

Résolution d'équations différentielles stochastiques

MMFI

Le schéma d'Euler pour les équations différentielles ordinaires

$$x'(t) = f(x(t)), x(0) \text{ donné}, \quad (1)$$

consiste à tronquer le développement de Taylor au premier ordre pour obtenir une approximation de $x_{t_{n+1}}$ à partir de celle de x_{t_n} . On sait en effet que

$$x(t) = x(s) + \int_s^t x'(u) du = x(s) + \int_s^t f(x(u)) du$$

On approche alors l'intégrale par

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(x(u)) du \simeq f(x(t_n))(t_{n+1} - t_n) := R_n.$$

Cela donne donc le schéma d'approximation suivant : on fixe N et on considère les points $t_n = n.T/N$ pour $n \in \{0, 1, \dots, N\}$. On définit la suite x_n^N par

$$x_0^N = x(0), \quad x_{n+1}^N = x_n^N + f(x_n^N).(t_{n+1} - t_n).$$

– Tracer de cette manière la solution de l'équation

$$x'(t) = \frac{3/2}{x}(t), \quad x(0) = 1 \quad (2)$$

sur $[0, 5]$. Comparer au résultat théorique.

À la manière des physiciens, on écrit souvent l'équation (1) sous la forme

$$dx(t) = f(x(t))dt, \quad x(0) \text{ donné}. \quad (3)$$

On peut considérer qu'une équation déterministe de ce type représente le comportement « moyen » de beaucoup de systèmes physiques. Lorsque l'on s'intéresse à une description plus fine, on est souvent obligé d'ajouter un « bruit », c'est-à-dire la résultante de toutes les petites perturbations locales qui viennent parasiter le phénomène étudié. En particulier, il est communément admis que l'évolution du cours d'une action suit l'équation suivante :

$$dS_t = aS_t dt + bS_t dB_t, \quad S_0 \text{ donné}. \quad (4)$$

Ici, B est un mouvement brownien ordinaire. L'écriture dB_t devrait donc représenter la dérivée du mouvement brownien ... dont on sait qu'elle n'existe pas ! Pour donner un sens mathématique à cette équation que les physiciens savent justifier, on la réécrit de la manière suivante :

$$S_t - S_0 = a \int_0^t S_r dr + b \int_0^t S_r dB_r. \quad (5)$$

La dernière intégrale est ce que l'on appelle une *intégrale stochastique* par rapport au mouvement brownien. On admet (ce sera démontré dans le cours ultérieurement) que la solution de cette équation est

$$S_t = S_0 \exp\left((a - \frac{1}{2}b^2)t + bB_t\right). \quad (6)$$

On prend dorénavant $a = 3/2$, $S_0 = 1$ et $b = 3$. On admet alors aussi que $E[S_t]$ est solution de (2).

Le but de ce TP est d'exhiber les difficultés qui apparaissent rapidement lorsque l'on manipule cet objet. Sans savoir ce qu'est cette intégrale stochastique, on voit que du point de vue informatique on est tenté de remplacer dB_t au point $t = t_n$ soit par $B_{t_{n+1}} - B_{t_n}$ ou par $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, avec la convention $B_{t_{-1}} = 0$.

On se place dans tout ce qui suit sur une subdivision fixe de $[0, 1]$ de pas $1/N$. Dans un premier temps, on considère la suite y_n^N définie par

$$y_0^N = y(0), \quad y_{n+1}^N = y_n^N + ay_n^N(t_{n+1} - t_n) + by_n^N(B_{t_{n+1}} - B_{t_n}).$$

Parallèlement, on considère la suite z_n^N définie par

$$z_0^N = y(0), \quad z_{n+1}^N = z_n^N + az_n^N(t_{n+1} - t_n) + bz_n^N(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

- Pour la même trajectoire du mouvement brownien, représenter les valeurs de S donné par l'équation (6) aux points d'abscisse t_n , les valeurs de y^N et celles de z^N . Quelle semble être la plus correcte des deux solutions approchées ?
- Toujours pour la même trajectoire de B , représenter $R_t = \exp(at + bB_t)$. De quelle approximation, R semble-t-il être le plus proche ?
- Mettre en valeur le fait (admis) $E[y^N]$ est une approximation de la solution (2) mais que $E[z^N]$ ne l'est pas. En fait, ceci est intimement lié au fait que $E[y_n^N(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})] = 0$. Pourquoi cela est-il vrai ?
- On veut maintenant étudier empiriquement la vitesse de convergence de ce schéma d'approximation. On considère comme distance entre l'approximation et la solution réelle, l'espérance de la différence des valeurs terminales :

$$d(y^N, S) = E[|y_T^N - S_T|].$$

Quantité que l'on évalue par la loi forte des grands nombres, c'est-à-dire

$$E[|y_T^N - S_T|] = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K |y_K^{N,j} - S_T^j|,$$

où $y^{N,j}$ est la j -ième réalisation de la suite y^N et S_T^j la j -ième réalisation de S_T en prenant garde à que pour j donné, la trajectoire du brownien soit la même dans les deux cas.

Pour K aussi grand que possible, pour $T = 1$, et $N = 10, 100, 1000, 10000$, estimer $d(y^N, S)$ et un intervalle de confiance à 95% et montrer que

$$d(y^N, S) \leq c/\sqrt{N}.$$