TP MMFI 4

Il existe des améliorations notables du schéma d'Euler pour les équations différentielles ordinaires comme la méthode de Runge-Kutta. En ce qui concerne les EDS, le schéma le plus connu est le schéma de Mihlstein. En dimension 1, si l'on considère l'équation

$$dX(t) = \sigma(X(t))dB(t), X(0) = x$$

le schéma d'Euler peut s'étendre, en notant $t_k = kh$, à tous les instants $t \in [t_k, t_{k+1}]$ en posant

$$\begin{aligned}
\bar{X}(t) &= \bar{X}(t_k) + \int_{t_k}^{t} dX_s \\
&= \bar{X}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \sigma(X_s) dB_s \\
&\simeq \bar{X}(t_k) + \int_{t_k}^{t} \sigma(X_{t_k}) dB_s \\
&= \bar{X}(t_k) + \sigma(\bar{X}(t_k))(B(t) - B(t_k)).
\end{aligned}$$

On réinjecte cette approximation dans le terme en $\sigma(X_s)$ qui apparaît dans l'intégrale stochastique, en tenant compte de la formule de Taylor à l'ordre 1, on a

$$\sigma(\bar{X}(s)) = \sigma\big(\bar{X}_{t_k} + \sigma(\bar{X}_{t_k})(B(s) - B(t_k)\big) \simeq \sigma(\bar{X}_{t_k}) + \sigma'(\bar{X}_{t_k})\sigma(\bar{X}_{t_k})(B(s) - B(t_k)),$$

ce qui conduit au schéma

$$\hat{X}(t) = \hat{X}_{t_k} + \sigma(\hat{X}_{t_k})(B(t) - B(t_k)) + \sigma(\hat{X}_{t_k})\sigma'(\hat{X}_{t_k}) \int_{t_k}^{t} (B(s) - B(t_k))\, dB(s).$$

Compte-tenu de la formule d'Itô, on a

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (B(s) - B(t_k))\, dB(s) = \frac{1}{2}\Big((B(t_{k+1}) - B(t_k))^2 - h\Big).$$

Ceci permet de réécrire le schéma de Mihlstein pour une équation

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t),$$

sous la forme

$$\hat{X}((k+1)h) = \hat{X}(kh) + h\Big(b(\hat{X}(kh)) - \frac{1}{2}\sigma'(\hat{X}(kh))\sigma(\hat{X}(kh))\Big) \\ + \sigma(\hat{X}(kh))(B((k+1)h) - B(kh)) \\ + \frac{1}{2}\sigma'(\hat{X}(kh))\sigma(\hat{X}(kh))(B((k+1)h) - B(kh))^2.$$

– Appliquer ce schéma à l'équation

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t), S(0) = x.$$

Visualiser la différence de convergence entre cette méthode et le schéma d'Euler.

– Illustrer numériquement que

$$\sup_k E[|S(kh) - \hat{S}(kh)|^2] \leq ch^2.$$

– L'extension de cette méthode aux équations différentielles à plusieurs dimensions, c'est-à-dire des EDS de la forme

$$dX_t^i = b(X_t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(X_t)dB_j(t),$$

où $B_1, \ldots, B_d$ sont d mouvements browniens indépendants et $X(t) = (X^1(t), \ldots, X^N(t))$ est un processus à valeurs dans $\mathbf{R}^N$, fait intervenir les vecteurs aléatoires

$$(B_j((k+1)h) - B_j(kh), \int_{kh}^{(k+1)h} (B_j(s) - B_j(kh))dB_l(s))$$

pour j et l dans $\{1, \ldots, d\}$. Lorsque $p = 2$, ceci revient à savoir simuler le triplet

$$(B_1(h), B_2(h), \int_0^h B_1(s)dB_2(s) - B_2(s)dB_1(s)).$$

Or on ne connaît pas à ce jour de méthode efficace pour simuler un tel triplet. Pour s'en convaincre, essayer de montrer par simulation que

$$E[\cos(\theta \int_0^1 B_1(s)dB_2(s) - B_2(s)dB_1(s))] = \frac{1}{\cosh(\theta)}.$$

Notamment, on s'intéressera à l'évolution de l'intervalle de confiance en fonction des nombres de tirages.