}{N_t} (\sigma^X(t, X_t) - \sigma^N(t, N_t)) dW_t^{\mathbf{Q}^N} \quad (\text{B.6})$$

où \mathbf{Q}^N est définie comme à l'équation (B.3) et où

$$dW_t^{\mathbf{Q}^N} = dW_t^{\mathbf{Q}} - \sigma^N(t, N_t) dt \quad (\text{B.7})$$

est un mouvement brownien sous \mathbf{Q}^N .

Démonstration. Application du lemme d'Itô au processus $\left(\frac{X}{N}\right)$. \square

Annexe C

Sujet de Travaux Pratiques : Modèle de Hull & White

On cherche à évaluer des produits dérivés dans un modèle de Hull & White à un facteur, présenté à la section 2.3. Dans ce modèle, le taux court est donné aux équations (2.48)-(2.49) par :

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u, \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\alpha(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2. \quad (\text{C.2})$$

On remarque immédiatement que l'on peut introduire une variable centrée \bar{r} définie par :

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(s)e^{-a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u, \quad \bar{r}(0) = 0, \quad (\text{C.3})$$

de sorte que $\forall t, r(t) = \bar{r}(t) + \alpha(t)$.

Dans la première partie, nous allons construire un arbre permettant de simuler \bar{r} . Ensuite, nous choisirons dans la deuxième partie α de sorte que notre modèle soit calibré sur les prix d'obligations zéro-coupon du marché. On utilisera ensuite cet arbre pour évaluer un caplet et une swaption américaine.

C.1 Construction de l'arbre trinomial

Nous allons simuler le processus \bar{r} à l'aide d'un arbre trinomial. Cette construction a été proposée par Hull & White (1993) et Brigo & Mercurio (2005, Appendix F) en propose une description générale.

On discrétise l'intervalle $[0, T]$ avec les temps $T_i = i\Delta T$, où $\Delta T = \frac{T}{N}$. On note $\bar{r}_{i,j}$ les nœuds de l'arbre, avec $i = 0, \dots, N$ indice de discrétisation temporelle et $j = \underline{j}_i, \dots, \bar{j}_i$ indice de discrétisation spatiale. On fixe l'espacement $\Delta\bar{r}$ entre les points de l'arbre à une date t_i donnée :

$$\bar{r}_{i,j} = j\Delta\bar{r} \text{ avec } \Delta\bar{r} = \sigma\sqrt{\frac{3}{2a}(1 - e^{-2a\Delta T})}. \quad (\text{C.4})$$

A la date i , le processus peut passer de l'état $\bar{r}_{i,j}$ aux états $\bar{r}_{i+1,k+1}, \bar{r}_{i+1,k}$ et $\bar{r}_{i+1,k-1}$ avec les probabilités de transition p_u, p_m et p_d respectivement. On choisit pour nœud central de branchement $(i+1, k)$ le nœud le plus proche de la moyenne attendue, conditionnellement à l'état (i, j) . Puisque

$$\mathbb{E}[\bar{r}(t_{i+1})|\bar{r}(t_i) = \bar{r}_{i,j}] = \bar{r}_{i,j}e^{-a\Delta T} = j\Delta r e^{-a\Delta T}, \quad (\text{C.5})$$

on choisit

$$k = \text{round}(je^{-a\Delta T}). \quad (\text{C.6})$$

Les probabilités de transition sont ensuite calculées de sorte que les moments conditionnels du processus discrétisé soient ceux attendus théoriquement. En notant

$$\mathbb{E}[\bar{r}(t_{i+1})|\bar{r}(t_i) = \bar{r}_{i,j}] = \bar{r}_{i,j}e^{-a\Delta T} = M_j, \quad (\text{C.7})$$

$$\text{Var}[\bar{r}(t_{i+1})|\bar{r}(t_i) = \bar{r}_{i,j}] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta T}) = V, \quad (\text{C.8})$$

on obtient les probabilités de transition pour l'état (i, j) :

$$\begin{cases} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{\eta_j^2}{6V} + \frac{\eta_j}{2\sqrt{3V}}, \\ p_m &= \frac{2}{3} - \frac{\eta_j^2}{3V}, \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{\eta_j^2}{6V} - \frac{\eta_j}{2\sqrt{3V}}, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

où $\eta_j = M_j - \bar{r}_{i,j} = \Delta r [je^{-a\Delta T} - \text{round}(je^{-a\Delta T})]$.

Remarque C.1. Dans le cas présenté ici (dates T_i équidistantes), les probabilités de transition ne dépendent que du niveau j du nœud, pas de la date i . Si la discrétisation temporelle n'est pas régulière, alors les quantités dépendent de i : $\Delta T = \Delta T_i, \Delta\bar{r} = \Delta\bar{r}_i, M_j = M_{i,j}, V = V_i, \eta_j = \eta_{i,j}$.

C.2 Calibration

Puisque l'on connaît explicitement α sous la forme de l'équation (C.2), on peut directement obtenir un arbre pour le processus r avec

$$\forall i, j, r_{i,j} = \bar{r}_{i,j} + \alpha(T_i) = j\Delta\bar{r} + \alpha(T_i). \quad (\text{C.10})$$

Cependant, l'arbre ainsi simulé ne redonnera par exactement les prix des obligations zéro-coupon $P(0, T_i)$. En effet, dans un arbre le taux simulé est considéré constant sur la période $\Delta T = T_i - T_{i-1}$, donc tout se passe comme si l'arbre simulait en fait un taux zéro-coupon R . En d'autres termes, le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T_1 vaut $P(0, T_1) = e^{-R(0, T_1)\Delta T}$, mais ce prix calculé directement sur l'arbre s'écrira $e^{-r(0)\Delta T}$.

On propose donc ici de calibrer récursivement les $\alpha_i = \alpha(T_i)$ afin de retrouver les prix des obligations zéro-coupon directement sur l'arbre. A la date 0, le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité T_1 s'écrit

$$P(0, T_1) = e^{-(\bar{r}_0 + \alpha_0)\Delta T}, \quad (\text{C.11})$$

d'où :

$$\alpha_0 = -\frac{1}{\Delta T} \ln P(0, T_1). \quad (\text{C.12})$$

Notons maintenant $Q_{i,j}$ la valeur à la date 0 d'un actif conditionnel qui paie 1 si lorsque le noeud (i, j) est atteint. On a $Q_{0,0} = 1$ et immédiatement par récurrence :

$$Q_{i+1,j} = \sum_h Q_{i,h} q(h, j) e^{-(\alpha_i + h\Delta r)\Delta T}, \quad (\text{C.13})$$

où $q(h, j)$ est la probabilité de transition du noeud (i, h) au noeud $(i+1, j)$. Ensuite, le prix d'une obligation zéro-coupon s'écrit en fonction de Q sous la forme :

$$P(0, T_{i+1}) = \sum_{j=\underline{j}_i}^{\bar{j}_i} Q_{i,j} e^{-(\alpha_i + j\Delta r)\Delta T}, \quad (\text{C.14})$$

donc on obtient la valeur de α_i permettant de retrouver les prix des obligations zéro-coupon directement sur l'arbre :

$$\alpha_i = -\frac{1}{\Delta T} \ln \frac{P(0, T_{i+1})}{\sum_{j=\underline{j}_i}^{\bar{j}_i} Q_{i,j} e^{-j\Delta r\Delta T}}. \quad (\text{C.15})$$

En particulier, à la date T_1 , pour le noeud $j = -1, 0, 1$, on a :

$$Q_{1,j} = p_j e^{-\alpha_0\Delta T}, \quad (\text{C.16})$$

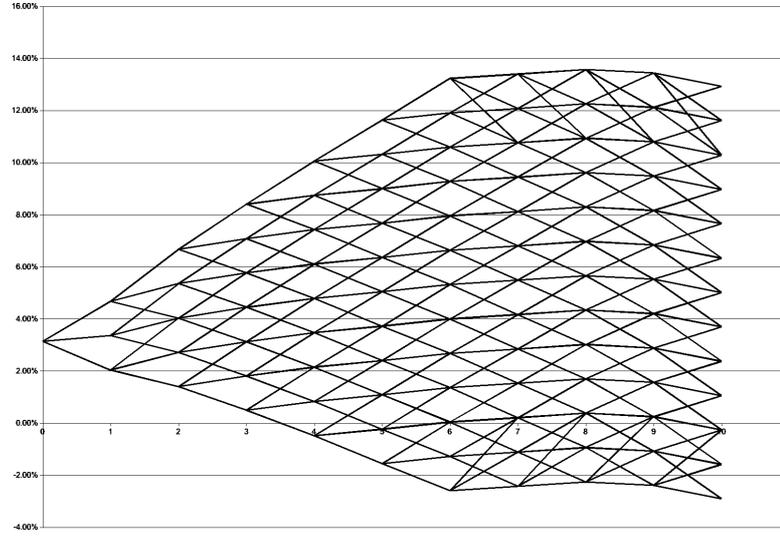


FIGURE C.1 – Exemple d'arbre trinomial pour le modèle de Hull & White.

avec $p_{-1} = p_u, p_0 = p_m$ et $p_1 = p_d$. A la date T_2 , il vient :

$$P(0, T_2) = (p_u Q_{1,1} e^{-\Delta r \Delta T} + p_m Q_{1,0} + p_d Q_{1,-1} e^{\Delta r \Delta T}) e^{-\alpha_1 \Delta T} \quad (\text{C.17})$$

d'où l'on tire

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\Delta T} \ln \frac{P(0, T_2)}{p_u Q_{1,1} e^{-\Delta r \Delta T} + p_m Q_{1,0} + p_d Q_{1,-1} e^{\Delta r \Delta T}}. \quad (\text{C.18})$$

En procédant de proche en proche, on obtient l'arbre voulu. La figure C.1 donne un exemple de géométrie obtenue par cette méthode pour la diffusion du taux r (i.e. R). En utilisant la relation

$$\frac{1}{1 + (T_i - T_{i-1})L(T_{i-1}, T_i)} = P(T_{i-1}, T_i) = e^{-R(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})}, \quad (\text{C.19})$$

on peut facilement déduire de cet arbre un arbre de diffusion des taux Libor $L(T_{i-1}, T_i)$. On peut alors évaluer des produits dérivés de type caplets ou swaptions directement.

C.3 Questions

On choisit les paramètres suivants :

$$a = 0.1, \sigma = 0.008, \Delta T = 1, \quad (\text{C.20})$$

T_i	1	2	3	4	5	6
$P(0, T_i)$	0.969	0.937	0.900	0.861	0.821	0.781
T_i	7	8	9	10	11	
$P(0, T_i)$	0.741	0.702	0.664	0.629	0.599	

TABLE C.1 – Prix des obligations zéro-coupon observés sur le marché.

et on suppose qu'on observe sur le marché les prix d'obligations zéro-coupon donnés à la table C.1.

1. Calculer $\Delta\bar{r}$ et V .
2. Donner explicitement les valeurs de \underline{j}_i et \bar{j}_i pour $i \in \{0, \dots, 11\}$.
3. Calculer les probabilités de transition p_u, p_m et p_d pour les niveaux $j \in \{\min_i \underline{j}_i, \dots, \max_i \bar{j}_i\}$.
4. Construire l'arbre de diffusion de \bar{r} pour $i \in \{0, \dots, 11\}$.
5. En utilisant la méthode de calibration proposée, calculer les valeurs de α_i pour $i \in \{0, \dots, 10\}$. (On pourra dessiner l'arbre des "prix d'état" $Q_{i,j}$).
6. Donner explicitement le nombre de termes de la somme (C.13) en fonction de i et j .
7. Construire l'arbre final de diffusion de r (i.e. R) pour $i \in \{0, \dots, 10\}$.
8. Dédire de cet arbre un arbre de diffusion pour les taux Libor $L(T_i, T_{i+1})$.
9. Construire l'arbre trinomial d'évaluation d'un caplet pré-payé de strike $K = 4\%$ sur le Libor $L(T_{10}, T_{11})$.
10. Construire l'arbre trinomial d'évaluation d'un caplet post-payé (standard) de strike $K = 4\%$ sur le Libor $L(T_{10}, T_{11})$.
11. Vérifier ces prix à l'aide de l'arbre des "prix d'état" $Q_{i,j}$.
12. Construire l'arbre trinomial d'évaluation d'un swap de strike $K = 4\%$ pour la période $(T_\alpha, T_\beta) = (T_0, T_{11})$.
13. Vérifier que le prix obtenu est compatible avec la courbe des prix des obligations zéro-coupon du marché.
14. Construire l'arbre trinomial d'évaluation d'une swaption américaine de strike $K = 4\%$ pour la période $(T_\alpha, T_\beta) = (T_0, T_{11})$.
15. Déterminer la frontière d'exercice de cette option.

Consignes de rendu

On utilisera pour répondre à ces questions un logiciel tableur de type Microsoft Excel ou OpenOffice Spreadsheet. Les résultats numériques pour les taux et prix de produits dérivés seront exprimés en pourcentage, avec une précision de 3 décimales (ex : 2.395%). Sur un arbre donné, les cellules calculées par une formule non-générique (payoff, effets de bord) seront surlignées. Ne pas oublier d'inscrire de manière visible les numéros des questions traitées.

Devront être rendus :

- un fichier tableur (formats acceptés : .ods, .xls) comprenant l'intégralité des arbres construits,
- et un rapport au format PDF rappelant les résultats numériques et les graphiques obtenus et décrivant les formules et algorithmes utilisés mais non fournis directement dans le sujet.

Bibliographie

- Björk, T. (1997), Interest rate theory, in W. Runggaldier, ed., ‘Financial Mathematics’, Vol. 1656 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Berlin Heidelberg, pp. 53–122.
- Boyle, P. P., Tian, W. & Guan, F. (2002), ‘The riccati equation in mathematical finance’, *Journal of Symbolic Computation* **33**(3), 343–355.
- Brace, A., Gatarek, D. & Musiela, M. (1997), ‘The market model of interest rate dynamics’, *Mathematical Finance* **7**(2), 127–155.
- Brennan, M. J. & Schwartz, E. S. (1982), ‘An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency’, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **17**(03), 301–329.
- Brigo, D. & Mercurio, F. (2005), *Interest Rate Models-theory and Practice : With Smile, Inflation and Credit*, 2nd edn, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1985), ‘A theory of the term structure of interest rates’, *Econometrica* **53**(2), 385–407.
- Dybvig, P. H., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1996), ‘Long forward and Zero-Coupon rates can never fall’, *The Journal of Business* **69**(1), 1–25.
- Feller, W. (1951), ‘Two singular diffusion problems’, *The Annals of Mathematics* **54**(1), 173–182.
- Geman, H., El Karoui, N. & Rochet, J. (1995), ‘Changes of numéraire, changes of probability measure and option pricing’, *Journal of Applied Probability* **32**(2), 443–458.
- Heath, D., Jarrow, R. & Morton, A. (1992), ‘Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation’, *Econometrica* **60**(1), 77–105.
- Ho, T. S. Y. & Lee, S. (1986), ‘Term structure movements and pricing interest rate contingent claims’, *The Journal of Finance* **41**(5), 1011–1029.
- Hull, J. & White, A. (1990), ‘Pricing interest-rate-derivative securities’, *Review of Financial Studies* **3**(4), 573–592.

- Hull, J. & White, A. (1993), ‘One-Factor Interest-Rate models and the valuation of Interest-Rate derivative securities’, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis* **28**(2), 235–254.
- Jamshidian, F. (1997), ‘LIBOR and swap market models and measures’, *Finance and Stochastics* **1**(4), 293–330.
- Jamshidian, F. & Zhu, Y. (1996), ‘Scenario simulation : Theory and methodology’, *Finance and Stochastics* **1**(1), 43–67.
- Karatzas, I. & Shreve, S. E. (2000), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd edn, Springer-Verlag New York Inc.
- Lamberton, D. & Lapeyre, B. (1998), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2nd edn, Ellipses Marketing.
- Martellini, L. & Priaulet, P. (2000), *Produits de taux d’intérêt*, Economica.
- Oksendal, B. (2003), *Stochastic Differential Equations : An Introduction With Applications*, 6th revised edition edn, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH.
- Protter, P. E. (2004), *Stochastic integration and differential equations*, 2nd edn, Springer.
- Ritchken, P. & Sankarasubramanian, L. (1995), ‘Volatility structures of forward rates and the dynamics of the term structure’, *Mathematical Finance* **5**(1), 55–72.
- Schaefer, S. M. & Schwartz, E. S. (1984), ‘A Two-Factor model of the term structure : An approximate analytical solution’, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **19**(04), 413–424.
- Shreve, S. E. (2004), *Stochastic Calculus for Finance II : Continuous Time-Models*, first edition, later printing edn, Springer International.
- Vasicek, O. (1977), ‘An equilibrium characterization of the term structure’, *Journal of Financial Economics* **5**(2), 177–188.